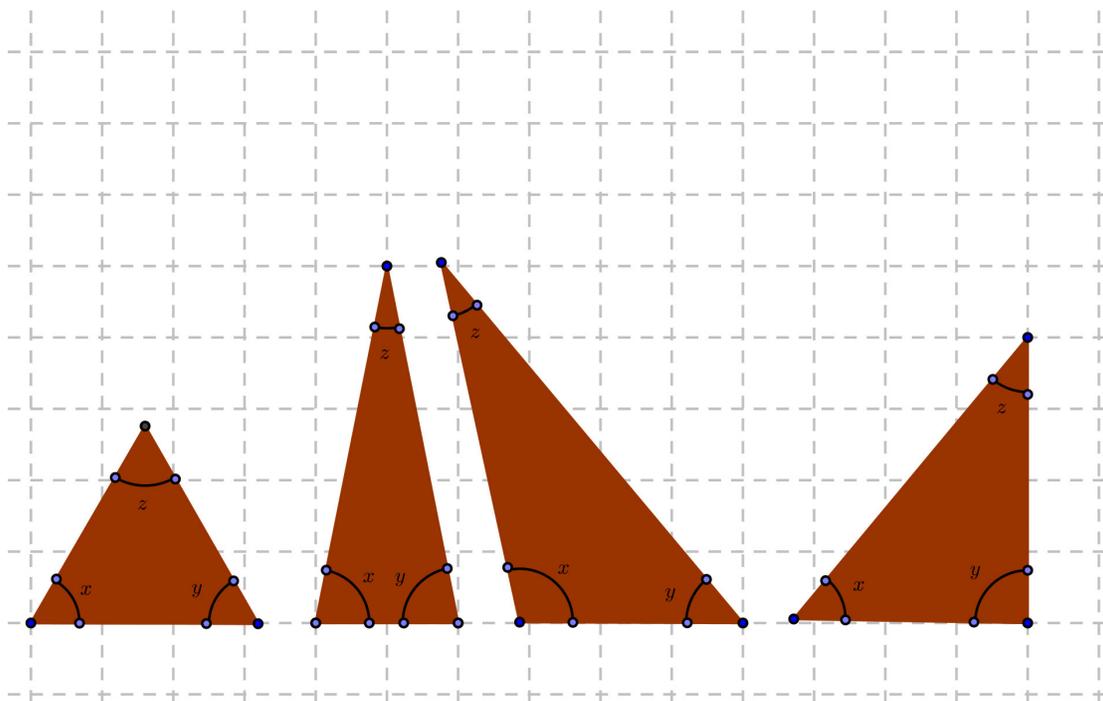


# LIÇÕES DE CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS

VIA EXEMPLOS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS



JOSÉ RENATO RAMOS BARBOSA

# LIÇÕES DE CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS

VIA EXEMPLOS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS



**Reitor**

Ricardo Marcelo Fonseca

**Vice-Reitora**

Graciela Inês Bolzón de Muniz

**Pró-Reitora de Extensão e Cultura**

Mayara Elita Braz Carneiro

**Coordenador da Editora UFPR**

Rafael Faraco Benthien

**Assessora da Editora UFPR**

Eva Lenita Scheliga

**Conselho Editorial que aprovou este livro**

Rodrigo Tadeu Gonçalves (presidente)

Allan Valenza da Silveira

Angela Maria Hoffmann Walesko

Diomar Augusto de Quadros

Everton Passos

Fabrcio Schwanz da Silva

Jane Mendes Ferreira Fernandes

Ida Chapaval Pimentel

João Damasceno Martins Ladeira

Fernando Cerisara Gil

Kádima Nayara Teixeira

Miguel Gualano de Godoy

Rubia Carla Formighieri Giordani

Sérgio Luiz Meister Berleze

# LIÇÕES DE CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS

VIA EXEMPLOS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

© José Renato Ramos Barbosa

# LIÇÕES DE CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS REAIS

VIA EXEMPLOS E EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

## Coordenação da Seção de Produção Editorial

Rachel Cristina Pavim

### Revisão

Daniele Soares Carneiro  
Larissa Carolina de Andrade

### Revisão final

do autor

### Diagramação e capa

José Renato Ramos Barbosa

### Adequação de projeto gráfico

Rachel Cristina Pavim

Série Didática, n. 91

Universidade Federal do Paraná. Sistema de Bibliotecas.  
Biblioteca Central. Seção da Representação da Informação.

- 
- B238 Barbosa, José Renato Ramos, 1965-  
Lições de cálculo de várias variáveis reais via exemplos e  
exercícios resolvidos / José Renato Ramos Barbosa. – Curitiba,  
PR : Ed. UFPR, 2023.  
193 p. : il. – (Série Didática, n. 91).  
  
Inclui referências.  
ISBN 978-65-980575-5-8.  
  
1. Cálculo. 2. Variáveis (Matemática). I. Título. II. Série.  
  
CDD: 515  
CDU: 517

---

Bibliotecária: Andrea Carolina Grohs - CRB 9/1384

ISBN 978-65-980575-5-8

Ref. 1085

**Direitos desta edição reservados à**

**Editora UFPR**

Rua Ubaldino do Amaral, 321  
80060-195 – Curitiba – Paraná – Brasil  
www.editora.ufpr.br  
editora@ufpr.br

**2023**



Associação Brasileira  
das Editoras Universitárias

Dedicado aos meus pais, Conça e Amândio,  
e aos meus filhos, Theo e Ani.



# Sumário

<b>1</b>	<b>Gênese, metas e pré-requisitos</b>	<b>9</b>
1.1	Origem, objetivos, diretrizes e notações das notas de aulas . . . . .	9
1.2	Cálculo de funções reais de uma variável real . . . . .	14
1.3	Fundamentos de cálculo de uma variável . . . . .	37
<b>2</b>	<b>Definições básicas</b>	<b>49</b>
2.1	Bola aberta de centro $P_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ . . . . .	53
2.2	Conjunto aberto - Ponto interior . . . . .	53
2.3	Ponto de fronteira . . . . .	54
2.4	Conjunto compacto . . . . .	54
2.5	Gráficos de funções $f$ reais de $n$ variáveis reais . . . . .	55
2.5.1	Conjunto de nível . . . . .	57
2.6	Traço (ou trajetória) da curva parametrizada $\gamma(t)$ . . . . .	60
2.6.1	Dinâmica de uma partícula percorrendo o traço . . . . .	61
<b>3</b>	<b>Resultados do cálculo diferencial</b>	<b>63</b>
3.1	Curvas parametrizadas . . . . .	63
3.1.1	Limite da função vetorial $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ em $t = t_0$ . . . . .	63
3.1.2	Continuidade de $\gamma(t)$ em $t = t_0$ . . . . .	63
3.1.3	Derivada da função vetorial $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ em $t = t_0$ . . . . .	64
3.1.4	Vetor aceleração de $\gamma(t)$ em $t = t_0$ u.t. . . . .	65
3.2	Continuidade e diferenciabilidade . . . . .	67
3.2.1	Interpretação geométrica da continuidade para funções reais de uma (duas) variável (variáveis) real (reais) . . . . .	67
3.2.2	Propriedades das funções contínuas . . . . .	67
3.2.3	Derivação parcial para funções de duas/três variáveis reais . . . . .	68
3.2.4	(Vetor) gradiente de $f$ no ponto $P_0$ , isto é, $\nabla f(P_0)$ . . . . .	69
3.2.5	Derivadas parciais de ordens superiores para $f(x, y) = \frac{\cos y}{x} - yx^3$ . . . . .	70
3.2.6	Diferenciabilidade . . . . .	71
3.2.7	Regra da cadeia . . . . .	74
3.2.8	Algumas consequências da regra da cadeia . . . . .	74
3.3	Otimização . . . . .	80
3.3.1	Máximos, mínimos e pontos críticos . . . . .	80
3.3.2	Teste da derivada segunda e multiplicadores de Lagrange . . . . .	83
3.4	Formulário do cálculo diferencial . . . . .	91
3.5	Exercícios resolvidos de cálculo diferencial . . . . .	92
3.5.1	Curvas parametrizadas . . . . .	92
3.5.2	Continuidade e diferenciabilidade . . . . .	94

3.5.3	Planos tangentes, aproximações lineares e regra da cadeia . . . . .	96
3.5.4	Otimização . . . . .	102
<b>4</b>	<b>Resultados do cálculo integral</b>	<b>123</b>
4.1	Integrais duplas . . . . .	123
4.1.1	Regiões (domínios) de integração $D_{xy}$ . . . . .	124
4.1.2	Área, volume e massa . . . . .	128
4.1.3	Mudança de variáveis nas integrais duplas . . . . .	131
4.2	Integrais triplas . . . . .	136
4.2.1	Funções contínuas $f(x, y, z)$ sobre (em) regiões $D_{xyz}$ de tipo 1 . . . . .	136
4.2.2	Regiões de tipos 2 e 3 . . . . .	137
4.2.3	Mudança de variáveis nas integrais triplas . . . . .	139
4.3	Formulário do cálculo integral para integrais duplas . . . . .	142
4.4	Formulário do cálculo integral para integrais triplas . . . . .	143
4.5	Exercícios resolvidos de cálculo integral . . . . .	144
<b>5</b>	<b>Resultados do cálculo vetorial</b>	<b>169</b>
5.1	Integrais de linha . . . . .	169
5.1.1	Definição de integral de linha . . . . .	170
5.1.2	Teorema fundamental do cálculo para integrais de linha . . . . .	175
5.2	Teorema de Green . . . . .	176
5.2.1	Cálculo de áreas via integrais de linha . . . . .	178
5.2.2	De Green para Stokes . . . . .	179
5.3	Formulário do cálculo vetorial . . . . .	183
5.4	Exercícios resolvidos de cálculo vetorial . . . . .	184
	<b>Referências</b>	<b>191</b>

# Capítulo 1

## Gênese, metas e pré-requisitos

*No problem can be solved from  
the same level of consciousness  
that created it.*

---

*Albert Einstein*

*Creativity is a leap in  
consciousness that brings new  
meaning or new context to any  
situation or problem.*

---

*Deepak Chopra*

### 1.1 Origem, objetivos, diretrizes e notações das notas de aulas<sup>1</sup>

Entre duas pessoas, existem três pontos de vista (ou versões) sobre um mesmo assunto, tema, fato ou acontecimento: o (ou a) de uma delas, o (ou a) da outra e o (ou a) correto(a). O que segue é uma visão pessoal de como deveria ser um primeiro curso, não só sobre cálculo de várias variáveis, mas sobre qualquer assunto.

Bom, o primeiro “aviso aos navegantes” é que tenho, aqui, a intenção de atingir um público leitor mais voltado a aplicações e não a inclinações mais teóricas. O público-alvo consiste de estudantes, profissionais e interessados das áreas de tecnologia (engenharias ambiental, civil, de bioprocessos e biotecnologia, de produção, elétrica, mecânica, mecatrônica e química), das ciências da terra (geografia, geofísica, geologia e geomática) e afins (engenharias florestal e industrial madeireira, por exemplo). Também são muitíssimo bem-vindos colegas, alunos e ex-alunos de estatística, física, informática, química e, especialmente, matemática industrial. Quanto aos que têm mais envolvimento com a matemática pura, que se sentem mais inclinados para a abstração, preciso ressaltar que existe um grande número de exercícios e aplicações neste, digamos, manual de consulta rápida de *cálculo de várias variáveis*.<sup>2</sup> Claro que o pessoal da licenciatura

---

<sup>1</sup>Doravante, NA será utilizado como um acrônimo para *notas de aulas*.

<sup>2</sup>Essas NA têm menos de 200 páginas!

e do bacharelado em matemática também é bem-vindo. Mas, definitivamente, existem ótimos livros nos quais podem ser obtidas construções axiomáticas elaboradas e demonstrações engenhosas de teoremas fundamentais. Penso que o aprendizado de qualquer assunto, não só da matemática, é via “aproximação”. Estas NA tentam oferecer uma perspectiva de primeira abordagem, mais *informativa* do que *formativa*. Afinal, nos primeiros cursos de cálculo, não é para se aprender a calcular?

Entretanto, ainda que possa parecer contraditório, sugiro que o leitor interessado em seguir estas NA, independentemente do primeiro curso de cálculo (de funções reais) de uma variável (real) que ele mesmo tenha tido, inicie a leitura deste livro já tendo estudado, em algum momento, limites, derivadas e integrais num contexto de rigor matemático (pelo menos) moderado.<sup>3</sup> Assim, por completeza, para revisão/aprofundamento e para contentar, primordialmente, os alunos oriundos da matemática, a última parte deste capítulo reproduz uma lista de exercícios, quase sem resoluções mas com várias sugestões, que trabalhei com alunos de um curso de fundamentos de cálculo de uma variável, por mim ministrado há alguns anos. Tal lista visa a fundamentação do que já tenha sido estudado e, por isso mesmo, requer uma busca rápida de demonstrações de alguns poucos resultados fundamentais. Saliento que o nível de rigor desta lista é diferente daquele adotado nos capítulos seguintes, como esclareço logo a seguir.<sup>4</sup> Para os leitores que não tenham fundamentado o conteúdo do cálculo de uma variável real, mas necessitam apenas “dar uma olhada” mais informal no assunto, preparamos um material mais *light* que antecede a lista de exercícios superformal mencionada.

O conteúdo dessas NA, que abrange um curso de cálculo (de funções reais) de várias variáveis (reais), cujas primeiras versões remontam há mais de quinze anos, tem sido uma “obra em construção”. É provável, portanto, que a ordem e/ou a redação dos exercícios, bem como a sua quantidade, tenham variado em muitas das visitas dos meus alunos (e demais interessados) ao endereço eletrônico [www.ufpr.br/~jrrb](http://www.ufpr.br/~jrrb), que é minha página acadêmica, mantida pela Universidade Federal do Paraná. Observação análoga vale para as definições, os resultados e os formulários destas NA. Entretanto, só recentemente concluí que este material está numa forma adequada para publicação.<sup>5</sup>

Muitos professores de cálculo de várias variáveis reclamam que o assunto (ali tratado) é muito extenso. Portanto, o risco de não cumprir todo o programa de tal disciplina é real. Para tentar solucionar tal dificuldade, o objetivo aqui é mais operacional do que teórico. Isto significa que a teoria foi submetida a uma “lipoaspiração” e que a ênfase está quase toda na resolução de exercícios e na interpretação geométrica e/ou física dos resultados. Assim, o que se perde em precisão e rigor se ganha em concisão e tempo. Aqui, então, a teoria é mínima e a prática é máxima.

Apenas para dar alguns exemplos de estilo:

- Para uma melhor aceitação e um bom entendimento dos resultados, alguns exercícios são resolvidos de mais de uma maneira. Assim, não apenas o cálculo de várias variáveis é utilizado, como também, por exemplo, o cálculo de uma variável ou a geometria analítica figuram como resoluções extras. Tal procedimento dota os alunos de boas justificativas para os resultados apresentados no lugar da apresentação de suas demonstrações.

---

<sup>3</sup>Não existe, na verdade, qualquer contradição, já que o provável leitor já deve ter concluído o seu primeiro curso de cálculo, estando assim disponível para aprofundá-lo.

<sup>4</sup>Embora seja uma excelente oportunidade para formalizar o cálculo de uma variável estudado anteriormente, sugiro que *leitores com outras aptidões (ou outros gostos) desconsiderem tal lista de exercícios*, sem perda de continuidade para o conteúdo principal do livro.

<sup>5</sup>Acrescento ainda que uma eventual *errata* será mantida no endereço eletrônico citado, à medida que forem encontradas eventuais incorreções e incorporadas sugestões ou melhorias.

- Vários resultados são estabelecidos, pelo menos quando exibidos pela primeira vez, via analogias e comparações com aqueles do cálculo de uma variável.<sup>6</sup>
- Alguns resultados são apresentados sem todas as suas hipóteses. Além disso, demonstrações de resultados, quando apresentadas, são informais ou apenas justificativas razoáveis.
- Algumas definições não são apresentadas com a ênfase que mereceriam,<sup>7</sup> embora sejam utilizadas à exaustão, por entender que definições análogas, do cálculo de uma variável, são facilmente generalizadas ou que alguns conceitos são fisicamente e/ou geometricamente intuitivos. Por outro lado, a internet (via Google, por exemplo) está aí para suprir eventuais carências pontuais num tópico ou noutro.
- Em alguns resultados e algumas definições e resoluções de exercícios figuram símbolos da lógica matemática e outros. Por exemplo:
  - $\boxed{\therefore}$ , usado em conclusões no lugar da palavra *portanto*;
  - $\boxed{\Rightarrow}$ , usado quando uma afirmação que o antecede *implica* uma afirmação que o sucede;
  - $\boxed{\Leftrightarrow}$ , usado quando uma afirmação que o antecede *é equivalente a* uma afirmação que o sucede.
- Em alguns resultados e algumas definições e resoluções de exercícios o texto é escrito na forma de uma lista de itens.
- Faço alertas onde é necessário mais formalização.<sup>8</sup>
- A fim de que se perceba a obviedade de algo, costuma-se dizer, até com certa ironia, “Quer que eu desenhe (para você)?”. Logo, como “uma imagem vale mais do que mil palavras”, não economizei no uso de figuras e nas explicações sobre elas.<sup>9</sup>

---

<sup>6</sup>Por exemplo, a *equação do plano tangente ao gráfico de  $f(x, y)$  num ponto* aparece, pela primeira vez, como uma extensão da *equação da reta tangente ao gráfico de  $f(x)$  num ponto*. Outro exemplo: A *regra da cadeia para funções de várias variáveis* é apresentada como uma generalização dela mesma para funções de uma variável. Um último exemplo: a *mudança de variáveis para integrais duplas* é dada como uma generalização natural da *integração por substituição do cálculo de uma variável*.

<sup>7</sup>Por exemplo, *máximos e mínimos* no estudo de *otimização* e *orientação de curvas* no estudo de *integrais de linha* e do *teorema de Green*.

<sup>8</sup>Por exemplo, passamos ao largo dos *limites* e ao introduzirmos informalmente as *derivadas parciais*, o alerta de *limites* é “ativado”. Depois, amarramos as *derivadas direcionais*, portanto as *parciais* em particular, a um *limite* via a *regra da cadeia*.

<sup>9</sup>Todas as figuras são de minha autoria e foram geradas ao longo do tempo e de maneiras distintas, de acordo com a temporalidade de cada uma. Algumas foram plotadas utilizando-se o *octave* e o *gnuplot*, programas desenvolvidos pelo projeto *GNU/Linux* de *software* livre. Outras foram geradas no *xfig*, um editor gráfico *open source*, e depois modificadas nos arquivos de extensão *.pstex\_t* para incluírem letras no formato do texto corrente, escrito em *L<sub>A</sub>T<sub>E</sub>X*, outro programa de editoração e plotagem científica bastante utilizado nos meios científico e acadêmico. Mais recentemente, inclusive, venho gerando/plotando as figuras diretamente nas linhas de comando dos arquivos *.tex*. Em particular, tenho utilizado o pacote *tikz*, por meio do qual, além de produzir novas figuras, mais claras e limpas, tenho trocado as figuras antigas geradas pelos meios ora citados. Gerei uma única figura (para ser a figura 3.5 da página 115) usando o *GeoGebra*, um pacote gráfico desenvolvido pelo *International GeoGebra Institute*, e uma única figura usando o *grapher* (para ser a figura 5.1 da página 190), um pacote gráfico da *Apple* que acompanha o sistema operacional do *Macbook*. Para concluir esse “registro histórico” das figuras aqui produzidas, espero que, no todo, o resultado final tenha sido, além de satisfatório, também agradável aos olhos.

- Em geral, figura sem *label* e *caption* ilustra algum resultado da frase na qual está inserida/intercalada, podendo também aparecer imediatamente após o final dessa frase. Essa figura não é referenciada em outras partes do livro.<sup>10</sup> O mesmo vale para cada equação (respectivamente, tabela) sem *label* que represente apenas alguma etapa intermediária de determinado cálculo. Por outro lado, figura com *label* e *caption* e, como é usual na maior parte dos livros de matemática, equação com *label*, em geral, são referenciadas em várias partes do texto.
- Em geral, logo após a apresentação de algum resultado, exercícios são propostos e imediatamente resolvidos. Onde consta apenas o enunciado de algum exercício, o leitor é remetido à seção de exercícios resolvidos do capítulo correspondente. Contudo, sugiro que o leitor tente resolver cada exercício proposto, antes de recorrer à seção supracitada.<sup>11</sup>

Convém agora ressaltar que, no terceiro capítulo, o estudo dos *multiplicadores de Lagrange* é escrito de forma pormenorizada: uma hipótese fundamental para o cálculo de *maximizadores* (respectivamente, *minimizadores*) *globais* (de determinadas funções sujeitas a determinadas restrições) é o requisito da existência destes *extremos*, isto é, o cálculo destes *maximizadores* (respectivamente, *minimizadores*) via *multiplicadores* representa uma etapa posterior à demonstração de que estes *extremos* existem. Esta demonstração, muitas vezes, é difícil de ser obtida e geralmente está fora do escopo de livros de cálculo para graduação. Assim, quando a discussão a respeito da existência de *extremos* tiver lugar, sugiro que o leitor que estiver realizando estudo de tal assunto pela primeira vez desconsidere esses pormenores e foque apenas os aspectos operacionais do assunto.

Ainda, no formulário do terceiro capítulo, vários itens são escritos num contexto mais geral, estendendo resultados de duas e três variáveis ou coordenadas para o caso de um número qualquer de variáveis ou coordenadas, e sem algumas hipóteses. Ali, é necessário que o aluno tenha conhecimento, por exemplo, da notação de *somatório*.

O último capítulo, que trata do cálculo vetorial, propositalmente não traz um número grande de exercícios, não apresenta o *teorema de Gauss* e não se aprofunda no *teorema de Stokes*.<sup>12</sup> Isto porque adotamos uma abordagem mais intuitiva deste assunto. Portanto, recomendo uma complementação do estudo deste capítulo em outros bons livros de cálculo.

Observamos ainda que os pré-requisitos para a leitura destas NA são: um curso de pré-cálculo (matemática do ensino médio), um curso de cálculo de uma variável, obviamente, e um curso de geometria analítica.<sup>13</sup> Falando em pré-requisitos, gostaria de expressar que vejo a matemática como uma linguagem tipo português, inglês, francês etc. Assim, temos também “matematiqûês”, “fisiqûês”, “quimiqûês”, “informatiqûês” etc. Aprender uma língua é antes, praticamente, ser alfabetizado nela. Já nessa etapa preliminar é preciso estudá-la e praticá-la (para não cometer equívocos com o uso da língua). Por um lado, note que não é fácil querer fazer um estudo avançado da língua sem ter sido alfabetizado nela. Como diz o ditado: “O avançado é fazer o básico bem feito!”. Por outro lado, para se ter fluência na língua é preciso, além do estudo e da prática, conhecer todo um jargão da área. Estudar somente às vésperas de cada prova é perda de tempo para quase todos aqueles que assim procedem.

<sup>10</sup> Figura sem legenda e não numerada será referenciada como ilustração ou gráfico!

<sup>11</sup> Por didatismo, enunciados de exercícios propostos, mas não resolvidos, são reapresentados nas seções de exercícios resolvidos.

<sup>12</sup> Estes teoremas, juntamente com o *teorema de Green*, são o cerne do cálculo vetorial.

<sup>13</sup> É fundamental, por exemplo, ter conhecimento de como se calcula distância de ponto a reta (ou a plano) e que as fórmulas  $\cos'x = -\operatorname{sen}x$  e  $\operatorname{sen}'x = \cos x$  são válidas apenas para  $x$  expresso em *radianos*. Para  $x$  expresso em *graus*, cada uma destas fórmulas recebe o fator  $\frac{\pi}{180}$  do lado direito da igualdade.

Demonstrações dos resultados (assim como exercícios e exemplos similares e mais avançados aos) destas NA também podem ser encontrados, por exemplo, nos livros de Boulos e Abud (2006), Ávila (2006), Marsden e Tromba (2004) e Belding e Mitchell (2008). Eventuais sugestões para o aprimoramento e/ou a clareza e/ou a correção das NA serão muito bem-vindas. Nesse contexto, desde já, agradeço de modo especial ao colega Ademir Alves Ribeiro, pelas discussões e contribuições (relativas à parte de *otimização*) que levaram, inclusive, à publicação do artigo de Ribeiro e Barbosa (2021) sobre o assunto. Agradeço ainda ao colega José Carlos Cifuentes Vasquez, por ter sugerido o título do livro, e aos ex-alunos Diego Wedermann Sanchez, Trenton Roncato Juraszek, Nicolas Eugênio Martins Martinhão e Eusébio Labadie Neto, pelos diálogos construtivos (durante as aulas) que influenciaram a forma como algumas partes das NA foram reescritas.

## 1.2 Cálculo de funções reais de uma variável real

Para a parte de cálculo de uma função real de uma variável real (isto é, *limites*, *derivadas* e *integrais* destas funções), uma referência, digamos, mais *light*, é o livro de Gonick (2014).

Para começar, adotamos a seguinte abordagem intuitiva para tais *limites*:

- Como sabemos, não é possível calcular  $f(x)$  caso  $x$  não esteja no domínio de  $f$ . Por exemplo, considere

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \quad \text{e} \quad x = 1.$$

Assim, por um lado, temos a indeterminação

$$\begin{aligned} \frac{1^2 - 1}{1 - 1} &= \frac{1 - 1}{1 - 1} \\ &= \frac{0}{0}. \end{aligned}$$

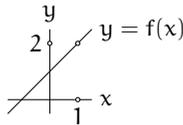
Por outro lado,

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1).$$

Portanto, por abuso de notação, podemos escrever

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{se } x \neq 1; \\ \text{indefinido} & \text{se } x = 1. \end{cases}$$

Parte dessa função, para pontos próximos de  $x = 1$ , pode ser representada pelo seguinte gráfico:



Note que  $f(x)$  pode ser calculado “arbitrariamente próximo” de 2 para  $x$  “arbitrariamente próximo” de 1, isto é, como o módulo da diferença entre dois números mede a distância entre eles, temos que

$$|f(x) - 2|$$

pode ser calculado “tão pequeno quanto se queira” para

$$|x - 1|$$

“suficientemente pequeno”.

Por exemplo, considere que  $x$  representa os seguintes valores aproximados, tanto à esquerda quanto à direita, de 1:

$x$	$f(x)$	$x$	$f(x)$	$ x - 1 $	$ f(x) - 2 $
0,900000	1,900000	1,100000	2,100000	0,100000	0,100000
0,990000	1,990000	1,010000	2,010000	0,010000	0,010000
0,999000	1,999000	1,001000	2,001000	0,001000	0,001000
0,999900	1,999900	1,000100	2,000100	0,000100	0,000100
0,999990	1,999990	1,000010	2,000010	0,000010	0,000010
0,999999	1,999999	1,000001	2,000001	0,000001	0,000001

A partir dos dados da tabela anterior, infere-se que a distância de  $f(x)$  até 2 ( $|f(x) - 2|$ ) vai se tornando desprezível à medida que a distância de  $x$  até 1 ( $|x - 1|$ ) se aproxima de zero. PERGUNTA: Dado um número  $\varepsilon > 0$  “arbitrariamente pequeno”, digamos

$$0 < \varepsilon \leq 0,00\dots01$$

com um número arbitrário de casas decimais, é possível considerar  $|x - 1|$  “suficientemente pequeno”, mas não nulo, tal que seja possível calcular  $f(x)$  a uma distância de 2 menor que  $\varepsilon$ , isto é, tal que  $|f(x) - 2| < \varepsilon$ ?

RESPOSTA: Sim! Basta considerar  $x \neq 1$  a uma distância de 1 menor que um número  $\delta$  que não exceda  $\varepsilon$ , do modo que analisaremos a seguir:

Consideremos, por exemplo,  $\varepsilon = 0,0000000010$ . Queremos obter  $x$  próximo de 1 tal que  $|f(x) - 2| < \varepsilon$ . Para isso, podemos considerar, por exemplo,  $\delta = 0,0000000005$  e  $|x - 1| < \delta$ . Portanto,

$$\begin{aligned} |f(x) - 2| &= |x + 1 - 2| \\ &= |x - 1| \\ &< 0,0000000005 \\ &< 0,0000000010, \end{aligned}$$

isto é,  $|f(x) - 2| < \varepsilon$ .

Agora, para  $\varepsilon$  arbitrário, considere  $0 < |x - 1| < \delta$  tal que  $\delta \leq \varepsilon$ . Portanto,

$$\begin{aligned} |f(x) - 2| &= |x + 1 - 2| \\ &= |x - 1| \\ &< \delta \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Isso significa que, não importa quão pequeno seja  $\varepsilon$ , sempre podemos obter alguma entrada  $x$  (com  $0 < |x - 1| < \delta$  *suficientemente pequeno*) tal que seja possível calcular a saída  $f(x)$  com distância  $|f(x) - 2|$  inferior a qualquer número  $\varepsilon$  inicialmente considerado. Para isso, basta majorar  $|x - 1|$  com um  $\delta$  adequado. Neste caso, dizemos que o *limite de  $f(x)$  é 2 quando  $x$  se aproxima de 1* e denotamos

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.^{14}$$

- Agora vamos abstrair a discussão do item anterior.<sup>15</sup> Para uma função  $f(x)$  arbitrária que esteja definida num intervalo aberto que contenha o número  $a$ , mas não necessariamente

---

<sup>14</sup>Analogamente, em Gonick (2014), verifica-se que a *velocidade*

$$D(t) = \frac{t^2 - 3}{t - 3}$$

no instante  $t = 3$  unidades de tempo é calculada por

$$\lim_{t \rightarrow 3} D(t) = 6,$$

isto é, o limite de  $D(t)$  é 6 quando  $t$  se aproxima de 3.

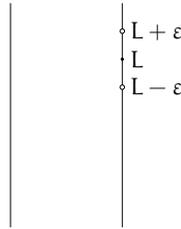
<sup>15</sup>Para um melhor entendimento da definição de limites, as três figuras que ilustram esse item estão intercaladas no texto e representam intervalos abertos ou a ação de uma função nesses intervalos.

no próprio  $a$ , a expressão

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

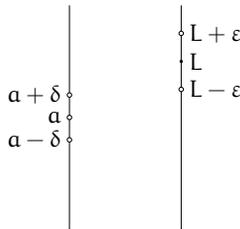
significa que, independentemente de quão pequeno seja o intervalo

$$(L - \varepsilon, L + \varepsilon),$$



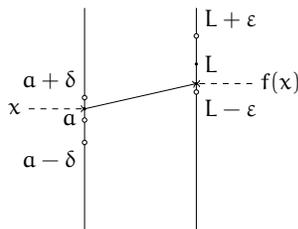
podemos obter outro intervalo

$$(a - \delta, a + \delta)$$



suficientemente pequeno tal que

$$a \neq x \in (a - \delta, a + \delta) \implies f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon),$$



isto é,

$$0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.^{16}$$

Portanto, podemos obter um círculo, tão pequeno quanto se queira, de centro no ponto

$$(a, L),$$

<sup>16</sup>Dizer que o módulo da diferença entre dois números é menor do que um dado  $r$  significa que um desses números pertence ao intervalo aberto de centro no outro e raio  $r$ . No antecedente da implicação anterior, por exemplo, os números são  $x$  e  $a$ , enquanto  $r = \delta$ . No conseqüente, os números são  $f(x)$  e  $L$ , enquanto  $r = \varepsilon$ .

onde o gráfico da função se aproxima desse ponto com, no máximo, uma única interrupção: o próprio  $(a, L)$ !<sup>17</sup>

- Chamamos de *funções elementares* as funções constantes, a função módulo, as funções potências, as funções exponenciais, as funções trigonométricas e as inversas dessas funções. Pode ser demonstrado que, se  $f(x)$  é uma função elementar e  $a$  é um ponto de seu domínio, então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (1.1)$$

### Exemplos

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{5} = \sqrt{5}, \quad \lim_{x \rightarrow -2} x^2 = (-2)^2, \quad \lim_{x \rightarrow 3^{-1}} \frac{1}{x} = \frac{1}{3^{-1}} \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = \cos \pi.$$
<sup>18</sup>

Pode ser demonstrado que o limite da soma e o limite do produto de funções são a soma e o produto dos limites dessas funções, respectivamente, desde que tais limites existam. Além disso, demonstra-se que o limite do quociente de duas funções é o quociente dos limites dessas funções, caso existam tais limites e o limite do denominador não seja nulo.<sup>19</sup>

### Exemplo

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[ 3x^4 + \frac{x}{2} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{e^x \cos(x)}{x} \right] = 3a^4 + \frac{a}{2} + \frac{1}{(a-1)^2} + \frac{e^a \cos a}{a}$$

para cada real  $a$  diferente de 0 e 1.

- Além das citadas, existem muitas outras propriedades de limites. Por exemplo, a conhecida como *teorema do sanduíche*, isto é, se as funções  $f(x)$ ,  $g(x)$  e  $h(x)$  estão definidas num intervalo aberto de centro  $a$ ,

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

para cada  $x$  pertencente a esse intervalo e

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L = \lim_{x \rightarrow a} h(x),$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

### Exercícios resolvidos

1. Considerando

$$f(x) = x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

e  $a = 0$ , calcule

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

<sup>17</sup>Confira Gonick (2014) para uma ilustração.

<sup>18</sup>Os três últimos limites são iguais a 4, 3 e  $-1$ , respectivamente.

<sup>19</sup>Confira Gonick (2014)!

### RESOLUÇÃO

Aqui, obviamente, não é possível simplesmente usar a equação (1.1).<sup>20</sup> Assim, por um lado, note que as inequações

$$-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq 1 \quad (1.2)$$

são válidas para cada  $x \neq 0$  (e em particular para  $x$  suficientemente pequeno).<sup>21</sup> Agora, multiplicando as inequações (1.2) pelo número positivo  $x^2$ , obtemos

$$-x^2 \leq x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) \leq x^2$$

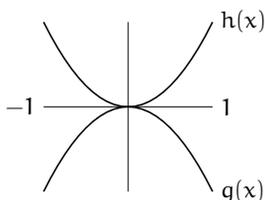
para cada  $x \neq 0$ . Por outro lado, para  $g(x) = -x^2$  e  $h(x) = x^2$ , a equação (1.1) mostra que

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} h(x).$$

Portanto, pelo teorema do sanduíche,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

Esse procedimento pode ser interpretado geometricamente, “plotando” o gráfico de  $f(x)$ , para  $x$  próximo de 0, entre as parábolas da seguinte ilustração:



## 2. Calcule

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}.$$

### RESOLUÇÃO

Embora o teorema do sanduíche possa ser utilizado nesse cálculo,<sup>22</sup> daremos uma “explicação” geométrica para verificar que o limite supracitado é igual a 1. De fato, para  $x$  suficientemente pequeno, os comprimentos de  $\operatorname{sen} x$  e do arco  $x$ , no círculo trigonométrico unitário, são praticamente indistinguíveis.

- *Limites infinitos e no infinito*

Fora das áreas científicas, o infinito é muitas vezes usado de modo impreciso/inadequado

---

<sup>20</sup>Note que  $f(0)$  não está definido, isto é, a expressão

$$0^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{0}\right)$$

não tem qualquer nexo!

<sup>21</sup>Neste caso,  $1/x$  será arbitrariamente grande.

<sup>22</sup>Confira Gonick (2014).

em expressões do tipo *amor infinito*, *infinitamente superior* etc. Por outro lado, embora o *infinito*  $\infty$  esteja bem definido na matemática, tal definição está fora do escopo destas NA.<sup>23</sup> Para os nossos propósitos,  $\infty$  representa uma grandeza que pode assumir valores “tão grandes quanto se queira”. Nesse caso, denotamos

$$\text{grandeza} \rightarrow \infty.$$

### Exemplos

- O que acontece com a função  $f(x) = \frac{1}{x}$  quando  $x$  assume valores (em módulo) tão grandes ou tão pequenos quanto se queira?

Por um lado, a tabela

x	f(x)	x	f(x)
-10	-0.1	10	0.1
-100	-0,01	100	0,01
-1000	-0,001	1000	0,001
-10.000	-0,0001	10.000	0,0001
⋮	⋮	⋮	⋮

é um indicativo de que  $f(x)$  vai se tornando tão pequeno quanto se queira (em módulo) à medida que  $x$  vai crescendo (em módulo). Desse modo, denotamos

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^- \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+.$$

Por outro lado, a tabela

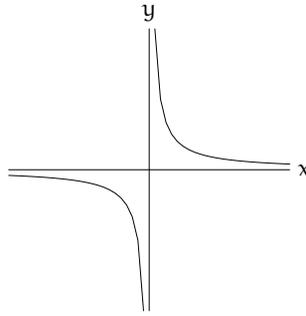
x	f(x)	x	f(x)
-0.1	-10	0.1	10
-0,01	-100	0.01	100
-0,001	-1000	0,001	1000
-0,0001	-10.000	0,0001	10.000
⋮	⋮	⋮	⋮

indica que  $f(x)$  vai se tornando tão grande quanto se queira (em módulo) à medida que  $x$  vai decrescendo (em módulo). Desse modo, denotamos

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Assim, temos o gráfico de uma hipérbole, conforme a seguinte ilustração:

<sup>23</sup> $\infty$  não é, por exemplo, um 8 que troçou e caiu de lado!



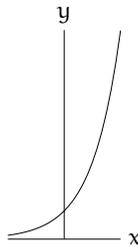
Para valores positivos, é tradicional denotarmos esses limites por:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty.$$

- Para a função exponencial  $f(x) = e^x$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

conforme a seguinte ilustração:



Embora esses exemplos de funções elementares sejam ilustrativos do comportamento de grandezas no infinito, a dificuldade de lidar com elas ocorre noutros casos, digamos, mais sutis. Por exemplo, quando temos de analisar *funções racionais*, que são divisões de polinômios.<sup>24</sup> Outro exemplo dessa dificuldade pode ocorrer quando usamos o teorema do sanduíche supracitado. O enunciado desse teorema também é válido caso **a** seja trocado por  $\infty$ .

### Exemplo

Como

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\text{sen } x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

para  $x$  positivo e

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0,$$

segue que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } x}{x} = 0.$$

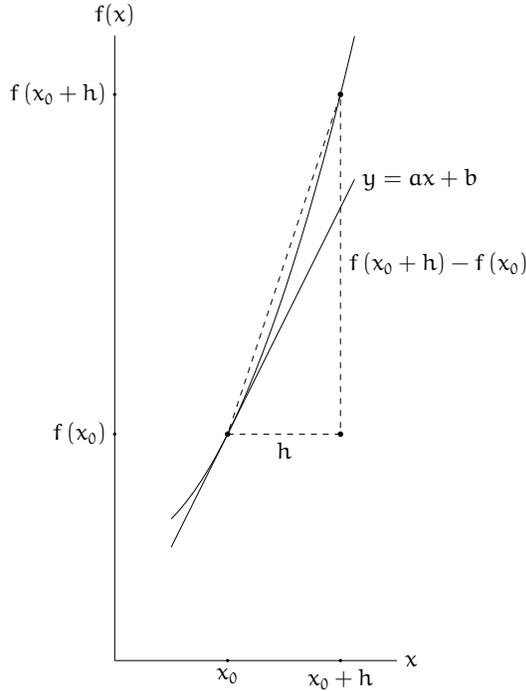
---

<sup>24</sup>Confira Gonick (2014).

Agora, vamos prosseguir para as *derivadas das funções reais de uma variável real*.

- *Derivada: um tipo de limite que mede inclinação de reta tangente*

Suponha ser possível obter a (reta) tangente ao gráfico de uma função  $f(x)$  no ponto  $(x_0, f(x_0))$  de tal gráfico. Seja  $y = ax + b$  a equação linear de tal reta, conforme a ilustração seguinte.



Portanto, como  $(x_0, f(x_0))$  é um ponto da tangente, temos

$$b = f(x_0) - ax_0.$$

Agora, como obter a inclinação  $a$  dessa (reta) tangente?

Primeiramente, denotemos

$$a := f'(x_0).$$

Seja então

$$(x_0 + h, f(x_0 + h))$$

um outro ponto do gráfico de  $f(x)$  com  $|h|$  suficientemente pequeno mas não nulo.<sup>25</sup> Logo, a inclinação da (reta) secante que passa por esse ponto e pelo ponto  $(x_0, f(x_0))$  é dada por

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$
<sup>26</sup>

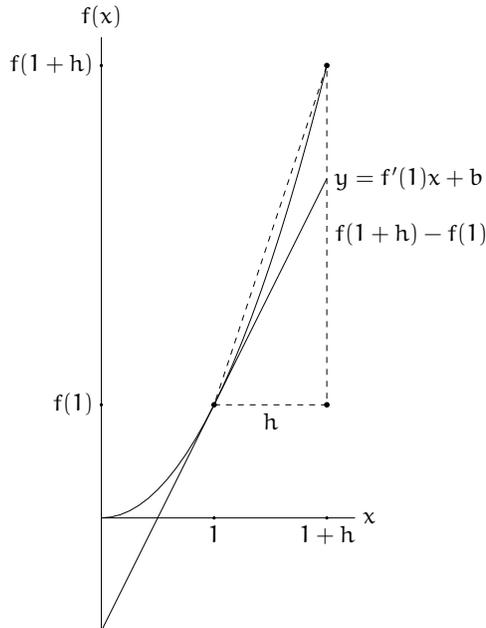
<sup>25</sup>Aqui, embora não ilustrado na figura anterior, procedemos ao nosso estudo nas “proximidades” de  $x_0$ , tanto para pontos à esquerda de  $x_0$ , isto é, para  $h < 0$ , quanto para pontos à direita de  $x_0$ , isto é, para  $h > 0$ .

<sup>26</sup>Este quociente é denominado de *quociente de Newton*.

Note que, se  $|h|$  se aproxima arbitrariamente de 0, esses dois pontos do gráfico de  $f(x)$  ficam arbitrariamente próximos um do outro e a secante considerada fica arbitrariamente próxima da tangente considerada.<sup>27</sup> Define-se, então,

$$f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

caso exista tal limite. Agora, independentemente da existência desse limite estar associada a uma interpretação geométrica para a inclinação  $\alpha$ , diremos ainda que  $f(x)$  é *diferenciável em*  $x = x_0$  ou que  $f'(x_0)$  é a *derivada de*  $f(x)$  *em*  $x = x_0$ . A fim de fixar esses conceitos, considere  $f(x) = x^2$  e  $x_0 = 1$  na discussão anterior e a ilustração seguinte.



A inclinação da tangente ao gráfico dessa parábola em  $(1, f(1))$  é obtida via a derivada de  $f(x) = x^2$  em  $x = 1$  e calculada por

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (2 + h) \\ &= 2. \end{aligned}$$

<sup>27</sup> Assim, o quociente de Newton fica arbitrariamente próximo de  $f'(x_0)$ .

Segue daí que o coeficiente linear dessa tangente é calculado por

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &= f(1) - f'(1) \cdot 1 \\ &= 1 - 2 \cdot 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

e, então, a sua equação é dada por  $y = 2x - 1$ .<sup>28</sup> Para  $f(x)$  arbitrária, temos a *função derivada*

$$f'(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

definida onde tal limite existir.

Por exemplo, para cada  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = x^2 \implies f'(x) = 2x,$$

cujas demonstrações são análogas à de  $f'(1)$  do exemplo anterior, e

$$f(x) = x^3 \implies f'(x) = 3x^2$$

pois

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) \\ &= 3x^2. \end{aligned}$$

Na verdade, para cada inteiro positivo  $n$  fixo, demonstra-se que

$$f(x) = x^n \implies f'(x) = nx^{n-1}$$

para cada  $x \in \mathbb{R}$ .<sup>29</sup>

Agora, a derivada de uma função constante é zero. De fato, seja  $f(x) = c$  com  $c$  constante. Segue daí que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

<sup>28</sup>Nesse exemplo, se  $x = x_0$  é arbitrário, note que  $f'(x_0) = 2x_0$ .

<sup>29</sup>Confira Gonick (2014).

Ainda, como a derivada da soma de funções é a soma das derivadas destas funções e a derivada do produto de uma constante por uma função é o produto de tal constante pela derivada de tal função,<sup>30</sup> é fácil calcular a derivada de um polinômio. Por exemplo, se  $f(x) = 3x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 2$ , então

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(4x^3) + (-1)(3x^2) + 4(2x) + 1 + 0 \\ &= 12x^3 - 3x^2 + 8x + 1 \end{aligned}$$

para cada  $x \in \mathbb{R}$ .

(A derivada de  $y = f(x)$  pode ser denotada das formas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{df}{dx} \\ &= \frac{d}{dx}(f(x)). \end{aligned}$$

Por exemplo, se  $c$  é uma constante,  $\frac{d}{dx}(x^2 + c) = 2x$ .)

Além das regras apresentadas, existem outras igualmente importantes. Por exemplo, as regras das derivadas do produto e do quociente de funções e a *regra da cadeia* que calcula a derivada de funções compostas.<sup>31</sup> Ainda, onde as respectivas funções estiverem definidas, demonstra-se que:<sup>32</sup>

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x, & \frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x, & \frac{d}{dx}(e^x) &= e^x, \\ \frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x, & \frac{d}{dx}(\ln x) &= \frac{1}{x}, \\ \frac{d}{dx}(\arcsen x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \frac{d}{dx}(\arctan x) &= \frac{1}{1+x^2} \quad e \\ \frac{d}{dx}(x^r) &= rx^{r-1} \quad \text{com } r \in \mathbb{R} \text{ fixo.} \end{aligned}$$

- *Derivada mede taxa de variação instantânea*

A derivada  $\frac{dy}{dx}$  pode ser interpretada como a taxa de variação instantânea de uma grandeza,  $y$ , em relação a outra,  $x$ . Em outras palavras, quão rapidamente  $y$  varia em função de  $x$ . Para exemplificar, vamos denotar a função  $f(x) = x^2$  por

$$s(t) = t^2,$$

<sup>30</sup>Confira Gonick (2014).

<sup>31</sup>*Idem*.

<sup>32</sup>*Idem*.

que aqui representa a posição de uma partícula no instante de tempo  $t$  u.t. (unidades de tempo).<sup>33</sup> Considere que queremos obter a velocidade de tal partícula no instante  $t$  u.t., isto é, queremos saber quão rapidamente a posição varia em relação ao tempo. Nesse caso, a velocidade é calculada pela derivada

$$s'(t) = \frac{ds}{dt}$$

no instante  $t$  u.t. Assim,  $s'(t) = 2t$  u.v. (unidades de velocidade) é a medida de tal velocidade instantânea. Por exemplo, caso a posição seja medida em metros e o tempo em segundos, passados  $t = 10$  segundos, a partícula fica sujeita a uma velocidade (neste instante) de  $s'(t) = 20$  m/s.<sup>34</sup>

- *Otimização (maximização-minimização)*

Um ponto  $\alpha$  de *máximo* (respectivamente, de *mínimo*) *local* de uma função  $f$  satisfaz a condição  $f(\alpha) \geq f(x)$  (respectivamente,  $f(\alpha) \leq f(x)$ ) para cada  $x$  pertencente a algum intervalo aberto centrado em  $\alpha$ . Um *extremo local* de  $f$  é um máximo local ou um mínimo local de  $f$ .<sup>35</sup>

Na figura 1.1, considere que  $P_i = (x_i, f(x_i))$  pertence ao gráfico de uma função  $f$ ,  $i = 0, \dots, 6$ . As abscissas de tais pontos são extremos locais de  $f$ .

Qualquer função que tenha extremos locais similares a  $x_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4, 5$ , muda de crescente para decrescente ou de decrescente para crescente.

Um ponto *interior* ao domínio de uma função pertence a algum intervalo aberto inteiramente contido no domínio de tal função.

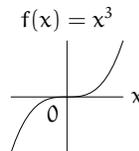
Na figura 1.1, apenas  $x_0$  e  $x_6$  não são interiores ao domínio de  $f(x)$ .

Demonstra-se que:<sup>36</sup>

*Se  $f(x)$  tem extremo local num ponto  $\alpha$  interior ao seu domínio e tem derivada  $f'(\alpha)$  nesse ponto, então tal ponto é crítico, isto é,  $f'(\alpha) = 0$ .*

Na figura 1.1, embora as abscissas de índices pares sejam pontos de máximo locais e as de índices ímpares sejam pontos de mínimo locais, apenas  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_5$  são interiores ao domínio de  $f(x)$  e existe  $f'(x)$  em cada um desses pontos. Note que  $f'(x_i) = 0$  para  $i = 1, 2, 5$ , corroborando o resultado anterior.

Contudo, a recíproca desse resultado não é verdadeira: Para  $f(x) = x^3$ , por exemplo,  $x = 0$  é um ponto interior com  $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$ , mas não é extremo local (conforme pode ser visto na próxima figura). Um ponto como esse é chamado de *ponto de sela*.



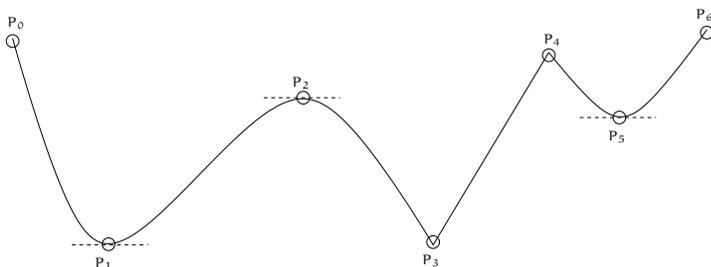
<sup>33</sup>Por exemplo, desconsiderando as dimensões, uma bola de boliche lisa descendo, sem atrito, um plano inclinado com inclinação adequada, varia a sua posição (no tempo) aproximadamente via tal  $s(t)$ .

<sup>34</sup>Confira Gonick (2014) para mais exemplos.

<sup>35</sup>Um ponto do gráfico de uma função cuja abscissa é um ponto de máximo local representa o “cume de uma montanha”, enquanto aquele cuja abscissa é um ponto de mínimo local representa o “fundo de um vale”.

<sup>36</sup>Confira Gonick (2014).

Figura 1.1: O que ocorre em  $x_0$ ,  $x_3$ ,  $x_4$  e  $x_6$ ?



Isso significa que os candidatos a extremos locais interiores ao domínio de uma função são aqueles nos quais a derivada da função é nula. Mas derivada nula num ponto interior não garante que o ponto seja um extremo local!

A próxima proposição é conhecida como

#### TESTE DA DERIVADA DE SEGUNDA ORDEM

Porém, antes de enunciá-la, cabe responder à seguinte pergunta: o que é uma derivada de segunda ordem?

Suponha que é possível derivar a derivada de  $y = f(x)$ , isto é, obter a derivada de

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

ou seja, existe a derivada

$$(f')'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right).$$

Nesse caso, essa derivada é chamada de *derivada de segunda ordem de  $y = f(x)$*  e é denotada por

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Por exemplo, seja  $s(t) = t^2$  u.p. a posição de uma partícula no instante  $t$  u.t. Já vimos que  $\frac{ds}{dt} = 2t$  u.v. é a sua velocidade no mesmo instante. Aqui,

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 2 \text{ u.a. (unidades de aceleração)}$$

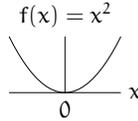
é a aceleração da partícula em tal instante.

Supondo existir a derivada de segunda ordem, demonstra-se que:

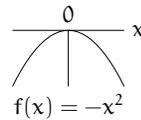
Seja  $\alpha$  um ponto interior de algum intervalo onde  $f(x)$  esteja definida e seja diferenciável. Se  $f'(\alpha) = 0$ , então a tabela seguinte é válida:

$f''(\alpha)$	$\alpha$
$> 0$	<i>mínimo local de <math>f(x)</math>;</i>
$< 0$	<i>máximo local de <math>f(x)</math>.</i>

Por exemplo, 0 é ponto crítico de  $f(x) = x^2$ , que é diferenciável em cada  $x \in \mathbb{R}$ , e interior ao domínio dessa função.<sup>37</sup> Por outro lado,  $f''(0) > 0$ .<sup>38</sup> Portanto, 0 é ponto de mínimo (*global*) de  $f(x)$ , conforme ilustrado no seguinte gráfico:



Um raciocínio análogo mostra que 0 é ponto de máximo de  $f(x) = -x^2$ , conforme ilustrado no seguinte gráfico:



E quanto à *concavidade* do gráfico de uma função  $f(x)$  à medida que  $x$  varia?

Considere a inclinação  $f'(x)$  da tangente ao gráfico no ponto  $(x, f(x))$ . O que acontece à medida que  $x$  cresce?<sup>39</sup> Por um lado, se  $x$  cresce e  $f'(x)$  cresce com  $x$ , note que o gráfico de  $f(x)$  tem *concavidade para cima*. Isso ocorre precisamente onde a taxa de variação da derivada (em relação a  $x$ ), isto é,  $(f')'(x) = f''(x)$ , é positiva. Por outro lado, se  $f'(x)$  decresce à medida que  $x$  cresce, tal gráfico tem *concavidade para baixo*. Isso ocorre onde  $f''(x) < 0$ .

A abscissa de um ponto do gráfico de uma função onde a sua concavidade para cima (respectivamente, baixo) muda para baixo (respectivamente, cima) é dito um *ponto de inflexão*.<sup>40</sup> Nesse ponto, a derivada de segunda ordem é zero.<sup>41</sup>

E quanto ao esboço do gráfico de uma função  $f(x)$  arbitrária?

Para esboçar uma reta, basta obter suas interseções com os eixos coordenados. Caso o gráfico não seja uma reta, interseções com os eixos coordenados, se existirem, são insuficientes para esboçá-lo. Nesse caso, o roteiro é o seguinte:

- I. Caso existam, obtenha as interseções do gráfico com os eixos coordenados, isto é, determine:

$$f(x) \text{ para } x = 0; \quad x \text{ para } f(x) = 0.$$

Marque esses pontos nos eixos coordenados.

- II. Caso existam, obtenha os pontos críticos da função, isto é, determine:

<sup>37</sup>De fato,  $f'(x) = 2x$  acarreta  $f'(0) = 0$  e  $\mathbb{R}$  é o domínio comum de  $f(x)$  e  $f'(x)$ .

<sup>38</sup>De fato,  $f''(x) = 2$  para cada  $x \in \mathbb{R}$ .

<sup>39</sup>Veja, por exemplo, as funções cúbica e quadráticas dos últimos três exemplos.

<sup>40</sup>0 é ponto de inflexão para a função cúbica anterior.

<sup>41</sup>Confira Gonick (2014)!

$$x \text{ para } f'(x) = 0.^{42}$$

Para cada ponto crítico  $\alpha$  obtido, marque o ponto  $(\alpha, f(\alpha))$  pertencente ao gráfico de  $f(x)$ .

III. Para cada ponto crítico obtido, use o TESTE DA DERIVADA DE SEGUNDA ORDEM.<sup>43</sup>

IV. Caso existam, obtenha os pontos de inflexão, isto é, determine:

$$x \text{ para } f''(x) = 0.$$

Para cada ponto de inflexão  $\beta$  obtido, marque o ponto  $(\beta, f(\beta))$  pertencente ao gráfico de  $f(x)$ .

V. Estude a concavidade: onde é para cima ou para baixo.

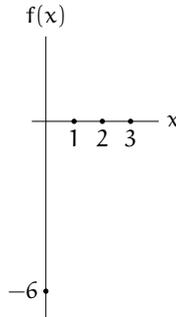
VI. Estude o comportamento do gráfico no infinito via

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x).$$

Agora, reunindo todas as informações anteriores, esboce o gráfico de  $f(x)$ .

Por exemplo, seja  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ .<sup>44</sup>

I. Para a interseção com o eixo das ordenadas, seja  $x = 0$ . Então,  $f(x) = -6$  e  $(0, -6)$  pertence ao gráfico de  $f(x)$ . Para a interseção com o eixo das abscissas, seja  $f(x) = 0$ . Portanto, como as raízes de  $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$  são  $x = 1, 2, 3$ , temos que  $(1, 0)$ ,  $(2, 0)$  e  $(3, 0)$  pertencem ao gráfico de  $f(x)$ . Esses quatro pontos devem ser marcados nos eixos coordenados, conforme a seguinte ilustração:



II. Se  $f'(x) = 0$ , como  $3x^2 - 12x + 11 = 0$ , temos que

$$x = \frac{6 \mp \sqrt{3}}{3} \approx \begin{cases} 1,42 = \alpha_1; \\ 2,58 = \alpha_2. \end{cases}$$

Então, calculando as imagens, temos

$$f(\alpha_1) \approx 0,39 \quad \text{e} \quad f(\alpha_2) \approx -0,39.$$

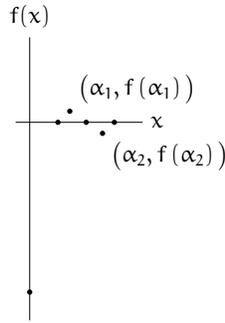
Conforme a ilustração seguinte,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são pontos de máximo e mínimo locais, respectivamente.<sup>45</sup>

<sup>42</sup>Lembre-se que tais pontos são “candidatos” a extremos locais!

<sup>43</sup>Assim saberemos que tipo de extremo temos!

<sup>44</sup>Portanto,  $f'(x) = 3x^2 - 12x + 11$  e  $f''(x) = 6x - 12$ .

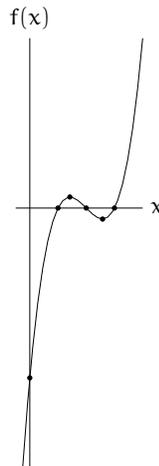
<sup>45</sup>No item III, esse fato é confirmado analiticamente.



- III. Como  $f''(\alpha_1) = 6\alpha_1 - 12 < 0$  e  $f''(\alpha_2) = 6\alpha_2 - 12 > 0$ , temos que, de fato,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são pontos de máximo e mínimo locais, respectivamente.
- IV.  $f''(x) = 0$  é equivalente a  $6x - 12 = 0$ , isto é,  $x = 2$ , que é o ponto de inflexão e cuja imagem por  $f(x)$  é dada por  $f(2) = 0$ .<sup>46</sup>
- V. Concavidade para baixo em  $(-\infty, 2)$  (pois  $f''(x) < 0$  em tal intervalo) e para cima em  $(2, \infty)$  (pois  $f''(x) > 0$  em tal intervalo).
- VI. Como  $f(x)$  é um polinômio de grau ímpar cujo coeficiente do termo que determina o grau é 1, pode ser verificado que

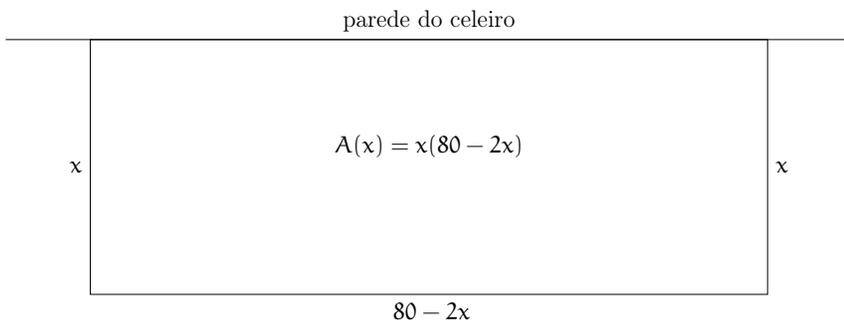
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty.$$

Coletando agora todas as informações anteriores, temos o seguinte gráfico para  $f(x)$ :



Essas ideias podem ser utilizadas para resolver problemas de otimização mais aplicados. Por exemplo, considere que queremos construir um cercado retangular utilizando a parede de um celeiro como um dos lados, conforme a seguinte ilustração:

<sup>46</sup>O ponto  $(2, f(2)) = (2, 0)$  já havia sido marcado nas figuras anteriores.



Suponha que temos 80 metros de tábuas de madeira em pedaços cortados iguais, um a um. Pergunta-se:

Qual a maior área que pode ser delimitada pelo cercado?

O objetivo é obter o máximo da área

$$A(x) = -2x^2 + 80x$$

para  $x > 0$  e  $80 - 2x > 0$ , isto é,  $0 < x < 40$ . Logo, por um lado, como  $A'(x) = -4x + 80$ ,  $A'(x) = 0$  fornece  $x = 20$  metros como ponto crítico. Por outro, para garantir que esse ponto crítico seja ponto de máximo, basta utilizar o teste da derivada de segunda ordem. De fato, temos  $A''(x) = -4 < 0$  para  $0 < x < 40$  e, em particular,  $A''(20) < 0$ . Portanto, a área máxima é dada por  $A(20) = 800$  metros quadrados.<sup>47</sup>

Por fim, vejamos as integrais das funções reais de uma variável real:

- *Integração*

Da mesma forma que a subtração e a divisão, quando possíveis, são operações inversas da adição e da multiplicação, respectivamente, a *integração*, quando possível, é a operação inversa da derivação. Isso posto, sejam  $F(x)$  e  $f(x)$  funções obtidas, uma da outra, como resultados destas duas últimas operações. A equivalência

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = f(x) \iff \int f(x) dx = F(x)$$

significa que  $f(x)$  é a derivada de  $F(x)$  se, e somente se,  $F(x)$  for uma *integral* (ou *anti-derivada* ou *primitiva*) de  $f(x)$ . Para ficar claro:

$$\int f(x) dx \text{ iguala a função } F(x) \text{ cuja derivada resulta em } f(x).$$

<sup>47</sup>Para verificar o resultado de outra maneira, faça o gráfico da função quadrática

$$\begin{aligned} A(x) &= x(80 - 2x) \\ &= -2x^2 + 80x, \end{aligned}$$

que é, obviamente, uma parábola com concavidade para baixo, com raízes  $x = 0$  e  $x = 40$ , abscissa do vértice  $x_V = 20$  e ordenada do vértice  $f(x_V) = 800$ .

Por que  $F(x)$  é *uma* integral de  $f(x)$  e não *a* integral de  $f(x)$ ?

Seja  $C$  uma constante arbitrária e considere válida a equivalência anterior. Portanto, a equivalência

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = f(x) \iff \int f(x) dx = F(x) + C$$

também é válida. Assim,

$$F' = f \iff \int f(x) dx = F(x) + C$$

para qualquer constante  $C$ .

### Exemplos

- Seja  $r \in \mathbb{R}$ ,  $r \neq -1$ , fixo. Portanto,

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \right) &= \frac{1}{r+1} \frac{d}{dx} (x^{r+1}) \\ &= \frac{1}{r+1} \cdot (r+1)x^r \\ &= x^r. \end{aligned}$$

- A integral do exemplo anterior, para  $r = 1$ , é dada por:

$$\begin{aligned} \int x^{-1} dx &= \int \frac{1}{x} dx \\ &= \ln|x| + C. \end{aligned}$$

De fato, por um lado, seja  $x > 0$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\ln|x| + C) &= \frac{d}{dx} (\ln x + C) \\ &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Por outro lado, seja agora  $x < 0$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (\ln|x| + C) &= \frac{d}{dx} (\ln(-x) + C) \\ &= (-1) \cdot \frac{1}{(-x)} \\ &= \frac{1}{x}, \end{aligned}$$

onde utilizamos a regra da cadeia na segunda igualdade para a função interna  $y = -x$  e a função externa  $z = \ln y$ .

• Para trigonométricas e suas inversas, é imediato que

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + C, \quad \int \sec^2 x \, dx = \tan x + C,$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsen x + C \quad \text{e} \quad \int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + C.$$

De fato, temos que

$$\frac{d}{dx}(\sin x + C) = \cos x, \quad \frac{d}{dx}(-\cos x + C) = \sin x, \quad \frac{d}{dx}(\tan x + C) = \sec^2 x,$$

$$\frac{d}{dx}(\arcsen x + C) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}(\arctan x + C) = \frac{1}{1+x^2}.$$

• É imediato que

$$\int e^x \, dx = e^x + C.$$

O caso geral, para  $a \neq 0$  constante, é o seguinte:

$$\int e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a} + C.$$

De fato, pela regra da cadeia,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{e^{ax}}{a} + C \right) &= \frac{1}{a} \frac{d}{dx} (e^{ax}) \\ &= \frac{1}{a} \cdot a e^{ax} \\ &= e^{ax}. \end{aligned}$$

• Se  $F'(x) = f(x)$  e  $a$  é uma constante não nula, então

$$\begin{aligned} \int af(x) \, dx &= aF(x) + C \\ &= a \int f(x) \, dx. \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (aF(x) + C) &= a \frac{d}{dx} (F(x)) \\ &= af(x). \end{aligned}$$

Por exemplo,

$$\begin{aligned} \int 2e^{2x} \, dx &= 2 \int e^{2x} \, dx \\ &= e^{2x} + C. \end{aligned}$$

- Para calcular a integral  $\int 2xe^{x^2} dx$ , note que, o integrando  $f(x) = 2xe^{x^2}$  parece ser o resultado da aplicação da regra da cadeia em alguma função  $F(x)$  adequada. De fato, se  $u(x) = x^2$  e  $v(u) = e^u$ , então a derivada de

$$\begin{aligned} F(x) &= v(u(x)) \\ &= e^{u(x)} \\ &= e^{2x}, \end{aligned}$$

em relação a  $x$ , é dada por

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx}(u(x)) \cdot \frac{d}{du}(v(u)) \\ &= 2x \cdot e^u \\ &= 2xe^{x^2}. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} + C.$$

- Vamos, agora, calcular a integral

$$\int \frac{1}{4+x^2} dx.$$

Como

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C$$

e

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4+x^2} dx &= \int \frac{1}{4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2} dx, \end{aligned}$$

será que

$$\int \frac{1}{1+(x/2)^2} dx = \arctan(x/2) + C? \quad (1.3)$$

Note que, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dx}(\arctan(x/2)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+(x/2)^2} \quad (1.4)$$

é a metade do integrando em (1.3). Portanto, multiplicando ambos os membros de (1.4) por 2, temos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{4+x^2} dx &= \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C \\ &= \frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{2} + C. \end{aligned}$$

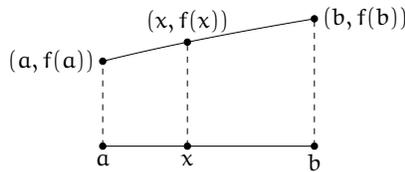
- Pode ser facilmente demonstrado que a integral da soma de funções é a soma das integrais destas funções. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \int \left( -4x^3 + 1 - \frac{4}{4+x^2} \right) dx &= (-4) \int x^3 dx + \int x^0 dx + (-4) \int \frac{1}{4+x^2} dx \\ &= -4 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^1}{1} - 4 \cdot \left( \frac{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)}{2} \right) + C \\ &= -x^4 + x - 2 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

Existem técnicas que podem ser úteis no cálculo de integrais, como a *integração por substituição* e a *integração por partes*.<sup>48</sup>

- *Integral definida: área “com sinal”*

Seja  $f(x)$  uma função não negativa (respectivamente, não positiva) num intervalo  $[a, b]$ . Considere  $f(x)$  *contínua* nesse intervalo, isto é, o gráfico dessa função não é interrompido em  $(x, f(x))$ , para todo  $x$  em  $[a, b]$ , conforme a seguinte ilustração:



Uma importante consequência do *teorema fundamental do cálculo* (confira Gonick (2014)) estabelece que, se  $F(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$ , isto é,  $(F(x) + C)' = f(x)$ , num intervalo aberto que contenha  $[a, b]$ , então a *integral definida de  $f$*  (em  $[a, b]$ ) é obtida via

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &:= F(x) \Big|_a^b \\ &:= \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

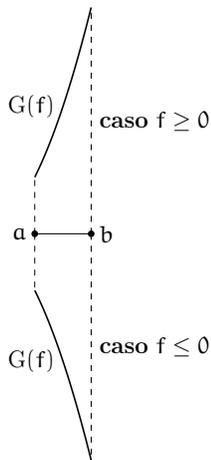
Além disso, essa integral calcula a *área com sinal* da região compreendida entre o gráfico de  $f$ , isto é,  $G(f)$ , e o intervalo  $[a, b]$ , de acordo com os dois casos seguintes:

**caso  $f \geq 0$ :**  $\int_a^b f$  representa a área com sinal positivo,

**caso  $f \leq 0$ :**  $\int_a^b f$  representa a área com sinal negativo,

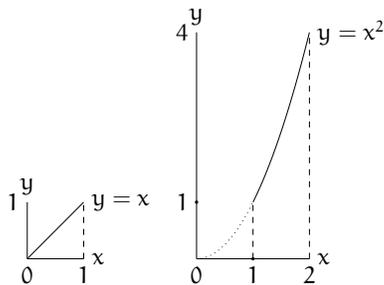
conforme a seguinte ilustração:

<sup>48</sup>Veja Gonick (2014).



### Exemplos

Considere os gráficos de uma reta,  $x \in [0, 1]$ , e uma parábola,  $x \in [1, 2]$ , conforme a ilustração seguinte:



A área relativa ao gráfico da reta é calculada por

$$\begin{aligned} \int_0^1 x \, dx &= \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 \\ &= \frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} \text{ u.a. (unidades de área).} \end{aligned}$$

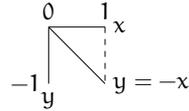
De fato, essa área também é calculada por

$$\begin{aligned} \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2} &= \frac{1 \cdot 1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \text{ u.a.} \end{aligned}$$

Observe também que

$$\begin{aligned}\int_0^1 (-x) \, dx &= -\int_0^1 x \, dx \\ &= -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

cujos módulos representam o valor da área do triângulo obtido pela reflexão do triângulo do gráfico supracitado em relação ao eixo das abscissas, conforme a seguinte ilustração:



Agora, a área referente ao gráfico da parábola supracitada é dada por

$$\begin{aligned}\int_1^2 x^2 \, dx &= \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 \\ &= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \\ &= \frac{8}{3} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{7}{3} \text{ u.a.}\end{aligned}$$

### Observação

Caso existam exatamente  $n$  pontos entre  $a$  e  $b$ , digamos  $c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n$ , onde  $f$  muda de sinal, considere

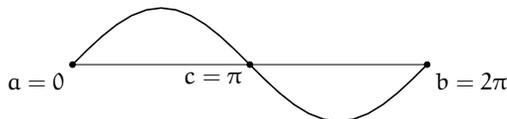
$$\int_a^b f = \int_a^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f + \dots + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f + \int_{c_n}^b f,$$

onde a contribuição de cada uma das  $n + 1$  parcelas do segundo membro alterna entre os dois casos anteriores à medida que  $f$  muda de sinal.

### Exemplo

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin x \, dx &= \int_0^{\pi} \sin x \, dx + \int_{\pi}^{2\pi} \sin x \, dx \\ &= \int_0^{\pi} \sin x \, dx - \int_0^{\pi} \sin x \, dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

Nesse caso, temos um ponto entre  $a$  e  $b$ , conforme representado na seguinte ilustração:



### 1.3 Fundamentos de cálculo de uma variável

Como sugerido na quarta nota de rodapé (p. 10), *apenas leitores com viés para o rigor matemático devem tentar resolver os exercícios que seguem*. Aqui, algumas das notas de rodapé são sugestões ou dicas para resolver exercícios, enquanto que outras são resoluções quase completas.

#### PARTE I

1.  $\mathbb{R} \ni \mathbf{a}$  é dito um *ponto de acumulação* de  $S \subset \mathbb{R}$  quando a seguinte condição é satisfeita:

$$\boxed{\text{Dado } \varepsilon > 0 \text{ arbitrário, existe algum } x \in S \text{ tal que } 0 < |x - \mathbf{a}| < \varepsilon.}$$

Mostre que:

- (a) 0 é um ponto de acumulação de  $S = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ;  
(b)  $\mathbb{Z}$  não tem pontos de acumulação.
2. Sejam:  $f$  uma função;  $\mathbf{a}$  um ponto de acumulação de  $\text{Dom}(f)$ ;  $L \in \mathbb{R}$ .

$$\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} f(x) = L$$

significa que, dado  $\varepsilon > 0$  arbitrário, é possível apresentar algum  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  satisfazendo a seguinte condição:

$$\boxed{x \in \text{Dom}(f), 0 < |x - \mathbf{a}| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.}$$

Use essa definição de limites para demonstrar cada um dos cinco itens seguintes:

- (a) Se  $\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} f(x)$  existe, então esse limite é único.<sup>49</sup>  
(b) Se  $\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} f(x) = L$  e  $\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} g(x) = M$ , então:  
i.  $\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} (f + g)(x) = L + M$ ;  
ii.  $\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} (f \cdot g)(x) = L \cdot M$ ;  
iii.  $\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} (f/g)(x) = L/M$  se  $M \neq 0$ ;  
iv.  $f(x) \geq 0$  (respectivamente,  $f(x) \leq 0$ ) para cada  $x \in \text{Dom}(f)$  suficientemente próximo de  $\mathbf{a} \Rightarrow L \geq 0$  (respectivamente,  $L \leq 0$ ).<sup>50</sup>
3. Seja  $p(x)$  um polinômio. Mostre que  $p$  é contínua em  $\mathbf{a}$  demonstrando os itens a seguir:
- (a) Pela definição de limites,  $\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} c = c$  para toda constante  $c$ .  
(b) Pela definição de limites,  $\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} x = \mathbf{a}$ .  
(c) Pelo item (b), pelo item ii da última questão e por indução finita,  $\lim_{x \rightarrow \mathbf{a}} x^n = \mathbf{a}^n$  para cada inteiro positivo  $n$ .

<sup>49</sup>Assuma que  $L \neq M$  são ambos limites de  $f$  em  $\mathbf{a}$ . Considere  $\varepsilon = |L - M|/2$  na definição de limites. Use a bem-conhecida *desigualdade triangular* para obter a contradição  $2\varepsilon < 2\varepsilon$ .

<sup>50</sup>Considere  $L < 0$  e  $\varepsilon = -\frac{1}{2}$  (respectivamente,  $L > 0$  e  $\varepsilon = \frac{1}{2}$ ). Obtenha daí uma contradição.

(d) Pelos itens (a) e (c) anteriores e pelo item ii da última questão,  $\lim_{x \rightarrow a} cx^n = ca^n$  para cada constante  $c$ .

(e) Pelo item (d) anterior, pelo item i da questão anterior e por indução finita,  $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$ .<sup>51</sup>

4. Demonstre que  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  e  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  existem e são iguais se, e somente se,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe. Nesse caso, tal limite iguala os limites laterais.<sup>52</sup>

5. Considere  $\varepsilon > 0$  arbitrário. Use a definição de limites do exercício 2 para verificar cada um dos itens seguintes:<sup>53</sup>

(a)  $\lim_{x \rightarrow 2} 3x - 1 = 5$ .<sup>54</sup>

(b)  $\lim_{x \rightarrow -1} 2 - 4x = 6$ .<sup>55</sup>

(c) Seja  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ,  $x \neq 0$ . Daí:

i.  $0 < \cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1$ .<sup>56</sup>

<sup>51</sup>Uma função  $f$  é dita *contínua* em  $a \in \text{Dom}(f)$  quando, na definição de limite dada na questão 2,  $L = f(a)$ .

<sup>52</sup>Para definir  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ , basta considerar  $\text{Dom}(f) = (a, b)$  na definição de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  dada anteriormente. Nesse caso, escreva  $0 < |x - a| < \delta$  como  $0 < x - a < \delta$ . Analogamente, para definir  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ , basta considerar  $\text{Dom}(f) = (c, a)$  na definição de  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  dada anteriormente. Nesse caso, escreva  $0 < |x - a| < \delta$  como  $-\delta < x - a < 0$ .

<sup>53</sup>Além das definições de limites já apresentadas, considere agora as definições seguintes, para  $f$  definida no intervalo  $I$  e  $\varepsilon > 0$  arbitrariamente dado:

(a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$  quando existe algum  $K = K(\varepsilon) > 0$  tal que:

$$x \in I = (a, +\infty), x > K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon;$$

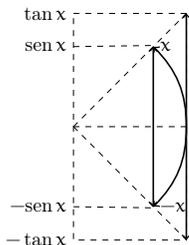
(b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  quando existe algum  $K = K(\varepsilon) > 0$  tal que

$$x \in I = (-\infty, b), x < -K \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

<sup>54</sup>Tome  $\delta \leq \varepsilon/3$ , justificando essa escolha (para  $\delta$ ).

<sup>55</sup>Tome  $\delta \leq \varepsilon/4$ , justificando essa escolha.

<sup>56</sup>RESOLUÇÃO



Utilizando o gráfico anterior, temos:

$$\begin{aligned} 0 < |\text{sen } x| < |x| < |\tan x| &\implies 0 < |\cos x| < \left| \frac{\text{sen } x}{x} \right| < 1 \\ &\implies 0 < \cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1. \end{aligned}$$

$$\text{ii. } \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right| < \frac{x^2}{2},^{57}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.^{58}$$

$$\text{(d) } \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right) = 0.^{59}$$

(e) Se  $g(x)$  é limitada, isto é, existe  $B \in \mathbb{R}$  tal que  $|g(x)| \leq B$  para todo  $x \in \operatorname{Dom}(g)$ , então

$$\lim_{x \rightarrow 0} xg(x) = 0.^{60}$$

(f) Se  $a > 0$ , então  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}.$ <sup>61</sup>

$$\text{(g) } \lim_{x \rightarrow -2} x^2 + 1 = 5.^{62}$$

$$\text{(h) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{5}.^{63}$$

$$\text{(i) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0.^{64}$$

(j) Se  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ , então não existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  pois  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$  e  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$

$$\text{(k) } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

6. Se  $f$  é uma função definida no intervalo  $I$  e  $y = 1/x$ , demonstre os dois itens seguintes:

(a) Para  $I = (a, +\infty)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow 0^+} f(1/y) = L.^{65}$$

(b) Para  $I = (-\infty, b)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{y \rightarrow 0^-} f(1/y) = L.$$

---

#### <sup>57</sup>RESOLUÇÃO

Utilizando o subitem (i) do item (c) dessa questão, temos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right| &< 1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \\ &< \frac{x^2}{2}. \end{aligned}$$

#### <sup>58</sup>RESOLUÇÃO

Seja  $0 < \delta \leq \sqrt{2}\epsilon$ . Assim, segue do subitem (ii) do item (c) dessa questão que, se  $|x| < \delta$ , então

$$\begin{aligned} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1 \right| &< \frac{\delta^2}{2} \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

<sup>59</sup>Tome  $\delta \leq \epsilon$ , justificando essa escolha.

<sup>60</sup>Note que, embora o item (d) dessa questão tenha de ser resolvido pela definição de limites, uma resolução mais simples pode ser obtida utilizando o resultado desse item (e).

<sup>61</sup>Tome  $\delta \leq \min \{a, \epsilon\sqrt{a}\}$ , justificando essa escolha.

<sup>62</sup>Tome  $\delta \leq \min \{1, \epsilon/5\}$  ou  $\delta \leq \min \{2, \epsilon/6\}$ , justificando essas escolhas para  $\delta$ .

<sup>63</sup>Tome  $\delta \leq \min \{2, 5\epsilon/2\}$ , justificando essa escolha.

<sup>64</sup>Tome  $\delta \leq \epsilon^2$ , justificando essa escolha.

<sup>65</sup>Para  $\Rightarrow$ , se  $\epsilon > 0$ , escolha  $K = K(\epsilon) > 0$  em relação ao limite de  $f$  quando  $x \rightarrow +\infty$ . Use então  $\delta \leq 1/K$ .

7. Utilizando a questão 6 e o item (c) da questão 5, mostre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 0.$$

8. Assuma que  $f$  e  $g$  são contínuas em  $a$ . Demonstre então que:<sup>66</sup>

- (a)  $f + g$  é contínua em  $a$ ;
- (b)  $f \cdot g$  é contínua em  $a$ ;
- (c)  $f/g$  é contínua em  $a$  se  $g(a) \neq 0$ .

9. Utilizando a questão 8, mostre que

$$h(x) = \frac{8x + \sqrt{x} + 1}{2x^2 + x + 9}$$

é contínua para todo  $x > 0$ .

10. Se  $g$  é contínua em  $a$  e  $f$  é contínua em  $g(a)$ , demonstre que  $f \circ g$  é contínua em  $a$ .

11. Utilizando a questão 10, mostre que a função

$$\varphi(x) = \left( \sqrt{6(x^3 - 1)^2 + 2} + 1 \right)^3$$

é contínua para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

12.  $f$  é dita *contínua em*  $[a, b]$ ,  $a < b$ , quando as duas condições que seguem são satisfeitas:

- $f$  é contínua em  $(a, b)$ ;
- $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$  e  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ .

(a) Mostre que  $f(x) = \sqrt{x}$  é contínua em  $[0, b]$ .<sup>67</sup>

(b) Mostre que  $f(x) = x \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right)$  não é contínua em  $[0, b]$ .<sup>68</sup>

(c) Seja  $s$  a função definida em  $[0, b]$  por

$$s(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen} \left( \frac{1}{x} \right) & \text{se } x \neq 0; \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

i. Mostre que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} s(x) = s(0)$ .<sup>69</sup>

ii. Mostre que  $s$  é contínua em  $[0, b]$ .<sup>70</sup>

---

<sup>66</sup>Use o item (b) da questão 2.

<sup>67</sup>Utilize: o item (f) da questão 5 para verificar que  $f$  é contínua em  $(0, b)$ ; o item (i) da questão 5 para verificar que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$ ; o item (f) da questão 5 e questão 4 para verificar que  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$ .

<sup>68</sup>Verifique que, embora  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$  (pelo item (d) da questão 5 e pela questão 4),  $f(0)$  não está definida.

<sup>69</sup>Use o item (d) da questão 5 e a definição de  $s$ .

<sup>70</sup>Utilize: o item i anterior; o item (b) da questão 8, questão 10 e que  $\operatorname{sen} x$  é contínua para mostrar que  $s(x)$  é contínua para  $x \neq 0$ ; a questão 4 para mostrar que  $\lim_{x \rightarrow b^-} s(x) = s(b)$ .

13. Demonstre o *teorema da conservação de sinal* (TCS), isto é, se  $f$  é contínua em  $c$  e  $f(c) \neq 0$ , demonstre que existe algum  $\delta > 0$  tal que  $f(x) \cdot f(c) > 0$ , isto é,  $f(x)$  e  $f(c)$  têm mesmo sinal, para cada  $x \in \text{Dom}(f)$  para o qual  $|x - c| < \delta$ .<sup>71</sup>
14. Seja  $S$  um conjunto não vazio de números reais.  $S$  é dito *limitado superiormente* (respectivamente, *inferiormente*) quando existe algum número real  $B$  satisfazendo a seguinte condição:

$$x \leq B \text{ (respectivamente, } B \leq x) \text{ para cada } x \in S.$$

Nesse caso, a existência do menor (respectivamente, maior) entre todos tais números  $B$ , denotado por  $\sup S$  (respectivamente,  $\inf S$ ), é garantida. Por causa disso, dizemos que  $\mathbb{R}$  é *completo*.

- (a) Considere o conjunto  $S$  do item (a) da questão 1. Mostre que  $\sup S = 1$  e  $\inf S = 0$ .
- (b) Preencha os detalhes da demonstração do *teorema do valor intermediário* (TVI), cujo enunciado é o seguinte:  
*Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua e  $f(a) \neq f(b)$ , então  $f$  assume no intervalo  $(a, b)$  todos os valores entre  $f(a)$  e  $f(b)$ .*

DEMONSTRAÇÃO:

Caso  $f(a) < d < f(b)$ , considere  $S = \{x \in [a, b] \mid f(x) < d\}$ . Então, como  $\mathbb{R}$  é completo, obtenha  $f(c) = d$  com  $c = \sup S$ . De fato, supondo que  $f(c) - d < 0$  e utilizando o TCS (da questão 13) na função  $\varphi(x) = f(x) - d$ , obtemos a contradição: se  $\bar{x} = c + \frac{\delta}{2}$ , então  $\bar{x} \in S$ . Portanto  $f(c) \geq d$ . Agora, repetindo o argumento com a suposição  $f(c) - d > 0$ , obtemos  $f(c) \leq d$ . Para concluir, caso  $f(b) < d < f(a)$ , basta aplicar o caso anterior para  $g(x) = -f(x)$  e obter  $c \in (a, b)$  tal que  $g(c) = -d$ , isto é,  $f(c) = d$ .

- (c) Use o TVI para verificar que cada uma das equações seguintes tem uma raiz entre os números indicados:
- $\cos x = x$  entre 0 e 1.
  - $2x^3 - 5x^2 - 10x + 5 = 0$  entre: -2 e -1; 0 e 1; 3 e 4.
  - $\ln x = e^{-x}$  entre 1 e 2.
15. Demonstre que  $f$  é contínua em  $a$  se, e somente se,  $\lim_{h \rightarrow 0} (f(a+h) - f(a)) = 0$ .
16. Seja  $f$  uma função cujo domínio contém um intervalo aberto de centro  $a$ , isto é, seja  $a$  um *ponto interior* ao  $\text{Dom}(f)$ .  
 $f$  é dita *diferenciável em  $a$*  quando existe o limite do *quociente de Newton* dado a seguir:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Nesse caso,  $f'(a)$  é dito a *derivada de  $f$  em  $a$*

<sup>71</sup> Considere  $\varepsilon = \frac{|f(c)|}{2}$  para  $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ . A partir dessa hipótese inicial, conclua a demonstração com:

$$\begin{cases} f(x) > \frac{f(c)}{2} & \text{se } f(c) > 0, \\ f(x) < \frac{f(c)}{2} & \text{se } f(c) < 0. \end{cases}$$

$$\boxed{y = f'(a)x + (f(a) - f'(a)a)}$$

é dita a *equação da reta tangente ao gráfico de f em (a, f(a))*.<sup>72</sup>

Utilize a questão 15 para provar que f é contínua em a se f é diferenciável em a.

17. Use a definição de derivada dada na questão 16 para mostrar que:

- (a)  $f(x) = x^2$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , é diferenciável e que  $f'(x) = 2x$ ;
- (b)  $f(x) = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , é diferenciável e que  $f'(x) = 3x^2$ ;
- (c)  $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ ,  $x > 0$ , é diferenciável e que  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ .

Ainda, para cada um desses três itens, obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de f em (1, 1).

18. Vale a recíproca da questão 16? Considere, por exemplo,  $f(x) = |x|$  e  $a = 0$ . f é contínua em a? f é diferenciável em a?<sup>73</sup>

19. Sejam f e g diferenciáveis em a. Demonstre que:

- (a)  $f + g$  é diferenciável em a e  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ ;
- (b)  $fg$  é diferenciável em a e  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ ;
- (c)  $f/g$  é diferenciável em a e  $(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{[g(a)]^2}$  se  $g(a) \neq 0$ .

20. Demonstre a *regra da cadeia*, isto é, se f é diferenciável em a e g é diferenciável em f(a), então  $g \circ f$  é diferenciável em a e, nesse caso,

$$\boxed{(g \circ f)'(a) = f'(a) \cdot g'(f(a))}.$$

21. Utilize as questões 17, 19 e 20 para derivar a função  $\varphi$  da questão 11.

22. Seja f diferenciável em a como na questão 16.<sup>74</sup> Se a é um *ponto de máximo* (respectivamente, *mínimo*) local de f,<sup>75</sup> mostre que a é um *ponto crítico* de f, isto é,  $f'(a) = 0$ .<sup>76</sup>

23. Vale a recíproca da questão 22? Por exemplo, considere  $f(x) = x^3$  e  $a = 0$ .

## PARTE II

1. Uma *seqüência*  $\mathbb{N} \ni n \mapsto x_n \in \mathbb{R}$  é denotada por  $(x_n)$  e o inteiro positivo n é o *índice* do termo  $x_n$ . Dizer que essa seqüência é *convergente* para  $L \in \mathbb{R}$  significa dizer que, dado  $\epsilon > 0$  arbitrário, existe um índice  $N = N(\epsilon)$  tal que

$$\boxed{n > N \Rightarrow |x_n - L| < \epsilon}.$$
<sup>77</sup>

<sup>72</sup>Para uma melhor análise dessa reta e sua relação com o conceito de derivada, confira a seção 1.2.

<sup>73</sup>Use a definição de continuidade dada na nota de rodapé do item (e) da questão 3 e a definição de derivada dada na questão 16 para justificar suas respostas. Confira também o item (j) da questão 5.

<sup>74</sup>Portanto, em particular, a é um ponto interior ao domínio de f.

<sup>75</sup>Confira a seção 1.2.

<sup>76</sup>Sem perda de generalidade, seja a um ponto (interior ao Dom(f)) de máximo local. Considere o quociente de Newton em a tanto para  $h < 0$  quanto para  $h > 0$ . Por fim, utilizando os limites laterais desse quociente, a questão 4 e o subitem (iv) da questão 2, deduza que  $f'(a)$  é simultaneamente  $\leq 0$  e  $\geq 0$ .

<sup>77</sup>Todos os termos da seqüência de índices maiores que N pertencem a  $(L - \epsilon, L + \epsilon)$ .

Neste caso, dizemos que  $L$  é o *limite* de  $(x_n)$  e denotamos  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ .

- Mostre que uma seqüência constante converge para tal constante.
- Verifique que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .<sup>78</sup>
- Demonstre a unicidade do limite de uma seqüência convergente.
- Enuncie e demonstre as tradicionais propriedades da soma, produto e quociente de limites para seqüências convergentes.
- Se  $c \in \mathbb{R}$  e  $k \in \mathbb{N}$  duas constantes, utilize os itens (a), (b) e (d) desta questão para mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c}{n^k} = 0$ .
- Demonstre o *teorema do sanduíche para seqüências* (TSS), isto é, se  $N$  é um inteiro positivo,  $x_n \leq y_n \leq z_n$  para cada índice  $n > N$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = L$ , então  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = L$ .
- Use o item (f) desta questão para mostrar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0.$$

- Dada a seqüência  $(x_n)$ , se a função  $f(x)$  é tal que  $f(n) = x_n$  para todo índice  $n$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ , demonstre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$ .
- Considerando o item (h) desta questão e supondo já ter demonstrado que  $\lim_{x \rightarrow \infty} r^x = 0$  para  $0 \leq r < 1$ , calcule  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ .
- Dizer que  $(x_n)$  é *limitada* significa dizer que existe  $B \in \mathbb{R}$  tal que

$$\boxed{|x_n| \leq B \text{ para todo índice } n}.$$

- Mostre que toda seqüência convergente é limitada.
- Sendo

$$x_1 = 3, 1, \quad x_2 = 3, 14, \quad \dots, \quad x_n = 3, 1415926 \dots d_n$$

e  $d_n$  o dígito da  $n$ -ésima casa decimal de  $\pi$ , verifique que tal seqüência é limitada e convergente.<sup>79</sup>

- Se  $x_n = (-1)^n$  para cada índice  $n$ , verifique, pela definição, que a seqüência  $(x_n)$  é limitada mas não é convergente.

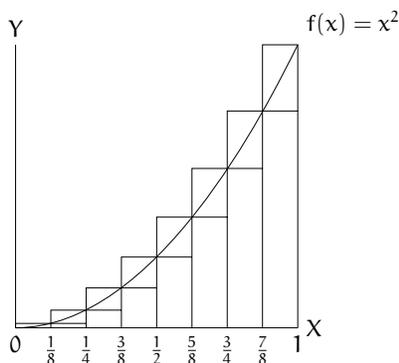
- Divida o intervalo  $[0, 1]$  em  $n$  partes de mesmo comprimento. Cada uma destas partes é um *subintervalo* de comprimento  $1/n$ . Tais subintervalos têm extremos

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n} = 1.$$

Para a (parte da) parábola  $f(x) = x^2$  com  $x \in [0, 1]$ , considere os retângulos cujas bases sejam os  $n$  subintervalos e cujas alturas sejam as imagens por  $f$  dos extremos destes subintervalos. Para uma representação geométrica destes retângulos para  $n = 8$ , confira a seguinte ilustração:

<sup>78</sup>Use o item (a) da questão 1 da parte I.

<sup>79</sup>Para a convergência, mostre que  $\pi - x_n \leq 10^{-n}$  para cada índice  $n$ . Depois use o TSS combinado com o item (i) desta questão.



Seja  $s_n$  (respectivamente,  $S_n$ ) a soma das áreas dos retângulos de alturas dadas pelos extremos inferiores (respectivamente, superiores) dos subintervalos. Por fim, defina  $\int_0^1 f$  como o valor da área da região limitada pelo gráfico de  $f$ , pelo eixo das abscissas e pelas retas  $x = 0$  e  $x = 1$ . Obviamente,  $s_n \leq \int_0^1 f \leq S_n$ .

(a) Calcule  $s_n$  e  $S_n$  para  $n = 2, 4, 8, 16, 32$ .

(b) Mostre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}$ .<sup>80</sup>

(c) Como o item (b) desta questão está relacionado com o valor de  $\int_0^1 f$ ?<sup>81</sup>

3. Como na questão 2,<sup>82</sup> seja  $f$  uma função real não negativa e contínua sobre  $[a, b]$ . Divida esse intervalo em  $n$  subintervalos, não necessariamente de mesmo comprimento,

$$[x_i, x_{i+1}], \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

tais que  $x_1 = a$ ,  $x_{n+1} = b$  e, sendo  $\Delta_n$  o maior entre os comprimentos de todos os subintervalos,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0.$$

Além disso, suponha já ter demonstrado o *teorema dos valores máximo e mínimo* (TMM), isto é, se uma função é contínua num intervalo fechado e limitado, suponha já ter provado que essa função assume valores máximo e mínimo (globais) nesse intervalo. Então, sendo

<sup>80</sup>Mostre, por indução finita, que

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Depois, utilize tal identidade, juntamente com o item (e) da questão 1 da parte II, no cálculo de  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ . Por fim, utilize um raciocínio análogo para calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ .

<sup>81</sup>Use o TSS.

<sup>82</sup>Parte II.

$m_i$  e  $M_i$ , respectivamente, os valores mínimo e máximo de  $f$  em  $[x_i, x_{i+1}]$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , considere a *soma inferior* (respectivamente, *superior*)

$$s_n := \sum_{i=1}^n m_i (x_{i+1} - x_i) \quad (\text{respectivamente, } S_n := \sum_{i=1}^n M_i (x_{i+1} - x_i))$$

de Riemann de  $f$  em relação à partição  $\{x_1, x_2, \dots, x_n, x_n + 1\}$  de  $[a, b]$ . Assim, como  $f$  é contínua, pode ser demonstrado que os limites  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  e  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  existem e são iguais. Nesse caso, defina a *área* da região limitada pelo gráfico de  $f$ , pelo eixo  $x$  e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$  como o limite comum supracitado. Por fim, denote a área supracitada por  $\int_a^b f$  e defina a função  $I$  do seguinte modo:

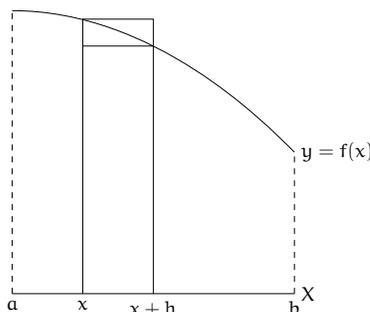
$$[a, b] \ni x \mapsto I(x) = \int_a^x f.$$

Demonstre os itens seguintes:

- (a)  $I$  é diferenciável e  $I' = f$ , isto é,  $I$  é uma *primitiva* de  $f$ ; <sup>83</sup>
  - (b) *Teorema fundamental do cálculo* (TFC) *para funções não negativas*  
 $F$  é uma primitiva de  $f \Rightarrow \int_a^b f = F(b) - F(a) := F(x) \Big|_{x=a}^{x=b}$  <sup>84</sup>
4. Considere as mesmas hipóteses da questão 3, <sup>85</sup> com uma exceção:  $f$  pode assumir valores negativos em  $[a, b]$ . Escolha  $\bar{x}_i \in [x_i, x_{i+1}]$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Então, como

$$m_i (x_{i+1} - x_i) \leq f(\bar{x}_i) (x_{i+1} - x_i) \leq M_i (x_{i+1} - x_i)$$

<sup>83</sup>Considere a continuidade de  $f$  no intervalo  $[x, x+h] \subset [a, b]$  para  $h$  suficientemente pequeno mas positivo. Assim, pelo TMM, existem  $x_m, x_M \in [x, x+h]$  onde  $f(x_m)$  é o menor e  $f(x_M)$  é o maior entre todos os valores de  $f$  no intervalo  $[x, x+h]$ . Na ilustração seguinte,  $x_M = x$  e  $x_m = x+h$ .



Agora, compare as áreas dos *retângulos aproximantes* e da região sob a curva  $y = f(x)$  de base  $[x, x+h]$  via

$$f(x_m) h \leq \int_x^{x+h} f \leq f(x_M) h.$$

Considerando que a área entre as desigualdades é dada por  $I(x+h) - I(x)$ , calcule o limite do quociente de Newton

$$\frac{I(x+h) - I(x)}{h}$$

para  $h \rightarrow 0$ .

<sup>84</sup>Use que  $F - I$  é uma função constante.

<sup>85</sup>Parte II.

para  $i = 1, 2, \dots, n$ , segue que

$$s_n \leq \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) (x_{i+1} - x_i) \leq S_n. \quad (1.5)$$

Agora, considere que essas desigualdades sejam válidas para  $n$  tão grande quanto se queira. Analogamente à questão 3, como  $f$  é contínua e  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0$ , podem ser demonstradas a existência e a igualdade dos limites das seqüências que figuram em (1.5), bem como que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) (x_{i+1} - x_i)$$

é independente da escolha de  $\bar{x}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Esse limite é dito *integral definida de  $f$  em  $[a, b]$*  e denotado por  $\int_a^b f(x) dx$ , enquanto  $f$  é dita *integrável*.<sup>86</sup> Por fim, defina

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx \text{ se } a < b.$$

Resolva os seguintes itens:

(a) Considerando a função

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 0, \\ x^2 & \text{se } x \geq 0, \end{cases}$$

verifique que:

- i.  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} = 0$  com  $S_{2n} = S_n^- + S_n^+$  tal que  $S_n^-$  e  $S_n^+$  são somas superiores de Riemann de  $f$  restrita aos intervalos  $[-1, 0]$  e  $[0, 1]$ , respectivamente;<sup>87</sup>
- ii.  $\int_{-1}^1 f(x) dx = 0$ .<sup>88</sup>

(b) Utilizando a definição de integral supracitada e propriedades de *somatórios* adequadas, demonstre que:

$$\text{i. } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \text{ se } c \in [a, b];^{89}$$

<sup>86</sup>Observe que, se  $f$  é não negativa,  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f$ .

<sup>87</sup>Use o item (b) da questão 2, parte II.

<sup>88</sup>Use o subitem (i) deste item (a).

<sup>89</sup>Inicie considerando  $2n$  subintervalos de  $[a, b]$ , digamos

$$[x_i, x_{i+1}], i = 1, 2, \dots, 2n,$$

com  $x_1 = a$ ,  $x_{n+1} = c$  e  $x_{2n+1} = b$ , e escolhendo  $\bar{x}_i$  pertencente ao  $i$ -ésimo subintervalo anterior,  $i = 1, 2, \dots, 2n$ . Por fim, analise a expressão

$$\sum_{i=1}^{2n} f(\bar{x}_i) (x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i) (x_{i+1} - x_i) + \sum_{i=n+1}^{2n} f(\bar{x}_i) (x_{i+1} - x_i)$$

para  $n$  suficientemente grande, observando que, se  $j = i - n$ , então o último somatório é dado por  $\sum_{j=1}^n f(\bar{x}_j) (x_{j+1} - x_j)$ .

- ii.  $\int_a^b (\text{constante} \cdot f(x)) dx = \text{constante} \cdot \int_a^b f(x) dx$ ;
- iii.  $f_1$  e  $f_2$  são contínuas em  $[a, b] \Rightarrow \int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx$ ;
- iv.  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$  se  $f$  é não negativa em  $[a, b]$ .

- (c) Suponha já ter demonstrado o TFC para funções não necessariamente não negativas, isto é, se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, assuma ter provado que

$$\int_a^b f(t) dt = F(t) \Big|_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a).$$

Utilize esse fato para demonstrar as técnicas de integração enunciadas nos dois sub-ítemos seguintes.

i. INTEGRAÇÃO POR SUBSTITUIÇÃO

Se  $[c, d] \ni x \xrightarrow{u} u(x) \in [a, b]$  é uma bijeção com derivada contínua, não nula e tal que  $u(c) = a$  e  $u(d) = b$ , então

$$\int_c^d f(u(x)) \frac{du}{dx} dx = \int_a^b f(u) du.^{90}$$

ii. INTEGRAÇÃO POR PARTES

Utilizando a regra da derivada do produto,<sup>91</sup> demonstre que, se  $u$  e  $v$  são contínuas em  $[a, b]$ , então

$$\int_a^b v(x) \frac{du}{dx} dx = u(x)v(x) \Big|_{x=a}^{x=b} - \int_a^b u(x) \frac{dv}{dx} dx.$$

Essa equação é costumeiramente denotada por  $\int_a^b v du = uv \Big|_a^b - \int_a^b u dv$ .

- (d) Em bons livros de cálculo de uma variável, encontre e resolva integrais que utilizem, em suas resoluções, as duas técnicas de integração enunciadas no item (c) dessa questão.

<sup>90</sup>Inicie considerando uma primitiva  $F$  de  $f$  e a integração

$$\begin{aligned} \int_c^d f(u(x)) \frac{du}{dx} dx &= \int_c^d F'(u(x)) \frac{du}{dx} dx \\ &= \int_c^d \frac{d}{dx} (F(u(x))) dx, \end{aligned}$$

onde foi utilizada a regra da cadeia (exercício 20 da parte I) na última igualdade. Agora, use o TFC na última integral e continue desse ponto.

<sup>91</sup>Item (b) do exercício 19, parte I.



# Capítulo 2

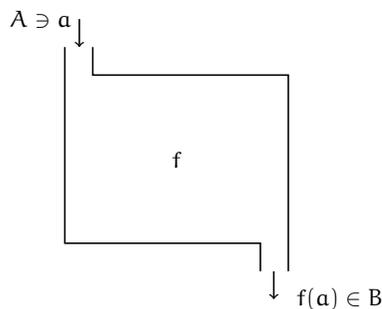
## Definições básicas

*Suppose that you want to teach the 'cat' concept to a very young child. Do you explain that a cat is a relatively small, primarily carnivorous mammal with retractable claws, a distinctive sonic output etc.? I'll bet not. You probably show the kid a lot of different cats, saying 'kitty' each time, until it gets the idea. To put it more generally, generalizations are best made by abstraction from experience.*

---

*Ralph Philip Boas Jr.*

Como todos devem recordar, se  $A$  e  $B$  são dois conjuntos não vazios, uma função  $f$  (definida em  $A$  a valores em  $B$ ) associa a cada elemento  $a \in A$  um único elemento  $f(a) \in B$ ;  $A$  é o domínio de  $f$ ;  $f(a)$  é a imagem de  $a$  (por  $f$ ) e o subconjunto de  $B$  de todas tais imagens é a imagem de  $f$ . Uma analogia útil é considerar  $f$  como uma máquina ou um processador, como ilustrado a seguir,  $a$  como uma entrada ou um *input* de  $f$ ,  $A$  como o conjunto das entradas admissíveis de  $f$ , isto é, que podem ser processadas por  $f$ ,  $f(a)$  como uma saída ou um *output* de  $f$  e, por fim, a imagem de  $f$  como o conjunto de todas as saídas.



Aqui, estudaremos funções  $f$  cujos domínios são subconjuntos do  $\mathbb{R}^n$  e cujas imagens são subconjuntos do  $\mathbb{R}^m$ , isto é,

$$A = \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad \text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^m = B.$$

No já estudado *cálculo de funções  $y = f(x)$  reais de uma variável real*, temos  $n = m = 1$ :

Para todo  $x \in \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}$ , existe  $y \in \mathbb{R}$  tal que  $y = f(x)$ .

Estudaremos, principalmente, os seguintes casos:

- I.  $n = 2$  e  $m = 1$ : Para todo  $(x, y) \in \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^2$ , existe  $z \in \mathbb{R}$  tal que  $z = f(x, y)$ ;
- II.  $n = 3$  e  $m = 1$ : Para todo  $(x, y, z) \in \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}^3$ , existe  $w \in \mathbb{R}$  tal que  $w = f(x, y, z)$ ;
- III.  $n = 1$  e  $m = 2$ : Para todo  $t \in \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}$ , existe  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $(x, y) = f(t)$ ;
- IV.  $n = 1$  e  $m = 3$ : Para todo  $t \in \text{Dom}(f) \subset \mathbb{R}$ , existe  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tal que  $(x, y, z) = f(t)$ .

No caso I, temos *funções reais de duas variáveis reais*.

### Exemplos

- 1. Considere a função  $f$  que a cada vetor  $(x, y)$  associa o seu comprimento  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Portanto, por exemplo,

$$f(3, 4) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ u.c. e } f\left(\sqrt{2}, 1/2\right) = \sqrt{\sqrt{2}^2 + (1/2)^2} = 3/2 \text{ u.c.}$$

- 2. Considere a função  $f(x, y) = xy$  que calcula a área de um retângulo cuja base mede  $x$  u.c. e cuja altura mede  $y$  u.c. Assim, por exemplo,  $f(2, 2) = 4$  u.a. é a área de um quadrado cujo lado mede duas u.c.

No caso II, temos *funções reais de três variáveis reais*.

### Exemplo

Considere a função  $f$  que a cada ponto do espaço associa a sua distância ao plano  $OXY$ . Assim, por exemplo,

$$f(7, 4, -2) = 2 \text{ u.c. e } f(1, 2, 3) = 3 \text{ u.c.}$$

Nos casos III e IV, temos as *funções (a valores) vetoriais (de uma variável real)* ou *curvas parametrizadas* e, em geral, seus domínios são intervalos da reta real. Além disso, é conveniente ressaltar que, as “coordenadas” de  $f(t)$  também dependem da variável independente  $t$ , ou seja,  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  e  $z = z(t)$ .

## Exemplo

Considere a função vetorial  $f$  que, a cada instante de tempo  $t \in [0, 2\pi)$ , associa a posição  $f(t) = (\cos t, \sin t)$  de uma partícula numa circunferência de centro na origem e raio unitário. Claramente,  $x(t) = \cos t$  e  $y(t) = \sin t$ .

Em geral, denotaremos as funções vetoriais por letras gregas. Por exemplo, no lugar de  $f$ , usaremos  $\gamma$ . Além disso, por abuso de notação, funções vetoriais com imagens em  $\mathbb{R}^3$  e com uma das componentes nula podem ser consideradas como funções vetoriais com imagens em  $\mathbb{R}^2$ . Por exemplo, no lugar de  $\gamma(t) = (x(t), y(t), 0)$ , podemos usar apenas  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ .

Como todos devem lembrar dos estudos iniciais das funções reais de uma variável real,  $y = f(x)$ , o domínio e a imagem de  $f$  quase sempre são intervalos ou reunião de intervalos da reta real.<sup>1</sup> Cada um desses intervalos pode ser de um dos seguintes tipos: aberto, fechado, aberto à direita e fechado à esquerda, fechado à direita e aberto à esquerda, limitado ou ilimitado.

Generalizaremos o conceito de intervalo da reta real para subconjuntos do  $\mathbb{R}^n$  que representam, com certa frequência, domínios e imagens de funções de várias variáveis. Além disso, analisaremos “gráficos” de funções de duas variáveis e “traços” de funções vetoriais. Contudo, primeiramente, determinaremos os domínios e as imagens de algumas funções  $z = f(x, y)$  e  $w = f(x, y, z)$ .

1.  $z = x^2 + y^2$  pode ser obtido para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Logo,  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$ . Por outro lado, a soma de dois quadrados no mínimo é 0 e pode se tornar tão grande quanto se queira (ao variarmos os pontos do domínio). Portanto,  $\text{Im}(f) = [0, +\infty)$ .

2. Para  $z = \frac{x+y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ , note que:

- (a) O domínio é dado por

$$\begin{aligned}\text{Dom}(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 - x^2 - y^2 > 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\},\end{aligned}$$

isto é, o domínio é o conjunto dos pontos do plano que pertencem ao círculo de centro  $(0, 0)$  e raio unitário, exceto os pontos pertencentes à sua circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ .

- (b) Considerando pontos do domínio arbitrariamente próximos da circunferência unitária  $x^2 + y^2 = 1$ , temos o numerador  $x + y$  limitado, podendo ser negativo ou positivo, e o denominador  $\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$  próximo de 0 pela direita, ou seja,

$$z = (x + y) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (x^2 + y^2)}} \longrightarrow \pm\infty.^2$$

Portanto,

$$\text{Im}(f) = (-\infty, +\infty).$$

---

<sup>1</sup>O domínio e a imagem de  $y = \sqrt{x}$  é o intervalo  $[0, +\infty)$ . O domínio de  $y = e^x$  é o intervalo  $(-\infty, +\infty)$  e a imagem é o intervalo  $(0, +\infty)$ , enquanto o contrário ocorre para a função  $y = \ln x$ . O domínio de  $y = \tan x$  é a união de intervalos

$$\dots \cup (-5\pi/2, -3\pi/2) \cup (-3\pi/2, -\pi/2) \cup (-\pi/2, \pi/2) \cup (\pi/2, 3\pi/2) \cup (3\pi/2, 5\pi/2) \cup \dots,$$

enquanto que a sua imagem é o intervalo  $(-\infty, +\infty)$ !

<sup>2</sup>Isso significa que, em módulo,  $z$  pode assumir valores tão grandes quanto se queira, como na página 19.

3. Para  $z = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$ , note que:

(a) O domínio é dado por

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 9 - x^2 - 9y^2 > 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 9y^2 < 9\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + y^2 < 1 \right\} \\ &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{1^2} < 1 \right\}, \end{aligned}$$

isto é, o domínio é o conjunto dos pontos do plano que pertencem à elipse de centro  $(0, 0)$ , eixo maior sobre o eixo dos  $x$  (com vértices em  $(\pm 3, 0)$ ) e eixo menor sobre o eixo dos  $y$  (com vértices em  $(0, \pm 1)$ ), exceto os pontos pertencentes à sua fronteira  $\frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$ , ou seja,  $9 - (x^2 + 9y^2) = 0$ .

(b) Considerando pontos do domínio arbitrariamente próximos da fronteira da elipse  $9 - (x^2 + 9y^2) = 0$ , temos  $9 - (x^2 + 9y^2)$  próximo de 0 pela direita, isto é,  $z \rightarrow -\infty$ . Por outro lado,  $9 - (x^2 + 9y^2)$  atinge o seu maior valor quando  $x^2 + 9y^2$  assume o seu menor valor, isto é, quando  $x = y = 0$ . Assim,

$$\text{Im}(f) = (-\infty, \ln 9].$$

4. Para  $w = \cos(\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2})$ , note que:

(a) O domínio é dado por

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 - (x^2 + y^2 + z^2) \geq 0\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}, \end{aligned}$$

ou seja, o domínio é o conjunto dos pontos do espaço que pertencem à esfera de centro  $(0, 0, 0)$  e raio unitário: cada um desses pontos está a uma distância até a origem não maior do que 1 u.c.

(b) Note que, para cada ponto  $(x, y, z) \in \text{Dom}(f)$ , como

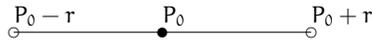
$$\begin{aligned} 0 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 &\iff -1 \leq -(x^2 + y^2 + z^2) \leq 0 \\ &\iff 0 \leq 1 - (x^2 + y^2 + z^2) \leq 1 \\ &\iff \cos 1 \leq \cos(\sqrt{1 - (x^2 + y^2 + z^2)}) \leq \cos 0 \\ &\iff \cos 1 \leq w \leq 1, \end{aligned}$$

temos que

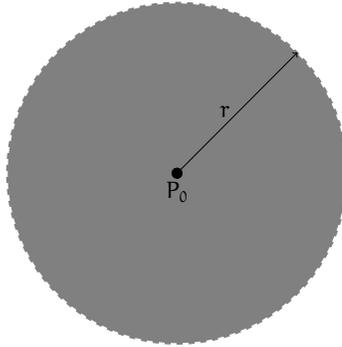
$$\text{Im}(f) = [\cos 1, 1].$$

## 2.1 Bola aberta de centro $P_0 \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$

- Para  $n = 1$ , é o intervalo aberto  $]P_0 - r, P_0 + r[$ , conforme a seguinte ilustração:



- Para  $n = 2$ , é o conjunto dos pontos de um círculo de centro  $P_0$  e raio  $r$ , exceto aqueles pertencentes à sua circunferência, isto é, aqueles cuja distância até  $P_0$  seja exatamente igual a  $r$  u.c., conforme a seguinte ilustração:



- Para  $n = 3$ , é o conjunto de todos os pontos de uma esfera de centro  $P_0$  e raio  $r$ , exceto aqueles cuja distância até  $P_0$  seja exatamente igual a  $r$  u.c.

Em geral, a bola aberta de centro em  $P_0$  e raio  $r$  é o conjunto

$$\{P \in \mathbb{R}^n \mid \|P - P_0\| < r\},$$

onde  $\|P - P_0\|$  representa a distância euclidiana entre  $P$  e  $P_0$ .

### Exemplos

- Para  $n = 1$ ,  $P_0 = x_0$  e  $P = x$ , a bola aberta é dada por

$$\{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < r\};$$

- Para  $n = 2$ ,  $P_0 = (x_0, y_0)$  e  $P = (x, y)$ , a bola aberta é dada por

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}.$$

### Observação

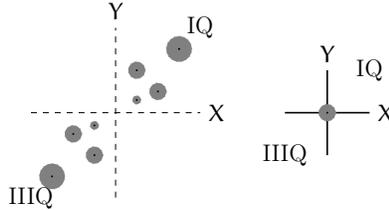
$\{P \in \mathbb{R}^n \mid \|P - P_0\| \leq r\}$  é a *bola fechada* de centro  $P_0$  e raio  $r$ .

## 2.2 Conjunto aberto – Ponto interior

Cada ponto  $P_0$  de um subconjunto *aberto*  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  é *interior* (ao conjunto  $A$ ), isto é, existe alguma bola aberta de centro  $P_0$  inteiramente contida em  $A$ .

## Exemplos

- Para  $n = 1$ ,  $P_0 = 1$  é interior ao intervalo aberto  $A = ]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$  pois, por exemplo,  $]1 - \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}[ \subset A$ . Contudo,  $1/2$  e  $3/2$  não são interiores a  $A$ . Na verdade, como qualquer ponto  $P_0 \in A$  é centro de algum intervalo aberto contido em  $A$ ,  $A$  é aberto.
- Para  $n = 2$ , considere  $A' = \text{Dom}(f)$  com  $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{xy}}$ . Portanto,  $A'$  é o conjunto de todos os pontos dos quadrantes ímpares, exceto aqueles pertencentes aos eixos coordenados, conforme a seguinte ilustração, à esquerda:



$A'$  é aberto pois qualquer um de seus pontos é interior (a  $A'$ ). Nenhum ponto dos eixos coordenados é interior a  $A'$ . De fato, se  $A'' = \text{Dom}(g)$  com  $g(x, y) = \sqrt{xy}$ , isto é,  $A''$  é a união de  $A'$  com o conjunto dos pontos pertencentes aos eixos coordenados, então  $A''$  não é aberto, pois, por exemplo, nenhuma bola centrada na origem está inteiramente contida em  $A''$ , conforme a ilustração anterior, à direita.

- Para  $n = 3$ , todos os pontos de um cubo são interiores a ele, exceto aqueles pertencentes as suas faces. Um cubo sem faces é aberto.

## 2.3 Ponto de fronteira

$P_0 \in \mathbb{R}^n$  está na *fronteira* de um subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}^n$  quando toda bola aberta de centro em  $P_0$  intercepta  $A$  e  $\mathbb{R}^n - A$ , isto é, o *complementar* de  $A$  em  $\mathbb{R}^n$ .

### Exemplos

- Para  $n = 1$ ,  $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}$  é a fronteira de  $A = ]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$ .
- Para  $n = 2$ , os conjuntos  $A'$  e  $A''$  supracitados têm a mesma fronteira,<sup>3</sup> que é composta pelos pontos dos eixos coordenados.
- Para  $n = 3$ , as faces de um cubo formam a sua fronteira.

## 2.4 Conjunto compacto

Um subconjunto  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  é *compacto* quando contém a sua fronteira e está contido em alguma bola fechada. Se apenas contém a fronteira,  $C$  é dito *fechado*. Se apenas está contido em alguma bola fechada,  $C$  é dito *limitado*.

<sup>3</sup>De fato,  $A''$  é a união de  $A'$  com a fronteira de  $A'$ .

## Exemplos

Nos exemplos anteriores, os conjuntos  $A$ ,  $A'$  e  $A''$  não são compactos. Contudo, note que

$$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] = A \cup \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\}$$

é compacto, pois, além de conter a sua fronteira, está contido em, por exemplo,  $\left[1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right]$ . Agora, embora  $A''$  seja fechado, não é um conjunto compacto, pois nenhuma bola fechada pode conter  $A''$ . Por fim, note que um cubo, incluindo as suas faces, é compacto.

## 2.5 Gráficos de funções $f$ reais de $n$ variáveis reais

- Para  $n = 1$ , é o conjunto

$$G(f) = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \text{Dom}(f)\};$$

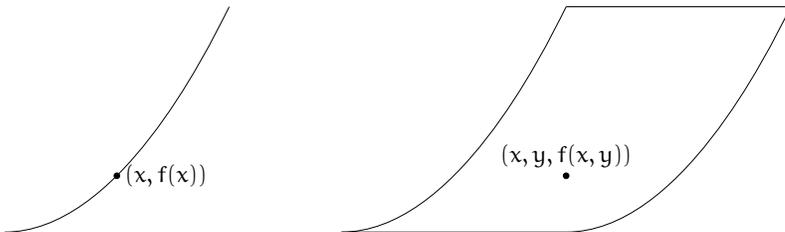
- Para  $n = 2$ , é o conjunto

$$G(f) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \text{Dom}(f)\};$$

- Para  $n = 3$ , é o conjunto

$$G(f) = \{(x, y, z, f(x, y, z)) \in \mathbb{R}^4 \mid (x, y, z) \in \text{Dom}(f)\}.$$

$f$ , no primeiro caso, tem domínio contido em  $\mathbb{R}$  e gráfico contido em  $\mathbb{R}^2$ ; no segundo, domínio contido em  $\mathbb{R}^2$  e gráfico contido em  $\mathbb{R}^3$ ; no último, domínio contido em  $\mathbb{R}^3$  e gráfico contido em  $\mathbb{R}^4$ . Na ilustração seguinte, exemplos de gráficos (ou partes deles) dos dois primeiros casos são representados(as). Note que não há possibilidade de se ilustrar tridimensionalmente o último caso!



## Exemplos

Podemos usar algumas figuras geométricas conhecidas, em alguns poucos exemplos,<sup>4</sup> para a visualização dos gráficos das funções.

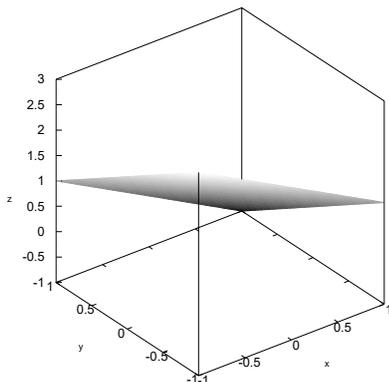
---

<sup>4</sup>Tais como: planos (veja figura 2.1), esferas (veja figuras 2.2 e 4.18, páginas 56 e 166, respectivamente), paraboloides (veja figuras 2.3 e 4.14, páginas 59 e 162, respectivamente), cones (veja figuras 4.13 e 4.18, páginas 161 e 166, respectivamente) etc.

1. Para  $z = f(x, y) = -x - y + 1$ , existe  $z$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , isto é,  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$ . Agora, de  $z = -x - y + 1$ , temos  $x + y + z - 1 = 0$ , que é a equação do plano  $ax + by + cz + d = 0$  para  $a = b = c = 1$  e  $d = -1$ , conforme a figura 2.1. Por fim, temos

$$G(f) = \{(x, y, -x - y + 1) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}.$$

Figura 2.1: Gráfico da função  $z = f(x, y) = -x - y + 1$  para  $x$  e  $y$  variando entre  $-1$  e  $1$

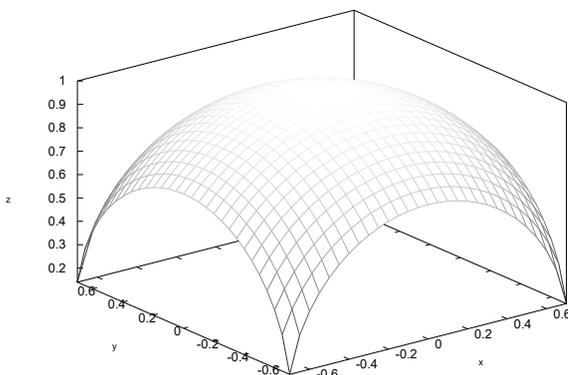


2. Para  $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ , existe  $z$  (não negativo) para  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $1 - x^2 - y^2 \geq 0$ , isto é,  $x^2 + y^2 \leq 1$ . Logo,  $\text{Dom}(f)$  é a bola fechada em  $\mathbb{R}^2$  com centro na origem e raio 1. Agora, da equação da esfera unitária  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , temos  $z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$ . Portanto, desconsiderando o sinal negativo, temos que

$$G(f) = \{(x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

é a semiesfera unitária superior, conforme a figura 2.2, onde parte desse gráfico está ilustrada.

Figura 2.2: Gráfico da função  $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  para  $x$  e  $y$  variando entre  $-0,7$  e  $0,7$



Agora, *seções transversais* de um gráfico  $G(f)$  dado acarretam curvas espaciais que, quando projetadas no plano  $OXY$ , são ditas *curvas de nível* da função  $z = f(x, y)$ . Essas curvas, juntamente com interseções de  $G(f)$  com planos verticais (paralelos ao eixo  $OZ$ ), resultam num modo qualitativo de se obter  $G(f)$ , como veremos a seguir.

### 2.5.1 Conjunto de nível

**Curva de nível  $c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  fixo, no plano  $OXY$**

É a projeção no plano  $z = 0$  (plano  $OXY$ ) da interseção do gráfico de  $z = f(x, y)$  com o plano horizontal  $z = c$  (plano paralelo ao plano  $OXY$  de altura  $c$ ), isto é, é o conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = c\}.$$

**Superfície de nível  $c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  fixo, em  $\mathbb{R}^3$**

É o conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = c\}.$$

Para  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , por exemplo, as superfícies de nível são esferas com centro na origem cujos raios pertencem ao conjunto  $[0, \infty)$ . De fato, uma tal esfera é a representação geométrica do conjunto

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = (\sqrt{c})^2\}$$

com  $c \in [0, \infty)$  fixo. Note que, a superfície de nível  $0$  é representada pela origem do sistema  $OXYZ$ .

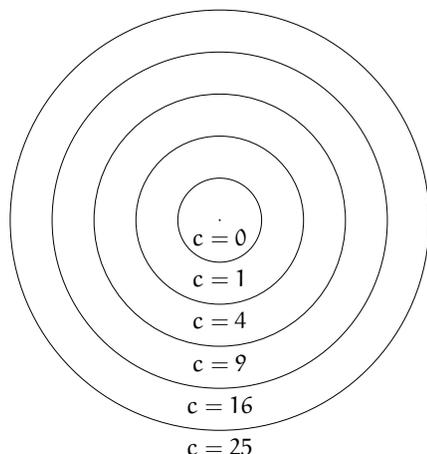
**Exemplo do uso de curvas de nível e de interseções de gráficos com planos verticais para visualização do gráfico de uma função**

Seja  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ . Da geometria analítica ou da álgebra linear (*identificação de quádricas*), sabemos que  $x^2 + y^2 - z = 0$  é um parabolóide de revolução com vértice na origem e eixo das cotas como eixo de revolução, conforme a figura 2.3 da página 59.

Outro modo de visualizar o gráfico é observando, em primeiro lugar, que as curvas de nível são circunferências em  $\mathbb{R}^2$  com centro na origem e raio  $\sqrt{c}$ , ou seja, cada uma dessas curvas pode ser representada pelo conjunto

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = c = (\sqrt{c})^2\}$$

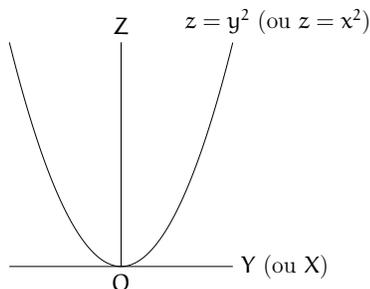
com  $c \in [0, \infty)$  fixo, conforme a seguinte ilustração:



Note que:

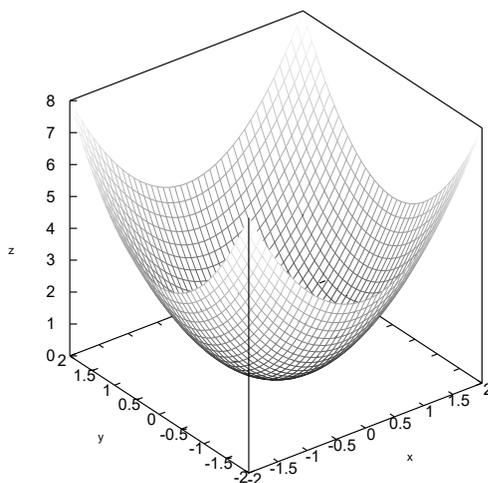
- Para constante  $c$  negativa, não existe curva de nível  $x^2 + y^2 = c$ , isto é, nenhuma parte do gráfico está abaixo do plano  $z = 0$ ;
- Para  $c = 0$ , a curva de nível  $x^2 + y^2 = 0$  representa o ponto  $(x, y) = (0, 0)$ ;
- À medida que  $c$  cresce, cresce a altura do plano horizontal  $z = c$ , bem como o diâmetro da circunferência  $x^2 + y^2 = c$  que representa a projeção da interseção do gráfico de  $z = x^2 + y^2$  com o plano  $z = c$ ;
- As curvas de nível indicam que o gráfico pode ser o parabolóide ou o cone de vértice na origem e eixo  $OZ$  como eixo de revolução.

Assim, para descartar a possibilidade de o gráfico ser o cone, vamos interceptar  $z = x^2 + y^2$  com o plano  $x = 0$  (ou com o  $y = 0$ ), isto é, o plano  $OYZ$  (ou o  $OXZ$ ). Se  $x = 0$ , então  $z = y^2$  é uma parábola em  $OYZ$  com vértice na origem e concavidade para cima (e, analogamente, sendo  $y = 0$ ,  $z = x^2$  é uma parábola em  $OXZ$  com vértice na origem e concavidade para cima), conforme ilustrada a seguir.



Em geral, a interseção do gráfico e qualquer outro plano que contenha o eixo  $OZ$  é uma parábola em tal plano com vértice na origem e concavidade para cima. Assim, o gráfico só pode ser

Figura 2.3: Gráfico da função  $z = f(x, y) = x^2 + y^2$  com  $x$  e  $y$  variando entre  $-2$  e  $2$



o parabolóide da figura 2.3.

Para outros exemplos e alguns exercícios sobre o uso de curvas de nível e de interseções de planos verticais com gráficos de funções, para uma visualização desses gráficos, confira Ávila (2006) e Marsden e Tromba (2004). Além disso, é fortemente recomendável o uso de *softwares* livres para a plotagem de gráficos de funções tais como: *Winplot*, *Kmplot*, *GeoGebra*, *Gnuplot* etc. Como diz o ditado, “uma imagem vale mais do que mil palavras!”. De qualquer modo, em geral, tal visualização só será possível por meio de algum programa gráfico.

## 2.6 Traço (ou trajetória) da curva parametrizada $\gamma(t)$

É a imagem da função  $\gamma$ , isto é, é o conjunto

$$\text{Im}(\gamma) = \{\gamma(t) \mid t \in \text{Dom}(\gamma)\}.$$

Vale ressaltar que, de maneira análoga ao que foi dito para gráficos de funções, apenas alguns traços de figuras geométricas simples como retas (veja figura 2.4), circunferências (veja figura 2.5), hélices (veja figura 2.6) etc., podem ser esboçados sem a necessidade de usar algum pacote gráfico.

### Exemplos

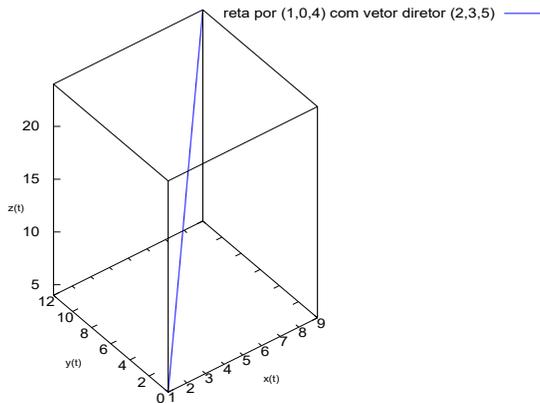
**O traço é uma reta que passa pelo ponto  $P_0 = (1, 0, 4)$  na direção do vetor  $\vec{v} = (2, 3, 5)$**

O conjunto

$$\begin{aligned} \text{Im}(\gamma) &= \{P_0 + t\vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(1 + 2t, 3t, 4 + 5t) \mid t \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

pode ser representado geometricamente por tal reta (veja figura 2.4).

Figura 2.4: Traço de  $\gamma(t) = (1 + 2t, 3t, 4 + 5t)$



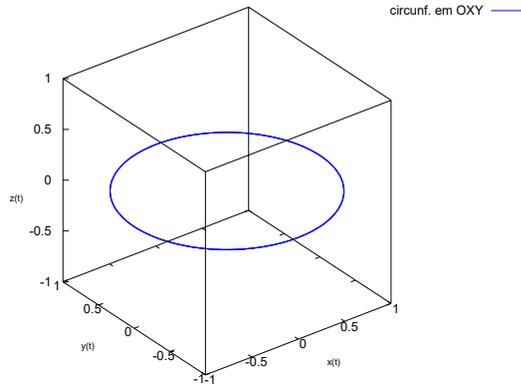
**O traço é uma circunferência de centro na origem e raio unitário no plano OXY**

O conjunto

$$\text{Im}(\gamma) = \{(\cos t, \sin t, 0) \mid t \in [0, 2\pi)\}$$

pode ser representado geometricamente por tal circunferência (veja figura 2.5). De fato, pela *relação fundamental da trigonometria*, temos  $x(t)^2 + y(t)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$  para todo  $t \in [0, 2\pi)$ . Por outro lado, para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $x^2 + y^2 = 1$ , existe  $t \in [0, 2\pi)$  tal que  $x = \cos t$  e  $y = \sin t$ .

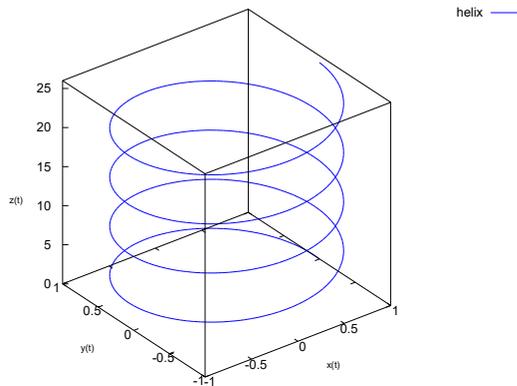
Figura 2.5: Traço de  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$



### A trajetória é uma hélix (ou hélice)

O traço  $\text{Im}(\gamma) = \{(\cos t, \sin t, t) \mid t \in [0, \infty)\}$  é um subconjunto do cilindro representado pelo conjunto  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$  (veja figura 2.6).<sup>5</sup>

Figura 2.6: Traço de  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$



### 2.6.1 Dinâmica de uma partícula percorrendo o traço

$\gamma(t_0)$  é o *vetor posição* de uma partícula que percorre o traço da curva  $\gamma$  no instante de tempo  $t = t_0$  u.t. No exemplo da reta que passa por  $P_0$  na direção de  $\vec{v}$ ,<sup>6</sup>  $\gamma(0) = P_0$  é o vetor posição da partícula no instante  $t = 0$  u.t.

No próximo capítulo, estudaremos os vetores *velocidade* e *aceleração* em  $t = t_0$  u.t.

<sup>5</sup>Verifique!

<sup>6</sup>Confira figura 2.4 da página 60.



# Capítulo 3

## Resultados do cálculo diferencial

*I will not define time, space,  
place and motion, as being well  
known to all.*

---

*Isaac Newton*

### 3.1 Curvas parametrizadas

#### 3.1.1 Limite da função vetorial $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ em $t = t_0$

É dado por

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = \left( \lim_{t \rightarrow t_0} x(t), \lim_{t \rightarrow t_0} y(t), \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) \right),$$

caso existam tais limites.

#### Exemplo

Para  $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$ ,

$$\lim_{t \rightarrow 2} \gamma(t) = \left( \lim_{t \rightarrow 2} t, \lim_{t \rightarrow 2} t^2, \lim_{t \rightarrow 2} t^3 \right) = (2, 4, 8).$$

#### 3.1.2 Continuidade de $\gamma(t)$ em $t = t_0$

Ocorre quando

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \gamma(t) = \gamma(t_0),$$

isto é, quando  $\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = x(t_0)$ ,  $\lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = y(t_0)$  e  $\lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = z(t_0)$ , ou seja, quando  $x(t)$ ,  $y(t)$  e  $z(t)$  são contínuas em  $t = t_0$ .

## Exemplos

- A função  $\gamma(t)$  do exemplo anterior é contínua em  $t = 2$ .<sup>1</sup>
- Funções vetoriais como as dos exemplos da seção 2.6, isto é, funções cujos traços sejam retas, circunferências ou hélices, são contínuas.

### 3.1.3 Derivada da função vetorial $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ em $t = t_0$

Em existindo, é dada por

$$\gamma'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_0+h) - \gamma(t_0)}{h}.$$

Pela subseção 3.1.1, esse limite é igual a

$$\left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h}, \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z(t_0+h) - z(t_0)}{h} \right),$$

isto é,  $\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$ .

$\gamma'(t_0)$  também é chamada de *vetor velocidade* da curva  $\gamma$  no instante  $t = t_0$  u.t.

#### Vetor velocidade e reta tangente ao traço (a trajetória) de $\gamma(t) = (t, t^2)$ em $t = 1$

Para obter o traço, considere  $x = t$  e  $y = t^2 = x^2$ . Portanto, o traço é o gráfico da parábola  $y = x^2$ . Agora, qual é a dinâmica de uma partícula sobre tal trajetória?

À medida que  $t$  cresce de  $-\infty$  até  $0$ ,  $x = t$  também cresce nesse intervalo, enquanto que  $y = t^2$  decresce de  $+\infty$  até  $0$ . Quando  $t$  cresce de  $0$  até  $+\infty$ ,  $x = t$  e  $y = t^2$  também crescem em  $[0, +\infty)$ . Portanto, a partícula “desce” pela parte da parábola do segundo quadrante, até atingir o seu vértice, e depois “sobe” pela parte da parábola do primeiro quadrante. Essa análise deve ser confirmada pelo vetor velocidade. De fato, como  $\gamma'(t) = (1, 2t)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ , seu módulo  $\sqrt{1 + 4t^2}$  diminui de arbitrariamente grande para  $1$  (quando  $t$  varia de  $-\infty$  até  $0$ ) e aumenta de  $1$  até ficar tão grande quanto se queira (quando  $t$  varia de  $0$  até  $+\infty$ ).<sup>2</sup>

Cabe, agora, exemplificar o que ocorre no instante  $t = 1$  u.t.  $P_0 = \gamma(1) = (1, 1)$  é a posição de uma partícula em  $t = 1$  u.t.  $\vec{v} = \gamma'(1) = (1, 2)$  é o vetor velocidade em  $t = 1$  u.t. Assim, para obter a reta tangente à trajetória em  $t = 1$ , considere a reta que passa por  $P_0$  na direção de  $\vec{v}$ , isto é,

$$r(t) = P_0 + t\vec{v} = (1 + t, 1 + 2t) \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

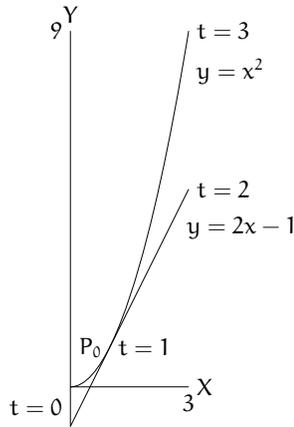
Para confirmar que, de fato, (3.1) é a reta tangente à trajetória em  $t = 1$ , vamos obter a reta  $y = ax + b$  tangente ao gráfico de  $f(x) = x^2$  no ponto de coordenadas  $x = t = 1$  e  $y = t^2 = 1$ , isto é, em  $P_0$ , utilizando o cálculo de uma variável. Por um lado, sabemos que  $a = f'(1) = 2 \cdot 1$ . Assim,  $y = 2x + b$  é a reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $P_0 = (1, 1)$ . Por outro lado, como  $P_0$  pertence a essa reta tangente, isto é, suas coordenadas satisfazem a equação  $y = 2x + b$ , temos que  $b = 1 - 2 \cdot 1 = -1$ , isto é,

$$y = 2x - 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

é a equação da reta tangente ao gráfico de  $f(x) = x^2$  em  $P_0$ , conforme a seguinte ilustração:

<sup>1</sup>Na verdade, essa função é contínua em todos os pontos do seu domínio.

<sup>2</sup>Note que o vetor velocidade tem direção e sentido compatíveis com a dinâmica descrita anteriormente.



Para mostrar que as equações  $y = 2x - 1$  e (3.1) representam a mesma reta, basta eliminar a variável  $t$  da segunda equação, obtendo, assim, a primeira. De fato, sendo  $x = 1 + t$  e  $y = 1 + 2t$ , temos  $x - 1 = t = \frac{y-1}{2}$ , isto é,  $y = 2x - 1$ .

### 3.1.4 Vetor aceleração de $\gamma(t)$ em $t = t_0$ u.t.

Em existindo, é dado por

$$\gamma''(t_0) = (x''(t_0), y''(t_0), z''(t_0)).$$

#### Exemplo

Para  $\gamma(t) = (t, t^2)$ ,  $\gamma''(t) = (0, 2)$  é constante para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

#### Exercícios

1. Para a curva  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ , dada na seção 2.6, verifique que, em cada instante de tempo  $t$ , o vetor velocidade é tangente ao movimento da partícula, isto é, perpendicular ao vetor posição, e o vetor aceleração é simétrico ao vetor posição. Considerando a massa da partícula unitária, como podemos descrever a força centrípeta atuando na partícula?
2. Considerando que uma partícula de massa unitária percorre a trajetória descrita pela curva  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$  (helix), dada na seção 2.6, como podemos descrever a força centrípeta atuando na partícula?
3. Para funções vetoriais  $\gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t), z_1(t))$  e  $\gamma_2(t) = (x_2(t), y_2(t), z_2(t))$ , e para a função real  $f(t)$ , todas deriváveis em  $t = t_0$ , temos que, em  $t = t_0$ :
  - (a)  $(\gamma_1 + \gamma_2)' = \gamma_1' + \gamma_2'$ ;
  - (b)  $(f\gamma)' = f'\gamma + f\gamma'$ , onde  $f\gamma$  representa a multiplicação de um escalar por um vetor. (Em particular, vale que  $(\text{constante} \cdot \gamma)' = \text{constante} \cdot \gamma'$ );
  - (c)  $(\gamma_1 \cdot \gamma_2)' = \gamma_1' \cdot \gamma_2 + \gamma_1 \cdot \gamma_2'$ , onde  $\cdot$  representa o produto escalar de dois vetores;
  - (d)  $(\gamma_1 \times \gamma_2)' = \gamma_1' \times \gamma_2 + \gamma_1 \times \gamma_2'$ , onde  $\times$  representa o produto vetorial de dois vetores.

4. Determine os pontos em que a curva  $\gamma(t) = (t^3 - 1, t^2 + 1, 3t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , intercepta o plano  $3x - 2y - z + 7 = 0$ .<sup>3</sup>

5. A curva

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t) = \left( t, t^2, \frac{t^3 - 1}{5} \right) \in \mathbb{R}^3$$

representa o movimento de um corpo. Em  $t = 1$  u.t., o corpo se desprende da curva e continua seu movimento, sem que haja forças adicionais atuando sobre ele,<sup>4</sup> conforme ilustrado na figura 3.4, página 92. Determine o ponto e o instante em que o corpo atinge o plano  $x + y + z = 10$ .<sup>5</sup>

6. Suponha que uma partícula siga pela trajetória  $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$  até sair pela tangente no instante  $t = 1$  u.t. Onde estará a partícula no instante  $t = 3$  u.t.?<sup>6</sup>

7. Seja  $\gamma(t)$  uma curva parametrizada com coordenadas diferenciáveis tal que  $\|\gamma(t)\| = c$  constante para todo  $t$  pertencente a algum intervalo aberto  $I$ . Prove (usando a regra da derivada do produto escalar) que  $\gamma(t) \perp \gamma'(t)$  para todo  $t \in I$ .<sup>7</sup>

8. Seja  $\gamma(t)$  uma curva parametrizada com coordenadas diferenciáveis, definida num intervalo aberto, cujo traço está sobre uma esfera de centro na origem e raio  $r$ . Prove que  $\gamma(t) \perp \gamma'(t)$  para todo  $t$  pertencente a tal intervalo.<sup>8</sup>

Conforme antecipado na seção 1.1, sugiro que o leitor também tente resolver exercícios sobre curvas parametrizadas em outros livros de cálculo. Recomendo, por exemplo, Ávila (2006) e Marsden e Tromba (2004).

## Observação

Analogamente ao caso de duas/três variáveis, se  $\gamma$  tem  $n$  variáveis dependentes, digamos

$$\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

sua derivada em relação a  $t$  é dada por

$$\gamma'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t)),$$

cujas derivadas em relação a  $t$  é obviamente dada por

$$\gamma''(t) = (x_1''(t), \dots, x_n''(t)).$$

---

<sup>3</sup>Resolução na seção 3.5.

<sup>4</sup>*Movimento retilíneo uniforme.*

<sup>5</sup>Resolução na seção 3.5.

<sup>6</sup>*Idem.*

<sup>7</sup>*Idem.*

<sup>8</sup>*Idem.*

## 3.2 Continuidade e diferenciabilidade

### 3.2.1 Interpretação geométrica da continuidade para funções reais de uma (duas) variável (variáveis) real (reais)<sup>9</sup>

$y = f(x)$  é contínua quando seu gráfico não apresenta interrupções (“saltos” e/ou “buracos”) enquanto  $x$  varia numa parte sem interrupções de seu domínio. Analogamente,  $z = f(x, y)$  é contínua quando seu gráfico não apresenta interrupções (“saltos” e/ou “buracos”) enquanto  $(x, y)$  varia numa parte sem interrupções de  $\text{Dom}(f)$ .

#### Exemplo

Como o gráfico da função  $f(x, y) = -x - y + 1$ , dada na seção 2.5, é um plano,<sup>10</sup>  $z = f(x, y)$  é contínua.

Em geral, é contínua qualquer função cujo gráfico seja o plano  $ax + by + cz = d$ .<sup>11</sup> Em particular, são contínuas:

#### Função constante

$z = \text{cte}(x, y) = \text{constante}$  ( $c = 1$ ,  $a = b = 0$  e  $d = \text{constante}$ );

#### Projeção na primeira coordenada

$z = p_1(x, y) = x$  ( $a = 1$ ,  $b = 0$ ,  $c = -1$  e  $d = 0$ );

#### Projeção na segunda coordenada

$z = p_2(x, y) = y$  ( $a = 0$ ,  $b = 1$ ,  $c = -1$  e  $d = 0$ ).

### 3.2.2 Propriedades das funções contínuas

Somas, diferenças, produtos e, quando possíveis, quocientes e composições de funções reais contínuas de uma variável real também são contínuas. O mesmo vale para funções reais contínuas de duas variáveis reais.

#### Exemplos

Utilizando as funções  $\text{cte}$ ,  $p_1$  e  $p_2$  supracitadas, são contínuas as funções:

- $z = f(x, y) = \sum_{i=1}^k \text{constante}_i x^{m_i} y^{n_i}$  onde  $m_i$  e  $n_i$  são inteiros não negativos;
- $z = \sqrt{3}xy^2 + (\log 2)x^3y^3 + x^2 + y + \cos \frac{2\pi}{7}$ ;<sup>12</sup>
- $z = e^{\sqrt{3}xy^2 + (\log 2)x^3y^3 + x^2 + y + \cos \frac{2\pi}{7}}$ .<sup>13</sup>

<sup>9</sup>Formalmente, o estudo de *continuidade* precisa do conceito de *limites*.

<sup>10</sup>Ver a figura 2.1, página 56.

<sup>11</sup>Para a função  $z = -x - y + 1$ , temos  $a = b = c = d = 1$ .

<sup>12</sup>Aqui,  $\text{constante}_1 = \sqrt{3}$ ,  $\text{constante}_2 = \log 2$ ,  $\text{constante}_3 = \text{constante}_4 = 1$ ,  $\text{constante}_5 = \cos \frac{2\pi}{7}$ ,  $m_1 = 1$ ,  $m_2 = 3$ ,  $m_3 = 2$ ,  $m_4 = m_5 = 0$ ,  $n_1 = 2$ ,  $n_2 = 3$ ,  $n_3 = n_4 = n_5 = 0$  e  $n_6 = 1$ .

<sup>13</sup>Confira a subseção 3.5.2.

Resultados análogos são válidos para funções reais de três variáveis reais que sejam contínuas.

### Exemplo

A função  $w = f(x, y, z) = \sqrt{\frac{\pi x^3 y^2 z + y^5 z^7 + 2z^6}{z^2 + 1}}$  é contínua.

### 3.2.3 Derivação parcial para funções de duas/três variáveis reais<sup>14</sup>

Para calcular a derivada parcial de uma função em relação a uma de suas variáveis independentes, digamos  $y$ , consideram-se todas as suas outras variáveis independentes, digamos  $x$  e  $z$ , como constantes e, em sendo possível, deriva-se a função apenas em relação a  $y$ . Por exemplo, se  $w = f(x, y, z)$ , a *derivada parcial de  $f$  em relação a  $y$*  é denotada por  $f_y$  e pode ser obtida derivando-se  $f$  (como no cálculo de funções reais de *uma* variável real) apenas em relação à variável  $y$ , sendo  $x$  e  $z$  constantes em tal derivação.

Além de  $f_y$ , podemos utilizar também, por exemplo, as notações  $\frac{\partial f}{\partial y}$  ou  $\frac{\partial w}{\partial y}$ .

Agora, seja  $f$  *simétrica*, isto é, a permutação de duas ou três de suas variáveis independentes não modifica a função. Suponha, por exemplo, que tal simetria tenha lugar nas variáveis  $x$  e  $y$ , como nos exercícios 1(a), 1(b) e 1(d), 2(a) e 2(b) e 3(c), dados a seguir. Assim,  $f_y$  é obtida simplesmente permutando-se as variáveis  $x$  e  $y$  da  $f_x$ . Em outras palavras, o cálculo só precisa ser feito para  $f_x$ ;  $f_y$  segue via permutação simples.

### Exercícios

1. Obtenha  $f_x$  e  $f_y$  para:

(a)  $f(x, y) = xy$ ;

(b)  $f(x, y) = e^{xy}$ ;

(c)  $f(x, y) = x \cos x \cos y$ ;

(d)  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$ .

2. Calcule as derivadas parciais  $\partial z/\partial x$  e  $\partial z/\partial y$  das funções dadas nos pontos indicados.

(a)  $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ,  $(0, 0)$ ,  $(a/2, a/2)$ ;

(b)  $z = \ln \sqrt{1 + xy}$ ,  $(1, 2)$ ,  $(0, 0)$ ;

(c)  $z = e^{ax} \cos(bx + y)$ ,  $(2\pi/b, 0)$ .

3. Em cada um dos casos seguintes, obtenha as derivadas parciais  $\partial w/\partial x$  e  $\partial w/\partial y$ .

(a)  $w = xe^{x^2+y^2}$ ;

(b)  $w = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ ;

(c)  $w = e^{xy} \ln(x^2 + y^2)$ ;

(d)  $w = x/y$ ;

(e)  $w = \cos(ye^{xy}) \sin x$ .

---

<sup>14</sup>É necessário o conceito de *limites* para uma definição formal dessas *derivadas*.

### Observação

Analogamente ao caso de duas/três variáveis, se  $f$  tem  $n$  variáveis independentes, digamos

$$f(x_1, \dots, x_n),$$

a derivada parcial de  $f$  em relação à  $i$ -ésima variável, isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i},$$

é obtida considerando-se  $x_i$  como variável e todas as outras variáveis independentes como constantes.

### 3.2.4 (Vetor) gradiente de $f$ no ponto $P_0$ , isto é, $\nabla f(P_0)$

Em existindo as derivadas seguintes, é dado por:

$\nabla f(x_0) = f'(x_0)$  para  $P_0 = x_0$  e  $y = f(x)$ ;

$\nabla f(x_0, y_0) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$  para  $P_0 = (x_0, y_0)$  e  $z = f(x, y)$ ;

$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = (f_x(x_0, y_0, z_0), f_y(x_0, y_0, z_0), f_z(x_0, y_0, z_0))$  se  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e  $w = f(x, y, z)$ ;  
etc. (Isto é, o padrão se mantém para funções reais de mais de três variáveis reais.)

### Exemplos

- Sejam  $f(x, y, z) = \sin(\ln(xy)) + \cos\left(\frac{xz\pi}{4}\right)$ , em radianos, e  $P_0 = (1, 1, 2)$ . Daí, como

$$f_x = \frac{\cos(\ln(xy))}{x} - \frac{z\pi}{4} \sin\left(\frac{xz\pi}{4}\right), \quad f_y = \frac{\cos(\ln(xy))}{y} \quad \text{e} \quad f_z = -\frac{x\pi}{4} \sin\left(\frac{xz\pi}{4}\right),$$

temos que

$$f_x(P_0) = \frac{\cos(\ln 1)}{1} - \frac{\pi}{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \quad f_y(P_0) = \frac{\cos(\ln 1)}{1} \quad \text{e} \quad f_z(P_0) = -\frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\therefore \quad \nabla f(P_0) = \left(1 - \frac{\pi}{2}, 1, -\frac{\pi}{4}\right).$$

- Sendo

$$\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$$

o vetor que vai da origem ao ponto  $(x, y, z)$  e

$$r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

o seu módulo, o gradiente de  $r$  é dado por

$$\begin{aligned} \nabla r &= (r_x, r_y, r_z) \\ &= \left( \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}(x, y, z) \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r}. \end{aligned}$$

## Exercícios

Verifique (para pontos que não sejam a origem) que:

1.  $\nabla \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$ ;
2.  $\nabla \ln r = \frac{\mathbf{r}}{r^2}$ ;
3.  $\nabla f(\mathbf{r}) = \frac{f'(r)\mathbf{r}}{r}$  para  $f$  diferenciável em relação a  $r$ .<sup>15</sup>

### 3.2.5 Derivadas parciais de ordens superiores para $f(x, y) = \frac{\cos y}{x} - yx^3$

$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\cos y}{x^2} - 3yx^2$  e  $f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\sin y}{x} - x^3$  são as derivadas parciais de *primeira ordem* de  $f(x, y)$ . Em sendo possível derivá-las, obtemos suas derivadas parciais de *segunda ordem*. Portanto:

- $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{2\cos y}{x^3} - 6yx$ ;
- $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\sin y}{x^2} - 3x^2$ ;
- $f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\sin y}{x^2} - 3x^2$ ;
- $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) = -\frac{\cos y}{x}$ .

Analogamente, utilizando essas derivadas de segunda ordem, podemos obter as derivadas parciais de *terceira ordem* e assim sucessivamente.

### Observação

Não apenas para a função do exemplo dado, mas para qualquer  $f(x, y)$  definida em alguma bola aberta de centro em  $(x_0, y_0)$  onde  $f_x$ ,  $f_y$ ,  $f_{xy}$  e  $f_{yx}$  existam e sejam contínuas, vale que

$$\boxed{f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)}.$$

## Exercícios

1.  $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$  satisfaz a equação  $f_{xx} + f_{yy} = 0$ ?<sup>16</sup>
2. Verifique que a função  $z = e^{-x^2/4kt}/\sqrt{t}$  satisfaz a  $z_t = kz_{xx}$ , dita *equação de difusão* ou *equação do calor*, onde  $k$  é uma constante.<sup>17</sup>

<sup>15</sup>Generalização do segundo item dos exemplos e dos exercícios 1 e 2 de 3.2.4.

<sup>16</sup>Resolução na seção 3.5.

<sup>17</sup>*Idem.*

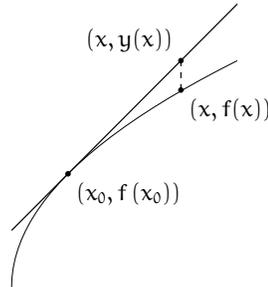
### 3.2.6 Diferenciabilidade<sup>18</sup>

#### Reta tangente para $y = f(x)$

$y = f(x)$  é diferenciável em  $x_0$  se, e somente se, existe reta tangente ao gráfico de  $f$  em  $P_0 = (x_0, f(x_0))$  dada por

$$f'(x_0) \cdot (x - x_0) + (-1) \cdot (y(x) - f(x_0)) = 0,$$

conforme a seguinte ilustração:



Temos, aqui, uma representação geométrica de parte da reta  $y(x) = ax + b$ , tangente ao gráfico de  $f$  num ponto  $P_0$  desse gráfico, onde  $a = f'(x_0)$ .

Para  $y = f(x)$  ser diferenciável em  $x_0$  basta que exista  $f'(x_0)$ !

#### Aproximação linear

Podemos aproximar (*localmente*) o gráfico de  $f$  em  $P_0$  por sua reta tangente em  $P_0$ , isto é,  $(x, f(x))$  próximo de  $P_0$  pode ser aproximado pelo ponto  $(x, y)$  da reta tangente, ou seja, sendo  $|x - x_0| = |\Delta x| \ll 1$  arbitrariamente pequeno, temos que

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

#### Exemplo

Na subseção 3.1.3, num exemplo sobre curvas parametrizadas, vimos que para  $f(x) = x^2$  e  $x_0 = 1$ ,  $y = 2x - 1$  é a reta tangente ao gráfico de  $f(x)$  no ponto  $P_0 = (x_0, f(x_0)) = (1, 1)$ . Vamos estimar o erro absoluto cometido quando aproximamos  $f(x)$  linearmente no ponto  $x = 1,001$ .<sup>19</sup> Assim, como

$$\begin{aligned} f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x &= f(1) + f'(1) \cdot (0,001) \\ &= 1 + 2 \cdot (0,001) \\ &= 1,002 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(x_0) &= x_0^2 \\ &= (1,001)^2 \\ &= 1,002001, \end{aligned}$$

temos que a aproximação linear calcula  $f(1)$  com erro da ordem de  $10^{-6}$ .

<sup>18</sup>Aqui, o conceito de *limites* é necessário.

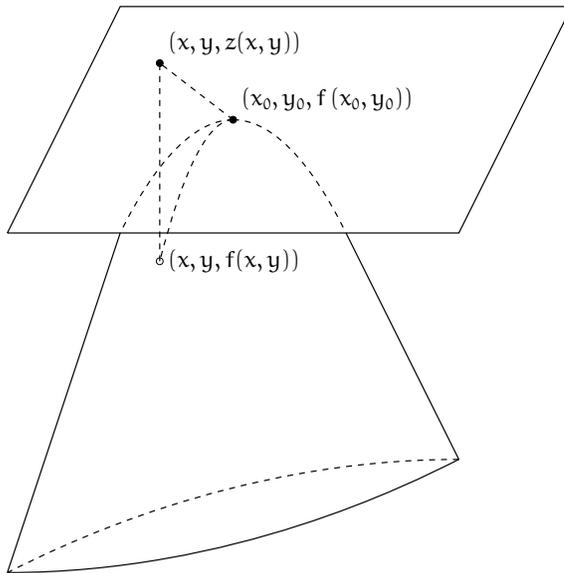
<sup>19</sup>Note que  $\Delta x = x - x_0 = 0,001$ .

## Plano tangente para $z = f(x, y)$

$z = f(x, y)$  é diferenciável em  $(x_0, y_0)$  se, e somente se, existe plano tangente ao gráfico de  $f$  em  $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  dado por

$$f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + (-1) \cdot (z(x, y) - f(x_0, y_0)) = 0,^{20} \quad (3.2)$$

conforme a seguinte ilustração:



Temos, aqui, uma representação geométrica de parte do plano  $ax + by + cz(x, y) + d = 0$ , tangente ao gráfico de  $f$  num ponto  $P_0$  desse gráfico, onde  $a = f_x(x_0, y_0)$ ,  $b = f_y(x_0, y_0)$  e  $c = -1$ .

Para que  $z = f(x, y)$  seja diferenciável em  $(x_0, y_0)$  basta que  $f_x$  e  $f_y$  existam e sejam contínuas em alguma bola aberta de centro  $(x_0, y_0)$ !

## Aproximação linear

Podemos aproximar (*localmente*) o gráfico de  $f$  em  $P_0$  por seu plano tangente em  $P_0$ , isto é,  $(x, y, f(x, y))$  próximo de  $P_0$  pode ser aproximado pelo ponto  $(x, y, z)$  do plano tangente, ou seja, sendo  $|x - x_0| = |\Delta x| \ll 1$  e  $|y - y_0| = |\Delta y| \ll 1$  arbitrariamente pequenos, temos que

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

<sup>20</sup>A equação do plano tangente para  $z = f(x, y)$  é dada aqui por analogia com a equação da reta tangente para  $y = f(x)$ . Contudo, será obtida pela consequência (C<sub>3</sub>) da *regra da cadeia*.

### Exercício resolvido

Qual é a equação do plano tangente à esfera de centro na origem e raio unitário no ponto  $P_0 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ ?

#### RESOLUÇÃO

Por um lado, como o plano tangente tem vetor normal dado por  $\vec{n} = (1, 1, 1)$ ,<sup>21</sup> esse plano pode ser representado por  $x + y + z + d = 0$ . Assim, como  $P_0$  satisfaz essa equação, temos que  $\frac{3}{\sqrt{3}} + d = 0$ . Portanto,

$$x + y + z - \sqrt{3} = 0$$

é a equação do plano procurado.

Por outro lado, a calota superior de tal esfera é o gráfico de  $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  com  $x^2 + y^2 \leq 1$ , conforme figura 2.2, página 56. Logo, como

$$f_x = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} \text{ e } f_y = -\frac{y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

existem e são contínuas em alguma bola aberta de centro em  $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ , temos que  $f$  é diferenciável nesse ponto. Portanto, via (3.2), a equação

$$f_x(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \cdot \left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f_y(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \cdot \left(y - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + (-1) \cdot \left(z - f(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})\right) = 0 \quad (3.3)$$

representa o plano tangente procurado. Assim, devido a  $f(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = \sqrt{1 - (2/3)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  e  $f_x(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = f_y(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = \frac{-1/\sqrt{3}}{\sqrt{1 - (2/3)}} = -1$ , (3.3) é dada por

$$(-1) \left(x - \left(1/\sqrt{3}\right)\right) + (-1) \left(y - \left(1/\sqrt{3}\right)\right) + (-1) \left(z - \left(1/\sqrt{3}\right)\right) = 0,$$

isto é,  $x - \frac{1}{\sqrt{3}} + y - \frac{1}{\sqrt{3}} + z - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0$ , ou seja,

$$x + y + z - \sqrt{3} = 0.$$

### Exercícios

1. Obtenha a equação do plano tangente ao gráfico de  $z = f(x, y)$  no ponto  $P_0$  para:

(a)  $z = 2x^2 + y^2$  (paraboloide) e  $P_0 = (1, 1, 3)$ ;      RESPOSTA:  $4x + 2y - z - 3 = 0$

(b)  $z = \sqrt{x - y}$  e  $P_0 = (5, 1, 2)$ ;      RESPOSTA:  $x - y - 4z + 4 = 0$

(c)  $z = \ln(2x + y)$  e  $P_0 = (-1, 3, 0)$ .      RESPOSTA:  $2x + y - z - 1 = 0$

2. Aproxime linearmente uma função adequada  $f(x, y)$  e a partir dela estime:

(a)  $(0, 99e^{0,002})^8$ ,<sup>22</sup>

(b)  $(0, 99)^3 + (2, 01)^3 - 6(0, 99)(2, 01)$ .<sup>23</sup>

<sup>21</sup>Basta considerar a reta que passa pela origem e pelo ponto  $P_0$ .

<sup>22</sup>Resolução na seção 3.5.

<sup>23</sup>*Idem*.

### 3.2.7 Regra da cadeia

- Para  $\mathbf{x}(t)$  diferenciável em  $t = t_0$  e  $f(x)$  diferenciável em  $x = \mathbf{x}(t_0)$ ,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) \right|_{t=t_0} &= \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\mathbf{x}(t_0)} \cdot \left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{t=t_0} \\ &= \nabla f(\mathbf{x}(t_0)) \cdot \mathbf{x}'(t_0); \end{aligned}$$

- Para  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{y}(t)$  diferenciáveis em  $t = t_0$  e  $f(x, y)$  diferenciável em  $(x, y) = (\mathbf{x}(t_0), \mathbf{y}(t_0))$ ,

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t)) \right|_{t=t_0} &= f_x \Big|_{(x,y)=(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{y}(t_0))} \cdot \left. \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right|_{t=t_0} + f_y \Big|_{(x,y)=(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{y}(t_0))} \cdot \left. \frac{d\mathbf{y}}{dt} \right|_{t=t_0} \\ &= \nabla f(\mathbf{x}(t_0), \mathbf{y}(t_0)) \cdot (\mathbf{x}'(t_0), \mathbf{y}'(t_0)); \end{aligned}$$

- Em geral, para  $\gamma(t)$  com coordenadas diferenciáveis em  $t = t_0$  e  $f$  diferenciável em  $\gamma(t_0)$ ,

$$\left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=t_0} = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0),$$

onde  $\cdot$  representa o produto escalar de vetores.

#### Exemplo

$x(t) = e^t$  e  $y(t) = \ln t$  são diferenciáveis para todo  $t \in (0, \infty)$  e  $f(x, y) = e^y \ln x$  é diferenciável para todo  $(x, y) \in (0, \infty) \times \mathbb{R}$ .<sup>24</sup> Assim, por um lado, de  $f(x(t), y(t)) = e^{\ln t} \ln e^t = t \cdot t = t^2$ , temos que

$$\frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = 2t.$$

Por outro lado, como  $x'(t) = e^t$ ,  $y'(t) = 1/t$ ,  $f_x(x(t), y(t)) = \frac{e^{y(t)}}{x(t)} = \frac{e^{\ln t}}{e^t} = \frac{t}{e^t}$  e  $f_y(x(t), y(t)) = e^{y(t)} \ln x(t) = e^{\ln t} \ln e^t = t^2$ , temos também que

$$\begin{aligned} \nabla f(x(t), y(t)) \cdot (x'(t), y'(t)) &= \frac{t}{e^t} \cdot e^t + t^2 \cdot \frac{1}{t} \\ &= 2t. \end{aligned}$$

### 3.2.8 Algumas consequências da regra da cadeia

(C<sub>1</sub>) Derivada de  $f$  no ponto  $P_0$  e na direção do vetor  $\vec{u}$

É definida por

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{u}} := \nabla f(P_0) \cdot \vec{u}.$$

Outra notação muito utilizada é a seguinte:

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{u}} = f_{\vec{u}}(P_0).$$

<sup>24</sup>De fato,  $f_x$  e  $f_y$  existem e são contínuas em qualquer bola aberta contida em  $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ .

### Exemplo

Se  $P_0 \in \mathbb{R}^3$  e  $\vec{u} \in \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ , então  $f_{\vec{u}}(P_0) \in \{f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)\}$ . De fato, a derivada de  $f$  na direção de  $\vec{i}$  é dada por

$$\begin{aligned} f_{\vec{i}}(P_0) &= (f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)) \cdot (1, 0, 0) \\ &= f_x(P_0) + 0 + 0 \\ &= f_x(P_0) \end{aligned}$$

e, analogamente,  $f_{\vec{j}}(P_0) = f_y(P_0)$  e  $f_{\vec{k}}(P_0) = f_z(P_0)$ .

Em geral, se  $\vec{u} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$  com  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ , então

$$\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{u}} = a \frac{\partial f(P_0)}{\partial x} + b \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} + c \frac{\partial f(P_0)}{\partial z}.$$

### Exercício

Obter a derivada da função  $f$ , no ponto e na direção dados.

*Sugestão:* Normalize a direção.

1.  $f(x, y, z) = e^x \cos(yz)$ ,  $P_0 = (0, 0, 0)$ ,  $\vec{v} = (2, 1, -2)$ ;

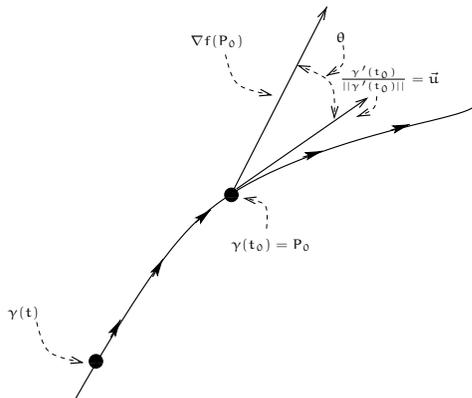
RESPOSTA:  $2/3$

2.  $f(x, y, z) = xy + yz + zx$ ,  $P_0 = (1, 1, 2)$ ,  $\vec{v} = (10, -1, 2)$ .

RESPOSTA:  $31/\sqrt{105}$ .

Discutiremos, agora, o porquê de  $f_{\vec{u}}$  representar uma derivada do “cálculo I”.<sup>25</sup>

Figura 3.1: Como  $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{w} = \frac{\vec{w} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2} \vec{v}$  é a projeção ortogonal de  $\vec{w}$  sobre  $\vec{v} \neq \vec{0}$ , o módulo da derivada de  $f$  no ponto  $P_0 = \gamma(t_0)$  e na direção de  $\vec{u} = \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|}$  é igual ao módulo da projeção ortogonal de  $\nabla f(\gamma(t_0))$  sobre  $\vec{v} = \gamma'(t_0)$ , isto é, é igual a  $\left| \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \frac{\gamma'(t_0)}{\|\gamma'(t_0)\|} \right| = \|\nabla f(\gamma(t_0))\| \cos \theta$



<sup>25</sup>Portanto, em particular,  $f_x$ ,  $f_y$  e  $f_z$  também podem ser interpretadas como derivadas do “cálculo I”.

## “Justificativa” da fórmula para a derivada direcional<sup>26</sup>

$f_{\vec{u}}(P_0)$  pode ser obtida da regra da cadeia, considerando uma curva parametrizada  $\gamma(t)$  tal que  $\gamma(t_0) = P_0$  e  $\gamma'(t_0) = \vec{v} \neq \vec{0}$ , conforme a figura 3.1. De fato, se  $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ , então

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=t_0} &= \nabla f(P_0) \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{v}\| \left( \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right) \\ &= \|\vec{v}\| \cdot f_{\vec{u}}(P_0). \end{aligned}$$

Portanto,  $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{u}}$  é simplesmente um múltiplo escalar da derivada  $\left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=t_0}$ .

A próxima consequência da regra da cadeia interpreta  $\partial f / \partial \vec{u}$  como *taxa de variação*.

**(C<sub>2</sub>) Em sendo não nulo,  $\nabla f(P_0)$  (respectivamente,  $-\nabla f(P_0)$ ) aponta na direção na qual  $f$  cresce (respectivamente, decresce) mais rapidamente**

De fato, da fórmula do produto interno, temos que  $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{u}} = \|\nabla f(P_0)\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos \theta$ , onde  $\theta \in [0, \pi]$  é o ângulo entre os vetores envolvidos, conforme a figura 3.1. Daí, como  $\|\vec{u}\| = 1$  e  $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ , temos que

$$-\|\nabla f(P_0)\| \leq \|\nabla f(P_0)\| \cos \theta \leq \|\nabla f(P_0)\|,$$

isto é,  $\|\nabla f(P_0)\|$  é o maior valor de  $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{u}}$ , ocorrendo para  $\theta = 0$ , e  $-\|\nabla f(P_0)\|$  é o menor valor de  $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{u}}$ , ocorrendo para  $\theta = \pi$ .

### Exemplo

A partir do ponto  $(0, 1)$ , em que direção  $f(x, y) = x^2 - y^2$  cresce mais rapidamente?

De  $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ , temos  $\nabla f(0, 1) = (0, -2) = -2\vec{j}$ . Portanto,  $f$  cresce mais rapidamente a partir de  $(0, 1)$  na direção  $-\vec{j}$ .

### Exercício

Determinar a direção na qual a função  $z = x^2 + xy$  cresce mais rapidamente no ponto  $(-1, 1)$ . Qual é a norma de  $\nabla z$  nesse ponto e como podemos interpretar tal valor?

**(C<sub>3</sub>) Para  $P_0 \in \mathbb{R}^3$ ,  $\nabla f(P_0)$  é normal à superfície  $f(x, y, z) = f(P_0)$  em  $P_0$**

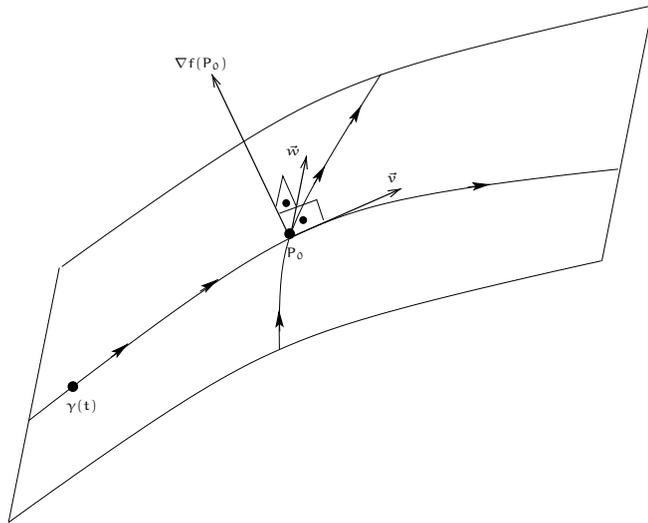
Sem perda de generalidade, considere  $\nabla f(P_0) \neq \vec{0}$ . Agora, seja  $\gamma(t)$  uma curva parametrizada sobre a superfície  $f(x, y, z) = f(P_0)$ , isto é,

$$\begin{aligned} f(\gamma(t)) &= f(P_0) \\ &= \text{constante.} \end{aligned}$$

Suponha que essa curva passa por  $P_0$  em  $t = t_0$ , isto é,  $\gamma(t_0) = P_0$ , e que  $\vec{v} = \gamma'(t_0)$ , conforme a figura 3.2. Portanto, utilizando a regra da cadeia,

<sup>26</sup>Para definir *derivadas direcionais* é necessário o conceito de *limites*.

Figura 3.2:  $\nabla f(P_0)$  é perpendicular ao plano gerado por vetores tangentes, digamos  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , a curvas em  $P_0$



$$\begin{aligned}
 \nabla f(P_0) \cdot \vec{v} &= \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0) \\
 &= \left. \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \right|_{t=t_0} \\
 &= \left. \frac{d}{dt} (\text{constante}) \right|_{t=t_0} \\
 &= 0,
 \end{aligned}$$

ou seja,  $\nabla f(P_0)$  é perpendicular a  $\vec{v}$ . Analogamente, para outra curva sobre a mesma superfície e que também passa por  $P_0$  num dado instante, agora com vetor velocidade  $\vec{w}$ , temos que  $\nabla f(P_0) \perp \vec{w}$ . Assim,  $\nabla f(P_0)$  é normal ao plano gerado pelos vetores  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ . Como tais vetores são tangentes à superfície em  $P_0$ , esse plano também é tangente à superfície em  $P_0$ .

### Exercícios resolvidos

1. Qual é a equação do plano tangente à esfera de centro na origem e raio unitário no ponto  $P_0 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ ?<sup>27</sup>

RESOLUÇÃO

Vimos que esse plano é dado por

$$x + y + z - \sqrt{3} = 0.$$

<sup>27</sup>Esse exercício está resolvido de outra forma na página 73.

Para confirmar essa equação, seja  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ . Então, como

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= 1 \\ &= f(P_0) \end{aligned}$$

e  $\nabla f = (2x, 2y, 2z)$  em  $P_0$  é dado por

$$\left( \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2}{\sqrt{3}} \right),$$

segue de  $(C_3)$  que o plano é dado pela equação

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \cdot x + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot y + \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot z + d = 0,$$

onde, como  $P_0$  é um ponto desse plano, basta substituir

$$\begin{aligned} d &= -3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \\ &= -2. \end{aligned}$$

2. Verifique que os vetores normais unitários à superfície  $x^3y^3 + y - z + 2 = 0$  em  $(0, 0, 2)$  são dados por  $\vec{n} = \pm(1/\sqrt{2})(\vec{j} - \vec{k})$ .

RESOLUÇÃO

Sejam  $f(x, y, z) = x^3y^3 + y - z + 2$  e  $P_0 = (0, 0, 2)$ . Então, como  $f(P_0) = 0$ , segue de  $(C_3)$  que

$$\nabla f(P_0) \perp \{(x, y, z) / f(x, y, z) = f(P_0)\}$$

em  $P_0$ . Assim, devido a

$$\nabla f = (3x^2y^3, 3x^3y^2 + 1, -1),$$

temos

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \pm \frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|} \\ &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1). \end{aligned}$$

## Exercícios

1. Obtenha o vetor normal unitário à superfície  $\cos(xy) = e^z - 2$  em  $(1, \pi, 0)$ .
2. Obtenha o plano tangente e a reta normal ao hiperboloide  $x^2 + y^2 - z^2 = 18$  em  $(3, 5, -4)$ .

## Corolário de $(C_3)$

Se  $F(x, y, z) = f(x, y) - z$  com  $f(x, y)$  diferenciável em  $(x_0, y_0)$ , então o plano tangente à superfície  $F(x, y, z) = 0$  em  $P_0 = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$  tem vetor normal dado por

$$(F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)) = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1).$$

Assim, a equação do plano tangente a tal superfície em  $P_0$  é dada por

$$f_x(x_0, y_0)x + f_y(x_0, y_0)y + (-1)z + d = 0,$$

onde, como  $P_0$  pertence a esse plano,

$$d = -f_x(x_0, y_0)x_0 - f_y(x_0, y_0)y_0 - (-1)f(x_0, y_0).$$

Portanto,

$$f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) + (-1) \cdot (z - f(x_0, y_0)) = 0 \quad (3.4)$$

é a equação do plano tangente ao gráfico de  $z = f(x, y)$  no ponto  $P_0$ .<sup>28</sup>

#### (C4) Outra regra da cadeia

Se  $x = x(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  e  $y = y(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  são diferenciáveis em  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$  e  $z = f(x, y)$  é diferenciável em  $(x, y) = (x(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0), y(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0))$ , então  $z = f(x(\mathbf{u}, \mathbf{v}), y(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$  é diferenciável em  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$  e, nesse ponto,

1.  $\frac{\partial z}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{u}} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{u}},$
2.  $\frac{\partial z}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{v}} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \mathbf{v}}.$

Demonstraremos esse resultado apenas para  $\partial z / \partial \mathbf{u}$ . Antes, porém, vamos verificá-lo para as funções  $z = e^{x^2} \sin y$ ,  $x = uv^2$  e  $y = u^2v$ . Como  $z = e^{u^2v^4} \sin(u^2v)$ , a regra da derivada do produto pode ser utilizada para obter

$$z_u = 2uv^4 e^{u^2v^4} \sin(u^2v) + e^{u^2v^4} 2uv \cos(u^2v).$$

Por outro lado, como  $z_x = 2xe^{x^2} \sin y = 2uv^2 e^{u^2v^4} \sin(u^2v)$ ,  $z_y = e^{x^2} \cos y = e^{u^2v^4} \cos(u^2v)$ ,  $x_u = v^2$  e  $y_u = 2uv$ , temos que  $z_x x_u + z_y y_u = z_u$ .

#### DEMONSTRAÇÃO

Fixe  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ . Sejam as funções reais apenas da variável real  $\mathbf{u}$  dadas por  $X(\mathbf{u}) = x(\mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$  e  $Y(\mathbf{u}) = y(\mathbf{u}, \mathbf{v}_0)$ . Portanto, podemos usar a regra da cadeia para  $z = f(X(\mathbf{u}), Y(\mathbf{u}))$  em  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$ :

$$\frac{d}{d\mathbf{u}} f(X(\mathbf{u}), Y(\mathbf{u})) \Big|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_0} = \nabla f(X(\mathbf{u}_0), Y(\mathbf{u}_0)) \cdot (X'(\mathbf{u}_0), Y'(\mathbf{u}_0)).$$

Isto equivale a  $z_u = z_x x_u + z_y y_u$  em  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0)$ .

#### Exercício

Calcule  $\partial z / \partial x$  e  $\partial z / \partial y$  para

$$z = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}, \quad u = e^{-x-y} \quad \text{e} \quad v = e^{xy},$$

das seguintes maneiras:

1. Substituindo e calculando diretamente;
2. Utilizando a regra da cadeia.

---

<sup>28</sup>Compare (3.4) com (3.2), p. 72.

## 3.3 Otimização

### 3.3.1 Máximos, mínimos e pontos críticos

Um *maximizador* (respectivamente, *minimizador*) *local* da função  $f$  é um ponto  $P_0 \in \text{Dom}(f)$  tal que, para cada ponto  $P$  pertencente a alguma bola aberta de centro  $P_0$ ,

$$f(P_0) \geq f(P) \quad (\text{respectivamente, } f(P_0) \leq f(P))$$

e, nesse caso,  $f(P_0)$  é um *valor máximo* (respectivamente, *mínimo*) *local* de  $f$ . Ainda, tal maximizador (respectivamente, minimizador) também é chamado de *ponto de máximo* (respectivamente, *ponto de mínimo*) ou *extremante*.

**(O<sub>1</sub>)** Se  $f$  tem extremante local  $P_0$  interior ao seu domínio onde existe  $\nabla f$ , então  $P_0$  é ponto crítico de  $f$ , isto é,  $\nabla f(P_0) = \vec{0}$ .

#### Exemplo

Na figura 1.1 da página 26, considere que  $P_i = (x_i, f(x_i))$  pertence ao gráfico de uma função real  $f$  de uma variável real,  $i = 0, \dots, 6$ .<sup>29</sup> Embora as abscissas de índices pares sejam maximizadores locais e as de índices ímpares sejam minimizadores locais, apenas  $x_1$ ,  $x_2$  e  $x_5$  são interiores ao domínio de  $f$  com derivadas nulas:  $x_0$  e  $x_6$  não são interiores, enquanto que  $f'(x_3)$  e  $f'(x_4)$  não existem.

#### Ponto de Sela

Exemplificaremos, em (O<sub>1'</sub>), a validade de (O<sub>1</sub>) para funções reais de várias variáveis reais. Contudo, salientamos que a recíproca desse resultado não é verdadeira, nem mesmo para funções de uma variável real.

#### Exemplo

Para  $f(x) = x^3$ ,  $x = 0$  é um ponto interior com  $f'(0) = 0$ , mas não é extremante local. Um ponto como este é dito *ponto de sela*.<sup>30</sup>

**(O<sub>1'</sub>)** “Candidatos” a extremantes interiores locais onde exista o gradiente: pontos onde o gradiente seja nulo!

#### Exemplo

Considere a função  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Primeiramente, note que todo ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  é interior a  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$ . Agora, embora possam existir pontos interiores que anulem o gradiente de  $f$  e não sejam extremantes locais (conforme exemplo anterior), nossos “candidatos” a pontos (interiores) de máximo ou mínimo locais existem entre aqueles que anulem o gradiente. Assim, como  $\nabla f = (2x, 2y) = (0, 0)$ , temos apenas um tal “candidato”:  $(x, y) = (0, 0)$ . E, de fato, como  $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0 = f(0, 0)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , temos que  $(0, 0)$  é ponto de mínimo local de  $f$ .<sup>31</sup> Isso pode ser corroborado com o que foi visto na subseção 2.5.1: o gráfico de  $f$  é

---

<sup>29</sup>Este exemplo foi apresentado no primeiro capítulo. Encontra-se aqui para um estudo comparado e/ou para aqueles que dispensaram a leitura daquele capítulo!

<sup>30</sup>*Idem*.

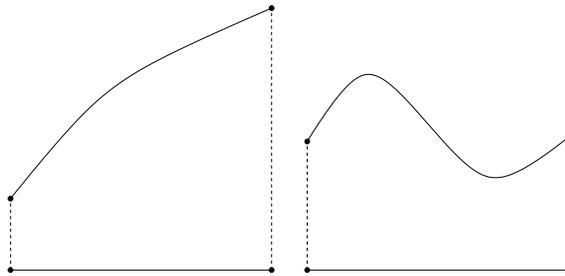
<sup>31</sup>Note que, de fato, esse é um ponto de mínimo *global* de  $f$ .

um parabolóide com vértice na origem cujo eixo de revolução é o semieixo positivo das cotas, conforme ilustrado na figura 2.3 da página 59.

**(O<sub>2</sub>) Se  $f$  é contínua num domínio compacto, então  $f$  assume valores máximo e mínimo globais nesse domínio.**

A figura 3.3 apresenta dois exemplos para funções reais de uma variável real.

Figura 3.3: No primeiro gráfico, os pontos de máximo e mínimo globais ocorrem nos extremos do intervalo compacto que representa o domínio da função. No segundo, os pontos de máximo e mínimo globais são interiores ao intervalo compacto que representa o domínio da função



Esse resultado também é válido para funções reais de várias variáveis reais, podendo ser aplicado para garantir a existência de maximizadores e minimizadores globais num domínio fechado e limitado. Por outro lado, se o domínio não for compacto,  $f$  pode não admitir ponto de máximo nem de mínimo globais.

### Exemplos

- $f(x) = \ln x$ , definida para todo  $x \in (0, \infty)$ , não tem máximo nem mínimo globais.
- $f(x, y) = x^2 + y^2$ , definida para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , tem  $(0, 0)$  como ponto de mínimo global,<sup>32</sup> mas não tem ponto de máximo global, pois  $f(x, y)$  pode se tornar tão grande quanto se queira.<sup>33</sup>
- Considere agora que o domínio da função  $f(x, y) = x^2 + y^2$  contínua está restrito ao círculo de centro na origem e raio unitário, isto é,

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Por um lado, vimos que  $(0, 0)$  é o mínimo global de  $f$ . Por outro lado, é fácil ver que todo ponto da circunferência unitária  $x^2 + y^2 = 1$  é máximo global de  $f$ .

<sup>32</sup>Cf. o exemplo de (O<sub>1</sub>).

<sup>33</sup>Quando o domínio não for compacto, garantir a existência (ou inexistência) de valor máximo/mínimo global é, em geral, um problema cujo nível de dificuldade está fora do escopo de um curso de cálculo para a graduação, como veremos ao final desta seção.

- Seja  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .  $f$  é contínua e está definida (apenas) no círculo de centro na origem e raio unitário, isto é,

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

O gráfico de  $f$  é a semiesfera superior de centro na origem e raio unitário (conforme ilustrado na figura 2.2 da página 56). Portanto, por um lado,  $(0, 0)$  é o máximo global de  $f$  pois

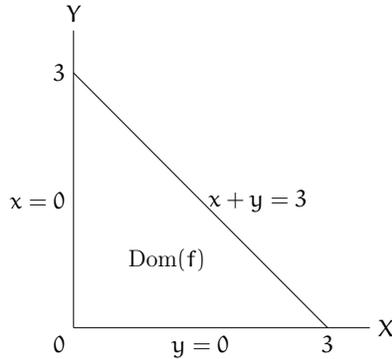
$$f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} \leq 1 = f(0, 0)$$

para todo  $(x, y) \in \text{Dom}(f)$ . Por outro lado, claramente, cada ponto da circunferência unitária  $x^2 + y^2 = 1$  é mínimo global de  $f$ .

- Considere a função  $f(x, y) = xy(3 - x - y) = 3xy - x^2y - xy^2$ , que é contínua, com

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 3\},$$

que é compacto, representado por um triângulo (interior e fronteira), conforme a seguinte ilustração:



Portanto, por  $(O_2)$ ,  $f$  admite pontos de máximo e mínimo globais em  $\text{Dom}(f)$ . Agora,  $(O_1')$  acarreta que, para pontos interiores, os candidatos a pontos de máximo e mínimo são obtidos via as seguintes equações:

$$\begin{cases} f_x = 3y - 2xy - y^2 = 0, \\ f_y = 3x - 2xy - x^2 = 0. \end{cases}$$

Uma solução é imediata:  $O = (0, 0)$ , que não é interior!

Outras duas soluções,  $P_1 = (3, 0)$  e  $P_2 = (0, 3)$ , que não são interiores, seguem de:

- $x = 0$  e  $y \neq 0 \Rightarrow 3 - y = 0$ , isto é,  $y = 3$ ;
- $x \neq 0$  e  $y = 0 \Rightarrow 3 - x = 0$ , isto é,  $x = 3$ .

Agora, sendo  $x$  e  $y$  diferentes de zero, podemos dividir  $f_x = 0$  por  $y$  e  $f_y = 0$  por  $x$ , resultando em

$$\begin{cases} 3 - 2x - y = 0, \\ 3 - 2y - x = 0, \end{cases}$$

isto é,

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$$

Resolvendo tal sistema, temos  $x = y = 1$ . Portanto,  $P_3 = (1, 1)$  é o único candidato para ponto (interior) de máximo/mínimo local.

Agora, por um lado, note que todos os pontos da fronteira de  $\text{Dom}(f)$ , inclusive  $O$ ,  $P_1$  e  $P_2$ , anulam a função  $f$ , isto é, satisfazem a equação  $f(x, y) = 0$ .<sup>34</sup> Então, como  $f(P_3) = 1$ , nenhum ponto da fronteira pode ser ponto de máximo global. Logo, o máximo pertence ao interior de  $\text{Dom}(f)$ . Contudo, por  $(O_1')$ , pontos de máximo (locais) interiores a  $\text{Dom}(f)$  *devem* anular o gradiente. Assim, por ser o único ponto interior que anula o gradiente e ter imagem maior que as dos pontos de fronteira,  $P_3$  é o máximo global. Por outro lado, não existe ponto de mínimo interior ao domínio.<sup>35</sup> Contudo, por  $(O_2)$ , deve existir ponto de mínimo global no domínio. Portanto, o mínimo global pertence à fronteira de  $\text{Dom}(f)$ . Como todos os pontos da fronteira têm a mesma imagem (nula) por  $f$ , todos eles são pontos de mínimo globais.

Essa análise para obter os extremantes pode ser simplificada, utilizando  $(O_{3,2})$ , dado a seguir.

### 3.3.2 Teste da derivada segunda e multiplicadores de Lagrange

$(O_3)$  Teste da derivada segunda para:

$$(O_{3,1}) \quad y = f(x)$$

Se a derivada de segunda ordem de  $f$  é contínua num intervalo aberto com centro no ponto crítico  $x_0$ , então a tabela seguinte é válida.

$f''(x_0)$	$x_0$
$> 0$	mínimo local
$< 0$	máximo local

Note que todos os pontos de um intervalo aberto são interiores a ele, inclusive seu centro  $x_0$ .

$$(O_{3,2}) \quad z = f(x, y)$$

Se as derivadas parciais de segunda ordem são contínuas numa bola aberta de centro no ponto crítico  $(x_0, y_0)$  e  $H := f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$ , então a tabela seguinte é válida.

$H(x_0, y_0)$	$f_{xx}(x_0, y_0)$	$(x_0, y_0)$
$> 0$	$> 0$	ponto de mínimo local
$> 0$	$< 0$	ponto de máximo local
$< 0$	$\geq 0$ ou $< 0$	ponto de sela
$= 0$	$\geq 0$ ou $< 0$	teste inconclusivo

Note que todos os pontos de uma bola aberta são interiores a ela, inclusive seu centro  $(x_0, y_0)$ .

<sup>34</sup>De fato,  $f(0, 0) = f(3, 0) = f(0, 3) = 0$  e, em geral,  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $x + y = 3$  anulam  $f(x, y) = xy(3 - x - y)$ .

<sup>35</sup>De fato, eventuais pontos (interiores) de mínimo anulariam o gradiente e apenas quatro pontos o anulam. Três deles,  $O$ ,  $P_1$  e  $P_2$ , estão na fronteira e o que está no interior,  $P_3$ , é máximo global.

## Exemplo

No último exemplo de  $(O_2)$ , vimos que  $(1, 1)$  é o único ponto interior ao  $\text{Dom}(f)$  que anula o gradiente de  $f(x, y) = xy(3 - x - y)$ , onde  $f_x = 3y - 2xy - y^2$  e  $f_y = 3x - 2xy - x^2$ . Agora, como  $f_{xx} = -2y$ ,  $f_{yy} = -2x$  e  $f_{xy} = 3 - 2x - 2y$ , temos que  $f_{xx}(1, 1) = -2 < 0$  e  $H(1, 1) = f_{xx}(1, 1)f_{yy}(1, 1) - (f_{xy}(1, 1))^2 = (-2)(-2) - (-1)^2 = 3 > 0$ . Assim, pela tabela apresentada em  $(O_{3,2})$ ,  $(1, 1)$  é ponto de máximo local. Portanto, como não existem outros pontos interiores a  $\text{Dom}(f)$  que anulam o gradiente,<sup>36</sup>  $f(1, 1) = 1$  e, como visto no exemplo supracitado, cada um dos pontos pertencentes à fronteira de  $\text{Dom}(f)$  anulam  $f$ ,  $(1, 1)$  é o ponto de máximo global.

### $(O_4)$ Multiplicadores de Lagrange com:

#### $(O_{4,1})$ Uma restrição

Considerando funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  adequadas, para determinar o valor máximo (respectivamente, mínimo) de  $f$  para  $(x, y)$  satisfazendo a restrição  $g(x, y) = k$ , supondo que esse valor máximo (respectivamente, mínimo) global exista (em algum ponto não pertencente à fronteira da região onde  $f$  e  $g$  estejam definidas) e que  $\nabla g \neq \vec{0}$  para cada tal  $(x, y)$ , proceda do modo seguinte:

1. Determine cada  $(x, y)$  (e  $\lambda$ ) satisfazendo:
  - (a)  $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ ;
  - (b)  $g(x, y) = k$ .
2. Calcule  $f(x, y)$  para cada  $(x, y)$  obtido no item anterior: o maior (respectivamente, menor) valor de  $f$  será o seu máximo (respectivamente, mínimo).

## Exercício resolvido

Determine os valores máximo e mínimo de  $f(x, y) = x^2 + x + 2y^2$  restrita à circunferência unitária  $x^2 + y^2 = 1$ .

### RESOLUÇÃO

Como  $f$  é contínua e a circunferência unitária é compacta, existem valores máximo e mínimo (globais) de  $f$  nesse compacto de  $\mathbb{R}^2$ .<sup>37</sup> Assim, podemos utilizar  $(O_{4,1})$  para calcular tais extremantes, considerando  $f$  sujeita à restrição  $g(x, y) = 1$ ,  $g(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $f_x = \lambda g_x$  e  $f_y = \lambda g_y$ . Logo,  $2x + 1 = \lambda 2x$  e  $4y = \lambda 2y$ , isto é,  $2y(2 - \lambda) = 0$ , ou seja,  $y = 0$  ou  $\lambda = 2$ . Note que:

- $\lambda = 2$  acarreta  $2x + 1 = 4x$ , isto é,  $x = 1/2$ . Assim,  $\frac{1}{4} + y^2 = 1$  via  $g(1/2, y) = 1$ . Logo,  $y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$ ;
- $y = 0$  acarreta  $x^2 + 0 = 1$  via  $g(x, 0) = 1$ . Logo,  $x = \pm 1$ .

Portanto, como os pontos críticos são dados por

$$\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ e } (\pm 1, 0),$$

<sup>36</sup>Assim, não pode existir outro ponto de máximo local nem algum ponto de mínimo local interiores a tal domínio.

<sup>37</sup>Cf.  $(O_2)$ .

temos:

- $f\left(\frac{1}{2}, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{9}{4}$ : valor máximo;
- $f(1, 0) = 2$ : não é valor máximo nem mínimo;
- $f(-1, 0) = 0$ : valor mínimo.

### Considerações importantes sobre multiplicadores de Lagrange

- $(O_{4.1})$  também é válido caso sejam consideradas funções  $f(x, y, z)$  e  $g(x, y, z)$  adequadas no lugar de  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$ , respectivamente.
- A adequação de  $f$  e  $g$  citada nas hipóteses de  $(O_{4.1})$  corresponde ao requisito de que tais funções sejam *continuamente diferenciáveis*, que é um conceito que está fora do escopo destas notas.<sup>38</sup>
- $(O_{4.1})$  determina o valor máximo (respectivamente, mínimo) entre os pontos críticos da função  $f - \lambda g$ , isto é, pontos tais que

$$\nabla(f - \lambda g) = \vec{0},$$

desde que esse valor máximo (respectivamente, mínimo) exista. Assim, caso não tenhamos determinado previamente a existência do valor máximo (respectivamente, mínimo) global, a simples aplicação dos itens 1 e 2 de  $(O_{4.1})$  pode não resultar no cálculo de maximizadores (respectivamente, minimizadores) globais.

### Exemplo

Sejam  $f(x, y) = x^3$ ,  $g(x, y) = y$  e  $k = 0$ . Dos itens 1 e 2 de  $(O_{4.1})$ , temos  $f_x = \lambda g_x$ ,  $f_y = \lambda g_y$  e  $g(x, y) = 0$ . Então,  $3x^2 = \lambda \cdot 0$ ,  $0 = \lambda \cdot 1$  e  $y = 0$ .<sup>39</sup> Contudo,  $(0, 0)$  não é minimizador nem maximizador: claramente é ponto de sela.

- Como nem sempre temos o domínio compacto para, via  $(O_2)$ , garantirmos a existência de máximo e mínimo globais, e como essa garantia sem tais compactos, em geral, é um problema difícil e fora do escopo de livros de cálculo, o uso de  $(O_{4.1})$ , na verdade, apenas calcula os candidatos para valores máximos (respectivamente, mínimos). Assim, apenas em alguns poucos casos apresentaremos justificativas da existência dos valores máximos (respectivamente, mínimos).
- Outro requisito nas hipóteses de  $(O_{4.1})$  é que os maximizadores (respectivamente, minimizadores) globais não podem pertencer à fronteira da região onde  $f$  e  $g$  estejam definidas. Se isso não ocorrer, mesmo que existam maximizadores (respectivamente, minimizadores) globais, os itens 1 e 2 de  $(O_{4.1})$  podem não calcular o valor máximo (respectivamente, mínimo) global de  $f$  sujeito à restrição  $g = k$ .

<sup>38</sup>Neste capítulo, funções que tenham relação com a aplicação de  $(O_4)$  são continuamente diferenciáveis.

<sup>39</sup>Note que  $\nabla g = (0, 1)$ .

## Exemplo

Sejam  $f(x, y) = x^3$  e  $g(x, y) = y$  definidas no quadrado  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . Considere ainda  $k = 0$ . No exemplo anterior, vimos que temos um único ponto crítico,  $(0, 0)$ , que é um ponto de sela. Contudo, o maximizador e o minimizador globais estão na fronteira desse quadrado:  $f(-1, 0)$  é o valor mínimo e  $f(1, 0)$  é o máximo.

- A resolução de um sistema decorrente da utilização do item 1 de  $(O_{4.1})$  pode resultar somente em pontos, ou mesmo em apenas um ponto, de mesma imagem pela função  $f$ . Como saber, portanto, se foi obtido o valor máximo ou o valor mínimo?

No próximo exercício resolvido, apresentaremos algumas técnicas para lidar com os problemas descritos nas considerações anteriores. Além de multiplicadores de Lagrange, utilizaremos o teste da derivada segunda numa resolução alternativa.

## Exercício resolvido

Em existindo, obtenha as dimensões de uma caixa retangular sem tampa, de modo que ela tenha um dado volume  $V$  e área mínima.

### RESOLUÇÃO PELO TESTE DA DERIVADA SEGUNDA

Sendo  $x$ ,  $y$  e  $z$  positivos,  $xyz = V$  u.v. (unidades de volume) acarreta  $z = \frac{V}{xy}$  u.c. (unidades de comprimento). Substituindo tal  $z$  na equação da área (variável) da caixa, dada por  $xy + 2xz + 2yz$ , obtemos uma função nas variáveis  $x$  e  $y$ , dada por

$$f(x, y) = xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}.$$

Assim, como

$$f_x = y - \frac{2V}{x^2} = 0 \text{ e } f_y = x - \frac{2V}{y^2} = 0,$$

segue que  $x^2y = xy^2 = 2V$ . Então, o ponto crítico  $(x, y)$  de  $f$  tem  $x = y = \sqrt[3]{2V}$  u.c. Agora, como

$$f_{xx} = \frac{4V}{x^3}, \quad f_{yy} = \frac{4V}{y^3} \text{ e } f_{xy} = 1,$$

$f_{xx}(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 2 > 0$  e  $H(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}) = 2 \cdot 2 - 1^2 = 3 > 0$ . Logo,  $P = (\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V})$  é ponto de mínimo local para  $f$ . Além disso, como  $\text{Dom}(f) = (0, \infty) \times (0, \infty)$ , isto é, o domínio de  $f$  é representado pelo primeiro quadrante sem os semieixos coordenados,<sup>40</sup> e o único ponto de  $\text{Dom}(f)$  que anula o gradiente de  $f$  é  $P$ , caso possamos determinar, de algum modo, a existência do valor mínimo global de  $f$ ,<sup>41</sup>  $P$  tem de ser o minimizador global.<sup>42</sup> Por fim, calcula-se o valor mínimo global  $z = \frac{V}{\sqrt[3]{2V}^2} = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}$  u.c.

### RESOLUÇÃO VIA MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Sendo  $f(x, y, z) = xy + 2xz + 2yz$  e  $g(x, y, z) = xyz$  a área e o volume da caixa, respectivamente, onde  $x$ ,  $y$  e  $z$  são positivos, devemos minimizar  $f(x, y, z)$  para  $g(x, y, z) = V$  constante, em u.v.

<sup>40</sup>Portanto, todos os pontos deste domínio são interiores a ele.

<sup>41</sup>Demonstraremos que esse valor mínimo global existe, utilizando argumentos de *análise matemática*, ao término da resolução deste exercício.

<sup>42</sup>De fato, por  $(O_1)$ , não pode existir outro ponto de mínimo local interior ao  $\text{Dom}(f)$  que anule o gradiente de  $f$  (pois apenas  $P$  o anula).

De  $f_x = \lambda g_x$ ,  $f_y = \lambda g_y$  e  $f_z = \lambda g_z$ , obtemos  $y + 2z = \lambda yz$ ,  $x + 2z = \lambda xz$  e  $2x + 2y = \lambda xy$ . Considerando as três últimas equações, multiplique a primeira por  $x$ , a segunda por  $y$  e a terceira por  $z$ , para obter  $xy + 2xz = xy + 2yz = 2xz + 2yz$ . Considerando essas duas igualdades, da primeira obtemos  $xz = yz$  e da segunda,  $xy = 2xz$ , isto é,  $x = y = 2z$ . Portanto, como  $xyz = V$ , temos  $4z^3 = V$ , ou seja,  $z = \sqrt[3]{V/4}$ , que, racionalizado, iguala  $z = \sqrt[3]{2V/8} = \sqrt[3]{2V}/2$  u.c.<sup>43</sup> Portanto,  $x = y = \sqrt[3]{2V}$  u.c.

Caso tenhamos determinado previamente, por algum método, a existência do valor mínimo,<sup>44</sup> segue que  $P = \left(\sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}/2\right)$  é o minimizador.

Convidamos o leitor a considerar qualquer ponto  $Q$ , distinto de  $P$ , que satisfaça  $xyz = V$ , comparar as imagens de  $P$  e  $Q$  por  $f$  e verificar que, de fato,  $f(P) \leq f(Q)$ . Por exemplo, se  $Q = (1, 1, V)$ , então

$$f(P) = 3\sqrt[3]{4V^2} \quad \text{e} \quad f(Q) = 1 + 4V.$$

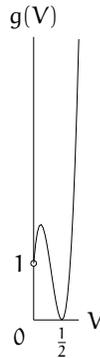
Segue que  $3\sqrt[3]{4V^2} < 1 + 4V$ , pois, caso contrário,

$$\begin{aligned} 3\sqrt[3]{4V^2} \geq 1 + 4V &\Rightarrow \left(3\sqrt[3]{4V^2}\right)^3 \geq (1 + 4V)^3 \\ &\Rightarrow 3^3 \cdot 4V^2 \geq 1^3 + 3 \cdot 1^2 \cdot 4V + 3 \cdot 1 \cdot (4V)^2 + (4V)^3 \\ &\Rightarrow 108V^2 \geq 1 + 12V + 48V^2 + 64V^3 \\ &\Rightarrow 64V^3 - 60V^2 + 12V + 1 \leq 0, \end{aligned}$$

que é algo absurdo para  $V > 0$ . De fato, se  $g(V) = 64V^3 - 60V^2 + 12V + 1$ , então

$$\begin{aligned} g'(V) = 0 &\Rightarrow 192V^2 - 120V + 12 = 0 \\ &\Rightarrow V \in \left\{ \frac{1}{8}, \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Logo, como  $g''(V) = 2 \cdot 192V - 120$ ,  $1/8$  é ponto de máximo local e  $1/2$  é ponto de mínimo local de  $g(V)$  para  $V > 0$ . Ainda, como  $g(1/8) > 0$  e  $g(1/2) = 0$ , para  $V > 0$ ,  $g(V)$  é sempre positiva exceto em  $V = \frac{1}{2}$ , caso em que  $P = Q$ . Assim, pode ser desconsiderado. O gráfico de  $g(V)$  para  $V > 0$  está representado na seguinte ilustração:



<sup>43</sup>Multiplique tanto o numerador quanto o denominador por  $\sqrt[3]{2}$ .

<sup>44</sup>Embora não tenhamos determinado, até essa etapa da resolução, que a área mínima existe, isso não representa um grande problema, pois supusemos que ela existe no início do enunciado do exercício. Logo, a partir dessa suposição, podemos resolvê-lo via 1 e 2 de  $(O_{4,1})$ . De qualquer forma, demonstraremos a existência da área mínima ao término desta resolução.

## Demonstração da existência da área mínima para o exercício anterior

Aqui é requerido um grau de sofisticação matemática fora do escopo de um curso de cálculo. Portanto, sugere-se que a leitura dessa demonstração seja postergada.<sup>45</sup> Para facilitar a discussão, considere o caso  $V = 1$  e denote  $x = x_1$  e  $y = y_1$ . Considere ainda

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0, x_2 > 0\}$$

e a função  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 + \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}.$$

Agora, note que o ponto crítico obtido anteriormente é dado por

$$P = \left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{2}\right)$$

e que  $f(P) < 5$ . Usaremos esse resultado, de modo heurístico, para verificar que  $f$  tem um minimizador global.

Primeiro, afirmamos que se  $f(x_1, x_2) \leq 5$ , então  $\frac{2}{5} \leq x_i \leq 4$ ,  $i = 1, 2$ . De fato, se  $x_1 < \frac{2}{5}$  ou  $x_2 < \frac{2}{5}$ , então

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 x_2 + \frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2} \\ &> \frac{2}{x_1} \\ &> 5. \end{aligned}$$

Além disso, se  $x_1 > 4$  ou  $x_2 > 4$ , então

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= x_1 x_2 + \frac{2(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} \\ &> x_1 x_2 + \frac{8}{x_1 x_2} = \frac{(x_1 x_2 - 2\sqrt{2})^2}{x_1 x_2} + 4\sqrt{2} \\ &> 5. \end{aligned}$$

Isto prova a afirmação. Agora, considere o conjunto

$$L = \{(x_1, x_2) \in D \mid f(x_1, x_2) \leq 5\}.$$

$L$  é fechado, pois, se uma sequência em  $L$  converge para um ponto  $(\bar{x}, \bar{y})$ , então  $(\bar{x}, \bar{y}) \in D$  com  $f(\bar{x}, \bar{y}) \leq 5$ . Além disso,  $L$  é limitado em decorrência da afirmação provada anteriormente. Portanto, por  $(O_2)$ , existe um minimizador  $P_0 \in L$  para  $f$  restrita a  $L$ . Agora, caso  $(x_1, x_2) \in D - L$ , temos

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &> 5 \\ &\geq f(P_0), \end{aligned}$$

---

<sup>45</sup>Para mais detalhes, cf. Ribeiro e Barbosa (2021).

provando assim que  $P_0$  é um minimizador global de  $f$ . Na verdade,  $P_0$  só pode ser igual ao ponto crítico  $P$  obtido anteriormente.

A argumentação anterior ilustra o quanto pode ser difícil garantir previamente a existência de um minimizador/maximizador. Doravante, nos exercícios resolvidos via multiplicadores de Lagrange, a existência do valor máximo/mínimo somente será apresentada quando houver algum argumento simples (por exemplo, geométrico) que justifique essa existência.

#### (O<sub>4.2</sub>) Duas restrições

Considerando funções adequadas, para determinar o valor máximo (respectivamente, mínimo) de  $f(x, y, z)$  para  $(x, y, z)$  satisfazendo as restrições  $g(x, y, z) = k_1$  e  $h(x, y, z) = k_2$ , supondo que esse valor exista (para algum ponto não pertencente à fronteira da região onde  $f$ ,  $g$  e  $h$  estejam definidas) e que  $\nabla g$  e  $\nabla h$  não se anularem e não sejam paralelos entre si para cada tal  $(x, y, z)$ , proceda do modo seguinte:

1. Determine cada  $(x, y, z)$  (e  $(\lambda, \mu)$ ) satisfazendo:
  - (a)  $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$ ;
  - (b)  $g(x, y, z) = k_1$ ;
  - (c)  $h(x, y, z) = k_2$ .
2. Calcule  $f(x, y, z)$  para cada  $(x, y, z)$  obtido no item anterior: o maior (respectivamente, menor) valor de  $f$  será o seu máximo (respectivamente, mínimo).

#### Exercício resolvido

Sendo  $f(x, y, z) = x + y + z$ , obtenha o máximo e o mínimo de  $f$  restrita à interseção do plano  $x + y - z = 1$  com o cilindro  $y^2 + z^2 = 4$ .

#### RESOLUÇÃO

Tal interseção é uma elipse, que é um conjunto compacto, em  $\mathbb{R}^3$ . Logo, por (O<sub>2</sub>), a função contínua  $f$  admite máximo e mínimo nessa interseção. Portanto, considerando  $g(x, y, z) = x + y - z$  e  $h(x, y, z) = y^2 + z^2$ , temos o sistema

$$(1, 1, 1) = \lambda(1, 1, -1) + \mu(0, 2y, 2z), \quad g(x, y, z) = 1 \quad \text{e} \quad h(x, y, z) = 4.$$

Da primeira equação desse sistema, segue que  $\lambda = 1$ ,  $\lambda + 2\mu y = 1$  e  $-\lambda + 2\mu z = 1$ . Assim,  $\mu y = 0$  e  $\mu z = 1$ . Portanto,  $y = 0$  e, como  $y^2 + z^2 = 4$  e  $x + y - z = 1$ ,<sup>46</sup> temos  $z = \pm 2$  e  $x \in \{-1, 3\}$ . Então,  $f(-1, 0, -2) = -3$  é o valor mínimo e  $f(3, 0, 2) = 5$  é o valor máximo.

#### Exercícios

1. Proceda como no exercício resolvido anterior, para:
  - (a)  $f(x, y, z) = x - y - z$ ,  $x + y + z = 2$  e  $x^2 + y^2 = 4$ ;
  - (b)  $f(x, y, z) = 2x - y + 4z$ ,  $x^2 + 3y^2 = 84$  e  $z = x$ .

<sup>46</sup>Veja as duas últimas equações do sistema supracitado.

2. Obtenha o ponto pertencente aos planos  $x+2y+3z = 8$  e  $z = x$  mais próximo da origem.<sup>47</sup>

Na seção 3.5, são apresentados exercícios resolvidos adicionais. Contudo, sugiro que o leitor também tente resolver exercícios sobre continuidade, diferenciabilidade, plano tangente, aproximações lineares e otimização em outros livros de cálculo de várias variáveis. Recomendo, por exemplo, Ávila (2006) e Boulos e Abud (2006).

---

<sup>47</sup>Resolução na seção 3.5.

### 3.4 Formulário do cálculo diferencial<sup>48</sup>

Aqui, para  $n = 2$ ,  $(x_1, \dots, x_n) = (x, y)$ ; para  $n = 3$ ,  $(x_1, \dots, x_n) = (x, y, z)$ .

- Vetores:
  - Posição em  $t$ :  $\gamma(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ ;
  - Velocidade em  $t$ :  $\gamma'(t) = (x'_1(t), \dots, x'_n(t))$ ;
  - Aceleração em  $t$ :  $\gamma''(t) = (x''_1(t), \dots, x''_n(t))$ ;
  - Gradiente em  $P = (x_1, \dots, x_n)$ :  $\nabla f(P) = (f_{x_1}(P), \dots, f_{x_n}(P))$ .
- Aproximação linear:  $f(x_1, \dots, x_n) \approx f(x_{1_0}, \dots, x_{n_0}) + \sum_{i=1}^n f_{x_i}(x_{1_0}, \dots, x_{n_0}) \Delta x_i$ ,  $|x_i - x_{i_0}| = |\Delta x_i| \ll 1$ .
- Regra da cadeia:  $\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=t_0} = \nabla f(\gamma(t_0)) \cdot \gamma'(t_0)$ .
- Derivada em  $P_0$  na direção do versor  $\vec{u}$ :  $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{u}} = \nabla f(P_0) \cdot \vec{u} = |\nabla f(P_0)| \cos \theta$ ,  $\theta$  ângulo entre  $\nabla f(P_0)$  e  $\vec{u}$ .
- $\nabla f(P_0) \perp S$  em  $P_0$  com  $S = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid f(x_1, \dots, x_n) = f(P_0)\}$ .
- Regra da cadeia para  $z = f(x(u, v), y(u, v))$ :  $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$ ;  $\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$ .
- $f$  tem máximo/mínimo local num ponto  $P_0$  interior ao seu domínio onde existe  $\nabla f \implies \nabla f(P_0) = 0$ .
- $f$  é contínua e  $\text{Dom}(f)$  é compacto  $\implies f$  tem pontos de máximo e mínimo globais em  $\text{Dom}(f)$ .
- Teste da derivada de segunda ordem para  $f(x, y)$ :

$H(x_0, y_0)$	$f_{xx}(x_0, y_0)$	$(x_0, y_0)$
$> 0$	$> 0$	mínimo local
$> 0$	$< 0$	máximo local
$< 0$	$\geq 0$ ou $< 0$	sela
$= 0$	$\geq 0$ ou $< 0$	?

sendo  $H = f_{xx}f_{yy} - (f_{xy})^2$  e  $(x_0, y_0)$  ponto crítico interior ao  $\text{Dom}(f)$ .

- Multiplicadores de Lagrange com uma restrição:
 

Para determinar o valor máximo/mínimo de  $f(x, y)$  para pontos  $(x, y)$  satisfazendo a  $g(x, y) = k$ , supondo que esse(s) valor(es) exista(m) e que  $\nabla g \neq 0$  nesses pontos:

  - determine todos os  $(x, y)$  (e  $\lambda$ ) onde:
    - \*  $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ ;
    - \*  $g(x, y) = k$ ;
  - calcule  $f(x, y)$  para todos os  $(x, y)$  obtidos no item anterior: o maior/menor valor de  $f$  será o seu máximo/mínimo.  
Vale um resultado análogo para funções reais de três variáveis reais  $(x, y, z)$ .
- Multiplicadores de Lagrange com duas restrições:
 

Para determinar o valor máximo/mínimo de  $f(x, y, z)$  para pontos  $(x, y, z)$  satisfazendo a  $g(x, y, z) = k_1$  e  $h(x, y, z) = k_2$ , supondo que esse(s) valor(es) exista(m) e que  $\nabla g$  e  $\nabla h$  não se anulam e não são paralelos entre si nesses pontos:

  - determine todos os  $(x, y, z)$  (e  $\lambda, \mu$ ) onde:
    - \*  $\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z)$ ;
    - \*  $g(x, y, z) = k_1$ ;
    - \*  $h(x, y, z) = k_2$ ;
  - calcule  $f(x, y, z)$  para todos os  $(x, y, z)$  obtidos no item anterior: o maior/menor valor de  $f$  será o seu máximo/mínimo.

<sup>48</sup>Fórmulas válidas no contexto anterior.

## 3.5 Exercícios resolvidos de cálculo diferencial

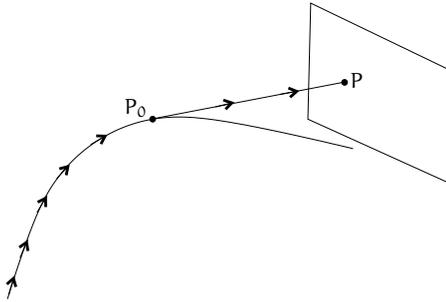
### 3.5.1 Curvas parametrizadas

1. Determine os pontos em que a curva parametrizada  $\gamma(t) = (t^3 - 1, t^2 + 1, 3t)$  intercepta o plano  $3x - 2y - z + 7 = 0$ .

#### RESOLUÇÃO

Para a curva interceptar o plano,  $x(t) = t^3 - 1$ ,  $y(t) = t^2 + 1$  e  $z(t) = 3t$  devem satisfazer  $3x - 2y - z + 7 = 0$ . Assim,  $3t^3 - 2t^2 - 3t + 2 = 0$ , cujas raízes são  $\pm 1$  e  $\frac{2}{3}$ . Portanto, os pontos de interseção são  $\gamma(-1) = (-2, 2, -3)$ ,  $\gamma(2/3) = (-19/27, 13/9, 2)$  e  $\gamma(1) = (0, 2, 3)$ .

Figura 3.4: Corpo “sai” pela tangente à curva no ponto  $P_0$  e colide com o plano no ponto  $P$



2. A curva

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma(t) = \left( t, t^2, \frac{t^3 - 1}{5} \right) \in \mathbb{R}^3$$

representa o movimento de um corpo. Em  $t = 1$  u.t., o corpo se desprende da curva e continua seu movimento, sem que haja forças adicionais atuando sobre ele,<sup>49</sup> conforme ilustrado na figura 3.4. Determine o ponto e o instante em que o corpo atinge o plano  $x + y + z = 10$ .

#### PRIMEIRA RESOLUÇÃO

O corpo se desprende da curva no ponto  $P_0 = \gamma(1) = (1, 1, 0)$ . No instante  $t = 1$  u.t. (para a curva  $\gamma(t)$ ), como

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \gamma'(t) = \left( 1, 2t, \frac{3}{5}t^2 \right) \in \mathbb{R}^3,$$

o seu vetor velocidade é dado por  $\vec{v} = \gamma'(1) = (1, 2, 3/5)$ . Assim, o corpo “sai” pela (reta) tangente (a curva) dada por

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto r(t) = P_0 + t\vec{v} = \left( 1 + t, 1 + 2t, \frac{3}{5}t \right) \in \mathbb{R}^3.^{50}$$

<sup>49</sup>Movimento retilíneo uniforme.

<sup>50</sup>Note que  $P_0$  é obtido para  $t = 0$  como ponto da reta, isto é,  $r(0) = P_0$ . Portanto, ao instante em que o corpo atingir o plano, acrescentamos uma unidade de tempo.

No instante  $t$  u.t. em que o corpo atinge o plano, as coordenadas de  $\mathbf{r}(t)$  satisfazem a equação  $x + y + z = 10$ , isto é,  $1 + t + 1 + 2t + \frac{3}{5}t = 10$ . Então,  $18t = 40$ , ou seja,  $t = \frac{20}{9} = 2, \bar{2}$  u.t. é o instante em que o corpo atinge o plano, visto como uma partícula que estivesse em movimento sobre a reta durante todo tempo  $t$ . Portanto,  $3, \bar{2}$  u.t. é o exato instante do impacto e isso ocorre no ponto  $P = \mathbf{r}(2, \bar{2}) = \left(3, \bar{2}, 5, \bar{4}, \frac{6, \bar{6}}{5}\right)$ .

#### SEGUNDA RESOLUÇÃO

Considerando qualquer curva parametrizada  $\gamma(t)$  que tenha derivada em  $t = t_0$ , a equação da reta que passa pelo ponto  $P_0 = \gamma(t_0)$ , no instante  $t = t_0$  u.t. (não no instante  $t = 0$  u.t.) e na direção do vetor  $\vec{v} = \gamma'(t_0)$  é dada por

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbf{r}(t) = P_0 + (t - t_0)\vec{v} \in \mathbb{R}^3.$$

Nessa questão, como o corpo se desprende da curva em  $t = t_0 = 1$  u.t., temos

$$\mathbf{r}(t) = (1, 1, 0) + (t - 1)(1, 2, 3/5) = \left(t, 2t - 1, \frac{3}{5}(t - 1)\right).$$

Portanto, ao contrário da primeira resolução, existe uma sincronização de tempo entre a curva e a reta, não sendo necessário acrescentar unidades de tempo ao tempo transcorrido ao longo da reta. Assim, quando  $\mathbf{r}(t)$  atinge o plano  $x + y + z = 10$ , temos  $t + 2t - 1 + \frac{3}{5}(t - 1) = 10$ , isto é,  $18t = 58$ . Então,  $t = \frac{29}{9} = 3, \bar{2}$  u.t. é o instante do impacto com o plano e isto ocorre no ponto  $P = \mathbf{r}(3, \bar{2}) = \left(3, \bar{2}, 5, \bar{4}, \frac{6, \bar{6}}{5}\right)$ .

3. Suponha que uma partícula siga pela trajetória  $\gamma(t) = (e^t, e^{-t}, \cos t)$  até sair pela tangente no instante  $t = 1$  u.t. Onde estará a partícula no instante  $t = 3$  u.t.?

#### RESOLUÇÃO

O vetor velocidade é dado por  $\gamma'(t) = (e^t, -e^{-t}, -\sin t)$ , que, no instante  $t = 1$  u.t., é o vetor  $\vec{v} = (e, -1/e, -\sin 1)$ . A partícula está em  $P_0 = (e, 1/e, \cos 1)$  no instante  $t = 1$  u.t. Portanto, a equação da reta tangente é dada por

$$\mathbf{r}(t) = P_0 + (t - 1)\vec{v} = \left(et, -\frac{t}{e} + \frac{2}{e}, \cos 1 - (t - 1)\sin 1\right).^{51}$$

Assim, no instante  $t = 3$  u.t., a posição sobre a reta é dada por

$$\mathbf{r}(3) = (3e, -1/e, \cos 1 - 2\sin 1) \approx (8, 155, -0, 368, -1, 143).$$

4. Seja  $\gamma(t)$  uma curva parametrizada com coordenadas diferenciáveis tal que  $\|\gamma(t)\| = c$  constante para todo  $t$  pertencente a algum intervalo aberto  $I$ .<sup>52</sup> Prove, utilizando a regra da derivada do produto escalar, que  $\gamma(t) \perp \gamma'(t)$  para todo  $t \in I$ .

#### RESOLUÇÃO

Derivando  $\sqrt{\gamma(t) \cdot \gamma(t)} = c$ , isto é,  $\gamma(t) \cdot \gamma(t) = c^2$ , temos  $2\gamma(t) \cdot \gamma'(t) = 0$ .<sup>53</sup>

<sup>51</sup>Confira a segunda resolução do exercício anterior.

<sup>52</sup>Para curvas em  $\mathbb{R}^n$ , isso significa que o traço de  $\gamma(t)$  está contido na fronteira da bola aberta/fechada  $n$ -dimensional de raio  $c$  e centro na origem.

<sup>53</sup>Via geometria analítica ou álgebra linear, temos:  $\vec{u} \perp \vec{w} \iff \vec{u} \cdot \vec{w} = 0$ .

5. Se  $\gamma(t)$  é uma curva parametrizada com coordenadas diferenciáveis, definida num intervalo aberto, com traço sobre uma esfera de centro na origem e raio  $r$ , prove que  $\gamma(t) \perp \gamma'(t)$  para todo  $t$  pertencente a esse intervalo.

RESOLUÇÃO

Como  $\|\gamma(t)\| = r$ , basta aplicar a questão anterior com  $c = r$ .

### 3.5.2 Continuidade e diferenciabilidade

1.  $z = e^{\sqrt{3}xy^2 + (\log 2)x^3y^3 + x^2 + y + \cos \frac{2\pi}{7}}$  é uma função contínua? Justifique a sua resposta.

RESOLUÇÃO

Funções constantes, tais como

$$\text{cte}_1(x, y) = \sqrt{3}, \text{cte}_2(x, y) = \log 2 \text{ e } \text{cte}_3(x, y) = \cos \frac{2\pi}{7},$$

bem como as funções

$$p_1(x, y) = x \text{ e } p_2(x, y) = y,$$

são contínuas, pois seus gráficos são planos e, assim, não têm “buracos” ou “saltos”. Como o produto de funções contínuas é uma função contínua, são contínuas as funções

$$f_1(x, y) = \sqrt{3}xy^2, f_2(x, y) = (\log 2)x^3y^3 \text{ e } f_3(x, y) = x^2.$$

Como a soma de funções contínuas é uma função contínua, é contínua a função

$$f(x, y) = \sqrt{3}xy^2 + (\log 2)x^3y^3 + x^2 + y + \cos \frac{2\pi}{7}.$$

Por fim, como a composição de funções contínuas, quando possível, é uma função contínua e  $g(t) = e^t$  é contínua para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} z &= g(f(x, y)) \\ &= e^{f(x, y)} \\ &= e^{\sqrt{3}xy^2 + (\log 2)x^3y^3 + x^2 + y + \cos \frac{2\pi}{7}} \end{aligned}$$

é uma função contínua.

2. Em existindo as derivadas parciais das funções  $f(x, y, z)$  e  $g(x, y, z)$  num dado ponto, prove que  $\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$  nesse ponto.

RESOLUÇÃO

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial x}(fg), \frac{\partial}{\partial y}(fg), \frac{\partial}{\partial z}(fg) \right) &= (f_x g + f g_x, f_y g + f g_y, f_z g + f g_z) \\ &= f(g_x, g_y, g_z) + g(f_x, f_y, f_z). \end{aligned}$$

3.  $f(x, y) = \ln(\sqrt{x^2 + y^2})$  satisfaz a equação  $f_{xx} + f_{yy} = 0$ ?

### RESOLUÇÃO

Para facilitar as contas, escreva

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \cdot \ln(x^2 + y^2).$$

Logo, pela regra da cadeia, temos

$$f_x = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ e } f_y = \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Portanto, pela regra da derivada do quociente, temos

$$f_{xx} = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} \text{ e } f_{yy} = \frac{1 \cdot (x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2},$$

cuja soma é zero.

4. Seja  $f$  uma função de uma variável, diferenciável até a segunda ordem. Verifique que  $z = f(x - ct)$  satisfaz a  $z_{xx} - \frac{1}{c^2}z_{tt} = 0$ , dita *equação das ondas*, onde  $c$  é uma constante.

### RESOLUÇÃO

Se  $y = x - ct$ , então, pela regra da cadeia para funções de uma variável,

$$\begin{aligned} z_x &= \frac{df(y)}{dx} = \frac{df(y)}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{df(y)}{dy}, \\ z_t &= \frac{df(y)}{dt} = \frac{df(y)}{dy} \frac{dy}{dt} = -c \frac{df(y)}{dy}, \\ z_{xx} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{df(y)}{dy} \right) = \frac{d}{dy} \left( \frac{df(y)}{dy} \right) \frac{dy}{dx} = \frac{d^2f(y)}{dy^2} \text{ e} \\ z_{tt} &= \frac{d}{dt} \left( -c \frac{df(y)}{dy} \right) = -c \frac{d}{dy} \left( \frac{df(y)}{dy} \right) \frac{dy}{dt} = c^2 \frac{d^2f(y)}{dy^2}. \end{aligned}$$

5. Verifique que a função  $z = e^{-x^2/4kt}/\sqrt{t}$  satisfaz a  $z_t = kz_{xx}$ , dita *equação de difusão* ou *equação do calor*, onde  $k$  é uma constante.

### RESOLUÇÃO

Basta observar que

$$\begin{aligned} z_t &= ((x^2/4kt^2)e^{-x^2/4kt}/\sqrt{t}) + (e^{-x^2/4kt}/(-2t^{3/2})) \\ &= \frac{e^{-x^2/4kt}}{\sqrt{t}} \left( \frac{x^2}{4kt^2} - \frac{1}{2t} \right), \\ z_x &= (-2x/4kt)e^{-x^2/4kt}/\sqrt{t} \text{ e} \\ z_{xx} &= \frac{(-1/2kt)e^{-x^2/4kt} + (-x/2kt)(-x/2kt)e^{-x^2/4kt}}{\sqrt{t}} \\ &= \frac{e^{-x^2/4kt}}{\sqrt{t}} \left( -\frac{1}{2kt} + \frac{x^2}{4k^2t^2} \right). \end{aligned}$$

### 3.5.3 Planos tangentes, aproximações lineares e regra da cadeia

1. Onde o eixo das cotas intercepta o plano tangente ao gráfico de  $z = e^{x-y}$  em  $P_0 = (1, 1, 1)$ ?

RESOLUÇÃO

Sendo  $z_x = e^{x-y}$  e  $z_y = -e^{x-y}$  em  $(1, 1)$  dados, respectivamente, por 1 e  $-1$ , tal plano tangente é dado por  $(x-1) + (-1)(y-1) + (-1)(z-1) = 0$ , o qual intercepta o eixo das cotas quando  $x = y = 0$ , isto é,  $(-1) + (-1)(-1) + (-1)(z-1) = 0$ . Portanto,  $(0, 0, 1)$  é o ponto de interseção.

2. Determine a equação do plano tangente à superfície  $z = 2x^2 - 3xy + y^2$  que seja paralelo ao plano  $10x - 7y - 2z + 5 = 0$ .

RESOLUÇÃO

Se  $f(x, y, z) = 2x^2 - 3xy + y^2 - z$ , então  $\nabla f = (f_x, f_y, f_z) = (4x - 3y, -3x + 2y, -1)$  é normal ao plano tangente à superfície  $f(x, y, z) = 0 = f(P_0)$  num ponto  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  qualquer desta superfície. Contudo, não é dado o  $P_0$  que determina unicamente o plano a ser determinado. Por outro lado, como tal plano é paralelo ao plano  $10x - 7y - 2z + 5 = 0$ , temos  $\nabla f(P_0) = \lambda(10, -7, -2)$  para algum real não nulo  $\lambda$ , isto é,

$$(4x_0 - 3y_0, -3x_0 + 2y_0, -1) = (10\lambda, -7\lambda, -2\lambda),$$

ou seja,

$$\begin{cases} 4x_0 - 3y_0 = 10\lambda, \\ -3x_0 + 2y_0 = -7\lambda, \\ -1 = -2\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

Portanto,  $\nabla f(P_0) = (10/2, -7/2, -1)$  e

$$\begin{cases} 4x_0 - 3y_0 = \frac{10}{2}, \\ -3x_0 + 2y_0 = -\frac{7}{2}. \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação desse sistema por 3, a segunda por 4, e somando as duas, temos  $y_0 = -1$ ,  $x_0 = \frac{1}{2}$  e  $z_0 = 2(1/4) - 3(1/2)(-1) + 1 = 3$ . Assim, a equação do plano procurado é dada por

$$(10/2)x + (-7/2)y + (-1)z + d = 0,$$

onde, como  $P_0$  é um ponto desse plano,

$$d = -\left(\frac{10}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{7}{2} \cdot (-1) + (-1) \cdot 3\right) = -3.$$

Portanto, a equação procurada é dada por

$$(10/2)x + (-7/2)y + (-1)z - 3 = 0,$$

isto é,  $10x - 7y - 2z - 6 = 0$ .

3. Verifique que: o traço da curva espacial de equações paramétricas  $x = \sin t$ ,  $y = \sin t$  e  $z = \cos 2t$  está contido na superfície  $x^2 + y^2 + z = 1$ ; o traço da reta tangente a essa curva no ponto  $P_0$  em  $t = \pi/4$  está contido no plano tangente a essa superfície em  $P_0$ .

RESOLUÇÃO

Seja  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z = 1\}$  a superfície e  $\gamma(t) = (\sin t, \sin t, \cos 2t)$  a curva do enunciado, queremos verificar que  $\gamma(t) \in S$ , isto é,  $\gamma(t)$  satisfaz a equação  $x^2 + y^2 + z = 1$ . De fato,

$$\begin{aligned} x(t)^2 + y(t)^2 + z(t) &= \sin^2 t + \sin^2 t + \cos 2t \\ &= \sin^2 t + \sin^2 t + \cos^2 t - \sin^2 t \\ &= 1. \end{aligned}$$

Agora, note que  $P_0 = \gamma(\pi/4) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ . Então, sendo  $r(t) = P_0 + \vec{v}t$  a reta tangente à curva  $\gamma(t)$  em  $P_0$ , como  $\gamma'(t) = (\cos t, \cos t, -2\sin 2t)$  e  $\vec{v} = \gamma'(\pi/4)$ , temos

$$r(t) = \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t, \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t, -2t \right).$$

Assim, seja  $\Pi$  o plano tangente a  $S$  em  $P_0$ , isto é, o plano de equação

$$f_x(P_0) \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + f_y(P_0) \left( y - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + (-1)(z - 0) = 0$$

com  $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ , ou seja,

$$(-\sqrt{2}) \left( x - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + (-\sqrt{2}) \left( y - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + (-1)z = 0.$$

Queremos verificar que  $r(t) \in \Pi$ , isto é,  $r(t)$  satisfaz a equação anterior. De fato,

$$\begin{aligned} &(-\sqrt{2}) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \\ &(-\sqrt{2}) \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}t - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \\ &\quad (-1)(-2t) = \\ &\quad -t - t + 2t = \\ &\quad 0. \end{aligned}$$

4. Aproxime linearmente uma função adequada  $f(x, y)$  e a partir dela estime:

- (a)  $(0,99e^{0,002})^8$ ;
- (b)  $(0,99)^3 + (2,01)^3 - 6(0,99)(2,01)$ .

RESOLUÇÃO

Seja  $|x - x_0| = |\Delta x| \ll 1$  e  $|y - y_0| = |\Delta y| \ll 1$  (arbitrariamente pequenos), temos que

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y.$$

(a) Sendo  $f(x, y) = (xe^y)^8$ ,  $f_x = 8(xe^y)^7 e^y$ ,  $f_y = 8(xe^y)^8$ ,  $x = 0,99$ ,  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = x - x_0 = -0,01$ ,  $y = 0,002$ ,  $y_0 = 0$  e  $\Delta y = y - y_0 = 0,002$ , temos que

$$\begin{aligned}(0,99e^{0,002})^8 &= f(0,99, 0,002) \\ &\approx f(1,0) + f_x(1,0) \cdot \Delta x + f_y(1,0) \cdot \Delta y \\ &\approx 1 + 8(-0,01) + 8(0,002) \\ &\approx 0,936.\end{aligned}$$

Note que, numa calculadora  $(0,99e^{0,002})^8 \approx 0,938$ . Portanto, o erro é aproximadamente 0,002.

(b) Sendo  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$ ,  $f_x = 3x^2 - 6y$ ,  $f_y = 3y^2 - 6x$ ,  $x = 0,99$ ,  $x_0 = 1$ ,  $\Delta x = x - x_0 = -0,01$ ,  $y = 2,01$ ,  $y_0 = 2$  e  $\Delta y = 0,01$ , temos que

$$\begin{aligned}(0,99)^3 + (2,01)^3 - 6(0,99)(2,01) &= f(0,99, 2,01) \\ &\approx f(1,2) + f_x(1,2) \cdot \Delta x + f_y(1,2) \cdot \Delta y \\ &\approx -3 + (-9)(-0,01) + 6(0,01) \\ &\approx -2,8500.\end{aligned}$$

Note que, numa calculadora  $(0,99)^3 + (2,01)^3 - 6(0,99)(2,01) \approx -2,8485$ . Portanto, o erro é aproximadamente 0,0015.

5. Considere um cilindro cujo raio mede aproximadamente 2 metros e cuja altura mede aproximadamente 3 metros. Determine a precisão das medidas do raio e da altura para que o erro estimado do volume via aproximação linear não ultrapasse 0,1 metros cúbicos. Suponha ainda que o possível erro cometido ao se medir o raio seja igual ao possível erro cometido ao se medir a altura.

#### RESOLUÇÃO

$V(r, h) = \pi r^2 h$  é o volume do cilindro de raio  $r$  e altura  $h$ . Suas derivadas parciais são dadas por  $V_r = 2\pi r h$  e  $V_h = \pi r^2$ . Assim, por aproximação linear,

$$V(r_0 + \Delta r, h_0 + \Delta h) \approx V(r_0, h_0) + V_r(r_0, h_0) \cdot \Delta r + V_h(r_0, h_0) \cdot \Delta h, \quad (3.5)$$

onde  $r_0 = 2$ ,  $h_0 = 3$  e  $\Delta r = \Delta h \ll 1$  é o erro cometido nas aproximações do raio e da altura. Logo, o erro estimado do volume é dado por

$$\begin{aligned}|\Delta V| &= |V(2 + \Delta r, 3 + \Delta h) - V(2, 3)| \\ &\approx |V_r(2, 3) \cdot \Delta r + V_h(2, 3) \cdot \Delta h| \\ &\approx |(V_r(2, 3) + V_h(2, 3)) \cdot \Delta r| \\ &\approx 16\pi|\Delta r|.\end{aligned}$$

Então, para que  $|\Delta V|$  seja majorado por 0,1  $m^3$ , basta que  $16\pi|\Delta r|$  o seja. Assim,

$$16\pi|\Delta r| \leq 0,1 \Leftrightarrow |\Delta r| \leq \frac{1}{160\pi} \approx 0,001989.$$

Portanto, a precisão requerida é da ordem de 2 mm tanto no raio quanto na altura.

6. O interior de um tanque cilíndrico metálico tem altura de 1,2 m e raio de 80 cm. Se a espessura das paredes é de 5 mm, calcule a quantidade aproximada de metal usada na construção do tanque, via aproximação linear, e o erro relativo cometido nessa aproximação.

#### RESOLUÇÃO

Sendo  $V(r, h) = \pi r^2 h$  o volume do cilindro de raio  $r$  e altura  $h$ , com derivadas parciais  $V_r = 2\pi r h$  e  $V_h = \pi r^2$ , sua aproximação linear é dada por (3.5). Agora, sejam  $r_0 = 80$  cm,  $h_0 = 120$  cm,  $\Delta r = 0,5$  cm e  $\Delta h = 2 \cdot 0,5 = 1$  cm. Assim, como  $\Delta V = V(r_0 + \Delta r, h_0 + \Delta h) - V(r_0, h_0)$ , por um lado, via aproximação linear,

$$\begin{aligned}\Delta V &\approx 2\pi r_0 h_0 \Delta r + \pi r_0^2 \Delta h \\ &\approx 30159,29 + 20106,19 = 50265,48 \text{ cm}^3.\end{aligned}$$

Por outro, calculando diretamente pela fórmula do volume de um cilindro, temos

$$\begin{aligned}\Delta V &= \pi (r_0 + \Delta r)^2 (h_0 + \Delta h) - \pi r_0^2 h_0 \\ &\approx 2463355,00 - 2412743,16 = 50611,84 \text{ cm}^3.\end{aligned}$$

Então, o erro absoluto é dado por  $50611,84 - 50265,48 = 346,36 \text{ cm}^3$ , enquanto que o erro relativo é dado por  $\frac{346,36}{50611,84} \approx 0,0068 < 7 \cdot 10^{-3}$ . Ainda, note que, embora o erro relativo seja pequeno, o erro absoluto é grande pois  $\Delta r$  e  $\Delta h$  não são muito menores do que 1, condição para que a aproximação linear seja efetiva.

7. Um observador vê o topo de uma torre sob um ângulo de elevação de  $30^\circ$  com um possível erro de  $1'$ . Sua distância até a torre é de 300 m com possível erro de 10 cm. Via aproximação linear, determine o possível erro no cálculo da altura aproximada da torre.

#### RESOLUÇÃO

Sendo  $x$  a distância entre o observador e a torre,  $\theta$  o ângulo de elevação e  $h = x \operatorname{tg} \theta$  a altura da torre, temos  $h_x = \operatorname{tg} \theta$  e  $h_\theta = x / \cos^2 \theta$ . Considere  $x_0 = 300$  m e  $\theta_0 = \frac{\pi}{6}$  rad com  $\Delta x = 0,1$  m e  $\Delta \theta \approx 0,0003$  rad.<sup>54</sup> Portanto, como  $\Delta h = h(x_0 + \Delta x, \theta_0 + \Delta \theta) - h(x_0, \theta_0)$ , por um lado, o erro aproximado da altura pela aproximação linear é dado por

$$\begin{aligned}\Delta h &\approx (\operatorname{tg} \theta_0) \Delta x + \frac{x_0}{\cos^2 \theta_0} \Delta \theta \\ &\approx 0,177735 \text{ m}.\end{aligned}$$

Por outro,

$$\begin{aligned}\Delta h &= h\left(300, 1; \frac{\pi}{6} + 0,0003\right) - h\left(300; \frac{\pi}{6}\right) \\ &\approx 173,382877 - 173,205081 = 0,177796 \text{ m}.\end{aligned}$$

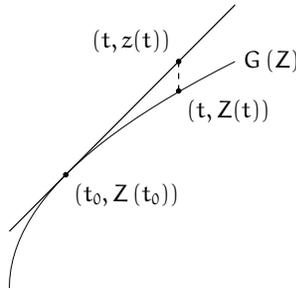
Então, note que, o erro relativo é dado por  $\frac{0,177796 - 0,177735}{0,177735} \approx 3,4 \cdot 10^{-4}$ .

8. Se  $f$  é uma função diferenciável tal que  $f_x(1, -1) = 2$  e  $f_y(1, -1) = 0$ , determine a inclinação da reta tangente ao gráfico da função  $Z(t) = f(2t^2 - t, -t^4)$  no ponto de abscissa  $t_0 = 1$ .

<sup>54</sup>Via uma simples *regra de três*,  $\frac{\pi}{180}$  rad está para  $1^\circ$ , que está para  $60'$ .

RESOLUÇÃO

Sabemos do “cálculo I” que a inclinação é dada por  $Z'(1)$ . Assim, seja  $P_0 = (t_0, Z(t_0))$  um ponto fixo do gráfico  $G(Z)$  de  $Z$ , conforme ilustrado na figura seguinte:



Para tal ponto, se  $z(t) = at + b$  é a reta tangente a  $G(Z)$  em  $P_0$ , essa reta tem inclinação  $\alpha = Z'(t_0)$ . Logo, se  $t_0 = 1$ ,  $x(t) = 2t^2 - t$  e  $y(t) = -t^4$ , então

$$\begin{aligned} \alpha &= Z'(1) \\ &= \left. \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) \right|_{t=1} \\ &= \nabla f(x(1), y(1)) \cdot (x'(1), y'(1)) \\ &= (f_x(1, -1), f_y(1, -1)) \cdot (4 \cdot (1) - 1, -4 \cdot (1)^3) \\ &= 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) \\ &= 6, \end{aligned}$$

utilizando a regra da cadeia na terceira igualdade, de cima para baixo.

9. Determine o vetor  $\vec{n}$  perpendicular à curva de equação  $x \ln y - y \ln x = 0$  no ponto  $P_0 = (1, 1)$ , considerando que a sua primeira componente é positiva e  $\|\vec{n}\| = 2\sqrt{2}$ .

**Observação**

Analogamente ao caso de funções reais de três variáveis reais, para uma função  $f(x, y)$  adequada,  $\nabla f(P_0)$  é ortogonal à curva  $f(x, y) = \text{constante} = f(P_0)$  no ponto  $P_0$  dessa curva.

RESOLUÇÃO

Como  $\vec{n} = k \nabla f(P_0)$  e  $\nabla f = \left( \ln y - \frac{y}{x}, \frac{x}{y} - \ln x \right)$ , temos que  $\nabla f(1, 1) = (-1, 1)$  e  $\vec{n} = (-k, k)$ , sendo que, para  $-k > 0$ , temos  $k < 0$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \|\vec{n}\| &= 2\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2k^2} = 2\sqrt{2} \\ &\Rightarrow |k|\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \\ &\Rightarrow k = -2 \\ &\Rightarrow \vec{n} = (2, -2). \end{aligned}$$

10. Determine os versores normais à superfície de equação  $e^{yz \ln x} + \ln z = 1$ , no ponto  $P_0$  dessa superfície de ordenada e cota iguais a 1.

RESOLUÇÃO

Se  $P_0 = (x_0, 1, 1)$  satisfaz a equação  $e^{yz \ln x} + \ln z = 1$ , então  $e^{\ln x_0} = 1$ , isto é,  $x_0 = 1$ . Por outro lado, a superfície dada é representada por

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= e^{yz \ln x} + \ln z \\ &= 1 \\ &= f(P_0), \end{aligned}$$

com vetor normal em  $P_0 = (1, 1, 1)$  dado por múltiplos de  $\nabla f(P_0) = (f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0))$ , onde

$$f_x = \frac{yz}{x} e^{yz \ln x}, \quad f_y = z \ln x e^{yz \ln x} \quad \text{e} \quad f_z = y \ln x e^{yz \ln x} + \frac{1}{z}.$$

Portanto, como  $\nabla f(P_0) = (1, 0, 1)$ , os versores normais à superfície em  $P_0$  são dados por  $\vec{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$ .

11. Se  $u = f(x, y)$  está definida e tem derivadas parciais de primeira ordem contínuas num domínio adequado,  $x = r \cos \theta$  e  $y = r \sin \theta$ , prove que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2.$$

*Sugestão:* Regra da cadeia no segundo membro.

RESOLUÇÃO

Calculando separadamente cada parcela do segundo membro e somando os resultados, temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 \\ &= (u_x \cos \theta + u_y \sin \theta)^2 \\ &= u_x^2 \cos^2 \theta + 2u_x u_y \cos \theta \sin \theta + u_y^2 \sin^2 \theta \\ &+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)^2 &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 \\ &= \frac{1}{r^2} (u_x r(-\sin \theta) + u_y r \cos \theta)^2 \\ &= u_x^2 \sin^2 \theta - 2u_x u_y \sin \theta \cos \theta + u_y^2 \cos^2 \theta \\ &= \\ &u_x^2 + u_y^2. \end{aligned}$$

### 3.5.4 Otimização

1. Qual é a menor distância entre o ponto  $P_0 = (2, 1, 4)$  e o plano  $\Pi$  dado pela equação  $x + 2y + z = 5$ ?

RESOLUÇÃO VIA GEOMETRIA ANALÍTICA

Distância entre  $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$  e  $\Pi : ax + by + cz + d = 0$  é dada por

$$\begin{aligned}d(P_0, \Pi) &= \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\&= \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} \\&= \frac{3}{\sqrt{6}} \\&= \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ u.c.}\end{aligned}$$

RESOLUÇÃO PELO TESTE DA DERIVADA SEGUNDA

Se  $P = (x, y, z) \in \Pi$ , então  $P = (x, y, 5 - x - 2y)$  e  $d(P_0, \Pi)$  é o menor valor da função

$$\begin{aligned}d(x, y) &= d(P_0, P) \\&= \sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2 + (1-x-2y)^2}.\end{aligned}$$

Note que, como  $d$  é positiva, se

$$\begin{aligned}f(x, y) &= d(x, y)^2 \\&= (x-2)^2 + (y-1)^2 + (1-x-2y)^2,\end{aligned}$$

então

$$f_{\text{mínimo}} = (d_{\text{mínimo}})^2,$$

não sendo necessário, portanto, derivar raiz quadrada.

- DETERMINAÇÃO DOS PONTOS CRÍTICOS

$$\begin{cases} f_x = 2(x-2) - 2(1-x-2y) = 4x + 4y - 6 = 0 \\ f_y = 2(y-1) - 4(1-x-2y) = 4x + 10y - 6 = 0 \end{cases} \implies y = 0, x = 3/2.$$

Como cada ponto do domínio de  $f$  é interior a ele, em particular,  $(3/2, 0)$  é interior a tal domínio.

- TESTE DA DERIVADA II PARA  $(3/2, 0)$

Como

$$\begin{aligned}H(3/2, 0) &= f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2|_{(3/2, 0)} \\&= 4 \cdot 10 - 4^2 \\&> 0\end{aligned}$$

e  $f_{xx}(3/2, 0) = 4 > 0$ ,  $(3/2, 0)$  é minimizador local (e global) de  $f$  e  $d$ , ou seja,  $P = (3/2, 0, 7/2)$  é o ponto de  $\Pi$  mais próximo de  $P_0$ , com distância  $d(P_0, \Pi)$  dada por

$$\begin{aligned}d_{\text{mínimo}} &= \sqrt{f_{\text{mínimo}}} \\&= \sqrt{(-1/2)^2 + (-1)^2 + (-1/2)^2} \\&= \sqrt{3/2} \text{ u.c.}\end{aligned}$$

2. Caso exista, calcule a menor distância da origem até a superfície  $S$  dada por  $xyz = 8$ .

RESOLUÇÃO

Primeiramente, note que  $S$  é um hiperbolóide de quatro folhas,<sup>55</sup> onde quatro de seus pontos são os mais próximos da origem de  $\mathbb{R}^3$ .<sup>56</sup> Assim, temos valor mínimo como imagem (da função distância) de quatro minimizadores.

RESOLUÇÃO PELO TESTE DA DERIVADA SEGUNDA

Aqui,  $x$ ,  $y$  e  $z$  são diferentes de 0 e, para não ter de derivar raiz quadrada,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= d(x, y)^2 \\ &= x^2 + y^2 + (8/xy)^2. \end{aligned}$$

• DETERMINAÇÃO DOS PONTOS CRÍTICOS

$$\begin{cases} f_x = 2x - \frac{128}{x^3y^2} = 0 \implies x^4y^2 = 64 \\ f_y = 2y - \frac{128}{x^2y^3} = 0 \implies x^2y^4 = 64 \end{cases} \implies x = \pm y = \pm 2.$$

Como pontos que não estão nos eixos cartesianos são interiores ao domínio de  $f$ ,  $(\pm 2, \pm 2)$  são interiores a esse domínio.

• TESTE DA DERIVADA II PARA  $(2, 2)$ ,  $(2, -2)$ ,  $(-2, 2)$  E  $(-2, -2)$

Como

$$\begin{aligned} H &= f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2 \\ &= \left[ 2 + 3 \left( \frac{128}{x^4y^2} \right) \right] \left[ 2 + 3 \left( \frac{128}{x^2y^4} \right) \right] - \left[ 2 \left( \frac{128}{x^3y^3} \right) \right]^2 \\ &= 4 + 6 \left[ \frac{128(x^2 + y^2)}{x^4y^4} \right] + 5 \left( \frac{128}{x^3y^3} \right)^2 \end{aligned}$$

e  $f_{xx}$  são positivos,  $(\pm 2, \pm 2)$  são minimizadores locais de  $f$  e  $d$ , sendo a distância procurada dada por

$$\begin{aligned} d_{\text{mínimo}} &= \sqrt{f_{\text{mínimo}}} \\ &= \sqrt{(\pm 2)^2 + (\pm 2)^2 + (\pm 2)^2} \\ &= 2\sqrt{3} \text{ u.c.} \end{aligned}$$

Contudo, como  $xyz = 8 > 0$ , temos que  $(2, 2, 2)$ ,  $(2, -2, -2)$ ,  $(-2, 2, -2)$  e  $(-2, -2, 2)$  são os pontos de  $S$  mais próximos da origem.

RESOLUÇÃO VIA MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

$$\text{Sejam } d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, f = d^2, g(x, y, z) = xyz \text{ e } \begin{cases} f_x &= \lambda g_x, \\ f_y &= \lambda g_y, \\ f_z &= \lambda g_z, \\ g(x, y, z) &= 8. \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} 2x &= \lambda yz, \\ 2y &= \lambda xz, \\ 2z &= \lambda xy, \\ xyz &= 8. \end{cases} \quad (3.6)$$

<sup>55</sup> $S$  pode ser visualizada, por exemplo, no *Wolfram Alpha*.

<sup>56</sup>Da mesma forma que dois pontos da hipérbole  $xy = 8$  são os mais próximos da origem de  $\mathbb{R}^2$ .

Agora, multiplicando a primeira equação de (3.6) por  $x$ , a segunda por  $y$  e a terceira por  $z$ , obtemos  $2x^2 = 2y^2 = 2z^2$ , isto é,  $y = \pm x$  e  $z = \pm x$ . Portanto, da última equação de (3.6), temos  $\pm x^3 = 8$ , ou seja,  $x = \pm 2$ ,  $y = \pm 2$  e  $z = \pm 2$ . Por outro lado, como  $xyz = 8 > 0$ , segue que  $(2, 2, 2)$ ,  $(2, -2, -2)$ ,  $(-2, 2, -2)$  e  $(-2, -2, 2)$  são os pontos de  $S$  mais próximos da origem. Por fim, caso  $P$  seja qualquer um destes quatro pontos,

$$\begin{aligned} d_{\min} &= d(P) \\ &= \sqrt{12} \\ &= 2\sqrt{3} \text{ u.c.} \end{aligned}$$

Convidamos o leitor a comparar a imagem de qualquer outro ponto de  $S$  com a imagem dos quatro minimizadores de  $d$  obtidos, ou seja, considere um ponto arbitrário  $P' \neq P$ , cujas coordenadas satisfazem a condição  $xyz = 8$ , e verifique que  $d(P') > d(P)$ . Se  $P' = (2\sqrt{2}, 2, \sqrt{2})$ , por exemplo, então  $2\sqrt{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 8$  e

$$d(P') = \sqrt{14} > \sqrt{12} = d(P).$$

3. Em existindo a caixa de maior volume cuja área total da superfície seja igual a  $64 \text{ cm}^2$ , obtenha as dimensões de tal caixa via multiplicadores de Lagrange.

#### RESOLUÇÃO

Embora possamos verificar a existência do valor máximo global para o volume dessa caixa,<sup>57</sup> a resolução terá prosseguimento *apenas* com a suposição de que seu volume máximo existe, conforme o enunciado dessa questão. Portanto, sejam  $f(x, y, z) = xyz$  e  $g(x, y, z) = 2(xy + yz + xz)$  o volume e a área da caixa, respectivamente. Assim,

$$\begin{cases} f_x = \lambda g_x & \implies & yz = 2\lambda(y + z), \\ f_y = \lambda g_y & \implies & xz = 2\lambda(x + z), \\ f_z = \lambda g_z & \implies & xy = 2\lambda(x + y), \\ g(x, y, z) = 64 & \implies & xy + yz + xz = 32. \end{cases} \quad (3.7)$$

Multiplicando a primeira equação do sistema (3.7) por  $x$ , a segunda por  $y$ , a terceira por  $z$ , igualando-as e observando que  $\lambda \neq 0$ ,<sup>58</sup> temos  $xyz = xy + yz = xz + yz$ . Portanto,  $x = y = z$ . Então, da última equação de (3.7), temos  $3x^2 = 32$ , isto é,  $x = \sqrt{32/3} \text{ cm}$ , onde desconsideramos a raiz negativa.

Convidamos o leitor a comparar a imagem do maximizador  $P = (\sqrt{32/3}, \sqrt{32/3}, \sqrt{32/3})$  de  $f$  com a de um ponto arbitrário  $P' \neq P$ , cujas coordenadas satisfazem a condição  $xy + yz + xz = 32$ , e verificar que  $f(P') < f(P)$ . Por exemplo, para  $x = y = 1$ , a condição supracitada fica reduzida a  $1 \cdot 1 + 1 \cdot z + 1 \cdot z = 32$ , isto é,  $z = 31/2$ . Assim, para  $P' = (1, 1, \frac{31}{2})$ ,

$$f(P') = \frac{31}{2} < \frac{32}{3} \sqrt{\frac{32}{3}} = f(P).$$

<sup>57</sup>Verificação similar à demonstração apresentada na página 88.

<sup>58</sup>Se  $\lambda = 0$ , então  $yz = 0$  acarreta volume nulo!

De fato, nessa expressão, caso  $<$  seja trocado por  $\geq$ , temos

$$\begin{aligned} \frac{31}{2} &\geq \frac{32}{3} \sqrt{\frac{32}{3}} \implies \left(\frac{31}{2}\right)^2 \geq \left(\frac{32}{3}\right)^2 \cdot \frac{32}{3} \\ &\implies \frac{31^2}{4} \geq \frac{32^3}{27} \\ &\implies 27 \cdot 31 \cdot 31 \geq 4 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32, \end{aligned}$$

que é uma desigualdade inválida.

4. Em existindo o elipsoide de equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , que passa por  $(1, 1, 2)$  e limita a região de volume mínimo,<sup>59</sup> determine os valores numéricos de  $a^2$ ,  $b^2$  e  $c^2$ .

#### RESOLUÇÃO VIA MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Embora possamos verificar a existência do valor mínimo global para o volume desse elipsoide,<sup>60</sup> a resolução terá prosseguimento *apenas* com a suposição de que seu volume mínimo existe, como enunciado nessa questão. Assim,  $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{4\pi abc}{3}$  e, como o ponto  $(1, 1, 2)$  satisfaz a equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ,  $g(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{4}{c^2} = 1$ .

$$\therefore \begin{cases} f_a = \lambda g_a & \implies \frac{4\pi bc}{3} = -\frac{2\lambda}{a^3}, \\ f_b = \lambda g_b & \implies \frac{4\pi ac}{3} = -\frac{2\lambda}{b^3}, \\ f_c = \lambda g_c & \implies \frac{4\pi ab}{3} = -\frac{8\lambda}{c^3}, \\ g(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 1 & \implies \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{4}{c^2} = 1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Multiplicando a primeira equação do sistema (3.8) por  $a$ , a segunda por  $b$  e a terceira por  $c$ , igualando-as e observando que  $\lambda \neq 0$ ,<sup>61</sup> temos  $a^2 = b^2$  e  $c^2 = 4b^2$ . Substituindo tais quadrados na última equação de (3.8), temos  $b^2 = 3$ . Portanto,  $a^2 = 3$  e  $c^2 = 12$ . Então,  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{3} + \frac{z^2}{12} = 1$  é o elipsoide de menor volume que passa por  $(1, 1, 2)$ .

Para testar a minimalidade do ponto  $P = (\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ , considere um ponto arbitrário  $P' \neq P$ , cujas coordenadas satisfazem a condição  $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{4}{c^2} = 1$ , e verifique que  $f(P') > f(P)$ . Por exemplo, para  $a = b = 2$ , a condição supracitada fica reduzida a  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{c^2} = 1$ , isto é,  $c = 2\sqrt{2}$ . Considere, então,  $P' = (2, 2, 2\sqrt{2})$ . Assim,

$$f(P') = \frac{4\pi 2^3 \sqrt{2}}{3} > \frac{4\pi 2 (\sqrt{3})^3}{3} = f(P).$$

De fato, nessa expressão, caso  $>$  seja trocado por  $\leq$ , temos

$$\begin{aligned} 2^3 \sqrt{2} &\leq 2 (\sqrt{3})^3 \implies 4\sqrt{2} \leq 3\sqrt{3} \\ &\implies 16 \cdot 2 \leq 9 \cdot 3 \\ &\implies 32 \leq 27, \end{aligned}$$

que é uma desigualdade inválida.

<sup>59</sup>Utilizando *integrals triplas*, no capítulo 4, mostraremos que o volume da região limitada pelo elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$  é dado por  $\frac{4\pi abc}{3}$  u.v.

<sup>60</sup>Verificação similar à demonstração apresentada na página 88.

<sup>61</sup>Se  $\lambda = 0$ , então  $bc = 0$  acarreta volume nulo!

5. Em existindo a caixa retangular de maior volume que pode ser inscrita no elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ , determine essa caixa.

#### RESOLUÇÃO VIA MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Embora possamos verificar a existência do valor máximo global para o volume dessa caixa,<sup>62</sup> a resolução terá prosseguimento *apenas* com a suposição de que seu volume máximo existe, conforme o enunciado dessa questão. Assim, sendo  $(x, y, z)$  o vértice da caixa no primeiro octante,  $f(x, y, z) = 8xyz$  é o volume da caixa para  $(x, y, z)$  satisfazendo a equação  $g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

$$\therefore \begin{cases} f_x = \lambda g_x & \implies & 4yz = \frac{\lambda x}{a^2}, \\ f_y = \lambda g_y & \implies & 4xz = \frac{\lambda y}{b^2}, \\ f_z = \lambda g_z & \implies & 4xy = \frac{\lambda z}{c^2}, \\ g(x, y, z) = 1 & \implies & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \end{cases} \quad (3.9)$$

Multiplicando a primeira equação do sistema (3.9) por  $x$ , a segunda por  $y$ , a terceira por  $z$ , igualando-as e observando que  $\lambda \neq 0$ ,<sup>63</sup> temos  $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$  e, da última equação de (3.9),  $\frac{3x^2}{a^2} = \frac{3y^2}{b^2} = \frac{3z^2}{c^2} = 1$ . Logo,  $x = \frac{a}{\sqrt{3}}$ ,  $y = \frac{b}{\sqrt{3}}$  e  $z = \frac{c}{\sqrt{3}}$  u.c.

Para testar a maximalidade de  $P = \left(\frac{a}{\sqrt{3}}, \frac{b}{\sqrt{3}}, \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$ , desconsidere a aplicação do problema, ou seja, suponha que  $f(x, y, z) \neq 0$  não tenha relação com o cálculo de volume. Assim,

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz \neq 0\}$$

e

$$\left(\pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \pm \frac{b}{\sqrt{3}}, \pm \frac{c}{\sqrt{3}}\right)$$

são as soluções de (3.9), onde  $P$  é a solução com as três coordenadas positivas, com imagens por  $f$  dadas por  $\pm \frac{8abc}{3\sqrt{3}}$ , onde o valor positivo é o máximo e o valor negativo é o mínimo.

6. Seja  $f(x, y) = x^2 + y^2$  definida em  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 \leq 1\}$ . Obtenha os maximizadores e minimizadores globais de  $f$  sobre  $D$ .

#### RESOLUÇÃO

Como  $f$  é contínua e  $D$  é compacto,  $f$  tem máximo e mínimo globais em  $D$  por  $(O_2)$ . Seguem duas resoluções distintas para essa questão.

#### RESOLUÇÃO SEM CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Como  $f(0, 0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x, y)$  para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(0, 0)$  é o ponto de mínimo global. Por outro lado, de  $y^2 \leq 2y^2$ , temos  $f(x, y) = x^2 + y^2 \leq x^2 + 2y^2 \leq 1$  para pontos  $(x, y) \in D$ . Portanto, o valor máximo de  $f$  em  $D$  é 1. De fato, como  $f(x, y)$  é o quadrado da distância de  $(x, y)$  até  $(0, 0)$ , o ponto de máximo ocorre nos vértices  $(\pm 1, 0)$  da elipse que representa a fronteira de  $D$ .

#### RESOLUÇÃO COM CÁLCULO DE VÁRIAS VARIÁVEIS

Devemos analisar tanto o interior quanto a fronteira de  $D$ .

<sup>62</sup>Verificação similar à demonstração apresentada na página 88.

<sup>63</sup>Se  $\lambda = 0$ , então  $yz = 0$  acarreta volume nulo!

- INTERIOR DE D, OU SEJA,  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{1/2})^2} < 1 \right\}$

ANÁLISE DOS PONTOS CRÍTICOS

Se  $\nabla f = (0, 0)$ , então  $(x, y) = (0, 0)$ , que é mínimo local via  $(O_{3,2})$ .<sup>64</sup> De fato, como não existe ponto  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tal que  $f(x, y) < f(0, 0)$ , a origem é mínimo global de  $f(x, y) = x^2 + y^2$ .

- FRONTEIRA DE D, OU SEJA,  $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{1^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{1/2})^2} = 1 \right\}$

Da análise no interior de D, resta calcular os pontos de máximo globais na fronteira de D. Seguem duas formas distintas de calculá-los.

CÁLCULO DE MAXIMIZADORES VIA MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

$$\begin{aligned} f(x, y) = x^2 + y^2, g(x, y) = x^2 + 2y^2 &\implies \begin{cases} f_x &= \lambda g_x, \\ f_y &= \lambda g_y, \\ g(x, y) &= 1 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} 2x &= 2\lambda x, \\ 2y &= 4\lambda y, \\ x^2 + 2y^2 &= 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.10)$$

Multiplicando a primeira equação do sistema (3.10) por  $2y$ , a segunda por  $x$ , e igualando os primeiros membros das duas, temos  $xy = 0$ . Portanto, pela terceira equação de (3.10), temos:

- $x = 0 \implies y = \pm\sqrt{2}/2$ ;
- $y = 0 \implies x = \pm 1$ .

Como  $f(0, \pm\sqrt{2}/2) = 0^2 + (\pm\sqrt{2}/2)^2 = 1/2$  e  $f(\pm 1, 0) = 1^2 + 0^2 = 1$ ,  $(\pm 1, 0)$  são os pontos de máximo globais de  $f$  em D.

CÁLCULO DE MAXIMIZADORES SENDO  $f$  FUNÇÃO APENAS DE  $x$  (OU  $y$ )

- Substituindo  $x^2 = 1 - 2y^2$  em  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $f$  é função apenas de  $y$ , digamos,  $g(y) = 1 - y^2$  com  $y \in [-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2}]$ . Como  $g'(y) = -2y$ ,  $y = 0$  é o único ponto crítico de  $g$ . Como  $g''(y) = -2 < 0$ ,  $y = 0$  é o ponto de máximo local no intervalo  $(-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2})$ , com valor máximo local  $g(0) = 1$ . Por fim, na fronteira, temos  $g(\pm\sqrt{1/2}) = 1/2 < 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} y = 0 \text{ e } x^2 = 1 - y^2 &\implies x = \pm 1 \\ &\implies (\pm 1, 0) \text{ são pontos de máximo locais para } f, \end{aligned}$$

com valor máximo local  $f(\pm 1, 0) = (\pm 1)^2 + 0^2 = 1$ .

- Substituindo  $y^2 = (1 - x^2)/2$  em  $f(x, y) = x^2 + y^2$ ,  $f$  é função apenas de  $x$ , digamos,  $h(x) = (1 + x^2)/2$  com  $x \in [-1, 1]$ . Como  $h'(x) = x$ ,  $x = 0$  é o único ponto crítico de  $h$ . Como  $h''(x) = 1 > 0$ ,  $x = 0$  é o ponto de mínimo local no intervalo  $(-1, 1)$ , que podemos desconsiderar pela análise no interior de D. Por fim, na fronteira,  $h(\pm 1) = 1$ . Assim,  $(\pm 1, 0)$  são os maximizadores locais de  $f$  em D.

<sup>64</sup>Verifique!

Portanto,  $(0, 0)$  é o minimizador e  $(\pm 1, 0)$  são os maximizadores globais de  $f$  em  $D$ .

7. Para  $f(x, y) = x^2 - xy$ , obtenha os valores máximo e mínimo globais de  $f$  na bola fechada  $x^2 + y^2 \leq 1$ .

RESOLUÇÃO

$f$  é contínua no compacto  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ . Então,  $f$  admite máximo e mínimo globais em  $D$  por  $(O_2)$ . Buscaremos tais extremantes, tanto no interior, quanto na fronteira de  $D$ .

- INTERIOR DE  $D$ , OU SEJA,  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$

CÁLCULO DOS PONTOS CRÍTICOS

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x = 0 \end{cases} \implies x = y = 0.$$

TESTE DA DERIVADA SEGUNDA PARA  $(0, 0)$

$$H(0, 0) = f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2|_{(0,0)} = -1 < 0 \implies (0, 0) \text{ é ponto de sela.}$$

Assim, o máximo e o mínimo de  $f$  não ocorrem no interior de  $D$ .

- FRONTEIRA DE  $D$ , OU SEJA,  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$

RESOLUÇÃO VIA MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

$$\begin{aligned} f(x, y) = x^2 - xy \text{ e } g(x, y) = x^2 + y^2 &\implies \begin{cases} f_x = \lambda g_x, \\ f_y = \lambda g_y, \\ g(x, y) = 1 \end{cases} \\ &\implies \begin{cases} 2x - y = 2\lambda x, \\ -x = 2\lambda y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Depois de multiplicar a primeira equação do sistema (3.11) por  $y$  e a segunda por  $x$ , iguale os primeiros membros das duas equações resultantes e utilize a terceira equação de (3.11) para obter

$$\begin{aligned} 2xy - y^2 = -x^2 = y^2 - 1 &\implies 2y^2 - 1 = 2xy \text{ e } x^2 = 1 - y^2 \\ &\implies (2y^2 - 1)^2 = (2xy)^2 = 4(1 - y^2)y^2 \\ &\implies 4y^4 - 4y^2 + 1 = 4y^2 - 4y^4 \\ &\implies 8y^4 - 8y^2 + 1 = 0 \\ &\stackrel{t=y^2}{\implies} 8t^2 - 8t + 1 = 0 \\ &\implies y^2 = t = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

Portanto:

i.

$$\begin{aligned}y^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} &\implies x^2 = 1 - y^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \\&\implies 2xy = y^2 - x^2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\&\implies f(x, y) = x^2 - xy = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2};\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}y^2 = \frac{2 - \sqrt{2}}{4} &\implies x^2 = 1 - y^2 = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \\&\implies 2xy = y^2 - x^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\&\implies f(x, y) = x^2 - xy = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.\end{aligned}$$

Logo,  $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$  é o valor mínimo e  $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$  é o máximo.

RESOLUÇÃO VIA COMPOSIÇÃO DE  $f$  COM UMA CURVA PARAMETRIZADA

Seja  $x(t) = \cos t$  e  $y(t) = \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , uma parametrização de  $x^2 + y^2 = 1$ , note que, calcular o valor máximo/mínimo de

$$\begin{aligned}z(t) &= f(x(t), y(t)) \\&= \cos^2 t - \cos t \sin t \\&= \frac{1 + \cos(2t) - \sin(2t)}{2},\end{aligned}$$

$t \in [0, 2\pi]$ , significa calcular o valor máximo/mínimo de  $f$  ao longo da circunferência unitária  $x^2 + y^2 = 1$ . Portanto:

- i.  $z(t)$  é contínua no compacto  $[0, 2\pi]$ . Assim, por  $(O_2)$ ,  $z(t)$  tem máximo e mínimo globais em  $[0, 2\pi]$ ;
- ii.  $z(t)$  assume o valor 1 na fronteira de  $[0, 2\pi]$ , isto é, em  $\{0, 2\pi\}$ ;<sup>65</sup>
- iii. O valor máximo/mínimo no interior de  $[0, 2\pi]$ , isto é, em  $(0, 2\pi)$ , é calculado da forma seguinte:  
 $z'(t) = -\sin(2t) - \cos(2t) = 0$  para  $0 < t < 2\pi$ , isto é,  $\cos(2t) = -\sin(2t)$  para  $0 < 2t < 4\pi$ . Assim, como  $2t \in \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{11\pi}{4}, \frac{15\pi}{4}\right\}$ ,

$$z(t) = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}$$

para  $t \in \left\{\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{8}, \frac{11\pi}{8}, \frac{15\pi}{8}\right\}$ .

Como  $f$  não tem extremantes no interior do compacto  $D$ , eles pertencem à sua fronteira. Portanto,  $\frac{1-\sqrt{2}}{2}$  é o valor mínimo e  $\frac{1+\sqrt{2}}{2}$  é o valor máximo de  $f$  em  $D$ .

---

<sup>65</sup>De fato,  $z(0) = z(2\pi) = 1$ .

8. Determine o máximo e o mínimo globais da função  $z = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$ , onde  $B \neq 0$  e  $(A + C)^2 - 4(AC - B^2) \geq 0$ , na circunferência unitária  $x^2 + y^2 = 1$ .

RESOLUÇÃO VIA MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Sejam  $z = f(x, y)$ ,  $g(x, y) = x^2 + y^2$  e

$$\begin{cases} f_x &= \lambda g_x, \\ f_y &= \lambda g_y, \\ g(x, y) &= 1. \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} 2Ax + 2By &= 2\lambda x \implies (\lambda - A)x - By = 0, \\ 2Bx + 2Cy &= 2\lambda y \implies -Bx + (\lambda - C)y = 0, \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{cases} \quad (3.12)$$

Note que  $\lambda \neq A$ .<sup>66</sup> Agora, da primeira equação do sistema (3.12), temos

$$x = \frac{B}{\lambda - A}y. \quad (3.13)$$

Além disso, multiplicando a primeira equação de (3.12) por  $(\lambda - C)$ , a segunda por  $B$ , e somando as duas equações resultantes, temos  $((\lambda - A)(\lambda - C) - B^2)x = 0$ , acarretando  $x = 0$ , que, como vimos, pode ser descartado, ou

$$B^2 = (\lambda - A)(\lambda - C). \quad (3.14)$$

Ainda, substituindo (3.13) na terceira equação de (3.12), temos  $\left[\frac{B^2}{(\lambda - A)^2} + 1\right]y^2 = 1$ , ou seja,

$$y^2 = \frac{(\lambda - A)^2}{B^2 + (\lambda - A)^2}. \quad (3.15)$$

Por fim, substituindo (3.13), (3.14) e (3.15) na função do enunciado da questão, temos

$$\begin{aligned} z &= \left[ \frac{AB^2}{(\lambda - A)^2} + \frac{2B^2}{\lambda - A} + C \right] y^2 \\ &= \left[ \frac{A(\lambda - C)}{\lambda - A} + 2(\lambda - C) + C \right] \frac{(\lambda - A)^2}{(\lambda - A)(2\lambda - (A + C))} \\ &= \frac{A(\lambda - C) + 2(\lambda - A)(\lambda - C) + C(\lambda - A)}{2\lambda - (A + C)} \\ &= \frac{2\lambda^2 - (A + C)\lambda}{2\lambda - (A + C)} \\ &= \lambda, \end{aligned}$$

que, por (3.14), é obtido via

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + AC - B^2 = 0.$$

<sup>66</sup>De fato,  $\lambda = A$  na primeira equação do sistema (3.12) acarreta  $y = 0$ , que, na segunda equação, acarreta  $x = 0$ . Contudo,  $(x, y) = (0, 0)$  não é ponto da circunferência  $x^2 + y^2 = 1$ , ou seja,  $x = y = 0$  não satisfaz a terceira equação de (3.12).

Portanto,  $\lambda$  é dado por

$$\lambda_{\pm} = \frac{A + C \pm \sqrt{(A + C)^2 - 4(AC - B^2)}}{2},^{67} \quad (3.16)$$

onde  $z = \lambda_+$  é o valor máximo global e  $z = \lambda_-$  é o mínimo global.

### Observação

Considerando a resolução via multiplicadores de Lagrange da questão 7, página 108, observe que, substituindo  $A = 1$ ,  $B = -1/2$  e  $C = 0$  na equação (3.16),  $z_{\max} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$  e  $z_{\min} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$ .

9. Uma fábrica produz dois tipos de lâmpadas. Sendo feitas  $x$  lâmpadas do tipo 1 e  $y$  do tipo 2, cada uma delas poderá ser vendida por  $100 - 2x$  e  $125 - 3y$  u.m. (unidades monetárias), respectivamente. O custo de fabricação de  $x$  lâmpadas do tipo 1 e  $y$  do tipo 2 é de  $12x + 11y + 4xy$  u.m. Quantas lâmpadas de cada tipo devem ser produzidas para que a fábrica obtenha o lucro máximo e de quanto é esse lucro?

### RESOLUÇÃO

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x(100 - 2x) + y(125 - 3y) - (12x + 11y + 4xy) \\ &= 88x + 114y - 2x^2 - 3y^2 - 4xy \end{aligned}$$

é a função lucro e, sendo  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $100 - 2x \geq 0$  e  $125 - 3y \geq 0$ , temos que  $f$  é contínua no domínio

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 50 \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{125}{3} \right\}$$

fechado e limitado. Portanto,  $f$  tem máximo e mínimo globais em  $D$ .

- ANÁLISE NO INTERIOR DE  $D$ , OU SEJA, EM  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 50, 0 < y < \frac{125}{3}\}$

### CÁLCULO DOS PONTOS CRÍTICOS

$$\begin{aligned} \begin{cases} f_x = 88 - 4x - 4y = 0 \\ f_y = 114 - 6y - 4x = 0 \end{cases} &\implies \begin{cases} x + y = 22 & \times(-2) \\ 2x + 3y = 57 & \leftarrow + \end{cases} \\ &\implies x = 9, y = 13. \end{aligned}$$

### TESTE DA DERIVADA SEGUNDA

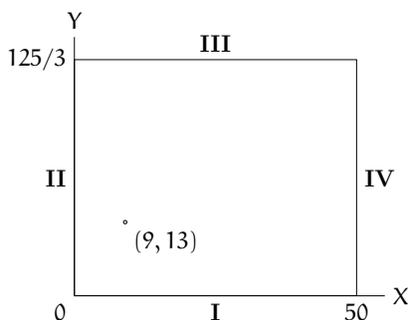
$(9, 13)$  é maximizador local com valor máximo local dado por  $f(9, 13) = 1137$ .<sup>68</sup>

- ANÁLISE NA FRONTEIRA DE  $D$

Verificaremos que o maximizador local  $(9, 13)$ , interior ao domínio  $D$ , é, de fato, o ponto de máximo global de  $f$  em  $D$ , dividindo a sua fronteira em quatro partes que representam seus lados, denotadas por **I**, **II**, **III** e **IV** (conforme a ilustração seguinte), e observando que, em nenhuma delas,  $f$  assume um valor maior que 1137.

<sup>67</sup>Para o discriminante, confira o enunciado dessa questão.

<sup>68</sup>Verifique!



**I REPRESENTANDO O SEGMENTO DE RETA DADO POR  $y = 0$  E  $x \in [0, 50]$**

- INTERIOR DE **I**, ISTO É,  $(0, 50)$

$$f_1(x) = f(x, 0) = 88x - 2x^2 \implies f_1'(x) = 88 - 4x \implies f_1''(x) = -4.$$

Logo,  $f_1$  assume valor máximo local de 968 em  $x = 22$ .

- FRONTEIRA DE **I**, ISTO É,  $\{0, 50\}$

Note que,  $f_1(0) = 0$  e  $f_1(50) < 0$ .

Portanto, como  $f(9, 13) > f(22, 0) = 968$ , o valor máximo global de  $f$  em  $D$  não ocorre em **I**.

**II REPRESENTANDO SEGMENTO DE RETA DADO POR  $x = 0$  E  $y \in [0, 125/3]$**

- INTERIOR DE **II**, ISTO É,  $(0, 125/3)$

$$f_2(y) = f(0, y) = 114y - 3y^2 \implies f_2'(y) = 114 - 6y \implies f_2''(y) = -6.$$

Logo,  $f_2$  assume valor máximo local de 1083 em  $y = 19$ .

- FRONTEIRA DE **II**, ISTO É,  $\{0, 125/3\}$

Note que,  $f_2(0) = 0$  e  $f_2(125/3) < 0$ .

Portanto, como  $f(9, 13) > f(0, 19) = 1083$ , o valor máximo global de  $f$  em  $D$  não ocorre em **II**.

**III REPRESENTANDO O SEGMENTO DE RETA DADO POR  $y = \frac{125}{3}$  E  $x \in [0, 50]$**

Como  $f_3(x) = f(x, 125/3) = f_1(x) - \frac{1375}{3} - \frac{500}{3}x < f_1(x)$ , o valor máximo global de  $f$  em  $D$  não ocorre em **III**.

**IV REPRESENTANDO O SEGMENTO DE RETA DADO POR  $x = 50$  E  $y \in [0, 125/3]$**

Como  $f_4(y) = f(50, y) = f_2(y) - 600 - 200y < f_2(y)$ , o valor máximo global de  $f$  em  $D$  não ocorre em **IV**.

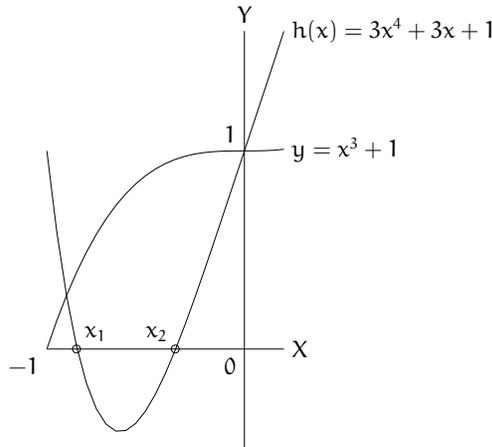
Portanto, para 9 lâmpadas do tipo 1 e 13 do tipo 2, temos lucro máximo de 1137 u.m.

10. Em existindo, calcule a menor distância entre a origem e a curva  $y = x^3 + 1$ .

RESOLUÇÃO VIA MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

O objetivo é minimizar  $f(x, y) = d(x, y)^2 = x^2 + y^2$  restrita a  $g(x, y) = y - x^3 - 1 = 0$ .<sup>69</sup>

<sup>69</sup>Parte do gráfico de  $y = x^3 + 1$ , com concavidade para baixo, está ilustrada a seguir.



Nessa ilustração, o gráfico com concavidade para cima representa parte da função

$$h(x) = 3x^4 + 3x + 1,$$

que analisaremos a seguir, bem como as suas raízes  $x_1$  e  $x_2$ , isto é,

$$h(x_1) = h(x_2) = 0.$$

Primeiramente, é fácil ver que, como o gráfico de  $y = x^3 + 1$  não passa pela origem,<sup>70</sup>  $(0, 0)$  não pode ser o ponto de mínimo global de  $f$ . Agora, do sistema

$$\begin{cases} f_x &= \lambda g_x, \\ f_y &= \lambda g_y, \\ g(x, y) &= 0, \end{cases}$$

temos

$$\begin{cases} 2x &= -3\lambda x^2, \\ 2y &= \lambda, \\ y - x^3 - 1 &= 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

onde  $\lambda \neq 0$ .<sup>71</sup> Portanto:

i.  $y \neq 0$ , pela segunda equação do sistema (3.17);<sup>72</sup>

ii.  $x = 0 \implies \underbrace{y - 0^3 - 1 = 0}_{\implies} y = 1$ ; <sup>73</sup>

iii. Por (3.17),

$$\begin{aligned} x \neq 0, x(3\lambda x + 2) = 0, \lambda = 2y \text{ e } y = x^3 + 1 &\implies 6x(x^3 + 1) + 2 = 0 \\ &\implies h(x) = 3x^4 + 3x + 1 = 0. \end{aligned}$$

<sup>70</sup>De fato,  $0 \neq 0^3 + 1$ .

<sup>71</sup>Se  $\lambda = 0$ , então  $x = y = 0$ , que acabamos de descartar.

<sup>72</sup>Logo,  $(-1, 0)$  não é ponto de mínimo e a distância mínima é menor do que 1.

<sup>73</sup>Contudo,  $(0, 1)$  não pode ser ponto de mínimo global, pois a distância mínima é menor do que 1.

Assim, para resolver (3.17), analisaremos a existência das raízes da equação  $h(x) = 0$ , pelo gráfico de  $h$ , e calcularemos seus valores por meio de um método numérico.

GRÁFICO DE  $y = h(x)$

i. Como  $h(-1) = h(0) = 1$ , o gráfico passa por  $(-1, 1)$  e  $(0, 1)$ , onde  $g(0, 1) = 0$ .

$$\text{ii. } h'(x) = 12x^3 + 3 \begin{cases} < 0 & \text{para } x < -1/\sqrt[3]{4} \\ = 0 & \text{para } x = x_0 = -1/\sqrt[3]{4} \\ > 0 & \text{para } x > -1/\sqrt[3]{4} \end{cases} \begin{array}{l} \therefore h \text{ decrescente;} \\ \text{minimizador local,} \\ \text{pois } h''(x_0) = 36x_0^2 > 0; \\ \therefore h \text{ crescente.} \end{array}$$

iii.  $h(x_0) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = \infty$ .

Portanto, o gráfico de  $h(x)$  é esboçado como na ilustração supracitada e existem  $x_1$  e  $x_2$  em  $[-1, 0]$  tais que  $h(x_1) = 0$  e  $h(x_2) = 0$ .

MÉTODO DE NEWTON

*Sendo, agora,  $h(x)$  uma função arbitrária adequada,  $h(r) = 0$ ,  $r_0$  um ponto inicial próximo da raiz  $r$  e  $r_n = r_{n-1} - \frac{h(r_{n-1})}{h'(r_{n-1})}$  bem definido (isto é,  $h' \neq 0$  nos  $r_n$ 's) para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , temos  $r_n \rightarrow r$  se  $n \rightarrow \infty$ .*

Por exemplo, se  $h(x) = x^2 - 2$ , sabemos que  $h(\pm\sqrt{2}) = 0$ , onde  $\sqrt{2}$  é aproximadamente igual a 1,414213562. Seja, então,  $r_0 = 1$ . Assim:

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0 - \frac{h(r_0)}{h'(r_0)} = 1 - \frac{-1}{2} = 1,5; \\ r_2 &= r_1 - \frac{h(r_1)}{h'(r_1)} = 1,5 - \frac{1/4}{3} = 1,416666667; \\ r_3 &= r_2 - \frac{h(r_2)}{h'(r_2)} \approx 1,414215686; \\ &\dots \end{aligned}$$

Essas reticências significam que, se  $n \rightarrow \infty$ , então  $|r_n - \sqrt{2}| \rightarrow 0$ .

Para a função  $h(x) = 3x^4 + 3x + 1$ , como  $h'(x) = 12x^3 + 3$ , se  $r_0 = 0,9$ , então:

$$\begin{aligned} r_1 &= r_0 - \frac{h(r_0)}{h'(r_0)} = 0,9 - \frac{3 \cdot (0,9)^4 + 3 \cdot (0,9) + 1}{12 \cdot (0,9)^3 + 3} \approx 0,418 \\ r_2 &= r_1 - \frac{h(r_1)}{h'(r_1)} \approx -0,187; \\ r_3 &= r_2 - \frac{h(r_2)}{h'(r_2)} \approx -0,348; \\ &\dots \end{aligned}$$

Obtendo a outra raiz de  $h(x)$  de modo similar, temos  $x_1 \approx -0,846$  e  $x_2 \approx -0,348$ . Portanto, a distância mínima é o menor valor entre

$$d(x_1, y_1) = \sqrt{f(x_1, y_1)} \text{ e } d(x_2, y_2) = \sqrt{f(x_2, y_2)},$$

onde  $y_{1,2} - x_{1,2}^3 - 1 = 0$ , ou seja,  $y_1 \approx 0,395$  e  $y_2 \approx 0,958$ . Desse modo, como

$$f(x_1, y_1) \approx 0,716 + 0,156 = 0,872 \text{ e } f(x_2, y_2) \approx 0,121 + 0,918 = 1,039,$$

a distância mínima é dada por

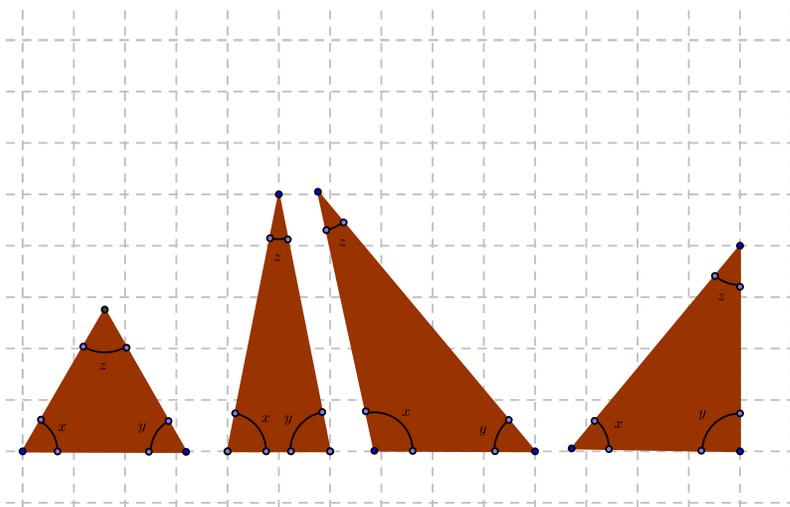
$$d_{\text{mínima}} \approx \sqrt{0,872} \approx 0,934 \text{ u.c.}$$

11. Em existindo o triângulo cujo produto dos senos dos seus ângulos internos seja o maior possível, verifique que ele é equilátero.

#### RESOLUÇÃO

Sejam  $x$ ,  $y$  e  $z$  os ângulos internos de um triângulo arbitrário, conforme a figura 3.5. Portanto, como  $x + y + z = \pi$ , temos

Figura 3.5: Apenas o triângulo à esquerda tem  $\text{sen } x \cdot \text{sen } y \cdot \text{sen } z$  máximo



$$\begin{aligned} \text{sen } x \text{ sen } y \text{ sen } z &= \text{sen } x \text{ sen } y \text{ sen }(\pi - (x + y)) \\ &= \text{sen } x \text{ sen } y \text{ sen }(x + y) \\ &= f(x, y), \end{aligned}$$

onde usamos  $\text{sen}(\pi - (x + y)) = \text{sen}(x + y)$  na segunda igualdade. Por um lado, como  $x$  e  $y$  são positivos e  $x + y$  é menor que  $\pi$ , todos os pontos do conjunto aberto

$$\text{Dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid x > 0, y > 0, x + y < \pi\}$$

são interiores a ele e existe  $\nabla f$  em cada um desses pontos. Em particular, o maximizador global, caso exista, deve ser um ponto desse domínio. Por outro lado, entre esses pontos, os candidatos a extremantes de  $f$  devem satisfazer, por  $(O_1)$ , o sistema

$$\text{I. } f_x = \cos x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos(x+y) = 0;$$

$$\text{II. } f_y = \cos y \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos(x+y) = 0.$$

Subtraindo II de I, temos

$$(\cos x \operatorname{sen} y - \cos y \operatorname{sen} x) \operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen}(y-x) \operatorname{sen}(x+y) = 0.$$

Como  $0 < x+y < \pi$ ,  $\operatorname{sen}(x+y) \neq 0$  e, portanto,  $\operatorname{sen}(y-x) = 0$ . Assim, como  $y-x = 0$ , I ou II acarretam

$$\begin{aligned} \cos x \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x \cos 2x &= \operatorname{sen} x (\cos x \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} x \cos 2x) \\ &= \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x \\ &= 0. \end{aligned}$$

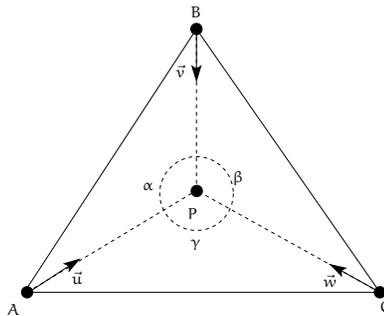
Como  $\operatorname{sen} x \neq 0$ ,  $3x \in \{0, \pi\}$ . Logo,  $3x = \pi$ , pois  $x$  não pode ser nulo. Assim,

$$x = y = z = \frac{\pi}{3}.$$

Portanto, por  $(O_{3,2})$ , o único ponto crítico calculado, ou seja,  $(\pi/3, \pi/3, \pi/3)$ , é maximizador global de  $f$  em seu domínio.

12. Em existindo o ponto  $P$  tal que a soma das distâncias entre ele e os vértices de um triângulo acutângulo  $ABC$  seja mínima, verifique que as semirretas  $PA$ ,  $PB$  e  $PC$  formam, entre si, um ângulo de 120 graus, conforme a figura 3.6.

Figura 3.6: Triângulo acutângulo



#### RESOLUÇÃO

Seja  $P = (x, y)$ ,  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  e  $C = (x_C, y_C)$ ,

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \|\overrightarrow{AP}\| + \|\overrightarrow{BP}\| + \|\overrightarrow{CP}\| \\ &= \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} \\ &\quad + \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2} \\ &\quad + \sqrt{(x - x_C)^2 + (y - y_C)^2} \end{aligned}$$

é a soma das distâncias entre  $P$  e os vértices do triângulo supracitado. De acordo com o enunciado da questão, assumiremos que  $f$  admite mínimo global.<sup>74</sup> Assim, sendo esse valor mínimo a imagem de  $P$  por  $f$  e  $P$  interior ao domínio de  $f$ ,  $\nabla f(P) = \vec{0}$  por  $(O_1)$ . Então, como  $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^2$ , podemos considerar o sistema

$$\begin{aligned} (f_x, f_y) &= \left( \frac{x - x_A}{\|\vec{AP}\|} + \frac{x - x_B}{\|\vec{BP}\|} + \frac{x - x_C}{\|\vec{CP}\|}, \frac{y - y_A}{\|\vec{AP}\|} + \frac{y - y_B}{\|\vec{BP}\|} + \frac{y - y_C}{\|\vec{CP}\|} \right) \\ &= \frac{\vec{AP}}{\|\vec{AP}\|} + \frac{\vec{BP}}{\|\vec{BP}\|} + \frac{\vec{CP}}{\|\vec{CP}\|} \\ &= (0, 0). \end{aligned}$$

Portanto, sendo  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$  os versores de  $\vec{AP}$ ,  $\vec{BP}$  e  $\vec{CP}$ , respectivamente, temos

$$\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0}.$$

Assim, calculando o produto interno dessa equação por  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  e  $\vec{w}$ , respectivamente, ou seja, calculando

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{0}, \quad \vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{0} \quad \text{e} \quad \vec{w} \cdot (\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) = \vec{w} \cdot \vec{0},$$

temos

$$1 + \cos \alpha + \cos \gamma = 0, \quad \cos \alpha + 1 + \cos \beta = 0 \quad \text{e} \quad \cos \gamma + \cos \beta + 1 = 0, \quad (3.18)$$

onde  $\alpha$  é o ângulo que  $\vec{u}$  forma com  $\vec{v}$ ,  $\beta$  é o ângulo que  $\vec{v}$  forma com  $\vec{w}$  e  $\gamma$  é o ângulo que  $\vec{w}$  forma com  $\vec{u}$ . Subtraindo duas equações de (3.18), uma da outra, obtemos

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = -\frac{1}{2}.$$

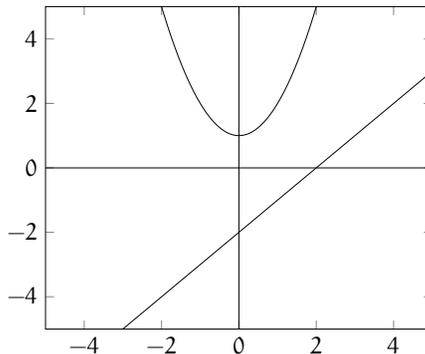
Portanto, como  $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$ ,

$$\alpha = \beta = \gamma = 120^\circ.$$

13. Em existindo, calcule a menor distância da parábola  $y = x^2 + 1$  à reta  $y = x - 2$ .

#### RESOLUÇÃO

Note que os gráficos das funções do enunciado da questão não se interceptam, conforme a seguinte ilustração:



<sup>74</sup>A demonstração da existência desse mínimo requer argumentos avançados de um curso de *análise matemática*.

Além disso, tal interseção implicaria na existência de algum ponto  $x$  de mesma imagem pelas funções dadas, isto é,  $x^2 + 1 = x - 2$ , ou seja,  $x^2 - x + 3 = 0$ , que é uma equação sem solução real.

Seguem duas resoluções. A primeira utiliza “cálculo II”. A segunda, “cálculo I”.

#### PRIMEIRA RESOLUÇÃO

Seja  $f(x, y)$  o quadrado da distância  $d(x, y)$  entre o ponto  $(x, x^2 + 1)$  da parábola e o ponto  $(y, y - 2)$  da reta. Assim,  $f(x, y) = (x - y)^2 + (x^2 - y + 3)^2$  e todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$  são interiores ao domínio de  $f$ . Agora, como  $d$  e  $f$  são positivas (pois seus gráficos não se interceptam), temos  $d_{\min} = \sqrt{f_{\min}}$ , caso exista a distância mínima.<sup>75</sup> Ainda, observando os gráficos supracitados, não existe  $d_{\max}$ .

#### • CÁLCULO DOS PONTOS CRÍTICOS

$$\text{I. } f_x = 2(x - y) + 4x(x^2 - y + 3) = 0,$$

$$\text{II. } f_y = -2(x - y) - 2(x^2 - y + 3) = 0.$$

Adicionando I a II, temos  $2(2x - 1)(x^2 - y + 3) = 0$ . Logo,  $x = \frac{1}{2}$  ou  $x^2 - y + 3 = 0$ . Então, por um lado, substituindo  $x = \frac{1}{2}$  em I ou II, temos

$$2\left(\frac{1}{2} - y\right) + 2\left(\frac{1}{4} - y + 3\right) = 1 - 2y + \frac{1}{2} - 2y + 6 = 0.$$

Portanto,  $y = \frac{15}{8}$ . Por outro lado, substituindo  $x^2 - y + 3 = 0$  em I ou II, temos  $x = y$ . Logo,  $x^2 - x + 3 = 0$ , que é uma equação sem solução real. Assim, o único ponto crítico (candidato a ponto de mínimo) de  $f$ , por  $(O_1)$ , é  $(1/2, 15/8)$ .

#### • TESTE DA DERIVADA II

De  $f_{xx} = 14 + 12x^2 - 4y$ ,  $f_{yy} = 4$  e  $f_{xy} = -2 - 4x$ , temos  $f_{xx}(1/2, 15/8) > 0$  e  $H(1/2, 15/8) > 0$ . Então,  $(1/2, 15/8)$  é ponto de mínimo local para  $f$ . Como não existe outro ponto de mínimo local interior a  $\text{Dom}(f)$ , pois esse ponto anulária  $\nabla f$ ,<sup>76</sup>  $(1/2, 15/8)$  é mínimo global.

Portanto, a distância mínima ocorre entre os pontos  $(1/2, 5/4)$  e  $(15/8, -1/8)$  e é dada por  $d_{\min} = \sqrt{f_{\min}} = \frac{11\sqrt{2}}{8}$  u.c.

#### SEGUNDA RESOLUÇÃO

Determinaremos o ponto da parábola  $f(x) = x^2 + 1$  onde a inclinação da reta tangente é a mesma da reta  $y = x - 2$ .<sup>77</sup> Nesse caso,  $2x = f'(x) = 1$ , isto é,  $x = \frac{1}{2}$ . Então,  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$ .

<sup>75</sup>  $d$  pode não atingir um valor mínimo?

Ou seja, pode existir um limite inferior  $\ell > 0$  para  $d$  tal que  $d(x, y) > \ell$  para todo  $(x, y)$ ?

Na segunda resolução dessa questão, verificaremos que existe  $d_{\min} = \ell$ .

<sup>76</sup> Cf.  $(O_1)$ .

<sup>77</sup> Note que essas retas são paralelas.

Portanto, basta calcular a distância  $d$  do ponto  $(\frac{1}{2}, \frac{5}{4})$  até a reta  $y = x - 2$ .<sup>78</sup> Assim,

$$\begin{aligned} d &= \frac{|\frac{1}{2} - \frac{5}{4} - 2|}{\sqrt{1+1}} \\ &= \frac{\frac{11}{4}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{11\sqrt{2}}{8} \text{ u.c.} \end{aligned}$$

14. Sendo  $f(x, y, z) = 2x - y + 4z$ , determine o máximo e o mínimo de  $f$  restrita à interseção do plano  $z = x$  com o cilindro  $x^2 + 3y^2 = 84$ .

RESOLUÇÃO VIA MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Tal interseção é uma elipse, que é um conjunto compacto em  $\mathbb{R}^3$ . Portanto, por  $(O_2)$ , a função contínua  $f$  admite máximo e mínimo nessa interseção. Assim, sendo

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= x - z = 0, \\ h(x, y, z) &= x^2 + 3y^2 = 84 \text{ e} \\ \nabla f(x, y, z) &= \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z), \end{aligned}$$

temos

$$(2, -1, 4) = \lambda(1, 0, -1) + \mu(2x, 6y, 0), \quad x - z = 0 \text{ e } x^2 + 3y^2 = 84. \quad (3.19)$$

Da primeira equação de (3.19), temos  $\lambda + 2\mu x = 2$ ,  $6\mu y = -1$  e  $\lambda = -4$ . Então,

$$\mu x = 3 \text{ e } \mu y = -\frac{1}{6}. \quad (3.20)$$

Agora, multiplique a primeira equação de (3.20) por  $y$  e a segunda por  $x$ . Temos, portanto,  $x = -18y$ . Assim, da terceira equação de (3.19), temos  $3 \cdot 108y^2 + 3 \cdot y^2 = 3 \cdot 28$ , isto é,  $109y^2 = 28$ , ou seja,

$$y = \pm \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{109}} \text{ e } z = x = \mp \frac{36\sqrt{7}}{\sqrt{109}},$$

da segunda equação de (3.19). Portanto,

$$f\left(-\frac{36\sqrt{7}}{\sqrt{109}}, \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{109}}, -\frac{36\sqrt{7}}{\sqrt{109}}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{36\sqrt{7}}{\sqrt{109}}\right) - \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{109}} < 0$$

e

$$f\left(\frac{36\sqrt{7}}{\sqrt{109}}, -\frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{109}}, \frac{36\sqrt{7}}{\sqrt{109}}\right) = 6 \cdot \left(\frac{36\sqrt{7}}{\sqrt{109}}\right) + \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{109}} > 0$$

são os valores mínimo e máximo, respectivamente.

<sup>78</sup>Via geometria analítica, a distância do ponto  $(x_0, y_0)$  à reta  $\alpha x + \beta y + c = 0$  é dada por

$$d = \frac{|\alpha x_0 + \beta y_0 + c|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}.$$

15. Via multiplicadores de Lagrange, obtenha o ponto dos planos  $x + 2y + 3z = 8$  e  $z = x$  mais próximo da origem.

RESOLUÇÃO

A interseção desses planos é a reta  $r$  dada por

$$r(t) = (0, 4, 0) + t(1, -2, 1), \quad t \in \mathbb{R}.^{79}$$

Existe, portanto, o ponto mais próximo da origem.<sup>80</sup> Assim, podemos minimizar a função  $f(x, y, z) = d(x, y, z)^2 = x^2 + y^2 + z^2$  sujeita às restrições  $g(x, y, z) = x - z = 0$  e  $h(x, y, z) = x + 2y + 3z = 8$ . Então, do sistema

$$(2x, 2y, 2z) = \lambda(1, 0, -1) + \mu(1, 2, 3) \text{ e } z = x,$$

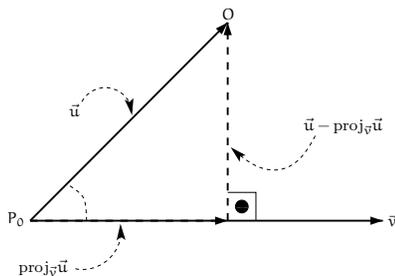
temos

$$\lambda + \mu = 2x, \quad \mu = y \quad -\lambda + 3\mu = 2z = 2x. \quad (3.21)$$

Adicionando a primeira equação de (3.21) à última, temos  $z = x = \mu = y$ , que, na equação  $x + 2y + 3z = 8$ , resulta em  $x = y = z = \frac{4}{3}$ . Logo,  $(4/3, 4/3, 4/3)$  é o ponto da interseção dos planos  $x + 2y + 3z = 8$  e  $x - z = 0$  mais próximo da origem, com distância dada por  $d(4/3, 4/3, 4/3) = \sqrt{3(4/3)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$  u.c.

Tendo resolvido a questão, usaremos geometria analítica para confirmar a solução encontrada. Assim, na equação de  $r$ ,  $P_0 = (0, 4, 0)$  e  $\vec{v} = (1, -2, 1)$  são, respectivamente, um

Figura 3.7:  $\vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}$  é perpendicular a  $\vec{v}$



ponto e um vetor diretor, conforme figura 3.7. Logo, para obter a distância da origem  $O = (0, 0, 0)$  até  $r$ , sendo  $\vec{u}$  o vetor cujas extremidades são os pontos  $P_0$  e  $O$ , basta calcular a norma do vetor

$$\vec{u} - \text{proj}_{\vec{v}}\vec{u}.$$

<sup>79</sup>De fato, se  $x = t$ , então  $z = t$  e

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}(8 - x - 3z) \\ &= 4 - 2t, \end{aligned}$$

ou seja, para cada número real  $t$ ,  $(x(t), y(t), z(t)) = (t, 4 - 2t, t)$ .

<sup>80</sup>Contudo, obviamente, não o mais distante.

Portanto, calculando a projeção ortogonal

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{u} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v} = \frac{8}{6}\vec{v} = \left(\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

de  $\vec{u}$  sobre  $\vec{v}$ , segue que a distância de  $O$  até  $r$  é dada por

$$\|(-4/3, -4/3, -4/3)\| = 4\sqrt{3}/3 \text{ u.c.}$$



# Capítulo 4

## Resultados do cálculo integral

*Eudorus developed a system for calculating areas enclosed by general curves, such as a circle, by removing the areas within them, such as rectangles or other shapes whose areas are simple to calculate, until the total area to be calculated is “exhausted”. Thus the area can be calculated by a close approximation.*

*Zvi Artstein*

De certa forma, integrar uma função de várias variáveis é proceder de maneira análoga, mas inversa, da estabelecida na derivação parcial mista. De fato, para calcular a derivada parcial de uma função  $f(x, y)$  em relação a  $x$ , desde que seja possível calcular  $f_x$ , derive  $f$  em relação à variável  $x$ , como no cálculo de uma variável real (cálculo I), partindo da premissa de que  $y$  é uma constante. Depois, para calcular  $f_{xy}$ , supondo que exista essa derivada, considere  $x$  constante,  $y$  variável e derive  $f_x$  em relação a  $y$ , como no cálculo I. Por outro lado, para integrar  $f(x, y)$ , considere que  $x$  é variável e  $y$  é constante. Então, se possível, integre  $f$  como função apenas de  $x$ , como no cálculo I. Por fim, se o resultado dessa última integração for uma função integrável em  $y$ , integre-a como no cálculo I. Simples assim!

### 4.1 Integrais duplas

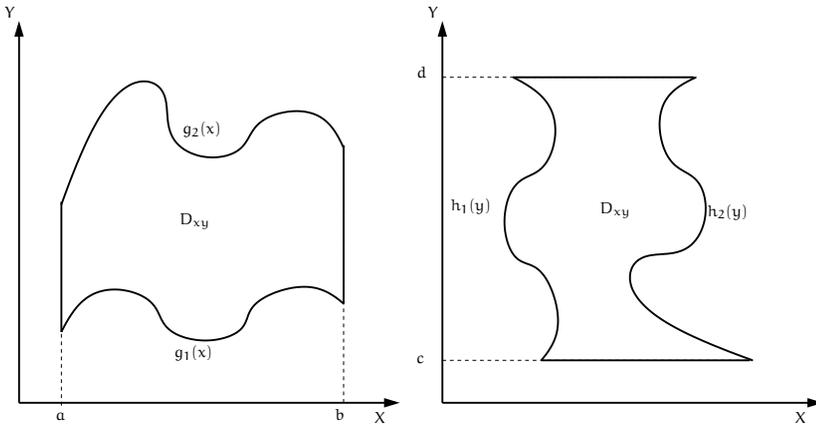
No cálculo integral de funções  $y = f(x)$  reais de uma variável real, sendo  $f$  integrável, a integral simples é calculada sobre um intervalo fechado e limitado  $D_x = [a, b]$ , como ilustrado a seguir, e podemos calcular a integral  $\int_{D_x} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ .<sup>1</sup>



No cálculo integral de funções  $z = f(x, y)$  reais de duas variáveis reais, sendo  $f$  integrável, então a *integral dupla* é calculada sobre domínios fechados e limitados  $D_{xy}$  adequados, como representados na figura 4.1, e podemos calcular a integral  $\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy$  do modo que descreveremos a partir de agora.

<sup>1</sup>Confira a parte II da lista de exercícios da seção 1.3.

Figura 4.1: Tipos 1 e 2 de regiões de integração  $D_{xy}$



#### 4.1.1 Regiões (domínios) de integração $D_{xy}$

Embora o compacto  $D_{xy}$  possa apresentar inúmeras formas, existem duas formas básicas nas quais domínios mais gerais podem ser subdivididos.

##### Integração sobre (em) domínios de tipos 1 e 2

1. Para  $D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$  com  $g_1(x)$  e  $g_2(x)$  contínuas,

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) \, dx dy := \int_{x=a}^{x=b} \left( \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Primeiramente, calcula-se a integral entre parênteses com  $x$  constante e  $y$  variável.

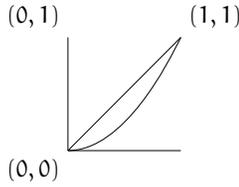
2. Para  $D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$  com  $h_1(y)$  e  $h_2(y)$  contínuas,

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) \, dx dy := \int_{y=c}^{y=d} \left( \int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Primeiramente, calcula-se a integral entre parênteses com  $x$  variável e  $y$  constante.

##### Exercício resolvido

Integre  $f(x, y) = 1$  sobre a região  $D_{xy}$  limitada por  $y = x$  e  $y = x^2$ , representada na seguinte ilustração:



### RESOLUÇÃO

Note que  $(x, y) \in D_{xy}$  se, e somente se,

$$0 \leq x \leq 1 \text{ e } x^2 \leq y \leq x \text{ ou } y \leq x \leq \sqrt{y} \text{ e } 0 \leq y \leq 1.$$

$D_{xy}$  é de tipo 1 no primeiro caso. No segundo, de tipo 2. Então, primeiro integrando-se em relação a  $y$  para  $D_{xy}$  de tipo 1, temos

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} 1 \, dx \, dy &= \int_{x=0}^{x=1} \left( \int_{y=x^2}^{y=x} 1 \, dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} [y]_{y=x^2}^{y=x} dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} (x - x^2) dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Agora, primeiro integrando-se em relação a  $x$  para  $D_{xy}$  de tipo 2, temos

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} 1 \, dx \, dy &= \int_{y=0}^{y=1} \left( \int_{x=y}^{x=\sqrt{y}} 1 \, dx \right) dy \\ &= \int_{y=0}^{y=1} [x]_{x=y}^{x=\sqrt{y}} dy \\ &= \int_{y=0}^{y=1} (\sqrt{y} - y) dy \\ &= \left[ \frac{2y^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

### Observações

- Em sendo possível calcular a integral dupla, podemos desconsiderar os parênteses nas fórmulas supracitadas. Contudo, pode não ser possível calculá-la. Pode ocorrer que a integral de um dos tipos seja mais difícil de resolver que a do outro ou não tenha solução analítica.<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Confira os exercícios 2 e 3 a seguir.

- Integrar sobre o retângulo

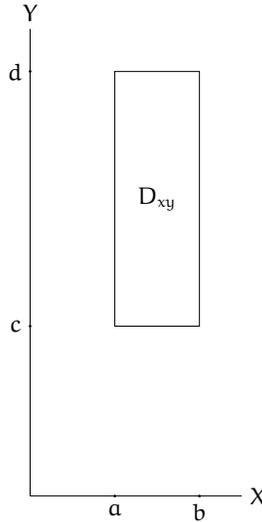
$$D_{xy} = [a, b] \times [c, d]$$

$$= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

significa calcular

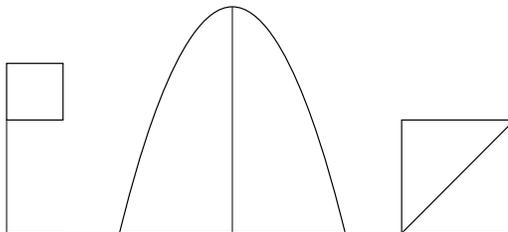
$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \left( \int_c^d f(x, y) \, dy \right) \, dx = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y) \, dx \right) \, dy.$$

A figura dada a seguir é uma representação geométrica de  $D_{xy}$  no primeiro quadrante com  $d - c > b - a$ .



### Exercícios

1. Se  $D_{xy} = [0, 1] \times [2, 3]$ , calcule  $\iint_{D_{xy}} (3x^2 + 2y) \, dx \, dy$ . RESPOSTA: 6.
2. Em existindo, calcule a integral de  $f(x, y) = 2x^2y$  sobre a região limitada pela parábola  $y = 4 - x^2$  e pela reta  $y = 0$ . RESPOSTA: 19,5, aproximadamente.
3. Em existindo, calcule a integral de  $f(x, y) = e^{y^2} + x$  sobre a região limitada pelas retas  $x = 0$ ,  $y = 2$  e  $y = x$ . RESPOSTA:  $\frac{5}{6} + \frac{e^4}{2}$ .



Na ilustração anterior estão representados os domínios de integração para os exercícios 1, 2 e 3, respectivamente, e os eixos coordenados, na mesma escala de medida. Além disso, note que:

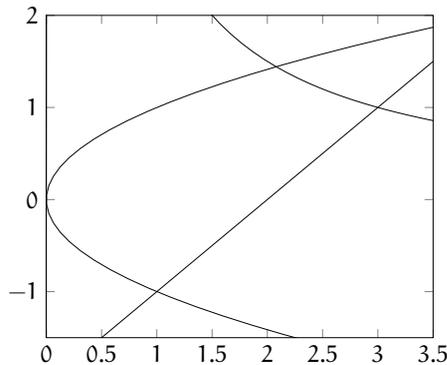
- No exercício 2, a região  $D_{xy} = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 4 - x^2\}$  é de tipo 1, enquanto a região  $D_{xy} = \{(x, y) \mid -\sqrt{4-y} \leq x \leq \sqrt{4-y}, 0 \leq y \leq 4\}$  é de tipo 2. Aqui, a integração sobre  $D_{xy}$  de tipo 1 é mais fácil que a sobre  $D_{xy}$  de tipo 2;
- No exercício 3, ao se tentar integrar primeiro em relação a  $y$ , isto é, integrar sobre a região de tipo 1, não se obtém uma resolução analítica, pois  $e^{y^2} + x$  não tem antiderivada elementar.

### Regiões $D_{xy}$ mais gerais

Para calcular a integral dupla  $I = \int \int_{D_{xy}} f(x, y) \, dx \, dy$ , pode ser necessário: dividir o seu domínio de integração  $D_{xy}$  em  $n$  partes disjuntas de tipos 1 ou 2; calcular a integral dupla  $I_i$  relativa à  $i$ -ésima parte para  $i = 1, \dots, n$ ; e obter a soma  $I = I_1 + \dots + I_n$ .

### Exercício resolvido

Integre  $f(x, y) = 2x + y$  sobre a região limitada por  $x = y^2$ ,  $y = x - 2$  e  $y = \frac{3}{x}$ , conforme a ilustração que segue.



### RESOLUÇÃO

A primeira tarefa é obter os pontos de interseção dos gráficos das três funções. As resoluções das equações  $y = y^2 - 2$ ,  $y = \frac{3}{y^2}$  e  $x - 2 = \frac{3}{x}$  fornecem os seguintes três pontos de interseção para a região de interesse:  $(1, -1)$ ,  $(3, 1)$  e  $(\sqrt{3^2}, \sqrt{3})$ .

Para integrar primeiro em  $y$ , é necessário separar  $D_{xy}$  em três partes: a primeira subregião para  $x \in [0, 1]$ , a segunda subregião para  $x \in [1, 3^{2/3}]$ , e a terceira para  $x \in [3^{2/3}, 3]$ . Isso porque em cada um desses pontos a função que define ou o limite superior ou o limite inferior para  $y$  muda.

Para integrar-se primeiro em relação a  $x$ , é necessário separar  $D_{xy}$  em apenas duas partes.

Portanto, apenas duas integrais devem ser resolvidas. De fato,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D_{xy}} (2x + y) \, dx \, dy \\ &= \int_{y=-1}^{y=1} \left( \int_{x=y^2}^{x=y+2} (2x + y) \, dx \right) dy + \int_{y=1}^{y=\sqrt[3]{3}} \left( \int_{x=y^2}^{x=3/y} (2x + y) \, dx \right) dy \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

A primeira parcela é calculada por

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{y=-1}^{y=1} [x^2 + xy]_{x=y^2}^{x=y+2} dy \\ &= \int_{y=-1}^{y=1} (y+2)^2 + y(y+2) - y^4 - y^3 dy \\ &= \int_{y=-1}^{y=1} -y^4 - y^3 + 2y^2 + 6y + 4 dy \\ &= 8,9\bar{3}. \end{aligned}$$

A segunda, por

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{y=1}^{y=\sqrt[3]{3}} [x^2 + xy]_{x=y^2}^{x=3/y} dy \\ &= \int_{y=1}^{y=\sqrt[3]{3}} \frac{9}{y^2} + 3 - y^4 - y^3 dy \\ &= -\frac{9}{y} + 3y - \frac{y^5}{5} - \frac{y^4}{4} \Big|_{y=1}^{y=\sqrt[3]{3}} \\ &\approx 2,21. \end{aligned}$$

A soma das duas parcelas resulta em  $I \approx 11,14$ .

## 4.1.2 Área, volume e massa

### Áreas de regiões $D_{xy}$

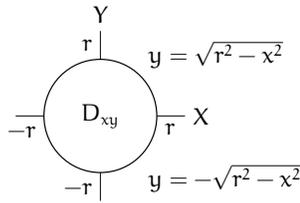
Se  $f(x, y) = 1$ , então a integral dupla calcula a área da região  $D_{xy}$ .

Essa propriedade decorre do seguinte resultado: a integral dupla de uma função integrável não negativa calcula o volume da região compreendida entre o gráfico dessa função e  $D_{xy}$ .<sup>3</sup>

### Exercício resolvido

Seja  $D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$  o círculo de centro na origem e raio  $r$ , como representado na ilustração seguinte:

<sup>3</sup>Ainda nesta subseção, será apresentada uma demonstração informal desse resultado.



Verifique que a sua área é  $\pi r^2$  u.a.

### RESOLUÇÃO

De fato, a área do círculo pode ser calculada por:

$$\begin{aligned}
 \iint_{D_{xy}} 1 \, dx dy &= \int_{x=-r}^{x=r} \left( \int_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{y=\sqrt{r^2-x^2}} 1 \, dy \right) dx \\
 &= \int_{x=-r}^{x=r} [y]_{y=-\sqrt{r^2-x^2}}^{y=\sqrt{r^2-x^2}} dx \\
 &= 2 \int_{x=-r}^{x=r} \sqrt{r^2-x^2} \, dx \\
 &= -2r^2 \int_{\theta=\pi}^{\theta=0} \text{sen}^2 \theta \, d\theta \\
 &= \pi r^2 \text{ u.a.}
 \end{aligned}$$

Note que, na penúltima e última igualdades, usamos a mudança de variáveis

$$x = r \cos \theta \Rightarrow dx = -r \text{sen} \theta \, d\theta$$

e a integral imediata

$$\int \text{sen}^2 \theta \, d\theta = \frac{\theta}{2} - \frac{\text{sen} 2\theta}{4},$$

respectivamente.

### Exercício

Calcule a área da região no primeiro quadrante, limitada pelas retas  $y = x$ ,  $y = \frac{x}{2}$  e  $y = \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}$ .<sup>4</sup>

### Volumes calculados via integrais duplas

Se  $f(x, y) \geq 0$ , então a integral dupla calcula o volume da região limitada pelo gráfico de  $f(x, y)$  e pelo plano  $OXY$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$ .

Uma propriedade análoga também é válida para o cálculo de funções reais de uma variável real. De fato:

Se  $f(x) \geq 0$ , então a integral simples calcula a área da região limitada pelo gráfico de  $f(x)$  e pela reta  $OX$ ,  $x \in D_x = [a, b]$ .<sup>5</sup>

<sup>4</sup>Resolução na seção 4.5.

<sup>5</sup>Confira a parte II da lista de exercícios da seção 1.3.

Note que,  $\int_a^b f(x) dx$  pode ser interpretada como a soma de uma infinidade de parcelas “ $f(x)dx$ ”, onde cada parcela representa a área do retângulo de altura  $f(x)$  e base infinitesimal “ $dx$ ”. Analogamente, para integrais duplas,  $\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy$  representa a soma de uma infinidade de parcelas “ $f(x, y) dx dy$ ”, onde cada parcela representa o volume de uma caixa retangular de altura  $f(x, y)$  e base infinitesimal “ $dx dy$ ”.

### Exercícios

1. Obtenha o volume do sólido limitado pelos planos  $4x + 2y + z = 10$ ,  $y = 3x$ ,  $z = 0$  e  $x = 0$ .<sup>6</sup>
2. Obtenha o volume do sólido limitado superiormente pela superfície  $z = 8xy + 200$  e inferiormente pela região do plano  $OXY$  limitada por  $y = x^2$  e  $y = 8 - x^2$ .<sup>7</sup>

### Centro de massa

Se  $\mu(x, y)$  é a densidade superficial de massa no ponto  $(x, y)$  e  $D = D_{xy}$ , a massa de  $D$  é dada por

$$M(D) = \iint_D \mu(x, y) dx dy \text{ u.m. (unidades de massa)}$$

e o centro de massa

$$(\bar{x}, \bar{y})$$

de  $D$  é dado por

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\mu(x, y) dx dy}{M(D)} \quad \text{e} \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y\mu(x, y) dx dy}{M(D)}.$$

É importante observar:

- a adimensionalidade de tais coordenadas;
- a similaridade destas coordenadas com médias ponderadas.

Caso  $\mu(x, y)$  seja uma função constante, o centro de massa é chamado de *centroide* de  $D$  e dado por

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\mu(x, y) \iint_D x dx dy}{\mu(x, y) \iint_D 1 dx dy} \\ &= \frac{\iint_D x dx dy}{A(D)} \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\bar{y} = \frac{\iint_D y dx dy}{A(D)},$$

onde  $A(D)$  é o valor numérico da área da região  $D$ .

<sup>6</sup>Resolução na seção 4.5.

<sup>7</sup>*Idem.*

## Exercícios

- Obtenha o centro de massa do retângulo  $[0, 1] \times [0, 1]$  sendo a densidade de massa:
  - constante;<sup>8</sup>
  - dada por  $\mu(x, y) = e^{x+y}$ .<sup>9</sup>
- Verifique que o ponto  $(0, 0)$  é o centroide do triângulo equilátero inscrito na circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  e com um dos vértices no ponto  $(0, 1)$ .<sup>10</sup>

### 4.1.3 Mudança de variáveis nas integrais duplas

#### Integração por substituição

No cálculo de uma função real de uma variável real, para  $f(x)$  contínua num domínio  $D_x$ , sendo que entre  $D_x$  e um domínio  $D_u$  adequado existe uma bijeção  $x = x(u)$  com derivada contínua e não nula em  $D_u$ , temos

$$\int_{D_x} f(x) dx = \int_{D_u} f(x(u)) \frac{dx}{du} du.^{11}$$

Por exemplo, se  $f(x) = \cos x$  e  $x = u^2$ , então

$$\int_0^{\pi/2} \cos x dx = \int_0^{\sqrt{\pi/2}} \cos(u^2) 2u du.$$

No cálculo de uma função real de duas variáveis reais, para  $f(x, y)$  contínua num domínio  $D_{xy}$ , sendo que entre  $D_{xy}$  e um domínio  $D_{uv}$  adequado existe uma bijeção  $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$  com derivadas parciais de primeira ordem contínuas e *jacobiano*

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \\ &= x_u y_v - y_u x_v \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

em  $D_{uv}$ , temos

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Por outro lado, pode ser mais conveniente calcular o jacobiano via

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^{-1}.$$

---

<sup>8</sup>Resolução na seção 4.5.

<sup>9</sup>*Idem.*

<sup>10</sup>*Idem.*

<sup>11</sup>Confira a parte II da seção 1.3.

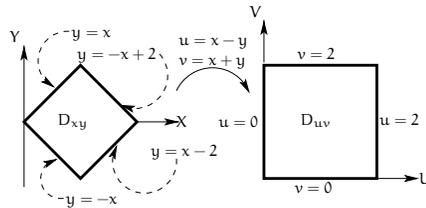
### Exercício resolvido

Utilize uma mudança de coordenadas adequada para obter o volume da região delimitada superiormente pelo gráfico da função  $z = (x - y)^2$  e inferiormente pelo conjunto dos pontos do plano  $OXY$  pertencentes ao paralelogramo de vértices  $(0, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(2, 0)$  e  $(1, -1)$ .

#### RESOLUÇÃO

De acordo com a figura 4.2, como  $0 \leq x - y \leq 2$  e  $0 \leq x + y \leq 2$ , se  $u = x - y$  e  $v = x + y$ ,

Figura 4.2: Mudança de variáveis



então  $0 \leq u \leq 2$  e  $0 \leq v \leq 2$ . Assim, por um lado,  $x = \frac{u+v}{2}$  e  $y = \frac{v-u}{2}$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Por outro lado, o inverso de

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 1 + 1 \\ &= 2 \end{aligned}$$

também fornece o jacobiano

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{2}.$$

Portanto, o volume é dado por

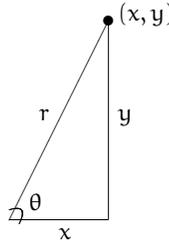
$$\begin{aligned}
 \iint_{D_{xy}} (x - y)^2 dx dy &= \iint_{D_{uv}} u^2 \cdot \frac{1}{2} du dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^2 \int_0^2 u^2 du dv \\
 &= \frac{1}{6} \int_0^2 [u^3]_{u=0}^{u=2} dv \\
 &= \frac{8}{6} [v]_{v=0}^{v=2} \\
 &= \frac{8}{3} u \cdot v.
 \end{aligned}$$

### Observação

Sem qualquer dúvida, a maior utilidade da fórmula de mudança de variáveis para integrais duplas é sua aplicação quando mudamos de coordenadas cartesianas para polares. Nesse caso, em geral, a fronteira de  $D_{xy}$  tem partes curvilíneas. Ao procedermos a tal mudança de variáveis, podemos obter um novo domínio de integração cuja fronteira apresente apenas partes retilíneas.

### Coordenadas polares: mudança de $D_{xy}$ para $D_{r\theta}$

Primeiramente, objetivando relacionar coordenadas cartesianas e polares, considere a seguinte ilustração:



Portanto, sendo  $r$  a distância de  $(x, y)$  a  $(0, 0)$  e  $\theta$  o ângulo que o eixo  $OX$  faz com a reta que passa por  $(0, 0)$  e  $(x, y)$ , temos:

- $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  e  $\theta = \arctg \frac{y}{x}$ ;

- $\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$ ;

- $\boxed{\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{r\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta}$ .

Essa integral pode ser calculada por

$$\int_{\theta=\theta_1}^{\theta=\theta_2} \left( \int_{r=r_1(\theta)}^{r=r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr \right) d\theta,$$

caso  $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$  e  $r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$ , ou por

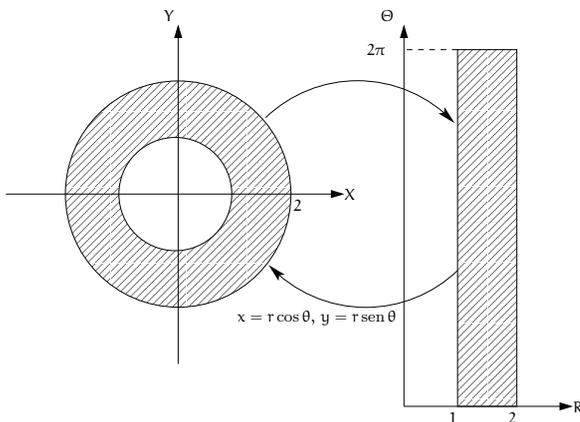
$$\int_{r=r_1}^{r=r_2} \left( \int_{\theta=\theta_1(r)}^{\theta=\theta_2(r)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta \right) r dr,$$

caso  $r \in [r_1, r_2]$  e  $\theta_1(r) \leq \theta \leq \theta_2(r)$ .

### Exercício resolvido

Se  $f(x, y) = 2x + 3y^2$  e  $D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ , como ilustrada na figura 4.3, calcule a integral supracitada.

Figura 4.3: Mudança de variáveis: de cartesianas para polares



### RESOLUÇÃO

Como  $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = 2r \cos \theta + 3r^2 \sin^2 \theta$  e  $D_{r\theta} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , temos

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy &= \iint_{D_{r\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta \\ &= \int_{r=1}^{r=2} \left( \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} (2r \cos \theta + 3r^2 \sin^2 \theta) d\theta \right) r dr \\ &= \int_{r=1}^{r=2} \left[ 2r^2 \sin \theta + 3r^3 \left( \frac{\theta}{2} - \frac{\sin 2\theta}{4} \right) \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} dr \\ &= \int_1^2 3\pi r^3 dr \\ &= \frac{45\pi}{4} \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{r=1}^{r=2} (2r \cos \theta + 3r^2 \sin^2 \theta) r dr \right) d\theta. \end{aligned}$$

A verificação da última igualdade fica como exercício.

## Exercícios

1. Para  $D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ , calcule  $\iint_{D_{xy}} e^{x^2+y^2} dx dy$ .<sup>12</sup>
2. Seja  $D_{xy}$  a região triangular do primeiro quadrante limitada pelas retas  $y = x$ ,  $y = 0$  e  $x = 1$ . Usando a fórmula  $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$  (área de um triângulo) da geometria plana ou calculando a integral  $\iint_{D_{xy}} dx dy$  apenas em coordenadas cartesianas, sem mudança de variáveis, obtenemos facilmente que a área de  $D_{xy}$  é dada por  $\frac{1}{2}$  u.a. Verifique tal resultado fazendo a mudança de variáveis para coordenadas polares na integral dupla supracitada.<sup>13</sup>
3. Verifique, via integrais duplas, que o volume de uma esfera de raio  $r_0$  é dado por  $\frac{4}{3}\pi r_0^3$ .<sup>14</sup>
4. Obtenha o volume da região limitada pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , acima do plano  $z = 0$  e interior ao cilindro  $x^2 + y^2 = 5$ .<sup>15</sup>
5. Se  $(r, \theta)$  representa um ponto em coordenadas polares, determine a área da região interior a  $r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$  e exterior a  $r = 2$ .<sup>16</sup>
6. Se  $(r, \theta)$  representa um ponto em coordenadas polares, calcule a área da região limitada pela curva  $r = a \operatorname{sen}(3\theta)$ ,  $a > 0$ .<sup>17</sup>

Sugiro que o leitor também tente resolver exercícios sobre integrais duplas em outros livros de cálculo. Recomendo, por exemplo, Ávila (2006) e Boulos e Abud (2006).

---

<sup>12</sup>Resolução na seção 4.5.

<sup>13</sup>*Idem.*

<sup>14</sup>*Idem.*

<sup>15</sup>*Idem.*

<sup>16</sup>*Idem.*

<sup>17</sup>*Idem.*

## 4.2 Integrais triplas

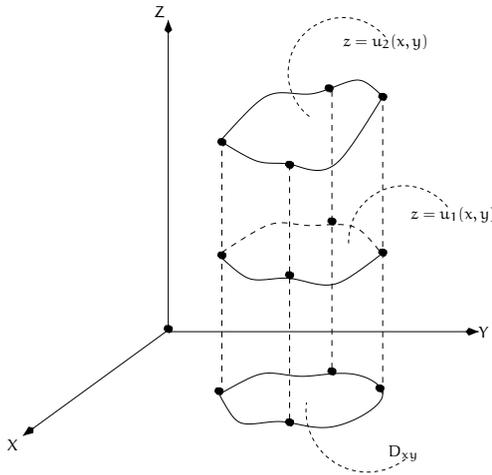
### 4.2.1 Funções contínuas $f(x, y, z)$ sobre (em) regiões $D_{xyz}$ de tipo 1

*Integrais triplas* podem ser calculadas de modo análogo às integrais duplas, por meio de integrações sucessivas. De fato, sendo  $u_1(x, y)$  e  $u_2(x, y)$  funções contínuas e

$$D_{xyz} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D_{xy}, u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)\}$$

o domínio de  $f$ , como representados na figura 4.4,<sup>18</sup>  $f$  é *integrável* e

Figura 4.4:  $D_{xyz}$  é o conjunto dos pontos  $(x, y, z)$  tais que  $(x, y) \in D_{xy}$  e  $u_1(x, y) \leq z \leq u_2(x, y)$



$$\iiint_{D_{xyz}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz := \iint_{D_{xy}} \left( \int_{z=u_1(x, y)}^{z=u_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) \, dx \, dy.$$

Primeiramente, integre a integral simples entre parênteses, isto é, o integrando da integral dupla anterior, como no cálculo de uma variável, considerando  $z$  variável e  $x$  e  $y$  constantes. Então, o resultado dessa integração é uma função nas (agora) variáveis  $x$  e  $y$ . Para concluir, calcule a integral dupla dessa função, como temos feito até o presente momento.

#### Exercício resolvido

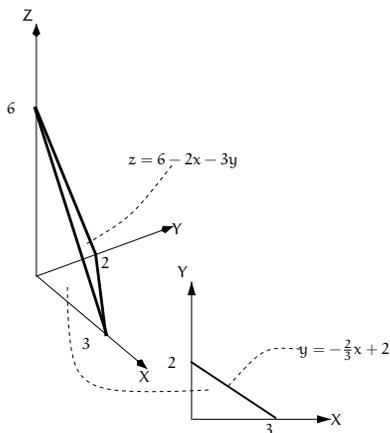
Calcule a integral  $\iiint_{D_{xyz}} 2x \, dx \, dy \, dz$ , onde  $D_{xyz}$  é a região do primeiro octante abaixo do plano  $2x + 3y + z = 6$ , conforme ilustrada na figura 4.5.

#### RESOLUÇÃO

Note que  $D_{xy}$  é a região do primeiro quadrante abaixo da reta  $y = -\frac{2}{3}x + 2$ , conforme ilustrada na figura 4.5, e

<sup>18</sup>Compare essa figura com o lado esquerdo da figura 4.1, página 124.

Figura 4.5:  $D_{xyz} = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_{xy}, 0 \leq z \leq 6 - 2x - 3y\}$  com  $D_{xy} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq -\frac{2}{3}x + 2\}$



$$\begin{aligned}
 \iiint_{D_{xyz}} 2x \, dx \, dy \, dz &= \iint_{D_{xy}} \left( \int_{z=0}^{z=6-2x-3y} 2x \, dz \right) dx \, dy \\
 &= \iint_{D_{xy}} [2xz]_{z=0}^{z=6-2x-3y} dx \, dy \\
 &= \int_{x=0}^{x=3} \left( \int_{y=0}^{y=-\frac{2}{3}x+2} 2x(6-2x-3y) \, dy \right) dx \\
 &= \int_{x=0}^{x=3} [12xy - 4x^2y - 3xy^2]_{y=0}^{y=-\frac{2}{3}x+2} dx \\
 &= \int_{x=0}^{x=3} \left( \frac{4}{3}x^3 - 8x^2 + 12x \right) dx \\
 &= \left[ \frac{x^4}{3} - \frac{8x^3}{3} + 6x^2 \right]_{x=0}^{x=3} \\
 &= 27 - 72 + 54 \\
 &= 9.
 \end{aligned}$$

## 4.2.2 Regiões de tipos 2 e 3

Por analogia com a definição de integral numa região de tipo 1, definimos:

- **Integral sobre uma região de tipo 2**

Se  $v_1(y, z)$  e  $v_2(y, z)$  contínuas e

$$D_{xyz} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in D_{yz}, v_1(y, z) \leq x \leq v_2(y, z)\},$$

$f$  é integrável e

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{D_{yz}} \left( \int_{x=v_1(y,z)}^{x=v_2(y,z)} f(x, y, z) \, dx \right) \, dy \, dz.$$

• **Integral sobre uma região de tipo 3**

Sejam  $w_1(x, z)$  e  $w_2(x, z)$  contínuas e

$$D_{xyz} = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, z) \in D_{xz}, w_1(x, z) \leq y \leq w_2(x, z) \},$$

$f$  é integrável e

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iint_{D_{xz}} \left( \int_{y=w_1(x,z)}^{y=w_2(x,z)} f(x, y, z) \, dy \right) \, dx \, dz.$$

**Exercício sobre integração numa região de tipo 3**

Seja  $D_{xyz}$  limitada por  $y = 2x^2 + 2z^2$  e o plano  $y = 8$ , calcule

$$\iiint_{D_{xyz}} \sqrt{3x^2 + 3z^2} \, dx \, dy \, dz. \quad 19$$

**Integração sobre blocos retangulares**

Se  $D_{xyz} = [a, b] \times [c, d] \times [m, n]$ , então

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{x=a}^{x=b} \left( \int_{y=c}^{y=d} \left( \int_{z=m}^{z=n} f(x, y, z) \, dz \right) \, dy \right) \, dx,$$

podendo ser calculada em qualquer outra ordem.

**Exercício**

Para  $D_{xyz} = [2, 3] \times [1, 2] \times [0, 1]$ , calcule  $\iiint_{D_{xyz}} 8xyz \, dx \, dy \, dz$ .

**Volumes de regiões  $D_{xyz}$**

Se  $f(x, y, z) = 1$ , então  $\iiint_{D_{xyz}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$  calcula o volume da região  $D_{xyz}$ .

**Exercícios**

1. Via integrais triplas, obtenha o volume do sólido limitado pelos planos  $4x + 2y + z = 10$ ,  $y = 3x$ ,  $z = 0$  e  $x = 0$ .<sup>20</sup>
2. Via integrais triplas, determine o volume de uma cunha cortada do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  pelos planos  $z = -y$  e  $z = 0$ .<sup>21</sup>

<sup>19</sup>Resolução na seção 4.5.

<sup>20</sup>Idem.

<sup>21</sup>Idem.

### 4.2.3 Mudança de variáveis nas integrais triplas

#### Integração por substituição

Para uma função  $f(x, y, z)$  contínua num domínio  $D_{xyz}$ , sendo que entre  $D_{xyz}$  e um domínio  $D_{uvw}$  existe uma correspondência biunívoca dada por  $x = x(u, v, w)$ ,  $y = y(u, v, w)$  e  $z = z(u, v, w)$ , com derivadas parciais de primeira ordem contínuas e *jacobiano*

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \neq 0$$

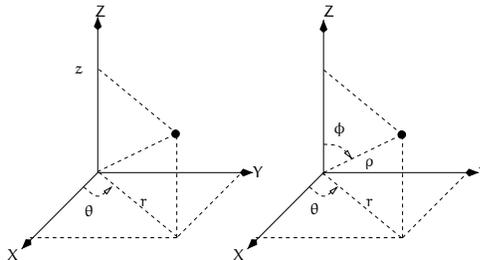
em  $D_{uvw}$ , temos

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{D_{uvw}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, du \, dv \, dw.^{22}$$

#### Mudança para coordenadas cilíndricas e esféricas: de $D_{xyz}$ para $D_{r\theta z}$ e $D_{\rho\phi\theta}$

Primeiramente, objetivando relacionar coordenadas cartesianas e cilíndricas (respectivamente, esféricas), considere a figura 4.6.

Figura 4.6: Coordenadas cilíndricas e esféricas



#### Integração em coordenadas cilíndricas

De  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$  e  $z = z$ , temos

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

e

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{D_{r\theta z}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \, r \, dr \, d\theta \, dz.$$

<sup>22</sup>Para uma aplicação, confira o exercício resolvido da página 132.

## Exercícios

Via integrais triplas:

1. Verifique que o volume do cone circular reto de raio  $R$  e altura  $h$  é  $\frac{\pi R^2 h}{3}$ ;<sup>23</sup>
2. Calcule o volume do parabolóide  $z = a(x^2 + y^2)$  de altura  $h$ ;<sup>24</sup>
3. Obtenha o volume da calota esférica que representa a interseção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  com o semiespaço  $z \geq a$ ,  $0 < a < R$ .<sup>25</sup>

## Integração em coordenadas esféricas

De  $x = \rho \sin \phi \cos \theta$ ,  $y = \rho \sin \phi \sin \theta$  e  $z = \rho \cos \phi$ , onde  $\rho \geq 0$ ,  $\phi \in [0, \pi]$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ , temos

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi & -\rho \sin \phi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \phi$$

e

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{D_{\rho\phi\theta}} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

## Exercício resolvido

Verifique que o volume do elipsoide  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$  é dado por  $\frac{4\pi abc}{3}$  u.v.

### RESOLUÇÃO

Se os pontos  $(x, y, z)$  de  $D_{xyz}$  satisfazem a equação  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ , a mudança de variáveis

$$\boxed{x = au, \quad y = bv \quad \text{e} \quad z = cw}$$

acarreta outro domínio  $D_{uvw}$  dos pontos  $(u, v, w)$  que satisfazem a equação  $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$ .<sup>26</sup>

Portanto,  $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = abc$  e

$$\begin{aligned} \text{volume} &= \iiint_{D_{xyz}} dx \, dy \, dz \\ &= abc \iiint_{D_{uvw}} du \, dv \, dw. \end{aligned}$$

Assim, para pontos  $(\rho, \phi, \theta)$  de  $D_{\rho\phi\theta}$  tais que  $\rho^2 \leq 1$ ,  $\phi \in [0, \pi]$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ , temos

$$\begin{aligned} \text{volume} &= abc \iiint_{D_{\rho\phi\theta}} \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= abc \int_0^1 \rho^2 \, d\rho \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= abc \cdot \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2\pi \\ &= \frac{4\pi abc}{3} \text{ u.v.} \end{aligned}$$

<sup>23</sup>Resolução na seção 4.5.

<sup>24</sup>Idem.

<sup>25</sup>Idem.

<sup>26</sup>Tal mudança transforma o elipsoide numa esfera de raio unitário.

## Exercícios

1. Calcule o volume do sólido limitado inferiormente pelo plano  $OXY$ , lateralmente pela esfera  $\rho = 2$  e superiormente pelo cone  $\phi = \frac{\pi}{3}$ .<sup>27</sup>
2. Obtenha o volume do sólido limitado inferiormente pelo cone  $\phi \leq \frac{\pi}{4}$  e superiormente pela esfera  $\rho \leq 2R \cos \phi$ .<sup>28</sup>
3. Via coordenadas esféricas, obtenha o volume do sólido limitado superiormente pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  e inferiormente pelo cone  $z^2 = m^2(x^2 + y^2)$ ,  $z \geq 0$ .<sup>29</sup>

## Centro de massa

Analogamente ao caso da massa superficial, sendo  $\mu(x, y, z)$  a densidade de massa no ponto  $(x, y, z)$  e  $D = D_{xyz}$ , a massa de  $D$  é dada por

$$M(D) = \iiint_D \mu(x, y, z) \, dx dy dz \text{ u.m.}$$

e, para  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  e  $x_3 = z$ , a  $i$ -ésima coordenada do centro de massa de  $D$  é dada por

$$\bar{x}_i = \frac{\iiint_D x_i \mu(x, y, z) \, dx dy dz}{M(D)}$$

para  $i = 1, 2, 3$ .

É importante observar:

- a adimensionalidade de tais coordenadas;
- a similaridade destas coordenadas com médias ponderadas;
- o centroide de  $D$ , caso  $\mu(x, y, z)$  seja uma função constante, podendo ser calculado apenas por

$$\bar{x}_i = \frac{\iiint_D x_i \, dx dy dz}{V(D)},$$

para  $i = 1, 2, 3$ , onde  $V(D)$  é o valor numérico do volume da região  $D$ .

## Exercício

Analogamente ao exercício da seção sobre massa superficial, obtenha o centro de massa do cubo  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  caso a densidade de massa seja:

(a) constante;

RESPOSTA:  $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0,5$  u.m.

(b) dada por  $\mu(x, y, z) = e^{x+y+z}$ .

RESPOSTA:  $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} \approx 0,582$  u.m.

Sugiro que o leitor também tente resolver exercícios sobre integrais triplas em outros livros de cálculo. Recomendo, por exemplo, Ávila (2006) e Marsden e Tromba (2004).

---

<sup>27</sup>Resolução na seção 4.5.

<sup>28</sup>*Idem.*

<sup>29</sup>*Idem.*

### 4.3 Formulário do cálculo integral para integrais duplas

1. Sendo  $g_1(x)$  e  $g_2(x)$  contínuas,  $D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$ , temos 
$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) \, dx dy = \int_{x=a}^{x=b} \left( \int_{y=g_1(x)}^{y=g_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx.$$
2. Sendo  $h_1(y)$  e  $h_2(y)$  contínuas,  $D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid h_1(y) \leq x \leq h_2(y), c \leq y \leq d\}$ , temos 
$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) \, dx dy = \int_{y=c}^{y=d} \left( \int_{x=h_1(y)}^{x=h_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$
3. Para  $f(x, y)$  contínua num domínio  $D_{xy}$ , sendo que entre  $D_{xy}$  e um domínio  $D_{uv}$  existe uma correspondência biunívoca dada por  $x = x(u, v)$  e  $y = y(u, v)$ , com derivadas parciais de primeira ordem contínuas e jacobiano

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = x_u y_v - y_u x_v \neq 0$$

em  $D_{uv}$ , temos

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) \, dx dy = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

Para algumas integrais, é mais simples calcular o jacobiano via:

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \left( \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^{-1}.$$

4. Do item anterior,  $\iint_{D_{xy}} f(x, y) \, dx dy = \iint_{D_{r\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$ .
5. Se  $f(x, y) = 1$ , a integral calcula a área de  $D_{xy}$ .
6. Se  $f(x, y) \geq 0$ , a integral calcula o volume da região do espaço compreendida entre o gráfico de  $f(x, y)$  e o plano  $OXY$ , para  $(x, y) \in D_{xy}$ .
7. Se  $\mu(x, y)$  é a densidade superficial no ponto  $(x, y)$  e  $D \subset \mathbb{R}^2$ , então a massa de  $D$  é dada por  $M(D) = \iint_D \mu(x, y) \, dx dy$ , o centro de massa  $(\bar{x}, \bar{y})$  de  $D$  é dado por  $\bar{x} = \iint_D x \mu(x, y) \, dx dy / M(D)$  e  $\bar{y} = \iint_D y \mu(x, y) \, dx dy / M(D)$ , e, sendo  $\mu(x, y)$  constante e  $A(D)$  a área da região  $D$ , o centroide de  $D$  é dado por  $\bar{x} = \iint_D x \, dx dy / A(D)$  e  $\bar{y} = \iint_D y \, dx dy / A(D)$ .

## 4.4 Formulário do cálculo integral para integrais triplas

1. Para funções contínuas definidas em domínios  $D_{xyz}$  adequados, a integral

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

é igual a alguma das seguintes integrais:

$$\iint_{D_{xy}} \left( \int_{z=u_1(x,y)}^{z=u_2(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) \, dx \, dy;$$

$$\iint_{D_{yz}} \left( \int_{x=v_1(y,z)}^{x=v_2(y,z)} f(x, y, z) \, dx \right) \, dy \, dz;$$

$$\iint_{D_{xz}} \left( \int_{y=w_1(x,z)}^{y=w_2(x,z)} f(x, y, z) \, dy \right) \, dx \, dz;$$

$$\iiint_{D_{r\theta z}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \, r \, dr \, d\theta \, dz;$$

$$\iiint_{D_{\rho\phi\theta}} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta.$$

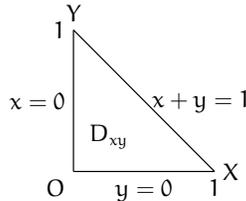
2. Se  $f(x, y, z) = 1$ , a integral calcula o volume da região  $D_{xyz}$ .

## 4.5 Exercícios resolvidos de cálculo integral

1. Calcule a integral dupla de  $f(x, y) = e^{-x-y}$  sobre a região  $D_{xy}$  do primeiro quadrante na qual  $x + y \leq 1$ .

RESOLUÇÃO

$D_{xy}$  é limitada pelo triângulo retângulo de base e altura unitárias, cujos vértices são os pontos de interseção das retas  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $x + y = 1$ , como ilustrado a seguir:

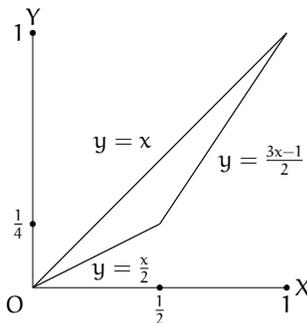


Pela simetria tanto de  $D_{xy}$  quanto de  $f(x, y)$ , caso exista solução analítica, podemos calcular a integral considerando  $D_{xy}$  como sendo de tipo 1 ou de tipo 2. Assim,

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} e^{-x-y} \, dy \, dx &= \int_{x=0}^{x=1} \left( \int_{y=0}^{y=1-x} e^{-x} e^{-y} \, dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} e^{-x} [-e^{-y}]_{y=0}^{y=1-x} dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} e^{-x} [1 - e^{-(1-x)}] dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} (e^{-x} - e^{-1}) dx \\ &= 1 - 2e^{-1}. \end{aligned}$$

2. Calcule a área da região no primeiro quadrante delimitada pelas retas  $y = x$ ,  $y = \frac{x}{2}$  e  $y = \frac{3x-1}{2}$ .

RESOLUÇÃO



Na ilustração anterior, temos uma representação geométrica da região triangular  $D_{xy}$  tal que

$$(x, y) \in D_{xy} \iff x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \frac{x}{2} \leq y \leq x \quad \text{ou} \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \frac{3x-1}{2} \leq y \leq x.$$

Portanto, a área pode ser calculada pela seguinte integral dupla:

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} 1 \, dx \, dy &= \int_{x=0}^{x=1/2} \left( \int_{y=x/2}^{y=x} 1 \, dy \right) dx + \int_{x=1/2}^{x=1} \left( \int_{y=(3x-1)/2}^{y=x} 1 \, dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1/2} \left( x - \frac{x}{2} \right) dx + \int_{x=1/2}^{x=1} \left( -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4} \right]_{x=0}^{x=1/2} + \left[ -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} \right]_{x=1/2}^{x=1} \\ &= \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{8} \quad \text{u.a.} \end{aligned}$$

De fato, a área é igual à metade do produto da base pela altura, que medem  $\sqrt{2}$  e  $\frac{1/4}{\sqrt{2}}$  u.c., respectivamente.<sup>30</sup>

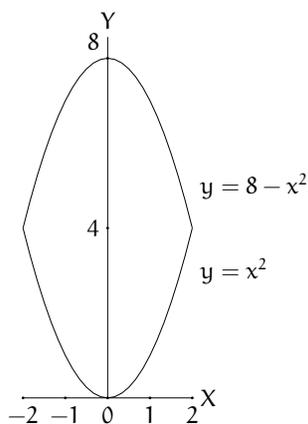
3. Obtenha o volume do sólido limitado superiormente pela superfície  $z = 8xy + 200$  e inferiormente pela região  $D_{xy}$  do plano  $OXY$  limitada por  $y = x^2$  e  $y = 8 - x^2$ . Além disso, verifique que  $z \geq 0$  em  $D_{xy}$ .

#### RESOLUÇÃO

Primeiramente, considere a seguinte representação geométrica de  $D_{xy}$ :

<sup>30</sup>A altura pode ser calculada pela fórmula da distância de um ponto  $(x_0, y_0)$  a uma reta  $ax + by + c = 0$ . De fato, para  $x_0 = \frac{1}{2}$ ,  $y_0 = \frac{1}{4}$ ,  $a = 1$ ,  $b = -1$  e  $c = 0$ , temos:

$$\begin{aligned} \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} &= \frac{\left| 1 \cdot \frac{1}{2} - 1 \cdot \frac{1}{4} + 0 \right|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right|}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{2}} \quad \text{u.c.} \end{aligned}$$



Como região de tipo 1, temos  $D_{xy} = \{(x, y) \mid -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 8 - x^2\}$ . De fato, para obter os limites da variação de  $x$ , considere  $x^2 = 8 - x^2$ . Logo  $x = \pm 2$ . Agora, para verificar que  $z \geq 0$  em  $D_{xy}$ ,<sup>31</sup> note que

$$\begin{aligned}
 -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 8 - x^2 &\Rightarrow -2 \cdot x^2 \leq x \cdot y \leq 2 \cdot (8 - x^2) \\
 &\Rightarrow -2x^2 \leq xy \leq 16 - 2x^2 \\
 &\Rightarrow 8 \cdot (-2x^2) \leq 8 \cdot xy \leq 8 \cdot (16 - 2x^2) \\
 &\Rightarrow -16x^2 \leq 8xy \leq 128 - 16x^2 \\
 &\Rightarrow -16x^2 + 200 \leq 8xy + 200 \leq 128 - 16x^2 + 200 \\
 &\Rightarrow 200 - 16x^2 \leq z \leq 328 - 16x^2.
 \end{aligned}$$

Portanto,  $z \geq 0$  para  $|x| \leq 2$ . De fato,

$$\begin{aligned}
 x^2 \leq 4 &\Rightarrow -16x^2 \geq -64 \\
 &\Rightarrow 200 - 16x^2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

<sup>31</sup>Condição para que  $\iint_{D_{xy}} z \, dx \, dy$  seja o volume procurado!

Por fim, o volume é dado por

$$\begin{aligned}
 \iint_{D_{xy}} 8xy + 200 \, dx \, dy &= \int_{x=-2}^{x=2} \left( \int_{y=x^2}^{y=8-x^2} 8xy + 200 \, dy \right) dx \\
 &= 4 \int_{x=-2}^{x=2} [xy^2 + 50y]_{y=x^2}^{y=8-x^2} dx \\
 &= 4 \int_{x=-2}^{x=2} (64x - 16x^3 + x^5 + 400 - 50x^2 - x^5 - 50x^2) dx \\
 &= 4 \left[ 32x^2 - 4x^4 + 400x - \frac{100x^3}{3} \right]_{x=-2}^{x=2} \\
 &= 4 \left[ 400 \cdot 2 - \frac{100 \cdot 8}{3} - 400 \cdot (-2) + \frac{100 \cdot (-8)}{3} \right] \\
 &= 4 \left[ 1600 - \frac{1600}{3} \right] \\
 &= 1600 \cdot \frac{8}{3} \text{ u.v.}
 \end{aligned}$$

4. Determine o centro de massa do retângulo  $D = [0, 1] \times [0, 1]$ , caso a densidade de massa seja:

- (a) constante em  $D$ ;
- (b)  $\mu(x, y) = e^{x+y}$  em cada ponto  $(x, y) \in D$ .

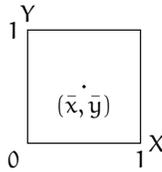
RESOLUÇÃO

(a) Nesse caso, o denominador de  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  é simplesmente o valor numérico da área de  $D$ . Assim,  $A(D) = 1$  u.m. Portanto,

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{\iint_D x \, dx \, dy}{A(D)} \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 x \, dx \, dy \\
 &= \frac{1}{2};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= \frac{\iint_D y \, dy \, dx}{A(D)} \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 y \, dy \, dx \\
 &= \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

Na ilustração que segue, temos uma representação geométrica do centroide do quadrado coincidindo com o seu centro geométrico.



(b) Primeiramente, calculemos a massa total, isto é, o denominador de  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ :

$$\begin{aligned}
 M(D) &= \iint_D e^{x+y} \, dx \, dy \\
 &= \int_0^1 \int_0^1 e^{x+y} \, dy \, dx \\
 &= \int_0^1 e^x [e^y]_0^1 \, dx \\
 &= (e-1) \int_0^1 e^x \, dx \\
 &= (e-1)^2 \text{ u.m.}
 \end{aligned}$$

Agora, em relação ao numerador de  $\bar{x}$ , note que

$$\begin{aligned}
 \iint_D x e^{x+y} \, dy \, dx &= \int_0^1 \int_0^1 x e^{x+y} \, dy \, dx \\
 &= (e-1) \int_0^1 x e^x \, dx,
 \end{aligned}$$

que, via integração por partes,<sup>32</sup> resulta em

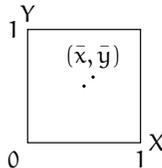
$$\begin{aligned}
 (e-1) \left( x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x \, dx \right) &= (e-1)(e - e + 1) \\
 &= e - 1 \text{ u.m.}
 \end{aligned}$$

Assim,

$$\bar{x} = \frac{1}{e-1} \approx 0,582$$

e, trocando-se os papéis de  $x$  e  $y$  na integral anterior, temos que  $\bar{y} \approx 0,582$ .

Na ilustração que segue, temos uma representação geométrica do centro de massa do quadrado, que tem um pequeno deslocamento em relação ao seu centro geométrico.

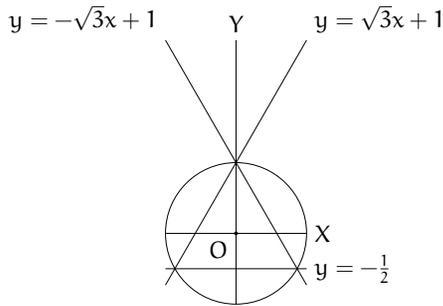


<sup>32</sup>Como visto na parte II da seção 1.3,  $\int u \, dv = uv - \int v \, du$ . Aqui,  $u = x$  e  $dv = e^x \, dx$ , isto é,  $du = dx$  e  $v = e^x$ .

5. Verifique que  $(0, 0)$  é o centroide do triângulo equilátero inscrito na circunferência unitária e com um dos vértices em  $(0, 1)$ .

RESOLUÇÃO

Primeiramente, vamos mostrar que as retas  $y = ax + b$  que interceptam a circunferência unitária nos vértices do triângulo equilátero são dadas por  $y = \pm\sqrt{3}x + 1$  e  $y = \frac{1}{2}$ , conforme a ilustração seguinte:



De fato, para obter as retas que passam por  $(0, 1)$ , note que  $1 = a \cdot 0 + b$  acarreta  $b = 1$ . Assim, essas retas são da forma  $y = ax + 1$ , faltando calcular a inclinação  $a \neq 0$  para cada reta. Caso  $a$  seja positivo, temos que  $a = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$ . Caso  $a$  seja negativo, temos que  $a = \tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$ . Portanto, as equações  $y = \pm\sqrt{3}x + 1$  representam as duas retas com  $a \neq 0$ . Então, como essas duas retas interceptam a circunferência  $x^2 + y^2 = 1$  nos outros dois vértices,  $x^2 + (\pm\sqrt{3}x + 1)^2 = 1$ , isto é,  $4x^2 \pm 2\sqrt{3}x = 0$ . Logo,  $x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Assim,  $y = -1/2$  é a reta com  $a = 0$ . Os denominadores de  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  são diferentes de zero. De fato,

$$\begin{aligned} A(D) &= \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}}{2} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} \\ &\neq 0. \end{aligned}$$

Para concluir, considerando a região

$$D = \left\{ (x, y) \mid \frac{y-1}{\sqrt{3}} \leq x \leq -\frac{y-1}{\sqrt{3}}, -1/2 \leq y \leq 1 \right\},^{33}$$

<sup>33</sup>Note que optamos pela integração sobre uma região de tipo 2!

obtemos as seguintes coordenadas do centroide:

$$\begin{aligned}
 \bar{x} &= \frac{\iint_D x \, dx \, dy}{A(D)} \\
 &= \frac{\int_{y=-1/2}^{y=1} \left( \int_{x=(y-1)/\sqrt{3}}^{x=-(y-1)/\sqrt{3}} x \, dx \right) dy}{A(D)} \\
 &= \frac{\frac{1}{6} \int_{y=-1/2}^{y=1} [(-(y-1))^2 - (y-1)^2] dy}{A(D)} \\
 &= \frac{\int_{y=-1/2}^{y=1} 0 \, dy}{6A(D)} \\
 &= \frac{0}{6A(D)} \\
 &= 0;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{y} &= \frac{\iint_D y \, dx \, dy}{A(D)} \\
 &= \frac{\int_{y=-1/2}^{y=1} y \left( \int_{x=(y-1)/\sqrt{3}}^{x=-(y-1)/\sqrt{3}} dx \right) dy}{A(D)} \\
 &= \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}} \int_{y=-1/2}^{y=1} y(y-1) dy}{A(D)} \\
 &= -\frac{2 \left[ \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} \right]_{y=-1/2}^{y=1}}{\sqrt{3}A(D)} \\
 &= -\frac{2 \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{24} + \frac{1}{8} \right)}{\sqrt{3}A(D)} \\
 &= -\frac{2 \cdot 0}{\sqrt{3}A(D)} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, o centroide do triângulo equilátero está localizado no seu centro geométrico.

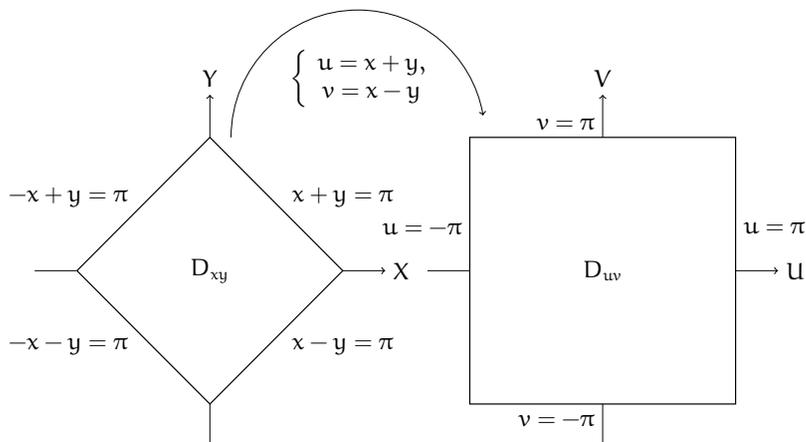
6. Calcule a integral dupla da função  $f(x, y) = (x + y)^2 \sin^2(x - y)$  sobre o domínio de todos os pontos  $(x, y)$  do plano tais que  $|x| + |y| \leq \pi$ .

#### RESOLUÇÃO

Da inequação modular temos  $x + y \leq \pi$ ,  $-x - y \leq \pi$ ,<sup>34</sup>  $x - y \leq \pi$  e  $-x + y \leq \pi$ .<sup>35</sup> Portanto, utilizando a mudança linear de variáveis  $u = x + y$  e  $v = x - y$ , temos  $-\pi \leq u \leq \pi$  e  $-\pi \leq v \leq \pi$ , conforme ilustrado a seguir:

<sup>34</sup>Isto é,  $-\pi \leq x + y$ .

<sup>35</sup>Isto é,  $-\pi \leq x - y$ .



Assim, como  $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1} = -\frac{1}{2}$ , segue que

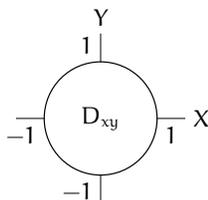
$$\begin{aligned}
 \iint_{D_{xy}} (x+y)^2 \sin^2(x-y) \, dx \, dy &= \frac{1}{2} \iint_{D_{uv}} u^2 \sin^2 v \, du \, dv \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} u^2 \, du \right) \sin^2 v \, dv \\
 &= \frac{1}{6} \int_{-\pi}^{\pi} [u^3]_{u=-\pi}^{u=\pi} \sin^2 v \, dv \\
 &= \frac{\pi^3}{6} \left[ v - \frac{\sin 2v}{2} \right]_{v=-\pi}^{v=\pi} \\
 &= \frac{\pi^4}{3},
 \end{aligned}$$

onde usamos a identidade  $\sin^2 v = \frac{1 - \cos 2v}{2}$  na penúltima igualdade.

7. Para  $D_{xy} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ , calcule  $\iint_{D_{xy}} e^{x^2+y^2} \, dx \, dy$ .

RESOLUÇÃO

Iniciamos com a seguinte representação gráfica de  $D_{xy}$ , o círculo de raio unitário e centro na origem:



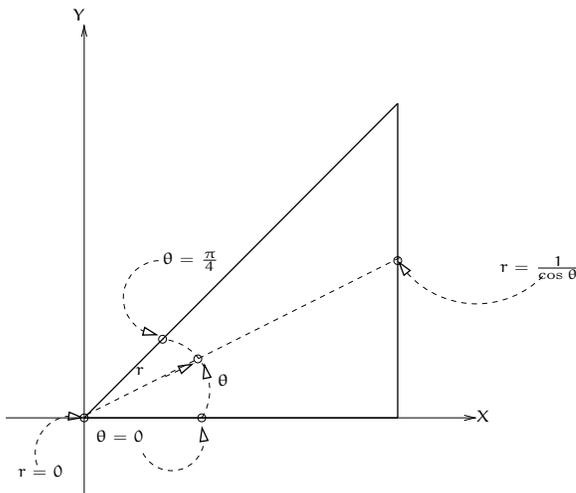
Temos que  $D_{r\theta} = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$  e

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} e^{x^2+y^2} dx dy &= \iint_{D_{r\theta}} e^{r^2} r dr d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{r=0}^{r=1} e^{r^2} r dr \right) d\theta \\ &= \pi \int_{r=0}^{r=1} e^{r^2} 2r dr \\ &= \pi \int_{u=0}^{u=1} e^u du \\ &= \pi [e^u]_{u=0}^{u=1} \\ &= \pi(e - 1), \end{aligned}$$

onde usamos  $\boxed{u = r^2, du = 2r dr}$  na quarta igualdade (de cima para baixo).

8. Seja  $D_{xy}$  a região triangular do primeiro quadrante, limitada pelas retas  $y = x$ ,  $y = 0$  e  $x = 1$ , conforme ilustrada na figura 4.7.

Figura 4.7:  $D_{xy}$  é a região triangular limitada pelas retas  $y = x$ ,  $y = 0$  e  $x = 1$



Usando a fórmula  $\frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$  (área de um triângulo) da geometria plana ou calculando a integral  $\iint_{D_{xy}} dx dy$  apenas em coordenadas cartesianas, sem mudança de variáveis, obtemos facilmente que a área de  $D_{xy}$  é dada por  $\frac{1}{2}$  u.a. Verifique esse resultado utilizando a mudança de variáveis para coordenadas polares na integral dupla supracitada.

RESOLUÇÃO

Como  $x = 1$  e  $x = r \cos \theta$ , temos  $r = \frac{1}{\cos \theta}$ . Daí

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} dx dy &= \iint_{D_{r\theta}} r dr d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \left( \int_{r=0}^{r=\frac{1}{\cos \theta}} r dr \right) d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\frac{1}{\cos \theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \sec^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} [\tan \theta]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

9. Verifique, via integrais duplas, que o volume de uma esfera de raio  $r_0$  é dado por  $\frac{4}{3}\pi r_0^3$ .

RESOLUÇÃO

A calota superior da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$  é o gráfico da função

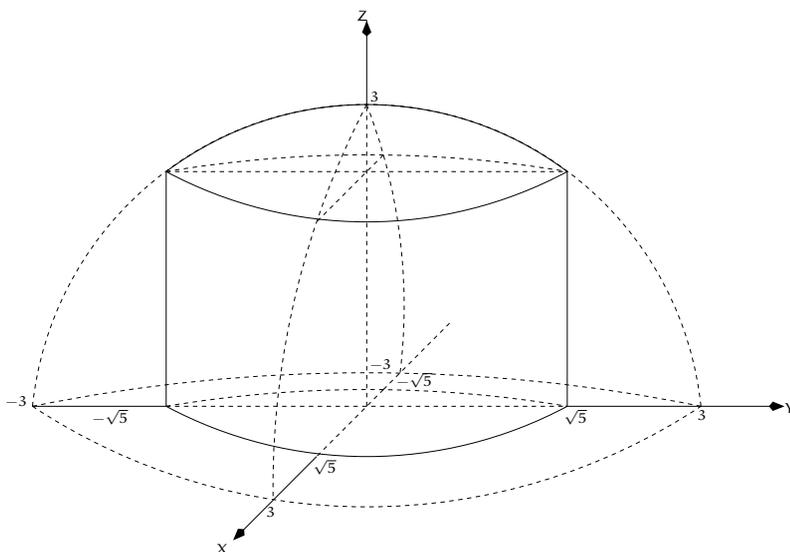
$$z = \sqrt{r_0^2 - (x^2 + y^2)},$$

cujos domínio é o círculo de raio  $r_0$  e centro na origem do plano  $OXY$ , que, em coordenadas polares, é dado por  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $0 \leq r \leq r_0$ . Portanto, o volume da esfera é dado por

$$\begin{aligned} 2 \iint_{D_{xy}} \sqrt{r_0^2 - (x^2 + y^2)} dx dy &= 2 \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{r_0^2 - r^2} r dr d\theta \\ &= 2 \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{r=0}^{r=r_0} \sqrt{r_0^2 - r^2} r dr \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_{r=0}^{r=r_0} \sqrt{r_0^2 - r^2} 2r dr \\ &= 2\pi \left( - \int_{r=r_0^2}^{r=0} u^{1/2} du \right) \\ &= 2\pi \left( \frac{2}{3} \cdot (r_0^2)^{3/2} \right) \\ &= \frac{4\pi r_0^3}{3} \quad \text{u.v.} \end{aligned}$$

Note que, na quarta igualdade, de cima para baixo, usamos a mudança de variáveis  $u = r_0^2 - r^2$ ,  $du = -2r dr$ .

Figura 4.8:  $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 5\}$  e  $D_{r\theta} = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{5}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$



10. Obtenha o volume da região limitada pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , acima do plano  $z = 0$  e interior ao cilindro  $x^2 + y^2 = 5$ , conforme ilustrada na figura 4.8.

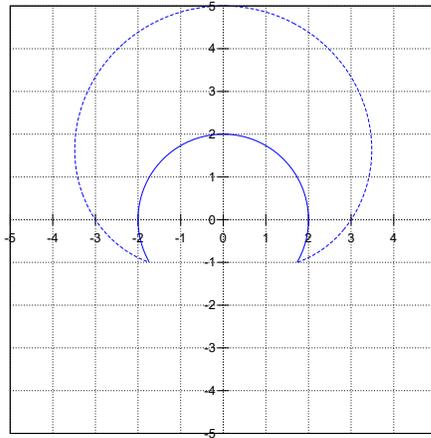
RESOLUÇÃO

Sendo  $D_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 5\}$  e  $D_{r\theta} = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{5}, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ , o volume é dado por

$$\begin{aligned}
 \iint_{D_{xy}} \sqrt{9 - x^2 - y^2} \, dx \, dy &= \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{9 - r^2} \, r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{r=0}^{r=\sqrt{5}} \sqrt{9 - r^2} \, r \, dr \right) d\theta \\
 &= \pi \int_{r=0}^{r=\sqrt{5}} \sqrt{9 - r^2} \, 2r \, dr \\
 &= -\pi \int_{t=9}^{t=4} t^{1/2} \, dt \\
 &= \frac{38\pi}{3} \text{ u.v.}
 \end{aligned}$$

Note que, na quarta igualdade, de cima para baixo, usamos a mudança de variáveis  $t = 9 - r^2$ ,  $dt = -2r \, dr$ .

Figura 4.9:  $D_{xy}$  é a região interior à cardioides  $r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$  e exterior à circunferência  $r = 2$



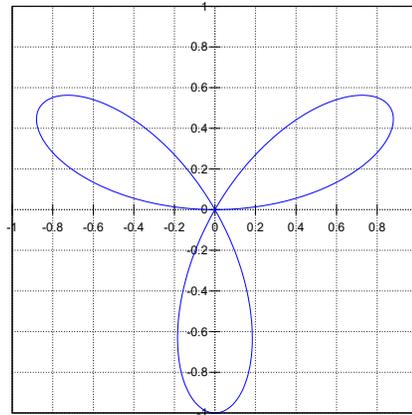
11. Se  $(r, \theta)$  representa um ponto em coordenadas polares, determine a área da região interior a  $r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$  e exterior a  $r = 2$ .

#### RESOLUÇÃO

Primeiramente, note que a região  $D_{xy}$ , representada na figura 4.9 em coordenadas cartesianas, é limitada pelas curvas  $r = 2$  e  $r = 3 + 2 \operatorname{sen} \theta$ , representadas em coordenadas polares, acima da primeira e abaixo da segunda. Vejamos como obter essas representações. Por um lado, a interseção entre as curvas ocorre para  $3 + 2 \operatorname{sen} \theta = 2$ , isto é,  $\operatorname{sen} \theta = -\frac{1}{2}$ . Assim, a interseção ocorre nas semirretas  $\theta = -\frac{\pi}{6}$  e  $\theta = \frac{7\pi}{6}$ . Por outro lado, se  $\theta$  cresce de  $-\frac{\pi}{6}$  a 0, então  $\operatorname{sen} \theta$  cresce de  $-\frac{1}{2}$  a 0, implicando que  $r$  cresce de  $3 + 2(-\frac{1}{2}) = 2$  a  $3 + 2 \cdot 0 = 3$ . Agora, se  $\theta$  cresce de 0 a  $\frac{\pi}{6}$ , então  $\operatorname{sen} \theta$  cresce de 0 a  $\frac{1}{2}$ , implicando que  $r$  cresce de 3 a  $3 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 4$ . Ainda, se  $\theta$  cresce de  $\frac{\pi}{6}$  a  $\frac{\pi}{4}$ , então  $\operatorname{sen} \theta$  cresce de  $\frac{1}{2}$  a  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , implicando que  $r$  cresce de 4 a  $3 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3 + \sqrt{2}$ . Por fim, se  $\theta$  cresce de  $\frac{\pi}{4}$  a  $\frac{\pi}{2}$ , então  $\operatorname{sen} \theta$  cresce de  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  a 1, implicando que  $r$  cresce de  $3 + \sqrt{2}$  a  $3 + 2 \cdot 1 = 5$ . Obtemos, assim, nos quadrantes IV e I, as curvas representadas na figura 4.9. Por simetria, obtemos as curvas nos quadrantes II e III. Portanto, a área é dada (em u.a.) por

$$\begin{aligned}
 \iint_{D_{xy}} 1 \, dx \, dy &= \iint_{D_{r\theta}} 1 \, r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{\theta=-\pi/6}^{\theta=7\pi/6} \left( \int_{r=2}^{r=3+2\operatorname{sen} \theta} r \, dr \right) d\theta \\
 &= \int_{\theta=-\pi/6}^{\theta=7\pi/6} \left[ \frac{r^2}{2} \right]_{r=2}^{r=3+2\operatorname{sen} \theta} d\theta \\
 &= \int_{\theta=-\pi/6}^{\theta=7\pi/6} \left( \frac{5}{2} + 6 \operatorname{sen} \theta + 2 \operatorname{sen}^2 \theta \right) d\theta \\
 &= \left[ \frac{7\theta}{2} - 6 \cos \theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right]_{\theta=-\pi/6}^{\theta=7\pi/6} \\
 &= \frac{14\pi}{3} + \frac{11\sqrt{3}}{2}.
 \end{aligned}$$

Figura 4.10: Rosácea de três folhas com  $a = 1$



12. Se  $(r, \theta)$  representa um ponto em coordenadas polares, calcule a área da região limitada pela curva  $r = a \operatorname{sen}(3\theta)$ ,  $a > 0$ .

#### RESOLUÇÃO

A figura 4.10 ilustra a região  $D_{xy}$ , representada em coordenadas cartesianas, interior à rosácea  $r = a \operatorname{sen}(3\theta)$ , representada em coordenadas polares, para  $a = 1$ . Vejamos como essa curva pode ser obtida, pétala por pétala, e como podemos calcular a área requerida.

#### PRIMEIRA PÉTALA

Note que, quando  $3\theta$  cresce de  $0$  a  $\pi/2$ , isto é,  $\theta$  cresce de  $0$  a  $\pi/6$ , temos que  $r$  cresce de  $0$  a  $a$ ; quando  $3\theta$  cresce de  $\pi/2$  a  $\pi$ , isto é,  $\theta$  cresce de  $\pi/6$  a  $\pi/3$ , temos que  $r$  decresce de  $a$  a  $0$ . Assim, no gráfico da figura 4.10, o contorno da primeira pétala começa em  $(\theta = 0, r = 0)$ , tem a sua metade em  $(\theta = \pi/6, r = a)$ , e termina em  $(\theta = \pi/3, r = 0)$ . Agora, quando  $3\theta$  cresce de  $\pi$  a  $2\pi$ , isto é,  $\theta$  cresce de  $\pi/3$  a  $2\pi/3$ , temos que  $r \leq 0$ , isto é,  $r = 0$ . Assim, no gráfico, para  $\theta \in [\pi/3, 2\pi/3]$ , temos o contorno em  $(\theta, r = 0)$ .

#### SEGUNDA PÉTALA

Repetindo o raciocínio anterior, quando  $3\theta$  cresce de  $2\pi$  a  $2\pi + \pi/2 = 5\pi/2$ , isto é,  $\theta$  cresce de  $2\pi/3$  a  $5\pi/6$ , temos que  $r$  cresce de  $0$  a  $a$ ; quando  $3\theta$  cresce de  $5\pi/2$  a  $3\pi$ , isto é,  $\theta$  cresce de  $5\pi/6$  a  $\pi$ , temos que  $r$  decresce de  $a$  a  $0$ . Assim, no gráfico da figura 4.10, o contorno da segunda pétala começa em  $(\theta = 2\pi/3, r = 0)$ , tem a sua metade em  $(\theta = 5\pi/6, r = a)$ , e termina em  $(\theta = \pi, r = 0)$ . Agora, quando  $3\theta$  cresce de  $3\pi$  a  $4\pi$ , isto é,  $\theta$  cresce de  $\pi$  a  $4\pi/3$ , temos que  $r \leq 0$ , isto é,  $r = 0$ . Assim, no gráfico, para  $\theta \in [\pi, 4\pi/3]$ , temos o contorno em  $(\theta, r = 0)$ .

#### TERCEIRA PÉTALA

Para finalizar o gráfico, note que quando  $3\theta$  cresce de  $4\pi$  a  $4\pi + \pi/2 = 9\pi/2$ , isto é,  $\theta$  cresce de  $4\pi/3$  a  $3\pi/2$ , temos que  $r$  cresce de  $0$  a  $a$ ; quando  $3\theta$  cresce de  $9\pi/2$  a  $5\pi$ , isto é,  $\theta$  cresce de  $3\pi/2$  a  $5\pi/3$ , temos que  $r$  decresce de  $a$  a  $0$ . Assim, no gráfico da figura 4.10, o contorno da terceira pétala começa em  $(\theta = 4\pi/3, r = 0)$ , tem a sua metade em  $(\theta = 3\pi/2, r = a)$ , e termina em  $(\theta = 5\pi/3, r = 0)$ . Agora, quando  $3\theta$  cresce de  $5\pi$  a  $6\pi$ , isto é,  $\theta$  cresce de  $5\pi/3$  a  $2\pi$ , temos que  $r \leq 0$ , isto é,  $r = 0$ . Então, no gráfico dado,

para  $\theta \in [5\pi/3, 2\pi]$ , temos o contorno em  $(\theta, r = 0)$ .

#### CÁLCULO DA ÁREA

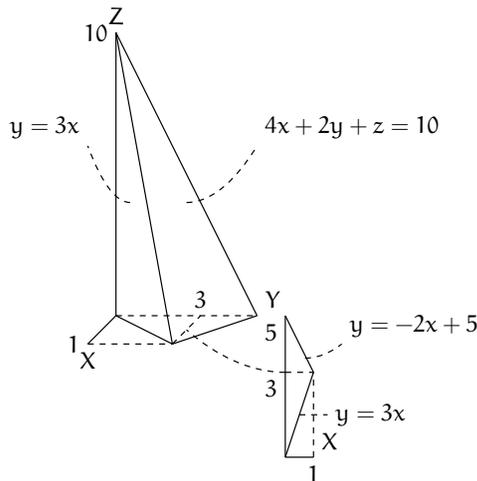
Sendo  $D_{xy}$  a metade da pétala do primeiro quadrante, a área total das três pétalas é dada por

$$\begin{aligned}
 6 \iint_{D_{xy}} 1 \, dx \, dy &= 6 \iint_{D_{r\theta}} 1 \, r \, dr \, d\theta \\
 &= 6 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/6} \int_{r=0}^{r=a \operatorname{sen}(3\theta)} r \, dr \, d\theta \\
 &= 3a^2 \int_{\theta=0}^{\theta=\pi/6} \operatorname{sen}^2(3\theta) \, d\theta \\
 &= \underbrace{u = 3\theta, \, du = 3d\theta}_{\text{u.a.}} a^2 \int_{u=0}^{u=\pi/2} \operatorname{sen}^2 u \, du \\
 &= \frac{a^2}{2} \int_{u=0}^{u=\pi/2} (1 - \cos 2u) \, du \\
 &= \frac{a^2}{2} \left[ u - \frac{\operatorname{sen} 2u}{2} \right]_{u=0}^{u=\pi/2} \\
 &= \frac{a^2\pi}{4} \quad \text{u.a.}
 \end{aligned}$$

13. Utilizando integrais duplas ou triplas, obtenha o volume do sólido delimitado pelos planos  $4x + 2y + z = 10$ ,  $y = 3x$ ,  $z = 0$  e  $x = 0$ .

#### RESOLUÇÃO VIA INTEGRAIS DUPLAS

Na ilustração seguinte, temos uma representação geométrica da região piramidal delimitada pelos planos supracitados, bem como de sua “planta baixa” triangular, isto é,  $D_{xy}$ .



Note que  $D_{xy} = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 3x \leq y \leq -2x + 5\}$ . Então, o volume é calculado, em u.v., por

$$\begin{aligned} \iint_{D_{xy}} (10 - 4x - 2y) \, dx \, dy &= \int_{x=0}^{x=1} \left( \int_{y=3x}^{y=-2x+5} (10 - 4x - 2y) \, dy \right) \, dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} [10y - 4xy - y^2]_{y=3x}^{y=-2x+5} \, dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} (25 - 50x + 25x^2) \, dx \\ &= 25 \left[ x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= 25 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{25}{3} \\ &= \frac{1}{3} \times \left( \frac{5 \times 1}{2} \times 10 \right), \end{aligned}$$

coincidindo portanto com a fórmula do volume de uma pirâmide, isto é, *um terço do produto da área da base pela altura da pirâmide*.

#### RESOLUÇÃO VIA INTEGRAIS TRIPLAS

Na ilustração anterior, denote a região piramidal por  $D_{xyz}$ . Então, o volume é calculado, em u.v., por

$$\begin{aligned} \iiint_{D_{xyz}} 1 \, dz \, dx \, dy &= \iint_{D_{xy}} \left( \int_{z=0}^{z=10-4x-2y} 1 \, dz \right) \, dx \, dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (10 - 4x - 2y) \, dx \, dy \\ &= \dots \\ &= \frac{25}{3}, \end{aligned}$$

onde as reticências anteriores representam o cálculo que acabamos de realizar na resolução via integrais duplas.

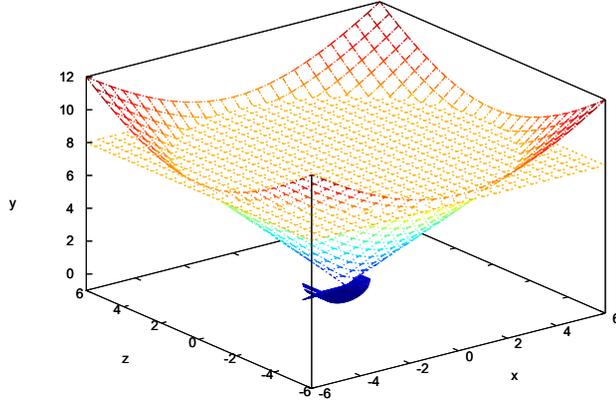
14. Sendo  $D_{xyz}$  limitada por  $y = 2x^2 + 2z^2$  e pelo plano  $y = 8$ , calcule

$$\iiint_{D_{xyz}} \sqrt{3x^2 + 3z^2} \, dx \, dy \, dz.$$

#### RESOLUÇÃO

Note que  $w_1(x, z) = 2x^2 + 2z^2$  e  $w_2(x, z) = 8$  representam, respectivamente, o cone de geratriz  $y = x$  (ou  $y = z$ ) e o plano perpendicular ao eixo das ordenadas no ponto  $(0, 8, 0)$ , conforme ilustrados na figura 4.11.

Figura 4.11:  $D_{xyz} : 2x^2 + 2z^2 \leq y \leq 8$ ,  $(x, z) \in D_{xz}$ ;  $D_{xz} : x^2 + z^2 \leq 4$



Assim, como a interseção entre o cone e o plano supracitados é dada por  $2x^2 + 2z^2 = 8$ ,  $D_{xz}$  é o círculo no plano  $OXZ$  com centro na origem e raio 2. Portanto,

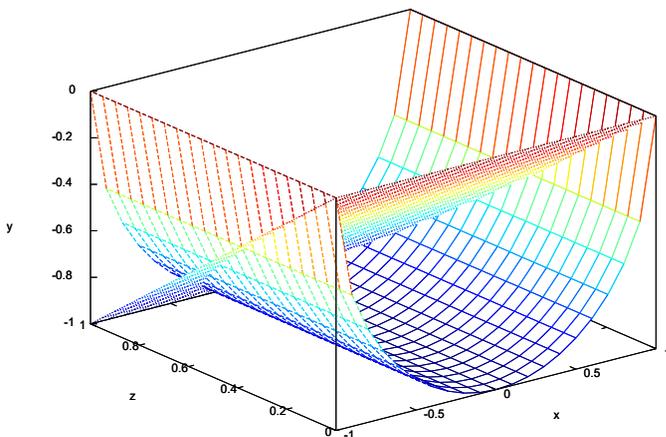
$$\begin{aligned}
 \iiint_{D_{xyz}} \sqrt{3x^2 + 3z^2} \, dx \, dy \, dz &= \iint_{D_{xz}} \left( \int_{y=2x^2+2z^2}^{y=8} \sqrt{3x^2 + 3z^2} \, dy \right) \, dx \, dz \\
 &= \iint_{D_{xz}} \left[ \sqrt{3x^2 + 3z^2} y \right]_{y=2x^2+2z^2}^{y=8} \, dx \, dz \\
 &= \sqrt{3} \iint_{D_{xz}} \sqrt{x^2 + z^2} [8 - 2(x^2 + z^2)] \, dx \, dz \\
 &= \sqrt{3} \iint_{D_{r\theta}} r(8 - 2r^2) \, r \, dr \, d\theta \\
 &= \sqrt{3} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{r=0}^{r=2} (8r^2 - 2r^4) \, dr \right) \, d\theta \\
 &= \sqrt{3} \cdot \left[ \frac{8r^3}{3} - \frac{2r^5}{5} \right]_{r=0}^{r=2} \cdot [\theta]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \\
 &= \sqrt{3} \cdot \left( \frac{64}{3} - \frac{64}{5} \right) \cdot 2\pi \\
 &= \sqrt{3} \cdot \frac{2 \cdot (5 \cdot 64 - 3 \cdot 64)}{15} \cdot \pi \\
 &= \sqrt{3} \cdot \frac{4 \cdot 64}{15} \cdot \pi \\
 &= \frac{256\sqrt{3}\pi}{15}.
 \end{aligned}$$

Note que, na quarta igualdade, de cima para baixo, usamos a mudança de variáveis  $x = r \cos \theta$  e  $z = r \sin \theta$  com  $0 \leq r \leq 2$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

15. Determine o volume de uma cunha cortada do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  pelos planos  $z = -y$  e  $z = 0$ , conforme ilustrada na figura 4.12, utilizando integrais triplas.

## RESOLUÇÃO

Figura 4.12: Cunha cortada do cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  pelos planos  $z = -y$  e  $z = 0$ . Observe que  $D_{xy}$  é a metade inferior do círculo unitário no plano  $OXY$  com centro na origem



O volume é dado pela integral

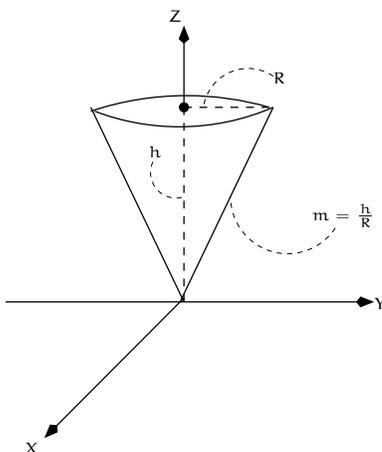
$$\begin{aligned}
 \iiint_{D_{xyz}} 1 \, dx \, dy \, dz &= \iint_{D_{xy}} \left( \int_{z=0}^{z=-y} 1 \, dz \right) dx \, dy \\
 &= \int_{x=-1}^{x=1} \left( \int_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=0} (-y) \, dy \right) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{x=-1}^{x=1} [-y^2]_{y=-\sqrt{1-x^2}}^{y=0} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{x=-1}^{x=1} (1 - x^2) dx \\
 &= \frac{1}{2} \left[ x - \frac{x^3}{3} \right]_{x=-1}^{x=1} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2 \left( 1 - \frac{1}{3} \right) \\
 &= \frac{2}{3} \text{ u.v.}
 \end{aligned}$$

16. Utilizando integrais triplas, verifique que o volume de um cone circular reto de raio  $R$  e altura  $h$  é  $\frac{\pi R^2 h}{3}$  u.v.

## RESOLUÇÃO

Considere o cone  $z = m\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z \geq 0$ , sendo  $m$  a inclinação de sua geratriz, conforme ilustrado na figura 4.13. Logo,  $m = \frac{h}{R}$  e esse cone pode ser representado pelo conjunto  $D_{xyz}$  dos pontos  $(x, y, z)$  tais que  $\frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h$  e  $x^2 + y^2 \leq R^2$ . Assim, em coordenadas cilíndricas, o cone pode ser representado pelo conjunto dos pontos  $(r, \theta, z)$  tais

Figura 4.13:  $D_{xyz} : \frac{h}{R}\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq h$ ,  $(x, y) \in D_{xy}$ , sendo  $D_{xy}$  o círculo com centro na origem e raio  $R$



que  $\frac{hr}{R} \leq z \leq h$ ,  $0 \leq r \leq R$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ . Portanto, o volume procurado é dado por

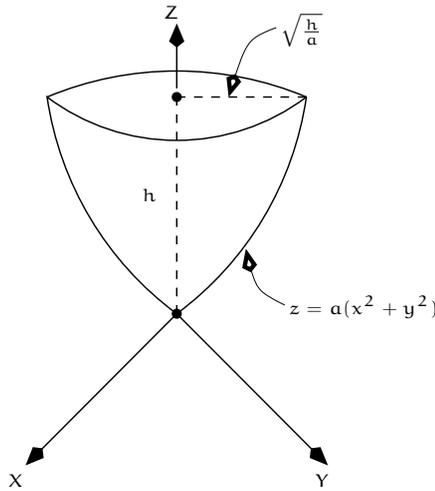
$$\begin{aligned}
 \iiint_{D_{xyz}} 1 \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{D_{r\theta z}} 1 \, r \, dr \, d\theta \, dz \\
 &= \iint_{D_{r\theta}} \left( \int_{z=\frac{hr}{R}}^{z=h} 1 \, dz \right) r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{r=0}^{r=R} \left( h - \frac{hr}{R} \right) r \, dr \right) d\theta \\
 &= h \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\theta \int_{r=0}^{r=R} \left( r - \frac{r^2}{R} \right) dr \\
 &= 2\pi h \left[ \frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R} \right]_{r=0}^{r=R} \\
 &= 2\pi h R^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\
 &= \frac{\pi h R^2}{3} \text{ u.v.}
 \end{aligned}$$

17. Utilizando integrais triplas, calcule o volume do parabolóide  $z = a(x^2 + y^2)$  de altura  $h$ .

#### RESOLUÇÃO

Note que  $D_{xyz}$  é o conjunto dos pontos  $(x, y, z)$  tais que  $a(x^2 + y^2) \leq z \leq h$  e  $(x, y)$  pertence ao círculo  $D_{xy}$  de centro na origem e raio  $\sqrt{\frac{h}{a}}$ , conforme ilustrado na figura 4.14. Assim,  $D_{xyz}$  pode ser representado, em coordenadas cilíndricas, pelo conjunto  $D_{r\theta z}$  dos pontos  $(r, \theta, z)$  tais que  $ar^2 \leq z \leq h$  e  $(r, \theta) \in D_{r\theta}$  com  $0 \leq r \leq \sqrt{\frac{h}{a}}$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

Figura 4.14:  $(x, y, z) \in D_{xyz} \iff a(x^2 + y^2) \leq z \leq h$  e  $(x, y) \in D_{xy}$  com  $x^2 + y^2 \leq \sqrt{\frac{h}{a}}$



Portanto, o volume é dado pela integral

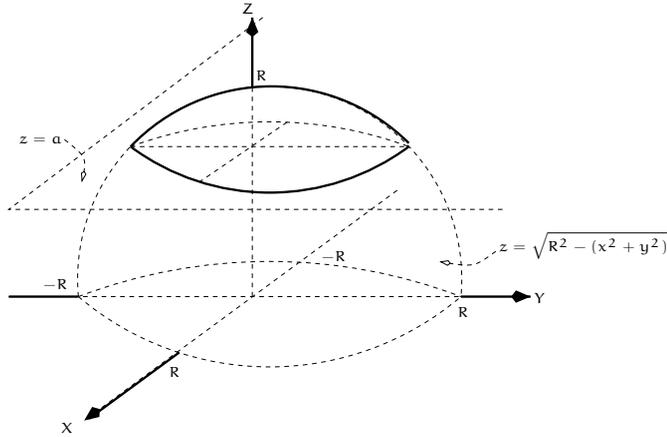
$$\begin{aligned}
 \iiint_{D_{xyz}} 1 \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{D_{r\theta z}} 1 \, r \, dr \, d\theta \, dz \\
 &= \iint_{D_{r\theta}} \left( \int_{z=ar^2}^{z=h} 1 \, dz \right) r \, dr \, d\theta \\
 &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{r=0}^{r=\sqrt{h/a}} [z]_{z=ar^2}^{z=h} r \, dr \right) d\theta \\
 &= 2\pi \int_{r=0}^{r=\sqrt{h/a}} (h - ar^2) r \, dr \\
 &= 2\pi \left[ \frac{hr^2}{2} - \frac{ar^4}{4} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{h/a}} \\
 &= \pi \left( \frac{h^2}{a} - \frac{h^2}{2a} \right) \\
 &= \frac{\pi h^2}{2a} \quad \text{u. v.}
 \end{aligned}$$

18. Utilizando integrais triplas, obtenha o volume da calota esférica que representa a interseção da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  com o semiespaço  $z \geq a$ ,  $0 < a < R$ .

RESOLUÇÃO

A partir da análise da figura 4.15, cuja legenda explicita a passagem de coordenadas

Figura 4.15:  $D_{xyz}$  é o conjunto dos pontos  $(x, y, z)$  tais que  $a \leq z \leq \sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}$  e  $(x, y) \in D_{xy}$  com  $x^2 + y^2 \leq R^2 - a^2$ ;  $D_{r\theta z}$  é o conjunto dos pontos  $(r, \theta, z)$  tais que  $a \leq z \leq \sqrt{R^2 - r^2}$  e  $(r, \theta) \in D_{r\theta}$  com  $0 \leq r \leq \sqrt{R^2 - a^2}$  e  $0 \leq \theta \leq 2\pi$



cartesianas para cilíndricas, segue que o volume é dado por

$$\begin{aligned}
 \iiint_{D_{xyz}} 1 \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{D_{r\theta z}} 1 \, r \, dr \, d\theta \, dz \\
 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left( \int_{r=0}^{\sqrt{R^2 - a^2}} \left( \int_{z=a}^{\sqrt{R^2 - r^2}} 1 \, dz \right) r \, dr \right) d\theta \\
 &= 2\pi \int_{r=0}^{\sqrt{R^2 - a^2}} (\sqrt{R^2 - r^2} - a) \, r \, dr \\
 &= -\pi \int_{u=R^2}^{u=a^2} (\sqrt{u} - a) \, du \\
 &= -\pi \left[ \frac{2u^{3/2}}{3} - au \right]_{u=R^2}^{u=a^2} \\
 &= \pi \left( \frac{2}{3}(R^3 - a^3) - a(R^2 - a^2) \right) \text{ u.v.}
 \end{aligned}$$

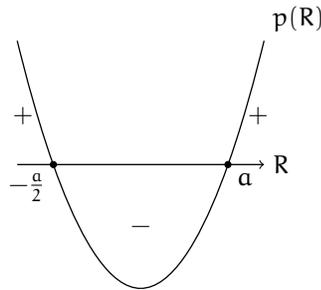
Note o uso da mudança de variáveis  $u = R^2 - r^2$ ,  $du = -2r \, dr$  no cálculo dessa integral. Uma compreensão mais abrangente da resolução exige uma breve digressão sobre o volume calculado, que faremos a seguir.

A primeira integral da resolução calcula o volume da região  $D_{xyz}$ .<sup>36</sup> Portanto, o resultado dessa integral deve ser positivo. Contudo, o resultado obtido representa uma expressão cujo sinal pode não ser tão evidente. Assim, primeiramente, note que essa expressão pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 2\pi(R - a) \left( \frac{R^2 + aR + a^2}{3} - \frac{aR + a^2}{2} \right) &= 2\pi(R - a) \cdot \frac{2R^2 - aR - a^2}{6} \\
 &= \frac{\pi(R - a)}{3} \cdot (2R^2 - aR - a^2).
 \end{aligned}$$

<sup>36</sup>Cf. a subseção 4.2.2.

Então, como  $R - a > 0$ , o volume calculado nos diz que  $p(R) = 2R^2 - aR - a^2$  deve ser positivo. De fato, como  $p(R)$  representa uma parábola com concavidade para cima,  $p(R) = 0$  se, e somente se,  $R = \frac{a \pm \sqrt{9a^2}}{4}$ , isto é,  $R = a$  ou  $R = -\frac{a}{2}$ . Segue uma interpretação geométrica do estudo do sinal dessa parábola:



Portanto, fica evidente que

$$p(R) > 0 \iff R < -\frac{a}{2} \text{ ou } R > a.$$

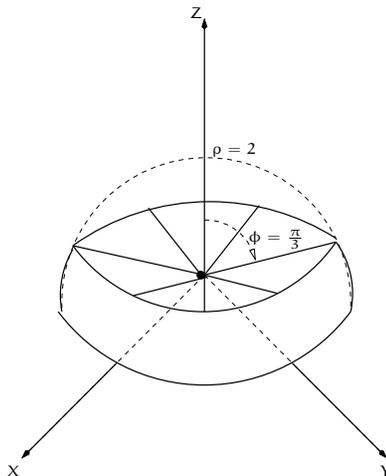
Observando que apenas a condição  $R - a > 0$  deve ser considerada, segue que  $p(R)$  é positivo.

19. Utilizando integrais triplas, calcule o volume do sólido limitado inferiormente pelo plano  $z = 0$ , lateralmente pela esfera  $\rho = 2$  e superiormente pelo cone  $\phi = \frac{\pi}{3}$ .

RESOLUÇÃO

Note que  $\rho \in [0, 2]$ ,  $\phi \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$  e  $\theta \in [0, 2\pi]$ , de acordo com a figura 4.16.

Figura 4.16: Semiesfera superior  $\rho = 2$ , “furada” pelo cone  $\phi = \frac{\pi}{3}$



Portanto, o volume é dado por

$$\begin{aligned} \iiint_{D_{xyz}} 1 \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{D_{\rho\phi\theta}} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{\phi=\pi/3}^{\phi=\pi/2} \left( \int_{\rho=0}^{\rho=2} \rho^2 \, d\rho \right) \operatorname{sen} \phi \, d\phi \right) d\theta \\ &= \frac{8\pi}{3} \text{ u.v.}, \end{aligned}$$

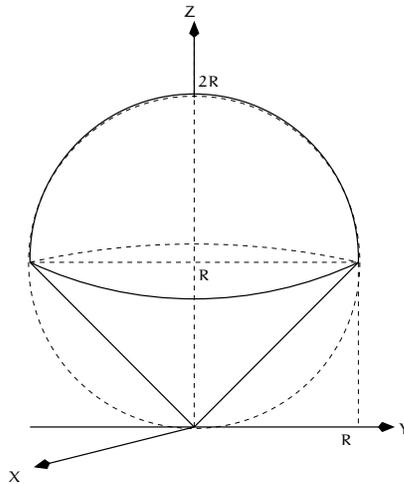
como pode ser facilmente verificado.

20. Utilizando integrais triplas, obtenha o volume do sólido limitado inferiormente pelo cone  $\phi \leq \frac{\pi}{4}$  e superiormente pela esfera  $\rho \leq 2R \cos \phi$ .

#### RESOLUÇÃO

A figura 4.17 representa a união da semiesfera superior  $\rho \leq 2R \cos \phi$ , escrita como  $x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2$  em coordenadas cartesianas, com o cone circular reto de vértice na origem, altura  $R$  e geratriz  $\sqrt{2}R$ .

Figura 4.17: Sólido no formato de “sorvete na casquinha”



De fato,

$$\rho^2 \leq 2R\rho \cos \phi \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz + R^2 \leq R^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2.$$

O volume procurado é, portanto, dado por

$$\begin{aligned} \iiint_{D_{xyz}} dx \, dy \, dz &= \iiint_{D_{\rho\phi\theta}} \rho^2 \operatorname{sen} \phi \, d\rho \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{\phi=0}^{\phi=\pi/4} \left( \int_{\rho=0}^{\rho=2R \cos \phi} \rho^2 \, d\rho \right) \operatorname{sen} \phi \, d\phi \right) d\theta \\ &= \frac{16\pi R^3}{3} \int_{\phi=0}^{\phi=\pi/4} \cos^3 \phi \operatorname{sen} \phi \, d\phi. \end{aligned}$$

Utilizando a mudança de variáveis  $u = \cos \phi$ , temos que  $du = -\text{sen } \phi \, d\phi$ . Assim, o volume é dado por

$$-\frac{16\pi R^3}{3} \int_{u=1}^{u=\sqrt{2}/2} u^3 \, du = \frac{4\pi R^3}{3} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = \pi R^3 \quad \text{u.v.}$$

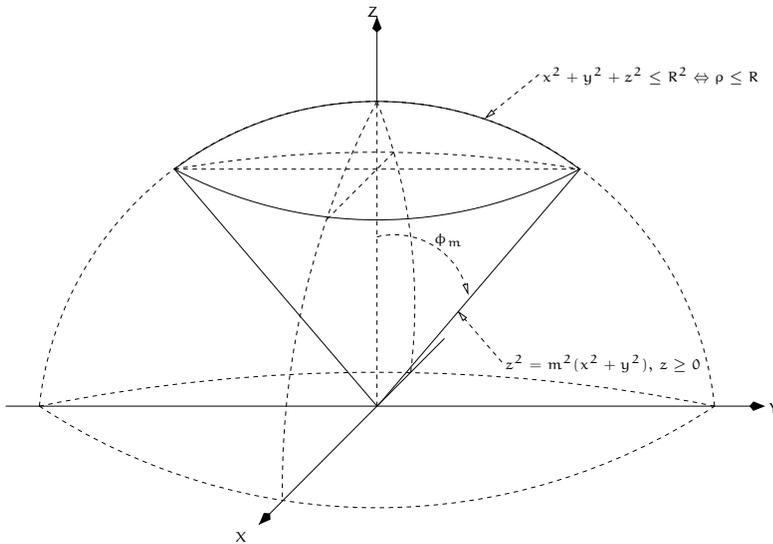
Observe que o mesmo resultado pode ser obtido a partir das fórmulas dos volumes de esferas e cones analisadas neste capítulo. De fato,

$$\pi R^3 = \frac{4\pi R^3}{3} + \frac{\pi R^3}{3}.$$

Note que, na segunda parcela, usamos o fato de que o cone tem altura igual ao raio da esfera.

21. Utilizando integrais triplas em coordenadas esféricas, obtenha o volume do sólido limitado superiormente pela esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$  e inferiormente pelo cone  $z^2 = m^2(x^2 + y^2)$  com  $z \geq 0$ .

Figura 4.18: Outro sólido no formato de “sorvete na casquinha”, agora com menos “sorvete”



#### RESOLUÇÃO

A figura 4.18 ilustra a interseção entre a calota superior da esfera  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$  e o cone circular reto com vértice na origem dado por  $z^2 = m^2(x^2 + y^2)$ ,  $z \geq 0$ . Assim,  $0 \leq \theta \leq 2\pi$  e  $0 \leq \rho \leq R$ .<sup>37</sup> Agora, considere que  $\phi_m$  é o ângulo que a geratriz do cone forma com o eixo das cotas. Então,  $0 \leq \phi \leq \phi_m$  e precisamos obter a equação do cone em coordenadas esféricas que escreva  $\phi_m$  em função de  $m$ .<sup>38</sup> Portanto, utilizando a

<sup>37</sup> $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

<sup>38</sup>Note que  $\phi_m$  não é dado no enunciado do exercício!

equação do cone de inclinação  $m$ , temos

$$z^2 = m^2 (\rho^2 - z^2),$$

isto é,

$$z^2 = \frac{m^2 \rho^2}{1 + m^2}.$$

Logo, escrevendo  $z$  em coordenadas esféricas, temos

$$\rho^2 \cos^2 \phi_m = \frac{m^2 \rho^2}{1 + m^2}.$$

Assim, como o cone existe apenas para  $z \geq 0$ , isto é,  $0 < \phi_m < \frac{\pi}{2}$ , temos

$$\cos \phi_m = \sqrt{\frac{m^2}{1 + m^2}}.$$

Portanto, o volume procurado é dado por

$$\begin{aligned} \iiint_{D_{xyz}} dx dy dz &= \iiint_{D_{\rho\phi\theta}} \rho^2 \sin \phi \, d\rho d\phi d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \left( \int_{\phi=0}^{\phi=\phi_m} \left( \int_{\rho=0}^{\rho=R} \rho^2 \, d\rho \right) \sin \phi \, d\phi \right) d\theta \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} \int_{\phi=0}^{\phi=\phi_m} \sin \phi \, d\phi \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} [-\cos \phi]_{\phi=0}^{\phi=\phi_m} \\ &= \frac{2\pi R^3}{3} \left( 1 - \sqrt{\frac{m^2}{1 + m^2}} \right) \quad \text{u.v.} \end{aligned}$$

Note que, como  $m^2 < 1 + m^2$ , o volume calculado é, de fato, positivo.<sup>39</sup>

---

<sup>39</sup>Cf. a digressão apresentada na resolução do exercício 18.



# Capítulo 5

## Resultados do cálculo vetorial

*There is nothing in the world  
except empty curved space.  
Matter, charge,  
electromagnetism, and other  
fields are only manifestations of  
the curvature of space.*

---

*John Wheeler*

Os *teoremas de Green, Gauss e Stokes* do cálculo vetorial têm forte relação com as *equações de Maxwell*,<sup>1</sup> que, assim como as importantes *equações de Navier-Stokes*, nos dão informações fundamentais sobre o comportamento de fluidos e fluxos (tais como: velocidade, aceleração, estabilidade, contenção, transferência, propagação, transmissão, escoamento, vazão etc.) em meios sólidos, líquidos ou gasosos, com ou sem viscosidade, heterogêneos ou homogêneos, porosos ou não porosos, saturados ou não saturados, fraturados ou não fraturados etc. Apenas o *teorema de Stokes* no plano, mais conhecido como *teorema de Green*, será estudado mais detalhadamente, ficando a tarefa de aprofundar o caso tridimensional, bem como a de estudar o *teorema de Gauss*, a cargo do leitor.

### 5.1 Integrais de linha

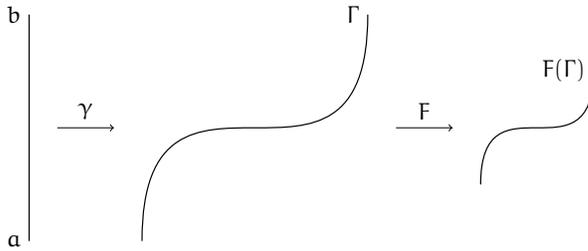
Denotemos o traço de uma curva parametrizada  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  por  $\Gamma$ , isto é,

$$\Gamma := \{\gamma(t) \mid t \in [a, b]\}.$$

$\Gamma$  é dita uma *curva*. Considere agora uma função  $F : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$  *limitada*, isto é,  $\text{Dom}(F) = \Gamma$  e  $\text{Im}(F)$  é um conjunto limitado em  $\mathbb{R}^2$ .  $F$  é chamada de *campo vetorial*. Por fim, seja  $\gamma$  diferenciável e sejam  $\gamma'$  e  $F \circ \gamma$  contínuas. Segue uma ilustração desses conceitos:

---

<sup>1</sup>Indico o excelente livro do físico Daniel Fleisch (2008), escrito para aqueles interessados nessas equações que, juntamente com a *lei da força de Lorentz*, compõem a base do eletromagnetismo clássico.



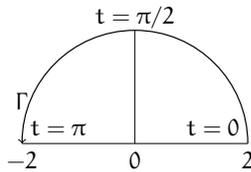
### 5.1.1 Definição de integral de linha

A integral de linha de  $F$  ao longo de  $\Gamma$  é definida por

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma := \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt. \quad (5.1)$$

#### Exemplo

Seja  $F(x, y) = (-y + 1, x)$  e considere a semicircunferência  $\Gamma$  de centro na origem e raio 2 parametrizada por  $\gamma(t) = (2 \cos t, 2 \sin t)$  para  $t \in [0, \pi]$ ,<sup>2</sup> conforme a ilustração seguinte:



Como  $F(\gamma(t)) = (-2 \sin t + 1, 2 \cos t)$  e  $\gamma'(t) = (-2 \sin t, 2 \cos t)$  para cada  $t \in [0, \pi]$ , temos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_0^{\pi} (-2 \sin t + 1, 2 \cos t) \cdot (-2 \sin t, 2 \cos t) dt \\ &= \int_0^{\pi} (4 \sin^2 t - 2 \sin t + 4 \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{\pi} (4 - 2 \sin t) dt \\ &= [4t + 2 \cos t]_0^{\pi} \\ &= 4\pi - 4. \end{aligned}$$

#### Observação

Dizer que  $\Gamma$  tem *orientação positiva* (respectivamente, *negativa*) significa que  $\gamma(t)$  percorre  $\Gamma$  no sentido anti-horário (respectivamente, horário) à medida que  $t$  cresce em  $[a, b]$ .

<sup>2</sup>Em breve, faremos um comentário sobre a possibilidade de uma curva  $\Gamma$  admitir várias parametrizações.

### Exemplo

A circunferência  $\Gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$  tem orientação positiva (respectivamente, negativa) se parametrizada por  $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$  (respectivamente,  $\gamma(t) = (\cos t, -\sin t)$ ) com  $t \in [0, 2\pi]$ .

### Notação sugestiva para integrais de linha

Suponha agora que  $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$  e  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  para todos os pontos onde tais funções estejam definidas. Portanto, como

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_a^b [f(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + g(x(t), y(t)) \cdot y'(t)] dt,$$

a integral de linha definida em (5.1), página 170, também é denotada por

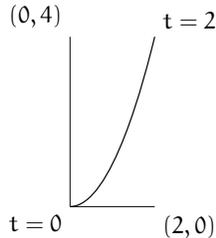
$$\int_{\Gamma} f dx + g dy.$$

### Exercícios resolvidos

1. Calcule  $\int_{\Gamma} (x+y) dx + xy dy$  para  $\Gamma = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, y = x^2\}$  com orientação positiva.

#### RESOLUÇÃO

Aqui,  $f(x, y) = x + y$ ,  $g(x, y) = xy$  e  $\Gamma$  é o arco da parábola de  $(0, 0)$  a  $(2, 4)$ , parametrizada por  $x(t) = t$  e  $y(t) = t^2$  para  $t \in [0, 2]$ , conforme a ilustração seguinte:



Portanto, como  $x'(t) = 1$  e  $y'(t) = 2t$ , segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (x+y) dx + xy dy &= \int_0^2 [(t + t^2) \cdot 1 + (t \cdot t^2) \cdot 2t] dt \\ &= \int_0^2 (t + t^2 + 2t^4) dt \\ &= \left[ \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + \frac{2t^5}{5} \right]_0^2 \\ &= 2 + \frac{8}{3} + \frac{64}{5} \\ &= \frac{262}{15} \\ &= 17\frac{7}{15}. \end{aligned}$$

2. Calcule  $\int_{\Gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$  com  $\Gamma = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = r^2\}$  totalmente percorrida no sentido anti-horário e uma única vez.

#### RESOLUÇÃO

Parametrizando a circunferência de raio  $r$  por  $\gamma(t) = (r \cos t, r \sin t)$  com  $t \in [0, 2\pi]$ ,<sup>3</sup> temos

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} &= \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{r \sin t}{r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} (-r \sin t) + \frac{r \cos t}{r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t)} (r \cos t) \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} \left( \frac{r^2 \sin^2 t}{r^2} + \frac{r^2 \cos^2 t}{r^2} \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sin^2 t + \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

#### Integrais de linha: para que servem?

As integrais de linha têm várias aplicações físicas e geométricas relacionadas ao comportamento de um vetor ao longo de uma curva, sendo fundamentais para a modelagem de problemas mais aplicados, como: o trabalho realizado por uma força  $F$  ao longo de uma curva  $\Gamma$ ; o fluxo do vetor velocidade de um fluido através de uma curva; a área de certas regiões planas limitadas por curvas *fechadas*; etc. Além disso, algumas integrais duplas podem ser calculadas via integrais de linha. Aqui, algumas dessas aplicações serão trabalhadas.

#### Exercício sobre o trabalho realizado por uma força

Se uma força é dada por  $F(x, y) = (0, x)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , calcule

$$\tau = \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma,$$

o trabalho realizado por  $F$  ao longo da curva  $\Gamma$ , representada pela parte da circunferência unitária que se encontra no primeiro quadrante, orientada no sentido anti-horário. Ainda, como  $\tau$  não depende da parametrização da curva, desde que seja respeitada a sua orientação, calcule a integral com as seguintes parametrizações  $\gamma(t)$  de  $\Gamma$ :

1.  $(\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ;
2.  $(\sqrt{1-t^2}, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

A resolução desse exercício encontra-se na seção 5.4.

<sup>3</sup>Pode ser demonstrado que, dada uma integral de linha arbitrária, o valor de tal integral é independente da parametrização (que preserve a orientação) da curva, isto é, se  $\gamma_1(t)$  e  $\gamma_2(t)$  são parametrizações (que preservam a orientação) de  $\Gamma$ , então

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma_1 = \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma_2.$$

Resolva este exercício usando outra parametrização de  $\Gamma$ . Por exemplo,  $\gamma(t) = (r \cos 2\pi t, r \sin 2\pi t)$  com  $t \in [0, 1]$ .

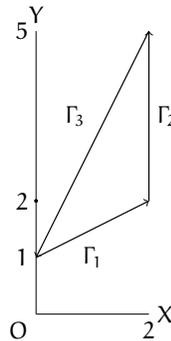
### Observação

Sejam  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  curvas como a  $\Gamma$  definida na equação (5.1), página 170, tais que o ponto final de  $\Gamma_1$  coincide com o ponto inicial de  $\Gamma_2$ .<sup>4</sup> Denote  $\Gamma := \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ . Seja  $F$  como na definição (5.1). Pode ser demonstrado que

$$\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma = \int_{\Gamma_1} F \cdot d\gamma_1 + \int_{\Gamma_2} F \cdot d\gamma_2.$$

### Exercícios resolvidos

1. Integre  $F(x, y) = (y, x^2)$  sobre o triângulo  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ , que representa a união de três segmentos orientados positivamente, como ilustrado a seguir:



### RESOLUÇÃO

Para integrar  $F$  sobre  $\Gamma$ , vamos precisar de três parametrizações, uma para cada segmento de reta. Para parametrizar um segmento, obtenha primeiro a equação da reta que o contém. Para  $\Gamma_1$ , temos  $y = \frac{1}{2}x + 1$ , que pode ser parametrizada por  $\gamma_1(t) = (t, \frac{1}{2}t + 1)$  para cada  $t \in [0, 2]$ . Então

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} F \cdot d\gamma_1 &= \int_0^2 \left( \frac{t}{2} + 1, t^2 \right) \cdot \left( 1, \frac{1}{2} \right) dt \\ &= \int_0^2 \left( \frac{t^2}{2} + \frac{t}{2} + 1 \right) dt \\ &= \left[ \frac{t^3}{6} + \frac{t^2}{4} + t \right]_0^2 \\ &= \frac{13}{3}. \end{aligned}$$

<sup>4</sup>Isto é, se  $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  e  $\gamma_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$  são parametrizações de  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ , respectivamente, então  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ .

Agora, como  $\Gamma_2$  está contida na reta  $x = 2$ , podemos parametrizá-la por  $\gamma_2(t) = (2, t)$  para cada  $t \in [2, 5]$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\gamma_2 &= \int_2^5 (t, 4) \cdot (0, 1) dt \\ &= \int_2^5 4 dt \\ &= 4[t]_2^5 \\ &= 12. \end{aligned}$$

Por fim, para  $\Gamma_3$ , considere a reta  $y = 2x + 1$ . Se parametrizada por  $\gamma_3(t) = (t, 2t + 1)$  para todo  $t \in [0, 2]$ ,  $\Gamma_3$  tem sentido horário. Logo, para  $\tau = 2 - t$ , temos  $2t + 1 = 5 - 2\tau$ .<sup>5</sup> Assim, parametrize  $\Gamma_3$  por  $\gamma_3(\tau) = (2 - \tau, 5 - 2\tau)$  para cada  $\tau \in [0, 2]$ .<sup>6</sup> Então,

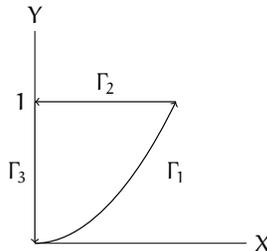
$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\gamma_3 &= \int_0^2 (5 - 2\tau, (2 - \tau)^2) \cdot (-1, -2) d\tau \\ &= - \int_0^2 (2\tau^2 - 10\tau + 13) d\tau \\ &= - \left[ \frac{2\tau^3}{3} - 5\tau^2 + 13\tau \right]_0^2 \\ &= -\frac{34}{3}. \end{aligned}$$

Portanto, temos que

$$\int_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\gamma = \int_{\Gamma_1} \mathbf{F} \cdot d\gamma_1 + \int_{\Gamma_2} \mathbf{F} \cdot d\gamma_2 + \int_{\Gamma_3} \mathbf{F} \cdot d\gamma_3 = 5.$$

2. Seja  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$  tal que  $\Gamma_1$  é a parte (orientada) da parábola  $y = x^2$  que vai de  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ ,  $\Gamma_2$  é o segmento (orientado) de reta que vai de  $(1, 1)$  a  $(0, 1)$  e  $\Gamma_3$  é o segmento (orientado) de reta que vai de  $(0, 1)$  a  $(0, 0)$ . Calcule a seguinte integral de linha:

$$I = \int_{\Gamma} (x^3 y^2 + y) dx + x dy.$$



<sup>5</sup>Note que, quando  $\tau$  cresce de 0 a 2,  $t$  decresce de 2 a 0 e, portanto,  $\Gamma_3$  tem sentido anti-horário.

<sup>6</sup>Esse procedimento é dito uma *reparametrização da curva*.

### RESOLUÇÃO

A ilustração anterior representa  $\Gamma$  e podemos considerar as seguintes parametrizações:

$$\Gamma_1: \gamma_1(t) = (t, t^2) \text{ com } t \in [0, 1];$$

$$\Gamma_2: \gamma_2(t) = (1 - t, 1) \text{ com } t \in [0, 1];$$

$$\Gamma_3: \gamma_3(t) = (0, 1 - t) \text{ com } t \in [0, 1].$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Gamma_1} (x^3 y^2 + y) \, dx + x \, dy \\ &\quad + \int_{\Gamma_2} (x^3 y^2 + y) \, dx + x \, dy \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} (x^3 y^2 + y) \, dx + x \, dy \\ &= \int_0^1 [(t^7 + t^2) + 2t^2] \, dt \\ &\quad + \int_0^1 \{-[(1-t)^3 + 1] + 0\} \, dt \\ &\quad + \int_0^1 (0 + 0) \, dt \\ &= \left[ \frac{t^8}{8} + t^3 \right]_0^1 + \int_1^0 (u^3 + 1) \, du + 0 \\ &= \frac{1}{8} + 1 - \frac{1}{4} - 1 \\ &= -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Esse exercício também será resolvido utilizando o *teorema de Green* na seção 5.2.

### 5.1.2 Teorema fundamental do cálculo para integrais de linha

Seja  $\Gamma$  uma curva como a definida em (5.1), página 170. Considere  $f: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável com  $f_x$  e  $f_y$  contínuas. Sejam  $A, B \in \mathbb{R}^2$  os pontos extremos de  $\Gamma$ , isto é, se  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  é uma parametrização de  $\Gamma$ , então  $A = \gamma(a)$  e  $B = \gamma(b)$ . Portanto,

$$\int_{\Gamma} \nabla f \cdot d\gamma = f(B) - f(A). \quad (5.2)$$

DEMONSTRAÇÃO

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \nabla f \cdot d\gamma &= \int_a^b \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \, dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \, dt \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) \\ &= f(B) - f(A). \end{aligned}$$

Nas segunda e terceira igualdades da demonstração, foram utilizadas, respectivamente, a regra da cadeia apresentada na seção 3.2.7 e o teorema fundamental do cálculo para funções do “cálculo I”.

### Observações

- Na equação (5.2), no lugar da curva  $\Gamma$  e de sua parametrização  $\gamma$ , considere uma outra curva  $\Lambda$  parametrizada por  $\lambda$ , mas mantenha todas as outras hipóteses inalteradas. Então,

$$\int_{\Gamma} \nabla f \cdot d\gamma = \int_{\Lambda} \nabla f \cdot d\lambda,$$

pois a integral depende apenas de  $f$  e dos pontos  $A$  e  $B$ .

- Se  $F = \nabla f$  para alguma  $f$  como a utilizada em (5.2), então  $\int_{\gamma} F \cdot d\gamma$  só depende dessa  $f$  e dos pontos  $A$  e  $B$ , mas não da curva  $\Gamma$  que liga esses pontos.

### Exercícios

1. Calcule  $\int_{\Gamma} \nabla f \cdot d\gamma$  para  $f(x, y) = \cos(xy\pi)$  e qualquer curva  $\Gamma$  cuja parametrização tenha derivada contínua e pontos inicial e final em  $(1, \frac{1}{2})$  e  $(2, 1)$ , respectivamente.<sup>7</sup>
2. Considerando a função  $F(x, y) = (y, x)$ , responda às seguintes questões:<sup>8</sup>
  - (a) Existe alguma função  $f$  diferenciável, com derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  contínuas, tal que  $F = \nabla f$ ?
  - (b) Existe alguma relação entre o teorema fundamental supracitado e o cálculo da integral de linha de  $F$  ao longo de uma curva arbitrária?

## 5.2 Teorema de Green

Seja  $\Gamma$  uma curva parametrizada no sentido anti-horário por  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$  contínua. Considere que  $\Gamma$  é:

- *fechada*, isto é,  $\gamma(a) = \gamma(b)$ ;
- *simples*, isto é,  $\Gamma$  não tem autointerseção;<sup>9</sup>
- $C^1$  *por partes*, isto é, existe uma partição de  $[a, b]$  em um número finito de subintervalos fechados tal que  $\gamma$  tem derivada contínua em cada um desses subintervalos.

Por fim, sejam  $f, g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas com derivadas  $g_x, f_y$  contínuas num domínio  $D = D_{xy}$  aberto cuja fronteira seja a curva  $\Gamma$ . Demonstra-se, assim, a *equação de Green*:

$$\begin{aligned} \iint_D (g_x - f_y) \, dx dy &= \oint_{\Gamma} (f, g) \cdot d\gamma \\ &= \oint_{\Gamma} f dx + g dy. \end{aligned} \tag{5.3}$$

<sup>7</sup>Resolução na seção 5.4.

<sup>8</sup>*Idem*.

<sup>9</sup>Isto é,  $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$  para  $t_1, t_2 \in ]a, b]$  com  $t_1 \neq t_2$ .

O segundo membro da equação (5.3) denota uma integral de linha ao longo de uma curva fechada.

Note que, assim como no teorema fundamental do cálculo, a equação supracitada mostra que a integração de determinadas funções depende apenas da fronteira do conjunto aberto sobre o qual se está integrando.

### Exemplo

Vamos retomar o exercício resolvido que precede a subseção 5.1.2, mas, dessa vez, utilizar o teorema de Green para calcular a integral de linha. Podemos pensar que, naquele exercício, calculamos o valor  $-\frac{1}{8}$  para o segundo membro da equação (5.3), isto é,

$$\oint_{\Gamma} (x^3y^2 + y) \, dx + x \, dy = -\frac{1}{8}.$$

Agora, vamos calcular o primeiro membro da equação de Green usando apenas integração dupla. Portanto, verificar a validade do teorema de Green para essa integral de linha significa obter

$$\iint_D (g_x - f_y) \, dx \, dy = -\frac{1}{8}.$$

Assim, primeiramente, como  $f(x, y) = x^3y^2 + y$  e  $g(x, y) = x$ , segue que  $f_y(x, y) = 2x^3y + 1$  e  $g_x(x, y) = 1$ . Então,

$$\begin{aligned} \iint_D (g_x - f_y) \, dx \, dy &= - \iint_D 2x^3y \, dx \, dy \\ &= - \int_{x=0}^{x=1} \left( \int_{y=x^2}^{y=1} 2x^3y \, dy \right) dx \\ &= - \int_{x=0}^{x=1} [x^3y^2]_{y=x^2}^{y=1} dx \\ &= - \int_{x=0}^{x=1} (x^3 - x^7) dx \\ &= - \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^8}{8} \right]_{x=0}^{x=1} \\ &= -\frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Note que, como visto no exercício supracitado,  $\Gamma$  satisfaz as hipóteses do teorema de Green, isto é,  $\Gamma$  tem sentido anti-horário e é simples, fechada e  $C^1$  por partes.

### Exercícios

1. Utilize o teorema de Green para calcular a integral de linha

$$\int_{\Gamma} (1 + xy^2) \, dx - x^2y \, dy,$$

onde  $\Gamma$  é o arco da parábola  $y = x^2$  cujos pontos inicial e final são  $(-1, 1)$  e  $(1, 1)$ , respectivamente.<sup>10</sup>

---

<sup>10</sup>Resolução na seção 5.4.

2. Utilize o teorema de Green para calcular

$$\oint_{\Gamma} \sqrt{1+x^3} dx + 2xy dy,$$

onde  $\Gamma$  é o triângulo cujos vértices são os pontos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(1, 3)$ , orientado no sentido anti-horário.<sup>11</sup>

### 5.2.1 Cálculo de áreas via integrais de linha

Sejam  $g(x, y) = \frac{x}{2}$  e  $f(x, y) = -\frac{y}{2}$ . Portanto, pelo teorema de Green,

$$\begin{aligned} \alpha(D) &= \iint_D dx dy \\ &= \iint_D (g_x - f_y) dx dy \\ &= \oint_{\Gamma} f dx + g dy \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y dx + x dy \text{ u.a.} \end{aligned} \tag{5.4}$$

#### Exemplos

- A área da elipse  $\Gamma = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$  pode ser calculada pela fórmula (5.4). De fato, parametrizando a elipse por  $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$  com  $t \in [0, 2\pi]$ , a área é dada por

$$\begin{aligned} \alpha(D) &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y dx + x dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -(b \sin t)(-a \sin t) + (a \cos t)(b \cos t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab (\sin^2 t + \cos^2 t) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab dt \\ &= ab\pi \text{ u.a.} \end{aligned}$$

- O valor da integral  $\oint_{\Gamma} xy^2 dx + (x^2y + 2x) dy$  ao longo de qualquer quadrado  $\Gamma$  depende apenas do seu tamanho e não de sua localização no plano. De fato, pelo teorema de Green,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} xy^2 dx + (x^2y + 2x) dy &= \iint_D (2xy + 2 - 2xy) dx dy \\ &= \iint_D 2 dx dy \\ &= 2 \alpha(D). \end{aligned}$$

<sup>11</sup>Resolução na seção 5.4.

## Exercício

Utilize o teorema de Green para calcular a área da elipse cuja fronteira  $\Gamma$  é dada pela equação  $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ .<sup>12</sup>

### 5.2.2 De Green para Stokes

Na equação (5.3), página 176, tanto o campo vetorial  $F = (f, g)$  quanto a região  $D$  são planares. Se quisermos que sejam espaciais, podemos reescrever o campo e a região, respectivamente, por

$$F = (f, g, 0) \text{ e } S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D, z = 0\}.$$

Nesse caso, o *rotacional* de  $F$  é um vetor dado por

$$\begin{aligned} \nabla \times F &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f & g & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) \vec{k}. \end{aligned}$$

Assim, como  $\vec{k} \cdot \vec{k} = 1$ , temos o produto interno

$$(\nabla \times F) \cdot \vec{k} = g_x - f_y,$$

que é exatamente o integrando da integral do primeiro membro de (5.3). Ainda em relação a essa integral, denote a área infinitesimal  $dx dy$  por  $dS$ . Agora, na integral de linha do segundo membro de (5.3), denote a curva  $\Gamma$  (que representa a fronteira de  $S = D \times \{0\}$ ) por  $\partial S$  e o diferencial  $dy$  por  $ds$ , que aqui representa o comprimento infinitesimal da curva que delimita a região  $S$ . Portanto, a equação (5.3) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot \vec{k} \, dS = \oint_{\partial S} F \cdot ds. \quad (5.5)$$

Em outras palavras, a integral de linha do campo vetorial planar  $F$  ao longo da fronteira  $\partial S$  é igual à integral dupla (da única coordenada não nula) do rotacional de  $F$  sobre a superfície planar  $S$ . Dessa forma, o teorema de Green é simplesmente o *teorema de Stokes* no plano. Faremos, então, cinco modificações para converter o teorema de Green numa versão mais geral do teorema de Stokes:

- I. No lugar de  $F$  e  $S$  usadas na equação (5.5), considere o campo vetorial  $F = (f, g, h)$  e seja  $S$  uma superfície de  $\mathbb{R}^3$  que tenha vetor normal em cada um de seus pontos. Por exemplo, é possível que  $S$  seja o gráfico de uma função  $z = z(x, y)$  diferenciável adequada. Existe ainda a possibilidade de que  $S$  seja uma superfície de nível  $c$  representada pela equação  $w(x, y, z) = c$  com  $w$  diferenciável. Como sabemos, tais superfícies têm seus vetores normais  $\vec{n} = \vec{n}(x, y, z)$  dados por

$$\pm (-z_x, -z_y, 1) \text{ e } \pm (w_x, w_y, w_z),$$

respectivamente.

---

<sup>12</sup>Resolução na seção 5.4.

II. Considere que a fronteira  $\partial S$  seja uma curva contida em algum plano em  $\mathbb{R}^3$ .<sup>13</sup> A orientação da curva é determinada pela *regra da mão direita*, isto é, ao fazer o sinal de positivo com a mão direita, imagine que o vetor normal ao plano que contenha a curva  $\partial S$ , denotado por  $\vec{n}$ , esteja apontado na direção do polegar da mão direita. Além disso, considere que o sentido de percurso de  $\partial S$  seja o mesmo dos outros dedos da mão direita ao se curvarem para tocar a palma da mão e concluir o sinal de positivo. Assim, a curva tem sentido anti-horário em relação ao plano que a contém. Ainda, os vetores normais  $\vec{n}$  (do item I) devem apontar para o mesmo semiespaço (delimitado pelo plano que contém  $\partial S$ ) para o qual  $\vec{n}$  aponta.<sup>14</sup>

III. Considere agora o rotacional

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ f & g & h \end{vmatrix} \\ &= (h_y - g_z)\vec{i} + (f_z - h_x)\vec{j} + (g_x - f_y)\vec{k}, \end{aligned}$$

mais geral do que aquele usado em (5.5).

IV. Troque  $\vec{k}$  de (5.5) pelo vetor  $\vec{n}(x, y, z)$  normal a  $S$  (do item I).

V.  $\vec{n} dS$  agora representa uma combinação linear adequada cujos termos são múltiplos escalares dos três elementos de área:  $dx dy$ ,  $dx dz$  e  $dy dz$ .<sup>15</sup>

Portanto, temos a *equação de Stokes*, dada por

$$\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{n} dS. \quad (5.6)$$

### Exercício resolvido

Se  $F(x, y, z) = (3y, 4z, -6x)$  está definida no parabolóide  $S = \{(x, y, z) \mid z = 16 - x^2 - y^2 \geq 0\}$ , verifique a validade da equação de Stokes, calculando os dois membros de (5.6).

#### RESOLUÇÃO

Note que  $\partial S$  é a circunferência de centro  $(0, 0, 0)$  e raio 4, percorrida no sentido anti-horário.<sup>16</sup> Logo, por um lado, parametrizando  $\partial S$  por  $s(t) = (4 \cos t, 4 \sin t, 0)$  com  $t \in [0, 2\pi]$ , a integral

$$dS \in \{dx dy, dx dz, dy dz\}.$$

<sup>16</sup> $\vec{n} = \vec{k}$ .

<sup>13</sup>Uma parametrização  $s$  dessa curva tem três componentes:  $s(t) = (x(t), y(t), z(t))$ .

<sup>14</sup>Em relação a (5.5), tanto  $\vec{n}(x, y, z)$ , para cada  $(x, y, z) \in S$ , quanto  $\vec{n}$ , são iguais ao vetor  $\vec{k}$ .

<sup>15</sup>Aqui, não abordaremos *parametrização de superfície*. Como consequência, os nossos problemas têm apenas curvas  $\partial S$  contidas em planos paralelos aos planos coordenados (OXY, OXZ e OYZ) e, nesse caso,

de linha do primeiro membro de (5.6) é dada por

$$\begin{aligned}\oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(s(t)) \cdot s'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (12 \operatorname{sen} t, 0, -24 \cos t) \cdot (-4 \operatorname{sen} t, 4 \cos t, 0) dt \\ &= -48 \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2 t dt \\ &= -48\pi.\end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\nabla \times \mathbf{F} = (-4, 6, -3) \quad \text{e} \quad \vec{n} = (-z_x, -z_y, 1) = (2x, 2y, 1),$$

a integral dupla do segundo membro de (5.6) é dada por

$$\begin{aligned}\iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{n} dS &= \iint_{D_{xy}} (-4, 6, -3) \cdot (2x, 2y, 1) dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} (-8x + 12y - 3) dx dy \\ &= \iint_{D_{r,\theta}} (-8r \cos \theta + 12r \operatorname{sen} \theta - 3) r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[ \int_0^4 (-8r^2 \cos \theta + 12r^2 \operatorname{sen} \theta - 3r) dr \right] d\theta \\ &= -48\pi.\end{aligned}$$

## Exercícios

1. Seja  $\Gamma$  a curva parametrizada por  $x(t) = 0$ ,  $y(t) = 2 + 2 \cos t$  e  $z(t) = 2 + 2 \operatorname{sen} t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Utilize o teorema de Stokes para calcular a seguinte integral de linha:

$$\oint_{\Gamma} x^2 e^z dx + x \operatorname{sen} y dy + 3y dz.^{17}$$

2. Sejam  $F(x, y, z) = (-y, x, z)$  e  $S$  a parte do parabolóide  $z = 7 - x^2 - 4y^2$  acima do plano  $z = 3$ , orientada com vetores normais apontando para cima. Utilize o teorema de Stokes para calcular a seguinte integral de linha:

$$I = \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \vec{n} dS.^{18}$$

## Considerações finais

Como antecipado na seção 1.1, este capítulo é bastante resumido, tanto em relação aos resultados apresentados, quanto aos exercícios propostos. Portanto, sugiro que o leitor também tente resolver exercícios sobre os teoremas de Green e Stokes em outros livros de cálculo. Além disso,

<sup>17</sup>Resolução na seção 5.4.

<sup>18</sup>*Idem.*

é recomendável complementar os estudos dessa parte mais básica do cálculo vetorial, buscando informações sobre o *teorema da divergência*, também chamado *teorema de Gauss*, que estabelece uma relação entre a integral do *divergente* de um campo vetorial  $F$  sobre uma região e a integral de  $F$  sobre a fronteira da região. Para essa parte do conteúdo, recomendo os livros de Belding e Mitchell (2008) e Marsden e Tromba (2004).

## 5.3 Formulário do cálculo vetorial<sup>19</sup>

1. Integral de linha de  $F = (f, g)$  ao longo de  $\Gamma$  parametrizada por  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ :

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} F \cdot d\gamma &= \int_{\Gamma} f dx + g dy \\ &= \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.\end{aligned}$$

2. Teorema fundamental do cálculo para integrais de linha:

$$\int_{\Gamma} \nabla f \cdot d\gamma = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

3. Equação de Green:

$$\begin{aligned}\iint_D (g_x - f_y) dx dy &= \oint_{\Gamma} (f, g) \cdot d\gamma \\ &= \oint_{\Gamma} f dx + g dy,\end{aligned}$$

onde  $D = D_{xy}$  é aberto com fronteira dada por  $\Gamma$ .

4. Área de  $D$  via integral de linha:

$$\begin{aligned}a(D) &= \iint_D dx dy \\ &= \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} -y dx + x dy \text{ u.a.}\end{aligned}$$

5. Equação de Stokes:

$$\oint_{\partial S} F \cdot ds = \iint_S (\nabla \times F) \cdot \vec{n} dS,$$

onde a superfície  $S$  tem fronteira  $\partial S$ , orientação positiva e versor normal  $\vec{n}$  dependendo de seus pontos.

---

<sup>19</sup>Fórmulas válidas para funções e curvas sujeitas a hipóteses estabelecidas neste capítulo.

## 5.4 Exercícios resolvidos de cálculo vetorial

1. Se uma força é dada por  $F(x, y) = (0, x)$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , calcule

$$\tau = \int_{\Gamma} F \cdot d\gamma,$$

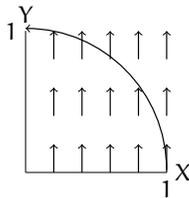
o trabalho realizado por  $F$  ao longo da curva  $\Gamma$ , representada pela parte da circunferência unitária que se encontra no primeiro quadrante, orientada no sentido anti-horário. Ainda, como  $\tau$  não depende da parametrização da curva, desde que sua orientação seja respeitada, calcule a integral com as seguintes parametrizações  $\gamma(t)$  de  $\Gamma$ :

(a)  $(\cos t, \sin t)$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ;

(b)  $(\sqrt{1-t^2}, t)$ ,  $t \in [0, 1]$ .

### RESOLUÇÃO

Inicialmente, considere a seguinte ilustração do campo de forças atuando ao longo da curva, representando a direção e o sentido da força, mas não o seu módulo.



(a) Como  $\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$ ,  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ , temos

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ t + \frac{\sin 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - 0 \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \text{ u.t. (unidades de trabalho).} \end{aligned}$$

(b) Como  $\gamma'(t) = \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, 1\right)$ ,  $t \in [0, 1]$ , temos

$$\begin{aligned} \tau &= \int_0^1 F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 (0, \sqrt{1-t^2}) \cdot \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}, 1\right) dt \\ &= \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u} \cos u du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 u} \cos u du \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u du \\ &= \frac{\pi}{4} \text{ u.t.} \end{aligned}$$

Note que, na quarta igualdade, de cima para baixo, usamos a mudança de variáveis  $t = \sin u$ ,  $dt = \cos u du$ . Na última igualdade, de cima para baixo, a integral é resolvida como no item (a).

2. Calcule  $\int_{\Gamma} \nabla f \cdot d\gamma$  para  $f(x, y) = \cos(xy\pi)$  e qualquer curva  $\Gamma$  cuja parametrização tenha derivada contínua e pontos inicial e final em  $(1, \frac{1}{2})$  e  $(2, 1)$ , respectivamente.

RESOLUÇÃO

Não é necessário explicitar a curva  $\Gamma$  que conecta os pontos  $A = (1, \frac{1}{2})$  e  $B = (2, 1)$ . De fato, devido às condições enunciadas no exercício e ao teorema fundamental da subseção 5.1.2, a função  $f$  e os pontos  $A$  e  $B$  são os dados necessários para a integral ser calculada. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \nabla f \cdot d\gamma &= f(B) - f(A) \\ &= f(2, 1) - f\left(1, \frac{1}{2}\right) \\ &= \cos(2\pi) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 1 - 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

3. Considerando a função  $F(x, y) = (y, x)$ , responda às seguintes questões:

- (a) Existe alguma função  $f$  diferenciável, com derivadas parciais  $f_x$  e  $f_y$  contínuas, tal que  $F = \nabla f$ ?
- (b) Existe alguma relação entre o teorema fundamental da subseção 5.1.2 e o cálculo da integral de linha de  $F$  ao longo de uma curva arbitrária?

RESOLUÇÃO

- (a) Note que, para  $f(x, y) = xy$ ,  $F = \nabla f$ .  
 (b) Pelo teorema supracitado, a integral

$$\int_{\Gamma} y dx + x dy$$

é independente da curva  $\Gamma$  escolhida para conectar seus pontos extremos, desde que a curva tenha parametrização com derivada contínua.

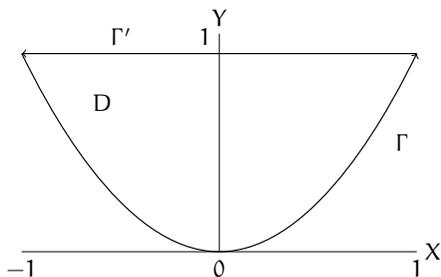
4. Utilize o teorema de Green para calcular a integral de linha

$$\int_{\Gamma} (1 + xy^2) dx - x^2 y dy$$

onde  $\Gamma$  é o arco da parábola  $y = x^2$  cujos pontos inicial e final são  $(-1, 1)$  e  $(1, 1)$ , respectivamente.

RESOLUÇÃO

A integral de linha pode ser calculada diretamente, sem utilizarmos o teorema de Green, se considerarmos a parametrização de  $\Gamma$  dada por  $\gamma(t) = (t, t^2)$ ,  $t \in [-1, 1]$ . Entretanto, para calculá-la como requerido no enunciado da questão, devemos obter uma curva  $\Gamma'$  tal que  $\Gamma \cup \Gamma'$  seja fechada. O modo mais direto é considerar  $\Gamma'$  como o segmento de reta com pontos inicial e final em  $(1, 1)$  e  $(-1, 1)$ , respectivamente. Na ilustração seguinte, são representadas  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  e a região  $D$  limitada por  $\Gamma \cup \Gamma'$ , orientada no sentido anti-horário.



Desse modo, para  $f(x, y) = 1 + xy^2$  e  $g(x, y) = -x^2 y$ , temos  $f_y = 2xy$  e  $g_x = -2xy$ .

Além disso, aplicando o teorema de Green a  $D$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \oint_{\Gamma \cup \Gamma'} f dx + g dy &= \iint_D (g_x - f_y) dx dy \\
 &= \iint_D (-4xy) dx dy \\
 &= -2 \int_{x=-1}^{x=1} \left( \int_{y=x^2}^{y=1} 2xy dy \right) dx \\
 &= -2 \int_{x=-1}^{x=1} [xy^2]_{y=x^2}^{y=1} dx \\
 &= -2 \int_{x=-1}^{x=1} (x - x^5) dx \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Agora, parametrizando  $\Gamma'$  por  $(x(t), y(t)) = (-t, 1)$ ,  $t \in [-1, 1]$ , obtemos

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma'} (1 + xy^2) dx - x^2 y dy &= \int_{-1}^1 [(1-t)(-1) - t^2 \cdot 0] dt \\
 &= \int_{-1}^1 (t-1) dt \\
 &= \left[ \frac{t^2}{2} - t \right]_{-1}^1 \\
 &= -2.
 \end{aligned}$$

Por fim, observe que

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma} (1 + xy^2) dx - x^2 y dy &= \oint_{\Gamma \cup \Gamma'} (1 + xy^2) dx - x^2 y dy - \int_{\Gamma'} (1 + xy^2) dx - x^2 y dy \\
 &= 0 - (-2) \\
 &= 2.
 \end{aligned}$$

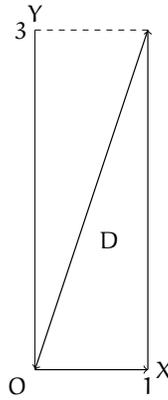
5. Utilize o teorema de Green para calcular a integral

$$\oint_{\Gamma} \sqrt{1+x^3} dx + 2xy dy,$$

onde  $\Gamma$  é o triângulo cujos vértices são os pontos  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$  e  $(1, 3)$ , orientado no sentido anti-horário.

RESOLUÇÃO

A região  $D$  delimitada por  $\Gamma$  está representada na seguinte ilustração:



$\Gamma$  é a união de três segmentos orientados, que podem ser facilmente parametrizados. Não é possível calcular diretamente a integral de linha, pois

$$\int \sqrt{1+t^3} dt$$

não tem solução analítica. Contudo, o teorema de Green converte a integral de linha numa integral dupla sobre  $D$ , que tem solução analítica. Assim, sejam  $f(x, y) = \sqrt{1+x^3}$  e  $g(x, y) = 2xy$ . Então,  $f_y = 0$  e  $g_x = 2y$ . Portanto,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} f dy + g dx &= \iint_D (g_x - f_y) dx dy \\ &= \iint_D 2y dx dy \\ &= \int_{x=0}^{x=1} \left( \int_{y=0}^{y=3x} 2y dy \right) dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} [y^2]_{y=0}^{y=3x} dx \\ &= \int_{x=0}^{x=1} 9x^2 dx \\ &= [3x^3]_{x=0}^{x=1} \\ &= 3. \end{aligned}$$

6. Utilize o teorema de Green para calcular a área da elipse cuja fronteira  $\Gamma$  é dada pela equação  $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$ .

RESOLUÇÃO

$x(t) = 2 \cos t + 1$  e  $y(t) = 3 \sin t + 2$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , é uma parametrização para a elipse dada. Portanto, como  $x'(t) = -2 \sin t$  e  $y'(t) = 3 \cos t$  para todo  $t$  em  $[0, 2\pi]$ , a área da

elipse pode ser calculada do seguinte modo:

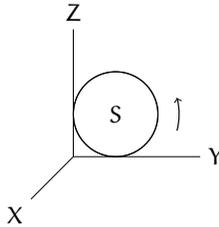
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \oint_{\Gamma} x dy - y dx &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(2 \cos t + 1)(3 \cos t) - (3 \sin t + 2)(-2 \sin t)] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [6(\cos^2 t + \sin^2 t) + 3 \cos t + 4 \sin t] dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ 6 \int_0^{2\pi} 1 dt + 3 \int_0^{2\pi} \cos t dt + 4 \int_0^{2\pi} \sin t dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 6 [t]_0^{2\pi} + 3 [\sin t]_0^{2\pi} + 4 [-\cos t]_0^{2\pi} \right\} \\ &= 6\pi \text{ u.a.} \end{aligned}$$

7. Seja  $\Gamma$  a curva parametrizada por  $x(t) = 0$ ,  $y(t) = 2 + 2 \cos t$  e  $z(t) = 2 + 2 \sin t$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Utilizando o teorema de Stokes, calcule a seguinte integral de linha:

$$\oint_{\Gamma} x^2 e^z dx + x \sin y dy + 3y dz.$$

#### RESOLUÇÃO

As equações paramétricas dadas descrevem a circunferência de centro  $(2, 2)$  e raio 2 no plano  $OYZ$ , como ilustrada a seguir.



Nessa ilustração, consideramos  $S$  como o círculo limitado por  $\Gamma = \partial S$ . Então,  $\vec{n} = (1, 0, 0)$  e, pelo teorema de Stokes,

$$\oint_{\partial S} (x^2 e^z, x \sin y, 3y) \cdot ds = \iint_S [\nabla \times (x^2 e^z, x \sin y, 3y)] \cdot (1, 0, 0) dS.$$

Assim, como a primeira componente do rotacional é dada por  $h_y - g_z = 3 - 0$ ,<sup>20</sup> a integral do segundo membro é calculada por

$$3 \iint_S dS = 12\pi \text{ u.a.,}$$

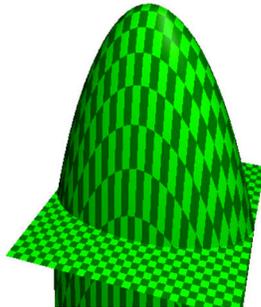
isto é, o triplo da área de  $S$ .

8. Sejam  $F(x, y, z) = (-y, x, z)$  e  $S$  a parte do parabolóide  $z = 7 - x^2 - 4y^2$  acima do plano  $z = 3$  e orientada com vetores normais apontando para cima, como ilustrada na figura 5.1. Utilize o teorema de Stokes para calcular a seguinte integral:

$$I = \iint_S (\nabla \times F) \cdot \vec{n} dS.$$

<sup>20</sup> $g(x, y, z) = x \sin y$  e  $h(x, y, z) = 3y$ .

Figura 5.1:  $S$ , com  $OZ$  como eixo de rotação, acima do plano  $z = 3$ ,  $x, y \in [-2, 2]$



#### RESOLUÇÃO

Para obtermos  $\Gamma = \partial S$ , consideremos  $7 - x^2 - 4y^2 = 3$ , isto é, a elipse  $x^2 + 4y^2 = 4$ , que pode ser parametrizada por  $\gamma(t) = (2 \cos t, \text{sen } t, 3)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ . Essa curva é positivamente orientada quando vista de cima. Então, pelo teorema de Stokes, segue que

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\boldsymbol{\gamma} \\ &= \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\gamma(t)) \cdot \boldsymbol{\gamma}'(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\text{sen } t, 2 \cos t, 3) \cdot (-2 \text{sen } t, \cos t, 0) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (2 \text{sen}^2 t + 2 \cos^2 t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} 2 dt \\ &= 4\pi. \end{aligned}$$

## Referências

- ÁVILA, Geraldo. *Cálculo de funções de várias variáveis*. 7. ed. São Paulo: LTC, 2006.
- BELDING, David; MITCHELL, Kevin. *Foundations of Analysis*. 2. ed. New York: Dover, 2008.
- BOULOS, Paulo; ABUD, Zara. *Cálculo diferencial e integral*. ed. rev. e ampl. São Paulo: Makron Books, 2006. v. 2.
- FLEISCH, Daniel. *A Student's Guide to Maxwell's Equations*. 1. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.
- GONICK, Larry. *Cálculo em quadradinhos*. São Paulo: Edgard Blücher, 2014.
- MARSDEN, Jerrold; TROMBA, Anthony. *Cálculo vectorial*. 5. ed. Boston: Pearson: Addison Wesley, 2004.
- RIBEIRO, Ademir Alves; BARBOSA, José Renato Ramos. How to Correctly Answer 'Is the Optimal Critical Point a Local Minimizer?' in Calculus Courses. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 53, p. 1664-1675, 2021.



série  
**didática**



9 786598 057558