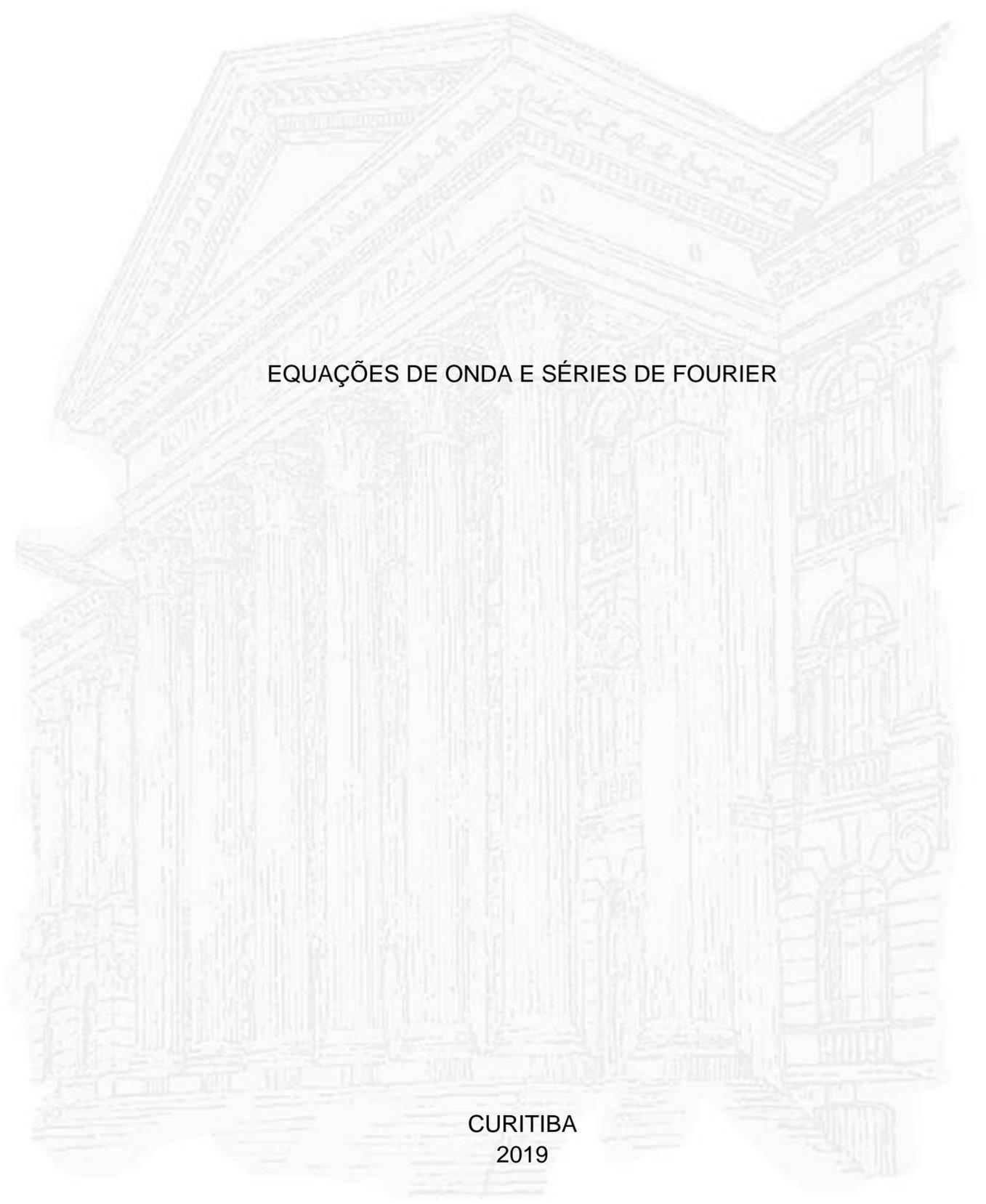


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LEONARDO MUNHOZ BENITES

EQUAÇÕES DE ONDA E SÉRIES DE FOURIER

CURITIBA
2019



LEONARDO MUNHOZ BENITES

EQUAÇÕES DE ONDA E SÉRIES DE FOURIER

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Higidio Portillo Oquendo

CURITIBA

2019

Mais do que agradecer, eu dedico este trabalho inteiramente à minha família, minha mãe Lina Mar, minha irmã e irmãos Simone, Christian e Ricardo, as pessoas que mais amo no mundo, minha sobrinha Pyetra, anjo da minha vida e ao meu pai Leonel, que sempre estará em minhas lembranças e em meu coração.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente ao orientador Prof. Dr. Higídio pela paciência, compreensão e pelo aprendizado que me proporcionou. Sei que devo ter dado bastante trabalho, por isso sou imensamente grato pela preocupação, por seus conselhos e por me fazer sempre melhorar.

Aos demais professores do curso por todo ensinamento, em especial ao Prof. Dr. Cleber por aceitar compor a banca examinadora, tenho imenso respeito a todos e também pela instituição.

Aos colegas que conheci na graduação, obrigado por estarem presente, por ouvirem meus desabafos, preocupações e reclamações. Obrigado pelos momentos de riso que tornaram mais leves esses anos de estudo.

Ao meu amigo Frederico, pelos nossos anos de amizade, não tenho palavras pra agradecer o quanto fez por mim aqui em Curitiba. Sei que posso contar contigo em todos os momentos, agradeço por me entender, me ouvir e saber sempre o que dizer, obrigado por não desistir de mim.

Por fim, agradeço à minha família, as pessoas mais importantes do meu mundo, que me apoiam, me motivam, me aconselham e sempre me fazem feliz. Com certeza o mais difícil de toda essa caminhada foi ficar longe de vocês, senti saudade de casa, das nossas risadas, abraços, conselhos e até das nossas brigas hahaha. Obrigado à minha irmã pelo tempo que moramos juntos em Curitiba, esse tempo foi muito importante pra eu conseguir me adaptar na cidade, agradeço aos meus irmãos por segurarem as pontas em casa enquanto eu estou aqui e por cuidarem da mãe esse tempo todo. Por fim, agradeço à ela, minha maior inspiração de vida, obrigado mãe por ter me tornado quem sou, devo tudo a você e também ao pai, queria que ele estivesse com a gente nesse momento, sei que ele também estaria orgulhoso. Peço desculpas a vocês pelos momentos de ausência por conta da faculdade, vocês são tudo pra mim, graças a vocês estou concluindo esta etapa e também é por vocês que estou fazendo tudo isso, obrigado, amo muito vocês!!

RESUMO

As equações de onda são um dos exemplos mais práticos de Equações Diferenciais Parciais, estando presentes em estudos de diversas áreas da ciência. Em nosso meio, podemos facilmente encontrar as ondas na música que ouvimos, na televisão, no celular e microondas que usamos ou ainda nas próprias ondas do mar. Em vista disso, este trabalho buscou detalhadamente obter soluções para problemas envolvendo equações de onda, além da análise da convergência e regularidade destas soluções. De maneira geral, os problemas de ondas apresentam a equação de ondas a ser resolvida juntamente com algumas características que denominamos condições de contorno e iniciais. Em nosso estudo, encontramos, via separação de variáveis, a solução formal do problema linear e homogêneo, garantindo na sequência as condições adicionais. Isto nos levou a obter soluções em uma forma específica de séries trigonométricas, conhecidas como séries de Fourier. A utilização da teoria de Fourier nos possibilitou garantir soluções bem definidas e que, além disso, possam ser aplicadas aos teoremas de convergência conhecidos na literatura básica, como as desigualdades de Young e de Bessel e o clássico M-Teste de Weierstrass. Com nossas experimentações, fomos capazes de resolver o problema geral de equações de ondas, comprovar a convergência das soluções e ainda constatar a existência de uma relação direta entre a regularidade dessas soluções e a regularidade das condições iniciais. Ao longo do estudo, formalizamos os resultados na forma de teoremas e corolários, fazendo as respectivas generalizações, e também conseguimos ampliar nosso trabalho apresentando a resolução de problemas de ondas no caso bidimensional. Ao final, concluímos que as séries de Fourier, em suas diversas formas, são ferramentas eficientes para a obtenção de soluções explícitas para os problemas de ondas, tanto no caso unidimensional como no caso das membranas em suas diferentes geometrias.

Palavras-chave: equações de onda, regularidade de soluções, séries de Fourier.

ABSTRACT

Wave equations are one of the most practical examples of Partial Differential Equations, being present in studies of several areas among science. In our ambient, we can easily find waves in music we hear, television, cell phones and microwaves we use or even at the sea waves themselves. Thus, this work sought to reach, in detail, solutions to problems involving wave equations, besides the analysis of the convergence and regularity of these solutions. In general, wave problems present the wave equation to be solved, along with some characteristics that we denominate boundary and initials conditions. In our study, we found, via separation of variables, the formal solution of the linear and homogeneous problem, consequently verifying the additional conditions. This led us to obtain solutions in a specific form of trigonometric series, known as Fourier series. The use of Fourier's theory has allowed us to guarantee well-defined solutions and, in addition, can be applied to convergence theorems known in the basic literature, such as the inequalities of Young and Bessel and the classic Weierstrass M-Test. With our experiments, we were able to solve the general problem of wave equations, proving the convergence of the solutions and also verifying the existence of a direct relationship between the regularity of these solutions and the regularity of the initials conditions. Throughout the study, we formalized the results in theorems and corollaries, making the respective generalizations, and we have also been able to expand our work by presenting wave solving in the two-dimensional case. Finally, we conclude that Fourier series, in their various forms, are efficient tools to obtain explicit solutions for wave problems, both in the one-dimensional case and in the case of membranes in their different geometries.

Keywords: Fourier series, regularity of solutions, wave equations.

Sumário

1	Introdução - Equações Diferenciais Parciais	3
2	Equação de Ondas	4
2.1	Tipos de Ondas	4
2.2	Dedução da Equação de Ondas Unidimensional	5
3	Solução Formal da Equação de Ondas	7
3.1	Problema de Ondas Unidimensional	7
3.2	Candidata à Solução do Problema de Ondas	8
4	Sequências e Séries de Funções	11
4.1	Convergência de Sequências de Funções	12
4.2	Convergência de Séries de Funções	14
5	Séries de Fourier	18
5.1	Introdução às Séries de Fourier	18
5.2	Relações de Ortogonalidade	19
5.3	Coeficientes de Fourier	20
5.4	Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares	21
5.5	Convergência de Séries de Fourier	23
5.5.1	Convergência Pontual	27
5.5.2	Convergência Uniforme	32
5.6	Integração de Séries de Fourier	36
6	Análise de Convergência e Regularidade das Soluções	40
6.1	Resultado Prévio	40
6.2	Estudo de Convergência e Regularidade	43
7	Estudo do Caso Bidimensional	47
7.1	Dedução da Equação de Ondas Bidimensionais	47
7.2	Problema de Ondas em Membranas Retangulares	49
7.3	Ondas em Membranas Circulares	57
7.3.1	Laplaciano em Coordenadas Polares	57
7.3.2	Problema das Membranas Circulares de Simetria Radial	59
7.3.3	Equação de Bessel de Ordem Zero	60

7.3.4	Solução do Problema das Membranas Circulares de Simetria Radial	64
7.3.5	Problema das Membranas Circulares de Simetria Não-Radial	71
7.3.6	Equação de Bessel de Ordem σ	72
7.3.7	Solução do Problema das Membranas Circulares Simetria Não-Radial	75
8	Conclusões	76
9	Referências Bibliográficas	77

1 Introdução - Equações Diferenciais Parciais

Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma equação que envolve uma função desconhecida (que geralmente depende de duas ou mais variáveis) e suas derivadas parciais. A ordem de uma EDP é o maior valor numérico dentre as ordens dessas derivadas parciais, por exemplo, uma equação diferencial parcial de 2ª ordem cuja função incógnita depende das variáveis x e y é da forma:

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$

O interesse em se estudar equações deste tipo é devido à sua vasta aplicabilidade, principalmente em problemas de Modelagem Física, como os citados por Evans (2010):

1. *Equações de Laplace e de Poisson:* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$, respectivamente, temos u como o potencial eletrostático ou distribuição de temperatura numa placa, o qual independe do tempo;
2. *Equação da Transferência de Calor:* $\frac{\partial u}{\partial t} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t)$, onde u denota a distribuição de temperatura, $\beta > 0$ o coeficiente de condutividade térmica e f uma fonte de calor;
3. *Equação de Ondas:* $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x)$, aqui u equivale a oscilação de uma corda elástica, $\beta > 0$ é o coeficiente de elasticidade da corda e f uma força de controle aplicada na corda.

Além disso, uma EDP é dita *linear* se essa equação é expressa como uma dependência linear da função incógnita e suas derivadas parciais, o que acontece com todos os exemplos apresentados acima. Outra definição que precisamos conhecer é a função *solução* de uma EDP, que será aquela função que satisfaz a equação, para todo ponto do domínio da função. Para exemplificar temos que $z = e^x \cosh(\sqrt{\beta}t)$ é solução da equação de ondas linear e homogênea (isto é, $f = 0$), pois

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - \beta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial t} [\sqrt{\beta} e^x \sinh(\sqrt{\beta}t)] - \beta \frac{\partial}{\partial x} [e^x \cosh(\sqrt{\beta}t)] = 0, \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Este exemplo mostra apenas um caso particular de solução, ao longo deste trabalho buscaremos ferramentas para encontrar uma candidata a solução geral dessa EDP específica. Assim, revelamos que o foco deste trabalho será a equação de ondas e, por esse motivo, vamos apresentar agora uma pequena contextualização dela para o leitor familiarizar-se com nosso objeto de estudo.

2 Equação de Ondas

2.1 Tipos de Ondas

Ondas são movimentos oscilatórios que se propagam no espaço, causadas por alguma perturbação. Elas estão presentes de diversas formas no nosso meio: seja nos mares durante a prática do surfe, na música que ouvimos, na televisão e no microondas que usamos. Para Halliday (2012), devido a esta grande variedade de formas, as ondas são divididas em três tipos principais:

1. *Ondas mecânicas*: aquelas que existem em meios materiais, como água, ar e rochas. São as mais conhecidas, como por exemplo as ondas do mar, sonoras e as sísmicas;
2. *Ondas eletromagnéticas*: não precisam de um meio material para existir, pois podem ser produzidas no vácuo. Apesar de comumente usadas, são menos conhecidas, como as ondas de rádio/televisão/microondas, luz ultravioleta, raio-X e radar;
3. *Ondas de matéria*: estão associadas às partículas elementares e moleculares, como os elétrons e prótons. São mais utilizadas em laboratórios e recebem esse nome porque essas ondas são pensadas como elementos de matéria.

Neste trabalho restringiremos o estudo para a mais habitual das ondas mecânicas, as que se propagam em cordas, entendendo-se aqui corda como um fio fino e flexível. Vamos descrever o movimento com um exemplo prático, digamos que duas pessoas (a *fonte*) estejam segurando extremidades opostas de uma corda (o *meio*), se uma delas movimentar sua extremidade para cima e volta à posição original, a essa perturbação chamamos de

pulso, esse pulso forma uma curva na corda, que vai se propagando devido à tensão presente no meio, aos movimentos oscilatórios dessa curva chamamos de *ondas*. Além disso, o trabalho se limitará a este tipo de oscilações, que recebem a denominação *ondas transversais* pois a perturbação que as geram é um movimento vertical, já a propagação é no sentido horizontal, ou seja, em direções perpendiculares.

2.2 Dedução da Equação de Ondas Unidimensional

Como já vimos, a equação de ondas é dada por uma EDP, nesta seção mostraremos a dedução da equação unidimensional feita por Zill (2001). Consideremos uma corda de comprimento L , que durante o estado de equilíbrio coincide com o eixo das abscissas de um sistema cartesiano. Quando a corda começa a vibrar, cada ponto da corda parte do equilíbrio e se desloca ao longo dela, representemos por $u(x, t)$ esse deslocamento transversal de cada ponto, no instante t ; logo, os movimentos se darão ao longo do eixo xu .

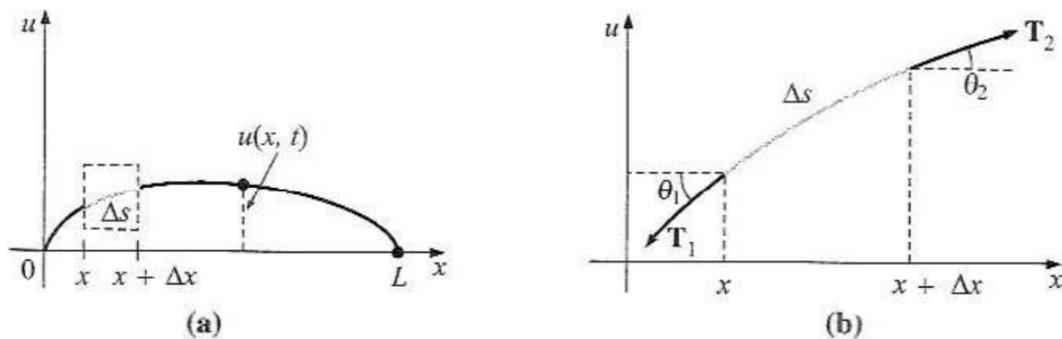


Figura 1: Representação do movimento em (a) corda e (b) segmento. Fonte: Zill (2001).

Vamos supor que em determinado instante t a corda apresenta a configuração do item (a) da Figura 1 e consideremos também o segmento do item (b) que se deformou num arco de curva. Precisamos de hipóteses adicionais para continuar fundamentando nosso resultado: a corda deve ser perfeitamente flexível e homogênea (isto é, massa por unidade de comprimento constante), a única força externa que atua sobre o meio é a tensão, as amplitudes u das oscilações e suas derivadas são pequenas em relação ao comprimento da corda e também é pequena a inclinação da curva em todos os pontos.

No lado direito da imagem vemos que as tensões T_1 e T_2 atuam tangencialmente aos extremos do segmento. Observe que, a partir dos ângulos, temos as seguintes componentes horizontais das tensões T_1 e T_2 :

$$T_{x,1} = |T_1| \cos(\theta_1) \quad e \quad T_{x,2} = |T_2| \cos(\theta_2).$$

Como citado, θ_1 e θ_2 são na prática tão pequenos que o valor de seus cossenos são extremamente próximos de 1. Com isto, obtemos que $T_{x,1} \approx -T_{x,2}$ e, conseqüentemente, a força horizontal resultante é praticamente nula. Analisando agora as forças verticais, teremos que o seno dos ângulos terá seu valor aproximadamente igual ao da tangente (pois já citamos que os cossenos são próximos de 1), logo a resultante da força vertical que atua no arco Δs é:

$$\begin{aligned} T_{y,R} &= |T_2| \sin(\theta_2) + |T_1| \sin(\theta_1) \\ &\approx T \operatorname{tg}(\theta_2) - T \operatorname{tg}(\theta_1) \\ &= T \left[\frac{\partial}{\partial x} u(x + \Delta x, t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right]. \end{aligned}$$

Aplicando agora a Segunda Lei de Newton, onde “a força resultante F_R que atua sobre um corpo é proporcional ao produto da massa pela aceleração por ele adquirida”. Juntando o fato da tensão ser a única força atuante no meio, com a relação da densidade linear $\rho = \frac{m}{\Delta x}$, então obtemos:

$$T \left[\frac{\partial}{\partial x} u(x + \Delta x, t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) \right] = m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

isto é

$$\frac{T}{\rho} \left[\frac{\frac{\partial}{\partial x} u(x + \Delta x, t) - \frac{\partial}{\partial x} u(x, t)}{\Delta x} \right] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Agora tomemos acima o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, pela definição de derivada, no lado

esquerdo da igualdade aparece $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ e esta expressão se descreve como:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{onde} \quad \beta = \frac{T}{\rho} > 0.$$

Encontramos deste modo a equação que buscávamos, que é uma EDP linear e de 2ª ordem, onde estão contidas as variáveis $t > 0$, $x \in [0, L]$ variável espacial e a constante $\beta > 0$. Uma das características que difere a equação de ondas da equação do calor é que, nas condições de trabalho ideais, as ondas não se estabilizam, ou seja, não ocorre $u \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$, portanto o movimento oscilatório segue indefinidamente.

3 Solução Formal da Equação de Ondas

3.1 Problema de Ondas Unidimensional

Anteriormente deduzimos a equação, agora vamos realizar o estudo da existência de soluções. Abaixo segue um exemplo prático, também relatado por Zill (2001), do problema de ondas homogêneo, aquele que possui apenas a tensão como força atuante na corda:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in [0, L], \quad t \geq 0 \\ u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, & \forall t \geq 0 \\ u(x, 0) = w_0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = w_1(x), & \forall x \in [0, L] \end{cases}$$

onde w_0 e w_1 são funções dadas e $u(x, t)$ representa a posição da corda dependendo das variáveis x e t , conforme visto anteriormente.

Na primeira linha do problema consta-se a equação de ondas a ser resolvida, igual para todos os casos homogêneos e, logo abaixo, aparecem as *condições de contorno*, que definem o comportamento da corda em suas extremidades. Como estas condições são nulas, significa que não há movimento nestes pontos ao longo do tempo, ou seja, os extremos dessa corda estão fixos. Por fim, tem-se as *condições iniciais*, dadas por w_0 e w_1 , que representam, respectivamente, a posição e a velocidade iniciais da corda.

3.2 Candidata à Solução do Problema de Ondas

Para encontrar a solução formal do problema, precisamos satisfazer as três condições apresentadas anteriormente. O primeiro passo é resolver a equação de ondas e um dos métodos de resolução mais conhecidos é a Separação de Variáveis, que será utilizada neste estudo por proporcionar soluções explícitas ao problema. Para utilizar o método, precisamos supor que a equação tem solução da forma $u(x, t) = \phi(x)\psi(t)$, onde as funções ϕ e ψ estão definidas para $x \in [0, L]$ e $t \geq 0$, nesta ordem. Substituindo-a na equação de ondas:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \Rightarrow \quad \phi(x)\psi''(t) = \beta\psi(t)\phi''(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{\psi''(t)}{\beta\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)}.$$

Como isto deve ser válido para todo $x \in [0, L]$ e $t \geq 0$, segue que

$$\frac{\psi''(t)}{\beta\psi(t)} = \frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = -\lambda$$

onde a constante real λ será encontrada posteriormente.

A partir daí, obtemos duas EDO's lineares homogêneas e de 2ª ordem:

$$\phi''(x) + \lambda\phi(x) = 0, \tag{3.1}$$

$$\psi''(t) + \lambda\beta\psi(t) = 0. \tag{3.2}$$

Como a solução deve satisfazer as condições de contorno, segue $\phi(0)\psi(t) = 0$ e $\phi(L)\psi(t) = 0, \forall t \geq 0$. Queremos soluções não triviais (não nulas) para $u = \phi(x)\psi(t)$, então necessariamente $\phi(0) = \phi(L) = 0$. Vamos resolver agora a EDO (3.1), usando o polinômio característico $r^2 + \lambda = 0$ e analisando os três possíveis casos:

- se $\lambda < 0$:

Então as raízes $r = \pm\sqrt{-\lambda}$ serão reais, pois já vimos que $\beta > 0$, sendo assim para c_1 e c_2 constantes teremos que $\phi(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$, logo:

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = -c_2 \\ \phi(L) = 0 \Rightarrow (-c_2)e^{\sqrt{-\lambda}L} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}L} = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

Por fim, teríamos que $c_1 = c_2 = 0$, e a solução seria nula, a qual descartaremos.

- se $\lambda = 0$:

Ou seja, a raiz seria real de ordem dois e a solução seria $\phi(x) = c_1 + c_2x$, o que resulta

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \Rightarrow c_1 + c_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ \phi(L) = 0 \Rightarrow c_2L = 0 \Rightarrow c_2 = 0 \end{cases}$$

Teríamos apenas a solução trivial, então desconsideramos este caso também.

- se $\lambda > 0$:

Neste caso, as raízes do polinômio característico seriam complexas e conjugadas tal que $r = \pm i\sqrt{\lambda}$. Assim a solução seria $\phi(x) = c_1 \cos(\sqrt{\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{\lambda}x)$ e portanto

$$\begin{cases} \phi(0) = 0 \Rightarrow c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \\ \phi(L) = 0 \Rightarrow c_2 \sin(\sqrt{\lambda}L) = 0 \end{cases}$$

Como já dito, queremos soluções não triviais, portanto definiremos $c_2 \neq 0$, assim $\sin(\sqrt{\lambda}L) = 0$, e isso implica $\sqrt{\lambda}L = k\pi$, com $k = 0, 1, \dots$. Desta maneira, obtemos $\lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$ e, por fim, temos a seguinte solução não nula para a EDO (3.1):

$$\phi_k(x) = c_2 \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Agora, solucionamos também a EDO (3.2) para $\lambda = \lambda_k = \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2$. O polinômio característico então será $r^2 + \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2\beta = 0$, que possui duas raízes complexas e conjugadas $r = \pm i\left(\frac{k\pi}{L}\right)\sqrt{\beta}$. Logo, a solução dessa EDO é:

$$\psi_k(t) = c_3 \cos\left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L}t\right) + c_4 \sin\left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L}t\right).$$

Encontradas ambas as funções, finalmente conseguimos, para cada $k \in \mathbb{N}$, soluções da equação diferencial satisfazendo as condições de contorno, da forma $u_k(x, t) = \phi_k(x)\psi_k(t)$. Como a EDP é linear, então combinações lineares das soluções particulares também será solução, isso nos motiva a representarmos $u(x, t)$ como a soma de todas as soluções particulares, ou seja:

$$\begin{aligned} u(x, t) &:= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x)\psi_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left[A_k \cos\left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L}t\right) \right], \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde A_k e B_k são constantes, que dependerão dos dados iniciais.

Agora vejamos que condições deverão ter essas constantes para que a função acima satisfaça também as condições iniciais:

$$w_0(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) [A_k \cos(0) + B_k \sin(0)] = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Para encontrarmos o valor de cada A_k , fixando $k_0 \in \mathbb{N}$, multiplicamos a equação anterior por $\sin\left(\frac{k_0\pi}{L}x\right)$. Ao aplicar a integral de 0 a L e tendo em consideração o seguinte resultado (que demonstraremos adiante na Seção 5.2):

$$\int_0^L \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{k_0\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq k_0 \\ \frac{L}{2}, & \text{se } k = k_0 \end{cases}$$

obtemos

$$\int_0^L w_0(x) \sin\left(\frac{k_0\pi}{L}x\right) dx = A_{k_0} \frac{L}{2}.$$

Como k_0 é arbitrário, então vale a fórmula:

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L w_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Para obter a fórmula do outro coeficiente, derivamos formalmente (3.3) em relação a t

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k \left(-\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L}\right) \sin\left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L}t\right) + B_k \left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L}\right) \cos\left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L}t\right) \right].$$

Agora tomando $t = 0$ chega-se em

$$w_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L}\right) B_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{B}_k \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right).$$

Procedendo de maneira análoga a anterior, encontramos que

$$\tilde{B}_k = \frac{2}{L} \int_0^L w_1(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx,$$

e conseqüentemente

$$B_k = \frac{2}{k\pi\sqrt{\beta}} \int_0^L w_1(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx.$$

Com tudo isso, encontramos que a série representada em (3.3), com os coeficientes A_k e B_k da forma acima, é candidata à solução geral do sistema inicial. Usamos o termo “candidata” pois inicialmente supomos que a solução fosse da forma $u(x, t) = \phi(x)\psi(t)$, resta agora verificar se essa suposição nos levou a uma solução de fato, o que será feito em seções futuras do trabalho, utilizando os resultados que iremos introduzir.

Para estas verificações e também para os demais objetivos do trabalho, que é estudar a convergência e regularidade destas soluções, serão utilizadas as Séries de Fourier, conceitos que abordaremos a seguir, logo após a revisão de alguns tópicos de Análise, fundamentais para estas questões.

4 Sequências e Séries de Funções

Vimos que a possível solução da equação de ondas se refere a uma série de funções, portanto esta seção do trabalho tem por objetivo auxiliar na verificação da convergência

das séries deste tipo, informações que nos serão extremamente úteis futuramente. Como estas séries estão associadas a sequências de funções, precisamos também definir esses conceitos e apresentar alguns resultados que venham a colaborar com o alcance dos nossos objetivos.

4.1 Convergência de Sequências de Funções

Lima (1987) nos traz o conceito de uma *sequência de funções* definidas em um conjunto \mathbb{X} , geralmente denotada por (f_n) , como uma correspondência que associa para cada n natural uma função $f_n : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$. O autor cita ainda que, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência numérica, $\forall x \in \mathbb{X}$, e nos traz algumas definições importantes.

Definição 1 (Convergência pontual): Uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$, *converge pontualmente* para a função $f : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ se, para cada $x \in \mathbb{X}$ e para cada $\epsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\epsilon, x)$ tal que:

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Dizer que $f_n \rightarrow f$ pontualmente em \mathbb{X} significa que, para cada $x_0 \in \mathbb{X}$ fixado, a sequência de pontos $\{f_1(x_0), f_2(x_0), \dots\}$ tendem para o ponto $f(x_0)$.

Definição 2 (Convergência uniforme): Uma sequência de funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge uniformemente* para f se, para cada $\epsilon > 0$, existe $n_0 = n_0(\epsilon)$ tal que:

$$|f_n(x) - f| < \epsilon, \quad \forall n > n_0 \text{ e } \forall x \in \mathbb{X}.$$

Note que aqui, diferentemente da convergência pontual, n_0 não depende de cada ponto de \mathbb{X} . Observe ainda que toda sequência que converge uniformemente também converge pontualmente. Para aplicar estes resultados, vamos explorar o seguinte exemplo, analisando ambas as convergências:

Exemplo 1: Seja a seqüência $f_n(x) = x^n$, para $n = 0, 1, 2, \dots$, definida no intervalo $[0, 1)$.

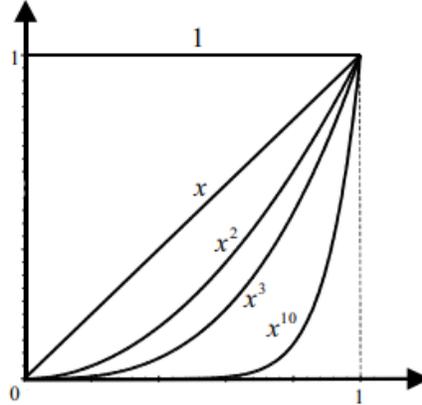


Figura 2: Funções $1, x, x^2, x^3$ e x^{10} . Fonte: Adaptado de Lima (1987).

Mostraremos que ela converge pontualmente para a função nula, porém a convergência não é uniforme. De fato, seja $0 < \delta < 1$ vejamos primeiro que a convergência é uniforme no intervalo $[0, \delta]$. Seja $\epsilon > 0$, observe que $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta^n = 0$, com isso, dado qualquer $\epsilon > 0$ podemos achar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow \delta^n < \epsilon$ (note que o n_0 está dependendo de ϵ e δ). Então, $\forall x \in [0, \delta]$ temos $0 < x^n \leq \delta^n < \epsilon$, para todo $n > n_0$. Isto significa que $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \forall n \geq n_0$, onde f é a função nula.

Como $\delta < 1$ é arbitrário, temos que a convergência pontual vale para todo intervalo $[0, 1)$. Agora, vejamos que a convergência não é uniforme: supondo por absurdo que a convergência é uniforme, logo para $\epsilon = \frac{1}{2}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$|x^n - 0| < \frac{1}{2}, \quad \forall x \in [0, 1), \quad \forall n \geq n_0.$$

Em particular, vale para os pontos da forma $x_n = \sqrt[n]{\frac{n-1}{n}}$, pois estão contidos em $[0, 1)$. Porém, ao substituirmos na desigualdade acima temos

$$\frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < \frac{1}{2}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Com estas condições, ao fazermos $n \rightarrow \infty$ obtem-se $1 \leq \frac{1}{2}$, o que é um absurdo. Logo, a convergência não pode ser uniforme.

4.2 Convergência de Séries de Funções

Considere uma sequência infinita de funções $\{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$, denominamos *série de funções* a soma dos termos dessa sequência. Nesta seção, usaremos as notações de Lima (2006), que representa essa soma como $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$, onde $s_n = \sum_{k=1}^n f_k$. Essas notações envolvendo limite são chamadas de *reduzidas* e nos possibilitam demonstrar os teoremas a seguir, que serão importantes no decorrer do trabalho.

Teorema 1 (Passagem ao limite sob o sinal da integral) *Se a sequência de funções integráveis $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, então f é integrável e*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx. \quad (4.4)$$

Prova: Esse resultado também foi obtido do livro de Lima (2006), que nos sugere demonstrar primeiro que a função f é integrável sob essas condições:

Dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{4(b-a)}$, $\forall x \in [a, b]$. Fixando $m > n_0$, como f_m é integrável, por hipótese, então existe uma partição P de $[a, b]$ tal que

$$\sum w'_i(t_i - t_{i-1}) < \frac{\epsilon}{2},$$

onde w'_i é a oscilação de f_m no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P .

Mas, para quaisquer $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$, vale a seguinte relação com a oscilação w_i de f neste mesmo intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de P :

$$\begin{aligned} w_i &\leq |f(y) - f(x)| \\ &\leq |f(y) - f_m(y)| + |f_m(y) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \\ &\leq w'_i + \frac{\epsilon}{2(b-a)}. \end{aligned}$$

Com isso, segue a integrabilidade de f pois

$$\begin{aligned}\sum w_i(t_i - t_{i-1}) &\leq \sum w'_i(t_i - t_{i-1}) + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum (t_i - t_{i-1}) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

Finalizada esta parte, mostra-se agora a relação dada em (4.4), que segue de

$$\begin{aligned}\left| \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx \right| &\leq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \\ &\leq \frac{(b-a)\epsilon}{4(b-a)} < \epsilon,\end{aligned}$$

ou seja, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx, \forall n > n_0$, concluindo assim a prova. \square

Teorema 2 (Integração de séries termo a termo) *Seja (f_n) uma sequência de funções integráveis em um intervalo $[a, b]$ tal que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente. Então*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n dx.$$

Prova: Utilizando as reduzidas da série, teremos então que

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} s_n dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b s_n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n dx,$$

onde utilizou-se o teorema anterior na segunda igualdade acima. \square

Teorema 3 *Seja a sequência de funções deriváveis $f_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Se a sequência (f'_n) converge uniformemente para $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ e também a sequência $(f_n(x_0))$ converge, para algum $x_0 \in [a, b]$, então (f_n) converge uniformemente e*

$$f' = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n = g.$$

Prova: A demonstração deste teorema encontrou-se no livro de Figueiredo (1996), que iniciou a prova aplicando o Teorema do Valor Médio

$$f_n(x) - f_m(x) - [f_n(x_0) - f_m(x_0)] = (x - x_0)[f'_n(c) - f'_m(c)], \quad (4.5)$$

sendo c um ponto do intervalo (x, x_0) .

Além disso, pela hipótese de (f'_n) convergir uniformemente, temos que (f_n) também possui convergência uniforme em $[a, b]$. Por sua vez, dado $\epsilon > 0$ e tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m > n_0$ resulta em $|f'_n(y) - f'_m(y)| \leq \epsilon, \forall y \in [a, b]$. Logo, da expressão (4.5) segue

$$\left| f_n(x) - f_m(x) - [f_n(x_0) - f_m(x_0)] \right| \leq \epsilon|x - x_0|, \quad (4.6)$$

e tomando o limite quando $m \rightarrow \infty$ obtemos

$$\left| \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} - \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \leq \epsilon, \quad n \geq n_0. \quad (4.7)$$

Agora fixando um n_1 onde $|f'_n(x_0) - g(x_0)| \leq \epsilon, \forall n > n_1$ e também um $\delta(\epsilon, m) > 0$ (com $m = \max(n_0, n_1)$) tal que $|x - x_0| < \delta$, obteremos então em (4.6)

$$\left| \frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| \leq 2\epsilon. \quad (4.8)$$

E, por fim, as expressões (4.7) e (4.8) nos levam a

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g(x_0) \right| \leq 3\epsilon,$$

que implica em $f'(x_0) = g(x_0)$, levando ao resultado pela arbitrariedade de x_0 . \square

Teorema 4 (Derivação de séries termo a termo) *Seja (f_n) uma sequência de funções tal que $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ converge uniformemente, em um intervalo $[a, b]$. Se existe $x_0 \in [a, b]$ tal*

que $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ converge, então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é derivável e

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'.$$

Prova: A demonstração é feita de maneira análoga à prova do Teorema 2, porém utilizando o resultado anterior. \square

Note que estes resultados só podem ser aplicados nos casos em que a série converge uniformemente, mas de maneira geral isso nem sempre ocorre. Um dos resultados clássicos usados para verificar a convergência uniforme de séries de funções é o M-Teste de Weierstrass, mostrado na sequência.

Teorema 5 (M-Teste de Weierstrass) *Seja (f_n) uma sequência de funções definidas no domínio X , sob a condição $|f_n(x)| \leq M_n$, para todo $x \in X$, onde $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é uma série numérica convergente. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge absoluta e uniformemente em X .*

Prova: A prova que mostraremos aqui é a mesma exposta por Ávila (2001), que decorre primeiramente sobre a convergência absoluta, garantida pela majoração $|f_n(x)| \leq M_n$ e pela convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$.

Agora por essa convergência temos que, dado $\epsilon > 0$, existe n_0 tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \epsilon.$$

Com isso, para todo $x \in X$ segue

$$n > n_0 \Rightarrow \left| f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \epsilon,$$

o que prova a uniformidade da convergência, concluindo a demonstração. \square

5 Séries de Fourier

5.1 Introdução às Séries de Fourier

O conceito de séries de Fourier pode ser aplicado a um conjunto de certas funções, que possuem características específicas, sendo uma delas a periodicidade. Portanto, Iório Jr e Iório (1988) descrevem uma função *periódica* $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ como aquela que possui um período, ou seja, uma constante não-nula $P \in \mathbb{R}$, tal que $f(x + P) = f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Geometricamente, o período representa o comprimento do intervalo em x necessário para que o gráfico da função se repita. Podemos citar como exemplos de funções deste tipo a função constante, que possui qualquer número real $P \neq 0$ como período, e também as funções trigonométricas $\sin(kx)$ e $\cos(kx)$, para $k = 1, 2, \dots$, onde 2π é um período em comum.

Observe que, se tomarmos qualquer série de funções trigonométricas com o período $2L$, então ela também será periódica com o mesmo período. Vamos então chamar essa série de *série trigonométrica* e representá-la por:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right], \quad n = 1, 2, \dots$$

sendo L a metade do período e a_0 , a_n e b_n constantes que dependem de cada n natural.

Para as aplicações que queremos neste trabalho, iremos supor convergência na série acima, para todo $x \in \mathbb{R}$, e também considerar funções bem comportadas que venham a coincidir com a série trigonométrica, isto é:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]. \quad (5.9)$$

Vejamos que é possível encontrar uma forma geral para os coeficientes a_0 , a_n e b_n , realizando manipulações distintas na obtenção de cada um deles. Primeiramente, para

calcularmos a_0 , basta apenas realizar a seguinte integração em ambos os lados:

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x)dx &= \int_{-L}^L \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] dx \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right] \\ &= a_0L, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade decorre do Teorema 2 e a última segue da periodicidade. Logo

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)dx. \quad (5.10)$$

Conseqüentemente, também podemos encontrar as constantes a_n e b_n , só que para isso precisaremos de alguns resultados, conhecidos por *relações de ortogonalidade* e que, inclusive, já utilizamos em seções anteriores do trabalho.

5.2 Relações de Ortogonalidade

Iório (2010) cita que duas funções são ortogonais se a integral do produto entre elas se anula em um determinado intervalo. No presente estudo, temos as funções $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ e $\cos(\frac{m\pi}{L}x)$, ortogonais em algum intervalo que contenha seu período, no caso $[-L, L]$. Vamos então demonstrar as relações que existem entre essas funções.

(a) Vejamos que $\int_{-L}^L \sin(\frac{n\pi}{L}x) \cos(\frac{m\pi}{L}x) dx = 0$.

De fato, da relação trigonométrica $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$ resulta

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-L}^L \sin\left[\frac{(n+m)\pi}{L}x\right] dx + \int_{-L}^L \sin\left[\frac{(n-m)\pi}{L}x\right] dx \right].$$

A integral resultará na função cosseno, também periódica de período $2L$. Logo, pela paridade da função cosseno a expressão acima resulta em zero, como queríamos.

$$(b) \text{ Também temos } \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ L, & \text{se } n = m \end{cases}.$$

Para isso, supondo $n \neq m$ e usando $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$ temos

$$\int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-L}^L \cos\left[\frac{(n-m)\pi}{L}x\right] dx - \int_{-L}^L \cos\left[\frac{(n+m)\pi}{L}x\right] dx \right].$$

As integrais irão recair sobre a função seno, onde temos que $\sin(k\pi) = 0, \forall k \in \mathbb{Z}$, logo a expressão acima também resulta em zero.

Agora analisando o caso $n = m$ temos:

$$\int_{-L}^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \int_{-L}^L \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right) \right] dx,$$

de onde segue que a expressão à direita vale L , concluindo a prova.

$$(c) \text{ Analogamente vale } \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ L, & \text{se } n = m \neq 0 \end{cases}.$$

5.3 Coeficientes de Fourier

Tendo agora estes resultados, retornamos para o cálculo do coeficiente a_n , onde multiplicamos a equação (5.9) por $\cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right)$, com $m \in \mathbb{N}$, e integramos:

$$\int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx = \int_{-L}^L \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) dx.$$

Aplicando as relações de ortogonalidade, ao resolvermos as integrais concluímos que

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (5.11)$$

Por sua vez, multiplicando 5.9 por $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ e integrando, analogamente encontramos:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx. \quad (5.12)$$

A partir destes resultados, Figueiredo (1977) define a **série de Fourier** de uma função f periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, como sendo:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.13)$$

com a_0 , a_n e b_n comumente chamados de **coeficientes de Fourier** e obtidos de (5.10), (5.11) e (5.12), respectivamente.

De maneira geral, a série de Fourier é uma outra forma de representar algumas funções f específicas, porém no momento nada nos garante que a série trigonométrica converge e nem se a relação entre a função e sua série de Fourier é realmente uma igualdade (por isso utilizamos o sinal \sim , que ressalta a ideia de “aproximação”). O que podemos fazer é reduzir a forma geral em (5.13), usando a paridade da função, como veremos a seguir.

5.4 Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **par** se $f(x) = f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ou seja, o gráfico é simétrico em relação ao eixo dos y , o exemplo mais comum é a função cosseno. Analogamente, uma função é **ímpar** se $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, gráfico simétrico em relação a origem, como é o caso da função seno. Abaixo segue algumas propriedades:

- (a) *A soma preserva o tipo de função, ou seja, duas pares (ou ímpares) somadas resulta em uma função par (ou ímpar);*

De fato, considere f, g funções pares então: $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f + g)(-x)$, portanto $f + g$ é par. Analogamente, sendo f, g ímpares temos que $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = -f(-x) + (-g(-x)) = -f(-x) - g(-x) = -(f + g)(-x)$, ou seja, continua sendo ímpar.

(b) *O produto de funções do mesmo tipo é uma função par;*

De fato, seja as funções f, g pares então: $(fg)(x) = f(x)g(x) = f(-x)g(-x) = (fg)(-x)$, então $f + g$ é par. No caso de f, g ímpares temos que $(fg)(x) = f(x)g(x) = -f(-x)(-g(-x)) = f(-x)g(-x) = (fg)(-x)$, também par.

(c) *O produto de funções de tipos diferentes resulta em uma função ímpar;*

De fato, tomemos as funções f par e g ímpar temos que $(fg)(x) = f(x)g(x) = f(-x)(-g(-x)) = -(fg)(-x)$, ou seja, é uma função ímpar.

(d) *Se a função for par e integrável no intervalo $[-L, L]$, então $\int_{-L}^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx$;*

De fato, temos $\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx$, fazendo $x = -t$ na primeira integral do lado direito da igualdade, e usando a paridade da função obtem-se:

$$\int_{-L}^L f(x)dx = - \int_L^0 f(-t)dt + \int_0^L f(x)dx = \int_0^L f(t)dt + \int_0^L f(x)dx = 2 \int_0^L f(x)dx.$$

(e) *Se a função for ímpar e integrável em algum intervalo limitado, então $\int_{-L}^L f(x)dx = 0$.*

Analogamente ao anterior, $\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L}^0 f(x)dx + \int_0^L f(x)dx$, fazendo $x = -t$ na primeira integral do lado direito da igualdade, e usando a paridade da função obtem-se:

$$\int_{-L}^L f(x)dx = - \int_L^0 f(-t)dt + \int_0^L f(x)dx = - \int_0^L f(t)dt + \int_0^L f(x)dx = 0.$$

Ainda conforme Figueiredo (1977), aplicando essas propriedades ao cálculo das séries de Fourier obtemos que, se f for **par**, periódica com período $2L$, integrável e absolutamente integrável, então $a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L f(x)dx$, $a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$ e $b_n = 0$, isto implica que a sua série de Fourier é uma série de cossenos. Da mesma forma, para f **ímpar**, obtemos uma série de senos (pois $a_0 = a_n = 0$ e $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx$).

5.5 Convergência de Séries de Fourier

Como citamos, nem sempre a função será igual à sua série de Fourier. A ferramenta que nos auxilia nessa identificação é a convergência de séries de Fourier, sendo assim vamos introduzir conceitos acerca desse tema, também abordados pelo autor citado.

Definição 3: *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua se ela tiver um número finito de descontinuidades, e todas de primeira espécie (limites laterais diferentes, mas finitos), em qualquer intervalo limitado.*

Observe que a função $\frac{1}{x}$ não é seccionalmente contínua, é descontínua apenas em $x = 0$, mas essa descontinuidade é de segunda espécie (limite infinito). Como exemplo de função seccionalmente contínua temos a função abaixo

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \\ -1, & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

onde a origem é o único ponto de descontinuidade, e ainda de primeira espécie.

Definição 4: *Uma função é seccionalmente diferenciável se ela e sua derivada forem seccionalmente contínuas.*

Note que $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, se $|x| \leq 1$, periódica de período 2, é contínua, mas não seccionalmente diferenciável, pois nos pontos onde $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ é descontínua, isso ocorre em segunda espécie. Como exemplo podemos citar a função dita como seccionalmente contínua no caso acima, ela também assegura as condições para ser seccionalmente diferenciável.

Lema 1 (Integral de Dirichlet) *Seja f uma função periódica de período $2L$ integrável em $[-L, L]$. Então a soma parcial S_k da série de Fourier de f é dada por*

$$S_k(x) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x+u) D_k(u) du, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad (5.14)$$

em que $D_k(u) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos\left(\frac{n\pi}{L}u\right)$ é chamada de **núcleo de Dirichlet**.

Prova: Aqui, a demonstração de Medeiros e Andrade (1978) foi consultada como ideia para a prova. Inicialmente, precisamos considerar a seguinte definição da soma parcial de ordem k de uma série de Fourier

$$S_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^k \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right].$$

Com isso, juntamente com as fórmulas dos coeficientes de Fourier segue que $S_k(x)$ vale

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(t) dt + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^k \int_{-L}^L f(t) \left[\cos\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{L}t\right) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right] dt \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos\left(\frac{n\pi}{L}t - \frac{n\pi}{L}x\right) \right] dt \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos\left(\frac{n\pi}{L}(t-x)\right) \right] dt. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $t = x + u$ segue

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x+u) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos\left(\frac{n\pi}{L}u\right) \right] du,$$

garantindo assim a igualdade em (5.14). □

Lema 2 O núcleo de Dirichlet, $D_k(u)$, verifica as seguintes igualdades:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos\left(\frac{n\pi}{L}u\right) = \begin{cases} \frac{\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}u\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2L}u\right)}, & \text{se } u \neq 2m\pi, m \in \mathbb{Z} \\ \frac{1}{2} + k, & \text{se } u = 2mL, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

e também

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L D_k(u) du = 1.$$

Prova: Nesta demonstração também usamos os resultados de Medeiros e Andrade (1978) como ideia. Primeiramente, mostraremos para o caso $u = 2mL$, $m \in \mathbb{Z}$, onde teremos $\cos\left(\frac{n\pi}{L}u\right) = 1$ e, portanto, $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos\left(\frac{n\pi}{L}u\right) = \frac{1}{2} + k$. Caso $u \neq 2mL$, a seguinte relação trigonométrica $2\sin(a)\cos(b) = \sin(a+b) - \sin(a-b)$ nos permite concluir que

$$2\sin\left(\frac{\pi}{2L}u\right)\cos\left(\frac{n\pi}{L}u\right) = \sin\left(\frac{(\frac{1}{2}+n)\pi}{L}u\right) - \sin\left(\frac{(\frac{1}{2}-n)\pi}{L}u\right),$$

e tomando a soma dos n naturais entre 1 e k , obtemos

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{\pi}{2L}u\right)\sum_{n=1}^k \cos\left(\frac{n\pi}{L}u\right) &= \sin\left(\frac{(\frac{1}{2}+n)\pi}{L}u\right) - \sin\left(\frac{(\frac{1}{2}-n)\pi}{L}u\right) \\ \sum_{n=1}^k \cos\left(\frac{n\pi}{L}u\right) &= \frac{\sin\left(\frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{L}u\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{2L}u\right)} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Descartando o caso $\sin\left(\frac{u}{2}\right) = 0$, segue a primeira afirmação do lema. A segunda parte temos pela integração

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^k \cos\left(\frac{n\pi}{L}u\right) \right] dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L dx + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^k \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}u\right) dx = 1,$$

onde a última igualdade segue da periodicidade da função $\cos\left(\frac{n\pi}{L}u\right)$, encerrando assim a prova. \square

Lema 3 (Lema de Riemann-Lebesgue) *Seja f uma função seccionalmente contínua num intervalo (a, b) . Então*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin(kx) dx = 0 \quad e \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos(kx) dx = 0.$$

Prova: Retirada também da publicação de Medeiros e Andrade (1978), que iniciam a prova supondo a continuidade de f no intervalo fechado $[a, b]$ e tomando $h = \frac{\pi}{k}$ com k suficiente grande de tal modo que $a < a + h < b - h < b$. Por consequência:

$$\int_a^b f(x) \sin(kx) dx = \int_a^{a+h} f(x) \sin(kx) dx + \int_{a+h}^b f(x) \sin(kx) dx.$$

Se fizermos a seguinte mudança de variável $y = x - h$ na última integral acima:

$$\int_a^{b-h} f(y+h) \sin(k(y+h)) dx = \int_a^{b-h} f(y+h) \sin(ky + \pi) dx = - \int_a^{b-h} f(y+h) \sin(ky) dx,$$

e ao retornarmos para a variável inicial obtemos:

$$\int_a^b f(x) \sin(kx) dx = \int_a^{a+h} f(x) \sin(kx) dx - \int_a^{b-h} f(x+h) \sin(kx) dx. \quad (5.15)$$

Também temos uma outra forma de fazer essa representação:

$$\int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx = \int_a^{b-h} f(x) \sin(\lambda x) dx + \int_{b-h}^b f(x) \sin(\lambda x) dx. \quad (5.16)$$

Se realizarmos a soma de ambos os termos das igualdades (5.15) e (5.16) teremos

$$\begin{aligned} 2 \int_a^b f(x) \sin(kx) dx &= \int_a^{a+h} f(x) \sin(kx) dx + \int_{b-h}^b f(x) \sin(\lambda x) dx \\ &+ \int_a^{b-h} [f(x) - f(x+h)] \sin(kx) dx. \end{aligned}$$

Como f é contínua em $[a, b]$ então ela é limitada, portanto existe uma constante M

tal que $|f(x)| < M$, para todo x neste intervalo. Sendo assim

$$2 \left| \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx \right| \leq 2Mh + \int_a^{b-h} |f(x) - f(x+h)| dx.$$

Por f ser contínua num intervalo limitado fechado, segue a convergência uniforme, o que significa que, para cada $x \in [a, b]$ e para cada $\lambda > 0$, $\exists k_\lambda$ tal que $|f(x) - f(x+h)| < \lambda$, $\forall k > k_\lambda$. Com isso, a desigualdade acima se torna

$$\left| \int_a^b f(x) \sin(\lambda x) dx \right| \leq M \frac{\pi}{k} + \frac{b-a}{2} \lambda.$$

Para cada $\epsilon > 0$, considere $\lambda > 0$ tal que $\lambda < \frac{\epsilon}{b-a}$ e k_λ onde são válidas as desigualdades $|f(x) - f(x+h)| < \lambda$ e também $\frac{M\pi}{k} < \frac{\epsilon}{2}$, para todo $k > k_\lambda$. Desse modo segue que

$$\forall \epsilon > 0, \exists k_\epsilon \text{ tal que } \forall k > k_\epsilon \text{ resulta } \left| \int_a^b f(x) \sin(kx) dx \right| < \epsilon.$$

Isto prova o caso do lema com a continuidade uniforme. Para o caso geral, temos f contínua apenas no intervalo (a, b) , ou seja, não é uniformemente contínua. Porém, por f ser contínua em partes, existem e são finitos os limites laterais $f(a^+)$ e $f(b^-)$. Portanto, estendendo f ao intervalo todo, denotando essa extensão por \tilde{f} e definindo-a como

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(a^+) & \text{se } x = a \\ 0 & \text{se } a < x < b \\ f(b^-) & \text{se } x = b \end{cases}$$

obtemos que essa função é contínua em $[a, b]$, logo vale a primeira parte da demonstração para \tilde{f} . Como vale que $\int_a^b f(x) \sin(kx) dx = \int_a^b \tilde{f}(x) \sin(kx) dx$, conclui-se que o lema também vale para f . \square

5.5.1 Convergência Pontual

Com estes resultados provados, conseguimos finalmente definir e demonstrar o teorema da convergência pontual para as séries de Fourier:

Teorema 6 (Teorema de Fourier) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e periódica de período $2L$. Então a série de Fourier de f converge, em cada ponto x_0 , para o ponto médio dos limites laterais, ou seja,*

$$\frac{1}{2}[f(x_0^-) + f(x_0^+)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

onde $f(x_0^-)$ e $f(x_0^+)$ são, respectivamente, os limites laterais à esquerda e à direita de f no ponto x_0 .

Prova: A demonstração foi adaptada do livro de Figueiredo (1977). Note que a função f possui todas as características para aplicarmos o Lema 1, então temos que a k -ésima soma parcial da série de Fourier de f é

$$S_k(x_0) = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x_0 + u) D_k(u) du = \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(x_0 + u) D_k(u) du + \frac{1}{L} \int_0^L f(x_0 + u) D_k(u) du.$$

Para demonstrarmos o teorema, é suficiente provar que quando $k \rightarrow \infty$, a primeira parcela da última igualdade acima converge para $\frac{1}{2}f(x_0^-)$ e a segunda para $\frac{1}{2}f(x_0^+)$ em cada ponto x onde existem as derivadas laterais de f . Ou seja, vamos mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(x_0 + u) D_k(u) du - \frac{1}{2}f(x_0^-) \right] = 0$$

e também

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{L} \int_0^L f(x_0 + u) D_k(u) du - \frac{1}{2}f(x_0^+) \right] = 0.$$

Demonstraremos apenas a primeira destas, já que a outra seguirá analogamente. Note que o último resultado do Lema 2 nos diz que $\frac{1}{L} \int_{-L}^L D_k(u) du = 1$, podemos ainda perceber que $D_k(-u) = D_k(u)$, logo unindo estas duas observações segue

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^L D_k(u) du = \frac{1}{L} \int_{-L}^0 D_k(u) du + \frac{1}{L} \int_0^L D_k(-u) du = \frac{2}{L} \int_{-L}^0 D_k(u) du = 1,$$

daí obtemos que $\frac{1}{L} \int_{-L}^0 D_k(u) du = \frac{1}{2}$ e, conseqüentemente, $\frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(x_0^-) D_k(u) du = \frac{1}{2}f(x_0^-)$.

Retornando agora à demonstração:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L} \int_{-L}^0 f(x_0 + u) D_k(u) du - \frac{1}{2} f(x_0^-) &= \frac{1}{L} \int_{-L}^0 [f(x_0 + u) - f(x_0^-)] D_k(u) du \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^0 [f(x_0 + u) - f(x_0^-)] \frac{\sin\left(\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{L}u\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2L}u\right)} du. \end{aligned}$$

Sabemos que precisamos aplicar o limite quando $k \rightarrow \infty$, portanto definimos no intervalo $(-L, 0)$ a função $v(u) = \frac{f(x_0+u)-f(x_0^-)}{u} \frac{\frac{u}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2L}u\right)}$, que é seccionalmente contínua neste intervalo, e deste modo podemos aplicar o Lema 3 obtendo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_{-L}^0 v(u) \sin\left(\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{L}u\right) du = 0.$$

Utilizando este resultado, em conjunto com o análogo para $f(x_0^+)$, nos permite verificar que $\lim_{k \rightarrow \infty} S_k(x_0) = \frac{1}{2}[f(x_0^-) + f(x_0^+)]$, como desejávamos. \square

Observação: Note que, se f é contínua em x_0 , os limites laterais $f(x_0^+)$ e $f(x_0^-)$ serão iguais a $f(x_0)$. Assim, em cada ponto x de continuidade, a série de Fourier convergirá pontualmente para a própria função nesses pontos, ou seja, vale a igualdade:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right]. \quad (5.17)$$

Esta é a forma mais simples de convergência da série de Fourier. Adiante, caracterizaremos o outro caso de convergência, a do tipo uniforme, mas antes vejamos algumas aplicações do teorema.

Exemplo 1: Calcular a série de Fourier da função $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < L \\ 0, & -L \leq x < 0 \\ \text{periódica de período } 2L \end{cases}$.

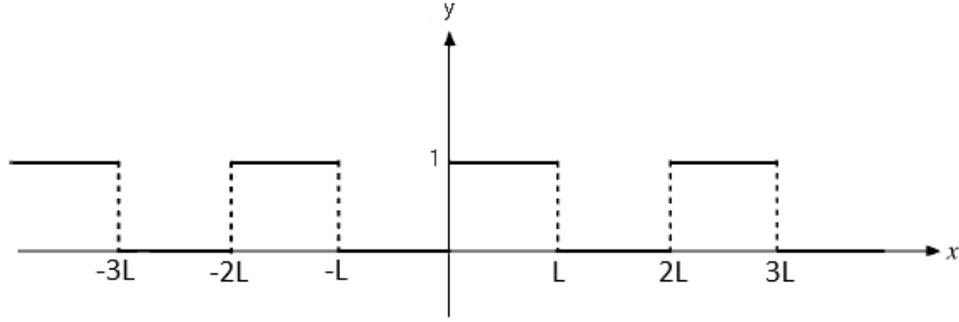


Figura 3: Gráfico da função f do Exemplo 1. Fonte: Adaptado de Figueiredo (1977).

Primeiro verificamos que essa função é seccionalmente diferenciável, logo existe a série de Fourier, cujos coeficientes são:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx = \frac{1}{L} \int_0^L dx = 1 \\
 a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = 0 \\
 b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{1 - \cos(n\pi)}{n\pi}
 \end{aligned}$$

Analisamos então n par e depois ímpar, obtendo que $b_{2k} = 0$ e $b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}$, para $k \geq 1$. Com isso, finalmente encontramos a série de Fourier de f , descrita abaixo, onde o sinal de igualdade segue do fato desta função ser seccionalmente diferenciável e periódica com período $2L$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin\left[\frac{(2n-1)\pi}{L}x\right], & \forall x \neq kL, \quad k = 1, 2, \dots \\ \frac{1}{2}, & \forall x = kL, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

A obtenção da série de Fourier das funções é uma ferramenta bastante útil para encontrar o valor de algumas séries numéricas mais complicadas. Por exemplo, a seguir vamos calcular o valor da soma infinita $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$, que servirá como um resultado importante ao longo do trabalho.

Exemplo 2: Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período 2π e definida por $f(x) = x^2$, onde $-\pi < x < \pi$.

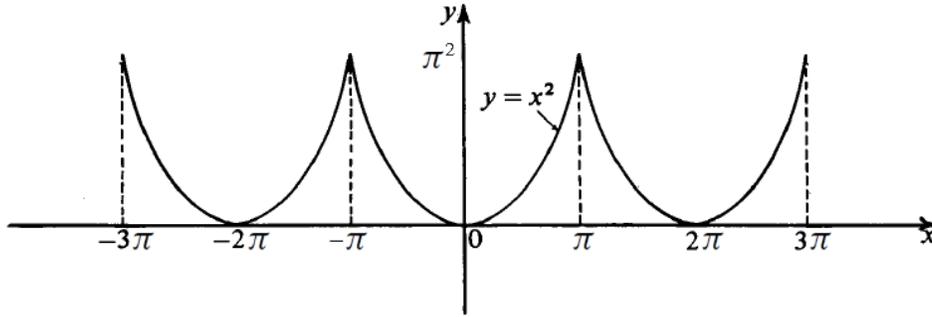


Figura 4: Gráfico da função f do Exemplo 2. Fonte: Adaptado de Figueiredo (1977).

Como f é uma função par, ela será uma série de cossenos, como já visto anteriormente, cujos coeficientes são $b_n = 0$ e:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^\pi = \frac{2\pi^2}{3} \\
 a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{1}{n} x^2 \sin(nx) \Big|_0^\pi - \frac{2}{n} \int_0^\pi x \sin(nx) dx \right] \\
 &= -\frac{4}{\pi n} \left[-\frac{1}{n} x \cos(nx) \Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{n} \cos(nx) dx \right] = \frac{4}{n^2} (-1)^n
 \end{aligned}$$

Sendo assim, obtemos a série de Fourier como sendo:

$$x^2 \sim \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} (-1)^n, \quad n = 1, 2, \dots$$

Em virtude do Teorema de Fourier f é igual sua série de Fourier e, além disso, tomando $x = \pi$ obtemos:

$$\begin{aligned}
 \pi^2 &= \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n}}{n^2} \Rightarrow \pi^2 - \frac{\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\
 &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{5.18}
 \end{aligned}$$

5.5.2 Convergência Uniforme

A seguir, abordaremos os resultados prévios para a convergência uniforme das séries de Fourier, seguido pelos resultados propriamente ditos.

Lema 4 (Desigualdade de Young) *Para quaisquer a e $b \in \mathbb{R}$ vale a relação*

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2.$$

Prova: Sabemos que $\frac{1}{2}(a - b)^2 \geq 0$ e também que $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. Portanto vale que: $\frac{1}{2}(a - b)^2 = \frac{1}{2}a^2 - ab + \frac{1}{2}b^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \geq ab$. \square

Lema 5 (Desigualdade de Bessel) *Seja f uma função integrável e quadrado integrável em $[-L, L]$, e com a_0 , a_n e b_n os coeficientes da série de Fourier dessa função, então*

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^2(x) dx.$$

Prova: Para este resultado, partimos da ideia principal da demonstração feita por Iório (2010), utilizando a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-L}^L \left[f(x) - \frac{a_0}{2} - \sum_{n=1}^k \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) \right]^2 dx \\ &\leq \int_{-L}^L \left[\left(f(x) - \frac{a_0}{2} \right)^2 - 2 \left(f(x) - \frac{a_0}{2} \right) \sum_{n=1}^k \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right) \right] dx \\ &= \int_{-L}^L f(x)^2 dx - a_0 \int_{-L}^L f(x) dx + \frac{a_0^2}{4} \int_{-L}^L dx - 2 \sum_{n=1}^k \left[a_n \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right. \\ &\quad \left. + b_n \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right] + \sum_{n=1}^k a_0 \left[a_n \int_{-L}^L \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + b_n \int_{-L}^L \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right]. \end{aligned}$$

Agora usamos a periodicidade das funções trigonométricas e também a forma geral dos coeficientes de Fourier para obter

$$\begin{aligned} &= \int_{-L}^L f(x)^2 dx - a_0^2 L + \frac{a_0^2 L}{2} - 2 \sum_{n=1}^k (a_n^2 L + b_n^2 L) \\ &= \int_{-L}^L f(x)^2 dx - L \left[\frac{a_0^2}{2} + 2 \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \right]. \end{aligned}$$

Por fim, podemos concluir a prova já que

$$0 \leq \int_{-L}^L f(x)^2 dx - L \left[\frac{a_0^2}{2} + 2 \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \right] \leq \int_{-L}^L f(x)^2 dx - L \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^k (a_n^2 + b_n^2) \right],$$

de onde obtemos o resultado ao tomarmos o limite com $k \rightarrow \infty$. \square

Teorema 7 *Seja $f \in C^{k-1}(\mathbb{R})$, periódica de período $2L$, com derivada $f^{(k)}$ integrável e quadrado integrável em $[-L, L]$, e denotando por $a_n^{(i)}$ e $b_n^{(i)}$ os coeficientes de Fourier $a_n(f^{(i)})$ e $b_n(f^{(i)})$, respectivamente, então vale a relação*

$$|a_n^{(i)}| + |b_n^{(i)}| = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^i (|a_n(f)| + |b_n(f)|), \quad \forall n \geq 1 \text{ e } 1 \leq i \leq k.$$

Prova: Provaremos o teorema de forma recursiva, inicialmente mostra-se para $i = 1$.

Precisamos então dos coeficientes de Fourier de f' , que encontraremos pela definição:

$$a'_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx = \frac{n\pi}{L} \left[\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right] = \frac{n\pi}{L} b_n.$$

Analogamente $b'_n = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)a_n$ e, com isso, obtemos o resultado para o caso $i = 1$, pois:

$$\begin{aligned} |a'_n| + |b'_n| &= \left| \frac{n\pi}{L} b_n \right| + \left| -\frac{n\pi}{L} a_n \right| \\ &= \left(\frac{n\pi}{L} \right) (|a_n| + |b_n|). \end{aligned}$$

Agora, vamos analisar os casos onde $2 \leq i \leq k$. Primeiramente, note que por f ser de

classe C^{k-1} , existem diretamente as séries de Fourier das derivadas de f até ordem $k - 1$, porém na ordem k o que garante a existência dos coeficientes $a_n^{(k)}$ e $b_n^{(k)}$ é a integrabilidade de $f^{(k)}$, porque assim é possível encontrar os coeficientes pela definição.

Vamos garantir então o resultado, inicialmente supondo a validade do teorema para índices estritamente menores que i , ou seja:

$$|a_n^{(j)}| + |b_n^{(j)}| = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^j (|a_n| + |b_n|), \quad 1 \leq j < i.$$

Com isso, concluiremos que vale para i , partindo do fato que

$$\begin{aligned} a_n^{(i)} &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f^{(i)}(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L (f')^{(i-1)}(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= a_n^{(i-1)}(f'), \end{aligned}$$

e também que $b_n^{(i)} = b_n^{(i-1)}(f')$, obtido de maneira análoga. Portanto:

$$\begin{aligned} |a_n^{(i)}| + |b_n^{(i)}| &= |a_n^{(i-1)}(f')| + |b_n^{(i-1)}(f')| \\ &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^{i-1} (|a_n'| + |b_n'|) \\ &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^{i-1} \left(\frac{n\pi}{L}\right) (|a_n| + |b_n|) \\ &= \left(\frac{n\pi}{L}\right)^i (|a_n| + |b_n|), \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade se obtém da hipótese para $j = i - 1$ e a terceira igualdade provem do caso $i = 1$ que mostramos anteriormente, finalizando assim a prova. \square

Corolário 6 *Como consequência do Teorema anterior, e nas mesmas condições, vale a convergência da série numérica*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{i-1} (|a_n| + |b_n|), \quad \forall n \geq 1 \text{ e } 1 \leq i \leq k.$$

Este resultado segue diretamente de resultados vistos anteriormente neste trabalho:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n^{i-1} (|a_n| + |b_n|) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{L}{\pi}\right)^i \frac{1}{n} (|a_n^{(i)}| + |b_n^{(i)}|) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{L}{\pi}\right)^{2i} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} (|a_n^{(i)}|^2 + |b_n^{(i)}|^2) \right], \end{aligned}$$

onde a igualdade segue do Teorema anterior e depois aplicou-se a Desigualdade de Young.

Podemos garantir agora que a expressão final converge, pois $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente e a série dos coeficientes também converge pela Desigualdade de Bessel. Assim, pelo M-Teste de Weierstrass vale a convergência uniforme e absoluta da série mostrada no corolário.

Teorema 8 (Convergência Uniforme) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, periódica com período $2L$, e com derivada f' seccionalmente contínua e quadrado integrável em $[-L, L]$, então a série de Fourier de f converge absoluta e uniformemente em $[-L, L]$.*

Prova: Pelas hipóteses, f pode então ser representada em série de Fourier, verifiquemos então se ocorre convergência

$$\begin{aligned} \frac{|a_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left| a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right| + \left| b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right| \right) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|). \end{aligned}$$

Logo, pelo fato de f ser de classe $C^1[-L, L]$ podemos então aplicar o Corolário 6 para $i = 1$ e o resultado segue diretamente. \square

Observe que estes resultados são suficientes para verificarmos a convergência uniforme das séries de Fourier e, por sua vez, estes resultados podem ser usados para verificar a continuidade das funções. A relação direta entre essas afirmações está mostrada logo a seguir.

Teorema 9 *Seja (f_n) uma sequência de funções contínuas que converge uniformemente em um intervalo $[a, b]$ e seja f o seu limite. Então, f é uma função contínua.*

Prova: Esta demonstração também é encontrada na obra de Figueiredo (1977), que mostrou a continuidade de f em um ponto x_0 de $[a, b]$.

Dado $\epsilon > 0$, tome n_0 tal que

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Agora usa-se a continuidade de f_{n_0} para obter $\delta > 0$ de modo que

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \epsilon, \quad \text{para } |x - x_0| < \delta.$$

Então utilizando ambos os resultados acima teremos que

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq 3\epsilon,$$

para $|x - x_0| < \delta$, o que prova a continuidade de f em qualquer x_0 . \square

5.6 Integração de Séries de Fourier

Em resultados anteriores, mostramos a validade da integração termo a termo para séries de funções. O que faremos agora é aplicar este resultado para as séries de Fourier, note que usando o Teorema 2 numa função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que coincida com sua série de Fourier, a qual se supõe convergir uniformemente, então teremos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2} \int_a^b a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx + \int_a^b b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right].$$

A igualdade acima não é válida de modo geral, mas mesmo assim possui inúmeras aplicações. Antes de ilustrarmos essa aplicação com um exemplo, traremos o Teorema da integração de Fourier, o qual utiliza o Lema a seguir em sua demonstração.

Lema 7 *Seja f uma função periódica de período $2L$. Se f é integrável no intervalo $[-L, L]$, então teremos que*

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \int_{-L+\lambda}^{L+\lambda} f(x)dx, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Prova: Notemos em primeiro lugar, que é válida a igualdade

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{a+2L}^{b+2L} f(x)dx, \quad (5.19)$$

para isso basta fazer a mudança de variável $y = x + 2L$ na integral da esquerda.

De (5.19) e das propriedades da integral resulta

$$\begin{aligned} \int_{-L+\lambda}^{L+\lambda} f(x)dx &= \int_{-L+\lambda}^{-L} f(x)dx + \int_{-L}^L f(x)dx + \int_L^{L+\lambda} f(x)dx \\ &= \int_{-L+\lambda}^{-L} f(x)dx + \int_{-L}^L f(x)dx + \int_{-L+2L}^{-L+\lambda+2L} f(x)dx \\ &= - \int_{-L}^{-L+\lambda} f(x)dx + \int_{-L}^L f(x)dx + \int_{-L}^{-L+\lambda} f(x)dx \\ &= \int_{-L}^L f(x)dx, \end{aligned}$$

concluindo assim a prova do lema. □

Teorema 10 (Integração de Séries de Fourier) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e seccionalmente contínua, então pela sua série de Fourier temos que a função $F(x) = \int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}] dt$, periódica de período $2L$ e contínua, tem derivada F' seccionalmente contínua e é representada por sua série de Fourier*

$$\int_0^x [f(t) - \frac{a_0}{2}] dt = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{b_n}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{a_n}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right],$$

onde temos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{\pi}{2L^2} \int_{-L}^L F(x)dx$.

Prova: Esta demonstração foi adaptada de Figueiredo (1977). Tomando a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ e seccionalmente contínua, e também $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida pela expressão $F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt$, a qual é contínua. Agora, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, existe $F'(x)$ em todos os pontos que f é contínua e $F'(x) = f(x)$ nesses pontos, sendo assim $F'(x)$ é seccionalmente contínua.

Observe que F é periódica de período $2L$ pois:

$$\begin{aligned} F(x + 2L) - F(x) &= \int_x^{x+2L} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \int_0^{2L} \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt \\ &= \int_{-L}^L \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \int_{-L}^L f(t) dt - \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dt = 0, \end{aligned}$$

onde utilizou-se o Lema 7 na segunda igualdade da primeira linha acima.

Com isso, essa função apresenta as condições para podermos aplicar o Teorema 6, resultando que a função é igual a sua série de Fourier. Portanto vamos encontrar os coeficientes de Fourier:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L F(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \\ &= \frac{1}{L} \left[\frac{L}{n\pi} F(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L F'(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx \right] = -\frac{L}{n\pi} b_n. \end{aligned}$$

Analogamente teremos $B_n = \frac{L}{n\pi} a_n$, e para A_0 fazemos $x = 0$ na igualdade de F com sua série de Fourier obtendo $A_0 = \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$. Sendo assim, temos

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right],$$

e a partir disto, segue

$$\int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{b_n}{n} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + \frac{a_n}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right],$$

encerrando assim a demonstração. \square

Vejamos então a aplicação direta desse teorema:

Exemplo 3: Considere a função $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-\pi, \pi[\\ \text{periódica de período } 2\pi \end{cases}$.

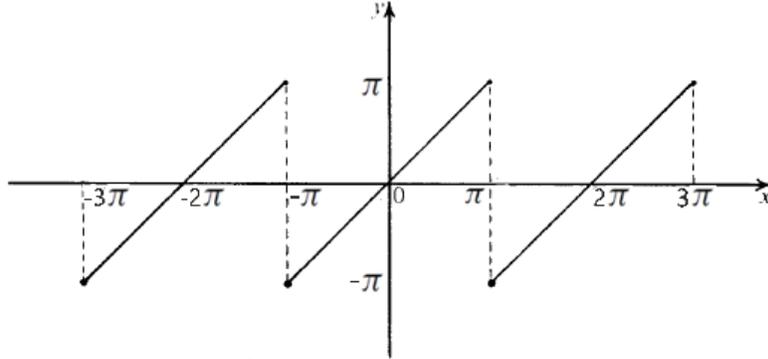


Figura 5: Gráfico da função f do Exemplo 3. Fonte: Adaptado de Figueiredo (1977).

Calculando os coeficientes de Fourier obtemos $a_n = 0$ (pois f ímpar) e $b_n = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}$. Além disso, pelo fato de f ser seccionalmente contínua temos que ela coincide com sua série de Fourier, ou seja:

$$f(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando então o Teorema 10 temos $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$, que possui a seguinte representação em série de Fourier:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{\pi^2}{6} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx).$$

Aplicando o teorema outra vez segue que

$$F_2(x) = \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} - \frac{\pi^2}{6} \right) dt = \frac{x^3}{6} - \frac{\pi^2}{6}x.$$

Tomando também a sua representação em série de Fourier obtemos:

$$\frac{x^3}{6} - \frac{\pi^2}{6}x = \frac{2\pi^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin(nx).$$

Aplicando pela última vez o teorema, encontramos

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} - \frac{\pi^2 t}{6} \right) dt = \frac{x^4}{24} - \frac{\pi^2}{12}x,$$

onde procedemos de maneira análoga implicando em

$$\frac{x^4}{24} - \frac{\pi^2}{12}x = -\frac{7\pi^4}{360} + \frac{2\pi^4}{\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} \cos(nx).$$

Realizando a substituição $x = \pi$, obtemos o valor numérico de uma importante série:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

6 Análise de Convergência e Regularidade das Soluções

6.1 Resultado Prévio

Teorema 11 *Seja a função $h \in C^k([0, L])$, satisfazendo*

$$\begin{cases} h(0) = h(L) = 0 \\ h'(0) = h'(L) = 0 \\ \dots \\ h^{(k)}(0) = h^{(k)}(L) = 0 \end{cases}$$

e \tilde{h} a extensão ímpar e periódica de período $2L$ de h , então $\tilde{h} \in C^k(\mathbb{R})$.

Prova: A demonstração aqui será feita pelo princípio da indução.

Passo Base - mostrando para $k = 1$:

Considerando $h \in C^1([0, L])$ com $h(0) = h(L) = 0$ e $h'(0) = h'(L) = 0$ e denotando por \tilde{h} sua extensão ímpar e periódica de período $2L$, então:

$$\tilde{h} = \begin{cases} h(x), & \text{se } x \in (0, L) \\ -h(-x), & \text{se } x \in (-L, 0) \\ h(x + 2L) = h(x) \end{cases}$$

Vamos verificar se \tilde{h} é contínua, note que no intervalo $(0, L)$ temos a continuidade diretamente do fato de h ser contínua. Também por esse mesmo fato em conjunto com a paridade da função segue a continuidade no intervalo $(-L, 0)$ pois:

$$\lim_{x \rightarrow -x_0} \tilde{h}(x) = -h(x_0), \quad \forall x_0 \in (0, L).$$

Agora verificaremos os pontos $0, -L$ e L , para assim completar o intervalo $[-L, L]$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \tilde{h}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \tilde{h}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} -h(-x) = -h(-0) = 0 \end{cases}$$

Assim, obtemos os limites laterais iguais, logo segue a continuidade de \tilde{h} quando $x = 0$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow L^-} \tilde{h}(x) = \lim_{x \rightarrow L^-} h(x) = h(L) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow L^+} \tilde{h}(x) = \lim_{y \rightarrow -L^+} \tilde{h}(y) = -h(-(-L)) = -h(L) = 0 \end{cases}$$

Note que os pontos onde $x \rightarrow L^+$ se encontram fora do intervalo $(-L, L)$, por isso foi realizada a mudança de variável $y = x - 2L$, já que a função é periódica de período $2L$. Assim, estes pontos passariam a se encontrar no intervalo $(-L, 0)$ com $y \rightarrow -L^+$, o que resulta na igualdade dos limites laterais.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -L^+} \tilde{h}(x) = \lim_{x \rightarrow -L^+} -h(-x) = -h(-(-L)) = -h(L) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -L^-} \tilde{h}(x) = \lim_{y \rightarrow L^-} \tilde{h}(y) = \lim_{y \rightarrow L^-} h(y) = h(L) = 0 \end{cases}$$

Aqui também usamos a mudança de variáveis, porém neste caso $y = x + 2L$, o que recai sobre pontos do intervalo $(0, L)$ com $y \rightarrow L^-$. Com isso, mostramos a continuidade nestes três pontos, logo vale para todo o intervalo $[-L, L]$ e, finalmente, pela periodicidade

ainda vale a continuidade para os demais pontos fora deste intervalo.

Agora nos indagamos se \tilde{h}' também é contínua? Sabemos que derivada de função ímpar é par, ou seja: $\tilde{h}'(x) = \tilde{h}'(-x)$. Isso é válido pois para todo x_0 em $(0, L)$ temos:

$$\tilde{h}'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\tilde{h}(x) - \tilde{h}(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = h'(x_0).$$

Procedendo de maneira análoga, para todo x_1 no intervalo $(-L, 0)$ segue que $\tilde{h}'(x_1) = h'(x_1) = h'(-x_0)$, o que confirma nossa afirmação anterior. Além disso, pelo fato de h ser de classe C^1 , obtemos que \tilde{h}' é contínua nos intervalos citados.

Também devemos verificar os valores de x que estão fora destes intervalos. Por exemplo, analisando a derivada no ponto zero, segue que:

$$\begin{cases} \tilde{h}'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{h}(x) - \tilde{h}(0^+)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = h'(0) = 0 \\ \tilde{h}'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tilde{h}(x) - \tilde{h}(0^-)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-h(-x) + h(0)}{x - 0} = -h'(0) = 0 \end{cases}$$

Logo vale a continuidade de $f'(0)$ e o mesmo conseguimos quando x vale L e $-L$, já que os limites laterais nestes pontos também valem zero (iguais). Assim, concluímos que h' é contínua em $(-L, L)$, sendo possível ampliar para a reta toda devido a periodicidade da função. Com isso, terminamos de mostrar a validade do teorema para $k = 1$.

Hipótese de Indução - supondo valer o teorema para k :

Se $h \in C^k([0, L])$ com $h^{(i)}(0) = 0 = h^{(i)}(L)$, $0 \leq i \leq k$ e \tilde{h} sua extensão ímpar periódica de período $2L$, então $\tilde{h} \in C^k(\mathbb{R})$.

Passo Indutivo - mostraremos que o teorema também se aplica para $k + 1$:

Tomemos $h \in C^{k+1}([0, L])$ com $h^{(i)}(0) = 0 = h^{(i)}(L)$, $0 \leq i \leq k + 1$. Da hipótese já temos que $\tilde{h}^{(k)}$ é de classe C^1 , com $h^{(k)}(0) = h^{(k)}(L) = 0$ e $(h^{(k)})'(0) = (h^{(k)})'(L) = 0$. Como $\tilde{h}^{(k)}$ é extensão ímpar de h , periódica com período $2L$, podemos aplicar o próprio passo base dessa demonstração e verificar que $\tilde{h}^{(k)} \in C^1$. Finalmente obtemos que $\tilde{h}^{(k+1)}$ é contínua, ou seja, $\tilde{h} \in C^{k+1}$. \square

6.2 Estudo de Convergência e Regularidade

Conforme vimos anteriormente, especificamente na Seção 3, a candidata à solução do problema de ondas, nas condições de contorno e iniciais dadas, é a seguinte:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \left[A_k \cos\left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L}t\right) \right], \quad (6.20)$$

com os coeficientes A_k e B_k da forma:

$$A_k = \frac{2}{L} \int_0^L w_0(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx \quad e \quad B_k = \frac{2}{k\pi\sqrt{\beta}} \int_0^L w_1(x) \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) dx. \quad (6.21)$$

Nosso objetivo agora, nessa seção, será mostrar que a série realmente resolve o problema como um todo. Primeiramente, devemos assegurar a convergência em (6.20) e, logo após, mostraremos um resultado interessante encontrado em nossos estudos, a constatação de que a candidata à solução herda a regularidade das condições iniciais, resultados que formalizamos como teoremas e corolários e que estão mostrados a seguir.

Teorema 12 *Se $w_0 \in C^1([0, L])$ com $w_0(0) = w_0(L) = w_0'(0) = w_0'(L) = 0$ e w_0'' integrável e quadrado integrável em $[-L, L]$, e também $w_1 \in C^0([0, L])$ com $w_1(0) = w_1(L) = 0$ e w_1' integrável e quadrado integrável em $[-L, L]$. Então $u(x, t)$ dado em (6.20) define uma função de classe $C^1([0, L] \times [0, \infty[)$ e que satisfaz parte do nosso problema da onda.*

Prova: Aplicando o módulo na candidata à solução, pela limitação obtemos:

$$\begin{aligned} |u_k(x, t)| &= \left| \sin\left(\frac{k\pi}{L}x\right) \right| \left| A_k \cos\left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L}t\right) + B_k \sin\left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L}t\right) \right| \\ &\leq |A_k| + |B_k|. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Logo, a convergência de u se resume na série numérica acima convergir. Para isso, pela definição de B_k em (6.21), em comparação com os coeficientes de Fourier de w_1 temos

$$B_k = \frac{L}{k\pi\sqrt{\beta}} b_k(w_1).$$

Se modularmos a igualdade acima e aplicarmos a Desigualdade de Young teremos

$$|B_k| \leq \frac{L}{2\pi\sqrt{\beta}} \left[\frac{1}{k^2} + |b_k(w_1)|^2 \right],$$

onde a série da expressão à direita converge por (5.18) e pela Desigualdade de Bessel.

O mesmo devemos mostrar para A_k , que equivale ao coeficiente de Fourier $b_k(w_0)$. Note que, com as hipóteses do enunciado, podemos utilizar o Teorema 7 para $i = 2$, portanto:

$$|A_k| = |b_k(w_0)| = \frac{L}{\pi} \left| \frac{1}{k} a_k(w'_0) \right| \leq \frac{L}{2\pi} \left[\frac{1}{k^2} + |a_k(w'_0)|^2 \right],$$

cuja série converge de maneira análoga.

Isso nos permite garantir a convergência de (6.22). Agora, se aplicarmos o teste de Weierstrass, segue a convergência uniforme de $u(x, t)$ e, conseqüentemente, concluímos sua continuidade pelo Teorema 9.

Para finalizar a demonstração, precisamos que u seja de classe C^1 . Tomemos então as derivadas de u_k em ambas as variáveis:

$$\frac{\partial}{\partial x} u_k(x, t) = \left(\frac{k\pi}{L} \right) \cos \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \left[A_k \cos \left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L} t \right) + B_k \sin \left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L} t \right) \right],$$

a qual em módulo se restringe à: $\left| \frac{\partial u_k}{\partial x} \right| \leq \left(\frac{k\pi}{L} \right) (|A_k| + |B_k|)$.

$$\frac{\partial}{\partial t} u_k(x, t) = \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \left[A_k \left(-\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L} \right) \sin \left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L} t \right) + B_k \left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L} \right) \cos \left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L} t \right) \right],$$

que fica majorada em: $\left| \frac{\partial u_k}{\partial t} \right| \leq \left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L} \right) (|A_k| + |B_k|)$.

Observe que ambos os casos de majoração são da forma $Ck(|A_k| + |B_k|)$, com C constante, portanto a análise desta forma valerá para ambas as derivadas. Primeiramente examinamos $k|B_k| = C_1 |b_k(w_1)|$, onde C_1 é constante, aqui também temos as condições necessárias para aplicar o Corolário 6 com $i = 1$ e garantir diretamente a convergência.

Agora para A_k temos $k|A_k| = C_2 k |b_n(w_0)|$, sendo C_2 constante, onde aplicamos o Corolário 6 para $i = 2$, obtendo de maneira direta que essa série converge. Analogamente segue a convergência de $k(|A_k| + |B_k|)$ e como consequência, pelo M-Teste de Weierstrass e pelo Teorema 9, temos finalmente que u' é contínua no intervalo dado. \square

Infelizmente essas condições não garantem a resolução total do problema, pois para solucionar a equação de ondas a função candidata precisa ser, no mínimo, de classe C^2 . Observe que se ampliarmos a regularidade de w_0 e w_1 , isso também amplia a regularidade da candidata u . Constatamos então a existência de uma herança direta de regularidade entre as condições iniciais e a função candidata, também vista no teorema a seguir.

Teorema 13 *Se $w_0 \in C^2([0, L])$ com $w_0^{(i)}(0) = w_0^{(i)}(L) = 0$ sendo $i = 0, 1, 2$ e w_0''' integrável e quadrado integrável em $[-L, L]$, e também $w_1 \in C^1([0, L])$ com $w_1^{(i)}(0) = w_1^{(i)}(L) = 0$ para $i = 0, 1$ e w_1'' integrável e quadrado integrável em $[-L, L]$. Então $u(x, t)$ dado em (6.20) define uma função de classe $C^2([0, L] \times [0, \infty[)$ e que satisfaz as condições iniciais e de contorno do nosso problema de ondas.*

Prova: Podemos observar que as condições do teorema anterior estão incluídas nas hipóteses deste caso, logo é possível aplicá-lo e diretamente obtemos que u é de classe C^1 . Assim, só nos falta mostrar que u'' é contínua, de onde precisaremos das derivadas parciais de segunda ordem de u_k :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_k(x, t) = - \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \left[A_k \cos \left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L} t \right) + B_k \sin \left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L} t \right) \right],$$

que em módulo é limitada por: $\left| \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2} \right| \leq \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 (|A_k| + |B_k|)$.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_k(x, t) = \sin \left(\frac{k\pi}{L} x \right) \left[-A_k \left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L} \right)^2 \cos \left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L} t \right) - B_k \left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L} \right)^2 \sin \left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L} t \right) \right],$$

que também se restringe em: $\left| \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} \right| \leq \left(\frac{k\pi\sqrt{\beta}}{L} \right)^2 (|A_k| + |B_k|)$.

Aqui novamente ambas majorações se aplicam em um mesmo caso

$$C \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (|A_k| + |B_k|), \quad C \in \mathbb{R}. \quad (6.23)$$

Procedendo de maneira análoga à demonstração anterior, apliquemos então o Corolário 6: sob a função w_0 utilizamos $i = 3$ obtendo que $k^2|A_k| = k^2|b_k(w_0)|$ converge, já com w_1 temos $k^2|B_k| = C_1 k|b_k(w_1)|$, para $C_1 \in \mathbb{R}$, onde usamos $i = 2$ e analogamente segue a convergência.

Deste modo, a série (6.23) converge, o que implica na convergência de u'' pelo M-Teste de Weierstrass e em sua continuidade pelo Teorema 9. Finalmente encontramos que $u \in C^2[0, L]$ e, além disso, a função candidata também satisfaz as condições de contorno e iniciais, como já vimos anteriormente, resolvendo então o problema de maneira completa e finalizando assim a prova. \square

Com estes resultados demonstrados, partimos então para uma generalização:

Teorema 14 *Se $w_0 \in C^m([0, L])$ com $w_0^{(i)}(0) = w_0^{(i)}(L) = 0$ sendo $i = 0, 1, \dots, m$, e $w_0^{(m+1)}$ integrável e quadrado integrável em $[-L, L]$, e também $w_1 \in C^{m-1}([0, L])$ com $w_1^{(i)}(0) = w_1^{(i)}(L) = 0$ para $i = 0, 1, \dots, m-1$ e $w_1^{(m)}$ integrável e quadrado integrável em $[-L, L]$. Então $u(x, t)$ dado em (6.20) define uma função de classe $C^m([0, L] \times [0, \infty[)$, $m \geq 2$, e que satisfaz as condições iniciais e de contorno do nosso problema da onda.*

Prova: Para esta demonstração iremos utilizar o Princípio da Indução.

Passo base - esta etapa seria mostrar em $m = 2$, porém isto já fizemos no Teorema 13.

Hipótese Indutiva - tomemos agora como válido o teorema para m , conforme aparece no enunciado acima.

Passo indutivo - por fim, nos resta verificar a validade do teorema para $m + 1$.

Com a hipótese indutiva, temos que $u \in C^m$, faltando apenas mostrar que $u^{(m+1)}$ é contínua. Por recorrência, sabemos que as derivadas parciais de ordem $m + 1$ de u_k são limitadas por uma sequência numérica da forma

$$Ck^m (|A_k| + |B_k|), \quad C \in \mathbb{R}.$$

A partir disto, analisemos a equação acima em duas partes. Primeiramente a expressão $k^m|A_k|$, onde podemos aplicar o Corolário 6 sob a função w_0 e usando $i = m + 1$, o que implica na convergência de $k^m |b_k(w_0)|$. Fazendo a mesma aplicação para a outra parte, sob a função w_1 e com $i = m$, obtemos então que $k^{m-1} |b_k(w_1)|$ converge.

Ao fim, segue a mesma conclusão do teorema anterior, ou seja, que u é de classe C^{m+1} no intervalo $[0, L]$. Note que não precisamos mais verificar se u resolve as condições do problema, justamente porque o teorema anterior está incluído neste, logo esta verificação já foi realizada naquele caso. □

7 Estudo do Caso Bidimensional

Vamos ampliar agora nosso estudo abordando o problema de ondas no caso bidimensional, que recai sobre membranas, ou seja, folhas de espessura muito pequena, de material flexível e que podem ser esticadas. Citamos como exemplo a membrana de um tambor, observe que quando ela está em repouso sua posição coincidirá com o plano xy e quando ocorre vibração surge então a terceira coordenada, que denotaremos por u . Abaixo segue a dedução da equação de ondas na membrana retangular, realizada por Kreszig (2009b).

7.1 Dedução da Equação de Ondas Bidimensionais

A equação da membrana retangular vibrante consiste em uma EDP com suas condições adicionais. Para obtermos essa EDP, será utilizado o modelo de forças atuando numa pequena porção da membrana enquanto ela vibra, se movimentando para cima e para baixo, sempre no sentido positivo do eixo u (conforme representado na figura).

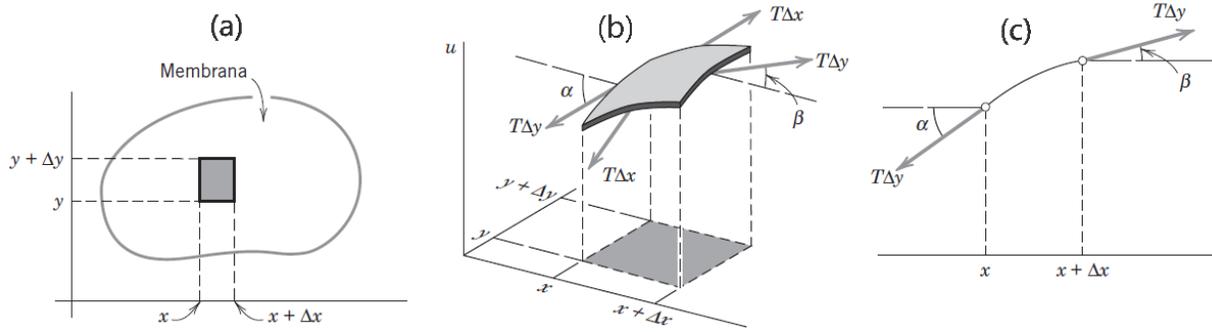


Figura 6: (a) membrana em repouso; (b) porção da membrana em movimento e (c) detalhe da força tensão na membrana. Fonte: Kreyszig (2009b).

Como as deflexões da membrana e os ângulos de inclinação são pequenos, os lados da porção defletida são aproximadamente iguais aos lados da porção inicial (Δx e Δy). Sobre essa membrana temos a ação da tensão T (força por unidade de comprimento), cujos valores nos lados da porção são aproximadamente $T\Delta x$ e $T\Delta y$. Pela flexibilidade sabemos que estas forças são tangentes à membrana em cada instante do movimento.

Vejam agora os componentes destas forças, obtidas utilizando os ângulos de inclinação. Primeiramente, no sentido horizontal percebemos na Figura 6(c) que

$$\cos \beta = \frac{F_{x,1}}{T\Delta y} \Rightarrow F_{x,1} = T\Delta y \cdot \cos \beta,$$

e, analogamente: $-F_{x,2} = T\Delta y \cdot \cos \alpha$.

Como os ângulos são pequenos, seus cossenos estão muito próximos de 1, disto segue que $F_{x,1} \approx -F_{x,2}$. Logo, a componente horizontal resultante será praticamente nula e o movimento da membrana será transversal, considerando apenas as componentes verticais da força, que são:

$$F_{y,1} = T\Delta y \cdot \sin \beta \quad e \quad -F_{y,2} = T\Delta y \cdot \sin \alpha$$

Como já vimos, os cossenos destes ângulos são aproximadamente 1, então podemos substituir os senos pelas tangentes. Assim, a componente vertical resultante será

$$\begin{aligned} F_y = F_{y,1} + F_{y,2} &\approx T\Delta y [\tan \beta - \tan \alpha] \\ &= T\Delta y [u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)], \end{aligned} \quad (7.24)$$

onde y_1 e y_2 são valores no intervalo $[y, y + \Delta y]$. Similarmente, nos outros dois lados da porção a resultante das componentes verticais das forças é

$$F_x = T\Delta x [u_y(x_1, y + \Delta y) - u_x(x_2, y)], \quad (7.25)$$

onde x_1 e x_2 são valores no intervalo $[x, x + \Delta x]$.

Agora a segunda lei de Newton implica que a soma das forças dadas por (7.24) e (7.25) equivale à massa $\rho\Delta A$ dessa pequena porção multiplicada pela aceleração u_{tt} , com ρ representando a massa da membrana não-defletida por unidade de área e $\Delta A = \Delta x\Delta y$ a área dessa porção quando ela não está defletida. Portanto

$$\rho\Delta x\Delta y \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\Delta y [u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)] + T\Delta x [u_y(x_1, y + \Delta y) - u_x(x_2, y)]$$

em que a derivada é calculada em algum ponto da porção. Dividindo por $\Delta x\Delta y$ segue

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\rho} \left[\frac{u_x(x + \Delta x, y_1) - u_x(x, y_2)}{\Delta x} + \frac{u_y(x_1, y + \Delta y) - u_x(x_2, y)}{\Delta y} \right].$$

Por fim, tomando o limite quando Δx e Δy tendem a zero e denotando $c^2 = \frac{T}{\rho}$ obtemos por fim a equação de ondas

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (7.26)$$

7.2 Problema de Ondas em Membranas Retangulares

Nesta seção, estudaremos a equação de ondas bidimensional no caso da membrana retangular, definida em um retângulo $\Omega = [0, a] \times [0, b] \times [0, \infty[$. Ainda segundo Kreyszig (2009b), o problema envolvendo este tipo de equação é semelhante ao do caso unidimensional, porém envolve uma variável a mais. Estes problemas visam obter o deslocamento $u(x, y, t)$ de um ponto $(x, y) \in \Omega$, no tempo $t \geq 0$ e partindo do repouso, sendo dadas as funções u_0 e u_1 reais em Ω e satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \text{ em } \Omega \\ a \text{ restrição de } u \text{ no contorno de } \Omega \text{ é zero} \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, 0) = u_1(x, y) \text{ em } \Omega \end{cases}$$

Resolvendo o problema por separação de variáveis, vamos então supor $u(x, y, t) = v(x, y)\theta(t)$ e substituir na equação de ondas obtendo:

$$v(x, y)\theta''(t) = \alpha^2\theta(t) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \Rightarrow \frac{\theta''(t)}{\alpha^2\theta(t)} = \frac{\nabla^2 v}{v(x, y)} = -\lambda^2,$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\nabla^2 v$ é chamado **operador de Laplace** (ou *laplaciano*) de 2ª ordem da função $v(x, y)$.

Conseguimos assim separar o problema em duas equações diferenciais:

$$\nabla^2 v + \lambda^2 v(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \text{ em } \Omega \quad (7.27)$$

$$\theta''(t) + \lambda^2 \alpha^2 \theta(t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (7.28)$$

Note que a equação (7.27) representa uma EDP conhecida como *equação bidimensional de Helmholtz*, que contém a variável v medindo a amplitude do movimento, ou seja, o deslocamento máximo da membrana em relação à posição de equilíbrio em cada instante. Porém, o objetivo é proceder analogamente ao problema unidimensional obtendo apenas EDO's, sendo assim separamos esta equação fazendo $v(x, y) = F(x)G(y)$, o que resulta

$$F''(x)G(y) + F(x)G''(y) + \lambda^2 F(x)G(y) = 0 \Rightarrow [F''(x) + \lambda^2 F(x)] G(y) = -F(x)G''(y).$$

Dividindo agora ambos os lados da última igualdade por $-F(x)G(y)$:

$$-\frac{1}{F(x)} [F''(x) + \lambda^2 F(x)] = \frac{G''(y)}{G(y)}.$$

Pelo que vimos anteriormente que ambos os lados devem ser iguais a uma constante $-k^2$, para obter soluções não-nulas para a condição de contorno $u = 0$. Sendo assim,

novamente teremos duas EDO's lineares homogêneas de 2ª ordem

$$\begin{aligned} F''(x) + (\lambda^2 - k^2)F(x) &= 0 \\ G''(y) + k^2G(y) &= 0, \end{aligned}$$

cujas soluções são

$$F(x) = c_1 \cos(px) + c_2 \sin(px) \quad e \quad G(y) = c_3 \cos(ky) + c_4 \sin(ky), \quad (7.29)$$

onde $p^2 = \lambda^2 - k^2$ e c_1, c_2, c_3, c_4 constantes.

O próximo passo é verificar a condição $u = 0$ no contorno. Sabemos que a membrana no plano xy é o retângulo dado por $\Omega = [0, a] \times [0, b] \times [0, \infty[$, disto segue que a função u se anula nas retas $x = 0, x = a, y = 0$ e $y = b$. Portanto:

$$F(0) = F(a) = G(0) = G(b) = 0.$$

Juntando o resultado acima com (7.29) obtemos que: $F(0) = c_1 = 0$ e $G(0) = c_3 = 0$. Além disso, também teremos $F(a) = c_2 \sin(pa) = 0$ e $G(b) = c_4 \sin(kb) = 0$ e, para evitar que $v(x, y)$ seja nula, deve valer que

$$\sin(pa) = 0 \Rightarrow pa = m\pi \quad e \quad \sin(kb) = 0 \Rightarrow kb = n\pi, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Assim, conseguimos encontrar as soluções da equação de Helmholtz, que se anulam no contorno da membrana e dependem dos naturais m, n :

$$v_{mn}(x, y) = F_m(x)G_n(y) = C \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad C \in \mathbb{R}; \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Agora solucionamos a EDO (7.28), cujas raízes da solução característica são $\pm i\lambda\alpha$. Logo, a solução da EDO é da forma

$$\theta(t) = c_5 \cos(\alpha\lambda t) + c_6 \sin(\alpha\lambda t), \quad \alpha, c_5, c_6 \in \mathbb{R}.$$

Porém vimos que $\lambda^2 = p^2 + k^2$ e também $p = \frac{m\pi}{a}$, $k = \frac{n\pi}{b}$. Com isso, a constante λ depende dos inteiros m, n e é dada por

$$\lambda_{mn} = \pi \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (7.30)$$

Finalmente obtemos a forma geral das funções candidatas à solução da equação de ondas e que satisfaz também as condições de contorno:

$$u_{mn}(x, y, t) = [A_{mn} \cos(\beta_{mn}t) + B_{mn} \sin(\beta_{mn}t)] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad (7.31)$$

onde α , A_{mn} , B_{mn} são constantes e $\beta_{mn} = \alpha\lambda_{mn}$, para λ_{mn} dada por (7.30).

O autor ainda cita que essas funções são chamadas de **autofunções** ou *funções características* e os números β_{mn} são os **autovalores** ou *valores característicos* da membrana retangular vibrante. Além disso, nos pontos onde u se anula aparecem as curvas chamadas de **linhas nodais**, onde as abscissas são denominadas nós e as curvas dependem diretamente da geometria da membrana.

Como ilustração, apresentamos o exemplo de um problema com a membrana quadrada.

Exemplo 4: *Consideremos o caso da membrana quadrada com $a = b = 1$.*

Primeiramente encontra-se os autovalores $\beta_{mn} = \alpha\pi\sqrt{m^2 + n^2}$. Observe que $\beta_{mn} = \beta_{nm}$, mas apesar disso não costuma ser válida a igualdade das autofunções $u_{mn} = u_{nm}$. Por exemplo, $\beta_{34} = \beta_{43} = 5\alpha\pi$, mas

$$\begin{aligned} u_{34} &= [A_{34} \cos(5\alpha\pi t) + B_{34} \sin(5\alpha\pi t)] \sin(3\pi x) \sin(4\pi y) \\ &\neq [A_{43} \cos(5\alpha\pi t) + B_{43} \sin(5\alpha\pi t)] \sin(4\pi x) \sin(3\pi y) = u_{43}. \end{aligned}$$

Neste exemplo, temos as seguintes linhas nodais para u_{34} : $x = 0$, $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $x = 1$, $y = 0$, $y = \frac{1}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{4}$ e $y = 1$. Isto significa que os segmentos dessas retas no

interior do quadrado os dividem em 3 colunas e 4 linhas. De maneira geral, as linhas nodais decompõem a membrana em $m \times n$ retângulos (conforme mostra a figura), cada um vibrando com a fronteira fixa, similarmente à membrana inteira.

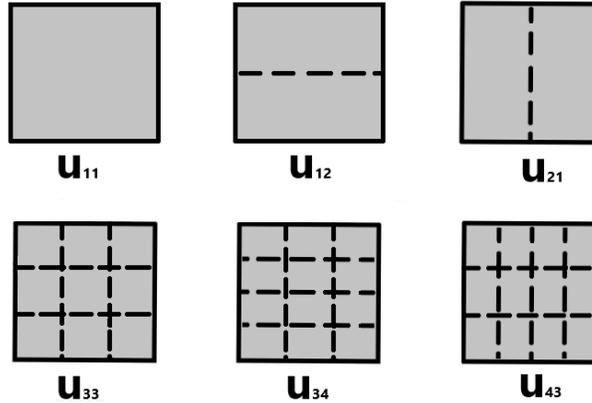


Figura 7: Linhas nodais das soluções u_{11} , u_{12} , u_{21} , u_{33} , u_{34} e u_{43} da membrana quadrada.

Fazendo $A_{34} = 1$ e $B_{34} = B_{43} = 0$, segue

$$u_{34} + u_{43} = \cos(5\alpha\pi t) [\sin(3\pi x) \sin(4\pi y) + A_{43} \sin(4\pi x) \sin(3\pi y)],$$

que representa outra vibração correspondente ao autovalor $5\alpha\pi$. Várias outras funções podem ter o mesmo valor numérico de β_{mn} , como por exemplo u_{18} , u_{81} , u_{47} e u_{74} , porém o que muda de uma para outra são as linhas nodais.

Continuaremos a resolução do problema de ondas, pois as funções u_{mn} que encontramos em (7.31) solucionam apenas a equação de ondas e as condições de contorno, precisamos assegurar ainda as condições iniciais. Para isso, com as mesmas definições anteriores, tomemos u como a série abaixo

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{mn}(x, y, t) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [A_{mn} \cos(\beta_{mnt}) + B_{mn} \sin(\beta_{mnt})] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \end{aligned} \quad (7.32)$$

Sendo assim, utilizando (7.32) em conjunto com $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ segue

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (7.33)$$

Procederemos do mesmo modo que o caso unidimensional, comparando as funções com suas séries de Fourier, porém aqui iremos nos deparar com as **séries duplas de Fourier**. Temos que (7.33) é a série dupla de Fourier da função u_0 , que deve ser dada, e para encontrar seus coeficientes precisamos separá-la em duas séries de Fourier simples, sendo a primeira delas

$$K_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

Com isso, reescrevemos (7.33) na forma

$$u_0(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right).$$

Com esse procedimento, conseguimos encontrar os coeficientes de Fourier. Por resultados que já vimos anteriormente temos

$$A_{mn} = \frac{2}{b} \int_0^b K_m(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dy \quad e \quad K_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a u_0(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx.$$

De ambos os resultados acima segue então que

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a u_0(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (7.34)$$

Procedemos de maneira análoga para a derivada de (7.32):

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{mn} [B_{mn} \cos(\beta_{mn}t) - A_{mn} \sin(\beta_{mn}t)] \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right).$$

Utilizando agora a condição $\frac{\partial}{\partial t}u(x, y, 0) = u_1(x, y)$ encontramos

$$u_1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \beta_{mn} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right),$$

e, por sua vez, supondo que a função u_1 possa ser expandida na série dupla de Fourier, encontramos os seguintes coeficientes

$$B_{mn} = \frac{4}{ab\beta_{mn}} \int_0^b \int_0^a u_1(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy, \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (7.35)$$

Finalmente, concluímos que (7.32), com os coeficientes (7.34) e (7.35), soluciona o problema de maneira geral. Isso é válido desde que u_0 e u_1 apresentem as características necessárias para que u possa ser expressa por (7.32).

Abaixo segue outro exemplo do mesmo livro, mostrando a aplicação destes resultados:

Exemplo 5: *Encontrar a vibração de uma membrana retangular de lados $a = 4m$ e $b = 2m$ se a tensão é de $12,5 \text{ lb/m}$, a massa específica é de $2,5 \text{ kg/m}^2$, a velocidade inicial é nula e o deslocamento inicial é dado por*

$$f(x, y) = \frac{1}{10}(4x - x^2)(2y - y^2) \text{ metros.}$$

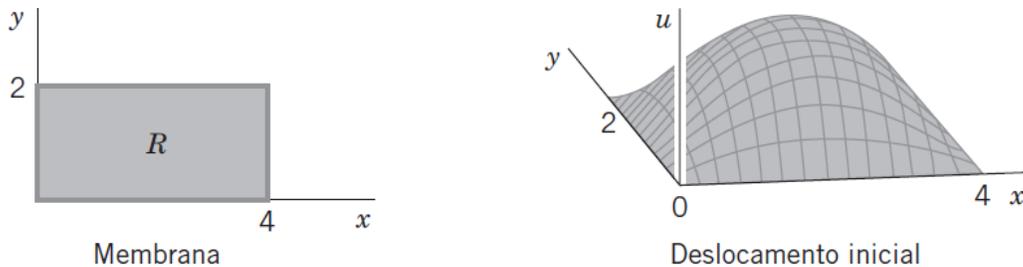


Figura 8: Representação da membrana e seu deslocamento. Fonte: Kreyszig (2009b).

Como já vimos a vibração de uma membrana retangular é dada por uma equação de

ondas bidimensional, cuja equação foi definida em (7.26), onde tínhamos que

$$c^2 = \frac{T}{\rho},$$

onde T é a tensão e ρ a massa específica da membrana, ambas dadas no enunciado, logo $c^2 = \frac{12,5}{2,5} = 5 \text{ m}^2/\text{s}^2$ e com isso obtemos a equação de ondas $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u = 5 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u \right)$.

O próximo passo é encontrar os coeficientes (7.34) e (7.35), note que pela velocidade inicial $\frac{\partial}{\partial t} u(x, y, 0)$ ser nula, segue que $u_1(x, y) = 0$ e, conseqüentemente, $B_{mn} = 0$. Já para A_{mn} precisaremos resolver a integral dupla de (7.34) com $u_0(x, y)$ dada pela $f(x, y)$ do enunciado. Então

$$\begin{aligned} A_{mn} &= \frac{4}{4 \cdot 2} \int_0^2 \int_0^4 \frac{1}{10} (4x - x^2)(2y - y^2) \sin\left(\frac{m\pi}{4}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2}y\right) dx dy \\ &= \frac{1}{20} \left[\int_0^4 (4x - x^2) \sin\left(\frac{m\pi}{4}x\right) dx \right] \left[\int_0^2 (2y - y^2) \sin\left(\frac{n\pi}{2}y\right) dy \right], \end{aligned}$$

onde na última parte utilizamos o Teorema de Fubini.

Resolvendo então as integrais obtemos

$$A_{mn} = \frac{1}{20} \left(\frac{128}{m^3\pi^3} [1 - (-1)^m] \right) \cdot \left(\frac{16}{n^3\pi^3} [1 - (-1)^n] \right) \quad m, n = 1, 2, \dots$$

Observe que, se m e n são pares, então a expressão acima se anula, logo iremos considerar apenas as constantes ímpares, pois resulta em

$$A_{mn} = \frac{1}{20} \left(\frac{256}{m^3\pi^3} \right) \left(\frac{32}{n^3\pi^3} \right) = \frac{8192}{m^3 n^3 \pi^6}.$$

Por fim, também precisamos encontrar o coeficiente β_{mn} , que vale

$$\beta_{mn} = \sqrt{5}\pi \sqrt{\frac{m^2}{16} + \frac{n^2}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{4}\pi \sqrt{m^2 + 4n^2}.$$

Portanto, encontramos a equação da vibração desta membrana em (7.31):

$$u(x, y, t) = \frac{8192}{\pi^6} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m^3 n^3} \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{4} \pi \sqrt{m^2 + 4n^2} t\right) \sin\left(\frac{m\pi}{4} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{2} y\right),$$

onde m e n são os números naturais ímpares.

O exemplo anterior nos mostra na prática que somos capazes de resolver um problema de ondas bidimensional no caso das membranas retangulares. Porém nem sempre nos deparamos com configurações desse tipo e, como já citamos, a geometria da membrana interfere diretamente na sua vibração. A seguir estudaremos o caso da membrana circular.

7.3 Ondas em Membranas Circulares

Os problemas de ondas que analisam o movimento vibratório de uma membrana circular costumam surgir durante o estudo dos tampos de tambores, os quais não somos capazes de encontrar soluções de maneira direta. Porém acabamos de verificar a eficácia do processo na membrana retangular, portanto nos basta apenas fazer uma mudança de coordenadas na forma polar para que o nosso caso recaia sobre algo que já sabemos resolver.

7.3.1 Laplaciano em Coordenadas Polares

A primeira adaptação a fazer é a transformação do laplaciano $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ da equação de onda para coordenadas polares, visando obter um domínio retangular para u . Neste sistema de coordenadas consideramos $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, agora aplicando a regra da cadeia encontramos que

$$u_x(x, y) = u_x(r, \theta) = u_r r_x + u_\theta \theta_x,$$

onde os subscritos representam as derivadas parciais.

E derivando mais uma vez em relação à variável x obtemos

$$\begin{aligned} u_{xx}(x, y) &= (u_r r_x + u_\theta \theta_x)_x = (u_r)_x r_x + u_r r_{xx} + (u_\theta)_x \theta_x + u_\theta \theta_{xx} \\ &= (u_{rr} r_x + u_{r\theta} \theta_x) r_x + u_r r_{xx} + (u_{\theta r} r_x + u_{\theta\theta} \theta_x) \theta_x + u_\theta \theta_{xx}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Agora precisamos de r_x e θ_x e, para isso, sabemos que $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $\theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$.

Daí teremos

$$r_x = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r}$$

e também

$$\theta_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} = -\frac{y}{r^2}.$$

Além disso, precisaremos de r_{xx} e θ_{xx} , então deriva-se novamente as expressões acima encontrando

$$r_{xx} = \frac{y^2}{r^3} \quad e \quad \theta_{xx} = \frac{2xy}{r^4}.$$

Substituindo as expressões acima em (7.36) e tomando a continuidade dessas derivadas parciais (para valer $u_{r\theta} = u_{\theta r}$) finalmente segue que

$$u_{xx} = \frac{x^2}{r^2} u_{rr} - \frac{2xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{y^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{y^2}{r^3} u_r + \frac{2xy}{r^4} u_\theta.$$

Procedendo analogamente para u_{yy} obtemos

$$u_{yy} = \frac{y^2}{r^2} u_{rr} + \frac{2xy}{r^3} u_{r\theta} + \frac{x^2}{r^4} u_{\theta\theta} + \frac{x^2}{r^3} u_r - \frac{2xy}{r^4} u_\theta.$$

Por fim, somamos ambas as expressões para obter o laplaciano em coordenadas polares:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}.$$

7.3.2 Problema das Membranas Circulares de Simetria Radial

O estudo das membranas circulares é de grande aplicação, pois além dos tampos de tambores, esse tipo de membrana também está presente em bombas hidráulicas, microfones e telefones (KREYSZIG, 2009b). A partir de agora estudaremos então as vibrações de uma membrana circular plana de raio arbitrário R , feita de material elástico sem resistência ao dobramento, onde podemos aplicar o modelo das equações de onda bidimensionais em coordenadas polares, ou seja

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right).$$

Vamos considerar soluções $u(r, t)$ da equação acima que sejam radialmente simétricas, isto significa que não há dependência de θ . Logo a equação de ondas se reduz e as condições iniciais também não dependerão desta variável, sendo assim teremos o seguinte problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \\ \text{condição de contorno } u(R, t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \\ \text{condições iniciais } u(r, 0) = f(r) \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = g(r) \end{array} \right.$$

Para resolver o problema partiremos do método de separação de variáveis usando $u(r, t) = W(r)G(t)$. Fazendo as respectivas derivadas e aplicando na equação teremos

$$\frac{G''(t)}{c^2 G(t)} = \frac{1}{W(r)} \left(W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) \right).$$

Na próxima etapa igualamos ambos lados da igualdade a uma constante $-h^2$ a fim de obter soluções não-nulas. Isto resulta em

$$G''(t) + c^2 h^2 G(t) = 0 \quad (7.37)$$

$$W''(r) + \frac{1}{r} W'(r) + h^2 W(r) = 0 \quad (7.38)$$

Primeiro resolveremos (7.37), onde as raízes do polinômio característico são $\pm ich$, com

isso a solução geral dessa EDO é

$$G(t) = c_1 \cos(cht) + c_2 \sin(cht), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (7.39)$$

Agora consideremos (7.38) e introduziremos a variável independente $s = hr$:

$$W'(r) = \frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{\partial W}{\partial s} h \quad e \quad W''(r) = \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} h^2.$$

Substituindo essas expressões na EDO (7.38) e usando o fato de $\frac{h}{r} = \frac{h^2}{s}$ segue que

$$h^2 \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + \frac{h^2}{s} \frac{\partial W}{\partial s} + h^2 W = 0 \quad \Rightarrow \quad s^2 \frac{\partial^2 W}{\partial s^2} + s \frac{\partial W}{\partial s} + s^2 W = 0, \quad (7.40)$$

sendo a última equação uma particularidade da **equação de Bessel**, de ordem zero.

7.3.3 Equação de Bessel de Ordem Zero

Uma das maneiras de encontrar a solução geral da EDO (7.40) é aplicando o *Método de Frobenius*, utilizado também por Oliveira e Tygel (2005), o qual busca soluções na forma de séries de Frobenius do tipo

$$W(s) = (s - s_0)^q \sum_{n=0}^{\infty} a_n (s - s_0)^n, \quad a_0 \neq 0, \quad (7.41)$$

com q sendo o expoente indicial e s_0 um ponto singular regular da função.

O ponto $s_0 = 0$ é um ponto singular regular para a equação de Bessel, isso significa que, ao escrevermos a EDO (7.40) na forma geral $W''(s) + P(s)W'(s) + Q(s)W(s)$ teríamos que $P(s) = \frac{1}{s}$ e $Q(s) = 1$; sendo assim a função $P(s)$ não seria analítica no ponto $s = 0$ (definição de *ponto singular*), mas se tornaria analítica na função $\tilde{P}(s) = sP(s)$ (caracterização de *ponto singular regular*). Usando este $s_0 = 0$ em (7.41) conseguiremos encontrar uma solução particular para a EDO da seguinte forma

$$W_1(s) = s^q \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{q+n}, \quad a_0 \neq 0, \quad s > 0. \quad (7.42)$$

Fazendo então sua substituição na equação de Bessel, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= s^2 \frac{\partial^2 W_1}{\partial s^2} + s \frac{\partial W_1}{\partial s} + s^2 W_1 \\
&= s^2 \sum_{n=0}^{\infty} (q+n)(q+n-1) a_n s^{q+n-2} + s \sum_{n=0}^{\infty} (q+n) a_n s^{q+n-1} + s^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{q+n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (q+n)^2 a_n s^{q+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n s^{q+n+2}. \tag{7.43}
\end{aligned}$$

Vamos proceder agora de maneira a escrever (7.43) em uma única somatória. Primeiro introduzimos na segunda somatória o índice $m = n + 2$, resultando

$$\sum_{n=0}^{\infty} (q+n)^2 a_n s^{q+n} + \sum_{m=2}^{\infty} a_{m-2} s^{q+m} = 0.$$

Na sequência, separamos os dois primeiros termos da primeira série e retornamos para n o índice da segunda, encontrando

$$a_0 q^2 s^q + a_1 (q+1)^2 s^{q+1} + \sum_{n=2}^{\infty} [(q+n)^2 a_n + a_{n-2}] s^{q+n} = 0.$$

Como $a_0 \neq 0$, devemos ter

$$\begin{cases} a_0 q^2 = 0 & \Rightarrow q = 0 \\ a_1 (q+1)^2 = 0 & \Rightarrow a_1 = 0 \\ (q+n)^2 a_n + a_{n-2} = 0 & \Rightarrow a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2} \end{cases}$$

A última relação vale para todo $n = 2, 3, \dots$. Podemos observar que para n ímpar, os coeficientes a_n serão nulos, pelo fato de $a_1 = 0$; já no caso par $n = 2k$ teremos um padrão

$$\begin{cases} a_2 = a_{2.1} = -\frac{a_0}{2^2} = -\frac{a_0}{2^2 1^2} \\ a_4 = a_{2.2} = -\frac{a_2}{4^2} = \frac{a_0}{2^2 4^2} = \frac{a_0}{2^4 (1.2)^2} \\ a_6 = a_{2.3} = -\frac{a_4}{6^2} = -\frac{a_0}{2^2 4^2 6^2} = -\frac{a_0}{2^6 (1.2.3)^2} \\ \dots \end{cases}$$

De maneira geral, teremos que estes coeficientes se apresentam da forma

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{(2^k k!)^2}, \quad \forall k = 1, 2, \dots$$

No caso da EDO de Bessel de ordem zero costuma-se usualmente escolher $a_0 = 1$, com isso encontramos a partir de (7.42) a primeira solução

$$W_1(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} s^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{s}{2}\right)^{2k}, \quad (7.44)$$

que costuma ser chamada de $J_0(s)$ ou **função de Bessel de primeira espécie de ordem zero** e pode ser denotada de outra maneira por:

$$J_0(s) = 1 - \frac{s^2}{4} + \frac{s^4}{64} - \frac{s^6}{2304} + \dots$$

Uma segunda solução, linearmente independente, pode ser obtida pela série

$$W_2(s) = v(s)J_0(s), \quad s > 0, \quad (7.45)$$

com a função $v(s)$ a determinar.

Calculando as derivadas de (7.45) e substituindo em (7.40) segue que

$$\begin{aligned} 0 &= s^2(v''J_0 + 2v'J_0' + vJ_0'') + s(v'J_0 + vJ_0') + s^2vJ_0 \\ &= s[s(v''J_0 + 2v'J_0') + v'J_0] + v(s^2J_0'' + sJ_0' + s^2J_0), \end{aligned}$$

onde a segunda expressão entre parenteses na última igualdade se anula, pois como já vimos J_0 também é solução de (7.40).

Sendo assim, como $s \neq 0$, temos então a seguinte igualdade

$$v''J_0s + v'(2sJ_0' + J_0) = 0,$$

que pode ser resolvida mais facilmente se utilizarmos a notação $z = v'$ e a transformarmos

na seguinte EDO de primeira ordem

$$\frac{\partial z}{\partial s} + \left(\frac{2J'_0}{J_0} + \frac{1}{s} \right) = 0,$$

cuja solução pode ser encontrada por separação de variáveis, correspondendo a

$$z(s) = C \frac{1}{sJ_0(s)^2}.$$

Retornando então à notação inicial obtemos que

$$v(z) = C \int \frac{1}{sJ_0(s)^2} + D.$$

Qualquer função v do tipo acima resolve nossa EDO, portanto escolhemos $C = 1$ e $D = 0$ para o cálculo, sendo assim a segunda solução da EDO de Bessel é

$$W_2(s) = J_0(s) \int \frac{1}{sJ_0(s)^2}. \quad (7.46)$$

Vamos buscar agora uma melhor representação para (7.46), para isso usaremos a expressão de $J_0(s)$ dada em (7.44), logo

$$\frac{1}{J_0(s)^2} = \frac{1}{\left(1 - \frac{s^2}{4} + \frac{s^4}{64} - \frac{s^6}{2304} + \dots\right)^2} = \frac{1}{1 - \frac{s^2}{2} + \frac{3s^4}{32} - \frac{5s^6}{576} + \dots} = b_0 + b_2s^2 + b_4s^4 + b_6s^6 + \dots,$$

com b_n coeficientes a determinar.

A igualdade acima vale, pois $J_0(s)^2$ só envolve potências de s com expoente par, logo o seu inverso também, pois

$$\begin{aligned} 1 &= \left(1 - \frac{s^2}{2} + \frac{3s^4}{32} - \frac{5s^6}{576} + \dots\right) (b_0 + b_2s^2 + b_4s^4 + b_6s^6 + \dots) \\ &= b_0 + \left(b_2 - \frac{b_0}{2}\right)s^2 + \left(b_4 - \frac{b_2}{2} + \frac{3b_0}{32}\right)s^4 + \left(b_6 - \frac{b_4}{2} + \frac{3b_2}{32} - \frac{5b_0}{576}\right)s^6 + \dots, \end{aligned}$$

o que nos leva à resolução do sistema:

$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_2 - \frac{b_0}{2} = 0 & \Rightarrow b_2 = \frac{1}{2} \\ b_4 - \frac{b_2}{2} + \frac{3b_0}{32} = 0 & \Rightarrow b_4 = \frac{5}{32} \\ b_6 - \frac{b_4}{2} + \frac{3b_2}{32} - \frac{5b_0}{576} & \Rightarrow b_6 = \frac{23}{576} \\ \dots \end{cases}$$

Portanto, com esses coeficientes em (7.46) segue a segunda solução da equação

$$\begin{aligned} W_2(s) &= J_0(s) \int \left(\frac{1}{s} + \frac{1}{2}s + \frac{5}{32}s^3 + \frac{23}{576}s^5 + \dots \right) \\ &= J_0(s) \ln s + J_0(s) \left(\frac{1}{4}s^2 + \frac{5}{128}s^4 + \frac{23}{3456}s^6 + \dots \right) \\ &= J_0(s) \ln s + \left(1 - \frac{s^2}{4} + \frac{s^4}{64} - \frac{s^6}{2304} + \dots \right) \left(\frac{1}{4}s^2 + \frac{5}{128}s^4 + \frac{23}{3456}s^6 + \dots \right) \\ &= J_0(s) \ln s + \left(\frac{1}{4}s^2 - \frac{3}{128}s^4 + \frac{11}{13824}s^6 + \dots \right) \\ &= J_0(s) \ln s + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k!)^2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{k} \right) \left(\frac{s}{2} \right)^{2k}, \end{aligned}$$

denominada de $Y_0(s)$ ou **função de Bessel de segunda espécie de ordem zero**.

Finalmente, obtemos a solução geral de (7.40), que é a combinação linear das duas soluções particulares, ou seja

$$W(r) = c_3 J_0(s) + c_4 Y_0(s), \quad c_3, c_4 \in \mathbb{R}. \quad (7.47)$$

7.3.4 Solução do Problema das Membranas Circulares de Simetria Radial

Regressamos agora ao nosso problema inicial, onde a solução é da forma $u(r, t) = W(r)G(t)$, com $W(r)$ descrita por (7.47) e $G(t)$ dada por (7.39). Com isso, temos uma candidata à solução da equação de ondas bidimensional do problema:

$$u(r, t) = [c_1 \cos(cht) + c_2 \sin(cht)] [c_3 J_0(s) + c_4 Y_0(s)].$$

O passo seguinte será verificar as condições de contorno e iniciais. Assim, ao observarmos a deflexão $u(r, 0) = W(r)G(0)$ da membrana, percebemos que ela é sempre finita, porém pela definição de Y_0 ela se torna infinita quando $s \rightarrow 0$. Deste modo, não poderemos empregar Y_0 em nossa candidata à solução, logo escolhemos $c_4 = 0$ e, conseqüentemente, $c_3 \neq 0$ para evitar que $W(r)$ seja nula. Portanto a candidata $u(r, t)$ se torna

$$u(r, t) = J_0(s) [C_1 \cos(cht) + C_2 \sin(cht)], \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Prosseguindo, temos pela condição de contorno que $u(R, t) = 0$, assim exigiremos que $W(R) = J_0(s) = J_0(hR) = 0$; isso evita que $G(t)$, e conseqüentemente u , seja nula. Tal condição pode ser satisfeita pois J_0 tem um número infinito de zeros reais α_n , conforme podemos observar na figura abaixo.

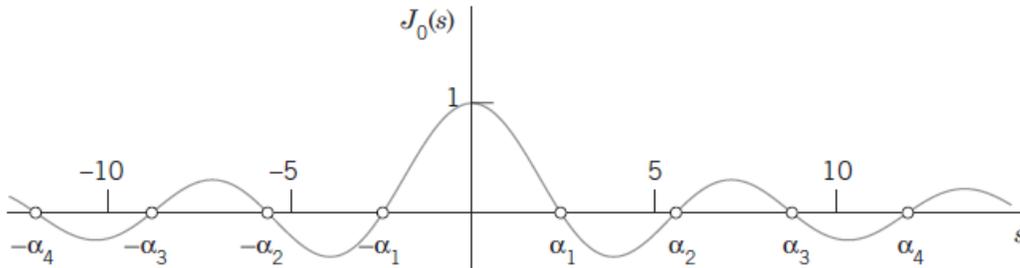


Figura 9: Gráfico da função de Bessel J_0 com $\alpha_1 = 2,4048$, $\alpha_2 = 5,5201$, $\alpha_3 = 8,6537$ e $\alpha_4 = 11,7915$. Fonte: Kreyzsig (2009b).

Portanto temos que $hR = \alpha_n$ ou $h = h_n = \frac{\alpha_n}{R}$, $n = 1, 2, \dots$. Assim as funções

$$W_n(r) = J_0(h_n r) = J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right), \quad n = 1, 2, \dots$$

são soluções da equação da membrana e que se anulam no contorno.

Analogamente devemos reescrever $G(t) = G_n(t)$, isto nos leva às funções $u_n(r, t)$, que solucionam de maneira geral a condição de contorno, descritas da forma

$$u_n(r, t) = W_n(r)G_n(t) = \left[A_n \cos\left(\frac{\alpha_n c}{R} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\alpha_n c}{R} t\right) \right] J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right), \quad n = 1, 2, \dots (7.48)$$

as quais são as *funções características* do problema e $\lambda_n = \frac{\alpha_n c}{R}$ os *valores característicos*.

As funções u_n encontradas determinam as vibrações da membrana, chamadas de **modos normais** de ordem n , cuja frequência é dada por $\frac{\lambda_n}{2\pi}$ ciclos por unidade de tempo. Os resultados que encontramos até agora nos ajudam a justificar porque o som de um tambor é completamente diferente de um violino, a justificativa é porque o violino recai sobre a corda vibrante unidimensional, onde os zeros das funções senoidais são regularmente espaçadas, já na membrana os zeros de J_0 não são regularmente espaçados.

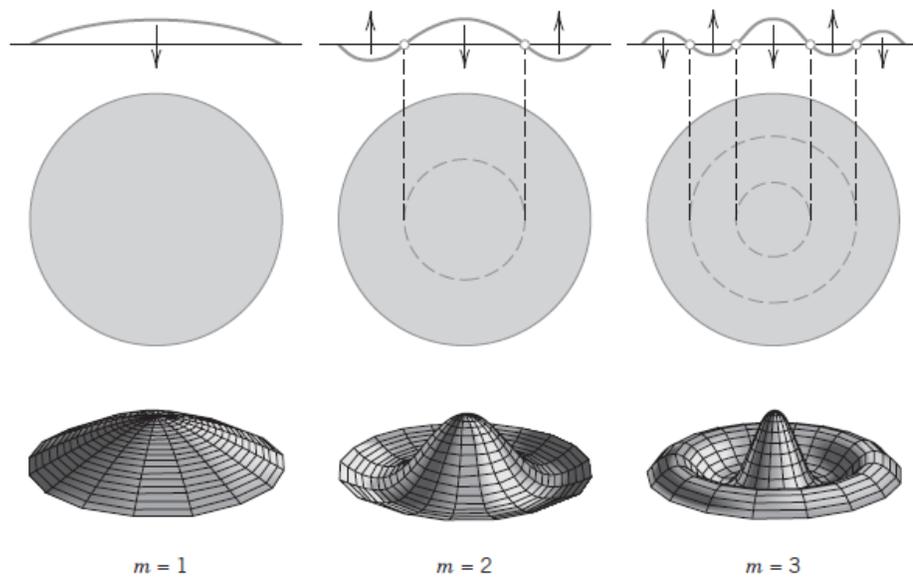


Figura 10: Modos normais de uma membrana circular com simetria radial. Fonte: Kreyzig (2009b).

As formas dos modos normais podem ser facilmente obtidas da Figura 9 e estão mostradas na Figura 10. Note que, para $n = 1$, todos os pontos da membrana se movem para cima (ou para baixo) ao mesmo tempo, já para $n = 2$ temos $r = \frac{\alpha_1 r}{\alpha_2}$ como zero de $W_2(r)$, isso significa que a circunferência com este raio r é a linha nodal. Esta linha delimita a região onde, em dado instante, a parte da membrana central se movimentará em sentido contrário à parte externa, conforme mostra a Figura (10). Os demais valores de n seguem a mesma ideia, porém com um número maior $(n - 1)$ de linhas nodais, que são circunferências concêntricas.

Vamos verificar agora se as candidatas à solução $u_n(r, t)$ satisfazem as condições iniciais do problema, para isso vamos proceder de maneira análoga ao problema de onda unidimensional. Primeiramente, fazendo $t = 0$ em (7.48) e considerando $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, encontramos

$$u(r, 0) = f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right). \quad (7.49)$$

Assim, para que $u(r, t)$ satisfaça $u(r, 0) = f(r)$ precisamos que os A_n sejam os *coeficientes da série de Fourier-Bessel* que representa $f(r)$ em termos de $J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right)$. Vamos encontrar então a forma desse coeficiente:

Fixemos um n natural e sejam α_m zeros positivos de J_0 , ao multiplicarmos ambos os lados da igualdade (7.49) pela integral $\int_0^R r J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) dr$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^R r f(r) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) dr &= \int_0^R \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) r dr \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^R r J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right) J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) dr, \quad n, m = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (7.50)$$

Para encontrarmos A_n devemos resolver a integral contida em (7.50) usando relações de **ortogonalidade das funções de Bessel**. Inicialmente, sabemos que ambas as funções $J_0\left(\frac{\alpha_m}{R}r\right) = M(r)$ e $J_0\left(\frac{\alpha_n}{R}r\right) = N(r)$ satisfazem suas respectivas equações de Bessel, portanto

$$rM'' + M' + \left(\frac{\alpha_m}{R}\right)^2 rM = 0 \quad (7.51)$$

$$rN'' + N' + \left(\frac{\alpha_n}{R}\right)^2 rN = 0 \quad (7.52)$$

Devemos avaliar o problema em dois casos distintos:

- se $m \neq n$:

Neste primeiro caso, devemos inicialmente multiplicar N por (7.51) e M por (7.52) e,

na seqüência, subtrair uma pela outra obtendo:

$$N \left[rM'' + M' + \left(\frac{\alpha_m}{R} \right)^2 rM \right] - M \left[rN'' + N' + \left(\frac{\alpha_n}{R} \right)^2 rN \right] = 0.$$

Reorganizando os termos, obtemos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha_n^2}{R^2} - \frac{\alpha_m^2}{R^2} \right) rMN &= r(M''N - MN'') + (M'N - MN') \\ &= [r(M'N - MN')]'. \end{aligned}$$

Logo após, integra-se de 0 até R ambos os lados da igualdade encontrando

$$\left(\frac{\alpha_n^2}{R^2} - \frac{\alpha_m^2}{R^2} \right) \int_0^R rMN dr = \int_0^R [r(M'N - MN')] dr = [r(M'N - MN')] \Big|_0^R.$$

Pelo fato de $M(R) = J_0(\alpha_m) = 0$ e $N(R) = J_0(\alpha_n) = 0$ então o lado direito da igualdade se anula, reduzindo o cálculo na igualdade

$$\left(\frac{\alpha_n^2}{R^2} - \frac{\alpha_m^2}{R^2} \right) \int_0^R r J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} \right) J_0 \left(\frac{\alpha_n}{R} \right) dr = 0.$$

Como $m \neq n$ então segue diretamente que

$$\int_0^R r J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} \right) J_0 \left(\frac{\alpha_n}{R} \right) dr = 0. \quad (7.53)$$

- se $m = n$:

Aqui, as funções $M(r)$ e $N(r)$ serão iguais, então escolhemos qualquer uma delas, por exemplo (7.52), e multiplicamos por $2rN'$. Disto segue que

$$2rN' \left[rN'' + N' + \left(\frac{\alpha_n}{R} \right)^2 rN \right] = 0 \Rightarrow \left[r^2 (N')^2 + \left(\frac{\alpha_n}{R} \right)^2 r^2 N^2 \right]' = 2 \left(\frac{\alpha_n}{R} \right)^2 rN^2.$$

Também integrando de 0 até R segue o resultado, pois

$$\left[r^2 (N')^2 + \left(\frac{\alpha_n}{R} \right)^2 r^2 N^2 \right] \Big|_0^R = 2 \left(\frac{\alpha_n}{R} \right)^2 \int_0^R r J_0 \left(\frac{\alpha_n}{R} r \right)^2 dr.$$

Neste caso, o lado esquerdo da igualdade não se anulará, apesar de seguir valendo $N(R) = 0$, aqui também temos pela regra da cadeia que $N'(R) = \frac{\alpha_n}{R} J_0'(\alpha_n) \neq 0$. Portanto, o lado esquerdo da igualdade acima equivale a $\alpha_n^2 J_0'(\alpha_n)^2$, e com isso teremos

$$\int_0^R r J_0 \left(\frac{\alpha_n}{R} r \right)^2 dr = \frac{R^2}{2} J_0'(\alpha_n)^2. \quad (7.54)$$

Com estes resultados, podemos enfim obter o coeficiente A_n . Substitui-se as igualdades (7.53) e (7.54) em (7.50) e usa-se a relação $\frac{\partial}{\partial r} J_0(r) = -J_1(r)$ para finalmente obtermos

$$A_n = \frac{2}{R^2 J_1(\alpha_n)^2} \int_0^R r f(r) J_0 \left(\frac{\alpha_n}{R} r \right) dr, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.55)$$

Essas operações só podem ser realizadas se $f(r)$ for diferenciável no intervalo $[0, R]$. O mesmo vale para o coeficiente B_n com $g(r)$ apresentando as mesmas condições, procedendo de maneira análoga encontramos a seguinte forma para este coeficiente

$$\frac{\partial}{\partial t} u(r, 0) = g(r) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \frac{\alpha_n c}{R} \right) J_0 \left(\frac{\alpha_n}{R} r \right).$$

Do mesmo modo integramos a igualdade no intervalo de 0 até R :

$$\begin{aligned} \int_0^R r g(r) J_0 \left(\frac{\alpha_n}{R} r \right) dr &= \frac{c}{R} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \alpha_n \int_0^R r J_0 \left(\frac{\alpha_m}{R} r \right) J_0 \left(\frac{\alpha_n}{R} r \right) dr \\ &= \frac{c}{R} B_n \alpha_n \left(\frac{R^2}{2} J_0'(\alpha_n)^2 \right) = \frac{cR}{2} B_n \alpha_n J_0'(\alpha_n)^2. \end{aligned}$$

Disto, obtemos que

$$B_n = \frac{2}{cR\alpha_n J_1(\alpha_n)^2} \int_0^R r g(r) J_0 \left(\frac{\alpha_n}{R} r \right) dr, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7.56)$$

De maneira geral, encontramos a candidata à solução do problema da membrana nas condições de contorno e iniciais dadas, sendo ela da forma

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[A_n \cos\left(\frac{\alpha_n c}{R} t\right) + B_n \sin\left(\frac{\alpha_n c}{R} t\right) \right] J_0\left(\frac{\alpha_n}{R} r\right), \quad (7.57)$$

com os coeficientes A_n e B_n dados por (7.55) e (7.56), respectivamente.

Os valores numéricos de A_n e B_n podem ser obtidos por método de integração numérica usando valores tabelados para as constantes J_0 e J_1 , como mostra o exemplo a seguir:

Exemplo 6: *Encontre as vibrações da tampa de um tambor circular de raio $R = 1m$, massa específica de $2kg/m^2$ e tensão $8lb/m$, se a velocidade inicial é nula e o deslocamento inicial é*

$$f(r) = 1 - r^2 \text{ metros.}$$

Outro exemplo presente em Kreyzsig (2009b). Primeiro encontra-se $c^2 = \frac{T}{\rho} = 4m^2/s^2$ e como a velocidade inicial é zero, então $B_n = 0$, resta apenas obter A_n usando (7.55)

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{J_1(\alpha_n)^2} \int_0^1 r(1 - r^2) J_0(\alpha_n r) dr \\ &= \frac{2}{J_1(\alpha_n)^2} \left[\int_0^1 r J_0(\alpha_n r) dr - \int_0^1 r^3 J_0(\alpha_n r) dr \right]. \end{aligned}$$

A partir das relações $\frac{\partial}{\partial r}[r^p J_p(r)] = r^p J_{p-1}(r)$ e também $J_{p-1}(r) + J_{p+1}(r) = \frac{2p}{r} J_p(r)$ conseguimos desenvolver a equação e encontrar

$$A_n = \frac{4}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)} J_2(\alpha_n) = \frac{4}{\alpha_n^2 J_1^2(\alpha_n)} \frac{2J_1(\alpha_n)}{\alpha_n} = \frac{8}{\alpha_n^3 J_1(\alpha_n)}.$$

Com isso, usando a fórmula (7.57) e consultando os valores tabelados (Figura 11), conseguimos obter a solução geral deste exemplo, sendo esta

$$u(r, t) = 1,108 J_0(2,405r) \cos(4,81t) - 0,140 J_0(5,52r) \cos(11,04t) + \dots, \quad r \in (0, 1), t \geq 0.$$

m	α_m	$J_1(\alpha_m)$	$J_2(\alpha_m)$	A_m
1	2,40483	0,51915	0,43176	1,10801
2	5,52008	-0,34026	-0,12328	-0,13978
3	8,65373	0,27145	0,06274	0,04548
4	11,79153	-0,23246	-0,03943	-0,02099
5	14,93092	0,20655	0,02767	0,01164
6	18,07106	-0,18773	-0,02078	-0,00722
7	21,21164	0,17327	0,01634	0,00484
8	24,35247	-0,16170	-0,01328	-0,00343
9	27,49348	0,15218	0,01107	0,00253
10	30,63461	-0,14417	-0,00941	-0,00193

Figura 11: Valores tabelados de α_n , $J_1(\alpha_n)$ e $J_2(\alpha_n)$ para n entre 1 e 10. Fonte: Kreyszig (2009b).

7.3.5 Problema das Membranas Circulares de Simetria Não-Radial

A membrana sem simetria radial é aquela onde as vibrações dependem tanto do raio R quanto do ângulo θ , desta forma o problema envolvendo este tipo de membrana se restringe à equação completa de ondas na forma polar e suas condições de contorno e iniciais, ou seja

$$u_{tt} = c^2 \left(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} \right) \quad (7.58)$$

$$u \text{ periódica de período } 2\pi \quad (7.59)$$

$$u(R, \theta, t) = 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad t \geq 0 \quad (7.60)$$

$$u_t(r, \theta, 0) = 0, \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad r \in [0, R]. \quad (7.61)$$

Aqui também buscaremos soluções explícitas, então usaremos novamente o Método de Separação de Variáveis, usando $u(r, \theta, t) = F(r, \theta)G(t)$. A substituição dessa expressão em (7.58) nos fornece duas equações diferenciais de segunda ordem, uma do tipo ordinária e outra parcial, sendo elas respectivamente:

$$G'' + c^2\lambda^2G = 0 \quad (7.62)$$

$$F_{rr} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta} + \lambda^2F = 0 \quad (7.63)$$

A solução de (7.62) já vimos anteriormente e sabemos que é

$$G(t) = c_1 \cos(c\lambda t) + c_2 \sin(c\lambda t), \quad c, \lambda \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0. \quad (7.64)$$

Já na EDP (7.63) devemos aplicar novamente separação de variáveis, onde usamos $F(r, \theta) = W(r)Q(\theta)$ e resulta em duas EDO's de segunda ordem:

$$Q'' + \sigma^2 Q = 0 \quad (7.65)$$

$$r^2 W'' + rW' + (\lambda^2 r^2 - \sigma^2)W = 0. \quad (7.66)$$

Analogamente a solução de (7.65) é

$$Q(\theta) = c_3 \cos(\sigma\theta) + c_4 \sin(\sigma\theta).$$

Agora pela periodicidade exigida em (7.59), devemos ter $Q(\theta + 2k\pi) = Q(\theta)$. Sabemos que $Q(\theta + 2k\pi) = c_3 \cos(\sigma\theta + 2k\sigma\pi) + c_4 \sin(\sigma\theta + 2k\sigma\pi)$ e também sabemos que as funções seno e cosseno são periódicas, então segue que $\sigma = n = 0, 1, 2, \dots$ e conseqüentemente

$$Q(\theta) = Q_n(\theta) = c_3 \cos(n\theta) + c_4 \sin(n\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi] \quad (7.67)$$

Por sua vez, a EDO (7.66) se apresenta na forma de uma **equação de Bessel** de ordem σ . Anteriormente havíamos visto a solução de Bessel para o caso particular de ordem zero, porém aqui necessitamos da solução em sua forma geral, a qual iremos deduzir.

7.3.6 Equação de Bessel de Ordem σ

Conforme vimos, o *método de Frobenius* é convenientemente empregado nas equações diferenciais do tipo Bessel. Até então apresentamos apenas o caso de ordem zero, porém vamos agora utilizar as ideias de Kreyzsig (2009a) para ampliar a equação de Bessel ao

caso de ordem n e encontrar uma solução para ela da forma

$$W(r) = (r - r_0)^q \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r - r_0)^n, \quad a_0 \neq 0,$$

onde q é o expoente indicial e r_0 é um ponto singular regular.

Novamente teremos $r_0 = 0$ como ponto singular, assim a solução procurada se reduz à $W(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{q+n}$. Substituindo esta função em (7.66) obtemos que

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} (q+n)(q+n-1)a_n r^{q+n} + \sum_{n=0}^{\infty} (q+n)a_n r^{q+n} + (\lambda^2 r^2 - \sigma^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{q+n} = 0 \\ \Rightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} [(q+n)^2 - \sigma^2] a_n r^{q+n} + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^2 a_n r^{q+n+2} = 0. \end{aligned}$$

Por fim, na somatória à esquerda separamos os dois primeiros termos e nela também trocamos o índice n para $n+2$, encontramos então

$$(q^2 - \sigma^2)a_0 r^q + [(q+1)^2 - \sigma^2]a_1 r^{q+1} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[[(q+n+2)^2 - \sigma^2]a_{n+2} + \lambda^2 a_n \right] r^{q+n+2} = 0.$$

Procedemos com a igualdade e resolvemos um sistema de três equações, onde a primeira

$$q^2 - \sigma^2 = 0$$

é chamada de *equação indicial*, pois nos fornecerá o índice q da solução.

Esta igualdade é válida pois r varia no intervalo $[0, R]$ e também $a_0 \neq 0$ pela definição. Com isso, encontramos dois valores para o índice ($q = \pm\sigma$), que nos fornecerão as duas soluções linearmente independentes da EDO de Bessel.

Primeiramente tomaremos $q = \sigma$. Usando isto no segundo componente do sistema de equações citado segue que

$$[(\sigma+1)^2 - \sigma^2]a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (2\sigma+1)a_1 = 0,$$

disto concluímos que $a_1 = 0$, pois vimos anteriormente que σ só assume valores inteiros não negativos, logo $2\sigma + 1 \neq 0$. Agora analisando a última equação encontramos

$$[(\sigma + n + 2)^2 - \sigma^2]a_{n+2} + \lambda^2 a_n = 0 \Rightarrow a_{n+2} = -\frac{\lambda^2 a_n}{(n+2)(2\sigma + n + 2)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Note que se n é ímpar, então por recorrência teremos que os coeficientes a_{n+2} dependerão de a_1 , que por sua vez é nulo. Portanto, $a_{n+2} = a_{2k+3} = 0, \forall k = 0, 1, 2, \dots$. No caso de n par, a dependência será em relação à a_0 , seguindo o seguinte padrão

$$\begin{aligned} a_2 &= -\frac{\lambda^2 a_0}{2(2\sigma + 2)} = -\frac{\lambda^2 a_0}{2^2(1)(\sigma + 1)} \\ a_4 &= -\frac{\lambda^2 a_2}{4(2\sigma + 4)} = \frac{\lambda^4 a_0}{2^4(2.1)(\sigma + 2)(\sigma + 1)} \\ a_6 &= -\frac{\lambda^2 a_4}{6(2\sigma + 6)} = -\frac{\lambda^6 a_0}{2^6(3.2.1)(\sigma + 3)(\sigma + 2)(\sigma + 1)} \\ &\dots \\ a_{2k} &= -\frac{\lambda^2 a_{2k-2}}{2k(2\sigma + 2k)} = \frac{(-1)^k \lambda^{2k} a_0}{2^{2k} k! (\sigma + k)(\sigma + k - 1) \dots (\sigma + 2)(\sigma + 1)}. \end{aligned}$$

A partir disso, podemos encontrar a primeira solução $W_1(r) = r^\sigma \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$, utilizando $a_0 = \frac{\lambda^\sigma}{2^\sigma \sigma!}$ e obtendo a equivalência a seguir

$$W_1(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \sigma! (\sigma + n) \dots (\sigma + 1)} \left(\frac{\lambda r}{2} \right)^{2n + \sigma}, \quad (7.68)$$

denominada de $J_\sigma(\lambda r)$, função de Bessel de primeira espécie de ordem σ .

Agora para encontrar a segunda solução, utilizamos a segunda raiz da equação indicial, $q = -\sigma$. Procedendo analogamente, obtemos que

$$W_2(r) = \frac{1}{n! \sigma! (\sigma - n) \dots (\sigma - 1)} \left(\frac{\lambda r}{2} \right)^{2n + \sigma}, \quad (7.69)$$

chamada de $Y_\sigma(\lambda r)$, função de Bessel de segunda espécie de ordem σ .

Com isso, a solução geral de (7.66) é

$$W(r) = c_5 J_\sigma(\lambda r) + c_6 Y_\sigma(\lambda r), \quad c_5, c_6 \in \mathbb{R}, \quad r \in [0, R],$$

com as funções $J_\alpha(\lambda r)$ e $Y_\sigma(\lambda r)$ dadas por (7.68) e (7.69), respectivamente.

7.3.7 Solução do Problema das Membranas Circulares Simetria Não-Radial

Com isso, retornamos à nossa busca pela solução do problema. Primeiramente, observe que não será possível aplicar Y_σ pelo mesmo argumento usado no caso de simetria radial. Logo

$$W(r) = c_5 J_\sigma(\lambda r), \quad c_5 \in \mathbb{R}, \quad r \in [0, R]. \quad (7.70)$$

Verifiquemos agora a condição de contorno (7.60), que revela a igualdade $W(R) = 0$. Usando isto na equação acima encontramos que λR equivale aos zeros da função J_σ , os quais são da forma α_m , para $m \geq 1$, e que são valores tabelados. Com isso temos que

$$\lambda = \lambda_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{R},$$

onde $s = \alpha_{mn}$ é o m -ésimo zero de $J_n(s)$, função de Bessel de primeira espécie e ordem n .

Com isso, substituindo em $u(r, \theta, t) = W(r)Q(\theta)G(t)$ as funções (7.64), (7.67) e (7.70) então resultamos nas primeiras soluções do problema

$$u_{mn}(r, \theta, t) = [A^* \cos(n\theta) + B^* \sin(n\theta)] \left[C^* \cos\left(c \frac{\alpha_{mn}}{R} t\right) + D^* \sin\left(c \frac{\alpha_{mn}}{R} t\right) \right] J_n\left(\frac{\alpha_{mn}}{R} r\right),$$

com A^* , B^* , C^* , D^* constantes, $n = 0, 1, 2, \dots$ e $m \geq 1$.

A próxima etapa agora é verificar a condição inicial (7.61), primeiramente fazemos u_t :

$$u_t(r, \theta, t) = c \frac{\alpha_{mn}}{R} [A^* \cos(n\theta) + B^* \sin(n\theta)] \left[D^* \cos\left(c \frac{\alpha_{mn}}{R} t\right) - C^* \sin\left(c \frac{\alpha_{mn}}{R} t\right) \right] J_n\left(\frac{\alpha_{mn}}{R} r\right)$$

e na sequência substituímos $t = 0$ e igualamos $u_t = 0$ encontrando desta forma

$$D^* c \frac{\alpha_{mn}}{R} [A^* \cos(n\theta) + B^* \sin(n\theta)] J_n \left(\frac{\alpha_{mn}}{R} r \right) = 0 \Rightarrow D^* = 0.$$

Verificadas todas as condições, obtemos assim a candidata final à solução do problema:

$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u_{mn} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [A_{mn} \cos(n\theta) + B_{mn} \sin(n\theta)] \cos \left(c \frac{\alpha_{mn}}{R} t \right) J_n \left(\frac{\alpha_{mn}}{R} r \right),$$

com A_{mn} e B_{mn} constantes a determinar para cada n , relacionando-os com os coeficientes das séries de Fourier-Bessel, exatamente como fizemos no caso de simetria radial.

Assim vemos que o comportamento das membranas circulares com simetria não-radial ocorre de maneira distinta das membranas estudadas anteriormente. Isto fica ainda mais evidente ao observarmos as **linhas nodais** deste tipo de membrana, mostradas abaixo.

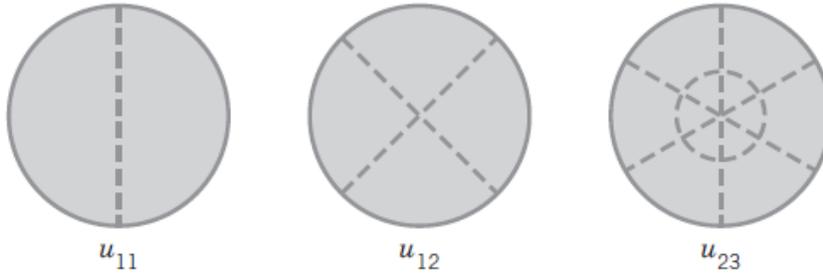


Figura 12: Modos normais de algumas soluções da membrana circular com simetria não-radial. Fonte: Kreyszig (2009b).

8 Conclusões

Com isso, finalizamos o trabalho mostrando que as séries de Fourier, em suas diversas formas, são ferramentas eficientes para a obtenção de soluções explícitas para vários problemas de ondas, tanto no caso unidimensional como no caso das membranas em suas diferentes geometrias. Além disso, também são importantes artifícios de verificação da convergência e regularidade destas soluções, conforme constatamos ao longo deste estudo.

9 Referências Bibliográficas

ÁVILA, Geraldo Severo de Souza. Análise Matemática para Licenciatura. Editora Edgard Blücher. Ltda. São Paulo, 2001.

EVANS, Lawrence C. Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics – Vol. 19. American Mathematical Society, 2010.

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. Análise de Fourier e equações diferenciais parciais. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada: CNPq, 1977. (Projeto Euclides)

FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. Análise 1. 2ª edição. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1996.

HALLIDAY, David. Fundamentos de física, volume 2: gravitação, ondas e termodinâmica / David Halliday, Rober Resnick, Jean Walker; tradução e revisão técnica Ronaldo Sérgio de Biasi. – Rio de Janeiro: LTC, 2012. il.; 28 cm.

IÓRIO, Valéria. EDP, um curso de graduação / Valéria Íório. 3. ed. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada: CNPq, 2010. 276p. (Coleção matemática universitária)

IÓRIO JR, Rafael José; IÓRIO, Valéria. Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução. Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada: CNPq, 1988. 372p. (Projeto Euclides)

KREYSZIG, Erwin. Matemática Superior para Engenharia – Volume 1 – 9ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009a.

KREYSZIG, Erwin. Matemática Superior para Engenharia – Volume 2 – 9ª Ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2009b.

LIMA, Elon Lages. Análise real – Volume 1. Funções de uma variável / Elon Lages Lima, 8ª Ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2006. 189p.: il.; 23cm. (Coleção Matemática Universitária)

LIMA, Elon Lages. Curso de Análise – Volume 1 – 5ª Ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada : CNPq, 1987. (Projeto Euclides)

MEDEIROS, Luís Aduino. Iniciação às equações diferenciais parciais / Luiz Aduino Me-
deiros; Nizri G, de Andrade. – Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978.

OLIVEIRA, Edmundo Capelas de; TYGEL, Martin. Métodos Matemáticos para Enge-
nharia. Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática: Textos Universitários, 2005.

ZILL, Dennis G. Equações Diferenciais – Volume 2 / Dennis G. Zill, Michael R. Cullen;
tradução: Alfredo Alves de Farias; revisão técnica: Antonio Pertence Júnior – São Paulo:
Pearson Makron Books, 2001.