

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JÉSSICA PROENÇA

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E GEOMETRIA:  
UMA EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA

CURITIBA  
2014

JÉSSICA PROENÇA

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E GEOMETRIA:  
UMA EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA

Monografia apresentada como requisito parcial à conclusão do Curso de Licenciatura de Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná - UFPR.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Rolkowski

CURITIBA  
2014

## TERMO DE APROVAÇÃO

JÉSSICA PROENÇA

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA E GEOMETRIA:  
UMA EXPERIÊNCIA EM SALA DE AULA

Monografia aprovada como requisito parcial à conclusão do Curso de Licenciatura de Matemática, Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

---

Orientador: Prof. Dr. Emerson Rolkouski  
Departamento de Expressão Gráfica, UFPR

---

Prof. Dr. Paulo Henrique Siqueira  
Departamento de Expressão Gráfica, UFPR

*“Tudo o que um sonho precisa para ser realizado é  
alguém que acredite que ele possa ser realizado.”*

*Roberto Shinyashiki*

## AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que me apoiaram nessa jornada.

Agradeço à minha família por sempre se preocuparem se o trabalho estava “saindo do lugar”. Em especial à minha mãe que sempre pergunta: “*Quando vai terminar isso?*”.

Agradeço à minha irmã Josi por sempre trocarmos reclamações e choros sobre nossos TCCs.

Agradeço a todos os meus amigos por sempre entenderem que o trabalho sempre vem em primeiro lugar, mesmo quando mandavam que eu não dormisse para dar conta do nosso hobby e do TCC.

Agradeço a Pedrita, minha cachorra, por sempre alegrar meus dias mais sombrios com seus beijos e pulos.

Agradeço também a todos que me esqueci de citar nesta página e que sempre me apoiaram.

Agradeço também a você por estar lendo esse trabalho para finalmente poder realizar meu sonho de ser professora.

## RESUMO

A investigação matemática é uma metodologia pouco utilizada atualmente nas aulas de matemática do Brasil, mesmo sendo estudada há anos por diversos pesquisadores mundo afora, como, por exemplo, João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira no livro *Investigações Matemáticas na Sala de Aula* (2013). Esses mesmos pesquisadores deixam claro que a investigação matemática traz benefícios à aprendizagem, tais como: envolvimento dos alunos que viram protagonistas da aula, desenvolvimento da argumentação matemática e estimula o raciocínio e a correlação entre assuntos diversos, sejam eles da própria matemática ou de outras áreas do conhecimento. Com o desejo de realizar uma atividade diferenciada das aulas tradicionais que geralmente são as únicas exploradas durante o Curso de Matemática da Universidade Federal do Paraná, este trabalho traz uma sequência didática investigativa envolvendo geometria, espelhos e simetria. Essa atividade investigativa foi desenvolvida com alunos da 8ª série do ensino fundamental de uma escola pública, onde foram analisados os relatórios escritos e orais desenvolvidos por esse grupo de alunos. De acordo com os relatórios analisados, a investigação matemática trouxe os benefícios citados anteriormente, provando ser uma valiosa ferramenta educacional.

**Palavras-chave:** Educação Matemática; Investigação Matemática; Geometria; Simetria.

## ABSTRACT

The Mathematic Investigation is a methodology that isn't much used in math classes in Brazil, even though it's been studied for years already by many researchers worldwide, as, for example, João Pedro da Ponte, Joana Brocardo and Hélia Oliveira, authors of the book *Investigações Matemáticas na Sala de Aula* (2013). These researchers make it clear that the Mathematic Investigation brings benefits to learning, such as the involvement of students, which become protagonists of the class, and the development of mathematical argumentation. Furthermore, it stimulates reasoning and correlation between several subjects, whether they are related to mathematics itself or to other areas of knowledge. With the desire to perform a differentiated activity from traditional classes that are almost the only ones explored during the Graduation in Mathematics in Universidade Federal do Paraná, this article brings an investigated didactic sequence involving geometry, mirrors and symmetry. This investigative activity was developed with eighth grade students of basic education from a public school, where the oral and written reports developed by this group of students were analyzed. According to these analyzed reports, the Mathematic Investigation brought the benefits mentioned before, proving the methodology to be a valuable educational tool.

**Keywords:** Mathematic Education. Mathematic Investigation. Geometry. Symmetry.

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

<b>Figura 1:</b> Atividade aplicada em sala de aula.....	33
<b>Figura 2:</b> Polígono formado com um triângulo com um dos ângulos de $40^\circ$ .....	35
<b>Figura3:</b> Polígono formado com um triângulo com um dos ângulos de $60^\circ$ .....	35
<b>Figura 4:</b> Atividade aplicada em sala de aula. Primeira parte, atividade 1.....	37
<b>Figura 5:</b> Atividade aplicada em sala de aula. Primeira parte, atividade 2.....	38
<b>Figura 6:</b> Atividade aplicada em sala de aula. Segunda parte, atividade 5.....	42
<b>Figura 7:</b> Representação do problema enfrentado por Ana e Diego em sala de aula...43	43
<b>Figura 8:</b> Representação do problema enfrentado por Ana e Diego em sala de aula..43	43
<b>Figura 9:</b> Atividade aplicada em sala de aula. Terceira parte, atividade 6.....	44
<b>Figura 10:</b> Representação do que aconteceu envolvendo Pedro Aline e Maria .....	45
<b>Figura 11:</b> Representação do que aconteceu envolvendo Pedro Aline e Maria .....	45

## LISTA DE TABELAS

<b>Quadro 1:</b> Relação de respostas corretas e erradas do grupo A.....	40
<b>Quadro 2:</b> Relação de respostas corretas e erradas do grupo B.....	40

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>11</b>
<b>2 O QUE É INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA?.....</b>	<b>13</b>
<b>3 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: POR QUÊ E PARA QUÊ?.....</b>	<b>15</b>
<b>4 PAPEL DO PROFESSOR E DO ALUNO.....</b>	<b>18</b>
<b>5 INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS ENVOLVENDO GEOMETRIA.....</b>	<b>22</b>
5.1 EXPLORANDO OUTRAS INVESTIGAÇÕES.....	22
5.1.1. Adriana Assis Ferreira.....	23
5.1.2. Ângela Ferreira Pires da Trindade.....	24
5.1.3. Bruna Karla Silva Reginaldo.....	26
5.1.4. Maiza Lamonato.....	29
<b>6 SOBRE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS, GEOMETRIA, MOSAICOS E ESPELHOS: UMA EXPERIÊNCIA.....</b>	<b>32</b>
6.1. DESENVOLVIMENTO DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA.....	32
6.1.1 Criando a atividade.....	32
6.1.2 Conhecendo um pouco a turma.....	36
6.1.3. Relatando a experiência.....	36
6.1.3.1 Primeira Parte.....	36
6.1.3.2 Segunda Parte.....	41
6.1.3.3 Terceira parte.....	44
<b>7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>47</b>
<b>REFERENCIAS.....</b>	<b>49</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O objetivo desse trabalho é apresentar um relato de uma atividade de investigação matemática realizada em uma escola da Rede Municipal de Curitiba, com alunos da 8ª série. O conteúdo escolhido foi o de simetria, mosaicos e características de polígonos regulares.

A ideia para este trabalho surgiu como uma maneira de minimizar uma deficiência que encontrei em minha formação como futura professora de matemática. Durante a graduação estudei diversas metodologias de ensino da matemática, no entanto, não pude me aprofundar de modo satisfatório, o que me fez sentir despreparada para o futuro exercício profissional. Com isso em mente, o trabalho de conclusão de curso se tornou uma forma de complementá-la.

Aliado ao fato de me sentir insatisfeita com meus conhecimentos sobre metodologia, durante a participação como bolsista do programa PIBID, observei que conteúdos de Geometria eram pouco conhecidos dos estudantes, mesmo no nível médio. Em particular, me recordo de uma de minhas experiências docentes como bolsista em que tratamos de simetria. Poucos alunos sabiam algo sobre esse conteúdo. Nessa ocasião, apliquei uma atividade sobre simetria, ângulos e polígonos regulares.

Dessa maneira, nesse trabalho, aliei uma metodologia que queria estudar mais a fundo, as investigações matemáticas, com conteúdos que sempre achei fascinantes: mosaicos, simetria e polígonos regulares. O objetivo desse trabalho passou a ser então, discutir as contribuições das investigações matemáticas no estudo de mosaicos, simetria e polígonos regulares durante a aplicação de uma sequência didática que envolvia tais conceitos em uma turma de 8ª série.

Coerente com os pressupostos das investigações matemáticas, as atividades que compuseram a sequência foram pensadas visando a despertar o interesse do aluno, convidando-o a ser protagonista da aula. Uma das possibilidades levantadas para dinamizar as aulas veio da literatura em Educação Matemática: a utilização de espelhos planos. Elaborada a sequência, parti para a sua aplicação. Como instrumento de coleta de dados, cada grupo de alunos redigiu um relatório sobre sua participação. Passei então a fazer uma leitura dos relatórios entregues com vistas a tecer algumas considerações sobre a contribuição dessa metodologia.

Procurando ampliar a compreensão sobre o tema e ter subsídios para discutir os resultados que obtive, no capítulo 2 descreverei o que se entende por investigação matemática. A partir daí, são descritas as motivações para a sua utilização em sala de aula já no capítulo 3. No capítulo 4 são discutidos os papéis do aluno e do professor em uma aula de investigação matemática. Já no capítulo 5 serão analisados outros trabalhos envolvendo investigação matemática. No capítulo 7 é apresentada a sequência didática criada e os dados coletados na atividade aplicada com os alunos do 8ª série, finalizando com algumas considerações sobre o tema.

## 2 O QUE É INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA?

Embora possivelmente haja indícios de atividades envolvendo investigações matemáticas em sala anteriores, foi a partir da publicação do livro *Investigações Matemáticas em Sala de Aula* de João Pedro da Ponte, Joana Brocardo e Hélia Oliveira, em 2003, que essa metodologia se difundiu no Brasil, sobretudo entre pesquisadores em Educação Matemática.

Os autores iniciam o seu trabalho explicitando as motivações que os levaram a cunhar o termo investigações matemáticas em sala de aula, bem como as questões que surgem ao refletir sobre seu uso nas aulas de matemática:

Pode o trabalho de investigação dos matemáticos servir de inspiração para o trabalho a realizar por professores e alunos nas aulas de Matemática? Essa questão geral suscita uma discussão sobre o que são atividades de investigação matemática e o papel que podem assumir no ensino e aprendizagem dessa disciplina. Importa saber se está ao alcance dos alunos investigar questões matemáticas e de que forma isso pode contribuir para a sua aprendizagem. Importa saber que competências necessitam os professores para promover esse tipo de trabalho nas suas aulas e que condições são necessárias para que isso aconteça. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 9)

A partir da leitura da citação, podemos inferir que, de acordo com os autores, investigações matemáticas na sala de aula podem ser consideradas como uma metodologia que visa repetir o modo de fazer matemática do matemático na sala de aula, o que se opõe às aulas tradicionais. A partir dessa aproximação de definição, algumas questões são colocadas: qual a contribuição do uso das investigações e qual o papel do professor em aulas envolvendo investigações? Nesse capítulo tecerei considerações sobre essas e outras questões. Primeiramente vou explorar um pouco mais sobre o que vem a ser investigação.

Investigar é uma palavra com diversos sinônimos, alguns deles: analisar, averiguar, estudar, examinar, explorar e indagar. A partir dessas palavras, podemos intuir que quando se fala sobre investigar algo queremos dizer que estamos à procura de mais detalhes sobre algo. Que queremos conhecê-lo mais profundamente. Isso vale para um contexto geral, e para a matemática? O que significa investigar?

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), na matemática, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos,

procurando identificar as respectivas propriedades. É a partir dessa aproximação que podemos continuar com mais algumas questões sobre investigações, particularmente no que se refere a levá-las para a sala de aula.

Para descobrir relações entre objetos matemáticos, é necessário saber claramente qual o problema que se quer resolver. Apesar de a matemática ter exemplos de descobertas “ao acaso”, em uma sala de aula o professor deve saber exatamente onde os alunos devem chegar, mesmo que nem sempre os alunos cumpram essa expectativa. Se o professor não tomar esse cuidado, correrá o risco de perder o interesse dos alunos por simplesmente não estar chegando a lugar algum.

Deve-se saber claramente qual o problema a ser resolvido, mas não é todo problema que proporciona uma boa investigação. Um bom problema a ser investigado é aquele que abre portas para diversos resultados, tanto para o professor quanto para o aluno. O problema não deve seguir um único caminho de resolução, deve conter diversos caminhos que enriquecem o conhecimento do aluno e que possibilita em uma mesma sala de aula mais de um resultado, não havendo necessariamente uma resposta correta.

Uma aula de investigação matemática é composta por momentos distintos: exploração e formulação de questões, conjecturas, testes, reformulações, justificção e avaliação.

Tendo realizado algumas considerações sobre o que é uma aula envolvendo investigações matemáticas, cabe tecer considerações sobre as motivações para sua incorporação no cotidiano escolar.

### 3 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: POR QUÊ E PARA QUÊ?

Em meio a tantas mudanças, surge um receio natural por parte dos professores em começar a utilizar a investigação matemática nas suas aulas. Há um sentimento de insegurança por não conhecer, talvez por nunca participarem de uma aula investigativa quando eram alunos. Além disso, em uma aula investigativa não há previsão de que perguntas podem surgir, o que amplia ainda mais a insegurança, sobretudo para professores que quando alunos tinham o seu professor como o detentor de todas as respostas. Com vistas a romper com a insegurança, é interessante salientar que está na oportunidade de aprender coisas novas, para o aluno e para o professor, uma das grandes qualidades da utilização das aulas investigativas.

Dentre outras possibilidades, as aulas investigativas, dão oportunidade de se discutir o papel das definições em matemática e do ensino da mesma, bem como quais as consequências para a aprendizagem do aluno ao se adotar uma ou outra definição, além de permitir ao aluno reconhecer o real valor e importância da demonstração matemática. Mas o ponto mais importante é sem dúvida a oportunidade que aulas de investigação matemática oferecem ao aluno para ampliar o seu poder de realizar conjecturas e argumentações.

A realização de investigações matemáticas na sala de aula tem revelado potencialidades, mas também dificuldades e obstáculos. Em geral, há um grande envolvimento por parte dos alunos, sendo esta a parte essencial para o sucesso da aula. Os alunos tendem a assumir papéis mais ativos nas aulas, sendo os verdadeiros protagonistas. Afinal, são os alunos que tornam a aula de investigação possível. Nessas aulas, os alunos têm que utilizar mais o raciocínio matemático e os processos de pensamentos matemáticos. Apesar do envolvimento dos alunos, os mesmos tendem a ter dúvidas sobre o que estão realmente aprendendo, já que estão habituados a aulas tradicionais. Já o professor tem o medo do não cumprimento do programa e a falta de autoconfiança necessária para conduzir aulas mais imprevisíveis. Para Abrantes (1999) temos ainda outro obstáculo:

Uma outra dificuldade, de outro tipo, tem a ver com o fato de não se poder esperar uma evolução significativa dos alunos em pouco tempo. O tipo de trabalho aqui delineado requer tempo e persistência, visto que lida essencialmente com a necessidade de mudar aspectos centrais da cultura

tradicional da aula de Matemática. Atividades matemáticas de tipo investigativo, quando realizadas de modo isolado ou esporádico, podem ser interessantes no momento, mas não abalam, só por si, concepções e práticas muito enraizadas.

Esta questão conduz-nos ao problema dos modos possíveis de integração das investigações matemáticas no currículo. Ainda que os programas atuais abram muito espaço para a realização de investigações, não é claro que estas possam facilmente assumir-se como um elemento central do desenvolvimento do próprio currículo. Não se trata de haver qualquer oposição entre investigações e conteúdos. Pelo contrário, o problema parece estar em criar-se uma cultura de currículo na qual os dois aspectos surjam como intrinsecamente ligados — um problema cuja resolução requer ainda muitas experiências, muita reflexão e muita ação a vários níveis, desde a concepção do currículo até à formação dos professores, passando pelas práticas de gestão curricular na escola. (ABRANTES, 1999, p. 14).

Apesar dos obstáculos encontrados, também não podemos deixar de citar os pontos positivos de uma investigação bem sucedida, tais como:

- A atividade investigativa favorece o envolvimento de alunos que são mais ausentes nas aulas tradicionais;
- Podem-se ter inúmeros pontos de partida em uma investigação matemática. Assim, uma mesma atividade pode ter diversos graus de dificuldade, dando mais liberdade para o professor se adequar a realidade daquela sala de aula especificamente;
- Estimula o raciocínio e a correlação entre assuntos diversos, sejam eles da própria matemática como de outras áreas do conhecimento; e
- Uma investigação pode ser feita em qualquer momento da escolaridade.

Outro ponto importante, como Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) citaram em seu livro, é de que o conceito de investigação matemática ajuda a trazer para a sala de aula o espírito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. Onde o aluno começa a agir como matemático e produzir como matemático. Não só na formulação de conjecturas e provas dessas, mas também no trabalho de argumentação dos resultados obtidos com seu professor e colegas.

Acredita-se que a investigação matemática é uma metodologia que poderá mudar a dinâmica da sala de aula, deixando a tão odiada aula de matemática menos chata e enfadonha. Mudando não apenas a forma que o aluno estuda matemática, mas também mudando como a matemática é vista pelo aluno. No entanto, para que

isso ocorra, uma aula de matemática envolvendo investigações necessita de uma postura diferenciada de alunos e professores, tema do próximo capítulo.

#### 4 PAPEL DO PROFESSOR E DO ALUNO

Em uma aula de investigação matemática temos papéis distintos para o professor e para o aluno: o aluno passa a ser o protagonista da aula e o professor o “ajudante de palco”. Como no teatro, o ajudante deve auxiliar, dos bastidores, os atores para que o espetáculo aconteça perfeitamente. Essa é exatamente a postura que o professor deve ter durante uma aula de investigação: ajudar o aluno quando for necessário, mas sem tomar seu lugar como protagonista da aula.

Podemos dividir a postura que o professor deve ter em dois momentos: elaboração e aplicação da aula investigativa. Na elaboração da atividade o professor deve construir uma atividade clara e de fácil entendimento. Essa atividade deve ser o mais auto-explicativa possível, onde o aluno lê e compreende o que deverá realizar. No outro momento o docente deve ter uma participação passiva. Ajudando o aluno em suas dúvidas, mas sem resolver o problema pelo aluno.

Mesmo o professor sendo um coadjuvante da aula, ainda assim têm papéis importantes a desempenhar. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) tais papéis podem ser sintetizados em: desafiar, avaliar o progresso, apoiar o trabalho realizado e auxiliar o aluno a raciocinar matematicamente explicitando também seu raciocínio.

Muitas vezes, o aluno só se anima para realizar um trabalho diferenciado quando ele é desafiado de alguma forma. Esse desafio pode vir da atividade em si, ou até mesmo da forma com que o professor se comunica com a turma antes de iniciar os trabalhos.

Como a atividade investigativa possui questões abertas o professor precisa avaliar o progresso de cada aluno e apoiar o trabalho. Esse ponto é importante, pois é normal que um aluno com maiores dificuldades encontre um problema que não consegue resolver e acabe desanimando com o resto da atividade. Outro fator que torna esse ponto indispensável é que durante a atividade é normal desentendimentos entre os alunos. Isso ocorre, pois em uma sala de aula sempre teremos uma variedade de conhecimentos, aptidões e interesses diversificados. Então, é trabalho do professor avaliar o progresso e garantir que todos os alunos tenham voz e que a atividade ocorra sem problemas.

Outro papel do professor é de raciocinar matematicamente com o aluno. Durante a atividade investigativa é natural que o aluno formule questões que o

professor não pensou. Também é impossível para o professor prever todo tipo de questão por causa da natureza da atividade. Por esses motivos deve existir, por parte do professor, uma predisposição para manifestar, diante dos alunos, todo seu processo de raciocínio elaborado para compreender as questões formuladas pelos alunos. E é também a partir do raciocínio matemático do professor que os alunos aprenderão como desenvolver sua própria maneira de encaminhar a investigação, enriquecendo o trabalho pedagógico.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2003) mostram diversos exemplos de posturas que o professor deve ter durante a aula. A seguir, temos um exemplo de situação de sala de aula que ilustra uma dessas posturas.

Essa discussão foi disparada por uma investigação que simulava uma mesa de *snooker*. Nesta investigação uma mesa de *snooker* com apenas quatro buracos (nos cantos da mesa) era dividida em quadrados iguais. Então uma bola era jogada a partir de um dos cantos, sem efeito e com um ângulo de  $45^\circ$  com as tabelas. Logo, era pedido, por exemplo, quantos quadrados a bola iria atravessar e quantas vezes a bola batia nas tabelas. Após isso era pedido para o aluno investigar uma relação entre essas perguntas e o tamanho da mesa de *snooker*.

Os alunos testaram e formularam conjecturas, mas não encontraram uma generalização com facilidade. Nesses casos, uma pequena sugestão da professora foi o suficiente para conseguirem tal feito. Como descrito a seguir:

Rita: Não sei como é que vai dar para todos. A gente multiplica, mas umas vezes dá logo, noutras temos que dividir por 2, noutras por 3. Depende.

Professora: Sim, e acha que depende de quê?

Rita: Não sei... Temos que ir ver.

Professora: Então tentem lá ver os vários casos que têm. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 61)

Nesse relato observa-se a postura do professor em instigar as conjecturas e as justificativas dos alunos. Em duas frases a professora desafiou os alunos, como podemos ver na pergunta: “Sim, e acha que depende de quê?”, verificou o andamento da aula e apoiou os alunos com a frase final: “Então tentem lá ver os vários casos que têm.”

Durante a atividade o professor pode e deve incentivar os alunos a serem “pequenos exploradores” como citaram Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), marcando

a importante diferença entre os papéis do aluno e do professor durante a aula de investigação.

Do ponto de vista do aluno, observa-se que a tarefa investigativa não é de fácil realização. Temos diversos fatores a considerar, tais como: conhecimentos anteriores, experiência com atividade dessa natureza, e facilidade em se adaptar.

Quando a atividade necessita de algum conhecimento anterior, o professor pode enfrentar problemas durante a atividade. Podendo ter alunos que nunca estudaram determinados assuntos e por outro lado alunos com conhecimentos muito além do esperado pelo professor. Se o aluno tem conhecimentos mais avançados que o esperado, isso pode enriquecer ainda mais o trabalho.

A atividade investigativa é uma metodologia de ensino diferente do que o aluno está acostumado. A inexperiência pode atrapalhar o bom desenvolvimento da aula. Para que esse tipo de aula seja considerada um sucesso, é importante que o aluno se acostume a trabalhar com atividades desse tipo até que se tornem parte da rotina, tanto quanto uma aula meramente expositiva.

Também não podemos esquecer que a investigação é mutável e cabe ao aluno se adaptar aos novos obstáculos encontrados. Se o aluno não tem a experiência necessária pode se sentir desconfortável ao realizar a atividade proposta tendo poucas iniciativas e se envolvendo menos na atividade. Assim como qualquer metodologia, o professor deve ter em mente que a investigação matemática não faz milagres. É um trabalho complexo e de longo prazo.

Durante as atividades envolvendo investigações o aluno deve reconhecer seu problema, formular questões e explorá-lo para recolhimento de dados. Dessa maneira começa-se a conjecturar sobre o problema, tentando encontrar regularidades entre os casos estudados para embasar melhor essas conjecturas. Após esse momento, o aprendiz estará apto para verificar a sua conjectura, aplicando-a em outros casos. Se a conjectura se mostrou infrutífera, deve-se voltar um passo e pensar em novas conjecturas ou até mesmo recolher novos dados.

Já o professor, no momento das conjecturas, deve insistir que o aluno sempre busque por uma conjectura cada vez mais geral, que valha para um número cada maior de casos. Ao encontrar uma conjectura que o satisfaça, o aluno poderá tentar demonstrar a conjectura, formalmente ou não, de acordo com o nível de ensino e dos objetivos que o professor deseja atingir.

Caso os alunos não estejam habituados com a aula investigativa é interessante que o professor direcione as questões a serem abordadas pelo aluno. Quando a formulação de questões é deixada a cargo do aluno, esse pode se sentir perdido por não estar acostumado com esse tipo de trabalho, como o caso que presenciei durante a minha participação do PIBID – Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência. As perguntas formuladas foram muito abertas e os alunos não sabiam nem por onde começar a trabalhar. Então, o trabalho que deveria ser feito pelo aluno acabou sendo direcionado em boa parte do tempo pelas professoras. Em um questionário feito ao final da atividade, alguns alunos responderam que a aula não apresentou nada de diferente com o que era visto tradicionalmente em sala de aula. Logo, a aula de investigação não obteve sucesso, sendo um dos motivos, as questões mal formuladas.

Tendo realizado essa incursão sobre o que se entende por investigação matemática, as motivações para seu uso em sala de aula e o papel de professores e alunos em aulas envolvendo investigações, apresentarei a seguir algumas pesquisas sobre investigações em sala de aula envolvendo assuntos de geometria

## 5 INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS ENVOLVENDO GEOMETRIA

Segundo Paulo Abrantes (1999), a geometria é, dentro da Matemática escolar, uma área particularmente propícia à realização de atividades de natureza exploratória e investigativa. Pois, para ele, a geometria liga-se com uma grande variedade de objetos e situações.

Segundo o autor, a geometria é fonte de diversos tipos de problemas: visualização e representação, construção e lugares geométricos, e ainda, apresenta várias conexões com outros temas da matemática, como a álgebra, por exemplo. Além disso, a geometria também oferece numerosas ocasiões para se conhecer exemplos da história e da evolução da Matemática.

Para os alunos que estão iniciando sua carreira como investigadores matemáticos, acredito que a melhor maneira é por meio de atividades envolvendo geometria já que é o campo da matemática que permite manipulações com modelos de figuras geométricas planas ou espaciais, ao contrário da álgebra. Como forma de ilustrar essas afirmações trarei o resultado de algumas pesquisas sobre o tema:

### 5.1 Explorando outras investigações

Este capítulo traz uma pesquisa cujo objetivo é analisar e compreender como o tema investigação matemática é tratado no meio acadêmico. Para isso realizei uma pesquisa em sites como, por exemplo, o Banco de Teses da Capes e selecionei alguns trabalhos sobre investigação matemática, preferencialmente envolvendo geometria.

Por causa da dificuldade de encontrar teses e dissertações envolvendo investigação matemática com geometria, foram selecionadas 2 dissertações de mestrado e 2 teses de doutorado, com os temas: sobre as diferenças entre investigação matemática e resolução de problemas, argumentação em sala de aula investigativa, formação de professores utilizando atividades investigativas e a aprendizagem dos alunos em um contexto de aulas investigativas.

Os trabalhos estão organizados pelos nomes de seus pesquisadores, em ordem alfabética. Em cada texto encontra-se uma breve explicação sobre a metodologia utilizada, um resumo sobre como se desenvolveram as atividades aplicadas em sala de aula e quais resultados foram obtidos pelos pesquisadores.

### 5.1.1 Adriana Assis Ferreira

Em 2012, Adriana Assis Ferreira publicou a tese *A produção de significados matemáticos em um contexto de aulas exploratório-investigativas* para obtenção do título de Doutor em Educação pela Universidade Federal de Minas Gerais com a orientação da Prof. Dra. Cristina de Castro Frade.

O objetivo dessa tese era estudar como acontece o processo de produção de significados pelos alunos quando eles estão envolvidos em atividades exploratório-investigativas na sala de aula. Segundo a autora, a opção pelas atividades exploratório-investigativas fundamenta-se na crença de que ambientes dessa natureza podem oferecer um contexto rico e vantajoso para o compartilhamento e negociação de resultados.

A autora utiliza a expressão “exploratório-investigativas”, mesmo que o seu entendimento por “investigação” seja o mesmo discutido neste trabalho, para sinalizar o tipo de tarefa em que os estudantes se dedicam tanto a exploração, quanto à investigação matemática, implementadas de acordo com as fases de uma aula de investigação. Também diz que:

Em acordo com Fiorentini, Fernandes e Cristovão (2005), acredito que a expressão “exploratório-investigativas” é mais apropriada para descrever o que ocorre com alunos do Ensino Fundamental, os quais, pela primeira vez, se defrontam com esse tipo de atividade. (FERREIRA, 2012, p. 59)

A pesquisa foi realizada com alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. Para responder a pergunta que era seu objetivo inicial, a autora fez duas perguntas:

- Quais os aspectos constitutivos (dinâmica) do processo de produção de significados matemáticos no âmbito das atividades exploratório-investigativas?
- Qual o nível de adequação do contexto criado com atividades exploratório-investigativas como cenário para o estudo do processo de produção de significados na sala de aula?

Ao todo foram feitas nove atividades com uma turma do 7º ano durante o ano de 2010. Os alunos foram separados em grupos de 4 para facilitar o trabalho da pesquisadora e do professor titular da turma.

As primeiras 4 oficinas foram implementadas pelo professor e pela pesquisadora. Mas as 5ª e 6ª oficinas foram feitas apenas pela pesquisadora. Isso aconteceu, pois foi necessário dividir a turma em duas menores. Essa divisão foi necessária, pois a indisciplina e as dificuldades de atender individualmente os 32 alunos estava tornando impossível trabalhar o conteúdo de matemática de forma satisfatória.

Após essa divisão, uma nova professora foi designada para ficar com cada nova turma formada. Com o apoio dessas duas professoras, a pesquisadora conseguiu continuar o trabalho com o mesmo grupo de 15 alunos durante toda a pesquisa, mesmo esses alunos estando divididos entre as duas novas turmas. Assim, as últimas três oficinas foram feitas pela pesquisadora e a nova professora, e o antigo professor ficaram responsáveis pelos alunos que sobraram.

Nas nove atividades exploratório-investigativas foram abordados temas como: aritmética, medidas e padrões. O tema padrões foi selecionado para análise da pesquisa, pois ele foi realizado na segunda fase da pesquisa em um momento onde os alunos estavam mais familiarizados com a atividade exploratório-investigativa. Outro fator decisivo foi o fato das oficinas da segunda parte englobarem outros assuntos como sequências, relações entre grandezas e funções.

A autora conclui que a partir da análise da pesquisa que:

A partir da análise das interações estabelecidas entre alunos e professoras, foi revelado um fenômeno didático associado à gestão do ensino e aprendizagem de Matemática, em um contexto de aulas exploratório-investigativas: a necessária cooperação produtiva (sinergia) entre os distintos padrões de interação com a finalidade de possibilitar o desenvolvimento da aprendizagem dos alunos. [...] Há que se considerar, no entanto, que os padrões de interação são regidos/mediados por múltiplos aspectos da situação, dentre outros: a natureza da tarefa, o tipo de investigação proposta, a trama complexa de normas e metanormas envolvidas, o engajamento/envolvimento dos alunos com a tarefa, enfim, o contexto da atividade. (FERREIRA, 2012, p. 232-233)

### **5.1.2 Ângela Ferreira Pires da Trindade**

Em 2008, Ângela Ferreira Pires da Trindade publicou a dissertação para obter o título de mestre em educação pela Universidade Federal do Paraná intitulada

*Investigações Matemáticas e Resolução de Problemas - Que Fronteiras?* orientada pelo Prof. Dr. Carlos Roberto Vianna.

Esse trabalho teve como objetivo compreender e explicar o que são Investigações Matemáticas e Atividades Investigativas, diferenciando-as entre si e, se possível, daquilo que é conhecido como “Resolução de Problemas” (TRINDADE, 2008). O foco dessa dissertação não é o aluno e nem o professor, mas a própria investigação matemática que os envolve e relaciona.

Na primeira parte de seu trabalho, Trindade disserta sobre as ideias de diversos estudiosos acerca do tema “Resoluções de Problemas”. A autora não procurava chegar à definição correta desse termo, mas sim levar o leitor a ter a mesma imersão que a autora teve ao pesquisar sobre o tema. Nas palavras da autora:

O mais fascinante da aprendizagem é justamente a descoberta, a concatenação das ideias, o encontrar as peças que se encaixam, a união das imagens para formar cenas, as impressões que ficam. E tudo isso, sozinho, sem que ninguém lhe imponha o certo ou o errado. (TRINDADE, 2008, p. 43)

Mas a autora foi além do próprio planejamento, tecendo considerações acerca das análises dos autores sobre Resoluções de Problemas, suas implicações, prós e contras.

Logo após, a autora disserta sobre o tema de interesse deste trabalho, ou seja, Investigações Matemáticas. Um ponto interessante mostrado nesse capítulo é que podemos compreender como se desenvolve o Pensamento Matemático em uma investigação matemática a partir do momento que compreendermos os processos do desenvolvimento do raciocínio matemático utilizados pelos alunos e como eles são usados durante a aula investigativa.

A autora também deixa claras algumas diferenças encontradas entre investigação matemática e resoluções de problemas. Uma delas é na formulação de questões. Na primeira, um dos objetivos é formular a própria questão. Na segunda, as questões estão formuladas desde o início (TRINDADE, 2008). Outra diferença entre investigação e problemas citada pela autora é que em um problema o objetivo é atingir um ponto não imediatamente acessível, e em uma investigação o objetivo é o próprio caminho percorrido e não o resultado.

Além de vários exemplos de atividades investigativas, principalmente portuguesas, a autora também colocou um pouco da própria experiência em seu trabalho.

Em um de seus trabalhos com a sétima série, ela relacionou produto notável com geometria. Primeiramente a professora resolveu produtos notáveis do tipo  $(a+b)^2$ , mas após alguns alunos questionarem a forma usual de resolver a questão, ou seja, utilizando a propriedade distributiva a professora incentivou os mesmos a investigar e procurar regularidades para os produtos notáveis de expoentes maiores.

A seguir, algumas considerações sobre as observações realizadas pela investigadora:

- A importância em deixar os próprios alunos discutirem as descobertas entre si. Assim enquanto um discursava sobre suas descobertas, outro, a partir disso encontrava novas regularidades;
- A investigação foi muito além do esperado. Chegando em assuntos muito distantes da sétima série como o Triângulo de Pascal; e
- A felicidade da autora em conseguir empolgar um aluno com álgebra, que é um desafio para qualquer professor de matemática.

### **5.1.3. Bruna Karla Silva Reginaldo**

Em 2012, Bruna Karla Silva Reginaldo publicou a dissertação *Argumentação em Atividades Investigativas na Sala de Aula de Matemática* para obtenção do título de mestre pela Universidade Federal de Minas Gerais com a orientação da Prof. Dra. Jussara de Loiola Araújo.

A inquietação da autora veio com sua própria experiência como professora. Essa inquietação veio ao observar a falta de argumentação em atividades investigativas.

Entretanto, em minhas experiências com atividades de investigação, como professora, incomodava-me a ausência da argumentação. Sobretudo na discussão feita após a etapa de exploração, os alunos relatavam as conjecturas levantadas e os resultados obtidos, sem a preocupação de verificar se o que foi observado é verdadeiro, de justificar e, se possível, de generalizar. (REGINALDO, 2012, pg. 17)

Inicialmente o objetivo deste trabalho era investigar o que desencadeia a argumentação dos alunos em atividades de investigação (REGINALDO, 2012). Mas após a pesquisa, a autora mudou a pergunta diretriz para: *Como se desencadeia e se desenvolve a argumentação matemática dos alunos em uma atividade investigativa?*

Este trabalho tem como foco o aluno, portanto alguns dos objetivos específicos que a autora buscou foram descrever e analisar as situações em que ocorre a argumentação dos alunos na atividade de investigação. Também foi estudada a interação aluno-aluno e professor-aluno. A autora também procurou caracterizar os argumentos, matemáticos ou não, utilizados pelos alunos.

Os dados para a realização desta dissertação foram obtidos por meio de gravações de áudio e vídeo, registros no caderno de campo e relatórios produzidos pelos alunos. Utilizou-se uma abordagem qualitativa para analisar os dados deste trabalho.

Primeiramente a autora planejava fazer a pesquisa com uma turma que já tivesse contato com investigações matemáticas, mas encontrou dificuldades de encontrar uma turma que se encaixava nesse perfil. Assim, decidiu realizar a pesquisa com uma professora conhecida que estava dando aula para três turmas do 9º ano.

A escolha de realizar a pesquisa com pessoas que não tinham contato prévio com atividades investigativas enriqueceu o trabalho da pesquisadora que procurava analisar a argumentação investigativa, assim ela teve a oportunidade de observar como se inicia e desenvolve a argumentação matemática em aulas investigativas.

A investigadora também se preocupou em garantir que as atividades planejadas fossem realmente investigativas. Para isso, ela utilizou como base pesquisadores como Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), assim ela apresentou um referencial teórico similar a este trabalho.

Para que a aula investigativa fosse bem sucedida, salientou-se que era necessário saber o quão interessado o aluno estava para desenvolver a atividade. Com essa preocupação em mente a autora decidiu propor uma sequência de atividades onde as primeiras continham atividades direcionadas, para auxiliar o aluno que não sabia como proceder numa investigação matemática, igual às

atividades realizadas neste trabalho. As últimas atividades foram mais abertas, onde o aluno deveria procurar regularidades e formular suas próprias questões.

O objetivo da primeira oficina era a obtenção da fórmula do comprimento da circunferência. Para isso foram duas atividades distintas. Na primeira os alunos deveriam preencher uma tabela com diversos valores, tais como: diâmetro, comprimento e a razão entre esses valores. Na segunda atividade os alunos deveriam analisar o que acontecia quando alteravam esses valores e assim procurar regularidades.

A segunda oficina desenvolvida pela pesquisadora é muito similar a uma das atividades apresentadas nesse trabalho. A pesquisadora desenvolveu uma atividade de pavimentação do chão. Na primeira parte da atividade, os alunos deveriam observar quantos e quais polígonos eram necessários para pavimentar o chão. Então era pedido que completassem uma tabela com essas informações. Na segunda parte, era pedido que os alunos combinassem diferentes polígonos para pavimentar o chão.

A terceira e quarta oficinas começaram a se diferenciar das primeiras apresentando um caráter mais aberto. A terceira envolvia uma sequência de quadrados e a última envolvia potências de 2. Esta última foi retirada do livro de Ponte, Brocardo e Oliveira chamado Investigações Matemáticas em Sala de Aula.

Durante a análise de dados, a autora notou dificuldades para acontecer a argumentação dos alunos, tais como a falta de tempo, falta de domínio da linguagem algébrica, entre outros. Esses obstáculos são recorrentes em qualquer aula, não apenas em aulas investigativas. A falta de tempo, por exemplo, sempre é um obstáculo para quem quer propor aulas diferenciadas.

Um dos pensamentos da autora durante a formulação da pesquisa era que não há argumentação nas aulas de matemática. Isso porque ela considerava que ocorria argumentação matemática apenas quando acontecia justificativas por meio de demonstrações. Mas esse pensamento mudou após estudar o que era argumentação matemática e perceber que ela era muito mais ampla.

Então, durante as diversas aulas realizadas e após analisar os dados a autora percebeu que existia sim argumentação na aula de matemática. Graças a essa constatação a autora decidiu alterar a pergunta principal da pesquisa, como citado anteriormente.

Na análise dos dados, a autora tentou responder a seguinte questão: “Os alunos não querem argumentar?” A resposta que ela chegou foi:

As experiências relatadas me fizeram concluir que não é devido à falta de vontade para argumentar que os estudantes não argumentam. Eles demonstraram essa vontade nos momentos em que foram incentivados a argumentar, quando foram orientados sobre como argumentar e quando se sentiram à vontade para expor suas ideias. Com base nisso, entende-se que é necessário proporcionar um ambiente em que o aluno se sinta confortável para apresentar suas opiniões e que elas sejam respeitadas e aprimoradas com a ajuda da turma e do professor. (REGINALDO, 2012, p. 166)

Por meio das intervenções realizadas ao longo da atividade pela pesquisadora e a professora do colégio onde a pesquisa era realizada, podemos perceber uma significativa melhora na argumentação dos alunos. Por exemplo, o uso de generalizações. Durante as primeiras aulas nenhum aluno tentou generalizar o resultado obtido, já nas últimas aulas esse cenário mudou e os alunos passaram a generalizar alguns resultados.

#### **5.1.4. Maiza Lamonato**

Em 2011, Maiza Lamonato publicou a tese de doutorado em Educação, intitulada *A exploração-investigação matemática: potencialidades na formação contínua de professores*, pela Universidade Federal de São Carlos com a orientação da Prof. Dra. Cármen Lúcia Brancaglion Passos. O objetivo dessa pesquisa era investigar as potencialidades formativas da exploração-investigativa matemática para o conhecimento do professor e de suas práticas docentes em sala de aula.

O trabalho foi realizado com um grupo de professoras da rede municipal de ensino em formação contínua. A participação do projeto foi de forma voluntária e a motivação dessas professoras era de ampliar os conhecimentos que achavam necessários para o exercício profissional. Assim ficando claro que o foco da pesquisa estava no professor e sua formação profissional.

Durante os primeiros encontros, a pesquisadora elaborava previamente a atividade e então as professoras discutiam como resolvê-las e como passá-las para os alunos. Também discutiam os materiais usados para a realização da atividade,

discutiam a postura que elas deveriam ter durante a aula e quais ajudas poderiam oferecer ao aluno sem prejudicar o trabalho investigativo.

A investigadora propôs duas séries de atividades investigativas. A primeira era sobre as diferentes planificações do cubo. Onde se procurava formas diferentes de planificar o cubo e encontrar relações em como se dispunham os lados do cubo planificado no papel. Essa primeira parte começou com a planificação do cubo, mas acabou indo além e a última atividade foi sobre as figuras planas formadas por seis ou menos quadrados.

O segundo bloco de atividades investigativas era sobre o *Tangram*, onde se pedia para encontrar figuras geométricas formadas por duas peças do *Tangram*. Após o desenvolvimento dessa atividade uma das professoras sugeriu algo diferenciado, pois ela queria uma atividade para aplicar com seus alunos e que ela não possuía o conhecimento de como essa atividade poderia se desenvolver.

Depois de uma série de encontros, onde foram discutidas diversas atividades investigativas envolvendo geometria, as professoras puderam colocar em prática o que aprenderam em sala de aula. Várias professoras levaram seus relatos de experiência para o grupo de pesquisa para discutir os resultados com as colegas de projeto.

Os resultados da pesquisa foram muito positivos, mas isso aconteceu principalmente por causa do empenho e curiosidade das professoras envolvidas. Assim, a pesquisadora encontrou elementos que tornam a exploração-investigativa possível. Alguns elementos citados pela autora:

[...] tarefas que constituem problemas abertos, tarefas consideradas exploratório-investigativas pelas professoras e situações investigativas que podem ser desenvolvidas com conteúdos de outros componentes curriculares. Tais elementos complementam as respostas à questão pesquisada: “*Quais as potencialidades formativas da exploração-investigativa matemática para o conhecimento do professor e de suas práticas?*” por serem disparadores de aprendizagens das professoras envolvidas. (LAMONATO, 2011, p. 224)

Por fim, a exploração-investigativa constitui um contexto favorável para o ensino e aprendizagem dos alunos e professores. Nessa pesquisa realizada por Lamonato (2011), as potencialidades evidenciaram-se por:

ampliar, aprofundar e problematizar conhecimentos das professoras sobre conteúdos de geometria, sobre os modos de ensinar e de aprender tais conteúdos, sobre o conhecimento que as professoras têm ou podem ter de seus alunos, sobre o uso de recursos didáticos e sobre o gerenciamento de sua sala de aula, levando em consideração sua própria postura na interlocução com seus alunos e as decisões necessárias (quanto ao tempo, aos conteúdos, aos modos de organizar a sala) para conduzir seu trabalho profissional. (LAMONATO, 2011, p. 227)

## 6 SOBRE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS, GEOMETRIA, MOSAICOS E ESPELHOS: UMA EXPERIÊNCIA

Neste capítulo são apresentados os pressupostos da sequencia criada, o local em que foi aplicada bem como os alunos participantes das atividades.

A matemática está presente na arte, no caso dos mosaicos podemos destacar o artista holandês Maurits Cornelis Escher (1898-1972) conhecido por representar construções impossíveis, preenchimento regular do plano e explorações do infinito. Em particular nos interessa as discussões sobre pavimentações do plano que trazem informações sobre mosaicos. Este autor utiliza conceitos matemáticos para a construção de seus mosaicos, tais como: repetição do módulo, translação, rotação, reflexão e simetria.

Assim, utilizando-me desses conceitos e inspirando-me na obra de M. C. Escher desenvolvi atividades que auxiliam os alunos a criarem mosaicos usando noções de simetria, polígonos regulares e suas características.

### 6.1. DESENVOLVIMENTO DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

#### 6.1.1 Criando a atividade

Três trabalhos foram fundamentais na criação das atividades: o artigo *O Uso de Espelhos e Caleidoscópios em Atividades Educacionais de Geometria para 7ª e 8ª séries* de Murari e Perez (2002), a dissertação *Investigações Matemáticas e Resolução de Problemas - Que Fronteiras?* de Trindade (2008) e o livro *Geometria dos Mosaicos* de Imenes e Lellis (2005).

Nessa atividade utilizo espelhos como instrumento que auxilia os alunos durante o processo de investigação. Como Murari e Perez (2002) destacam:

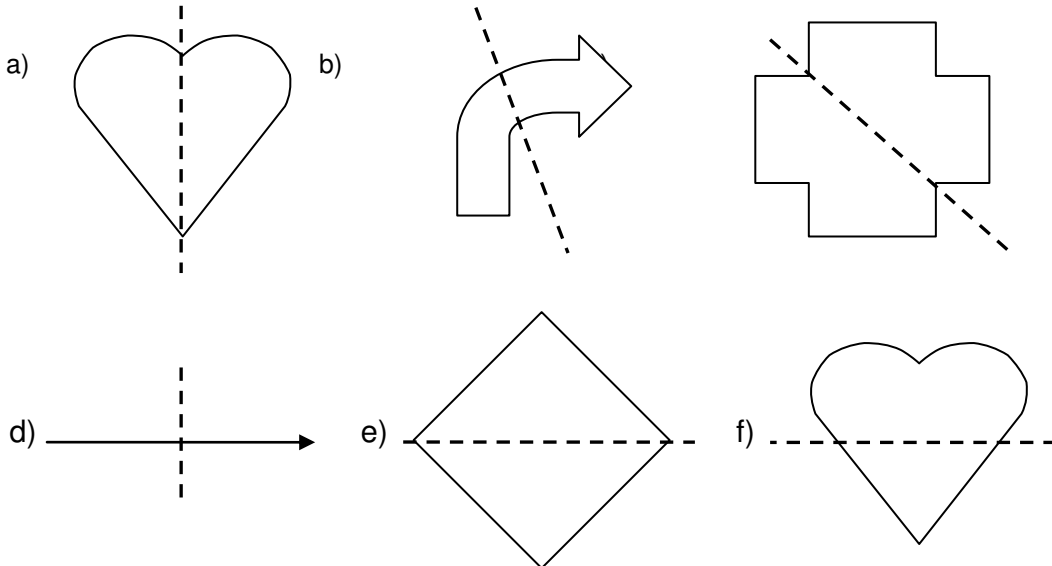
O uso de apenas um espelho permite situações de aprendizagem interessantes, envolvendo resolução de problemas, onde o ensino desenvolve-se de uma maneira informal e, às vezes, até de maneira lúdica, promovendo e aguçando a visualização do espaço. Conteúdos como ponto simétrico, eixo de simetria, figuras simétricas, congruência de figuras geométricas e transformações geométricas (reflexão, translação e rotação) podem ser muito bem trabalhados. (MURARI; PEREZ, 2002, p. 4)

Pensando nisso a atividade é dividida em 3 partes, são elas: Simetria Axial, Polígonos Regulares e Mosaicos, que passo a apresentar a seguir na Figura 1:

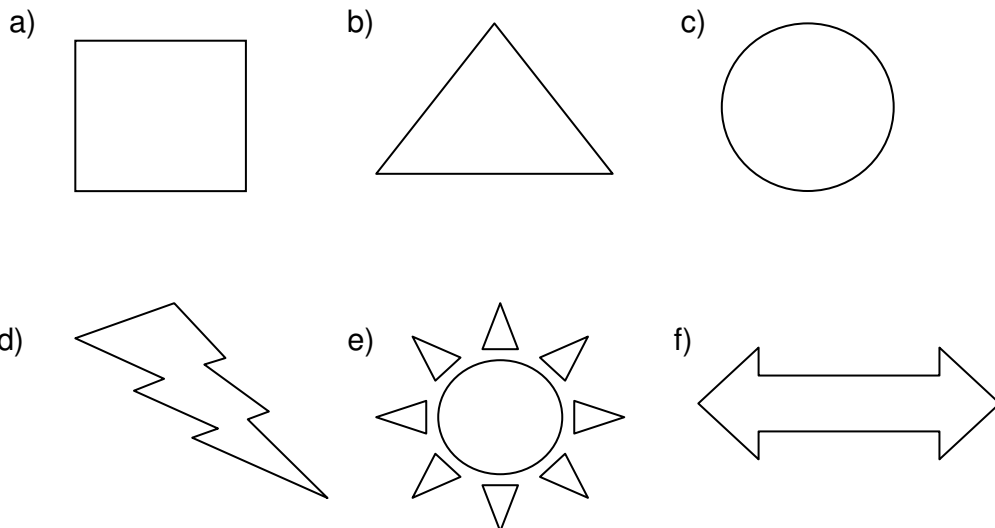
Figura 1: Atividade aplicada em sala de aula.

## Parte 1:

1. Coloque o espelho em cima das linhas pontilhadas das figuras abaixo. Em quais figuras a imagem refletida no espelho completa a imagem original?



2. Em geometria, o eixo de simetria é uma linha que divide uma figura em duas partes iguais. Exemplos disso você viu no exercício anterior. Agora é com você: quantos eixos de simetria você encontra em cada uma das figuras abaixo? É possível existir mais de um eixo de simetria em uma mesma figura?



Essas retas que dividem as figuras em pelo menos duas partes que se podem sobrepor ponto a ponto por dobragem, isto é, por reflexão se chama eixo de simetria. As figuras que você acabou de estudar tem Simetria Axial.

3. Desenhe ou escreva outras coisas que você vê que tem eixo de simetria no seu dia a dia. Pode ser qualquer coisa! Use a imaginação.

## Parte 2:

4. Agora você precisa de dois espelhos.

- a. Abra os espelhos com um ângulo qualquer.
  - b. Encaixe um triângulo isósceles entre os espelhos. Tente utilizar triângulos isósceles diferentes. Observe.
  - c. Ao mudar os triângulos o que aconteceu com a figura nos espelhos? Tente encontrar uma justificativa que relacione a escolha de triângulos com a figura formada.
5. Coloque os espelhos nos chamados ângulos notáveis ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ). Coloque um pedaço de canudo entre os espelhos de forma que forme um triângulo isósceles. Que tipo de polígonos você obteve? Esses polígonos têm alguma característica especial?

Os polígonos que você estudou recebem um nome especial: polígonos regulares. Um polígono é dito regular quando todos os seus lados e ângulos são iguais, sejam eles internos ou externos.

Parte 3:

Agora vamos estudar mosaicos. O que é um mosaico?  
O mosaico é uma forma de arte. Ele pode ser feito de praticamente qualquer material. O artista coloca esses materiais lado a lado, criando uma figura qualquer ou figuras que possuem simetrias. Um exemplo bem curitibano são as calçadas de Petit Pavê com desenhos de pinhões que você encontra em ruas como a XV de Novembro, no Centro. Outro exemplo são os vitrais em igrejas ao redor do mundo. Na matemática também temos um tipo de mosaico: o mosaico geométrico. Na atividade a seguir, trabalharemos com mosaicos geométricos.

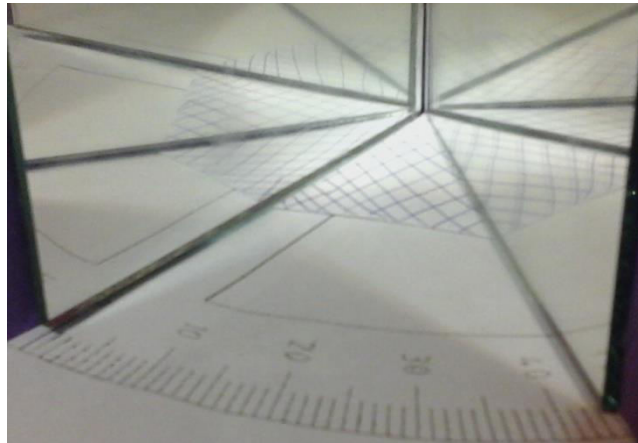
6. Com o kit de polígonos que você recebeu:
- a. Utilizando apenas um único tipo de polígono, é possível pavimentar o plano? É possível pavimentar o plano com todos os tipos de polígonos?
  - b. Agora utilize pelo menos 2 tipos de polígonos diferentes. É possível pavimentar o plano utilizando qualquer tipo de combinação entre os polígonos? Tente encontrar uma justificativa para sua resposta.

Fonte: material desenvolvido pela autora.

Meu objetivo com os exercícios da primeira parte era que os alunos compreendessem o que significava um objeto possuir simetria axial e que pensassem em coisas fora da atividade que possuem simetria. Além de ser um exercício de visualização, onde o aluno precisa pensar onde colocar o espelho de forma que a imagem refletida complete a imagem original.

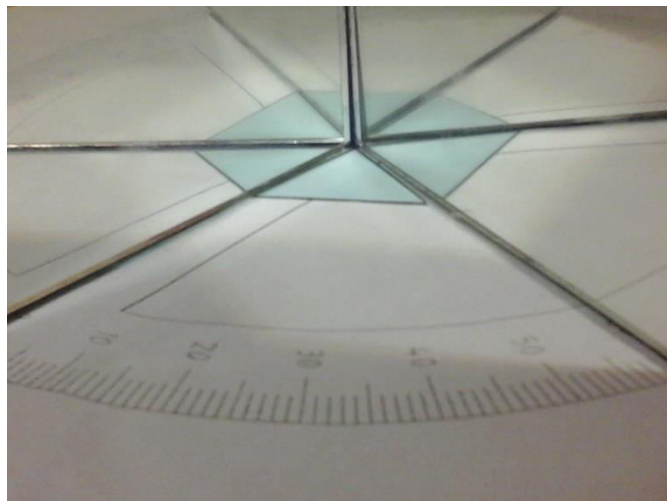
Saindo um pouco do conceito de simetria, temos os exercícios onde o aluno cria polígonos com diferentes números de lados utilizando os espelhos e diferentes triângulos isósceles e outro exercício onde o aluno tem mais liberdade de criação em que utiliza os espelhos e um pedaço de canudinho. Com essa atividade esperava-se que o aluno percebesse a relação entre os ângulos dos triângulos que formam os polígonos com sua quantidade de lados, além de perceberem a associação entre ângulos notáveis e polígonos regulares. Como, por exemplo, as imagens feitas pela autora a seguir (Figuras 2 e 3):

Figura 2: Polígono formado com um triângulo com um dos ângulos de  $40^\circ$ .



Fonte: foto baseada nas observações feitas pela autora em sala de aula.

Figura 3: Polígono formado com um triângulo com um dos ângulos de  $60^\circ$ .



Fonte: foto baseada nas observações feitas pela autora em sala de aula.

Assim, o aluno poderia perceber que quanto maior for o ângulo, menor será o número de lados do polígono. Além de perceber a relação entre o ângulo de  $60^\circ$  com o hexágono, entre outras relações.

A última parte contempla os conceitos aprendidos anteriormente, sendo necessário que o aluno utilize da sua criatividade para criar mosaicos simples e outros mais elaborados utilizando-se das conclusões da parte 2 juntamente com o conceito de simetria axial da parte 1. O aluno também deveria entender porque nem toda combinação de polígonos pavimenta o plano todo.

Explicitada a atividade passo a tecer algumas considerações sobre os alunos participantes.

### **6.1.2 Conhecendo um pouco a turma...**

Como não tive a oportunidade de exercer minha profissão no momento que estou fazendo esse trabalho, optei por fazê-lo em uma turma da Rede de Ensino Municipal de Curitiba em que estagiava. Os 7 alunos participantes eram da oitava série do fundamental, e possuíam variados graus de rendimento escolar.

Optei por realizar o trabalho com dois pequenos grupos, pois como disse em outro momento, experiência é um fator importante para a atividade acontecer. Não me sentia confiante em aplicar com uma turma completa, por inexperiência minha nessa área e achei que conseguiria conduzir a aula com poucos alunos. Outro fator que me levou a tomar essa decisão foi para poder discutir os dados com maior detalhamento.

### **6.1.3. Relatando a experiência**

Como já dito, separei os alunos em dois grupos de 4 e 3 alunos, que passarei a denominar de Grupo A e Grupo B. O Grupo A era composto dos alunos Aline, Guilherme, Maria e Pedro<sup>1</sup> e o Grupo B dos alunos Ana, Diego e Marcos<sup>2</sup>. Distribui o material para cada grupo e fiz uma pequena apresentação do que eles teriam que fazer, dizendo que em uma investigação matemática o aluno tem um papel importante e que a atividade se desenvolve com eles. Além disso, também citei que o meu papel era apenas para orientar suas ações, mas que o trabalho era com eles.

#### **6.1.3.1 Primeira Parte**

Para a primeira parte foi utilizado um espelho e a folha de atividades. A seguir são mostradas as respostas dos alunos nesta fase da atividade.

---

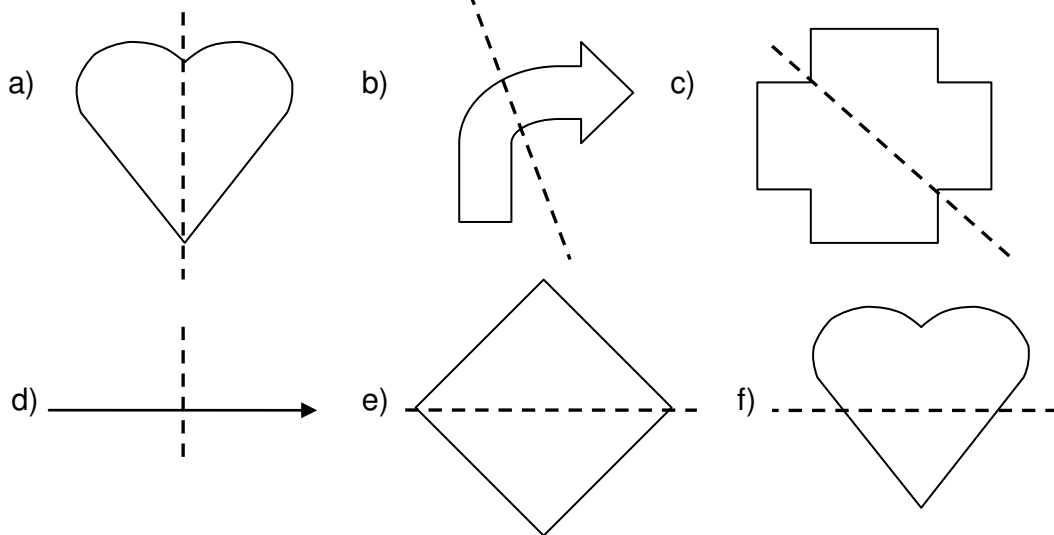
<sup>1</sup>Os nomes dos alunos que participaram da pesquisa foram substituídos por nomes fictícios para que fossem preservadas as suas identidades

<sup>2</sup> Os nomes dos alunos que participaram da pesquisa foram substituídos por nomes fictícios para que fossem preservadas as suas identidades.

Figura 4: Atividade aplicada em sala de aula. Primeira parte, atividade 1.

Parte 1:

1. Coloque o espelho em cima das linhas pontilhadas das figuras abaixo. Em quais figuras a imagem refletida no espelho completa a imagem original?



Fonte: material desenvolvido pela autora.

Fatos interessantes começaram a ocorrer logo no início da aula. O Grupo A não teve problemas com a atividade 1, mas o Grupo B não conseguiu compreender o que estava sendo pedido, como podemos verificar no diálogo a seguir:

*Ana: Ué, por que dois corações? Se colocar assim ele completa?*

Nesse momento a Ana colocou o espelho fora da linha pontilhada no coração do item f.

*Ana: Não, espera. Não entendi...*

*Diego: Não, tem que colocar na linha pontilhada!*

*Ana: É? Professora?*

*Professora: Releia a questão com mais atenção...*

*Ana: Aaaah, é pra colocar na linha pontilhada. Dã.*

*Diego: Eu disse...*

*Ana: Aaah, não completa.*

*Diego: Arruma o item d que também está errado.*

*Ana: Verdade.*

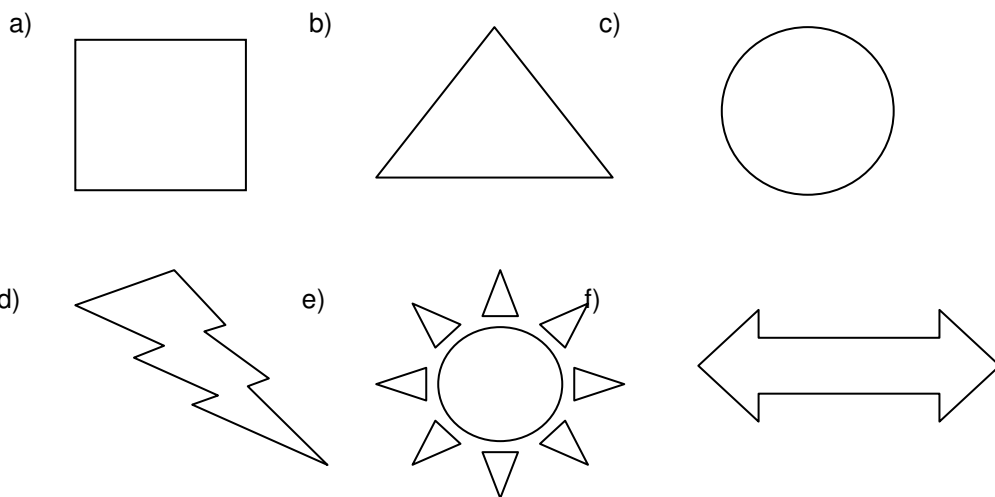
Senti que o problema não era a interpretação da atividade, mas sim a falta de interesse inicial desse grupo em particular. Também pude observar que após compreenderem o que era para ser feito o mesmo grupo continuou com dificuldades. Agora o problema foi que não compreenderam como deveriam colocar os espelhos sobre a imagem e como analisar a imagem formada.

Notei também que ao longo da atividade esse grupo foi se interessando mais no que estava fazendo e foi o responsável por momentos que me fizeram refletir em como vemos o aluno em sala de aula.

Após concluírem a primeira atividade, os estudantes seguiram para a atividade dois. Os materiais necessários para essa segunda tarefa foram os mesmos da anterior. Para melhor exemplificar seguem as respostas dos alunos para esta atividade:

Figura 5: Atividade aplicada em sala de aula. Primeira parte, atividade 2.

2. Em geometria, o eixo de simetria é uma linha que divide uma figura em duas partes iguais. Exemplos disso você viu no exercício anterior. Agora é com você: quantos eixos de simetria você encontra em cada uma das figuras abaixo? É possível existir mais de um eixo de simetria em uma mesma figura?



Fonte: material desenvolvido pela autora.

Após esses problemas iniciais, ambos os grupos resolveram a segunda atividade sem muitas dificuldades. Mas um diálogo entre dois alunos me chamou atenção:

*Ana: Atividade 2... O quadrado tem 2 eixos.*

*Diego: Não, são 4.*

*Ana: 4?*

*Diego: Você esqueceu das diagonais.*

*Ana: Aaah, verdade.*

*Diego: B... só 1. Círculo...*

*Ana: 1, 2, 3, 4, 5...*

*Diego: Um monte...*

*Ana: Quantos eu quiser. Professora, vem cá um pouco.*

*Professora: O círculo? Quantos eixos vocês encontraram?*

*Ana: Um monte? Sei lá... 90?*

*Professora: Será que não tem mais?*

*Diego: É tem mais... não tem um número exato. Mas como escrevo isso?*

*Professora: Tem um termo matemático que descreve essa situação...*

*Diego: Sim, sim, como é o nome mesmo? O símbolo é um 8 deitado... Ah, infinito!*

Essa passagem me fez refletir em como vemos o aluno e seus estereótipos. O responsável por acertar que a circunferência tem infinitos eixos de simetria era visto tanto pelo professor da turma quanto por mim como um aluno problemático, que quase não vai à aula e que se recusa a participar das atividades propostas na maior parte do tempo. A partir do momento em que teve a oportunidade de se expressar acabou revelando conhecimentos matemáticos além do esperado. Isso me fez refletir que talvez para ele a aula de matemática é apenas chata e desinteressante.

Fazendo uma tabela com as respostas obtidas, notei que as primeiras atividades que tratavam de simetria foram bem sucedidas. Nos quadros 1 e 2 são mostradas as quantidades de acertos e erros de cada grupo:

Quadro 1:Relação de respostas corretas e erradas do grupo A.

Grupo A	Item a	Item b	Item c	Item d	Item e	Item f
Atividade 1	C	C	C	C	C	C
Atividade 2	C	C	E	C	C	E

Fonte: dados obtidos pela autora.

Quadro 2:Relação de respostas corretas e erradas do grupo B.

Grupo B	Item a	Item b	Item c	Item d	Item e	Item f
Atividade 1	C	C	C	C	C	C
Atividade 2	C	C	C	C	C	C

Fonte: dados obtidos pela autora.

O Grupo A não solicitou a minha ajuda muitas vezes durante a aula. Durante a resolução dessa atividade não solicitaram a minha presença. Para ver até onde eles poderiam ir, não interfeiri em momento algum. Acredito que o erro do item f da segunda atividade foi falta de atenção, pois eles acertaram sem dificuldades itens que considero com um grau elevado de dificuldade. Já na questão do círculo eles escreveram convictos que só possuía 4 eixos, ao fim da aula repassei com ambos os grupos as atividades e pedi para que o outro grupo mostrasse como eles chegaram que a resposta era infinito.

Para a questão 3 não foi necessário algum material especial, foram utilizadas apenas as folhas de respostas. Essa pergunta pedia para que os estudantes encontrassem objetos que possuíssem eixos de simetria e que fizessem uma lista com eles.

O grupo A se esforçou para encontrar objetos com eixos de simetria. Segue parte da discussão entre eles:

*Aline: O celular!*

*Maria: 4 eixos?*

*Aline: Não, se colocar assim a “bolinha” não fica igual. Então só tem 1 eixo.*

A “bolinha” que a Aline se referiu era o botão do celular. Se colocasse o eixo cortando na horizontal essa “bolinha” não ficava em ambas as metades.

*Guilherme: O que mais... Ah, tem a borracha. Mas essa aqui tem um desenho, então não tem eixos de simetria. Haha.*

Nesse momento pude notar que esse grupo estava analisando os detalhes para decidir se o objeto possuía ou não eixos de simetria. Fiquei feliz com isso, pois eles entenderam que para algo possuir simetria na matemática é necessário que o eixo divida o objeto em duas partes exatamente iguais.

O grupo B não se atentou aos detalhes, mas não deixaram de anotar sugestões interessantes, como: quadro, giz, mesa, cadeira, óculos, etc.

Ao analisar as respostas obtidas em todos esses exercícios mais tudo que presenciei durante a aula, posso dizer que os alunos saíram dessa atividade sabendo o que era simetria axial.

### **6.1.3.2 Segunda Parte**

O foco da tarefa mudou na segunda parte do trabalho. Era necessário utilizar o conceito de simetria para a construção de polígonos regulares. Para isso, o aluno utilizava dois espelhos, diversos triângulos e o transferidor de papel.

Além do conhecimento do que era simetria, os alunos também precisavam de alguns conhecimentos adquiridos anteriormente em sala de aula. Essa necessidade trouxe problemas para o andamento dos trabalhos, pois o maior problema encontrado foi que eles não se lembravam dos conceitos necessários para resolver a atividade.

Um exemplo de conceito que julguei já conhecido pelos alunos ao montar a atividade foi triângulo isósceles, no entanto, isso não se mostrou correto. Alguns alunos se lembravam do triângulo equilátero, mas não do triângulo isósceles. Utilizando-me do que eles conheciam sobre o triângulo equilátero e suas propriedades (lados congruentes e ângulos internos iguais), fui junto com os alunos explicando que o isósceles tem dois lados iguais e dois ângulos iguais.

Outra situação similar aconteceu na última atividade. Agora os alunos não sabiam o que era plano e isso me pegou de surpresa. Tive muita dificuldade para explicar o que era um plano, e talvez isso tenha influenciado a atividade inteira. Visto que, alguns alunos tiveram dificuldades de olhar o reflexo dos espelhos e imaginar a pavimentação do plano inteiro.

Além dos problemas já relatados, outros problemas de menor grau apareceram. Um deles aconteceu na atividade 5, onde os alunos deveriam colocar o canudo entre os espelhos de forma que eles formassem um triângulo isósceles. Quando desenvolvi a atividade acreditei que seria óbvia a forma de colocar o canudo entre os espelhos de forma que formassem um triângulo. Logo, não julguei necessário explicar como fazer isso na atividade, como pode ser visto abaixo:

Figura 6: Atividade aplicada em sala de aula. Segunda parte, atividade 5.

5. Coloque os espelhos nos chamados ângulos notáveis ( $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $120^\circ$ ). Coloque um pedaço de canudo entre os espelhos de forma que forme um triângulo isósceles. Que tipo de polígonos você obteve? Esses polígonos têm alguma característica especial?

Fonte: material desenvolvido pela autora.

Mas o inesperado aconteceu, um grupo não conseguiu visualizar como deveria ser montado o triângulo, provando que os alunos sempre conseguem surpreender o professor. Para exemplificar a situação descreverei o material usado pelos alunos nessa atividade. Os alunos usaram um jogo de espelhos, um transferidor impresso em papel e um canudo. O que torna a situação notável foi o catalisador da discussão: o tipo de canudo utilizado. O canudo era um daqueles dobráveis, que ficam em formato de L. Utilizei esse tipo de canudo, pois tinha um pacote deles em minha residência. Nunca imaginei a situação que um grupo chegou, que está relatada a seguir:

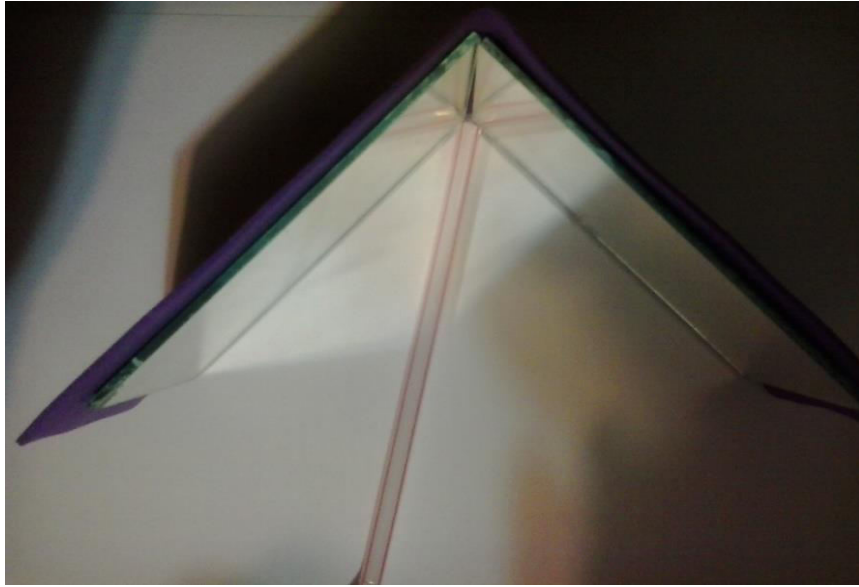
*Diego: Hmmm, como assim formar um triângulo com o canudo e os espelhos?*

*Ana: Coloca ai (o canudo) no meio deles (os espelhos).*

*Diego: Assim?*

Para melhor ilustrar a situação, as figuras 7 e 8 mostram fotos reproduzindo o que observei o grupo fazer:

Figura 7: Representação do problema enfrentado por Ana e Diego em sala de aula.



Fonte: foto baseada nas observações feitas pela autora em sala de aula.

*Ana: Mas assim não forma triângulos... Assim talvez?*

Figura 8: Representação do problema enfrentado por Ana e Diego em sala de aula.



Fonte: foto baseada nas observações feitas pela autora em sala de aula.

*Diego: Continua não formando triângulos... Professora, como que vou colocar o canudo?*

Primeiramente pedi para que me mostrassem o que estavam tentando fazer, então o grupo me mostrou as duas situações das imagens 7 e 8. Ambas me

surpreenderam, enquanto criava a atividade não pensei que a forma de colocar o canudo seria um problema. O que me faz pensar que uma aula investigativa pode ser surpreendente, cabendo ao professor lidar, da melhor forma possível, com essas situações inusitadas.

Refletindo posteriormente, cheguei à conclusão que eles pensaram em formar o triângulo utilizando o canudo e seus reflexos nos espelhos o que me trouxe surpresa dada a similaridade com o exercício anteriormente realizado.

Os alunos trataram os exercícios da segunda parte como distintos, sendo que o objetivo era utilizar os conhecimentos adquiridos do primeiro no segundo, apenas colocando uma restrição no ângulo formado entre os espelhos.

### 6.1.3.3 Terceira parte

Na última parte da atividade que começaram a aparecer às maiores dúvidas e problemas. Essa última parte possui um grau maior de dificuldade, pois engloba tudo que foi visto anteriormente, como: simetria e polígonos regulares.

Para realizar a atividade foram usados os polígonos e os espelhos. Como podemos ver no enunciado abaixo:

Figura 9: Atividade aplicada em sala de aula. Terceira parte, atividade 6.

6. Com o kit de polígonos que você recebeu:
  - a. Utilizando apenas um único tipo de polígono, é possível pavimentar o plano? É possível pavimentar o plano com todos os tipos de polígonos?
  - b. Agora utilize pelo menos 2 tipos de polígonos diferentes. É possível pavimentar o plano utilizando qualquer tipo de combinação entre os polígonos? Tente encontrar uma justificativa para sua resposta.

Fonte: material desenvolvido pela autora.

O que era um plano foi a primeira dúvida que surgiu. Como comentei anteriormente, isso me pegou desprevenida e tive dificuldades para explicar. Passado esse momento, os estudantes começaram a mexer com os polígonos junto aos espelhos.

*Pedro: Olha, coloca o quadrado assim...(Figura 10)*

*Maria: Hm... ok. Se colocar outros grudados nesse, vai completando tudo.*

Figura 10: Representação do que aconteceu envolvendo Pedro Aline e Maria.



Fonte: foto baseada nas observações feitas pela autora em sala de aula.

*Pedro: Quadrado ok. O hexágono parece que não dá...(Figura 11)*

Figura 11: Representação do que aconteceu envolvendo Pedro Aline e Maria.



Fonte: foto baseada nas observações feitas pela autora em sala de aula.

*Aline: Fica sobrando um pedaço...*

*Pedro: É, não dá.*

*Professora: Não esqueçam de olhar para a imagem no espelho...*

*Maria: ...*

*Pedro: ...*

*Aline: ...*

*Maria: Ah! Verdade, olha aqui... Esquecemos de olhar o reflexo junto com a figura...*

*Pedro: Hexágono ok. Agora o pentágono...*

*Aline: Fica faltando uma parte... Mesmo com o reflexo... Então, ele não forma.*

*Pedro: Pentágono não. “Utilizando apenas um único tipo de polígono, é possível pavimentar o plano?” Sim. “É possível pavimentar o plano com todos os tipos de polígonos?” Não, o pentágono não. Tá, mas por quê?*

Nenhum aluno do grupo soube responder essa pergunta. Eles não conseguiram pensar nas atividades como continuas, que o que foi aprendido na atividade 4 poderia ser útil para explicar porque nem sempre é possível pavimentar o plano. Isso também afetou o item b, pois o pensamento envolvido era muito parecido com o anterior.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Quando iniciei esse trabalho buscava principalmente aperfeiçoamento profissional. Procurava trabalhar com uma metodologia de ensino de matemática pouco explorada por mim até então, logo a metodologia escolhida foi a investigação matemática.

Com esse trabalho compreendi a dinâmica de uma aula investigativa, além do papel do aluno e do professor. Mas, também foi com esse trabalho que compreendi que colocar em prática o que está descrito na teoria não é tarefa das mais fáceis.

Posso citar como exemplo o trabalho do professor, a teoria diz que o professor deve desafiar, avaliar o progresso e apoiar o trabalho realizado, e raciocinar matematicamente. Mas na prática senti dificuldades em desafiar um aluno que não queria nem escutar o que o professor tinha a dizer. O grupo B era composto de três alunos, mas apenas dois se interessaram pela atividade. O terceiro aluno simplesmente se recusava a participar mesmo com a insistência do professor.

A teoria também diz que o professor deve ajudar o aluno a chegar à resposta e não dá-la diretamente. Mas quando o aluno tem uma série de deficiências no aprendizado, o professor pode ter muitos problemas para fazer o aluno chegar ao resultado desejado sem dar atalhos.

Posso separar esse trabalho em dois momentos distintos. O primeiro momento é quando trabalhamos com simetria axial. Esse momento considero como bem sucedido, pois além do resultado obtido ser positivo ele também ocorreu como uma investigação matemática é descrita na teoria. Os alunos trabalharam em conjunto, procuraram discutir entre si os resultados obtidos, a professora interferiu apenas em momentos oportunos para diminuir dúvidas do enunciado da atividade.

A segunda parte é quando começamos a trabalhar com polígonos e mosaicos. Em minha visão, ela foi bem sucedida em apenas uma parte, quando estudamos polígonos regulares. Apesar dos problemas relatados, o saldo geral foi muito positivo. Os estudantes conseguiram ver a relação do ângulo com a quantidade de lados do polígono, que era o principal objetivo da atividade.

Não posso deixar de confessar que me senti um pouco frustrada com a última parte da investigação. Quando imaginei essas aulas, esse momento seria o clímax, onde tudo visto até então convergiria para auxiliar o desenvolvimento do

mesmo. Infelizmente os alunos não conseguiram sistematizar todo o conhecimento prévio para desenvolver essa atividade como esperava. Os estudantes não deixaram de realizar essa questão, mas ficaram no básico e eu esperava, e desejava, que eles fossem além.

Mesmo com os problemas e dificuldades encontrados, acredito que evolui como professora de matemática. Tenho certeza que quando for desenvolver outra atividade de investigação matemática no futuro, esta vai ser mais completa, melhor planejada e desenvolvida.

Espero que esse trabalho traga contribuições para futuros professores de Matemática ao iniciarem suas primeiras atividades de investigação matemática, revelando seus pontos positivos bem como as primeiras dificuldades que professores iniciantes, como eu, sentem ao se deparar com metodologias diferentes daquelas pelas quais foram ensinadas.

## REFERENCIAS

ABRANTES, P. Investigações em Geometria na Sala de Aula. In: VELOSO, E.; FONSECA, H.; PONTE, J.P.; ABRANTES, P. **Ensino da Geometria no Virar do Milénio**, Lisboa: DEFCUL, 1999.

FERREIRA, A. A. **A Produção de Significados Matemáticos em um Contexto de Aulas Exploratório-investigativas**. 2012. 250 p. Tese de Doutorado – Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2012.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Geometria dos Mosaicos, coleção Vivendo a Matemática**, São Paulo: Ed. Scipione, 2005. 39 p.

LAMONATO, M. **A Exploração-investigação Matemática: Potencialidades para a Formação Contínua de Professores**. 2011. 258 p. Tese de Doutorado – Universidade Federal de São Carlos, São Paulo. 2011.

MURARI, C.; PEREZ, G. **O Uso de Espelhos e Caleidoscópios em Atividades Educacionais de Geometria para 7ª e 8ª séries**. Bolema, Rio Claro-SP, v. 15, n. 18, set. 2002.

PONTE, J. P.; BROCARD, J. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. 159 p.

REGINALDO, B. K. S. **Argumentação em Atividades Investigativas na Sala de Aula de Matemática**. 2012. 185 p. Dissertação de Mestrado – Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais. 2012.

TRINDADE, A. F. P. **Investigações Matemáticas e Resolução de Problemas - Que Fronteiras?** 2008. 176 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal do Paraná, Paraná. 2008.