

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

WESLEY PARDINHO DO CARMO

MODELAGEM FRACIONÁRIA E SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO
BIDIMENSIONAL TRANSIENTE EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO

CURITIBA

2023

WESLEY PARDINHO DO CARMO

MODELAGEM FRACIONÁRIA E SIMULAÇÃO DO ESCOAMENTO
BIDIMENSIONAL TRANSIENTE EM RESERVATÓRIOS DE PETRÓLEO

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Doutor em Engenharia Química, no curso de Pós-Graduação em Engenharia Química - PPGEQ, Setor de Tecnologia, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Dr. Alexandre Ferreira Santos
Coorientador: Dr. Marcelo Kaminski Lenzi

CURITIBA

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Carmo, Wesley Pardiniho do

Modelagem fracionária e simulação do escoamento bidimensional
transiente em reservatórios de petróleo. / Wesley Pardiniho do Carmo. –
Curitiba, 2023.

1 recurso on-line : PDF.

Tese - (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia,
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química.

Orientador: Dr. Alexandre Ferreira Santos

Coorientador: Dr. Marcelo Kaminski Lenzi

1. Petróleo (Reservatórios). 2. Escoamento. 3. Modelagem. 4. Cálculo
fracionário. I. Santos, Alexandre Ferreira. II. Lenzi, Marcelo Kaminski. III.
Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia
Química. V. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA QUÍMICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **WESLEY PARDINHO DO CARMO** intitulada: **Modelagem fracionária e simulação do escoamento bidimensional transiente em reservatórios de petróleo**, sob orientação do Prof. Dr. ALEXANDRE FERREIRA SANTOS, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 01 de Setembro de 2023.

Assinatura Eletrônica
04/09/2023 15:13:08.0
ALEXANDRE FERREIRA SANTOS
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
04/09/2023 16:13:48.0
HAROLDO VALENTIN RIBEIRO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ)

Assinatura Eletrônica
04/09/2023 15:26:19.0
FERNANDO AUGUSTO PEDERSEN VOLL
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
04/09/2023 16:44:53.0
EDUARDO MÁRCIO DE OLIVEIRA LOPES
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

*Dedico esse trabalho a minha esposa por todo
seu amor, apoio e companheirismo
À minha mãe Alalice por todo, carinho e dedicação
incondicional ao longo de toda a minha vida
A meu pai Elias pelo apoio, pelo carinho e pelos
inúmeros sacrifícios realizados para garantir
minha formação*

AGRADECIMENTOS

A Deus pela beleza da vida.

À minha esposa Kamila, pelo amor e paciência ao longo de toda a realização do trabalho. Por todas as palavras de incentivo nos momentos difíceis e por todos os bons momentos que compartilharemos juntos.

À minha família, por todo carinho dispensado ao longo da vida.

Aos professores Dr. Alexandre Ferreira Santos e Dr. Marcelo Kaminski Lenzi por toda a troca de conhecimento e a indispensável orientação na realização do trabalho.

A todos os colegas, docente e funcionários do PPGEQ-UFPR que de alguma forma contribuíram e me incentivaram.

À Universidade Federal do Paraná pela formação.

À CAPES pelo apoio financeiro.

RESUMO

Historicamente, os modelos para a descrição do escoamento em reservatórios de petróleo são obtidos a partir da lei de Darcy. Entretanto, devido a limitações e hipóteses simplificadoras, nem sempre essa abordagem retorna resultados satisfatórios. Recentemente, a utilização do cálculo fracionário para a generalização de modelos e obtenção de formulações mais precisas vem ganhando força. Tendo isso em vista, o presente trabalho aplicou a definição de derivada fracionária de Caputo à descrição e obtenção do perfil de pressão unidimensional e bidimensional em regime transiente em um reservatório de petróleo. Para isso, propõe-se uma modelagem partindo do balanço global de massa em um volume de controle infinitesimal. A esse balanço, acoplou-se a lei de Darcy generalizada através da derivada de Caputo aplicada a sua coordenada espacial. O modelo de escoamento obtido foi, para um caso simplificado, resolvido analiticamente e, posteriormente, essa solução foi comparada a solução numérica a fim de validar a estratégia de solução numérica. Os modelos unidimensionais e bidimensionais transientes foram então resolvidos numericamente através de um esquema explícito de discretização. Tal esquema teve sua estabilidade estudada e regiões bem delimitadas de estabilidade foram propostas. Por fim, utilizando-se dados de um reservatório real, foi possível simular o perfil de pressão no interior desse reservatório para um período de tempo de 500 dias de produção.

Palavras-chave: reservatórios de petróleo; escoamento; modelagem; análise de estabilidade; simulação; cálculo fracionário.

ABSTRACT

Historically, models for describing flow in petroleum reservoirs have been derived from Darcy's law. However, due to limitations and simplifying assumptions, this approach does not always yield satisfactory results. Recently, the utilization of fractional calculus for generalizing models and obtaining more accurate formulations has been gaining traction. With this in mind, the present study applied the definition of Caputo's fractional derivative to the description and determination of one-dimensional and two-dimensional pressure profiles under transient conditions in an oil reservoir. To achieve this, a modeling approach was proposed based on the overall mass balance within an infinitesimal control volume. To this balance, the generalized Darcy's law was coupled using the Caputo derivative applied to its spatial coordinate. The derived flow model was analytically solved for a simplified case, and subsequently, this solution was compared to a numerical solution to validate the numerical solution strategy. The transient one-dimensional and two-dimensional models were numerically solved using an explicit discretization scheme. This scheme's stability was examined, and well-defined stability regions were identified. Finally, by employing data from an actual reservoir, it was possible to simulate the pressure profile within the reservoir over a production period of 500 days.

Keywords: petroleum reservoirs; flow; modeling; stability analysis; simulation; fractional calculus.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 - ESQUEMA TÍPICO DE RESERVATÓRIO ANTICLÍNEO DE ÓLEO E GÁS	17
FIGURA 2 - EXEMPLO DE ARMADILHAS ESTRUTURAIS.....	18
FIGURA 3 - ARMADILHAS ESTRATIGRÁFICAS	18
FIGURA 4 - DIAGRAMA PRESSÃO-TEMPERATURA PARA UM RESERVATÓRIO.....	19
FIGURA 5 - VOLUME DE CONTROLE.....	54
FIGURA 6 - EXEMPLO DE MALHA UNIDIMENSIONAL	63
FIGURA 7 - RESULTADOS DE SIMULAÇÃO	67
FIGURA 8 - COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO DE ORDEM INTEIRA E FRACIONÁRIA.....	69
FIGURA 9 - COMPARAÇÃO DA SOLUÇÃO PARA DIFERENTES ORDENS FRACIONÁRIAS	70
FIGURA 10 - SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O MODELO DE ESCOAMENTO EM REGIME PERMANENTE.....	73
FIGURA 11 - COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO ANALÍTICA E SOLUÇÃO NUMÉRICA	75
FIGURA 12 - REGIÃO DE ESTABILIDADE PARA O ESQUEMA EXPLÍCITO UNIDIMENSIONAL TRANSIENTE.....	80
FIGURA 13 - PERMEABILIDADE EXPERIMENTAL NA DIREÇÃO X.....	82
FIGURA 14 - POROSIDADE EXPERIMENTAL	83
FIGURA 15 - PSEUDOPERMEABILIDADE GERADA PARA UMA MALHA COM 100 BLOCOS	84

FIGURA 16 - POROSIDADE GERADA PARA UMA MALHA COM 100 BLOCOS	84
FIGURA 17 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO UNIDIMENSIONAL TRANSIENTE NÃO LINEAR PARA $T = 500$ DIAS.....	85
FIGURA 18 - AVANÇO DA SOLUÇÃO UNIDIMENSIONAL TRANSIENTE NÃO LINEAR COM O TEMPO.....	86
FIGURA 19 - BALANÇO DE MASSA PARA O PROBLEMA UNIDIMENSIONAL TRANSIENTE EXPLÍCITO	88
FIGURA 20 - EXEMPLO DE MALHA BIDIMENSIONAL	89
FIGURA 21 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE COM POÇO DE PRODUÇÃO PARA $T = 0$ DIAS	94
FIGURA 22 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE COM POÇO DE PRODUÇÃO PARA $T = 10$ DIAS	95
FIGURA 23 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE COM POÇO DE PRODUÇÃO PARA $T = 50$ DIAS	95
FIGURA 24 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE COM POÇO DE PRODUÇÃO PARA $T = 100$ DIAS	96
FIGURA 25 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE COM POÇO DE PRODUÇÃO PARA $T = 500$ DIAS	96
FIGURA 26 - REGIÃO DE ESTABILIDADE PARA O ESQUEMA EXPLÍCITO DE SOLUÇÃO DO MODELO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE	100
FIGURA 27 – PSEUDOPERMEABILIDADE NA DIREÇÃO X GERADA PARA UMA MALHA 50x50	102
FIGURA 28 - PSEUDOPERMEABILIDADE NA DIREÇÃO Y GERADA PARA UMA MALHA 50x50	103

FIGURA 29 - POROSIDADE GERADA PARA UMA MALHA 50x50 BLOCOS	103
FIGURA 30 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE NÃO LINEAR COM POÇO DE PRODUÇÃO PARA T = 0 DIAS	104
FIGURA 31 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE NÃO LINEAR COM POÇO DE PRODUÇÃO PARA T = 10 DIAS.....	104
FIGURA 32 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE NÃO LINEAR COM POÇO DE PRODUÇÃO PARA T = 100 DIAS.....	105
FIGURA 33 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE NÃO LINEAR COM POÇO DE PRODUÇÃO PARA T = 500 DIAS.....	105
FIGURA 34 - BALANÇO DE MASSA PARA O PROBLEMA UNIDIMENSIONAL TRANSIENTE EXPLÍCITO	106

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 - CLASSIFICAÇÃO DE ACORDO COM O °API.....	16
TABELA 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA - ESCOAMENTO EM MEIOS POROSOS	38
TABELA 3 - VARIÁVEIS UTILIZADAS NA SIMULAÇÃO	67
TABELA 4 - DESVIOS CALCULADOS EM RELAÇÃO A SOLUÇÃO DE ORDEM INTEIRA.....	70
TABELA 5 - VARIÁVEIS UTILIZADAS NA SIMULAÇÃO	94

SUMÁRIO

1.	INTRODUÇÃO	14
2.	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	15
2.1.	O PETRÓLEO.....	15
2.2.	O RESERVATÓRIO DE PETRÓLEO.....	16
2.3.	A TRANSFERÊNCIA DE MASSA	20
2.3.1.	<i>A primeira lei de Fick</i>	<i>21</i>
2.3.2.	<i>A lei de Darcy</i>	<i>24</i>
2.4.	CÁLCULO FRACIONÁRIO	26
2.4.1.	<i>Função Gama.....</i>	<i>26</i>
2.4.2.	<i>Função de Mittag-Leffler.....</i>	<i>27</i>
2.4.3.	<i>Derivadas fracionárias.....</i>	<i>29</i>
2.4.3.1.	<i>Definição de Grünwald-Letnikov.....</i>	<i>29</i>
2.4.3.2.	<i>Definição de Riemann-Liouville</i>	<i>29</i>
2.4.3.3.	<i>Definição de Caputo</i>	<i>30</i>
2.4.4.	<i>Integral fracionária</i>	<i>31</i>
2.5.	O ESTADO DA ARTE	32
3.	OBJETIVOS	43
3.1.	OBJETIVO GERAL	43
3.2.	OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	43
4.	MATERIAIS E MÉTODOS	44
4.1.	SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS	44
4.1.1.	<i>Método de solução utilizando a definição de Riemann-Liouville.....</i>	<i>44</i>
4.1.1.1.	<i>Equações fracionárias de um termo</i>	<i>45</i>
4.1.1.2.	<i>Equações fracionárias de dois termos.....</i>	<i>45</i>
4.1.2.	<i>Método de solução utilizando a definição de Caputo.....</i>	<i>46</i>
4.1.2.1.	<i>Equações fracionárias de um termo</i>	<i>46</i>
4.1.2.2.	<i>Equações fracionárias de dois termos.....</i>	<i>46</i>
4.2.	SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS	47
4.2.1.	<i>O método das diferenças finitas</i>	<i>47</i>

4.2.2.	<i>Aproximação numérica da derivada fracionária</i>	48
4.3.	MÉTODO L1 DE APROXIMAÇÃO DAS DERIVADAS FRACIONÁRIAS	51
4.4.	ANÁLISE DE ESTABILIDADE	52
5.	MODELAGEM	54
5.1.	ESCOAMENTO INCOMPRESSÍVEL.....	58
5.2.	FLUIDO LEVEMENTE COMPRESSÍVEL	59
5.3.	FLUIDOS COMPRESSÍVEIS.....	61
6.	RESULTADOS E SIMULAÇÕES	63
6.1.	MODELO UNIDIMENSIONAL TRANSIENTE	63
6.1.1.	<i>Validação</i>	71
6.1.2.	<i>Análise de estabilidade unidimensional</i>	75
6.1.3.	<i>Não linearidades</i>	80
6.2.	BALANÇO GLOBAL DE MASSA	86
6.3.	MODELO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE	89
6.3.1.	<i>Análise de estabilidade bidimensional</i>	97
6.3.2.	<i>Não linearidades</i>	101
7.	CONCLUSÃO	107
7.1.	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	109
	REFERÊNCIAS	110

1. INTRODUÇÃO

De forma simplificada, um reservatório de petróleo é formado por uma rocha permeável, porosa ou fraturada, hidrocarbonetos e água. Esta rocha serve como espaço de armazenamento dos hidrocarbonetos e é responsável por desempenhar um papel importante na regulação do fluxo de fluidos no reservatório (OBEMBE et al., 2017).

Os sistemas de hidrocarbonetos encontrados nos reservatórios são misturas complexas de compostos orgânicos, em geral compreendida por óleo e gás, além de água, que exibem comportamento multifásico em amplas faixas de temperatura e pressão (AHMED, 2010).

Devido a essa complexidade, a modelagem matemática do escoamento de hidrocarbonetos é fundamental para a avaliação de performance e rendimento dos reservatórios, além de possibilitar a otimização de parâmetros de produção e escoamento em diversas condições. Tais modelos se baseiam em princípios físicos e matemáticos para descrever o comportamento desses sistemas, tais como: balanço material, equações de fluxo e continuidade, equações de estado e correlações empíricas (ERTEKIN et al., 2001).

Historicamente, os modelos de escoamento em meios porosos e, por consequência em reservatórios de petróleo, se baseiam na aplicação da lei de Darcy, que por sua vez, foi obtida experimentalmente correlacionando-se a velocidade de escoamento do fluido que atravessa uma certa quantidade de material poroso ao seu gradiente de pressão. Todavia, seu uso é restrito devido a algumas simplificações tais como: fluido homogêneo, monofásico e newtoniano; escoamento laminar; propriedades do meio independentes da pressão e temperatura (AWOTUNDE et al., 2016).

Recentemente, o cálculo fracionário vem desempenhando um papel importante na generalização e obtenção de modelos mais precisos em diversas áreas de aplicação. Nesse sentido, a lei de Darcy foi generalizada possibilitando a obtenção de modelos fracionários mais adequados à descrição do escoamento em meios porosos (REN; GUO, 2015). Como será visto adiante, é crescente o surgimento de trabalhos que utilizam o cálculo fracionário na descrição de fenômenos físicos.

2. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

2.1. O PETRÓLEO

O petróleo cru é uma mistura complexa de, literalmente, centenas a milhares de compostos. Em sua grande maioria são compostos formados por apenas carbono e hidrogênio, os hidrocarbonetos. Esses compostos são muito distintos entre si, pois formam cadeias carbônicas, desde as mais simples, metano, – contendo apenas um carbono – até compostos contendo mais de 300 átomos de carbono em sua estrutura (JONES; PUJADÓ, 2006).

Além dos hidrocarbonetos, o petróleo apresenta outros compostos contendo enxofre, oxigênio, nitrogênio e, por vezes, alguns metais como níquel, vanádio e sódio (NELSON, 1968). No entanto, desses, os mais comuns são os compostos sulfurados, principalmente sulfeto de hidrogênio (H_2S) e compostos orgânicos sulfurados. Os compostos orgânicos sulfurados estão presente em toda a faixa de ponto de ebulição dos hidrocarbonetos, suas estruturas são similares as dos hidrocarbonetos. No entanto, contém um ou mais átomos de enxofre. Sendo desses, o mais simples, a etilmercaptana (C_2H_6S) (JONES; PUJADÓ, 2006).

Essa vasta possibilidade de compostos faz com que seja pouco provável (ou impossível) que dois petróleos de diferentes regiões possuam a mesma composição. Além disso, torna-se muito difícil caracterizar cada componente presente em cada petróleo. No entanto, alguns indicadores foram criados para melhor caracterizar e descrever cada tipo de óleo encontrado.

Uma das formas de caracterizar os óleos é através da metodologia SARA. Esse método submete o petróleo cru a um processo de separação de quatro frações contendo apenas saturados, aromáticos, resinas e asfaltenos. De forma simplificada, a amostra de petróleo cru é submetida ao processo de precipitação dos asfaltenos utilizando n-heptano. Posteriormente, as demais frações são separadas por cromatografia líquida (ASTM D2007).

Além disso, muitos óleos são classificados de acordo com a prevalência de algum dos grupos de hidrocarbonetos que o constituem, destacando-se a classificação em: parafínicos, naftênicos e aromáticos (ANP, 2017).

Outra maneira de se classificar os óleos, relacionada à sua densidade, é chamada de grau API. Tal medida foi criada pelo Instituto Americano do Petróleo e é útil como indicador de leveza do óleo. O grau API é calculado através da equação (01) (CHAUDHURI, 2010).

$$API = \frac{141,5}{R} - 131,5 \quad (01)$$

Onde R é a densidade relativa do óleo medida a 60°F (15,5°C).

Para os óleos de interesse comercial, por serem mais leves que a água, o grau API é maior que 10 e quanto mais leve o óleo, maior será seu grau API. De forma simples, pode-se classificar os óleos de acordo com as indicações presentes na Tabela (01) (ZADYMOVA et al. 2017).

TABELA 1 - CLASSIFICAÇÃO DE ACORDO COM O °API

Classificação	°API
Leve	°API > 30
Médio	22 < °API < 30
Pesado	10 < °API < 22

Fonte: o autor (2023)

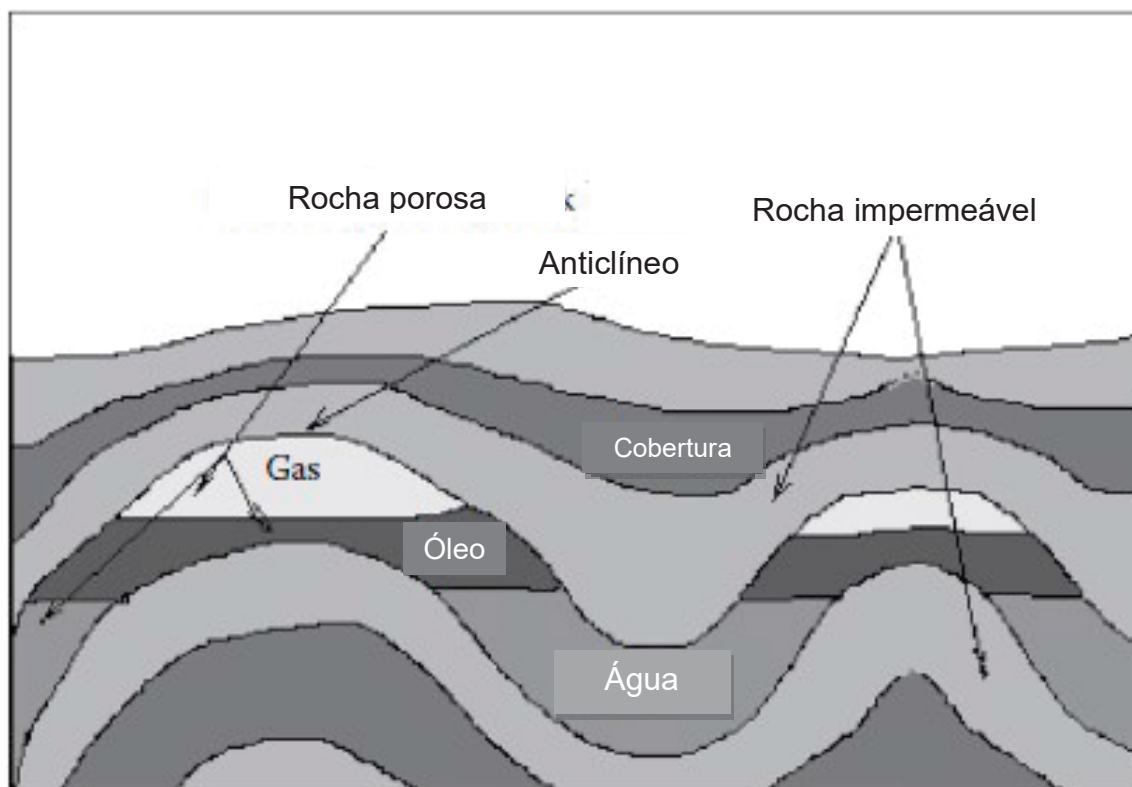
2.2. O RESERVATÓRIO DE PETRÓLEO

Existem muitas hipóteses para a formação dos depósitos de petróleo cru. No entanto, a mais aceita é de que o petróleo se formou através da decomposição de matéria orgânica aprisionada sob camadas de sedimentos devido a ação de altas pressões, temperatura e ação de micro-organismos ao longo de milhões de anos (CHAUDHURI, 2010).

Desta forma, segundo Craft et al. (1991), o petróleo cru é encontrado aprisionado em estruturas formadas por rochas porosas podendo estar em fase líquida, gasosa ou em uma mistura de ambos os estados físicos. Essas rochas porosas são conhecidas como bacias sedimentares, onde, em sua maioria, coexistem gás metano, óleo e água, de acordo com o que é mostrado na

Figura (01). A partir do leito de rocha, o óleo e gás migram para regiões onde ficam aprisionados. Essas regiões, em geral, possuem um formato favorável como anticlínios, domos salinos ou áreas fraturadas. A Figura (01) mostra a estrutura típica de um reservatório com estrutura anticlínica.

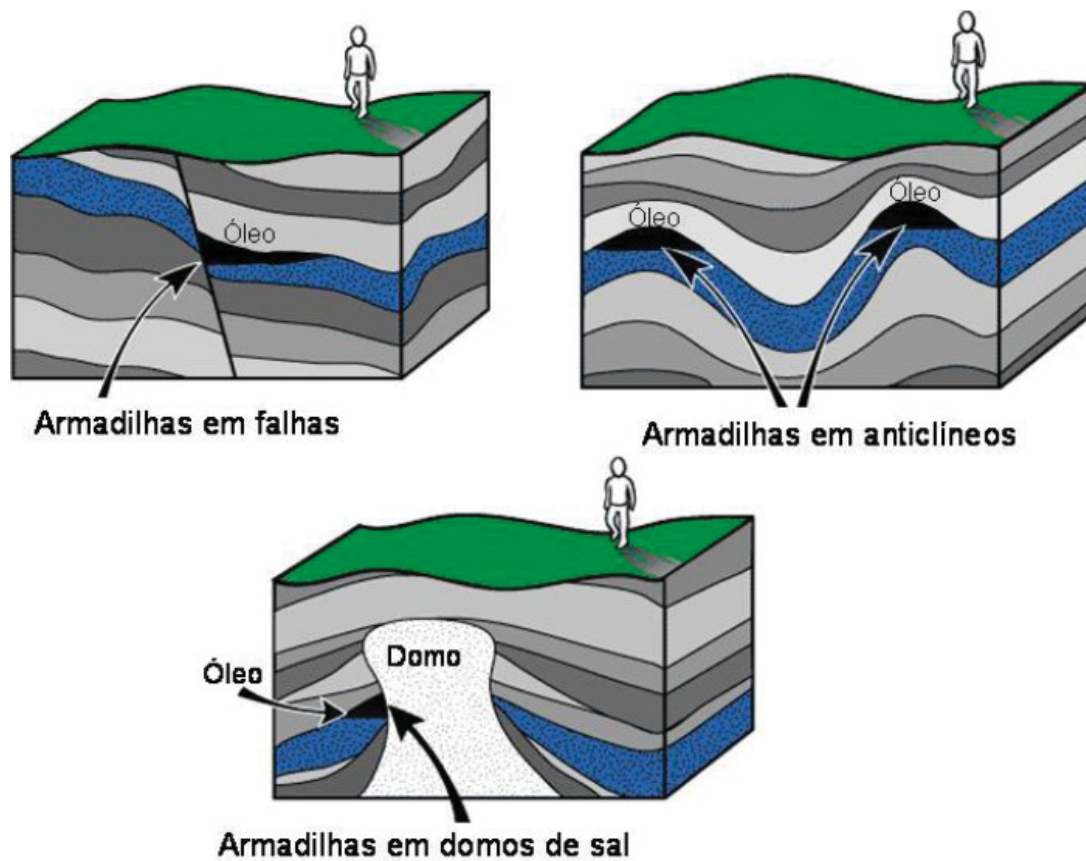
FIGURA 1 - ESQUEMA TÍPICO DE RESERVATÓRIO ANTICLÍNICO DE ÓLEO E GÁS



Fonte: Adaptado de Chaudhuri (2010)

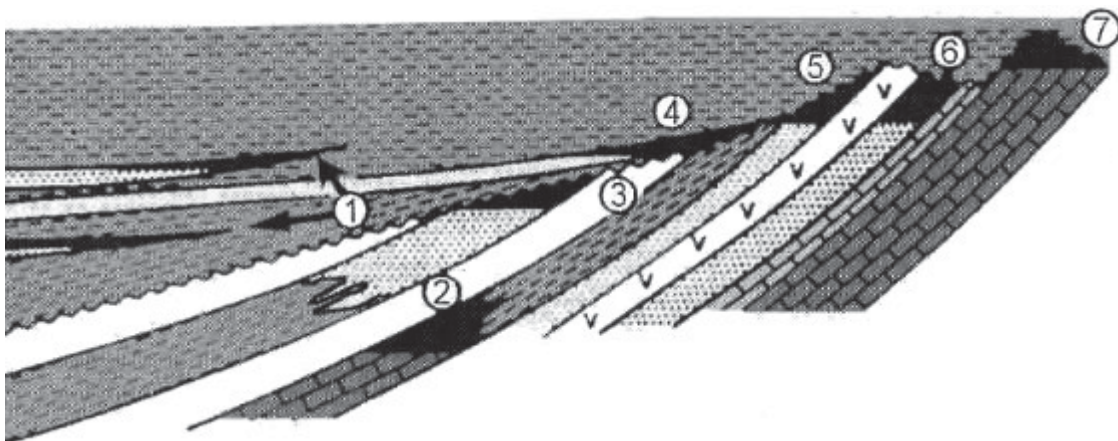
Segundo Biddle; Wielchowsky (1994) essas configurações geométricas, capazes de aprisionar hidrocarbonetos, são conhecidas como armadilhas e, em geral, são constituídas por uma rocha reservatório e um selante. Ainda segundo Biddle; Wielchowsky (1994) as armadilhas podem ser estruturais (formada por movimentos tectônicos), estratigráficas (formada por discontinuidades nas camadas da rocha) ou mistura dos dois casos anterior. A Figura 02 apresenta alguns exemplos de armadilhas estruturais, enquanto que a Figura 03 apresenta um exemplo de armadilha estratigráfica, na qual é possível perceber as discontinuidades nas camadas de rocha e, com isso, a formação do reservatório de petróleo em seu interior.

FIGURA 2 - EXEMPLO DE ARMADILHAS ESTRUTURAIS



Fonte: Sansone (2020)

FIGURA 3 - ARMADILHAS ESTRATIGRÁFICAS

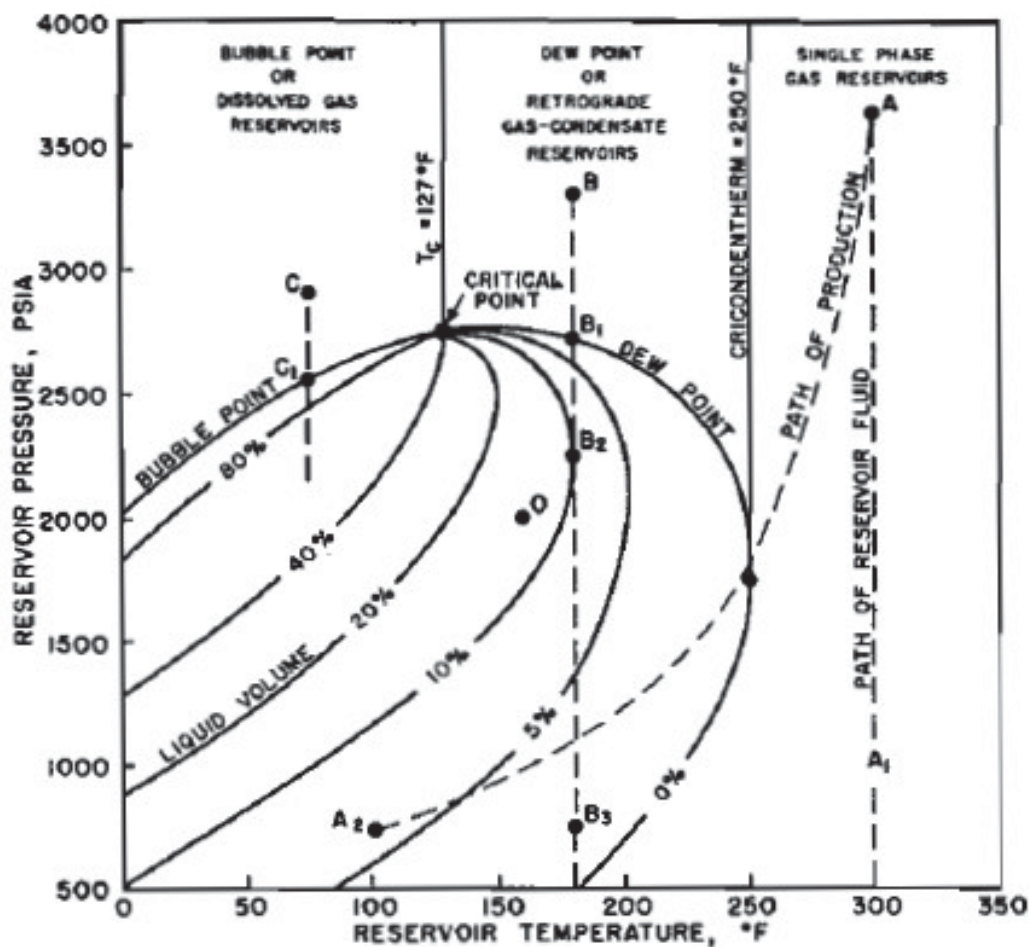


Fonte: Sansone (2020)

De um ponto de vista mais técnico, segundo Craft et al. (1991), os vários tipos de reservatórios podem ser definidos devido a sua condição inicial de temperatura e pressão de acordo com seu diagrama de fase (pressão-

temperatura). Vale ressaltar, cada reservatório, devido diferenças de concentração, possui seu próprio diagrama de fase. A Figura (02) apresenta um exemplo de diagrama de fase para um reservatório de petróleo. Craft et al. (1991) apresentam algumas análises com base no diagrama de fases para um reservatório hipotético, exemplificando seu comportamento durante o processo de extração de petróleo.

FIGURA 4 - DIAGRAMA PRESSÃO-TEMPERATURA PARA UM RESERVATÓRIO



Fonte: Craft et al. (1991)

Da análise do gráfico presente na Figura (02), nota-se quatro pontos principais (A, B, C e D) e uma região bifásica bem definida. Supondo um reservatório inicialmente localizado no ponto A (300°F e 3700psi), é natural se esperar que esse reservatório seja constituído inteiramente de uma fase gasosa homogênea. Como sob essas condições o reservatório está acima da pressão e temperatura crítica; mesmo após o início da operação e abaixamento

da pressão não haverá mudança de fase, sendo produzido apenas gás na superfície.

Já para o ponto B, o reservatório inicialmente a 180°F e 3300psi apresentaria apenas uma fase gasosa homogênea, visto que está acima da temperatura crítica. No entanto, a partir do início da operação e abaixamento da pressão no interior do reservatório, atinge-se o ponto de orvalho da mistura, ocorrendo o surgimento da fase líquida condensada. Nesse tipo de operação é produzido na superfície uma mistura gás-líquido, o que implica escoamento bifásico ao longo do processo de extração.

Algo semelhante ocorre para o ponto C, nesse caso, porém, o fluido presente no interior do reservatório encontra-se acima da pressão crítica e abaixo da temperatura crítica da mistura. Dessa forma, a mistura encontra-se totalmente em estado líquido. Entretanto, o abaixamento da pressão, devido ao início da operação de extração, leva a mistura a atingir o ponto de bolha. Nesse ponto, parte da mistura começa a mudar de estado físico e vaporiza, formando bolhas de vapor no interior da fase líquida e, portanto, um escoamento bifásico.

Por fim, para um reservatório inicialmente no ponto D, situado no interior do envelope de equilíbrio de fases, há a coexistência de ambas as fases - semelhante ao apresentado na Figura (02). Portanto, nesse tipo de reservatório é produzida uma fase líquida saturada em seu ponto de bolha e a fase gasosa, também saturada, em seu ponto de orvalho (CRAFT et al., 1991).

2.3. A TRANSFERÊNCIA DE MASSA

Segundo Cremasco (2015), de acordo com a segunda lei da termodinâmica, haverá fluxo de matéria de uma região de maior a outra de menor concentração (seja mássica ou molar) de uma determinada espécie química. Essa espécie transferida denomina-se soluto enquanto que as outras espécies não transferidas são os solventes. Sendo esse conjunto soluto-solvente denominado mistura (para sistemas gasosos) e solução (para sistemas líquidos) e são o meio onde ocorrerá o fenômeno de transferência de massa.

Desta forma, ele define a transferência de massa como o fenômeno ocasionado pela diferença de concentração, maior para menor, de um determinado soluto em certo meio.

Deste enunciado entende-se a diferença de concentração do soluto como causa do fenômeno de transferência de massa, ou seja, o gradiente de concentração do soluto é a força motriz da transferência de massa. Desse entendimento, pode-se escrever a equação do fluxo de matéria para o soluto.

$$\left(\begin{array}{c} \text{Fluxo} \\ \text{de matéria} \end{array} \right) = \frac{1}{\left(\begin{array}{c} \text{Resistência} \\ \text{ao transporte} \end{array} \right)} \left(\begin{array}{c} \text{Força} \\ \text{Motriz} \end{array} \right) \quad (02)$$

Da análise da equação (02), percebe-se que o fluxo de matéria é inversamente proporcional a resistência ao transporte. Essa, por sua vez, depende da interação soluto-meio e da ação externa.

Quando o transporte se dá em nível molecular, no qual há movimento aleatório das moléculas, cujo fluxo líquido obedece às leis termodinâmicas e tem o gradiente de concentração do soluto como força motriz. Nesse caso, o fenômeno é conhecido como difusão e a resistência ao transporte está associada somente à interação soluto-meio (CREMASCO, 2015).

Por outro lado, diz-se que ocorre o fenômeno de convecção mássica quando a transferência de massa ocorrer em nível macroscópico. Para esse caso a força motriz é a diferença de concentração, e a resistência ao transporte está associada tanto à interação soluto-meio quanto à ação externa. Essa ação externa relaciona-se com as características dinâmicas do meio e a geometria do lugar em que se encontra (CREMASCO, 2015).

2.3.1. A primeira lei de Fick

A transferência de massa por difusão, assim como a transferência de calor por condução, é devida ao movimento aleatório das moléculas. Segundo Crank (1975), Fick percebeu essa analogia entre os dois fenômenos e propôs a primeira abordagem matemática na descrição quantitativa do fenômeno de

difusão. Para isso, baseou seu modelo matemático na equação de condução de calor apresentada por Fourier alguns anos antes.

Portanto, a teoria matemática da difusão é baseada na hipótese de que o fluxo de transferência de massa por difusão, perpendicular a uma certa área, é proporcional ao gradiente de concentração normal a essa mesma superfície. Matematicamente, tem-se.

$$j_A^d = -D_{A,B} \frac{dC_A}{dz} \quad (03)$$

Onde: j_A^d é o fluxo difusivo da espécie química A na direção z ; $D_{A,B}$ é o coeficiente de difusão de A no meio B e $\frac{dC_A}{dz}$ é a variação da concentração de A na direção z . Segundo Cremasco (2015), o sinal negativo indica decréscimo da concentração da espécie A com o sentido do fluxo.

A primeira lei de Fick pode ainda ser aplicada em sistemas tridimensionais, bastando-se aplicá-la em cada uma das direções. Sendo assim, pode-se escrever a lei de Fick, de forma mais geral, em função do vetor gradiente de concentração.

$$\vec{J}_A^d = -D_{A,B} \vec{\nabla} C_A \quad (04)$$

Comparando-se a primeira lei de Fick com a equação (02) percebe-se a importância do coeficiente de difusão visto que, matematicamente, pode ser entendido como o inverso à resistência à difusão, ou seja:

$$D_{A,B} \equiv \frac{1}{(\text{Resistência à difusão})} \quad (05)$$

Segundo Crank (1975), para difusão em soluções diluídas o coeficiente de difusão pode ser, razoavelmente, considerado constante. No entanto, para soluções concentradas e poliméricas o coeficiente de difusão é função da concentração. Cabe ainda ressaltar, que a primeira lei de Fick se aplica, empiricamente, ao fenômeno de difusão em qualquer estado da matéria e o

coeficiente de difusão se deve a interação soluto-meio para qualquer meio físico, distinto ou não do soluto (CREMASCO, 2015).

Ainda segundo Cremasco (2015), a lei de Fick se aplica muito bem ao caso de difusão ordinária ou difusão comum. Segundo, Obembe et al. (2017), para o caso de difusão ordinária, assume-se que o movimento aleatório das partículas possui densidade normal de probabilidade com a variância diretamente proporcional ao tempo elevado a primeira potência. Desta forma, o deslocamento quadrático médio de uma partícula é função linear do tempo.

Por outro lado, quando o deslocamento quadrático médio não é linearmente proporcional ao tempo, diz-se que o fenômeno de difusão é anômalo. Como apresentado mais adiante, Obembe et al. (2017) utilizam o cálculo fracionário e os conceitos de difusão anômala para descrever o escoamento em reservatórios de petróleo, além de resolver o modelo proposto.

De forma mais geral, Ben-Avraham; Havlin (2000) definem os casos possíveis de difusão, segundo a equação (06).

$$\sigma_r^2 \sim Dt^\gamma, \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \gamma = 1, & \text{Difusão normal} \\ \gamma \neq 1, & \text{Difusão anômala} \\ \gamma > 1, & \text{Super difusão} \\ \gamma < 1, & \text{Sub difusão} \end{cases} \quad (06)$$

Desta forma, com a recente popularização da teoria do cálculo fracionário e o acesso a ferramentas computacionais mais robustas, muitos autores buscam maneiras de generalizar e aplicar a primeira lei de Fick a problemas de ordem fracionária, por exemplo em fenômenos que envolvem difusão anômala (Chen et al. 2010 e Obembe; Hossain; Mustapha; et al. 2017 e Paradisi et al. 2001 e Valdes-Parada et al. 2007). Para isso, propõem-se que o fluxo difusivo é proporcional ao gradiente fracionário da concentração. Matematicamente a primeira lei de Fick modificada pode ser escrita na forma da equação (07).

$$\vec{J}_A^d = -K_{A,B} \vec{\nabla}^\beta C_A \quad (07)$$

Onde: $\vec{j}_A^d$ é o fluxo difusivo da espécie A ; $K_{A,B}$ é um pseudo coeficiente de difusão da espécie A no meio B e $\vec{\nabla}^\beta C_A$ é o gradiente facionário da concentração da espécie A .

2.3.2. A lei de Darcy

Como mencionado anteriormente, o fluxo mássico por convecção ocorre em nível macroscópico. Desta forma, há uma velocidade associada ao transporte de matéria que depende da área de escoamento, do diferencial de pressão e, em meios porosos, da permeabilidade do meio. Todas essas características estão reunidas matematicamente na lei de Darcy (BOBECK, 2003).

Em 1856, trabalhando em meios granulares não-consolidados, Henry Darcy propôs que para um fluxo horizontal de um fluido monofásico a taxa de variação volumétrica que flui através de um meio poroso é proporcional a área de seção transversal, a permeabilidade do meio e ao diferencial de pressão e, inversamente proporcional, a sua viscosidade e ao comprimento do meio poroso pelo qual se escoar o fluido (CUNHA et al. 1999 e MIRANDA, 2004).

$$\dot{Q} = -\frac{kA}{\mu} \frac{\Delta P}{L} \quad (08)$$

Onde: $\dot{Q}$ é a vazão volumétrica, k é a permeabilidade do meio; A é a área de seção transversal ao fluxo, μ é a viscosidade do fluido, ΔP é a diferença de pressão e L é o comprimento do meio poroso pelo qual se escoar o fluido.

De forma mais geral, a lei de Darcy pode ser escrita na forma diferencial. Considerando fluxo unidimensional:

$$v = \frac{\dot{Q}}{A} = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x} \quad (09)$$

Onde v é a velocidade superficial do fluxo. Sendo que o sinal negativo indica que a pressão diminui na direção do fluxo.

A lei de Darcy pode ainda ser aplicada em sistemas tridimensionais, bastando-se aplicá-la em cada uma das direções do vetor velocidade.

$$\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) \quad (10)$$

$$v_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial x}; \quad v_y = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial y}; \quad v_z = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial P}{\partial z}; \quad (11)$$

Vale ressaltar que o sinal negativo presente na lei de Darcy, indica que a pressão diminui na direção do fluxo (CUNHA et al., 1999).

Recentemente, muitos autores trabalham na generalização e ampliação da aplicação da lei de Darcy (AWOTUNDE et al. 2016 e CAPUTO 1999 e CAPUTO 2000 e CHANG et al. 2019 e CHEN; RAGHAVAN 2015 e OBEMBE; HOSSAIN; ABU-KHAMSIN 2017 e OBEMBE et al. 2017 e OCHOA-TAPIA et al. 2007 e RAGHAVAN 2012 e REN; GUO 2015 e ZHOU et al. 2018). Assim como visto para a lei de Fick, isto passa pela utilização do cálculo fracionário e sua capacidade de generalizar modelos matemáticos. A equação (12) apresenta a lei de Darcy modificada.

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla \alpha P \quad (12)$$

Por fim, observando-se as equações (09) e (12) percebe-se que o fluxo do soluto é diretamente proporcional ao coeficiente de permeabilidade do meio (k). Portanto, esse coeficiente indica a capacidade que o meio tem em permitir o fluxo através dos seus poros (MIRANDA, 2004). Uma análise mais aprofundada, revela a complexa interação entre o fluido e os canais porosos do meio. Essa interação causa perda de energia (carga) do fluido evidenciada pela diminuição de pressão ao longo do escoamento pelo meio poroso. Portanto, a permeabilidade é uma propriedade não apenas do meio poroso ou do fluido, mas também da interação dinâmica entre ambos (SCHEIDEGGER 1974).

Segundo Miranda (2004), a permeabilidade das rochas pode ser muito variada. Rochas sedimentares possuem ampla variação de permeabilidade – $k < 1\mu D$ para sedimentos argilosos enquanto que arenitos e carbonatos podem

apresentar alta permeabilidade $k \sim 1D$. Sendo que arenitos e carbonatos são de grande interesse pois formam os principais reservatórios de petróleo.

2.4. CÁLCULO FRACIONÁRIO

A teoria do cálculo fracionário começa a se desenvolver em 1695 através do diálogo entre Leibniz e L'Hôpital. Em carta enviada, L'Hôpital questiona Leibniz sobre qual seria o resultado da derivada de ordem $\alpha = 1/2$ da função $f(x) = x$ (PODLUBNY, 1999).

Por três séculos a teoria do cálculo fracionário se desenvolveu apenas como um campo da matemática pura, sem aplicações práticas. No entanto, nas últimas décadas, muitos autores demonstraram sua enorme capacidade como ferramenta para descrever e solucionar problemas práticos.

Muitos trabalhos têm surgido, em especial, nas áreas de: modelagem matemática de propriedades físicas e elétricas dos materiais; na modelagem reológica de diversas substâncias; no estudo de estruturas porosas; no estudo de sistemas dinâmicos utilizando controladores descritos por equações diferenciais fracionárias; entre outras.

A modelagem matemática, a simulação e resolução de problemas utilizando o cálculo fracionário, naturalmente leva a necessidade de se resolver equações diferenciais fracionárias.

Algumas funções desempenham um papel importante na resolução de equações diferenciais fracionárias e na obtenção de derivadas de ordens arbitrária. Dentre essas funções, em especial, pode-se citar: a função gama e as funções de Mittag-Leffler (PODLUBNY, 1999).

2.4.1. Função Gama

A função gama é uma das funções mais importantes na teoria do cálculo fracionário. Foi introduzida por Euler em 1730, como resultado de uma pesquisa sobre a interpolação de fatoriais. A função gama generaliza o fatorial possibilitando o cálculo do fatorial de números não inteiros e complexos.

A função gama é definida pela integral, mostrada na equação (13), e a seguir, mostram-se algumas propriedades importantes.

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt \quad (13)$$

Uma das propriedades básicas da função gama, que a conecta diretamente ao fatorial, é dada pela equação (14).

$$\Gamma(n + 1) = n! \quad (14)$$

Além disso, outra propriedade é dada pela equação (15).

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) \quad (15)$$

Esses resultados serão úteis, mais adiante, durante a resolução de equações diferenciais fracionárias.

2.4.2. Função de Mittag-Leffler

A função de Mittag-Leffler de um parâmetro foi proposta pelo matemático sueco Magnus Gösta Mittag-Leffler (MITTAG-LEFFLER, 1903). A função de Mittag-Leffler de um parâmetro é definida pela equação (16).

$$E_{\alpha}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} \quad (16)$$

Posteriormente, uma generalização desta função, utilizando dois parâmetros, foi proposta por Agarwal (AGARWAL, 1953) e estudada por Humbert (HUMBERT; AGARWAL, 1953). A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros podia ser então denominada função de Agarwal.

No entanto, Agarwal, generosamente manteve a mesma notação e a denominação como função de Mittag-Leffler de dois parâmetros (PODLUBNY, 1999). A função de Mittag-Leffler de dois parâmetros é pela equação (17).

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)} \quad (17)$$

Fazendo um paralelo entre o cálculo fracionário e o cálculo de equações diferenciais de ordem inteira, a função de Mittag-Leffler desenvolve para o cálculo fracionário o mesmo papel que a função exponencial desenvolve para o cálculo de ordem inteira.

No cálculo de ordem inteira, a função exponencial é solução das equações diferenciais lineares de coeficientes constantes. Sendo assim, a função de Mittag-Leffler é solução natural das equações diferenciais fracionárias lineares.

Mesmo a função exponencial, pode ser escrita como um caso especial da função de Mittag-Leffler de dois parâmetros, equação (18). A seguir, apresenta-se esse resultado e algumas outras propriedades que serão importantes durante a resolução das equações diferenciais fracionárias, equação (19) e (20).

$$E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z \quad (18)$$

$$E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha}(z) \quad (19)$$

$$E_{\alpha,\alpha+1}(z) = \frac{1}{z} [E_{\alpha}(z) - 1] \quad (20)$$

Outro resultado importante, necessário durante a resolução de equações diferenciais fracionárias, é a integral da função Mittag-Leffler, descritas abaixo, equações (21) e (22).

$$\int_0^z E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha}) t^{\beta-1} dt = z^{\beta} E_{\alpha,\beta+1}(\lambda z^{\alpha}), \quad (\beta > 0) \quad (21)$$

$$\frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^z (z-t)^{v-1} E_{\alpha,\beta}(\lambda t^{\alpha}) t^{\beta-1} dt = z^{\beta+v-1} E_{\alpha,\beta+v}(\lambda z^{\alpha}), \quad (\beta > 0, v > 0) \quad (22)$$

2.4.3. Derivadas fracionárias

Após a realização do primeiro congresso, a respeito do cálculo fracionário, na Universidade de New Haven em 1974, surgiram muitas aplicações em pesquisas científicas (BATTAGLIA et al. 2001; IONESCU et al. 2017; JAQUES et al. 2017; OBEMBE et al. 2017; VINNETT et al. 2015; XU; JIANG 2017; YANG et al. 2016; ZHANG et al. 2017).

Como consequência, foram desenvolvidas diferentes abordagens para a solução de problemas usando cálculo fracionário, e estão disponíveis diferentes definições de derivada fracionária (OLIVEIRA; MACHADO, 2014). Dentre elas, podemos destacar as definições propostas por: Riemann-Liouville, Grünwald-Letnikov e Caputo (PODLUBNY 1999).

Desta forma, cada uma dessas definições parece ser mais adequada a um tipo específico de problema. Portanto, a escolha adequada da definição de derivada fracionária é um passo fundamental na modelagem e solução de fenômenos físicos.

2.4.3.1. Definição de Grünwald-Letnikov

A definição de derivada fracionária de Grünwald-Letnikov foi obtida assumindo-se que a função $f(t)$ tem que ser $m + 1$ vezes diferenciável, no intervalo $[a, t]$, (PODLUBNY, 1999). Sendo assim, tem-se:

$$D_a^\alpha f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-\alpha+k}}{\Gamma(-\alpha+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-\alpha+m+1)} \int_a^t (t-\varepsilon)^{m-\alpha} f^{(m+1)}(\varepsilon) d\varepsilon \quad (23)$$

$$m < \alpha < m + 1 \quad (24)$$

2.4.3.2. Definição de Riemann-Liouville

A definição de Riemann-Liouville é a mais conhecida definição de derivada fracionária. Para Podlubny (1999), a definição de Riemann-Liouville é equivalente à definição de Grünwald-Letnikov para uma classe de funções $f(t)$ com $m + 1$ derivadas contínuas em $t \geq 0$. Ainda segundo ele, do ponto de vista da matemática pura, essa é uma classe muito restrita de funções. No entanto,

os processos reais, em sua grande maioria, são descritos por esse tipo de função. Portanto, para a aplicação da definição de Riemann-Liouville, requer-se apenas que a função $f(t)$ seja integrável.

$${}^{RL}_a D_t^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t - \varepsilon)^{n-\alpha-1} f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (25)$$

$$n - 1 \leq \alpha < n$$

Onde n é o inteiro imediatamente maior que α .

2.4.3.3. Definição de Caputo

A definição de Riemann-Liouville foi muito importante para o desenvolvimento do cálculo fracionário. No entanto, surgiram diversos trabalhos, especialmente no campo da viscoelasticidade, onde a derivada fracionária é usada para melhor descrever as propriedades físicas do material. A modelagem matemática desses problemas, naturalmente leva a equações diferenciais fracionárias e a necessidade de formulação de condições iniciais e de contorno adequadas.

Tais problemas necessitam de uma definição de derivada fracionária onde as condições iniciais e de contorno possuam interpretação física. Para isso, as condições iniciais e de contorno devem ser do tipo: $f^n(a)$, $[n = 0, 1, 2 \dots]$. A solução para esse problema foi a introdução da definição de derivada fracionária por Caputo (1967). Dessa forma, é possível a utilização de condições iniciais e de contorno, para a resolução de equações diferenciais fracionárias, do mesmo tipo das utilizadas para resolver problemas de valor inicial e valor de contorno, ou seja, utilizando derivadas de ordem inteira.

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \int_a^t \frac{f^n(\varepsilon) d\varepsilon}{(t - \varepsilon)^{\alpha+1-n}} \quad (26)$$

$$n - 1 \leq \alpha < n$$

Onde n é o inteiro imediatamente maior que α .

Além do mais, por muitas vezes a solução de problemas fracionários utilizando a definição de Caputo se utiliza de resultados já demonstrados para a definição de Riemann-Liouville. Desta forma, segundo Podlubny (1999) pode-se correlacionar as duas definições através da equação (27). Esse resultado será muito útil para a construção do esquema de solução numérica das equações diferenciais fracionárias utilizando a definição de Caputo.

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = {}_a^{RL} D_t^\alpha f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) \quad (27)$$

Onde ${}_a^C D_t^\alpha f(t)$ representa a derivada de Caputo e ${}_a^{RL} D_t^\alpha f(t)$ a derivada de Riemann-Liouville da função $f(t)$, $f^{(k)}(a)$ representa a k-ésima derivada inteira da função avaliada no terminal inferior (a), com a restrição dada pela equação (28)

$$n-1 < \alpha < n \quad (28)$$

2.4.4. Integral fracionária

Assim como para a derivada fracionária, também há diversas definições para a integral fracionária. Pode-se citar a definição de Riemann-Liouville, Hadamard, Weyl, Chen entre outras (OLIVEIRA; MACHADO, 2014). No entanto, a mais difundida é a definição de Riemann-Liouville.

$$D_a^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\varepsilon)^{\alpha-1} f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (29)$$

Importante ressaltar, que na notação apresentada, há apenas a mudança de sinal da ordem entre a derivada e a integral fracionária. A fim de se evitar confusão, adota-se também a seguinte notação.

$$I_a^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\varepsilon)^{\alpha-1} f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (30)$$

2.5. O ESTADO DA ARTE

Nas últimas décadas, diversos pesquisadores -Battaglia et al. (2001) e Ionescu et al. (2017) e Jaques et al. (2017) e Miah et al. (2017) e Sun et al. (2018) e Vinnett et al. (2015) e Xu; Jiang (2017) e Yang et al. (2016) e Zhang et al. (2017) - incorporaram o formalismo matemático do cálculo fracionário nos mais diversos campos da ciência e engenharia, tais como: biologia, economia, escoamento em meios porosos, reologia, engenharia do petróleo e processamento de imagens.

Expandindo a modelagem em meios porosos, Caputo (1999) propôs um modelo baseado na lei de Darcy fracionária. Para ele, a introdução e adoção da derivada fracionária simula e engloba o efeito da variação da permeabilidade do meio ao longo do tempo. Segundo ele, seu modelo foi capaz de descrever todas as variações locais de pressão, levando em consideração as alterações locais de permeabilidade no meio poroso. Entretanto, diferentemente da equação para a lei de Darcy generalizada mostrada anteriormente, Caputo (1999) apresenta uma definição levemente diferente. Segundo ele, na lei de Darcy clássica, a permeabilidade do meio deve ser função do tempo e, desta forma, a equação generalizada deve ser escrita conforme a equação (31).

$$q = -\eta\rho_0 \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} \left(\frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad (31)$$

Além disso, Caputo (1999) resolveu e aplicou o modelo usando diferentes condições de contorno, servindo como base para futuros estudos.

Interessante observar essas diferenças na definição da lei de Darcy. Aparentemente, cada autor a define de forma mais adequada a sua aplicação em um problema específico. Em outro trabalho, Caputo (2000) generaliza a lei de Darcy e a utiliza na modelagem do fluxo mássico em meios porosos através da equação (32).

$$\left(\gamma + \varepsilon \frac{\partial^{n_1}}{\partial t^{n_1}} \right) q = \left(c + \frac{\partial^{n_2}}{\partial t^{n_2}} \right) \nabla P \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
0 \leq n_1 < 1, \quad 0 \leq n_2 < 1 \\
\left(a + b \frac{\partial^{m_2}}{\partial t^{m_2}}\right) P = \left(\alpha + \beta \frac{\partial^{m_1}}{\partial t^{m_1}}\right) m \\
0 \leq m_1 < 1, \quad 0 \leq m_2 < 1
\end{aligned} \tag{33}$$

A lei de Darcy generalizada é, posteriormente, utilizada em conjunto a equação que descreve a relação entre o fluxo mássico e a pressão local no interior do meio poroso, equação (33). Desta forma, o modelo final obtido possui um total de onze parâmetros. Sendo que o próprio autor reconhece a complexidade e o elevado número de parâmetros do modelo. Desta forma, Caputo (2000) introduz simplificações ao modelo, tais como as apresentadas na equação (34). Focando sua solução para o caso unidimensional.

$$\begin{aligned}
\text{Modelo 1} \quad \alpha, a, c, d, \gamma, \varepsilon \neq 0, \quad b, \beta = 0, \quad n_1, n_2, m_1, m_2 = n \\
\text{Modelo 2} \quad a, b, c, d, \varepsilon, \beta \neq 0, \quad \alpha, \gamma = 0, \quad n_1, n_2, m_1, m_2 = n
\end{aligned} \tag{34}$$

As soluções foram obtidas analiticamente via transformadas de Laplace e posterior obtenção das respectivas funções de Green. Após um longo processo de ajuste de dados o autor conclui que os modelos fracionários representam meios nos quais o fluxo decai rapidamente e retarda o efeito de pressão nas fronteiras, em comparação àqueles obtidos com a versão clássica da equação de Darcy. Ainda para ele, as derivadas fracionárias alteram a dimensão fractal do escoamento, e essa alteração é maior para valores maiores da ordem da derivada fracionária.

Por outro lado, Paradisi et al. (2001), partindo-se da equação de continuidade, buscam generalizar a segunda lei de Fick para transporte de massa em processos difusivos. Segundo eles, a lei de Fick é o modelo fenomenológico mais simples para representar a relação entre o fluxo e o gradiente. Desta forma, pode ser substituída por uma lei mais geral capaz de descrever processos não-localizados de transporte. Com esse propósito, os autores sugerem a adoção de diferenciais fracionários para descrever o fluxo mássico presente da segunda lei de Fick.

$$\frac{\partial}{\partial x} C(z, t) = K D^\alpha C(z, t), \quad K > 0, \quad 1 < \alpha \leq 2 \quad (35)$$

Os autores se restringiram a estudar os processos de transporte unidimensional, resolvendo analiticamente a equação de transporte. Além disso, Paradisi et al. (2001) apresentaram diferentes resultados de simulação para diferentes valores da ordem da derivada e concluem que o modelo proposto é capaz de gerar resultados consistentes.

Seguindo o desenvolvimento dos modelos de transporte, TIAN; TONG (2006) aplicaram o cálculo fracionário ao modelo de transporte em meios porosos, especificamente para o caso de reservatórios com dimensões fractais. Para eles, a matriz porosa do reservatório é melhor descrita por estruturas geométricas do tipo fractal e, sendo assim, utilizaram o cálculo fracionário para modelar o fractal e então incorporar ao modelo de escoamento. Desta forma a equação que descreve o escoamento através desse tipo de geometria é dada pela equação (36).

$$\frac{\partial^\alpha P}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{r^{d-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\beta \frac{\partial P}{\partial r} \right) \quad (36)$$

Nesse trabalho, os autores utilizam a definição de derivada fracionária de Riemann-Liouville e obtém a solução via transformada de Laplace e a função generalizada de Mittag-Leffler. Eles focaram na modelagem unidimensional em coordenadas cilíndricas e foram capazes de obter a solução analítica para o problema. Por fim, apresentaram perfis simulados de pressão em função do tempo para diferentes dimensões de fractais.

Lenzi et al. (2006) estudaram e obtiveram soluções analíticas para as equações fracionárias não lineares de difusão. Para eles, as soluções obtidas podem ser aplicadas em diferentes processos difusivos que incluem a difusão anômala. Seguindo o mesmo raciocínio, Lenzi et al. (2016) apresentaram soluções para o problema de difusão anômala existentes nos processos de adsorção e dessorção.

Valdes-Parada et al. (2007) estudaram o fenômeno de difusão anômala com reação química em meios porosos. Segundo eles, o objetivo do trabalho

era obter um modelo de fluxo para as partículas utilizando a lei de Fick fracionária. Os autores se restringiram a estudar o caso de difusão com reação química de primeira ordem, entretanto, apresentam duas variações de modelo: (i) considera a reação química apenas na interface das fases, sendo um modelo heterogêneo; (ii) considera reação química em um meio heterogêneo através de um modelo pseudo-homogêneo. Segundo os autores, os resultados obtidos e apresentados serão úteis na descrição de vários processos reais, visto que, dados experimentais mostram que os modelos clássicos utilizando a lei de Fick subestimam a concentração em escoamentos em meios porosos, havendo problemas para aplicar em campo os dados obtidos em escala laboratorial.

Com base no modelo proposto por Caputo, Hossain et al. (2008) propuseram uma modificação na equação clássica de difusão, considerando efeitos de memória através do cálculo fracionário para descrever o comportamento de escoamento em rochas porosas. O modelo proposto foi baseado na definição de derivada fracionária de Caputo e, posteriormente, solucionado através de aproximação numérica. Entretanto, considera apenas escoamento no sentido axial e em uma fase.

Jiang et al. (2010), partindo da equação da continuidade para fractais e da primeira lei de Fick da difusão, obtiveram um modelo de escoamento fracionário em coordenadas cilíndricas. Além disso, consideraram um oscilador fracionário como sendo representativo do termo de geração da equação da continuidade. No entanto, o modelo é apenas proposto para escoamento monofásico e no sentido radial sendo que os autores obtiveram solução analítica para o modelo em termos da função de Mittag-Leffler através da aplicação de transformadas de Laplace e Hankel.

Chen et al. (2010) também utilizam o cálculo fracionário para modelar difusão anômala. Os autores utilizam e comparam o desempenho dos modelos obtidos utilizando derivadas fractais e fracionárias. Segundo eles, derivadas fractais são operadores locais enquanto que as derivadas fracionárias são operadores globais. No trabalho, os autores utilizam a definição de Caputo da derivada fracionária enquanto que as derivadas fractais são definidas pela equação (37) e, de forma mais geral, pela equação (38)

$$\frac{\partial u}{\partial t^\alpha} = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{u(t_1) - u(t)}{t_1^\alpha - t^\alpha}, \quad 0 < \alpha \quad (37)$$

$$\frac{\partial u^\beta}{\partial t^\alpha} = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{u^\beta(t_1) - u^\beta(t)}{t_1^\alpha - t^\alpha}, \quad (0 < \alpha), (0 < \beta) \quad (38)$$

Desta forma os modelos fractais e fracionários obtidos são apresentados nas equações (39) e (40), sendo que, por simplicidade, os autores optaram por focar na difusão unidimensional. Portanto, os modelos obtidos podem ser entendidos como uma generalização da segunda lei de Fick.

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t^\alpha} = D \frac{\partial}{\partial x^\beta} \left(\frac{\partial u(x, t)}{\partial x^\beta} \right) \quad (39)$$

$$\frac{\partial^\gamma u(x, t)}{\partial t^\gamma} = D \left(\frac{\partial^\eta u(x, t)}{\partial x^\eta} \right) \quad (40)$$

Note que para o modelo fracionário, se $\gamma = 1, \eta = 2$, obtém-se a segunda lei de Fick, enquanto que para isso o modelo fractal se reduz à segunda lei de Fick, se $\alpha = \beta = 1$.

Para a solução do modelo fractal os autores se valem de uma mudança de variáveis ($t' = t^\alpha, x' = x^\beta$) desta forma, o modelo fractal se reduz a equação normal de difusão, a qual possui solução dada na forma de uma distribuição gaussiana. Por outro lado, o modelo fracionário foi solucionado através da aplicação das transformadas de Laplace e Fourier.

Os autores ainda resolvem os modelos através de técnicas numéricas, utilizando o esquema de discretização de Crank-Nicholson, pois, segundo eles, esse esquema é incondicionalmente estável. Os resultados obtidos possibilitam os autores a concluir que ambas as abordagens são adequadas na descrição de processos de difusão anômala. Sendo que, os modelos fractais são matematicamente mais simples de manusear e obter a solução. Entretanto, os autores reconhecem que o aparato matemático das derivadas fractais não está totalmente desenvolvido, necessitando de mais estudos nessa área.

Ainda seguindo a solução numérica das equações fracionárias de difusão, SUN et al. (2012) propõem três esquemas numéricos distintos para obtenção desse tipo de solução, a saber: (i) esquema explícito; (ii) esquema implícito e (iii) o método de Crank-Nicholson. Os esquemas citados foram

aplicados na obtenção de soluções tanto para equações fracionárias de ordem constante quanto para equações fracionárias de ordem variável no tempo.

Os resultados apresentados mostram que o esquema implícito e o método de Crank-Nicholson obtiveram maior acurácia quando comparados com o esquema explícito. Sendo que o método de Crank-Nicholson apresenta maior acurácia para a maioria das situações. Além disso, o método explícito é condicionalmente estável enquanto que os outros dois são incondicionalmente estáveis.

Seguindo o desenvolvimento histórico desse área de estudo, Razminia et al. (2014) e Ren; Guo (2015) aplicam modelos fracionários de difusão em reservatórios naturalmente fraturados. Enquanto Razminia et al. (2014) focam sua abordagem na obtenção e utilização de um modelo que combina geometria fractal com a definição de Caputo da derivada fracionária em reservatórios de petróleo, equação (41).

$$\frac{1}{r_D^\theta} \frac{\partial^2 P_{Df}}{\partial r_D^2} + \frac{\beta}{r_D^{\theta+1}} \frac{\partial P_{Df}}{\partial r_D} = \omega \frac{\partial^\gamma P_{Df}}{\partial t_D^\gamma} + (1 - \omega) r_D^{d-d_{mf}} \frac{\partial P_{Dm}}{\partial t_D} \quad (41)$$

Ren; Guo (2015) baseiam seu modelo na lei de Darcy fracionária, semelhante àquela apresentada por Caputo (1999), aplicado a reservatórios naturalmente fraturados de gás natural. Desta forma, o modelo incorpora uma equação de estado para fluidos compressíveis. O modelo fracionário obtido é apresentado na equação (42).

$$\frac{1}{r_D} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D \frac{\partial \psi_D}{\partial r_D} \right) = \omega \frac{\partial^\gamma \psi_D}{\partial t_D^\gamma} - (1 - \omega) \frac{\partial^\alpha V_D}{\partial t_D^\alpha} \quad (42)$$

Obembe et al. (2017) apresentam um modelo fracionário de ordem variada para o escoamento em meios porosos heterogêneos. Os autores partem da equação da continuidade e utilizam a lei de Darcy fracionária para descrever o fluxo convectivo. É interessante citar que a modelagem apresentada nesse trabalho é exatamente igual, exceto pela introdução do termo fracionário, àquela presente em Ertekin et al. (2001), dada em sua forma final, para um fluido levemente compressível, pela equação (43).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[g_x(P) \frac{\partial}{\partial x} D^{\alpha(t)} P \right] \Delta x + q_{sc} = \left(\frac{V_b \phi_0 C_t}{\alpha_c B_0} \right) \frac{\partial P}{\partial t} \quad (43)$$

Os autores consideram a ordem da derivada variando linearmente com o tempo, entretanto, o modelo apresentado é unidimensional e monofásico. O modelo é então solucionado por aproximação numérica e a estratégia de solução é apresentada em Obembe et al., (2017).

Chang et al. (2019) utilizam a lei de Darcy fracionária para quantificar o escoamento unidimensional em reservatórios. Entretanto, diferentemente do realizado em trabalhos anteriores, os autores utilizam a derivada fracionária com relação a coordenada espacial. Desta forma, a lei de Darcy pode ser escrita na forma da equação (44) e, de forma mais geral, de acordo com a equação (12).

$$v = -\frac{k}{\mu} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \quad (44)$$

Segundo eles, essa alteração leva em consideração a variação espacial das propriedades do meio e o modelo proposto é capaz de descrever o fluxo total. Essa conclusão foi possível através do ajuste do modelo a dados experimentais.

Além do exposto, a Tabela (02) apresenta outros trabalhos (i) – que utilizam o cálculo fracionário aplicados ao transporte de massa em meios porosos e reservatórios; (ii) com métodos numéricos e analíticos para solução de equações fracionárias.

TABELA 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA - ESCOAMENTO EM MEIOS POROSOS

Referência	Modelo	Hipóteses
Metzler et al. (1994)	$\frac{\partial^{\frac{2}{d_w}} P(r,t)}{\partial t^{2/d_w}} = \frac{1}{r^{d_s-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{d_s-1} \frac{\partial}{\partial r} P(r,t) \right)$	• Difusão anômala • Dimensão fractal • Solução aproximada
He (1998)	$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^{\alpha_1} P}{\partial x^{\alpha_1}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^{\alpha_2} P}{\partial y^{\alpha_2}} \right) = 0$	• Darcy generalizada • Bidimensional • Propriedades constantes

TABELA 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA - ESCOAMENTO EM MEIOS POROSOS

Referência	Modelo	Hipóteses
		Solução aproximada
Ewing et al. (1999)	$\nabla u = Q\delta$ $-\nabla^\alpha P = \rho^{-1}(K^{-1}\mu + \beta u ^n)u$	- Darcy generalizada - Monofásico - Unidimensional - Meio isotrópico
Benson et al. (2000)	$\frac{\partial C}{\partial t} = -v \frac{\partial C}{\partial x} + Dp \frac{\partial^\alpha C}{\partial x^\alpha} + D(1-p) \frac{\partial^\alpha C}{\partial (-x)^\alpha}$	- Unidimensional - Meio homogêneo - Reservatórios arenosos de água
Hilfer (2000)	$D_0^\alpha f(r, t) = C \Delta f(r, t)$	- Difusão anômala - Unidimensional - Apenas solução do modelo, via função H.
Park et al. (2000)	$\frac{\partial^\gamma P_D(r_D, t_D)}{\partial t_D^\gamma} = \frac{1}{r_D^{D-1}} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D^{D-\theta} \frac{\partial P_D(r_D, t_D)}{\partial r_D} \right)$	- Reservatórios fraturados - Geometria fractal - Difusão anômala
Schumer et al. (2001)	$\frac{\partial C}{\partial t} = -v \frac{\partial C}{\partial x} + \psi D_\beta^\alpha(C)$	- Meio poroso heterogêneo - Porosidade, velocidade e permeabilidade constantes - Transporte em aquíferos
Caputo (2003)	$q(x, t) = -\eta \rho_0 \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha}$ $\frac{\partial q(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = 0$	- Darcy generalizada com relação a coordenada espacial – Unidimensional - Solução analítica via função de Green
Liu et al. (2003)	$\frac{\partial^\alpha C(x, t)}{\partial t^\alpha} = -v \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2}$	- Unidimensional - Meio homogêneo - Solução analítica
Caputo; Plastino (2004)	$\left(\gamma + \varepsilon \frac{\partial^{n_1}}{\partial t^{n_1}} \right) q = - \left(c + d \frac{\partial^{n_2}}{\partial t^{n_2}} \right) \nabla P$ $\left(a + b \frac{\partial^{m_2}}{\partial t^{m_2}} \right) P = \left(\alpha + \beta \frac{\partial^{m_1}}{\partial t^{m_1}} \right) [m(x, t) - m_0]$	- Permeabilidade do meio é função do tempo - Aplicado à extração de petróleo - Solução analítica
Meerschaert; Tadjeran (2004)	$\frac{\partial C(r, t)}{\partial t} = -v(r) \frac{\partial C(r, t)}{\partial r} + d(r) \frac{\partial^\alpha C(r, t)}{\partial r^\alpha} + f(r, t)$	- Escoamento radial - Equação fracionária com coeficientes variáveis - Desenvolvimento do método numérico de solução

TABELA 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA - ESCOAMENTO EM MEIOS POROSOS

Referência	Modelo	Hipóteses
Iaffaldano et al. (2005)	$\gamma q(x, t) = - \left(c + d \frac{\partial^n}{\partial t^n} \right) \nabla P(x, t)$ $\nabla q(x, t) + \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = 0$	• Lei de Darcy generalizada • Modela a permeabilidade • Apresenta resultados experimentais.
Meerschaert et al. (2006)	$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = d(x, y) \frac{\partial^\alpha u(x, y, t)}{\partial x^\alpha} + \dots$ $\dots + e(x, y) \frac{\partial^\beta C(r, t)}{\partial y^\beta} + q(x, y, t)$	• Equação diferencial fracionária bidimensional. • Problema de valor inicial. • Desenvolvimento de método implícito de solução • Sem aplicações
Chen et al. (2007)	$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = {}^{RL}_0 D_t^{1-\gamma} \left[\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right] + f(x, t)$	• Difusão anômala • Desenvolvem um método implícito de solução • Propõem um método para analisar a estabilidade e convergência da solução. • Sem aplicações, apenas simulação
Camacho Velazquez et al. (2008)	$\frac{\partial^\gamma P_{Df}}{\partial t^\gamma} = \frac{1}{r^{d_{mf}-1}} \frac{\partial}{\partial r_D} \left(r_D^\beta \frac{\partial P_{Df}}{\partial r_D} \right)$	• Reservatórios fraturados • Geometria fractal • Solução analítica e aproximada
Hossain; Islam (2009)	$p_i - p(t) = - \frac{6K\mu\eta \left(\frac{\Delta T}{\alpha_D M_a} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \right)^2 \left[{}^C_0 D_t^\alpha \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] e^{\left(\frac{2E}{RT_r} \right)}}{\tau_r^2} u_x \Delta t$	• Equação do balanço de massa com a inclusão do efeito de memória • Porosidade e permeabilidade como função do tempo • Aplicação na recuperação de óleo de reservatórios fraturados • Solução numérica
Di Giuseppe et al. (2010)	$\left(\gamma + \varepsilon \frac{\partial^n}{\partial t^n} \right) q = - \left(c + d \frac{\partial^n}{\partial t^n} \right) \nabla P$ $\left(a + b \frac{\partial^n}{\partial t^n} \right) P = \left(\alpha + \beta \frac{\partial^n}{\partial t^n} \right) m$ $b = \beta = 0$	• Unidimensional • Solução analítica utilizando transformada de Laplace • Simplificação do modelo de Caputo (2000) • Apresenta procedimento experimental
Raghavan (2011)	$\frac{1}{\eta} \frac{\partial^\gamma P(r, t)}{\partial t^\gamma} = \frac{1}{r^{\beta+\theta}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^\beta \frac{\partial P(r, t)}{\partial r} \right)$	• Unidimensional • Difusão anômala • Testes transientes • Sistemas fractais

TABELA 2 - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA - ESCOAMENTO EM MEIOS POROSOS

Referência	Modelo	Hipóteses
Fomin et al. (2011)	$\frac{\partial^\alpha C(x, t)}{\partial t^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_f \frac{\partial^\beta C(x, t)}{\partial x^\beta} \right)$	• Difusão anômala • Derivadas fracionárias temporais e espaciais • Meios porosos e fraturados • Unidimensional.
Raghavan; Chen (2013)	$\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \lambda(x) \frac{\partial}{\partial x_i} P(x, t) \right\} = \phi c \frac{\partial^\alpha P(x, t)}{\partial t^\alpha}$	• Reservatórios fraturados • Unidimensional • Baseado na lei de Darcy generalizada
Carcione et al. (2013)	$\frac{\partial P}{\partial t} + s = N \left[\Delta_l P + \Delta_\gamma \frac{\partial^\nu P}{\partial t^\nu} \right]$	• Simulação de escoamento em meio poroso heterogêneo • Lei de Darcy generalizada • Equação fracionária com relação ao tempo
Liu et al. (2014)	$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ K(x, t) \left[\beta \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} + (1 - \beta) \frac{\partial^\alpha}{\partial (-x)^\alpha} \right] \right\} u(x, t) + f(u, x, t)$	• Equação de difusão fracionária com coeficientes variáveis. • Unidimensional • Desenvolvimento de um novo método de solução • Solução numérica por volumes finitos
Chen; Raghavan (2015)	$v(x, t) = - \frac{k_{\alpha, \beta}}{\mu} \frac{\partial^{1-\alpha}}{\partial t^{1-\alpha}} \left[\frac{\partial^\beta P(x, t)}{\partial x^\beta} \right]$ $\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{k_{\alpha, \beta}}{\mu} \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta} P(x, t) \right\} = \phi c \frac{\partial^\alpha P(x, t)}{\partial t^\alpha}$	• Lei de Darcy generalizada • Escoamento em regime transiente • Solução via Inversão numérica da transformada de Laplace
Zhou; Yang (2018)	$\frac{d^\alpha q}{dt^\alpha} = k$	• Lei de Darcy generalizada. • Escoamento unidimensional • Dados experimentais
Chang et al. (2019)	$v = - \frac{k_\alpha}{\mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial t^\alpha}$	• Lei de Darcy generalizada. • Aplicada a reservatórios naturais de óleo e gás • Dados experimentais presentes na literatura
Obembe (2020)	$u(x, t) = - \left(\frac{\beta_c K \sigma^{1-\alpha}}{\mu_0} \right) \frac{\partial^{1-\alpha}}{\partial t^{1-\alpha}} [\nabla \Phi(x, t)]$	• Lei de Darcy generalizada • Escoamento bidimensional • Aplicado a reservatórios de petróleo • Solução numérica

Fonte: o autor (2023).

Além de todos os trabalhos apresentados, Miah et al. (2017) dedicam uma seção do seu artigo de revisão para discutir e apresentar outros modelos de escoamento em meios porosos aplicados a reservatórios de petróleo.

Desta análise, percebe-se que a literatura é vasta. No entanto, há oportunidades de expansão e desenvolvimento da área. Em especial, destaca-se a modelagem multifásica, a incorporação ao modelo de escoamento da difusão anômala entre fases e a modelagem bi e tridimensional.

3. OBJETIVOS

Muitos trabalhos buscam aplicar o cálculo fracionário na obtenção de modelos para a descrição do escoamento em meios porosos e, de forma mais específica, em reservatórios de petróleo. No entanto, em sua quase totalidade, consideram apenas o escoamento unidimensional monofásico. Parece não haver consenso de qual a melhor forma para aplicação e utilização da lei de Darcy, existindo, portanto, áreas de conhecimento que ainda podem ser expandidas e exploradas.

3.1. OBJETIVO GERAL

O presente trabalho tem por objetivo desenvolver um modelo fracionário capaz de descrever o comportamento do escoamento uni e bidimensional em reservatórios de petróleo em regime transiente.

3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

De forma mais específica, busca-se:

- Modelar e simular o escoamento em regime transiente em reservatórios de petróleo;
- Mostrar que o modelo de ordem inteira é um caso especial do modelo fracionário;
- Aplicar o cálculo fracionário na generalização das equações de fluxo convectivo, lei de Darcy;
- Aplicar as técnicas de solução numérica das equações diferenciais parciais fracionárias e desenvolver a rotina computacional para solução dos modelos fracionários;
- Propor um esquema numérico explícito de solução do modelo proposto;
- Determinar a condição de estabilidade numérica para o método explícito de solução;
- Simular as condições de escoamento em reservatórios de petróleo.

4. MATERIAIS E MÉTODOS

No que diz respeito aos materiais utilizados, para todas as simulações utiliza-se um computador pessoal com capacidade de processamento de 2,4 GH e 12GB de memória RAM. Além disso, todas as rotinas numéricas foram programadas e executadas no software Matlab® R2015a.

4.1. SOLUÇÃO ANALÍTICA DAS EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS

Quando possível, as equações obtidas foram resolvidas analiticamente de modo a se validar os resultados numéricos. As equações foram solucionadas de acordo com o método apresentado por Podlubny (1999). A seguir, detalha-se o método de obtenção de solução analítica das equações diferenciais fracionárias.

Neste trabalho, foca-se na obtenção da solução das equações utilizando a definição de Caputo da derivada fracionária. No entanto, parte dessa solução depende de resultados obtidos utilizando-se a definição de Riemann-Liouville.

4.1.1. Método de solução utilizando a definição de Riemann-Liouville

Podlubny (1999) mostra que a solução de uma equação diferencial fracionária linear com coeficientes constantes é dada pela equação (45).

$$y(t) = b_n G(t) + \int_0^t G(t - \varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (45)$$

$$b_n = [D_t^{\alpha-1} y(0)]$$

Para equações diferenciais fracionárias lineares com coeficientes constantes com condições iniciais homogêneas, a equação (45) se simplifica, pois, para isso, tem-se:

$$b_n = [D_t^{\alpha-1} y(0)] = 0 \quad (46)$$

Portanto, pode-se resolver através da equação (47).

$$y(t) = \int_0^t G(t - \varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (47)$$

Onde $G(t)$ função Green, que é obtida para cada tipo de equação diferencial fracionária.

4.1.1.1. Equações fracionárias de um termo

As equações diferenciais fracionárias com coeficientes constantes e que apresentam apenas um termo, na forma da equação (48).

$$aD_t^\alpha y(t) = f(t) \quad (48)$$

Tem a função de Green apresentada na equação (49).

$$G(t) = \frac{1}{a} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \quad (49)$$

Outro método de resolução da equação de um termo é obter a integral fracionária da função $f(t)$. Desse modo, a solução da equação (48) pode ser obtida pela equação (50).

$$y(t) = \frac{1}{a\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{f(\varepsilon) d\varepsilon}{(t - \varepsilon)^{1-\alpha}} \quad (50)$$

4.1.1.2. Equações fracionárias de dois termos

As equações fracionárias de dois termos, conforme apresentada na equação (51). Possuem como função de Green a equação (52).

$$aD_t^\alpha y(t) + by(t) = f(t) \quad (51)$$

$$G(t) = \frac{1}{a} t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\frac{b}{a} t^\alpha \right) \quad (52)$$

Onde, $E_{\alpha,\alpha}$ é a função de Mittag-Leffler de dois parâmetros.

4.1.2. Método de solução utilizando a definição de Caputo

Para a solução das equações diferenciais fracionárias utilizando a definição de Caputo, o método sofre algumas alterações. Em especial, devido a diferença na forma da condição inicial.

4.1.2.1. Equações fracionárias de um termo

Quando se utiliza a definição de Caputo para solucionar as equações diferenciais fracionárias de um termo, na forma da equação (48), a solução encontrada é diferente daquela obtida quando da utilização da definição de Riemann-Liouville. Sendo assim, a solução é dada pela equação (53).

$$y(t) = b_n + \int_0^t \frac{1}{a} \frac{(t-\varepsilon)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (53)$$

$$b_n = y(0)$$

4.1.2.2. Equações fracionárias de dois termos

Semelhante ao que ocorre para a equação de um termo, o método de solução das equações de dois termos, quando da utilização da definição de Caputo, também sofre alterações. A solução é dada pela equação (54).

$$y(t) = b_n E_\alpha \left(-\frac{b}{a} t^\alpha \right) + \int_0^t G(t-\varepsilon) f(\varepsilon) d\varepsilon \quad (54)$$

Onde: $E_\alpha(x)$ é a função Mittag-Leffler de um parâmetro e $G(t)$ é a função Green para equações de dois termos, equação (52).

4.2. SOLUÇÃO NUMÉRICA DAS EQUAÇÕES FRACIONÁRIAS

Devido à complexidade e generalidade da equação de transporte, por vezes, sua solução analítica é impossível ou inviável, demandando um complexo ferramental matemático. Portanto, para esses casos, a solução numérica surge como única opção ou como opção mais viável.

A seguir, detalha-se a abordagem numérica para obtenção da solução numérica das equações diferenciais fracionárias advindas da equação de transporte. De forma introdutória apresenta-se a aproximação numérica de derivadas ordinárias e sua aplicação na solução de equações diferenciais ordinárias, naquele que é conhecido com o método das diferenças finitas. Esse passo é importante para a compreensão da aproximação numérica da derivada fracionária.

4.2.1. O método das diferenças finitas

O método das diferenças finitas (MDF) é um método comumente utilizado na obtenção da solução numérica de equações diferenciais ordinárias e parciais. Tal método se baseia na aproximação discreta, por diferenças finitas, das derivadas envolvidas no problema

De forma resumida, discretiza-se o domínio do problema e aplica-se as aproximações discretas das derivadas (ordinárias ou parciais), tal abordagem resume a equação diferencial em um sistema de equações algébricas que pode ser posteriormente solucionado por métodos numéricos adequados.

Portanto, parte fundamental desse método é a escolha adequada da malha de discretização, pois o passo da malha deve ser suficientemente pequeno para que o erro da aproximação da derivada possa ser desprezível; além da utilização da aproximação da derivada mais adequada para cada problema.

A seguir, são apresentadas as equações para aproximação das derivadas de primeira e segunda ordem. Essas aproximações podem ser facilmente obtidas partindo-se da definição de derivada ou então através da expansão por série de Taylor de uma função.

Para o caso das derivadas de primeira ordem, essas podem ser aproximações para frente, dependendo, de pontos futuros no domínio, equação (55); para trás, pois dependem de pontos passados no domínio, equação (56) ou ainda, podem ser aproximações centrais, pois dependem de pontos futuros e passados no domínio, equação (57)

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + o(h) \quad (55)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x) - f(x-h)}{h} + o(h) \quad (56)$$

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + o(h^2) \quad (57)$$

O mesmo raciocínio se aplica as derivadas de ordem superior. No entanto é pouco usual a utilização de aproximações que não sejam centrais e de ordem superior a dois. Portanto, a equação (58) apresenta a aproximação por diferenças finitas da derivada de segunda ordem.

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + o(h^2) \quad (58)$$

Em todas as equações a função $o(\varepsilon)$ representa o erro da aproximação da derivada, dessa forma é fácil perceber que o erro depende do tamanho do passo da malha discreta (h). Dessa forma, como dito anteriormente, o passo deve ser pequeno o suficiente para que o erro seja desprezível.

4.2.2. Aproximação numérica da derivada fracionária

Depois de analisar o método das diferenças finitas é plausível pensar que tal método pode ser adaptado para obtenção da solução numérica de equações diferenciais fracionárias, bastando-se para isso a utilização adequada da aproximação numérica da derivada fracionária.

Diferentemente do exposto para as derivadas de ordem inteira, a obtenção da aproximação numérica para as derivadas fracionárias não é trivial.

O processo descrito a seguir é apresentado com algum detalhe no livro *fractional differential equations*, Podlubny (1999).

Para obtenção da aproximação numérica da derivada fracionária, parte-se da definição de derivada ordinária dada pela equação (59).

$$\frac{df(x)}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x - h)}{h} \quad (59)$$

Se agora aplicarmos a definição de derivada a equação (59), obtêm-se a definição de derivada segunda, dada pela equação (60).

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2f(x - h) + f(x - 2h)}{h^2} \quad (60)$$

Afim de se reconhecer o padrão, repete-se o mesmo procedimento em busca de uma equação para a derivada de terceira ordem, equação (61).

$$\frac{d^3f(x)}{dx^3} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) - 3f(x - h) + 3f(x - 2h) - f(x - 3h)}{h^3} \quad (61)$$

Observando-se o padrão obtido, é possível generalizar esse resultado para se obter uma equação matemática para n-ésima derivada. Essa é relação é apresentada pela equação (62).

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} f(x - kh) \quad (62)$$

Onde $\binom{n}{k}$ é o número binomial e n é um inteiro.

Como um dos objetivos da utilização do cálculo fracionário é a generalização dos modelos. Busca-se então generalizar a equação (62) para uma derivada de ordem $\alpha \in \mathbb{R}$. No entanto, para que isso seja feito é preciso uma análise mais cuidadosa da equação, pois n é o limite superior do somatório, devendo ser um inteiro. E, segundo Podlubny (1999), a única forma

para que o limite não seja trivial (igual a zero) é se fazendo $n \rightarrow \infty$. Sendo assim, pode-se relacionar n e h através da equação (63)

$$n = \frac{(x - a)}{h} \quad (63)$$

Sendo assim, a equação (62) pode ser reescrita na forma apresentada pela equação (64).

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = x - a}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh) \quad (64)$$

Essa mudança não causa perda de generalidade pois, mesmo para uma derivada de ordem inteira, o número binomial não é definido para quando $k > \alpha$ e, dessa forma, esses termos não existiriam no somatório.

Além disso, esse número binomial pode ser obtido através de combinações simples, que por sua vez é fácil de se calcular utilizando fatoriais. Por outro lado, para o caso mais geral, onde $\alpha \in \mathbb{R}$ é necessário escreve-lo através da função gama, definida anteriormente.

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{k! (\alpha - k)!} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1) \Gamma(\alpha - k + 1)} \quad (65)$$

Portanto, de forma mais geral possível, pode-se substituir a equação (65) na equação (64), de onde resulta a definição de derivada fracionária. Segundo Podlubny (1999), esse procedimento é equivalente a obtenção da definição de Riemann-Liouville

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ nh = t - a}} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1) \Gamma(\alpha - k + 1)} f(x - kh) \quad (66)$$

Segundo a demonstração apresentada no livro citado, essa abordagem pode ser utilizada como aproximação de primeiro grau da derivada fracionária de Riemann-Liouville

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\frac{x-a}{h}} (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha-k+1)} f(x-kh) + o(h) \quad (67)$$

Utilizando-se a equação (27) que relaciona a definição de Riemann-Liouville à definição de Caputo. Pode-se escrever a aproximação numérica da derivada fracionária de Caputo, equação (68).

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\frac{x-a}{h}} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(a) + o(h) \quad (68)$$

Para o caso mais restritivo, onde o terminal inferior da derivada fracionária (a) é igual a zero e fazendo-se a mudança de variável $N = x/h$. Obtém-se a equação para aproximação da derivada fracionária de Caputo.

$${}_0^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x-kh) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(x)^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} f^{(k)}(0) + o(h) \quad (69)$$

Onde $n-1$ é o inteiro imediatamente menor que α .

4.3. MÉTODO L1 DE APROXIMAÇÃO DAS DERIVADAS FRACIONÁRIAS

Apesar de matematicamente elegante, a aproximação das derivadas fracionárias de Caputo através da equação (69) por vezes leva a formulação de esquemas numéricos instáveis (LI; ZENG, 2015). Dessa forma, novos métodos para aproximação das derivadas fracionárias foram desenvolvidos, sendo que o método L1, dado pela equação (70), é geralmente empregado e, por muitas vezes, leva a esquemas numéricos incondicionalmente estáveis (LI; ZENG, 2015).

Por não ser o foco desse trabalho, a dedução e análise da equação (70) podem ser vistas em detalhes em Li; Zeng, 2015.

$$\begin{aligned}
{}_0^C D_t^\alpha f(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} b_{n-k-1} [f(t_{k+1}) - f(t_k)] \\
0 &< \alpha < 1 \\
b_k &= \frac{\Delta t^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} [(k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}]
\end{aligned} \tag{70}$$

4.4. ANÁLISE DE ESTABILIDADE

Segundo Ertekin et al. (2001) e Li; Zeng, (2015) existem diversos métodos para analisar a estabilidade numérica dos modelos aplicados a descrição do escoamento em reservatórios de petróleo. Para todos os métodos, o objetivo final é determinar se o esquema numérico proposto é incondicionalmente estável, condicionalmente estável ou incondicionalmente instável. Além disso, para os esquemas numéricos condicionalmente estáveis, tais métodos são capazes de delimitar a região na qual o esquema proposto é estável.

Para esse trabalho, optou-se pela utilização do método de Von Neumann, também conhecido como método de análise de estabilidade por séries de Fourier. Nesse método, o erro da aproximação numérica em relação a solução analítica é representado por uma série de Fourier, de acordo com a equação (71).

$$\epsilon = \sum A_n e^{j\left(\frac{n\pi x}{L}\right)} \tag{71}$$

Onde j é a unidade imaginária dada por $j = \sqrt{-1}$ e L é o intervalo no qual a função é definida.

Nesse método, a notação usada sugere que a solução numérica pode ser decomposta em um produto de termos dependentes exclusivamente do espaço e do tempo. Ou seja, os valores discretos da função (no caso desse trabalho, os valores para a pressão – P) devem ser expressos como um produto de termos dependentes do espaço e do tempo. Considere as equações (72) a (76) como exemplos desse procedimento.

$$P_{i,j}^n = \varepsilon^n e^{j(\omega_1 x + \omega_2 y)} \quad (72)$$

$$P_{i+1,j}^n = \varepsilon^n e^{j[\omega_1(x+\Delta x) + \omega_2 y]} \quad (73)$$

$$P_{i,j+1}^n = \varepsilon^n e^{j[\omega_1 x + \omega_2(y+\Delta y)]} \quad (74)$$

$$P_{i+1,j-1}^n = \varepsilon^{n+1} e^{j[\omega_1 x(x+\Delta x) + \omega_2(y-\Delta y)]} \quad (75)$$

O método de Fourier afirma que o esquema proposto será estável desde que o fator de amplificação μ_{max} seja menor que um. Esse fator é obtido através da substituição das equações em função do erro – equações (72) a (75) – no esquema numérico em análise. O fator de amplificação descreve como o erro cresce a cada iteração de tempo e sua definição é dada pela equação (76).

$$\mu_{max} = \left(\frac{|\varepsilon^{n+1}|}{|\varepsilon^n|} \right)_{max} < 1 \quad (76)$$

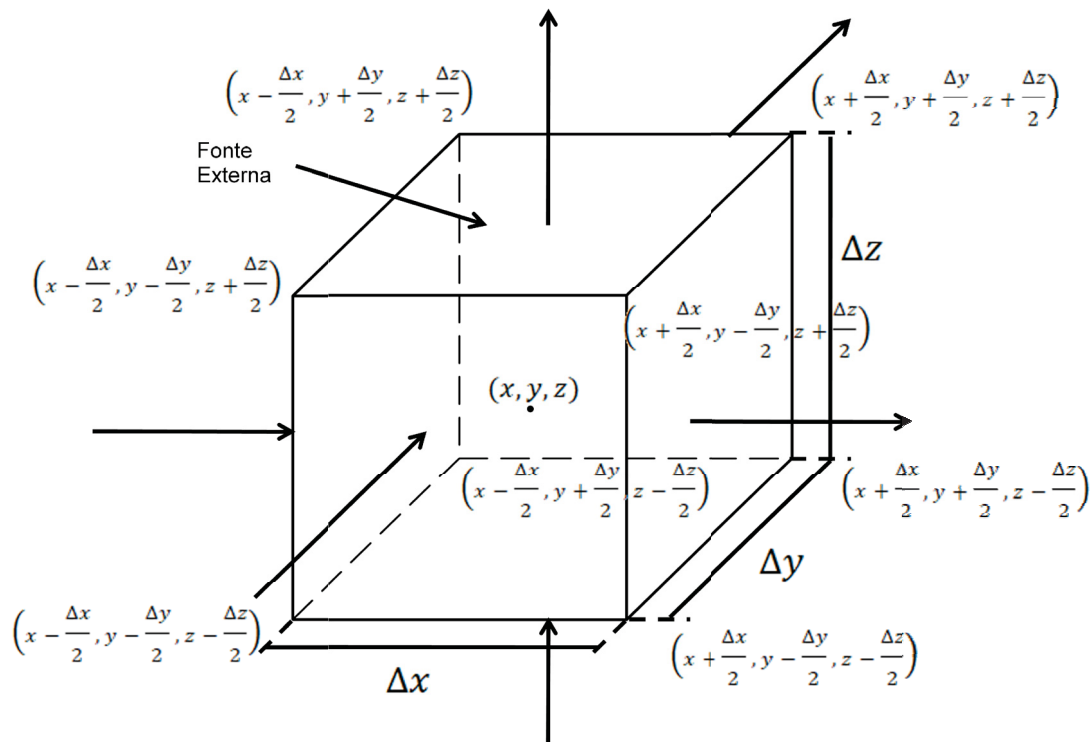
Em outras palavras, buscam-se as condições nas quais o erro da nova interação de tempo (ε^{n+1}) é menor que o erro no tempo anterior (ε^n).

5. MODELAGEM

Inicialmente, para a obtenção da versão final do modelo que será resolvido, parte-se de um volume infinitesimal (dv), em coordenadas cartesianas, no interior do reservatório. Considere que esse elemento de volume está centrado nas coordenadas (x, y, z) e tem faces em $(x \pm \frac{\Delta x}{2}, y \pm \frac{\Delta y}{2}, z \pm \frac{\Delta z}{2})$ conforme ilustrado na Figura (05).

Admite-se também, que todas as faces do volume de controle são permeáveis ao fluxo mássico perpendicular ao seu plano, existindo a possibilidade de adição ou retirada de massa do volume de controle via fonte externa (poço). Além disso, defini-se que todo e qualquer fluxo mássico que adentre ao volume de controle tem sinal positivo, enquanto que todo e qualquer fluxo mássico deixe-o tem sinal negativo.

FIGURA 5 - VOLUME DE CONTROLE



Fonte: o autor (2023)

O balanço de massa global para esse volume de controle pode ser escrito de acordo com a equação (77), onde m_i representa a massa que entra no volume de controle, m_o representa a massa que deixa o volume de controle, m_s é a massa que entra ou deixa o volume de controle através da fonte externa (*sink*) e m_a é a massa que acumula.

$$m_i - m_o + m_s = m_a \quad (77)$$

Em um determinado intervalo de tempo Δt , a massa que adentra ao volume de controle, a massa que deixa o volume de controle e massa vinda da fonte externa é dada pelas equações (78), (79) e (80), respectivamente.

$$m_i = \left(\dot{m}_{x-\frac{\Delta x}{2}} + \dot{m}_{y-\frac{\Delta y}{2}} + \dot{m}_{z-\frac{\Delta z}{2}} \right) \Delta t \quad (78)$$

$$m_o = \left(\dot{m}_{x+\frac{\Delta x}{2}} + \dot{m}_{y+\frac{\Delta y}{2}} + \dot{m}_{z+\frac{\Delta z}{2}} \right) \Delta t \quad (79)$$

$$m_s = q_m \Delta t \quad (80)$$

Onde: q_m é a vazão mássica (M/T) da fonte externa.

Por outro lado, a massa que acumulou no volume de controle, é função da porosidade do poço (ϕ). Portanto, a expressão que determina a massa acumulada entre t e $t + \Delta t$ é dada pelas equações (81), (82) e (83).

$$m_t = (\phi V \rho)_t = (\phi \Delta x \Delta y \Delta z \rho)_t \quad (81)$$

$$m_{t+\Delta t} = (\phi V \rho)_{t+\Delta t} = (\phi \Delta x \Delta y \Delta z \rho)_{t+\Delta t} \quad (82)$$

$$m_a = (\phi \Delta x \Delta y \Delta z \rho)_{t+\Delta t} - (\phi \Delta x \Delta y \Delta z \rho)_t \quad (83)$$

Substituindo essas equações na equação do balanço de massa global, temos:

$$\begin{aligned} & \left(\dot{m}_{x-\frac{\Delta x}{2}} + \dot{m}_{y-\frac{\Delta y}{2}} + \dot{m}_{z-\frac{\Delta z}{2}} \right) \Delta t - \left(\dot{m}_{x+\frac{\Delta x}{2}} + \dot{m}_{y+\frac{\Delta y}{2}} + \dot{m}_{z+\frac{\Delta z}{2}} \right) \Delta t + q_m \Delta t \\ & = (\phi \Delta x \Delta y \Delta z \rho)_{t+\Delta t} - (\phi \Delta x \Delta y \Delta z \rho)_t \end{aligned} \quad (84)$$

Sabendo-se que a vazão mássica pode ser escrita em função da densidade da fase (ρ), da velocidade de escoamento (u) e da área perpendicular ao escoamento (A_i). Dessa forma, a equação do balanço de massa global pode ser expressa por:

$$\begin{aligned}
& \left[(\rho u_x A_x)_{x-\frac{\Delta x}{2}} + (\rho u_y A_y)_{y-\frac{\Delta y}{2}} + (\rho u_z A_z)_{z-\frac{\Delta z}{2}} \right] \\
& - \left[(\rho u_x A_x)_{x+\frac{\Delta x}{2}} + (\rho u_y A_y)_{y+\frac{\Delta y}{2}} + (\rho u_z A_z)_{z+\frac{\Delta z}{2}} \right] + q_m \quad (85) \\
& = \frac{(\phi \Delta x \Delta y \Delta z \rho)_{t+\Delta t} - (\phi \Delta x \Delta y \Delta z \rho)_t}{\Delta t}
\end{aligned}$$

Subtraindo-se os termos semelhantes, dividindo-se por $\Delta x \Delta y \Delta z = V_b$ e rearranjando tem-se:

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{(\rho u_x A_x)_{x+\frac{\Delta x}{2}} - (\rho u_x A_x)_{x-\frac{\Delta x}{2}}}{\Delta x} \right] - \left[\frac{(\rho u_y A_y)_{y+\frac{\Delta y}{2}} - (\rho u_y A_y)_{y-\frac{\Delta y}{2}}}{\Delta y} \right] \\
& - \left[\frac{(\rho u_z A_z)_{z+\frac{\Delta z}{2}} - (\rho u_z A_z)_{z-\frac{\Delta z}{2}}}{\Delta z} \right] + \frac{q_m}{V_b} = \frac{(\phi \rho)_{t+\Delta t} - (\phi \rho)_t}{\Delta t} \quad (86)
\end{aligned}$$

Tomando-se o limite quando $\Delta x \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, $\Delta z \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow 0$, obtém-se a forma diferencial do balanço global de massa, equação (87).

$$-\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} + \frac{q_m}{V_b} = \frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} \quad (87)$$

Por conveniência, alguns autores preferem expressar a equação do balanço global de massa em função do volume. Dessa forma, nesse trabalho, adota-se a equação do balanço de massa previamente multiplicada pelo volume, conforme equação (88).

$$-\frac{\partial(\rho u_x A_x)}{\partial x} \Delta x - \frac{\partial(\rho u_y A_y)}{\partial y} \Delta y - \frac{\partial(\rho u_z A_z)}{\partial z} \Delta z + q_m = V_b \frac{\partial(\phi \rho)}{\partial t} \quad (88)$$

Até esse momento, a equação (88) representa a forma diferencial básica da equação de transporte. No entanto, para utilizá-la nos problemas de escoamento em reservatórios de petróleo faz-se necessário acoplar uma equação de estado, bem como a equação de Darcy.

Para utilização da equação de estado, elege-se uma condição padrão (*standard conditions*), na qual se conhece todas as propriedades termodinâmicas da fase em escoamento, em especial o volume (V_{sc}) e a densidade (ρ_{sc}). Com isso, define-se o fator de formação de volume (B)

através do cociente entre o volume da fase nas condições de interesse e seu respectivo volume nas condições padrão.

$$B = \frac{V}{V_{sc}} = \frac{\rho_{sc}}{\rho} \quad (89)$$

Já a velocidade de escoamento, é descrita pela equação de Darcy. Para esse trabalho, é de especial interesse escrever a equação de Darcy utilizando as definições de derivada fracionária expostas anteriormente. Por isso, a velocidade de escoamento, em cada direção, é expressa através da equação (90), (91) e (92).

$$u_x = -\beta_c \frac{k_x}{\mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \quad (90)$$

$$u_y = -\beta_c \frac{k_y}{\mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \quad (91)$$

$$u_z = -\beta_c \frac{k_z}{\mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial z^\alpha} \quad (92)$$

Onde: β_c é uma constante de proporcionalidade entre o sistema de unidades inglês e métrico e vale 1,127, k_x é a pseudopermeabilidade do reservatório, μ é a viscosidade de fase e $\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha}$ é o operador de Caputo da derivada fracionária da pressão em relação à direção de escoamento.

Sabendo-se que a vazão mássica vinda da fonte externa pode ser escrita em função das condições padrão ($q_m = q_{sc}\rho_{sc}$) e substituindo-se as equações anteriores na equação do balanço, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_{sc} A_x \beta_c k_x}{B \mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho_{sc} A_y}{B \mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right) \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_{sc} A_z}{B \mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial z^\alpha} \right) \Delta z + q_{sc} \rho_{sc} = V_b \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi \rho_{sc}}{B} \right) \quad (93)$$

Como ρ_{sc} é constante, o balanço de massa global pode ser expresso através da equação (94).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{B \mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A_y \beta_c k_y}{B \mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right) \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_z \beta_c k_z}{B \mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial z^\alpha} \right) \Delta z + q_{sc} = V_b \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) \quad (94)$$

A equação (94) descreve o escoamento em um reservatório de forma genérica. Portanto, a partir dela outros casos podem ser derivados.

5.1. Escoamento incompressível

Dá-se especial importância para o caso onde o fluido pode ser considerado incompressível, ou seja, sua densidade não é função da posição ou do tempo, pois $B = 1$ e o modelo deixa de ser função do tempo.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A_y \beta_c k_y}{\mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right) \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_z \beta_c k_z}{\mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial z^\alpha} \right) \Delta z + q_{sc} = 0 \quad (95)$$

Esse é um resultado muito importante que nos diz que, para um fluido incompressível, o perfil de pressão ao longo do reservatório se estabelece de forma instantânea, imediatamente após o início da operação. Além disso, outro ponto a se considerar é que a equação (95) também descreve um escoamento em regime permanente. Sendo assim, um problema de escoamento incompressível, com condições de contorno independentes do tempo, possui solução numericamente igual ao problema de escoamento em regime permanente.

Outras simplificações podem ser feitas, a depender do caso em estudo. Para o escoamento de um fluido incompressível com viscosidade constante, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(A_x \beta_c k_x \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(A_y \beta_c k_y \frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right) \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} \left(A_z \beta_c k_z \frac{\partial^\alpha P}{\partial z^\alpha} \right) \Delta z + \mu q_{sc} = 0 \quad (96)$$

Se o reservatório for anisotrópico ($k_x \neq k_y \neq k_z$), porém homogêneo, as permeabilidades (k_x, k_y e k_z) serão constantes ao longo de todo o reservatório, e dessa forma o balanço se simplifica para:

$$k_x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) + k_y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right) + k_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial z^\alpha} \right) + \frac{\mu q_{sc}}{\beta_c V_b} = 0 \quad (97)$$

$$V_b = A_x \Delta x = A_y \Delta y = A_z \Delta z$$

Para um meio isotrópico onde as permeabilidades são iguais e constantes ($k_x = k_y = k_z = k$), o modelo se simplifica ainda mais, obtendo-se a equação (98).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial z^\alpha} \right) + \frac{\mu q_{sc}}{\beta_c k V_b} = 0 \quad (98)$$

Por fim, quando se trabalha com o escoamento de um fluido de viscosidade constante e incompressível; o meio é isotrópico e homogêneo e não há fonte externa no volume de controle ($q_{sc} = 0$), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial z^\alpha} \right) = 0 \quad (99)$$

5.2. Fluido levemente compressível

Para o caso onde o fluido é levemente compressível ($B \neq 1$), ou seja, a densidade do fluido é fracamente influenciada pela pressão, e algumas mudanças devem ser feitas no modelo. Inicialmente, admite-se que a compressibilidade do fluido é pequena ($10^{-6} psi < c < 10^{-5} psi$) e se mantém constantes dentro do intervalo de pressão de interesse e que o fator de formação de volume pode ser expresso pela equação (100).

$$B = \frac{B^0}{[1 + c(P - P^0)]} \quad (100)$$

Onde c é a compressibilidade do fluido e para um líquido, é dado pela equação (101).

$$c = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} \Big|_T \quad (101)$$

Para melhor visualizar os efeitos da adição da equação (100) ao modelo faz-se a análise separadamente das derivadas no tempo e no espaço. Dessa forma, substituindo-se a definição do fator de formação de volume, equação (100) no termo transiente - lado direito da equação do balanço de massa, equação (94) - tem-se:

$$V_b \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi}{B} \right] = V_b \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\phi [1 + c(P - P^0)]}{B^0} \right\} \quad (102)$$

Assumindo-se que a porosidade não varia com o tempo, tem-se:

$$V_b \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\phi}{B} \right] = \frac{V_b \phi c}{a_c B^0} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (103)$$

Onde: a_c é uma constante de proporcionalidade para o volume entre o sistema métrico e inglês. Para unidades no sistema inglês, $a_c = 5,614583$ e para o sistema métrico, $a_c = 1$.

Para as derivadas no espaço, o mesmo pode ser feito. Entretanto, algumas modificações precisam ser feitas. A seguir, exemplificam-se as operações realizadas para a derivada na direção x . O mesmo pode ser feito para as derivadas em y e z .

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{B \mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{[1 + c(P - P^0)]}{B^0} \frac{A_x \beta_c k_x}{\mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right\} \Delta x \quad (104)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{B \mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x = \left\{ \frac{[1 + c(P - P^0)]}{B^0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) + \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu} \right) \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \frac{\partial [1 + c(P - P^0)]}{\partial x} \right\} \Delta x \quad (105)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{B \mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x = \left\{ \frac{[1 + c(P - P^0)]}{B^0} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) + c \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial P}{\partial x} \right\} \Delta x \quad (106)$$

Como apresentado anteriormente, para fluidos levemente compressíveis $c \approx 0$, isso implica em:

$$[1 + c(P - P^0)] \approx 1 \quad (107)$$

$$c \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \frac{\partial P}{\partial x} \approx 0 \quad (108)$$

Substituindo-se as equações (107) e (108) na expressão da derivada espacial, equação (106), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{B \mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B^0} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \right\} \Delta x \quad (109)$$

O mesmo procedimento pode ser feito para as derivadas nas direções y e z . Substituindo-se os resultados na equação do balanço de massa global, equação (94), tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B^0} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A_y \beta_c k_y}{\mu B^0} \frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right) \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_z \beta_c k_z}{\mu B^0} \frac{\partial^\alpha P}{\partial z^\alpha} \right) \Delta z + q_{sc} = \frac{V_b \phi c}{a_c B^0} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (110)$$

A equação (110) é a equação fracionária de transporte que descreve o escoamento de um fluido levemente compressível em um meio poroso. Semelhante ao que foi exposto anteriormente, se o meio for homogêneo e isotrópico, o modelo se resume a:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right) \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial z^\alpha} \right) \Delta z + \frac{\mu B^0 q_{sc}}{\beta_c V_b k} = \frac{\phi \mu c}{a_c B^0 k} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (111)$$

5.3. Fluidos compressíveis

Para a descrição do escoamento de um fluido compressível, faz-se necessário a utilização de uma equação de estado para descrever a variação da densidade do fluido com a pressão. Dessa forma, o fator de formação de volume para uma substância gasosa é dado por:

$$B_g = \frac{\rho_{gsc}}{\rho_g} = \frac{P_{sc} T_z}{T_{sc} P} \quad (112)$$

Onde z é o fator de compressibilidade do fluido. Dado pela equação de estado.

De forma análoga ao que foi feito para a descrição do escoamento de fluidos levemente compressíveis, substitui-se a equação do fator de formação de volume, equação (100) na equação do balanço global de massa, equação (94). Sendo assim, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta_c \rho_{gsc} A_x k_x}{\mu_g B_g} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\beta_c \rho_{gsc} A_y k_y}{\mu_g B_g} \frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right) \Delta y \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\beta_c \rho_{gsc} A_z k_z}{\mu_g B_g} \frac{\partial^\alpha P}{\partial z^\alpha} \right) \Delta z + q_{gsc} \rho_{gsc} = \frac{V_b \phi T_{sc}}{a_c P_{sc} T} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{P}{z} \right] \end{aligned} \quad (113)$$

A equação (113), na forma como se apresenta, é altamente não linear e requer a utilização de um procedimento iterativo para se obter sua solução. Uma das formas de se simplificar a equação (113) é considerar o fluido que está escoando um gás ideal. Essa consideração resolve, em parte, a não linearidade, pois, para um gás ideal, $z = 1$.

Portanto, substituindo-se a definição do fator de formação de volume da fase gasosa e considerando-se que a temperatura não é função da posição, chega-se a equação que descreve o escoamento em meio poroso de um gás.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta_c \rho_{gsc} A_x k_x}{\mu_g} P \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\beta_c \rho_{gsc} A_y k_y}{\mu_g} P \frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right) \Delta y \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\beta_c \rho_{gsc} A_z k_z}{\mu_g} P \frac{\partial^\alpha P}{\partial z^\alpha} \right) \Delta z + \frac{P_{sc} T q_{gsc}}{T_{sc}} = V_b \phi \frac{\partial P}{\partial t} \end{aligned} \quad (114)$$

Caso o reservatório possa ser considerado isotrópico e homogêneo, a equação (114) se simplifica para:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(P \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(P \frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right) \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} \left(P \frac{\partial^\alpha P}{\partial z^\alpha} \right) \Delta z + \frac{\mu_g P_{sc} T q_{gsc}}{k V_b \beta_c T_{sc}} = \frac{\phi \mu_g}{a_c k \beta_c} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (115)$$

A literatura (Ertekin et al., 2001) indica que as equações (114) e (115) de ordem inteira ($\alpha = 1$) são úteis na descrição do escoamento em reservatórios a baixas pressões $P < 35 \text{ bar} < 500 \text{ psi}$.

6. RESULTADOS E SIMULAÇÕES

Como visto até aqui, os modelos fracionários obtidos, em sua maioria, são equações diferenciais parciais de ordem fracionária, que, não raramente, são de difícil, quando não impossível, solução analítica. Para esses casos, recorre-se as soluções numéricas do problema.

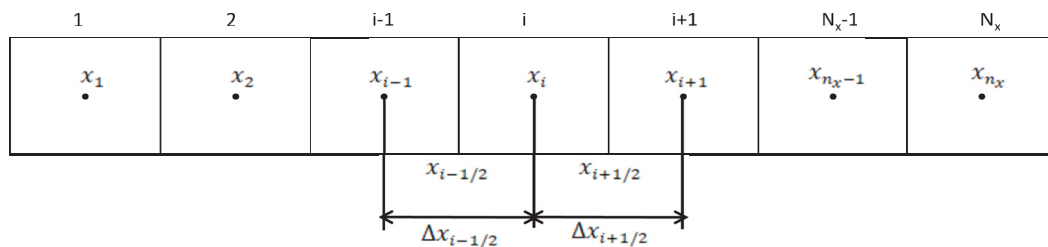
A primeira etapa para se obter a solução numérica dos problemas é fazer a discretização do seu domínio, este passo é de suma importância, pois poderá levar a um algoritmo estável ou não.

6.1. MODELO UNIDIMENSIONAL TRANSIENTE

Para esse trabalho, optou-se pela construção de uma malha de blocos centrados (*block-centered grid systems*). Para exemplificar sua construção, considera-se o problema de escoamento unidimensional, conforme ilustrado na figura (06). Nela, uma malha com n_x blocos foi sobreposta sobre um reservatório em coordenadas retangulares. Esses blocos possuem dimensões definidas Δx_i que, não necessariamente serão iguais, mas obrigatoriamente satisfazem a equação (116).

$$\sum_{i=1}^{n_x} \Delta x_i = L_x \quad (116)$$

FIGURA 6 - EXEMPLO DE MALHA UNIDIMENSIONAL



Fonte: o autor (2023)

Uma vez definida a malha, os pontos onde as pressões serão efetivamente calculadas são colocados no centro de cada bloco. Dessa maneira, as fronteiras do i-ésimo bloco são representadas por $x_{i\pm 1/2}$ e seu

centro representado por x_i . Para esse tipo de malha, valem as relações dadas pelas equações (117) e (118).

$$x_i = \frac{(x_{i-1/2} + x_{i+1/2})}{2} \quad (117)$$

$$\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2} \quad (118)$$

Inicialmente, aplica-se à malha proposta ao modelo unidimensional levemente compressível, equação (119).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x + q_{sc} = \frac{V_b \phi c}{a_c B^0} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (119)$$

Aplicando-se a aproximação numérica, via diferenças finitas, para a derivada espacial, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x = \frac{1}{\Delta x_i} \left[\left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B} \right)_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right)_{i+\frac{1}{2}} - \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B} \right)_{i-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right)_{i-\frac{1}{2}} \right] \quad (120)$$

Repetindo-se o procedimento para a derivada temporal

$$\frac{V_b \phi c}{B^0} \frac{\partial P}{\partial t} = \left(\frac{V_b \phi c}{a_c B^0} \right)_i \left(\frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} \right) \quad (121)$$

Substituindo-se na equação (120), tem-se a equação do modelo escrita para um ponto “i” qualquer da malha. Para obtenção de um algoritmo explícito, adota-se o tempo n como sendo o tempo base da solução.

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right)_{i+\frac{1}{2}}^n - \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n \right] + q_{isc}^n \\ & = \left(\frac{V_b \phi c}{a_c B^0} \right)_i^n \left(\frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (122)$$

Para as derivadas de ordem fracionária, utiliza-se o método L1, conforme equações (123) a (124).

$$\left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha}\right)_{i+\frac{1}{2}}^n = \sigma \sum_{k=0}^i b_k [P_{i+1-k}^n - P_{i-k}^n] \quad (123)$$

$$\left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha}\right)_{i-\frac{1}{2}}^n = \sigma \sum_{k=0}^{i-1} b_k [P_{i-k}^n - P_{i-1-k}^n] \quad (124)$$

$$\sigma = \frac{1}{\Delta x^{\alpha-1} \Gamma(2-\alpha)} \quad (125)$$

$$b_k = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \quad (126)$$

Definindo-se a transmissibilidade do reservatório, na direção do escoamento, como sendo:

$$T_{x_{i\pm\frac{1}{2}}}^n = \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B \Delta x}\right)_{i\pm\frac{1}{2}}^n \quad (127)$$

Substituindo-se no modelo, obtemos o método explícito para solução do modelo unidimensional transiente.

$$P_i^{n+1} = P_i^n + \Lambda_i^n \left[T_{x_{i+\frac{1}{2}}}^n \sigma \sum_{k=0}^i b_k [P_{i+1-k}^n - P_{i-k}^n] - T_{x_{i-\frac{1}{2}}}^n \sigma \sum_{k=0}^{i-1} b_k [P_{i-k}^n - P_{i-1-k}^n] + q_{isc}^n \right] \quad (128)$$

$$\Lambda_i^n = \left(\frac{V_b \phi c}{a_c B^0 \Delta t}\right)_i^n$$

Para fechar o algoritmo de solução, resta apenas a formulação e aplicação da condição inicial e de contorno do problema. Para um escoamento unidimensional, é plausível admitir-se que a profundidade do reservatório é relativamente pequena, ou seja, que o gradiente de pressão entre topo e fundo do reservatório é desprezível - note que essa hipótese já foi considerada ao utilizar a lei de Darcy no formato da equação (90). Por ser isso verdade, pode-se definir a condição inicial de pressão no reservatório como sendo constante e igual a uma determinada pressão P_0 , conforme equação (129).

$$P(x, 0) = P_0 \quad (129)$$

Para as condições de contorno, existem ao menos duas formas comumente utilizadas para expressá-las. As fronteiras do reservatório podem estar pressionadas pelas vizinhanças e, portanto, mantidas a uma pressão definida ou, o reservatório pode estar localizado entre rochas impermeáveis e, dessa forma, o fluxo através de suas fronteiras é zero. Inicialmente, considera-se o reservatório isolado, de acordo com a equação (130) e (131)

$$\left. \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (130)$$

$$\left. \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (131)$$

Portanto, se as equações (130) e (131) são verdadeiras, então para uma malha discreta valem:

$$\frac{P_1 - P_0}{\Delta x} = 0 \therefore P_1 = P_0 \quad (132)$$

$$\frac{P_{n_x+1} - P_{n_x}}{\Delta x} = 0 \therefore P_{n_x+1} = P_{n_x} \quad (133)$$

Com as equações (128), (129), (132) e (133) fecha-se o algoritmo de obtenção da solução numérica do problema unidimensional transiente.

Para a simulação do problema até aqui descrito, foram utilizados dados para um reservatório real, de comprimento $L = 5000 ft$, disponíveis na literatura - Ertekin et al. (2001). Esse reservatório possui um poço, exatamente no centro, produzindo uma vazão constante de 150 barris de petróleo por dia. As demais variáveis utilizadas na simulação estão apresentadas na tabela (03).

Considera-se que o reservatório possui uma altura suficientemente pequena e está a uma pressão inicial uniforme de 6000 psi. Ambas as extremidades são consideradas isoladas, valendo as equações (132) e (133) e a simulação foi feita para 360 dias de produção com $\Delta t = 0,1 \text{ dias}$ e $\Delta x = 25 ft$.

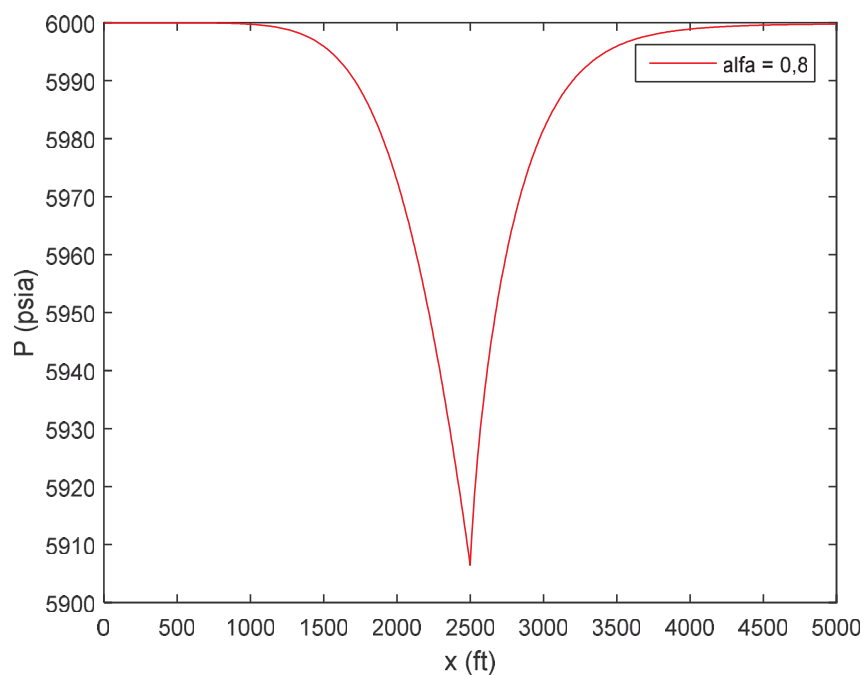
TABELA 3 - VARIÁVEIS UTILIZADAS NA SIMULAÇÃO

Variável	Descrição	Variável	Descrição
$\Delta y = 1000 \text{ ft}$	Largura do reservatório	$c = 3,5 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$	Compressibilidade
$\Delta z = 75 \text{ ft}$	Altura do reservatório	$k = 0,015 \text{ darcy}^\alpha$	Pseudopermeabilidade
$A_x = 75000 \text{ ft}^2$	Área de escoamento	$\phi = 0,18$	Porosidade
$B = 1$	Fator de formação de volume	$\mu = 10 \text{ cP}$	Viscosidade

Fonte: o autor (2023)

Os resultados da simulação, para uma ordem de derivada igual a 0,8, podem ser vistos no gráfico da figura (07). Neles, percebe-se uma grande depressão no ponto onde está localizado o poço. Além disso, esse efeito de diminuição de pressão pode ser sentido em um intervalo de aproximadamente 3000 pés ao redor do poço.

FIGURA 7 - RESULTADOS DE SIMULAÇÃO



Fonte: o autor (2023)

Obtidos os primeiros resultados de simulação, a dúvida que perdura é: o comportamento obtido está adequado? Para dirimir essa questão, simula-se o mesmo modelo, porém de ordem inteira. Para isso, deve-se alterar a discretização proposta, aplicando-se as aproximações discretas de derivada de ordem inteira, equações (134) e (135).

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta x_{i+\frac{1}{2}}} \quad (134)$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2}} = \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta x_{i-\frac{1}{2}}} \quad (135)$$

De forma análoga ao que foi feito para o modelo de ordem fracionária, substituindo-se as aproximações discretas para derivadas espaciais e temporais, obtém-se o algoritmo de solução explícita para o modelo de escoamento unidimensional transiente, equação (136).

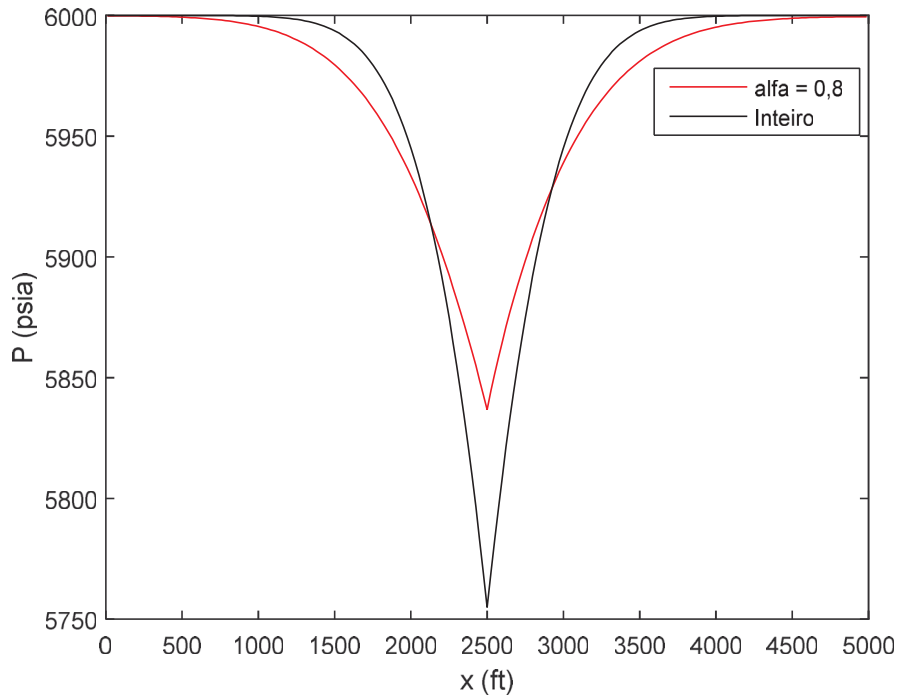
$$P_i^{n+1} = P_i^n + \Lambda_i^n \left[T_{x_{i+\frac{1}{2}}}^n (P_{i+1}^n - P_i^n) - T_{x_{i-\frac{1}{2}}}^n (P_i^n - P_{i-1}^n) + q_{isc}^n \right] \quad (136)$$

$$\Lambda_i^n = \left(\frac{V_b \phi c}{a_c B^0 \Delta t} \right)_i^n$$

Uma das vantagens da utilização da definição de Caputo da derivada fracionária é a formulação das suas condições de contorno. Sendo assim, pode-se utilizar as mesmas condições de contorno do problema fracionário para solucionar o problema de ordem inteira, equações (132) e (133).

Utilizando-se os mesmos dados para a simulação do modelo de ordem fracionária, - ver tabela (03) - obtém-se os resultados mostrados no gráfico da figura (08). Dessa análise, percebe-se, qualitativamente, que o comportamento das soluções é similar, com uma diferença fundamental esperada. Para o modelo fracionário, devido aos efeitos de memória, percebe-se que os efeitos de diminuição da pressão são sentidos por uma distância maior em relação ao centro do poço.

FIGURA 8 - COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO DE ORDEM INTEIRA E FRACIONÁRIA



Fonte: o autor (2023)

Os resultados vistos na figura (08) dão segurança de que a modelagem fracionária produz resultados consistentes. No entanto, persiste-se a questão: como essa solução varia com a ordem fracionária? Essa investigação foi conduzida, e a figura (09) apresenta os resultados obtidos para as simulações com $0,8 \leq \alpha \leq 0,95$, comparadas a solução do modelo de ordem inteira. Além disso, calculam-se os desvios da solução fracionária em relação à solução de ordem inteira, de acordo com as equações (137), (138) e (139). Os resultados encontrados são apresentados na tabela (04).

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{nx} [P_i^{fracionária}(x) - P_i^{inteira}(x)] \quad (137)$$

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{nx} [P_i^{fracionária}(x) - P_i^{inteira}(x)]^2 \quad (138)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{nx} [P_i^{fracionária}(x) - P_i^{inteira}(x)]^2} \quad (139)$$

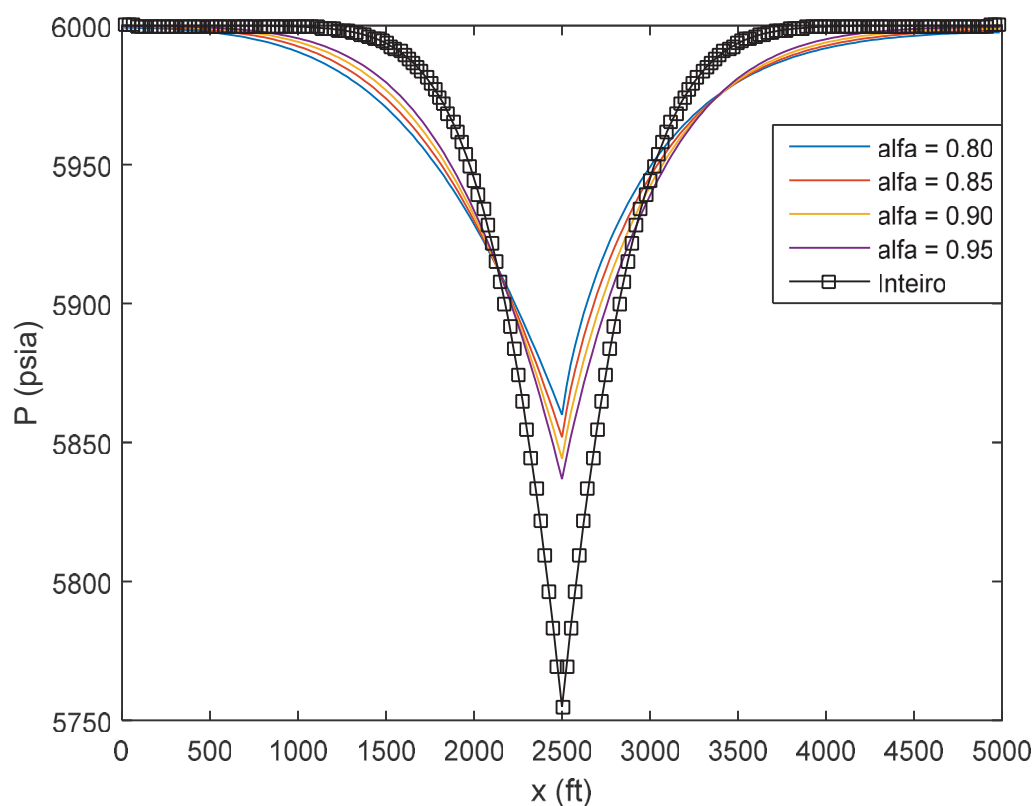
TABELA 4 - DESVIOS CALCULADOS EM RELAÇÃO A SOLUÇÃO DE ORDEM INTEIRA

Desvio	$\alpha = 0,80$	$\alpha = 0,85$	$\alpha = 0,90$	$\alpha = 0,95$
<i>MAE</i>	0,0123	0,0087	0,0055	0,0027
<i>MSE</i>	0,0303	0,0152	0,0060	0,0015
<i>RMSE</i>	0,1742	0,1234	0,0775	0,0381

Fonte: o autor (2023)

De forma mais aprofundada, analisando-se os resultados obtidos, percebe-se que conforme a ordem da derivada se aproxima de um ($\alpha \rightarrow 1$) a solução fracionária se aproxima da solução de ordem inteira, independente da métrica escolhida. Soma-se a isso o fato de que a derivada fracionária de Caputo tende a derivada de ordem inteira, para $\alpha \rightarrow 1$ (Podlubny, 1999). Tais fatos reforçam a tese de que o modelo de ordem inteira é, na verdade, um caso especial de um modelo mais geral, fracionário.

FIGURA 9 - COMPARAÇÃO DA SOLUÇÃO PARA DIFERENTES ORDENS FRACIONÁRIAS



Fonte: o autor (2023)

6.1.1. Validação

Apesar de os resultados apresentados até aqui se mostrarem consistentes, faz-se necessário validar a discretização numérica realizada. Uma estratégia para isso é comparar os resultados numéricos a solução analítica do problema. Por vezes, essa opção de validação não está disponível devido à impossibilidade de obtenção da solução analítica do problema. Esse é o caso para o modelo unidimensional transiente solucionado até aqui.

Para contornar esse impasse, recorre-se ao fato de que a solução para os modelos transientes são numericamente iguais a solução dos modelos em regime permanente para um tempo de solução suficientemente longo. Conforme discutido anteriormente, o modelo de escoamento em regime permanente é equivalente ao modelo de escoamento para um fluido incompressível, equação (95) retomada abaixo, e, para alguns casos, possui solução analítica.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A_y \beta_c k_y}{\mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right) \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_z \beta_c k_z}{\mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial z^\alpha} \right) \Delta z + q_{sc} = 0 \quad (95)$$

Suponha, inicialmente, que não há poço de produção/injeção no volume de controle considerado, portanto $q_{sc} = 0$, que há um fluxo, equivalente ao volume produzido previsto pelo modelo transiente, que deixa o volume de controle pela fronteira direita do seu domínio e que a fronteira esquerda está isolada e mantida a pressão de 6000 Psi. Para esse caso, tem-se as seguintes condições de contorno.

$$P(x)|_{x=0} = P_0 = 6000 \text{ Psi} \quad (140)$$

$$\left. \frac{dP(x)}{dx} \right|_{x=L} = c = \frac{q_L \mu B}{\beta_c A_x k_x} \quad (141)$$

Considerando-se o meio isotrópico e homogêneo, a equação do modelo permanente se reduz a equação (142).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) = 0 \quad (142)$$

Ou seja, a solução pode ser encontrada via integração simples da equação (142) e posterior aplicação da transformada de Laplace, conforme metodologia apresentada.

Integrando-se e aplicando a transformada de Laplace, obtém-se as equação (143) e (144).

$$\frac{\partial^x P}{\partial x^\alpha} = C_1 \quad (143)$$

$$s^\alpha P(s) - s^{\alpha-1} P(0) = \frac{C_1}{s} \quad (144)$$

Portanto, a solução no domínio de Laplace é de fácil obtenção, sendo dada pela equação (145).

$$P(s) = \frac{C_1}{s^{\alpha+1}} + P(0) \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha}$$

$$P(s) = \frac{C_1}{s^{\alpha+1}} + \frac{P(0)}{s} \quad (145)$$

A inversão da equação (145) pode ser feita, e retorna-se ao domínio do espaço. Dessa forma, a solução para o modelo em regime permanente é dada pela equação (146).

$$P(x) = \frac{C_1 x^\alpha}{\Gamma(\alpha + 1)} + P(0) \quad (146)$$

Derivando-se a solução encontrada, é possível aplicar a condição de contorno dada pela equação (147).

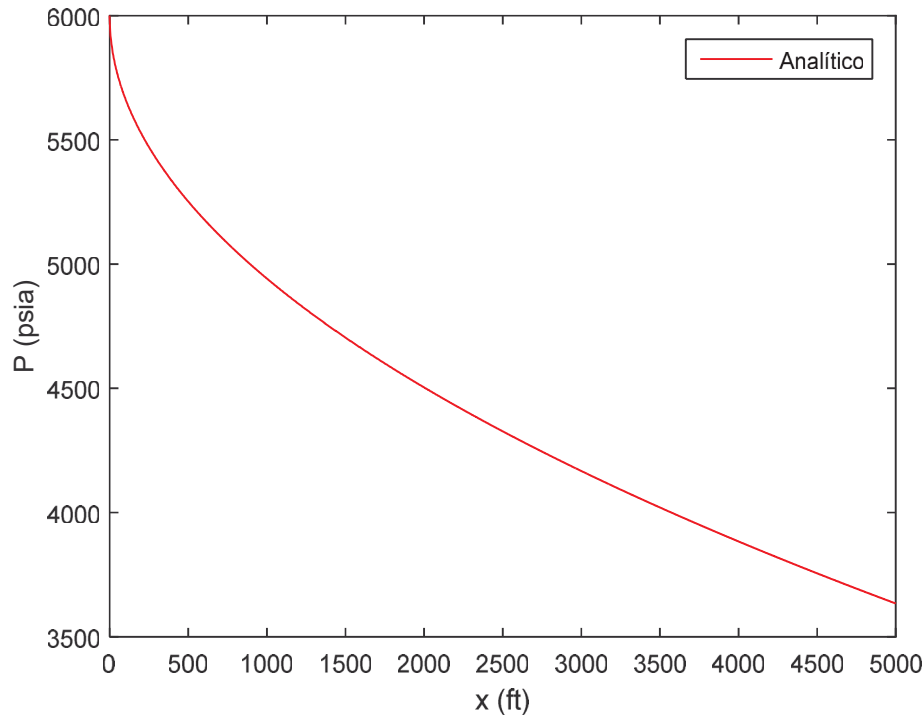
$$\frac{dP(x)}{dx} = \frac{\alpha C_1 x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha + 1)} \quad (147)$$

Por fim, a solução do modelo de escoamento em regime permanente, é dada pela equação (148).

$$P(x) = \left(\frac{q_L \cdot \mu}{\alpha \cdot \beta_C A_x k_x} \right) \cdot \left(\frac{x}{L} \right)^\alpha + P_0 \quad (148)$$

Utilizando-se os dados apresentados na tabela (03), obtém-se o perfil de pressão para o escoamento em regime permanente.

FIGURA 10 - SOLUÇÃO ANALÍTICA PARA O MODELO DE ESCOAMENTO EM REGIME PERMANENTE



Fonte: o autor (2023)

Como o intuito dessa etapa é validar a metodologia de discretização, aplica-se a metodologia de aproximação numérica apresentada anteriormente ao modelo de escoamento transiente, entretanto, considerando-se que não há poço de produção/injeção no volume de controle. Para esse caso, o modelo de escoamento transiente se reduz a equação (149).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x = \frac{V_b \phi c}{a_c B^0} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (149)$$

Aplicando-se as aproximações numéricas para as derivadas de ordem inteira e fracionária e rearranjando, obtém-se o seguinte algoritmo de solução numérica.

$$P_i^{n+1} = P_i^n + \Lambda_i^n \left[T_{x_{i+\frac{1}{2}}}^n \sigma \sum_{k=0}^i b_k [P_{i+1-k}^n - P_{i-k}^n] - T_{x_{i-\frac{1}{2}}}^n \sigma \sum_{k=0}^{i-1} b_k [P_{i-k}^n - P_{i-1-k}^n] + q_{isc}^n \right] \quad (150)$$

$$T_{x_{i\pm\frac{1}{2}}}^n = \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B \Delta x} \right)_{i\pm\frac{1}{2}}^n$$

$$\Lambda_i^n = \left(\frac{V_b \phi c}{a_c B^0 \Delta t} \right)_i^n$$

Para o modelo utilizado na validação, fisicamente, aplica-se as mesmas condições de contorno utilizadas para o modelo em regime permanente. No entanto, devido a natureza transiente do modelo, algumas alterações precisam ser feitas, conforme evidenciado pelas equações (151) e (152).

$$P(0, t) = P_0 = 6000 \text{ Psi} \quad (151)$$

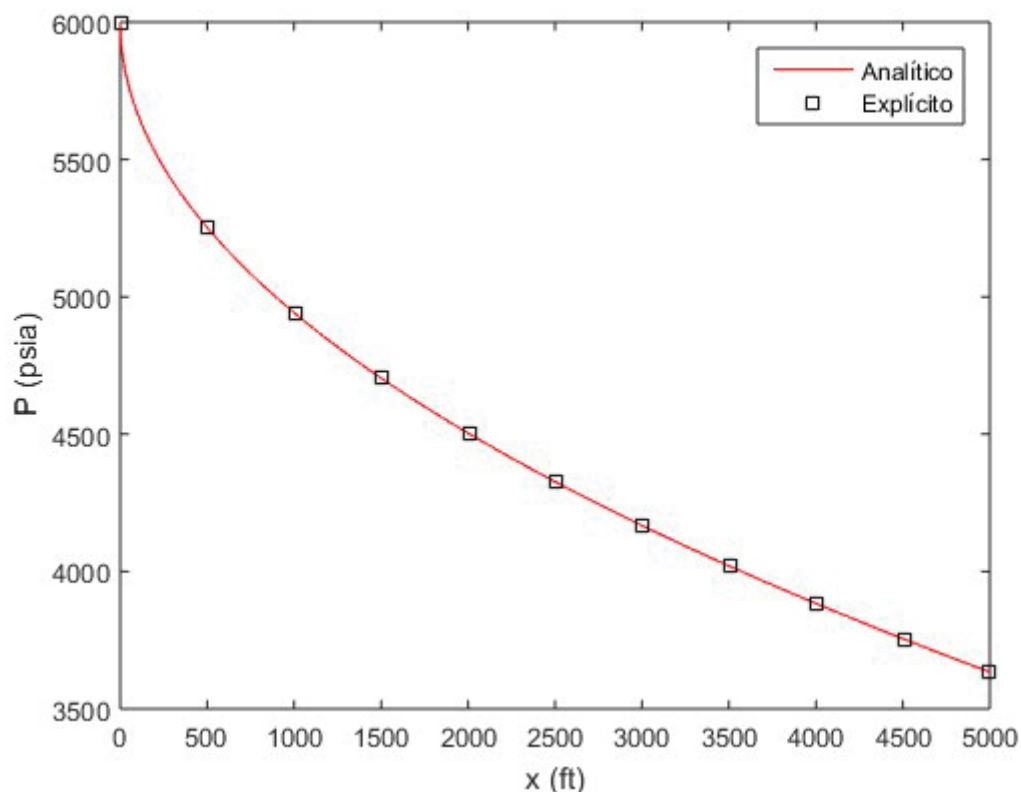
$$\left. \frac{\partial P(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = c \quad (152)$$

Além das condições de contorno, define-se que o reservatório encontra-se, inicialmente a uma pressão constante de 6000 psi, ou seja:

$$P(x, 0) = P_0 = 6000 \text{ Psi} \quad (153)$$

Os resultados obtidos, para a simulação utilizando os dados da tabela (03) e $\Delta t = 0,1 \text{ dias}$ e $\Delta x = 10 \text{ ft}$ para um tempo total suficientemente longo são apresentados no gráfico da figura (11). Por eles, percebe-se que, de fato, a aproximação numérica proposta é capaz de gerar resultados precisos e pode ser aplicada na solução dos problemas de escoamento em regime transiente.

FIGURA 11 - COMPARAÇÃO ENTRE SOLUÇÃO ANALÍTICA E SOLUÇÃO NUMÉRICA



Fonte: o autor (2023)

6.1.2. Análise de estabilidade unidimensional

Sabe-se de antemão que a discretização explícita pode levar a formulações de algoritmos instáveis para a obtenção da solução numérica. Ou seja, nem toda malha é adequada para a solução do problema. No geral, os métodos explícitos são condicionalmente estáveis e o conhecimento da região de estabilidade do algoritmo de solução é fundamental.

Para determinação do critério de estabilidade, aplica-se o método de análise de estabilidade de Von Neumann ao problema de escoamento unidimensional transiente. Entretanto, esse método possui algumas limitações e para que seja possível obter uma região de estabilidade, faz-se necessário fazer algumas simplificações no modelo.

Portanto, considera-se que as transmissibilidades são iguais em ambos os lados do volume de controle em análise, equação (154). Além disso, considera-se que não há poço de produção/injeção no reservatório.

$$T_{x_{i\pm\frac{1}{2}}}^n = \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B \Delta x} \right)_{i\pm\frac{1}{2}}^n = T_x^n \quad (154)$$

Admitindo-se que a condição inicial, equação (129), e as condições de contorno, equações (132) e (133), também se aplicam a esse problema obtém-se o seguinte algoritmo de solução.

Para $i = 1$

$$P_i^{n+1} = P_i^n + M[b_0(P_2 - P_1)] \quad (155)$$

Para $i = 2 \dots N_x - 1$

$$P_i^{n+1} = P_i^n + M \left[b_0(P_{i+1} - P_i) + \sum_{k=1}^{i-1} (b_k - b_{k-1})(P_{k+1} - P_k) \right] \quad (156)$$

Para $i = N_x$

$$P_i^{n+1} = P_i^n + M \left[\sum_{k=1}^{i-1} (b_k - b_{k-1})(P_{k+1} - P_k) \right] \quad (157)$$

$$M = \frac{T_x \sigma}{\Lambda} \quad (158)$$

$$\Lambda = \left(\frac{V_b \phi c}{a_c B^0 \Delta t} \right) \quad (159)$$

$$\sigma = \frac{1}{\Delta x^{\alpha-1} \Gamma(2-\alpha)} \quad (160)$$

$$b_k = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \quad (161)$$

Como visto, o método de Von Neumann considera que o erro entre a solução numérica e a solução analítica pode ser expresso através de uma série de Fourier, e que esse erro pode ser decomposto em uma componente temporal e outra espacial, que deverá satisfazer a equação discreta. Sendo assim, pode se escrever as equações (162) a (165), onde j é a unidade imaginária definida por $j = \sqrt{-1}$.

$$P_i^{n+1} = \varepsilon^{n+1} e^{j(\omega x)} \quad (162)$$

$$P_i^n = \varepsilon^n e^{j(\omega x)} \quad (163)$$

$$P_{i+1}^n = \varepsilon^n e^{j[\omega(x+\Delta x)]} \quad (164)$$

$$P_{i-1}^n = \varepsilon^n e^{j[\omega(x-\Delta x)]} \quad (165)$$

Substituindo-se as equações (162) a (165) para $i = 1$ no algoritmo de solução, equação (155). Tem-se:

$$\varepsilon^{n+1} e^{j(\omega x)} = \varepsilon^n e^{j(\omega x)} + M[\varepsilon^n e^{j[\omega(x+\Delta x)]} - \varepsilon^n e^{j(\omega x)}] \quad (166)$$

Como visto, esquemas estáveis de solução são capazes de controlar o crescimento do erro e, para que isso seja verdade, a relação entre o erro na iteração temporal seguinte ($n + 1$) deve ser menor ou igual ao erro na iteração temporal atual (n). Portanto, o módulo de amplificação do erro deve ser sempre menor ou igual a um, conforme equação (167) retomada aqui.

$$\mu = \frac{|\varepsilon^{n+1}|}{|\varepsilon^n|} \leq 1 \quad (76)$$

Dividindo-se a equação (166) por $\varepsilon^n e^{j(\omega x)}$, rearranjando e tomando-se o módulo, obtém-se:

$$\frac{|\varepsilon^{n+1}|}{|\varepsilon^n|} = |1 + M(e^{j(\omega \Delta x)} - 1)| \quad (167)$$

Recordando-se que o termo $e^{j(\omega \Delta x)}$ pode ser escrito através da fórmula de Euler, de acordo com a equação (168).

$$e^{\pm j\theta} = \cos(\theta) \pm j\sin(\theta) \quad (168)$$

Pode-se escrever a equação (167) através de uma função trigonométrica.

$$\frac{|\varepsilon^{n+1}|}{|\varepsilon^n|} = |1 + M[\cos(\omega \Delta x) + j\sin(\omega \Delta x) - 1]| \leq 1 \quad (169)$$

Através da análise da equação (169), e lembrando que $|z| = \sqrt{[Re(z)]^2 + [Im(z)]^2}$ conclui-se que o esquema numérico será estável no ponto $i = 1$ se:

$$[1 + M(\cos(\omega\Delta x) - 1)]^2 + [M\sin(\omega\Delta x)]^2 \leq 1 \quad (170)$$

Abrindo-se a equação (170) e rearranjando-a, chega-se a:

$$M^2[\cos(\omega\Delta x) - 1]^2 + 2M[\cos(\omega\Delta x) - 1] + M^2[1 - \cos^2(\omega\Delta x)] \leq 0 \quad (171)$$

Portanto, M deverá satisfazer a inequação (171) para que o esquema proposto seja numericamente estável no ponto $i = 1$. Lembrando que o parâmetro M contém a malha proposta para a discretização do modelo. Analisando a inequação (171), sabe-se que a função cosseno é limitada a $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, fazendo a análise nos limites da função cosseno, percebe-se que:

$$4M(M - 1) \leq 0 \quad (172)$$

Ou seja, sabendo-se que o parâmetro M é sempre positivo, a inequação dada em (172) é satisfeita para:

$$0 < M \leq 1 \quad (173)$$

Sendo assim, pode-se concluir que o esquema proposto será parcialmente estável em $i = 1$.

Esse resultado é importante, pois confirma o caráter parcialmente estável dos esquemas explícitos. Entretanto, não diz nada sobre a estabilidade nos pontos seguintes da malha. Dessa forma, repete-se o procedimento considerando $i = 2$. Aplicando-se as equações (162) a (165) na equação do esquema numérico para $i = 2$, equação (156), chega-se a:

$$\varepsilon^{n+1}e^{j(\omega x)} = \varepsilon^n e^{j(\omega x)} + M\{\varepsilon^n e^{j[\omega(x+\Delta x)]} - \varepsilon^n e^{j(\omega x)} + (b_1 - b_0)(\varepsilon^n e^{j(\omega x)} - \varepsilon^n e^{j[\omega(x-\Delta x)]})\} \quad (174)$$

Repetindo-se o procedimento exposto para $i = 1$, chega-se a expressão dada pela equação (175) para o módulo de amplificação do erro.

$$\frac{|\varepsilon^{n+1}|}{|\varepsilon^n|} = |1 + M[(\cos(\omega\Delta x) - 1)(2 - b_1) + j b_1 \sin(\omega\Delta x)]| \leq 1 \quad (175)$$

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, o esquema numérico será estável em $i = 2$ quando a inequação (176) for satisfeita.

$$M^2[\cos(\omega\Delta x) - 1]^2(2 - b_1)^2 + 2M[\cos(\omega\Delta x) - 1](2 - b_1) + b_1^2[1 - \cos^2(\omega\Delta x)] \leq 0 \quad (176)$$

Para os limites da função cosseno, temos a seguinte inequação:

$$4M[M(2 - b_1)^2 - (2 - b_1)] \leq 0 \quad (177)$$

Considerando-se que $M > 0$, a inequação (177) é satisfeita no intervalo:

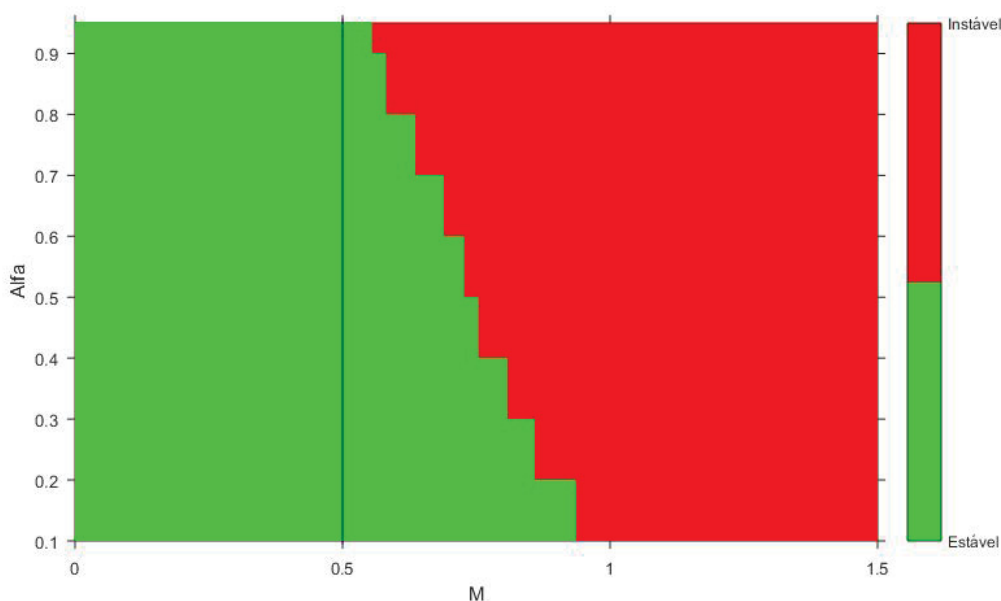
$$0 < M \leq \frac{1}{2 - b_1} \quad (178)$$

Esse resultado mostra que para o segundo bloco da malha, o esquema explícito também é parcialmente estável. Entretanto, uma análise mais aprofundada sobre o intervalo expresso pela inequação (178) nos revela que a estabilidade do esquema numérico é função da ordem da derivada – ver a definição do parâmetro b_k , equação (161). Esse resultado é surpreendente, pois não se encontra tal precedente na literatura.

Tendo em vista que o intervalo para o parâmetro M que garante a estabilidade do esquema explícito é função da ordem da derivada, isso torna a busca por um valor analítico para esse intervalo muito mais difícil. Parte-se então para a realização de experimentos numéricos que tem por objetivo determinar a região de estabilidade do esquema explícito.

Inicialmente, observou-se que o esquema explícito é instável, para todo α entre 0 e 1, com $M = 1,5$. Partindo-se desse ponto, para uma mesma malha espacial, refinou-se a malha temporal até que o esquema explícito passasse a ser estável. Os resultados obtidos para esse experimento numérico estão compilados no gráfico da figura (12). Nota-se, que, com certa segurança, para $M \leq 0,5$ o esquema explícito é estável independente da ordem da derivada.

FIGURA 12 - REGIÃO DE ESTABILIDADE PARA O ESQUEMA EXPLÍCITO UNIDIMENSIONAL TRANSIENTE



Fonte: o autor (2023)

6.1.3. Não linearidades

Até o momento, todos os resultados obtidos, partiram do pressuposto de que as transmissibilidades eram constantes. No entanto, é importante perceber que as transmissibilidades são calculadas nas fronteiras de cada bloco e que, para um modelo geral, é natural admitir-se que seus valores possam variar, especialmente devido a variação do valor da permeabilidade do meio. De todo modo, conhece-se a pressão e demais propriedades do reservatório no centro de cada bloco, sendo necessária a realização de algum tipo de interpolação para a determinação da transmissibilidade em sua fronteira.

(Ertekin et al., 2001) recomendam a utilização de médias harmônicas para descrever o quociente $\left(\frac{A_x k_x}{\Delta x}\right)$ na fronteira de cada bloco. Admitindo-se que a malha possa ser heterogênea e que a área de seção transversal entre cada bloco possa variar, a expressão para a média harmônica é dada pela equação (179).

$$\left(\frac{A_x k_x}{\Delta x}\right)_{i\pm\frac{1}{2}} = \frac{2A_{x_i}A_{x_{i\pm 1}}k_{x_i}k_{x_{i\pm 1}}}{A_{x_i}k_{x_i}\Delta x_{i\pm 1} - A_{x_{i\pm 1}}k_{x_{i\pm 1}}\Delta x_i} \quad (179)$$

Além disso, analisando-se o termo da transmissibilidade, percebe-se que esse é função da viscosidade do fluido (μ) e do fator de formação de volume da fase (B) que por sua vez, são funções da pressão do sistema. Essa característica torna a equação (149) uma equação não linear.

Equações não lineares exigem um cuidado maior em sua resolução, estando disponíveis diversas estratégias para sua solução. Cita-se aqui apenas duas estratégias diferentes.

1 - Substituição sucessiva: parte-se de um chute inicial para a pressão, determinam-se as propriedades e recalcula-se a pressão através da equação do modelo. Esse procedimento deve ser repetido até que algum critério de erro seja satisfeito;

2 - Utilização da pressão avaliada no passo de tempo anterior (n), para determinar as propriedades do sistema no passo de tempo atual ($n + 1$);

É fácil perceber que a segunda opção é a mais simples. Nesse trabalho, ambas foram testadas. Não havendo diferença significativa na precisão obtida. No entanto, a utilização da substituição sucessiva requer um esforço computacional maior, chegando a quadruplicar o tempo para obtenção da solução. Dessa forma, em todas as simulações, utilizou-se o segundo método de linearização do modelo.

Independente da forma de linearização, fato é que, tanto a viscosidade quanto o fator de formação de volume são funções da pressão do sistema e, portanto, também devem ser determinados na interface de cada bloco. De forma semelhante ao que foi feito para a permeabilidade, área e passo; algum método de interpolação deve ser aplicado para se determinar essas propriedades na interface do sistema.

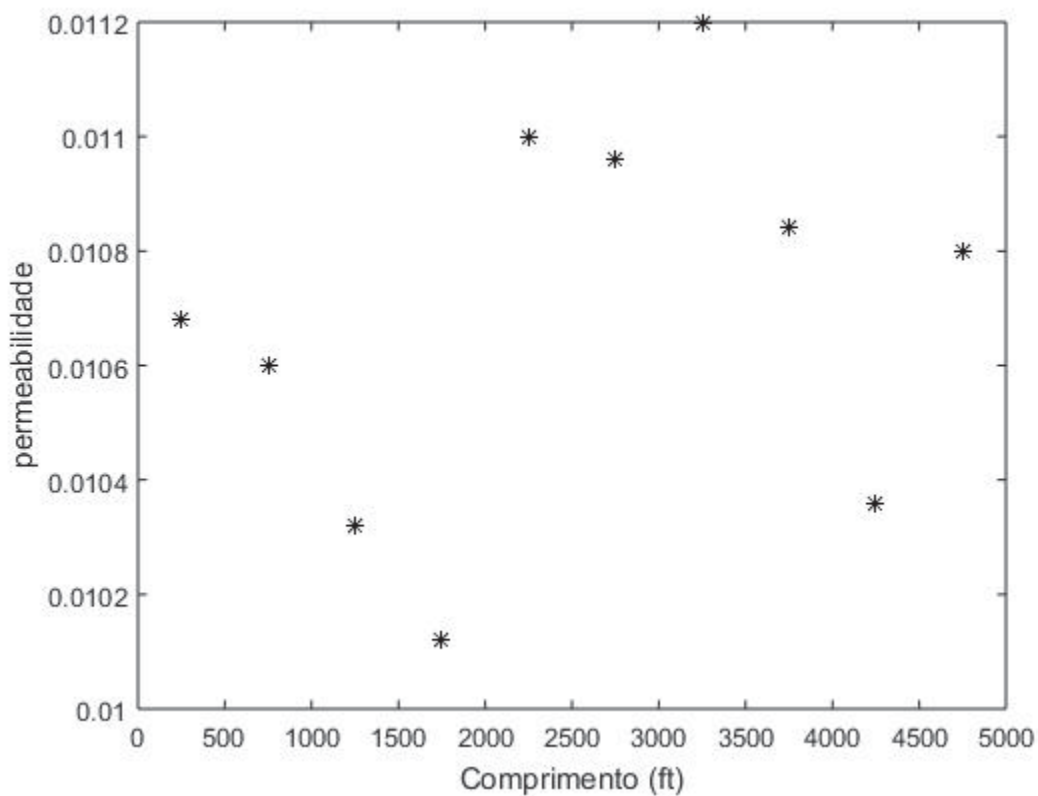
Diferentemente do que foi apresentado anteriormente, Ertekin et al. (2001) sugerem que sejam calculadas as propriedades no centro de cada bloco e, posteriormente, realize-se a média ponderada por um peso (Ω), conforme equações (180) e (181)

$$\mu_{i\pm\frac{1}{2}} = \Omega\mu(P_i) + (1 - \Omega)\mu(P_{i\pm 1}) \quad (180)$$

$$B_{i\pm\frac{1}{2}} = \Omega B(P_i) + (1 - \Omega)B(P_{i\pm 1}) \quad (181)$$

Para implementação das melhorias do modelo, necessita-se de novos dados. Para isso, recorreu-se aos dados disponíveis na literatura. (Ertekin et al. 2001) disponibilizaram dados para a permeabilidade e porosidade do reservatório em função da posição, conforme mostrado nas figuras (13) e (14), respectivamente.

FIGURA 13 - PERMEABILIDADE EXPERIMENTAL NA DIREÇÃO X

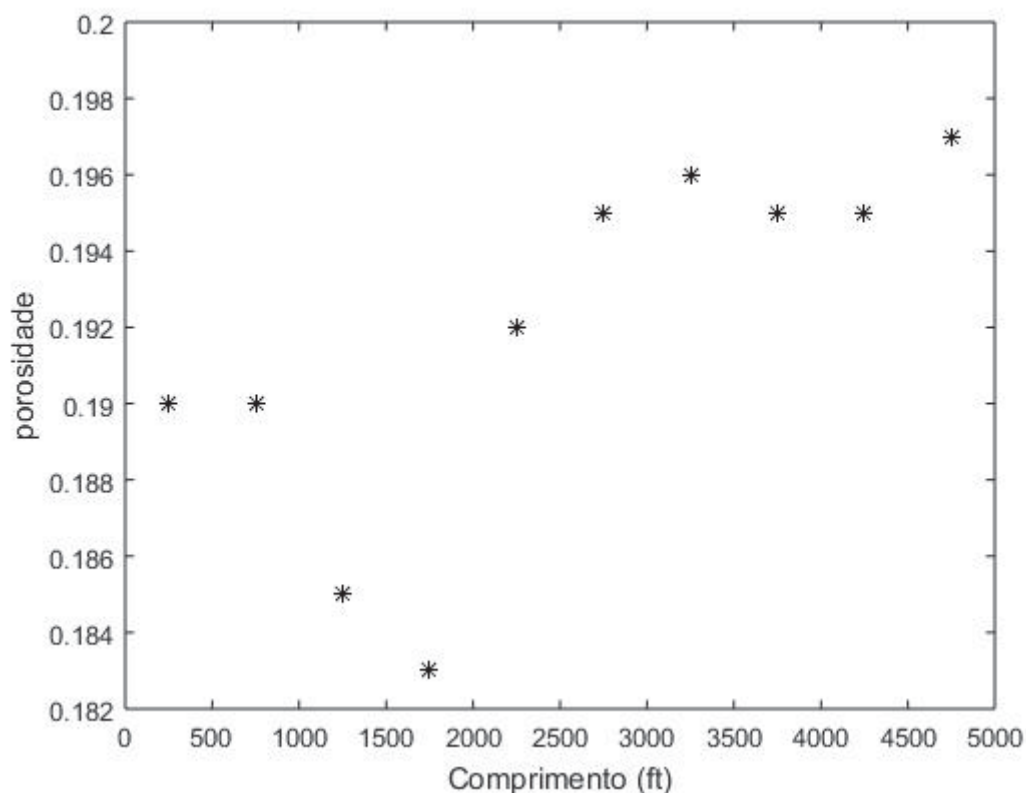


Fonte: adaptado de Ertekin et al. (2001)

A viscosidade do óleo é função da pressão e varia de acordo com a equação (182) fornecida. A compressibilidade da fase fluida, para uso na equação do fator de formação de volume - equação (100) - vale $c = 3,5 \times 10^{-6}$.

$$\mu = 6,24048 \times 10^{-8} P^2 - 5,3646 \times 10^{-4} P + 10,3239 \quad (182)$$

FIGURA 14 - POROSIDADE EXPERIMENTAL

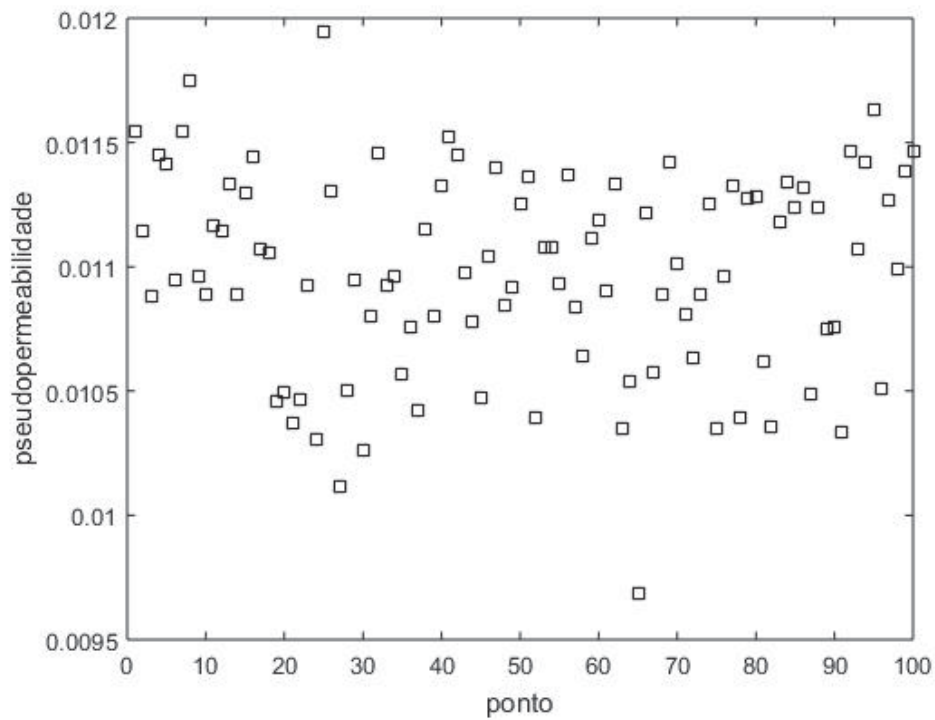


Fonte: adaptado de Ertekin et al. (2001)

Note que a porosidade e a permeabilidade do solo variam de forma aleatória em função da posição, além disso, durante as simulações foram utilizadas malhas mais refinadas, que continham mais do que 10 blocos, sendo necessário estimar valores intermediários para essas propriedades. Dessa forma, aplicou-se o procedimento descrito por (obembe ET AL.) que consiste em ajustar uma distribuição de probabilidade ao dados experimentais e, posteriormente, gerar os dados para os pontos intermediários da solução. Ambos os procedimentos foram realizados numericamente utilizando funções pré-programadas no *software MatLab*, versão R2015a.

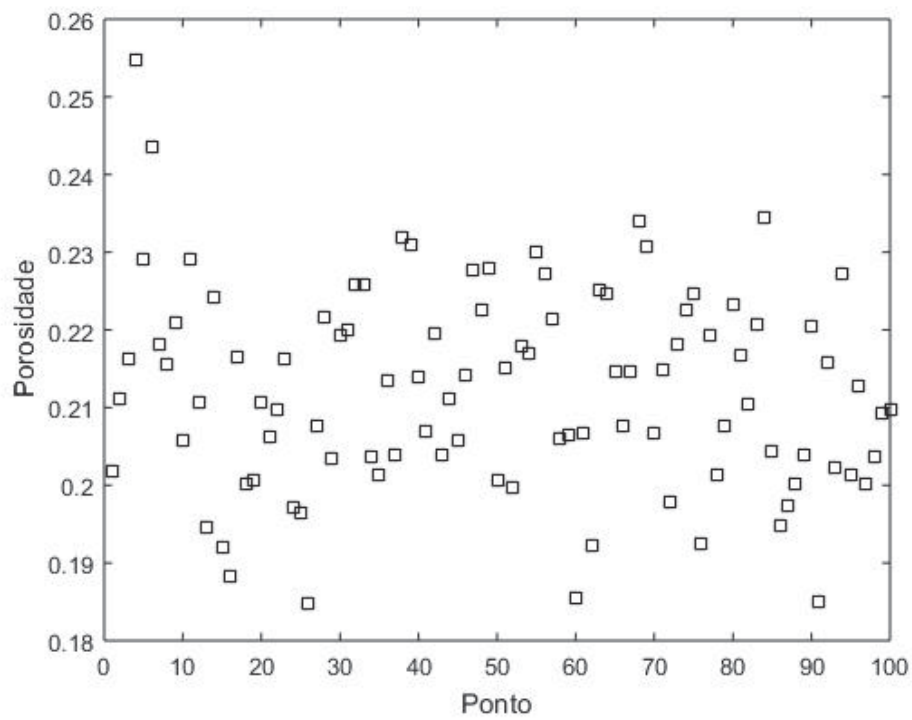
Os dados obtidos para a pseudopermeabilidade e para a porosidade do reservatório são mostrados nas figuras (15) e (16), respectivamente.

FIGURA 15 - PSEUDOPERMEABILIDADE GERADA PARA UMA MALHA COM 100 BLOCOS



Fonte: o autor (2023)

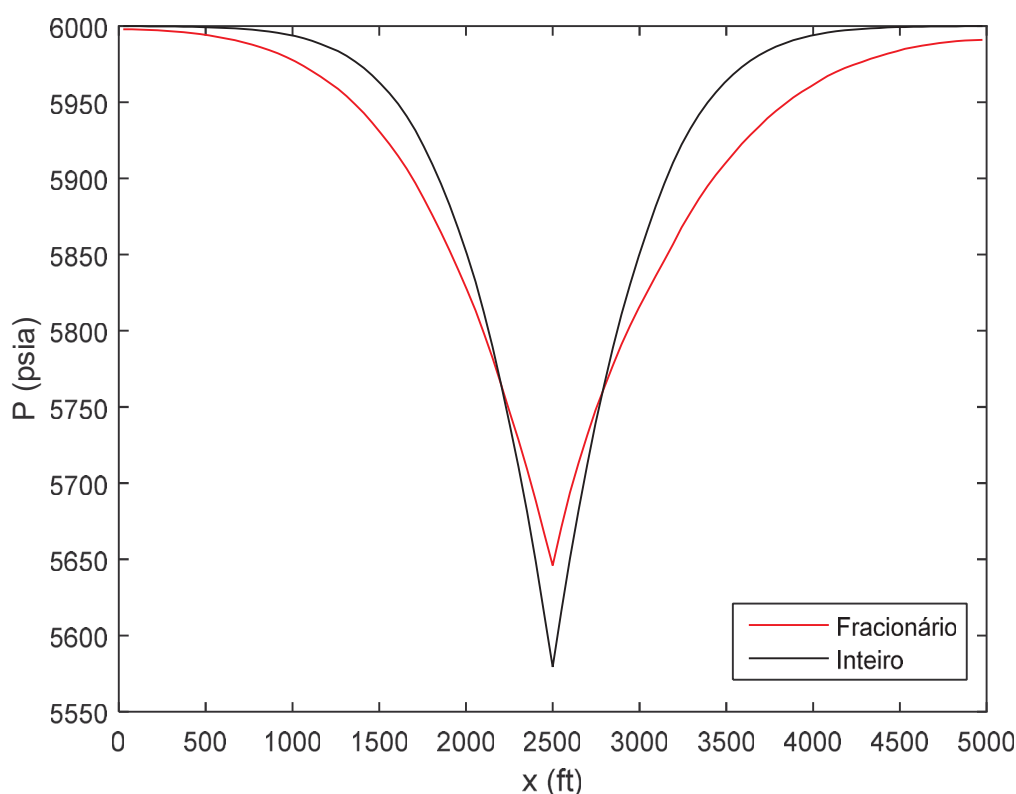
FIGURA 16 - POROSIDADE GERADA PARA UMA MALHA COM 100 BLOCOS



Fonte: o autor (2023)

Os resultados para a simulação utilizando $\Delta t = 0,001$ dias, $\Delta x = 50$ ft e $\alpha = 0,9$ estão apresentados no gráfico da figura (17). A critério de comparação, a figura (17) também apresenta os resultados simulados utilizando o modelo de ordem inteira. Analisando os resultados obtidos, nota-se que mesmo depois dos refinamentos, o comportamento qualitativo das curvas não se altera.

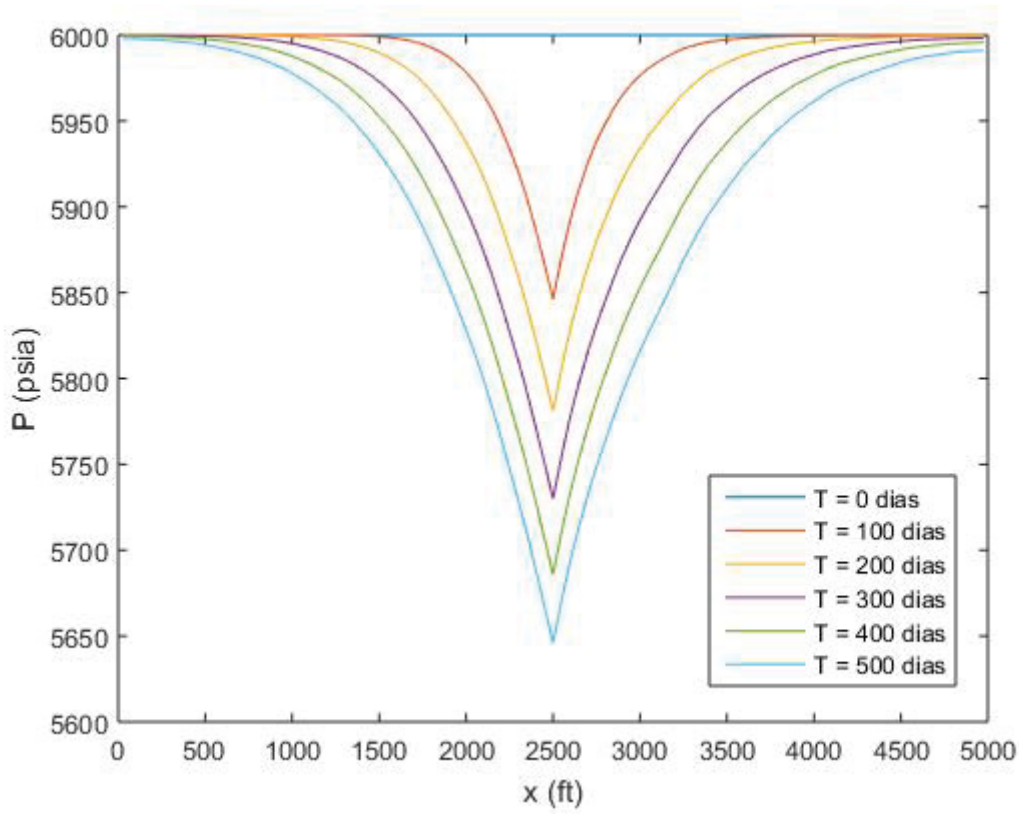
FIGURA 17 - RESULTADOS DA SIMULAÇÃO UNIDIMENSIONAL TRANSIENTE NÃO LINEAR PARA T = 500 DIAS



Fonte: o autor (2023)

Devido ao caráter transiente do modelo, é interessante observar a evolução da solução ao longo do tempo. Como os resultados apresentados no gráfico da figura (18) foram simulados utilizando um passo de tempo de 0,001 dia para um tempo final de 500 dias de operação, milhares de curvas que apresentam a evolução da solução ao longo do tempo foram geradas. O gráfico da figura (18) apresenta um resumo contendo 6 curvas. Para essas curvas, é nítido o avanço da diminuição da pressão ao redor da coordenada do poço de produção.

FIGURA 18 - AVANÇO DA SOLUÇÃO UNIDIMENSIONAL TRANSIENTE NÃO LINEAR COM O TEMPO



Fonte: o autor (2023)

6.2. BALANÇO GLOBAL DE MASSA

Por simplicidade, para obtenção da expressão para o balanço de massa global, parte-se da equação do modelo unidimensional transiente, equação (183).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{B \mu} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x + q_{sc} = V_b \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) \quad (183)$$

Aplicando-se as aproximações para as derivadas espaciais (conforme já demonstrado anteriormente) e rearranjando, obtém-se:

$$T_{x_{i+\frac{1}{2}}}^n \sigma \sum_{k=0}^i b_k [P_{i+1-k}^n - P_{i-k}^n] - T_{x_{i-\frac{1}{2}}}^n \sigma \sum_{k=0}^{i-1} b_k [P_{i-k}^n - P_{i-1-k}^n] + q_{isc}^n = V_b \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\phi}{B} \right) \quad (184)$$

Para o termo do lado direito da equação, uma pequena alteração será feita. Assim, a derivada temporal, na forma como se apresenta na equação (184), será aproximada por diferenças finitas, resultando na equação (185).

$$\begin{aligned}
 T_{x_{i+\frac{1}{2}}}^n \sigma \sum_{k=0}^i b_k [P_{i+1-k}^n - P_{i-k}^n] - T_{x_{i-\frac{1}{2}}}^n \sigma \sum_{k=0}^{i-1} b_k [P_{i-k}^n - P_{i-1-k}^n] + q_{isc}^n \\
 = \left(\frac{V_b}{a_c \Delta t} \right)_i \left[\left(\frac{\phi}{B} \right)_i^{n+1} - \left(\frac{\phi}{B} \right)_i^n \right]
 \end{aligned} \tag{185}$$

Perceba que a equação (185), deve ser escrita para todos os blocos da malha de discretização. Pode-se, portanto, somar a equação (185) aplicada a todos os blocos, resultando em:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n_x} T_{x_{i+\frac{1}{2}}}^n \sigma \sum_{k=0}^i b_k [P_{i+1-k}^n - P_{i-k}^n] - \sum_{i=1}^{n_x} T_{x_{i-\frac{1}{2}}}^n \sigma \sum_{k=0}^{i-1} b_k [P_{i-k}^n - P_{i-1-k}^n] + \sum_{i=1}^{n_x} q_{isc}^n \\
 = \frac{1}{a_c \Delta t} \sum_{i=1}^{n_x} (V_b)_i \left[\left(\frac{\phi}{B} \right)_i^{n+1} - \left(\frac{\phi}{B} \right)_i^n \right]
 \end{aligned} \tag{186}$$

Analisando-se a equação (186), percebe-se que o primeiro termo representa a vazão mássica que atravessa a fronteira $i + \frac{1}{2}$, enquanto que o segundo termo representa a vazão mássica que atravessa a fronteira $i - \frac{1}{2}$ de cada bloco. Para a modelagem considerando-se o reservatório isolado, ou seja, considerando-se que não há fluxo mássico através de suas fronteiras, obrigatoriamente, a massa que deixa um bloco deverá adentrar ao bloco subsequente. Levando-se em consideração a convenção de sinais (positivo para a massa que entra no bloco e negativo para a massa que deixa o bloco), todo e qualquer acúmulo de massa que houver no reservatório, deverá, portanto, ter sua origem no termo de produção/injeção. Dessa forma, obtém-se a equação (187).

$$\sum_{i=1}^{n_x} q_{isc}^n = \frac{1}{a_c \Delta t} \sum_{i=1}^{n_x} (V_b)_i \left[\left(\frac{\phi}{B} \right)_i^{n+1} - \left(\frac{\phi}{B} \right)_i^n \right] \tag{187}$$

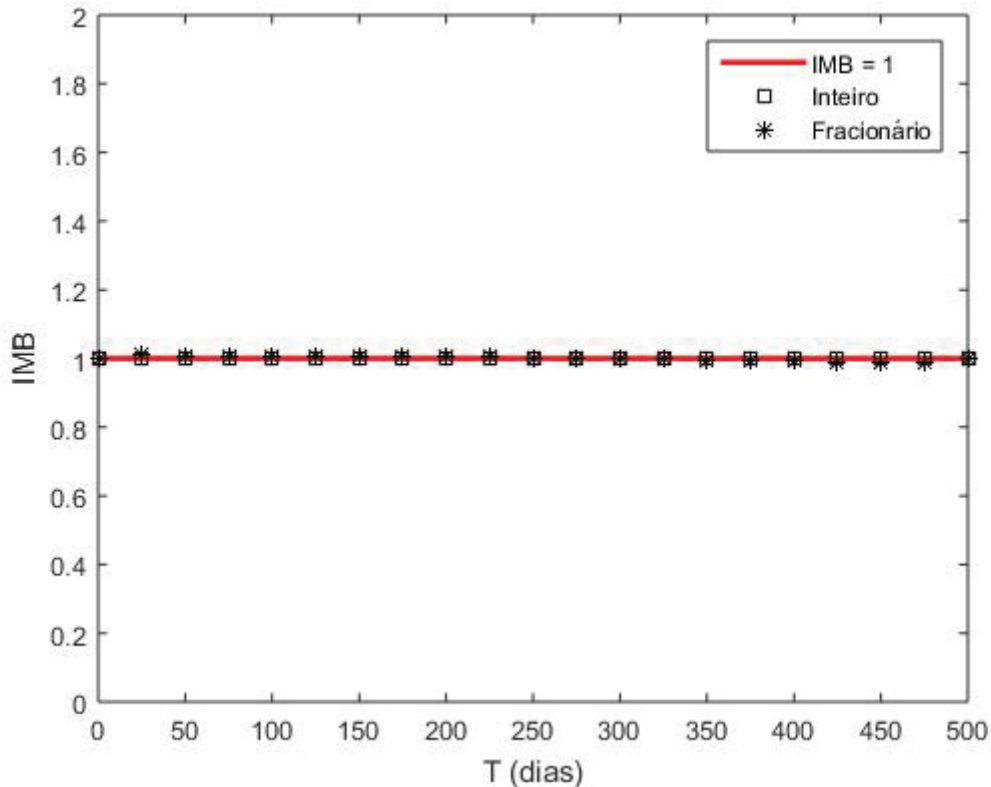
Fato é que a utilização das aproximações numéricas para as derivadas podem levar a introdução de erros numéricos ao modelo, o que torna o método das diferenças finitas não conservativo. Para checar e validar a solução obtida

define-se o índice de balanço de massa (I_{MB}), conforme equação (188). Para esse trabalho, considerou-se uma solução válida quando $0,99 \leq I_{MB} \leq 1,01$, ou seja, tolera-se um desvio máximo de $\pm 1\%$ no balanço de massa global.

$$I_{MB} = \frac{\sum_{i=1}^{n_x} (V_b)_i \left[\left(\frac{\phi}{B} \right)_i^{n+1} - \left(\frac{\phi}{B} \right)_i^n \right]}{a_c \Delta t \sum_{i=1}^{n_x} q_{isc}^n} \quad (188)$$

Para o problema unidimensional transiente não linear, esse balanço era realizado a cada incremento de tempo, e os resultados são apresentados no gráfico da figura (19). Observou-se que para toda a solução, a simulação permaneceu no intervalo de $\pm 1\%$ proposto. Outro ponto interessante, a solução explícita é tão precisa quanto for refinada a malha, no entanto, essa precisão vem a custo de esforço computacional, por vezes limitando seu uso.

FIGURA 19 - BALANÇO DE MASSA PARA O PROBLEMA UNIDIMENSIONAL TRANSIENTE EXPLÍCITO

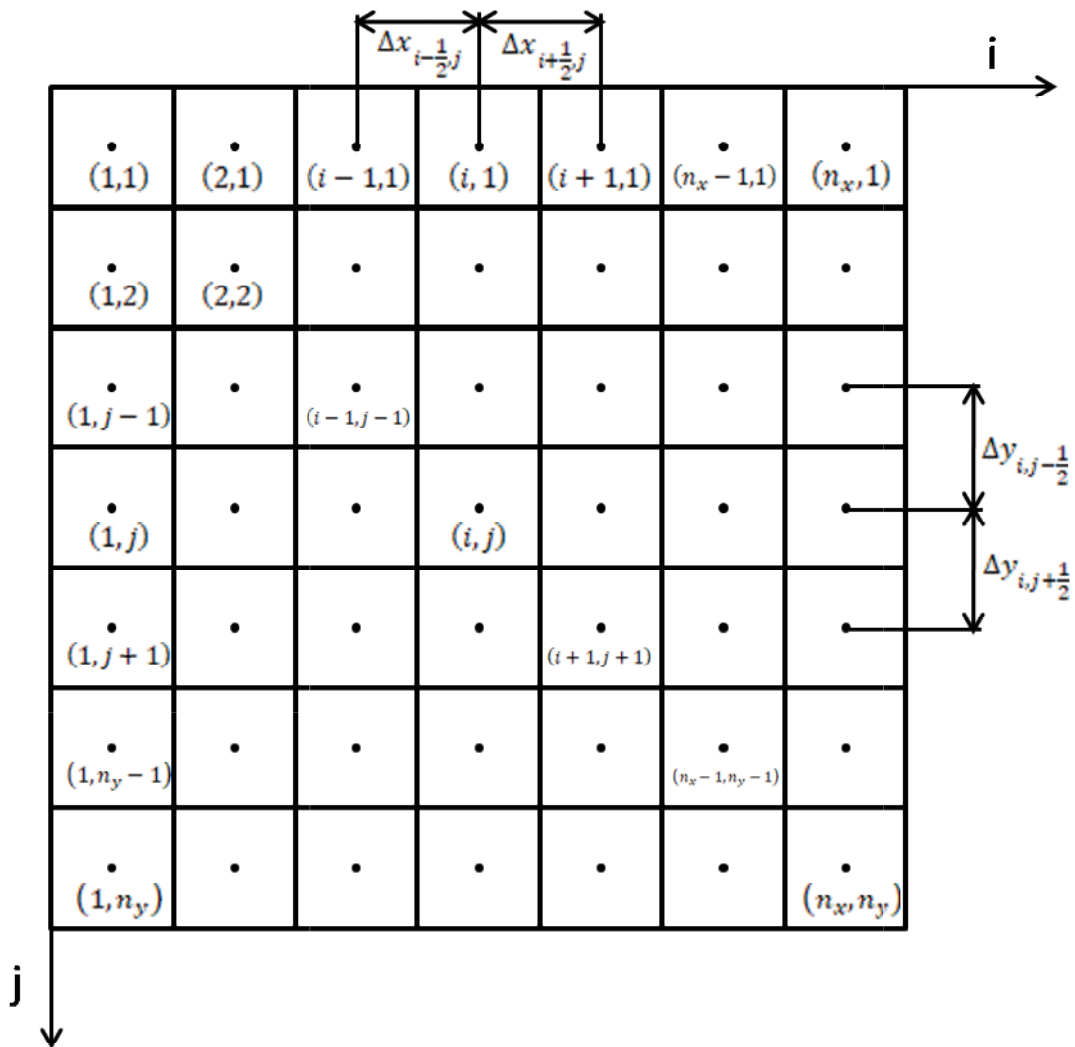


Fonte: o autor (2023)

6.3. MODELO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE

De forma semelhante ao que foi feito para o modelo unidimensional transiente, optou-se pela construção de uma malha de blocos centrados (*block-centered grid systems*). Para exemplificar sua construção, considera-se o problema de escoamento unidimensional, conforme ilustrado na figura (20).

FIGURA 20 - EXEMPLO DE MALHA BIDIMENSIONAL



Fonte: o autor (2023)

Nela, uma malha com $n_x \times n_y$ blocos foi sobreposta a um reservatório em coordenadas retangulares. Esses blocos possuem dimensões definidas Δx_i e Δy_i que, não necessariamente serão iguais, mas obrigatoriamente satisfazem as equações (190) e (191).

$$\sum_{i=1}^{n_x} \Delta x_i = L_x \quad (189)$$

$$\sum_{i=1}^{n_y} \Delta y_i = L_y \quad (190)$$

Partindo-se do modelo bidimensional transiente, equação (191). Com suas respectivas condições de contorno e condição inicial.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B^0} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A_y \beta_c k_y}{\mu B^0} \frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right) \Delta y + q_{sc} = \frac{V_b \phi c}{a_c B^0} \frac{\partial P}{\partial t} \quad (191)$$

Aplicando-se a aproximação numérica, via diferenças finitas, para a derivada espacial, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x = \frac{1}{\Delta x_i} \left[\left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \right] \Delta x_i \quad (192)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A_y \beta_c k_y}{\mu B} \frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right) \Delta y = \frac{1}{\Delta y_j} \left[\left(\frac{A_y \beta_c k_y}{\mu B} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \left(\frac{A_y \beta_c k_y}{\mu B} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right] \Delta y_j \quad (193)$$

Repetindo-se o procedimento para a derivada temporal

$$\frac{V_b \phi c}{B^0} \frac{\partial P}{\partial t} = \left(\frac{V_b \phi c}{a_c B^0} \right)_i \left(\frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t} \right) \quad (194)$$

Substituindo-se na equação (191), tem-se a equação do modelo escrita para um ponto “ i, j ” qualquer da malha. Para obtenção de um algoritmo explícito, adota-se o tempo n como sendo o tempo base da solução.

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B} \right)_{i+\frac{1}{2},j}^n \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right)_{i+\frac{1}{2},j}^n - \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B} \right)_{i-\frac{1}{2},j}^n \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right)_{i-\frac{1}{2},j}^n \right] \\ & + \left[\left(\frac{A_y \beta_c k_y}{\mu B} \right)_{i,j+\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right)_{i,j+\frac{1}{2}}^n - \left(\frac{A_y \beta_c k_y}{\mu B} \right)_{i,j-\frac{1}{2}}^n \left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right)_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right] + q_{i,j}^n = \left(\frac{V_b \phi c}{a_c B^0} \right)_{i,j}^n \left(\frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^n}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (195)$$

As derivadas de ordem fracionária são descritas via método L1, conforme equações (196) a (202).

$$\left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha}\right)_{i+\frac{1}{2},j}^n = \sigma_x \sum_{k=0}^i b_k [P_{i+1-k,j}^n - P_{i-k,j}^n] \quad (196)$$

$$\left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha}\right)_{i-\frac{1}{2},j}^n = \sigma_x \sum_{k=0}^{i-1} b_k [P_{i-k,j}^n - P_{i-1-k,j}^n] \quad (197)$$

$$\left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha}\right)_{i,j+\frac{1}{2}}^n = \sigma_y \sum_{k=0}^j b_k [P_{i,j+1-k}^n - P_{i,j-k}^n] \quad (198)$$

$$\left(\frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha}\right)_{i,j-\frac{1}{2}}^n = \sigma_y \sum_{k=0}^{j-1} b_k [P_{i,j-k}^n - P_{i,j-1-k}^n] \quad (199)$$

$$\sigma_x = \frac{1}{\Delta x^{\alpha-1} \Gamma(2-\alpha)} \quad (200)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{\Delta y^{\alpha-1} \Gamma(2-\alpha)} \quad (201)$$

$$b_k = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \quad (202)$$

De forma análoga ao que foi feito para o problema unidimensional transiente, define-se as transmissibilidades do reservatório na direção de escoamento.

$$T_{x_{i\pm\frac{1}{2},j}}^n = \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B \Delta x}\right)_{i\pm\frac{1}{2},j}^n \quad (203)$$

$$T_{y_{i,j\pm\frac{1}{2}}}^n = \left(\frac{A_y \beta_c k_y}{\mu B \Delta y}\right)_{i,j\pm\frac{1}{2}}^n \quad (204)$$

Substituindo-se no modelo, obtém-se o esquema explícito de solução do modelo bidimensional transiente, equação (205).

$$\begin{aligned}
P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n + \Lambda_{i,j}^n & \left[T_{x_{i+\frac{1}{2},j}}^n \sigma_x \sum_{k=0}^i b_k [P_{i+1-k,j}^n - P_{i-k,j}^n] \right. \\
& - T_{x_{i-\frac{1}{2},j}}^n \sigma_x \sum_{k=0}^{i-1} b_k [P_{i-k,j}^n - P_{i-1-k,j}^n] \\
& + T_{y_{i,j+\frac{1}{2}}}^n \sigma_y \sum_{k=0}^j b_k [P_{i,j+1-k}^n - P_{i,j-k}^n] \\
& \left. - T_{y_{i,j-\frac{1}{2}}}^n \sigma_y \sum_{k=0}^{j-1} b_k [P_{i,j-k}^n - P_{i,j-1-k}^n] + q_{isc}^n \right] \quad (205)
\end{aligned}$$

$$\Lambda_{i,j}^n = \left(\frac{V_b \phi c}{a_c B^0 \Delta t} \right)_{i,j}^n$$

Por fim, admite-se que a profundidade do reservatório é pequena e que o gradiente de pressão entre topo e fundo do reservatório é desprezível. Dessa forma, define-se a condição inicial de pressão no reservatório como sendo constante e igual a uma determinada pressão P_0 , conforme equação (206).

$$P(x, y, 0) = P_0 \quad (206)$$

Para as condições de contorno, considera-se o reservatório localizado entre rochas impermeáveis e, por consequência, o fluxo através de suas fronteiras como zero.

$$\left. \frac{\partial P(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad (207)$$

$$\left. \frac{\partial P(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0 \quad (208)$$

$$\left. \frac{\partial P(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (209)$$

$$\left. \frac{\partial P(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=L} = 0 \quad (210)$$

Para simulação do modelo bidimensional, discretiza-se também as condições de contorno, sendo válidas as relações:

$$\frac{P_{1,j} - P_{0,j}}{\Delta x} = 0 \quad \therefore P_{1,j} = P_{0,j} \quad (211)$$

$$\frac{P_{n_x+1} - P_{n_x}}{\Delta x} = 0 \quad \therefore P_{n_x+1,j} = P_{n_x,j} \quad (212)$$

$$\frac{P_{i,1} - P_{i,0}}{\Delta y} = 0 \quad \therefore P_{i,1} = P_{i,0} \quad (213)$$

$$\frac{P_{i,n_y+1} - P_{i,n_y}}{\Delta y} = 0 \quad \therefore P_{i,n_y+1} = P_{i,n_y} \quad (214)$$

Da mesma forma como ocorreu para o modelo unidimensional, com a discretização das condições de contorno fecha-se o algoritmo para obtenção da solução numérica do problema.

Para a simulação foram utilizados dados para um reservatório, de comprimento $L_x = 5000ft$ e $L_y = 5000ft$, disponíveis na literatura (Ertekin et al., 2001). Esse reservatório possui um poço com coordenadas $x_p = 4000ft$ e $y_p = 4000ft$, produzindo uma vazão constante de 150 barris de petróleo por dia. As demais variáveis utilizadas na simulação estão apresentadas na tabela (05). Considera-se a pressão inicial no reservatório igual a 7750 psi, com ambas as extremidades isoladas e realiza-se a simulação para 500 dias de produção com $\Delta t = 0,1 dias$, $\Delta x = 500 ft$, e $\Delta y = 500 ft$. Os resultados encontrados podem ser vistos na sequência de gráficos mostrados nas figuras (21) a (25).

Para essa simulação preliminar, o resultado mais importante percebido é que o intervalo de estabilidade, obtido na seção 6.1.2, não se sustenta para o modelo bidimensional transiente. Esse resultado é surpreendente e difere do que foi visto na literatura, onde o intervalo obtido para o modelo unidimensional é expandido para a modelagem bidimensional.

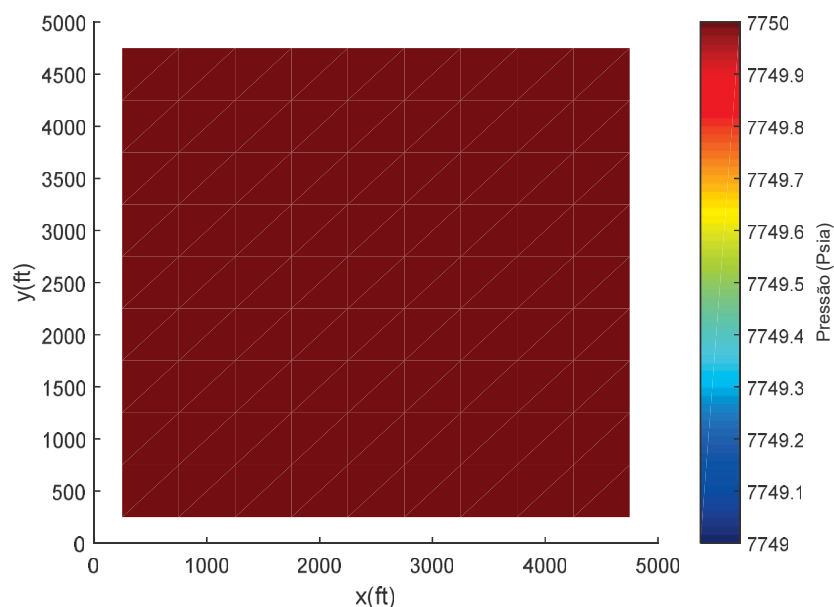
TABELA 5 - VARIÁVEIS UTILIZADAS NA SIMULAÇÃO

Variável	Descrição	Variável	Descrição
$\Delta z = 75 \text{ ft}$	Altura do reservatório	$c = 9,0 \times 10^{-6} \text{ psi}^{-1}$	Compressibilidade
$B = 1$	Fator de formação de volume	$k_x = 0,015 \text{ darcy}^\alpha$	Pseudopermeabilidade na direção x
$\phi = 0,18$	Porosidade	$k_y = 0,015 \text{ darcy}^\alpha$	Pseudopermeabilidade na direção y
$x_p = y_p = 4000 \text{ ft}$	Coordenadas do poço de produção	$\mu = 10 \text{ cP}$	Viscosidade

Fonte: o autor (2023)

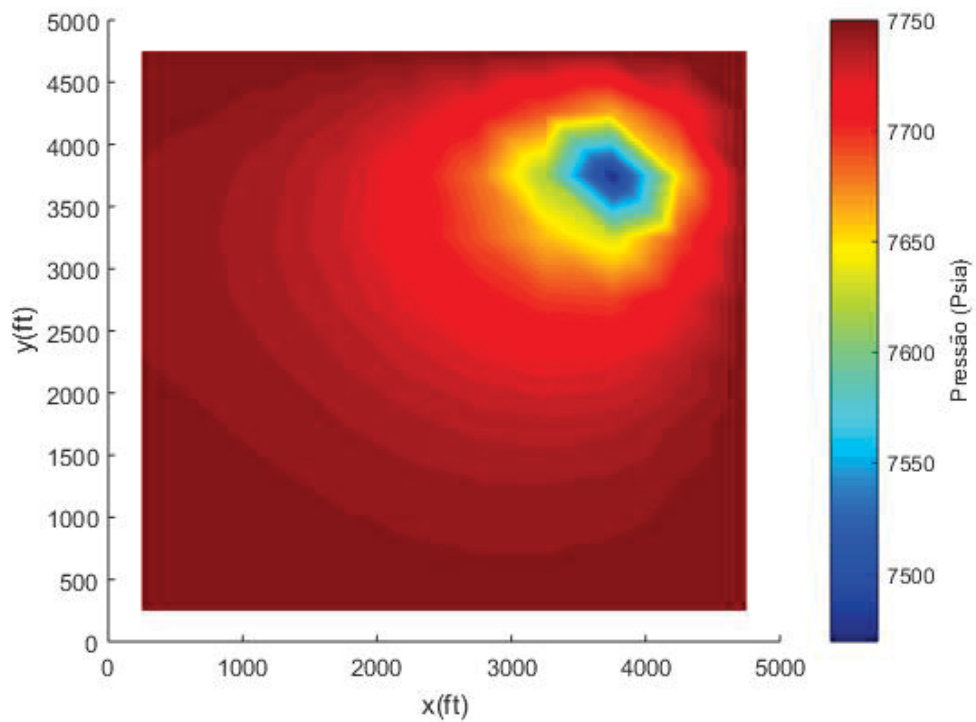
Os resultados da simulação, para uma ordem de derivada igual a 0,9 podem ser vistos nos gráficos das Figuras (21) a (25). De forma semelhante ao observado para o problema unidimensional transiente, percebe-se uma grande depressão no ponto onde está localizado o poço. Esse efeito se espalha ao longo do tempo, sendo sentido por todo o reservatório.

FIGURA 21 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE COM POÇO DE PRODUÇÃO PARA T = 0 DIAS



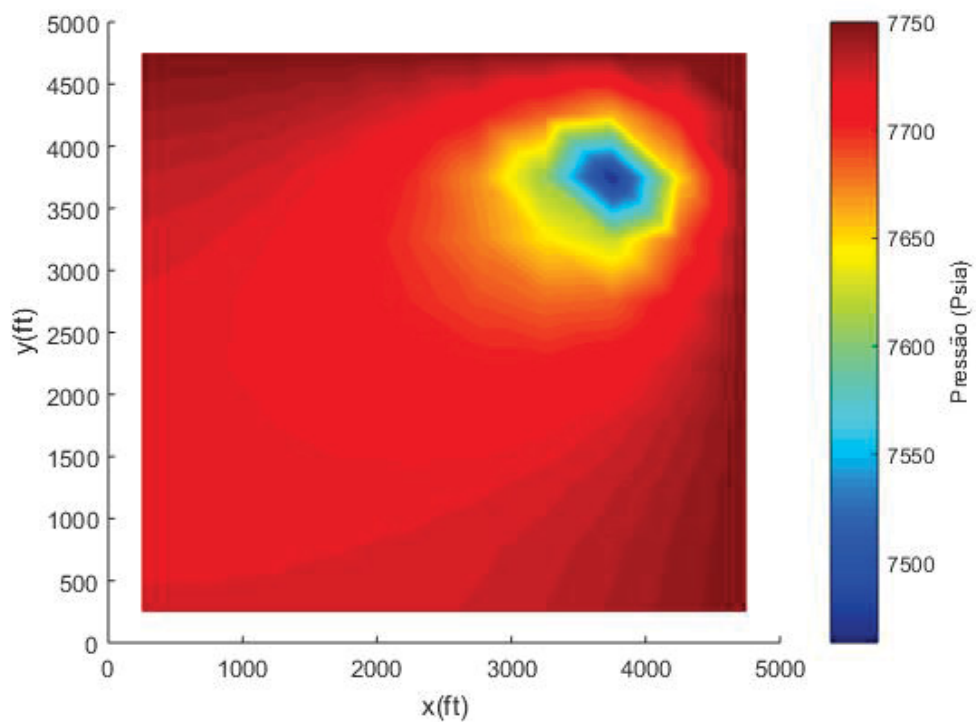
Fonte: o autor (2023)

FIGURA 22 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE COM POÇO DE PRODUÇÃO
PARA T = 10 DIAS



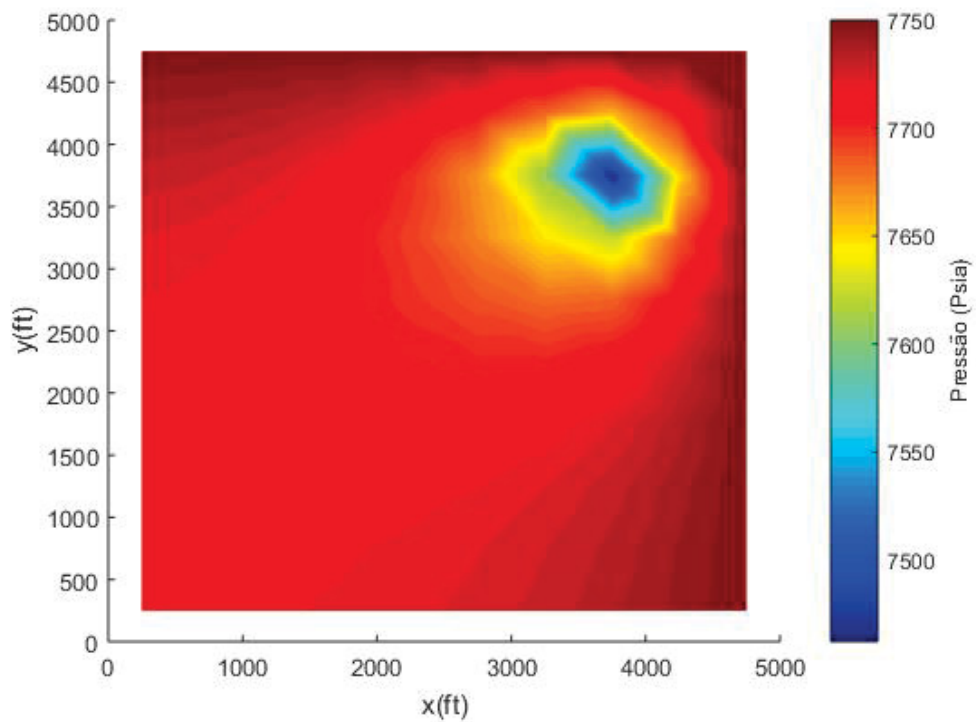
Fonte: o autor (2023)

FIGURA 23 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE COM POÇO DE PRODUÇÃO
PARA T = 50 DIAS



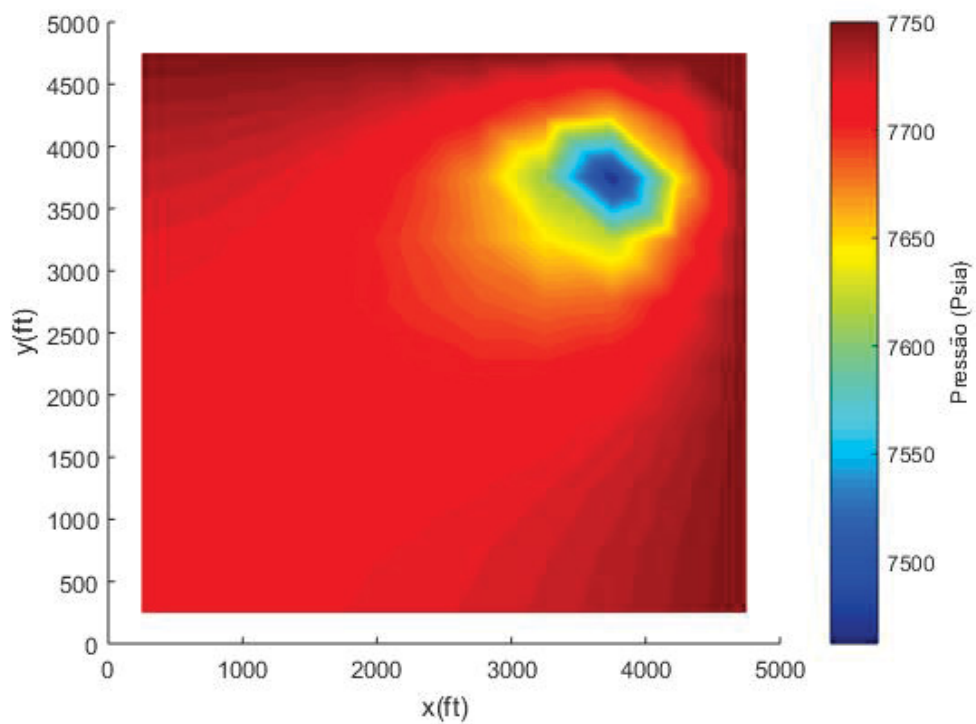
Fonte: o autor (2023)

FIGURA 24 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE COM POÇO DE PRODUÇÃO
PARA T = 100 DIAS



Fonte: o autor (2023)

FIGURA 25 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE COM POÇO DE PRODUÇÃO
PARA T = 500 DIAS



Fonte: o autor (2023)

6.3.1. Análise de estabilidade bidimensional

Como citado, a região de estabilidade delimitada para o modelo unidimensional transiente não se aplica ao modelo bidimensional, portanto, faz-se necessária a obtenção de uma nova região de estabilidade para utilização no modelo bidimensional transiente.

De forma análoga ao que foi feito anteriormente, utiliza-se o método de Von Neumann para determinação da região de estabilidade para o esquema explícito bidimensional. Inicialmente, considera-se que as transmissibilidades são iguais em todas as direções do volume de controle em análise, equação (215). Além disso, considera-se que não há poço de produção/injeção no reservatório.

$$T_{x_{i\pm\frac{1}{2}}}^n = T_{y_{i,j\pm\frac{1}{2}}}^n = T_{xy}^n \quad (215)$$

Admitindo-se que a condição inicial, equação (206), e as condições de contorno, equações (211) a (214), também se apliquem a esse problema obtém-se o seguinte algoritmo de solução.

Para $i = 1, j = 1$

$$P_{1,1}^{n+1} = P_{1,1}^n + M\{b_0(P_{2,1} - P_{1,1}) + b_0(P_{1,2} - P_{1,1})\} \quad (216)$$

Para $i = 2 \dots N_x - 1, j = 1$

$$P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n + M\left\{b_0(P_{i+1,j} - P_{i,j}) + \sum_{k=1}^{i-1} (b_k - b_{k-1})(P_{k+1,j}^n - P_{k,j}^n) + b_0(P_{i,j+1} - P_{i,j})\right\} \quad (217)$$

Para $i = 1, j = 2 \dots N_y - 1$

$$P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n + M\left\{b_0(P_{i+1,j} - P_{i,j}) + b_0(P_{i,j+1} - P_{i,j}) + \sum_{k=1}^{j-1} (b_k - b_{k-1})(P_{i,k+1}^n - P_{i,k}^n)\right\} \quad (218)$$

Para $i = 2 \dots N_x - 1, j = 2 \dots N_y - 1$

$$P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n + M \left\{ b_0(P_{i+1,j} - P_{i,j}) + \sum_{k=1}^{i-1} (b_k - b_{k-1})(P_{k+1,j}^n - P_{k,j}^n) + b_0(P_{i,j+1} - P_{i,j}) + \sum_{k=1}^{j-1} (b_k - b_{k-1})(P_{i,k+1}^n - P_{i,k}^n) \right\} \quad (219)$$

Para $i = N_x, j = N_y$

$$P_{i,j}^{n+1} = P_{i,j}^n + M \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} (b_k - b_{k-1})(P_{k+1,j}^n - P_{k,j}^n) + \sum_{k=1}^{j-1} (b_k - b_{k-1})(P_{i,k+1}^n - P_{i,k}^n) \right\} \quad (220)$$

$$M = \frac{T_{xy}^n \sigma_{xy}}{\Lambda_{i,j}^n}$$

$$\Lambda_{i,j}^n = \left(\frac{V_b \phi c}{a_c B^0 \Delta t} \right)_{i,j}^n$$

Com base nos resultados obtidos para o esquema unidimensional, optou-se por testar diretamente o segundo ponto da malha, sendo assim considera-se o ponto $i = 2, j = 2$, conforme equação (221)

$$P_{2,2}^{n+1} = P_{2,2}^n + M \{ b_0(P_{3,2}^n - P_{2,2}^n) + (b_1 - b_0)(P_{2,2}^n - P_{1,2}^n) + b_0(P_{2,3}^n - P_{2,2}^n) + (b_1 - b_0)(P_{2,2}^n - P_{2,1}^n) \} \quad (221)$$

Para esse ponto, de acordo com o que foi apresentado para o método de Von Neumann, pode se escrever as relações dadas pelas equações (222) a (227)

$$P_{2,2}^n = \varepsilon^n e^{j[\omega_1 x + \omega_2 y]} \quad (222)$$

$$P_{2,2}^{n+1} = \varepsilon^n e^{j[\omega_1 x + \omega_2 y]} \quad (223)$$

$$P_{1,2}^n = \varepsilon^n e^{j[\omega_1(x-\Delta x) + \omega_2 y]} \quad (224)$$

$$P_{2,1}^n = \varepsilon^n e^{j[\omega_1 x + \omega_2(y-\Delta y)]} \quad (225)$$

$$P_{3,2}^n = \varepsilon^n e^{j[\omega_1(x+\Delta x) + \omega_2 y]} \quad (226)$$

$$P_{2,3}^n = \varepsilon^n e^{j[\omega_1 x + \omega_2 (y + \Delta y)]} \quad (227)$$

Substituindo-se na equação (221), tem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{n+1} e^{j[\omega_1 x + \omega_2 y]} &= \varepsilon^n e^{j[\omega_1 x + \omega_2 y]} \\ &+ M \{ (\varepsilon^n e^{j[\omega_1 (x + \Delta x) + \omega_2 y]} - \varepsilon^n e^{j[\omega_1 x + \omega_2 y]}) \\ &+ (b_{1-1}) (\varepsilon^n e^{j[\omega_1 x + \omega_2 y]} - \varepsilon^n e^{j[\omega_1 (x - \Delta x) + \omega_2 y]}) \\ &+ (\varepsilon^n e^{j[\omega_1 x + \omega_2 (y + \Delta y)]} - \varepsilon^n e^{j[\omega_1 x + \omega_2 y]}) \\ &+ (b_{1-1}) (\varepsilon^n e^{j[\omega_1 x + \omega_2 y]} - \varepsilon^n e^{j[\omega_1 x + \omega_2 (y - \Delta y)]}) \} \end{aligned} \quad (228)$$

Dividindo-se a equação (228) por $\varepsilon^n e^{j[\omega_1 x + \omega_2 y]}$ e rearranjando, obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^n} &= 1 + M \{ (e^{j(\omega_1 \Delta x)} - 1) + (b_1 - 1)(1 - e^{-j\omega_1 \Delta x}) + (e^{j\omega_2 \Delta y} - 1) \\ &+ (b_1 - 1)(1 - e^{-j\omega_2 \Delta y}) \} \end{aligned} \quad (229)$$

Substituindo-se a fórmula de Euler, equação (168) e tomando-se o módulo, obtém-se a definição do fator de amplificação do erro, dada pela equação (230).

$$\begin{aligned} \frac{|\varepsilon^{n+1}|}{|\varepsilon^n|} &= |1 + M \{ 2(b_1 - 2) - (b_1 - 2)\cos(\omega_1 \Delta x) - (b_1 - 2)\cos(\omega_2 \Delta y) \\ &+ j b_1 [\sin(\omega_1 \Delta x) + \sin(\omega_2 \Delta y)] \}| \leq 1 \end{aligned} \quad (230)$$

Analisando-se os extremos das funções trigonométricas, chega-se a inequação (231).

$$|1 + 4M(b_1 - 2) - j2Mb_1| \leq 1 \quad (231)$$

Sabendo-se que o módulo de um número complexo é dado pela equação (232).

$$|z| = \sqrt{[Re(z)]^2 + [Im(z)]^2} \quad (232)$$

Obtém-se a inequação (233) para determinação do intervalo de estabilidade para o esquema bidimensional explícito.

$$4M\{2(b_1 - 2) + M[4(b_1 - 2)^2 + b_1^2]\} \leq 0 \quad (233)$$

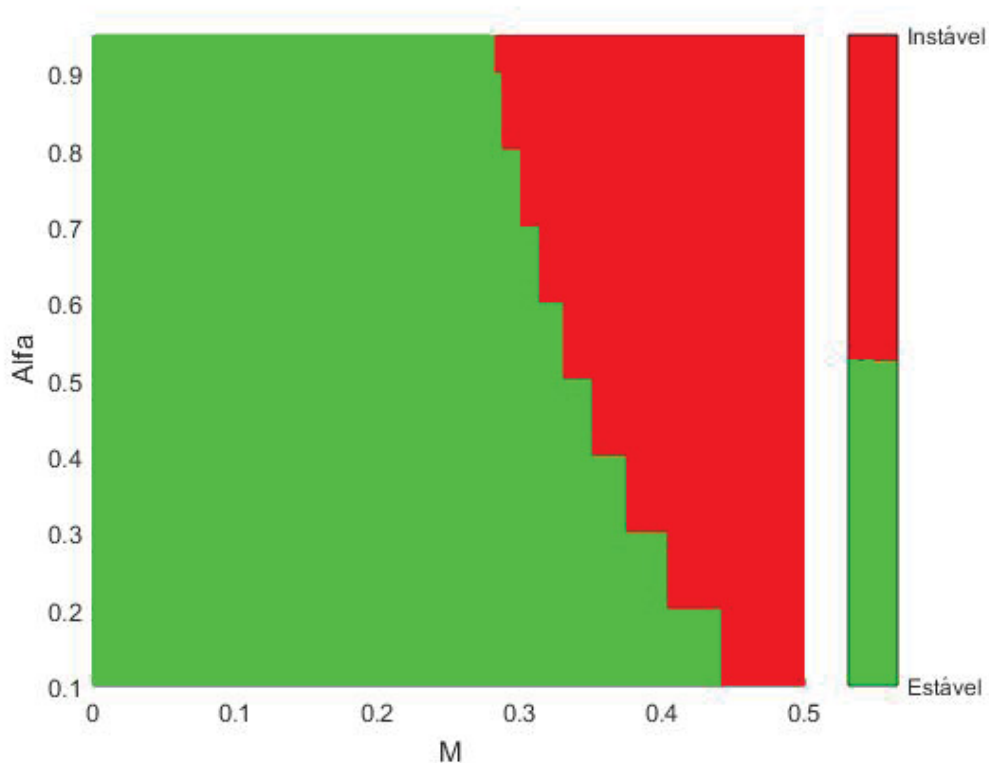
A inequação (233) é satisfeita no intervalo dado pela expressão (234).

$$0 < M \leq \frac{2(2 - b_1)}{[4(b_1 - 2)^2 + b_1^2]} \quad (234)$$

Da mesma forma que para o esquema explícito de solução do modelo unidimensional transiente, o segundo bloco da malha para o esquema explícito bidimensional transiente também é parcialmente estável. Uma análise mais cuidadosa sobre o intervalo expresso pela inequação (234) nos revela que a estabilidade do esquema numérico é função da ordem da derivada, pois b_k também o é. Logo, verifica-se que para $\alpha = 0,9$, o parâmetro M deverá estar contido no intervalo $0 < M \leq 0,2592$ para que o esquema numérico se mantenha estável.

Dada a impossibilidade de se obter um intervalo fixo que contemple todas as ordens de derivadas entre 0 e 1, parte-se para a realização de experimentos numéricos para a determinação da região de estabilidade do esquema explícito, figura (26).

FIGURA 26 - REGIÃO DE ESTABILIDADE PARA O ESQUEMA EXPLÍCITO DE SOLUÇÃO DO MODELO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE



Fonte: o autor (2023)

O procedimento para a região de estabilidade do esquema explícito de solução do modelo bidimensional transiente é idêntico ao procedimento realizado para obtenção da região de estabilidade do esquema de solução unidimensional transiente. Inicialmente, observou-se que o esquema proposto é instável, para todo alfa entre 0 e 1, com $M = 0,5$. Partindo-se desse ponto, para uma mesma malha espacial, refinou-se a malha temporal até que o esquema explícito passasse a ser estável. Os resultados obtidos para esse experimento numérico estão compilados no gráfico da figura (26). Com certa segurança, para $M \leq 0,25$ o esquema explícito é estável independente da ordem da derivada.

6.3.2. Não linearidades

Da mesma forma com que foi feito para o modelo unidimensional transiente, até aqui, todos os resultados obtidos partiram do pressuposto de que as transmissibilidades eram constantes. Diferentemente do que foi feito anteriormente, para o modelo bidimensional, necessita-se considerar a variação das transmissibilidades também na direção y. Para isso, tomam-se as médias harmônicas – como sugeridas por Ertekin et al., (2001) – em ambas as direções conforme equações (235) e (236).

$$\left(\frac{A_x k_x}{\Delta x}\right)_{i \pm \frac{1}{2}, j} = \frac{2A_{x_{i,j}} A_{x_{i \pm 1, j}} k_{x_{i,j}} k_{x_{i \pm 1, j}}}{A_{x_{i,j}} k_{x_{i,j}} \Delta x_{i \pm 1, j} - A_{x_{i \pm 1, j}} k_{x_{i \pm 1, j}} \Delta x_{i,j}} \quad (235)$$

$$\left(\frac{A_y k_y}{\Delta y}\right)_{i, j \pm \frac{1}{2}} = \frac{2A_{y_{i,j}} A_{y_{i, j \pm 1}} k_{y_{i,j}} k_{y_{i, j \pm 1}}}{A_{y_{i,j}} k_{y_{i,j}} \Delta y_{i, j \pm 1} - A_{y_{i, j \pm 1}} k_{y_{i, j \pm 1}} \Delta y_{i,j}} \quad (236)$$

Para a viscosidade e o fator de formação de volume, toma-se a média ponderada, dada pelas equações (237) e (240), por um peso Ω . Para a simulação executada, considerou-se $\Omega = 1/2$.

$$\mu_{i \pm \frac{1}{2}, j} = \Omega \mu(P_{i,j}) + (1 - \Omega) \mu(P_{i \pm 1, j}) \quad (237)$$

$$B_{i \pm \frac{1}{2}, j} = \Omega B(P_{i,j}) + (1 - \Omega) B(P_{i \pm 1, j}) \quad (238)$$

$$\mu_{i, j \pm \frac{1}{2}} = \Omega \mu(P_{i,j}) + (1 - \Omega) \mu(P_{i, j \pm 1}) \quad (239)$$

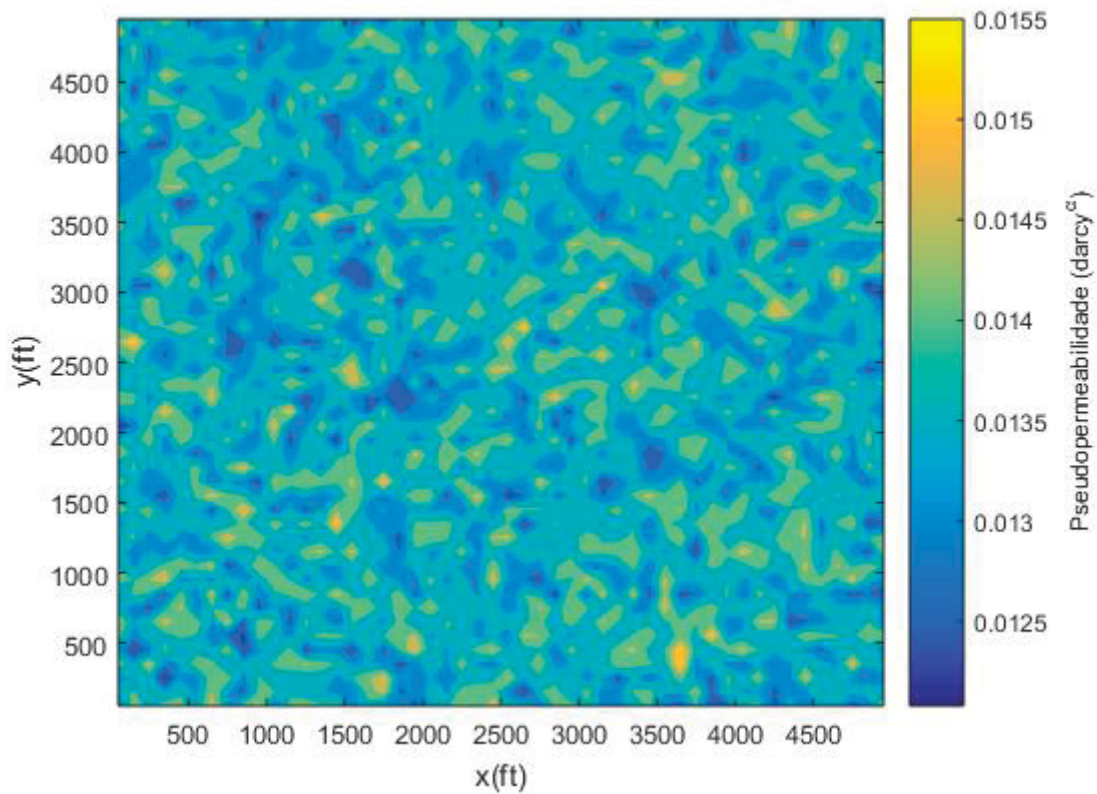
$$B_{i,j\pm\frac{1}{2}} = \Omega B(P_{i,j}) + (1 - \Omega)B(P_{i,j\pm 1}) \quad (240)$$

Sendo a viscosidade da fase fluida calculada pela equação (241)

$$\mu = 6,24048 \times 10^{-8} P_{i,j}^2 - 5,3646 \times 10^{-4} P_{i,j} + 10,3239 \quad (241)$$

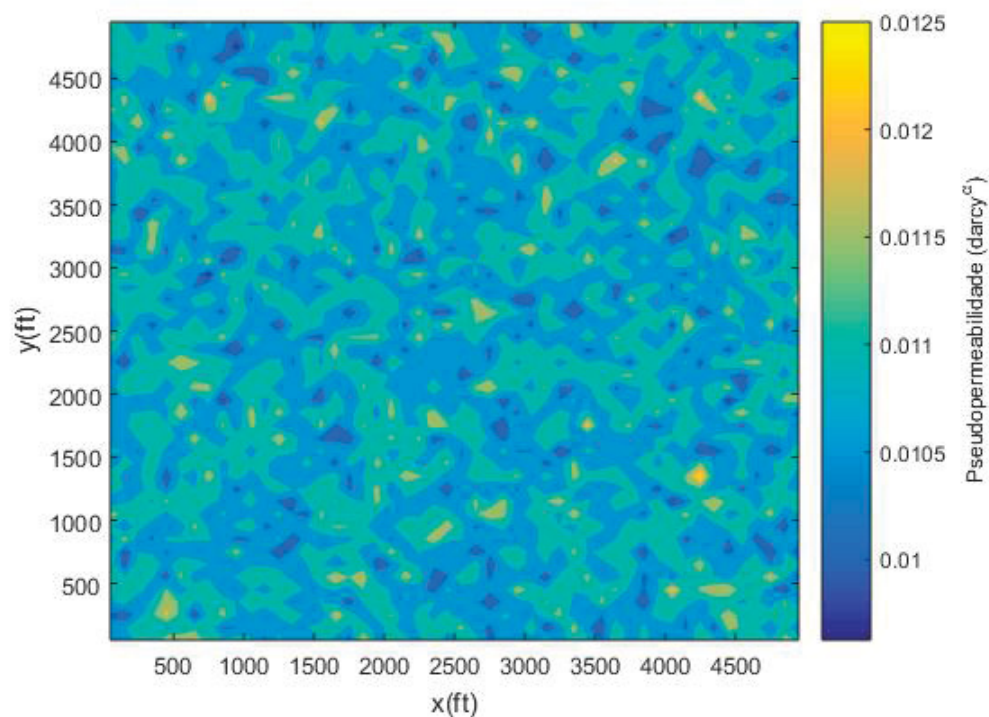
Já para os dados de pseudopermeabilidade, aplicou-se procedimento similar ao que foi apresentado para o modelo unidimensional. Entretanto, foi gerado um valor de k_x e k_y para cada ponto da malha discreta, conforme pode ser observado nos gráficos das figuras (27) e (28). O mesmo foi feito para a porosidade e os dados gerados são mostrados na figura (29).

FIGURA 27 – PSEUDOPERMEABILIDADE NA DIREÇÃO X GERADA PARA UMA MALHA 50x50



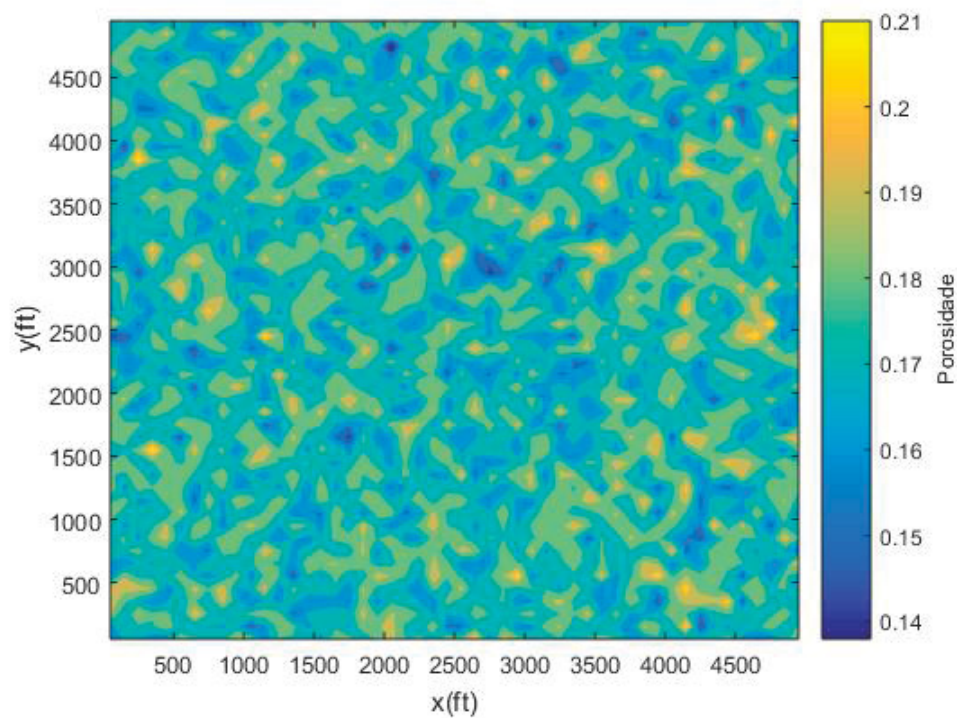
Fonte: o autor (2023)

FIGURA 28 - PSEUDOPERMEABILIDADE NA DIREÇÃO Y GERADA PARA UMA MALHA 50x50



Fonte: o autor (2023)

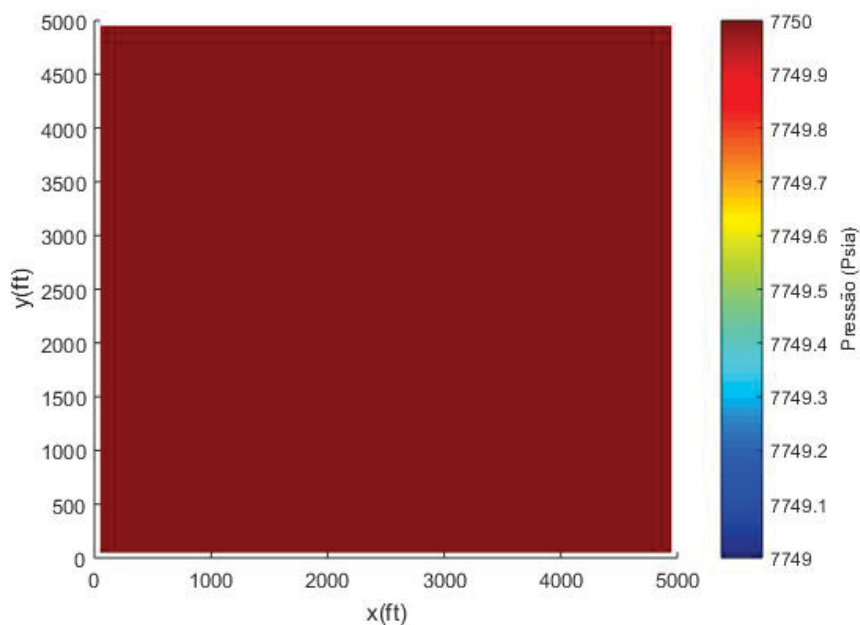
FIGURA 29 - POROSIDADE GERADA PARA UMA MALHA 50x50 BLOCOS



Fonte: o autor (2023)

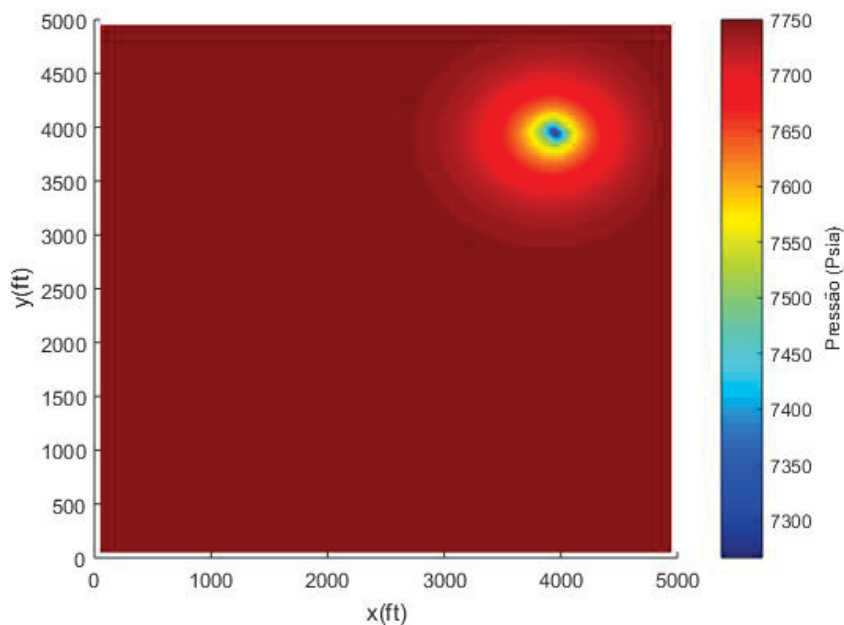
Os resultados para a simulação utilizando $\Delta t = 0,1$ dias, $\Delta x = \Delta y = 100$ ft com $\alpha = 0,9$ estão apresentados no gráfico das figuras (30) a (33).

FIGURA 30 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE NÃO LINEAR COM POÇO DE PRODUÇÃO PARA T = 0 DIAS



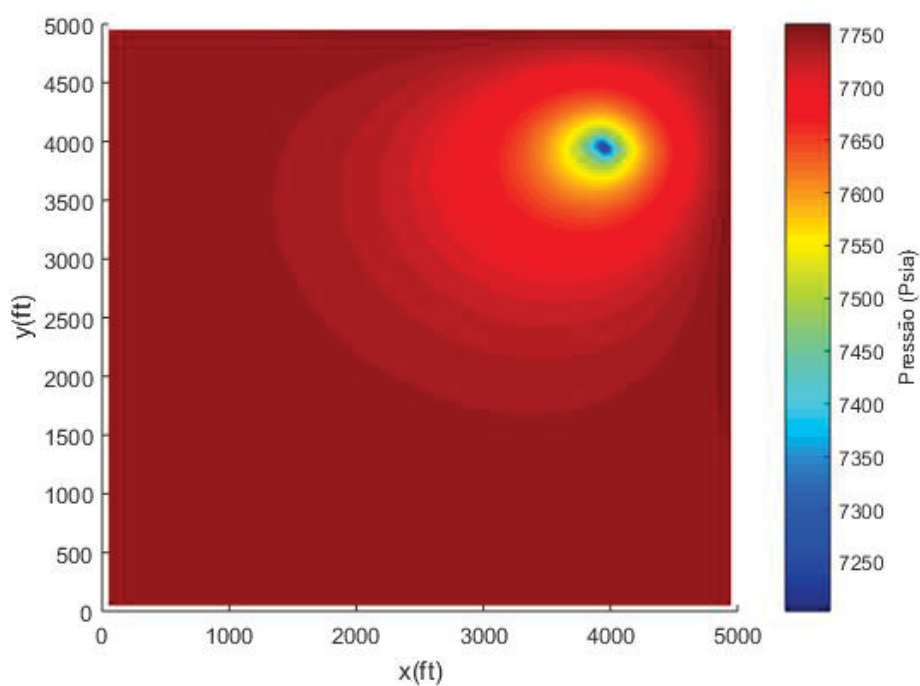
Fonte: o autor (2023)

FIGURA 31 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE NÃO LINEAR COM POÇO DE PRODUÇÃO PARA T = 10 DIAS



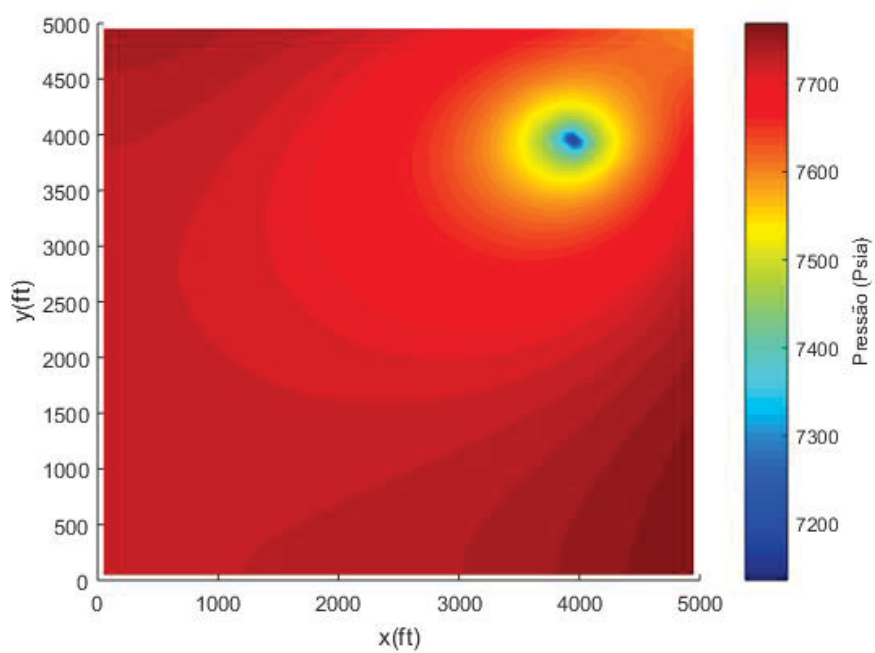
Fonte: o autor (2023)

FIGURA 32 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE NÃO LINEAR COM POÇO DE PRODUÇÃO PARA T = 100 DIAS



Fonte: o autor (2023)

FIGURA 33 - SIMULAÇÃO BIDIMENSIONAL TRANSIENTE NÃO LINEAR COM POÇO DE PRODUÇÃO PARA T = 500 DIAS



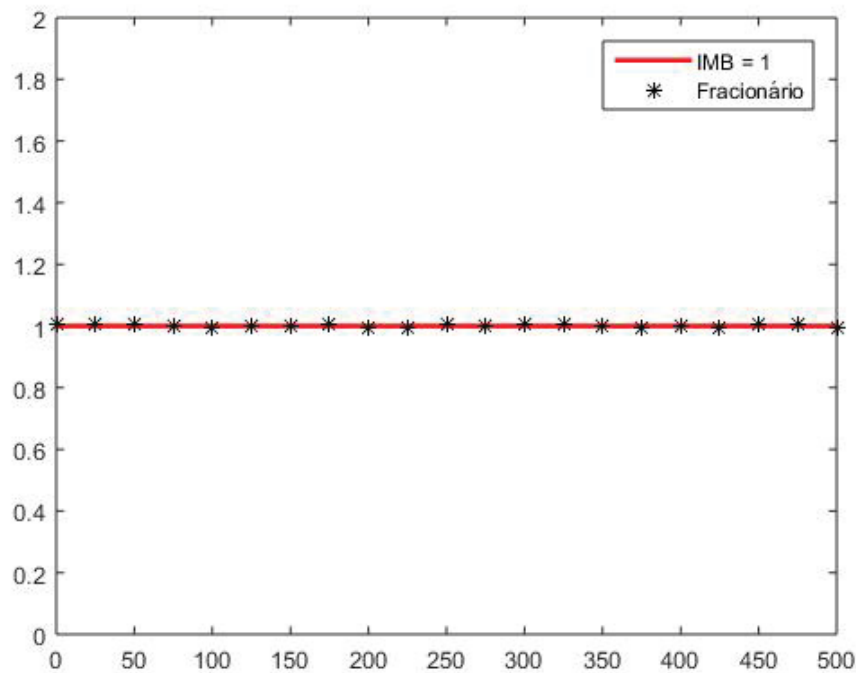
Fonte: o autor (2023)

De forma análoga ao que foi apresentado para o modelo unidimensional transiente, define-se o índice de balanço de massa (I_{MB2D}), conforme equação (242), tal como foi definida a equação (188). De forma semelhante, considerou-se uma solução válida quando $0,99 \leq I_{MB2D} \leq 1,01$, ou seja, tolera-se um desvio máximo de $\pm 1\%$ no balanço de massa global.

$$I_{MB} = \frac{\sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} (V_b)_{ij} \left[\left(\frac{\phi}{B} \right)_{i,j}^{n+1} - \left(\frac{\phi}{B} \right)_{i,j}^n \right]}{a_c \Delta t \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{i=1}^{n_x} q_{isc}^n} \quad (242)$$

Para o problema bidimensional transiente não linear, esse balanço foi realizado a cada incremento de tempo, e os resultados são apresentados no gráfico da figura (34). Observou-se que para toda a solução, a simulação permaneceu no intervalo de $\pm 1\%$ proposto. Outro ponto interessante, a solução explícita é tão precisa quanto for refinada a malha, no entanto, essa precisão vem a custo de esforço computacional, por vezes limitando seu uso. Para algumas malhas propostas, a simulação chegou a levar mais de 48h.

FIGURA 34 - BALANÇO DE MASSA PARA O PROBLEMA UNIDIMENSIONAL TRANSIENTE EXPLÍCITO



Fonte: o autor (2023)

7. CONCLUSÃO

O presente trabalho contribui para a demonstração de usabilidade e viabilidade técnica dos modelos de ordem fracionária para a descrição do escoamento em meios porosos. De forma retroativa, propõe-se uma abordagem generalista, partindo-se do balanço global de massa em um pequeno volume de controle e utiliza-se uma forma generalizada da lei de Darcy para a descrição do movimento do fluido no interior desse volume de controle. Nesse ponto, coube a reflexão a respeito da forma generalizada da lei de Darcy.

Conforme exposto, existem diversos trabalhos que partem da mesma premissa, entretanto, esse se diferencia pela aplicação do operador de derivada fracionária na coordenada espacial do problema, obtendo-se modelos com derivadas fracionárias espaciais. Outro ponto de diferenciação reside no fato de que tais modelos espaciais geralmente são descritos através de outros operadores fracionários. Entretanto, devido ao significado físico imposto as condições de contorno do problema, optou-se pela utilização da definição de Caputo da derivada fracionária. Dessa forma, somando-se a equação diferencial obtida, suas condições de contorno, pode-se afirmar que o objetivo geral do trabalho foi alcançado, apresentando-se assim um modelo fracionário de escoamento capaz de descrever os problemas uni e bidimensionais em regime transiente.

Como era de se esperar, a simulação e obtenção dos resultados não seria fácil. Devido à maior complexidade embutida nos modelos fracionários, era pouco provável a obtenção de soluções analíticas que simulassem o problema real. Esse fato ainda foi contornado para um caso específico e simplificado, para o qual, se obteve solução exata (analítica), que, posteriormente, foi utilizada como padrão para a validação da simulação numérica.

A obtenção da solução numérica dos problemas se mostrou um desafio à parte. De início, tem-se como premissa fundamental que os métodos explícitos de discretização levam a esquemas numéricos parcialmente estáveis. Sendo assim, esperava-se que o mesmo comportamento se repetiria para os modelos fracionários. Nesse ponto, a busca por uma região de

estabilidade numérica bem definida passa a ser o centro do estudo e, para isso, aplicou-se a técnica de análise de estabilidade de Fourier (método de Neumann). Aqui, um ponto chama a atenção, pois, reporta-se na literatura a obtenção de regiões de estabilidade válidas tanto para os problemas unidimensionais transientes quanto para os problemas bidimensionais transientes. O mesmo resultado não pôde ser comprovado, pois os modelos aqui estudados apresentaram regiões de estabilidade numérica distintas, discordando do que foi visto na literatura.

Outro complicador aqui enfrentado refere-se ao fato da existência de diversos métodos de aproximação numérica das derivadas de ordem fracionária. Observou-se que o método L1 é preferível, visto que leva a esquemas numéricos estáveis ou parcialmente estáveis. Outras abordagens como a aproximação de Grünwald levam a obtenção de esquemas invariavelmente instáveis, nesse ponto há concordância com o observado na literatura.

Juntando-se todas as peças do quebra-cabeça e, partindo-se de dados reais para um poço de exploração de petróleo, foi possível simular o escoamento no interior de um reservatório. Os resultados obtidos demonstram o efeito de memória sobre o perfil de pressão obtido. Esse fato pôde ser observado comparando-se os resultados obtidos com o modelo fracionário aos resultados obtidos utilizando a simulação de ordem inteira. Além disso, observou-se que o perfil de pressão obtido para o modelo fracionário converge para o perfil de pressão obtido pelo modelo de ordem inteira à medida que a ordem da derivada se aproxima de um. Essa observação dá suporte à tese de que o modelo de ordem inteira é, na verdade, um caso especial de um modelo mais geral, fracionário.

Por fim, é fácil concluir que todos os objetivos previamente estabelecidos foram alcançados. Sendo assim, esse trabalho contribui para a expansão da aplicação dos modelos de ordem fracionária na descrição do escoamento em meios porosos, especialmente na descrição do escoamento em reservatórios de petróleo.

7.1. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Apesar da integralização dos objetivos previamente propostos por esse trabalho, existem pontos que ainda podem ser explorados e expandidos. Sendo assim, sugere-se a solução e implementação dos modelos para fluidos compressíveis, Equação (114), bem como a solução dos modelos tridimensionais fracionários em regime transiente.

Sugere-se também, a investigação de modelos ainda mais generalistas utilizando-se derivadas fracionárias concomitantes em relação ao tempo e espaço, conforme exemplificado na Equação (244).

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{A_x \beta_c k_x}{\mu B^0} \frac{\partial^\alpha P}{\partial x^\alpha} \right) \Delta x + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{A_y \beta_c k_y}{\mu B^0} \frac{\partial^\alpha P}{\partial y^\alpha} \right) \Delta y + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{A_z \beta_c k_z}{\mu B^0} \frac{\partial^\alpha P}{\partial z^\alpha} \right) \Delta z + q_{sc} = \frac{V_b \phi c}{a_c B^0} \frac{\partial^\beta P}{\partial x^\beta} \quad (244)$$

Por fim, sugere-se o estudo de modelos fracionários de ordem variável. Tomando-se como base a Equação (244), pode-se considerar as ordens das derivadas como funções do tempo e/ou espaço, ou seja, $\alpha(x, y, z, t)$ e $\beta(x, y, z, t)$, o tornando ainda mais geral.

REFERÊNCIAS

AGARWAL. A propos d'une note de M. Pierre Humbert. **Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Série B**, v. 236, n. 21, p. 2031–2032, 1953.

AHMED, T. Chapter 1 - Fundamentals of Reservoir Fluid Behavior. In: T. Ahmed (Org.); **Reservoir Engineering Handbook (Fourth Edition)**. Fourth Edition, p.1–28, 2010. Boston: Gulf Professional Publishing. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9781856178037500092>>. .

ANP. Petróleo. Disponível em: <<http://www.anp.gov.br/wwwanp/producao-de-derivados-de-petroleo-e-processamento-de-gas-natural/petroleo>>. .

ASTM. ASTM D2007-19, Standard Test Method for Characteristic Groups in Rubber Extender and Processing Oils and Other Petroleum-Derived Oils by the Clay-Gel Absorption Chromatographic Method. . West Conshohocken, PA, 2019: ASTM International. Disponível em: <<https://www.astm.org/Standards/D2007.htm>>. .

AWOTUNDE, A. A.; GHANAM, R. A.; AL-HOMIDAN, S. S.; TATAR, N. EDDINE. Numerical schemes for anomalous diffusion of single-phase fluids in porous media. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 39, p. 381–395, 2016. Elsevier B.V. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2016.03.006>>. .

BATTAGLIA, J.-L.; COIS, O.; PUIGSEGUR, L.; OUSTALOUP, A. Solving an inverse heat conduction problem using a non-integer identified model. **International Journal of Heat and Mass Transfer**, v. 44, n. 14, p. 2671–2680, 2001.

BEN-AVRAHAM, D.; HAVLIN, S. **Diffusion and Reactions in Fractals and Disordered Systems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2000.

BENSON, D. A.; WHEATCRAFT, S. W.; MEERSCHAERT, M. M. Application of a fractional advection-dispersion equation. **Water Resources Research**, v. 36,

n. 6, p. 1403–1412, 2000.

BIDDLE, K.; WIELCHOWSKY, C. Hydrocarbon trap. **AAPG Mem.** v. 60, 1994.

BOBECK, P. **The Public Fountains of the City of Dijon by Henry Darcy.** 2003.

CAMACHO VELAZQUEZ, R.; FUENTES-CRUZ, G.; VASQUEZ-CRUZ, M. A. Decline-Curve Analysis of Fractured Reservoirs With Fractal Geometry. **SPE Reservoir Evaluation & Engineering**, v. 11, n. 03, p. 606–619, 2008. Society of Petroleum Engineers. Disponível em: <<https://doi.org/10.2118/104009-PA>>. .

CAPUTO, M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent II. **Geophys. J. Royal astr. Soc.**, v. 13, p. 529–539, 1967.

CAPUTO, M. Diffusion of fluids in porous media with memory. **Geothermics**, v. 28, n. 1, p. 113–130, 1999.

CAPUTO, M. Models of flux in porous media with memory. **Water Resources Research**, v. 36, n. 3, p. 693–705, 2000.

CAPUTO, M. Diffusion with space memory modelled with distributed order space fractional differential equations. **Annali di Geofisica**, v. 46, n. 2, 2003.

CAPUTO, M.; PLASTINO, W. Diffusion in porous layers with memory. **Geophysical Journal International**, v. 158, n. 1, p. 385–396, 2004. John Wiley & Sons, Ltd. Disponível em: <<https://doi.org/10.1111/j.1365-246X.2004.02290.x>>. .

CARCIONE, J. M.; SANCHEZ-SESMA, F. J.; LUZÓN, F.; GAVILÁN, J. J. P. Theory and simulation of time-fractional fluid diffusion in porous media. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 46, n. 34, p. 345501, 2013. IOP Publishing. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/46/34/345501>>. .

CARMO, W. P. **MODELAGEM FRACIONÁRIA DO COMPORTAMENTO DE FLUÊNCIA DE DOIS PETRÓLEOS BRASILEIROS E SUAS EMULSÕES A/O**, 2018. Universidade Federal do Paraná. Disponível em:

<<https://acervodigital.ufpr.br/bitstream/handle/1884/55986/R - D - WESLEY PARDINHO DO CARMO.pdf?sequence=1&isAllowed=y>>. .

CARMO, W. P.; LENZI, M. K.; LENZI, E. K.; FORTUNY, M.; SANTOS, A. F. A fractional model to relative viscosity prediction of water-in-crude oil emulsions. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 172, 2019.

CARMO, W. P.; SANTOS, A. F.; LENZI, M. K. MODELAGEM REOLÓGICA FRACIONÁRIA DO COMPORTAMENTO DE FLUÊNCIA DE DOIS PETRÓLEOS BRASILEIROS E SUAS EMULSÕES A / O. III **Simpósio Paranaense de Modelagem, Simulação e Controle de Processos - SIMPROC 2018**, p. 182–189, 2018. Disponível em: <<https://eventos.ufpr.br/simproc/simproc3/paper/view/981>>. .

CHANG, A.; SUN, H.; ZHANG, Y.; ZHENG, C.; MIN, F. Spatial fractional Darcy's law to quantify fluid flow in natural reservoirs. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 519, 2019.

CHAUDHURI, U. R. **Fundamentals of Petroleum and Petrochemical Engineering**. 1st ed. Boca Raton - FL: CRC Press, 2010.

CHEN, C.-M.; LIU, F.; TURNER, I.; ANH, V. A Fourier method for the fractional diffusion equation describing sub-diffusion. **Journal of Computational Physics**, v. 227, n. 2, p. 886–897, 2007. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999107002161>>. .

CHEN, C.; RAGHAVAN, R. Transient flow in a linear reservoir for space-time fractional diffusion. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 128, p. 194–202, 2015. Elsevier. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.petrol.2015.02.021>>. .

CHEN, W.; SUN, H.; ZHANG, X.; KOROŠAK, D. Anomalous diffusion modeling by fractal and fractional derivatives. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 59, n. 5, p. 1754–1758, 2010. Elsevier Ltd. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2009.08.020>>. .

CRAFT, B. C.; HAWKINS, M. F.; TERRY, R. **Applied petroleum reservoir**

engineering. Second edition. 1991.

CRANK, J. **The Mathematics of Diffusion.** Second Edition. Bristol, England: Oxford University Press, 1975.

CREMASCO. **Fundamentos de transferência de massa.** 3ª Edição. São Paulo - SP - Brasil: Blucher, 2015.

CUNHA, M.; PULINO, P.; FERNANDES, M. **Introdução à Simulação de Fluxos em Meios Porosos: Métodos de Elementos Finitos.** 1999.

DANTZIG, G. B. A History of Scientific Computing. In: S. G. Nash (Org.); . p.141–151, 1990. New York, NY, USA: ACM. Disponível em: <<http://doi.acm.org/10.1145/87252.88081>>. .

ERTEKIN, T.; ABOU-KASSEM, J.; KING, G. R. Basic Applied Reservoir Simulation, Textbook Series. **SPE, Richardson, Tex.**, v. 7, p. 218–271, 2001.

EWING, R. E.; LAZAROV, R. D.; LYONS, S. L.; et al. Numerical well model for non-Darcy flow through isotropic porous media[*]This work was supported in part by the EPA under grant # R 825207-01-1, by the State of Texas under ARP/ATP grant # 010366-168 and by a gift grant from Mobil Oil Corp. **Computational Geosciences**, v. 3, n. 3, p. 185–204, 1999. Disponível em: <<https://doi.org/10.1023/A:1011543412675>>. .

FOMIN, S.; CHUGUNOV, V.; HASHIDA, T. Mathematical modeling of anomalous diffusion in porous media. **Fractional Differential Calculus**, v. 1, n. 1, p. 1–28, 2011.

DI GIUSEPPE, E.; MORONI, M.; CAPUTO, M. Flux in Porous Media with Memory: Models and Experiments. **Transp Porous Med.**, v. 83, p. 479–500, 2010.

HE, J.-H. Approximate analytical solution for seepage flow with fractional derivatives in porous media. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 167, n. 1, p. 57–68, 1998. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S004578259800108X>>. .

HILFER, R. Fractional Diffusion Based on Riemann-Liouville Fractional Derivatives †. **The Journal of Physical Chemistry B**, v. 104, 2000.

HOSSAIN, M. E.; ISLAM, M. R. A Comprehensive Material Balance Equation with the Inclusion of Memory During Rock-Fluid Deformation. **Advances in Sustainable Petroleum Engineering Science**, v. 1, n. 2, p. 141–162, 2009.

HOSSAIN, M. E.; MOUSAVIZADEGAN, S. H.; ISLAM, M. R. A New Porous Media Diffusivity Equation with the Inclusion of Rock and Fluid Memories. , 2008. Society of Petroleum Engineers. Disponível em: <<https://doi.org/>>. .

HUMBERT, P.; AGARWAL, R. P. Sur la fonction de Mittag-Leffler et quelques-unes de ses généralisations. **Bulletin des Sciences Mathématiques**, v. 77, n. 10, p. 180–185, 1953.

IAFFALDANO, G.; CAPUTO, M.; MARTINO, S. Experimental and theoretical memory diffusion of water in sand. **Hydrology and Earth System Sciences**, v. 10, 2005.

IONESCU, C.; LOPES, A.; COPOT, D.; MACHADO, J. A. T.; BATES, J. H. T. The role of fractional calculus in modeling biological phenomena: A review. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 51, p. 141–159, 2017a. Elsevier B.V. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2017.04.001>>. .

IONESCU, C.; LOPES, A.; COPOT, D.; MACHADO, J. A. T.; BATES, J. H. T. The role of fractional calculus in modeling biological phenomena: A review. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 51, p. 141–159, 2017b. Elsevier B.V.

JAQUES, A.; DA SILVA, C.; DURU, N.; SEAL, T. Fractional calculus application for diffusion controlled leaching column testing. **International Journal of Mineral Processing**, v. 169, p. 185–187, 2017. Elsevier B.V. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.minpro.2017.09.007>>. .

JIANG, X.; XU, M.; QI, H. The fractional diffusion model with an absorption term and modified Fick's law for non-local transport processes. **Nonlinear Analysis**:

Real World Applications, v. 11, n. 1, p. 262–269, 2010. Elsevier Ltd. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.nonrwa.2008.10.057>>. .

JONES, D.; PUJADÓ, P. **Handbook of Petroleum Processing**. 2006.

LENZI, E. K.; DOS SANTOS, M. A. F.; LENZI, M. K.; VIEIRA, D. S.; DA SILVA, L. R. Solutions for a fractional diffusion equation: Anomalous diffusion and adsorption-desorption processes. **Journal of King Saud University - Science**, v. 28, n. 1, p. 3–6, 2016. King Saud University. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jksus.2015.08.003>>. .

LENZI, M. K.; LENZI, E. K.; ANDRADE, M. F. DE; EVANGELISTA, L. R.; SILVA, L. R. FRACTIONAL NONLINEAR DIFFUSION EQUATION: EXACT SOLUTIONS. **IFAC Proceedings Volumes**, v. 39, n. 11, p. 528–533, 2006. IFAC.

Li, C., & Zeng, F. (2015). **Numerical Methods for Fractional Calculus** (1st ed.). Chapman and Hall/CRC. <https://doi.org/10.1201/b18503>

LIU, F.; ANH, V.; TURNER, I.; ZHUANG, P. The fractional advection–dispersion equation. **Journal of Applied Mathematics and Computing**, v. 13, p. 233–245, 2003.

LIU, F.; ZHUANG, P.; TURNER, I.; BURRAGE, K.; ANH, V. A new fractional finite volume method for solving the fractional diffusion equation. **Applied Mathematical Modelling**, v. 38, n. 15–16, p. 3871–3878, 2014. Elsevier Inc. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2013.10.007>>. .

MEERSCHAERT, M. M.; SCHEFFLER, H.-P.; TADJERAN, C. Finite difference methods for two-dimensional fractional dispersion equation. **Journal of Computational Physics**, v. 211, n. 1, p. 249–261, 2006. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999105002731>>. .

MEERSCHAERT, M. M.; TADJERAN, C. Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 172, n. 1, p. 65–77, 2004. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0377042704000986>>. .

METZLER, R.; GLÖCKLE, W. G.; NONNENMACHER, T. F. Fractional model equation for anomalous diffusion. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 211, n. 1, p. 13–24, 1994. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0378437194900647>>. .

MIAH, M. I.; DEB, P. K.; RAHMAN, M. S.; HOSSAIN, M. E. Application of Memory Concept on Petroleum Reservoir Characterization: A Critical Review. **SPE Kuwait Oil & Gas Show and Conference**, 2017. Disponível em: <<http://www.onepetro.org/doi/10.2118/187676-MS>>. .

MIRANDA, H. C. B. DE. Interpretação conjunta de dados de GPR e medidas de permeabilidade sobre um análogo de reservatório siliciclástico falhado na bacia de Tucano, NE do Brasil. , p. 40–89, 2004. Disponível em: <<https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/18790>>. .

MITTAG-LEFFLER. Sur La nouvelle fonction $E(x)$. **Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, Série B**, v. 137, p. 554–558, 1903.

NELSON, W. L. **Petroleum Refinery Engineering**. 4th Edition. New York, NY, USA: McGraw-Hill, 1968.

OBEMBE, A. D. A fractional diffusion model for single-well simulation in geological media. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 191, n. March, p. 107162, 2020. Elsevier B.V. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.petrol.2020.107162>>. .

OBEMBE, A. D.; AL-YOUSEF, H. Y.; HOSSAIN, M. E.; ABU-KHAMSIN, S. A. Fractional derivatives and their applications in reservoir engineering problems: A review. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 157, n. July, p. 312–327, 2017. Elsevier Ltd. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.petrol.2017.07.035>>. .

OBEMBE, A. D.; HOSSAIN, M. E.; ABU-KHAMSIN, S. A. Variable-order derivative time fractional diffusion model for heterogeneous porous media. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 152, n. January, p. 391–405, 2017. Elsevier B.V. Disponível em:

<<http://dx.doi.org/10.1016/j.petrol.2017.03.015>>. .

OBEMBE, A. D.; HOSSAIN, M. E.; MUSTAPHA, K.; ABU-KHAMSIN, S. A. A modified memory-based mathematical model describing fluid flow in porous media. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 73, n. 6, p. 1385–1402, 2017. Elsevier Ltd. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.camwa.2016.11.022>>. .

OCHOA-TAPIA, J. A.; VALDES-PARADA, F. J.; ALVAREZ-RAMIREZ, J. A. fractional-order Darcy's law. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 374, n. 1, p. 1–14, 2007.

DE OLIVEIRA, E. C.; TENREIRO MACHADO, J. A. A review of definitions for fractional derivatives and integral. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2014, n. 1940, 2014.

PARADISI, P.; CESARI, R.; MAINARDI, F.; TAMPIERI, F. Fractional Fick's law for non-local transport processes. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 293, n. 1–2, p. 130–142, 2001.

PARK, H. W.; KANG, J. M.; CHOE, J. Pressure Behavior of Transport in Fractal Porous Media Using a Fractional Calculus Approach. **Energy Sources**, v. 22, n. 10, p. 881–890, 2000. Taylor & Francis. Disponível em: <<https://doi.org/10.1080/00908310051128237>>. .

PODLUBNY, I. **Fractional Differential Equations**. Elsevier, 1999.

RAGHAVAN, R. Fractional derivatives: Application to transient flow. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 80, n. 1, p. 7–13, 2011. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0920410511002312>>. .

RAGHAVAN, R. Fractional diffusion: Performance of fractured wells. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 92–93, p. 167–173, 2012. Elsevier. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.petrol.2012.06.003>>. .

RAGHAVAN, R.; CHEN, C. Fractured-Well Performance Under Anomalous Diffusion. **SPE Reservoir Evaluation & Engineering**, v. 16, n. 03, p. 237–245,

2013. Society of Petroleum Engineers. Disponível em: <<https://doi.org/10.2118/165584-PA>>. .

RAZMINIA, K.; RAZMINIA, A.; TENREIRO MACHADO, J. A. Analysis of diffusion process in fractured reservoirs using fractional derivative approach. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 19, n. 9, p. 3161–3170, 2014. Elsevier B.V. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.01.025>>. .

REN, J.; GUO, P. Anomalous diffusion performance of multiple fractured horizontal wells in shale gas reservoirs. **Journal of Natural Gas Science and Engineering**, v. 26, p. 642–651, 2015. Elsevier B.V. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.jngse.2015.07.003>>. .

SANSONE, E. C. Geologia do petróleo. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/1346759/mod_resource/content/1/PMI_3101_-_Prof_Sansone_-_04_-_Geologia_do_Petroleo.pdf>. Acesso em: 14/11/2020.

SCHEIDEGGER, A. E. **The Physics of Flow Through Porous Media (3rd Edition)**. University of Toronto Press, 1974.

SCHUMER, R.; BENSON, D. A.; MEERSCHAERT, M. M.; WHEATCRAFT, S. W. Eulerian derivation of the fractional advection–dispersion equation. **Journal of Contaminant Hydrology**, v. 48, n. 1, p. 69–88, 2001. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0169772200001704>>. .

SUN, H.; CHEN, W.; LI, C.; CHEN, Y. Finite Difference Schemes for Variable-Order Time Fractional Diffusion Equation. **International Journal of Bifurcation and Chaos**, v. 22, n. 04, p. 1250085, 2012. Disponível em: <<http://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S021812741250085X>>. .

SUN, H. G.; ZHANG, Y.; BALEANU, D.; CHEN, W.; CHEN, Y. Q. A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 64, p. 213–231, 2018. Elsevier B.V. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2018.04.019>>. .

TIAN, J.; TONG, D. THE FLOW ANALYSIS OF FLUIDS IN FRACTAL RESERVOIR WITH THE. **Journal of Hydrodynamics**, v. 18, n. 3, p. 287–293, 2006.

VALDES-PARADA, F. J.; ALBERTO OCHOA-TAPIA, J.; ALVAREZ-RAMIREZ, J. Effective medium equations for fractional Fick's law in porous media. **Physica A: Statistical Mechanics and its Applications**, v. 373, p. 339–353, 2007.

VINNETT, L.; ALVAREZ-SILVA, M.; JAQUES, A.; HINOJOSA, F.; YIANATOS, J. Batch flotation kinetics: Fractional calculus approach. **Minerals Engineering**, v. 77, p. 167–171, 2015. Elsevier Ltd. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.mineng.2015.03.020>>. .

XU, H.; JIANG, X. Creep constitutive models for viscoelastic materials based on fractional derivatives. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 73, n. 6, p. 1377–1384, 2017a. Elsevier Ltd. Disponível em: <<http://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0898122116302450>>. .

XU, H.; JIANG, X. Creep constitutive models for viscoelastic materials based on fractional derivatives. **Computers & Mathematics with Applications**, v. 73, n. 6, p. 1377–1384, 2017b. Elsevier Ltd.

YANG, Q.; CHEN, D.; ZHAO, T.; CHEN, Y. Fractional calculus in image processing: A review. **Fractional Calculus and Applied Analysis**, v. 19, n. 5, p. 1222–1249, 2016.

ZADYMOVA, N. M.; SKVORTSOVA, Z. N.; TRASKINE, V. Y.; et al. Rheological properties of heavy oil emulsions with different morphologies. **Journal of Petroleum Science and Engineering**, v. 149, n. October 2016, p. 522–530, 2017. Elsevier. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.petrol.2016.10.063>>. .

ZHANG, Y.; SUN, H. G.; STOWELL, H. H.; ZAYERNOURI, M.; HANSEN, S. E. A review of applications of fractional calculus in Earth system dynamics. **Chaos, Solitons and Fractals**, v. 102, n. December 2016, p. 29–46, 2017. Elsevier Ltd. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/j.chaos.2017.03.051>>. .

ZHOU, H. W.; YANG, S. Fractional derivative approach to non-Darcian flow in porous media. **Journal of Hydrology**, v. 566, n. September, p. 910–918, 2018. Elsevier. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2018.09.039>>. .

ZHOU, H.; YANG, S.; WANG, R.; ZHONG, J. Non-Darcian flow or fractional derivative ? , 2018.