

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

GIULIANO DE MORAES PASCOETO

GEOMETRIA NOS NÚMEROS COMPLEXOS

CURITIBA

2013

GIULIANO DE MORAES PASCOETO

GEOMETRIA NOS NÚMEROS COMPLEXOS

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pelo Departamento de Matemática, Setor de Ciências exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana

CURITIBA

2013

Termo de Aprovação

GIULIANO DE MORAES PASCOETO

GEOMETRIA NOS NÚMEROS COMPLEXOS

Monografia apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Licenciado em Matemática, pelo Departamento de Matemática, Setor de Ciências exatas, Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Luiz Antonio Ribeiro de Santana
Universidade Federal do Paraná

Prof. Dr. Alexandre Kirilov
Universidade Federal do Paraná

Curitiba, 20 de dezembro de 2013

Sumário

1	Os Números Complexos	10
1.1	Forma algébrica	10
1.2	O Plano de Argand-Gauss	11
1.3	Conjugados complexos	12
1.4	Módulo de um número complexo	12
1.5	Forma polar	14
1.6	Raízes de números complexos	16
2	Problemas Geométricos	18
2.1	Preliminares	18
2.2	O circuncentro de um triângulo	21
2.3	Triângulo de Napoleão	22
3	O Teorema de Ptolomeu-Euler	25
3.1	Teorema de Pitágoras	26
3.2	Razão áurea	27
	Referências	29

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar a estrutura e resultados fundamentais dos números complexos, para mostrar que os mesmos podem ser bastante efetivos para a resolução de certos problemas geométricos tais como o Triângulo de Napoleão e o Teorema de Ptolomeu-Euler.

Palavras-chave: Números complexos, Geometria.

Abstract

The objective of this work is to study the structure and key results of complex numbers, in order to show that they can be very effective for solving certain geometric problems like the Triangle of Napoleon and the Theorem of Ptolemy-Euler.

Keywords: Complex numbers, geometry.

Introdução

No presente trabalho tratamos de explorar algumas propriedades do corpo dos números complexos $\mathbb{C}$, para a resolução de alguns problemas da geometria plana.

O fato de termos mais liberdade para trabalhar com os elementos do conjunto $\mathbb{C}$, em relação aos elementos do plano cartesiano, aliado ao fato de que podemos multiplicar os números complexos nos motivou a utilizar a representação cartesiana comum a ambos os conjuntos.

Com isso, verificamos que resultados já conhecidos da geometria plana têm suas respectivas demonstrações mais simplificadas ao compararmos suas análises via geometria analítica no plano cartesiano. Uma notável propriedade é que podemos estabelecer propriedades de paralelismo e ortogonalidade de vetores levando-se em conta a multiplicação de números complexos, operação que não existe quando tratamos da geometria analítica tradicional.

Apresentando a organização do presente texto, temos no primeiro capítulo a apresentação das propriedades básicas dos números complexos, como por exemplo as formas algébrica e exponencial, conjugado e módulo e o plano de Argand-Gauss, as quais serão utilizados no decorrer do trabalho.

No segundo capítulo demonstramos alguns resultados algébricos que facilitam a resolução de problemas geométricos, dando ênfase ao problema do circuncentro de um triângulo e o problema do Triângulo de Napoleão.

Finalmente no terceiro e último capítulo, fazemos uma detalhada apresentação alternativa, com base na teoria previamente desenvolvida nos capítulos anteriores, do Teorema de Ptolomeu-Euler.

1 Os Números Complexos

O objetivo do presente capítulo é apresentar o corpo dos números complexos e sua estrutura. As propriedades aqui expostas servem de base teórica para o que desenvolveremos nos capítulos seguintes.

Números complexos são pares ordenados $z = (x, y)$ de números reais, sobre os quais definimos as operações de soma e produto da seguinte maneira: dados dois números complexos $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$,

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1),$$

x é chamado de parte real de z e y de parte imaginária de z . As respectivas notações que usaremos aqui são: $\Re(z) = x$ e $\Im(z) = y$.

O conjunto dos números complexos é representado por $\mathbb{C}$ e as operações descritas acima gozam das seguintes propriedades:

1. Igualdade de dois números complexos:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \Re(z_1) = \Re(z_2) \text{ e } \Im(z_1) = \Im(z_2).$$

2. Leis comutativas: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$, $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

3. Leis associativas: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$.

4. Lei distributiva: $z \cdot (z_1 + z_2) = z \cdot z_1 + z \cdot z_2$.

5. Elementos neutros:

- $z_1 + (0, 0) = z_1$.
- $z_1 \cdot (1, 0) = z_1$.

6. Opostos: Para todo $z \in \mathbb{C}$, existe $-z$ único, tal que $z + (-z) = (0, 0)$.

7. Inversos: Para todo $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ existe z^{-1} único, tal que $z \cdot z^{-1} = (1, 0)$.

1.1 Forma algébrica

Considere o conjunto formado por todos os números complexos com parte imaginária nula, ou seja

$$A = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}.$$

Observamos que dados dois elementos $(x, 0)$ e $(y, 0)$ pertencentes ao conjunto A , temos que ao somarmos e multiplicarmos esses elementos, obtemos

- $(x, 0) + (y, 0) = (x + y, 0 + 0) = (x + y, 0)$, e
- $(x, 0) \cdot (y, 0) = (x \cdot y - 0 \cdot 0, x \cdot 0 + y \cdot 0) = (x \cdot y, 0)$,

respectivamente. Com isso, notamos um isomorfismo algébrico com $\mathbb{R}$, por isso denotamos $(x, 0)$ apenas por x , e, assim, justificamos o abuso de notação na afirmação de que os reais são um subconjunto dos números complexos.

Os números complexos da forma $(0, y)$ são chamados de *imaginários puros*. Em especial, o número i é definido como a unidade imaginária, ou seja, $i = (0, 1)$.

Fazendo $i^2 = i \cdot i$, temos que $i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = -1$. Além disso, como podemos escrever $(y, 0) = y$ e $iy = (0, 1)(y, 0) = (0, y)$, então podemos justificar a notação usual de números complexos, como segue:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy$$

que é denominada *forma algébrica* de z .

1.2 O Plano de Argand-Gauss

Como os números complexos são pares ordenados de números reais, podemos associar a cada número complexo $z = x + yi$ um ponto no plano formado pelos eixos coordenados x (eixo real) e y (eixo imaginário) e a cada ponto associamos um vetor a partir da origem. Este plano é chamado de *plano de Argand-Gauss*.

O ponto P representa o número complexo $z = x + iy$.

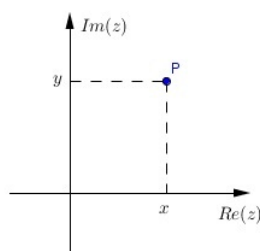


Figura 1 – Plano de Argand-Gauss.

Com essa representação, similar à de vetores do plano $\mathbb{R}^2$, podemos representar graficamente os resultados de algumas operações, como a soma $z_1 + z_2$, obtida na Figura 2:

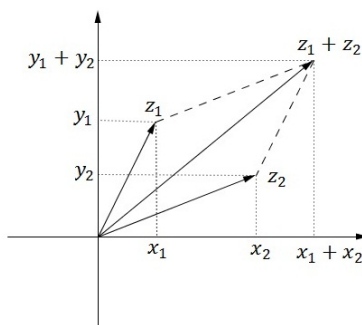


Figura 2 – Soma de dois números complexos no Plano de Argand-Gauss.

1.3 Conjugados complexos

Definição 1. O conjugado do número complexo $z = x + iy$ é definido como $x - iy$ e denotado por $\bar{z}$.

Se $z_1 = x_1 + y_1i$ e $z_2 = x_2 + y_2i$, então temos que

$$\overline{z_1 + z_2} = x_1 + x_2 - i(y_1 + y_2) = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

ou seja, o conjugado da soma é igual à soma dos conjugados. E de forma análoga, podemos estabelecer a validade das seguintes propriedades relativas ao conjugado de um número complexo:

- $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$
- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

Observe que ao somarmos um número complexo com seu conjugado, obtemos o dobro de sua parte real. De fato, temos

$$z + \bar{z} = x + iy + x - iy = 2x = 2\Re(z).$$

De maneira similar, temos que ao subtrairmos um número complexo de seu conjugado, temos um número imaginário puro:

$$z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy = 2i\Im(z).$$

1.4 Módulo de um número complexo

Definição 2. Definimos o módulo (ou valor absoluto) de um número complexo $z = x + iy$ como o número real não negativo

$$|z| = |x + iy| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Geometricamente, interpretamos o número $|z|$ como a distância entre as representações dos pontos (x, y) e a origem $(0, 0)$ no plano de Argand-Gauss, ou o comprimento do vetor que liga essas representações.

De maneira similar ao cálculo de módulo de vetores da geometria analítica do plano, temos que

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Também temos que valem as seguintes propriedades adicionais:

- $|z|^2 = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$
- $|z| \geq |\Re(z)| \geq \Re(z)$ e $|z| \geq |\Im(z)| \geq \Im(z)$
- $z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$

Convém aqui salientar que a propriedade acima é importante não somente por estabelecer uma relação entre um número complexo e seu conjugado (o que é útil em alguns cálculos, como na proposição a seguir), como também estabelece uma interpretação geométrica do inverso de um número complexo, caso ela seja escrita da seguinte maneira:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2} \bar{z}.$$

Por exemplo, deduzimos que os números $1/z$ e $\bar{z}$ são sempre vetores paralelos no Plano de Argand-Gauss, pois $|z|$ é um número real. Números complexos de módulo um são tais que seus inversos coincidem com seus conjugados. Ou ainda, podemos dizer que números complexos representados fora da circunferência unitária centrada na origem terão seus inversos representados dentro da mesma, pois ao multiplicarmos $\bar{z}$ por $1/|z|$, o módulo desse vetor se torna igual a 1.

Proposição 1. (*Desigualdade triangular*). *Sejam $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$ dois números complexos. Temos que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.*

Demonstração. Note que

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2) \overline{(z_1 + z_2)} \\ &= (z_1 + z_2) (\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + 2\Re(z_1 \bar{z}_2) \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\Re(z_1 \bar{z}_2). \end{aligned}$$

Além disso, temos que

$$2\Re(z_1 \bar{z}_2) \leq 2|z_1 \bar{z}_2| = 2|z_1||z_2|.$$

Logo,

$$|z_1 + z_2|^2 \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2,$$

e segue que

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Notamos que a igualdade ocorre se, e somente se, um dos números é zero, ou se z_1 e z_2 são linearmente dependentes e têm mesmo sentido, ou seja, $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$ e $\frac{z_1}{z_2} > 0$. Isto pode ser observado pelo fato de que se impusermos a igualdade, ela é equivalente a

$$\Re(z_1 \overline{z_2}) = |z_1 \overline{z_2}|.$$

Daí concluímos que a parte imaginária de $z_1 \overline{z_2}$ é nula e sua parte real é não negativa. Logo $z_1 \overline{z_2}$ é um número real não-negativo. Com isso, obtemos

$$z_1 \overline{z_2} = \alpha, \text{ onde } \alpha \geq 0.$$

A igualdade acima é satisfeita quando um dos números complexos é zero. Caso contrário, podemos reescrevê-la multiplicando ambos os membros da mesma por z_2 para obtermos

$$z_1 |z_2|^2 = \alpha z_2,$$

ou ainda

$$z_1 = \frac{\alpha}{|z_2|^2} z_2.$$

□

1.5 Forma polar

Sejam $r > 0$ e $\theta \in \mathbb{R}$ as coordenadas polares do ponto (x, y) que no geral corresponde ao número complexo não-nulo $z = x + iy$. Neste caso $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, e podemos escrever

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$

Temos que r é o comprimento do vetor radial z , ou seja, $r = |z|$ e θ é o ângulo formado entre o eixo x e z orientado no sentido anti-horário e chamado de *argumento* de z , cuja notação correspondente é $\arg z$. Quando $x \neq 0$, θ pode ser determinado por $\tan \theta = y/x$.

Pela fórmula de Euler, temos

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

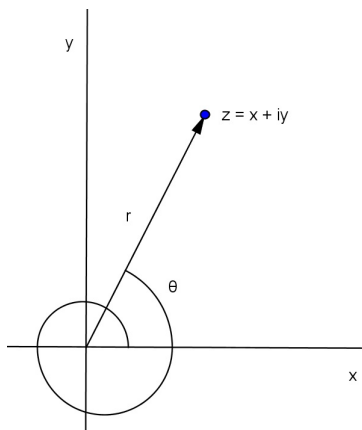


Figura 3 – Forma polar de um número complexo.

e daí

$$z = re^{i\theta}$$

Se $r = 1$, temos que os pontos $e^{i\theta}$ estão no círculo de raio 1, centrado na origem. Nesse caso, segue da fórmula acima que $e^{i\pi} = -1$, $e^{-i\pi/2} = -i$, e $e^{-i6\pi} = 1$.

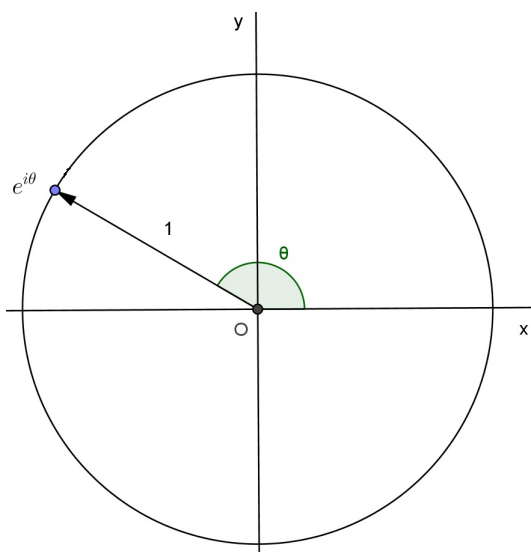


Figura 4 – Os números da forma $e^{i\theta}$ como pontos da circunferência de raio 1 centrada na origem.

Também segue da fórmula de Euler que $z = re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ é uma equação paramétrica do círculo $|z| = r$, centrado na origem com raio r . Em geral, o círculo $|z - z_0| = r$, com centro z_0 e raio r , tem representação paramétrica $z = z_0 + re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Da Trigonometria, sabemos que

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} &= (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

Assim, o produto de dois números complexos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ é dado por

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}.$$

Logo, concluímos que $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$. Essa expressão é útil na prova por indução em n , da identidade $z^n = r^n e^{in\theta}$, $n \in \mathbb{N}$.

O quociente de dois números complexos é dado por

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2}}{r_2 e^{i\theta_2} e^{-i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}, \quad r_2 \neq 0,$$

e segue que o inverso de qualquer número complexo não-nulo é $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\theta}$.

1.6 Raízes de números complexos

Considerando um ponto $z = r e^{i\theta}$, que está no círculo centrado na origem de raio fixado r , temos que quando θ aumenta, z se move nesse círculo no sentido anti-horário. Em particular, quando θ é aumentado em 2π , chegamos ao mesmo ponto.

Portanto, $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ são iguais se, e somente se, $r_1 = r_2$ e $\theta_1 = \theta_2 + 2k\pi$ com k inteiro.

Definição 3. Uma n -ésima raiz de $z_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ é um número não nulo $z = r e^{i\theta}$ tal que $z^n = z_0$, ou seja, $r^n e^{in\theta} = r_0 e^{i\theta_0}$.

Assim, $r^n = r_0$ e $n\theta = \theta_0 + 2k\pi$ com k inteiro. Então, sendo $r = \sqrt[n]{r_0}$ a única raiz n -ésima não-negativa do número real r_0 e $\theta = \frac{\theta_0 + 2k\pi}{n} = \frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$, temos que os números complexos

$$z = \sqrt[n]{r_0} \exp \left[i \left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right], \quad k \in \mathbb{Z}$$

são as as n -ésimas raízes de z_0 . Podemos ver que as raízes estão todas no círculo $|z| = \sqrt[n]{r_0}$ sobre a origem e são equidistantes a cada $2\pi/n$ radianos, iniciando com o argumento θ_0/n . Logo, todas as raízes n -ésimas *distintas* são obtidas com k variando somente no conjunto $\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Usamos c_k para denotar estas raízes distintas:

$$c_k = \sqrt[n]{r_0} \exp \left[i \left(\frac{\theta_0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right], \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

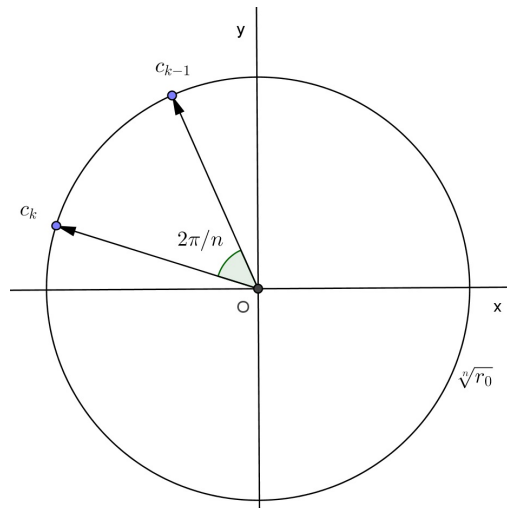


Figura 5 – Posição relativa das n -ésimas raízes de um número complexo.

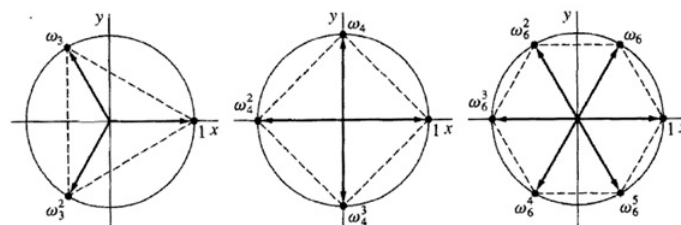
Exemplo 1. Para determinarmos as n -ésimas raízes da unidade, escrevemos $1 = 1 \exp[i(0 + 2k\pi)]$ e segue que

$$1^{1/n} = \sqrt[n]{1} \exp \left[i \left(\frac{0}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right) \right] = \exp \left(i \frac{2k\pi}{n} \right), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Quando $n = 2$, as raízes são ± 1 . Para $n \geq 3$, temos que como a distância é preservada a cada $2\pi/n$ radianos, então as raízes são os vértices do polígono regular inscrito no círculo $|z| = 1$. Se denotarmos $w_n = \exp \left(i \frac{2\pi}{n} \right)$, segue que

$$w_n^k = \exp \left(i \frac{2k\pi}{n} \right), \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Portanto, as n -ésimas raízes distintas da unidade são $1, w_n, w_n^2, \dots, w_n^{n-1}$. Para $n = 3$, $n = 4$ e $n = 6$ teríamos, respectivamente os vértices de um triângulo, um quadrado e um hexágono representados no plano complexo, conforme ilustra a figura abaixo:



Convém observar que se c é qualquer n -ésima raiz particular de um número complexo não-nulo z_0 , o conjunto das n -ésimas raízes podem ser colocadas na forma $c, cw_n, cw_n^2, \dots, cw_n^{n-1}$. Isto acontece porque ao multiplicarmos por w_n , o argumento correspondente do número em é aumentado em $2\pi/n$, sem que seu módulo seja alterado.

2 Problemas Geométricos

Apresentamos neste capítulo alguns problemas geométricos para os quais o uso dos números complexos podem ser efetivos devido à possibilidade de multiplicação dos vetores em $\mathbb{C}$.

2.1 Preliminares

Sejam dois triângulos $\triangle z_1 z_2 z_3$ e $\triangle w_1 w_2 w_3$ com ângulos z_1, z_2 e z_3 e w_1, w_2 e w_3 , respectivamente. Dizemos que $\triangle z_1 z_2 z_3$ e $\triangle w_1 w_2 w_3$ são semelhantes se, e somente se, o ângulo em z_k é igual àquele em w_k (com $k = 1, 2, 3$) e possuem a mesma orientação (horário ou anti-horário). A notação correspondente é $\triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle w_1 w_2 w_3$.

Teorema 1. $\triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle w_1 w_2 w_3$ se, e somente se, as razões dos comprimentos de dois lados correspondentes são iguais e os ângulos correspondentes entre eles são iguais (inclusive a orientação).

$\triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle w_1 w_2 w_3$ equivale a dizer que

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Demonstração. O triângulo $\triangle z_1 z_2 z_3$ é semelhante ao triângulo $\triangle w_1 w_2 w_3$ se, e somente se,

$$\left| \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right| = \left| \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \right| \quad \text{e} \quad \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

Isto ocorre somente se

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 - z_1 & w_2 - w_1 & 0 \\ z_3 - z_1 & w_3 - w_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

□

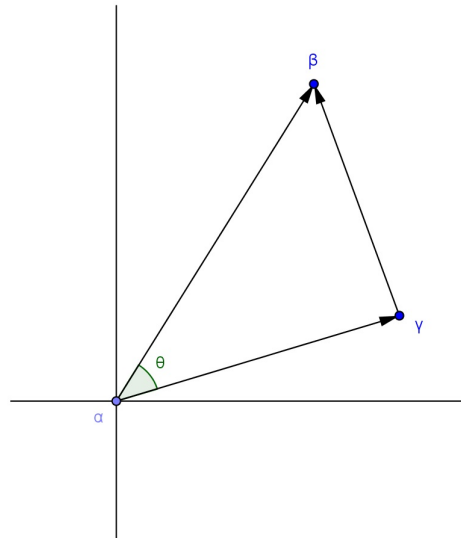


Figura 6 – Condição necessária e suficiente da colinearidade dos pontos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, a qual é obtida da identidade (2.1).

Sejam três pontos quaisquer $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. Temos que

$$\theta = \arg \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \arg (\beta - \alpha) - \arg (\gamma - \alpha). \quad (2.1)$$

Portanto, concluímos que α, β, γ são colineares se e somente se θ for um múltiplo inteiro de π radianos, o que é equivalente à seguinte afirmação:

$$\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Isto é equivalente à identidade

$$\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} - \overline{\left(\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \right)} = 0,$$

ou seja

$$\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} = \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\gamma} - \bar{\alpha}}.$$

Raciocinando de maneira similar ao que foi desenvolvido acima, temos que o perpendicularismo dos vetores $\vec{\alpha\beta}$ e $\vec{\alpha\gamma}$, por intermédio de (2.1), é equivalente à seguinte afirmação:

$$\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \text{ é imaginário puro,}$$

ou seja

$$\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} + \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\gamma} - \bar{\alpha}} = 0.$$

Analogamente a (2.2), para quatro pontos distintos $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, se

$$\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \in \mathbb{R}$$

e

$$\frac{\delta - \gamma}{\gamma - \alpha} \in \mathbb{R}$$

Daí segue que

$$\left(\frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha} \middle/ \frac{\delta - \gamma}{\gamma - \alpha} \right) \in \mathbb{R}.$$

Assim, $\overrightarrow{\alpha\beta}$ é paralelo a $\overrightarrow{\gamma\delta}$ se, e somente se

$$\frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} \in \mathbb{R}.$$

ou seja

$$\frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} = \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\delta} - \bar{\gamma}}$$

Exemplo 2. Dados dois pontos distintos z_1 e z_2 , encontrar as equações da

1. Reta que passa por z_1 e z_2 .

São todos os pontos que são colineares a z_1 e z_2 , ou seja,

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

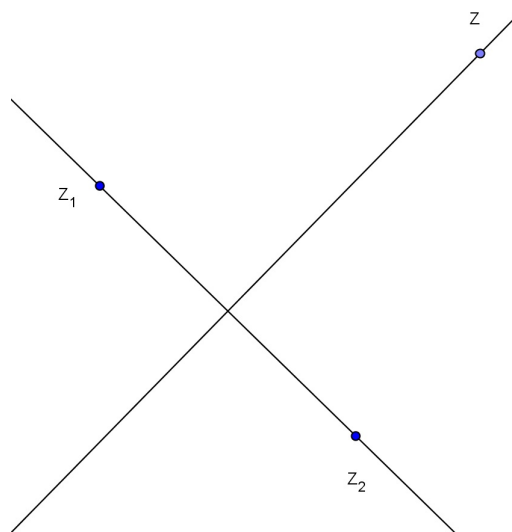


Figura 7 – Obtenção do conjunto dos pontos do plano complexo equidistantes aos complexos z_1 e z_2 . Eles pertencem à mediatriz do segmento que une esses pontos.

2. Mediatriz do segmento de reta que une z_1 e z_2 .

Lugar geométrico dos pontos equidistantes a z_1 e z_2 , ou seja,

$$\begin{aligned} |z_1 - z| &= |z_2 - z| \\ |z_1 - z|^2 &= |z_2 - z|^2 \\ \iff (z_1 - z)(\overline{z_1} - \overline{z}) &= (z_2 - z)(\overline{z_2} - \overline{z}) \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\iff \begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z_1 - z & \overline{z_2} - \overline{z} & 0 \\ z_2 - z & \overline{z_1} - \overline{z} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z & \overline{z} & 1 \\ z_1 & \overline{z_2} & 1 \\ z_2 & \overline{z_1} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

2.2 O circuncentro de um triângulo

Notamos que ao desenvolvermos a equação (2.3) obtida na seção anterior, temos

$$\begin{aligned} z_1 \overline{z_1} - z_1 \overline{z} - z \overline{z_1} + z \overline{z} &= z_2 \overline{z_2} - z_2 \overline{z} - z \overline{z_2} + z \overline{z} \\ |z_1|^2 - |z_2|^2 &= z(\overline{z_1} - \overline{z_2}) + \overline{z}(z_1 - z_2) \end{aligned}$$

As mediatrizes dos três lados de um triângulo qualquer se encontram em um ponto que é chamado de *circuncentro*.

Sejam A, B, C os vértices de um triângulo qualquer e α, β, γ números complexos que os representam, respectivamente. Daí, as equações das mediatrizes dos três lados são

$$\begin{aligned} (\overline{\gamma} - \overline{\alpha})z + (\gamma - \alpha)\overline{z} &= |\gamma|^2 - |\alpha|^2 \\ (\overline{\alpha} - \overline{\beta})z + (\alpha - \beta)\overline{z} &= |\alpha|^2 - |\beta|^2 \\ (\overline{\beta} - \overline{\gamma})z + (\beta - \gamma)\overline{z} &= |\beta|^2 - |\gamma|^2 \end{aligned}$$

Somando quaisquer duas equações, resulta na terceira. Isto significa que a solução de quaisquer duas dessas equações satisfaz a terceira. Ou seja, a interseção de quaisquer duas mediatrizes está sobre a terceira mediatriz. Assim, para determinar a equação do circuncentro escolhemos duas equações quaisquer e resolvemos o sistema:

$$(\overline{\gamma} - \overline{\alpha})z + (\gamma - \alpha)\overline{z} = |\gamma|^2 - |\alpha|^2 \quad (2.4)$$

$$(\overline{\alpha} - \overline{\beta})z + (\alpha - \beta)\overline{z} = |\alpha|^2 - |\beta|^2 \quad (2.5)$$

Da equação (2.5) vem,

$$(\alpha - \beta)\bar{z} = |\alpha|^2 - |\beta|^2 - (\bar{\alpha} - \bar{\beta})z$$

$$\bar{z} = \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2 - (\bar{\alpha} - \bar{\beta})z}{\alpha - \beta}$$

Substituindo na equação (2.4), temos

$$(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})z + (\gamma - \alpha) \frac{|\alpha|^2 - |\beta|^2 - (\bar{\alpha} - \bar{\beta})z}{\alpha - \beta} = |\gamma|^2 - |\alpha|^2$$

$$(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})z - \frac{(\gamma - \alpha)(\bar{\alpha} - \bar{\beta})z}{\alpha - \beta} = |\gamma|^2 - |\alpha|^2 - \frac{(\gamma - \alpha)(|\alpha|^2 - |\beta|^2)}{\alpha - \beta}$$

$$\frac{(\alpha - \beta)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha})z - (\gamma - \alpha)(\bar{\alpha} - \bar{\beta})z}{\alpha - \beta} = \frac{(\alpha - \beta)(|\gamma|^2 - |\alpha|^2) - (\gamma - \alpha)(|\alpha|^2 - |\beta|^2)}{\alpha - \beta}$$

$$[(\alpha - \beta)(\bar{\gamma} - \bar{\alpha}) - (\gamma - \alpha)(\bar{\alpha} - \bar{\beta})]z = |\gamma|^2(\alpha - \beta) - |\alpha|^2(\alpha - \beta) - |\alpha|^2(\gamma - \alpha) + |\beta|^2(\gamma - \alpha)$$

$$(\alpha\bar{\gamma} - |\alpha|^2 - \beta\bar{\gamma} + \beta\bar{\alpha} - \gamma\bar{\alpha} + \gamma\bar{\beta} + |\alpha|^2 - \alpha\bar{\beta})z = |\alpha|^2(\beta - \gamma) + |\beta|^2(\gamma - \alpha) + |\gamma|^2(\alpha - \beta),$$

o que nos faz finalmente concluir que

$$z = \frac{|\alpha|^2(\beta - \gamma) + |\beta|^2(\gamma - \alpha) + |\gamma|^2(\alpha - \beta)}{\bar{\alpha}(\beta - \gamma) + \bar{\beta}(\gamma - \alpha) + \bar{\gamma}(\alpha - \beta)}$$

2.3 Triângulo de Napoleão

Antes de apresentarmos o primeiro resultado de aplicação da teoria geométrica de números complexos que nos propusemos a fazer neste texto, desenvolveremos alguns resultados preliminares.

Por exemplo, temos que $\triangle z_1 z_2 z_3$ é um triângulo equilátero se, e somente se, $\triangle z_1 z_2 z_3 \sim \triangle z_3 z_1 z_2$. Podemos escrever a última afirmação na forma matricial abaixo:

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_3 & 1 \\ z_2 & z_1 & 1 \\ z_3 & z_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Daí, temos

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_3 - z_1 z_2 - z_2 z_3 = 0,$$

isto é,

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1 z_3 + z_1 z_2 + z_2 z_3.$$

Se ω é uma raiz cúbica da unidade diferente de um, então $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, pois $\omega^3 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1)$.

Logo

$$\begin{aligned}
 (z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)(\omega^2 + \omega + 1) &= 0 \\
 z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \omega(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) + \omega^2(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2) &= 0 \\
 z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + \omega(z_1z_3 + z_1z_2 + z_2z_3) + \omega^2(z_1z_3 + z_1z_2 + z_2z_3) &= 0 \\
 z_1(z_1 + \omega^2z_2 + \omega z_3) + \omega z_2(z_1 + \omega^2z_2 + \omega z_3) + \omega^2z_3(z_1 + \omega^2z_2 + \omega z_3) &= 0 \\
 (z_1 + \omega^2z_2 + \omega z_3)(z_1 + \omega z_2 + \omega^2z_3) &= 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, $z_1 + \omega^2z_2 + \omega z_3 = 0$ ou $z_1 + \omega z_2 + \omega^2z_3 = 0$, ou seja,

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega & 1 \\ z_3 & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} z_1 & 1 & 1 \\ z_2 & \omega^2 & 1 \\ z_3 & \omega & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Assim, $\triangle z_1z_2z_3 \sim \triangle 1\omega\omega^2$ ou $\triangle z_1z_2z_3 \sim \triangle 1\omega^2\omega$.

Isto posto, podemos apresentar a prova alternativa do Teorema de Napoleão, conforme segue abaixo.

Proposição 2. (Napoleão). *Em cada lado de um triângulo qualquer, desenhe um triângulo equilátero externo. Então os baricentros destes três triângulos equiláteros são os vértices de um quarto triângulo equilátero.*

Demonstração. Seja $\triangle z_1z_2z_3$ o triângulo dado e sejam $\triangle w_1z_3z_2$, $\triangle z_3w_2z_1$, $\triangle z_2z_1w_3$ triângulos equiláteros com a mesma orientação que $\triangle 1\omega\omega^2$, e $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ os baricentros destes triângulos equiláteros. Então, do resultado anterior

$$\begin{aligned}
 w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2 &= 0 \\
 z_3 + \omega w_2 + \omega^2 z_1 &= 0 \\
 z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_3 &= 0
 \end{aligned}$$

E como

$$\begin{aligned}
 \zeta_1 + \omega \zeta_2 + \omega^2 \zeta_3 &= \frac{1}{3}(w_1 + z_3 + z_2) + \frac{\omega}{3}(z_3 + w_2 + z_1) + \frac{\omega^2}{3}(z_2 + z_1 + w_3) \\
 &= \frac{1}{3}[(w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2) + (z_3 + \omega w_2 + \omega^2 z_1) + (z_2 + \omega z_1 \\
 &\quad + \omega^2 w_3)] = 0
 \end{aligned}$$

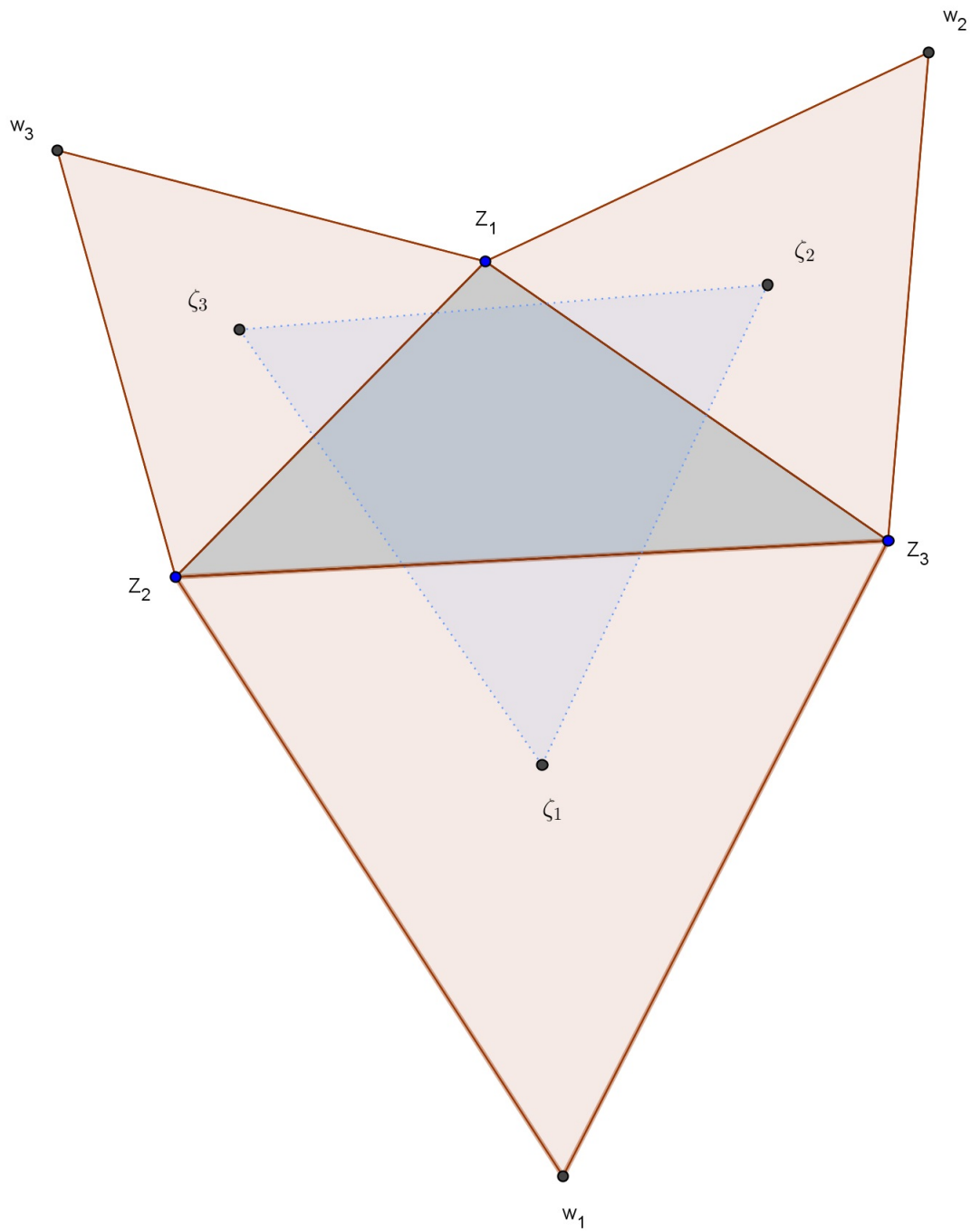


Figura 8 – Teorema de Napoleão, construído a partir do $\triangle z_1 z_2 z_3$.

Segue que $\triangle \zeta_1 \zeta_2 \zeta_3 \sim \triangle 1\omega\omega^2$ e, portanto, este triângulo também é equilátero. $\square$

3 O Teorema de Ptolomeu-Euler

O Teorema de Ptolomeu-Euler fornece uma condição necessária e suficiente para que um dado quadrilátero seja inscrito numa circunferência. O enunciado deste teorema, bem como sua demonstração alternativa utilizando números complexos, seguem abaixo.

Teorema 2. *Para quaisquer quatro pontos no plano,*

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{DA} \geq \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

A igualdade ocorre se, e somente se, os pontos são vértices de um quadrilátero inscrito ou são colineares.

Demonstração. Para quaisquer quatro números complexos α, β, δ e γ , verificamos

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma) &= \alpha\gamma - \beta\gamma - \alpha\delta + \beta\delta + \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\delta + \delta\gamma \\ &= \alpha(\beta - \delta) + \gamma(\delta - \beta) \\ &= (\alpha - \gamma)(\beta - \delta)\end{aligned}$$

Assim,

$$(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma) = (\alpha - \gamma)(\beta - \delta). \quad (3.1)$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$|(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma)| \leq |(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)| + |(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)|.$$

Mas por (3.1), vem

$$|(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma)| = |(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)| = |\alpha - \gamma||\beta - \delta|,$$

e

$$|(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)| + |(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)| = |\alpha - \beta||\gamma - \delta| + |\alpha - \delta||\beta - \gamma|.$$

Portanto, concluímos que

$$|\alpha - \gamma||\beta - \delta| \leq |\alpha - \beta||\gamma - \delta| + |\alpha - \delta||\beta - \gamma|.$$

Como visto anteriormente, a igualdade da desigualdade triangular

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

ocorre se, e somente se, z_1/z_2 é um número real não negativo.

Assim, procuramos uma condição para que $\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)}$ seja um número real positivo. Mas

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \delta} \Big/ \frac{\beta - \gamma}{\gamma - \delta} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \delta} \Big/ \frac{-(\gamma - \beta)}{\gamma - \delta}$$

é real positivo, se e somente se

$$\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \delta} \Big/ \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \delta}$$

é real negativo. Isto equivale a dizer que

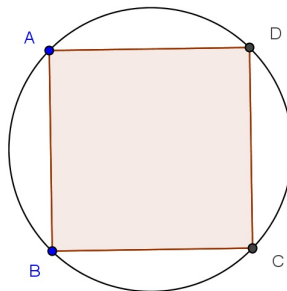
$$\arg \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \delta} \Big/ \frac{\gamma - \beta}{\gamma - \delta} \right) = \arg \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \delta} \right) - \arg \left(\frac{\gamma - \beta}{\gamma - \delta} \right) = \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Daí segue que $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ são vértices de um quadrilátero inscrito. □

Para encerrarmos o presente texto, apresentamos duas aplicações do Teorema de Ptolomeu-Euler, a saber: uma demonstração alternativa do Teorema de Pitágoras, e a relação da razão áurea com pentágonos.

3.1 Teorema de Pitágoras

Se o quadrilátero inscrito for um retângulo, temos



$$\overline{AB} = \overline{CD}, \overline{BC} = \overline{AD}, \overline{AC} = \overline{BD}.$$

Pelo teorema de Ptolomeu-Euler,

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = \overline{AC} \cdot \overline{BD}$$

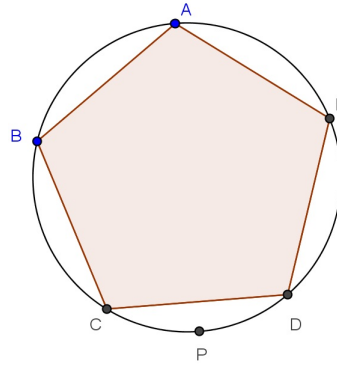
Igualando os lados correspondentes, da identidade acima obtemos o

Corolário 1. (Pitágoras) Num triângulo retângulo ABC , com o ângulo reto em B ,

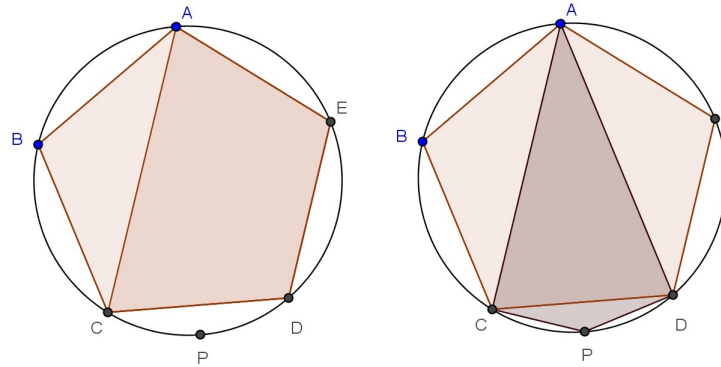
$$(\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2.$$

3.2 Razão áurea

Exemplo 3. Sejam $ABCDE$ um pentágono regular de lados l inscrito num círculo de raio r , P o ponto médio do arco CD e d o comprimento de uma diagonal.



Aplicando o teorema de Ptolomeu-Euler nos quadriláteros $ACDE$ e $ACPD$, obtemos



$$\overline{AE} \cdot \overline{CD} + \overline{AC} \cdot \overline{DE} = \overline{AD} \cdot \overline{CE},$$

$$l^2 + dl = d^2 \quad (3.2)$$

e

$$\overline{AD} \cdot \overline{CP} + \overline{PD} \cdot \overline{AC} = \overline{AP} \cdot \overline{CD}.$$

$$dx + xd = 2rl$$

$$2xd = 2rl \quad (3.3)$$

Notamos aqui, que x é o comprimento do lado do decágono regular inscrito no círculo de raio r .

Além disto, dividindo a equação (3.2) por l^2 , vem

$$\frac{d}{l} + 1 = \frac{d^2}{l^2}.$$

E da equação (3.3), temos

$$2xd = 2rl \Rightarrow \frac{d}{l} = \frac{r}{x}$$

Portanto, concluímos que $\varphi := \frac{r}{x} = \frac{d}{l}$ satisfaz a identidade $\varphi^2 = \varphi + 1$.

Assim, a razão r/x é a famosa razão áurea:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Referências

- [1] CHURCHILL, R. V; BROWN, James Ward. **Complex variables and applications.**
- [2] HAHN, Liang-Shin. **Complex numbers & geometry.**
- [3] RADOVANOVIC, Marko. **Complex numbers in geometry.**
- [4] SHASTRI, Anant R. **Complex numbers and plane geometry.**