

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

GABRIELLY LARSEN

**TRAJETÓRIAS DE PARTÍCULAS GERADAS POR ONDAS
AQUÁTICAS LINEARES**

CURITIBA

2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

GABRIELLY LARSEN

**TRAJETÓRIAS DE PARTÍCULAS GERADAS POR ONDAS
AQUÁTICAS LINEARES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná como requisito à obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Ribeiro Santos Junior.

CURITIBA

2020

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha mãe Cirlei e à minha avó Irene, duas guerreiras que traçaram um caminho árduo para me dar a chance de ingressar na universidade e viver este período acadêmico em sua plenitude. A admiração que sinto por vocês é imensurável e sou muito grata por tê-las em minha vida.

Agradeço também a todos os professores da Universidade Federal do Paraná com os quais já tive o prazer de ter contato e que contribuíram de forma imprescindível para minha formação acadêmica e profissional. Em especial, deixo meus agradecimentos ao professor Roberto Ribeiro Santos Junior, que apesar de sua intensa rotina acadêmica se propôs a me orientar no desenvolvimento deste trabalho de conclusão curso. Sua dedicação e paciência em cada passo deste projeto tornaram essa experiência incrível e inspiradora.

Ao meu melhor amigo e namorado Aramis, que nunca deixou de demonstrar todo seu apoio mediante às minhas empreitadas na vida acadêmica, deixo meu muito obrigada. E por fim mas não menos importante, expresso minha gratidão aos meus amigos e irmãos de graduação que compartilharam essa jornada comigo sempre proferindo palavras de incentivo.

“Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota.”

Madre Teresa de Calcuta.

Resumo

LARSEN, Gabrielly. Trajetórias de partículas geradas por ondas aquáticas lineares. 2020. 83 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2020.

O estudo das trajetórias de partículas geradas por uma onda aquática de superfície teve início com Green e Airy em meados do século XIX. A técnica empregada em seus trabalhos constitui o que chamamos de “teoria clássica de aproximações das trajetórias”. O objetivo principal deste trabalho consiste em estudar as trajetórias das partículas geradas por ondas de Stokes lineares, ou seja, ondas periódicas e viajantes cuja amplitude é pequena quando comparada à profundidade do canal. Mais especificamente, nós revisamos as ideias empregadas na teoria clássica de aproximações das trajetórias. Para tanto, realizamos a modelagem matemática das equações de conservação de massa e quantidade de movimento, determinamos o sistema de equações governantes para uma onda de superfície e encontramos o campo de velocidade submarino gerado por ondas lineares. Além disso, linearizando este campo, concluímos que as trajetórias das partículas são elipses, para ondas em canais de profundidades finita, e círculos, para ondas em canais de profundidade infinita. Ademais, vale ressaltar que encontramos as trajetórias tanto via equações de Euler quanto via teoria do potencial. De um modo geral o texto está estruturado e escrito da forma mais cuidadosa possível, visando assim oferecer a um leitor não familiarizado com a teoria matemática de ondas aquáticas todos os pré-requisitos necessários para a compreensão do tema abordado.

Palavras-chaves: *Ondas de Stokes lineares. Ondas aquáticas. Equações da hidrodinâmica. Equações de Euler. Teoria do potencial. Trajetórias de partículas.*

Abstract

LARSEN, Gabrielly. Particle trajectories generated by linear water waves. 2020. 83 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2020.

The study of particle trajectories generated by a surface wave began in the middle of the 19th century with Green and Airy. The technique employed in their work constitutes what is called “classical approximation theory of trajectories”. The main goal of this dissertation is to study the particle trajectories generated by linear Stokes waves, which are periodic traveling waves whose amplitude is small when compared to the depth of the canal. More precisely, we review the ideas employed in the classical approximation theory. To this end, we do the mathematical modeling of the principle of conservation of mass and momentum. We also determine the governing equations for surface water waves and find the submarine velocity field generated by linear waves. Furthermore, linearizing the velocity field, we conclude that the particle trajectories are described by ellipses in canals with finite depth and by circles in canals with infinite depth. Moreover, we emphasize that we find the particle paths via Euler equations and also via potential theory formulation. This work is structured and written so that readers who are not familiarized with the mathematical theory of waves can find in the text all theoretical background necessary to comprehend this subject.

Keywords: *Linear Stokes waves, Water waves, Hydrodynamic equations, Euler equations, Potential theory, Particle trajectories.*

Lista de Figuras

2.1	Representação do modelo genérico de onda trabalhado em um tempo t fixo.	27
3.1	Representação esquemática do ambiente de estudo definido.	30
4.1	Célula periódica genérica de uma onda de Stokes linear.	47
4.2	Representação do comportamento das trajetórias de partículas.	47
5.1	Deslocamento de uma partícula de fluido.	56

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	15
1.1 Noções básicas sobre a teoria matemática da dinâmica dos fluidos	15
1.2 Resolução de EDP's e ondas	17
1.3 Conceitos relevantes do cálculo	17
2 Fluidos e Ondas: propriedades e características	21
2.1 Fluidos	21
2.1.1 Fluido ideal: as equações de Euler	22
2.2 Ondas	26
3 As Equações da Hidrodinâmica	29
3.1 As equações de Euler para ondas aquáticas	29
3.1.1 Definindo nosso ambiente de estudo	29
3.1.2 Deduzindo as equações	30
3.2 Formulação via teoria do potencial	34
4 As trajetórias das partículas via equações de Euler	37
4.1 Equações de Euler: teoria linear	38
4.1.1 Adimensionalização e linearização	38
4.1.2 Resolução do sistema de Equações de Euler	40
4.1.3 Dimensionalização	41
4.2 Trajetória das partículas	43
5 As trajetórias das partículas via teoria do potencial	49
5.1 Linearização das Equações Governantes	49
5.2 Solução do sistema linear	50
5.3 Trajetória das partículas	54
5.3.1 Trajetória das partículas em canais com profundidade finita	55
5.3.2 Trajetória das partículas em canais de profundidade infinita	58

Considerações finais	63
Referências	64
Apêndices	67
A Resolvendo as equações de Euler lineares	69
A.1 Definições	69
A.2 Achando a solução	71
B Adimensionalização	77
B.1 Adimensionalização das equações de Euler	77
B.2 Teoria do Potencial	80

Introdução

Seja em uma viagem familiar ou apenas em um passeio com os amigos muitos de nós já tivemos como destino a praia e, dentre todos os encantos naturais que este local apresenta, as ondas imponentes do mar certamente já chamaram nossa atenção. Este fenômeno específico pode ser estudado por meio de diversas perspectivas e dentre elas se encontra àquela que norteia este trabalho: a teoria matemática das ondas aquáticas.

Historicamente, o primeiro autor a se atentar para a teoria de ondas aquáticas foi Isaac Newton em 1687. Ele, apesar de explicitar resultados aproximados e que não continham muita sofisticação matemática, inspirou diversos outros pesquisadores a replicarem seus experimentos e dar continuidade às suas observações na área. Anos mais tarde, mais precisamente em 1757, Leonhard Euler despontou com sua proposta de modelagem matemática para a dinâmica de ondas aquáticas e, a partir desta nova perspectiva, deduziu as equações da hidrodinâmica – estas as quais são utilizadas até os dias de hoje (vide [7]).

Seguindo nessa linha de estudo outro autor de destaque foi Pierre-Simon Laplace (1776), o qual foi o primeiro a postular o problema de valor inicial (PVI) que consiste em: tida uma onda de superfície, determinar seu movimento subsequente. Maiores contribuições para este problema foram dadas por Siméon D. Poisson e Augustin-Louis Cauchy que, em meados do século XIX, criaram um marco histórico na Análise por conta da sofisticação apresentada em seus trabalhos [7]. Todos estes avanços no estudo da dinâmica da onda de superfície abriram caminho para que, superado o primeiro obstáculo de determinar sua evolução, também fosse possível encontrar o campo de velocidade submarino gerado por ela e, conseqüentemente, as trajetórias das partículas.

Partindo desta ideia, os primeiros resultados com respeito às trajetórias das partículas de um fluido foram obtidos por George Green e George Biddell Airy (vide [7]). Eles, em seus respectivos trabalhos publicados em em 1839 e 1841, deduziram que as trajetórias geradas por uma onda de superfície são curvas fechadas: círculos para canais de profundidade infinita e elipses para canais de profundidade finita – ambos resultados se apoiam em uma aproximação no campo de velocidade e se encaixam no que hoje denominamos “teoria clássica de aproximação das trajetórias”.

Neste trabalho de conclusão de curso temos como objetivo principal estudar as tra-

jetórias das partículas geradas pela passagem de uma onda de Stokes linear na superfície livre. Em outras palavras, consideraremos aqui ondas periódicas e viajantes cuja amplitude é pequena quando comparada à profundidade do canal. Mais especificamente, vamos restringir nossa investigação à teoria clássica de aproximações, de modo a reproduzir os resultados expostos por Green e Airy.

Com este objetivo em vista, utilizaremos técnicas da modelagem matemática para obter versões aproximadas das equações que governam a dinâmica da onda e, deste modo, determinar o campo de velocidade gerado por ela dentro de um ambiente específico previamente definido. Esse estudo será feito sob a luz de duas formulações distintas: via equações de Euler e teoria do potencial.

Quanto a metodologia utilizada no desenvolvimento do trabalho temos, em um primeiro momento, a formação de uma base conceitual necessária para a completa compreensão do tema. Essa base se inicia com a apresentação de diversas definições pertinentes do campo da física e da matemática, perpassa pela descrição dos elementos principais que constituem nosso objeto de estudo e acaba com o processo de dedução das equações de Euler. Logo em seguida são deduzidas as equações governantes para a dinâmica de ondas aquáticas de superfície, assim como as respectivas equações diferenciais parciais (EDP's) resultantes da aplicação dos processos de adimensionalização e linearização. Por fim, utilizando estratégias de resolução que vão de simples manipulações algébricas até a aplicação da transformada de Fourier periódica, é obtido o campo de velocidade submarino gerado pela onda de superfície.

Todos estes procedimentos, ao serem realizados de forma ordenada, nos permitirão não só reproduzir os resultados conhecidos da teoria clássica de aproximações como também tirar informações qualitativas a respeito das trajetórias das partículas. Cabe ressaltar que na prática as trajetórias das partículas

Cabe ressaltar que na prática as trajetórias das partículas nunca descrevem órbitas fechadas. Mais precisamente, após uma partícula passar duas vezes por baixo de uma mesma fase da onda, a distância horizontal entre as suas posições inicial e final – a qual chamamos de *drift* – é sempre positiva. George Gabriel Stokes, em 1847, foi o primeiro a identificar que o *drift* é positivo, no entanto apenas recentemente é que foi dada uma prova analítica para este fato: Constantin e Villari[5] o demonstraram, em 2008, para ondas lineares, e Constantin[4], em 2006, provou para uma onda de Stokes qualquer.

Segue-se daí, que o encadeamento de ideias supracitadas são organizadas no texto da seguinte forma: no primeiro capítulo são expostas algumas definições e teoremas que embasam boa parte do estudo subsequente realizado. No segundo capítulo encontram-se os conceitos básicos que caracterizam tanto um fluido quanto uma onda, assim como é feita a dedução das equações de Euler. Já no terceiro capítulo inicia-se o processo

de modelagem das equações da hidrodinâmica, onde é feita a descrição do ambiente de estudo e a apresentação das condições de fronteira tanto por meio das equações de Euler quanto pela teoria do potencial. Por fim, no quarto e quinto capítulos, são deduzidas respectivamente as trajetórias das partículas via equações de Euler e teoria do potencial.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo é inteiramente voltado à definições, teoremas, propriedades e identidades de destaque utilizadas durante o desenvolvimento deste trabalho. As descrições feitas aqui servirão como base e justificativa para diversos passos tomados ao decorrer deste estudo de modo que, dada referência futura, o leitor possa consultá-las quando julgar necessário.

1.1 Noções básicas sobre a teoria matemática da dinâmica dos fluidos

Esta seção será voltada para a apresentação de conceitos e termos que serão utilizados ao nos referirmos aos fluidos em geral.

Dito isso, a primeira definição apresentada será a da derivada material, um conceito matemático que quando combinado às características de um fluido se mostra extremamente útil para os processos de modelagem das equações governantes.

Definição 1.1.1. *Seja $\vec{U} = (u, v, w)$ o campo de velocidade de um fluido e $f(x, y, z, t)$ uma grandeza escalar qualquer, o operador diferencial*

$$\frac{Df}{Dt} = (\vec{U} \cdot \nabla)f + \frac{\partial f}{\partial t}$$

é chamado de derivada material de f , onde o termo $(\vec{U} \cdot \nabla)f$ é interpretado como $\vec{U} \cdot \nabla f$. Se $\vec{F}(x, y, t) = (F_1(x, y, t), F_2(x, y, t), F_3(x, y, t))$ é uma grandeza vetorial, a derivada material de \vec{F} é definida por

$$\frac{D\vec{F}}{Dt} = \left(\frac{DF_1}{Dt}, \frac{DF_2}{Dt}, \frac{DF_3}{Dt} \right)$$

([16], p. 16).

Observação 1.1.1. *Considere uma partícula de fluido localizada no ponto \vec{a} para o instante $t = t_0$ e tome sua trajetória como sendo $\vec{x}(t, \vec{a})$. Além disso considere $\vec{U}(\vec{x}(t, \vec{a}), t)$ como sendo o campo de velocidade deste fluido. Logo, segue diretamente da definição 1.1.1, que a aceleração do fluido no ponto $\vec{x}(t, \vec{a})$ é dada por:*

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2}(t) = \frac{D\vec{U}}{Dt}(\vec{x}(t, \vec{a}), t)$$

([16], p. 16).

Observação 1.1.2. *Seja $f(x, y, z, t)$ uma grandeza escalar ao longo de um escoamento e $\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), t)$ a trajetória de uma partícula de fluido, então*

$$\frac{d}{dt}[f(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))] = \frac{Df}{Dt}(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t), t).$$

Donde, a derivada material de uma função $f(x, y, z, t)$ nos dá o valor, no instante t , da derivada de f ao longo da trajetória da partícula que neste instante ocupa a posição $(\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$.

Após fixado esse conceito, podemos então dar início à listagem de definições que de fato se referem diretamente ao âmbito dos fluidos.

Definição 1.1.2. *Um fluido é dito incompressível se sua densidade não muda com a pressão. Para fluidos incompressíveis a taxa de variação da densidade ao longo da trajetória de uma partícula é nula, isto é,*

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

([2], p. 75).

Definição 1.1.3. *Se o campo de velocidade de um fluido for $\vec{U} = (u, v, w)$, então, seu rotacional*

$$\nabla \times \vec{U} = (\partial_y w - \partial_z v, \partial_z u - \partial_x w, \partial_x v - \partial_y u)$$

é chamado de campo de vorticidade do escoamento. Quando um campo de vorticidade é nulo dizemos que o escoamento é irrotacional ([3], p. 18 e p. 47).

Por fim, outro conceito muito importante que definiremos de modo informal aqui é a viscosidade. A viscosidade de um fluido é uma propriedade associada à resistência deste com respeito ao escoamento ou deformação causada por uma tensão de cisalhamento. De modo geral, um fluido com baixa viscosidade é aquele em que, dada uma força aplicada sobre ele, a transferência de movimento entre as moléculas é mínima – enquanto um fluido viscoso se comporta de maneira oposta. Todos os fluidos possuem uma certa viscosidade, contudo, em determinados problemas reais, é possível modelar o comportamento do fluido considerando sua viscosidade nula – neste caso dizemos que o fluido é ideal ([17], p. 220).

1.2 Resolução de EDP's e ondas

As definições presentes neste tópico compõem a base necessária para as estratégias de resolução de EDP aplicadas durante o trabalho. Será através dos conceitos definidos aqui que teremos o aporte teórico necessário para solucionar o modelo matemático que define a dinâmica de uma onda aquática de superfície.

Vale ressaltar também que os conceitos apresentados nesta seção são inteiramente retirados do referencial [11], de modo que as transcrições feitas aqui são dadas da forma mais fiel possível com uma única modificação sendo a notação utilizada – a saber, a troca da representação de funções de $u(x, t)$ por $\eta(x, t)$.

Definição 1.2.1. *Uma equação diferencial parcial (EDP) para uma função $\eta(x, t)$ é uma equação diferencial que envolve uma ou mais derivadas parciais de η com respeito a x e t . ([11], p. 13).*

Definição 1.2.2. *Ondas representadas por funções da forma $\eta(x, t) = f(x - ct)$, onde f é uma função de uma variável e c uma constante não nula, são chamadas de ondas viajantes ([11], p. 23).*

Vale ressaltar que ondas viajantes são um dos tipos mais comuns e fundamentais de representação para uma onda.

Definição 1.2.3. *Uma solução onda viajante de uma EDP é uma solução da forma $\eta(x, t) = f(x - ct)$ ([11], p. 24).*

Para achar uma solução onda viajante geralmente se começa supondo que $\eta(x, t) = f(x - ct)$ já é uma opção de solução e a partir disto determina-se quais funções f e constantes c tornam de fato isso verdade.

Definição 1.2.4. *Uma onda viajante que pode ser escrita da forma $\eta(x, t) = a \cos(kx - wt)$ onde $a \neq 0, k > 0$ e $w > 0$ são constantes é chamada trem de onda ([11], p. 28).*

Uma EDP pode ter soluções que são da forma trem de onda, mas não necessariamente para valores arbitrários de k e w , isto motiva a seguinte definição:

Definição 1.2.5. *Chamamos de relação de dispersão de uma EDP a relação que k e w devem satisfazer para que $\eta(x, t) = a \cos(kx - wt)$ seja uma solução da EDP ([11], p. 29).*

1.3 Conceitos relevantes do cálculo

Este espaço é destinado para apresentar as definições e teoremas da teoria do cálculo que serão utilizados - explicitamente ou implicitamente - diversas vezes durante o estudo desenvolvido nos capítulos seguintes.

Definição 1.3.1. Um campo vetorial \vec{F} é chamado campo vetorial conservativo se ele for o gradiente de alguma função escalar, ou seja, se existir uma função f tal que $F = \nabla f$. Nessa situação, f é denominada função potencial de \vec{F} ([20], p. 952).

Definição 1.3.2. Rotacional Se $\vec{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e as derivadas parciais de P, Q e R existem, então o rotacional de F é o campo vetorial em \mathbb{R}^3 definido por

$$\text{rot}F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

([20], p. 977).

Observação 1.3.1. Note que se utilizarmos a notação de operadores obtemos

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

e, portanto, ao considerar ∇ como um vetor, podemos representar o rotacional da seguinte maneira:

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \text{rot}F.$$

Teorema 1.3.2. Se F for um campo vetorial definido sobre todo \mathbb{R}^3 cujas funções componentes tenham derivadas parciais de segunda ordem contínuas e $\text{rot}F = 0$, então F será um campo vetorial conservativo ([20], p. 978).

Definição 1.3.3. Se $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ é um campo vetorial em \mathbb{R}^3 e $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ e $\frac{\partial}{\partial z}$ existem, então o divergente de F é a função de três variáveis definida por

$$\text{div}F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

([20], p. 979).

Observação 1.3.3. Note que se utilizarmos novamente a notação de operadores vamos obter que $\text{div}F$ pode ser escrito como : $\text{div}F = \nabla \cdot F$.

Teorema 1.3.4 (Teorema do Divergente). Seja B uma região sólida simples e seja S a superfície fronteira de E , orientada positivamente (para fora). Seja F um campo vetorial cujas funções componentes tenham derivadas parciais contínuas em uma região aberta que contenha E . Então

$$\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_E \nabla \cdot F \, dV$$

([20], p. 1008).

Observação 1.3.5. Ao longo do texto usaremos a notação dV e dA para representar, respectivamente, os elementos infinitesimais de volume e superfície. Além disso tomaremos \vec{x} como sendo $\vec{x} = (x, y, t)$. Desta forma o teorema da divergência aplicado a uma região W com fronteira ∂W será escrito como

$$\int_W \nabla \cdot F(\vec{x}) dV = \int_{\partial W} \vec{F} \cdot \vec{n} dA.$$

Teorema 1.3.6 (Teorema do Valor Médio (TVM)). *Se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , então existirá pelo menos um c em (a, b) tal que*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \text{ ou } f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

([8], p.225).

Definição 1.3.4. A fórmula de Taylor para uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, definida no aberto $A \subset \mathbb{R}^n$, em torno do ponto $a \in A$ é a seguinte:

$$f(a + v) = f(a) + df(a)v + \frac{1}{2}d^2f(a)v^2 + \dots + \frac{1}{p!}d^p f(a)v^p + r_p(v),$$

onde

$$r_p(v) = \frac{1}{(\rho + 1)!} d^{\rho+1} f(a + \theta v) \cdot v^{\rho+1}$$

com $\theta \in (0, 1)$ ([13], p. 151).

Observação 1.3.7. No caso particular em que $f : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a fórmula de Taylor se escreve

$$f(a_1 + v_1, a_2 + v_2) = f(a_1, a_2) + f_x(a_1, a_2)v_1 + f_y(a_1, a_2)v_2 + \mathcal{O}(v_1^2, v_2^2, v_1v_2),$$

onde $\mathcal{O}(v_1^2, v_2^2, v_1v_2)$ representa termos envolvendo potências de ordem maior ou igual a dois de v_1 e v_2 e produtos de potências de ordem maior ou igual a um de v_1 e v_2 .

Por fim, visto as prévias definições de rotacional e divergente, apresentaremos algumas poucas identidades pertinentes ao nosso estudo futuro:

Seja c uma constante, f uma função escalar e \vec{F} um campo vetorial valem as seguintes propriedades:

$$\nabla \cdot (f\vec{F}) = f(\nabla \cdot \vec{F}) + (\vec{F} \cdot \nabla)f, \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{2}\nabla(\vec{F} \cdot \vec{F}) = \vec{F} \times (\nabla \times \vec{F}) + (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{F}, \quad (1.2)$$

$$\nabla \cdot (c\vec{F}) = c(\nabla \cdot \vec{F}). \quad (1.3)$$

Capítulo 2

Fluidos e Ondas: propriedades e características

Visto que o nosso trabalho está relacionado com a teoria matemática de ondas aquáticas julgamos necessário, em um primeiro momento, conhecer um pouco mais acerca de alguns conceitos tanto da dinâmica do fluidos quanto de ondas em geral.

2.1 Fluidos

De acordo com o dicionário Michaelis da língua portuguesa, fluido é definido como:

"Qualquer substância que, em razão da pouca adesão das moléculas entre si, flui como os líquidos e os gases e não apresenta uma forma independente, cedendo facilmente às mudanças de forma provocadas pela pressão do recipiente ou do espaço em que se encontra."(MICHAELIS, [15]).

Baseados nesta definição e dada a vivência diária que temos com esses tipos de substâncias é normal pensarmos que há uma distinção clara entre sólidos e fluidos, porém, na prática, isso não se mostra verdade. A fronteira que define se um material é sólido ou fluido é extremamente tênue e isso ocorre por conta da existência de substâncias que têm a capacidade de assumir ambas as formas quando expostas a diferentes situações – um bom exemplo disso é a gelatina que, apesar de se comportar como um sólido elástico, quando é submetida a um processo constante de mistura torna-se líquida.

Por conta disso, a fim de não se preocupar com esta ambiguidade em meio ao nosso estudo, estabeleceremos a partir de agora que os fluidos com os quais trabalharemos serão fluidos ideais (vide seção 1.1).

Definido o conceito de fluido, busca-se então saber a respeito de suas principais propriedades. Esta tarefa cabe a dinâmica dos fluidos, um campo de estudo que se

preocupa em conhecer o valor das variáveis – geralmente dependentes da posição no espaço e do tempo – que determinam o estado de um fluido qualquer. Vale ressaltar ainda que, apesar de um fluido ser composto por um conjunto de moléculas distintas interagindo entre si, quando estamos interessados nas suas propriedades macroscópicas, a saber, pressão, velocidade e densidade, é possível tratá-lo como um meio contínuo. Esta hipótese é a base para a teoria matemática da dinâmica dos fluidos.

2.1.1 Fluido ideal: as equações de Euler

Conhecido o objetivo da dinâmica dos fluidos e visando trazer um caráter matemático para o nosso estudo, estaremos preocupados a partir de agora em definir expressões que descrevam o comportamento de um fluido ideal a partir da relação entre suas grandezas. Para tanto iremos nos basear em duas condições físicas essenciais: os princípios de conservação de massa e conservação da quantidade de movimento, os quais determinam as equações de Euler. Com respeito a modelagem matemática destas equações temos ainda a possibilidade de utilizar duas abordagens distintas: a Lagrangeana ou a Euleriana. Aqui optaremos por trabalhar mediante a abordagem Euleriana visto que a modelagem das equações de Euler dentro desta perspectiva é mais acessível a nível de graduação.

Conservação de Massa

O primeiro princípio a ser considerado será o da conservação de massa. Esta condição física se baseia no fato de que a taxa de crescimento de massa do fluido dentro de uma região é igual a taxa em que essa mesma massa atravessa a fronteira para dentro da região considerada.

Agora, antes de começarmos de fato a modelagem matemática deste princípio, vamos estabelecer algumas notações. Primeiramente, definimos que a região em que se ambientará nosso estudo é uma região fixa denotada por W , além disso consideramos \vec{x} como sendo os pontos de W , t o tempo e $\rho(\vec{x}, t)$ a densidade do fluido na posição \vec{x} no instante t .

Com isso, temos já de início que a massa da região W no tempo t pode ser dada como

$$m(W, t) = \int_W \rho(\vec{x}, t) dV. \quad (2.1)$$

Observação 2.1.1. *Uma estratégia muito utilizada para compreender que grandeza física uma determinada equação representa é o estudo de unidades. Este processo consiste em analisar ambos os lados de uma expressão e, a partir da tradução de suas grandezas em termos da “unidade de medida” que elas representam, compará-los. Assim, se os dois lados forem compatíveis, sua equivalência é válida.*

Esta estratégia será frequentemente utilizada durante o desenvolvimento a seguir e a forma de representação adotada em sua aplicação será dada por: [Grandeza] = [SÍMBOLO DA UNIDADE].

Considerando M e V como unidades de massa e volume, respectivamente, obtemos a partir de um estudo de unidades na equação (2.1) que

$$[m] = [\rho][dV] \Rightarrow [M] = \frac{[M]}{[V]}[V] \Rightarrow [M] = [M]$$

e, portanto, mediante sua validação, que a taxa de variação da massa do fluido em W ao decorrer do tempo é dada por

$$\frac{dm}{dt}(W, t) = \frac{d}{dt} \int_W \rho(\vec{x}, t) dV.$$

Mais ainda, como estamos integrando em uma região W fixa, podemos passar a derivada em relação ao tempo para dentro da integral, o que resulta em

$$\boxed{\frac{dm}{dt}(W, t) = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) dV.}$$

Definida a taxa de crescimento de massa do fluido dentro da região, nos preocuparemos agora em discutir a respeito da taxa com a qual essa mesma massa atravessa a fronteira de W . Note que, sendo ∂W a fronteira da região considerada, \vec{n} o vetor normal unitário que aponta para fora de W , \vec{U} o campo de velocidade do fluido e dA um elemento de área em ∂W , o volume do fluido que passa através de ∂W por unidade de tempo é

$$\int_{\partial W} (\vec{U} \cdot \vec{n}) dA.$$

Fato comprovado pelo seguinte estudo de unidades:

$$[\vec{U}][\vec{n}][dA] = \frac{[L]}{[T]}[L^2] = \frac{[L^3]}{[T]} = \frac{[V]}{[T]}.$$

Desta forma, por argumentos análogos ao apresentado acima, verificamos que a taxa com que a massa do fluido atravessa a fronteira ∂W é dada pela integral

$$\boxed{\int_{\partial W} (\rho \vec{U}) \cdot \vec{n} dA.}$$

Agora, tendo em mãos as duas expressões destacadas anteriormente e aplicando o princípio da conservação de massa, obtemos o seguinte:

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) dV = - \int_{\partial W} (\rho \vec{U}) \cdot \vec{n} dA,$$

onde o sinal negativo presente do lado direito desta expressão segue diretamente da definição adotada para o vetor normal \vec{n} – ao considerar \vec{n} apontando para fora de W , tem-se que a velocidade do fluido que entra na região é negativa.

Obtida a fórmula matemática que descreve a conservação de massa, podemos ainda representá-la de uma maneira mais simples. Para isso nos utilizaremos do Teorema do Divergente (1.3.4) junto à Observação 1.3.5, donde segue a cadeia de implicações abaixo:

$$\begin{aligned} \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) dV &= - \int_{\partial W} (\rho \vec{U}) \cdot \vec{n} dA \\ \Rightarrow \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) dV &= - \int_W \nabla \cdot (\rho \vec{U}) dV \\ \Rightarrow \int_W \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) \right) dV &= 0. \end{aligned}$$

Portanto, como W é uma região qualquer fixa, concluímos que uma das equações de Euler – a qual representa a conservação de massa – é dada por

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0. \quad (2.2)$$

Conservação da quantidade de movimento

O segundo princípio considerado se refere a conservação da quantidade de movimento. Essa condição física, representada pela grandeza \vec{Q} , relaciona a massa e a velocidade de um corpo por meio da igualdade

$$\vec{Q} = m\vec{v},$$

donde, derivando ambos os lados em relação ao tempo, obtemos o seguinte:

$$\frac{d\vec{Q}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}.$$

É fácil ver que $\frac{d\vec{Q}}{dt}$ representa a força resultante (pois pela segunda lei de Newton $\vec{F}_R = m\vec{a}$) e, deste modo, a conservação da quantidade de movimento está diretamente relacionada com as forças que agem no corpo do fluido. Dito isso, iremos então estudar todas estas forças e, com este propósito, dividimos nossa análise em duas partes distintas: na primeira estudaremos as forças de superfície que agem sobre o fluido e na segunda estudaremos as forças de campo que atuam sobre suas partículas.

Começando com as forças de superfície – exemplificadas pela pressão ou atrito – obtemos que, por elas serem geradas por meio do contato que as partículas tem umas com as outras e dada a inexistência de viscosidade no fluido aqui estudado, a força resultante que as representam se resume à forças normais que atuam sobre a superfície, ou seja, podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$\vec{F}_S = - \int_{\partial W} P(\vec{x}, t) \vec{n} dA,$$

onde $P(\vec{x}, t)$ representa a pressão do fluido em W .

De fato, ao realizar um estudo de unidades, tem-se a validade desta afirmação:

$$[\vec{F}] = [P][\vec{n}][dA] \Rightarrow [F] = \frac{[F]}{[L^2]}[L^2] \Rightarrow [F] = [F].$$

A partir daí, com a intenção de simplificar a representação desta força resultante, aplicaremos o Teorema do Divergente (1.3.4) e a observação 1.3.5 na integral acima. Aqui, diferente da situação que tínhamos ao utilizar esta técnica na conservação de massa, vemos que não há um vetor acompanhando \vec{n} e, portanto, as condições do Teorema citado não são satisfeitas. Para resolver este impasse empregaremos uma estratégia que consiste em realizar o produto interno em ambos os lados da expressão trabalhada por um vetor unitário $\vec{e} = (e_1, e_2, e_3)$:

$$\begin{aligned} \vec{e} \cdot \vec{F}_S &= \vec{e} \cdot \left(- \int_{\partial W} P \vec{n} dA \right) = \\ &= (e_1, e_2, e_3) \cdot \left(- \int_{\partial W} P n_1 dA; - \int_{\partial W} P n_2 dA; - \int_{\partial W} P n_3 dA \right) = \\ &= \left(- \int_{\partial W} P e_1 n_1 dA; - \int_{\partial W} P e_2 n_2 dA; - \int_{\partial W} P e_3 n_3 dA \right) = \\ &= - \int_{\partial W} (P \vec{e}) \cdot \vec{n} dA. \end{aligned}$$

Logo, podendo finalmente aplicar o Teorema do Divergente, obtemos que

$$\vec{e} \cdot \vec{F}_S = - \int_W \nabla \cdot (P \vec{e}) dV = - \int_W \vec{e} \cdot \nabla P dV$$

e, desta forma, a igualdade que representa a força de superfície total que age sobre o fluido é dada por

$$\boxed{\vec{F}_S = - \int_W \nabla P dV.}$$

Considerando agora as forças de campo que agem sobre as partículas do fluido – como por exemplo, o eletromagnetismo e a gravidade – temos que a força resultante nesse caso pode ser expressa como

$$\boxed{\vec{F}_C = \int_W \rho(\vec{x}, t) \vec{b}(\vec{x}, t) dV,}$$

onde $\vec{b}(\vec{x}, t)$ representa uma força externa por unidade de massa que age sobre o fluido.

Realizando o estudo de unidades temos:

$$[F] = [\rho][\vec{b}][dV] \Rightarrow [F] = \frac{[M]}{[L^3]} \frac{[F]}{[M]} [L^3] \Rightarrow [F] = [F].$$

Desta forma, obtidas as expressões em destaque que representam tanto as forças externas (\vec{F}_C) quanto as forças de superfície (\vec{F}_S) que agem sobre o fluido, obtemos que a força resultante é

$$\vec{F}_R = - \int_W \nabla P dV + \int_W \rho \vec{b} dV.$$

Mais ainda, lembrando que a motivação para a análise feita até agora tinha fundamento na relação direta entre a quantidade de balanço de movimento e a segunda lei de Newton, vamos considerar o seguinte:

$$\vec{F}_R = m\vec{a} = m \frac{D\vec{U}}{Dt} = \rho V \frac{D\vec{U}}{Dt} \Rightarrow \vec{F}_R = \int_W d\vec{F} = \int_W \rho \frac{D\vec{U}}{Dt} dV$$

(vide Observação 1.1.1).

Assim, igualando as duas formas de representação encontradas para \vec{F}_R , concluímos que a força resultante que atua sobre o fluido por unidade volume pode ser escrita como:

$$-\nabla P + \rho \vec{b} = \rho \frac{D\vec{U}}{Dt}. \quad (2.3)$$

Expressão esta que representa o princípio da conservação da quantidade de movimento e é tida como uma das equações de Euler.

2.2 Ondas

A definição formal dada a uma onda vai de perspectivas mais físicas, como dizer que ela é uma “perturbação periódica que se propaga no espaço ou em um meio material, mediante a qual pode haver transporte de energia de um ponto a outro (MICHAELIS, [15]).”, até um olhar mais matemático, que define que "uma onda é qualquer sinal fácil de reconhecer que é transferido de uma parte de um meio para outra com uma velocidade de propagação reconhecível (KNOBEL, R., [11], p. 4)". Ambas estas formas de definição sugerem a existência de diversos tipos de ondas que variam desde a sua natureza até a sua forma de propagação e, por conta disso, apresentaremos a seguir um conjunto de propriedades essenciais que nos permitem caracterizar uma onda em termos da sua aparência e comportamento.

Para tanto, a primeira coisa que faremos será estabelecer um modelo genérico de onda com o qual trabalharemos durante todo nosso estudo (vide figura 2.1).

A partir deste modelo é fácil notar a natureza oscilatória da nossa onda e, portanto, é razoável utilizar funções como seno ou cosseno para descrevê-la durante sua propagação horizontal. Dito isso, tomaremos então a seguinte representação para seu perfil:

$$\eta(x, t) = a \cos(kx - wt),$$

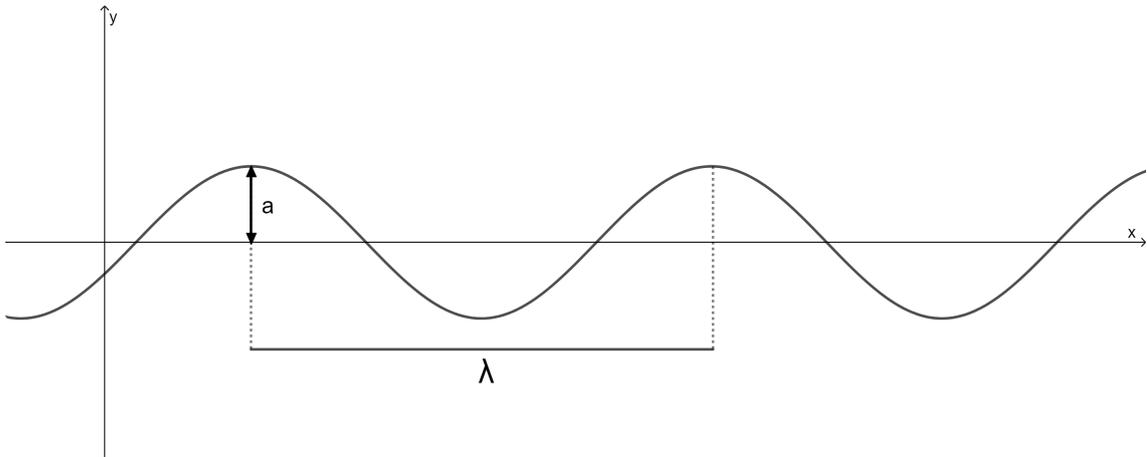


Figura 2.1: Representação do modelo genérico de onda trabalhado em um tempo t fixo.

Fonte: Autoria própria.

de modo que os elementos a , k e w que a compõe podem ser melhor compreendidos por meio das descrições listadas abaixo:

▷ $\eta(x, t)$: Representa o deslocamento transversal do elemento que se encontra na posição x dado um instante t , em outras palavras, $y = \eta(x, t)$.

▷ a : É dita a amplitude da onda e tem como função representar o deslocamento transversal máximo que a onda atinge a partir de sua posição de equilíbrio.

▷ λ : Representa o comprimento de onda, o qual é definido como a distância entre duas cristas (ponto mais alto da onda) ou dois cavados (ponto mais baixo da onda) consecutivos dado um tempo t fixo.

▷ T : Fixado um ponto x_0 no eixo x , o período é o tempo necessário para a passagem de um ciclo (repetição do padrão da onda) por este ponto.

▷ k : Para representar a quantidade de repetições que a onda descreve dentro de um intervalo de comprimento 2π determina-se um novo parâmetro chamado número de onda. Esse parâmetro, representado pelo símbolo k , é dado em termos do comprimento de onda λ a partir da seguinte igualdade:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

▷ w : A frequência angular w se encarrega de representar o número de ciclos que passam por um ponto fixo x_0 durante o intervalo de tempo 2π . Dito isso, obtemos diretamente da descrição do período da onda, que essa característica é dada por:

$$w = \frac{2\pi}{T}.$$

▷ c : É a velocidade de propagação da onda $\eta(x, t)$, a qual satisfaz a relação $c = \frac{w}{k}$. Esta igualdade segue diretamente do fato que

$$\eta(x, t) = a \cos(kx - wt) = a \cos(k(x - \frac{w}{k}t))$$

(vide Definição 1.2.2).

Observação 2.2.1. *Aqui vale ressaltar que, dada a definição 1.2.3, ao trabalharmos com ondas dentro do contexto de uma EDP precisamos necessariamente definir quem é c para que $\eta(x, t) = f(x - ct)$ seja solução. Porém, como acabamos de ver, a velocidade c pode ser descrita por uma razão que envolve a frequência angular w e o número de onda k , ou seja, ao encontrar a solução de uma EDP podemos substituir a determinação de c pela determinação da relação de dispersão da onda considerada (definição 1.2.5).*

Assim ficam descritas as características gerais de uma onda que nos permitem entender melhor a representação $\eta(x, t)$. Essas definições serão utilizadas frequentemente ao decorrer do nosso estudo e, durante a manipulação de termos onde se vejam presentes os símbolos apresentados acima, vamos subentender a compreensão prévia a respeito de cada um. Dito isso, caso o leitor ainda não se sinta suficientemente familiarizado com as propriedades listadas, é recomendada a consulta ao referencial [9] (p. 117-122).

Capítulo 3

As Equações da Hidrodinâmica

Até este momento estávamos preocupados em apresentar conceitos e deduzir fórmulas que nos ajudassem a entender melhor nossos objetos de estudo. Durante este processo fomos capazes de observar nosso ambiente partindo da perspectiva euleriana, entender de onde surgem as equações de Euler, além de, do início até agora, termos sido expostos à diversas definições a respeito das características de um fluido e de uma onda de superfície.

Todos estes tópicos formaram a base conceitual necessária para a compreensão do seguinte capítulo de modo que, a partir do uso explícito e implícito destes conhecimentos combinados às técnicas fornecidas pela modelagem matemática, será possível determinar as equações governantes para ondas aquáticas de superfície.

3.1 As equações de Euler para ondas aquáticas

Na subseção 2.1.1 havíamos deduzido as equações de conservação de massa e de quantidade de movimento que determinam o comportamento de um fluido ideal em um domínio qualquer. Agora, estamos interessados em estudar um caso particular, queremos obter as equações que representam a dinâmica das ondas aquáticas.

Para tanto, delimitaremos a seguir um ambiente de estudo específico a partir do qual será realizada a modelagem matemática proveniente da combinação das equações de Euler com algumas condições físicas que descrevem nosso problema. Desta forma, ao fim dessa seção, obteremos um modelo adequado para descrever a dinâmica de uma onda de superfície.

3.1.1 Definindo nosso ambiente de estudo

Para delimitar nosso ambiente de estudo nos utilizaremos de três condições distintas que dizem respeito, separadamente, ao fluido, à natureza da onda observada e à configuração do domínio físico no qual ocorre a propagação da onda.

A primeira condição imposta é que o fluido aqui considerado é a água, o qual tomaremos como sendo ideal e com densidade constante em um escoamento irrotacional. Assumir estas três características nos permitem fazer uso de diversas definições presentes na secção 1.1, estas as quais geram diversas simplificações matemáticas úteis nos cálculos que vêm a seguir.

A segunda condição imposta refere-se à classe da onda de superfície estudada, a saber, ondas de Stokes – ondas periódicas e viajantes que possuem uma única crista e cavado por período, de modo que o perfil é decrescente da crista até o cavado. ([6], p. 537)

Por fim, a terceira e última condição imposta é referente ao meio pelo qual a onda se propaga. Consideraremos aqui um domínio bidimensional Ω delimitado em baixo por um fundo plano impermeável $y = -h$, e em cima pela onda de superfície $y = \eta(x, t)$. Fisicamente, isso pode ser entendido como uma onda propagando-se ao longo de um canal, e uma representação esquemática deste problema físico é mostrada na figura 3.1.

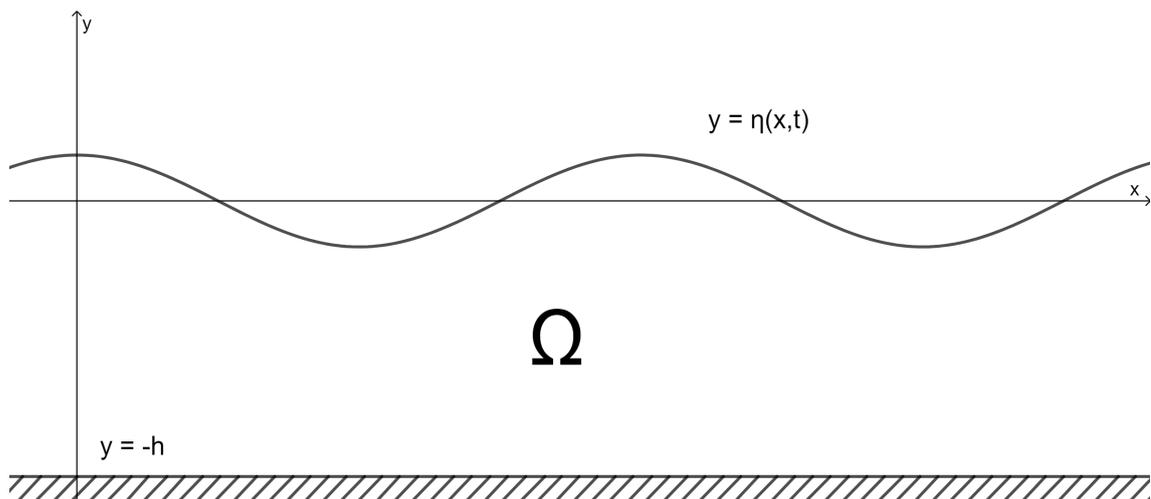


Figura 3.1: Representação esquemática do ambiente de estudo definido.

Fonte: Autoria própria.

As características principais dessa onda como amplitude, comprimento de onda, dentre outras, são dadas conforme as descrições apresentadas na secção 2.2. Além disso, no que se segue, denotaremos por $\vec{U}(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ o campo de velocidade do escoamento, $P(x, y, t)$ a pressão e ρ a densidade constante.

3.1.2 Deduzindo as equações

Com o ambiente de estudo bem definido iniciaremos agora a construção do sistema de equações governantes de ondas aquáticas. Aqui, discorreremos primeiramente sobre como as equações de Euler se traduzem na situação estudada para só depois analisar as

condições de fronteira que devem ser respeitadas.

Começando com a equação de Euler, que representa a conservação de massa no domínio Ω , obtemos diretamente da hipótese de que a densidade da água é constante que:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{U}) = 0 \Rightarrow \rho(\nabla \cdot \vec{U}) + (\vec{U} \cdot (\nabla \rho)) = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \vec{U} = 0.$$

Daí, apenas escrevendo esta última igualdade na forma vetorial, fica dada uma das equações governantes:

$$u_x + v_y = 0 \quad \text{em} \quad -h < y < \eta(x, t).$$

Dando continuidade a este raciocínio, agora com a equação da conservação da quantidade de movimento

$$\rho \frac{D\vec{U}}{Dt} = -\nabla P + \vec{b}\rho,$$

temos, ao considerar o vetor \vec{b} como sendo a força da gravidade, expandir a derivada material (vide Definição 1.1.1) e dividir toda a expressão por ρ , o seguinte resultado:

$$\vec{U}_t + (\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U} = -\frac{\nabla P}{\rho} - g\vec{j},$$

onde g representa a aceleração da gravidade e $-\vec{j}$ indica a direção desta força.

Mais ainda, visto que ρ é constante, ao considerar $\tilde{P} = P/\rho$ temos a liberdade de trocar $\nabla P/\rho$ por $\nabla \tilde{P}$. Logo, escrevendo os vetores \vec{U} e \vec{j} componente a componente e abandonando a notação “ \sim ”, a igualdade anterior fica dada por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t + (\vec{U} \cdot \nabla) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \end{pmatrix} - g \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

o que nos fornece mais duas equações governantes:

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = -P_x & \text{em} \quad -h < y < \eta(x, y), \\ v_t + uv_x + vv_y = -P_y - g & \text{em} \quad -h < y < \eta(x, t). \end{cases}$$

Tiradas as aplicações diretas das equações de Euler analisaremos agora as condições físicas que dizem respeito à fronteira do nosso ambiente de estudo, a saber, as condições de cinemática e dinâmica.

Começaremos com a condição de cinemática. Para modelar matematicamente esta condição consideraremos em um primeiro momento a existência de uma interface entre o ar e a superfície da água. Esta interface, a qual é definida como sendo a delimitação que “impede” o atravessamento de água para o ar ou vice-versa ([21], p. 432), é dada implicitamente por uma função suave qualquer da forma $F(\vec{x}, t) = 0$, onde $\vec{x} = (x, y)$.

Além disso, fora esta função $F(\vec{x}, t) = 0$, existe outra relação matemática que permeia a definição desta interface:

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = \vec{U} \cdot \vec{n}, \tag{3.1}$$

onde $\vec{U} = (u, v)$ é o campo de velocidade do escoamento, $\vec{\mathcal{U}}$ é o campo de velocidade da interface e \vec{n} é o vetor normal unitário desta interface – esta relação, a qual nos diz que a velocidade normal do escoamento do fluido é igual a velocidade normal da interface, deve ser obedecida para que de fato o fluido não se “misture” com o ar.

Dadas estas considerações, visando modelar a condição de cinemática matematicamente, tomaremos agora um ponto $\vec{x} = (x, y)$ que se encontra na interface. Note que, pela função $F(\vec{x}, t) = 0$, temos

$$\begin{aligned} F(\vec{x}, t) = 0 &\Rightarrow \frac{d}{dt}[F(\vec{x}, t)] = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \nabla F = 0 \\ &\Rightarrow \frac{F_t}{\|\nabla F\|} + \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = 0 \Rightarrow \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = -\frac{F_t}{\|\nabla F\|}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Mais ainda, uma vez que o campo de velocidade da interface pode ser dado por $\frac{d\vec{x}}{dt}$, vale o seguinte:

$$\vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{n} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{n} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}. \quad (3.3)$$

Desta forma, utilizando os resultados encontrados em (3.2) e (3.3), somos capazes de reescrever (3.1), de modo que a fórmula que representa a condição de cinemática é dada por:

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = \vec{\mathcal{U}} \cdot \vec{n} \Rightarrow \vec{U} \cdot \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = -\frac{F_t}{\|\nabla F\|} \Rightarrow \boxed{\vec{U} \cdot \nabla F = -F_t}. \quad (3.4)$$

Mais especificamente, se considerarmos que a interface é descrita por $F(x, y, t) = y - \eta(x, t)$, a condição de cinemática fica dada por

$$\begin{aligned} \vec{U} \cdot \nabla F = -F_t &\Rightarrow (u, v) \cdot (F_x, F_y) = -F_t \Rightarrow uF_x + vF_y = -F_t \Rightarrow -u\eta_x + v = -\eta_t \\ &\Rightarrow \boxed{v = \eta_t + u\eta_x \text{ em } y = \eta(x, t)}. \end{aligned}$$

Observação 3.1.1. *Fisicamente a condição de cinemática $v = \eta_t + u\eta_x$ em $y = \eta(x, t)$ pode ser entendida como: partículas que estão inicialmente na superfície livre permanecem na superfície livre.*

Essa tradução conceitual é dada a partir da análise da EDO que determina a trajetória $(x(t), y(t))$ de uma partícula que se encontra inicialmente na superfície livre, a saber,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x(t), y(t), t), \\ \frac{dy}{dt} = v(x(t), y(t), t), \\ F(x(0), y(0), 0) = 0. \end{cases}$$

De fato, se derivarmos $F(x(t), y(t), t)$ e usarmos as equações desta EDO, obtemos

$$\frac{d}{dt}[F(x(t), y(t), t)] = F_x \frac{dx}{dt} + F_y \frac{dy}{dt} + F_t = F_x u + F_y v + F_t = F_t + \vec{U} \cdot \nabla F \stackrel{(3.1)}{=} 0$$

$$\Rightarrow F(x(t), y(t), t) = C \text{ com } C \text{ constante.}$$

Donde, aplicando a condição inicial $F(x(0), y(0), 0) = 0$, segue que

$$F(x(t), y(t), t) = 0, \quad \forall t.$$

Em outras palavras, como $F(x, y, t) = y - \eta(x, t)$, conclui-se que uma partícula que se encontra inicialmente na superfície livre permanece na superfície livre.

Quanto a condição de dinâmica, ela refere-se à interação que ocorre entre a água e o ar e, matematicamente, é expressa como:

$$\boxed{P = P_{atm} \quad \text{em} \quad y = \eta(x, t),}$$

onde P_{atm} é a pressão atmosférica.

Por fim, a última condição de fronteira a ser considerada é a condição de parede rígida, a qual despreza as trocas de água com o subsolo e considera o fundo do canal como sendo impermeável. Matematicamente, podemos representá-la como

$$\vec{U} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{em} \quad y = -h,$$

onde h é a profundidade do canal e \vec{n} o vetor normal unitário à curva $y = -h$.

Note que esta expressão realmente traduz a restrição física que lhe é pressuposta, pois ela nos assegura que: como o campo de velocidade \vec{U} gerado pelo fluido na profundidade h é perpendicular ao vetor normal à curva y , toda a movimentação no fundo do canal se dá na horizontal, ou seja, nada passa por ele.

Assim, realizando o produto interno entre $\vec{U} = (u, v)$ e $\vec{n} = (0, -1)$, obtemos que:

$$\boxed{v = 0 \quad \text{em} \quad y = -h.}$$

Portanto, agrupando todas as expressões destacadas do início da seção até agora, obtemos o seguinte sistema de equações governantes que rege a dinâmica de uma onda aquática de superfície:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_x + v_y = 0 & \text{em} \quad -h < y < \eta(x, t), \quad (3.5) \\ u_t + uu_x + vv_y = -P_x & \text{em} \quad -h < y < \eta(x, t), \quad (3.6) \\ v_t + uv_x + vv_y = -P_y - g & \text{em} \quad -h < y < \eta(x, t), \quad (3.7) \\ v = \eta_t + u\eta_x & \text{em} \quad y = \eta(x, t), \quad (3.8) \\ P = P_{atm} & \text{em} \quad y = \eta(x, t), \quad (3.9) \\ v = 0 & \text{em} \quad y = -h. \quad (3.10) \end{array} \right.$$

3.2 Formulação via teoria do potencial

Na subseção 3.1.1, ao delimitar o ambiente de estudo no qual este trabalho está sendo baseado, uma das condições impostas era referente às características do fluido, onde definimos, em particular, que seu escoamento é irrotacional. Esta informação, quando observada sob a luz do Teorema 1.3.2 e da Definição 1.3.1, nos assegura a existência de um potencial $\phi(x, y, t)$ tal que $\nabla\phi = (\phi_x, \phi_y) = (u, v) = \vec{U}$.

A existência desse potencial é de grande ajuda durante o processo de resolução do sistema de equações governantes, visto que ele permite passar de duas incógnitas ($u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$) para apenas uma ($\phi(x, y, t)$). Essa “troca de variáveis” é a base para a teoria do potencial e a partir daqui até o fim dessa seção estaremos preocupados em reescrever o sistema (3.5) - (3.10) dentro desta perspectiva.

Dando início a este processo com a equação (3.5) obtemos, ao substituir o par (u, v) por (ϕ_x, ϕ_y) , que:

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0,$$

donde segue diretamente a primeira equação posta na teoria do potencial:

$$\boxed{\Delta\phi = 0 \quad \text{em} \quad -h < y < \eta(x, t).}$$

Já a segunda e terceira equações, dadas por (3.6) e (3.7), são àquelas provenientes da conservação da quantidade de movimento e podem ser escritas conjuntamente em uma só forma vetorial:

$$\vec{U}_t + (\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U} = -\nabla P - g\vec{j}.$$

A partir daí, tendo em mãos a identidade (1.2) dada por

$$\frac{1}{2}\nabla(\vec{F} \cdot \vec{F}) = \vec{F} \times (\nabla \times \vec{F}) + (\vec{F} \cdot \nabla)\vec{F}$$

e tendo em mente que o escoamento aqui considerado é irrotacional, obtemos a seguinte cadeia de implicações:

$$\begin{aligned} \vec{U}_t + (\vec{U} \cdot \nabla)\vec{U} &= -\nabla P - g\vec{j} \\ \Rightarrow \vec{U}_t + \frac{1}{2}\nabla(\vec{U} \cdot \vec{U}) - \vec{U} \times (\nabla \times \vec{U}) &= -\nabla P - g\vec{j} \\ \Rightarrow \vec{U}_t + \frac{1}{2}\nabla\|\vec{U}\|^2 &= -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla(gy), \end{aligned}$$

onde a troca de $g\vec{j}$ por $\nabla(gy)$ é dada pelo fato de que $\nabla y = \frac{\partial y}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial y}\vec{j} = \vec{j}$.

Agora, podendo finalmente introduzir a perspectiva da teoria do potencial substituindo o campo de velocidade \vec{U} pelas derivadas parciais do potencial ϕ , ficamos com:

$$\begin{aligned} \nabla\phi_t + \frac{1}{2}\nabla\|\nabla\phi\|^2 + \frac{\nabla P}{\rho} + \nabla(gy) &= 0 \\ \Rightarrow \nabla\left(\phi_t + \frac{1}{2}\|\nabla\phi\|^2 + \frac{P}{\rho} + gy\right) &= 0. \end{aligned}$$

Antes de prosseguir com o raciocínio que está sendo desenvolvido vamos realizar uma pequena mudança na expressão acima: somaremos $\nabla \left(\frac{P_{atm}}{\rho} \right)$ do seu lado esquerdo. Note que, matematicamente, somar este valor ao lado esquerdo da igualdade não a altera, pois tanto P_{atm} quanto ρ são constantes, de modo que esta manipulação é feita apenas por conta de simplificações futuras.

Assim, a expressão antes obtida se transforma em

$$\nabla \left(\phi_t + \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|^2 + \frac{P - P_{atm}}{\rho} + gy \right) = 0,$$

e, mais ainda, dado o fato de tanto $P(x, y, t)$ quanto $\phi(x, y, t)$ serem dependentes da posição e do tempo, a expressão toda pode ser vista como uma função de (x, y, t) . Desta forma, visto que o gradiente desta função considerada é nulo, podemos dizer que ela depende exclusivamente do tempo, ou seja, pode ser representada por $c(t)$:

$$\phi_t + \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|^2 + \frac{P - P_{atm}}{\rho} + gy = c(t).$$

Por questão de conveniência iremos incorporar esta função $c(t)$ ao potencial ϕ . Para isso, vamos reescrevê-lo como

$$\phi = \tilde{\phi} + \int_0^t c(s) ds,$$

donde segue os resultados

$$\nabla \phi = \nabla \tilde{\phi} + \nabla \int_0^t c(s) ds \Rightarrow \nabla \phi = \nabla \tilde{\phi}$$

e

$$\phi_t = \tilde{\phi}_t + c(t),$$

assim como a cadeia

$$\begin{aligned} \phi_t + \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|^2 + \frac{P - P_{atm}}{\rho} + gy &= c(t) \\ \Rightarrow \tilde{\phi}_t + c(t) + \frac{1}{2} \|\nabla \tilde{\phi}\|^2 + \frac{P - P_{atm}}{\rho} + gy &= c(t) \\ \Rightarrow \tilde{\phi}_t + \frac{1}{2} \|\nabla \tilde{\phi}\|^2 + \frac{P - P_{atm}}{\rho} + gy &= 0. \end{aligned}$$

Por fim, abandonando a notação $\tilde{\phi}$, segue da condição de dinâmica (3.9) uma das condições de fronteira do nosso problema:

$$\boxed{\phi_t + \frac{1}{2} \|\nabla \phi\|^2 + g\eta = 0 \quad \text{em} \quad y = \eta(x, t).}$$

Quanto as equações (3.8) e (3.10) basta realizar a substituição direta de (u, v) por (ϕ_x, ϕ_y) , de modo a obter as respectivas igualdades:

$$\boxed{\phi_y = \eta_t + \phi_x \eta_x \quad \text{em} \quad y = \eta(x, t)}$$

e

$$\boxed{\phi_y = 0 \quad \text{em} \quad y = -h.}$$

Em resumo, ao juntar todas as expressões em destaque, concluímos que as equações governantes de ondas aquáticas na formulação da teoria do potencial são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta\phi = 0 & \text{em} \quad -h < y < \eta(x, t), \\ \phi_t + \frac{1}{2}\|\nabla\phi\|^2 + g\eta = 0 & \text{em} \quad y = \eta(x, t), \\ \phi_y = \eta_t + \phi_x\eta_x & \text{em} \quad y = \eta(x, t), \\ \phi_y = 0 & \text{em} \quad y = -h. \end{array} \right.$$

Capítulo 4

As trajetórias das partículas via equações de Euler

Na seção 3.1, após a análise das condições físicas provenientes do ambiente escolhido e as respectivas traduções matemáticas feitas dentro da teoria de Euler, obtivemos o seguinte sistema de equações governantes para dinâmica de uma onda aquática:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_x + v_y = 0 & \text{em } 0 < y < \eta(x, t) + h, \quad (4.1) \\ u_t + uu_x + vv_y = -P_x & \text{em } 0 < y < \eta(x, t) + h, \quad (4.2) \\ v_t + uv_x + vv_y = -P_y - g & \text{em } 0 < y < \eta(x, t) + h, \quad (4.3) \\ v = \eta_t + u\eta_x & \text{em } y = \eta(x, t) + h, \quad (4.4) \\ P = P_{atm} & \text{em } y = \eta(x, t) + h, \quad (4.5) \\ v = 0 & \text{em } y = 0. \quad (4.6) \end{array} \right.$$

Vale ressaltar que o domínio, antes delimitado de $-h$ à $\eta(x, t)$, é agora considerado de 0 à $\eta(x, t) + h$ – mudança esta que é feita por questão de conveniência a partir da troca de variáveis

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x} = x, \\ \tilde{y} = y + h, \end{array} \right.$$

onde a notação \tilde{x} e \tilde{y} foi abandonada.

Agora, dado o interesse em obter as trajetórias das partículas, é indispensável determinar quem é o campo de velocidade (u, v) aparente no sistema (4.1) – (4.6). Com este propósito, buscaremos então descrever e aplicar uma série de estratégias que nos permitam encontrar as funções u e v para ondas lineares.

4.1 Equações de Euler: teoria linear

4.1.1 Adimensionalização e linearização

Adimensionalizar uma equação consiste em fixar valores de referência e fazer a quantificação de suas grandezas a partir destes parâmetros escolhidos. Em outras palavras, por meio deste processo introduzimos novas incógnitas adimensionais, as quais permitem observar de forma mais clara a contribuição de cada termo da equação e identificar a classe do problema estudado (linear, não-linear, dispersivo, fracamente dispersivo, etc.).

Para tanto, a fim de adimensionalizar as equações de Euler, definiremos então as seguintes trocas de variáveis:

$$x = \lambda \tilde{x}, \quad y = h\tilde{y}, \quad t = \frac{\lambda}{\sqrt{gh}} \tilde{t}, \quad \eta(x, t) = a\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}), \quad v(x, y, t) = \frac{h\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}),$$

$$u(x, y, t) = \sqrt{gh} \tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) \quad \text{e} \quad P = P_{atm} + gh(1 - \tilde{y}) + gh\tilde{P}.$$

A partir delas, ao realizar as devidas manipulações algébricas – conforme os procedimentos explanados no apêndice B – obtemos que o sistema (4.1) até (4.6) nas variáveis adimensionais é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{v}_{\tilde{y}} = 0 & \text{em } 0 < \tilde{y} < \alpha\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) + 1, \quad (4.7) \\ \tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{v}\tilde{u}_{\tilde{y}} = -\tilde{P}_{\tilde{x}} & \text{em } 0 < \tilde{y} < \alpha\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) + 1, \quad (4.8) \\ \beta(\tilde{v}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{v}_{\tilde{x}} + \tilde{v}\tilde{v}_{\tilde{y}}) = -\tilde{P}_{\tilde{y}} & \text{em } 0 < \tilde{y} < \alpha\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) + 1, \quad (4.9) \\ \tilde{v} = \alpha(\tilde{\eta}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{\eta}_{\tilde{x}}) & \text{em } \tilde{y} = \alpha\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) + 1, \quad (4.10) \\ \tilde{P} = \alpha\tilde{\eta} & \text{em } \tilde{y} = \alpha\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) + 1. \quad (4.11) \\ \tilde{v} = 0 & \text{em } \tilde{y} = 0, \quad (4.12) \end{array} \right.$$

onde $\beta = \frac{h^2}{\lambda^2}$ e $\alpha = \frac{a}{h}$.

Observação 4.1.1. *A respeito dos parâmetros adimensionais α e β encontrados acima, além deles ajudarem a simplificar a apresentação das equações, cada um tem um nome e função específica.*

O parâmetro β é chamado de parâmetro de dispersão e, por relacionar o comprimento de onda com a profundidade do canal trabalhado, nos permite definir se estamos em um regime de águas rasas/ondas longas - quando $0 < \beta \ll 1$ - ou em um regime de águas profundas/ondas curtas - quando $\beta \gg 1$.

Já o parâmetro α é dito parâmetro de não-linearidade, pois conforme mostraremos logo a seguir ele controla a não-linearidade das equações governantes.

Além disso, experimentos laboratoriais e medições reais mostram que, quando α é suficientemente pequeno, isto é, a amplitude da onda é muito pequena quando comparada a profundidade do canal, a dinâmica da onda pode ser modelada considerando $\alpha = 0$ – neste caso dizemos que a onda é linear.

Feita a adimensionalização, agora partiremos para o processo de linearização do sistema (4.7) – (4.12). Um dos primeiros aspectos notáveis neste sistema é que α , o parâmetro cuja função é controlar a não-linearidade das equações governantes, não está cumprindo seu papel e, portanto, precisamos realizar logo de início algumas modificações pertinentes. Para isso, observando que as incógnitas P e v são proporcionais ao parâmetro α , definiremos a seguinte troca de variáveis:

$$\tilde{P} = \alpha \tilde{P}' \quad \text{e} \quad (\tilde{u}, \tilde{v}) = \alpha(\tilde{u}', \tilde{v}').$$

Donde segue, ao aplicar estas igualdades nas equações (4.7) à (4.12), os resultados abaixo:

- ▷ $\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{v}_{\tilde{y}} = \alpha \tilde{u}'_{\tilde{x}} + \alpha \tilde{v}'_{\tilde{y}} = 0 \Rightarrow \tilde{u}'_{\tilde{x}} + \tilde{v}'_{\tilde{y}} = 0,$
- ▷ $\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{v}\tilde{u}_{\tilde{y}} = -\tilde{P}_{\tilde{x}} \Rightarrow \alpha \tilde{u}'_{\tilde{t}} + \alpha^2 \tilde{u}'\tilde{u}'_{\tilde{x}} + \alpha^2 \tilde{v}'\tilde{u}'_{\tilde{y}} = -\alpha \tilde{P}'_{\tilde{x}}$
 $\Rightarrow \tilde{u}'_{\tilde{t}} + \alpha(\tilde{u}'\tilde{u}'_{\tilde{x}} + \tilde{v}'\tilde{u}'_{\tilde{y}}) = -\tilde{P}'_{\tilde{x}},$
- ▷ $\beta(\tilde{v}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{v}_{\tilde{x}} + \tilde{v}\tilde{v}_{\tilde{y}}) = -\tilde{P}_{\tilde{y}} \Rightarrow \beta(\alpha \tilde{v}'_{\tilde{t}} + \alpha^2 \tilde{u}'\tilde{v}'_{\tilde{x}} + \alpha^2 \tilde{v}'\tilde{v}'_{\tilde{y}}) = \alpha - \tilde{P}'_{\tilde{y}}$
 $\Rightarrow \beta[\tilde{v}'_{\tilde{t}} + \alpha(\tilde{u}'\tilde{v}'_{\tilde{x}} + \tilde{v}'\tilde{v}'_{\tilde{y}})] = -\tilde{P}'_{\tilde{y}},$
- ▷ $\tilde{v} = \alpha(\tilde{\eta}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{\eta}_{\tilde{x}}) \Rightarrow \alpha \tilde{v}' = \alpha(\tilde{\eta}_{\tilde{t}} + \alpha \tilde{u}'\tilde{\eta}'_{\tilde{x}}) \Rightarrow \tilde{v}' = \tilde{\eta}_{\tilde{t}} + \alpha \tilde{u}'\tilde{\eta}'_{\tilde{x}},$
- ▷ $\tilde{P} = \alpha \tilde{\eta} \Rightarrow \alpha \tilde{P}' = \alpha \tilde{\eta} \Rightarrow \tilde{P}' = \tilde{\eta},$
- ▷ $\tilde{v} = \alpha \tilde{v}' = 0 \Rightarrow \tilde{v}' = 0.$

Ou seja, o modelo matemático anterior se transforma em:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \tilde{u}'_{\tilde{x}} + \tilde{v}'_{\tilde{y}} = 0 & \text{em } 0 < \tilde{y} < \alpha \tilde{\eta} + 1, \\ \tilde{u}'_{\tilde{t}} + \alpha(\tilde{u}'\tilde{u}'_{\tilde{x}} + \tilde{v}'\tilde{u}'_{\tilde{y}}) = -\tilde{P}'_{\tilde{x}} & \text{em } 0 < \tilde{y} < \alpha \tilde{\eta} + 1, \\ \beta[\tilde{v}'_{\tilde{t}} + \alpha(\tilde{u}'\tilde{v}'_{\tilde{x}} + \tilde{v}'\tilde{v}'_{\tilde{y}})] = -\tilde{P}'_{\tilde{y}} & \text{em } 0 < \tilde{y} < \alpha \tilde{\eta} + 1, \\ \tilde{v}' = \tilde{\eta}_{\tilde{t}} + \alpha \tilde{u}'\tilde{\eta}'_{\tilde{x}} & \text{em } \tilde{y} = \alpha \tilde{\eta} + 1, \\ \tilde{P}' = \tilde{\eta} & \text{em } \tilde{y} = \alpha \tilde{\eta} + 1, \\ \tilde{v}' = 0 & \text{em } \tilde{y} = 0. \end{array} \right. \quad (4.13)$$

Note que agora o parâmetro α está presente apenas onde se encontram os termos não-lineares das equações e, deste modo, somos capazes de linearizar (4.13) fazendo $\alpha = 0$

sem maiores problemas:

$$\begin{cases} \tilde{u}'_{\tilde{x}} + \tilde{v}'_{\tilde{y}} = 0 & \text{em } 0 < \tilde{y} < 1, \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\begin{cases} \tilde{u}'_{\tilde{t}} = -\tilde{P}'_{\tilde{x}} & \text{em } 0 < \tilde{y} < 1, \end{cases} \quad (4.15)$$

$$\begin{cases} \beta \tilde{v}'_{\tilde{t}} = -\tilde{P}'_{\tilde{y}} & \text{em } 0 < \tilde{y} < 1, \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} \tilde{v}' = \tilde{\eta}_{\tilde{t}} & \text{em } \tilde{y} = 1, \end{cases} \quad (4.17)$$

$$\begin{cases} \tilde{P}' = \tilde{\eta} & \text{em } \tilde{y} = 1, \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} \tilde{v}' = 0 & \text{em } \tilde{y} = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Portanto, obtemos assim o sistema de equações governantes adimensionalizado e linearizado.

4.1.2 Resolução do sistema de Equações de Euler

Baseados no sistema representado pelas equações (4.14) – (4.19) somos finalmente capazes de iniciar o processo de resolução da EDP que nos fornecerá o campo de velocidade gerado por uma onda aquática linear. Para tanto, discutiremos primeiramente a respeito de uma das incógnitas presentes nas condições de fronteira do nosso problema físico modelado: a onda $\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t})$.

No estudo que estamos desenvolvendo neste trabalho consideramos a onda de superfície como sendo uma onda de Stokes, ou seja, uma onda periódica e viajante. Além disso, em virtude da adimensionalização antes realizada, sabemos que a onda $\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t})$ deve ser uma onda de amplitude e comprimento de onda iguais a 1.

Desse modo, partindo diretamente do fato da onda ser viajante (cf. Definição 1.2.2), já temos em um primeiro momento que esta é escrita da forma $\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) = f(\tilde{x} - c_0 \tilde{t})$, onde c_0 representa sua velocidade e f o seu perfil. Ainda, dada a natureza periódica da onda e o fato dela ser de comprimento 1, é comum tomarmos f como sendo uma função seno ou cosseno. Consequentemente, sem perda de generalidade, podemos considerar $f(\tilde{x}) = \cos(2\pi\tilde{x})$.

Isto nos leva ao *ansatz*¹

$$\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0 \tilde{t}))$$

¹Ansatz é um palpite estimado para uma ou várias equações iniciais que descrevem um problema físico ou matemático. Se um ansatz é um acerto coerente e racional, então, será legitimado pelos resultados obtidos a partir destas equações.

e, para este específico $\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t})$, o sistema (4.14) – (4.19) têm a seguinte solução:

$$\triangleright \quad \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})), \quad (4.20)$$

$$\triangleright \quad \tilde{u}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = 2\pi c_0 \sqrt{\beta} \frac{\cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\sinh(2\pi\sqrt{\beta})} \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})), \quad (4.21)$$

$$\triangleright \quad \tilde{v}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = 2\pi c_0 \frac{\sinh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\sinh(2\pi\sqrt{\beta})} \sin(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})), \quad (4.22)$$

$$\triangleright \quad \tilde{P}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = \frac{\cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})), \quad (4.23)$$

$$\triangleright \quad c_0^2 = \frac{\tanh(2\pi\sqrt{\beta})}{2\pi\sqrt{\beta}}. \quad (4.24)$$

onde $\beta = \frac{h^2}{\lambda^2}$. Os detalhes dos procedimentos realizados para chegar a estes resultados são encontrados no apêndice A.

4.1.3 Dimensionalização

Estamos interessados, ao fim deste capítulo, em determinar as trajetórias das partículas na variáveis dimensionais. Para isso, basta desfazermos as duas trocas de variáveis feitas anteriormente, a saber:

$$\tilde{x} = \frac{1}{\lambda} x, \quad \tilde{y} = \frac{1}{h} y, \quad \tilde{t} = \frac{\sqrt{gh}}{\lambda} t, \quad \tilde{u}' = \frac{1}{\alpha\sqrt{gh}} u, \quad \tilde{v}' = \frac{\lambda}{\alpha\sqrt{gh}h} v.$$

Com o objetivo de organizar melhor este processo vamos primeiramente desmembrar as expressões que representam $\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t})$, $\tilde{u}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$, $\tilde{v}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$ e $\tilde{P}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$, de modo a realizar a dimensionalização em cada parcela que as compõe separadamente:

$$\triangleright \quad 2\pi\sqrt{\beta} = 2\pi\frac{h}{\lambda} = kh \quad \text{e} \quad 2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y} = 2\pi\frac{h}{\lambda} \frac{y}{h} = ky,$$

$$\triangleright \quad 2\pi c_0 \sqrt{\beta} = 2\pi \frac{h}{\lambda} \sqrt{\frac{\tanh(2\pi\sqrt{\beta})}{2\pi\sqrt{\beta}}} = kh \frac{\sqrt{\tanh(kh)}}{\sqrt{kh}} = \sqrt{\tanh(kh)}\sqrt{kh},$$

$$\triangleright \quad 2\pi c_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\tanh(2\pi\sqrt{\beta})}{2\pi\sqrt{\beta}}} = 2\pi \frac{\sqrt{\tanh(kh)}}{\sqrt{kh}} = \frac{2\pi}{kh} \sqrt{\tanh(kh)}\sqrt{kh},$$

$$\begin{aligned} \triangleright \quad 2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t}) &= 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \sqrt{\frac{\tanh(2\pi\sqrt{\beta})}{2\pi\sqrt{\beta}}} \frac{\sqrt{gh}}{\lambda} t \right) = \left(kx - kt\sqrt{gh} \frac{\sqrt{\tanh(kh)}}{\sqrt{kh}} \right) = \\ &= \left(kx - \frac{t}{h} \sqrt{gh}\sqrt{\tanh(kh)}\sqrt{kh} \right) = (kx - t\sqrt{gk \tanh(kh)}). \end{aligned}$$

Daí, dando continuidade ao processo de dimensionalização, iremos substituir estas igualdades nas equações (4.20) à (4.23). Começando pela equação (4.20) obtemos o

seguinte:

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) &\Rightarrow \frac{\eta(x, t)}{a} = \cos(kx - t\sqrt{gk \tanh(kh)}) \\ \Rightarrow \boxed{\eta(x, t) = \alpha h \cos(kx - wt)}.\end{aligned}$$

Onde o fato da onda $\eta(x, t)$ ser viajante resulta em uma representação da relação de dispersão dimensional dada por $w = \sqrt{gk \tanh(kh)}$. Além disso é fácil ver que αh representa a amplitude desta onda.

Da mesma forma, partindo das equações (4.21) e (4.22), obtemos as componentes $u(x, y, t)$ e $v(x, y, t)$ do campo de velocidade dimensional:

$$\begin{aligned}\triangleright \quad \tilde{u}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= 2\pi c_0 \sqrt{\beta} \frac{\cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\sinh(2\pi)} \sqrt{\beta} \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) \\ \Rightarrow \frac{u(x, y, t)}{\alpha c_0} &= \sqrt{\tanh(kh)} \sqrt{kh} \frac{\cosh(ky)}{\sinh(kh)} \cos(kx - wt) \\ \Rightarrow u(x, y, t) &= \alpha \sqrt{gh} \sqrt{\tanh(kh)} \sqrt{kh} \frac{\cosh(ky)}{\sinh(kh)} \cos(kx - wt) \\ \Rightarrow u(x, y, t) &= \alpha h \sqrt{gk} \sqrt{\tanh(kh)} \frac{\cosh(ky)}{\sinh(kh)} \cos(kx - wt) \\ \Rightarrow \boxed{u(x, y, t) = \alpha h w \frac{\cosh(ky)}{\sinh(kh)} \cos(kx - wt)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangleright \quad \tilde{v}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= 2\pi c_0 \frac{\sinh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\sinh(2\pi\sqrt{\beta})} \sin(2\pi)(\tilde{x} - c_0\tilde{t}) \\ \Rightarrow \frac{\lambda v(x, y, t)}{\alpha c_0 h} &= \frac{2\pi}{kh} \sqrt{\tanh(kh)} \sqrt{kh} \frac{\sinh(ky)}{\sinh(kh)} \sin(kx - wt) \\ \Rightarrow v(x, y, t) &= \frac{\alpha c_0 h 2\pi}{kh \lambda} \sqrt{\tanh(kh)} \sqrt{kh} \frac{\sinh(ky)}{\sinh(kh)} \sin(kx - wt) \\ \Rightarrow v(x, y, t) &= \alpha \sqrt{gh} \sqrt{\tanh(kh)} \sqrt{kh} \frac{\sinh(ky)}{\sinh(kh)} \sin(kx - wt) \\ \Rightarrow v(x, y, t) &= \alpha h \sqrt{gk} \sqrt{\tanh(kh)} \sqrt{kh} \frac{\sinh(ky)}{\sinh(kh)} \sin(kx - wt) \\ \Rightarrow \boxed{v(x, y, t) = \alpha h w \frac{\sinh(ky)}{\sinh(kh)} \sin(kx - wt)}\end{aligned}$$

Por um processo análogo, a equação (4.23) fica dada por:

$$\boxed{P(x, y, t) = P_0 + g(h - y) + \alpha h \frac{\cosh(ky)}{\cosh(kh)} \cos(kx - wt)}.$$

Assim, concluímos que a solução do sistema (4.14) – (4.19) nas variáveis físicas é

$$\begin{cases} \eta(x, y, t) = \alpha h \cos(kx - wt), \\ u(x, y, t) = \alpha h w \frac{\cosh(ky)}{\sinh(kh)} \cos(kx - wt), \\ v(x, y, t) = \alpha h w \frac{\sinh(ky)}{\sinh(kh)} \sin(kx - wt), \\ P(x, y, t) = P_0 + g(h - y) + \alpha h \frac{\cosh(ky)}{\cosh(kh)} \cos(kx - wt). \end{cases}$$

4.2 Trajetória das partículas

Descobertas as expressões que descrevem por completo o campo de velocidade (u, v) gerado pela onda de Stokes linear na superfície, somos capazes de finalmente calcular as trajetórias das partículas do fluido.

Consideraremos aqui que a trajetória de uma partícula é dada pela curva $(x(t), y(t))$, onde $x(t)$ e $y(t)$ representam, respectivamente, o deslocamento horizontal e vertical desta partícula a partir do ponto $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$. Com esta informação em mãos temos então que as derivadas $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ são equivalentes à u e v e, portanto, $(x(t), y(t))$ é solução do sistema de equações diferenciais ordinárias (EDO):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x(t), y(t), t) = M \cosh(ky(t)) \cos(kx(t) - wt), & (4.25) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = v(x(t), y(t), t) = M \sinh(ky(t)) \sin(kx(t) - wt), & (4.26) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x(0), y(0)) = (x_0, y_0), & (4.27) \end{cases}$$

onde $M = \frac{\alpha h w}{\sinh(kh)}$.

Antes de começarmos a resolver a EDO (4.25) – (4.27) vamos estabelecer de antemão o seguinte: o foco adotado no estudo a seguir será voltado para as trajetórias descritas no intervalo $[0, T]$, onde T representa o período da onda. Isso será feito para evitar repetições nas considerações feitas mais adiante, visto que dado o fim de um período a forma da onda se repete e, como consequência, a trajetória que a partícula do fluido descreve também é a mesma.

Estabelecido isso começaremos então trabalhar com a equação (4.25). A primeira coisa que faremos será integrar esta equação de ambos os lados:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= M \cosh(ky(t)) \cos(kx(t) - wt) \\ \Rightarrow \int_0^t \frac{dx}{ds} ds &= \int_0^t M \cosh(ky(s)) \cos(kx(s) - ws) ds \\ \Rightarrow x(t) - x(0) &= M \int_0^t \cosh(ky(s)) \cos(kx(s) - ws) ds. \end{aligned}$$

Note que do lado direito da igualdade temos uma integral que envolve as funções cosseno e cosseno hiperbólico, as quais são limitadas - o cosseno é naturalmente limitado entre -1 e 1 e o cosseno hiperbólico, por conter como argumento $ky(t)$ onde $0 < y(t) < \eta(x, t) + h$, também. Deste modo, obtemos que a diferença $x(t) - x(0)$ pode ser representada pelo produto de M por algo limitado e, a partir daí, lembrando que M é uma constante definida proporcionalmente ao parâmetro α , temos que o lado direito da equação se reduz a uma função de ordem M , ou seja,

$$x(t) - x(0) = \mathcal{O}(M). \quad (4.28)$$

Analogamente, podemos estender o resultado acima para a equação (4.26), obtendo assim que

$$y(t) - y(0) = \mathcal{O}(M). \quad (4.29)$$

Estes resultados nos permitem prosseguir para o próximo passo que consiste em aplicar o Teorema do Valor Médio (TVM) (cf. Teorema 1.3.6) nas duas funções distintas que compõe as igualdades (4.25) e (4.26).

Para isso, a primeira função abordada será $f(z) = \cosh(kz)$ que, no contexto do TVM, para $a = y_0$ e $b = y(t)$, leva à seguinte igualdade:

$$f(b) - f(a) = \cosh(ky(t)) - \cosh(ky_0) = k \sinh(kc)(y(t) - y_0),$$

para algum $c \in (y_0, y(t))$. Donde segue, ao tomar a aproximação (4.29), que

$$\boxed{\cosh(ky(t)) = \cosh(ky_0) + \mathcal{O}(M).}$$

Já a segunda função considerada dentro do contexto do Teorema do Valor Médio será $g(z) = \cos(kz - wt)$, com $a = x_0$ e $b = x(t)$, o que resulta em:

$$g(b) - g(a) = \cos(kx(t) - wt) - \cos(kx_0 - wt) = -k \sin(kc - wt)(x(t) - x_0),$$

para algum $c \in (x_0, x(t))$. Por conseguinte, utilizando a aproximação (4.28), obtemos

$$\boxed{\cos(kx(t) - wt) = \cos(kx_0 - wt) + \mathcal{O}(M).}$$

Agora, substituindo as aproximações destacadas acima na equação (4.25), somos capazes de reescrevê-la como:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= M \cosh(ky(t)) \cos(kx(t) - wt) \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= M (\cosh(ky_0) + \mathcal{O}(M)) (\cos(kx_0 - wt) + \mathcal{O}(M)) \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= M [\cosh(ky_0) \cos(kx_0 - wt) + \mathcal{O}(M) + \mathcal{O}(M^2)] \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= M \cosh(ky_0) \cos(kx_0 - wt) + \mathcal{O}(M^2). \end{aligned}$$

De forma análoga, concluímos que

$$\frac{dy}{dt} = M \sinh(ky_0) \sin(kx_0 - wt) + \mathcal{O}(M^2).$$

Daí, visto que M é de ordem α e este parâmetro, por sua vez, é suficientemente pequeno, temos a liberdade de desprezar os termos de $\mathcal{O}(M^2)$ o que acarreta no seguinte sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = M \cosh(ky_0) \cos(kx_0 - wt), \\ \frac{dy}{dt} = M \sinh(ky_0) \sin(kx_0 - wt). \end{cases} \quad (4.30)$$

$$(4.31)$$

Dessa maneira, integrando ambos os lados das equações (4.30) e (4.31) em relação a t e usando que $(x(0), y(0)) = (x_0, y_0)$, obtemos que as funções $x(t)$ e $y(t)$ são dadas por:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 - \frac{M}{w} \cosh(ky_0) \sin(kx_0 - wt) + \frac{M}{w} \cosh(ky_0) \sin(kx_0), \\ y(t) = y_0 + \frac{M}{w} \sinh(ky_0) \cos(kx_0 - wt) - \frac{M}{w} \sinh(ky_0) \cos(kx_0). \end{cases} \quad (4.32)$$

$$(4.33)$$

Estas expressões descrevem uma aproximação para o deslocamento das partículas do fluido e nos ajudam a finalmente tirar conclusões a respeito de suas trajetórias.

É fácil ver que $x(t)$ e $y(t)$ satisfazem a equação da elipse

$$\frac{(x - x_c)^2}{(M/w)^2 \cosh(ky_0)^2} + \frac{(y - y_c)^2}{(M/w)^2 \sinh(ky_0)^2} = 1, \quad (4.34)$$

onde $x_c = x_0 + \frac{M}{w} \cosh(ky_0) \sin(kx_0)$ e $y_c = y_0 - \frac{M}{w} \sinh(ky_0) \cos(kx_0)$.

De fato, ao substituir as equações (4.32) e (4.33) na fórmula (4.34), temos

$$\begin{aligned} & \frac{((M/w) \cosh(ky_0) \sin(kx_0 - wt))^2}{(M/w)^2 \cosh(ky_0)^2} + \frac{((M/w) \sinh(ky_0) \cos(kx_0 - wt))^2}{(M/w)^2 \sinh(ky_0)^2} = \\ & = \sin(kx_0 - wt)^2 + \cos(kx_0 - wt)^2 = 1. \end{aligned}$$

Portanto, em uma primeira aproximação, obtemos que as trajetórias das partículas descritas a partir da perturbação de uma onda de Stokes linear são elípticas. Mais ainda, ao analisar com atenção a curva descrita pela fórmula (4.34), podemos tirar algumas conclusões interessantes a respeito das características e comportamentos destas trajetórias.

Logo de início, ao nos atentarmos aos aspetos mais marcantes que caracterizam uma elipse, conseguimos obter facilmente que as trajetórias contêm como eixo maior, eixo menor e distância focal as respectivas expressões: $(M/w) \cosh(ky_0)$, $(M/w) \sinh(ky_0)$ e $(2M/w)$. Partindo destas constatações e lembrando que y_0 representa a posição vertical inicial da nossa partícula, podemos então entender melhor como se dá o comportamento das trajetórias conforme a variação da profundidade.

Ora, ao considerar valores cada vez menores para y_0 , é fácil ver que o eixo menor da elipse tende a zero, o eixo maior tende a M/w e a distância focal permanece a mesma. Logo, à medida que a profundidade aumenta as trajetórias das partículas se tornam mais e mais achatadas. Ademais, observando as partículas que se encontram inicialmente em $y_0 = 0$, ou seja, no fundo canal, obtemos que estas permanecem no fundo com $x(t)$ oscilando no intervalo $[-M/w, M/w]$.

Outro aspecto muito interessante que também pode ser avaliado aqui é referente ao sentido no qual essas trajetórias se movimentam. Esta informação é retirada por meio de avaliações simples do sinal que as funções dx/dt e dy/dt – dadas por (4.25) e (4.26), respectivamente – assumem conforme a onda se propaga.

Para dar início a este estudo iremos supor, sem perda de generalidade, que nossa onda dada por $\eta(x, t) = a \cos(kx - wt)$ viaja para a direita. Observe que as cristas desta onda se encontram nos pontos $kx - wt = 2n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) e, deste modo, dado o interesse em analisar apenas uma célula periódica dela, concentraremos nosso estudo no intervalo $(2n - 1)\pi < kx - wt < (2n + 1)\pi$ – note aqui que os intervalos $(2n - 1)\pi < kx - wt < 2n\pi$ e $2n\pi < kx - wt < (2n + 1)\pi$ representam, respectivamente, a parte de trás e da frente da onda.

Definido isso começaremos então avaliando o sinal da equação (4.26) que diz respeito a taxa de variação do deslocamento vertical da partícula:

$$\frac{dy}{dt} = M \sinh(ky(t)) \sin(kx(t) - wt).$$

Aqui, como o argumento $ky(t)$ é sempre maior que ou igual a zero, temos de imediato que a função $\sinh(ky(t))$ também o é (para verificar basta representá-la na sua forma exponencial) e, conseqüentemente, o sinal de dy/dt depende exclusivamente da função $\sin(kx(t) - wt)$.

Daí, a partir do que se conhece a respeito do comportamento da função seno no círculo trigonométrico, concluímos que na parte da frente da onda a taxa de variação representada por dy/dt é positiva, ou seja, as partículas estão subindo. Analogamente, na parte de trás da onda tem-se dy/dt negativo, em outras palavras, as partículas do fluido estão descendo.

Com respeito ao sinal da equação (4.25) que representa a taxa de variação do deslocamento horizontal da partícula, a saber,

$$\frac{dx}{dt} = M \cosh(ky(t)) \cos(kx(t) - wt),$$

obtemos que, por conta do cosseno hiperbólico ser sempre positivo, o sinal de dx/dt depende exclusivamente do comportamento da função $\cos(kx(t) - wt)$ e, como conseqüência, temos o seguinte:

- No intervalo $2n\pi - \pi/2 < kx - wt < 2n\pi + \pi/2$ temos $dx/dt > 0$, ou seja, as partículas se movem para a direita.
- Nos intervalos $(2n-1)\pi < kx - wt < 2n\pi - \pi/2$ e $2n\pi + \pi/2 < kx - wt < (2n+1)\pi$, temos $dx/dt < 0$, ou seja, as partículas se movem para a esquerda.

Em resumo, o sinal do campo de velocidade abaixo da onda pode ser representado conforme a imagem ilustrativa 4.1. Além disso, ao traduzir o comportamento das trajetórias a partir da variação da profundidade dentro deste contexto ‘orientador’, concluímos que sua dinâmica geral é dada pela figura 4.2.

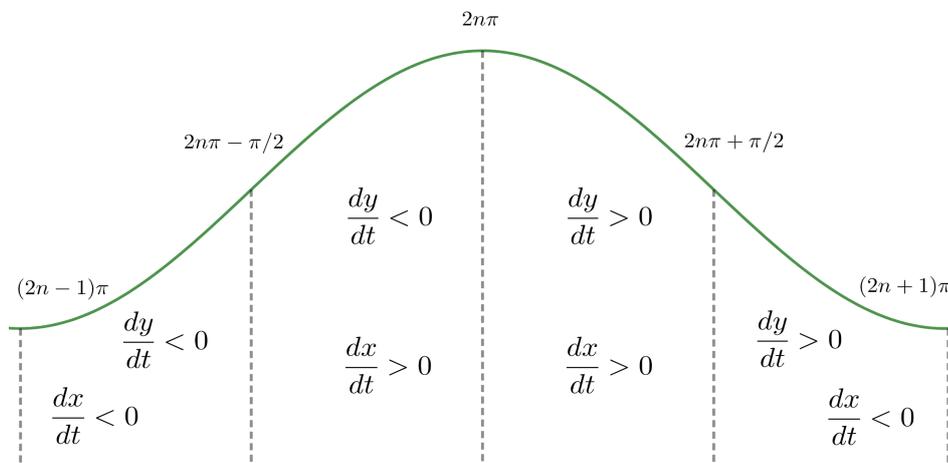


Figura 4.1: Célula periódica genérica de uma onda de Stokes linear.

Fonte: Autoria própria.

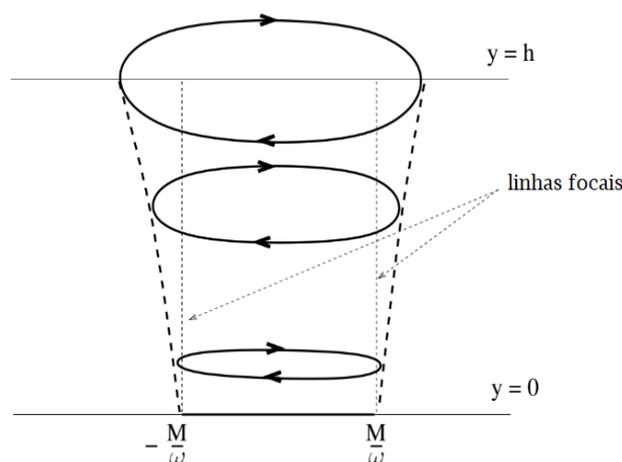


Figura 4.2: Representação do comportamento das trajetórias de partículas.

Fonte: Constantin (2008, p. 9).

Capítulo 5

As trajetórias das partículas via teoria do potencial

No capítulo anterior fomos capazes de determinar e tirar diversas conclusões a respeito das trajetórias das partículas por meio das equações de Euler (cf. sistema (3.5) – (3.10)). Agora, partindo da ideia de apresentar uma segunda abordagem para o estudo das trajetórias, desenvolveremos durante este capítulo o mesmo tipo de análise via teoria do potencial.

É importante destacar que a teoria das equações de Euler antes desenvolvida é mais geral, pois para a existência do potencial de velocidade ϕ é necessário impor que o campo de velocidade do escoamento é irrotacional (vide seção 3.2). Contudo, por mais que esta perspectiva seja mais restritiva, a abordagem via teoria do potencial é mais simples, o que permite englobar os diferentes tipos de preferências e níveis de entendimento do leitor.

5.1 Linearização das Equações Governantes

Na seção 3.2 determinamos o seguinte sistema de equações governantes:

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{em } -h < y < \eta(x, t), \\ \phi_t + \frac{1}{2}\|\nabla\phi\|^2 + g\eta = 0 & \text{em } y = \eta(x, t), \\ \eta_t + \phi_x\eta_x = \phi_y & \text{em } y = \eta(x, t), \\ \phi_y = 0 & \text{em } y = -h, \end{cases} \quad (5.1)$$

o qual, assim como feito para as equações de Euler, também precisa passar pelos processos de adimensionalização e linearização.

Para tanto, iniciando com o processo de adimensionalização, definiremos as seguintes

trocas de variáveis:

$$x = \lambda \tilde{x}, \quad y = h \tilde{y}, \quad t = \frac{\lambda}{\sqrt{gh}} \tilde{t}, \quad \eta(x, t) = a \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}), \quad \phi(x, y, t) = \frac{ag\lambda}{\sqrt{gh}} \tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}). \quad (5.2)$$

Donde segue que o sistema 5.1 nas variáveis adimensionais é dado por:

$$\begin{cases} \beta \tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{\phi}_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0 & \text{em } -1 < \tilde{y} < \alpha \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}), \\ \tilde{\phi}_{\tilde{t}} + \frac{\alpha}{2} \left[\left(\tilde{\phi}_{\tilde{x}} \right)^2 + \frac{1}{\beta} \left(\tilde{\phi}_{\tilde{y}} \right)^2 \right] + \eta = 0 & \text{em } \tilde{y} = \alpha \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}), \\ \tilde{\eta}_{\tilde{t}} + \alpha \tilde{\phi}_{\tilde{x}} \tilde{\eta}_{\tilde{x}} = \frac{1}{\beta} \tilde{\phi}_{\tilde{y}} & \text{em } \tilde{y} = \alpha \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}), \\ \tilde{\phi}_{\tilde{y}} = 0 & \text{em } \tilde{y} = -1, \end{cases} \quad (5.3)$$

onde $\beta = \frac{h^2}{\lambda^2}$ e $\alpha = \frac{a}{h}$. Os detalhes sobre as manipulações algébricas feitas para se chegar a este sistema estão descritos no apêndice B.

Ainda, tomando $\alpha = 0$ no sistema (5.3), encontramos o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} \beta \tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{\phi}_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0 & \text{em } -1 < \tilde{y} < 0, \\ \tilde{\phi}_{\tilde{t}} + \tilde{\eta} = 0 & \text{em } \tilde{y} = 0, \\ \tilde{\eta}_{\tilde{t}} = \frac{1}{\beta} \tilde{\phi}_{\tilde{y}} & \text{em } \tilde{y} = 0, \\ \tilde{\phi}_{\tilde{y}} = 0 & \text{em } \tilde{y} = -1. \end{cases} \quad (5.4)$$

Por questão de conveniência, voltando às variáveis dimensionais (cf. apêndice B), obtemos que as equações governantes lineares dadas via teoria do potencial são:

$$\begin{cases} \Delta \phi = 0 & \text{em } -h < y < 0, & (5.5) \\ \phi_t + g\eta = 0 & \text{em } y = 0, & (5.6) \\ \eta_t = \phi_y & \text{em } y = 0, & (5.7) \\ \phi_y = 0 & \text{em } y = -h. & (5.8) \end{cases}$$

5.2 Solução do sistema linear

Dando continuidade ao nosso estudo iremos agora buscar as soluções do sistema (5.5) – (5.8) de modo que, ao fim desta seção, sejamos capazes de determinar a expressão que descreve o potencial $\phi(x, y, t)$.

Traçado este objetivo, a primeira coisa para a qual chamaremos atenção é a forma com que será dada a nossa onda $\eta(x, t)$. Baseando-se na técnica de resolução de EDP's descrita na Definição 1.2.3 e lembrando que nosso estudo é focado em ondas de Stokes – isto é, ondas periódicas e viajantes – tomaremos aqui, sem perda de generalidade, $\eta(x, t)$ como sendo uma solução viajante na forma trem de onda (cf. Definição 1.2.4):

$$\eta(x, t) = a \cos(kx - wt). \quad (5.9)$$

Além disso, aplicando o método de separação de variáveis como estratégia de resolução do sistema (5.5) – (5.8), nos encarregaremos de buscar por soluções não nulas da forma

$$\phi(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t). \quad (5.10)$$

Com efeito, ao combinar as expressões (5.9) e (5.10) com a condição de fronteira (5.6), obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} X(x)Y(0)\frac{dT}{dt}(t) &= -ag \cos(kx - wt) \Rightarrow X(x)Y(0) \int \frac{dT}{dt}(t) dt = - \int ag \cos(kx - wt) dt \\ \Rightarrow X(x)Y(0)T(t) &= \frac{ag}{w} \sin(kx - wt) \Rightarrow X(x)T(t) = \frac{ag}{wY(0)} \sin(kx - wt) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Donde segue diretamente dos resultados expostos em (5.10) e (5.11) que o potencial $\phi(x, y, t)$ é da forma:

$$\phi(x, y, t) = \frac{agY(y)}{wY(0)} \sin(kx - wt) = f(y) \sin(kx - wt). \quad (5.12)$$

Daí, ao substituir a equação (5.12) em (5.5), temos

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{yy} &= (f(y) \sin(kx - wt))_{xx} + (f(y) \sin(kx - wt))_{yy} = 0 \\ \Rightarrow -k^2 f(y) \sin(kx - wt) + f''(y) \sin(kx - wt) &= f''(y) - k^2 f(y) = 0. \end{aligned}$$

Da mesma forma, substituindo a equação (5.12) na condição de fronteira (5.8), encontramos

$$\begin{aligned} \phi_y = 0 &\Rightarrow (f(y) \sin(kx - wt))_y|_{y=-h} = 0 \Rightarrow f'(-h) \sin(kx - wt) = 0 \\ \Rightarrow f'(-h) &= 0. \end{aligned}$$

De modo que ao juntar estes resultados acerca da função $f(y)$ é formada a seguinte EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$\begin{cases} f''(y) - k^2 f(y) = 0 & \text{em } -h < y < 0, \\ f'(-h) = 0. \end{cases}$$

Agora, tendo como base o método de solução para este tipo de EDO empregado em Santos ([19], p.45), obtemos que a equação característica e suas raízes são dadas por

$$\lambda^2 - k^2 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_1 = k, \quad \lambda_2 = -k,$$

o que nos fornece, por conta das raízes serem reais e distintas, a expressão

$$f(y) = C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky}, \quad (5.13)$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

Segue ainda, da aplicação da condição de fronteira $f'(-h) = 0$ em (5.13), que a relação entre as constantes C_1 e C_2 é:

$$\begin{aligned} f'(y) = C_1 k e^{ky} - C_2 k e^{-ky} = 0 &\Rightarrow f'(-h) = C_1 k e^{-kh} - C_2 k e^{kh} = 0 \\ \Rightarrow C_1 e^{-kh} = C_2 e^{kh} &\Rightarrow C_1 = C_2 e^{2kh} \end{aligned}$$

e, assim, somos capazes de reescrever $f(y)$ como:

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(y) = C_2 e^{2kh} e^{ky} + C_2 e^{-ky} &\Rightarrow f(y) = C_2 e^{kh} [e^{k(y+h)} + e^{-k(y+h)}] \\ \Rightarrow f(y) = 2C_2 e^{2kh} \left[\frac{e^{k(y+h)} + e^{-k(y+h)}}{2} \right] &\Rightarrow f(y) = 2C_2 e^{2kh} \cosh(k(y+h)). \end{aligned}$$

Finalmente, ao substituir esta última expressão em (5.12), temos como resultado

$$\phi(x, y, t) = G \cosh(k(y+h)) \sin(kx - wt), \quad (5.14)$$

onde $G = 2C_2 e^{2kh}$.

Note que na equação (5.14) ainda falta determinar quem é G . Para isso, basta combinar as equações (5.6) e (5.14) da seguinte maneira:

$$-Gw \cosh(kh) \cos(kx - wt) = -ag \cos(kx - wt) \Rightarrow G = \frac{ag}{w \cosh(kh)}.$$

Obtendo assim que

$$\phi(x, y, t) = \frac{ag}{w} \frac{\cosh(k(y+h)) \sin(kx - wt)}{\cosh(kh)}. \quad (5.15)$$

Enfim, para concluir a resolução do sistema (5.5) – (5.8), nos resta apenas determinar para quais frequências (w) e números de onda (k) a onda $\eta(x, t) = a \cos(kx - wt)$ é de fato uma solução.

Ora, derivando a condição de fronteira (5.6) em relação a t e usando (5.7), obtemos

$$\phi_{tt}(x, 0, t) = -g\eta_t = -g\phi_y(x, 0, t),$$

mais ainda, ao usar a expressão (5.14) neste resultado, tem-se

$$-Gw^2 \cosh(kh) \sin(kx - wt) = -Gkg \sinh(kh) \sin(kx - wt) \Rightarrow w^2 = kg \tanh(kh).$$

Então, segue deste último resultado, que a relação de dispersão aqui é dada por (vide Definição 1.2.5):

$$w = \pm \sqrt{kg \tanh(kh)}. \quad (5.16)$$

Regime de águas rasas e profundas

Neste tópico faremos um adendo a respeito dos regimes de águas rasas e de águas profundas de modo a determinar a relação de dispersão para cada um deles. O objetivo de explicitar w nestas duas situações é inteiramente voltado para a simplificação de cálculos em casos onde já se tenha conhecimento do regime trabalhado – informação esta que geralmente já é obtida de antemão em estudos práticos.

Sabemos por meio das considerações feitas na Observação 4.1.1 que o parâmetro de dispersão $\beta = \frac{h^2}{\lambda^2}$ é uma ferramenta muito útil quando o assunto é definir se estamos em um regime de águas rasas ou de águas profundas. Mais ainda, tendo como base a equação (5.16), é fácil perceber que o impacto causado em w pela alteração deste parâmetro tem ligação direta com a função tangente hiperbólica. Por conta disso, no estudo feito a seguir, nos ocuparemos de combinar as condições estabelecidas por β com algumas informações relevantes sobre a tangente hiperbólica, de modo a tirar facilmente a relação de dispersão para cada regime separadamente.

Começando nosso estudo a partir da análise do regime de águas profundas já sabemos que, por β ser suficientemente grande, vale a seguinte cadeia de implicações:

$$\frac{h^2}{\lambda^2} \gg 1 \Rightarrow \frac{h}{\lambda} \gg 1 \Rightarrow \frac{kh}{2\pi} \gg 1 \Rightarrow kh \gg 1.$$

Daí, como $\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x) = 1$, podemos tomar sem maiores problemas a aproximação $\tanh(kh) = 1$, donde segue que: se a expressão $w = \pm \sqrt{kg \tanh(kh)}$ representa a relação de dispersão para um regime qualquer, então para o regime de águas profundas

$$w = \pm \sqrt{kg}. \quad (5.17)$$

Por outro lado, quando β é suficientemente pequeno, vale o seguinte:

$$0 < \frac{h^2}{\lambda^2} \ll 1 \Rightarrow 0 < \frac{h}{\lambda} \ll 1 \Rightarrow 0 < \frac{kh}{2\pi} \ll 1 \Rightarrow kh \ll 1.$$

Essa informação, quando avaliada a partir da expansão de Taylor em torno de zero para a função $\tanh(kh)$, a saber,

$$\tanh(kh) = kh + \frac{(kh)^3}{3} + \frac{2(kh)^5}{15} + \frac{17(kh)^7}{315} \dots,$$

nos diz que, se desprezarmos os termos de ordem maior que ou igual a $(kh)^3$, obtemos a aproximação $\tanh(kh) = kh$. Assim, utilizando a fórmula (5.16), concluímos que no regime de águas rasas a relação de dispersão é dada por

$$w = \pm k \sqrt{gh}. \quad (5.18)$$

Vale ressaltar ainda, que por mais que tenhamos usado no nosso estudo o parâmetro β para delimitar quando estávamos em um regimes de águas rasas ou de águas profundas, não existe um método que distinga com precisão a fronteira entre ambos. Porém, uma convenção comumente utilizada para separar estes regimes – e que está exposta em Harald e Oivin ([12] p.15) – é:

- ▷ se $h \geq \frac{\lambda}{2}$ então estamos em um regime de águas profundas.
- ▷ se $h \leq \frac{\lambda}{20}$ então estamos em um regime de águas rasas.

Heuristicamente, a motivação para a escolha destes valores vem dos respectivos argumentos:

Se

$$h \geq \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \frac{h}{\lambda} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{2\pi h}{\lambda} \geq \pi \Rightarrow kh \geq \pi$$

e, por conta disso, como a função tangente hiperbólica é crescente,

$$\tanh(kh) \geq \tanh(\pi) \approx 0,996.$$

Esta desigualdade nos permite adotar naturalmente a aproximação $\tanh(kh) = 1$ e, conseqüentemente, resulta em uma relação de dispersão dada por $w = \pm\sqrt{kh}$. Desta forma, ao comparar este resultado obtido para w com as considerações feitas anteriormente, concluímos que o regime ditado por $h \geq \frac{\lambda}{2}$ é o regime de águas profundas.

Quanto ao outro caso, se temos

$$h \leq \frac{\lambda}{20} \Rightarrow \frac{h}{\lambda} \leq \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{2\pi h}{\lambda} \leq \frac{\pi}{10} \Rightarrow kh \leq 0,314$$

e, portanto, segue da análise da expansão de Taylor para a função $\tanh(kh)$, que a aproximação $\tanh(kh) = kh$ pode ser facilmente adotada. Em outras palavras, para $h \leq \frac{\lambda}{20}$, temos $w = \pm k\sqrt{gh}$ e, portanto, nos encontramos em um regime de águas rasas.

5.3 Trajetória das partículas

Do início deste capítulo até agora nos encarregamos de aprimorar e resolver o modelo matemático que descreve a dinâmica de uma onda de Stokes linear mediante a teoria do potencial. Todo esse estudo foi realizado a fim de determinar quem era o potencial $\phi(x, y, t)$ para o qual o campo de velocidade gerado pela onda fosse dado pela igualdade $(u, v) = (\phi_x, \phi_y)$.

Agora, visto os resultados obtidos na seção 5.2, somos finalmente capazes de atingir o objetivo proposto no início do capítulo, de modo que, após explicitar formalmente quem é este campo de velocidade, iremos deduzir as trajetórias das partículas dentro desta nova perspectiva.

5.3.1 Trajetória das partículas em canais com profundidade finita

Tendo como base principal para esta seção o estudo exposto no referencial [12] (p. 20-24), as primeiras ações que realizaremos aqui consistem em explicitar quem são u e v , assim como realizar algumas manipulações algébricas pertinentes nas equações que os representam.

Sabemos que para uma onda de perfil $\eta(x, t) = a \cos(kx - wt)$ o potencial $\phi(x, y, t)$ é descrito por meio da equação (5.15). Desta forma, ao calcular as derivadas parciais ϕ_x e ϕ_y obtemos, respectivamente, os seguintes resultados:

$$\begin{cases} u = \frac{agk}{w} \frac{\cosh(k(y+h)) \cos(kx - wt)}{\cosh(kh)}, \\ v = \frac{agk}{w} \frac{\sinh(k(y+h)) \sin(kx - wt)}{\cosh(kh)}. \end{cases}$$

Mais ainda, lembrando da fórmula da relação de dispersão para um trem de onda ((5.16)), podemos reescrever os termos em comum que aparecem em ambas as expressões acima – consideramos aqui, sem perda de generalidade, que a nossa onda viaja para a direita ($w > 0$):

$$\frac{agk}{w \cosh(kh)} = \frac{agkw}{w^2 \cosh(kh)} = \frac{agkw}{kg \tanh(kh) \cosh(kh)} = \frac{aw}{\sinh(kh)}.$$

Daí, segue que as funções u e v ficam representadas por

$$\begin{cases} u = \alpha hw \frac{\cosh(k(y+h)) \cos(kx - wt)}{\sinh(kh)}, \\ v = \alpha hw \frac{\sinh(k(y+h)) \sin(kx - wt)}{\sinh(kh)}. \end{cases} \quad (5.19)$$

onde $\alpha = \frac{a}{h}$.

Definido o conjunto de equações (5.19) daremos início então ao estudo das trajetórias em si.

Com efeito, consideraremos uma partícula que se encontra inicialmente na posição (x_0, y_0) e tomaremos $(x_0 + x_p, y_0 + y_p)$ como sendo a posição desta passado um tempo t arbitrário – ver figura esquemática 5.1. Além disso, visto que estamos sob a luz da teoria linear, o parâmetro α encontrado no sistema (5.19) é pequeno e, portanto, os valores aqui considerados para x_p e y_p decorrentes do campo de velocidade também o são.

Desta forma, tomando as funções $x_p(t)$ e $y_p(t)$ como representação para os deslocamentos horizontal e vertical desta partícula a partir do ponto (x_0, y_0) , obtemos que:

$$\begin{cases} \frac{dx_p}{dt} = u(x_0 + x_p, y_0 + y_p, t), \\ \frac{dy_p}{dt} = v(x_0 + x_p, y_0 + y_p, t), \\ (x_p(0), y_p(0)) = (0, 0). \end{cases}$$

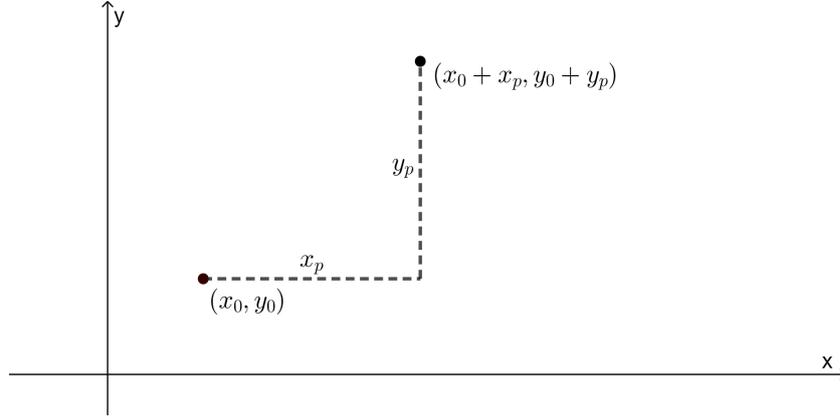


Figura 5.1: Deslocamento de uma partícula de fluido.

Fonte: Autoria própria.

e, utilizando as expressões encontradas em (5.19), ficamos com o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} \frac{dx_p}{dt} = \alpha h w \frac{\cosh(k((y_0 + y_p) + h)) \cos(k(x_0 + x_p) - wt)}{\sinh(kh)}, \\ \frac{dy_p}{dt} = \alpha h w \frac{\sinh(k((y_0 + y_p) + h)) \sin(k(x_0 + x_p) - wt)}{\sinh(kh)}, \\ (x_p(0), y_p(0)) = (0, 0). \end{cases} \quad (5.20)$$

Note que o modo com que este último sistema está escrito não nos permite encontrar uma solução analítica para descrever a trajetória da partícula e, por conta disso, buscaremos simplificá-lo por meio da aplicação da expansão de Taylor para duas variáveis (vide Definição 1.3.4).

Ora, a expansão de Taylor de $u(x_0 + x_p, y_0 + y_p, t)$ para um t fixo em torno do ponto (x_0, y_0) é dada por

$$\begin{aligned} u(x_0 + x_p, y_0 + y_p, t) &= u(x_0, y_0, t) + u_x(x_0, y_0, t)x_p + u_y(x_0, y_0, t)y_p + \\ &+ u_{xx}(x_0, y_0, t)\frac{x_p^2}{2} + u_{yy}(x_0, y_0, t)\frac{y_p^2}{2} + u_{xy}(x_0, y_0, t)x_py_p + \dots \end{aligned}$$

na qual, desprezando os termos de ordem x_p e y_p , podemos aproximar $u(x_0 + x_p, y_0 + y_p, t)$ por $u(x_0, y_0, t)$. Pelos mesmos argumentos, obtemos um resultado análogo para $v(x_0 + x_p, y_0 + y_p, t)$ e, com isso, segue que o deslocamento da partícula estudada é descrito aproximadamente por:

$$\begin{cases} \frac{dx_p}{dt} = A \cos(kx_0 - wt), \\ \frac{dy_p}{dt} = B \sin(kx_0 - wt), \\ (x_p(0), y_p(0)) = (0, 0), \end{cases} \quad (5.21)$$

onde $A = \alpha h w \frac{\cosh(k(y_0 + h))}{\sinh(kh)}$ e $B = \alpha h w \frac{\sinh(k(y_0 + h))}{\sinh(kh)}$ são constantes.

Agora, tendo em mãos estas expressões aproximadas, somos capazes de resolver o sistema (5.21) sem maiores problemas, de modo que, integrando cada equação que o compõe de ambos os lados, obtemos os seguintes resultados para as funções $x_p(t)$ e $y_p(t)$:

$$x_p(t) = -\frac{A}{w} \sin(kx_0 - wt) + \frac{A}{w} \sin(kx_0) \quad \text{e} \quad y_p(t) = -\frac{B}{w} \cos(kx_0 - wt) + \frac{B}{w} \cos(kx_0).$$

Segue então, que a trajetória de uma partícula gerada por uma onda de Stokes linear é dada por:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 - \frac{A}{w} \sin(kx_0 - wt) + \frac{A}{w} \sin(kx_0), \\ y(t) = y_0 - \frac{B}{w} \cos(kx_0 - wt) + \frac{B}{w} \cos(kx_0). \end{cases} \quad (5.22)$$

Ora, é fácil perceber que $x(t)$ e $y(t)$ satisfazem a equação da elipse

$$\frac{(x - x_c)^2}{(A/w)^2} + \frac{(y - y_c)^2}{(B/w)^2} = 1 \quad (5.23)$$

onde $x_c = x_0 + \frac{A}{w} \sin(kx_0)$ e $y_c = y_0 + \frac{B}{w} \cos(kx_0)$.

De fato, ao substituir as expressões de (5.22) em (5.23), temos

$$\frac{(x - x_c)^2}{(A/w)^2} + \frac{(y - y_c)^2}{(B/w)^2} = \frac{((A/w) \sin(wt))^2}{(A/w)^2} + \frac{((B/w) \cos(wt))^2}{(B/w)^2} = \sin^2(wt) + \cos^2(wt) = 1,$$

o que nos leva a concluir que as trajetórias das partículas descrevem órbitas elípticas – resultado já esperado visto deduções do capítulo anterior.

Ademais, tendo como base observações análogas às feitas no fim do capítulo 4, podemos concluir que as trajetórias das partículas dada aqui tendem a ficar cada vez mais achatadas conforme o aumento da profundidade e , que no fundo, elas correspondem a uma linha horizontal. Mais ainda, sob a hipótese de que a onda se propaga para a direita, obtemos também que as partículas se movem no sentido horário.

Observação 5.3.1. *Vale ressaltar que as trajetórias obtidas via teoria do potencial são iguais àquelas obtidas via equações de Euler.*

De fato, denote por $(x_e(t), y_e(t))$ as trajetórias descritas via equações de Euler, a saber,

$$\begin{cases} x_e(t) = x_0 - \frac{M}{w} \cosh(ky_0) \sin(kx_0 - wt) + \frac{M}{w} \cosh(ky_0) \sin(kx_0), \\ y_e(t) = y_0 + \frac{M}{w} \sinh(ky_0) \cos(kx_0 - wt) - \frac{M}{w} \sinh(ky_0) \cos(kx_0), \end{cases} \quad (5.24)$$

onde $M = \frac{\alpha h w}{\sinh(kh)}$. Observe que tais trajetórias se dão no domínio $0 < y < \eta(x, t) + h$, enquanto que as trajetórias (5.22) obtidas via teoria do potencial se desenvolvem em $-h < y < \eta$.

Dada esta diferença, para mostrar que as trajetórias são as mesma em ambas as formulações, precisamos colocar as equações (5.22) e (5.24) em um mesmo domínio. Para isso, iremos transladar o domínio da equações de Euler h unidades para baixo.

Ora, fazendo esta translação, cada y_0 aparente nas expressões de (5.24) é substituído por $y_0 + h$ e, portanto, encontramos que

$$\begin{cases} x_e(t) = x_0 - \frac{A}{w} \sin(kx_0 - wt) + \frac{A}{w} \sin(kx_0), \\ y_e(t) = y_0 - \frac{B}{w} \cos(kx_0 - wt) + \frac{B}{w} \cos(kx_0), \end{cases} \quad (5.25)$$

onde $A = \alpha hw \frac{\cosh(k(y_0 + h))}{\sinh(kh)}$ e $B = \alpha hw \frac{\sinh(k(y_0 + h))}{\sinh(kh)}$. Note que estas constantes são as mesmas estabelecidas em (5.22), ou seja, concluímos que as trajetórias encontradas por meio de ambas as formulações são iguais. Por conseguinte, se os dados iniciais x_0 e y_0 nas equações (5.22) e (5.25) forem os mesmos, obtemos que as trajetórias obedecem a mesma equação da elipse.

5.3.2 Trajetória das partículas em canais de profundidade infinita

Por que considerar um canal de fundo infinito se, na prática, essa situação não existe?

A resposta para esta pergunta tem base no estudo que fizemos no tópico 5.2. Lá, determinamos através de uma heurística que para ondas no regime de águas profundas podemos considerar sem maiores problemas $\tanh(kh) \approx 1$ e, por conta disso, tomar $h \rightarrow \infty$ é uma ação natural ao se trabalhar neste tipo de ambiente. Sendo assim, baseados nesta informação, desenvolveremos aqui um estudo análogo ao feito no decorrer das seções anteriores deste capítulo, de modo que, a partir de algumas poucas modificações pertinentes nos processos de obtenção e resolução do sistema governante, sejamos capazes de obter as trajetórias das partículas para canais de profundidade infinita.

Encontrando o potencial

Durante o capítulo 3 fomos capazes de modelar a dinâmica da onda por meio de uma série de condições físicas que resultaram no sistema governante (5.1). Estas condições citadas seguiam diretamente das restrições impostas pelo ambiente escolhido e, dentre elas, apenas uma mostrava relação direta com o fundo do canal: a condição de impermeabilidade no fundo. Desta forma, visto o novo contexto de águas profundas aqui estudado e baseados no referencial [1] (p. 68), substituímos a condição de fronteira antes modelada como

$$\phi_y = 0 \quad \text{em} \quad y = -h,$$

por

$$\phi \rightarrow 0 \quad \text{em} \quad y \rightarrow -\infty$$

e, assim, fica estabelecido que o sistema de equações governantes para o regime de águas profundas é dado pelo seguinte:

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{em} \quad -\infty < y < \eta(x, t), \\ \phi_t + \frac{1}{2}\|\nabla\phi\|^2 + g\eta = 0 & \text{em} \quad y = \eta(x, t), \\ \eta_t + \phi_x\eta_x = \phi_y & \text{em} \quad y = \eta(x, t), \\ \phi \rightarrow 0 & \text{em} \quad y \rightarrow -\infty. \end{cases} \quad (5.26)$$

Explicitado este sistema o próximo passo consiste em realizar os processos de adimensionalização, linearização e dimensionalização. Para tanto observe a semelhança existente entre as equações de (5.1) e (5.26) que, exceto pela condição de fronteira no fundo, não apresentam maiores modificações em sua estrutura. Por conta desta semelhança, tomando argumentos análogos aos apresentados na seção 5.1, podemos concluir que o sistema de equações governantes linear é escrito nas variáveis dimensionais como:

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{em} \quad -\infty < y < 0, & (5.27) \\ \phi_t + g\eta = 0 & \text{em} \quad y = 0, & (5.28) \\ \eta_t = \phi_y & \text{em} \quad y = 0, & (5.29) \\ \phi \rightarrow 0 & \text{em} \quad y \rightarrow -\infty. & (5.30) \end{cases}$$

Agora, partindo do sistema (5.27) – (5.30), podemos dar início ao processo de resolução que determinará o potencial $\phi(x, y, t)$.

Com efeito, tomando o perfil da onda como sendo

$$\eta(x, t) = a \cos(kx - wt) \quad (5.31)$$

e buscando soluções não nulas da forma

$$\phi(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t), \quad (5.32)$$

obtemos em um primeiro momento que $\phi(x, y, t)$ é dado por:

$$\phi(x, y, t) = f(y) \sin(kx - wt). \quad (5.33)$$

(cf. equação (5.12)).

Daí, substituindo a equação (5.33) em (5.27), o seguinte resultado é obtido:

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + \phi_{yy} &= (f(y) \sin(kx - wt))_{xx} + (f(y) \sin(kx - wt))_{yy} = 0 \\ \Rightarrow -k^2 f(y) \sin(kx - wt) + f''(y) \sin(kx - wt) &= 0 \\ \Rightarrow f''(y) - k^2 f(y) &= 0. \end{aligned}$$

Da mesma forma, substituindo a equação (5.33) na condição de fronteira (5.30), encontramos que:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -\infty} \phi = 0 &\Rightarrow \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) \sin(kx - wt) = 0 \Rightarrow \sin(kx - wt) \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = 0 \\ &\Rightarrow \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = 0. \end{aligned}$$

Logo, juntando estes dois resultados que se referem à função $f(y)$, conseguimos formar a seguinte EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes:

$$\begin{cases} f''(y) - k^2 f(y) = 0 & \text{em } -\infty < y < 0, \\ \lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = 0. \end{cases}$$

Agora, tendo em mente o método utilizado para resolver este tipo de EDO (cf. Santos [19], p.45), obtemos que a equação característica e suas raízes são dadas por

$$\lambda^2 - k^2 = 0 \quad \text{e} \quad \lambda_1 = k, \quad \lambda_2 = -k,$$

de modo que $f(y)$ fica escrita como:

$$f(y) = C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky}, \quad (5.34)$$

onde C_1 e C_2 são constantes.

Mais ainda, ao substituir a condição de fronteira $\lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = 0$ na expressão (5.34), obtemos a seguinte cadeia de implicações:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -\infty} (C_1 e^{ky} + C_2 e^{-ky}) = 0 &\Rightarrow \lim_{y \rightarrow -\infty} C_1 e^{ky} + \lim_{y \rightarrow -\infty} C_2 e^{-ky} = 0 \\ \Rightarrow \lim_{y \rightarrow -\infty} C_1 e^{ky} = - \lim_{y \rightarrow -\infty} C_2 e^{-ky} &\Rightarrow \lim_{y \rightarrow -\infty} C_2 e^{-ky} = 0 \\ \Rightarrow C_2 \lim_{y \rightarrow -\infty} e^{-ky} = 0 &\Rightarrow C_2 = 0, \end{aligned}$$

da qual concluímos que $f(y) = C_1 e^{ky}$ e, portanto, que o potencial $\phi(x, y, t)$ explicitado em (5.33) é dado por

$$\phi(x, y, t) = C_1 e^{ky} \sin(kx - wt). \quad (5.35)$$

Por fim, para determinar quem é a constante C_1 , combinaremos as equações (5.28), (5.31) e (5.35):

$$\begin{aligned} \phi_t(x, 0, t) = -g\eta = -ag \cos(kx - wt) &\Rightarrow -C_1 w \cos(kx - wt) = -ag \cos(kx - wt) \\ \Rightarrow C_1 = \frac{ag}{w}. \end{aligned}$$

Donde segue diretamente que o potencial $\phi(x, y, t)$ têm a seguinte forma:

$$\phi(x, y, t) = \frac{ag}{w} e^{ky} \sin(kx - wt). \quad (5.36)$$

Com este resultado em mãos, visto que por discussões anteriores (cf, equação (5.17)) já sabemos que a relação de dispersão neste regime específico é dada por $w = \pm \sqrt{kg}$, fica dada a resolução do sistema (5.27) – (5.30).

Definindo as trajetórias

Definido o potencial $\phi(x, y, t)$ gerado pela onda em um canal de profundidade infinita somos capazes agora de encontrar as trajetórias das partículas descritas nesta situação. Para isso iremos primeiramente explicitar quem é o campo de velocidade (u, v) , assim como realizar uma pequena manipulação algébrica nas equações que o definem.

Calculando as derivadas parciais ϕ_x e ϕ_y a partir da equação (5.36) podemos dizer que:

$$\begin{cases} u = \phi_x = \frac{agk}{w} e^{ky} \cos(kx - wt), \\ v = \phi_y = \frac{agk}{w} e^{ky} \sin(kx - wt). \end{cases}$$

Daí, sabendo que a relação de dispersão aqui é dada por $w = \sqrt{gk}$ e supondo, sem perda de generalidade, que nossa onda viaja para a direita, podemos modificar a constante em comum que ambas as expressões possuem:

$$\frac{agk}{w} = \frac{agkw}{w^2} = \frac{agkw}{gk} = aw.$$

Donde segue que:

$$\begin{cases} u = \alpha hw e^{ky} \cos(kx - wt), \\ v = \alpha hw e^{ky} \sin(kx - wt), \end{cases} \quad (5.37)$$

para $\alpha = \frac{a}{h}$.

Agora, partindo de considerações análogas às feitas na seção 5.3 para a dedução das trajetórias, estudaremos aqui o movimento do fluido a partir de uma partícula de posição inicial (x_0, y_0) . Além disso, tomaremos o ponto $(x_0 + x_p, y_0 + y_p)$ como representação da posição desta após os deslocamentos x_p e y_p muito pequenos dentro um tempo t arbitrário.

Dito isso, tomando $x_p(t)$ e $y_p(t)$ como as funções que representam os deslocamentos horizontal e vertical desta partícula a partir do ponto inicial estabelecido, temos o seguinte:

$$\begin{cases} \frac{dx_p}{dt} = u(x_0 + x_p, y_0 + y_p, t), \\ \frac{dy_p}{dt} = v(x_0 + x_p, y_0 + y_p, t), \\ (x_p(0), y_p(0)) = (0, 0). \end{cases}$$

Logo, a partir da substituição das expressões encontradas em (5.37), obtemos o sistema:

$$\begin{cases} \frac{dx_p}{dt} = \alpha hw e^{k(y_0 + y_p)} \cos(k(x_0 + x_p) - wt), \\ \frac{dy_p}{dt} = \alpha hw e^{k(y_0 + y_p)} \sin(k(x_0 + x_p) - wt), \\ (x_p(0), y_p(0)) = (0, 0). \end{cases}$$

Mais ainda, ao aplicar a expansão de Taylor (definição 1.3.4) em ambas as equações deste último sistema, obtemos a seguinte aproximação:

$$\begin{cases} \frac{dx_p}{dt} = D \cos(kx_0 - wt), \\ \frac{dy_p}{dt} = D \sin(kx_0 - wt), \\ (x_p(0), y_p(0)) = (0, 0), \end{cases} \quad (5.38)$$

onde $D = \alpha h w e^{ky_0}$ é uma constante.

Daí, partindo de uma simples integração em ambos os lados de cada equação do sistema (5.38), somos finalmente capazes de obter as funções $x_p(t)$ e $y_p(t)$:

$$x_p(t) = -\frac{D}{w} \sin(kx_0 - wt) + \frac{D}{w} \sin(kx_0) \quad \text{e} \quad y_p(t) = -\frac{D}{w} \cos(kx_0 - wt) + \frac{D}{w} \cos(kx_0).$$

Delas segue diretamente que o deslocamento de uma partícula no regime de águas profundas é dado por:

$$x(t) = x_0 - \frac{D}{w} \sin(kx_0 - wt) + \frac{D}{w} \sin(kx_0) \quad \text{e} \quad y(t) = y_0 - \frac{D}{w} \cos(kx_0 - wt) + \frac{D}{w} \cos(kx_0).$$

É fácil notar que $x(t)$ e $y(t)$ satisfazem a equação da circunferência

$$\frac{(x - x_c)^2}{(D/w)^2} + \frac{(y - y_c)^2}{(D/w)^2} = 1, \quad (5.39)$$

onde $x_c = x_0 + \frac{D}{w} \sin(kx_0)$ e $y_c = y_0 + \frac{D}{w} \cos(kx_0)$.

De fato, ao substituir estas expressões em (5.39), temos

$$\frac{(x - x_c)^2}{(D/w)^2} + \frac{(y - y_c)^2}{(D/w)^2} = \frac{((D/w) \sin(wt))^2}{(D/w)^2} + \frac{((D/w) \cos(wt))^2}{(D/w)^2} = \sin^2(wt) + \cos^2(wt) = 1$$

e, portanto, concluímos por meio da teoria do potencial, que as trajetórias das partículas geradas por ondas de Stokes lineares no regime de águas profundas descrevem órbitas circulares.

Com respeito a orientação desta trajetória obtemos ainda, por meio de um estudo análogo ao feito no fim do capítulo 4, que as partículas se movem em sentido horário. Além disso, se baseando no fato de que o raio da circunferência descrita por (5.39) é $a e^{ky_0}$, notamos que conforme a profundidade do canal aumenta as dimensões das trajetórias diminuem exponencialmente – com estas se colapsando em um ponto no limite $y \rightarrow -\infty$.

Considerações finais

Durante o desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso discorreremos acerca das trajetórias de partículas geradas por ondas de Stokes lineares.

Em um primeiro momento deduzimos as equações de Euler para um fluido ideal qualquer. Em seguida as apresentamos no contexto de ondas aquáticas de superfície, de modo a delimitar as condições de fronteira impostas pelo nosso ambiente de estudo e determinar o sistema governante via equações de Euler e via teoria do potencial. Depois, partindo dos resultados fornecidos pelos processos de adimensionalização e linearização, fomos capazes de solucionar este sistema, obtendo assim o campo de velocidade do fluido gerado por ondas lineares.

Por fim, concluímos a partir de uma aproximação no campo de velocidade do fluido que as trajetórias das partículas na presença de uma onda de Stokes linear descrevem curvas fechadas: elipses no caso de profundidade finita e círculos no regime de águas profundas (profundidade infinita).

Este trabalho de conclusão de curso, que teve como grande motivação para seu desenvolvimento a admiração pelo tema nele exposto, visa ajudar a suprir uma das maiores dificuldades que encontramos ao ingressar na teoria matemática da dinâmica dos fluidos: a escassez de literatura nacional que aborde este assunto a nível universitário. Dito isso, o texto como um todo foi escrito visando atender aos diferentes níveis de entendimento que um aluno da graduação em matemática ou áreas afins possa vir a ter ao se interessar por esse tópico de pesquisa. Por um motivo semelhante, também procuramos redigir o texto de uma forma mais didática do que a apresentada nas literaturas de referência, de modo que o uso de conceitos que preveem consulta a parte ou a omissão de passos algébricos em cálculos de destaque foram práticas evitadas ao máximo.

Desta forma, esperamos que o material produzido aqui sirva não só de grande apoio para todos aqueles que desejam ingressar no estudo de ondas aquáticas como também inspire-os ainda mais a se aprofundar neste fascinante tema.

Referências

- [1] ACHSEON, D. J. **Elementary Fluid Dynamics**. United States: Okford University Press Inc., 1990.
- [2] BATCHELOR, G. K. **An Introduction to Fluid Dynamics**. Massachusetts: Cambridge Universiry Press, 1967.
- [3] CHORIN, A; MARSDEN, J. E. **A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics**. 3.ed. New York: Springer-Verlag Publishing Company, 2000.
- [4] CONSTANTIN, A. "The trajectories of particles in Stokes waves". **Inventiones Mathematicae**. p. 523-535, 2006.
- [5] CONSTANTIN, A; VILLARI, G. "Particle Trajectories in Linear Water". **Journal of Mathematical Fluid Mechanics**. v.10, p. 1-18, 2008.
- [6] CONSTANTIN, A; STRAUSS, W. "Pressure Beneath a Stokes Wave". **Communications on Pure and Applied Mathematics**. v.63, p. 533-557, 2009.
- [7] CRAIK. A. D. D. "The Origins of Water Wave Theory". **Annual Review of Fluid Mechanics**. v.39, p. 1-28, 2004.
- [8] GUIDORIZZI, H. L. **Um Curso de Cálculo**. 5.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. v.1.
- [9] HALLIDAY, D; RESNIK, R; WALKER, J. **Fundamentos de Física**. Tradução de Ronaldo Sérgio de Biasi. 9.ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. v.2. cap. 6, p. 117-122.
- [10] IÓRIO JR, R. J.; IÓRIO, V. **Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução**. Rio de Janeiro: Intituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1988. 372p.
- [11] KNOBEL, Roger. **An Introduction to the Mathematical Theory of Waves**. Rhode Island: American Mathematical Society, 2000. v.3.
- [12] KROGSTAD, H. E; ARNTSEN, O. A. **Linear Wave Theory PART A**. Norway: Norwegian University Of Science And Technology, 2000.

- [13] LIMA, Elon Lages. **Curso de análise**. 11.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. v.2. 547p.
- [14] MEIER, D; KEMPF, O. **Mécanique des fluides**: Cours avec exercices résolus. Paris ; Milan ; Barcelone: Elsevier Masson, 1900.
- [15] MICHAELIS. Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa. Definição de fluido. Disponível em: < <https://michaelis.uol.com.br/moderno-portugues/busca/portugues-brasileiro/fluido/>>. Acesso em: 05 de ago. de 2020.
- [16] NACHBIN, André. **Aspectos de Modelagem Matemática em Dinâmica dos Fluidos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. 110p.
- [17] PRITCHARD, P. J; MITCHELL, J. W. LEYLEGIAB, J. C. **Fox and McDonald's Introduction to Fluid Mechanics**. 9.ed. Hoboken: Jhon Willey & Inc., 2015.
- [18] RIBEIRO, Roberto. **Teoria Matemática da Dinâmica dos Fluidos**. Notas de Aula. 304p.
- [19] SANTOS, Reginaldo J. **Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução**. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2011.
- [20] STEWART, James. **Cálculo**. Tradução de EZ2 Translate. 7.ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. v.2.
- [21] WHITHAM, G.B. **Linear and Nonlinear Waves**. New York: Wiley Interscience, 1999.

Apêndices

Apêndice A

Resolvendo as equações de Euler lineares

A.1 Definições

Definição A.1.1. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua ou contínua por partes se $f(x)$ é contínua em $[a, b]$ exceto em um número finito de pontos, nos quais os limites laterais existem. De forma análoga uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é seccionalmente contínua ou contínua por partes se $f(x)$ é contínua por partes em todo intervalo $[a, b] \in \mathbb{R}$. ([19], p.161)

Definição A.1.2. Para toda função $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua por partes a série de Fourier da função f é definida por

$$S_f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (\text{A.1})$$

em que os coeficientes são dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \text{ para } n = 0, 1, 2, \dots$$
$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \text{ para } n = 1, 2, \dots$$

([19], p.161-162)

Observação A.1.1. A série de Fourier (A.1) também pode ser escrita da forma

$$S_f(x) = \sum_{\tilde{k}=-\infty}^{\infty} c_{\tilde{k}} e^{i\frac{\tilde{k}\pi}{L}x} \quad (\text{A.2})$$

onde

$$c_{\tilde{k}} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\frac{\tilde{k}\pi}{L}x} dx.$$

Neste caso, dizemos que (A.2) é a série de Fourier complexa de f ([10], p.56).

Definição A.1.3. Dada uma função $f \in C([-L, L])$ periódica a sequência complexa $\{\hat{f}(\tilde{k})\}_{\tilde{k} \in \mathbb{Z}}$ definida por

$$\hat{f}(\tilde{k}) = c_{\tilde{k}} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{\tilde{k}\pi}{L} x} dx$$

é chamada de transformada de Fourier de f e os números complexos $\hat{f}(\tilde{k}) = c_{\tilde{k}}$ são os coeficientes de Fourier de f . ([10], p.57)

Teorema A.1.2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periódica de período $2L$ com f e f' seccionalmente contínuas. Então qualquer que seja $x_0 \in \mathbb{R}$, a série de Fourier de f no ponto x_0 converge para $1/2[f(x_0^+) + f(x_0^-)]$. Em particular, se f é contínua em x_0 então $S_f(x_0)$ converge para $f(x_0)$ ([10], p.68).

Corolário A.1.3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ periódica de período $2L$ uma função contínua com f' seccionalmente contínua. Então a série de Fourier (A.2) gerada por f converge uniformemente a f ([10], p.71).

Observação A.1.4. Além da definição para a transformada de Fourier periódica é válido explicitar também a sua inversa. Para tanto, utilizando o símbolo \mathcal{F} para representar a aplicação da transformada, segue que:

Para funções periódicas de período L temos:

$$\mathcal{F}[f(x)](\tilde{k}) = \hat{f}(\tilde{k}) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{\tilde{k}\pi}{L} x} dx$$

e

$$\mathcal{F}^{-1} \left[\left\{ \hat{f}(\tilde{k}) \right\}_{\tilde{k} \in \mathbb{Z}} \right] (x) = f(x) = \sum_{\tilde{k}=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\tilde{k}) e^{i \frac{\tilde{k}\pi}{L} x}.$$

Note que a transformada de Fourier inversa é a série de Fourier complexa, onde o operador \mathcal{F} está sendo considerado agindo sobre funções descritas conforme as hipóteses do Corolário A.1.3.

Proposição A.1.5. Seja $f \in C^n([-L, L])$ periódica, então

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](\tilde{k}) = \left(i \frac{\tilde{k}\pi}{L} \right)^n \hat{f}(\tilde{k}), \quad \tilde{k} \in \mathbb{Z},$$

onde $f^{(n)}$ denota a n -ésima derivada da função f . Para simplificar a escrita vamos considerar $k = \frac{\tilde{k}\pi}{L}$ ([10], p.66).

A.2 Achando a solução

No capítulo 4, após os processos de adimensionalização e linearização das equações de Euler, nos deparamos com o seguinte sistema de equações diferenciais parciais:

$$\begin{cases} \tilde{u}'_{\tilde{x}} + \tilde{v}'_{\tilde{y}} = 0 & \text{em } 0 < \tilde{y} < 1, & \text{(A.3)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{u}'_{\tilde{t}} = -\tilde{P}'_{\tilde{x}} & \text{em } 0 < \tilde{y} < 1, & \text{(A.4)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta \tilde{v}'_{\tilde{t}} = -\tilde{P}'_{\tilde{y}} & \text{em } 0 < \tilde{y} < 1, & \text{(A.5)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{v}' = \tilde{\eta}_{\tilde{t}} & \text{em } \tilde{y} = 1, & \text{(A.6)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{P}' = \tilde{\eta} & \text{em } \tilde{y} = 1, & \text{(A.7)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{v}' = 0 & \text{em } \tilde{y} = 0. & \text{(A.8)} \end{cases}$$

Lá, com a intenção de não sobrecarregar o texto, decidimos omitir o desenvolvimento dos cálculos gerais que levaram às fórmulas de \tilde{u}' , \tilde{v}' , \tilde{P}' e c_0 , deixando por conta deste apêndice a exposição detalhada do processo de resolução do sistema (A.3) – (A.8).

Com este objetivo estabelecido, visto que a onda de superfície

$$\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) = \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) \quad \text{(A.9)}$$

é uma onda de Stokes de período 1 na variável \tilde{x} , vamos supor que as funções \tilde{u}' , \tilde{v}' , \tilde{P}' que são da forma

$$\tilde{u}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = \tilde{u}'(\tilde{x} - c_0\tilde{t}, \tilde{y}), \quad \tilde{v}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = \tilde{v}'(\tilde{x} - c_0\tilde{t}, \tilde{y}) \quad \text{e} \quad \tilde{P}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = \tilde{P}'(\tilde{x} - c_0\tilde{t}, \tilde{y})$$

também têm período 1 na variável \tilde{x} – essa suposição segue diretamente da definição de ondas de Stokes exposta no referencial [6] (p. 537).

Definidas estas hipóteses, vamos inicialmente determinar quem é \tilde{P}' e em seguida as demais incógnitas.

Com efeito, derivando a equação (A.4) em relação a \tilde{x} e (A.5) em relação a \tilde{y} , temos

$$\tilde{u}'_{\tilde{t}\tilde{x}} = -\tilde{P}'_{\tilde{x}\tilde{x}} \quad \text{e} \quad \tilde{v}'_{\tilde{t}\tilde{y}} = -\frac{\tilde{P}'_{\tilde{y}\tilde{y}}}{\beta}.$$

Daí, ao somar estes resultados e usar a equação (A.3), encontramos que

$$\tilde{u}'_{\tilde{t}\tilde{x}} + \tilde{v}'_{\tilde{t}\tilde{y}} = -\tilde{P}'_{\tilde{x}\tilde{x}} - \frac{\tilde{P}'_{\tilde{y}\tilde{y}}}{\beta} \Rightarrow (\tilde{u}'_{\tilde{x}} + \tilde{v}'_{\tilde{y}})_{\tilde{t}} = -\tilde{P}'_{\tilde{x}\tilde{x}} - \frac{\tilde{P}'_{\tilde{y}\tilde{y}}}{\beta} \Rightarrow -\tilde{P}'_{\tilde{x}\tilde{x}} - \frac{\tilde{P}'_{\tilde{y}\tilde{y}}}{\beta} = 0.$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta \tilde{P}'_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{P}'_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0 \quad \text{em } 0 < \tilde{y} < 1.}$$

Seguindo uma linha de raciocínio parecida, ao substituir a equação (A.9) em (A.7), também conseguimos determinar \tilde{P}' ao longo da fronteira $\tilde{y} = 1$, a saber,

$$\boxed{\tilde{P}' = \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) \quad \text{em } \tilde{y} = 1.}$$

Ademais, utilizando as equações (A.5) e (A.8), segue que:

$$\boxed{\tilde{P}'_{\tilde{y}} = 0 \quad \text{em} \quad \tilde{y} = 0.}$$

Assim, juntando as três expressões destacadas, obtemos o seguinte problema de fronteira:

$$\begin{cases} \beta \tilde{P}'_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{P}'_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0 & \text{em} \quad 0 < \tilde{y} < 1, \\ \tilde{P}' = \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) & \text{em} \quad \tilde{y} = 1, \\ \tilde{P}'_{\tilde{y}} = 0 & \text{em} \quad \tilde{y} = 0. \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Agora, visando simplificar a notação das contas que vem a seguir, tomaremos, sem perda de generalidade, a troca de variáveis

$$\begin{cases} X = \tilde{x} - c_0\tilde{t}, \\ Y = \tilde{y}, \end{cases}$$

donde o sistema (A.10) antes dependente de $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$, passa a depender de (X, Y) :

$$\begin{cases} \beta \tilde{P}'_{XX} + \tilde{P}'_{YY} = 0 & \text{em} \quad 0 < Y < 1, & (\text{A.11}) \\ \tilde{P}' = \cos(2\pi X) & \text{em} \quad Y = 1, & (\text{A.12}) \\ \tilde{P}'_Y = 0 & \text{em} \quad Y = 0. & (\text{A.13}) \end{cases}$$

Definido isso, lembrando que \tilde{P}' é uma função 1-periódica na variável X , buscaremos obter a expressão que define \tilde{P}' por meio dos conceitos que dizem respeito a série de Fourier para funções periódicas.

Com efeito, aplicando a transformada de Fourier periódica na variável X para as equações do sistema (A.11) – (A.13), temos o seguinte:

- **(A.11)** $\beta \tilde{P}'_{XX} + \tilde{P}'_{YY} = 0 \quad \text{em} \quad 0 < Y < 1$

Sendo $\hat{\tilde{P}}'(k, Y)$ a transformada de Fourier de $\tilde{P}'(X, Y)$ e tendo em mente a Proposição A.1.5 encontramos :

$$\boxed{\hat{\tilde{P}}'_{YY}(k, Y) - k^2 \beta \hat{\tilde{P}}'(k, Y) = 0 \quad \text{em} \quad 0 < Y < 1.}$$

- **(A.12)** $\tilde{P}' = \cos(2\pi X) \quad \text{em} \quad Y = 1$

Partindo da observação A.1.4 que fala a respeito da aplicação inversa da transformada de Fourier obtemos que a seguinte igualdade é válida:

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{\tilde{P}}'(k, 1)] = \tilde{P}'(X, 1) = \cos(2\pi X) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{\tilde{P}}'(k, 1) e^{i2k\pi X}.$$

Além disso, sabe-se que $\cos(2\pi X)$ pode ser escrito da forma $\frac{e^{i2\pi X} + e^{-i2\pi X}}{2}$ e, portanto,

$$\tilde{P}'(X, 1) = \frac{e^{i2\pi X}}{2} + \frac{e^{-i2\pi X}}{2} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{P}'(k, 1)e^{i2k\pi X}.$$

Agora note que, se retirarmos deste último somatório as expressões correspondentes a $k = 1$ e $k = -1$, obteremos do lado direito da equação o termo $(\hat{P}'(1, 1)e^{i2\pi X} + \hat{P}'(-1, 1)e^{-i2\pi X})$ adicionado a um somatório idêntico ao anterior - exceto por $k = \pm 1$. Com essa manipulação em mãos somos levados a acreditar que para a igualdade acima ser satisfeita devemos ter $\hat{P}'(1, 1) = \frac{1}{2}$, $\hat{P}'(-1, 1) = -\frac{1}{2}$ e o resto dos termos nulos, ou seja, concluímos que a sequência $\hat{P}'(k, 1)$ que representa a transformada de Fourier de $\tilde{P}'(X, 1)$ é dada pelo seguinte:

$$\hat{P}'(k, Y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } k = \pm 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{em } Y = 1.$$

- (A.13) $\tilde{P}'_Y = 0$ em $Y = 0$

Aqui, da mesma forma feita para a equação (A.11), basta aplicar a transformada de Fourier em X de ambos os lados:

$$\hat{\tilde{P}}'_Y(k, Y) = 0 \quad \text{em } Y = 0.$$

Logo, juntando estas três expressões em destaque, reduzimos o sistema (A.11) – (A.13) na seguinte família de EDO's de segunda ordem:

$$\begin{cases} \hat{P}'_{YY}(k, Y) - k^2\beta\hat{P}'(k, Y) = 0 & \text{em } 0 < Y < 1, & \text{(A.14)} \\ \hat{P}'_Y(k, Y) = 0 & \text{em } Y = 0, & \text{(A.15)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{P}'(k, Y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } k = \pm 1 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} & \text{em } Y = 1. & \text{(A.16)} \end{cases}$$

A resolução destas EDO's tem como base o método empregado em Santos ([19], p.45) e, tomando k fixo, obtemos que a equação característica e suas respectivas raízes são dadas por:

$$r^2 - k^2\beta = 0 \Rightarrow r = \pm k\sqrt{\beta}.$$

Donde segue que a forma geral de $\hat{P}'(k, Y)$ é escrita como

$$\hat{P}'(k, Y) = C_1 e^{k\sqrt{\beta}Y} + C_2 e^{-k\sqrt{\beta}Y} \quad \text{(A.17)}$$

com C_1 e C_2 constantes.

Agora, buscando encontrar uma relação entre as constantes C_1 e C_2 , iremos derivar a equação (A.17) e aplicar nela a condição de fronteira (A.15):

$$\begin{aligned} \hat{P}'_Y(k, Y) &= k\sqrt{\beta}C_1e^{k\sqrt{\beta}Y} - k\sqrt{\beta}C_2e^{-k\sqrt{\beta}Y} \Rightarrow \hat{P}'(k, 0) = k\sqrt{\beta}C_1 - k\sqrt{\beta}C_2 = 0 \\ &\Rightarrow C_1 = C_2. \end{aligned}$$

O que nos diz que $\hat{P}'(k, Y)$ pode ser reescrita como:

$$\hat{P}'(k, Y) = C_1(e^{k\sqrt{\beta}Y} + e^{-k\sqrt{\beta}Y}) = 2C_1 \cosh(k\sqrt{\beta}Y). \quad (\text{A.18})$$

Mais ainda, tendo em mãos a condição de fronteira dada por (A.16), tiramos as seguintes informações:

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \hat{P}'(k, 1) = 2C_1 \cosh(k\sqrt{\beta}) = \frac{1}{2} & \text{se } k = \pm 1 \\ \hat{P}'(k, 1) = 2C_1 \cosh(k\sqrt{\beta}) = 0 & \text{se } k \neq \pm 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} 2C_1 = \frac{1}{2 \cosh(k\sqrt{\beta})} & \text{se } k = \pm 1, \\ 2C_1 = 0 & \text{se } k \neq \pm 1, \end{cases} \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

as quais resultam, dada a aplicação de (A.19) na expressão (A.18), em:

$$\begin{cases} \hat{P}'(k, Y) = \frac{\cosh(k\sqrt{\beta}Y)}{2 \cosh(k\sqrt{\beta})} & \text{se } k = \pm 1, \\ \hat{P}'(k, Y) = 0 & \text{se } k \neq \pm 1. \end{cases} \quad (\text{A.20})$$

Determinada quem é a sequência $\hat{P}'(k, Y)$, somos finalmente capazes de utilizar a série de Fourier complexa (cf. Observação A.1.4) para obter $\tilde{P}'(X, Y)$:

$$\tilde{P}'(X, Y) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{P}'(k, Y)] = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \hat{P}'(k, Y)e^{i2k\pi X},$$

de modo que as informações fornecidas por (A.20) nos levam ao seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \tilde{P}'(X, Y) &= \frac{\cosh(2\pi\sqrt{\beta}Y)}{2 \cosh(2\pi\sqrt{\beta})}e^{i2\pi X} + \frac{\cosh(-2\pi\sqrt{\beta}Y)}{2 \cosh(-2\pi\sqrt{\beta})}e^{-i2\pi X} = \\ &= \frac{\cosh(2\pi\sqrt{\beta}Y)}{\cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \left(\frac{e^{i2\pi X} + e^{-i2\pi X}}{2} \right) \\ &\Rightarrow \tilde{P}'(X, Y) = \frac{\cosh(2\pi\sqrt{\beta}Y)}{\cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \cos(2\pi X). \end{aligned}$$

Por fim, apenas escrevendo esta última expressão em termos das variáveis $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}$, encontramos que:

$$\tilde{P}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = \frac{\cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})). \quad (\text{A.21})$$

Agora, tendo em mãos o resultado exposto na equação (A.21), iremos realizar uma série de manipulações algébricas que nos permitam definir também as incógnitas \tilde{u}' , \tilde{v}' e c_0 .

Para tanto nos utilizaremos da estratégia de separação de variáveis, a qual nos permite supor $\tilde{u}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$ e $\tilde{v}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$ escritos como o produto de funções não nulas da seguinte forma:

$$\tilde{u}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = A(\tilde{x})B(\tilde{y})C(\tilde{t}) \quad (\text{A.22})$$

e

$$\tilde{v}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = D(\tilde{x})E(\tilde{y})F(\tilde{t}) \quad (\text{A.23})$$

Com efeito, aplicando as expressões (A.21) e (A.22) em (A.4) obtemos:

$$\begin{aligned} A(\tilde{x})B(\tilde{y})\frac{dC}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) &= -\frac{\cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\cosh(2\pi\sqrt{\beta})}[\cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t}))]_x \\ \Rightarrow A(\tilde{x})B(\tilde{y})\frac{dC}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) &= \frac{2\pi \cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \sin(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) \\ \Rightarrow A(\tilde{x})B(\tilde{y}) \int \frac{dC}{d\tilde{t}}(\tilde{t}) d\tilde{t} &= \frac{2\pi \cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \int \sin(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) d\tilde{t} \\ \Rightarrow A(\tilde{x})B(\tilde{y})C(\tilde{t}) &= \frac{2\pi \cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\cosh(2\pi\sqrt{\beta})} (-\cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t}))) \left(\frac{-1}{2\pi c_0} \right) \\ \Rightarrow \tilde{u}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = A(\tilde{x})B(\tilde{y})C(\tilde{t}) &= \frac{\cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{c_0 \cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})). \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Da mesma forma, combinando as expressões (A.23) e (A.24) com a equação (A.3), tem-se:

$$\begin{aligned} \Rightarrow -D(\tilde{x})\frac{dE}{d\tilde{y}}(\tilde{y})F(\tilde{t}) &= \frac{\cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{c_0 \cosh(2\pi\sqrt{\beta})}[\cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t}))]_x \\ \Rightarrow D(\tilde{x})\frac{dE}{d\tilde{y}}(\tilde{y})F(\tilde{t}) &= -\frac{2\pi \cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{c_0 \cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \sin(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) \\ \Rightarrow D(\tilde{x}) \int \frac{dE}{d\tilde{y}}(\tilde{y}) d\tilde{y} F(\tilde{t}) &= \frac{2\pi \sin(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t}))}{c_0 \cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \int \cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y}) d\tilde{y} \\ \Rightarrow D(\tilde{x})E(\tilde{y})F(\tilde{t}) &= \frac{2\pi \sin(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t}))}{c_0 \cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \frac{\sinh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{2\pi\sqrt{\beta}} \\ \Rightarrow \tilde{v}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) = D(\tilde{x})E(\tilde{y})F(\tilde{t}) &= \frac{\sinh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{c_0\sqrt{\beta} \cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \sin(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})). \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Além disso, tomando as expressões (A.25) e (A.9) junto à condição de fronteira (A.6), encontramos

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(2\pi\sqrt{\beta})}{c_0\sqrt{\beta} \cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \sin(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) &= 2\pi c_0 \sin(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) \\ \Rightarrow \frac{\sinh(2\pi\sqrt{\beta})}{2\pi\sqrt{\beta} \cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \frac{\sin(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t}))}{\sin(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t}))} &= c_0^2 \\ \Rightarrow c_0^2 = \frac{\tanh(2\pi\sqrt{\beta})}{2\pi\sqrt{\beta}}. \end{aligned} \quad (\text{A.26})$$

Assim, segue da substituição de (A.26) em (A.24) e (A.25), respectivamente, que as funções $\tilde{u}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$ e $\tilde{v}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t})$ ficam escritas como:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= \frac{\cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{c_0 \cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) = \frac{c_0 \cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{c_0^2 \cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) \\
\Rightarrow \tilde{u}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= \frac{2\pi\sqrt{\beta}c_0 \cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\tanh(2\pi\sqrt{\beta}) \cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) \\
\Rightarrow \tilde{u}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= \frac{2\pi\sqrt{\beta}c_0 \cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\frac{\sinh(2\pi\sqrt{\beta})}{\cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) \\
\Rightarrow \tilde{u}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= 2\pi\sqrt{\beta}c_0 \frac{\cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\sinh(2\pi\sqrt{\beta})} \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})). \tag{A.27}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{v}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= \frac{\sinh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{c_0\sqrt{\beta} \cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \sin(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) = \frac{c_0 \sinh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{c_0^2\sqrt{\beta} \cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \sin(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) \\
\Rightarrow \tilde{v}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= \frac{2\pi\sqrt{\beta}c_0 \sinh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\tanh(2\pi\sqrt{\beta})\sqrt{\beta} \cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \sin(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) \\
\Rightarrow \tilde{v}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= \frac{2\pi\sqrt{\beta}c_0 \sinh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\frac{\sinh(2\pi\sqrt{\beta})}{\cosh(2\pi\sqrt{\beta})}\sqrt{\beta} \cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \sin(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})) \\
\Rightarrow \tilde{v}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= 2\pi c_0 \frac{\sinh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\sinh(2\pi\sqrt{\beta})} \sin(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})). \tag{A.28}
\end{aligned}$$

Em resumo, juntando todos os resultados obtidos durante este apêndice, concluimos que a solução do sistema (A.3) – (A.7) é dada por:

$$\begin{aligned}
\triangleright \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})), \\
\triangleright \tilde{u}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= 2\pi c_0 \sqrt{\beta} \frac{\cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\sinh(2\pi\sqrt{\beta})} \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})), \\
\triangleright \tilde{v}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= 2\pi c_0 \frac{\sinh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\sinh(2\pi\sqrt{\beta})} \sin(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})), \\
\triangleright \tilde{P}'(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) &= \frac{\cosh(2\pi\sqrt{\beta}\tilde{y})}{\cosh(2\pi\sqrt{\beta})} \cos(2\pi(\tilde{x} - c_0\tilde{t})), \\
\triangleright \tilde{c}_0^2 &= \frac{\tanh(2\pi\sqrt{\beta})}{2\pi\sqrt{\beta}},
\end{aligned}$$

$$\text{onde } \beta = \frac{h^2}{\lambda^2}.$$

Apêndice B

Adimensionalização

Nos capítulos 4 e 5 realizamos adimensionalizações no contexto das equações de Euler e da teoria do potencial. Neste apêndice, a fim de não deixar dúvidas sobre a aplicação deste procedimento, iremos expor todos os cálculos necessários para a transição do sistema dimensional para o adimensional.

B.1 Adimensionalização das equações de Euler

As equações de Euler para a dinâmica de uma onda aquática de superfície são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_x + v_y = 0 & \text{em } 0 < y < \eta(x, t) + h, \quad (\text{B.1}) \\ u_t + uu_x + vv_y = -P_x & \text{em } 0 < y < \eta(x, t) + h, \quad (\text{B.2}) \\ v_t + uv_x + vv_y = -P_y - g & \text{em } 0 < y < \eta(x, t) + h, \quad (\text{B.3}) \\ v = \eta_t + u\eta_x & \text{em } y = \eta(x, t) + h, \quad (\text{B.4}) \\ P = P_{atm} & \text{em } y = \eta(x, t) + h, \quad (\text{B.5}) \\ v = 0 & \text{em } y = 0 \quad (\text{B.6}) \end{array} \right.$$

e, a fim de adimensionalizá-las, definiremos a seguinte troca de variáveis:

$$x = \lambda\tilde{x}, \quad y = h\tilde{y}, \quad t = \frac{\lambda}{\sqrt{gh}}\tilde{t}, \quad \eta(x, t) = a\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}), \quad v(x, y, t) = \frac{h\sqrt{gh}}{\lambda}\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}),$$
$$u(x, y, t) = \sqrt{gh}\tilde{u}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}) \quad \text{e} \quad P = P_{atm} + gh(1 - \tilde{y}) + gh\tilde{P}.$$

Com o propósito de organizar melhor os procedimentos realizados a seguir dividiremos esta seção em duas etapas: primeiro iremos adimensionalizar apenas as derivadas parciais de u, v, η e P que aparecem como incógnitas no sistema (B.1) – (B.6) e, em seguida, realizaremos a adimensionalização do sistema em si, substituindo cada resultado obtido durante a primeira etapa nas equações governantes separadamente.

Ora, partindo das igualdades que definem x, y e t podemos facilmente extrair as seguintes implicações:

$$\begin{aligned} x = \lambda \tilde{x} &\Rightarrow \tilde{x} = \frac{x}{\lambda} \Rightarrow \tilde{x}_x = \frac{1}{\lambda}, \\ y = h\tilde{y} &\Rightarrow \tilde{y} = \frac{y}{h} \Rightarrow \tilde{y}_y = \frac{1}{h}, \\ t = \frac{\lambda}{\sqrt{gh}} \tilde{t} &\Rightarrow \tilde{t} = \frac{t\sqrt{gh}}{\lambda} \Rightarrow \tilde{t}_t = \frac{\sqrt{gh}}{\lambda}, \end{aligned}$$

as quais merecem uma atenção especial por serem frequentemente utilizadas nas adimensionalizações posteriores.

Daí, segue-se então, os subseqüentes resultados a respeito das derivadas parciais:

$$\begin{aligned} \triangleright \quad u_x &= \sqrt{gh} \tilde{u}_x = \sqrt{gh} \tilde{u}_{\tilde{x}} \tilde{x}_x \Rightarrow u_x = \frac{\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{u}_{\tilde{x}}, \\ \triangleright \quad u_y &= \sqrt{gh} \tilde{u}_y = \sqrt{gh} \tilde{u}_{\tilde{y}} \tilde{y}_y \Rightarrow u_y = \frac{\sqrt{gh}}{h} \tilde{u}_{\tilde{y}}, \\ \triangleright \quad u_t &= \sqrt{gh} \tilde{u}_t = \sqrt{gh} \tilde{u}_{\tilde{t}} \tilde{t}_t \Rightarrow u_t = \frac{gh}{\lambda} \tilde{u}_{\tilde{t}}, \\ \triangleright \quad v_x &= \frac{h\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{v}_x = \frac{h\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{v}_{\tilde{x}} \tilde{x}_x \Rightarrow v_x = \frac{h\sqrt{gh}}{\lambda^2} \tilde{v}_{\tilde{x}}, \\ \triangleright \quad v_y &= \frac{h\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{v}_y = \frac{h\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{v}_{\tilde{y}} \tilde{y}_y \Rightarrow v_y = \frac{\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{v}_{\tilde{y}}, \\ \triangleright \quad v_t &= \frac{h\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{v}_t = \frac{h\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{v}_{\tilde{t}} \tilde{t}_t \Rightarrow v_t = \frac{gh^2}{\lambda^2} \tilde{v}_{\tilde{t}}, \\ \triangleright \quad \eta_x &= a\tilde{\eta}_x = a\tilde{\eta}_{\tilde{x}} \tilde{x}_x \Rightarrow \eta_x = \frac{a}{\lambda} \tilde{\eta}_{\tilde{x}}, \\ \triangleright \quad \eta_t &= a\tilde{\eta}_t = a\tilde{\eta}_{\tilde{t}} \tilde{t}_t \Rightarrow \eta_t = \frac{a\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{\eta}_{\tilde{t}}, \\ \triangleright \quad P_x &= gh\tilde{P}_x = gh\tilde{P}_{\tilde{x}} \tilde{x}_x \Rightarrow P_x = \frac{gh}{\lambda} \tilde{P}_{\tilde{x}}, \\ \triangleright \quad P_y &= -gh\tilde{y}_y + gh\tilde{P}_y = -gh\tilde{y}_y + gh\tilde{P}_{\tilde{y}} \tilde{y}_y \Rightarrow P_y = -g + g\tilde{P}_{\tilde{y}}. \end{aligned}$$

Com estas equivalências em mãos podemos partir agora para a nossa segunda etapa antes definida: realizar a adimensionalização nas equações governantes (B.1) à (B.6).

Com efeito, note que a superfície livre considerada fica dada nas variáveis adimensionais por:

$$y = \eta(x, t) + h \Rightarrow h\tilde{y} = a\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) + h \Rightarrow \tilde{y} = \alpha\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) + 1,$$

onde $\alpha = \frac{a}{h}$.

Da mesma forma, é fácil ver que para o fundo do canal temos

$$y = 0 \Rightarrow h\tilde{y} = 0 \Rightarrow \tilde{y} = 0.$$

Donde segue que no sistema de coordenadas adimensional o domínio do fluido é:

$$0 < \tilde{y} < \alpha\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) + 1.$$

Quanto as equações governantes, lembrando que nos basearemos nos resultados já obtidos para as derivadas parciais adimensionalizadas, tem-se o seguinte:

– Equação (B.1):

$$u_x + v_y = \frac{\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{u}_{\tilde{x}} + \frac{\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{v}_{\tilde{y}} = \frac{\sqrt{gh}}{\lambda} (\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{v}_{\tilde{y}}) = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{v}_{\tilde{y}} = 0.}$$

– Equação (B.2):

$$\begin{aligned} u_t + uu_x + vv_y &= -P_x \Rightarrow \frac{gh}{\lambda} \tilde{u}_{\tilde{t}} + \frac{gh}{\lambda} \tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \frac{gh}{\lambda} \tilde{v}\tilde{u}_{\tilde{y}} = -\frac{gh}{\lambda} \tilde{P}_{\tilde{x}} \\ \Rightarrow \frac{gh}{\lambda} (\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{v}\tilde{u}_{\tilde{y}}) &= -\frac{gh}{\lambda} \tilde{P}_{\tilde{x}} \Rightarrow \boxed{\tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{v}\tilde{u}_{\tilde{y}} = -\tilde{P}_{\tilde{x}}.} \end{aligned}$$

– Equação (B.3):

$$\begin{aligned} v_t + uv_x + vv_y &= -P_y - g \Rightarrow \frac{gh^2}{\lambda^2} \tilde{v}_{\tilde{t}} + \frac{gh^2}{\lambda^2} \tilde{u}\tilde{v}_{\tilde{x}} + \frac{gh^2}{\lambda^2} \tilde{v}\tilde{v}_{\tilde{y}} = -g\tilde{P}_{\tilde{y}} \\ \Rightarrow \frac{gh^2}{\lambda^2} (\tilde{v}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{v}_{\tilde{x}} + \tilde{v}\tilde{v}_{\tilde{y}}) &= -g\tilde{P}_{\tilde{y}} \Rightarrow \boxed{\beta(\tilde{v}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{v}_{\tilde{x}} + \tilde{v}\tilde{v}_{\tilde{y}}) = -\tilde{P}_{\tilde{y}},} \end{aligned}$$

onde $\beta = \frac{h^2}{\lambda^2}$.

– Equação (B.4):

$$\begin{aligned} v &= \eta_t + u\eta_x \Rightarrow \frac{h\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{v} = \frac{a\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{\eta}_{\tilde{t}} + \frac{a\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{u}\tilde{\eta}_{\tilde{x}} \Rightarrow \frac{\sqrt{gh}}{\lambda} h\tilde{v} = \frac{\sqrt{gh}}{\lambda} (a\tilde{\eta}_{\tilde{t}} + a\tilde{u}\tilde{\eta}_{\tilde{x}}) \\ \Rightarrow h\tilde{v} &= a\tilde{\eta}_{\tilde{t}} + a\tilde{u}\tilde{\eta}_{\tilde{x}} \Rightarrow \boxed{\tilde{v} = \alpha(\tilde{\eta}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{\eta}_{\tilde{x}}) \text{ em } \tilde{y} = \alpha\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) + 1} \end{aligned}$$

– Equação (B.5):

$$P = P_{atm} \Rightarrow P_{atm} + gh(1 - \tilde{y}) + gh\tilde{P} = P_{atm} \Rightarrow gh(1 - \tilde{y}) = -gh\tilde{P} \Rightarrow \tilde{P} = \tilde{y} - 1.$$

Note ainda que a equação acima está sendo avaliada ao longo da superfície livre $\tilde{y} = \alpha\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) + 1$ e, portanto, temos

$$\boxed{\tilde{P} = \alpha\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) \text{ em } \tilde{y} = \alpha\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) + 1.}$$

– Equação (B.6):

$$v = 0 \Rightarrow \frac{h\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{v} = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{v} = 0 \text{ em } \tilde{y} = 0}$$

Em resumo, obtemos que o sistema de equações de Euler adimensionalizado é dado por:

$$\begin{cases} \tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{v}_{\tilde{y}} = 0 & \text{em } 0 < \tilde{y} < \alpha\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) + 1, \\ \tilde{u}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{u}_{\tilde{x}} + \tilde{v}\tilde{u}_{\tilde{y}} = -\tilde{P}_{\tilde{x}} & \text{em } 0 < \tilde{y} < \alpha\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) + 1, \\ \beta(\tilde{v}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{v}_{\tilde{x}} + \tilde{v}\tilde{v}_{\tilde{y}}) = -\tilde{P}_{\tilde{y}} & \text{em } 0 < \tilde{y} < \alpha\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) + 1, \\ \tilde{v} = \alpha(\tilde{\eta}_{\tilde{t}} + \tilde{u}\tilde{\eta}_{\tilde{x}}) & \text{em } \tilde{y} = \alpha\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) + 1, \\ \tilde{P} = \alpha\tilde{\eta} & \text{em } \tilde{y} = \alpha\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) + 1, \\ \tilde{v} = 0 & \text{em } \tilde{y} = 0, \end{cases}$$

onde $\beta = \frac{h^2}{\lambda^2}$ e $\alpha = \frac{a}{h}$.

B.2 Teoria do Potencial

Seguindo a mesma linha de raciocínio adotada para a adimensionalização do sistema de equações de Euler realizaremos este processo para as equações governantes na formulação da teoria do potencial:

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{em } -h < y < \eta(x, t), \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

$$\begin{cases} \phi_t + \frac{1}{2}\|\nabla\phi\|^2 + g\eta = 0 & \text{em } y = \eta(x, t), \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

$$\begin{cases} \eta_t + \phi_x\eta_x = \phi_y & \text{em } y = \eta(x, t), \end{cases} \quad (\text{B.9})$$

$$\begin{cases} \phi_y = 0 & \text{em } y = -h, \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

Aqui a adimensionalização adotada é estabelecida por meio da troca de variáveis

$$x = \lambda\tilde{x}, \quad y = h\tilde{y}, \quad t = \frac{\lambda}{\sqrt{gh}}\tilde{t}, \quad \eta(x, t) = a\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) \quad \text{e} \quad \phi(x, y, t) = \frac{ag\lambda}{\sqrt{gh}}\tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}), \quad (\text{B.11})$$

donde, vista a semelhança entre as variáveis que definem x, y e t aqui com àquelas definidas na adimensionalização de Euler, obtemos de imediato os três resultados abaixo:

$$\tilde{x}_x = \frac{1}{\lambda}, \quad \tilde{y}_y = \frac{1}{h} \quad \text{e} \quad \tilde{t}_t = \frac{\sqrt{gh}}{\lambda}.$$

A partir disso, as derivadas parciais $\phi_x, \phi_y, \phi_{xx}, \phi_{yy}, \phi_t, \eta_x$ e η_t ficam dadas por:

$$\triangleright \quad \phi_x = \frac{ag\lambda}{\sqrt{gh}}\tilde{\phi}_{\tilde{x}}\tilde{x}_x \Rightarrow \phi_x = \frac{ag}{\sqrt{gh}}\tilde{\phi}_{\tilde{x}},$$

$$\triangleright \quad \phi_y = \frac{ag\lambda}{\sqrt{gh}}\tilde{\phi}_{\tilde{y}}\tilde{y}_y \Rightarrow \phi_y = \frac{ag\lambda}{h\sqrt{gh}}\tilde{\phi}_{\tilde{y}},$$

$$\triangleright \quad \phi_{xx} = \left(\frac{ag}{\sqrt{gh}}\tilde{\phi}_{\tilde{x}}\right)_x = \frac{ag}{\sqrt{gh}}\tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}}\tilde{x}_x \Rightarrow \phi_{xx} = \frac{ag}{\lambda\sqrt{gh}}\tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}},$$

$$\begin{aligned}
\triangleright \quad \phi_{yy} &= \left(\frac{ag\lambda}{h\sqrt{gh}} \tilde{\phi}_{\tilde{y}} \right)_y = \frac{ag\lambda}{h\sqrt{gh}} \tilde{\phi}_{\tilde{y}\tilde{y}} \tilde{y}_y \Rightarrow \phi_{yy} = \frac{ag\lambda}{h^2\sqrt{gh}} \tilde{\phi}_{\tilde{y}\tilde{y}}, \\
\triangleright \quad \phi_t &= \frac{ag\lambda}{\sqrt{gh}} \tilde{\phi}_{\tilde{t}} \tilde{t}_t \Rightarrow \phi_t = ag \tilde{\phi}_{\tilde{t}}, \\
\triangleright \quad \eta_x &= a \tilde{\eta}_{\tilde{x}} \tilde{x}_x \Rightarrow \eta_x = \frac{a}{\lambda} \tilde{\eta}_{\tilde{x}}, \\
\triangleright \quad \eta_t &= a \tilde{\eta}_{\tilde{t}} \tilde{t}_t \Rightarrow \eta_t = \frac{a\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{\eta}_{\tilde{t}}.
\end{aligned}$$

Agora, com estes resultados em mãos, podemos dar início a adimensionalização das equações (B.7) à (B.10). Para isso, note primeiramente que o fundo do canal em termos das variáveis adimensionais é descrito por:

$$y = -h \Rightarrow h\tilde{y} = -h \Rightarrow \tilde{y} = -1.$$

Do mesmo modo, a superfície livre delimitada pela onda é descrita como:

$$y = \eta(x, t) \Rightarrow h\tilde{y} = a\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}) \Rightarrow \tilde{y} = \alpha \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}),$$

onde $\alpha = \frac{a}{h}$.

Em outras palavras, o domínio do fluido dado pelas coordenadas adimensionais é:

$$-1 < \tilde{y} < \alpha \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}).$$

Quanto as equações governantes temos, a partir da substituição das derivadas parciais expostas anteriormente, o seguinte:

– Equação (B.7):

$$\begin{aligned}
\Delta\phi &= \phi_{xx} + \phi_{yy} = \frac{ag}{\lambda\sqrt{gh}} \tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \frac{ag\lambda}{h^2\sqrt{gh}} \tilde{\phi}_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0 \Rightarrow \frac{ag}{\sqrt{gh}} \left(\frac{1}{\lambda} \tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \frac{\lambda}{h^2} \tilde{\phi}_{\tilde{y}\tilde{y}} \right) = 0 \\
\Rightarrow \frac{1}{\lambda} \tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \frac{\lambda}{h^2} \tilde{\phi}_{\tilde{y}\tilde{y}} &= 0 \Rightarrow \frac{h^2}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda} \tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \frac{\lambda}{h^2} \tilde{\phi}_{\tilde{y}\tilde{y}} \right) = 0 \Rightarrow \boxed{\beta \tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{\phi}_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0}.
\end{aligned}$$

onde $\beta = \frac{h^2}{\lambda^2}$.

– Equação (B.8):

$$\begin{aligned}
\phi_t + \frac{1}{2}(\phi_x + \phi_y)^2 + g\eta &= 0 \\
\Rightarrow ag \tilde{\phi}_{\tilde{t}} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{ag}{\sqrt{gh}} \tilde{\phi}_{\tilde{x}} \right)^2 + \left(\frac{ag\lambda}{h\sqrt{gh}} \tilde{\phi}_{\tilde{y}} \right)^2 \right] + ag\tilde{\eta} &= 0 \\
\Rightarrow ag \left[\tilde{\phi}_{\tilde{t}} + \frac{1}{2} \left(\frac{ag}{gh} (\tilde{\phi}_{\tilde{x}})^2 + \frac{ag\lambda^2}{gh^3} (\tilde{\phi}_{\tilde{y}})^2 \right) + \tilde{\eta} \right] &= 0 \\
\Rightarrow \tilde{\phi}_{\tilde{t}} + \frac{1}{2} \left[\frac{a}{h} (\tilde{\phi}_{\tilde{x}})^2 + \frac{a\lambda^2}{h^3} (\tilde{\phi}_{\tilde{y}})^2 \right] + \tilde{\eta} &= 0 \\
\Rightarrow \boxed{\tilde{\phi}_{\tilde{t}} + \frac{\alpha}{2} \left[(\tilde{\phi}_{\tilde{x}})^2 + \frac{1}{\beta} (\tilde{\phi}_{\tilde{y}})^2 \right] + \tilde{\eta} = 0 \quad \text{em} \quad \tilde{y} = \alpha\tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t})}.
\end{aligned}$$

– Equação (B.9):

$$\begin{aligned}
\eta_t + \phi_x \eta_x = \phi_y &\Rightarrow \frac{a\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{\eta}_t + \frac{a^2 g}{\lambda\sqrt{gh}} \tilde{\phi}_x \tilde{\eta}_x = \frac{ag\lambda}{h\sqrt{gh}} \tilde{\phi}_y \\
&\Rightarrow \frac{\lambda}{a\sqrt{gh}} \left(\frac{a\sqrt{gh}}{\lambda} \tilde{\eta}_t + \frac{a^2 g}{\lambda\sqrt{gh}} \tilde{\phi}_x \tilde{\eta}_x \right) = \frac{\lambda}{a\sqrt{gh}} \left(\frac{ag\lambda}{h\sqrt{gh}} \tilde{\phi}_y \right) \\
&\Rightarrow \tilde{\eta}_t + \frac{a}{h} \tilde{\phi}_x \tilde{\eta}_x = \frac{\lambda^2}{h^2} \tilde{\phi}_y \Rightarrow \boxed{\tilde{\eta}_t + \alpha \tilde{\phi}_x \tilde{\eta}_x = \frac{1}{\beta} \tilde{\phi}_y \quad \text{em} \quad \tilde{y} = \alpha \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t})}.
\end{aligned}$$

– Equação (B.10):

$$\phi_y = \frac{ag\lambda}{h\sqrt{gh}} \tilde{\phi}_y = 0 \Rightarrow \boxed{\tilde{\phi}_y = 0 \quad \text{em} \quad \tilde{y} = -1.}$$

Donde segue que o sistema de equações governantes adimensional é dado por:

$$\begin{cases}
\beta \tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{\phi}_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0 & \text{em} \quad -1 < \tilde{y} < \alpha \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}), \\
\tilde{\phi}_{\tilde{t}} + \frac{\alpha}{2} \left[\left(\tilde{\phi}_{\tilde{x}} \right)^2 + \frac{1}{\beta} \left(\tilde{\phi}_{\tilde{y}} \right)^2 \right] + \eta = 0 & \text{em} \quad \tilde{y} = \alpha \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}), \\
\tilde{\eta}_t + \alpha \tilde{\phi}_x \tilde{\eta}_x = \frac{1}{\beta} \tilde{\phi}_y & \text{em} \quad \tilde{y} = \alpha \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}), \\
\tilde{\phi}_{\tilde{y}} = 0 & \text{em} \quad \tilde{y} = -1,
\end{cases} \quad (\text{B.12})$$

onde $\beta = \frac{h^2}{\lambda^2}$ e $\alpha = \frac{a}{h}$.

Dimensionalização

Esta subseção é inteiramente dedicada ao processo de dimensionalização realizado durante o capítulo 5.

Dito isso tomaremos como referência o seguinte sistema de equações governantes linear:

$$\begin{cases}
\beta \tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{\phi}_{\tilde{y}\tilde{y}} = 0 & \text{em} \quad -1 < \tilde{y} < 0, & (\text{B.13}) \\
\tilde{\phi}_{\tilde{t}} + \tilde{\eta} = 0 & \text{em} \quad \tilde{y} = 0, & (\text{B.14}) \\
\tilde{\eta}_t = \frac{1}{\beta} \tilde{\phi}_{\tilde{y}} & \text{em} \quad \tilde{y} = 0, & (\text{B.15}) \\
\tilde{\phi}_{\tilde{y}} = 0 & \text{em} \quad \tilde{y} = -1. & (\text{B.16})
\end{cases}$$

Com o objetivo de fazer com que as equações (B.13) à (B.16) voltem a ser dependentes das variáveis dimensionais, nos ocuparemos de desfazer a troca de variáveis definidas em (B.11), a saber,

$$x = \lambda \tilde{x}; \quad y = h \tilde{y}, \quad t = \frac{\lambda}{c_0} \tilde{t}, \quad \eta(x, t) = a \tilde{\eta}(\tilde{x}, \tilde{t}), \quad \phi(x, y, t) = \frac{ag\lambda}{c_0} \tilde{\phi}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{t}).$$

Note ainda que, por se tratar de um processo contrário à adimensionalização, podemos utilizar sem maiores problemas as igualdades antes obtidas para as derivadas parciais de

$\phi(x, y, t)$ e $\eta(x, t)$. Desta forma, apenas isolando as variáveis adimensionais ao invés das dimensionais, ficam dados os seguinte resultados:

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}_{\tilde{x}} &= \frac{\sqrt{gh}}{ag} \phi_x, & \tilde{\phi}_{\tilde{y}} &= \frac{h\sqrt{gh}}{ag\lambda} \phi_y, & \tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} &= \frac{\lambda\sqrt{gh}}{ag} \phi_{xx}, & \tilde{\phi}_{\tilde{y}\tilde{y}} &= \frac{h^2\sqrt{gh}}{ag\lambda} \phi_{yy}, & \tilde{\phi}_{\tilde{t}} &= \frac{1}{ag} \phi_t, \\ \tilde{\eta}_{\tilde{x}} &= \frac{\lambda}{a} \eta_x, & \tilde{\eta}_{\tilde{t}} &= \frac{\lambda}{a\sqrt{gh}} \eta_t.\end{aligned}$$

Daí, tanto por conta da troca de variáveis antes estabelecida quanto pelas últimas igualdades expostas, segue que a dimensionalização do sistema (B.13) – (B.16) é dada conforme os seguintes tópicos:

– Domínio ($-1 < \tilde{y} < 0$):

$$-1 < \tilde{y} < 0 \Rightarrow -1 < \frac{y}{h} < 0 \Rightarrow -h < y < 0,$$

onde as condições de fronteira antes delimitadas por $\tilde{y} = -1$ e $\tilde{y} = 0$ ficam descritas, respectivamente, por $y = -h$ e $y = 0$.

– Equação (B.13):

$$\begin{aligned}\beta\tilde{\phi}_{\tilde{x}\tilde{x}} + \tilde{\phi}_{\tilde{y}\tilde{y}} &= \frac{h^2}{\lambda^2} \frac{\lambda\sqrt{gh}}{ag} \phi_{xx} + \frac{h^2\sqrt{gh}}{ag\lambda} \phi_{yy} = 0 \Rightarrow \frac{h^2\sqrt{gh}}{ag\lambda} (\phi_{xx} + \phi_{yy}) = 0 \\ \Rightarrow \phi_{xx} + \phi_{yy} &= 0 \Rightarrow \boxed{\Delta\phi = 0.}\end{aligned}$$

– Equação (B.14):

$$\tilde{\phi}_{\tilde{t}} + \tilde{\eta} = \frac{1}{ag} \phi_t + \frac{1}{a} \eta = 0 \Rightarrow \frac{1}{g} \phi_t + \eta = 0 \Rightarrow \boxed{\phi_t + g\eta = 0 \text{ em } y = 0.}$$

– Equação (B.15):

$$\begin{aligned}\tilde{\eta}_{\tilde{t}} &= \frac{\lambda^2}{h^2} \tilde{\phi}_{\tilde{y}} \Rightarrow \frac{\lambda}{a\sqrt{gh}} \eta_t = \frac{\lambda^2}{h^2} \frac{h\sqrt{gh}}{ag\lambda} \phi_y \Rightarrow \frac{a\sqrt{gh}}{\lambda} \left(\frac{\lambda}{a\sqrt{gh}} \eta_t = \frac{\lambda^2}{h^2} \frac{h\sqrt{gh}}{ag\lambda} \right) \\ \Rightarrow \boxed{\eta_t = \phi_y \text{ em } y = 0.}\end{aligned}$$

– Equação (B.16):

$$\tilde{\phi}_{\tilde{y}} = \frac{hc_0}{ag\lambda} \phi_y = 0 \Rightarrow \boxed{\phi_y = 0 \text{ em } y = -h.}$$

Em resumo, o sistema de equações governantes descrito nas variáveis dimensionais é dado por:

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 & \text{em } -h < y < 0, & \text{(B.17)} \\ \phi_t + g\eta = 0 & \text{em } y = 0, & \text{(B.18)} \\ \eta_t = \phi_y & \text{em } y = 0, & \text{(B.19)} \\ \phi_y = 0 & \text{em } y = -h. & \text{(B.20)} \end{cases}$$