

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

GABRIEL FELIPE DALLA STELLA

A GEOMETRIA DA RELATIVIDADE RESTRITA E GERAL

CURITIBA
2019

GABRIEL FELIPE DALLA STELLA

A GEOMETRIA DA RELATIVIDADE RESTRITA E GERAL

Monografia apresentada à disciplina “Trabalho de Conclusão de Curso II” como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Matemática pela Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Diego Mano Otero.

CURITIBA
2019

TERMO DE APROVAÇÃO

GABRIEL FELIPE DALLA STELLA

A GEOMETRIA DA RELATIVIDADE RESTRITA E GERAL

Monografia aprovada pela banca examinadora que segue abaixo, como requisito parcial à obtenção do grau de Bacharel em Matemática, pela Universidade Federal do Paraná - Setor de Ciências Exatas.

Orientador: Professor Doutor Diego Mano Otero
Departamento de Matemática, UFPR

Professor Doutor Carlos Eduardo Durán Fernández
Departamento de Matemática, UFPR

Professor Doutor Alexandre Luis Trovon de Carvalho
Departamento de Matemática, UFPR

Curitiba, 16 de dezembro de 2019.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, professor Diego, por estar pronto a ajudar, mas também pela sua gentileza, sempre me tratando bem. Ao longo deste trabalho, e de outros, se dispôs a aprender junto comigo coisas novas.

Aos meus queridos pais, Gilson e Terezinha, pelo exemplo de dedicação e trabalho, sempre presentes. Agradeço o apoio ao longo de toda a minha vida e pelos valiosos ensinamentos. Obrigado também por não se importarem em ter fazer eu apagar até o papel das tarefas de matemática rasgar, pois sem isso acredito que não estaria aqui e não teria tanto gosto por essa ciência.

À minha irmã, Grazielle, pelas diversas vezes que me ajudou quando precisava, e espero ter ajudado você, como uma troca de favores entre irmãos.

À minha avó, Marta, agradeço por ter sido uma pessoa tão doce para mim, expressando seu carinho de maneira sutil, porém de uma maneira que deixasse claro o quanto gostava de mim. Apesar de não estar mais comigo, ainda está no meu coração.

Aos meus demais familiares, por terem de alguma maneira ajudado a construir quem eu sou.

Aos meus amigos, pelos momentos de diversão, trabalho e estudo juntos, pelas vezes que me ajudaram, mas a recíproca também é verdadeira, pois gosto muito de ajudá-los de alguma maneira.

Às professoras Joceane e Rita por terem sido importantes na superação das dificuldades no início da escola, pois sem isso talvez eu não tivesse chegado tão longe nos estudos.

Por último, mas com importância imensa na minha vida, à Vanessa, minha namorada, por sempre me apoiar e me aconselhar, em todos os momentos. Agradeço por toda a sua dedicação.

Seria impossível colocar o nome de todos os que de alguma forma contribuíram para o meu crescimento pessoal e intelectual, mas agradeço à todas essas pessoas.

“Eu tentei 99 vezes e falhei, mas na centésima tentativa eu consegui, nunca desista de seus objetivos mesmo que esses pareçam impossíveis, a próxima tentativa pode ser a vitoriosa.”

Albert Einstein

RESUMO

Nesse trabalho, abordaremos os aspectos básicos da Teoria de Relatividade, com destaque à Relatividade Geral, bem como o espaço de Minkowski e alguns tópicos da geometria pseudo-Riemanniana. A Relatividade é exposta no primeiro, sexto e sétimo capítulo, onde são exploradas as bases e algumas consequências dessa teoria. Nos capítulos dois, três e quatro é abordado o espaço de Minkowski e a geometria diferencial deste espaço, seguindo de perto a geometria diferencial clássica (Euclideana). Por fim, a parte referente a geometria pseudo-Riemanniana é abordada no capítulo cinco, onde são feitos resultados necessários para o entendimento das bases onde a Relatividade Geral é construída, mas também justificar algumas fórmulas que surgem na teoria de superfícies do espaço de Minkowski e dar uma noção básica sobre geometria pseudo-Riemanniana. Os objetivos deste trabalho são os seguintes: expor a teoria da relatividade sob o ponto de vista matemático, justificando logicamente as consequências de princípios que são enunciados ao longo do texto e suas equivalências, como por exemplo que o princípio da equivalência de Einstein implica os postulados da Teoria Geométrica da Gravidade; e introduzir à geometria em variedades pseudo-Riemannianas apresentando conceitos e alguns resultados comuns à geometria Riemanniana como geodésicas e curvatura, e técnicas usadas em geometria, como utilização de grupos de isometrias para resolver problemas ou simplificar os mesmos, por exemplo como mostrar que as partículas livres no espaço de Schwarzschild descrevem trajetórias planas.

Palavras-chave: Teoria da relatividade; Geometria Pseudo-Riemanniana; Espaço de Minkowski.

ABSTRACT

In this work, we approach the basic aspects of Relativity Theory, mainly General Relativity, as well as the Minkowski Space and some topics of pseudo-Riemannian geometry. The Relativity, is presented in chapters one, six and seven, where the basis and consequences of this theory are explored. In chapters two, three and four, contain Minkowski space and its differential geometry as subject, studying some results inspired on the classical (Euclidean) differential geometry. The part presenting the pseudo-Riemannian geometry is found in the chapter five, where the results necessary for the understanding of the basis of the General Relativity, but also to justify some formulas from the theory of surfaces in the Minkowski space and give the notions of pseudo-Riemannian geometry. The objectives of this work are: show the theory of relativity under a mathematical point of view, logically justifying the consequences of some principles and its equivalences, for example the Einstein Equivalence Principle implies the Metric Theory of Gravity postulates; and introduce to the geometry of pseudo-Riemannian manifolds presenting concepts common to Riemannian geometry, such as geodesics and curvature, and techniques used in geometry, as studying the isometry group to solve problems or simplify them, for example how to show that free particles in the Schwarzschild's space have planar trajectories.

Keywords: Relativity Theory; Pseudo-Riemannian Geometry; Minkowski Space.

Sumário

1	Introdução	10
2	Relatividade Especial	12
2.1	Postulados da Relatividade Especial e consequências	12
2.2	Dilatação do tempo	13
2.3	Contração do espaço	14
2.4	Transformação de Lorentz em uma dimensão espacial	15
2.5	Soma de velocidades na relatividade especial em uma dimensão	16
2.6	Invariância do intervalo de espaço-tempo e a geometria	16
2.7	Transformações de Lorentz gerais	17
2.8	Inconsistência da Relatividade?	19
2.9	Cinemática-Momento-Energia	19
2.10	Fótons	21
3	Espaço de Minkowski	22
3.1	Classificação de subespaços e primeiros resultados	22
3.2	Cones temporais	26
3.3	Produto vetorial no espaço de Minkowski	28
3.4	Isometrias no espaço de Minkowski	29
4	Curvas no espaço de Minkowski	36
4.1	Introdução às curvas paramétricas	36
4.2	Curvatura das curvas em duas dimensões	37
4.3	Curvatura das curvas em três dimensões	38
4.3.1	Caso tipo-tempo	39
4.3.2	Caso tipo-espaço	39
4.3.3	Caso tipo-luz	40
4.4	Invariantes e propriedades das curvas	40
5	Superfícies no espaço de Minkowski	45
5.1	Superfícies no espaço de Minkowski	45
5.2	A curvatura de superfícies	47
6	Variedades Riemannianas e pseudo-Riemannianas	52
6.1	Notação de Einstein	52
6.2	Conexões	52
6.2.1	Conexões afins	53
6.2.2	Conexões nos fibrados tensoriais	53
6.2.3	Derivadas ao longo de curvas	55
6.2.4	Transporte Paralelo	56
6.2.5	Geodésicas	57
6.3	Variedades pseudo-Riemannianas e construções básicas	59

6.4	Conexões em Variedades pseudo-Riemannianas	62
6.5	Curvatura	68
6.6	Curvatura de Subvariedades	72
7	Transição entre a Relatividade Especial e Geral	78
7.1	Desvio gravitacional	78
7.2	Não existência de referenciais inerciais na Terra	79
7.3	Princípio da Equivalência	79
7.3.1	Física em espaço-tempo curvo	80
7.4	Tensor de Energia-Momento	81
8	Relatividade Geral	84
8.1	Equações de Campo de Einstein	84
8.2	Equações de Einstein para campos gravitacionais fracos	85
8.3	Soluções Esféricas para Objetos Massivos	87
8.3.1	Considerações iniciais	87
8.3.2	Equações de Einstein para fluidos perfeitos estáticos	87
8.3.3	Estrutura das Estrelas	89
8.4	Consequências da métrica de Schwarzschild	90
8.4.1	Efeitos sobre a passagem do tempo	90
8.4.2	Desvio gravitacional	90
8.4.3	Trajetórias de partícula (incluindo fótons)	92
8.4.4	Deflexão da luz	95
9	Conclusão	98
	Apêndice A - Cálculo das Variações e Geodésicas	100

Capítulo 1

Introdução

Este trabalho é uma introdução aos conceitos básicos da relatividade geral, estudo da geometria no espaço de Minkowski e geometria semi-Riemanniana.

Inicialmente é exposta uma introdução à relatividade especial, fornecendo os fundamentos para a relatividade geral e suas deduções, e também serve como motivação para a métrica do espaço de Minkowski e a geometria posteriormente desenvolvida. Esta parte está em [6] e [15].

Em seguida é explorada a geometria do espaço de Minkowski, estudando as isometrias deste espaço e as propriedades vetoriais de espaços com uma métrica (forma bilinear simétrica e não degenerada) não positiva definida, como a estrutura causal e o produto vetorial. A partir disso foram estudadas as curvas e superfícies no espaço de Minkowski, fazendo paralelos com a geometria diferencial clássica e também como uma introdução às variedades semi-Riemannianas. Como principal referência para esta parte é [11].

Para complementar o estudo do espaço de Minkowski, passa-se ao estudo das variedades semi-Riemannianas, inicialmente expondo as conexões, geodésicas e transporte paralelo sem métrica e posteriormente introduzindo a métrica e com suas particularidades. Como ponto chave da relatividade geral, a curvatura também compõe esta parte do texto, cobrindo as curvatura de Ricci e escalar, mas também resultados puramente geométricos, como a condição da variedade semi-Riemanniana ser localmente isométrica e também dando as justificativas para as fórmulas de curvatura no espaço de Minkowski. Estas seções tem como base as referências [10] e [14].

Como tópico final foram desenvolvidos os estudos da relatividade geral, algumas motivações para estudar esta teoria é que a relatividade especial falha na presença de gravidade, sendo necessário generalizá-la, com a relatividade geral; esta também é uma aplicação da teoria estudada nas seções anteriores. O intuito desta parte do trabalho é dar a fundamentação teórica e lógica para o desenvolvimento dos princípios que governam a relatividade geral. As principais referências são [6], [13], [15] e [16].

Para total clareza e entendimento deste trabalho iremos pressupor o conhecimento sobre os seguintes tópicos:

1. **Topologia Geral:** Este tópico foi estudado para ter um melhor conhecimento sobre variedades diferenciáveis e seus axiomas, além de obter conhecimento sobre espaços métricos, normados ou com produto interno de modo a ter um amplo conhecimento sobre a topologia de \mathbb{R}^n , o espaço base para a teoria de variedades.
2. **Variedades Diferenciáveis:** Este tópico é necessário para ter a base necessária no entendimento da linguagem da geometria diferencial atual, além de vários teoremas e exemplos que vão ser usados ou desenvolvidos ao longo do texto.

É importante saber principalmente a parte introdutória de variedades; funções diferenciáveis e partições da unidade; espaço tangente e cotangente; campos de vetores e 1-formas; fibras vetoriais; teoremas de imersão, submersão e do posto; grupos de Lie, grupos topológicos e ações destes grupos; fluxos sobre variedades; tensores.

3. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies:** Este tópico foi estudado paralelamente à parte relativa ao espaço de Minkowski e suas propriedades, com o fim de estabelecer as diferenças básicas entre a geometria diferencial no espaço euclidiano e a geometria diferencial no espaço de Minkowski.
4. **Cálculo das Variações:** O foco deste tópico no trabalho é desenvolver ferramentas para encontrar as geodésicas de maneira mais simples.
5. **Equações diferenciais:** Este tópico é bastante importante ao longo de todo o texto, pela necessidade de resolver equações diferenciais para descobrir a dinâmica dos corpos e para a geometria dos espaços trabalhados.

Capítulo 2

Relatividade Especial

As leis de Newton e as leis de Maxwell foram marcos na física. A primeira nos forneceu uma maneira quantitativa de expressar a ação de forças e aceleração, como elas interagem entre si e assim, juntamente com o cálculo diferencial e integral, formou a base da física por muitos anos e ainda para diversas aplicações é muito utilizada, devido à sua simplicidade, comparada às alternativas mais precisas, porém muito complicadas, e também pela sua boa precisão nas escalas de tamanho e velocidade do cotidiano.

As leis de Maxwell foram a compilação de um conjunto de leis do eletromagnetismo, já conhecidas anteriormente, porém com as devidas correções como a de conservação da carga, e este conjunto de equações estabelece como se comportam a eletricidade e o magnetismo na presença de fontes e variação dos mesmos. Esta correção foi crucial para a previsão e descrição das ondas eletromagnéticas.

Outro marco para a física foi a relatividade especial. Porém esta teoria foi uma correção das duas anteriores, pois as duas teorias eram inconsistentes. Mais precisamente as quatro afirmativas abaixo são inconsistentes:

- (i) Existem partículas carregadas e aceleradas;
- (ii) Partículas carregadas são fontes de campos eletromagnéticos de acordo com as leis de Maxwell;
- (iii) Partículas carregadas obedecem as leis de Newton;
- (iv) A energia é conservada em interações de partícula e campo.

Das equações Maxwell, podemos deduzir que uma partícula acelerada emite radiação e a potência da radiação é dada pela fórmula de Larmor $P = 2q^2a^2/3c^3$ [8], onde a é o módulo da aceleração, q é a carga e c é a velocidade da luz. Então em um intervalo de tempo temos que a energia emitida pela partícula é $E_{\text{rad}} > 0$. Então (i) e (ii) implicam esta afirmação.

Por outro lado pelas leis de Newton $W = \Delta K$, onde W é o trabalho realizado pelas forças externas e K é a energia cinética.

Porém pelo item (iv) temos que $W - E_{\text{rad}} = \Delta K$, pois devemos descontar a energia emitida pela radiação. Porém como $E_{\text{rad}} \neq 0$ temos uma contradição.

Para corrigir estes problemas Einstein introduziu a relatividade especial no seu artigo *On the electrodynamics of moving bodies* [4].

2.1 Postulados da Relatividade Especial e consequências

Os postulados da relatividade especial são:

1. As leis da física são as mesmas em todos os referenciais inerciais;

2. A velocidade da luz no vácuo é igual à c em todos os referenciais inerciais.

A partir dos postulados podemos deduzir diversas consequências físicas contraintuitivas. Mas antes é necessário explicar o que é exatamente um referencial inercial.

Um referencial é inercial se o espaço é homogêneo e isotrópico e o tempo é homogêneo. Isso quer dizer o seguinte:

- (i) (Espaço homogêneo) As leis da física neste referencial são invariantes por translação no espaço.
- (ii) (Tempo homogêneo) As leis da física neste referencial são invariantes por translação no tempo.
- (iii) (Isotropia do espaço) As leis da física neste referencial não dependem da direção no espaço.

Então utilizando um pouco de mecânica Lagrangeana, o lagrangeano de uma partícula livre deve ser independente do tempo e da posição no espaço. Portanto depende somente de sua velocidade. Mas pela isotropia do espaço, o lagrangeano não depende da direção da velocidade, portanto depende do quadrado da norma desta. Nesse caso, teremos, pelas equações de Euler-Lagrange correspondentes, que a velocidade desta partícula é constante. Em particular vale a primeira lei de Newton.

Também podemos concluir que se S e S' são referenciais inerciais, então esses referenciais tem velocidade relativa constante entre si. De fato, considere um corpo em repouso com relação à origem de S e sem a ação de forças, então este continuará em repouso com relação à S , porém S' verá este corpo com velocidade constante e esta também será a velocidade de S visto a partir de S' .

2.2 Dilatação do tempo

Considere referenciais S e S' , de modo que S' tem uma velocidade v na direção x positiva, em relação à S , e o seguinte experimento:

Uma pessoa na origem do referencial S' emite um feixe de luz na direção de um espelho que se encontra perpendicular ao eixo y , em uma direção em que o feixe retorna à origem depois refletir no espelho, ou seja, a pessoa observa que a luz descreve uma reta, como na Figura 2.1.

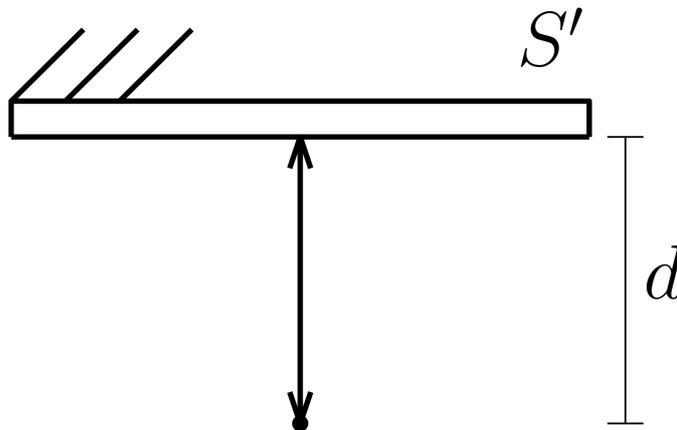


Figura 2.1:

Temos que a distância d do espelho até a origem é

$$\Delta t' = \frac{2d}{c} \tag{2.1}$$

onde $\Delta t'$ é o intervalo de tempo medido por S' .

Por outro lado um observador em S , observa o feixe partir e, após o intervalo de tempo Δt entre a emissão e o retorno do feixe à origem de S' , observa o deslocamento $v\Delta t$, ou de modo mais simplificado, o feixe descreve um triângulo isósceles de base $v\Delta t$ e lados ℓ , como mostrado na Figura 2.2.

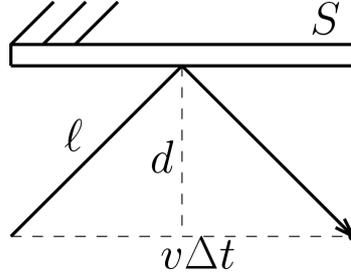


Figura 2.2:

Observando que a distância da origem de S' ao espelho e utilizando o teorema de Pitágoras, temos que

$$\ell = \sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}.$$

Assim temos

$$\Delta t = \frac{2\ell}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}. \quad (2.2)$$

Utilizando as equações (2.1) e (2.2) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta t &= \frac{2}{c} \sqrt{\left(\frac{c\Delta t'}{2}\right)^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2} \Rightarrow \Delta t^2 = \frac{4}{c^2} \frac{(c^2\Delta t'^2 + v^2\Delta t^2)}{4} \\ &\Rightarrow (c^2 - v^2)\Delta t^2 = c^2\Delta t'^2 \\ &\Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Nota-se então que o tempo se dilata para referenciais onde não ocorre a emissão e recepção no mesmo ponto do referencial. Esse fenômeno chamamos de **dilatação do tempo**.

Devido à esse fato chamamos os o intervalo de tempo entre dois eventos observados num referencial onde ocorrem na mesma coordenada de intervalo de **tempo próprio**.

2.3 Contração do espaço

Imagine dois referenciais S e S' onde S' tem uma velocidade v na direção de x positivo, em relação à S . Considere também uma régua, no eixo x , que está em repouso com relação ao referencial S' e tem comprimento ℓ' nesse referencial e ℓ em S .

Seja Δt intervalo de tempo em que a origem de S' passa por cada uma das extremidades da régua em S e $\Delta t'$ o correspondente para S' . Então:

$$\ell = v\Delta t \text{ e } \ell' = v\Delta t'. \quad (2.4)$$

Disso temos que:

$$\frac{\ell}{\ell'} = \frac{\Delta t}{\Delta t'}.$$

Note que o intervalo $\Delta t'$ é um intervalo de tempo próprio e disso:

$$\frac{\ell}{\ell'} = \frac{\Delta t}{\Delta t'} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow \ell' = \ell \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.5)$$

Observe que o comprimento da régua medido em repouso é sempre maior que qualquer outro referencial. Esse fenômeno chamamos de **contração do espaço**.

Devido a esse fato costumamos diferenciar o comprimento medido em repouso, e chamamos de **comprimento próprio**.

2.4 Transformação de Lorentz em uma dimensão espacial

Agora podemos deduzir as transformações de Lorentz, que é basicamente a mudança de coordenadas cartesianas em referenciais inerciais.

Considere dois referenciais inerciais S e S' , onde S' tem uma velocidade v na direção de x positivo, e as origens coincidem em $t' = t = 0$. Considere também um evento que ocorre nas coordenadas (x, t) em S e (x', t') em S' . Note que nesse instante o referencial S' se deslocou vt da origem de S . Também observe que x' é um comprimento próprio em S' , então em S esse comprimento é contraído pelo fator $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Disso temos:

$$x = vt + x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (2.6)$$

Pelo princípio da relatividade, ou seja, que as leis da físicas são invariantes por mudança de referencial, teremos que a mesma lei de mudança de coordenadas vale para S' , exceto pela orientação da velocidade, pois nesse caso S' observa S com velocidade $-v$, na direção x positiva de S' . Então:

$$x' = -vt' + x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.7)$$

Utilizando as equações (2.6) e (2.7) obtemos

$$t' = \frac{(t - vx/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (2.8)$$

Podemos fazer uma comparação das mudanças de referencial inercial com uma dimensão onde as origens coincidem em tempo $t = t' = 0$, ou seja, das transformações de Lorentz da relatividade especial e as transformações de Galileu da mecânica clássica, que são as seguintes:

$$\text{(Lorentz)} \begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \\ t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \end{cases} \quad \text{(Galileu)} \begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

As transformações de Lorentz, diferentemente das transformações de Galileu, são não lineares em v .

Outro detalhe que podemos perceber é a simultaneidade de eventos. Com as transformações de Galileu temos que $\Delta t = 0 \Leftrightarrow \Delta t' = 0$ independente do referencial, portanto, na mecânica clássica, se dois eventos são simultâneos em um referencial inercial então são em qualquer referencial inercial. Porém na relatividade especial tomando eventos simultâneos em S , ou seja, tais que $\Delta t = 0$, que porém ocorrem em coordenadas diferentes, então $\Delta x \neq 0$. Isto, implicará que $\Delta t' \neq 0$ pelas transformações de Lorentz. E portanto eventos simultâneos em um referencial podem não o ser em outro.

Por último, um dos principais motivos pelo qual é difícil observar os efeitos da relatividade especial é as escalas que estamos acostumados no cotidiano. Mais precisamente, as velocidades e distâncias que medimos são em geral muito menores que a velocidade da luz, neste caso teremos $|v|/c \ll 1$ e $|vx|/c^2 \ll 1$. Neste caso, utilizando a expansão de Taylor em v/c nas transformações de Lorentz, percebemos que estas se aproximam das transformações de Galileu, então nessas escalas não é possível perceber os efeitos das transformações de Lorentz.

2.5 Soma de velocidades na relatividade especial em uma dimensão

Considere dois referenciais S e S' , onde S' tem uma velocidade v na direção de x positivo, e as origens coincidem em $t' = t = 0$. Considere um objeto A com velocidade uniforme v_A em relação ao referencial S . Considere $t_2 > t_1$ e $(x_1, t_1), (x_2, t_2)$ as coordenadas do objeto A nos respectivos instantes. Pelas transformações de Lorentz, temos que:

$$\begin{cases} x'_2 - x'_1 = \gamma((x_2 - x_1) - v(t_2 - t_1)) \\ t'_2 - t'_1 = \gamma\left((t_2 - t_1) - \frac{v(x_2 - x_1)}{c^2}\right) \end{cases}$$

Note que como o movimento é uniforme, segue que as velocidades v_A e v'_A do objeto A nos referenciais S e S' é dada por $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$ e $\frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1}$, respectivamente, e portanto:

$$v'_A = \frac{x'_2 - x'_1}{t'_2 - t'_1} = \frac{\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} - v}{1 - \frac{v}{c^2} \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}} = \frac{v_A - v}{1 - \frac{v_A v}{c^2}}$$

2.6 Invariância do intervalo de espaço-tempo e a geometria

Vamos denotar eventos no espaço tempo como vetores em \mathbb{R}^4 onde as três primeiras coordenadas denotam os espaço e a restante denota o c vezes o tempo, ou seja, se um evento A tem coordenadas espaciais (x, y, z) e ocorre no instante t de um referencial inercial, então denotamos $A = (x, y, z, ct)$. Além disso definimos um produto entre dois eventos $X = (x^1, x^2, x^3, x^4)$ e $Y = (y^1, y^2, y^3, y^4)$ como $g(X, Y) = X \cdot Y = x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3 - x^4 y^4$, e este produto terá significado que será explicado a seguir.

Considere dois eventos $A = (x_1, y_1, z_1, ct_1)$ e $B = (x_2, y_2, z_2, ct_2)$ em um referencial S . Definimos o intervalo de espaço-tempo I dos eventos A e B com sendo

$$I = -c^2(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Uma implicação do segundo postulada da relatividade especial é que I é invariante por mudança de referenciais inerciais. Vamos mostrar que para o caso em que as coordenadas y e z dos referenciais estão fixas, ou seja, um movimento unidimensional.

Suponha que $A = (x_1, ct_1)$ e $B = (x_2, ct_2)$ em um referencial S e que $A' = (x'_1, ct'_1)$ e $B' = (x'_2, ct'_2)$ os eventos correspondentes em um referencial S' . Suponhamos inicialmente os intervalos I de A e B e I' de A' e B' e que S' tem velocidade v na direção x positiva, em relação à S .

Podemos aplicar uma transformação de Lorentz de modo a obter I' com relação aos eventos A e B . Pondo $\Delta t' = t'_2 - t'_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x' = x'_2 - x'_1$ e $\Delta x = x_2 - x_1$, temos

$$\begin{aligned} I' &= -c^2 \Delta t'^2 + \Delta x'^2 \\ &= -\gamma^2 c^2 \Delta t^2 + 2\gamma^2 v \Delta t \Delta x - \gamma^2 \frac{(\Delta x v)^2}{c^2} + \gamma^2 \Delta x^2 - 2\gamma^2 v \Delta t \Delta x + \gamma^2 \Delta t^2 v^2 \\ &= -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 = I \end{aligned}$$

Logo em **uma dimensão**, à menos de translação no espaço e no tempo (um referencial inercial sob estas transformações ainda será inercial e também não variam o intervalo de espaço-tempo), teremos:

2º postulado \Rightarrow Transformações de Lorentz \Rightarrow Invariância do intervalo de espaço-tempo.

O caso em maiores dimensões dessa implicação será descrito no próximo parágrafo.

O caso particular em que $I = 0$ para todos os referenciais inerciais implica o segundo postulado da relatividade especial. De fato, suponha A e B como no início do parágrafo, e por simplicidade suponha $t_2 > t_1$, se $I = 0$, então podemos considerar um feixe de luz emitido das coordenadas de A na direção das coordenadas de B , teremos então que após um intervalo de tempo $t_2 - t_1$ a distância percorrida pelo feixe em qualquer referencial é:

$$\frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}{t_2 - t_1} (t_2 - t_1) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = c(t_2 - t_1)$$

Portanto em qualquer referencial teremos que a velocidade da luz é c . Então sempre temos:

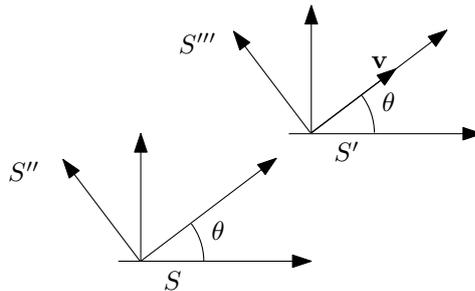
Invariância do intervalo de espaço-tempo \Rightarrow 2º postulado.

2.7 Transformações de Lorentz gerais

Vamos deduzir uma forma das transformações de Lorentz no caso plano recaindo no caso unidimensional, porém pode ser utilizada no caso espacial compondo rotações. Um fato que iremos utilizar é que rotacionando um referencial inercial por um ângulo fixo, temos que este novo referencial é inercial.

Considere os referenciais S e S' , onde S' se move com velocidade \mathbf{v} que forma um ângulo θ com o eixo x de S , isto é, $\mathbf{v} = (v \cos \theta, v \sin \theta)$, além disso S e S' coincidem em $t = t' = 0$.

Vamos considerar S'' e S''' tais que S'' é a rotação de S em um ângulo θ e S''' é a rotação de S' em um ângulo θ , como ilustrado na figura a seguir:



Em coordenadas teremos:

$$\begin{cases} x' = x'' \cos \theta - y'' \sin \theta \\ y' = y'' \cos \theta + x'' \sin \theta \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x'' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y'' = y \cos \theta - x \sin \theta \end{cases}$$

Note que S'' e S''' tem o eixo x paralelo à v e nesse caso S''' se move com velocidade de norma v na direção x de S'' e assim temos a configuração para a qual deduzimos as transformações de Lorentz. Assim aplicando a transformação de Lorentz correspondente temos:

$$\begin{cases} x''' = \gamma(x'' - vt'') \\ t''' = \gamma(t'' - vx''/c^2) \end{cases}$$

Utilizando essas transformações ($t'' = t$ e $t''' = t'$ se deve à invariância do intervalo de espaço-tempo), obtemos:

$$\begin{cases} x' = x + (\gamma - 1)(x \cos \theta + y \sin \theta) \cos \theta - vt \cos \theta \\ y' = x + (\gamma - 1)(x \cos \theta + y \sin \theta) \sin \theta - vt \sin \theta \\ t' = \gamma(t - v(x \cos \theta + y \sin \theta)/c^2) \end{cases}$$

Ou em notação vetorial, denotando $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno euclidiano nas coordenadas espaciais, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r} + (\gamma - 1) \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle}{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} \mathbf{v} - \gamma \mathbf{v} t \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Neste caso, como a rotação não varia o intervalo de espaço-tempo, e as transformações de Lorentz unidimensionais foram obtidas pelo segundo postulado, que é consequência da invariância do intervalo de espaço-tempo, temos que :

Invariância do intervalo de espaço-tempo \Rightarrow Transformações de Lorentz Gerais.

Ainda denotando $\mathbf{r} = \mathbf{r}_{\parallel} + \mathbf{r}_{\perp}$ a decomposição em componentes paralela e ortogonal à \mathbf{v} temos que

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{r}_{\perp} + \gamma \mathbf{r}_{\parallel} - \gamma \mathbf{v} t \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Teremos que

$$\begin{aligned} I' &= -c^2 t'^2 + \langle \mathbf{r}', \mathbf{r}' \rangle \\ &= -\gamma^2 c^2 t^2 + 2\gamma^2 t \langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle - \gamma^2 \frac{(\langle \mathbf{r}, \mathbf{v} \rangle)^2}{c^2} + \langle \mathbf{r}_{\perp}, \mathbf{r}_{\perp} \rangle + \gamma^2 \langle \mathbf{r}_{\parallel}, \mathbf{r}_{\parallel} \rangle - 2\gamma^2 t \langle \mathbf{r}_{\parallel}, \mathbf{v} \rangle + \gamma^2 t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= -c^2 t^2 + \langle \mathbf{r}, \mathbf{r} \rangle = I \end{aligned}$$

Como iremos ver no capítulo de isometrias do espaço de Minkowski, teremos que composição de Transformações de Lorentz em uma dimensão, rotações espaciais, e translações no espaço-tempo levam referenciais inerciais em referenciais inerciais e preservam o intervalo de espaço-tempo. Além disso, dados dois referenciais inerciais, teremos que eles tem velocidade relativa, então à menos de translação e rotação, podemos recair no caso considerado no início do parágrafo.

Em resumo, fixado um referencial inercial, podemos **obter** as coordenadas de qualquer **outro referencial inercial** utilizando **transformações de Lorentz+rotações+translações**, e além disso isso **estas transformações preservam o intervalo de espaço-tempo**.

Assim teremos o seguinte:

$$\begin{aligned} 2^{\circ} \text{ postulado} &\Rightarrow \text{Transformações de Lorentz} + \text{Rotações} + \text{Translações} \\ &\Rightarrow \text{Invariância do intervalo de espaço-tempo} \end{aligned}$$

Portanto:

$$2^{\circ} \text{ postulado} \Leftrightarrow \text{Invariância do intervalo de espaço-tempo} \Leftrightarrow \text{Transformações de Lorentz} + \text{Rotações} + \text{Translações}.$$

Assim a relatividade especial pode ser modelada com uma geometria onde o espaço é \mathbb{R}^4 e a métrica g é dada por $g(u, v) = u \cdot v$. Assim as mudanças de referenciais inerciais são isometrias com relação à essa métrica. Chamaremos \mathbb{R}^4 com esta métrica de espaço de Minkowski.

Outra interpretação do intervalo de espaço tempo é que a partir dele podemos medir o tempo próprio e o comprimento próprio. Considere dois eventos $u = (u^1, u^2, u^3, u^4)$ e $v = (v^1, v^2, v^3, v^4)$, assim se $u - v$ é tal que $(u - v) \cdot (u - v) > 0$ então o comprimento próprio entre estes dois eventos pode ser medido por $\sqrt{(u - v) \cdot (u - v)}$.

De fato, considerando um referencial inercial onde os dois eventos correspondentes a u e v nesse referencial, u' e v' , são simultâneos, isto é, $u'^4 = v'^4$ (isso sempre é possível desde que $(u - v) \cdot (u - v) > 0$, utilizando as isometrias do espaço de Minkowski que são mudanças de referenciais inerciais), assim $(u' - v') \cdot (u' - v')$ é o quadrado do comprimento próprio, por outro lado $(u' - v') \cdot (u' - v') = (u - v) \cdot (u - v)$ e assim fica demonstrado.

Do mesmo modo, se $(u - v) \cdot (u - v) < 0$, então o intervalo de tempo próprio entre estes dois eventos é dado por $\sqrt{-(u - v) \cdot (u - v)}/c$.

2.8 Inconsistência da Relatividade?

Mostramos que se temos dois referenciais S e S' com uma velocidade relativa v na direção do eixo x e tempo 0 quando as origens coincidem, então S mede que o tempo em S' passa mais lentamente que em S , mais precisamente, se tivermos um relógio em repouso com relação ao referencial S' que mede um intervalo de tempo $\Delta t'$, então este é um intervalo de tempo próprio com relação a S' , logo o intervalo de tempo Δt decorrido é maior que $\Delta t'$.

Teríamos então que S' mede o tempo passando mais rápido em S que em S' ? Isso é falso, pois pelo primeiro postulada da relatividade não há um referencial preferido, logo poderíamos ter feito o mesmo experimento com S' medindo os relógios e notaríamos que este referencial mede que o tempo em S passa mais lentamente que em S' .

Mas a pergunta é por que isso acontece? A resposta é bastante simples, visto que estamos medindo dois pares de eventos diferentes, uma vez que o primeiro par de eventos é quando o relógio de S' começa a contar o tempo e quando ele para de contar o tempo, que em coordenadas do espaço-tempo são $A = (0, 0, 0, 0)$ e $B = (0, 0, 0, ct')$ em S' , respectivamente, porém o outro par de eventos é quando o relógio de S começa a contar o tempo e quando ele para de contar o tempo, que em coordenadas do espaço-tempo são $C = (0, 0, 0, 0)$ e $D = (-\gamma vt, 0, 0, c\gamma t)$ em S' , respectivamente, como prevê as transformações de Lorentz.

2.9 Cinemática-Momento-Energia

Considere um referencial inercial S e uma partícula com coordenadas $X(t) = (x(t), y(t), z(t), ct)$ em cada instante. Definimos quadrivelocidade desta partícula em um instante t como sendo a derivada da posição no espaço-tempo com relação ao tempo próprio correspondente τ . Mais precisamente, considerando um referencial S' que está em repouso com relação à partícula no instante t , considere o limite

$$U(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{X(t+h) - X(t)}{\tau(t+h) - \tau(t)},$$

onde $\tau(t)$ é o instante correspondente em S' para cada instante t em S . Portanto

$$U = \frac{dX}{d\tau} = \frac{dX}{dt} \frac{dt}{d\tau}.$$

Como S' e a partícula tem a mesma velocidade espacial $v = (v^1, v^2, v^3)$ no instante t e referencial S temos que a quadrivelocidade é

$$U = (v^1, v^2, v^3, c)\gamma(v),$$

no instante t , onde $\gamma(v) = 1/\sqrt{1 - \|v\|^2/c^2}$ e $\|\cdot\|$ é a norma euclídeana. Do mesmo modo definimos quadriaceleração como sendo:

$$A = \frac{dU}{d\tau}.$$

Além disso, a massa e a energia são duas manifestações de uma única quantidade física. A relação entre massa e energia de uma partícula com velocidade v é dada por $E = \gamma(v)mc^2$, onde m é a massa da partícula medida em repouso.

Como indício experimental que a massa e a energia são equivalentes é a fusão nuclear que acontece no Sol onde basicamente pela força gravitacional alta funde-se átomos de hidrogênio transformando-os em átomos instáveis, assim para estabilizar o átomo parte da massa liberada é transformada em energia que é emitida na forma de ondas eletromagnéticas que chegam na Terra.

Podemos dividir a energia relativística em energia proveniente da massa e energia cinética, assim a energia da massa e a energia cinética como sendo

$$E_m = mc^2 \text{ e } K = mc^2(\gamma(v) - 1),$$

respectivamente. Utilizando a expansão de Taylor para $\gamma(v) = 1/\sqrt{1 - \|v\|^2/c^2}$ podemos concluir que para $|v| \ll c$ teremos que K será aproximada por $m\|v\|^2/2$ a menos de termos na ordem de $(\|v\|/c)^4$. Então neste limite a aproximação é válida e assim recuperamos a energia cinética da formulação Newtoniana.

Também definimos o quadrimomento dessa partícula como sendo $P = mU = m\gamma(v)(v, c) = (mv\gamma(v), mc\gamma(v)) = (mv\gamma(v), E/c) = (p, E/c)$, definindo o momento linear relativístico como $p = mv\gamma(v)$. Além disso

$$P \cdot P = m^2(U \cdot U) = m^2(\gamma(v))^2(\|v\|^2 - c^2) = -m^2c^2(\gamma(v))^2 \left(1 - \frac{\|v\|^2}{c^2}\right) = -m^2c^2.$$

Portanto

$$-m^2c^2 = -\frac{E^2}{c^2} + \sum_{i=1}^3 (p^i)^2 \Rightarrow E^2 = m^2c^4 + \sum_{i=1}^3 (p^i c)^2. \quad (2.9)$$

Além disso temos também que o quadrimomento é conservado. Para ser mais preciso considere n partículas sem ação de forças externas e cada uma tem quadrimomento P_i . Então

$$P = \sum_{i=1}^n P_i$$

não varia no tempo, ou seja,

$$\frac{dP}{d\tau} = 0.$$

Estas leis são também postulados da relatividade especial, e assim como os outros postulados, estas podem ser comprovadas experimentalmente.

Como uma partícula com massa não pode atingir a velocidade da luz, o que demandaria uma energia infinita para acelerar até tal velocidade, teremos que $\dot{X} \cdot \dot{X} < 0$ em todo instante. Assim podemos definir o intervalo de tempo próprio entre os instantes t_0 e t_1 da trajetória da partícula como sendo:

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{-\dot{X} \cdot \dot{X}} dt.$$

Esta é a forma infinitesimal do intervalo de tempo próprio entre dois eventos quaisquer u e v , que é dado por:

$$\frac{1}{c} \sqrt{-(u - v) \cdot (u - v)}.$$

Como o intervalo de espaço-tempo entre dois eventos é o intervalo de tempo medido por um referencial inercial que observa os dois eventos na mesma coordenada espacial, portanto somente as coordenadas do tempo em que os eventos ocorrem podem ser distintas. Utilizando a mesma ideia para o intervalo de tempo próprio de uma trajetória, podemos observar que $\Delta\tau$ correspondente para o intervalo de tempo Δt pode ser aproximado por $\sqrt{-\dot{X} \cdot \dot{X}} \Delta t$, para $\Delta t = t - t_0$ suficientemente pequeno. Passando às somas de Riemann e ao limite, obtemos a integral do intervalo de tempo próprio. Então por essas observações, podemos ver, ao menos intuitivamente, que o intervalo de **tempo próprio de uma trajetória mede** o intervalo de tempo de um relógio ao longo dessa trajetória.

De modo análogo dada uma curva X é tal que $\dot{X} \cdot \dot{X} > 0$, podemos definir o comprimento próprio dessa curva em u_0 e u_1 , onde u é o parâmetro da trajetória, como sendo:

$$\ell = \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{\dot{X} \cdot \dot{X}} du.$$

2.10 Fótons

Um fóton é a menor quantidade de luz (onda eletromagnética) possível. Um fóton não possui massa. Então fixado um referencial inercial, se ΔX é a variação da posição no espaço-tempo de um fóton neste referencial, então $\Delta X \cdot \Delta X = 0$. Logo $-c^2 \Delta\tau = \Delta X \cdot \Delta X = 0$. Assim o intervalo de tempo próprio correspondente para uma variação de posição no espaço-tempo de um fóton é nulo, assim não podemos definir quadrivelocidade neste caso.

Mesmo assim o quadrimomento é dado por $P = (p^1, p^2, p^3, E/c)$ onde o momento linear relativístico $p = (p^1, p^2, p^3)$ tem a mesma direção do deslocamento do fóton e satisfaz (2.9). Como $m = 0$ nesse caso, podemos reescrever (2.9) da seguinte maneira:

$$E^2 = \sum_{i=1}^3 (p^i c)^2.$$

Pela física quântica teremos que $E = hf$ onde h é a constante de Planck e f é a frequência da onda emitida através do fóton.

Capítulo 3

Espaço de Minkowski

Agora vamos explorar uma parte da geometria dada pela métrica do espaço de Minkowski e faremos análogos à geometria diferencial clássica.

3.1 Classificação de subespaços e primeiros resultados

Dada uma lista de vetores v_1, v_2, \dots, v_n , denotaremos por $\text{span} \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$ o conjunto gerado por estes vetores.

Chamaremos $\mathbb{R}^{2,1}$ de espaço de Minkowski de dimensão 3 com $\mathbb{R}^{2,1} = (\mathbb{R}^3, g)$ onde g é a métrica $g(u, v) = u_1v_1 + u_2v_2 - u_3v_3$.

Além disso podemos generalizar o espaço de Minkowski de dimensão $n \geq 2$, denotado por $\mathbb{R}^{n-1,1}$, como \mathbb{R}^n com a métrica $u \cdot v = g(u, v) = \sum_{i=1}^{n-1} u_i v_i - u_n v_n$.

Definição 3.1.1. Seja $W \subset \mathbb{R}^{2,1}$ um subespaço vetorial. Então chamaremos de **caráter causal** a classificação deste subespaço quanto à degenerância, não-degenerância e positividade da métrica neste subespaço, que são as seguintes:

- (i) W é tipo-espaço se g é positiva definida em W ;
- (ii) W é tipo-tempo se g é não degenerado em W e de índice 1 (índice de uma métrica é a maior dimensão entre os subespaços negativos definidos, ou ainda, número de autovalores negativos da matriz de g em W)
- (iii) W é tipo-luz se g é degenerada em W .

Dado um subespaço afim $W \subset \mathbb{R}^{2,1}$ da forma $W = p + U$, então ainda podemos classificar W quanto ao caráter causal, e W terá um caráter causal se o subespaço U tem o mesmo caráter causal.

Além disso dizemos que um vetor $v \in \mathbb{R}^{2,1}$ é tipo-espaço (resp. tipo-tempo, tipo-luz) se $g(v, v) > 0$ ou $v = 0$ (resp. $g(v, v) < 0$, $g(v, v) = 0$ e $v \neq 0$).

Exemplo 3.1.2. Vamos listar alguns exemplos:

1. e_1 e e_2 são vetores tipo-espaço e e_3 é tipo-tempo, enquanto que $e_1 + e_3$ é tipo-luz.
2. $\text{span} \langle e_1, e_2 \rangle$ é tipo-espaço, pois é isométrico a \mathbb{R}^2 com o produto interno euclidiano.
3. $\text{span} \langle e_2, e_3 \rangle$ é tipo-tempo, pois é isométrico a $\mathbb{R}^{1,1}$.
4. $\text{span} \langle e_1, e_2 + e_3 \rangle$ é tipo-luz. De fato, $e_2 + e_3 \neq 0$, mas $g(e_2 + e_3, e_1) = g(e_2 + e_3, e_2 + e_3) = 0$ e disso $g(e_2 + e_3, x) = 0$, para cada $x \in \text{span} \langle e_1, e_2 + e_3 \rangle$.

5. Um espaço gerado por dois vetores tipo-espaço não é necessariamente tipo-espaço. Um exemplo é o espaço $\text{span}\langle e_1, e_1 + e_2 + e_3 \rangle$ que é tipo-luz.
6. Sejam $W \subset U$ com W, U subespaços. Se U é tipo-espaço, então W é tipo-espaço. De fato, se U é tipo-espaço, então dado $x \in U$ com $x \neq 0$, temos $g(x, x) > 0$. Em particular, dado $x \in W$, com $x \neq 0$, teremos $g(x, x) > 0$ e portanto W é tipo-espaço.

Definição 3.1.3. Definimos a norma do vetor u na métrica g como sendo $\sqrt{|g(u, u)|}$ e será denotada por $|u|$.

Chamaremos de cone de luz o conjunto de todos os vetores tipo-luz, ou seja, $\mathcal{C} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{2,1} \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \text{ e } (x_1, x_2, x_3) \neq 0\}$. Também denotaremos o conjunto dos vetores tipo-tempo $\mathcal{T} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^{2,1} \mid x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 < 0\}$.

Sendo V um espaço vetorial com uma **métrica** b , isto é, b é uma forma bilinear simétrica não degenerada em V , e $W \subset V$ um subespaço vetorial, definimos $W^\perp = \{v \in V \mid b(u, v) = 0\}$. Assim podemos enunciar alguns resultados elementares de espaços vetoriais com uma métrica.

Lema 3.1.4. Seja V um espaço vetorial e $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma forma bilinear simétrica e não degenerada, que chamamos de **métrica**, em V . Então:

1. Se $W \subset V$ é um subespaço, então $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$.
2. Se $W \subset V$ é um subespaço, então $(W^\perp)^\perp = W$.
3. Se $W \subset V$ é um subespaço não degenerado se, e somente se, $W \cap W^\perp = \{0\}$. Em particular, W é não degenerado se, e somente se, W^\perp é não degenerado.
4. Sejam $W, U \subset V$ subespaços. Então $W \subset U$ se, e somente se, $U^\perp \subset W^\perp$.
5. Existe uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V , i. e., $b(v_i, v_j) = \delta_{ij}\varepsilon_j$, onde $\varepsilon_j = \pm 1$. Este é um caso especial do lei de inércia de Sylvester.

Demonstração.

1. Como b é não degenerada, temos que $\bar{b} : V \rightarrow V^*$ onde $\bar{b}(u)(v) = b(u, v)$ é um isomorfismo. Então \bar{b} define um isomorfismo de W^\perp em W^o , o anulador de W . De fato, se $u \in W^\perp$, então $\bar{b}(u)(v) = b(u, v) = 0$ para todo $v \in W$, disso $\bar{b}(W^\perp) \subset W^o$. Seja $\varphi \in W^o$ então existe $u \in V$ tal que $\bar{b}(u) = \varphi$, vamos mostrar que $u \in W^\perp$. Com efeito, para qualquer $v \in W$ temos que $b(u, v) = \bar{b}(u)(v) = \varphi(v) = 0$ logo $u \in W^\perp$. Assim $\bar{b}(W^\perp) = W^o$. Temos que \bar{b} restrito a W^\perp é injetivo, então existe isomorfismo de W^\perp em W^o .

Portanto $\dim W + \dim W^\perp = \dim W + \dim W^o = \dim V$.

2. Temos que $W \subset (W^\perp)^\perp$ e $\dim W = \dim(W^\perp)^\perp$ temos $(W^\perp)^\perp = W$.
3. Suponha que W é não degenerado, então dado $u \in W$ com $u \in W^\perp$, logo $b(u, v) = 0$ para todo $v \in W$ e por b não ser degenerada em W temos $u = 0$. Reciprocamente, suponha que $W \cap W^\perp = \{0\}$, então seja $u \in W$ tal que $b(u, v) = 0$ para todo $v \in W$, então $u \in W \cap W^\perp$, disso $u = 0$ e portanto b é não degenerada em W .

Temos que W é não degenerada se, e somente se, $W \cap W^\perp = W^\perp \cap (W^\perp)^\perp = \{0\}$, o que ocorre se, e somente se, W^\perp é não degenerado.

4. Suponha que $W \subset U$, então dado $u \in U^\perp$, temos que $b(u, v) = 0$, para todo $v \in U$. Em particular, $b(u, v) = 0$ para todo $v \in W$, disso $u \in W^\perp$.

5. Indução em $n = \dim V$: Seja $n = 1$, então como b é não degenerada, existe $v \in V$ tal que $b(v, v) \neq 0$. Então definindo $v_1 = v/\sqrt{|b(v, v)|}$ teremos uma base ortonormal de V .

Suponha que a afirmação vale para qualquer espaço de dimensão n e seja $\dim V = n + 1$. Então como b é não degenerada, existe $v_1 \in V$ vetor tal que $b(v_1, v_1) = \pm 1$. Considere $W = \text{span} \langle v_1 \rangle$, segue que $\dim W^\perp = n$ e como $b(v_1, v_1) \neq 0$ segue que $W \cap W^\perp = \{0\}$. Portanto existe uma base ortonormal $\{v_2, \dots, v_{n+1}\}$ para W^\perp , e como $W \cap W^\perp = \{0\}$ temos que $\{v_1, v_2, \dots, v_{n+1}\}$ é uma base ortonormal de V . ■

Observação 3.1.5. Lembre-se que dado um subespaço de V , $W \subset V$ o seu anulador é o conjunto $W^\circ = \{\varphi \in V^* \mid \forall x \in W, \varphi(x) = 0\}$, onde V^* é o espaço dual de V .

Numa base ortonormal, v_1, \dots, v_n teremos $b(v_i, v_j) = \delta_{ij}\varepsilon_j$, onde $\varepsilon_j = g(v_j, v_j)$. É conveniente ordenar a base de modo que os primeiros ε_j sejam positivos, e assim, teremos $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ a assinatura da métrica b . Além disso dado um vetor $v \in V$, temos que $v = \sum \varepsilon_j b(v, v_j) v_j$.

Proposição 3.1.6. No espaço $\mathbb{R}^{2,1}$ vale as seguintes afirmações:

1. Seja $v \in \mathbb{R}^{2,1}$ não nulo. Então v é tipo-tempo se, e somente se, $\text{span} \langle v \rangle^\perp$ é tipo-espaço. Do mesmo modo v é tipo-espaço se, e somente se, $\text{span} \langle v \rangle^\perp$ é tipo-tempo. Em ambos os casos temos $\mathbb{R}^{2,1} = \text{span} \langle v \rangle \oplus \text{span} \langle v \rangle^\perp$.
2. Seja $W \subset \mathbb{R}^{2,1}$ um subespaço. Então W é tipo-luz se, e somente se, W^\perp é tipo-luz.
3. Seja $W \subset \mathbb{R}^{2,1}$ um subespaço. Então W é tipo-tempo se, e somente se, W^\perp é tipo-espaço.
4. Seja $U \subset \mathbb{R}^{2,1}$ um subespaço. Então U é tipo-espaço se, e somente se, U^\perp é tipo-tempo.

Demonstração.

1. Vamos mostrar somente a primeira afirmação. Temos, pelo lema 3.1.4, que $\dim \text{span} \langle v \rangle^\perp = 2$ para qualquer $v \neq 0$. Se v é tipo-tempo, então $\text{span} \langle v \rangle \cap \text{span} \langle v \rangle^\perp = \{0\}$, logo $\mathbb{R}^{2,1} = \text{span} \langle v \rangle \oplus \text{span} \langle v \rangle^\perp$ (analisando a dimensão) e $\text{span} \langle v \rangle^\perp$ é não degenerado, pelo lema 3.1.4. Podemos escolher $\{v_1, v_2\}$ uma base ortonormal de $\text{span} \langle v \rangle^\perp$ com relação a $g|_{\text{span} \langle v \rangle^\perp}$. Desse modo $\{v_1, v_2, v\}$ diagonaliza g , e como índice de g é 1, devemos ter $g(v_1, v_1) = g(v_2, v_2) = 1$, logo $\text{span} \langle v \rangle^\perp$ é tipo-espaço.

Reciprocamente se $\text{span} \langle v \rangle^\perp$ é tipo-espaço, então de modo análogo temos que $\mathbb{R}^{2,1} = \text{span} \langle v \rangle \oplus \text{span} \langle v \rangle^\perp$ e logo devemos ter $g(v, v) < 0$, pois caso contrário g seria positivo definido. Portanto v é tipo-tempo.

2. Segue do lema 3.1.4.
3. Suponha que W é tipo-tempo, então existe um vetor $v \in W$ tipo-tempo, logo $\text{span} \langle v \rangle^\perp$ é tipo-espaço e $W^\perp \subset \text{span} \langle v \rangle^\perp$, logo W^\perp é tipo-espaço, pois é subespaço de um espaço vetorial tipo-espaço.

Reciprocamente, supondo que W^\perp é tipo-tempo e como W é degenerado se, e somente se, W^\perp é degenerado, teremos que W não é tipo-luz (degenerado). Assim teremos que W é tipo-tempo ou tipo-espaço. Se W fosse tipo-espaço, então g seria positiva definida, uma contradição. Portanto W é tipo-tempo.

4. Basta tomar $W = U^\perp$ no item anterior. ■

Proposição 3.1.7. São válidas as seguintes afirmações:

1. Sejam u e v vetores tipo-luz. Então $\{u, v\}$ é um conjunto dependente se, e somente se, $g(u, v) = 0$
2. Se u e v são vetores tipo-tempo ou tipo-luz com $g(u, v) = 0$, então são ambos tipo-luz.
3. Se W é um subespaço tipo-luz, então $\dim(W \cap W^\perp) = 1$.

Demonstração.

1. Se $\{u, v\}$ é linearmente dependente, então podemos supor $u = \alpha v$ e disso $g(u, v) = 0$. Reciprocamente, suponha que $g(u, v) = 0$. Considerando a decomposição $\mathbb{R}^{2,1} = \text{span}\langle e_3 \rangle^\perp \oplus \text{span}\langle e_3 \rangle$ e, como u e v são tipo-luz, não pertencem ao espaço $\text{span}\langle e_3 \rangle^\perp$ que é tipo-espaço. Então suponha que $u = x + e_3$ e $v = y + e_3$. Assim devemos ter:

$$\begin{aligned} g(u, u) &= g(x, x) + 2g(x, e_3) - 1 = 0 \\ g(v, v) &= g(y, y) + 2g(y, e_3) - 1 = 0 \\ g(u, v) &= g(x, y) + g(x, e_3) + g(y, e_3) - 1 = 0 \end{aligned}$$

Portanto $g(x, x) + g(y, y) - 2g(x, y) = 0$ e disso $g(x - y, x - y) = 0$. Como $\text{span}\langle e_3 \rangle^\perp$ é tipo-espaço, temos que $x = y \Rightarrow u = v$. No caso geral em que $u = x + \alpha e_3$ e $v = y + \beta e_3$, devemos ter $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$, disso $u/\alpha = v/\beta$ e assim $\{u, v\}$ é linearmente dependente.

2. Suponha, por contradição, que u e v vetores não são ambos tipo-luz, então podemos supor que u é tipo-tempo, logo $\text{span}\langle u \rangle^\perp$ é tipo-espaço, então sendo $\text{span}\langle u \rangle^\perp$ tipo-espaço, temos que $v \notin \text{span}\langle u \rangle^\perp$ e disso $g(u, v) \neq 0$, uma contradição. Portanto u e v são ambos tipo-luz.
3. Suponha que $x, y \in W \cap W^\perp$, então $x + y \in W \cap W^\perp$ e disso $0 = g(x + y, x + y) = g(x, x) + 2g(x, y) + g(y, y) = 2g(x, y)$. Pelo item 1, x e y são linearmente dependentes, então $\dim(W \cap W^\perp) \leq 1$. Além disso, como W é um subespaço degenerado, temos $W \cap W^\perp \neq \{0\}$, segue o resultado. ■

Proposição 3.1.8. Seja $W \subset \mathbb{R}^{2,1}$ um subespaço de dimensão 2. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. W é um subespaço tipo-tempo.
2. Existem dois vetores tipo-luz linearmente independentes em W .
3. W contém um vetor tipo-tempo.

Demonstração.

1. \Rightarrow 2. Seja W tipo-tempo e $\{v_1, v_2\}$ uma base ortonormal de W . Então $g(v_1 + v_2, v_1 + v_2) = g(v_1 - v_2, v_1 - v_2) = 0$. Além disso $v_1 + v_2$ e $v_1 - v_2$ são linearmente independentes.
2. \Rightarrow 3. Sejam u e v vetores tipo-luz linearmente independentes, então $g(u, v) \neq 0$. Além disso $g(u \pm v, u \pm v) = \pm 2g(u, v)$. Assim $g(u, v) < 0$ ou $-g(u, v) < 0$ e disso $u + v$ ou $u - v$ é tipo-tempo.
3. \Rightarrow 1. Se W contém o vetor tipo-tempo v , então $\text{span}\langle v \rangle^\perp \supset W^\perp$ e $\text{span}\langle v \rangle^\perp$ é tipo-espaço, e portanto W^\perp é tipo-espaço e disso W é tipo-tempo. ■

Proposição 3.1.9. Seja $W \subset \mathbb{R}^{2,1}$ um subespaço. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

1. W é um subespaço tipo-luz.
2. Existe um vetor tipo-luz, mas nenhum vetor tipo-tempo em W .
3. $W \cap \mathcal{C} = L - \{0\}$ onde L é um subespaço tipo-luz de dimensão 1.

Demonstração.

1. \Rightarrow 2. Como g é degenerado em W segue que existe um vetor tipo-luz em W . Por outro lado, pela proposição anterior, se existisse um vetor tipo-tempo em W , então W seria um espaço tipo-tempo, o que não ocorre, assim não possui vetores tipo-tempo.
2. \Rightarrow 3. Temos que existe $v \in W \cap \mathcal{C}$. Além disso dado $u \in W \cap \mathcal{C}$, temos que $\{u, v\}$ não pode ser linearmente independente, senão haveria um vetor tipo-tempo em W , ainda pela proposição anterior. Disso, $u = \alpha v$, para algum $\alpha \neq 0$. Assim, pondo $L = \text{span} \langle v \rangle$, temos o resultado.
3. \Rightarrow 1. Como W contém um subespaço tipo-luz, temos que W não é tipo-espaço. Como o subespaço tipo-luz tem dimensão 1, pela proposição anterior, W não é tipo-tempo. Portanto W é tipo-luz. ■

Proposição 3.1.10. Seja $P : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ um plano. Então P é tipo-espaço (resp. tipo-tempo, tipo-luz) se, e somente se, o vetor normal $n = (a, b, -c)$ é tipo-tempo (resp. tipo-espaço, tipo-luz).

Demonstração. Temos que $x = (x_1, x_2, x_3) \in P$ se, e somente se, $g(x, n) = ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$. Logo $P = \text{span} \langle n \rangle^\perp$, disso segue o resultado. ■

Proposição 3.1.11. Sejam $u_1, u_2 \in \mathbb{R}^{2,1}$ com u_1 tipo-espaço e u_2 tipo-luz ortogonais. Então existe único $u_3 \in \mathbb{R}^{2,1}$ tipo-luz com $g(u_3, u_1) = 0$ e $g(u_3, u_2) = 1$.

Demonstração. Temos que $W = \text{span} \langle u_1 \rangle$ é um subespaço tipo-espaço. Segue que W^\perp é tipo-tempo. Logo existe $u_3 \in W^\perp$ com u_3 tipo-luz tal que $\{u_2, u_3\}$ é linearmente independente, pois vale a proposição 3.1.8 e W^\perp é tipo-tempo de dimensão 2. Como $\{u_2, u_3\}$ é linearmente independente e u_2, u_3 são tipo-luz temos que $g(u_2, u_3) \neq 0$. Pela bilinearidade de g , podemos supor que $g(u_2, u_3) = 1$, à menos de um múltiplo escalar. Então u_3 com essas propriedades existe.

Suponha que \bar{u}_3 satisfaz as mesmas condições que u_3 . Então temos $\bar{u}_3 = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$, e disso $0 = g(\bar{u}_3, u_1) = \alpha_1$, $1 = g(\bar{u}_3, u_2) = \alpha_2$, $g(\bar{u}_3, u_3) = \alpha_3$. Temos que $\bar{u}_3 = g(\bar{u}_3, u_3)u_2 + u_3$ e disso $0 = g(\bar{u}_3, \bar{u}_3) = 2g(\bar{u}_3, u_3)$ e disso $g(\bar{u}_3, u_3) = 0$ e portanto $\bar{u}_3 = u_3$. ■

Seja (u_1, u_2, u_3) base tal que u_1 é tipo-espaço unitário e u_2, u_3 vetores tipo-luz ortogonais a u_1 com $g(u_2, u_3) = 1$. Chamamos esta base de **base nula**.

3.2 Cones temporais

Lembrando que \mathcal{T} é o conjunto de todos os vetores tipo-tempo. Vamos definir uma relação de equivalência em \mathcal{T} dada por:

$$u \sim v \Leftrightarrow g(u, v) < 0.$$

Como \sim está definida no conjunto \mathcal{T} , temos que é reflexiva e pela simetria de g , segue que \sim é simétrica também.

Sejam $u, v, w \in \mathcal{T}$ e suponha que $u \sim v$ e $v \sim w$. Considerando $\mathbb{R}^{2,1} = \text{span} \langle v \rangle^\perp \oplus \text{span} \langle v \rangle$, teremos nessa decomposição $u = x + \alpha v$ e $w = y + \beta v$. Segue que $g(u, v) = \alpha g(v, v) \Rightarrow \alpha > 0$ e

do mesmo modo $\beta > 0$. De $g(u, u) = g(x, x) + \alpha^2 g(v, v) < 0$ temos que $\alpha |v| > |x|$ e de modo análogo $\beta |v| > |y|$. Considerando $g(u, w) = g(x, y) + \alpha\beta g(v, v)$, como $\text{span}\langle v \rangle^\perp$ é tipo-espaço, segue que $g(x, y) \leq |g(x, y)| \leq |x| \cdot |y| < \alpha\beta |v|^2 = -\alpha\beta g(v, v)$ e disso $g(u, w) < 0$. Portanto \sim é transitiva.

Dado $u \in \mathbb{R}^{2,1}$, definimos então

$$C(u) = \{v \in \mathcal{T} \mid g(u, v) < 0\}.$$

como sendo o cone temporal de $\mathbb{R}^{2,1}$ que contém u . Estas são as classes de equivalência de \sim . Assim dados dois cones $C(u)$ e $C(v)$, temos $C(u) = C(v)$ ou $C(u) \cap C(v) = \emptyset$.

Sejam u e v vetores tipo-tempo, temos que $\text{span}\langle u \rangle^\perp$ é tipo-espaço e como v é tipo-tempo, segue que $v \notin \text{span}\langle u \rangle^\perp$ logo $g(u, v) \neq 0$ e portanto $g(u, v) > 0$ ou $g(u, v) < 0$. Então dado $v \in \mathcal{T}$ temos $v \in C(u)$ ou $v \in C(-u)$. Disso temos a união disjunta $\mathcal{T} = C(u) \sqcup C(-u)$, para u um vetor tipo-tempo fixado.

Os cones temporais são convexos e são um cone, no sentido vetorial. De fato, sejam $a, b \geq 0$ com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, segue que dados $u, v \in C(w)$, teremos:

$$g(au + bv, w) = ag(u, w) + bg(v, w) < 0.$$

Assim $tu \in C(w)$ para $t > 0$ e $ut + v(1 - t) \in C(w)$ para $t \in [0, 1]$.

Assim como em espaços com produto interno tínhamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a noção de ângulos entre vetores, nos vetores tipo-tempo temos uma desigualdade análoga e uma noção de ângulos também como mostra a proposição a seguir.

Proposição 3.2.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa). Sejam v e w vetores tipo-tempo. Então:

1. $|g(v, w)| \geq |v| \cdot |w|$ e vale a igualdade se, e somente se, v e w são colineares.
2. Se v e w estão no mesmo cone temporal, então existe único $\varphi \geq 0$, chamado de ângulo hiperbólico, tal que:

$$g(v, w) = -|v| \cdot |w| \cdot \cosh \varphi.$$

Demonstração.

1. Seja $w = \alpha v + x$, com $x \in \text{span}\langle v \rangle^\perp$, disso $g(w, w) = \alpha^2 g(v, v) + g(x, x) < 0$. Então

$$g(v, w)^2 = \alpha^2 g(v, v)^2 = (g(w, w) - g(x, x))g(v, v) \geq g(w, w)g(v, v) = |v|^2 \cdot |w|^2.$$

Logo $|g(v, w)| \geq |v| \cdot |w|$. A igualdade vale se, e somente se, $g(x, x) = 0$, ou seja, $x = 0$, que vale se, e somente se, $w = \alpha v$.

2. Como v e w estão no mesmo cone, temos $g(v, w) < 0$, assim $-g(v, w) = |g(v, w)|$ e disso $a \doteq -g(v, w)/|v||w| \geq 1$, logo existe único $\varphi \geq 0$ tal que $\cosh \varphi = a$. ■

Da desigualdade Cauchy-Schwarz em espaços com produto internos seguia a desigualdade triangular. Do mesmo modo segue de modo análogo no caso dos vetores tipo-tempo em $\mathbb{R}^{2,1}$.

Proposição 3.2.2. Se v e w são vetores tipo-tempo no mesmo cone de luz, então $|v| + |w| \leq |v + w|$.

Demonstração. Como $g(v, w) < 0$ temos pela desigualdade de Cauchy-Schwarz reversa $|v| \cdot |w| \leq -g(v, w)$. Assim $(|v| + |w|)^2 = |v|^2 + 2|v| \cdot |w| + |w|^2 = -g(v, v) + 2|v| \cdot |w| - g(w, w) \leq -(g(v, v) + 2g(v, w) + g(w, w)) = -g(v + w, v + w) = |v + w|^2$. Portanto $|v| + |w| \leq |v + w|$. ■

Como t3pico final da se33o vamos definir orienta33o temporal no espa3o de Minkowski. Consideramos \mathcal{B} conjuntos de bases ortonormais de $\mathbb{R}^{2,1}$ cujas o terceiro vetor 3 tipo-tempo. Sejam as bases $B = (u_1, u_2, u_3)$ e $B' = (v_1, v_2, v_3)$ em \mathcal{B} . Diremos que $B \equiv B'$ se $u_3 \sim v_3$. Podemos ver que \equiv 3 uma rela33o de equival3ncia em \mathcal{B} .

Chamaremos de orienta33o temporal qualquer uma das duas classes de equival3ncia de \equiv . Fixada uma orienta33o temporal \mathcal{O} , seja $B = (u_1, u_2, u_3)$ uma base em \mathcal{O} . Diremos que um vetor v tipo-tempo 3 direcionado para o futuro se $v \in C(u_3)$, caso contr3rio diremos que v 3 direcionado para o passado. Chamamos $C(u_3)$ e $C(-u_3)$ respectivamente de cone do futuro e do passado. Assim a escolha de orienta33o 3 basicamente uma escolha de um cone temporal para ser o cone do futuro.

Assim como na orienta33o de \mathbb{R}^n temos uma escolha padr3o de orienta33o, vamos definir a escolha padr3o de orienta33o temporal como sendo a orienta33o $\mathcal{O} = [B]$, onde $B = (e_1, e_2, e_3)$ (a base can3nica em \mathbb{R}^3). Assim um vetor $v = (v_1, v_2, v_3)$ tipo-tempo 3 direcionado para o futuro se $v_3 > 0$, ou ainda, $C(e_3)$ 3 o cone do futuro.

3.3 Produto vetorial no espa3o de Minkowski

Relembrando que o produto vetorial euclideo $\times : \underbrace{\mathbb{R}^{n+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n+1}}_{n\text{-vezes}} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ 3 definido de modo que dados $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^{n+1}$, temos que $v = v_1 \times \dots \times v_n$ 3 o 3nico vetor tal que $\langle v, x \rangle = \det(v_1, \dots, v_n, x)$. Do mesmo modo podemos definir com m3tricas mais gerais em \mathbb{R}^{n+1} .

Proposi33o 3.3.1. Seja b uma forma bilinear sim3trica em \mathbb{R}^{n+1} . Ent3o existe uma fun33o $\bigwedge : \underbrace{\mathbb{R}^{n+1} \times \dots \times \mathbb{R}^{n+1}}_{n\text{-vezes}} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $b(\bigwedge(u_1, \dots, u_n), x) = \det(u_1, \dots, u_n, x)$ se, e somente se, b 3 n3o degenerada.

Demonstra33o. Suponha que existe a fun33o \bigwedge . Ent3o dado $u \neq 0$, existe uma base $\{v_1, \dots, v_n, u\}$ contendo este vetor. Logo $b(\bigwedge(v_1, \dots, v_n), u) = \det(v_1, \dots, v_n, u) \neq 0$. Logo b 3 n3o degenerada.

Suponha reciprocamente que b 3 n3o degenerada. Ent3o existe $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^{n+1} , com rela33o 3 m3trica b . Seja $\varepsilon_j = b(v_j, v_j)$, ent3o dado $v \in \mathbb{R}^{n+1}$ temos:

$$v = \sum_j \varepsilon_j b(v, v_j) v_j.$$

Definindo $\bigwedge(u_1, \dots, u_n) = \sum_j \varepsilon_j \det(u_1, \dots, u_n, v_j) v_j$, para cada lista u_1, \dots, u_n , podemos mostrar que vale

$$b\left(\bigwedge(u_1, \dots, u_n), x\right) = \det(u_1, \dots, u_n, x).$$

Suponha que dada a lista u_1, \dots, u_n temos o vetor u que satisfaz $b(u, x) = \det(u_1, \dots, u_n, x)$, ent3o $b(u, x) = b(\bigwedge(u_1, \dots, u_n), x)$, para cada x . Como b 3 n3o degenerada, segue que $u = \bigwedge(u_1, \dots, u_n)$. Assim dada uma lista de n vetores, existe 3nico correspondente dado pela \bigwedge , que portanto 3 uma fun33o. ■

Essa fun33o 3 chamada de **produto vetorial com rela33o a forma bilinear b** .

Chamaremos a aplica33o $\bigwedge : \mathbb{R}^{2,1} \times \mathbb{R}^{2,1} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ onde $g(u \bigwedge v, x) = \det(u, v, x)$ de produto vetorial ou produto vetorial lorentziano, quando for necess3rio distinguir do produto vetorial euclideo \times .

Uma f3rmula explicita para $u \bigwedge v$, onde $u = (u_1, u_2, u_3)$ e $v = (v_1, v_2, v_3)$ 3 a seguinte:

$$u \bigwedge v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & -e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Para o produto vetorial valem as seguintes:

- (i) \wedge é bilinear.
- (ii) \wedge é antisimétrica.
- (iii) $u \wedge v = 0$ se, e somente se, $\{u, v\}$ é linearmente dependente.
- (iv) $g(u \wedge v, u) = g(u \wedge v, v) = 0$.
- (v) Se $u \wedge v \neq 0$ está em $P = \text{span}\langle u, v \rangle$, então P é tipo-luz. Reciprocamente se P é um plano tipo-luz, então existem u e v geradores de P tais que $u \wedge v \neq 0$ pertence a P . Em particular dados $x, y \in P$ temos $x \wedge y \in P$.

O item (i) vem da multilinearidade do determinante. O item (ii) vem do fato de \det ser uma forma multilinear antisimétrica. (ii) de segue se $\{u, v\}$ é linearmente dependente, então $u \wedge v = 0$, e reciprocamente se $\{u, v\}$ é linearmente independente, então existe uma base $\{u, v, w\}$, e disso $g(u \wedge v, w) = \det(u, v, w) \neq 0$ e portanto $u \wedge v \neq 0$. Temos que $g(u \wedge v, u) = \det(u, v, u) = 0$ e assim mostramos (iv). Vamos mostrar (v):

De fato, se $u \wedge v \neq 0$ e pertence ao plano P , segue que $g(u \wedge v, x) = 0$ para todo $x \in P$ e disso P é tipo-luz.

Reciprocamente, suponha que P é um plano tipo-luz, então existe $u \in P$ ortogonal a P . Seja $\{u, v\}$ uma base de P , como P é tipo-luz então não contém vetores tipo-tempo, logo podemos supor $g(v, v) = 1$, caso contrário g seria nula em P .

Seja w um vetor unitário ortogonal a v com $w \notin P$, temos que $\{u, v, w\}$ é uma base de $\mathbb{R}^{2,1}$, então $u \wedge v = \alpha u + \beta v + \gamma w$. Assim $\beta = g(u \wedge v, v) = 0$ e $0 = g(u \wedge v, u) = \gamma g(w, u)$. Temos $g(u, w) \neq 0$, pois caso contrário u seria ortogonal a todos os vetores de $\mathbb{R}^{2,1}$, e disso g seria degenerada, uma contradição. Logo $\beta = \gamma = 0$, e disso $u \wedge v = \alpha u \in P$.

Outro ponto que tínhamos no produto vetorial euclideano é que dados u e v vetores linearmente independentes de \mathbb{R}^3 então $\{u, v, u \times v\}$ é uma base positiva de \mathbb{R}^3 .

O mesmo não ocorre necessariamente com \wedge . Basta considerar o plano $\text{span}\langle e_1 + e_3, e_2 \rangle$ onde $(e_1 + e_3) \wedge e_2 = -(e_1 + e_3)$. Podemos ter também $e_1 \wedge e_2 = -e_3$ e disso $\{e_1, e_2, e_1 \wedge e_2\}$ é uma base negativa de $\mathbb{R}^{2,1}$. Pelo item (v) temos mais ainda, que existem vetores u e v tais que $\{u, v, u \wedge v\}$ não é base de $\mathbb{R}^{2,1}$.

3.4 Isometrias no espaço de Minkowski

A fim de estudar melhor o espaço de Minkowski, podemos estudar o grupo de isometrias desse espaço. Assim definimos o **grupo de Poincaré** como sendo o grupo de isometrias do espaço de Minkowski, ou seja, as aplicações f de $\mathbb{R}^{2,1}$ tais que $g(f(x) - f(y), f(x) - f(y)) = g(x - y, x - y)$. Esse grupo tem a estrutura de um grupo de Lie.

Chamaremos o grupo de isometrias lineares do espaço de Minkowski $\mathbb{R}^{2,1}$ de **grupo de Lorentz** e denotaremos por $O(2, 1)$. Podemos identificar $O(2, 1)$ de maneira natural com o grupo das matrizes A tais que $A^T g A = g$, onde g é a matriz da métrica, com a operação de produto de matrizes.

Temos um resultado análogo a relação do grupo euclideano $E(n)$ com $O(n)$ que será o próximo teorema.

Teorema 3.4.1. Seja $f : \mathbb{R}^{2,1} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ um elemento do grupo de Poincaré. Então existem únicos $A \in O(2, 1)$ e $b \in \mathbb{R}^{2,1}$ tais que $f(x) = Ax + b$.

Demonstração. Seja h uma isometria. Então f dada por $f(x) = h(x) - h(0)$ também será uma isometria. Vamos mostrar que f é linear.

Temos que g preserva a métrica: De fato, sejam $x, y \in \mathbb{R}^{2,1}$, então por um lado $g(f(x) - f(y), f(x) - f(y)) = g(x - y, x - y) = g(x, x) - 2g(x, y) + g(y, y)$ e por outro $g(f(x) - f(y), f(x) - f(y)) =$

$f(y) = g(f(x), f(x)) - 2g(f(x), f(y)) + g(f(y), f(y))$ e como $f(0) = 0$ e f é isometria segue que $g(f(x), f(x)) = g(x, x)$. Assim simplificando as equações, temos que $g(f(x), f(y)) = g(x, y)$. Em particular f leva base ortonormal em base ortonormal.

Assim dada a base ortonormal (e_1, e_2, e_3) temos que $(f(e_1), f(e_2), f(e_3))$ é base ortonormal, e pondo $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = -\varepsilon_3 = 1$ segue que

$$f(x) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i g(f(x), f(e_i)) f(e_i) = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i g(x, e_i) f(e_i)$$

Portanto f é linear e portanto $f \in O(2, 1)$. Pondo $A = f$ e $b = h(0)$ temos $h(x) = Ax + b$, como queríamos.

Para mostrar a unicidade, sejam $f(x) = A'x + b'$, então $f(0) = b'$ e disso $b = b'$. Assim $(A - A')x = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^{2,1}$ e portanto $A = A'$. ■

Vendo o grupo de Lorentz como subgrupo de Lie de $GL(3)$, basta mostrar que $O(2, 1)$ é um subgrupo fechado em $GL(3)$, e pelo teorema de Cartan teremos que $O(2, 1)$ é grupo de Lie. De fato, temos que $F(X) = X^T g X$, onde g é a matriz da métrica de Minkowski na base canônica, é uma aplicação contínua. Logo $F^{-1}(g) = O(2, 1)$, logo $O(2, 1)$ (o grupo de Lorentz) é subgrupo fechado de $GL(3)$ e portanto é grupo de Lie.

Vamos calcular a álgebra de Lie de $O(2, 1)$. De fato, dada uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow O(2, 1)$ com $\alpha(0) = I$ e $\alpha'(0) = X$, temos que $\alpha(t)^T g \alpha(t) = g$ e portanto $X^T g + g X = 0$, e disso temos que

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

Suponha S o conjunto com as matrizes acima, isto é, as matrizes X tais que $X^T g + g X = 0$. Reciprocamente, suponha α uma curva em $GL(3)$ com $\alpha(0) = I$, então:

$$\begin{aligned} (\alpha')^T g \alpha + \alpha^T g \alpha' &= 0 \Leftrightarrow (\alpha^{-1})^T (\alpha')^T g + g \alpha' \alpha^{-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha' \alpha^{-1})^T g + g \alpha' \alpha^{-1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha'(t) (\alpha(t))^{-1} = \gamma(t) \in S. \end{aligned}$$

Dado $X \in S$, vamos encontrar uma curva que satisfaz $(\alpha')^T g \alpha + \alpha^T g \alpha' = 0$, $\alpha(0) = I$ e $\alpha'(0) = X$ com $\alpha(t) \in O(2, 1)$. Suponha α solução da equação $\alpha'(t) = X \alpha(t)$ com $\alpha(0) = I$ e $\alpha'(0) = X$. Temos que $\alpha'(t) (\alpha(t))^{-1} = X \in S$, logo $(\alpha')^T g \alpha + \alpha^T g \alpha' = 0$ e portanto $\alpha(t)^T g \alpha(t) = K$, mas como $\alpha(0) = I$, temos que $g = K$, logo $\alpha(t) \in O(2, 1)$ para todo t . Portanto $\text{Lie}(O(2, 1)) = S$.

Observação 3.4.2. Vamos agora dar uma caracterização para as isometrias.

Seja $B = (v_1, v_2, v_3)$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{2,1}$, com v_3 tipo-tempo, pondo $A = (v_1 \ v_2 \ v_3)$ uma matriz. Se denotarmos $\bar{g}_{ij} = g(v_i, v_j)$ teremos que $A^T g A = (\bar{g}_{ij}) = g$.

Reciprocamente se A é uma isometria, então pondo v_1, v_2, v_3 tais que $A = (v_1 \ v_2 \ v_3)$, teremos que $B = (v_1, v_2, v_3)$ é uma base ortonormal com v_3 tipo-tempo.

Assim podemos associar uma base ortonormal a uma isometria e vice-versa, ou seja, A é uma isometria se, e somente se, A é a matriz de mudança de uma base ortonormal para a base canônica.

Além disso dada uma base nula (u_1, u_2, u_3) , existe um elemento do grupo de Lorentz que leva a base nula $(e_1, (e_2 - e_3)/\sqrt{2}, (e_2 + e_3)/\sqrt{2})$ na base (u_1, u_2, u_3) . Se a transformação A tem tal propriedade, então $Ae_1 = u_1$, $Ae_2 = (u_2 + u_3)/\sqrt{2}$ e $Ae_3 = (-u_2 + u_3)/\sqrt{2}$. Então $(u_1, (u_2 + u_3)/\sqrt{2}, (-u_2 + u_3)/\sqrt{2})$ é uma base ortonormal. Existe A que leva (e_1, e_2, e_3) em $(u_1, (u_2 + u_3)/\sqrt{2}, (-u_2 + u_3)/\sqrt{2})$ e assim leva $(e_1, (e_2 - e_3)/\sqrt{2}, (e_2 + e_3)/\sqrt{2})$ na base (u_1, u_2, u_3) e A assim definida é uma isometria.

Uma classificação importante das isometrias do espaço de Minkowski é a **classificação** quanto à **orientação temporal e vetorial**.

Uma isometria é dita própria se preserva orientação de $\mathbb{R}^{2,1}$. Chamaremos o grupo das isometrias lineares próprias, i.e., com determinante positivo, de grupo de Lorentz especial ou grupo de Lorentz próprio e denotaremos por $SO(2, 1)$. Diremos que a isometria é imprópria se não for própria. Assim $A \in SO(2, 1)$ se, e somente se, A é a matriz de mudança de base de uma base ortonormal positiva para a base canônica.

Dizemos que uma isometria é ortócrona se preserva a orientação temporal, ou seja, se a isometria linear correspondente preserva a orientação temporal das bases ortonormais de $\mathbb{R}^{2,1}$, e chamaremos o grupo das isometrias lineares ortócronas de grupo de Lorentz ortócrono e denotaremos por $O^+(2, 1)$. Logo $A \in O^+(2, 1)$ se, e somente se, $A = (v_1 \ v_2 \ v_3)$ com v_3 no cone do futuro, ou seja, $a_{33} > 0$, onde $A = (a_{ij})$

Além disso denotaremos $SO^+(2, 1)$ o conjunto das transformações de Lorentz ortócronas e próprias. Denotaremos $SO^-(2, 1)$ as transformações não ortócronas e próprias, $O^+(2, 1)$ as transformações ortócronas e impróprias e $O^-(2, 1)$ as não ortócronas e impróprias.

Este subconjunto não é compacto em $GL(3)$, pois contém o conjunto das matrizes da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}$$

que não é limitado.

Vamos considerar as isometrias A que fixam e_1 . Assim $Ae_1 = e_1$, ou seja, $a_{11} = 1$ e $a_{21} = a_{31} = 0$. Além disso de $A^T g A = g$ devemos ter:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} a_{11}^2 + a_{21}^2 - a_{31}^2 & a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32} & a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} - a_{31}a_{33} \\ a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} - a_{31}a_{32} & a_{12}^2 + a_{22}^2 - a_{32}^2 & a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} - a_{33}a_{32} \\ a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} - a_{31}a_{33} & a_{13}a_{12} + a_{23}a_{22} - a_{33}a_{32} & a_{13}^2 + a_{23}^2 - a_{33}^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Logo $a_{12} = a_{13} = 0$ e além disso $a_{22}^2 - a_{32}^2 = -a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1$ e $a_{23}a_{22} - a_{33}a_{32} = 0$. Assim A deve ser de alguma das formas:

$$\begin{aligned} B_1(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & \sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}, & B_2(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cosh(t) & -\sinh(t) \\ 0 & -\sinh(t) & -\cosh(t) \end{pmatrix} \\ B_3(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & -\sinh(t) & \cosh(t) \end{pmatrix}, & B_4(t) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cosh(t) & \sinh(t) \\ 0 & -\sinh(t) & -\cosh(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Essas são chamadas de transformações de Lorentz ao longo do plano $x_1 = 0$. Note também que $B_i(-t) = B_i(t)^{-1}$.

Denotaremos o grupo das rotações que fixam e_3 (resp. isometrias que fixam e_3) por $SO(2)$ (resp. $O(2)$). Note que $SO(2), O(2) \subset O^+(2, 1)$.

A partir disso podemos demonstrar um teorema de representação das transformações de Lorentz.

Teorema 3.4.3 (Teorema de Representação do grupo de Lorentz). Seja $A \in O(2, 1)$ tal que A não fixa o eixo Ox_3 . Então existem $R_\theta, R_\varphi \in SO(2)$ e B uma transformação de Lorentz ao longo do plano $x_1 = 0$ tais que $A = R_\theta B R_\varphi$, com $B = B_i(t)$ e $t > 0$.

Demonstração. Dada uma isometria A podemos escrever $A = (v_1 \ v_2 \ v_3)$ com (v_1, v_2, v_3) base ortonormal de $\mathbb{R}^{2,1}$ e v_3 sendo tipo-tempo. Como A não fixa o eixo Ox_3 temos que $Ae_3 = v_3 \neq \pm e_3$, temos que existe uma rotação $R \in SO(2)$ tal que $Rv_3 = (0, v'_{23}, v'_{33})$ com $v'_{23} > 0$.

Como R é isometria, segue que $(v'_{23})^2 - (v'_{33})^2 = -1$. Assim como $v'_{23} > 0$ temos que Rv_3 deve ser da forma $(0, \sinh t, \cosh t)$ ou $(0, \sinh t, -\cosh t)$ com $t > 0$. Agora devemos tomar B para o respectivo caso:

1. Se $Rv_3 = (0, \sinh t, \cosh t)$ e (Rv_1, Rv_2, Rv_3) é base positiva, então $B' = B_1(-t)$.
2. Se $Rv_3 = (0, \sinh t, -\cosh t)$ e (Rv_1, Rv_2, Rv_3) é base positiva, então $B' = B_2(-t)$.
3. Se $Rv_3 = (0, \sinh t, \cosh t)$ e (Rv_1, Rv_2, Rv_3) é base negativa, então $B' = B_3(-t)$.
4. Se $Rv_3 = (0, \sinh t, -\cosh t)$ e (Rv_1, Rv_2, Rv_3) é base negativa, então $B' = B_4(-t)$.

Em cada um dos casos teremos que $B'Rv_3 = e_3$ e $(B'Rv_1, B'Rv_2, B'Rv_3)$ é base positiva. Assim existe $R' \in SO(2)$ tal que $R'B'Rv_1 = e_1$ e $R'B'R = e_2$. Logo $R'B'RA = I$. Disso $A = R_\theta BR_\varphi$, tomando $R_\theta = R^{-1}$, $R_\varphi = R'^{-1}$ e $B = B'^{-1}$ teremos o resultado. ■

Observação 3.4.4. No caso em que $A \in O(2)$ temos que existe único $R_\varphi \in SO(2)$ tal que $A = SR$ onde $S = I$ se $A \in SO(2)$ e

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se $A \notin SO(2)$. Estes casos ainda podemos ser englobados no teorema pondo $\theta = 0$ e $B = B_1(0)$ se $A \in SO(2)$ ou $\theta = 0$ e $B = B_3(0)$. E de maneira análoga podemos mostrar no caso em que há inversão da orientação temporal.

Assim poderíamos enunciar da seguinte maneira o teorema anterior: Seja $A \in O(2, 1)$. Então existem $R_\theta, R_\varphi \in SO(2)$ e B uma transformação de Lorentz ao longo do plano $x_1 = 0$ tais que $A = R_\theta BR_\varphi$, com $B = B_i(t)$ e $t \geq 0$.

Observação 3.4.5. Seja $A \in O(2, 1)$, então $A^T g A = g$, logo $\det A^T g A = (\det A)^2 \det g = \det g$, logo $\det A = \pm 1$

Observação 3.4.6. Com o teorema podemos mostrar que os elementos do grupo de Poincaré levam referenciais inerciais em referenciais inerciais. Basta analisar as rotações, translações e transformações de Lorentz separadamente.

Agora podemos caracterizar o grupo de Lorentz quanto a conexidade. Note que $O(2, 1)$ intersecta $GL_+(3)$ e $GL_-(3)$, assim $O(2, 1)$ não é conexo e portanto não é conexo por caminhos. Porém com o teorema de representação podemos descobrir as componentes conexas.

Teorema 3.4.7. As componentes conexas de $O(2, 1)$ são $SO^+(2, 1)$ (preserva orientação temporal e vetorial), $SO^-(2, 1)$ (preserva orientação vetorial e inverte a orientação temporal), $O_+^-(2, 1)$ (preserva a orientação temporal e inverte a vetorial) e $O_-^-(2, 1)$ (inverte as orientações temporal e vetorial).

Demonstração. Basta provar que $SO^+(2, 1)$ é a componente conexa que contém I , pois disso segue que $SO^+(2, 1)$ é um subgrupo normal de $O(2, 1)$ e as outras componentes são as classes laterais de $SO^+(2, 1)$.

Vamos mostrar que $SO^+(2, 1)$ é conexo. Seja $A \in SO^+(2, 1)$ podemos escrever $A = R_\theta B_1(s) R_\varphi$ com $s \geq 0$. Temos que $\alpha(t) = R_{(1-t)\theta} B_1((1-t)s) R_{(1-t)\varphi}$ é um caminho em $SO^+(2, 1)$ pois $\det \alpha(t) = 1$ e $(\alpha(t))_{33} > 0$. Temos que $\alpha(0) = A$ e $\alpha(1) = I$. Assim é fácil ver que $SO^+(2, 1)$

é conexo por caminhos. Por argumentos análogos $SO^-(2, 1)$, $O_+^-(2, 1)$ e $O_-^-(2, 1)$ são conexos por caminhos.

Seja $C \supset SO^+(2, 1)$ um subconjunto conexo de $O(2, 1)$, logo conexo por caminhos. Se a inclusão fosse própria, C intersectaria um dos conjuntos $SO^-(2, 1)$, $O_+^-(2, 1)$ e $O_-^-(2, 1)$. Como estes são conexos por caminhos, podemos mostrar que I está conectado por um caminho contínuo com algum dos $B_i(0)$ com $i = 2, 3, 4$.

Não pode ser para $i = 3, 4$, pois se existisse $\alpha : [0, 1] \rightarrow O(2, 1)$ um caminho contínuo de I para $B_i(0)$, então $\det \alpha(t) = 0$ para algum $t \in [0, 1]$, uma contradição.

O mesmo não ocorre se $i = 2$, pois se existisse $\alpha : [0, 1] \rightarrow O(2, 1)$ contínua ligando I e $B_2(0)$, então a entrada $(\alpha(t))_{33}$ vale 1 para $t = 0$ e -1 para $t = 1$, logo existe $t_0 \in [0, 1]$ tal que $(\alpha(t_0))_{33} = 0$. Porém $\alpha(t_0)$ é da forma RBR' com $R, R' \in SO(2)$, e como R, R' fixam a terceira coordenada e portanto a terceira linha de qualquer matriz, temos que $(\alpha(t_0))_{33} = B_{33} = \pm \cosh s$ para algum $s \geq 0$ e como $\cosh s \neq 0$ para qualquer $s \in \mathbb{R}$, temos uma contradição.

Então devemos ter $C = SO^+(2, 1)$, ou seja, $SO^+(2, 1)$ é maximal com relação a conexidade, e portanto $SO^+(2, 1)$ é uma componente conexa de $O(2, 1)$. ■

Desse teorema segue a seguinte proposição

Proposição 3.4.8. $SO^+(2, 1)$ é um subgrupo normal de $O(2, 1)$ e $O(2, 1)/SO^+(2, 1)$ é isomorfo ao grupo de Klein.

Demonstração. Como $SO^+(2, 1) \subset O(2, 1)$ é a componente conexa da identidade, segue que $SO^+(2, 1)$ é um subgrupo normal. Sejam $I = SO^+(2, 1)$, $P = O_+^-(2, 1)$, $T = SO^-(2, 1)$ e $Q = O_-^-(2, 1)$ as classes de $O(2, 1)/SO^+(2, 1)$. Como composição de reflexões temporais e reflexões espaciais, independente da ordem de composição, revertem as orientações vetorial e temporal, teremos $PT = TP = Q$. Portanto $O(2, 1)/SO^+(2, 1)$ é isomorfo ao grupo de Klein, o único grupo comutativo com 4 elementos, não cíclico. ■

Um resultado que pode ser generalizado para qualquer produto vetorial é o seguinte:

Proposição 3.4.9. Seja $A \in O(2, 1)$. Então $A(u \wedge v) = \det A \cdot (Au \wedge Av)$.

Demonstração. Pela não degenerância de g , dada T aplicação linear de $\mathbb{R}^{2,1}$ invertível, temos que $x = y$ se, e somente se, $g(x, Tw) = g(y, Tw)$ para qualquer $w \in \mathbb{R}^{2,1}$. Assim temos que $A(u \wedge v) = \det A \cdot (Au \wedge Av)$ se, e somente se, $g(A(u \wedge v), Aw) = \det A \cdot g((Au \wedge Av), Aw)$ para qualquer $w \in \mathbb{R}^{2,1}$. Mas $\det A \cdot g((Au \wedge Av), Aw) = \det A \cdot \det \begin{pmatrix} A & u & v & w \end{pmatrix} = (\det A)^2 \cdot \det \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix} = g(A(u \wedge v), Aw) = g(Au \wedge Av, Aw)$, para qualquer que seja $w \in \mathbb{R}^{2,1}$. ■

Corolário 3.4.10. Seja $A \in O(2, 1)$, então $|Au \wedge Av| = |u \wedge v|$.

Demonstração. Temos $|A(u \wedge v)| = |u \wedge v|$. Por outro lado $|A(u \wedge v)| = |\det A \cdot Au \wedge Av|$, logo $|u \wedge v| = |\det A| |Au \wedge Av|$. Como A é isometria temos $\det A = \pm 1$ e segue o resultado. ■

Corolário 3.4.11. Sejam u e v vetores não nulos tipo-tempo ou tipo espaço ortogonais. Então $|u \wedge v| = |u| \cdot |v|$.

Demonstração. Suponhamos que $|u| = |v| = 1$ inicialmente. Suponhamos por simplicidade que u e v são tipo-espaço. Então $\text{span} \langle u, v \rangle$ tipo-tempo. Logo existe único $w \in \text{span} \langle u, v \rangle^\perp$ tal que (u, v, w) é uma base ortonormal positiva. Além disso $A = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}$ é uma isometria que leva a base (e_1, e_2, e_3) na base (u, v, w) . Então $|u \wedge v| = |Ae_1 \wedge Ae_2| = |e_1 \wedge e_2| = 1$. O raciocínio é análogo para o caso em que um dos vetores é tipo-tempo.

Temos que $u/|u|$ e $v/|v|$ são unitários e ortogonais. Logo $|u \wedge v|/|u||v| = 1$ e disso segue que $|u \wedge v| = |u| \cdot |v|$. ■

As isometrias preservam o caráter causal de subespaços. De fato, se $L = \text{span}\langle u \rangle$ é uma reta, então dado $A \in O(2, 1)$, $A(L) = \text{span}\langle Au \rangle$ e u e Au tem mesmo caráter causal. Portanto L tem mesmo caráter causal de $A(L)$.

Se P é um plano, então $A(P)$ é um plano e se u é a normal associada a P então Au é a normal associada a $A(P)$. Então A preserva o caráter causal dos planos.

Podemos também mostrar que a ação de $SO^+(2, 1)$ é transitiva sobre o conjunto de planos tipo-tempo e sobre o conjunto de planos tipo-espaço.

Vamos mostrar que a ação de $SO^+(2, 1)$ é transitiva sobre os planos tipo-tempo. Sejam $P : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ um plano tipo-tempo. Então $u = (a, b, -c)$ é tipo-espaço, e podemos supor u unitário. Seja $w \in P$ um vetor tipo-tempo unitário. Temos que $v = w \wedge u$ é um vetor unitário tipo-espaço, e (u, v, w) é uma base ortonormal positiva com w tipo-tempo.

Portanto $A = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}$ está em $SO^+(2, 1)$ e sua inversa B também está em $SO^+(2, 1)$. Então temos que $B(P) \doteq P' : y_1 = 0$. Ou seja, dado P um plano, existe um elemento $B \in SO^+(2, 1)$ tal que $B(P) = \text{span}\langle e_2, e_3 \rangle$, e disso segue que a ação de $SO^+(2, 1)$ é transitiva sobre os planos tipo-tempo.

Para terminar a seção vamos introduzir os círculos no espaço de Minkowski. Uma definição consistente para círculos euclidianos é a seguinte: dada uma reta r e G o grupo de isometrias que fixa r pontualmente, um círculo com eixo r é uma órbita de um ponto fora de r com relação ao grupo G .

Assim podemos dizer que um conjunto $X \subset \mathbb{R}^{2,1}$ é um círculo com eixo sendo a reta r se $X = \{Ap_0 | A \in G\}$, onde G é o grupo de isometrias que fixa r ponto a ponto e $p_0 \notin r$.

Quando a reta é gerada por e_3 o grupo G é $O(2)$ e assim as suas órbitas são círculos euclidianos.

Quando a reta é gerada por e_1 podemos ver que o grupo G são as transformações de Lorentz ao longo do plano $x_1 = 0$, e então suas órbitas são dois ramos de uma hipérbole.

Além disso seja r uma reta tipo-tempo (resp. tipo-espaço), então os círculos com eixo r estão em um plano ortogonal a r e portanto é um plano tipo-espaço (resp. tipo-tempo).

De fato, seja C um círculo com eixo $r : q + tv, t \in \mathbb{R}$, então o grupo de isometrias que fixa r pontualmente deve ser da forma $T(x) = A(x - q) + q$ onde A está no grupo de Lorentz e fixa v . Sejam $p_0 \in C$ e $P = \{q + w | g(w, v) = 0\}$. Podemos supor $q \in r$ de modo que $p_0 \in P$, assim $C \subset P$.

De fato, seja W o conjunto dos vetores ortogonais a v dado $x \in \mathbb{R}^{2,1}$, podemos decompor $x = q + \lambda v + w$, com $w \in W$. Em particular, $Tp_0 = q + \lambda v + w$ com $w \in W$, assim $Tp_0 - q = \lambda v + w$ por outro lado $Tp_0 - q = A(p_0 - q)$ como $p_0 - q \in W$ e $Av = v$ temos que $g(Tp_0 - q, v) = g(A(p_0 - q), Av) = g(p_0 - q, v) = 0$, disso segue que $\lambda = 0$ e portanto $Tp_0 = q + w \in P$.

Seja C um círculo com eixo r (excluindo o caso em que r é tipo-luz), contido no plano P , e seja $x = (x_1, x_2, x_3)$ a intersecção de r e P . Seja $y \in C$, e $c = g(y - x, y - x)$, como P não é tipo-luz, segue que $r \neq 0$. Assim considerando S a hipérbole tal que $z \in S$ se $g(z - x, z - x) = c$. Teremos que $S \cap P = C$.

De fato, vamos supor que r é tipo-tempo, $z = Ty$ onde T é uma isometria que fixa r ponto a ponto, então $Tx = x$ e assim $g(z - x, z - x) = g(Ty - Tx, Ty - Tx) = g(y - x, y - x) = c$ e portanto $C \subset S \cap P$. Por outro lado, podemos, a menos de conjugação por uma isometria que leva P no plano $x_3 = 0$, x em 0 e preserva orientação, supor que $x = 0$, que r é tipo-tempo com vetor diretor unitário e_3 e $y = \sqrt{c} \cdot e_1$ tomando a isometria $A = \begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}$ onde $u = z/\sqrt{c}$ e $v = w \wedge u$. Assim A leva y em z e fixa r e portanto dado $S \cap P \subset C$, como queríamos demonstrar.

Supondo r uma reta tipo-tempo ou tipo-espaço podemos levar ela por uma isometria na reta gerada por e_3 ou na reta gerada por e_1 , respectivamente, e assim basta considerar os círculos como sendo círculos euclidianos no plano $x_3 = 0$ ou hipérbolos no plano $x_1 = 0$, para provar algumas propriedades métricas e de incidência.

Para fins de consulta enunciamos as seguintes proposições:

Proposição 3.4.12. As isometrias preservam o caráter causal de subespaços. Além disso, a

ação de $SO^+(2,1)$ é transitiva sobre o conjunto de planos tipo-tempo e sobre o conjunto de planos tipo-espaço.

Proposição 3.4.13 (Caracterização dos círculos). Seja C um círculo com eixo r , tipo-tempo ou tipo-espaço. Então C está contido em um plano P ortogonal à r . Além disso se x é a intersecção de P e r , dado $y \in C$, com $g(y-x, y-x) = c$, e $H = \{p \in \mathbb{R}^{2,1} \mid g(p-x, p-x) = c\}$, então $C = H \cap P$.

Capítulo 4

Curvas no espaço de Minkowski

No Espaço de Minkowski teremos uma teoria análoga a teoria das curvas em \mathbb{R}^3 , porém esta é mais complicada devido à estrutura causal de cada curva assim, diferentemente da estrutura em \mathbb{R}^3 , cada direção possui um caráter possivelmente diferente.

4.1 Introdução às curvas paramétricas

Uma curva em $\mathbb{R}^{2,1}$, nesse contexto, é uma aplicação diferenciável $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$, com I um intervalo aberto, exceto se for comentado sobre outro tipo de intervalo (quando os intervalos não são abertos consideraremos as derivadas laterais). Além disso vamos supor que α é uma aplicação C^∞ , exceto se houver menção em contrário. A curva α é dita regular se dado $t \in I$ temos $\alpha'(t) \neq 0$.

Definição 4.1.1. Seja α uma curva em $\mathbb{R}^{2,1}$. Dizemos que α é tipo-espaço (resp. tipo-tempo, tipo-luz) em $t \in I$ se $\alpha'(t)$ é um vetor tipo-espaço (resp. tipo-tempo, tipo-luz). Diremos que α é tipo-espaço (resp. tipo-tempo, tipo-luz) se for em todos os pontos de I .

As propriedades de ser tipo-tempo ou tipo-espaço em um ponto é uma propriedade estável, no sentido em que os pontos $t \in I$ tais que $\alpha'(t)$ é tipo-tempo ou tipo-espaço é um aberto do intervalo I .

Outra propriedade causal é que todas as curvas tipo-tempo ou tipo-luz são regulares. Basta observar a definição no caso tipo-luz e que $g(0,0) = 0$ para o caso tipo-tempo.

Agora vamos dar alguns exemplos de curvas planas (contidas em um subespaço afim) ou não, e suas estruturas causais.

Exemplo 4.1.2. Sejam $p, v \in \mathbb{R}^{2,1}$, $r > 0$ e $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$. Curvas planas:

- (i) $\alpha(t) = p + tv$ é do mesmo tipo que v .
- (ii) O círculo $\alpha(t) = p + r(\cos t, \sin t, 0)$ é tal que $\alpha'(t) = r(-\sin t, \cos t, 0)$ e disso $g(\alpha'(t), \alpha'(t)) = r^2 > 0$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e portanto α é tipo-espaço.
- (iii) A hipérbole $\alpha(t) = p + r(0, \sinh t, \cosh t)$ é tipo-espaço.
- (iv) A hipérbole $\alpha(t) = p + r(0, \cosh t, \sinh t)$ é tipo-tempo.
- (v) A parábola $\alpha(t) = (t, t^2, t^2)$ é do tipo-espaço. De fato, $g(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 1 > 0$.

Curvas não planas:

- (vi) A hélice $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, at)$, com $a \neq 0$. $\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, a)$ e disso $g(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 1 - a^2$.

(vii) $\alpha(t) = (at, \sinh t, \cosh t)$ e disso $\alpha'(t) = (a, \cosh t, \sinh t)$, logo $g(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 1 + a^2 > 0$ e portanto é tipo-espaço.

Um resultado de caráter causal é o seguinte.

Proposição 4.1.3. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma curva regular fechada de $\mathbb{R}^{2,1}$ contida no plano afim P .

1. Se α é tipo-espaço, então P é tipo-espaço.
2. α não pode ser tipo-tempo ou tipo-luz.

Demonstração. 1. Podemos supor que P é um espaço vetorial de dimensão 2. Seja $P = \text{span} \langle u, v \rangle$, então $\alpha(t) = \lambda(t)u + \mu(t)v$. Como α é fechada, temos $\lambda(a) = \lambda(b)$ e $\mu(a) = \mu(b)$. Pelo teorema de Rolle, existem $t_1, t_2 \in (a, b)$ tais que $\lambda'(t_1) = \mu'(t_2) = 0$. Assim $\alpha'(t_1) = \mu'(t_1)v$ e $\alpha'(t_2) = \lambda'(t_2)u$ são tipo-espaço e não nulos, logo u e v são tipo-espaço.

2. Seja $P = \text{span} \langle u, v \rangle$ e podemos supor u e v ortogonais. Suponha que α é tipo-tempo. De modo análogo ao item anterior, temos que u e v são tipo-tempo e disso P seria um subespaço negativo definido de dimensão 2, uma contradição com o fato de que o índice de g é 1.

Supondo α tipo-luz, temos que u e v são tipo-luz e nesse caso g seria nula em P , uma contradição. ■

Lema 4.1.4. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ uma curva regular tipo-tempo ou tipo-espaço, então existe $\varphi : J \rightarrow I$ um difeomorfismo tal que $\beta = \alpha \circ \varphi$ é tal que $|\beta'(s)| = 1$. Neste caso dizemos que β é parametrizado por comprimento de arco.

Demonstração. Vamos supor α do tipo-tempo. Assim fixado $t_0 \in I$ e definindo $s : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(u)| du$, assim $s'(t) > 0$ para todo $t \in I$. Logo s é um difeomorfismo sobre o intervalo $J = s(I)$ e pondo $\varphi = s^{-1}$ temos o resultado. ■

Lema 4.1.5. Seja α uma curva tipo-luz em $\mathbb{R}^{2,1}$. Se $|\alpha''(t)| \neq 0$ para todo $t \in I$, então existe um difeomorfismo $\varphi : J \rightarrow I$ tal que $\beta = \alpha \circ \varphi$ é tal que $|\beta''(s)| = 1$. Nesse caso dizemos que β é parametrizada por pseudo-comprimento de arco.

Demonstração. Não podemos ter $\alpha''(t_0)$ tipo-luz para algum t_0 , pois $|\alpha''(t_0)| \neq 0$. Como $g(\alpha'(t), \alpha'(t)) = 0$ temos que $g(\alpha''(t), \alpha'(t)) = 0$. Disso fixado $t_0 \in I$, $\text{span} \langle \alpha'(t_0), \alpha''(t_0) \rangle$ é degenerado e de dimensão 2, então não podemos ter $\alpha''(t_0)$ tipo-tempo, logo $\alpha''(t_0)$ é tipo-espaço. Como $g(\alpha''(t), \alpha''(t))$ não possui zeros e $g(\alpha''(t_0), \alpha''(t_0)) > 0$, segue do teorema do valor intermediário que $g(\alpha''(t), \alpha''(t)) > 0$ para todo $t \in I$. Assim α' é uma curva tipo-espaço e portanto do lema anterior segue o resultado. ■

4.2 Curvatura das curvas em duas dimensões

Vamos considerar as curvas em $\mathbb{R}^{1,1}$. Se considerarmos uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$ tipo-luz, então $\alpha'(t)$ é tipo-luz para todo $t \in I$. Porém o cone em $\mathbb{R}^{1,1}$ é desconexo e cada componente conexa é uma semireta, segue que $\alpha'(t)$ tem direção constante e portanto α é um segmento de reta. Assim é trivial o estudo deste caso.

Suponha então α uma curva tipo-tempo ou tipo-espaço parametrizada por comprimento de arco. Assim pondo $\alpha'(s) = t(s)$ temos $g(t(s), t(s)) = \varepsilon$ com $\varepsilon = 1$ se $t(s)$ é tipo-espaço ou $\varepsilon = -1$ se $t(s)$ é tipo-tempo e disso $t'(s)$ é ortogonal a $t(s)$ em qualquer um dos casos.

Vamos dividir nos dois casos:

1. Se $t(s)$ é tipo-espaço então considere $n(s)$ tal que $(t(s), n(s))$ é base ortonormal positiva. De forma equivalente, existe uma isometria linear positiva que leva (e_1, e_2) em $(t(s), n(s))$.
2. Se $t(s)$ é tipo-tempo então considere $n(s)$ tal que $(n(s), t(s))$ é base ortonormal positiva. De forma equivalente, existe uma isometria linear positiva que leva (e_1, e_2) em $(n(s), t(s))$.

Definindo $g(t(s), t(s)) = \varepsilon$, dependendo do caráter causal de α , teremos que $g(n(s), n(s)) = -\varepsilon$. Assim definimos a curvatura $k(s)$ satisfazendo $t'(s) = k(s)n(s)$. Assim $k(s) = -\varepsilon g(t'(s), n(s))$. Como $n(s)$ tem norma constante, segue que $n'(s)$ é ortogonal a $n(s)$, portanto é um múltiplo de $t(s)$. Além disso derivando a expressão $g(t(s), n(s)) = 0$ temos $g(n'(s), t(s)) = -g(t'(s), n(s)) = -k(s)$ e podemos concluir que vale as seguintes fórmulas de Frenet:

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) \end{cases}$$

Agora vamos deduzir uma fórmula da curvatura que não depende da parametrização por comprimento de arco.

Suponha que α é uma curva tipo-tempo ou tipo-espaço e β sua reparametrização por comprimento de arco. Assim:

$$\begin{aligned} \alpha(u) = \beta(s(u)) &\Rightarrow \alpha'(u) = \beta'(s(u)) \cdot s'(u) = t(s(u)) \cdot s'(u) \\ \alpha''(u) &= t'(s(u)) \cdot (s'(u))^2 + t(s(u)) \cdot s''(u) = k(u) \cdot n(s(u)) \cdot (s'(u))^2 + t(s(u)) \cdot s''(u) \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \det(\alpha'(u), \alpha''(u)) &= \det(t(s(u)) \cdot s'(u), k(u) \cdot n(s(u)) \cdot (s'(u))^2 + t(s(u)) \cdot s''(u)) \Rightarrow \\ \det(\alpha'(u), \alpha''(u)) &= k(u) \cdot (s'(u))^3 \cdot \det(t(s(u)), n(s(u))) = k(u) \cdot (s'(u))^3 \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Onde $\varepsilon = 1$ se α é tipo-espaço e $\varepsilon = -1$ se α é tipo-tempo. Portanto:

$$k(u) = \varepsilon \frac{\det(\alpha'(u), \alpha''(u))}{|\alpha'(u)|^3}$$

Note que $k(u)$ é invariante por reparametrização. E assim temos uma fórmula independente da parametrização da curva.

Esta fórmula é interessante, pois k é um invariante geométrico, logo podemos descrever a geometria da curva sem necessidade de uma parametrização particular.

Além de k ser um invariante geométrico, temos que dadas duas curvas parametrizadas por comprimento de arco e mesma curvatura, segue que existe uma isometria própria que leva uma curva em outra.

Mais precisamente vale o seguinte teorema.

Teorema 4.2.1. Seja $k : I \rightarrow \mathbb{R}^{1,1}$ uma aplicação diferenciável. Então existem curvas parametrizadas por comprimento de arco tipo-tempo, tipo-espaço com k sua curvatura. Além disso se houver outra curva com mesma curvatura então existe uma isometria de $\mathbb{R}^{1,1}$ que leva uma curva na outra.

4.3 Curvatura das curvas em três dimensões

A curvatura e a torção é a parte fundamental da teoria local das curvas em $\mathbb{R}^{2,1}$. Vamos agora construir o triedro de Frenet em cada caso.

Vamos considerar agora curvas parametrizadas por comprimento de arco, ou por pseudo-comprimento de arco, nas curvas tipo-luz. Além disso vamos supor que α'' não se anula.

Note que definindo o vetor tangente $t = \alpha'$ temos $g(t', t) = 0$ quando α é parametrizada por comprimento de arco.

4.3.1 Caso tipo-tempo

Suponha que α é uma curva tipo-tempo. Então como $t'(s) \neq 0$ temos que $t'(s)$ é um vetor tipo-espaço, ortogonal a $t(s)$. Definindo a curvatura $k(s) = |t'(s)|$ temos um único vetor $n(s)$ que satisfaz $t'(s) = k(s)n(s)$ para todo $s \in I$. O vetor $n(s)$ é chamado de vetor normal de α em s .

Definimos também $b(s)$ a binormal de α em s dada por:

$$b(s) = t(s) \wedge n(s).$$

Assim $b(s)$ é um vetor tipo-espaço unitário, pois é o produto vetorial de vetores tipo-tempo e tipo-espaço unitários. Além disso $\det(n(s), b(s), t(s)) = \det(t(s), n(s), b(s)) = g(b(s), b(s)) = 1$.

Assim em cada ponto $s \in I$ temos uma base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^{2,1}$ dada por $(n(s), b(s), t(s))$ que chamamos de triedro de Frenet da curva α em s . Definimos a torção $\tau(s) = g(b'(s), n(s))$.

Teremos as seguintes relações:

$$\begin{cases} t'(s) = & k(s)n(s) \\ n'(s) = & k(s)t(s) - \tau(s)b(s) \\ b'(s) = & \tau(s)n(s) \end{cases}$$

4.3.2 Caso tipo-espaço

Suponha que α é uma curva tipo-espaço. Há três possibilidades para a curva dependendo do caráter causal de $t'(s)$:

1. Suponha que $t'(s)$ é tipo-espaço. Defina $k(s) = |t'(s)|$, $n(s)$ tal que $t'(s) = k(s)n(s)$ e $b(s) = -t(s) \wedge n(s)$. Dado $s \in I$ temos que $(t(s), n(s), b(s))$ é base positiva de $\mathbb{R}^{2,1}$. Definindo $\tau(s) = g(b'(s), n(s))$ temos:

$$\begin{cases} t'(s) = & k(s)n(s) \\ n'(s) = & -k(s)t(s) + \tau(s)b(s) \\ b'(s) = & \tau(s)n(s) \end{cases}$$

2. Suponha que $t'(s)$ é tipo-tempo. Defina $k(s) = |t'(s)|$, $n(s)$ tal que $t'(s) = k(s)n(s)$ e $b(s) = t(s) \wedge n(s)$. Dado $s \in I$ temos que $(b(s), t(s), n(s))$ é base positiva de $\mathbb{R}^{2,1}$. Definindo $\tau(s) = -g(b'(s), n(s))$ temos:

$$\begin{cases} t'(s) = & k(s)n(s) \\ n'(s) = & k(s)t(s) + \tau(s)b(s) \\ b'(s) = & \tau(s)n(s) \end{cases}$$

Todas as curvas dos casos acima são chamadas de curvas de Frenet.

3. Suponha que $t'(s)$ é tipo-luz. Defina $t'(s) = n(s)$ e $b(s)$ como sendo o único vetor tipo-luz tal que $g(n(s), b(s)) = 1$ e $g(t(s), b(s)) = 0$.

Como $g(n(s), n(s)) = 0$ segue que $g(n'(s), n(s)) = 0$ e como $W = \text{span}\langle n(s) \rangle$ é tipo-luz, temos que $W \cap W^\perp = W$, logo $n'(s) = \tau(s)n(s)$ para cada $s \in I$. Temos que $g(n(s), b(s)) = 1$ e $g(t(s), b(s)) = 0$, logo $g(n(s), b'(s)) = -g(n'(s), b(s)) = -\tau(s)$ e $g(b'(s), t(s)) = -g(t'(s), b(s)) = -g(n(s), b(s)) = -1$. Assim temos:

$$\begin{cases} t'(s) = & n(s) \\ n'(s) = & \tau(s)n(s) \\ b'(s) = & -t(s) - \tau(s)b(s) \end{cases}$$

Note que não definimos a curvatura. Nesse caso chamamos τ de pseudo-torção ao invés de torção.

4.3.3 Caso tipo-luz

Seja α uma curva tipo-luz parametrizada por pseudo-comprimento de arco. Seja $t'(s) = n(s)$ e como $n(s)$ é tipo-espaço, existe único vetor $b(s)$ ortogonal a $n(s)$ tal que $g(t(s), b(s)) = 1$, que será a binormal. Assim temos:

$$\begin{cases} t'(s) = & n(s) \\ n'(s) = & -\tau(s)t(s) - b(s) \\ b'(s) = & \tau(s)n(s) \end{cases}$$

Nesse caso também não definimos curvatura e chamamos τ de pseudo-torção.

4.4 Invariantes e propriedades das curvas

Assim como na geometria diferencial clássica, a curvatura e torção tem algumas propriedades em comum com a geometria no espaço de Minkowski. Temos que a curvatura e a torção, ou somente pseudo-torção, são invariantes geométricos, isto é, dadas duas curvas parametrizadas por comprimento de arco (ou pseudo-comprimento de arco) α, β tais que $\beta = f \circ \alpha$, com f uma isometria própria em $\mathbb{R}^{2,1}$, segue que as curvaturas e torções, ou pseudo-torção, coincidem.

Além disso, se duas curvas parametrizadas por comprimento de arco (ou pseudo-comprimento de arco) pertencem ao mesmo caso e subcaso acima, tem mesma torção e curvatura então diferem por uma isometria própria.

Assim como no plano temos fórmulas para os casos em que α é tipo-tempo ou no caso que α é tipo-espaço com $t'(s)$ tipo-tempo ou tipo-espaço.

Assim se as fórmulas de Frenet, para o respectivo caso de curva parametrizada por comprimento de arco, são da forma

$$\begin{cases} t'(s) = & k(s)n(s) \\ n'(s) = & \varepsilon k(s)t(s) + \delta \tau(s)b(s) \\ b'(s) = & \tau(s)n(s) \end{cases}$$

então teremos:

$$k(t) = \frac{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3} \text{ e } \tau(t) = \delta \cdot \frac{g(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t), \alpha'''(t))}{|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)|^2}$$

Vamos mostrar que k e $|\tau|$ são invariantes geométricos.

Teorema 4.4.1. Dada uma curva de Frenet α , sua curvatura é invariante pela ação do grupo de Poincaré e a torção não varia a menos de sinal, dependendo da orientação da isometria. No caso em que a curva é tipo-espaço com vetor normal tipo-luz ou quando a curva é tipo-luz, temos que a pseudo-torção é invariante por isometrias.

Demonstração. Seja T um elemento do grupo de Poincaré, então existem $A \in O(2, 1)$ e $b \in \mathbb{R}^{2,1}$ tais que $T(x) = Ax + b$. Seja α uma curva parametrizada por comprimento de arco e $\beta = T \circ \alpha$. Então denotando $\bar{k}, \bar{\tau}, \bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ a curvatura, a torção e as componentes do triedro de Frenet de β e k, τ, t, n, b a curvatura, a torção e as componentes do triedro de Frenet de α , segue que

$$\bar{t} = At, \quad \bar{n} = An, \quad \bar{b} = \det(A) \cdot Ab.$$

Assim $\bar{k} = k$ e $\bar{\tau} = \det(A) \cdot \tau$.

Supondo α tipo-luz, teremos $\bar{t} = At$ e $\bar{n} = \bar{t}' = At' = An$ e como \bar{b} é o único vetor ortogonal a \bar{n} tal que $g(\bar{b}, \bar{t}) = 1$ segue que $Ab = \bar{b}$. Assim $\bar{\tau} = \tau$. O caso em que a curva é tipo-espaço com vetor normal tipo-luz ou quando a curva é tipo-luz é análogo. ■

Teorema 4.4.2. Sejam $k, \tau : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ aplicações diferenciáveis com $k(s) > 0$ para todo $s \in I$. Então existem curvas parametrizadas por comprimento de arco tipo-tempo, tipo-espaço com normal tipo-espaço, e tipo-espaço com normal tipo-tempo com k sua curvatura e τ sua torção.

Demonstração. Vamos mostrar no caso que α é tipo-tempo e assim a demonstração dos outros casos é análoga, somente adaptando as condições iniciais. Seja $s_0 \in I$, e considere o sistema

$$\begin{cases} t'(s) = & k(s)n(s) \\ n'(s) = & k(s)t(s) - \tau(s)b(s) \\ b'(s) = & \tau(s)n(s) \end{cases}$$

com condição inicial $t(s_0) = e_3$, $n(s_0) = e_1$ e $b(s_0) = e_2$. Então como esse sistema é linear, existe única solução $(n(s), b(s), t(s))$ definida em todo $s \in I$. Definindo $\alpha(s) = \int_{s_0}^s t(u)du$ vamos mostrar que α é tipo-tempo com curvatura k e torção τ . Definindo

$$\begin{aligned} f_1(s) &= g(t(s), t(s)) \\ f_2(s) &= g(n(s), n(s)) \\ f_3(s) &= g(b(s), b(s)) \\ f_4(s) &= g(t(s), n(s)) \\ f_5(s) &= g(t(s), b(s)) \\ f_6(s) &= g(n(s), b(s)) \end{aligned}$$

Estas funções satisfazem o sistema

$$\begin{cases} f_1' = & 2kf_4 \\ f_2' = & 2kf_4 - 2\tau f_6 \\ f_3' = & 2\tau f_6 \\ f_4' = & kf_2 + kf_1 - \tau f_5 \\ f_5' = & kf_6 + \tau f_4 \\ f_6' = & kf_5 - \tau f_3 + \tau f_2 \end{cases}$$

com condições iniciais em $s = s_0$ sendo $(-1, 1, 1, 0, 0, 0)$. As funções constantes igual a condição inicial são soluções desse sistema e como o sistema é linear, segue que estas soluções são soluções em todo intervalo I . Isto implica que $(n(s), b(s), t(s))$ é uma base ortonormal para todo $s \in I$. Podemos deduzir que este será o triedro de Frenet de α , logo α possui curvatura k e torção τ . ■

Teorema 4.4.3. Seja $\tau : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ uma aplicação diferenciável. Então existem curvas parametrizadas por pseudo-comprimento de arco tipo-luz, e tipo-espaco com normal tipo-luz com τ sua pseudo-torção.

Demonstração. A demonstração desse resultado é análogo ao do teorema anterior, somente adaptando a condição iniciais do triedro para uma base nula e as respectivas condições iniciais no segundo sistema de equações. ■

Para simplificar as hipóteses do próximo teorema vamos enunciar uma definição.

Definição 4.4.4. Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ duas curvas parametrizadas por comprimento de arco ou pseudo-comprimento de arco. Dizemos que α e β tem mesmo caráter causal se os vetores do triedro de Frenet das respectivas curvas possuírem mesmo caráter causal.

Teorema 4.4.5. Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ duas curvas parametrizadas por comprimento de arco ou pseudo-comprimento de arco. Se α e β tem mesmo caráter causal, mesma curvatura e torção, ou mesma pseudo-torção, então existe uma isometria $T : \mathbb{R}^{2,1} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ tal que $\beta = T \circ \alpha$.

Demonstração. Sejam t, n, b o triedro de Frenet de α , $\bar{t}, \bar{n}, \bar{b}$ o triedro de Frenet de β , k e τ a curvatura e torção comum (ou somente pseudo-torção comum) das duas curvas. Seja $s_0 \in I$ fixado e $A \in O(2, 1)$ que leva a base $(t(s_0), n(s_0), b(s_0))$ na base $(\bar{t}(s_0), \bar{n}(s_0), \bar{b}(s_0))$. Pondo

$b = \beta(s_0) - A(\alpha(s_0))$ temos a isometria $T(x) = Ax + b$. Temos que a curva $\gamma = T \circ \alpha$ satisfaz o mesmo sistema de equações de Frenet e está sujeito às mesmas condições iniciais. Assim ambas tem o mesmo triedro de Frenet e portanto são a mesma curva. Assim $\beta = T \circ \alpha$. ■

Agora vamos dar algumas aplicações da teoria e exemplos de curvas.

Exemplo 4.4.6. 1. Seja $\alpha(s) = r(\cos(s/r), \sin(s/r), 0)$, $r > 0$. Então

$$t(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{r}\right), \cos\left(\frac{s}{r}\right), 0\right) \text{ e } t'(s) = \left(\frac{1}{r}\right) \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right), 0\right)$$

Então $k = 1/r$ e

$$n(s) = \left(-\cos\left(\frac{s}{r}\right), -\sin\left(\frac{s}{r}\right), 0\right) \text{ e } b(s) = (0, 0, 1).$$

Como $b'(s) = 0$ segue que $\tau(s) = 0$.

2. Seja $\alpha(s) = r(0, \sinh(s/r), \cosh(s/r))$. Então

$$t(s) = \left(0, \cosh\left(\frac{s}{r}\right), \sinh\left(\frac{s}{r}\right)\right) \text{ e } t'(s) = \frac{1}{r} \left(0, \sinh\left(\frac{s}{r}\right), \cosh\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

Logo $k = 1/r$ e

$$n(s) = \left(0, \sinh\left(\frac{s}{r}\right), \cosh\left(\frac{s}{r}\right)\right) \text{ e } b(s) = (1, 0, 0).$$

Então $\tau(s) = 0$.

3. Seja $\alpha(s) = r(0, \cosh(s/r), \sinh(s/r))$. Então

$$t(s) = \left(0, \sinh\left(\frac{s}{r}\right), \cosh\left(\frac{s}{r}\right)\right) \text{ e } t'(s) = \frac{1}{r} \left(0, \cosh\left(\frac{s}{r}\right), \sinh\left(\frac{s}{r}\right)\right)$$

Logo $k = 1/r$ e

$$n(s) = \left(0, \cosh\left(\frac{s}{r}\right), \sinh\left(\frac{s}{r}\right)\right) \text{ e } b(s) = (-1, 0, 0).$$

Então $\tau(s) = 0$.

4. Sejam $a, b, c > 0$ tais que $a^2 + b^2 = c^2$ e $\alpha(s) = (as/c, b \cosh(s/c), b \sinh(s/c))$. Então

$$t(s) = \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c} \sinh\left(\frac{s}{c}\right), \frac{b}{c} \cosh\left(\frac{s}{c}\right)\right) \text{ e } t'(s) = \frac{b}{c^2} \left(0, \cosh\left(\frac{s}{c}\right), \sinh\left(\frac{s}{c}\right)\right)$$

Segue que $k = b/c^2$ e

$$n(s) = \left(0, \cosh\left(\frac{s}{c}\right), \sinh\left(\frac{s}{c}\right)\right) \text{ e } b(s) = \left(-\frac{b}{c}, -a \sinh\left(\frac{s}{c}\right), -a \cosh\left(\frac{s}{c}\right)\right)$$

Segue que $\tau(s) = a/c^2$.

5. Seja $\alpha(s) = (s, s^2/r, s^2/r)$. Esta curva é tipo-espaco com

$$t(s) = \left(1, \frac{2s}{r}, \frac{2s}{r}\right) \text{ e } t'(s) = n(s) = \left(0, \frac{2}{r}, \frac{2}{r}\right)$$

Temos que $n'(s) = 0$ logo $\tau(s) = 0$ e

$$b(s) = \left(-s, \frac{r}{4} - \frac{s^2}{r}, -\frac{r}{4} - \frac{s^2}{r}\right)$$

6. Considere a curva tipo-luz $\alpha(s) = 1/r^2(\cosh(rs), rs, \sinh(rs))$, então

$$t(s) = \frac{1}{r}(\sinh(rs), 1, \cosh(rs)) \text{ e } t'(s) = n(s) = (\cosh(rs), 0, \sinh(rs))$$

Assim α é parametrizada por pseudo-comprimento de arco. Temos então

$$b(s) = \frac{r}{2}(-\sinh(rs), 1, -\cosh(rs)) \text{ e } b'(s) = -\frac{r^2}{2}n(s)$$

Logo $\tau(s) = -r^2/2$.

Teorema 4.4.7. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ uma curva tipo-tempo, tipo-espaço com normal tipo-tempo ou tipo-espaço. Então α está contida em um plano se, e somente se, τ é nula.

A demonstração é análoga ao caso euclidiano.

Teorema 4.4.8. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ uma curva tipo-luz parametrizada. Então:

1. Se α é parametrizada por pseudo-comprimento de arco e tem pseudo-torção nula, então a curva está em um plano.
2. Se α está em um plano, então é uma reta.

Demonstração.

1. Suponha que $\tau = 0$. Então $n'(s) = 0$ para todo $s \in I$, logo $n(s) = n_0$. Temos que a função $g(\alpha(s) - \alpha(s_0), n_0) = 0$, pois se anula em $s = s_0$ e $g(\alpha(s) - \alpha(s_0), n_0)' = g(t(s), n_0) = 0$. Assim $\alpha(s) - \alpha(s_0)$ é ortogonal a n_0 para todo s , logo α está contida em um plano paralelo ao ortogonal a n_0 .
2. Se α está em um plano então este plano é tipo-tempo ou tipo-luz. Em ambos os casos o vetor tangente t está na intersecção do cone de luz com um espaço vetorial de dimensão 2 tipo-luz ou tipo-tempo. Então t estará em uma das componentes conexas deste conjunto, que são retas. Logo t tem um direção fixa e portanto α está em uma reta. ■

No caso em que α é tipo-espaço com vetor normal tipo-tempo a segunda implicação é falsa. De fato, seja $\alpha(s) = (s, s^3/3, s^3/3)$, $s > 0$ está no plano $z = y$. Temos $t(s) = (1, s^2, s^2)$ e $t'(s) = n(s) = (0, 2s, 2s)$ e temos $n'(s) = (0, 2, 2) = \tau(s)n(s)$, logo $\tau(s) = 1/s$.

Teorema 4.4.9. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ uma curva tipo-espaço ou tipo-tempo em um plano que não é tipo-luz. Então α está contido em um círculo se, e somente se, α tem curvatura constante não nula.

Demonstração. Suponha que α é um círculo. Então podemos supor, a menos de uma isometria que α é um círculo euclidiano no plano $x_3 = 0$ ou uma hipérbole no plano $x_1 = 0$, e assim teremos que a curvatura é constante e não nula.

Reciprocamente, suponha que α tem curvatura constante e parametrizada por comprimento de arco, podemos levar o plano onde α é está contida no plano $x_3 = 0$ ou no plano $x_1 = 0$. Quando o plano é $x_3 = 0$ temos o caso euclidiano de curvatura constante, que é o círculo, pois qualquer curva nesse plano pode ser escrito da forma

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \left(\int_{s_0}^s \cos \theta(t) dt, \int_{s_0}^s \sin \theta(t) dt, 0 \right)$$

onde $\theta(s) = \theta(s_0) + \int_{s_0}^s k(t)dt$ e nesse caso α é um círculo com curvatura k . Se for o caso em que α está contida no plano $x_1 = 0$ utilizando a noção de ângulo hiperbólico podemos ter α tipo-tempo ou tipo-espaço, respectivamente, é da forma

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \left(0, \int_{s_0}^s \sinh \theta(t)dt, \int_{s_0}^s \cosh \theta(t)dt \right) \text{ ou}$$

$$\alpha(s) = \alpha(s_0) + \left(0, \int_{s_0}^s \cosh \theta(t)dt, \int_{s_0}^s \sinh \theta(t)dt \right)$$

com $\theta(s) = \theta(s_0) + \int_{s_0}^s k(t)dt$. Nesses dois casos α é parte de uma hipérbole. Então em todos os casos α será parte de um círculo. ■

Definição 4.4.10. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ uma curva parametrizada por comprimento de arco, ou pseudo-comprimento de arco. Então dizemos que α é uma hélice se existe um vetor $v \in \mathbb{R}^{2,1}$ tal que $g(t(s), v)$ é constante. Qualquer reta paralela ao vetor v é chamada de eixo da hélice.

Trivialmente qualquer curva plana é uma hélice. Então vamos supor sempre que necessário que a curva não é plana.

Assim como no caso euclideano temos o seguinte teorema

Teorema 4.4.11. Seja α uma curva de Frenet, ou seja, o triedro é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{2,1}$ em cada ponto. Então α é hélice se, e somente se, τ/k é constante.

A demonstração é análoga ao caso euclideano. Resta analisar os outros casos.

Seja α uma curva tipo-espaço com vetor normal tipo-luz e $g(t(s), v) = a$ para algum $a \in \mathbb{R}$ e $v \in \mathbb{R}^{2,1}$, assim derivando a expressão temos $g(n(s), v) = 0$, assim usando suas componentes do triedro de Frenet e utilizando a métrica temos $v = at(s) + \lambda(s)n(s)$ para alguma função λ diferenciável. Tomando a derivada teremos $(a + \lambda' + \lambda\tau)n(s) = 0$ e portanto $\lambda' + \lambda\tau + a = 0$. Como esta equação diferencial é linear, segue que possui solução única dada uma condição inicial para λ . Tomando λ uma solução com condição inicial $\lambda(s_0) = 1$ e $a = 0$ teremos que $v(s) = \lambda n(s)$ é constante igual a $v \in \mathbb{R}^{2,1}$ fixo. E $g(t(s), v(s)) = 0$ uma constante, portanto qualquer α uma curva tipo-espaço com vetor normal tipo-luz é uma hélice.

Além disso tomando α uma curva tipo-luz com $g(t(s), v) = a$ com $a \neq 0$ teremos $g(n(s), v) = 0$. Então decompondo v nas componentes do triedro de Frenet teremos $v = \lambda(s)t(s) + ab(s)$ para alguma função λ . Derivando a expressão teremos $0 = \lambda't(s) + (\lambda + a\tau)n(s)$, logo λ é constante igual a algum $c \in \mathbb{R}$ e $c = -a\tau$ portanto τ é constante. Reciprocamente se τ é constante, então tomando $c = -\tau$ o vetor $v = ct(s) + b(s)$ é constante e $g(t(s), v) = g(t(s), b(s)) = 1$ uma constante, assim α é uma hélice.

Para fins de consulta, vamos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 4.4.12. Uma curva tipo-espaço com vetor normal tipo-luz sempre é uma hélice. Uma curva tipo-luz é uma hélice se, e somente se, τ é constante.

Capítulo 5

Superfícies no espaço de Minkowski

Assim como a teoria das curvas no espaço de Minkowski difere de forma expressiva da teoria de curvas em \mathbb{R}^3 , o mesmo também ocorre para as superfícies.

Nessa seção queremos dar uma introdução a geometria Riemanniana e Pseudo-Riemanniana dando algumas definições e resultados topológicos ou geométricos iniciais das superfícies em $\mathbb{R}^{2,1}$, onde será em geral uma adaptação para a métrica de Minkowski. Além disso a seção conterá alguns exemplos base na geometria Riemanniana e Pseudo-Riemanniana.

5.1 Superfícies no espaço de Minkowski

Aqui vamos considerar superfícies mergulhadas em $\mathbb{R}^{2,1}$, isto é, superfícies com a topologia de subespaço. Porém poderíamos tratar de superfícies imersas em $\mathbb{R}^{2,1}$ da mesma maneira.

Definição 5.1.1. Seja S uma superfície, então diremos que S é uma superfície tipo-tempo (resp. tipo-espaço, tipo-luz) se $T_p S$ é um subespaço tipo-tempo (resp. tipo-espaço, tipo-luz).

Exemplo 5.1.2. Vamos considerar os análogos a esfera no espaço de Minkowski:

1. Chamamos de pseudo-esfera o conjunto $S^{1,1}(p_0, R)$ de pontos p tais que $g(p - p_0, p - p_0) = R^2$ com $R > 0$, ou seja, um hiperbolóide de uma folha. Esta é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{2,1}$, pois é imagem inversa de valor regular. Dado $p \in S^{1,1}(p_0, R)$ teremos que $T_p S^{1,1}(p_0, R)$ é o conjunto de vetores ortogonais a $p - p_0$, e como $p - p_0$ é tipo-espaço temos que $T_p S^{1,1}(p_0, R)$ é tipo-tempo e portanto $S^{1,1}(p_0, R)$ é uma superfície tipo-tempo. No caso particular que $p_0 = 0$ e $R = 1$ chamamos esse espaço De Sitter e denotamos por $S^{1,1}$.
2. Considere \mathcal{C} o cone de luz. Seu espaço tangente em cada ponto é o conjunto de vetores ortogonais a p e portanto \mathcal{C} é uma superfície tipo-luz.
3. Seja $S^{2,0}(p_0, R)$ o conjunto de pontos tais que $g(p - p_0, p - p_0) = -R^2$ com $R > 0$. Seu espaço tangente em cada ponto p é o conjunto de vetores ortogonais a p e portanto $S^{2,0}(p_0, R)$ é uma superfície tipo-espaço. Além disso a componente conexa de $S^{2,0}(0, R)$ que contém o ponto $(0, 0, 1)$ é denotado por H_R^2 e esta será um exemplo base para geometria Riemanniana, que é o análogo hiperbólico de S^2 em \mathbb{R}^3 , como iremos mostrar no decorrer do texto.
4. Seja S o gráfico de uma função $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^{2,1}$. Então utilizando a parametrização $\phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, temos que o determinante da métrica com relação a base (φ_u, φ_v) é $1 - f_u^2 - f_v^2$, assim S é tipo-espaço (resp. tipo-tempo, tipo-luz) se, e somente se, $f_u^2 + f_v^2 < 1$ (resp. $f_u^2 + f_v^2 > 1$, $f_u^2 + f_v^2 = 1$).

Observação 5.1.3. Relembrando que uma superfície S é dita orientável se existe uma escolha de orientação para cada espaço tangente tal que para cada ponto $p \in S$ existe um referencial

(contínuo) (E_i) numa vizinhança U de p , onde para cada $q \in U$, $(E_i|_q)$ é orientado positivamente em T_qS .

Outra observação é que no contexto **físico** um **referencial** em U é sinônimo de um **sistema de coordenadas** em U , aqui no contexto de **variedades**, **referencial** é sinônimo de conjunto ordenado de **campos de vetores** que formam uma **base** do espaço tangente em **cada ponto** de U . Ainda no contexto de variedades, chamaremos de **referencial local** (resp. **global**), em uma variedades M , um referencial definido em um aberto U (resp. M).

Assim podemos provar a seguinte proposição.

Proposição 5.1.4. Uma superfície S tipo-tempo ou tipo-espaço é orientável se, e somente se, para cada ponto existe um campo contínuo de vetores normais não nulos.

Demonstração. De fato, seja $N : S \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ um campo contínuo de vetores normais não nulos. Então definindo a orientação tal que a base (u_1, u_2) de T_pS é positiva se $g(u_1 \wedge u_2, N_p) > 0$, tomando uma carta $x = (x^1, x^2)$ em uma vizinhança conexa U ao redor de p , podemos supor que (∂_1, ∂_2) seus vetores coordenados formam uma base positiva em p , caso contrário poderíamos tomar o referencial local $(-\partial_1, \partial_2)$. Pela continuidade do referencial e de N , e também pela conexidade de U temos que $\det(\partial_1, \partial_2, N) > 0$ em U , segue que este forma uma base positiva numa vizinhança de p . Assim S é orientável.

Reciprocamente, supondo que S é orientável, então dado p um ponto existe (E_1, E_2) um referencial local orientado positivamente ao redor de p , definiremos $N = E_1 \wedge E_2 / |E_1 \wedge E_2|$ numa vizinhança de p . O campo N não depende do referencial local, pois dado $(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2)$ outro referencial local orientado positivamente ao redor de p , e onde seus domínios se intersectam a matriz de mudança de base (E_1, E_2) para $(\tilde{E}_1, \tilde{E}_2)$, A , é contínua e $\det A > 0$. É fácil checar que $\tilde{E}_1 \wedge \tilde{E}_2 = \det A \cdot E_1 \wedge E_2$, logo as definições coincidem para os dois referenciais. Assim como estes referenciais são contínuos, segue que N é contínuo. ■

Observação 5.1.5. Mais precisamente o campo N da proposição anterior é diferenciável, em virtude da fórmula dada pela última implicação e que podemos tomar um referencial diferenciável ao redor de cada ponto (vetores coordenados das cartas). Essa aplicação, quando existe é chamada de aplicação normal de Gauss ou somente aplicação de Gauss, como no caso euclideano.

Outra observação é que vamos nos restringir às superfícies S tipo-tempo ou tipo-espaço quando estamos tratando da aplicação normal de Gauss, ou de alguma proposição que a envolva. Isso se deve ao fato se S for tipo-luz, teremos que o normal está contido no espaço tangente, então nesse caso não há uma escolha natural de base ortonormal, então diversas definições e resultados que dependem dessa escolha ou do vetor normal podem ser comprometidas.

Agora vamos obter um resultado topológico e causal das superfícies.

Proposição 5.1.6. Seja S uma superfície tipo-tempo, tipo-espaço ou tipo-luz. Se S é compacta, então é uma superfície com bordo.

Demonstração. Suponha que S superfície tipo-espaço (resp. tipo-tempo, tipo-luz) sem bordo, então tomando um vetor $v \in \mathbb{R}^{2,1}$ tipo-espaço (resp. tipo-tempo, tipo-luz). Então $f(p) = g(p, v)$ possui mínimo em um ponto $q \in \text{int}(S)$ e portanto é um ponto crítico de f , ou seja, $0 = df_q(w) = g(w, v)$ para todo $w \in T_qS$. Logo $v \in (T_qS)^\perp$, mas $(T_qS)^\perp$ tem dimensão 1 e é tipo-tempo (resp. tipo-espaço, tipo-luz), uma contradição. ■

Teorema 5.1.7. Toda superfície tipo-espaço é orientável.

Demonstração. Em cada vizinhança conexa coberta por uma carta, existe somente duas escolhas de campo contínuo de vetores normais, assim podemos escolher N tal que $g(N, e_3) < 0$. Dado um ponto $p \in S$ existe um único vetor N_p normal a T_pS tal que $g(N_p, e_3) < 0$ e em cada vizinhança conexa a aplicação $p \mapsto N_p$ é contínua. Portanto S é orientável. ■

5.2 A curvatura de superfícies

A curvatura foi desenvolvida com o intuito obter um invariante geométrico para superfícies e como uma maneira de descrever as curvas e superfícies. Posteriormente foram descobertas propriedades que relacionam a curvatura, um invariante geométrico, com invariantes topológicos.

Porém a curvatura em variedades Pseudo-Riemannianas tem o caráter de invariante geométrico, mas também é uma ferramenta para expressar as equações de Einstein, que relacionam a geometria com a física. Esta seção tem o intuito de introduzir essa ferramenta, e também discutir as diferenças do caso euclidiano.

Vamos introduzir as curvaturas normais no caso euclidiano. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva, numa superfície orientável S com campo de vetores normais N , parametrizada por comprimento de arco passando por $p \in S$ em $s_0 \in I$, então definimos a curvatura normal de α em p como sendo o comprimento, com sinal, da componente normal a superfície do vetor $t'(s_0)$. Ou seja, pondo $N(s) = N(\alpha(s))$ teremos que a **curvatura normal** é dada por $k_n = \langle N_p, t'(s_0) \rangle = \langle N(s_0), \alpha''(s_0) \rangle$.

Note que $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ para todo $s \in I$, logo $\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle + \langle N(s), \alpha''(s) \rangle = 0$, como $N'(s) = dN(\alpha'(s))$ temos que $k_n = -\langle dN(\alpha'(s_0)), \alpha'(s_0) \rangle$ que não depende da curva, somente do vetor velocidade $\alpha'(s_0)$ no ponto p . Assim definimos a forma quadrática $II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle$, chamada de segunda forma fundamental.

Uma interpretação dada para a $II_p(v)$ em \mathbb{R}^3 é que esta é a curvatura da curva dada pela intersecção do plano que passa pelo ponto p e tem direção N_p e v onde v é um vetor unitário, que será o vetor velocidade desta curva (quando parametrizada por comprimento de arco) no ponto p , e nesse caso coincide com a curvatura normal.

Uma proposição, que tem exatamente a mesma demonstração que em \mathbb{R}^3 , é que dN_p é um operador auto-adjunto em cada ponto $p \in S$. Assim chamamos de curvaturas principais o maior e o menor valor de $II_p(v)$ tomando vetores v unitários e estes coincidem com a maior e a menor curvatura de uma curva dada pela intersecção de planos normais a S em p . Como $-dN_p$ é auto-adjunto, então o máximo e o mínimo de II_p entre os vetores unitários são os seus autovalores k_1, k_2 e seus autovetores são os respectivos pontos de máximo e mínimo e_1, e_2 , e estes formam uma base ortonormal de $T_p S$, e estas são chamadas de direções principais.

Assim definimos a curvatura Gaussiana como sendo $K \doteq k_1 \cdot k_2$ e a curvatura média é dada por $H \doteq (k_1 + k_2)/2$. Assim temos como consequência que $K_p = \det(-dN_p)$ e $H_p = \text{tr}(-dN_p)/2$.

Um problema que pode ocorrer em $\mathbb{R}^{2,1}$ é que o operador $-dN_p$ não seja diagonalizável, pois o resultado que dado um operador auto-adjunto em um espaço vetorial V possui base ortonormal de autovetores só ocorre em espaços com produto interno como será mostrado no exemplo a seguir.

Exemplo 5.2.1. Seja $\alpha(s) = (as/c, b \sinh(s/c), b \cosh(s/c))$ com $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ com $a^2 + b^2 = c^2$ e $a, b, c > 0$. Considere a superfície construída tomando as semiretas com direção da tangente $t(s)$ a partir do ponto $\alpha(s)$, ou seja, $\sigma(u, v) = \alpha(u) + v \cdot t(u)$ com $v > 0$. Temos que $\sigma_u = \alpha'(u) + v \cdot t'(u) = t(u) + v \cdot k(u) \cdot n(u)$ e $\sigma_v = t(u)$, logo $\sigma_u \wedge \sigma_v = (t(u) + v \cdot k(u) \cdot n(u)) \wedge t(u) = v \cdot k(u) \cdot t(u) \wedge n(u)$, mas como $t(u)$ é tipo espaço e $n(u)$ tipo-tempo, segue que $b(u) = t(u) \wedge n(u)$ e assim $\sigma_u \wedge \sigma_v = -v \cdot k \cdot b(u)$ e uma escolha para o vetor normal é $N(u, v) = -\sigma_u \wedge \sigma_v / |\sigma_u \wedge \sigma_v| = b(u)$, logo a superfície é tipo-tempo. Temos que $d\sigma$ injetiva em cada ponto (u, v) e assim é localmente um mergulho, isto é, dado $u \in \mathbb{R}$ e $v > 0$, existe uma vizinhança (aberta) $V \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ de (u, v) tal que σ restrito a V define um homeomorfismo sobre $\sigma(V)$ e portanto um mergulho.

Assim $N_u = b'(u) = \tau(u) \cdot n(u)$, mas $\tau(s) = a/c^2$, logo $N_u = a \cdot n(u)/c^2$ e $N_v = 0$, logo o operador $-dN_{\sigma(u,v)}$ na base ortonormal $(t(u), n(u))$ do espaço tangente em $\sigma(u, v)$ se escreve da forma

$$-dN_{\sigma(u,v)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{a}{c^2} & 0 \end{pmatrix}$$

que não é diagonalizável com traço e determinante 0.

Na busca de generalizações poderíamos também definir a curvatura Gaussiana da mesma forma que no caso euclidiano, ou seja, que $K = \det(-dN_p)$. No próximo exemplo vamos mostrar que esta não seria uma boa definição. Para isso usaremos um exemplo de espaço hiperbólico, o disco de Poincaré.

Exemplo 5.2.2. Já mostramos que a superfície $H^2 \doteq H_1^2$ é uma superfície tipo-espaço. Vamos mostrar que H^2 é isométrico ao disco de Poincaré que denotaremos por B^2 , para evitar confusão com $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ o disco fechado de raio 1.

Mais precisamente, a projeção de B^2 , a partir do ponto $(-1, 0, 0)$, sobre H^2 é uma isometria. De fato, podemos obter o difeomorfismo $\varphi : B^2 \rightarrow H^2$, com

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1 - |x|^2)}(x, 1 + |x|^2) \text{ e } \varphi^{-1}(x, t) = \frac{x}{1 + t}.$$

E temos também que :

$$d\varphi_x(v) = \left(\frac{2v}{1 - |x|^2} + \frac{4x \langle v, x \rangle}{(1 - |x|^2)^2}, \frac{4 \langle v, x \rangle}{(1 - |x|^2)^2} \right)$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno euclidiano em \mathbb{R}^2 e $|\cdot|$ sua norma respectiva norma.

Sendo $\eta_x(u, v) = 4 \frac{\langle u, v \rangle}{(1 - |x|^2)^2}$ a métrica em B^2 , então:

$$\begin{aligned} (\varphi^*g)_x(v, v) &= \frac{4|v|^2}{(1 - |x|^2)^2} + \frac{16 \langle v, x \rangle^2}{(1 - |x|^2)^3} + \frac{16|x|^2 \langle v, x \rangle^2}{(1 - |x|^2)^4} - \frac{16 \langle v, x \rangle^2}{(1 - |x|^2)^4} \\ &= \frac{4|v|^2}{(1 - |x|^2)^2} + \frac{16 \langle v, x \rangle^2}{(1 - |x|^2)^4} (1 - |x|^2) + \frac{16|x|^2 \langle v, x \rangle^2}{(1 - |x|^2)^4} - \frac{16 \langle v, x \rangle^2}{(1 - |x|^2)^3} \\ &= \frac{4|v|^2}{(1 - |x|^2)^2} = \eta_x(v, v). \end{aligned}$$

Utilizando identidades de polarização segue que $\varphi^*g = \eta$ e portanto φ é isometria.

Assim, como queremos que a curvatura Gaussiana seja preservada por isometria, temos que a curvatura Gaussiana de B^2 é $K = -1$, como poderemos calcular, e portanto a mesma de H^2 . Por outro lado, a aplicação de Gauss em H^2 é $N(p) = p$ e dN_p é a aplicação identidade em H^2 , assim $\det(-dN_p) = 1$. Assim podemos ver que a curvatura de Gauss das superfícies em $\mathbb{R}^{2,1}$ em geral não coincide com a definição $K = \det(-dN_p)$ do espaço euclidiano.

A definição mais precisa de curvatura de Gauss, no sentido de recuperar a curvatura de Gauss para superfícies riemannianas no espaço de Minkowski, em superfícies $S \subset \mathbb{R}^{2,1}$ é $K \doteq \varepsilon \cdot \det(-dN_p)$, onde $\varepsilon = 1$ se S for tipo-tempo e $\varepsilon = -1$ se S for tipo-espaço. E de modo análogo definimos a curvatura média como $H \doteq \varepsilon \cdot \text{tr}(-dN_p)/2$. Assim para consulta iremos enunciar a definição:

Definição 5.2.3. Seja $S \subset \mathbb{R}^{2,1}$ uma superfície tipo-tempo ou tipo-espaço. Definimos a curvatura Gaussiana e curvatura média, respectivamente, como $K \doteq \varepsilon \cdot \det(-dN_p)$ e $H \doteq \varepsilon \cdot \text{tr}(-dN_p)/2$, onde $\varepsilon = 1$ se S for tipo-tempo e $\varepsilon = -1$ se S for tipo-espaço

A definição da curvatura Gaussiana será melhor justificada utilizando a teoria de variedades Pseudo-Riemannianas, fazendo um Teorema Egregium de Gauss para $\mathbb{R}^{2,1}$ e mostrando que essa definição é consistente com o que já tínhamos na geometria Riemanniana.

Definição 5.2.4. Suponha S é uma superfície orientável tipo-tempo ou tipo-espaço tal que o operador $-dN_p$ é diagonalizável e sejam $\lambda_1(p)$ e $\lambda_2(p)$ seus autovalores, então chamamos $\lambda_1(p)$ e $\lambda_2(p)$ de curvaturas de S em p .

Definição 5.2.5. Seja S uma superfície não degenerada e orientável. Dizemos que $p \in S$ é um ponto umbílico se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $g(-dN_p(u), v) = \lambda \cdot g(u, v)$ para qualquer $u, v \in T_pS$. Além disso, dizemos que S é uma superfície umbílica se todos os pontos são umbílicos.

Temos que $p \in S$ é um ponto umbílico se, e somente se, $-dN_p$ é diagonalizável e possui somente um autovalor. De fato, se (u_1, u_2) é base ortonormal de T_pS , então $g(-dN_p(u_1), u_2) = \lambda \cdot g(u_1, u_2) = 0$ assim $-dN_p(u_1) = \mu \cdot u_1$ além disso $\lambda = \lambda \cdot g(u_1, u_1) = g(-dN_p(u_1), u_1) = \mu \cdot g(u_1, u_1) = \mu$. Do mesmo modo mostramos que $-dN_p(u_2) = \lambda \cdot u_2$. Reciprocamente se $-dN_p$ é diagonalizável com um único autovalor λ , então existe uma base de autovetores (u_1, u_2) . Escrevendo um vetor $v = v^1 \cdot u_1 + v^2 \cdot u_2 \Rightarrow -dN_p(v) = \lambda \cdot v$ e temos:

$$g(-dN_p(v), w) = \lambda \cdot g(v, w).$$

Fixada uma base de T_pS , teremos que o polinômio característico de $-dN_p$ é $p(X) = X^2 - \text{tr}(-dN_p)X + \det(-dN_p) = X^2 - 2\varepsilon HX + \varepsilon K$ assim o discriminante desse polinômio é $\Delta = 4(H^2 - \varepsilon K)$. Assim:

1. Se $H^2 - \varepsilon K > 0$ temos que a aplicação $-dN_p$ possui dois autovalores e portanto é diagonalizável.
2. Se $H^2 - \varepsilon K < 0$ então a aplicação não é diagonalizável. Esse caso só ocorre em superfícies tipo-tempo, pois caso fosse tipo-espaço $-dN_p$ seria um operador auto-adjunto em um espaço com produto interno e portanto diagonalizável.
3. Se $H^2 - \varepsilon K = 0$ e S superfície tipo-tempo, então o operador pode ou não ser diagonalizável.

Exemplo 5.2.6.

1. Seja P um plano tipo-espaço ou tipo-tempo, então existe um vetor unitário v normal a P . Assim $N : P \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ com $N(p) = v$ é uma aplicação de Gauss para P e além disso $-dN_p = 0$, portanto é diagonalizável e $K = H = 0$.
2. $S^{2,0}(p_0, R)$ é uma superfície tipo-espaço e $N(p) = (p - p_0)/R$ é uma aplicação de Gauss. Assim $-dN_p(v) = -v/R$, logo $\lambda_1 = \lambda_2 = -1/R$, $H = 1/R$ e $K = -1/R^2$. De modo análogo a superfície $S^{1,1}(p_0, R)$ tem curvaturas $H = -1/R$ e $K = 1/R^2$.

Exemplo 5.2.7. Vamos agora considerar os cilindros em $\mathbb{R}^{2,1}$ como sendo o conjunto de todos os pontos equidistantes da sua respectiva projeção ortogonal com relação a uma reta que não é tipo-luz $\ell \subset \mathbb{R}^{2,1}$. Seja $p_0 \in \ell$ e u um vetor diretor unitário de ℓ , então a projeção ortogonal de um ponto p em relação a reta ℓ é o ponto $\bar{p} \in \ell$ tal que $g(p - \bar{p}, u) = 0$ temos que $\bar{p} = p_0 + \lambda \cdot u$, logo $g(p - p_0, u) - \lambda \cdot g(u, u) = 0$, pondo $g(u, u) = \delta$, temos que $\lambda = \delta \cdot g(p - p_0, u)$ e disso $\bar{p} = p_0 + \delta \cdot g(p - p_0, u)u$. Assim $g(p - \bar{p}, p - \bar{p}) = g(p - p_0, p - p_0) - 2\delta \cdot g(p - p_0, u)^2 + \delta \cdot g(p - p_0, u)^2 = g(p - p_0, p - p_0) - \delta \cdot g(p - p_0, u)^2$, e portanto definimos o conjunto $C(R; \ell)$ como o conjunto de pontos $p \in \mathbb{R}^{2,1}$ tais que $|p - \bar{p}|^2 = |g(p - p_0, p - p_0) - \delta \cdot g(p - p_0, u)^2| = R^2$ para algum $R > 0$ fixado.

Diremos que o cilindro é um cilindro de Lorentz se ℓ é tipo-tempo e que é um cilindro hiperbólico se ℓ é tipo-espaço. Se ℓ é tipo-tempo, então podemos decompor da seguinte maneira $p - p_0 = \lambda \cdot u + w$ com w ortogonal a u , então $g(p - p_0, p - p_0) + g(p - p_0, u)^2 = -\lambda^2 + g(w, w) + \lambda^2 = g(w, w)$ e como u é tipo-tempo assim $g(w, w) \geq 0$, logo $|p - \bar{p}| = g(p - p_0, p - p_0) - \delta \cdot g(p - p_0, u)^2$. Quando ℓ é tipo-espaço, segue que $C(R; \ell)$ possui uma separação topológica entre os pontos que correspondem a $g(p - p_0, p - p_0) - \delta \cdot g(p - p_0, u)^2 = R^2$ e os pontos que correspondentes a

$g(p - p_0, p - p_0) - \delta \cdot g(p - p_0, u)^2 = -R^2$. Mais precisamente terá quatro componentes conexas duas que são superfícies tipo-tempo e as restantes superfícies tipo-espaço, como veremos nos exemplos.

Sendo $C(R; \ell)$ para ℓ reta não degenerada e $R > 0$ fixados, é uma superfície orientável, pois é imagem inversa de valor regular de função diferenciável. Dado $v \in T_p C(R; \ell)$, seja α uma curva diferenciável em $C(R; \ell)$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$, então:

$$0 = \frac{d}{dt} [g(\alpha(t) - p_0, \alpha(t) - p_0) - \delta \cdot g(\alpha(t) - p_0, u)^2] = 2g(v, p - p_0) - 2\delta \cdot g(p - p_0, u)g(v, u).$$

Então uma aplicação de Gauss N será dada por

$$N(p) = \frac{1}{R} (p - p_0 - \delta \cdot g(p - p_0, u)u) \Rightarrow -dN_p(v) = -\frac{1}{R} (v - \delta \cdot g(v, u)u).$$

Tomando a base $((p - p_0) \wedge u, u)$ teremos:

$$-dN_p(u) = 0 \text{ e } -dN_p((p - p_0) \wedge u) = -\frac{1}{R}((p - p_0) \wedge u).$$

Logo $-dN_p$ é diagonalizável e possui autovalores 0 e $-1/R$.

Vamos analisar os casos:

1. ℓ é tipo-tempo: Teremos que a normal é tipo-espaço logo $K = 0$ e $H = -1/2R$. Como exemplo tomando $\ell = \text{span} \langle e_3 \rangle$ segue que $C(R; \ell) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 = R^2\}$
2. ℓ é tipo-espaço: Teremos que o normal é tipo-tempo ou tipo-espaço. Tomando N tipo-tempo teremos a superfície tipo-espaço $C_s(R; \ell)$ o conjunto dos p tais que $g(p - p_0, p - p_0) - \delta \cdot g(p - p_0, u)^2 = -R^2$, e nesse caso $K = 0$ e $H = 1/2R$. Tomando N tipo-espaço teremos a superfície tipo-espaço $C_t(R; \ell)$ o conjunto dos p tais que $g(p - p_0, p - p_0) - \delta \cdot g(p - p_0, u)^2 = R^2$, e nesse caso $K = 0$ e $H = -1/2R$.

Tomando $\ell = \text{span} \langle e_1 \rangle$, teremos que $C_s(R; \ell)$ é o conjunto dos pontos (x_1, x_2, x_3) tais que $x_2^2 - x_3^2 = -R^2$ e $C_t(R; \ell)$ é o conjunto dos pontos (x_1, x_2, x_3) tais que $x_2^2 - x_3^2 = R^2$, e ambos possuem duas componentes conexas, e todas essas são componentes de $C(R; \ell)$.

De modo geral, é fácil verificar que, a ação do grupo de Poincaré é transitiva entre os cilindros com eixo ℓ do mesmo caráter causal, então estes três exemplos de cilindros caracterizam todos.

Agora vamos descrever as curvaturas de superfícies não degeneradas em termos de parametrizações locais. Seja então $\varphi : U \rightarrow S$ uma parametrização local de S , tal que $B = (\varphi_u(u, v), \varphi_v(u, v))$ é uma base orientada positivamente no espaço tangente em $\varphi(u, v)$. Sejam também $E = g(\varphi_u, \varphi_u)$, $F = g(\varphi_u, \varphi_v)$, $G = g(\varphi_v, \varphi_v)$. Assim $EG - F^2 > 0$ se S é tipo-espaço e $EG - F^2 < 0$ se S é tipo-tempo. Pondo $N = N(\varphi(u, v)) = (\varphi_u \wedge \varphi_v) / |\varphi_u \wedge \varphi_v|$, teremos que $-dN(\varphi_u) = N_u$ e $-dN(\varphi_v) = N_v$, assim:

$$\begin{aligned} e &= g(-dN(\varphi_u), \varphi_u) = g(-N_u, \varphi_u) = g(N, \varphi_{uu}) \\ f &= g(-dN(\varphi_u), \varphi_v) = g(-dN(\varphi_v), \varphi_u) = g(N, \varphi_{uv}) \\ h &= g(-dN(\varphi_v), \varphi_v) = g(-N_v, \varphi_v) = g(N, \varphi_{vv}) \end{aligned}$$

Assim em termos do referencial local B podemos escrever a matriz do operador $-dN$ como:

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} e & f \\ f & h \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ f & h \end{pmatrix}$$

Assim podemos escrever a curvatura gaussiana e média como sendo:

$$H = \varepsilon \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + hE}{EG - F^2}, \quad K = \varepsilon \frac{eh - f^2}{EG - F^2}.$$

Exemplo 5.2.8. Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ com $U \subset \mathbb{R}^2$ aberto e f diferenciável. O gráfico S dessa função define uma superfície em $\mathbb{R}^{2,1}$. Escolhendo a parametrização $\varphi : U \rightarrow S$ dada por $\varphi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ teremos $\varphi_u = (1, 0, f_x)$, $\varphi_v = (0, 1, f_y)$, $\varphi_{uu} = (0, 0, f_{xx})$, $\varphi_{uv} = (0, 0, f_{xy})$, $\varphi_{vv} = (0, 0, f_{yy})$, assim $\varphi_u \wedge \varphi_v = (-f_x, -f_y, -1)$. Como $EG - F^2 = 1 - f_x^2 - f_y^2$ temos que:

$$K = \varepsilon \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 - f_x^2 - f_y^2)^2} \text{ e } H = \varepsilon \frac{(1 - f_y^2)f_{xx} - 2f_xf_yf_{xy} + (1 - f_x^2)f_{yy}}{2|1 - f_x^2 - f_y^2|^{3/2}}$$

Exemplo 5.2.9. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ uma curva tipo-luz parametrizada por pseudo-comprimento de arco. Considere a aplicação $\varphi : I \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^{2,1}$ com $\varphi(u, v) = \alpha(u) + v \cdot b(u)$, onde b é o vetor binormal. Essa superfície dada pela imagem de φ chamamos de B -scroll. Uma normal possível para essa superfície é o vetor $N(u, v) = n(u) - v\tau b(u)$ em cada ponto $\varphi(u, v)$, assim $N_u = -\tau t(u) - b(u) - v\tau' b(u) - v\tau^2 n(u) = -\tau\varphi_u - (1 + v\tau')\varphi_v$ e $N_v = -\tau b(u) = -\tau\varphi_v$, assim a matriz de $-dN$ na base (φ_u, φ_v) é:

$$\begin{pmatrix} \tau & 0 \\ 1 + v\tau' & \tau \end{pmatrix}$$

Nesse caso $g(N, N) = 1$ logo $H = \tau$ e $K = \tau^2$. Se $v\tau' \neq -1$ então $H^2 - K = 0$, mas a superfície não é umbílica, pois não é diagonalizável.

Capítulo 6

Variedades Riemannianas e pseudo-Riemannianas

Agora vamos generalizar os espaços e estruturas estudadas introduzindo variedades pseudo-Riemannianas.

6.1 Notação de Einstein

A partir desta seção vamos utilizar a convenção de Einstein para somatórios. Quando tivermos o mesmo índice superior e inferior estaremos entendendo como um somatório, de 1 até a dimensão do espaço em questão, exceto se indicado. Por exemplo, tomando os covetores coordenados dx^i em T^*M , e uma 1-forma ω com componentes ω_i nesta base teremos $\omega = \omega_i dx^i = \sum \omega_i dx^i$. Por este motivo vamos escrever as componentes de vetores com índices superiores e componentes de covetores com índices inferiores. Outro exemplo é um tensor T do tipo $(2, 1)$, teremos em coordenadas locais $T = T_{ik}^j \partial_j \otimes dx^i \otimes dx^k$ onde $T_{ik}^j = T(dx^j, \partial_i, \partial_k)$. Podemos ainda tomar o traço nas últimas variáveis teremos as componentes com relação à base (dx^i) são $(\text{tr } T)_i = T_{ij}^j = \sum_j T_{ij}^j$.

6.2 Conexões

Seja (E, M, π) um fibrado vetorial de M e $\Gamma(E)$ as suas seções. Uma conexão em E é uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E)$$

satisfazendo:

- (a) $\nabla_X Y$ é $C^\infty(M)$ -linear em X .
- (b) $\nabla_X Y$ é \mathbb{R} -linear em Y .
- (c) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

Basicamente uma conexão é uma maneira de derivar seções e campos de vetores de maneira consistente, isto é, sem depender de cartas locais. Além disso essas propriedades permitem que $\nabla_X Y$ dependa somente de modo local de X e Y , como mostra a próxima proposição.

Proposição 6.2.1. Seja ∇ uma conexão em um fibrado (E, M, π) , $p \in M$, X um campo de vetores em M e Y uma seção de E . Se $X = \tilde{X}$ e $Y = \tilde{Y}$ em uma vizinhança U de p , então $\nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y}|_p$.

Demonstração. Vamos mostrar que $\nabla_X Y|_p = \nabla_X \tilde{Y}|_p$ e pela \mathbb{R} -linearidade em Y basta mostrar para o caso em que $\tilde{Y} = 0$. Considere uma função $\varphi \in C^\infty(M)$ tal que $\text{supp } \varphi \subset U$ e $\varphi(p) = 1$. Então $\varphi Y \equiv 0$, logo $\nabla_X(\varphi Y) = 0$ e por outro lado $\nabla_X(\varphi Y) = X(\varphi)Y + \varphi \nabla_X Y$ calculando essa expressão em p temos $\nabla_X Y|_p = 0$. Do mesmo modo mostramos que $X = 0$ em U implica que $\nabla_X Y|_p = 0$ ■

Com essa afirmação podemos usar a expressão de X em coordenadas locais. Mais precisamente, seja U uma vizinhança coordenada de $p \in M$, então seja $X = X^i \partial_i$ em coordenadas locais. Assim

$$\nabla_X Y|_p = \nabla_{X^i \partial_i} Y|_p = X^i(p) \nabla_{\partial_i} Y|_p.$$

Se $X_p = \tilde{X}_p$, então $X^i(p) = \tilde{X}^i(p)$, logo $\nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} Y|_p$. Assim podemos enunciar o seguinte corolário.

Corolário 6.2.2. Seja ∇ uma conexão em um fibrado (E, M, π) , $p \in M$, X um campo de vetores em M e Y uma seção de E . Se $X_p = \tilde{X}_p$, então $\nabla_X Y|_p = \nabla_{\tilde{X}} Y|_p$.

6.2.1 Conexões afins

Uma conexão afim é uma conexão no fibrado tangente TM . Vamos usar conexão em M como sinônimo de conexão afim em TM .

Dado (E_i) referencial local, definimos as n^3 funções $\Gamma_{ij}^k : U \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $\nabla_{E_i} E_j = \Gamma_{ij}^k E_k$. Além disso, em coordenadas locais com relação ao referencial (E_i) temos $X = X^i E_i$ e $Y = Y^j E_j$, logo

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X (Y^j E_j) \\ &= X(Y^j) E_j + Y^j \nabla_{X^i E_i} E_j \\ &= X(Y^j) E_k + X^i Y^j \nabla_{E_i} E_j \\ &= X(Y^j) E_j + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j E_k \\ &= (X(Y^k) + \Gamma_{ij}^k X^i Y^j) E_k \end{aligned}$$

A estes coeficientes chamamos de símbolos de Christoffel.

Em \mathbb{R}^n uma conexão afim é a conexão euclideana:

$$\nabla_X Y = (XY^i) \partial_i$$

onde ∂_i são os vetores coordenados da carta global $Id_{\mathbb{R}^n}$. Nesse caso $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$.

Uma maneira de construir uma conexão é tomando o pullback de uma conexão em outra variedade.

6.2.2 Conexões nos fibrados tensoriais

Dada uma conexão em uma variedade M , podemos induzir uma conexão nos fibrados tensoriais $T_\ell^k M$ pedindo algumas condições naturais, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 6.2.3. Seja ∇ uma conexão em M . Então existe uma única conexão em cada fibrado tensorial $T_\ell^k M$, que vamos denotar por ∇ , satisfazendo as condições:

- (a) $T_1 M \approx TM$ a conexão coincide com a conexão afim.
- (b) $T_0^0 M = C^\infty(M)$ a conexão é dada por $\nabla_X f = X(f)$.
- (c) $\nabla_X (F \otimes G) = (\nabla_X F) \otimes G + F \otimes (\nabla_X G)$.
- (d) Denotando tr o traço de qualquer par de entradas, $\nabla_X (\text{tr } F) = \text{tr } (\nabla_X F)$.

Além disso com essas condições estas devem satisfazer:

- (i) Sejam ω uma 1-forma e Y um campo de vetores, então

$$\nabla_X(\omega(Y)) = (\nabla_X\omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y).$$

- (ii) Sejam F um campo de tensores do tipo (k, ℓ) , Y_i campos de vetores e ω^j 1-formas em M .
Então:

$$\begin{aligned} (\nabla_X F)(\omega^1, \dots, \omega^\ell, Y_1, \dots, Y_k) &= X(F(\omega^1, \dots, \omega^\ell, Y_1, \dots, Y_k)) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{\ell} F(\omega^1, \dots, \nabla_X \omega^j, \dots, \omega^\ell, Y_1, \dots, Y_k) \\ &\quad - \sum_{i=1}^k F(\omega^1, \dots, \omega^\ell, Y_1, \dots, \nabla_X Y_i, \dots, Y_k). \end{aligned}$$

Demonstração. Vamos supor que se as conexões satisfazem (a), (b), (c) e (d), então valem (i) e (ii), vamos mostrar a existência e unicidade das conexões. Definindo $(\nabla_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$, teremos que $\nabla_X\omega$ é uma 1-forma. Do mesmo modo podemos definir uma conexão como em (ii) e assim $\nabla_X F$ é um campo de tensores do mesmo tipo que F . Essas são de fato conexões e satisfazem (c) e (d). Como qualquer conexão que satisfaz (a), (b), (c) e (d) deve satisfazer (i) e (ii), então segue disso a unicidade das conexões.

Agora basta mostrar que valem (i) e (ii). De fato, $\omega(Y) = \text{tr}(Y \otimes \omega)$

$$\begin{aligned} \nabla_X(\omega(Y)) &= \text{tr}(\nabla_X(Y \otimes \omega)) \\ &= \text{tr}(\nabla_X Y \otimes \omega + Y \otimes \nabla_X \omega) \\ &= \text{tr}(\nabla_X Y \otimes \omega) + \text{tr}(Y \otimes \nabla_X \omega) \\ &= \omega(\nabla_X Y) + (\nabla_X \omega)(Y) \end{aligned}$$

Para mostrar (ii) vamos supor que F é um campo de tensores do tipo $(1, 1)$. Temos que $\text{tr}(\text{tr}(F \otimes Y \otimes \omega)) = F(\omega, Y)$, onde contrainos a primeira e última entrada de $F \otimes Y \otimes \omega$ e depois as entradas restantes. Assim podemos verificar que vale (ii) nesse caso. Para outros tipos de tensores a demonstração é análoga. ■

Observação 6.2.4. Assim do item (i) do teorema acima teremos $dx^k(\partial_j) = \delta_j^k$, logo $0 = \partial_i(\delta_j^k) = \nabla_{\partial_i} dx^k(\partial_j) = (\nabla_{\partial_i} dx^k)(\partial_j) + dx^k(\nabla_{\partial_i} \partial_j)$, como $dx^k(\nabla_{\partial_i} \partial_j) = \Gamma_{ij}^k$ segue que $(\nabla_{\partial_i} dx^k)(\partial_j) = -\Gamma_{ij}^k$. Assim $\nabla_{\partial_i} dx^k = -\Gamma_{ij}^k dx^j$ e dados $X = X^i \partial_i$ e $\omega = \omega_k dx^k$

$$\begin{aligned} \nabla_X \omega &= \nabla_X(\omega_k dx^k) \\ &= X(\omega_k) dx^k + \omega_k \nabla_{X^i \partial_i} dx^k \\ &= X(\omega_k) dx^k - \Gamma_{ij}^k \omega_k X^i dx^j \\ &= (X(\omega_j) - \Gamma_{ij}^k \omega_k X^i) dx^j \end{aligned}$$

Observação 6.2.5. Seja F um tensor (k, ℓ) , então a aplicação

$$\nabla F : \mathfrak{X}^*(M) \times \dots \times \mathfrak{X}^*(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

onde

$$(\nabla F)(\omega^1, \dots, \omega^\ell, Y_1, \dots, Y_k, X) = (\nabla_X F)(\omega^1, \dots, \omega^\ell, Y_1, \dots, Y_k)$$

é um tensor $(k+1, \ell)$.

Seja F um tensor (k, ℓ) , pondo em coordenadas locais, teremos

$$F = F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_\ell} \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_\ell} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}.$$

Escrevendo ∇F em coordenadas teremos

$$\nabla F = F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_\ell} \partial_{j_1} \otimes \dots \otimes \partial_{j_\ell} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k} \otimes dx^m$$

onde $F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_\ell} ; s = \nabla_{\partial_m} F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_\ell}$. Assim pelo item (ii) do teorema acima, segue que

$$F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_\ell} ; m = \partial_m F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_\ell} + \sum_{s=1}^{\ell} F_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots p \dots j_\ell} \Gamma_{mp}^{j_s} - \sum_{s=1}^k F_{i_1 \dots p \dots i_k}^{j_1 \dots j_\ell} \Gamma_{mi_s}^p$$

Seja $f \in C^\infty(M)$, então definimos o Hessiano covariante de f , ou somente Hessiano de f , como sendo a aplicação $\nabla^2 f \doteq \nabla(\nabla f)$. Temos então que $\nabla^2 f(X, Y) = (\nabla_Y \nabla f)(X) = Y(\nabla f(X)) - \nabla f(\nabla_Y X) = Y(X(f)) - (\nabla_X Y)f$.

6.2.3 Derivadas ao longo de curvas

A menos em menção em contrário, vamos considerar uma curva em M uma curva parametrizada suave $\gamma : I \rightarrow M$, para $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Relembrando que o vetor velocidade de uma curva γ é dado por

$$\dot{\gamma}(t)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t)$$

Além disso, dada uma carta x que intersecta a imagem de γ , pondo $x \circ \gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$ (em algumas vezes por abuso de notação iremos escrever simplesmente $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$), teremos $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i(t) \partial_i$.

Um campo de vetores ao longo da curva $\gamma : I \rightarrow M$ é uma aplicação suave $V : I \rightarrow TM$ tal que $(\pi \circ V)(t) = \gamma(t)$. Vamos denotar o conjunto desses campo por $\mathfrak{X}(\gamma)$. Um exemplo desse tipo de campo é o campo $\dot{\gamma}$. Outro exemplo é o dado \tilde{V} campo de vetores em M e $V = \tilde{V} \circ \gamma$.

Diremos que um campo é extensível V se para cada vizinhança da imagem existe um campo \tilde{V} nessa vizinhança tal que $\tilde{V}(\gamma(t)) = V(t)$. Um exemplo de campo não extensível é $\dot{\gamma}$, onde $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$ e $\dot{\gamma}(t_1) \neq \dot{\gamma}(t_2)$.

Agora podemos definir o que é derivada ao longo de curvas, com o teorema a seguir.

Teorema 6.2.6. Seja ∇ uma conexão em M . Dada uma curva $\gamma : I \rightarrow M$, existe único operador $D_t : \mathfrak{X}(\gamma) \rightarrow \mathfrak{X}(\gamma)$ satisfazendo as condições

- (a) D_t é \mathbb{R} -linear.
- (b) $D_t(fV) = \dot{f}V + fD_tV$ para todo $f \in C^\infty(I)$
- (c) Se V é extensível, então dada uma extensão \tilde{V} temos

$$D_tV = \nabla_{\dot{\gamma}} \tilde{V}.$$

Assim definido esse operador, diremos que D_tV é a derivada covariante de V ao longo de γ .

Demonstração. Vamos mostrar a unicidade. Suponha que existe o operador D_t , assim podemos, de modo análogo a ∇ , mostrar que fixado $t_0 \in I$ $D_tV(t_0)$ depende somente de V em uma vizinhança de t_0 . Assim em algum intervalo da forma $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ existe uma carta x que cobre $\gamma(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$, assim podemos escrever $V = V^j \partial_j$ e $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i(t) \partial_i$. Logo

$$\begin{aligned} D_tV(t_0) &= \dot{V}^j(t_0) \partial_j + V^j \nabla_{\dot{\gamma}(t_0)} \partial_j \\ &= (\dot{V}^k(t_0) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t_0)) \dot{\gamma}^i(t_0) V^j(t_0)) \partial_k. \end{aligned}$$

Como ao redor de cada $t_0 \in I$ podemos escrever $D_t V$ como na expressão acima, e esta não depende do operador, podemos concluir que D_t é único. Agora basta definir D_t em cada carta que contém pontos de $\gamma(I)$, e pela unicidade, as definições vão coincidir na intersecção das cartas. Podemos definir $D_t V$ pela expressão acima, para cada $t_0 \in I$ e assim definido irá satisfazer as condições. ■

Proposição 6.2.7. Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e γ uma curva em M tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X_p$, então $\nabla_X Y|_p = D_t Y_{\gamma(t)}|_{t=0}$.

6.2.4 Transporte Paralelo

Dizemos que um campo de vetores $V : I \rightarrow TM$ ao longo de uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ é paralelo se $D_t V \equiv 0$. Além disso dizemos que um campo $V \in \mathfrak{X}(M)$ é paralelo se é paralelo ao longo de cada curva, ou equivalentemente, $\nabla V = 0$.

Em \mathbb{R}^n usando a fórmula para derivada covariante na carta $Id_{\mathbb{R}^n}$ teremos

$$D_t V = 0 \Leftrightarrow \dot{V}^j \partial_j = 0 \Leftrightarrow V^j = c^j, c^i \in \mathbb{R}.$$

Em outras palavras os únicos campos vetores paralelos ao longo de uma curva em \mathbb{R}^n são os constantes.

Vamos agora mostrar que sempre é possível construir um campo paralelo a uma curva.

Teorema 6.2.8. Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva, $t_0 \in I$ e $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$, então existe único campo $V : I \rightarrow TM$, paralelo a γ , tal que $V(t_0) = V_0$.

Demonstração. Considere uma carta $x : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ que cobre $\gamma(t_0)$, então $V = V^j \partial_j$ é campo paralelo ao longo de γ em um intervalo $J \subset I$ tal que $\gamma(J) \subset U$, então da demonstração do teorema anterior, pondo $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i(t) \partial_i$ temos

$$D_t V(t) = (\dot{V}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) V^j(t)) \partial_k = 0.$$

Isso vale se $\dot{V}^k(t) = -\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) V^j(t)$ para cada $k = 1, \dots, n$. Esta equação tem solução única em $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$. Então se x cobre $\gamma(I)$, então segue o resultado.

Suponha então que $\gamma(I)$ não é coberta por uma única carta. Suponhamos inicialmente que $I = [a, b]$ é compacto. Então o conjunto dos $c > t_0$ tal que existe único $V : [t_0, c] \rightarrow TM$ campo paralelo a γ em $[t_0, c]$ com $V(t_0) = V_0$ é não vazio, pois existe $c > t_0$ suficientemente próximo de t_0 tal que $\gamma[t_0, c]$ está contido em U , e também é limitado, portanto este conjunto possui supremo β . Vamos mostrar que β é tal que existe único campo $V : [t_0, \beta) \rightarrow TM$ com $V(t_0) = V_0$.

Vamos mostrar que $\beta = b$. De fato, suponha por contradição que $\beta < b$, então tome uma carta contendo $\gamma(\beta)$. Então um intervalo da forma $(\beta - \delta, \beta + \delta)$ está contido nesta carta. Assim existe único campo $\tilde{V} : (\beta - \delta, \beta + \delta) \rightarrow TM$ paralelo ao longo de γ tal que $\tilde{V}(\beta - \delta/2) = V(\beta - \delta/2)$. Pela unicidade, segue que $\tilde{V} = V$ em $(\beta - \delta, \beta)$ e assim podemos estender V a um campo paralelo a γ em $[t_0, \beta + \delta)$, uma contradição. Portanto devemos ter $\beta = b$, e do mesmo modo podemos definir V em $[a, t_0]$ de modo único.

Agora supondo I não compacto, então em cada compacto $J \subset I$ contendo t_0 temos que existe único campo paralelo em J com $V(t_0) = V_0$, assim como dois campos definidos em intervalos diferentes devem coincidir na intersecção, podemos definir $V : I \rightarrow TM$ pondo $V(t) = \tilde{V}(t)$ onde $\tilde{V} : J \rightarrow TM$ é um destes campos com $t \in J$. ■

Com o teorema podemos definir um jeito de conectar dois espaços tangentes quaisquer. Uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ com $t_0 \in I$ fixado, define uma família de operadores $P_{t_0, t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$ onde $P_{t_0, t_1}(V_0) = V(t_1)$ onde V é o campo paralelo a γ com $V(t_0) = V_0$. Além disso P_{t_0, t_1} é isomorfismo linear. Estes operadores chamamos de transporte paralelo de t_0 a t_1 .

6.2.5 Geodésicas

Agora vamos definir as curvas de aceleração nula em variedades com conexão. Seja $\gamma : I \rightarrow M$ uma curva, então chamamos de aceleração de γ o campo de vetores $D_t\dot{\gamma}$ ao longo de γ . Uma geodésica é uma curva com aceleração nula, e nesse caso $\dot{\gamma}$ é um campo paralelo ao longo de γ .

Um exemplo de geodésica é em \mathbb{R}^n onde D_t é exatamente a derivada com relação a t , ou seja, $D_t\dot{\gamma} = \ddot{\gamma}$ (identificando $T_{\gamma(t)}\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$). Assim as únicas geodésicas em \mathbb{R}^n são as retas com velocidade constante.

Teorema 6.2.9. Seja M uma variedade com conexão afim. Dados $p \in M$, $V \in T_pM$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, existe $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto contendo t_0 e $\gamma : I \rightarrow M$ uma geodésica satisfazendo $\gamma(t_0) = p$ e $\dot{\gamma}(t_0) = V$. Além disso, duas geodésicas satisfazendo esta condição coincidem na intersecção dos domínios.

Demonstração. Tomando uma carta $x = (x^i)$ ao redor de p . Uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ é geodésica se pondo $\gamma = (\gamma^1, \dots, \gamma^n)$, nas coordenadas x , temos

$$\ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t))\dot{\gamma}^i\dot{\gamma}^j = 0$$

Fazendo a mudança de variável $v^k = \dot{\gamma}^k$ teremos o seguinte sistema de equações (não lineares):

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}^k &= v^k \\ \dot{v}^k &= -\Gamma_{ij}^k(\gamma(t))v^i v^j\end{aligned}$$

Assim existe um intervalo aberto $I = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ em que há solução para este sistema tomando condição inicial $\gamma^i(t_0) = x^i(p)$ e $\dot{\gamma}^i(t_0) = V^i$, onde $V = V^i\partial_i$, e portanto existe uma curva γ geodésica definida em I satisfazendo $\gamma(t_0) = p$ e $\dot{\gamma}(t_0) = V$.

Para provar a unicidade, suponha $\alpha, \gamma : I \rightarrow M$, para algum $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto, geodésicas satisfazendo $\alpha(t_0) = \gamma(t_0)$ e $\dot{\alpha}(t_0) = \dot{\gamma}(t_0)$, para algum $t_0 \in I$. Vamos mostrar que em todo subintervalo da forma $[t_0, b] \subset I$ as curvas coincidem. Se o conjunto de $b > t_0$ tais que $[t_0, b] \subset I$ onde as curvas coincidem for ilimitado, então não há nada a provar. Se for limitado, tome β o supremo e devemos ter $\beta \notin I$. Caso contrário, por continuidade devemos ter $\alpha(\beta) = \gamma(\beta)$ e $\dot{\alpha}(\beta) = \dot{\gamma}(\beta)$ e assim as curvas iriam coincidir em um intervalo um pouco maior que $[t_0, \beta]$, uma contradição. De modo análogo mostramos que as duas curvas devem coincidir à esquerda de t_0 . ■

Este teorema afirma também que existe única $\gamma : I \rightarrow M$ geodésica maximal (que não pode ser estendida em um intervalo maior) satisfazendo $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = V$, para $p \in M$ e $V \in T_pM$ fixados.

De fato, tomando I a união dos intervalos de todas as geodésicas α satisfazendo $\alpha(0) = p$ e $\dot{\alpha}(0) = V$ então definimos $\gamma(t) = \alpha(t)$ para alguma geodésica α que contém t no domínio. Portanto γ é bem definida, pois escolhendo β geodésica satisfazendo $\beta(0) = p$ e $\dot{\beta}(0) = V$ contendo t no domínio, teremos que β e α coincidirão em seus domínios em comum, em particular em t .

Além disso, γ é geodésica, pois tomando $t \in I$ e $\alpha : J \rightarrow M$ satisfazendo $\alpha(0) = p$ e $\dot{\alpha}(0) = V$, geodésica com $t \in J$, então conterà um intervalo aberto $\tilde{J} \subset J$, com $t \in \tilde{J}$. Então γ coincide com α em \tilde{J} e portanto $\dot{\gamma} = \dot{\alpha}$ em \tilde{J} e consequentemente $D_t\dot{\gamma} = D_t\dot{\alpha} = 0$ em \tilde{J} .

Denotamos a geodésica maximal com ponto inicial p e velocidade inicial V por γ_V , e por vezes chamamos simplesmente de geodésica com ponto inicial p e velocidade inicial V .

Uma propriedade das geodésicas é a homogeneidade que será provada na próxima proposição.

Proposição 6.2.10 (Homogeneidade das geodésicas). Seja $V \in TM$ e $c, t \in \mathbb{R}$, então

$$\gamma_{cV}(t) = \gamma_V(ct),$$

e além disso um lado está definido sempre que o outro estiver.

Demonstração. Basta mostrar que γ_{cV} existe e a igualdade vale sempre que o lado direito da igualdade está definido, pois a recíproca vale devido ao fato que:

$$\gamma_{(1/c) \cdot (cV)}(ct) = \gamma_{cV}((1/c) \cdot (ct)) \Rightarrow \gamma_V(ct) = \gamma_{cV}(t)$$

e o lado esquerdo está definido sempre que o lado direito estiver definido.

Então seja $I \subset \mathbb{R}$ o domínio de γ_V e $J = \{t \in \mathbb{R} | ct \in I\}$. Vamos denotar $\gamma = \gamma_V$ e $\tilde{\gamma} : J \rightarrow M$ tal que $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(ct)$ temos que $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = c\dot{\gamma}(ct)$, logo $\tilde{\gamma}(0) = p$ e $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = cV$.

Em coordenadas locais se $\dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i \partial_i$ teremos $\dot{\tilde{\gamma}}(t) = \dot{\tilde{\gamma}}^i(t) \partial_i = c\dot{\gamma}^i(ct) \partial_i$. Logo:

$$\begin{aligned} D_t \dot{\tilde{\gamma}}(t) &= \left(\ddot{\tilde{\gamma}}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(\tilde{\gamma}(t)) \dot{\tilde{\gamma}}^i(t) \dot{\tilde{\gamma}}^j(t) \right) \partial_k \\ &= c^2 \left(\ddot{\gamma}^k(ct) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(ct)) \dot{\gamma}^i(ct) \dot{\gamma}^j(ct) \right) \partial_k \\ &= c^2 D_t \dot{\gamma}(ct) = 0 \end{aligned}$$

Então $\tilde{\gamma} = \gamma_{cV}$ e γ_{cV} está definida em J , pois caso contrário poderíamos estender o intervalo de definição I de γ_V . ■

Agora podemos apresentar um difeomorfismo muito importante para o desenvolvimento da teoria de geometria pseudo-Riemanniana. Considere

$$\mathcal{E} \doteq \{V \in TM | \gamma_V \text{ está definida em um intervalo que contém } [0, 1]\}$$

e defina $\exp : \mathcal{E} \rightarrow M$ pondo $\exp(V) = \gamma_V(1)$.

Para cada $p \in M$, podemos definir \exp_p sendo \exp restrita à $\mathcal{E}_p \doteq \mathcal{E} \cap T_p M$.

Para provar algumas propriedades vamos utilizar o seguinte lema de fluxos sobre variedades, que pode ser consultado em [1].

Lema 6.2.11. Seja X um campo vetorial suave em uma variedade diferenciável M , então existe única $\theta : W \rightarrow M$ suave, definida em um aberto $W \subset \mathbb{R} \times M$ e tal que para cada $p \in M$, $\theta_p = \theta(\cdot, p)$ é a maior curva integral do campo X , ou seja, θ_p está definida no maior intervalo tal que

$$\dot{\theta}_p(t) = X_{\theta_p(t)}.$$

Proposição 6.2.12 (Propriedades da aplicação exponencial). Valem as seguintes afirmações:

- (a) \mathcal{E} é um conjunto aberto e \mathcal{E}_p é um conjunto estrelado com relação à 0 em $T_p M$, ou seja, dado o vetor $V \in \mathcal{E}_p$ então segmento de reta que liga V e 0 está contido em \mathcal{E}_p .
- (b) Dado $V \in TM$, a geodésica γ_V é dada por

$$\gamma_V(t) = \exp(tV)$$

sempre que um dos lados está definido em t .

- (c) \exp é uma aplicação suave.

Demonstração. Pela homogeneidade das geodésicas temos que $\exp(tV) = \gamma_{tV}(1) = \gamma_V(t)$ está definido para todo $0 \leq t \leq 1$. Portanto \mathcal{E}_p é estrelado.

Vamos mostrar que \mathcal{E} é aberto e \exp é suave. Em cada sistema de coordenadas (x^i) em um aberto U podemos definir um campo G em $\pi^{-1}(U) \subset TM$, tomando o sistema de coordenadas (x^i, v^i) de $\pi^{-1}(U)$, pondo G dado por

$$G_V = V^k \partial_{x^k} - V^i V^j \Gamma_{ij}^k(\pi(V)) \partial_{v^k}.$$

Além disso suas curvas integrais nas coordenadas (x^i, v^i) são da forma

$$\begin{aligned}\dot{x}^k(t) &= v^k(t) \\ \dot{v}^k(t) &= -v^i(t)v^j(t)\Gamma_{ij}^k(x(t))\end{aligned}$$

que é um sistema equivalente ao da equação das geodésicas. A ideia é estender o campo G em cada sistema de coordenadas para um campo global. Seja $f \in C^\infty(TM)$ e $V \in TM$ com $\pi(V) = p \in U$, então:

$$G(f)(V) = \partial_{x^k}(f)V^k - \partial_{v^k}(f)V^iV^j\Gamma_{ij}^k(p)$$

Tomando a geodésica γ_V , temos então

$$\begin{aligned}\left. \frac{d}{dt}f(\gamma_V(t), \dot{\gamma}_V(t)) \right|_{t=0} &= \partial_{x^k}(f)\dot{\gamma}_V^k + \partial_{v^k}(f)\ddot{\gamma}_V \Big|_{t=0} \\ &= \partial_{x^k}(f)\dot{\gamma}_V^k - \partial_{v^k}(f)\dot{\gamma}_V^i\dot{\gamma}_V^j\Gamma_{ij}^k(\gamma_V(t)) \Big|_{t=0} \\ &= \partial_{x^k}(f)V^k - \partial_{v^k}(f)V^iV^j\Gamma_{ij}^k(p) = G(f)(V).\end{aligned}$$

Então na verdade podemos estender G à um campo suave em TM . Então existe $\mathcal{O} \subset \mathbb{R} \times TM$ a maior vizinhança de $\{0\} \times TM$ e uma aplicação $\theta : \mathcal{O} \rightarrow TM$ onde cada $\theta_V = \theta(\cdot, V)$ é uma curva integral de G .

Além disso se $V \in \mathcal{E}$, então $(1, V) \in \mathcal{O}$ e sendo \mathcal{O} aberto, existem $1 \in I \subset \mathbb{R}$ e $V \in U \subset TM$ abertos tais que θ está definido em $I \times U$. Em particular existe uma vizinhança de U em TM tal que os vetores nesta vizinhança tem geodésicas definidas em $[0, 1]$. Portanto \mathcal{E} é aberto.

Teremos que a aplicação $\theta_1 = \theta(1, \cdot)$ é uma aplicação suave e $\exp(V) = \gamma_V(1) = \pi \circ \theta(1, V)$ logo \exp é uma aplicação suave. ■

6.3 Variedades pseudo-Riemannianas e construções básicas

Vamos generalizar subvariedades de $\mathbb{R}^{m,r} \doteq (\mathbb{R}^{m+r}, g)$, onde $g = \varepsilon_i(dx^i)^2$ onde $\varepsilon_i = 1$ para $1 \leq i \leq m$ e $\varepsilon_i = -1$ para $m+1 \leq i \leq m+r$, com $m, r \geq 0$ e não ambos nulos. Nos casos que $m = n$ e $r = 0$ temos o espaço Euclidiano de dimensão n e no caso $m = n-1$ e $r = 1$ temos o espaço de Minkowski de dimensão n . Vamos então definir as métricas em variedades.

Definição 6.3.1. Uma métrica g em uma variedade diferenciável M é um campo de tensores do tipo $(2, 0)$, simétrico ($g(X, Y) = g(Y, X)$) e não degenerado (não degenerado em cada ponto $p \in M$) de índice constante. Uma variedade pseudo-Riemanniana é uma variedade M com um métrica g e denotamos (M, g) . Dizemos ainda que (M, g) é variedade Riemanniana se g é positiva definida em cada T_pM e nesse caso g é dita métrica Riemanniana.

Em outras palavras a matriz (g_{ij}) , com $g_{ij} = g(E_i, E_j)$ e (E_i) referencial local, é diferenciável, simétrica e invertível em cada ponto do domínio de (E_i) . Alguns autores pedem que g tenha índice constante em cada espaço tangente T_pM , vamos também pedir esta condição, por simplicidade em alguns detalhes e enunciados. Vamos poder esclarecer como se comporta o índice de uma métrica se não pedirmos esta condição.

Denotamos $\langle X, Y \rangle \doteq g(X, Y)$. Definimos o comprimento ou norma de um vetor $X \in T_pM$ como sendo $|X| = |\langle X, X \rangle|^{1/2}$.

Seja $\varphi : (M, g) \rightarrow (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ um difeomorfismo, diremos que φ é isometria se $\varphi^*\widetilde{g} = g$, e assim (M, g) e $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ são ditas isométricas. Se $(\widetilde{M}, \widetilde{g}) = (M, g)$ então dizemos que φ é uma isometria em M . O conjunto de isometrias de uma variedade formam um grupo com a composição. Além disso chamamos isometria local um difeomorfismo local $\varphi : (M, g) \rightarrow (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ que satisfaz $\varphi^*\widetilde{g} = g$, ou de forma equivalente, se para cada $p \in M$ existe $U \subset M$ aberto tal que φ induz uma isometria de U em um aberto $\varphi(U)$.

Como já vimos no caso do espaço de Minkowski, dada $i : M \hookrightarrow (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ uma imersão, em geral $g = i^*\widetilde{g}$ não é métrica, basta tomar M um plano tipo-luz em $\widetilde{M} = \mathbb{R}^{2,1}$, mas esse resultado sempre vale se \widetilde{g} é métrica Riemanniana e neste caso g é também uma métrica Riemanniana. Porém se $g = i^*\widetilde{g}$ é uma métrica, chamaremos esta de métrica induzida em M e nesse caso dizemos que (M, g) é subvariedade pseudo-Riemanniana imersa (ou mergulhada, se i é um mergulho).

Outra variedade (pseudo-)Riemanniana que pode ser construída é a seguinte: Sejam $(M_1, g_1), (M_2, g_2)$ variedades (pseudo-)Riemannianas, então existe uma métrica natural em $M_1 \times M_2$, dada por $g = g_1 \oplus g_2$, a métrica produto. Identificando $T_{(p_1, p_2)}(M_1 \times M_2) \approx T_{p_1}M_1 \oplus T_{p_2}M_2$ teremos:

$$g(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2), \quad X_i, Y_i \in T_{p_i}M_i.$$

Mais ainda se g_1, g_2 são métricas Riemannianas, então g é métrica Riemanniana.

Agora vamos mostrar que ao redor de cada ponto de uma variedade pseudo-Riemanniana existe um referencial ortonormal local. Lembrando que um conjunto de vetores ou campo de vetores $\{V_1, \dots, V_k\}$ é dito ortonormal se $|\langle V_i, V_j \rangle| = \delta_{ij}$. Antes de enunciar e provar esse resultado, vamos apresentar um lema.

Lema 6.3.2. Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n :

- (a) Dado $p \in M$ e $v \in T_pM$ existe um campo de vetores X em M tal que $X_p = v$.
- (b) Seja (X_1, \dots, X_k) campos de vetores em um aberto $U \subset M$, então o conjunto V dos pontos onde (X_1, \dots, X_k) é linearmente independente é um aberto.
- (c) Seja $p \in M$ e (v_1, \dots, v_k) um conjunto ordenado de vetores linearmente independentes em T_pM com $1 \leq k \leq n$, então existe U uma vizinhança de p e (X_i) referencial em U tal que $X_i|_p = v_i$.
- (d) Dado $(X_i)_{i=1}^k$ campos de vetores linearmente independentes em um aberto U de M e $1 \leq k < n$, então dado $p \in U$, existe uma vizinhança V de p e campos de vetores X_{k+1}, \dots, X_n definidos em V tais que (X_1, \dots, X_n) é referencial local em $U \cap V$.

Demonstração.

- (a) Seja $x : U \rightarrow V$ uma carta com $p \in U$ e ∂_i os vetores coordenados. Seja $v = v^i \partial_i$ e $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave com $\text{supp } \varphi \subset U$ e $\varphi(p) = 1$, então definindo $X = \varphi v^i \partial_i$ em U e $X = 0$ em $M - \text{supp } \varphi$. Segue que X é diferenciável nos abertos U e $M - \text{supp } \varphi$ e se $q \in U - \text{supp } \varphi$ segue que $\varphi(q) = 0$, logo as definições coincidem na intersecção, portanto X é um campo diferenciável em M .
- (b) Basta mostrar que para cada vizinhança coordenada W temos $V \cap W$ é aberto. Seja x uma carta em W tal que W intersecta V . Seja $X_i = X_i^j \partial_j$, então a aplicação $X = (X_i^j)$ é diferenciável. Temos que a aplicação $f : M_{k \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(A) = \sum_{\substack{\widetilde{A} \subset A \\ \widetilde{A} \in M_{k \times k}}} |\det \widetilde{A}|$$

é contínua, onde $\widetilde{A} \subset A$ denota que \widetilde{A} é submatriz de A . Assim $f \circ X$ é uma função contínua em $U \cap W$. Outra observação é que (X_1, X_2, \dots, X_k) é linearmente independente em p se, e somente se, existe uma submatriz quadrada de X que tem determinante não nulo em p , ou equivalentemente, $(f \circ X)(p) > 0$. Por essa observação temos $(f \circ X)^{-1}(0, \infty) = V \cap W$ e portanto $V \cap W$ é aberto como queríamos demonstrar.

- (c) Seja $p \in U$, então podemos completar (v_1, \dots, v_k) a uma base (v_i) de $T_p M$. Por (a) podemos estender estes vetores para uma campos X_i em M tais que $X_i|_p = v_i$, e considere U o conjunto de pontos que (X_i) é linearmente independente que por (b) é aberto. Assim (X_i) é um referencial no aberto $U \ni p$.
- (d) Basta completar a base $(X_i|_p)_{i=1}^k$ e estender v_{k+1}, \dots, v_n a campos em um aberto ao redor de p como em (c). ■

Proposição 6.3.3. Seja $p \in M$. Então existe (E_i) referencial ortonormal definido em um aberto $U \ni p$, com relação à variedade (M, g) .

Demonstração. Seja (v_i) uma base ortonormal de $T_p M$. Então (v_i) pode ser estendida a campos (X_i) em um aberto W contendo p .

Vamos mostrar que para cada $1 \leq k \leq n$ existem campos ortonormais E_1, \dots, E_k definidos em um aberto $W_k \subset W$ satisfazendo $E_i|_p = v_i$ e $\text{span} \langle E_1, \dots, E_k \rangle = \text{span} \langle X_1, \dots, X_k \rangle$ para cada ponto em M . Para o caso em que $k = 1$, temos que $|X_1|_p| = |v_1| = 1$, logo, pela continuidade, existe $W_1 \subset W$ onde $|X_1| \neq 0$ em W_1 . Então definimos $E_1 = X_1/|X_1|$ que irá satisfazer as condições.

Suponha E_1, \dots, E_k campos ortonormais definidos em um aberto $W_k \subset W$ satisfazendo $E_i|_p = v_i$ e $\text{span} \langle E_1, \dots, E_k \rangle = \text{span} \langle X_1, \dots, X_k \rangle$. Então considere

$$X_{k+1} = \sum_{i=1}^k a^i E_i + Y \Rightarrow Y = X_{k+1} - \sum_{i=1}^k a^i E_i$$

Tomando Y ortogonal a $\text{span} \langle E_1, \dots, E_k \rangle$ em cada ponto devemos ter

$$0 = \langle Y, E_j \rangle = \langle X_{k+1} \rangle - a^j \langle E_j, E_j \rangle$$

Definindo $\varepsilon_j = \langle E_j, E_j \rangle$ temos $a^j = \varepsilon_j \langle X_{k+1}, E_j \rangle$. Assim determinamos Y . Temos que $|Y|_p| = |v_{k+1}| = 1$, logo existe uma vizinhança W_{k+1} de p tal que $|Y| \neq 0$ em W_{k+1} . E portanto definimos $E_{k+1} = Y/|Y|$ em W_{k+1} e assim irá satisfazer as condições.

Em particular provamos que existe um referencial ortonormal em aberto ao redor de p . ■

Observação 6.3.4. Suponha que o tensor g tenha todas as propriedades de métrica exceto que o índice é constante. Seja r o índice de $T_p M$, podemos ordenar (E_i) de modo que

$$g = \sum_{i=1}^{n-r} (\varphi^i)^2 - \sum_{j=1}^r (\varphi^j)^2$$

onde (φ^k) é o referencial dual de (E_i) . Assim o índice de g é constante em um aberto ao redor de cada ponto e portanto é constante em cada componente conexa.

Outra observação é que se existisse um sistema de coordenadas $x : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ da variedade (M, g) com g de índice constante igual a r tal que os vetores coordenados (∂_i) formassem uma base ortonormal, então $g(V, W) = \langle dx(V), dx(W) \rangle$, denotando $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a métrica de $\mathbb{R}^{n-r, r}$ e portanto x é uma isometria local.

Outra propriedade de variedades pseudo-Riemannianas é que a métrica permite transformar campos de vetores em 1-formas com a aplicação $\flat : TM \rightarrow T^*M$ e denotamos $\flat(X) = X^\flat$. Definimos $X^\flat(Y) = g(X, Y)$. Pondo em coordenadas teremos $X = X^i \partial_i$ logo

$$X^\flat = g(X^i \partial_i, \cdot) = g_{ij} X^i dx^j$$

Então $X_j = g_{ij}X^i$ são as componentes de X^b nas coordenadas dx^j . Dizemos que X^b é obtido de X abaixando um índice (por este motivo usamos a notação musical \flat).

Do mesmo modo temos a sua aplicação inversa $\sharp : T^*M \rightarrow TM$. Então pondo $\omega = \omega_j dx^j$, $\omega^\sharp = \omega^i \partial_i$ é tal que $\omega = g(\omega^i \partial_i, \cdot) = g_{ij} \omega^i dx^j$ então $\omega_j = g_{ij} \omega^i$ e denotando g^{ij} a entradas da matriz inversa de (g_{ij}) temos $\omega^i = g^{ij} \omega_j$.

Um exemplo de uso do operador \sharp é para a 1-forma dada pelo diferencial de uma função real f . Definimos o gradiente de f como sendo $\text{grad} f = df^\sharp$. Como $df = \partial_j f dx^j$, temos que $\text{grad} f = g^{ij} \partial_j f \partial_i$.

Podemos também fazer estas operações para qualquer tensor. Por exemplo tomando um tensor $(3; 1)$, R , definimos R^b o tensor $(4; 0)$ tal que $R^b(X, Y, Z, W) = R(X, Y, Z, W^b)$. O mesmo também podemos fazer para mais entradas contravariantes, mas a notação \flat não irá indicar a entrada que estamos abaixando o índice. E do mesmo modo podemos definir o operador \sharp em tensores com pelo menos uma entrada covariante.

Seja agora B um tensor $(k + 1; 0)$, logo B^b é um tensor $(k; 1)$ e definimos o traço de B com relação à métrica g como sendo o traço de B^b , ou seja, se $B_{i_1 \dots, i_k i_{k+1}}$ e $B_{s_1 \dots s_k}^j$ forem as componentes de B e B^b em coordenadas locais, então

$$(\text{tr } {}_g B)^{s_1 \dots s_{k-1}} = B_i^{s_1 \dots i \dots s_{k-1}} = g_{ij} B^{s_1 \dots i \dots j \dots s_{k-1}}$$

Do mesmo modo se T é um tensor $(0; \ell + 1)$, então T^b é um tensor $(1; \ell)$ e supondo $\ell = 1$ e T é simétrico, por simplicidade, temos

$$\text{tr } {}_g T = T_i^i = g^{ij} T_{ij}$$

6.4 Conexões em Variedades pseudo-Riemannianas

Vamos agora introduzir uma conexão especial nas variedades pseudo-Riemannianas, de modo que parte das propriedades geométricas possam ser traduzidas em termos da conexão e de geodésicas. Lembrando que a conexão em \mathbb{R}^n é dada por $\nabla_X Y = (XY^i) \partial_i$ onde ∂_i são os vetores coordenados da aplicação identidade e $Y = Y^i \partial_i$. Seja $\mathbb{R}^{m,r} = (\mathbb{R}^{m+n}, g)$, com $m \geq 0$, $n \geq 0$ e m, n não ambos nulos, munido com essa conexão. Então pondo $Y = Y^i \partial_i$ e $Z = Z^j \partial_j$, temos

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= X \left(\sum_{i=1}^{m+r} \varepsilon_i Y^i Z^i \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m+r} \varepsilon_i X(Y^i Z^i) \\ &= \sum_{i=1}^{m+r} \varepsilon_i (X(Y^i) Z^i + Y^i X(Z^i)) \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle. \end{aligned}$$

Esta é uma condição natural para se pedir em uma conexão de uma variedade pseudo-Riemanniana (M, g) qualquer. Então diremos que uma conexão em uma variedade pseudo-Riemanniana (M, g) é compatível com a métrica g se

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle.$$

O próximo lema vai apresentar equivalências que mostram porque é natural essa condição.

Lema 6.4.1. Seja ∇ uma conexão afim em uma variedade pseudo-Riemanniana (M, g) . Então são equivalentes as afirmações:

- (a) ∇ é compatível com g .
- (b) $\nabla g \equiv 0$.
- (c) Se V, W são campos de vetores ao longo da curva γ , então

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \langle D_t V, W \rangle + \langle V, D_t W \rangle.$$

- (d) Se V, W são campos paralelos ao longo da curva γ , então $\langle V, W \rangle$ é constante.
- (e) Se $\gamma : I \rightarrow M$ é uma curva, então o transporte paralelo $P_{t_0, t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \rightarrow T_{\gamma(t_1)}M$ é uma isometria para quaisquer $t_0, t_1 \in I$.

Demonstração. As implicações (c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e) são diretas e (e) \Rightarrow (d) usa a unicidade de campos paralelos com condição inicial. Temos que $\nabla g \equiv 0$ se $\nabla_X g \equiv 0$ para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$. Temos que

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = X \langle Y, Z \rangle - \langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle Y, \nabla_X Z \rangle$$

Assim é fácil ver que (a) \Leftrightarrow (b).

Vamos mostrar (d) \Rightarrow (c). Tome $t_0 \in I$, $p = \gamma(t_0)$ e (V_1, \dots, V_n) base ortonormal de $T_p M$. Então existem únicos campos paralelos (E_i) ao longo de γ tais que cada $E_i(t_0) = V_i$, e da condição (d) temos que estes formam uma base ortonormal em cada ponto $\gamma(t)$. Assim sejam $V = V^i E_i$ e $W = W^j E_j$, logo $D_t V = \dot{V}^i E_i$ e $D_t W = \dot{W}^j E_j$. Definindo $\varepsilon_i = \langle E_i, E_i \rangle$, então $g = \varepsilon_i (\varphi^i)^2$ e nessa forma podemos verificar

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \langle D_t V, W \rangle + \langle V, D_t W \rangle.$$

Para mostrar (c) \Rightarrow (a) tome $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $p \in M$. Existe uma curva γ tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X_p$. Assim

$$X \langle Y, Z \rangle|_p = \frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle_{\gamma(t)}|_{t=0} = \langle D_t V, W \rangle + \langle V, D_t W \rangle|_{t=0} = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle|_p.$$

Vamos mostrar finalmente que (a) \Rightarrow (c). Suponha que $V = V^i \partial_i$ e $W = W^j \partial_j$ campos ao longo de γ , então

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = (\dot{V}^i W^j + V^i \dot{W}^j) g_{ij} + V^i W^j \frac{d}{dt} g_{ij}.$$

Além disso

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_{ij} &= \dot{\gamma}(t) \langle \partial_i, \partial_j \rangle = \langle \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \partial_i, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, \nabla_{\dot{\gamma}(t)} \partial_j \rangle \\ &= \langle D_t \partial_i, \partial_j \rangle + \langle \partial_i, D_t \partial_j \rangle. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle &= \dot{V}^i W^j g_{ij} + V^i W^j \langle D_t \partial_i, \partial_j \rangle + V^i \dot{W}^j g_{ij} + V^i W^j \langle \partial_i, D_t \partial_j \rangle \\ &= \langle D_t V, W \rangle + \langle V, D_t W \rangle. \end{aligned}$$

■

Um tensor importante para mostrar a unicidade da conexão das variedades pseudo-Riemannianas é o tensor de torção. O tensor de torção é um tensor do tipo $(2; 1)$, $\tau : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ dada por

$$\tau(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y].$$

Diremos que uma conexão é simétrica se $\tau \equiv 0$.

Pedir que a conexão seja simétrica é uma condição natural, primeiramente porque permite encontrar uma única conexão compatível com a métrica que é simétrica, como provaremos no próximo teorema, outra propriedade desejada é que o Hessiano seja sempre um tensor simétrico e por último vamos dar um exemplo de conexão não simétrica que é compatível com a métrica.

Exemplo 6.4.2. Considere a conexão ∇ em $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^{3,0}$ com

$$\Gamma_{12}^3 = \Gamma_{23}^1 = \Gamma_{31}^2 = 1 \text{ e } \Gamma_{21}^3 = \Gamma_{32}^1 = \Gamma_{13}^2 = -1$$

e os outros símbolos de Christoffel nulos, com relação ao referencial $(\partial_1, \partial_2, \partial_3)$ usual de \mathbb{R}^3 . Notamos que ∇ não é simétrica, pois $\Gamma_{12}^3 \neq \Gamma_{21}^3$, por exemplo.

Podemos verificar que ∇ é compatível com o produto interno, pois nas coordenadas da identidade temos $\nabla g = 0$, e as geodésicas são retas. Além disso tomando $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $\gamma(t) = (t, 0, 0)$, transportando os vetores $\partial_1 = (1, 0, 0)$, $\partial_2 = (0, 1, 0)$ e $\partial_3 = (0, 0, 1)$, com a identificação $T_p\mathbb{R}^3 \approx \mathbb{R}^3$, transportando estes vetores paralelamente ao longo de γ a partir de $t = 0$ obtemos os campos $E_1(t) = (1, 0, 0)$, $E_2(t) = (0, \cos(t), -\sin(t))$ e $E_3(t) = (0, \sin(t), \cos(t))$.

Vamos expressar a simetria em termos das coordenadas locais. Pondo $X = X^i \partial_i$ e $Y = Y^j \partial_j$ então vamos calcular $[X, Y]$ em coordenadas locais:

$$\begin{aligned} [X, Y](f) &= X(Y^j \partial_j(f)) - Y(X^i \partial_i(f)) = X(Y^k) \partial_k(f) - Y(X^k) \partial_k(f) \\ &\quad + X^i Y^j \partial_i \partial_j(f) - X^i Y^j \partial_j \partial_i(f) = X(Y^k) \partial_k(f) - Y(X^k) \partial_k(f) \end{aligned}$$

Se uma conexão é simétrica, então teremos

$$\nabla_{\partial_i} \partial_j = \nabla_{\partial_j} \partial_i \Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k \partial_k = \Gamma_{ji}^k \partial_k \Leftrightarrow \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Por outro lado se tivermos $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ em coordenadas locais, então

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = (XY^k - YX^k + (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) X^i Y^j) \partial_k = (XY^k - YX^k) \partial_k = [X, Y].$$

Assim uma conexão é simétrica se em coordenadas locais temos $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Portanto ∇ é simétrica se, e somente se, em coordenadas locais temos $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Agora vamos realmente derivar a conexão das variedades pseudo-Riemannianas.

Teorema 6.4.3 (Lema Fundamental da Geometria pseudo-Riemanniana). Seja (M, g) uma variedade pseudo-Riemanniana. Então existe única conexão compatível com a métrica que é também simétrica.

Chamamos esta conexão de conexão de Levi-Civita ou conexão pseudo-Riemanniana da métrica g .

Demonstração. Vamos mostrar que caso exista esta conexão, ela será única. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, então da compatibilidade com a métrica temos

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle \\ Y \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_Y X \rangle \\ Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Z Y \rangle \end{aligned}$$

Usando a simetria da conexão teremos

$$\begin{aligned} X \langle Y, Z \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_Z X \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle \\ Y \langle Z, X \rangle &= \langle \nabla_Y Z, X \rangle + \langle Z, \nabla_X Y \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle \\ Z \langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X, \nabla_Y Z \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle \end{aligned}$$

Usando estas equações obtemos

$$X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle = 2 \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, [X, Z] \rangle + \langle Z, [Y, X] \rangle - \langle X, [Z, Y] \rangle.$$

A partir disso temos

$$\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \frac{1}{2} (X \langle Y, Z \rangle + Y \langle Z, X \rangle - Z \langle X, Y \rangle - \langle Y, [X, Z] \rangle - \langle Z, [Y, X] \rangle + \langle X, [Z, Y] \rangle).$$

Esta equação chamamos de fórmula de Koszul.

Suponha que ∇^1 e ∇^2 são conexões simétricas e compatíveis com a métrica, então satisfazem a fórmula de Koszul, logo $\langle \nabla_X^1 Y - \nabla_X^2 Y, Z \rangle = 0$ para qualquer X, Y, Z . Fixando X, Y e variando Z , para cada $V \in T_p M$ existe $Z \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $Z_p = V$, logo para cada ponto $p \in M$ temos que $\langle \nabla_X^1 Y - \nabla_X^2 Y|_p, V \rangle = 0$ para todo $V \in T_p M$. Portanto pela não-degenerância da métrica temos $\nabla_X^1 Y = \nabla_X^2 Y$ em cada ponto $p \in M$. Portanto $\nabla^1 = \nabla^2$.

Agora para mostrar a existência, podemos definir em cada sistema de coordenadas e pela unicidade segue que as definições irão coincidir na intersecção.

Então dados (∂_i) referenciais de um sistema de coordenadas locais, então temos que $\langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_\ell \rangle = \Gamma_{ij}^m g_{m\ell}$. Por outro lado, temos pela fórmula de Koszul que

$$\Gamma_{ij}^m g_{m\ell} = \langle \nabla_{\partial_i} \partial_j, \partial_\ell \rangle = \frac{1}{2} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}).$$

Logo temos que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{k\ell}}{2} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}),$$

lembrando que (g^{ij}) denota a matriz inversa de (g_{ij}) . Podemos ver que $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ e portanto ∇ é simétrica.

Vamos mostrar que $\nabla g \equiv 0$, mais precisamente que $g_{ij; k} = 0$. De fato, temos

$$g_{ij; k} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^\ell g_{\ell j} - \Gamma_{kj}^\ell g_{\ell i}$$

Além disso, temos:

$$\Gamma_{ki}^\ell g_{\ell j} + \Gamma_{kj}^\ell g_{\ell i} = \frac{1}{2} (\partial_k g_{ij} + \partial_i g_{kj} - \partial_j g_{ki}) + \frac{1}{2} (\partial_k g_{ji} + \partial_j g_{ki} - \partial_i g_{kj}) = \partial_k g_{ij}.$$

Disso segue que ∇ é compatível com g . ■

Observação 6.4.4. Durante a demonstração mostramos uma fórmula (fórmula de Koszul) para a calcular os símbolos de Christoffel dada por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{g^{k\ell}}{2} (\partial_i g_{j\ell} + \partial_j g_{i\ell} - \partial_\ell g_{ij}).$$

Tomando agora como padrão a conexão de Levi-Civita temos que as geodésicas γ tem seu vetor velocidade $\dot{\gamma}$ paralelo ao longo de si mesma, e portanto $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle$ é constante.

Uma das consequências da unicidade da conexão de Levi-Civita de uma variedade (M, g) é a proposição a seguir. Antes disso vamos definir o pushforward de campos de vetores com relação à um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow \widetilde{M}$ onde dado X campo de vetores em M temos o campo de vetores $\varphi_* X : \widetilde{M} \rightarrow T\widetilde{M}$ onde $\varphi_* X_p = d\varphi(X)_{\varphi^{-1}(p)}$. Se V é um campo ao longo de uma curva então $\varphi_* V(t) = d\varphi(V(t))$ e se $V \in T_p M$ então $\varphi_* V = d\varphi(V)$.

Proposição 6.4.5 (Naturalidade das isometrias). Seja $\varphi : (M, g) \rightarrow (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ uma isometria. Então:

- (a) $\varphi_*(\nabla_X Y) = \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y$ onde ∇ e $\widetilde{\nabla}$ são as conexões de Levi-Civita de (M, g) e $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$, respectivamente.

- (b) $\varphi_*(D_t V) = \tilde{D}_t \varphi_* V$ onde D_t e \tilde{D}_t são as derivadas covariantes de γ e $\varphi \circ \gamma$, respectivamente.
- (c) Se γ é geodésica de ponto p e velocidade V em t_0 , então $\varphi \circ \gamma$ é geodésica de ponto $\varphi(p)$ e velocidade $\varphi_* V$. Além disso se V é campo paralelo ao longo de γ , então $\varphi_* V$ é campo paralelo ao longo de $\varphi \circ \gamma$.
- (d) O seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{\varphi_*} & T_{\varphi(p)} \tilde{M} \\ \downarrow \exp_p & & \downarrow \exp_{\varphi(p)} \\ M & \xrightarrow{\varphi} & \tilde{M} \end{array}$$

Demonstração. O item (d) é consequência direta de (c) e (c) é consequência direta de (b) e (b) segue de (a) e da unicidade da derivada covariante ao longo de curvas. Vamos mostrar o item (a). Defina o pullback da conexão $\tilde{\nabla}$ pondo $\varphi^* \tilde{\nabla}$ uma conexão dada por $(\varphi^* \tilde{\nabla})_X Y = \varphi_*^{-1}(\tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y)$. Além disso $\varphi^* \tilde{\nabla}$ é simétrica e compatível com g . De fato,

$$(\varphi^* \tilde{\nabla})_X Y - (\varphi^* \tilde{\nabla})_Y X = \varphi_*^{-1}(\tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y - \tilde{\nabla}_{\varphi_* Y} \varphi_* X) = \varphi_*^{-1}([\varphi_* X, \varphi_* Y]) = [X, Y].$$

Isto vale, pois dada $f \in C^\infty(\tilde{M})$ temos:

$$\begin{aligned} [\varphi_* X, \varphi_* Y](f) &= \varphi_* X \varphi_* Y(f) - \varphi_* Y \varphi_* X(f) \\ &= \varphi_* X(Y(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}) - \varphi_* Y(X(f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1}) \\ &= X(Y(f \circ \varphi)) \circ \varphi^{-1} - Y(X(f \circ \varphi)) \circ \varphi^{-1} \\ &= [X, Y](f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = \varphi_* [X, Y](f). \end{aligned}$$

Seja $\gamma(-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = X_p$. Então por um lado:

$$\begin{aligned} (\varphi_* X) \langle \varphi_* Y, \varphi_* Z \rangle|_{\varphi(p)} &= \frac{d}{dt} \langle \varphi_* Y, \varphi_* Z \rangle_{\varphi(\gamma(t))} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt} \langle Y, Z \rangle_{\gamma(t)} \Big|_{t=0} \\ &= X \langle Y, Z \rangle|_p \end{aligned}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} (\varphi_* X) \langle \varphi_* Y, \varphi_* Z \rangle|_{\varphi(p)} &= \left\langle \tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y, \varphi_* Z \right\rangle + \left\langle \varphi_* Y, \tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Z \right\rangle \Big|_{\varphi(p)} \\ &= \left\langle \varphi_*^{-1}(\tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Y), Z \right\rangle + \left\langle Y, \varphi_*^{-1}(\tilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Z) \right\rangle \Big|_p \\ &= \left\langle (\varphi^* \tilde{\nabla})_X Y, Z \right\rangle + \left\langle Y, (\varphi^* \tilde{\nabla})_X Z \right\rangle \Big|_p. \end{aligned}$$

Portanto pela unicidade da conexão de Levi-Civita segue que $\varphi^* \tilde{\nabla} = \nabla$. ■

Agora vamos apresentar um sistema de coordenadas especial, chamado de sistema de coordenadas normais.

Proposição 6.4.6 (Existência de vizinhanças normais). Dado $p \in M$, existem vizinhanças $\mathcal{V} \subset T_p M$ que contém 0 e $\mathcal{U} \subset M$ que contém p tal que $\exp_p : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{U}$ define um difeomorfismo.

Demonstração. Vamos mostrar que dado $p \in M$ a aplicação $(\exp_p)_* : T_0(T_pM) \rightarrow T_pM$ é um isomorfismo. Como T_pM é espaço vetorial vamos utilizar a identificação natural $T_0(T_pM) \approx T_pM$. Tome $V \in T_pM$, então tomando $\alpha(t) = tV$ curva em T_pM , temos $\alpha(0) = 0$ e $\dot{\alpha}(0) = V$, então:

$$(\exp_p)_*V = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(tV) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_V(t) = V.$$

■

Como vimos na demonstração $d(\exp_p)_p$ é a aplicação identidade em T_pM , sob a identificação $T_0(T_pM)$ com T_pM .

Uma vizinhança \mathcal{U} tal que $\mathcal{U} = \exp_p(\mathcal{V})$ e \exp_p é difeomorfismo de um aberto estrelado \mathcal{V} em \mathcal{U} é chamada de vizinhança normal.

Se (M, g) é uma variedade pseudo-Riemanniana e g tem índice r , tomando uma base ortonormal (E_i) em T_pM , teremos uma aplicação $T : \mathbb{R}^{n-r, r} \rightarrow T_pM$ que leva a base padrão de $\mathbb{R}^{n-r, r}$ em (E_i) e portanto uma isometria. Tomando uma vizinhança normal \mathcal{U} teremos que $x = T^{-1} \circ (\exp_p)^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$ define uma carta local de M . Esta carta é chamada de sistema de coordenadas normais centrado em p . Este sistema de coordenadas tem várias propriedades interessantes que serão o objeto de estudo da próxima proposição.

Proposição 6.4.7 (Propriedades das coordenadas normais). Seja (\mathcal{U}, x) um sistema coordenadas normais centrado em p e r o índice de g . Então:

- (a) $x(p) = (0, \dots, 0)$.
- (b) Dado $V = V^i \partial_i \in T_pM$, então a geodésica γ_V se escreve, com relação aos vetores da forma

$$x \circ \gamma_V(t) = (tV^1, \dots, tV^n)$$

desde que $\gamma_V(t) \in \mathcal{U}$.

- (c) As componentes da métrica são $g_{ij} = \varepsilon_i \delta_{ij}$ em p , com $\varepsilon_i = 1$ para $1 \leq i \leq n - r$ e $\varepsilon_i = -1$ para $n - r + 1 \leq i \leq n$.
- (d) Temos que $\partial_m g_{ij} = 0$ e $\Gamma_{ij}^k = 0$ em p .

Demonstração. Vamos mostrar (a). Tomando $0 \in T_pM$, temos que $\gamma_0(t) = p$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo $x(p) = x(\exp_p(0)) = T^{-1}(0) = (0, \dots, 0)$.

Para mostrar (b) note que $\gamma_V(t) = \exp_p(tV)$, logo $(\exp_p)^{-1} \circ \gamma_V(t) = tV = tV^i \partial_i$. Como $dx_p = (dT_0)^{-1} \circ d(\exp_p)_p^{-1}$ utilizando a identificação $T_0\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$ e $T_0(T_pM) \approx T_pM$ identificamos $dT_0 = T$, logo como $d(\exp_p)_p$ é a identidade em T_pM segue que $dx_p = T^{-1}$. Logo $T^{-1}(\partial_i|_p) = dx_p(\partial_i|_p) = e_i$ onde (e_i) é a base canônica de $\mathbb{R}^{n-r, r}$ e disso $x \circ \gamma_V(t) = tV^i e_i$. Ainda dessa observação e de que T é isometria de $\mathbb{R}^{n-r, r}$ em T_pM segue $g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j)_p = \langle e_i, e_j \rangle = \varepsilon_i \delta_{ij}$ e portanto mostramos (c).

De (b) pondo $\gamma_V = \gamma$ temos que $\dot{\gamma}(t) = V^i \partial_i$ em um sistema de coordenadas normais tal que $V = V^i \partial_i|_p$, logo $D_t \dot{\gamma}(t) = V^j D_t \partial_j = V^j \dot{\gamma}^i(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \partial_k = V^i V^j \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \partial_k$ e como γ é geodésica segue que $V^i V^j \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) = 0$ para todo k e calculando $t = 0$ temos $V^i V^j \Gamma_{ij}^k(p) = 0$. Em particular escolhendo $V = \partial_i|_p + \partial_j|_p$ temos $V^i = V^j = 1$ e o restante das componentes são nulas. Logo $\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ji}^k = 2\Gamma_{ij}^k = 0$ em p . Além disso $\partial_m g_{ij} = \Gamma_{ki}^\ell g_{\ell j} + \Gamma_{kj}^\ell g_{\ell i} = 0$ em p . ■

Observação 6.4.8. Em coordenadas normais temos que $g_{ij}|_q = \varepsilon_i \delta_{ij} + \mathcal{O}(|x(q) - x(p)|^2)$, ou seja, a métrica g difere da métrica em $\mathbb{R}^{n-r, r}$ por termos de ordem 2.

6.5 Curvatura

Como vimos, um critério necessário, e também suficiente, para existir uma isometria de um aberto de uma variedade M com um aberto de $\mathbb{R}^{n,r}$ é existir um sistema de coordenadas com vetores coordenados ortogonais.

Uma forma de encontrar estes campos é construindo um referencial ortonormal paralelo e assim concluir que existe um sistema de coordenada cujos vetores coordenados é este referencial. Além disso em um aberto isométrico à $\mathbb{R}^{n,r}$ podemos construir sempre um referencial paralelo, utilizando que podemos fazer esta construção em $\mathbb{R}^{n,r}$ e transportar com a isometria.

Uma condição necessária e suficiente para existência de tal referencial pode ser expressa em termos da comutatividade das derivadas de segunda ordem da conexão. Mais precisamente podemos definir $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ com $R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z$. A aplicação R assim definida é um tensor, chamado de tensor de curvatura. De fato, sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f \in C^\infty(M)$, então

$$\begin{aligned} R(X, Y)fZ &= \nabla_X \nabla_Y fZ - \nabla_Y \nabla_X fZ - \nabla_{[X, Y]}fZ \\ &= \nabla_X (f \nabla_Y Z + Y(f)Z) - \nabla_Y (f \nabla_X Z + X(f)Z) - (f \nabla_{[X, Y]}Z + [X, Y](f)Z) \\ &= (f \nabla_X \nabla_Y Z + X(f) \nabla_Y Z + Y(f) \nabla_X Z + XY(f)Z) - (f \nabla_Y \nabla_X Z \\ &\quad + Y(f) \nabla_X Z + X(f) \nabla_Y Z + YX(f)Z) - (f \nabla_{[X, Y]}Z + [X, Y](f)Z) \\ &= fR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

De modo análogo mostramos a linearidade de R sobre $C^\infty(M)$ nas entradas restantes. Em coordenadas podemos expressar $R = R_{ijk}{}^\ell dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes \partial_\ell$. Vamos chamar de tensor de Riemann o tensor dado por $Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$. Em coordenadas temos $Rm = R_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^\ell$ onde $R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}{}^m$

Uma propriedade interessante de R e Rm é o fato de que estes tensores são invariantes locais, ou seja, invariantes por isometria local, como iremos mostrar no teorema a seguir.

Teorema 6.5.1. Se $\varphi : (M, g) \rightarrow (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ é isometria local, ou seja, em cada ponto φ_* é isometria e ao redor da cada ponto existe uma vizinhança deste ponto que onde φ define um difeomorfismo, então

$$\varphi^* \widetilde{Rm} = Rm \text{ e } \widetilde{R}(\varphi_* X, \varphi_* Y)\varphi_* Z = \varphi_*(R(X, Y)Z).$$

Demonstração. Considere $U \subset M$ e $\widetilde{U} \subset \widetilde{M}$ abertos tais que φ define um difeomorfismo de U em \widetilde{U} e portanto uma isometria. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(U)$ pela naturalidade das isometrias das variedades U e \widetilde{U} segue que

$$\begin{aligned} \varphi_*(R(X, Y)Z) &= \varphi_*(\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]}Z) \\ &= \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* \nabla_Y Z - \widetilde{\nabla}_{\varphi_* Y} \varphi_* \nabla_X Z - \widetilde{\nabla}_{\varphi_* [X, Y]} \varphi_* Z \\ &= \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} \widetilde{\nabla}_{\varphi_* Y} \varphi_* Z - \widetilde{\nabla}_{\varphi_* Y} \widetilde{\nabla}_{\varphi_* X} \varphi_* Z - \widetilde{\nabla}_{[\varphi_* X, \varphi_* Y]} \varphi_* Z \\ &= \widetilde{R}(\varphi_* X, \varphi_* Y)\varphi_* Z. \end{aligned}$$

De modo geral, como R é um tensor, então dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $\widetilde{R}(\varphi_* X, \varphi_* Y)\varphi_* Z$ e $\varphi_*(R(X, Y)Z)$ só dependerão do valor de X, Y, Z no ponto e em particular de uma vizinhança de cada ponto. Como mostramos que os dois tensores coincidem numa vizinhança de cada ponto, teremos então que coincidirão em todos os pontos. Além disso da definição de pullback e de $\widetilde{R}(\varphi_* X, \varphi_* Y)\varphi_* Z = \varphi_*(R(X, Y)Z)$ segue que $\varphi^* \widetilde{Rm} = Rm$. \blacksquare

Em $\mathbb{R}^{n,r}$ temos que no sistema de coordenadas padrão $\nabla_Y Z = YZ^k \partial_k$ e $\nabla_X \nabla_Y Z = XYZ^k \partial_k$, logo $R(X, Y)Z = (XYZ^k - YXZ^k - [X, Y]Z^k) \partial_k \equiv 0$. Então qualquer variedade localmente isométrica a $\mathbb{R}^{n,r}$ tem $R \equiv 0$. Na verdade esta condição é também suficiente para a existência

de uma isometria entre um aberto de M e um aberto de $\mathbb{R}^{n,r}$, como mostra o teorema a seguir. Antes disso, diremos que uma variedade M é plana se dado $p \in M$ existe uma vizinhança V de p isométrica a um aberto de $\mathbb{R}^{m-r,r}$, onde m é a dimensão de M e r o índice da métrica em M .

Teorema 6.5.2. Uma variedade M é plana se, e somente se, $R \equiv 0$.

Demonstração. Seja $\dim M = m$ e r o índice da métrica, e coloque $n = m - r$. Suponha que $R \equiv 0$. Vamos mostrar que existe um referencial ortonormal paralelo. De fato, seja $p \in M$, $(E_i|_p)$ uma base ortonormal em $T_p M$ e $x : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^{n,r}$ um sistema de coordenadas tal que $\partial_i|_p = E_i|_p$ (um sistema de coordenadas normais com esta base, por exemplo). Podemos supor que $V = C_\varepsilon = \{x \mid |x^i| < \varepsilon\}$ para algum $\varepsilon > 0$ e $x(p) = 0$.

Considere $\gamma_1 : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\gamma_1(t) = x^{-1}(t, 0, \dots, 0)$, ou seja, o eixo x^1 e considere o transporte paralelo de $(E_i|_p)$ ao longo dessa curva. De modo análogo, para cada $|x^1| < \varepsilon$ considere o transporte paralelo ao longo do eixo x^2 com condição inicial dada pelos vetores resultantes (E_i) resultantes do transporte anterior na coordenada x^1 . Do mesmo modo transportamos paralelamente os vetores resultantes ao longo dos eixos x^3, \dots, x^m teremos uma coleção de campos (E_i) em U . Além disso pela dependência suave das condições iniciais teremos que estes campos serão suaves.

Como o transporte paralelo preserva o produto interno, podemos concluir que (E_i) é um referencial ortonormal. Vamos agora mostrar que estes formam campos paralelos.

De fato, fixe j . Vamos mostrar por indução que em cada $M_k = \{q \in M \mid x^\ell = 0, m \geq \ell \geq k + 1\}$ temos que $\nabla_{\partial_1} E_j = \dots = \nabla_{\partial_k} E_j = 0$.

Para $k = 1$ temos que $\nabla_{\partial_1} E_j$ é a derivada covariante de $D_t E_j$ ao longo de x^1 e portanto é nulo.

Se a afirmação vale para k , então em M_{k+1} por construção $\nabla_{\partial_{k+1}} E_j = 0$ e para $i \leq k$, $\nabla_{\partial_i} E_j = 0$ em M_k . Basta mostrar que $\nabla_{\partial_{k+1}} (\nabla_{\partial_i} E_j) = 0$, pois se isso for verdade, considerando γ_p que passa por um ponto $p \in M_k$ e percorre ao longo de x^{k+1} , teremos que a derivada covariante de $\nabla_{\partial_i} E_j$, como campo tangente à γ_p , ao longo de γ_p é $\nabla_{\partial_{k+1}} (\nabla_{\partial_i} E_j)|_{\gamma(t)} = 0$ e portanto $\nabla_{\partial_i} E_j = 0$ ao longo de cada uma dessa família de curvas γ_p , percorrendo $p \in M_k$. Utilizando a carta x , dado $q \in M_{k+1}$, podemos encontrar $p \in M_k$ e $|t| < \varepsilon$ tais que $q = \gamma_p(t)$ e portanto $\nabla_{\partial_i} E_j = 0$ em q .

Com efeito, temos que a derivada covariante D_t de E_j com relação à curva γ , uma parametrização do eixo x^{k+1} , é um múltiplo não nulo de $\nabla_{\partial_{k+1}} E_j$, mas como $D_t E_j = 0$ por construção, segue que $\nabla_{\partial_{k+1}} E_j = 0$ ao longo de cada curva iniciando em M_k ao longo do eixo x^{k+1} e assim podemos mostrar que $\nabla_{\partial_{k+1}} E_j = 0$ em M_{k+1} . Como $R \equiv 0$ e $[\partial_i, \partial_{k+1}] \equiv 0$ segue que $\nabla_{\partial_{k+1}} (\nabla_{\partial_i} E_j) = \nabla_{\partial_i} (\nabla_{\partial_{k+1}} E_j) = 0$, como queríamos mostrar.

Então a afirmação mostrada por indução vale em particular para $k = m$, ou seja, $\nabla_{\partial_i} E_j = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$ e da linearidade sobre $C^\infty(M)$ na primeira entrada de ∇ segue que E_j é paralelo, para cada j .

Assim, sendo E_i paralelo, teremos que $[E_i, E_j] = \nabla_{E_i} E_j - \nabla_{E_j} E_i \equiv 0$. Então (E_i) é um referencial onde os campos comutam.

O teorema de Frobenius diz que podemos construir o seguinte sistemas coordenadas: “Dado um referencial (E_i) onde os campos comutam em uma vizinhança de p , então existe um sistema de coordenadas y em uma vizinhança, possivelmente menor, de p tal que $\partial_{y^i} = E_i$ ” [1].

Então existe um sistema de coordenadas tendo o referencial ortonormal (E_i) como vetores coordenados e disso será uma isometria de uma vizinhança de p em um aberto de $\mathbb{R}^{n,r}$. ■

Os tensores curvatura e o tensor de Riemann tem várias simetrias que serão apresentadas a seguir.

Proposição 6.5.3. Os tensores de Riemann e de curvatura tem as seguintes simetrias:

(a) $R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z$.

$$(b) Rm(X, Y, Z, W) = -Rm(X, Y, W, Z).$$

$$(c) R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0. \quad (\text{Primeira identidade de Bianchi})$$

$$(d) Rm(X, Y, Z, W) = Rm(Z, W, X, Y).$$

Em componentes teremos:

$$(a) R_{ijk}{}^\ell = -R_{jik}{}^\ell.$$

$$(b) R_{ijkl} = -R_{ijlk}.$$

$$(c) R_{ijk}{}^\ell + R_{kij}{}^\ell + R_{jki}{}^\ell.$$

$$(d) R_{ijkl} = R_{klij}.$$

Demonstração.

(a) Decorre facilmente da definição. Para mostrar (b), pela linearidade, basta mostrar que $Rm(X, Y, Z, Z) \equiv 0$. De fato,

$$\begin{aligned} XY|Z|^2 &= 2X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle = 2(\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle + \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle) \\ YX|Z|^2 &= 2(\langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle) \\ [X, Y]|Z|^2 &= 2 \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle. \end{aligned}$$

$$\text{Logo } 0 = (XY - YX - [X, Y])|Z|^2 = \langle R(X, Y)Z, Z \rangle = Rm(X, Y, Z, Z).$$

Vamos mostrar (c):

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X &= \nabla_X \underbrace{(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y)}_{=[Y, Z]} - \nabla_{[Y, Z]} X \\ &\quad + \nabla_Y \underbrace{(\nabla_Z X - \nabla_X Z)}_{=[Z, X]} - \nabla_{[Z, X]} Y \\ &\quad + \nabla_Z \underbrace{(\nabla_X Y - \nabla_Y X)}_{=[X, Y]} - \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando a primeira identidade de Bianchi, em termos do tensor Rm , teremos:

$$\begin{aligned} Rm(W, X, Y, Z) + Rm(Y, W, X, Z) + Rm(X, Y, W, Z) &= 0 \\ Rm(X, Y, Z, W) + Rm(Z, X, Y, W) + Rm(Y, Z, X, W) &= 0 \\ Rm(Y, Z, W, X) + Rm(W, Y, Z, X) + Rm(Z, W, Y, X) &= 0 \\ Rm(Z, W, X, Y) + Rm(X, Z, W, Y) + Rm(W, X, Z, Y) &= 0. \end{aligned}$$

Somando as equações e aplicando (b) na primeira e terceira parcelas de cada equação teremos que estas parcelas irão se cancelar, restando a soma da segunda parcela de cada equação. Aplicando (a) e (b) teremos $2(Rm(Y, W, X, Z) - Rm(X, Z, W, Y)) = 0$ que é equivalente a (d). ■

Agora vamos apresentar outra identidade, chamada de segunda identidade de Bianchi.

Proposição 6.5.4. A derivada covariante de Rm satisfaz a seguinte propriedade:

$$\nabla_W Rm(X, Y, Z, V) + \nabla_Z Rm(X, Y, V, W) + \nabla_V Rm(X, Y, W, Z) = 0.$$

Em componentes:

$$R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;\ell} = 0.$$

Demonstração. A identidade é equivalente à identidade:

$$(\nabla_W Rm)(Z, V, X, Y) + (\nabla_Z Rm)(V, W, X, Y) + (\nabla_V Rm)(W, Z, X, Y) = 0.$$

Da multilinearidade das derivadas de tensores, basta tomar X, Y, Z, V, W como sendo campos de um referencial. Para cada ponto p escolha um sistema de coordenadas normais e X, Y, Z, V, W campos coordenados com relação à esse sistema, então teremos que $\Gamma_{ij}^k(p) = 0$ logo $\nabla_{\partial_i} \partial_j = 0$ e $[\partial_i, \partial_j] \equiv 0$ logo o colchete ou derivada covariante em cada par de campos, entre os campos X, Y, Z, V, W , é nulo.

Assim usando estes fatos e a compatibilidade com a métrica, obtemos:

$$(\nabla_W Rm)(Z, V, X, Y) = W \langle R(Z, V)X, Y \rangle = \langle \nabla_W \nabla_Z \nabla_V X - \nabla_W \nabla_V \nabla_Z X, Y \rangle$$

Então teremos:

$$\begin{aligned} & (\nabla_W Rm)(Z, V, X, Y) + (\nabla_Z Rm)(V, W, X, Y) + (\nabla_V Rm)(W, Z, X, Y) \\ &= \langle \nabla_W \nabla_Z \nabla_V X - \nabla_W \nabla_V \nabla_Z X + \nabla_Z \nabla_V \nabla_W X - \nabla_Z \nabla_W \nabla_V X \\ &+ \nabla_V \nabla_W \nabla_Z X - \nabla_V \nabla_Z \nabla_W X, Y \rangle \\ &= \langle R(W, Z) \nabla_V X + R(Z, V) \nabla_W X + R(V, W) \nabla_Z X, Y \rangle = 0 \end{aligned}$$

pois $\nabla_V X = \nabla_W X = \nabla_Z X = 0$ em p . ■

Agora vamos introduzir novos tensores que expressam a curvatura de maneira mais simples que o tensor curvatura ou o tensor de Riemann. Um desses é o tensor de Ricci, que iremos denotar por Rc que é o tensor dado pelo traço de R com relação ao primeiro e último índices, isto é:

$$R_{ij} = R_{kij}{}^k = g^{km} R_{kijm}.$$

Note que $R_{ij} = R_{ji}$ devido as simetrias do tensor Rm .

De modo análogo definimos a curvatura escalar S , dada por:

$$S \doteq \text{tr} {}_g Rc = R_i^i = g^{ij} R_{ij}.$$

Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ o divergente deste campo será $\text{div} X \doteq \text{tr} \nabla X = dx^i (\nabla_{\partial_i} X) = \partial_i X^i + \Gamma_{ij}^i X^j$. Se $T \in T_2 M$ e T é simétrico, então o divergente de T é a 1-forma, $\text{div} T \doteq \text{tr} {}_g \nabla T$, com relação a primeira (ou segunda, devido à simetria) e a última entrada. Em coordenadas teremos $(\text{div} T)_i = T_{ik}{}^{;k} = g^{km} T_{ik;m}$. Se $T \in T^2 M$ e T é simétrico, definimos o divergente de T como $\text{div} T = \text{tr} \nabla T$, ou em coordenadas $(\text{div} T)^i = T^{ik}{}_{;k}$.

Lema 6.5.5. A conexão satisfaz a seguinte identidade:

$$\text{div} Rc = \frac{1}{2} \nabla S,$$

ou em coordenadas locais

$$(\text{div} Rc)_i = \frac{1}{2} S_{;i}.$$

Demonstração. Pela segunda identidade de Bianchi temos:

$$R_{ijk\ell;m} + R_{ij\ell m;k} + R_{ijmk;\ell} = 0 \Rightarrow R_{ijk\ell;m} - R_{ijm\ell;k} + R_{ijmk;\ell} = 0.$$

Logo, contraindo os índices i e ℓ , temos

$$g^{i\ell} (R_{ijk\ell;m} - R_{ijm\ell;k} + R_{ijmk;\ell}) = 0 \Rightarrow R_{jk;m} - R_{jm;k} + R_{ijmk}{}^{;i} = 0$$

Agora contraindo os índices j e k segue que:

$$S_{;m} - R_{jm}{}^{;j} - R_{ijm}{}^{j;i} = 0 \Rightarrow S_{;m} - R_{jm}{}^{;j} - R_{jim}{}^{j;i} = S_{;m} - R_{jm}{}^{;j} - R_{im}{}^{;i} = 0$$

Como $R_{im}{}^{;i} = (\text{div} Rc)_m$, temos o resultado. ■

Diremos que uma métrica Semi-Riemanniana será uma métrica de Einstein se existir $\lambda : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Rc = \lambda g$. Neste caso, supondo que a dimensão da variedade é n , tomando o traço com relação a g em ambos os lados teremos $S = \lambda n$, pois $\text{tr } {}_g g = g_{ij}g^{ij} = n$. Logo $\lambda = S/n$. Ou seja, $Rc = Sg/n$.

Proposição 6.5.6. Se g é uma métrica de Einstein de uma variedade conexa de dimensão $n \geq 3$, então sua curvatura escalar é constante.

Demonstração. Teremos que

$$Rc = \frac{S}{n}g$$

Tomando ∇ em ambos os lados teremos

$$\nabla Rc = \frac{1}{n}(\nabla Sg + S\nabla g) = \frac{1}{n}\nabla Sg,$$

pois ∇ é compatível com g . Tomando o traço de ∇Rc , teremos

$$\frac{1}{2}S_{;i} = \frac{1}{n}g^{kl}S_{;k}g_{il} = \frac{1}{n}S_{;i}.$$

Como $n > 2$ temos que $S_{;i} = 0$. Logo $X(S) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Portanto S é constante. ■

Como iremos ver adiante a curvatura de Ricci e a curvatura escalar serão a parte das equações de campo de Einstein.

6.6 Curvatura de Subvariedades

Vamos considerar $(M, g) \xrightarrow{i} (\widetilde{M}, \widetilde{g})$ uma subvariedade mergulhada, pois os cálculos de curvatura são locais e localmente uma imersão é um mergulho, então podemos supor isso sem perda de generalidade. Supondo M um mergulho temos que dado um ponto $p \in M$, existe um sistema de coordenadas $(x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^m)$ definida em uma vizinhança $\widetilde{U} \subset \widetilde{M}$ de p tal que $x^{n+1} = \dots = x^m = 0$ para cada $q \in U = \widetilde{U} \cap M$. Utilizando partições da unidade e estes sistemas de coordenadas podemos estender funções e campos de vetores em M para \widetilde{M} .

Além disso dado $q \in M$, temos que $T_q M$ pode ser identificado com subespaço de $T_q \widetilde{M}$ gerado por $(\partial_1, \dots, \partial_n)$, devido ao fato que $x = (x^1, \dots, x^n)$ é uma carta de M e tem vetores $(\bar{\partial}_1, \dots, \bar{\partial}_n)$ e considerando $\gamma : I \rightarrow M$ dada por $\gamma(t) = x^{-1}(x(p) + te_i)$ é tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = \bar{\partial}_i|_p$, $f \in C^\infty(M)$, então

$$di(\bar{\partial}_i|_p)(f) = \left. \frac{d}{dt}(f \circ i \circ \gamma) \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{dt}(f \circ i \circ x^{-1})(x(p) + te_i) \right|_{t=0}.$$

Considerando $\tilde{x} = (x^1, \dots, x^n, x^{n+1}, \dots, x^m)$, então $\tilde{x} \circ i \circ x^{-1}$ é a aplicação $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0)$, logo $(i \circ x^{-1})(x(p) + te_i) = \tilde{x}^{-1}(\tilde{x}(p) + te_i)$, e assim $di(\bar{\partial}_i|_p)(f) = \partial_i(f)$. Uma consequência disso é que dados campos $X, Y \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$ tangentes a M em pontos de M , teremos que $X = \sum_{i=1}^n X^i \partial_i$ e $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \partial_i$ em pontos de M , logo

$$[X, Y] = \sum_{k=1}^n (X(Y^k) - Y(X^k))\partial_k$$

que é um campo tangente a M em pontos de M .

Teremos que

$$T\widetilde{M}|_M = \coprod_{p \in M} T_p\widetilde{M}$$

é um fibrado vetorial sobre M , tomando vetores coordenados $(\partial_1, \dots, \partial_m)$ em $\widetilde{U} \subset \widetilde{M}$, pondo $U = \widetilde{U} \cap M$ teremos a trivialização local $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^m$ dado por $\varphi(V^i \partial_i|_p) = (p, V^1, \dots, V^m)$. Dado um campo de vetores em \widetilde{M} , sua restrição a $T\widetilde{M}|_M$ será diferenciável. Reciprocamente, dada um campo suave em $T\widetilde{M}|_M$ podemos utilizar as coordenadas (x^i) onde $x^i = 0$ em M para $i \geq n + 1$.

Dado $p \in M$ temos que $T_p\widetilde{M} = T_pM \oplus N_pM$ onde $N_pM = (T_pM)^\perp$, pois \tilde{g} é não degenerado em T_pM se, e somente se, $T_pM \cap N_pM = 0$ e como isso ocorre temos que $\dim T_pM \oplus N_pM = \dim T_pM + \dim N_pM = m$. Definimos

$$NM = \coprod_{p \in M} N_pM.$$

Além disso, utilizando os sistemas de coordenadas (x^i) onde $x^i = 0$ em M para $i \geq n + 1$ podemos construir um referencial ortonormal em \widetilde{U} , $(E_1, \dots, E_n, E_{n+1}, \dots, E_m)$ de \widetilde{M} , tal que em uma vizinhança de $U = \widetilde{U} \cap M$, (E_1, \dots, E_n) é um referencial ortonormal de M . Podemos também definir com os campos diferenciáveis (E_{n+1}, \dots, E_m) uma trivialização local e com isso uma estrutura de fibrado vetorial sobre M .

Denotaremos o conjunto de seções de $T\widetilde{M}|_M$ e NM por $\mathfrak{X}(\widetilde{M}|_M)$ e $\mathcal{N}(M)$, respectivamente.

Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ vamos identificar estes com suas extensões. Definindo $\nabla_X Y = \pi(\tilde{\nabla}_X Y)$, onde $\pi : T\widetilde{M}|_M \rightarrow TM$ é definido pela projeção ortogonal de $V \in T_p\widetilde{M}$ sobre T_pM , vamos mostrar que esta é a conexão de Levi-Civita de M . De fato, $\tilde{\nabla}_X Y|_p$, com $p \in M$, independe da extensão, pois este depende somente de Y ao longo de uma curva com vetor tangente em p como sendo X_p , e como X_p é tangente a T_pM podemos tomar uma curva ao longo de M , e isto em qualquer extensão de Y . Além disso:

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \tilde{\nabla}_X Y, Z \rangle + \langle Y, \tilde{\nabla}_X Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle,$$

pois como Y, Z são tangentes à M ao longo de M . Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, então suas extensões são tangentes a M ao longo de M , logo $[X, Y]$ é tangente a M ao longo de M , como observamos anteriormente. Assim $\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X = [X, Y]$ e aplicando π teremos $\nabla_X Y - \nabla_Y X = \pi[X, Y] = [X, Y]$ devido a observação anterior. Portanto ∇ é a conexão de Levi-Civita de M .

Definindo $II : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{N}(M)$ dado por $II(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp$ ainda identificando $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ com alguma extensão em \widetilde{M} , como visto anteriormente, teremos que $II(X, Y)$ independe das extensões escolhidas e portanto é bem definido. Além disso $II(X, Y) = (\tilde{\nabla}_X Y)^\perp = (\tilde{\nabla}_Y X)^\perp + [X, Y]^\perp = (\tilde{\nabla}_Y X)^\perp = II(Y, X)$, pois $[X, Y]$ é tangente a M ao longo de M . Além disso, $II(X, Y)$ é linear sobre $C^\infty(M)$ em X , logo pela simetria de II segue que o mesmo ocorre em Y . A aplicação II é chamada de segunda forma fundamental e assim podemos enunciar o lema.

Lema 6.6.1. A segunda forma fundamental é:

- (a) Bilinear sobre $C^\infty(M)$.
- (b) Simétrica.

Juntando algumas informações expostas anteriormente teremos o seguinte resultado.

Teorema 6.6.2 (Fórmula de Gauss). Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e extensões arbitrárias em \widetilde{M} , então ao longo de M teremos:

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + II(X, Y).$$

Como consequência também teremos.

Corolário 6.6.3 (Fórmula de Gauss para curvas). Seja γ uma curva na subvariedade M de \widetilde{M} . Se V é um campo ao longo de γ tangente a M então:

$$\widetilde{D}_t V = D_t V + II(\dot{\gamma}, V).$$

Aplicando o corolário em $\dot{\gamma}$ teremos:

$$\widetilde{D}_t \dot{\gamma} = D_t \dot{\gamma} + II(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}).$$

Em particular, se γ é geodésica de M então:

$$\widetilde{D}_t \dot{\gamma} = II(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}).$$

Vamos agora mostrar a relação entre a geometria intrínseca e a geometria extrínseca de M , dadas em termos dos tensores de curvatura de M e \widetilde{M} com conexão dada pela segunda forma fundamental.

Lema 6.6.4 (Equação de Weingarten). Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $N \in \mathcal{N}(M)$. Sejam X, Y, N extendidos de maneira arbitrária a \widetilde{M} , então, em pontos de M , teremos:

$$\langle \widetilde{\nabla}_X N, Y \rangle = -\langle N, II(X, Y) \rangle.$$

Demonstração. Como $\langle N, Y \rangle = 0$ em M e X é tangente a M ao longo de M , segue que:

$$0 = X \langle N, Y \rangle = \langle \widetilde{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, II(X, Y) \rangle,$$

pois N é ortogonal a $\nabla_X Y$ em pontos de M . ■

Teorema 6.6.5 (Equação de Gauss). Sejam $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ extendidos arbitrariamente em \widetilde{M} , então vale a equação:

$$\widetilde{Rm}(X, Y, Z, W) = Rm(X, Y, Z, W) - \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle.$$

Demonstração. Ao longo de M , pela fórmula de Gauss, segue que:

$$\begin{aligned} \widetilde{Rm}(X, Y, Z, W) &= \langle \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X, Y]} Z, W \rangle \\ &= \langle \widetilde{\nabla}_X \nabla_Y Z + \widetilde{\nabla}_X II(Y, Z) - \widetilde{\nabla}_Y \nabla_X Z + \widetilde{\nabla}_Y II(X, Z) \\ &\quad - \nabla_{[X, Y]} Z - II([X, Y], Z), W \rangle. \end{aligned}$$

Como II toma valores em NM e W é tangente a M o último termo é nulo. Aplicando a equação de Weingarten, tomando $II(Y, Z)$ e $II(X, Z)$ no lugar de N , teremos:

$$\begin{aligned} \widetilde{Rm}(X, Y, Z, W) &= \langle \widetilde{\nabla}_X \nabla_Y Z, W \rangle - \langle II(Y, Z), II(X, W) \rangle - \langle \widetilde{\nabla}_Y \nabla_X Z, W \rangle \\ &\quad + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle. \end{aligned}$$

Novamente, como W é tangente a M so longo de M , decompondo os termos que envolvem $\widetilde{\nabla}$ em parte tangente e ortogonal, então a parte ortogonal se anulará. Assim reordenando os termos teremos:

$$\begin{aligned} \widetilde{Rm}(X, Y, Z, W) &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle - \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle \\ &\quad + \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle, \end{aligned}$$

e disso segue o teorema. ■

Agora temos as ferramentas necessárias para justificar as curvaturas média e gaussiana de subvariedades de $\mathbb{R}^{2,1}$.

Vamos começar pela curvatura média. Seja $M \subset \mathbb{R}^{2,1}$ uma superfície mergulhada orientável, então esta deverá ser tipo-tempo ou tipo-espaço, com aplicação normal de Gauss N . Defina $\langle N, N \rangle = \varepsilon$, $\tilde{\nabla}$ a conexão em $\mathbb{R}^{2,1}$, ∇ a conexão em M . Como M tem codimensão 1, podemos escrever $II(X, Y) = h(X, Y)N$ e isto vale se, e somente se, $h(X, Y) = \varepsilon \langle II(X, Y), N \rangle$.

Além disso, pela fórmula de Weingarten, usando que N é normal a M e que dados campos de vetores Z, W em $\mathbb{R}^{2,1}$, temos $\tilde{\nabla}_Z W = dW(Z)$, sob a identificação $T_p \mathbb{R}^{2,1} \approx \mathbb{R}^{2,1}$, considerando extensões de X, Y, N , segue que:

$$h(X, Y) = \varepsilon \langle II(X, Y), N \rangle = \varepsilon \langle \tilde{\nabla}_X Y, N \rangle = \varepsilon \langle -\tilde{\nabla}_X N, Y \rangle = \varepsilon \langle -dN(X), Y \rangle.$$

Escolhendo um referencial ortonormal (E_1, E_2) de M , onde o segundo vetor é tipo-tempo se M é tipo-tempo, temos $g_{11} = 1$ e $g_{22} = -\varepsilon$:

$$\text{tr}_g h = g^{ij} h_{ij} = h_{11} - \varepsilon h_{22}.$$

Pondo

$$\begin{cases} -dN(E_1) = a_{11}E_1 + a_{21}E_2 \\ -dN(E_2) = a_{12}E_1 + a_{22}E_2 \end{cases}$$

teremos que $a_{11} = \varepsilon h_{11}$, $a_{21} = -h_{12}$, $a_{12} = \varepsilon h_{21}$ e $a_{22} = -h_{22}$. Então

$$\varepsilon \det(-dN) = \varepsilon(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = -(h_{11}h_{22} - h_{12}^2),$$

e

$$\frac{\varepsilon}{2} \text{tr}(-dN) = \frac{\varepsilon}{2}(a_{11} + a_{22}) = \frac{1}{2}(h_{11} - \varepsilon h_{22}) = \frac{1}{2} \text{tr}_g h.$$

Esta definição coincide com a definição de \mathbb{R}^3 , pois em \mathbb{R}^3 a curvatura média é justamente $(\text{tr}_g h)/2$ onde h é definida por $II(X, Y) = h(X, Y)N$.

Agora vamos mostrar a consistência da curvatura de Gauss. Note que em \mathbb{R}^3 teremos que $K = \det(-dN) = \det(h_{ij})$. Outra observação é que como $\widetilde{Rm} \equiv 0$, teremos que a equação de Gauss em subvariedades semi-Riemannianas de codimensão 1 dos espaços $\mathbb{R}^{m,n}$ pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Rm(X, Y, Z, W) &= \langle II(X, W), II(Y, Z) \rangle - \langle II(X, Z), II(Y, W) \rangle \\ &= \varepsilon(h(X, W)h(Y, Z) - h(X, Z)h(Y, W)), \end{aligned}$$

onde $\langle N, N \rangle = \varepsilon$.

Teorema 6.6.6 (*Theorema Egregium* de Gauss). Seja M superfície orientável mergulhada em \mathbb{R}^3 e g a métrica induzida. Dado $p \in M$ e (X, Y) uma base de $T_p M$, a curvatura de Gauss de M em p é dada por:

$$K = \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}.$$

Em particular K é um invariante de (M, g) por isometrias (locais).

Demonstração. Considere inicialmente (E_1, E_2) base ortonormal de $T_p M$. Pelo teorema da equação de Gauss em \mathbb{R}^3 teremos:

$$Rm(E_1, E_2, E_2, E_1) = h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21} = \det(h_{ij}) = K.$$

Tomando uma base qualquer (X, Y) de T_pM , utilizando o processo de Gram-Schmidt teremos a base ortonormal:

$$E_1 = \frac{X}{|X|}$$

$$E_2 = \frac{Y - \frac{\langle X, Y \rangle}{|X|^2} X}{\left| Y - \frac{\langle X, Y \rangle}{|X|^2} X \right|}$$

Pelo caso especial temos:

$$\begin{aligned} K &= Rm(E_1, E_2, E_2, E_1) \\ &= \frac{Rm(X, Y - \frac{\langle X, Y \rangle}{|X|^2} X, Y - \frac{\langle X, Y \rangle}{|X|^2} X, X)}{|X|^2 \left| Y - \frac{\langle X, Y \rangle}{|X|^2} X \right|^2} \\ &= \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2 \left(|Y|^2 - 2 \frac{\langle X, Y \rangle^2}{|X|^2} + \frac{\langle X, Y \rangle^2}{|X|^2} \right)} \\ &= \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} \\ &= \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}. \end{aligned}$$

A terceira linha segue do fato que $Rm(X, X, \cdot, \cdot) = Rm(\cdot, \cdot, X, X) = 0$. ■

Este teorema mostra como a curvatura de Gauss, apesar da definição a princípio extrínseca, pode ser expressa em termos de quantidades que dependem somente da métrica.

Motivados pelo *Theorema Egregium* definimos curvatura gaussiana de variedades de dimensão 2 abstratas, dada pela fórmula

$$K = \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}.$$

A partir disso teremos a seguinte proposição, que valerá para qualquer variedade de dimensão 2.

Então em superfícies de $\mathbb{R}^{2,1}$ segue que

$$K = \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2} = \varepsilon \frac{h(X, X)h(Y, Y) - h(X, Y)^2}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}$$

Tomando $(X, Y) = (E_1, E_2)$ uma base ortonormal de M teremos:

$$K = \varepsilon \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{-\varepsilon} = -(h_{11}h_{22} - h_{12}^2) = \varepsilon \det(-dN),$$

como já calculamos.

Proposição 6.6.7. Seja M uma variedade semi-Riemanniana de dimensão 2, então podemos relacionar a curvatura de Gauss K com os tensores de curvatura da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} Rm(X, Y, Z, W) &= K(\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle) \\ R(X, Y)Z &= K(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y) \\ Rc(X, Y) &= K \langle X, Y \rangle \\ S &= 2K. \end{aligned}$$

Assim K determina completamente os tensores de curvatura.

Demonstração. Basta provar a primeira equação, pois a segunda segue da não degenerância da métrica e as restantes da definição. Da definição de curvatura de Gauss temos:

$$Rm(X, Y, Y, X) = K(\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2)$$

Seja (E_1, E_2) base ortonormal de $T_p M$, $T(X, Y, Z, W) = K(\langle X, W \rangle \langle Y, Z \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle) = T_{ijkl} \varphi^i \otimes \varphi^j \otimes \varphi^k \otimes \varphi^\ell$, então $R_{ijkl} = T_{ijkl} = 0$ se $i = j$ ou $k = \ell$. Da definição segue que $R_{1221} = T_{1221} = K$ e das simetrias de Rm segue que:

$$R_{1221} = R_{2112} = -R_{2121} = -R_{1212} = K.$$

Logo determinamos que $T_{ijkl} = R_{ijkl}$ para todo $i, j, k, \ell = 1, 2$, como queríamos demonstrar. ■

Definimos agora a curvatura seccional de uma variedade M com relação à um subespaço de dimensão 2 não degenerado $\Pi \subset T_p M$ para um ponto $p \in M$ dado. Seja (X, Y) uma base de Π , então a curvatura seccional com relação ao plano Π , denotada por $K(\Pi)$

$$K(\Pi) \doteq \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{\langle X, X \rangle \langle Y, Y \rangle - \langle X, Y \rangle^2}.$$

Podemos também denotar por $K(X, Y)$, para (X, Y) base de algum plano.

Capítulo 7

Transição entre a Relatividade Especial e Geral

Até agora a relatividade especial não está considerando a gravidade como uma força possível. Aqui vamos introduzir a gravidade e as suas consequências com alguns experimentos.

7.1 Desvio gravitacional

Vamos agora explicar o fenômeno do desvio gravitacional, também chamado de *gravitational redshift*, considerando o seguinte experimento para ilustrar o fenômeno:

- (i) Considere um objeto de massa m em uma torre de altura h que será solto do topo da torre.
- (ii) Quando solto o objeto terá energia da massa e cinética, que pode ser aproximada por $mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 = mc^2 + mgh$.
- (iii) Suponha que é possível transformar toda a energia em um único fóton de energia $E = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2$ (esta transformação não irá violar as leis de conservação, visto que a terra pode absorver o momento relativístico do objeto e não sua energia).
- (iv) Com a chegada deste fóton no topo da torre suponha novamente que toda a energia relativística do fóton E' é transformada novamente em matéria de massa m' , que terá energia $E' + m'gh$.

Assim devemos ter $E' = m'c^2$ e portanto a massa do novo objeto deverá ser $m' = m$, senão teríamos um ganho de energia contrário à conservação da energia. Assim o fóton perde energia ao ir na direção contrária ao campo gravitacional e a perda de energia pelo fóton pode ser medida pelo desvio de frequência.

Então como a energia de um fóton é hf onde f é a frequência do fóton e h é a constante de Planck, teremos que

$$\frac{f'}{f} = \frac{E'}{E} = \frac{mc^2}{mc^2 + mgh} = \frac{1}{1 + \frac{gh}{c^2}} < 1 \Rightarrow f' < f.$$

Apesar de apenas ilustrativo há experimentos como por exemplo o experimentos de Pound e Rebka (1960) e o experimento de Pound e Snider (1965), que basicamente medem a diferença de frequência da emissão embaixo da torre e a frequência no topo da torre. Isso irá respeitar a conservação do quadrimomento, mais precisamente a conservação de massa-energia, porém iremos perder, em parte, a relatividade especial ao introduzir a gravidade.

7.2 Não existência de referenciais inerciais na Terra

Outra consequência da introdução da gravidade é que não existirá referencial inercial em repouso na Terra, que pode ser demonstrado juntamente com a observação do experimento de Pound-Rebka-Snider. Considere dois pares de eventos: a emissão de dois feixes de luz no pé da torre, com um intervalo de tempo entre as emissões, e a recepção dos mesmos no topo da torre.

Seja $X(u) = (x(u), y(u), z(u), ct(u))$ a trajetória de um fóton.

Se a Terra fosse um referencial inercial, teríamos que $x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2 = c^2 t'(u)^2$, logo

$$\Delta t = \frac{1}{c} \int_{u_0}^{u_1} \sqrt{x'(u)^2 + y'(u)^2 + z'(u)^2} du.$$

Portanto o intervalo de tempo entre dois pontos da trajetória da luz só depende do caminho percorrido por este no espaço.

Considerando a emissão e recepção de dois feixes de luz para fora da Terra, $t_E^{(i)}$ o instante da emissão do feixe i e $t_R^{(i)}$ o instante da recepção do feixe i . Temos que

$$t_R^{(1)} - t_E^{(1)} = t_R^{(2)} - t_E^{(2)},$$

logo

$$\Delta t_R \doteq t_R^{(2)} - t_R^{(1)} = t_E^{(2)} - t_E^{(1)} \doteq \Delta t_E.$$

Porém as diferenças de frequência implicam que o tempo passa mais devagar para pontos mais próximos da Terra, logo $\Delta t_E < \Delta t_R$ (como será explicado mais detalhadamente quando for explicado os efeitos da gravidade sobre o tempo), contradizendo a suposição que o referencial é inercial.

7.3 Princípio da Equivalência

Agora que foi levantado o problema da impossibilidade de existência de referenciais inerciais em repouso na Terra, vamos resolver este problema parcialmente dando um referencial em que localmente podemos utilizar a relatividade especial para resolver os problemas físicos.

Vamos considerar um referencial em queda livre sob o campo gravitacional. Ao menos nos limites Newtonianos da gravidade teremos que todas as partículas livres irão acelerar na mesma proporção, o que nos dá ao menos um referencial interessante de trabalhar. Neste referencial também não há o desvio gravitacional da luz, que pode ser um indício de que podemos recuperar a relatividade especial nesse referencial.

Um exemplo para deixar mais claro o que foi dito é o seguinte: Suponha que um foguete sem a ação da gravidade acelera bruscamente. Um astronauta que está com os pés no chão irá perceber a aceleração, porém um objeto flutuando dentro do foguete não irá “perceber” esta aceleração até encostar no chão ou alguma parede do foguete. Diferentemente se o foguete estivesse em queda livre, gravidade age em todos os objetos dentro do foguete da mesma maneira.

Vamos adotar o princípio da equivalência, mais precisamente o que chamaremos de princípio da equivalência de Einstein, que iremos expor posteriormente. Este princípio implica a seguinte afirmação: “As leis que descrevem a física (equações diferenciais) em um referencial em queda livre tem a mesma forma local que um referencial inercial na relatividade especial”.

Esta solução é parcial porque como o campo gravitacional segundo a lei da gravitação universal não é uniforme globalmente teremos problemas ao construir um referencial inercial global sob a ação da gravidade, ou seja, só podemos considerar um referencial em queda livre para descrever fenômenos nas proximidades da origem do referencial, onde próximo depende do quão não uniforme é o campo gravitacional, ou seja, quanto as linhas de campo variam conforme as distâncias que são consideradas no experimento.

Vamos agora enunciar precisamente o **Princípio da Equivalência de Einstein**:

- (i) **Princípio da Equivalência Fraco:** Se um corpo eletricamente neutro é colocado em um ponto do espaço-tempo com uma velocidade inicial dada, então sua trajetória será independente de sua estrutura interna ou composição.

Por corpo se quer dizer um objeto com energia gravitacional desprezível, tamanho pequeno de modo que não detecta a não uniformidade do campo gravitacional e sem forças agindo sobre o mesmo.

- (ii) **Invariância Posicional Local:** O resultado de um experimento local em um laboratório em queda livre é independente da posição do mesmo no espaço-tempo.
- (iii) **Invariância de Lorentz Local:** O resultado de um experimento local em um laboratório em queda livre é independente da velocidade do mesmo no espaço-tempo.

Por experimento local entende-se um experimento isolado de forças e campos externos ao laboratório e com efeitos de gravitação do próprio experimento negligenciáveis.

Assim inspirados na métrica de Minkowski e geometria Riemanniana, podemos deduzir as bases geométricas da Relatividade Geral com os **princípios da Teoria Métrica da Gravidade** a seguir:

- (i) O espaço-tempo é uma variedade de dimensão 4 que possui uma métrica g . Além disso se p é a origem de um referencial em queda livre temos $g_{ij} = \eta_{ij} + \mathcal{O}\left(\sum_i |x^i - x^i(p)|^2\right)$, neste referencial, ou em outras palavras, $g_{ij}(p) = \eta_{ij}$ e $\partial_k g_{ij}(p) = 0$ para cada i, j, k .
- (ii) As trajetórias de partículas livres são geodésicas com respeito a essa métrica.
- (iii) Em um referencial em queda livre as leis da físicas locais (no sentido do princípio da equivalência) que não envolvem gravitação são as mesmas que as da relatividade especial.

O item (iii) é facilmente justificável, visto que o resultado de experimentos locais em qualquer referencial em queda livre é o mesmo e os referenciais inerciais na relatividade especial são em particular referenciais em queda livre sem a ação da gravidade.

A princípio poderíamos pensar que o referencial em queda livre poderia ser substituído por um sistema de coordenadas normais. Porém a diferença está no fato que este referencial tem algumas das propriedades do sistema de coordenadas normais e as leis da relatividade especial podem ser recuperados, isso nos dá mais informação física que somente o sistema de coordenadas normais.

7.3.1 Física em espaço-tempo curvo

Vamos tentar agora entender uma solução específica da relatividade geral a fim de nos familiarizarmos com o pensamento da física a partir das métricas do espaço-tempo. Como ainda não estudamos como encontrar estas soluções, vamos somente interpretá-las.

Considere a solução fraca de campos gravitacionais (mais explicitamente, a energia potencial gravitacional é muito menor que a energia de repouso, ou seja, $|m\varphi| \ll mc^2$) com a métrica $g = (1 - 2\varphi/c^2)(dx^2 + dy^2 + dz^2) - (1 + 2\varphi/c^2)c^2 dt^2$, onde $\varphi = -GM/r$. Como as soluções são fracas, vamos considerar $|\varphi| \ll c^2$ e além disso vamos considerar baixas velocidades, $\|v\| \ll c$.

Como visto anteriormente, se X é a posição no espaço-tempo de uma partícula em queda livre, então temos que $\frac{D}{d\tau} \dot{X} = 0$, a equação geodésica, onde $\dot{X} = \frac{d}{d\tau} X$ e as derivadas de maior ordem são em relação a τ , exceto em menção contrária. Em coordenadas temos:

$$\ddot{x}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{x}^i \dot{x}^j = 0$$

Vamos considerar primeiro $k = 4$, então como estamos considerando $\|v\| \ll c$, segue que utilizando $\|v\| = 0$ e multiplicando a equação geodésica por m^2 teremos:

$$\ddot{x}^4 + \Gamma_{44}^4 \dot{x}^4 \dot{x}^4 = 0 \Rightarrow m\dot{p}^4 + \Gamma_{44}^4 (p^4)^2 = 0$$

onde p^4 é a quarta componente do quadrimomento $P = m\dot{X}$. Como g_{ij} é diagonal neste sistema de coordenadas, segue que g^{ij} também será diagonal, logo $g^{ij} = \delta^{ij}/g_{ij}$ (aqui não se denota soma). Logo

$$\Gamma_{44}^4 = \frac{1}{2} g^{4i} (\partial_4 g_{4i} + \partial_4 g_{4i} - \partial_i g_{44}) = \frac{1}{2} \frac{1}{-c^2(1 + 2\varphi/c^2)} \partial_4 (-c^2(1 + 2\varphi/c^2)) = \frac{\partial_t \varphi}{c^2(1 + 2\varphi/c^2)}$$

Então utilizando $E = \gamma(v)mc^2 \approx mc^2$, pois $\|v\| \ll c$ e $|\varphi| \ll c^2$, teremos a seguinte aproximação:

$$m \frac{d}{d\tau} p^4 = -\Gamma_{44}^4 (p^4)^2 = -\frac{\partial_t \varphi}{c^2(1 + 2\varphi/c^2)} m^2 c^4 \gamma(v)^2 \approx -\partial_t \varphi m^2 c^2$$

Como p^4 é a energia neste referencial, segue que a energia é conservada se φ não depende do tempo.

De modo análogo podemos concluir para as outras componentes que:

$$m\dot{p}^k + \Gamma_{44}^k (p^4)^2 = 0.$$

Porém temos que para $k \neq 4$, $g^{kj} = \delta^{kj}/(1 - 2\varphi/c^2)$, logo $g_{4k} \equiv 0$ e portanto

$$\Gamma_{44}^k = \frac{1}{2} \frac{\delta^{kj}}{1 - 2\varphi/c^2} (2\partial_4 g_{4j} - \partial_j g_{44}) = \frac{\delta^{kj} \partial_j \varphi}{c^2(1 - 2\varphi/c^2)} \approx \frac{\delta^{kj} \partial_j \varphi}{c^2}.$$

Logo

$$m \frac{d}{d\tau} p^k = -\Gamma_{44}^k (p^4)^2 = -\delta^{kj} \partial_j \varphi m^2 \Rightarrow \frac{d}{d\tau} p^k = -m \delta^{kj} \partial_j \varphi$$

Este seria o correspondente para a Lei da Gravitação Universal:

$$\frac{d}{dt} p = -m \text{grad } \varphi.$$

Neste novo sentido temos uma teoria sem referenciais preferidos, pois podemos utilizar os símbolos de Christoffel para a partir de quantidades que variam conforme o sistema de coordenadas, como dX/dt , para quantidades invariantes por mudança de coordenada, como $dX/d\tau$.

Outra diferença é que aqui não definimos energia potencial gravitacional, pois supondo uma partícula somente sob a ação da gravidade, pelo princípio da equivalência se colocarmos um referencial em queda livre com mesma velocidade da partícula, teremos que o referencial irá acompanhar a partícula, logo as medidas locais neste referenciais são as mesmas que da relatividade restrita, logo a energia da partícula provém somente de sua massa, portanto não há um aumento de energia devido à alguma força.

Outro modo de ver isso é que as partículas livres tem suas trajetórias ao longo de geodésicas, que são as curvas de aceleração nula. Podemos fazer uma generalização da primeira lei de Newton, tanto na relatividade especial, quanto na relatividade geral. Assim a gravidade não pode ser uma força, pois caso contrário geraria uma aceleração e portanto as trajetórias não seriam geodésicas.

7.4 Tensor de Energia-Momento

Vamos nos encaminhar para justificar as equações de campo de Einstein. Para isso vamos introduzir uma forma do tensor de energia-momento, que sob outras configurações, como a ação

exclusiva de campos eletromagnéticos, tem outra forma da que será introduzida, porém ainda será uma densidade de energia/momento.

Por ora vamos considerar uma distribuição contínua de matéria no espaço de Minkowski e considerar também um fluido perfeito, isto é, que pode ser caracterizado por sua densidade ρ , pressão p e quadrivelocidade U .

Aqui vamos definir um tensor que nos dá a massa, que na relatividade especial não se distingue da energia, então ao invés de considerarmos somente a massa, vamos considerar toda manifestação de energia como fonte de gravidade. Como o momento relativístico, a massa e a energia estão relacionadas entre si, assim podemos considerar essas três quantidades como fontes de gravidade. Colocamos todas essas informações no tensor de energia-momento T dado por:

$$T^{ij} \doteq (\rho + p/c^2)u^i u^j + p\eta^{ij}$$

e $T = T^{ij}e_i \otimes e_j$, onde $(e_i)_{i=1}^4$ é a base canônica do espaço de Minkowski, η é a métrica do espaço de Minkowski e u^i é a componente i do quadrimomento U do fluido. Podemos notar que T é simétrico. Além disso temos:

$$\begin{aligned} T^{ij}u_j &= T^{ij}u^k\eta_{kj} = \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^i \underbrace{u^j u^k \eta_{kj}}_{=U \cdot U = -c^2} + pu^k \underbrace{\eta^{ij} \eta_{kj}}_{=\delta_k^i} \\ &= -c^2 \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)u^i + pu^k = -\rho c^2 u^i \end{aligned}$$

Portanto $-T^{ij}u_j/c^2$ é a densidade da componente i do quadrimomento.

Outra interpretação para o tensor de energia-momento é que a componente T^{ij} é o fluxo da i -ésima componente do quadrimomento ao longo de uma superfície suficientemente pequena contida na hiperfície que x^j é uma coordenada constante. O princípio da conservação do quadrimomento implicará que $\text{div } T = 0$, ou equivalentemente, $T^{ij}{}_{;i} = \partial_i T^{ij} = 0$ para cada j . Além disso temos que $T^{ij}{}_{;i} = 0$ independente da configuração de energia e momento no espaço-tempo e chamamos esta propriedade de conservação local da energia-momento. No caso de um fluido perfeito temos as seguintes equações:

$$\begin{aligned} \partial_i T^{ij} &= \partial_i(\rho u^i)u^j + \rho u^i \partial_i u^j + \left(\frac{p}{c^2}\right)\partial_i u^i u^j + \left(\frac{p}{c^2}\right)u^i \partial_i u^j \\ &\quad + \left(\frac{1}{c^2}\right)\partial_i p u^i u^j + \partial_i p \eta^{ij} = 0 \end{aligned}$$

Note que $u^i u_i = -c^2$ e derivando esta relação temos:

$$\partial_k u^i u_i + u^i \partial_k u_i = 0.$$

Porém trocando os índices, teremos

$$u^i \partial_k u_i = u^i \partial_k u^j \eta_{ij} = u^j \partial_k u^i \eta_{ji} = u^j \partial_k u^i \eta_{ij} = \partial_k u^i u_i.$$

Portanto teremos que $2\partial_k u^i u_i = 0$. Assim teremos que:

$$\begin{aligned} \partial_i T^{ij}u_j &= \partial_i(\rho u^i) \underbrace{u^j u_j}_{=-c^2} + \rho u^i \underbrace{\partial_i u^j u_j}_{=0} + \left(\frac{p}{c^2}\right)\partial_i u^i \underbrace{u^j u_j}_{=-c^2} + \left(\frac{p}{c^2}\right)u^i \underbrace{\partial_i u^j u_j}_{=0} \\ &\quad + \left(\frac{1}{c^2}\right)\partial_i p u^i \underbrace{u^j u_j}_{=-c^2} + \partial_i p \underbrace{\eta^{ij} u_j}_{=u^i} = -c^2 \left(\partial_i(\rho u^i) + \left(\frac{p}{c^2}\right)\partial_i u^i\right) \end{aligned}$$

Portanto segue a equação da continuidade relativística:

$$\partial_i(\rho u^i) + \left(\frac{p}{c^2}\right)\partial_i u^i = 0. \quad (7.1)$$

Então a partir dessa equação podemos concluir a equação do momento de fluido relativístico:

$$\partial_i T^{ij} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \partial_i u^j u^i + \left(\frac{u^i u^j}{c^2} + \eta^{ij} \right) \partial_i p = 0. \quad (7.2)$$

Para justificar que vale $T^i{}_{;i} = 0$ vamos mostrar que estes sistemas de equações são generalizações das equações de continuidade e das equações de momento do fluido.

Para fluidos no limite não-relativístico teremos $|v^i|/c \ll 1$ para $i = 1, 2, 3$ e $p/c^2 \ll 1$, logo teremos a aproximação $v^i = u^i$ para $i = 1, 2, 3$. Portanto a equação (7.1) se reduz à

$$\partial_i(\rho v^i) = 0 \Leftrightarrow \partial_1(\rho v^1) + \partial_2(\rho v^2) + \partial_3(\rho v^3) + \partial_4(\rho c) = 0.$$

Como $x^4 = ct$ teremos que:

$$\partial_1(\rho v^1) + \partial_2(\rho v^2) + \partial_3(\rho v^3) + \partial_t \rho = 0.$$

Esta é a equação da continuidade

$$\nabla \cdot (\rho v) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Do mesmo modo aproximando $|v^i|/c$ por 0 temos que:

$$\left(\frac{u^i u^j}{c^2} + \eta^{ij} \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Assim a equação (7.2) se reduz à:

$$\rho v^i \partial_i v^j + \left(\frac{v^i v^j}{c^2} + \eta^{ij} \right) \partial_i p = 0.$$

Em notação vetorial este sistema de equações será equivalente à:

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla \right) v + \nabla p = 0.$$

Esta é a equação de momento para um fluido somente com a força superficial da pressão, onde $\left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla \right)$ é o operador derivada material com relação ao campo de velocidades v . Portanto as equações (7.1) e (7.2) constituem generalizações das fórmulas já conhecidas da mecânica dos fluidos.

Uma generalização do tensor de energia-momento para fluido perfeitos será:

$$T^{ij} \doteq (\rho + p/c^2) u^i u^j + p g^{ij}.$$

Também valerá o divergente nulo $T^i{}_{;i} = 0$ independente da configuração de energia e momento do espaço-tempo considerado, como iremos provar como teorema.

Teorema 7.4.1. Seja T o tensor de energia-momento em espaço tempo qualquer. Então $\text{div } T = T^i{}_{;i} = 0$.

Demonstração. Pelo princípio da equivalência escolhendo um referencial em queda livre em um evento p no espaço-tempo teremos a conservação local de energia e momento, logo $\partial_i T^{ij}(p) = 0$ na origem p deste referencial. Temos que $\Gamma^k{}_{ij}(p) = 0$, pois $\partial_k g_{ij}(p) = 0$, logo temos que $T^i{}_{;i}(p) = 0$ utilizando as regras da conexão de tensores. Como conseguimos por um referencial em queda livre em cada ponto do espaço-tempo, podemos fazer estas considerações para cada ponto p no espaço-tempo e portanto $T^i{}_{;i} = 0$ em cada ponto. ■

Capítulo 8

Relatividade Geral

8.1 Equações de Campo de Einstein

Para determinar a métrica do espaço-tempo vamos desenvolver as equações de Einstein da Relatividade Geral. Estas equações formam basicamente uma generalização da Lei de Gauss da Gravitação, que é equivalente à Lei da Gravitação Universal de Newton assumindo a simetria esférica do campo gravitacional gerado por uma massa pontual. A Lei de Gauss da Gravitação é a seguinte:

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho,$$

onde, φ é a energia potencial gravitacional, Δ é o operador laplaciano, G é constante gravitacional e ρ é a distribuição de massa.

Como a gravidade e energia gravitacional neste novo cenário está acoplada com a métrica g do espaço-tempo, devemos identificar a energia potencial gravitacional com a métrica. Temos que do lado direito da lei de Gauss está a densidade $\rho = T^{44}/c^2$ em coordenadas cartesianas do espaço de Minkowski. Porém se realizarmos alguma mudança de referencial, utilizando as mudanças de coordenadas do tensor T , teremos eventualmente outra forma para a equação, mas queremos uma teoria invariante por sistemas de coordenadas, o que nos leva a considerar todo o tensor de energia-momento T como fonte de gravitação e portanto a massa, energia e momento como fonte de gravidade.

Então a Lei de Gauss da gravitação pode ser da forma

$$O(g) = kT,$$

onde O é um operador diferencial e sendo Δ um operador de ordem 2, é natural que O também o seja.

Temos que $O^{ij} = kT^{ij}$ deve ser combinação de derivadas de $g_{k\ell}$. Einstein acreditou que pondo $O^{ij} = R^{ij}$ seria a equação certa, porém em geral $R^{ij}_{;i} \neq 0$, portanto violaria a conservação local de energia e momento.

Porém pondo $O^{ij} = R^{ij} + \mu S g^{ij} + \Lambda g^{ij}$ é um operador de ordem 2 sobre a métrica (utilizando os símbolos de Christoffel) e devemos ter:

$$O^{ij}_{;i} = R^{ij}_{;i} + \mu(Sg^{ij})_{;i} + \Lambda g^{ij}_{;i} = 0$$

Porém $g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$, logo derivando e usando a compatibilidade da conexão com métrica teremos $g^{ij}_{;\ell}g_{jk} + g^{ij}g_{jk;\ell} = g^{ij}_{;\ell}g_{jk} = 0 \Rightarrow g^{ij}_{;\ell} = 0$. Portanto $O^{ij}_{;i} = 0$ se reduz a

$$R^{ij}_{;i} + \mu S_{;i}g^{ij} = 0.$$

Multiplicando pela matriz (g_{ij}) teremos

$$R^{ij}_{;i}g_{jk} + \mu S_{;i}g^{ij}g_{jk} = R^i_{k;i} + \mu S_{;k} = (\text{div } Rc)_{;k} + \mu S_{;k} = 0.$$

Pela relação

$$\operatorname{div} R_c = \frac{1}{2} \nabla S,$$

para que sempre valha $O^{ij}{}_{;i} = 0$ devemos pedir $\mu = -1/2$. Portanto temos:

$$O^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} + \Lambda g^{ij}.$$

Vamos chamar G de tensor de Einstein e as componentes $G^{ij} \doteq R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij}$, ou com os índices abaixados temos $G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij}$.

Assim temos a seguinte equação:

$$G^{ij} + \Lambda g^{ij} = kT^{ij} \text{ ou } G_{ij} + \Lambda g_{ij} = T_{ij}.$$

Então utilizamos os seguintes pontos na dedução das equações de Einstein: (i) generalizar a lei de Gauss da gravitação, (ii) introduzir uma equação independente de coordenadas (iii) a massa, a energia e o momento são fontes de gravidade e (iv) garantir a conservação local de energia-momento com respeito a métrica. As equações de Einstein não são as únicas que satisfazem estas condições, porém é uma das equações que generaliza a relatividade especial e a gravidade já estudadas, e também algumas implicações e princípios dessa teoria são experimentalmente comprovados. Além disso, as alternativas da teoria que estamos estudando são em geral mais complicadas, o que leva aos físicos preferirem a teoria de Einstein.

Um ponto importante das equações de Einstein é que a gravidade cria curvatura. Mais precisamente, se há massa-energia e momento, então haverá gravidade e por consequência curvatura, segundo as equações de Einstein. Por outro lado, se o espaço-tempo for \mathbb{R}^4 , então na presença de curvatura as geodésicas não serão todas retas e por consequência partículas livres não percorrem um movimento retilíneo uniforme, o que ocorreria no espaço de Minkowski, portanto há a presença de gravidade em sentido mais dinâmico.

Tomando o traço com respeito à métrica nas equações de Einstein, teremos que:

$$S - \frac{1}{2} S \cdot 4 + \Lambda = kT,$$

onde $T = T_i^i$. Logo

$$S = \Lambda - kT.$$

Portanto $R^{ij} = k(T^{ij} - Tg^{ij}/2) - \Lambda g^{ij}$.

A constante Λ é chamada de constante cosmológica e inicialmente não fazia parte da equação, porém foi introduzida posteriormente. Mas após várias observações Einstein rejeitou o termo. As observações astronômicas recentes sugerem que Λ é pequeno, mas não nulo. Vamos considerar que $\Lambda = 0$ para fins de simplificação das equações, pois na escala de uma galáxia esta constante pode ser desprezada.

8.2 Equações de Einstein para campos gravitacionais fracos

Vamos considerar as equações de Einstein no espaço-tempo “quase” plano. Mais precisamente vamos considerar uma variedade que possui uma métrica que satisfaz:

$$g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$$

onde $|h_{ij}| \ll 1$.

Vamos agora considerar:

$$\frac{d^2 x^k}{dt^2} = -\delta^{kj} \partial_j \varphi,$$

onde $k \neq 4$ e φ é uma solução de:

$$\partial_1 \partial_1 \varphi + \partial_2 \partial_2 \varphi + \partial_3 \partial_3 \varphi = 4\pi G\rho.$$

Usando a equação das geodésicas, segue que

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} = -\Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}.$$

Como as velocidades são não relativísticas, podemos considerar somente quando $i = j = 4$, logo:

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} = -\Gamma_{44}^k c^2 = -\frac{1}{2} \eta^{k\ell} (\partial_4 h_{4\ell} + \partial_4 h_{4\ell} - \partial_\ell h_{44})$$

Como estamos considerando $\eta = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - (dx^4)^2$ (normalizada), temos que $ct = x^4$, logo $\partial_4 h_{rs} = \partial_t h_{rs}/c$ que é negligenciável em comparação a $\partial_i h_{rs}$, com $i \neq 4$, para baixas velocidades.

Logo para $k \neq 4$, temos:

$$\frac{d^2 x^k}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \eta^{k\ell} \partial_\ell h_{44} c^2$$

Portanto, como as velocidades são não relativísticas, podemos considerar $d^2 x^k / d\tau^2 = d^2 x^k / dt^2$, logo

$$\frac{1}{2} \partial_\ell h_{44} c^2 = -\partial_\ell \varphi.$$

Vamos agora calcular o tensor curvatura em termos dos símbolos de Christoffel:

$$\begin{aligned} R_{ijk\ell} &= \langle \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k, \partial_\ell \rangle \\ &= \langle \nabla_{\partial_i} (\Gamma_{jk}^m \partial_m) - \nabla_{\partial_j} (\Gamma_{ik}^m \partial_m), \partial_\ell \rangle \\ &= \langle \partial_i \Gamma_{jk}^m \partial_m + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^s \partial_s - \partial_j \Gamma_{ik}^m \partial_m - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^s \partial_s, \partial_\ell \rangle \\ &= \langle (\partial_i \Gamma_{jk}^s + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s \partial_m - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^s) \partial_s, \partial_\ell \rangle \\ &= (\partial_i \Gamma_{jk}^s + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^s - \partial_j \Gamma_{ik}^s - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^s) g_{s\ell} \end{aligned}$$

Logo:

$$R_{ijk}{}^\ell = \partial_i \Gamma_{jk}^\ell + \Gamma_{jk}^m \Gamma_{im}^\ell - \partial_j \Gamma_{ik}^\ell - \Gamma_{ik}^m \Gamma_{jm}^\ell.$$

Portanto:

$$R_{ij} = R_{rij}{}^r = \partial_r \Gamma_{ij}^r + \Gamma_{ij}^m \Gamma_{rm}^r - \partial_i \Gamma_{rj}^r - \Gamma_{rj}^m \Gamma_{im}^r$$

Como $|h_{ij}| \ll 1$ podemos aproximar g^{ij} por η^{ij} . Logo:

$$\Gamma_{ij}^\ell = \frac{1}{2} \eta^{k\ell} (\partial_i h_{j\ell} + \partial_j h_{i\ell} - \partial_\ell h_{ij}) \Rightarrow \partial_s \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \eta^{k\ell} (\partial_s \partial_i h_{j\ell} + \partial_s \partial_j h_{i\ell} - \partial_s \partial_\ell h_{ij})$$

Como estamos supondo que $\partial_4 h_{ij}$ é desprezível em comparação com outras derivadas de h_{ij} teremos que a única parcela considerável de R_{44} é $\partial_i \Gamma_{44}^i$ (com $i \neq 4$). Além disso do mesmo modo podemos considerar $\partial_i \Gamma_{44}^i = \eta^{i\ell} (-\partial_i \partial_\ell h_{44}) / 2 \approx (\partial_1 \partial_1 \varphi + \partial_2 \partial_2 \varphi + \partial_3 \partial_3 \varphi) / c^2 = 4\pi G\rho / c^2$

Neste caso temos que a densidade de momento é desprezível em comparação com ρc^4 , logo $(T_{ij}) = \text{diag}(0, 0, 0, T_{44}) = \text{diag}(0, 0, 0, \rho c^2)$. Então $T = \eta^{ij} T_{ij} = -\rho c^2$.

Portanto

$$R_{44} = k \left(T_{44} - \frac{1}{2} T g_{44} \right) \Rightarrow \frac{4\pi G\rho}{c^2} = \frac{1}{2} k \rho c^2$$

Pondo $k = 8\pi G/c^4$ teremos que vale a equação.

Assim determinamos a constante k e as equações de campo de Einstein recuperam a lei da gravitação universal, como esperado.

8.3 Soluções Esféricas para Objetos Massivos

8.3.1 Considerações iniciais

Vamos agora encontrar soluções para objetos massivos. Para isso vamos considerar \mathbb{R}^4 com o espaço descrito em coordenadas polares, $(x, y, z, t) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta, t)$, e encontrar uma métrica correspondente para as suposições. Vamos pedir inicialmente as seguintes condições:

- (i) Devido à lei da gravitação universal e pelas observações feitas antes da relatividade, é natural pedirmos que o espaço-tempo seja **esfericamente simétrico** e **invariante por reflexão espacial**.
- (ii) Além disso vamos pedir que este seja **estacionário**, ou seja, $\partial_t g_{ij} = 0$, e que seja invariante por **reflexão temporal**, isto é, a aplicação $t \mapsto -t$.

Com essas suposições a métrica será diagonal. De fato, se utilizarmos a aplicação $(r, \theta, \varphi, t) \mapsto (r, \theta, \varphi, -t)$ escrevendo a métrica nessas coordenadas teremos que a métrica será invariante, ou seja, se g'_{ij} é a métrica neste novo sistema de coordenadas, segue que $g'_{ij} = g_{ij}$. Além disso, usando a mudança de coordenadas e supondo $k \neq 4$ temos:

$$g'_{k4} = \frac{\partial x^i}{\partial x'^k} \frac{\partial x^j}{\partial x'^4} g_{ij} = -g_{k4}.$$

Como $g'_{k4} = g_{k4}$ segue que $g_{k4} = 0$ para $k \neq 4$.

De modo análogo, tomando $(r, \theta, \varphi, t) \mapsto (r, -\theta, \varphi, t)$ e $(r, \theta, \varphi, t) \mapsto (r, \theta, -\varphi, t)$ podemos concluir que $g_{k2} = 0$ para $k \neq 2$ e $g_{k3} = 0$ para $k \neq 3$, respectivamente.

Além disso, destas suposições podemos concluir que a métrica irá depender somente de r . Pela simetria esférica temos também que para t e r constantes, a métrica se reduzirá à $C(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$. Assim podemos escrever a métrica da seguinte maneira:

$$g = B(r)dr^2 + C(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - A(r)dt^2.$$

Vamos também assumir que para t e r constantes a geometria é de uma esfera de raio r . Logo $C(r) = r^2$. É comum também fazer a seguinte mudança de variável: $A(r) = \exp(2\Phi(r))$ e $B(r) = \exp(2\Lambda(r))$. Portanto a métrica será escrita da seguinte maneira:

$$g = e^{2\Lambda} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - e^{2\Phi} dt^2.$$

Agora vamos encontrar as componentes do tensor de Einstein e as componentes do tensor de energia-momento para resolver as equações de Einstein.

8.3.2 Equações de Einstein para fluidos perfeitos estáticos

Tensor de Einstein

Calculando o Tensor de Einstein obteremos:

$$\begin{aligned} G_{11} &= -\frac{1}{r^2} e^{2\Lambda} (1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r} \Phi', \\ G_{22} &= r^2 e^{-2\Lambda} \left[\Phi'' + (\Phi')^2 + \frac{\Phi'}{r} - \Phi' \Lambda' - \frac{\Lambda'}{r} \right], \\ G_{33} &= \sin^2 \theta G_{22}, \\ G_{44} &= \frac{1}{r^2} e^{2\Phi} \frac{d}{dr} (r(1 - e^{-2\Lambda})), \end{aligned}$$

e as componentes restantes são todas nulas.

Tensor de Energia-Momento

Como estamos supondo as estrelas estáticas com o fluido em repouso e com distribuição de massa e pressão que depende somente da distância ao centro da estrela. Logo a única componente não nula do quadrimomento U será u^4 . Portanto utilizando a normalização:

$$g(U, U) = u^i u_j = u^i u^j g_{ij} = (u^4)^2 (-e^{2\Phi}) = -c^2 \Rightarrow u^4 = c \cdot e^{-\Phi}.$$

Logo $u_4 = -c \cdot e^\Phi$. O tensor de Energia-Momento deste fluido pode ser escrito da seguinte maneira:

$$T_{ij} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_i u_j + p g_{ij}.$$

Portanto utilizando as informações teremos que:

$$\begin{aligned} T_{11} &= p e^{2\Lambda}, \\ T_{22} &= p r^2, \\ T_{33} &= \sin^2 \theta T_{22}, \\ T_{44} &= \rho c^2 e^{2\Phi}, \end{aligned}$$

e as entradas restantes nulas. Do mesmo modo:

$$\begin{aligned} T^{11} &= p e^{-2\Lambda}, \\ T^{22} &= p r^{-2}, \\ T^{33} &= \sin^{-2} \theta T^{22}, \\ T^{44} &= \rho c^2 e^{-2\Phi}, \end{aligned}$$

e as entradas restantes nulas.

Equações de Einstein

Vamos fazer a seguinte substituição:

$$m(r) \doteq \frac{c^2}{2G} r (1 - e^{-2\Lambda}),$$

onde G é a constante gravitacional. Logo:

$$g_{11} = e^{2\Lambda} = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right)^{-1}$$

Na componente (4,4) da equação de Einstein teremos:

$$\frac{1}{r^2} e^{2\Phi} \frac{d}{dr} \left(\frac{2Gm}{c^2} \right) (r) = \frac{8\pi G}{c^4} \rho c^2 e^{2\Phi}$$

Portanto

$$\frac{dm}{dr}(r) = 4\pi r^2 \rho \Leftrightarrow m(r) = m_0 + \int_{0^+}^r 4\pi R^2 \rho(R) dR,$$

onde 0^+ denota que a integral é imprópria em 0. Dentro da distribuição de fluido a distribuição de massa-energia não é bem definida, logo $m(r)$ não é necessariamente a massa-energia em um esfera de raio r . Porém fora da estrela esta quantidade é bem definida, logo para r maior que o raio da estrela temos que $m(r)$ é constante e definimos $m(r) \doteq M$ é a massa-energia da estrela.

Por outro lado teremos também da componente (1,1) da equação de Einstein que:

$$\frac{d\Phi}{dr}(r) = \frac{G}{c^4 r} \cdot \frac{4\pi p r^3 + c^2 m(r)}{r - \frac{2Gm(r)}{c^2}}.$$

Utilizando a conservação local de energia-momento, teremos:

$$0 = T^{i1}{}_{;i} = \partial_i T^{i1} + T^{ij} \Gamma_{ij}^1 + T^{j1} \Gamma_{ji}^i$$

Utilizando que T^{ij} é diagonal, segue que:

$$0 = \partial_1 T^{11} + T^{11} \Gamma_{11}^1 + T^{22} \Gamma_{22}^1 + T^{33} \Gamma_{33}^1 + T^{44} \Gamma_{44}^1 + T^{11} \Gamma_{1i}^i$$

Calculando os símbolos de Christoffel temos:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Lambda', & \Gamma_{22}^1 &= -\frac{r}{e^{2\Lambda}}, & \Gamma_{33}^1 &= -\frac{r \sin^2 \theta}{e^{2\Lambda}}, \\ \Gamma_{44}^1 &= \frac{\Phi' e^{2\Phi}}{e^{2\Lambda}}, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{r}, & \Gamma_{23}^3 &= \cot \theta, & \Gamma_{14}^4 &= \Phi'. \end{aligned}$$

Utilizando $T^{i1}{}_{;i} = 0$, temos

$$\left(1 - \frac{2Gm}{c^2 r}\right) [p' + (p + \rho c^2) \Phi'] = 0$$

Portanto:

$$(p + \rho c^2) \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{dp}{dr}$$

Assim teremos que

$$\frac{dp}{dr} = -(p + \rho c^2) \frac{d\Phi}{dr} = -(p + \rho c^2) \frac{G}{c^4 r} \cdot \frac{4\pi p r^3 + c^2 m(r)}{r - \frac{2Gm(r)}{c^2}}.$$

Esta equação chamamos de equação de Tolman–Oppenheimer–Volkov (T–O–V) para fluidos em equilíbrio hidrostático em estrelas.

8.3.3 Estrutura das Estrelas

Interior das estrelas

No interior das estrelas temos $\rho \neq 0$ e $p \neq 0$, logo sabendo ρ teremos a seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dr} &= -(p + \rho c^2) \frac{G}{c^4 r} \cdot \frac{4\pi p r^3 + c^2 m(r)}{r - \frac{2Gm(r)}{c^2}}, \\ \frac{dm}{dr} &= 4\pi r^2 \rho. \end{aligned}$$

Exterior das estrelas

No exterior das estrelas temos $\rho = 0$ e $p = 0$, logo teremos a seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dr} &= \frac{G}{c^2 r} \cdot \frac{m(r)}{r - \frac{2Gm(r)}{c^2}}, \\ \frac{dm}{dr} &= 0. \end{aligned}$$

Logo $m(r) = M$ que esta será a massa-energia total da estrela. Também teremos que $e^{2\Phi} = c^2(1 - 2GM/c^2r)$

Portanto a métrica fora da estrela será:

$$g = \frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2r}\right) dt^2.$$

Esta métrica é chamada de métrica de Schwarzschild.

Podemos comparar com o espaço de Minkowski que neste sistema de coordenadas tem métrica dada por:

$$g = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - c^2 dt^2.$$

Tomando $r \rightarrow \infty$ temos que $2GM/c^2r \rightarrow 0$, logo podemos aproximar a métrica de Schwarzschild pela métrica de Minkowski.

8.4 Consequências da métrica de Schwarzschild

8.4.1 Efeitos sobre a passagem do tempo

Assim como no espaço de Minkowski podíamos definir intervalo de tempo próprio e comprimento próprio de curvas, em um espaço-tempo M com uma métrica g também podemos definir intervalo de tempo próprio e comprimento próprio para uma curva γ , tipo-tempo ($\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle < 0$) e tipo-espaço ($\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle > 0$), respectivamente, que são dados por:

$$\Delta\tau = \frac{1}{c} \int_{\gamma} \sqrt{-g_{ij} dx^i dx^j} \text{ e } \ell = \int_{\gamma} \sqrt{g_{ij} dx^i dx^j}$$

Assim como anteriormente, o intervalo de tempo próprio é o intervalo de tempo medido por um relógio ao longo dessa trajetória no espaço-tempo.

Assim o elemento de comprimento radial próprio é $dR = (1 - 2GM/c^2r)^{-1/2} dr$ e o elemento de tempo próprio em um ponto fixado do espaço é dado por $d\tau = (1 - 2GM/c^2r)^{1/2} dt$.

Denotando $\Delta\tau_1$ e $\Delta\tau_2$ os intervalos de tempos próprios para dois pontos fixados coordenada radial r_1 e outro ponto na coordenada radial r_2 e variação Δt , teremos que:

$$\frac{\Delta\tau_1}{\Delta\tau_2} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2r_1}}{1 - \frac{2GM}{c^2r_2}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto se $r_1 > r_2$, então $\Delta\tau_1 > \Delta\tau_2$, ou seja, o tempo em um ponto mais próximo de um corpo massivo passa mais devagar que outro mais distante.

8.4.2 Desvio gravitacional

Agora temos as ferramentas necessárias para dar uma justificativa mais rigorosa para o desvio de frequências.

A primeira observação é que a luz percorre uma geodésica tipo-luz. De fato, seja γ a trajetória da luz com um parâmetro u , dado um ponto $\gamma(u_0)$ na trajetória da luz e considerando um referencial em queda livre com origem neste ponto, teremos pelo princípio da equivalência que a métrica na origem deste sistema de coordenadas é a métrica de Minkowski. Portanto, como os referenciais em queda livre tem as mesmas leis da físicas que um referencial inercial na relatividade especial, neste sistema de coordenadas teremos que $\langle \dot{\gamma}(u_0), \dot{\gamma}(u_0) \rangle = 0$. Ainda pelo

princípio da equivalência teremos que neste ponto a luz tem “aceleração nula” então neste sistema de coordenadas temos $\ddot{\gamma}^i(u_0) = 0$ para cada i , como na relatividade especial. Como neste sistema de coordenadas temos que $\partial_k g_{ij} = 0$ em $\gamma(u_0)$, para cada i, j, k , segue que $\Gamma_{ij}^k = 0$ na origem do mesmo

$$\frac{D\dot{\gamma}}{du}(u_0) = (\ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j) = 0.$$

Disso segue a afirmação.

Assim teremos que se $\gamma(u)$ é a trajetória da luz com parâmetro u , então:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)} \left(\frac{dr}{du}\right)^2 + r^2 \left(\left(\frac{d\theta}{du}\right)^2 + \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2 \right) = c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) \left(\frac{dt}{du}\right)^2.$$

Considere o problema da emissão de um feixe de luz no pé de uma torre, até o seu topo, e denote u_E e t_E o parâmetro e coordenada tempo em que ocorre a emissão e u_R e t_R o parâmetro e coordenada tempo em que ocorre a recepção do mesmo feixe. Logo:

$$t_R - t_E = \frac{1}{c} \int_{u_E}^{u_R} \left[\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \sum_{i,j=1}^3 g_{ij} \frac{d\gamma^i}{du} \frac{d\gamma^j}{du} \right]^{1/2} du$$

Temos que o intervalo de tempo Δt entre a emissão e recepção só depende da trajetória do feixe de luz no espaço.

Portanto se emitirmos dois feixes de luz, o intervalo de tempo entre a emissão e recepção será o mesmo para ambos. Considere $t_R^{(i)}$ e $t_E^{(i)}$ o instante da emissão e recepção do i -ésimo feixe, respectivamente. Assim:

$$\Delta t_R \doteq t_R^{(2)} - t_R^{(1)} = t_E^{(2)} - t_E^{(1)} \doteq \Delta t_E.$$

Sejam $\Delta\tau_E$ e $\Delta\tau_R$ os intervalos de tempo próprio entre a emissão e recepção, respectivamente. Visto que $\Delta t_E = \Delta t_R$, temos:

$$\frac{\Delta\tau_R}{\Delta\tau_E} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r_R}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r_E}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Supondo que o emissor é um átomo pulsante que emite n pulsos em um intervalo de tempo próprio $\Delta\tau$, então chamamos de frequência própria a frequência $f \doteq n/\Delta\tau$. Assim $r_R > r_E$ segue que $\Delta\tau_R > \Delta\tau_E$ logo $f_R < f_E$. Além disso:

$$\frac{f_E}{f_R} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r_R}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r_E}} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para campos gravitacionais fracos, podemos aproximar utilizando a aproximação pela derivada a seguir:

$$\frac{f_E}{f_R} = 1 + \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_R} \right).$$

Como no experimento do desvio gravitacional supomos anteriormente que $r_R - r_E = h$ e que r_E é o raio da Terra, logo podemos aproximar utilizar $GM/r_E^2 = g$ e também a aproximação:

$$GM \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_R} \right) = gh$$

Portanto podemos utilizar a aproximação:

$$\frac{f_R}{f_E} = \frac{1}{1 + \frac{gh}{c^2}}$$

o mesmo valor encontrado na primeira abordagem do desvio gravitacional para o vermelho.

8.4.3 Trajetórias de partícula (incluindo fótons)

Vamos calcular as equações de Euler-Lagrange para o funcional de energia neste sistema de coordenadas. Ou seja, denotando \dot{x}^i a derivada da coordenada i em relação ao parâmetro u , $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, $x^4 = t$, fazendo a substituição $m = GM/c^2$ e pondo $L = g_{ij}\dot{x}^i\dot{x}^j$, teremos:

$$E = \int_a^b L du$$

Logo as equações

$$\frac{d}{du} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial x^i} = 0$$

podem ser reduzidas ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \ddot{r} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} \frac{m}{r^2} \dot{r}^2 - r(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + c^2 \frac{m}{r^2} \dot{t}^2 = 0 \\ \ddot{\theta} + 2\frac{\dot{r}}{r} \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0 \\ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = c_1 \\ r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = c_2 \end{cases}$$

Além disso, utilizando a invariância por reflexão podemos concluir que as coordenadas espaciais de uma geodésica está contida em um plano (nas coordenadas espaciais de (\mathbb{R}^4, g)) passando pela origem.

Seja uma geodésica γ , então considere o ponto inicial (p, t) da geodésica e sua velocidade (v, β) neste ponto. Considere o plano P que passa por p e contém v . Se ψ é a reflexão de um ponto com relação à este plano, então ψ é isometria com relação à esta métrica e $\psi \circ \gamma$ é geodésica. Temos que $\psi(p, t) = (p, t)$ e $\psi_*(v, \beta) = (v, \beta)$, logo γ e $\psi \circ \gamma$ tem mesmo ponto e velocidade iniciais. Pela unicidade das geodésicas, estas devem coincidir, ou seja, $\psi \circ \gamma = \gamma$. Mas os únicos pontos fixos de ψ são pontos cuja parte espacial está em P . Portanto a parte espacial de γ está contida no plano P .

Outra observação é que na relatividade especial seria necessária uma energia infinita para acelerar uma partícula com massa até a velocidade da luz, devido à fórmula da massa-energia, e portanto define uma trajetória tipo-tempo. Escolhendo um referencial em queda livre, pelo princípio da equivalência, temos que a trajetória de uma partícula com massa será também tipo-tempo.

Se γ é geodésica, então $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle$ é constante. Portanto à menos de uma reparametrização que γ é tal que $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = -c^2$, caso γ seja tipo-tempo, que são as trajetórias possíveis para uma partícula com massa. De modo análogo temos que um fóton percorre uma geodésica tal que $\langle \dot{\gamma}, \dot{\gamma} \rangle = 0$.

Portanto, utilizando este resultado e a simetria esférica, podemos supor que a geodésica está contida no plano tal que $\theta \equiv \pi/2$. Logo a segunda equação do sistema é satisfeita.

Supondo então que a partícula considerada possui massa, considerando esta parametrizada pelo tempo próprio, teremos o sistema:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \ddot{r} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} \frac{m}{r^2} \dot{r}^2 - r\dot{\varphi}^2 + c^2 \frac{m}{r^2} \dot{t}^2 = 0 \\ \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 = -c^2 \\ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = c_1 \\ r^2 \dot{\varphi} = c_2 \end{cases}$$

Em geral vamos utilizar somente as três últimas relações e a primeira irá seguir a partir das soluções destas.

Queda livre vertical

Para trajetórias em queda livre vertical temos φ constante, logo utilizando a expressão para \dot{t} e que a trajetória está parametrizada pelo tempo próprio, segue a equação:

$$\dot{r}^2 - c^2 c_1^2 + c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = 0.$$

Supondo que $\dot{r} = 0$ em r_0 , temos $c_1^2 = 1 - 2m/r_0$, logo:

$$\dot{r}^2 = 2mc^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \dot{r}^2 = GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

Derivando esta relação teremos que:

$$\dot{r}\ddot{r} = -\dot{r} \frac{GM}{r^2} \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{GM}{r^2}.$$

Esta é a expressão da lei de Newton da gravitação universal. Porém note que a derivada é em relação ao tempo próprio.

Podemos calcular o tempo próprio ao longo desta trajetória, pondo $\tau = 0$ em r_0 temos:

$$\tau = \int_r^{r_0} \frac{1}{\dot{r}} dr = \frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_r^{r_0} \left(\frac{r_0 r}{r_0 - r}\right)^{1/2} dr.$$

À menos que seja atingido o bordo do corpo massivo, podemos integrar até $r \rightarrow 2m$, onde τ é finito.

Utilizando

$$\frac{dt}{dr} = \frac{\dot{t}}{\dot{r}} \text{ e } \dot{t} = \frac{c_1}{1 - \frac{2m}{r}},$$

segue que:

$$t = \left(\frac{r_0 - 2m}{2mc^2}\right)^{1/2} \int_{2m+\varepsilon}^{r_0} \frac{r^{3/2}}{(r - 2m)(r_0 - r)^{1/2}} dr.$$

Como $2m < r$ e $r_0 - r < r_0$, segue que

$$t > \left(\frac{r_0 - 2m}{2mc^2}\right)^{1/2} \frac{(2m)^{3/2}}{r_0^{1/2}} \int_{2m+\varepsilon}^{r_0} \frac{1}{r - 2m} dr.$$

Porém:

$$\int_{2m+\varepsilon}^{r_0} \frac{1}{r - 2m} dr = \ln \frac{r_0 - 2m}{\varepsilon} \rightarrow \infty \text{ se } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Portanto $t \rightarrow \infty$ quando $r \rightarrow 2m$.

Movimento circular

Para um movimento circular temos r constante. Logo $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ e portanto a primeira relação do sistema se reduz à:

$$mc^2\dot{t}^2 = r^3\dot{\varphi}^2.$$

Assim:

$$\left(\frac{dt}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r^3}{GM}.$$

Portanto ao longo de uma revolução completa teremos:

$$\Delta t = 2\pi \left(\frac{r^3}{GM}\right)^{1/2}.$$

Esta é a expressão para uma órbita circular do período, segundo a terceira lei de Kepler.

O intervalo de tempo próprio visto por um observador em um ponto da órbita circular é de

$$\Delta\tau_o = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \Delta t.$$

É natural também descobrir qual é o intervalo de tempo próprio de um observador nesta órbita. Utilizando que as seguintes equações

$$\begin{cases} mc^2\dot{t}^2 = r^3\dot{\varphi}^2 \\ r^2\dot{\varphi}^2 - c^2\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t}^2 = -c^2 \\ \left(1 - \frac{2m}{r}\right)\dot{t} = c_1 \end{cases}$$

teremos que da primeira e terceira equações segue

$$\dot{t}^2 = \frac{r^2c_1^2}{(r-2m)^2} \text{ e } \dot{\varphi}^2 = \frac{mc^2c_1^2}{r(r-2m)^2}.$$

Substituindo na segunda equação teremos

$$c_1^2 = \frac{(r-2m)^2}{r(r-3m)}$$

Portanto:

$$\dot{t} = \frac{r}{r-3m} \text{ e } \dot{\varphi} = \frac{mc^2}{r^2(r-3m)}.$$

Assim o período próprio da órbita é dado por

$$\Delta\tau = \frac{\Delta t}{\dot{t}} = \Delta t \left(1 - \frac{3m}{r}\right)^{1/2} = 2\pi \left(\frac{r^3}{GM}\right)^{1/2} \left(1 - \frac{3GM}{rc^2}\right)^{1/2}$$

Temos que as órbitas circulares são possíveis somente para $r > 3m$. Além disso temos que quando $r \rightarrow 3m$, $\Delta\tau \rightarrow 0$, o que sugere que os fótons orbitam em $r = 3m$.

Fótons

Vamos agora olhar para as geodésicas tipo-luz, as quais dão a trajetória dos fótons. Neste caso não usamos o tempo próprio como parâmetro, iremos usar um parâmetro u . Assim devemos utilizar a equação:

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 = 0$$

Vamos estudar novamente os casos anteriores, porém pedindo que a trajetória seja tipo-luz.

Se supormos que a geodésica é circular, então devemos ter $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, logo pela equação das geodésicas temos

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{mc^2}{r^3}.$$

Sendo a geodésica tipo-luz, temos por outro lado que:

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{c^2}{r^2} \left(\frac{r-2m}{r}\right).$$

Logo $r = 3m$. Então este é o raio em que a luz descreve uma órbita circular.

Vamos investigar a trajetória radial da luz. Temos neste caso $\dot{\varphi} = 0$, de modo análogo ao anterior, temos

$$\dot{r}^2 - c^2 c_1^2 = 0.$$

Portanto a luz terá velocidade radial constante, no parâmetro u , e neste sistema de coordenadas temos

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{2m}{r}\right).$$

Disso segue que $dr/dt \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow 2m$.

8.4.4 Deflexão da luz

Já vimos que um feixe de luz pode orbitar um corpo massivo. Porém podemos também ter um desvio da trajetória da luz pela presença de um corpo massivo. Teremos as seguintes relações:

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 - c^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t}^2 = 0 \\ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = c_1 \\ r^2 \dot{\varphi} = c_2 \end{cases}$$

Porém pondo $u = 1/r$, podemos resumir as informações na equação

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = F + \varepsilon u^3,$$

onde $F = c^2 c_1^2 / c_2^2$ e $\varepsilon = 2GM/c^2$. Se r_0 é o menor valor de r , logo o ponto mais próximo do corpo massivo, teremos que $du/d\varphi = 0$ quando $u = u_0 = 1/r_0$. Disso segue que $F = u_0^2(1 - \varepsilon u_0)$.

Vamos agora fazer uma expansão assintótica da solução até ordem 1 em ε . Quando o espaço é plano, ou seja, quando $\varepsilon = 0$ teremos que a solução desta equação é $u = u_0 \sin \varphi$. Então vamos considerar a solução para $\varepsilon > 0$ considerando os termos de até ordem 1 em ε . Mais precisamente considere $u = u_0 \sin \varphi + \varepsilon v$, onde v é uma função de φ a determinar. Portanto

$du/d\varphi = u_0 \cos \varphi + \varepsilon dv/d\varphi$. Substituindo estas informações na equação, teremos a equação a seguir:

$$\varepsilon \left(2u_0 \left(\sin \varphi v + \cos \varphi \frac{dv}{d\varphi} \right) + \varepsilon \left(\left(\frac{dv}{d\varphi} \right)^2 + v^2 \right) \right) = \varepsilon \left(-u_0^3 + u_0^3 \sin^3 \varphi + 3u_0^2 \sin^2 \varphi \varepsilon v + 3u_0 \sin \varphi \varepsilon^2 v^2 + \varepsilon^3 v^3 \right).$$

Supondo $|\varepsilon| \ll 1$, ignoramos os termos com ε^2 , logo:

$$2 \left(\sin \varphi v + \cos \varphi \frac{dv}{d\varphi} \right) = u_0^2 (\sin^3 \varphi - 1) \times \sec^2 \varphi \Rightarrow 2 \left(\sec \varphi \tan \varphi v + \sec \varphi \frac{dv}{d\varphi} \right) = u_0^2 (\sin \varphi \tan^2 \varphi - \sec^2 \varphi)$$

Podemos reescrever da seguinte maneira:

$$\frac{d}{d\varphi} (v \sec \varphi) = \frac{1}{2} u_0^2 (\sec \varphi \tan \varphi - \sin \varphi - \sec^2 \varphi)$$

Integrando esta equação obtemos:

$$v \sec \varphi = \frac{1}{2} u_0^2 (\sec \varphi - \tan \varphi + \cos \varphi) + A \Rightarrow v = \frac{1}{2} u_0^2 (1 - \sin \varphi + \cos^2 \varphi) + A \cos \varphi.$$

Ponto como condição que $r \rightarrow \infty$ quando $\varphi \rightarrow 0$, teremos $A = -u_0^2$. Logo podemos escrever

$$u = u_0 \left(1 - \frac{1}{2} u_0 \varepsilon \right) \sin \varphi + \frac{1}{2} u_0^2 \varepsilon (1 - \cos \varphi)^2.$$

Como $r \rightarrow \infty$ quando $\varphi \rightarrow 0$ ou $\varphi \rightarrow \pi$ quando $\varepsilon = 0$, devemos esperar que $r \rightarrow \infty$ quando $\varphi = \pi + \alpha$ para algum ângulo α pequeno, ou seja, $u = 0$ quando $\varphi = \pi + \alpha$. Assim

$$u_0 \left(1 - \frac{1}{2} u_0 \varepsilon \right) \sin \varphi + \frac{1}{2} u_0^2 \varepsilon (1 - \cos \varphi)^2 = 0 \Leftrightarrow -\sin \varphi = \frac{1}{2} \frac{u_0 \varepsilon (1 - \cos \varphi)^2}{1 - \frac{1}{2} u_0 \varepsilon}.$$

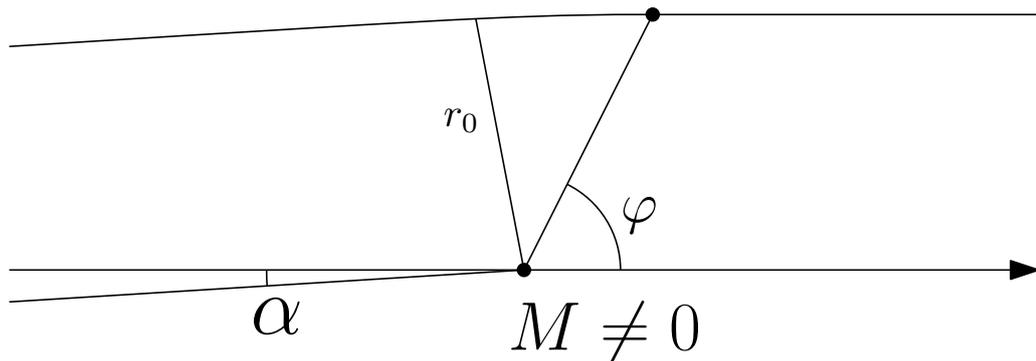
Quando $\varphi = \pi + \alpha$ segue que

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \frac{u_0 \varepsilon (1 - \cos \varphi)^2}{1 - \frac{1}{2} u_0 \varepsilon} \Rightarrow \alpha = \arcsin \left(\frac{1}{2} \frac{u_0 \varepsilon (1 - \cos \varphi)^2}{1 - \frac{1}{2} u_0 \varepsilon} \right).$$

Supondo $|\varepsilon u_0| \ll 1$ que pode ser reescrito como $2GM/c^2 \ll r_0$, ou seja, se a luz não passa muito próximo à estrela, em comparação à $2GM/c^2$. Assim podemos aproximar $\cos \alpha = 1$, $\arcsin(x) = x$ e $1/(1-x) = 1$, logo:

$$\alpha = 2u_0 \varepsilon = 4 \frac{GM}{c^2 r_0}.$$

Portanto a deflexão é de aproximadamente de $\alpha = 4GM/c^2 r_0$, ilustrado na figura à seguir.



Este foi um dos testes clássicos para a comprovação da teoria da relatividade geral de Einstein e historicamente foi o primeiro fenômeno da relatividade geral previsto antes da sua observação durante o eclipse total em 1919. Este fenômeno tornou Einstein famoso pela sua teoria da relatividade geral.

Anteriormente Henry Cavendish em 1784 e independentemente J. G. von Söldner em 1801, tratando a luz como uma partícula de velocidade c , calcularam a deflexão como sendo de um ângulo de $2GM/c^2r_0$ utilizando a lei da gravitação universal, exatamente a metade prevista pela relatividade geral. Assim a relatividade geral não é uma vitória ao prever a deflexão da luz, mas prever mais precisamente o valor que a luz se curva.

Capítulo 9

Conclusão

Como é possível observar a relatividade especial surgiu para resolver inconsistências entre o eletromagnetismo e a mecânica clássica. Além de resolver este problema, as consequências disso são bastante inesperadas, devida à dificuldade de detecção desses fenômenos no cotidiano. Uma das consequências mais importantes para a relatividade geral é a conexão entre massa, energia e momento.

Quanto ao estudo do espaço de Minkowski podemos perceber dois fatos bastante importantes. Um é que o conhecimento sobre o grupo de isometrias pode facilitar de forma considerável, por exemplo na demonstração de alguns fatos, reduzindo casos complicados à casos mais facilmente demonstráveis. Outra é que as fórmulas de curvatura, de curvas e superfícies, é semelhante ao caso Euclideano, porém as particularidades do caráter causal são um problema a ser considerado sempre, pois cada direção no espaço de Minkowski pode ter um caráter possivelmente diferente, levando à uma dificuldade maior e também uma subdivisão de casos quanto ao caráter causal.

Quanto à relatividade geral há alguns fatos importantes a destacar. O primeiro é que a relatividade especial falha quando há presença de gravidade, por esta deformar o espaço e o tempo, assim nestes espaços não existem referenciais inerciais e portanto não podemos utilizá-los. O segundo é que mesmo a relatividade especial falhando, há como recuperar parcialmente com o princípio da equivalência de Einstein. O terceiro é que, ao menos na teoria de Einstein da relatividade geral exposta durante o texto, a partir de princípios simples dá origem a métricas pseudo-Riemannianas, assim para o entendimento dessa teoria é necessário um bom entendimento dos conceitos básicos sobre geometria pseudo-Riemanniana. O quarto ponto é que a relatividade geral é uma generalização da relatividade especial, visto que nos referenciais em queda livre podemos recuperar a física da relatividade especial, e da teoria da Gravitação Universal, identificando a relação momento, massa e energia como fonte de gravidade, dando origem às equações de Einstein, para encontrar a métrica a partir dessas fontes de gravidade. E por fim, nesse trabalho o estudo de um exemplo nos permite perceber a dificuldade de resolver as equações de Einstein, mesmo com diversas simetrias, mas também tornando possível trabalhar a dinâmica sob o ponto de vista métrico, principalmente na trajetória da luz.

Referências Bibliográficas

- [1] BOOTHBY, W. M. **An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry**. Academic Press, Inc, 1975
- [2] CARMO, M. P. do. **Differential geometry of curves and surfaces**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1976
- [3] CARMO, M. P. do. **Riemannian geometry**. Cambridge: Birkhäuser Publishing Ltd, 1992
- [4] EINSTEIN, A. **The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 2, The Swiss Years: Writings, 1900-1909**. New Jersey: Princeton University Press , 1989.
- [5] EINSTEIN, A. **The Collected Papers of Albert Einstein, Volume 6, The Berlin Years: Writings, 1914-1917**. New Jersey: Princeton University Press , 1997.
- [6] FOSTER, J.; NIGHTINGALE, J. D. **A short course in general relativity**. Longman Group Limited, 1979
- [7] FRISCH, M. **Inconsistency in Classical Electrodynamics**. Philosophy of Science, v. 71, n. 4, p. 525 - 549, out. 2004.
- [8] JACKSON, J. D. **Classical Electrodynamics**. John Wiley & Sons, Inc, 1999
- [9] LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M. **Mechanics**. Pergamon Press. 1960
- [10] LEE, J. M. **Riemannian Manifolds: An introduction to curvature**. Springer-Verlag New York, Inc. 1997
- [11] LÓPEZ, R. **Differential geometry of curves and surfaces in Lorentz-Minkowski space**. International Electronic Journal of Geometry, v. 7, n. 1, p. 44 - 107, 2014.
- [12] MARTIN, L. A. B. S. **Grupos de Lie**. Campinas: Editora Unicamp, 2016.
- [13] MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. **Gravitation**. W. H, Freeman and Company, 1973
- [14] O'NEILL, B. **Semi-Riemannian Geometry**. Londres: Academic Press, 1983.
- [15] SCHUTZ, B. **A First Course in General Relativity**. Nova Iorque: Cambridge University Press, 2009.
- [16] WILL, C. M. **Theory and experiment in gravitational physics**. Cambridge University Press, 1993

APÊNDICE A - CÁLCULO DAS VARIAÇÕES E GEODÉSICAS

Este apêndice será relacionado ao cálculo das variações e nos dará uma ferramenta para calcular geodésicas sem recorrer diretamente aos símbolos de Christoffel. Porém antes vamos definir variações, campos tangentes a estas e pontos críticos de um funcional.

Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ curva diferenciável, uma variação de γ é uma família de curvas diferenciável $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ com $\Gamma(0, t) = \gamma(t)$. Chamaremos Γ de variação própria se $\Gamma(s, a) = \gamma(a)$ e $\Gamma(s, b) = \gamma(b)$. Além disso, diremos que uma aplicação diferenciável $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow TM$ tal que $V(s, t) \in T_{\Gamma(s, t)}M$ é um campo de vetores tangente à variação Γ . Diremos que t é o parâmetro das curvas principais $\gamma_s \doteq \Gamma(s, \cdot)$ e s é o parâmetro das curvas transversais $\Gamma_t \doteq \Gamma(\cdot, t)$ e suas respectivas derivadas covariantes serão $D_t V$ e $D_s V$. Um resultado importante para variações é a seguinte:

Lema 1. Considere $\Gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ variação de uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$. Então vale:

$$D_t \partial_s \Gamma = D_s \partial_t \Gamma.$$

Demonstração. Seja $\Gamma(s, t) = (x^1(s, t), \dots, x^n(s, t))$ para um sistema de coordenadas ao redor de p ponto da variação Γ . Logo:

$$\partial_t \Gamma = \frac{\partial x^i}{\partial t} \partial_i \text{ e } \partial_s \Gamma = \frac{\partial x^i}{\partial s} \partial_i$$

Calculando as derivadas covariantes, teremos:

$$D_s \partial_t \Gamma = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial s \partial t} + \Gamma_{ij}^k \frac{\partial x^i}{\partial s} \frac{\partial x^j}{\partial t} \right)$$

$$D_t \partial_s \Gamma = \left(\frac{\partial^2 x^k}{\partial t \partial s} + \Gamma_{ji}^k \frac{\partial x^j}{\partial s} \frac{\partial x^i}{\partial t} \right)$$

Portanto, como $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ segue o resultado. ■

Dada uma variação Γ de uma curva γ , chamamos o campo tangente à γ , $V = \partial_s \Gamma(0, \cdot)$, de campo variacional da variação Γ . Diremos que V um campo tangente à γ é próprio se V se anula em a e b . Em particular se Γ é variação própria, então seu campo variacional é próprio.

Lema 2. Seja V um campo tangente à γ , então existe uma variação Γ tal que V é seu campo variacional. Se V é próprio, então podemos tomar Γ como sendo próprio.

Considere a aplicação $F : C^\infty([a, b]; M) \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional das curvas diferenciáveis, diremos que γ é um ponto crítico do funcional F se para toda variação Γ , definindo $\gamma_s = \Gamma(s, \cdot)$, temos $\Phi'(0) = 0$ onde $\Phi(s) = F(\gamma_s)$. Diremos que γ é um ponto crítico do funcional com os extremos fixos se satisfaz as condições de ponto crítico, porém tomando somente variações próprias. Vamos agora adaptar o Lema Fundamental do Cálculo das Variações:

Lema 3 (Lema Fundamental do Cálculo das Variações). Seja W um campo tangente à curva diferenciável $\gamma : [a, b] \rightarrow M$. Se

$$\int_a^b \langle V, W \rangle dt = 0$$

para todo campo V tangente à γ com $V(a) = 0$ e $V(b) = 0$, então $W = 0$ em todo $[a, b]$.

Demonstração. Vamos mostrar por contrapositiva. Seja $W \neq 0$, então existe $t_0 \in [a, b]$ tal que $W(t_0) \neq 0$. Podemos supor que $t_0 \in (a, b)$, pois caso não existisse algum ponto t no interior do intervalo tal que $W(t) \neq 0$, pela continuidade de W teríamos que esta é identicamente nula, contradição. Existe $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ tal que $\langle v, W(t_0) \rangle \neq 0$ e estendendo v por transporte paralelo, existe V campo tangente à γ tal que $\langle W(t_0), V(t_0) \rangle \neq 0$. Utilizando continuidade temos que

existe um intervalo da forma $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset [a, b]$ tal que $\langle W, V \rangle \neq 0$ neste intervalo e portanto positivo ou negativo, vamos supor por simplicidade que é positivo. Existe uma aplicação φ diferenciável tal que $\text{supp } \varphi \subset I$, logo o campo $\tilde{V} = \varphi V$ é um campo tangente tal que $\tilde{V}(a) = 0, \tilde{V}(b) = 0$ e:

$$\int_a^b \langle \tilde{W}, V \rangle dt = \int_a^b \varphi \langle W, V \rangle dt \geq \int_I \varphi \langle W, V \rangle dt > 0.$$

Podemos proceder analogamente se $\langle W, V \rangle$ for negativo em I . ■

Vamos chamar o funcional $E[\alpha] = \int_a^b \langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle dt$ de funcional de energia. Então teremos o seguinte resultado sobre geodésicas:

Teorema 4. Uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma geodésica se, e somente se, é um ponto crítico do funcional $E[\alpha] = \int_a^b \langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle dt$ com os extremos fixos.

Demonstração. Vamos considerar γ um ponto crítico do funcional E . Seja Γ uma variação de γ , então temos que $\Phi(s) = E[\gamma_s]$ é tal que $\Phi'(0) = 0$, ou seja:

$$\Phi'(s) = \frac{d}{ds} \int_a^b \langle \partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma \rangle dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \langle \partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma \rangle dt.$$

Utilizando a compatibilidade da conexão com a métrica, segue que:

$$\Phi'(s) = 2 \int_a^b \langle D_s \partial_t \Gamma, \partial_t \Gamma \rangle dt = 2 \int_a^b \langle D_t \partial_s \Gamma, \partial_t \Gamma \rangle dt.$$

Denotando o campo tangente à variação $V \doteq \partial_s \Gamma$ e integrando por partes utilizando a compatibilidade com a métrica, segue que:

$$\Phi'(s) = 2 \int_a^b \langle D_t V, \partial_t \Gamma \rangle dt = 2 \langle V, \partial_t \Gamma \rangle \Big|_a^b - 2 \int_a^b \langle V, D_t \partial_t \Gamma \rangle dt$$

Portanto ponto $s = 0$ temos que $\partial_t \Gamma = \dot{\gamma}$. Combinando com o fato de que V se anula em a e b , pois Γ é variação própria, segue que:

$$0 = \Phi'(0) = -2 \int_a^b \langle V, D_t \dot{\gamma} \rangle dt$$

Portanto para toda variação Γ , seu campo variacional satisfaz:

$$\int_a^b \langle V, D_t \dot{\gamma} \rangle dt = 0.$$

Como todo campo de vetores próprios tangentes à γ podem ser tomados como campos variacionais de alguma variação, segue pelo lema fundamental do cálculo das variações que $D_t \dot{\gamma} \equiv 0$. Por outro lado se γ é geodésica, segue que γ é ponto crítico do funcional E com os extremos fixos. ■

Ponho um funcional F da seguinte forma:

$$F[\gamma] = \int_a^b L(x^1(t), \dots, x^n(t), \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t)) dt,$$

onde $x^i(t)$ são funções reais, as equações de Euler-Lagrange (equações dos pontos críticos do funcional) para o funcional com os extremos fixos são:

$$\frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Portanto para encontrar as geodésicas de uma variedade, na prática, podemos utilizar as equações de Euler-Lagrange para o funcional de energia E . Mais precisamente, vamos utilizar o funcional E em um sistema de coordenadas.