Universidade Federal do Paraná

Flávia Cerqueira Cesar

Um estudo sobre as funções analíticas reais

Curitiba
2021

Flávia Cerqueira Cesar

Um estudo sobre as funções analíticas reais

Trabalho de conclusão apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial à obtenção do grau de licenciada em Matemática.
Orientador: Prof. Cleber de Medeira

Curitiba
2021

Agradecimentos

Agradeço e dedico esse trabalho às seguintes pessoas:

Meus pais que sempre me apoiaram nos estudos, não desistir ao longo do percurso foi por lembrar que eles são guerreiros e sempre fizeram o possível para que conseguisse, incluindo o 'chega de estudar um pouco', quando precisava descansar.

Meus amigos e colegas do curso de matemática da UFPR: Andreia, Willyan, Leonardo, Fernanda, Bruna, Lou, Ana, Thiago, Adriano e Eduarda. Que além da parceria de RU, cafés e risos, me ensinaram muita coisa ao decorrer desse curso, deixando os tombos menos agressivos, e em especial a Andreia e Willian que me auxiliaram com a construção dos gráficos desse trabalho.

Meus amigos do Jesus na UFPR, que acrescentaram amor e companheirismo na minha caminhada universitária, amigos para a vida. Em especial a Bruna Santos, que foi suporte na crise e me ajudou com o Abstract.

Meus líderes, Saulo e Marcia do Prado, que sempre lançam palavras de incetivo e encorajamento, conselheiros para todas as áreas. E meus colegas e amigos do trabalho, por serem compreensivos e parceiros.

Meu orientador e professor Cleber de Medeira, que empenhou não só tempo nas orientações, explicações e correções, mas paciência e compreensão com minhas limitações de conhecimento e tempo, sem esse combo teria sido impossível concluir.

E principalmente a Deus, meu Senhor, ajudador, conselheiro, consolador, amigo, companheiro e fortaleza, que tem me sustentado nessa caminhada de pedras, me ensinado a construir uma versão melhor de mim, baseada na vida de seu filho Jesus, o salvador.

Resumo

Esse trabalho trata de um breve estudo sobre as funções analíticas reais. Apresentamos diversas propriedades sobre essa classe de funções, usando como base resultados envolvendo séries de potências. Embora seja muito comum obter resultados para esse tipo de função fazendo extensões para funções complexas, os resultados apresentados nesse trabalho se limitam apenas a funções de uma variável real. Como aplicação, abordamos a regularidade de soluções de algumas equações diferenciais ordinárias lineares com coeficientes analíticos reais.

Palavras-chave: Série de potências, função analítica real, continuação analítica, equações diferenciais ordinárias lineares.

Abstract

This work deals with a brief study on the real analytic functions. We present several properties about this class of functions, where we use results related to the power series. Although it is very common to obtain some properties to this kind of function by making extensions to complex functions, the results presented in this work address only to real variable functions. As an application, we approached the regularity of the solutions of some linear ordinary differential equations with real analytic coefficients.

Key words: power series, real analytic function, analytic continuation, linear ordinary differential equations.

Sumário

Introdução

Em Análise Matemática, é de grande relevância a caracterização de uma classe de funções por meio de sua regularidade. Esse aspecto nos permite um estudo detalhado, obtendo suas principais propriedades, que desde as primeiras abordagens em cálculo são importantes, como por exemplo a classificação das funções por meio da continuidade, diferenciabilidade, integrabilidade, etc. Muitas das funções elementares vistas no cálculo diferencial são funções infinitamente deriváveis em seus respectivos domínios, dentre elas estão as *funções analíticas reais*, caracterizadas por suas *séries de Taylor*. Dessa forma, isso nos permite pensar as funções analíticas reais como uma extensão natural dos polinômios.

As funções analíticas reais são aquelas que podem ser escritas como uma série de potências em torno de cada ponto de seu domínio. Da forma que é definida, cada função analítica real é uma função suave, isto é, infinitamente derivável, porém nem toda função suave é uma função analítica real.

Nesse trabalho faremos um estudo sistemático do espaço das *funções analíticas reais* de uma variável, investigando propriedades e características dessa classe de funções. Usamos como principais referências os livros [**?**, **?**] e [**?**]. O termo função analítica vem do estudo das funções complexas e embora seja comum obter resultados para funções analíticas reais estendendo o estudo dessas funções aos complexos e depois retornando aos reais, aqui abordamos apenas funções de uma variável real. Nesse sentido, por exemplo, para provarmos que a composta de duas funções analíticas reais também é uma função analítica real, precisamos recorrer a Fórmula de Faà di Bruno, a qual fornece uma expressão para calcular derivadas de ordem superior de uma função composta.

A estrutura desse trabalho é dada da seguinte forma. No Capítulo 1, apresentamos uma abordagem sobre sequências e séries de funções, trazendo algumas propriedades de convergência pontual e convergência uniforme, sendo a principal referência utilizada o livro [**?**]. Estudamos também nesse capítulo um tipo muito importante de séries de funções, as *séries de potências*, as quais serão essenciais para o estudo das funções analíticas reais.

No Capítulo 2, utilizando como base alguns resultados do livro [**?**], estudamos as principais propriedades das funções analíticas reais, uma importante classe de funções, definida a partir de séries de potências. Apresentamos exemplos de funções infinitamente deriváveis que não são analíticas reais. Verificamos que essa classe de funções é fechada para operações como adição, subtração, produto e divisão (essa última sob certa hipótese adicional). Um importante resultado nesse capítulo é o *princípio da continuação analítica* que dentre várias consequências nos permite caracterizar as funções analíticas reais a partir do crescimento das suas derivadas.

Embora o termo função analítica seja herdado das funções complexas, e tendo que vários resultados que apresentamos nesse trabalho possam ser provados com extensões à variável complexa, nossa abordagem se limitará à funções de variável real.

Por fim, no Capítulo 3, motivados por várias das clássicas equações estudadas na Física Matemática, consideramos as equações diferenciais ordinárias (EDO's) lineares de segunda ordem com coeficientes analíticos reais. Usamos os resultados dos capítulos anteriores para estudar a regularidade dessas EDO's lineares com coeficientes analíticos reais. O teorema principal apresentado nesse capítulo nos permite garantir quando uma EDO linear de segunda ordem tem solução analítica real, resultado que pode ser estendido para EDO's de ordem superior.

Capítulo 1

Sequências e séries de funções

Muitos problemas em Matemática são estudados por meio de aproximações. Por exemplo, em muitas situações em que se quer comprovar uma certa propriedade para uma função $f(x)$, busca-se encontrar uma sequência de funções $f_n(x)$ que possua essa propriedade e depois tomando o limite mostra-se que a propriedade desejada é preservada para $f(x)$. Motivados por isso, estudaremos nesse capítulo uma introdução as sequências de funções, bem como as séries de funções. Daremos destaque aos dois tipos de convergência, pontual e uniforme, e apresentaremos alguns resultados que serão importantes para o desenvolvimento do trabalho.

1.1 Sequências de funções

Definição 1.1. *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma sequência de funções reais com domínio em X é uma correspondência que associa, a cada $n \in \mathbb{N}$, uma função*

$$f_n : X \to \mathbb{R}.$$

Exemplo 1.2. Seja $X = [0,1]$ e a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = x^n$, temos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (x, x^2, \ldots)$, com $f_1(x) = x; f_2(x) = x^2; \ldots$.

Exemplo 1.3. Seja $X = [0,\infty)$ e a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ dada por $f_n(x) = \sqrt{nx}$, temos $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sqrt{x}, \sqrt{2x}, \ldots, \sqrt{xn}, \ldots)$, com $f_1(x) = \sqrt{x}; f_2(x) = \sqrt{2x}; \ldots$.

1.2 Convergência pontual e convergência uniforme

Diferentemente das sequências numéricas, uma sequência de funções pode convergir em diferentes modos. A seguir apresentaremos a convergência simples, também chamada de convergência pontual, e em seguida a convergência uniforme.

Definição 1.4. *Uma sequência de funções*

$$f_n : X \to \mathbb{R}$$

converge pontualmente (ou simplesmente) para a função $f : X \to \mathbb{R}$, quando para cada $x \in X$, a sequência numérica $(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots)$ converge para o número $f(x)$, ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \text{ para cada } x \in X.$$

Formalmente isso significa que, dado $\epsilon > 0$, para cada $x \in X$, podemos obter um número inteiro $n_0 = n_0(\epsilon, x)$ tal que

$$n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Notação: $f_n \longrightarrow f$ pontualmente em X.

Exemplo 1.5. Sejam $g : X \to \mathbb{R}$ uma função e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais tal que $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Considerando a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ definida por $f_n(x) = a_n \cdot g(x)$ e a função $f : X \to \mathbb{R}$ por $f(x) = a \cdot g(x)$, temos que $f_n \longrightarrow f$ pontualmente em X.

De fato, dado $\epsilon > 0$ e $x \in X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a| < \frac{\epsilon}{1 + |g(x)|}, \quad \forall n > n_0.$$

Observe que, dependendo do ponto x considerado, o lado direito desta desigualdade pode mudar, pois n_0 depende tanto de ϵ como de x. Logo, se $n > n_0$ temos que

$$|f_n(x) - f(x)| = |g(x)||a_n - a| < |g(x)|\frac{\epsilon}{1 + |g(x)|} < \epsilon.$$

Em particular, se considerarmos a sequência numérica $a_n = 1/n$ e a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x$, $n \in \mathbb{N}$, teremos que a sequência de funções $f_n(x) = x/n$ converge pontualmente para a função nula.

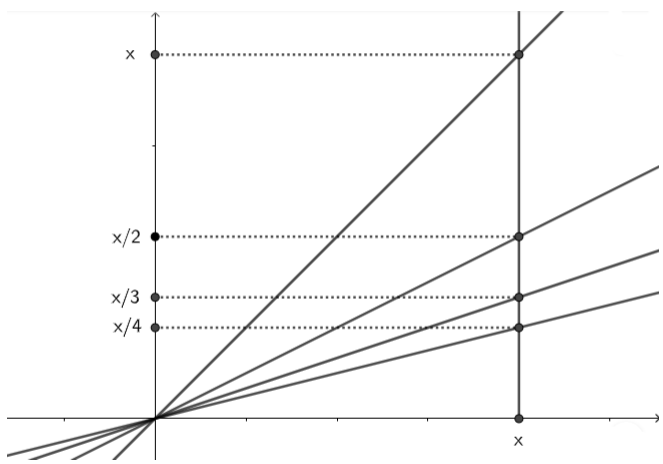

Figura 1.1: Sequência $f_n(x) = x/n$ converge pontualmente a zero.

Dizer que $f_n \longrightarrow f$ pontualmente em X é equivalente a dizer que fixado $x \in X$, os gráficos da sequência (f_n), para cada $n \in \mathbb{N}$, intersectam a reta perpendicular ao eixo x no ponto $(x, 0)$ numa sequência de pontos com ordenadas convergindo para $f(x)$.

Exemplo 1.6. Considere a sequência de funções $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por $f_n(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Dado $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se $x \in [0,1)$ e $f(1) = 1$, então $f_n \to f$ pontualmente em X. Com efeito, verifica-se que para cada $x \in [0,1)$ temos $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ enquanto $\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$.

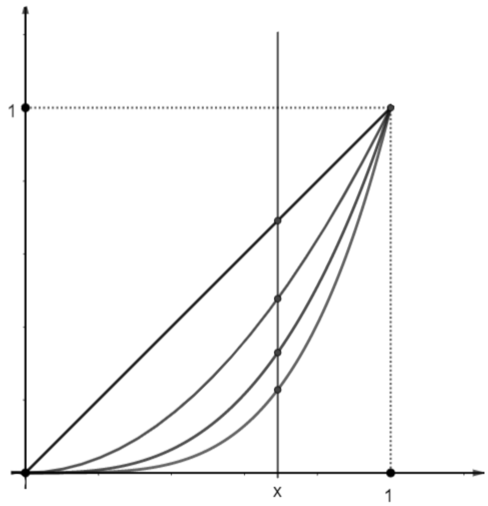

Figura 1.2: Sequência $f_n(x) = x^n$.

Exemplo 1.7. A sequência de funções $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, definida para cada $n \in \mathbb{N}$ por

$$f_n(x) = x^n(1 - x^n),$$

converge pontualmente para a função identicamente nula definida em $[0, 1]$. De fato, começamos observando que $f_n(0) = f_n(1) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e que para cada $x \in]0, 1[$ temos $\lim x_n = 0$. Como a sequência $(1 - x^n)$ é limitada, segue que $\lim x_n(1 - x^n) = 0$, para todo $x \in [0, 1]$, e f_n converge pontualmente para 0 em $[0, 1]$. Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, $f_n'(x) = nx^{n-1} - 2nx^{2n-1}$, logo $x_0 = \sqrt[n]{1/2}$ é o único ponto crítico de f_n no intervalo $[0, 1]$, no qual temos $f_n(x_0) = 1/4$ A figura a seguir apresenta alguns gráficos da sequência f_n e nos ajuda a visualizar este comportamento inesperado.

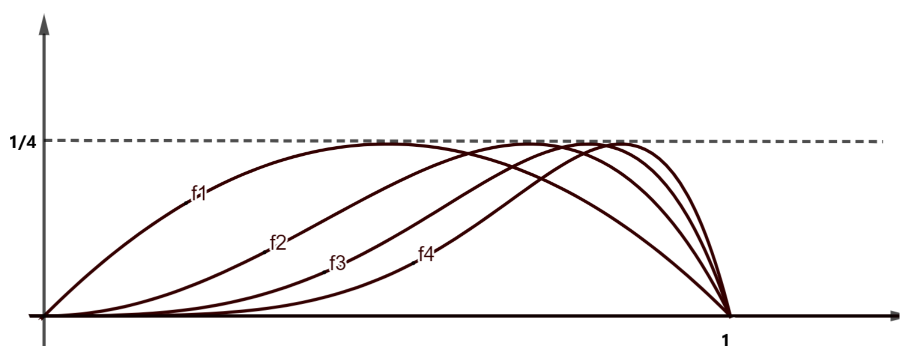

Figura 1.3: Sequência $f_n(x) = x^n(1 - x^n)$.

Na Definição **??** dada para a convergência pontual, vimos que o valor de $n_0 \in \mathbb{N}$ encontrado pode depender do $\epsilon > 0$ e o x dados. Quando for possível encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ independe dos valores de x, diremos que a convergência é uniforme. Mais precisamente temos a definição a seguir.

Definição 1.8. *Uma sequência de funções* $f_n : X \to \mathbb{R}$ *converge uniformemente para uma função* $f : X \to \mathbb{R}$ *quando dado* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *(*n_0 *dependendo possivelmente apenas de* ϵ*), tal que*

$$n > n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

para todo $x \in X$*. Nesse caso, escreveremos* $f_n \to f$ *uniformemente em* X*.*

Claramente a convergência uniforme implica em convergência pontual, porém a recíproca é falsa. De fato, se consideramos a sequência de funções $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$, vimos no Exemplo **??** que f_n converge pontualmente, em $[0,1]$, para a função dada por $f(x) = 0$ se $x \in [0,1)$ e $f(1) = 1$. Vejamos que essa convergência não pode ser uniforme. Caso fosse, então para $\epsilon = \frac{1}{2}$ existiria $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > n_0 \Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{2}, \quad \forall x \in [0,1].$$

Por outro lado, dado $m \in \mathbb{N}$ satisfazendo $m > n_0$, temos que $\lim_{x \to 1^-} x^m = 1$. Logo, existe $\delta > 0$ tal que

$$1 - \delta < x < 1 \Longrightarrow x^m > \frac{1}{2}.$$

Portanto, se $1 - \delta < x < 1$ temos

$$|f_m(x) - f(x)| = x^m > \frac{1}{2},$$

o que é uma contradição.

Exemplo 1.9. Consideremos agora a sequência de funções $f_n(x) = x^n$ definida no intervalo $[0, 1-\delta]$, onde $0 < \delta < 1$. Uma vez que $\lim_{n\to\infty}(1-\delta)^n = 0$, então dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(1-\delta)^n < \epsilon$, sempre que $n > n_0$. Portanto, se $n > n_0$ teremos

$$0 < x^n \leq (1-\delta)^n < \epsilon,$$

para todo $x \in [0, 1-\delta]$. Logo, $f_n(x)$ converge uniformemente para a função identicamente nula definida no intervalo $[0, 1-\delta]$.

Exemplo 1.10. No Exemplo **??**, se a função g é limitada, isto é, existe $K > 0$ tal que:

$$|g(x)| < K, \text{ para todo } x \in X.$$

então, dado $\epsilon > 0$, podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \implies |a_n - a| < \frac{\epsilon}{K}.$$

Logo,

$$n > n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| = |a_n \cdot g(x) - a \cdot g(x)| = |a_n - a| \cdot |g(x)| < \left(\frac{\epsilon}{K}\right) \cdot K = \epsilon,$$

para todo $x \in X$. Segue que $f_n \to f$ uniformemente em X.

Uma interpretação geométrica para a convergência uniforme de uma sequência de funções pode ser descrita da seguinte forma. Suponha que $f_n \to f$ uniformemente, então dado $\epsilon > 0$ considere as funções transladadas $f - \epsilon$ e $f + \epsilon$. Os gráficos dessas duas funções formam uma "faixa de raio ϵ" em torno do gráfico da função f.

Pela definição de convergência uniforme, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$ então

$$f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon,$$

para todo $x \in X$. Isso significa geometricamente que os gráficos das funções f_n estão contidos na faixa de raio ϵ mencionada acima, sempre que $n > n_0$.

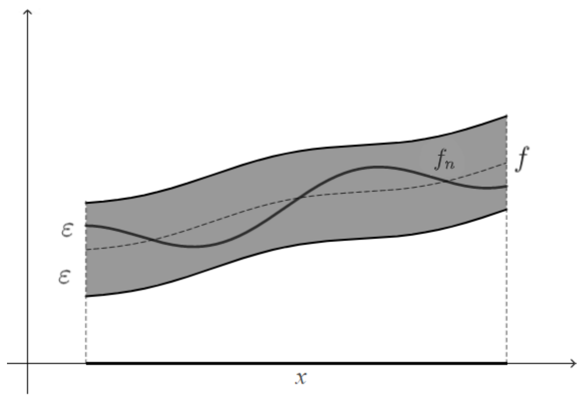

Figura 1.4: $f(x) - \epsilon < f_n(x) < f(x) + \epsilon$

Definição 1.11. *Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é chamada de sequência de Cauchy quando para qualquer $\epsilon > 0$ é possível obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$m, n > n_0 \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon,$$

qualquer que seja $x \in X$.

Teorema 1.12 (Critério de Cauchy)**.** *Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente convergente se, e somente se, f_n é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Primeiro vamos considerar que a sequência f_n converge para f uniformemente em X. Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n - n_0$ implica em $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{2}$ para todo $x \in X$, tomando também um $m > n_0$, temos da mesma maneira, que $|f_m(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{2}$. Logo, por hipótese, com m e n maiores que n_0, temos

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,$$

para todo $x \in X$. Portanto f_n é uma sequência de Cauchy.

Considerando que a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é de Cauchy, então para cada $x \in X$, os números $f_n(x)$, com $n \in \mathbb{N}$, formam uma sequência de Cauchy de números reais, que converge para um número real que chamaremos de $f(x)$. Isto define a função $f : X \to \mathbb{R}$, tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ para todo $x \in X$.

Para mostrar que f_n converge uniformemente para f em X, tomemos um $\epsilon > 0$. Existe n_0, tal que podemos tomar m e n maiores que n_0, que implica $|f_m(x) - f_n(x)| < \epsilon$, para todo $x \in X$. Vamos considerar n e x fixos e m tendendo ao infinito. Assim, obtemos $|f(x) - f_n(x)| \leq \epsilon$, para todo $x \in X$ e $n > n_0$, o que prova que f_n é uniformemente para f.

□

1.3 Séries de funções

Dada uma sequência de funções $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definida sobre X, definimos uma nova sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, com cada função $s_n : X \to \mathbb{R}$ é dada por

$$s_n = f_1 + \cdots + f_n.$$

A *série de funções*, de termo geral f_n, é definida como sendo o limite dessa nova sequência de funções e a denotamos por

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

No caso em que, para cada $x \in X$, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ é convergente, fica bem definida a função $f : X \to \mathbb{R}$. Dizer que a série acima converge uniformemente, significa que a sequência (s_n) converge uniformemente para a função f.

Exemplo 1.13. Sejam $X = [0, 1]$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ a série de funções definida da seguinte forma:

$$f_1(x) = x \text{ e, para } n \geq 2,\ f_n(x) = x^n - x^{n-1}, \quad x \in X.$$

Note que a n-ésima soma parcial da série é dada por $s_n(x) = x^n$. Logo, a série converge pontualmente em X para a função f definida por: $f(x) = 0$ se $x \in [0, 1)$ e $f(x) = 1$ se $x = 1$.

Muitas vezes será conveniente considerarmos séries começando com o índice $n = 0$.

Exemplo 1.14. Considere $X = (-1, 1)$ e a série de funções $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, com termo geral definido por $f_n(x) = x^n$, $x \in X$. Nesse caso, as somas parciais são dadas por:

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 \cdots + x^n,$$

Logo,

$$xs_n(x) = x + x^2 + x^3 \cdots + x^{n+1}.$$

Consequentemente

$$s_n(x) - xs_n(x) = 1 - x^{n+1},$$

o que implica em

$$s_n(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad x \in X.$$

Como $|x| < 1$ para todo $x \in X$, fazendo $n \to \infty$, segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x) = \frac{1}{1 - x}, \quad x \in X.$$

Veremos mais adiante que a convergência dessa série é uniforme em X.

1.4 Teste M de Weierstrass

Um dos critérios mais práticos para verificar que uma série converge uniformemente é o Teste M de Weierstrass. Esse teste será muito útil em vários momentos ao decorrer desse trabalho.

Teorema 1.15 (Teste M de Weierstrass)**.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f_n : X \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções e $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais não negativos tais que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty \quad e \quad |f_n(x)| \leq M_n, \text{ para todo } n \geq 1 \text{ e todo } x \in X.$$

Então, as séries $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ convergem uniformemente em X.

Demonstração. Como, para cada $x \in X$, temos que $|f_n(x)| \leq M_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} M_n < \infty$, então o teste da comparação garante que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|$ é convergente e portanto também converge a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$.

Vejamos que a convergência é uniforme. De fato, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, dependendo apenas de ϵ, tal que para todo $m, n > n_0$, com $m > n$, temos

$$\left| \sum_{k=n}^{m} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n}^{m} M_k < \epsilon,$$

para todo $x \in X$. Segue pelo critério de Cauchy, Teorema **??**, que as séries $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|$ são uniformemente convergentes em X.

□

Exemplo 1.16. Seja $p > 1$ e considere a série dada por

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^p}.$$

Note que a sequência de funções $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{n^p}$ pode ser limitada da seguinte forma:

$$\left| \frac{\operatorname{sen}(nx)}{n^p} \right| \leq \frac{1}{n^p}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^p$ é convergente, segue do Teste M de Weierstrass que a série de funções acima converge uniforme e absolutamente em $\mathbb{R}$.

Embora sejam suficientes para garantir a convergência uniforme, as condições apresentadas no Teste M de Weierstrass não são necessárias conforme mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 1.17. Considere a sequência de funções $f_n : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, definidas para cada n por:

$$f_n(x) = \frac{1}{x}, \text{ se } x \in [n, n+1) \ \text{ e } \ f_n(x) = 0, \text{ caso contrário.}$$

Temos $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = 1/x$, para todo $x \in [1, \infty)$. Seja $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x$. Assim, a convergência $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ é uniforme em $[1, \infty)$, pois

$$0 \leq f(x) - [f_1(x) + \cdots + f_n(x)] < \frac{1}{n},$$

para todo $x \in [1, \infty)$.

Por outro lado, não existe uma sequência de números reais (M_n) tal que $f_n(x) \leq M_n$, para todo $x \in [1, \infty)$ e $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ seja convergente. De fato, caso contrário tomando em particular $x = n$, teríamos que $1/n \leq M_n$ e a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ é convergente, o que é um absurdo.

1.5 Algumas consequências da convergência uniforme

Quando nos deparamos com limites repetidos, uma questão que surge naturalmente é investigar sob que condições podemos inverte-los. Isso ocorre com frequência quando tratamos de sequências de funções, pois podemos consider tanto o limite em relação aos índices n como o limite com respeito a variável x.

Considere por exemplo a sequência de funções $f_n(x) = x^n$, $x \in [-1, 1]$. Vimos no Exemplo **??** que f_n converge pontualmente para a função $f(x) = 0$ se $x \in [0, 1)$ e $f(1) = 1$. Note que nessa situação temos:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{x\to 1^-} f_n(x) \right) = \lim_{n\to\infty} (1) = 1$$

enquanto que

$$\lim_{x\to 1^-} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = 0.$$

Logo, os cálculos acima sugerem que nem sempre podemos inverter a ordem dos limites obtendo uma igualdade.

No Teorema a seguir veremos quando se pode inverter a ordem dos limites obtendo o mesmo valor, sendo que a principal condição exigida é a convergência uniforme.

Teorema 1.18. *Seja a um ponto de acumulação de um conjunto X. Se a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para a função $f : X \to \mathbb{R}$ e, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $L_n = \lim_{x\to a} f_n$, então:*

1º Existe $L = \lim_{n\to\infty} L_n$;

2º Temos $L = \lim_{x\to a} f(x)$.

Dito de outra forma, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to a} f_n(x)\right] = \lim_{x\to a}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right],$$

desde que os limites $\lim_{x\to a} f_n(x)$ e $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ existam, e o segundo desses limites seja uniforme.

Demonstração.
1) Para provar que existe $L = \lim_{n\to\infty} L_n$ basta verificar que (L_n) é uma sequência de Cauchy. Dado $\epsilon > 0$. sabendo que (f_n) converge uniformemente para f em X, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$ então $|f_m(x) - f_n(x)| < \dfrac{\epsilon}{3}$ para todo $x \in \mathbb{X}$, como verificamos no Teorema **??**.

Obtendo $x \in X$ tal que $|L_m - f_m(x)| < \dfrac{\epsilon}{3}$ e $|f_n(x) - L_n| < \dfrac{\epsilon}{3}$, podemos escrever:

$$|L_m - L_n| \leq |L_m - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon$$

Que implica que $|L_m - L_n| < \epsilon$, ou seja, L_n é uma sequência de Cauchy.
2) Agora precisamos provar que $L = \lim_{x\to a} f(x)$, para isso, considerando $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ que implica $|L - L_n| < \dfrac{\epsilon}{3}$ e $|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\epsilon}{3}$ para todo $x \in X$. Fixemos um $n > n_0$.

Como $\lim_{x\to a} f_n(x) = L_n$, então existe $\delta < 0$ tal que $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ implica que $|f_n(x) - L_n| < \dfrac{\epsilon}{3}$. Nestas condições temos:

$$|f(x) - L| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - L_n| + |L_n - L| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Portanto podemos afirmar que se $x \in X$ e $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$.

Logo temos que $L = \lim_{x\to a} f(x)$.

□

Teorema 1.19. *Sejam $f_n : X \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções contínuas em um ponto $a \in X$. Se f_n converge uniformemente para uma função $f : X \to \mathbb{R}$, então f também é contínua no ponto a.*

Demonstração. Se a é um ponto isolado de X, então segue pela definição de continuidade que f é contínua em a. No caso em que $a \in X$ é um ponto de acumulação de X, segue do Teorema **??** que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\lim_{x\to a} f_n(x)\right] = \lim_{n\to\infty} f_n(a) = f(a).$$

□

O Teorema **??** nos dá um método prático para verificarmos se uma sequência de funções contínuas não converge uniformemente. Para isso, basta verificar que a função limite não é contínua. Por exemplo, a sequência de funções vista no Exemplo **??** não converge uniformemente no intervalo $[0,1]$, uma vez que as funções $f_n(x) = x^n$ são contínuas em $[0,1]$, porém convergem para a função $f(x) = 0$, se $x \in [0,1)$, e $f(1) = 1$, a qual não é contínua nesse intervalo.

Por outro lado, a condição de continuidade da função limite dada no Teorema **??** não é suficiente, ou seja, a convergência de uma sequência funções contínuas f_n para uma função contínua f, não garante que essa convergência seja uniforme. De fato, no Exemplo (**??**) vimos que a sequência $f_n(x) = x^n(1-x^n)$ converge pontualmente em $[0,1]$ para a a função identicamente nula, porém para cada $n \in \mathbb{N}$, se considerarmos $y_n = \sqrt[n]{1/2}$ teremos que $f(y_n) = 1/4$, sendo assim a sequência f_n não pode convergir uniformemente para a função nula.

Existe uma situação em que a continuidade da função limite garante que a convergência de uma sequência de funções contínuas é uniforme. Esse é o resultado do próximo teorema que fará uso da seguinte definição:

Definição 1.20. *Uma sequência de funções f_n converge monotonamente para a função f, quando para cada $x \in X$, a sequência numérica $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots,$ converge monotonamente para o valor $f(x)$.*

Teorema 1.21 (Dini)**.** *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto. Se um sequência de funções contínuas $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge monotonamente para um função contínua $f : X \to \mathbb{R}$, então a convergência é uniforme.*

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, para cada $n \in \mathbb{N}$ vamos considerar o conjunto

$$K_n = \{x \in X;\ |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}.$$

Sabendo que f_n e f são contínuas e X é fechado, temos que cada K_n é um subconjunto fechado de X e portanto, compacto. O fato da sequência f_n ser monótona implica que $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$, mas a $\bigcap\limits_n K_n = \emptyset$, pois $x \in K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ implicaria que

$$|f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon,$$

para todo n, o que é um absurdo, visto que $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Sendo $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \emptyset$, concluímos que algum K_{n_0} é vazio. Portanto, se $n > n_0$ então K_n é vazio, ou seja, $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$, para todo $x \in X$. □

Vamos agora descrever algumas das mais importantes consequências da convergência uniforme de uma sequência de funções. Veremos que, sob algumas hipóteses adicionais, essa propriedade nos permite "inverter" a integração e a derivação com o limite de uma sequência uniformemente convergente. Começamos com a integração relembrando o seguinte.

Definição 1.22. *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem medida nula (à Lebesgue) se para cada $\epsilon > 0$, existe uma coleção de intervalos abertos $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que:*

$$X \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \quad e \quad \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon.$$

Teorema 1.23. *Considere uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e o conjunto*

$$D = \{x \in [a,b];\ f \text{ é descontínua em } x\}.$$

A função f é integrável se, e somente se, D tem medida nula.

Teorema 1.24. *Sejam* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma sequência de funções limitadas. Se as funções* f_n *são integráveis e a sequência* (f_n) *convergem uniformemente para a função* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, então* f *é uma função integrável e vale*

$$\int_a^b \lim f_n(x)dx = \lim \int_a^b f_n(x)dx.$$

Demonstração. Como para cada n a função f_n é integrável, segue pelo Teorema **??** que o conjunto

$$D_n = \{x \in [a,b];\ f_n \text{ é descontínua em } x\}$$

tem medida nula.

Também sabemos pelo Teorema **??** que se f_n converge para f uniformemente e todas as f_n são contínuas em $x_0 \in [a,b]$, então é f é contínua em x_0, logo se f é descontínua em x_0, então existe uma função f_n que é descontínua em $x_0 \in [a,b]$. Portanto,

$$D \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,$$

onde $D = \{x \in [a,b];\ f \text{ é descontínua em } x\ \}$.

Como cada D_n tem medida nula, segue da inclusão acima que D também tem medida nula o que implica que f é integrável.

Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então teremos

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a},$$

para todo $x \in X$. Logo

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &= \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx \right| \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \\ &< \frac{\epsilon}{b-a} \int_a^b dx = \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

□

Teorema 1.25. *Seja* f_n *uma sequência de funções deriváveis no intervalo* $[a,b]$*. Se a sequência numérica* $f_n(c)$ *converge para algum* $c \in [a,b]$ *e se suas derivadas* f_n' *convergem uniformemente em* $[a,b]$ *para uma função* g*, então* f_n *converge uniformemente em* $[a,b]$ *para a função derivável* f*, tal que* $f' = g$*.*

Resumidamente, denotando as derivadas de f_n *por* Df_n*, temos que*

$$D(\lim f_n) = \lim Df_n,$$

desde que Df_n convirja uniformemente.

Demonstração. No caso particular em que as funções f_n tem derivadas contínuas, este resultado é consequência do Teorema Fundamental do Cálculo. Com efeito para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in [a,b]$ vale:

$$f_n(x) = f_n(c) - \int_c^x f_n'(t)dt. \tag{1.1}$$

Por hipótese sabemos que a sequência $f_n(c)$ converge e pelo Teorema **??** temos que a sequência $\int_c^x f_n'(t)dt$ converge para $\int_c^x g(t)dt$.

Portanto, para cada $x \in [a,b]$ definimos $f(x)$ como sendo o limite, quando $n \to \infty$, da sequência que aparece no lado direito da igualdade (**??**), ou seja,

$$f(x) = f(c) - \int_c^x g(t)dt. \tag{1.2}$$

Dessa forma, $f'(x) = g(x)$. Resta agora provar a uniformidade da convergência $f_n \to f$. Dado $\epsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ (n_0 dependendo apenas de ϵ) tal que

$$n > n_0 \Rightarrow |f_n(c) - f(c)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |f_n'(t) - g(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)},$$

para todo $t \in [a,b]$.

Assim, considerando a diferença entre as igualdades **??** e **??** obtemos que

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &\leq |f_n(c) - f(c)| + \left| \int_c^x g(t) - f'(t)dt \right| \\ &\leq |f_n(c) - f(c)| + |x - c| \cdot \sup_{a \leq t \leq b} |f_n'(t) - g(t)| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + (b-a) \cdot \frac{\epsilon}{2(b-a)} = \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $x \in [a,b]$. Logo, a convergência é uniforme.

Passamos agora a demonstração do caso geral. Utilizando o Teorema do Valor Médio aplicado à função $f_m - f_n$, temos que para todo $x \in [a,b]$, existe d entre x e c, tal que

$$f_m(x) - f_n(x) = f_m(c) - f_n(c) + (x-c)[f_m'(d) - f_n'(d)].$$

A equação acima, juntamente com a convergência de $f_n(c)$ e a convergência uniforme de f_n', implicam que f_n é uma sequência de Cauchy. Assim, pelo Teorema **??**, temos que a sequência f_n converge uniformemente para uma função f, definida no intervalo $[a,b]$.

Reescrevendo a igualdade acima com $c = x_0$ e d obtemos

$$\frac{f_m(x) - f_m(x_0)}{x - x_0} - \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} = f_m'(d) - f_n'(d), \tag{1.3}$$

para todo $x \neq x_0$.

Fixado $x_0 \in [a,b]$, considere os quocientes de Newton dados por

$$q_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_0)}{x - x_0} \quad \text{e} \quad q(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

para $x \neq x_0$.

A igualdade **??** mostra que q_n é uma sequência de Cauchy, segue então pelo Teorema **??** que q_n converge uniformemente em $[a,b] \setminus \{x_0\}$ para a função q.

Por fim, fazendo uso do Teorema **??**, temos que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} q(x) \\
&= \lim_{x \to x_0} \left[\lim_{n \to \infty} q_n(x) \right] \\
&= \lim_{n \to \infty} \left[\lim_{x \to x_0} q_n(x) \right] \\
&= \lim_{n \to \infty} \left[f_n'(x_0) \right] = g(x_0).
\end{aligned}$$

Como x_0 é arbitrário em $[a,b]$, temos que f é derivável em $[a,b]$, com $f' = g$.

□

1.6 Séries de potências

Nessa seção faremos um breve estudo sobre as séries de potências, as quais formam uma classe muito importante de séries de funções e são fundamentais para o desenvolvimento desse trabalho. A partir desse ponto, usaremos a notação $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = 0, 1, 2, \ldots$

Definição 1.26. *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}$ e $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ uma sequência de números reais. A série de potências de termo geral a_n e centrada em x_0 é a série de funções dada por*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1(x - x_0) + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \cdots .$$

Note que, se usarmos a mudança de variável $y = x - x_0$, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n = a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n + \cdots .$$

Assim, sem perda de generalidade, apenas para simplificar a notação, durante toda essa seção vamos considerar as séries de potências centradas em $x_0 = 0$. Os resultados apresentados podem ser transcritos para o caso geral usando a mudança de variável $y = x - x_0$.

Teorema 1.27 (Raio de Convergência)**.** *Uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ satisfaz uma das condições a seguir:*

(I) converge apenas quando $x = 0$;

(II) Existe um número $r > 0$ tal que a série converge absolutamente no intervalo aberto $(-r, r)$ e diverge fora do intervalo fechado $[-r, r]$, podendo convergir ou não nos extremos $-r$ e r;

(III) converge absolutamente em toda reta real.

Demonstração. Primeiramente note que a convergência para $x = 0$ é imediata. Aplicando então o teste da raiz para $x \neq 0$ temos que a série converge absolutamente se

$$|x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1 \tag{1.4}$$

e diverge no caso em que

$$|x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1, \tag{1.5}$$

pois nesse caso o termo geral $a_n x^n$ não tende para zero. Dessa forma, para concluir a demonstração do teorema basta notar que:

(I) Se $\sqrt[n]{|a_n|}$ é não limitada, então (**??**) ocorre qualquer que seja $x \neq 0$. Nesse caso, a série de potências converge apenas para $x = 0$.

(II) Se $\sqrt[n]{|a_n|}$ é limitada e $0 < \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < +\infty$, então por (**??**) a série de potências converge absolutamente no intervalo aberto $(-r, r)$ e por (**??**) diverge fora do intervalo fechado $[-r, r]$, sendo

$$r \doteq \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1}.$$

(III) Se $\sqrt[n]{|a_n|}$ é limitada e $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, então (**??**) sempre é válida. Nesse caso, a série de potências converge absolutamente para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

□

Observação 1.28. Se considerarmos, por convenção, que $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ pode assumir o valor $+\infty$, então

$$r \doteq \left(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \right)^{-1},$$

pode ser interpretado da seguinte forma: $r = +\infty$ no caso (I), $r > 0$ com $r \in \mathbb{R}$ no caso (II) e $r = 0$ no caso (III).

Diremos então que r é o raio de convergência da série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

e $(-r, r)$ é o intervalo de convergência. No caso em que $r = 0$ teremos apenas o ponto $x = 0$ em vez de um intervalo e no caso $r = +\infty$ teremos $(-r, r) = \mathbb{R}$.

Observação 1.29. No caso em que (a_n) é uma sequência tal que $a_n \neq 0$ para todo n e o limite abaixo existe, é possível usar o *teste da razão* para mostrar que o raio de convergência é dado por

$$r = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|.$$

Veja por exemplo [**?**], Seção 8.2.

Observação 1.30. No caso em que $r > 0$ com $r \in \mathbb{R}$, nada podemos afirmar sobre os extremos do intervalo $(-r, r)$. De fato, considere a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n.$$

Nesse caso, temos que o raio de convergência é $r = 1$ e a série converge no intervalo aberto $(-1, 1)$. Note que no extremo $x = -1$ a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, enquanto no extremo $x = 1$ temos uma série alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ convergente.

Considerando agora a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n}.$$

Nesse caso, temos que o raio de convergência é $r = 1$ e a série converge no intervalo $[-1, 1]$, incluindo os extremos. Esse exemplo enfatiza que não podemos afirmar nada a respeito dos extremos de forma geral, precisamos analisar cada situação.

Teorema 1.31. *Uma série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*, com raio de convergência* $r > 0$*, converge uniformemente em todo intervalo compacto* $[-s, s]$ *contido em seu intervalo de convergência* $I = (-r, r)$*.*

Demonstração. Seja $J = [-s, s] \subset I$. Temos então que

$$|a_n x^n| = |a_n||x|^n \leq |a_n| s^n$$

para todo $x \in J$. Como $s \in I$, então a série numérica $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| s^n$ converge. Portanto, pelo Teste M de Weierstrass, a série de potências $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge uniformemente em J.

□

Lema 1.32. *Seja* $\sum \alpha_p$ *uma série (convergindo ou não) cujas reduzidas*

$$s_p = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p$$

são limitadas, isto é, existe $K > 0$ *tal que* $|s_p| \leq K$ *para todo* $p \in \mathbb{N}$*.*

Seja $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_p \geq \ldots$ *uma sequência não-crescente de números não negativos* b_p*. Então, para todo* $p \in \mathbb{N}$ *vale*

$$|\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_p b_p| \leq K b_1.$$

Demonstração. As reduzidas s_p, para todo $p \in \mathbb{N}$, são definidas como a sequência de

$$s_p = s_{p-1} + \alpha_p \implies \alpha_p = s_p - s_{p-1}.$$

Então, temos

$$\begin{aligned}
|\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + \quad \cdots \quad + \alpha_{p-1} b_{p-1} + \alpha_p b_p| = & \\
= & \quad |s_1 b_1 + (s_2 - s_1) b_2 + \cdots + (s_{p-1} - s_{p-2}) b_{p-1} + (s_p - s_{p-1}) b_p| \\
= & \quad |s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + \cdots + s_{p-1}(b_{p-1} - b_p) + s_p(b_p)|.
\end{aligned}$$

Como $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_p \geq \ldots$ é uma sequência não-crescente, temos

$$\begin{aligned}
|\alpha_1 . b_1 + \alpha_2 . b_2 + \quad \cdots \quad + \alpha_{p-1} b_{p-1} + \alpha_p b_p| = & \\
= & \quad |s_1 (b_1 - b_2) + s_2 (b_2 - b_3) + \cdots + s_{p-1}(b_{p-1} - b_p) + s_p(b_p)| \\
= & \quad |s_1||b_1 - b_2| + |s_2||b_2 - b_3| + \cdots + |s_{p-1}||b_{p-1} - b_p| + |s_p||b_p|
\end{aligned}$$

Sabemos que as reduzidas s_p são limitadas, então exite $K > 0$ tal que $|s_p| \leq K$, para todo $p \in \mathbb{N}$, dessa forma:

$$\begin{aligned}
|s_1||b_1 - b_2| + |s_2||b_2 - b_3| + \quad \cdots \quad |s_{p-1}||b_{p-1} - b_p| + |s_p||b_p| \leq & \\
\leq & \quad K|b_1 - b_2| + K|b_2 - b_3| + \cdots + K|b_{p-1} - b_p| + K|b_p| \\
= & \quad |K[(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{p-1} - b_p)]| \\
= & \quad |K(b_1)| \\
= & \quad K b_1.
\end{aligned}$$

Logo, $|\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_p b_p| \leq K b_1$, para todo $p \in \mathbb{N}$. □

Teorema 1.33 (Abel)**.** *Considere uma série de potências* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *com raio de convergência* $0 < r < +\infty$*. Se* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ *converge, então* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge uniformemente em* $[0, r]$*. Em particular, temos*

$$\lim_{x \to r^-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Demonstração. Seja $f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j x^j$. Dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon, r)$ tal que, se $n > n_0$, então $|a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_{n+p}x^{n+p}| < \epsilon$, para todo $p \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = |a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_{n+p}x^{n+p}|.$$

Agora consideramos $\alpha_p = a_{n+p}r^{n+p}$ e aplicamos o Lema **??**, com $K = \epsilon$. Assim, para todo $x \in [0, r]$ obtemos:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \left|\alpha_1\left(\frac{x}{r}\right) + \cdots + \alpha_p\left(\frac{x}{r}\right)^p\right|\left(\frac{x}{r}\right)^n.$$

Tomando $b_p = \left(\frac{x}{r}\right)^p$ temos

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| = \Big| \quad &= \left|\alpha_1\left(\frac{x}{r}\right) + \cdots + \alpha_p\left(\frac{x}{r}\right)^p\right| . \left(\frac{x}{r}\right)^n \\ &= |\alpha_1 b_1 + \cdots + \alpha_p b_p|\left(\frac{x}{r}\right)^n \\ &\leq \epsilon\left(\frac{x}{r}\right)\left(\frac{x}{r}\right)^n = \epsilon\left(\frac{x}{r}\right)^{n+1} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon$, para todo $0 \leq x \leq r$, seja qual for $p \in \mathbb{N}$. Logo $(f_n(x))$ é uma sequência de *Cauchy*. Pelo Teorema **??** concluímos que (f_n) é uniformemente convergente em $[0, r]$.

□

Teorema 1.34 (Integração termo a termo)**.** *Se a série de potências* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *converge em todos os pontos do intervalo fechado* $[\alpha, \beta]$*, então*

$$\int_\alpha^\beta \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}).$$

Demonstração. O intervalo $[\alpha, \beta] \subset [-r, r]$, sendo $(-r, r)$ o intervalo de convergência da série. Assim, pelo Teorema de Abel **??** a convergência da série no intervalo $[\alpha, \beta]$ é uniforme, logo podemos usar os Teoremas **??** e **??**. Assim temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\alpha^\beta \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \int_\alpha^\beta \lim_{x\to r^-} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) dx = \int_\alpha^\beta (\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}).$$

□

Observamos que da forma que é construída, a integral de Riemann trata de funções limitadas num intervalo $[a, b]$, assim se uma função $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ é tal que para cada $c \in [a, b)$, f é limitada e integrável em $[a, c]$, consideramos a integral imprópria

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)dx.$$

Assim, mesmo que a série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$ não seja convergente no extremo r de seu intervalo de convergência, podemos fazer a integração (imprópria) termo a termo $\int_0^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, desde que a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$ seja convergente. De fato, para cada $t \in [0, r)$, podemos usar o Teorema de Abel **??** e integrar termo a termo, obtendo

$$\int_0^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \lim_{t \to r^-} \int_0^t \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \lim_{t \to r^-} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} t^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1},$$

desde que a série numérica que aparece no lado direito da igualdade acima seja convergente.

Teorema 1.35 (Derivação termo a termo)**.** *Considere a função* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$*, definida por uma série de potências, definida no intervalo de convergência* $(-r, r)$*. A função* $f(x)$ *é derivável em cada ponto de* x *de* $(-r, r)$ *e vale*

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Além disso, a série de potências da derivada também tem raio de convergência r*.*

Demonstração. Do Teorema **??** sabemos que podemos derivar termo a termo uma série convergente, com a série das derivadas convergindo uniformemente. Considerando $f_n(x) = a_n x^n$ e sua derivada $f_n'(x)$, basta provar que

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

converge uniformemente em cada intervalo compacto $[-s, s] \subset I$, assim teremos que $f'(x) = g(x)$. Usando o Teorema **??** temos que $g(x)$ tem raio de convergência $r > 0$. Verificaremos que o raio de convergência de $g(x)$ é o mesmo de $xg(x)$. Temos que

$$xg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n.$$

Na série acima o raio de convergência é:

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|n a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} = r$$

Então $R = r$ é o raio de convergência de $xg(x)$, logo também é de $g(x)$.

□

Corolário 1.36. *A função definida por uma série de potências*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

possui derivadas de todas as ordens em qualquer ponto do seu intervalo de convergência $I = (-r, r)$ e suas derivadas sucessivas podem ser calculadas por derivação termo a termo. Assim, para cada $x \in I$ e $k \in \mathbb{N}$ arbitrários, tem-se

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

Em particular, $a_k = \dfrac{f^k(0)}{k!}$, de modo que a série de potências que converge para $f(x)$ em I é a série de Taylor de f em torno de $x_0 = 0$.

Demonstração. Usando o Teorema **??**, temos para cada $x \in (-r, r)$,

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \\
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \\
f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \\
f^{(3)}(x) &= \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}, \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots\big(n-(k-1)\big) a_n x^{n-k},
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Então

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} a_n x^{n-k}, \text{ com } x \in (-r, r) \text{ e } k = 0, 1, 2, \dots$$

Em particular, para $x = 0$ temos $f^{(k)}(0) = \dfrac{k!}{0!} a_k = k! a_k$. Então $a_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}$, para todo $k = 0, 1, 2, \dots$

Logo a série de potências

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

é a Série de Taylor de $f(x)$ em torno de $x_0 = 0$.

□

Capítulo 2

Funções analíticas reais

O objetivo principal desse capítulo é estabelecer as principais propriedades de uma importante classe de funções conhecida como *funções analíticas reais*. Começaremos descrevê-la a partir de agora.

Definição 2.1. *Sejam I um intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é analítica real num ponto $x_0 \in I$, se existem uma sequência de números reais (a_n) e um número $\rho > 0$, tais que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

para todo $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho) \subset I$.

Dizemos que f é analítica real em I, se f é analítica real em cada ponto de I. Nesse caso escrevemos $f \in C^\omega(I)$.

Exemplo 2.2. Considere a função racional $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, definida no intervalo $I = (1, +\infty)$. Dado qualquer $x_0 \in I$, obtemos pela convergência da série geométrica que

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{1}{1 - x_0 + x_0 - x} &= \frac{1}{(1-x_0)\left(1 - \dfrac{x - x_0}{1 - x_0}\right)} \\ &= \frac{1}{1-x_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-x_0}{1-x_0}\right)^n, \quad \left|\frac{x-x_0}{1-x_0}\right| < 1 \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{(1-x_0)^{n+1}}}_{a_n} (x-x_0)^n, \quad |x - x_0| < \underbrace{|1 - x_0|}_{\rho}, \end{aligned}$$

Como x_0 foi tomado arbitrário, segue que f é uma função analítica real em I. O mesmo raciocínio se aplica se considerarmos f definida no intervalo $J = (-\infty, 1)$.

Dado $k \in \mathbb{N}_0$, relembremos que uma função f é de classe C^k, num conjunto aberto $U \subseteq \mathbb{R}$, quando f é derivável até a ordem k e a sua k-ésima derivada é uma função contínua em U. Nesse caso escrevemos $f \in C^k(U)$. O espaço $C^0(U)$ é constituído pelas funções contínuas definidas em U. Obviamente temos que $C^{k+1}(U) \subset C^k(U)$, para todo k.

Quando $f \in C^k(U)$, para todo k, escrevemos $f \in C^\infty(U)$ e dizemos que a função f é infinitamente derivável ou que f é uma função suave.

Note que se f é uma função analítica real num ponto $x_0 \in I$, então como consequência do Corolário **??**, temos que a função f é infinitamente derivável em x_0 e

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Em particular, podemos concluir que se $f \in C^\omega(I)$, então $f \in C^\infty(I)$. Veremos que a inclusão $C^\omega(I) \subset C^\infty(I)$ é própria, ou seja, existem funções infinitamente deriváveis que não são analíticas reais.

Exemplo 2.3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = \cos x$. Podemos representá-la como função analítica, centrada em $x = 0$ da seguinte forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

E como consequência do Corolário **??**, que veremos adiante, teremos que f é uma função analítica real em $\mathbb{R}$.

O próximo exemplo mostra uma função que é infinitamente derivável em $\mathbb{R}$, mas não é analítica real em $\mathbb{R}$.

Exemplo 2.4. Definimos a função $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{se } \ x > 0, \\ \\ 0 & \text{se } \ x \leq 0. \end{cases}$$

Afirmamos que ϕ é uma função de classe C^∞ em $\mathbb{R}$.

De fato, note que para $x < 0$ a diferenciabilidade infinita é imediata pois se trata da função nula e para $x > 0$ a diferenciabilidade infinita de ϕ em x segue da regra da cadeia, sendo que a n-ésima derivada tem a forma

$$\phi^{(n)}(x) = \begin{cases} p_n(1/x)e^{-1/x} & \text{se } \ x > 0, \\ \\ 0 & \text{se } \ x < 0, \end{cases}$$

sendo $p_n(1/x)$ é uma expressão polinomial de grau $2n$ que envolve potências de $1/x$. Essa expressão polinomial pode ser obtida explicitamente usando a *Fórmula de Faà di Bruno*, que provaremos na Seção **??**.

Vejamos agora que ϕ tem derivadas de todas as ordens em $x = 0$ e, além disso,

$$\phi^{(n)}(0) = 0, \text{ para todo } n \geq 0.$$

Vejamos inicialmente que $\phi'(0) = 0$. Uma vez que $\phi(x) = 0$ se $x \leq 0$, então segue que a derivada pela esquerda $\phi(0^-) = 0$.

Para calcular a derivada pela direita $\phi(0^+)$, escrevemos $1/h = x$ e sabendo que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, o limite $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$, teremos

$$\begin{aligned}
\phi(0^+) &= \lim_{h\to 0^+} \left[\frac{\phi(h) - \phi(0)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{e^{-1/h}}{h}. \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0.
\end{aligned}$$

Logo, como as derivadas pela esquerda e pela direita são iguais a zero, segue que $\phi'(0) = 0$.

Para mostrar que $\phi^{(n)}(0) = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, vamos usar Indução Matemática. Como já foi verificado a validade da afirmação para $n = 1$, suponha que ela seja válida para um n qualquer. Uma vez que a derivada pela esquerda de $\phi^{(n+1)}(0^-)$ é sempre zero, basta verificar que $\phi^{(n+1)}(0^+) = 0$.

Usando a expressão de $\phi^{(n)}(h)$ para $h > 0$, a hipótese de indução e o fato que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x^N}{e^x} = 0$, qualquer que seja $N \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\begin{aligned}
\phi^{(n+1)}(0^+) &= \lim_{h\to 0^+} \left[\frac{\phi^{(n)}(h) - \phi^{(n)}(0)}{h}\right] \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{p_n(1/h)e^{-1/h}}{h} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{xp_n(x)}{e^x} = 0,
\end{aligned}$$

o que prova a afirmação anterior.

Portanto, segue que ϕ é uma função infinitamente derivável em $\mathbb{R}$.

Por outro lado, vejamos que ϕ não é analítica real em $x_0 = 0$. De fato, uma vez que o n-ésimo coeficiente de Taylor de ϕ em $x_0 = 0$ é $a_n = \frac{\phi^{(n)}(0)}{n!} = 0$, temos que a série de Taylor de ϕ em torno de $x_0 = 0$ converge para 0, porém ϕ não é identicamente nula em nenhum intervalo aberto que contenha $x_0 = 0$. Segue então que ϕ não pode ser analítica real em $\mathbb{R}$, mais especificamente ela não será analítica real em nenhum intervalo aberto que contenha a origem.

Podemos usar o exemplo anterior e o teorema **??**, que veremos adiante, para construir novos exemplos de funções suaves que não são analíticas reais.

Exemplo 2.5. A função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{se } x \neq 0, \\ \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

é infinitamente derivável em $\mathbb{R}$, uma vez que $\psi(x) = \phi(x^2)$ é uma composição de funções infinitamente deriváveis. Usando o resultado do Exemplo **??** e a *Fórmula de Faà di Bruno*, veja Seção **??**, temos que $\psi^{(n)}(0) = 0$, para todo $n \geq 0$. Portanto, ψ não é analítica real em nenhum intervalo aberto que contenha a origem.

Exemplo 2.6. A função $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\eta(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)} & \text{se } |x| < 1, \\ \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1, \end{cases}$$

é infinitamente derivável em $\mathbb{R}$, pois $\psi(x) = \phi(1-x^2)$ é uma composição de funções infinitamente deriváveis. Além disso, note que a função η se anula fora do intervalo aberto $(-1, 1)$. Novamente pelo Exemplo **??** e a *Fórmula de Faà di Bruno*, temos que $\eta^{(n)}(\pm 1) = 0$, para todo $n \geq 0$. Portanto, ψ não é analítica real em nenhum intervalo aberto que contenha $x_0 = -1$ ou $x_0 = 1$.

2.1 Propriedades das funções analíticas reais

Nesta seção provaremos algumas propriedades algébricas envolvendo funções analíticas reais.

Proposição 2.7. *Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções analíticas reais em $x_0 \in I$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, λf, $f \pm g$ e $f \cdot g$ são funções analíticas reais em x_0.*

Demonstração. Como f e g são funções analíticas reais em x_0, exitem constantes $\rho_1 > 0$ e $\rho_2 > 0$, tais que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < \rho_1$$

e

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < \rho_2.$$

Obviamente, se λ é uma constante, então

$$\lambda f(x) = \lambda \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n (x - x_0)^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \lambda a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n (x - x_0)^n,$$

para todo x tal que $|x - x_0| < \rho_1$. Segue que λf é analítica real em x_0.

Seja $\rho = \min[\rho_1, \rho_2] > 0$. Vejamos que

1. $f(x) \pm g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < \rho.$

2. $f(x) \cdot g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{n=n_1+n_2} a_{n_1} b_{n_2} \right] (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=1}^{n} a_{n-k} b_k \right] (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < \rho.$

1. Considere as N-ésimas somas parciais, respectivamente, das séries de potências que definem f e g em torno de x_0, isto é

$$A_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n (x - x_0)^n \quad \text{e} \quad B_N(x) = \sum_{n=0}^{N} b_n (x - x_0)^n,$$

tais que

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} A_N(x) \quad \text{e} \quad g(x) = \lim_{N\to\infty} B_N(x).$$

Dessa forma, denotando por

$$C_N(x) = \sum_{n=0}^{N} c_n(x-x_0)^n,$$

a N-ésima soma parcial da série $f(x) \pm g(x)$, com $c_n = (a_n \pm b_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos

$$\begin{aligned}
f(x) \pm g(x) &= \lim_{N\to\infty} A_N(x) \pm \lim_{N\to\infty} B_N(x) \\
&= \lim_{N\to\infty} [A_N(x) \pm B_N(x)] \\
&= \lim_{N\to\infty} \Big[a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_N(x-x_0)^N \\
&\quad \pm [b_0 + b_1(x-x_0) + \cdots + b_N(x-x_0)^N]\Big] \\
&= \lim_{N\to\infty} \Big[(a_0 \pm b_0) + (a_1 \pm b_1)(x-x_0) + \cdots + (a_N \pm b_N)(x-x_0)^N\Big] \\
&= \lim_{N\to\infty} \Big[c_0 + c_1(x-x_0) + \cdots + c_N(x-x_0)^N\Big] \\
&= \lim_{N\to\infty} C_N(x) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < \rho.
\end{aligned}$$

Segue que $f \pm g$ é analítica real em x_0.

2. Novamente vamos considerar $\rho = \min[\rho_1, \rho_2] > 0$, e nos cálculos a seguir estaremos admitindo que $|x-x_0| < \rho$.

Considerando as somas finitas

$$D_N = \sum_{n=0}^{N} S_n(x-x_0)^n \quad \text{e} \quad R_N = \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n(x-x_0)^n,$$

sendo

$$S_n = \sum_{n_1+n_2=n} (a_{n_1} \cdot b_{n_2}) = (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0).$$

Assim temos que

$$\begin{aligned}
D_N &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)(x-x_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)(x-x_0)^2 + \cdots \\
&\quad +(a_0b_N + a_1b_{N-1} + \cdots + a_Nb_0)(x-x_0)^N \\
&= a_0\left[b_0 + b_1(x-x_0) + b_2(x-x_0)^2 + \cdots + b_N(x-x_0)^N\right] + \\
&\quad a_1\left[b_0(x-x_0) + b_1(x-x_0)^2 + \cdots + b_{N-1}(x-x_0)^N\right] + \\
&\quad a_2\left[b_0(x-x_0)^2) + \cdots b_{N-2}(x-x_0)^N\right] + \\
&\quad \vdots \\
&\quad a_N\left[b_0(x-x_0)^N\right].
\end{aligned}$$

Portanto, considerando B_N como na demonstração da parte anterior, temos que:

$$D_N = a_0B_N + a_1(x-x_0)B_{N-1} + \cdots + a_N(x-x_0)^NB_0.$$

Sabemos que $g(x) = B_N + \sum_{n=N+1}^{\infty} b_n(x-x_0)^n = B_N + R_N$, logo

$$\begin{aligned}
D_N &= a_0\left[g(x) - R_N\right] + a_1\left[g(x) - R_{N-1}\right](x-x_0) + \cdots + a_N\left[g(x) - R_0\right](x-x_0)^N \\
&= a_0g(x) - a_0R_N + a_1g(x)(x-x_0) - a_1R_{N-1}(x-x_0) + \cdots \\
&\quad +a_Ng(x)(x-x_0)^N - a_NR_0(x-x_0)^N \\
&= g(x)\left[a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_N(x-x_0)^N\right] \\
&\quad -\left[a_0R_N + a_1R_{N-1}(x-x_0) + \cdots + a_NR_0(x-x_0)^N\right] \\
&= g(x)\sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n - \left[a_0R_N + a_1R_{N-1}(x-x_0) + \cdots + a_NR_0(x-x_0)^N\right].
\end{aligned}$$

Uma vez que

$$g(x)\sum_{n=0}^{N} a_n(x-x_0)^n$$

converge para $g(x)f(x)$, quando $N \to \infty$, para concluir precisamos verificar que a expressão $\left|a_0R_N + a_1R_{N-1}(x-x_0) + \cdots + a_NR_0(x-x_0)^N\right|$ converge para zero quando $N \to \infty$.

Sabemos que a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_j(x-x_0)^n,$$

é absolutamente convergente, então definimos

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} |a_j||x-x_0|^n.$$

Dado $\epsilon > 0$, podemos encontrar N_0, tal que $|R_N| \leq \epsilon$, sempre que $N \geq N_0$. Então,

$$\begin{aligned}
& |a_0R_N + a_1(x-x_0)R_{N-1} + \cdots + a_N(x-x_0)^N R_0| \\
\leq\; & |a_0R_N + \cdots + a_{N-N_0}(x-x_0)^{N-N_0} R_{N_0}| \\
+\; & |a_{N-N_0+1}(x-x_0)^{N-N_0+1} R_{N_0-1} + \cdots + a_N(x-x_0)^N R_0| \\
\leq\; & \epsilon\Big[|a_0| + \cdots + |a_{N-N_0}||(x-x_0)|^{N-N_0}|\Big] \\
+\; & |a_{N-N_0+1}(x-x_0)^{N-N_0+1} R_{N_0-1} + \cdots + a_N(x-x_0)^N R_0| \\
\leq\; & \epsilon A + |a_{N-N_0+1}(x-x_0)^{N-N_0+1} R_{N_0-1} + \cdots + a_N(x-x_0)^N R_0|.
\end{aligned}$$

Fixado N_0, fazendo N crescer arbitrariamente, obtemos o resultado desejado. □

Os próximos resultados são dedicados a mostrar que, sob certa hipótese, a divisão entre duas funções analíticas reais também resulta em uma função analítica real.

Proposição 2.8. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função analítica real em $x_0 \in I$. Se f não se anula em x_0, então $1/f$ está bem definida em algum subintervalo de I, centrado em x_0, e é analítica real em x_0.*

Demonstração. Considere

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n,$$

definida no intervalo de convergência $(x_0 - r, x_0 + r)$, com $0 < r \leq +\infty$.

Como $f(x_0) \neq 0$ e f é contínua, existe $\rho > 0$ tal que $f(x) \neq 0$, para todo x no intervalo $J \doteq (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. Portanto, a função

$$h(x) = \frac{1}{f(x)},$$

está bem definida em J.

Considere agora a série formal dada por

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n.$$

Dizemos que a expressão acima é uma série formal, pois não sabemos nada sobre sua convergência, vamos considerar que esta série tenha todas as propriedades que queremos para calcular os coeficientes b_n, em seguida, podemos provar que a série é realmente uniformemente convergente e assim validar todo este raciocínio formal.

Assim, temos que o produto $f(x)h(x) = 1$ em J. Vamos então determinar os coeficientes b_n. Pela Proposição **??**, temos

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k \right] (x - x_0)^n.$$

Logo, comparando os coeficientes da igualdade acima, obtemos

$$a_0 b_0 = 1, \quad a_0 b_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{n-k} b_k = 0, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Vale lembrar que $a_0 = f(x_0) \neq 0$. Assim, usando as igualdades acima, obtemos uma relação de recorrência que nos fornece recursivamente a sequência b_n.

Resta agora provar que a série formal $h(x)$ com os coeficientes b_n, dados recursivamente pela fórmula acima, possui um raio de convergência positivo. Sem perda de generalidade podemos supor que $a_0 = 1$, caso contrário consideramos a função $(1/a_0)f$.

Pelo Teorema **??**, temos que a série de potências dada por f converge uniformemente e absolutamente em intervalos compactos contidos no intervalo de convergência. Assim, a função

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x - x_0|^n, \tag{2.1}$$

é contínua para $|x - x_0| < r$ e se anula em $x = x_0$. Segue que existe $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x - x_0|^n < 1, \quad |x - x_0| \leq \delta.$$

Note que se $|x - x_0| \leq \delta$, temos

$$1 - |f(x)| \leq |1 - f(x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x - x_0|^n \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \geq 1 - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x - x_0|^n > 0.$$

Assim, temos que $1/f$ está bem definida se $|x - x_0| \leq \delta$.

Afirmamos agora que $|b_n| \leq 1/\delta^n$, para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$

A prova é feita por Indução Matemática. Para $n = 0$ temos $b_0 = 1/a_0 = 1$ e segue a afirmação. Suponha que a desigualdade é válida para b_k, com $0 \leq k \leq n - 1$. Então, tomando o valor absoluto na relação de recorrência de b_n, obtemos

$$|b_n| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_{n-k}||b_k| = \sum_{j=1}^{n} |a_j||b_{n-j}| \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{|a_j|}{\delta^{n-j}} \leq \frac{1}{\delta^n} \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|\delta^j \leq \frac{1}{\delta^n},$$

na igualdade usando a mudança de variável $k = n - j$, assim $0 \leq n - j \leq n - 1$. Na última desigualdade usamos $x = x_0 + \delta$ em (**??**), logo a série que aparece nos cálculos acima é menor que 1 pelos argumentos anteriores.

Segue que a desigualdade é válida para b_k, com $0 \leq k \leq n$, e a afirmação anterior é verdadeira.

Por fim, uma vez que $|b_n| \leq 1/\delta^n$, para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$, temos

$$\limsup_{x \to +\infty} |b_n|^{1/n} \leq 1/\delta,$$

o que implica pelo Teorema **??** que o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$ converge com raio de convergência pelo menos $\delta > 0$.

□

Segue como consequência imediata dos Teoremas **??** e **??**, o seguinte resultado sobre o quociente de funções analíticas reais.

Corolário 2.9. *Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções analíticas reais em $x_0 \in I$. Se g não se anula em x_0, então a função f/g fica bem definida em algum subintervalo de I, centrado em x_0, e é analítica real em x_0.*

2.2 Continuação analítica

Nessa seção veremos algumas propriedades importantes sobre funções analíticas reais fazendo uso da ideia de continuação analítica (ou extensão analítica). Mais precisamente, uma continuação analítica de uma função analítica real f, definida em um intervalo aberto I, é uma função analítica real g definida num intervalo aberto $J \supset I$, tal que g restrita a I é a função f. Seguirá como consequência dos resultados dessa seção que para cada intervalo aberto $J \supset I$, a função f possui no máximo uma continuação analítica g, definida em J.

Lema 2.10. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada número real $x \in (-1, 1)$ temos*

$$\sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)x^{m-n} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

Demonstração. Considere a série geométrica

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}, \;\; x \in (-1, 1).$$

Derivando a igualdade acima temos:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m x^{m-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \;\; x \in (-1, 1).$$

Derivando novamente teremos:

$$\sum_{m=2}^{\infty} m(m-1) x^{m-2} = \frac{2}{(1-x)^3}, \;\; x \in (-1, 1).$$

De modo geral, derivando n vezes obtemos

$$\sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)x^{m-n}= \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}, \quad x \in (-1,1).$$

$\square$

O principal objetivo do próximo resultado é provar que uma função f dada por uma série de potências é uma função analítica real, ou seja, se

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-\alpha)^j, \ \ x \in (\alpha-\rho, \alpha+\rho),$$

sendo $\rho > 0$ o raio de convergência dessa série, então f é uma função analítica real em cada $\beta \in (\alpha-\rho, \alpha+\rho)$. Embora isso pareça ser um resultado imediato, precisamos ter cuidado pois pela forma que a função f é definida, a priori, apenas podemos afirmar que ela é analítica no centro $x = \alpha$.

Fixado $\beta \in (\alpha-\rho, \alpha+\rho)$ consideremos a série de potências dada por

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j(x-\beta)^j, \tag{2.2}$$

com $b_j = \dfrac{f^{(j)}(\beta)}{j!}$.

O teorema a seguir mostra que essa nova série de potências (**??**) está bem definida em algum intervalo aberto centrado em β e além disso ela coincide com a função f nesse intervalo.

Teorema 2.11. *A série de potências dada em* (**??**) *tem raio de convergência positivo maior ou igual a* $\tau = \rho - |\alpha-\beta|$ *e além disso no intervalo* $(\beta-\tau, \beta+\tau)$ *ela converge para a função* f*, isto é,*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x-\beta)^j, \ x \in (\beta-\tau, \beta+\tau).$$

Demonstração. Note que para qualquer $0 < R < \rho$ temos $\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{\rho} < \dfrac{1}{R}$. Logo, existe um número natural n_0 tal que $|a_n|^{\frac{1}{n}} < \dfrac{1}{R}$, para todo $n \geq n_0$, ou seja, $R^n|a_n| < 1$, para todo $n \geq n_0$.

Seja $C = \max\{1, |a_0|, R|a_1|, \dots, R^{n_0-1}|a_{n_0-1}|\}$. Assim, $R^n|a_n| \leq C$, para todo $n \geq 0$, ou seja,

$$|a_n| \leq \frac{C}{R^n}, \ \forall n \geq 0. \tag{2.3}$$

Escolhemos $|\beta-\alpha| < R < \rho$.

Por outro lado, para cada $n \geq 0$ temos

$$f^{(n)}(\beta) = \sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)a_m(\beta-\alpha)^{m-n}.$$

A partir da igualdade acima, combinando (**??**) e o Lema **??** temos que

$$\begin{aligned}
|f^{(n)}(\beta)| &\leq \sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)|a_m||\beta-\alpha|^{m-n} \\
&\leq C\sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)\frac{|\beta-\alpha|^{m-n}}{R^m} \\
&= \frac{C}{R^n}\sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)\left(\frac{|\beta-\alpha|}{R}\right)^{m-n} \\
&= \frac{C}{R^n}\frac{n!}{\left(1-\dfrac{|\beta-\alpha|}{R}\right)^{n+1}} \\
&= \frac{C}{R^n}\frac{n!}{\dfrac{(R-|\beta-\alpha|)^{n+1}}{R^{n+1}}} \\
&= \frac{CR}{R-|\beta-\alpha|}\cdot\frac{n!}{(R-|\beta-\alpha|)^n} \\
&= D\cdot\frac{n!}{(R-|\beta-\alpha|)^n},
\end{aligned}$$

com $D = \dfrac{CR}{R-|\beta-\alpha|}$.

Portanto,

$$|b_n| = \frac{|f^{(n)}\beta|}{n!} \leq \frac{D}{(R-|\beta-\alpha|)^n}.$$

Logo, $(R-|\beta-\alpha|)|b_n|^{\frac{1}{n}} \leq D^{\frac{1}{n}}$, o que implica $(R-|\beta-\alpha|)\limsup|b_n|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup D^{\frac{1}{n}} = 1$. Concluímos finalmente que

$$\limsup|b_n|^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{R-|\beta-\alpha|}.$$

Em outras palavras, a desigualdade acima garante que o raio de convergência da série de potências (**??**) é maior ou igual a $R-|\beta-\alpha|$. Como $R<\rho$ foi tomado arbitrariamente, segue que a série de potências (**??**) tem raio de convergência pelo menos $\tau-|\beta-\alpha|$.

Considere agora a função g, definida no intervalo $(\beta-\tau,\beta+\tau)$, dada por

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x-\beta)^j.$$

Para cada $x\in(\beta-\tau,\beta+\tau)$, pelo Teorema de Taylor com resto em Lagrange, temos que

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j(x-\beta)^j + \frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}(x-\beta)^{n+1},$$

com $b_j = \dfrac{f^{(j)}(\beta)}{j!}$ e θ sendo um ponto entre β e x.

Assim, como antes, se $0<|\theta-\beta|<R<\tau$ existe $D>0$ tal que

$$
\begin{aligned}
\left|f(x)-\sum_{j=0}^{n} b_j(x-\beta)^j\right| &= \left|\frac{f^{n+1}(\theta)}{(n+1)!}\right| |(x-\beta)|^{n+1} \\
&\leq \frac{D}{(R-|\theta-\alpha|)^{n+1}}|x-\beta|^{n+1}.
\end{aligned}
$$

Uma vez que o lado direito da desigualdade acima fica cada vez menor para n suficientemente grande, segue que $g(x) = f(x)$. □

Uma consequência direta do Teorema **??** é o seguinte resultado.

Corolário 2.12. *Seja*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-\alpha)^j$$

uma série de potências definida no intervalo de convergência $I = (\alpha-\rho, \alpha+\rho)$, com $\rho > 0$. Então, f é função analítica real em cada ponto de I.

Corolário 2.13. *Se f e g são duas funções analíticas reais, definidas num intervalo aberto I, e se existe um ponto $x_0 \in I$ tal que*

$$f^{(j)}(x_0) = g^{(j)}(x_0), \text{ para todo } j = 0, 1, 2, \ldots,$$

então $f(x) = g(x)$, para todo $x \in I$.

Demonstração. Considere o seguinte conjunto

$$V = I \cap \{x;\ f^{(j)}(x) = g^{(j)}(x),\ \text{para todo } j = 0, 1, 2, \ldots\}.$$

Logo, por hipótese, $x_0 \in V$. Vejamos agora que V é fechado e aberto em relação ao intervalo I. De fato, se para cada $j = 1, 2, 3, \ldots$ considerarmos $h_j = (f-g)^{(j)}$, então $h_j^{-1}(\{0\})$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}$, pois h_j é uma função contínua. Logo,

$$\{x;\ f^{(j)}(x) = g^{(j)}(x),\ \text{para todo } j = 0, 1, 2, \ldots\} = \bigcap_{j=0}^{\infty} h_j^{-1}(\{0\})$$

é fechado em $\mathbb{R}$. Segue que V é um conjunto fechado relativamente ao conjunto I.

Por outro lado, dado $\alpha \in V$, como f e analítica real, existe $\rho > 0$ tal que

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-\alpha)^j,\ x \in (\alpha-\rho, \alpha+\rho) \subset U,$$

com $a_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!}$, $j = 1, 2, 3, \ldots$.

Pelo Teorema **??**, dado $\beta \in (\alpha-\rho, \alpha+\rho)$ e

$$h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(\beta)}{j!}(x-\beta)^j,$$

então $f(x) = h(x)$ em um intervalo da forma $J = (\beta-\tau, \beta+\tau)$. Em particular, se $\beta = \alpha$ temos

$$f(x) = h(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!}(x-\alpha)^j \underset{\alpha \in V}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^{(j)}(\alpha)}{j!}(x-\alpha)^j = g(x),$$

em algum intervalo aberto J centrado α, com $J \subset I$.

Portanto, uma vez que $f(x) = g(x)$ em J, temos que $f^{(j)}(x) = g^{(j)}(x)$, para todo $x \in J$. Segue que V é um conjunto aberto relativamente ao conjunto I. Sabendo que I é conexo, por ser um intervalo e $\emptyset \neq V \subset I$, além disso V é aberto e fechado simultaneamente em relação a I, então $V = I$. Concluímos assim que $f(x) = g(x)$, para todo $x \in I$.

□

Uma consequência imediata do corolário anterior é o seguinte resultado.

Corolário 2.14. *Se f e g são funções analíticas reais no intervalo aberto em I e existe um conjunto aberto $W \subset I$ tal que*

$$f(x) = g(x), \text{ para todo } x \in W,$$

então $f(x) = g(x)$, para todo $x \in I$.

Demonstração. Como W é aberto, basta considerar um ponto $x_0 \in W$ e teremos $f^{(j)}(x_0) = g^{(j)}(x_0)$, para todo $j = 0, 1, 2, \ldots$. Segue o resultado pelo Corolário **??**.

□

Segue do corolário acima que uma função analítica real f, definida num intervalo aberto I, possui no máximo uma continuação analítica definida em $J \supset I$. A seguir, mais algumas consequências.

Corolário 2.15. *Se f e g são funções analíticas reais no intervalo aberto I e existe uma sequência $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em I, de termos dois a dois distintos, com $\lim x_n \in I$ e tal que*

$$f(x_n) = g(x_n), \text{ para todo } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

então $f(x) = g(x)$, para todo $x \in I$.

Demonstração. Seja $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 \in I$. Vamos mostrar que

$$f^{(j)}(x_0) = g^{(j)}(x_0), \text{ para todo } j = 1, 2, 3, \ldots.$$

Assim, o resultado a ser provado será consequência do Corolário **??**. Como as derivadas de f e g são contínuas em U, basta mostrar que para cada $j \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, existe uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $y_n \longrightarrow x_0$ e $f^{(j)}(y_n) = g^{(j)}(y_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Para isso vamos usar Indução Matemática.

A ideia será provar que se existe $y_n \longrightarrow x_0$ e $f^{(j)}(y_n) = g^{(j)}(y_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então existe $z_n \longrightarrow x_0$ com $f^{(j+1)}(z_n) = g^{(j+1)}(z_n)$, sendo que todas essas sequências tem termos dois a dois distintos.

Se $j = 0$, basta considerar $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada no enunciado e teremos $x_n \longrightarrow x_0$ e $f(x_n) = g(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por hipótese. Como essa sequência tem termos dois a dois distintos podemos assumir que $x_n < x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Considerando a função $h = f - g$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ aplicando o Teorema do Valor Médio (TVM) no intervalo $[x_n, x_{n+1}]$, obtemos um ponto $y_n \in (x_n, x_{n+1})$ tal que

$$\underbrace{h(x_{n+1})}_{=0} - \underbrace{h(x_n)}_{=0} = h'(y_n)\underbrace{(x_{n+1} - x_n)}_{\neq 0}.$$

Logo, $h'(y_n) = 0$, ou seja, $f'(y_n) = g'(y_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, $y_n < y_{n+1}$.

Supondo agora que existe uma sequência $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de termos distintos dois a dois distintos, tal que $y_n \longrightarrow x_0$ e que $f^{(j)}(y_n) = g^{(j)}(y_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como anteriormente, podemos assumir que $y_n < y_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Considerando a função $h = (f-g)^{(j)}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ aplicando o Teorema do Valor Médio (TVM) no intervalo $[y_n, y_{n+1}]$, obtemos um ponto $z_n \in (y_n, y_{n+1})$ tal que

$$\underbrace{h(y_{n+1})}_{=0} - \underbrace{h(y_n)}_{=0} = h'(z_n)\underbrace{(y_{n+1} - y_n)}_{\neq 0}.$$

Logo, $h'(z_n) = 0$, ou seja, $f^{(j+1)}(z_n) = g^{(j+1)}(z_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Segue que, para cada $j = 0, 1, 2, \ldots$, existe uma sequência $y_n \longrightarrow x_0$, tal que $f^{(j)}(y_n) = g^{(j)}(y_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, fazendo $n \longrightarrow \infty$ temos por continuidade que $f^{(j)}(x_0) = g^{(j)}(x_0)$.

□

Uma consequência importante do corolário acima é o seguinte resultado.

Corolário 2.16. *Se f e g são funções analíticas reais no intervalo aberto I e o conjunto $A = \{x \in I;\ f(x) = g(x)\}$ possui um ponto de acumulação $x_0 \in I$, então $f(x) = g(x)$, para todo $x \in I$.*

Em particular, como consequência do Corolário **??**, se $A = \{x \in I;\ f(x) = 0\}$ possui um ponto de acumulação $x_0 \in I$, então $f(x) = 0$, para todo $x \in I$. Ou seja, os zeros de uma função analítica real não nula são todos pontos isolados.

Por fim, vamos usar o Teorema **??** para obter uma caracterização para funções analíticas reais definidas em um intervalo aberto.

Teorema 2.17. *Considere um intervalo aberto I e uma função $f \in C^\infty(I)$. A função $f \in C^\omega(I)$ se, e somente se, para cada $\alpha \in I$, existe um intervalo aberto J, com $\alpha \in J \subset I$, e constantes $C > 0$ e $R > 0$ tais que as derivadas de f satisfazem:*

$$|f^{(j)}(x)| \leq C \cdot \frac{j!}{R^j},\ \forall x \in J. \tag{2.4}$$

Demonstração. Suponha primeiramente que $f \in C^\omega(I)$. Então, dado $\alpha \in I$, existe $\rho > 0$ tal que

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x-\alpha)^j,\ \forall x \in (\alpha - \rho, \alpha + \rho)\ ,$$

sendo $a_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!}$.

Fixado $\beta \in (\alpha - \rho, \alpha + \rho)$, $\beta \neq \alpha$, vimos no Teorema **??** que se $|\alpha - \beta| < R_0 < \rho$, então existe $C_0 > 0$ tal que

$$|f^{(j)}(\beta)| \leq \frac{C_0 R_0}{(R_0 - |\alpha - \beta|)} \cdot \frac{j!}{(R_0 - |\beta - \alpha|)^j},\ \forall j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Sejam $\tau = |\alpha - \beta| > 0$ e $J = (\alpha - \tau, \alpha + \tau)$. Assim, se $x \in J$ temos que $|x - \alpha| < |\alpha - \beta| < R_0$, donde segue que

$$\begin{aligned} |f^{(j)}(x)| &\leq \frac{C_0 R_0}{(R_0 - |x-\alpha|)} \cdot \frac{j!}{(R_0 - |x-\alpha|)^j} \\ &\leq \frac{C_0 R_0}{(R_0 - |\alpha-\beta|)} \cdot \frac{j!}{(R_0 - |\beta-\alpha|)^j} \leq \frac{Cj!}{R_0^j}, \quad \forall x \in J. \end{aligned}$$

Reciprocamente, para cada $\alpha \in I$ suponha que vale (**??**) em algum intervalo aberto J com $\alpha \in J \subset I$. Como $f \in C^\infty(I)$, defina $b_j = \dfrac{f^{(j)}(\alpha)}{j!}$ e a série de potências

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j (x-\alpha)^j.$$

Pelo Teste da Raiz e a Desigualdade (**??**) temos

$$\liminf \sqrt[j]{|b_j|} \leq \liminf \sqrt[j]{C} R^{-1} = R^{-1} \underbrace{\liminf \sqrt[j]{C}}_{1} = R^{-1},$$

o que implica que

$$(\liminf \sqrt[j]{|b_j|})^{-1} \geq R,$$

ou seja, o raio de convergência da série de potências definida acima é pelo menos $R > 0$.

Por fim, dado $x \in J$, temos pela Fórmula de Taylor com resto em Lagrange que

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!}(x-\alpha)^j + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-\alpha)^{n+1},$$

para algum θ ente x e α. Logo, segue novamente de (**??**) que

$$\left| f(x) - \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!}(x-\alpha)^j \right| \leq \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \right| |(x-\alpha)|^{n+1} \leq C \left| \frac{x-\alpha}{R} \right|^{n+1}.$$

Como $|x - \alpha| < R$, fazendo $n \to \infty$ na desigualdade acima segue o resultado, isto é, $f \in C^\omega(I)$.
□

Vamos agora usar a caracterização dada no Teorema **??** para construir um exemplo de uma função de classe C^∞ que não é analítica real.

Exemplo 2.18. Considere inicialmente a *Função Gama* dada por

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0.$$

Usando integração por partes temos que

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \int_0^{+\infty} e^{-t}t^x dt = t^x e^{-t}\Big|_0^{+\infty} + x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt \\ &= x\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt = x\Gamma(x), \quad x>0.\end{aligned}$$

Em particular, se $x = n \in \mathbb{N}$ temos $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$. Dessa forma, note que

$\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = -e^{-t}\Big|_0^{+\infty} = 1;$

$\Gamma(2) = 1 \cdot \Gamma(1) = 1;$

$\Gamma(3) = 2 \cdot \Gamma(2) = 2 \cdot 1;$

$\Gamma(4) = 3 \cdot \Gamma(3) = 3 \cdot 2 \cdot 1.$

De forma geral, afirmamos que $\Gamma(n+1) = n!$. De fato, já provamos a validade para $n = 1$. Suponha que a igualdade é válida para um número natural n arbitrário. Assim,

$$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!.$$

Segue por Indução Matemática que $\Gamma(n+1) = n!$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

A função que apresentaremos agora foi inspirada em um exemplo descrito na Seção 2 da referência [?]. Dado $k \geq 2$ inteiro, considere a função

$$f(x) = \int_0^{+\infty} e^{it^k x}e^{-t}dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Para cada $j \in \{0,1,2,\ldots\}$ note que a função $h(x,t) = e^{it^k x}e^{-t}$ satisfaz

$$\frac{\partial^j h(x,t)}{\partial x^j} = (i)^j t^{kj} h(x,t).$$

Portanto, $\dfrac{\partial^j h}{\partial x^j}$ é contínua em $\mathbb{R} \times [0,+\infty)$ e além disso,

$$\left|\frac{\partial^{(j)} h(x,t)}{\partial x^{(j)}}\right| \leq t^{kj}e^{-t} \doteq g_j(t), \text{ para todo } t \geq 0.$$

Como $\displaystyle\int_0^{+\infty} g_j(t)dt < \infty$, usando a Regra de Leibniz para a derivação sob o sinal de integral (veja a Seção 6 do Capítulo III em [?]), segue que f é derivável qualquer que seja a ordem $j \in \{0,1,2,\ldots\}$ e vale

$$f^{(j)}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial^j h(x,t)}{\partial x^j}dt = \int_0^{+\infty} (i)^j t^{kj} e^{it^k x}e^{-t}dt.$$

Dessa forma, concluímos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Por outro lado, pela definição da função Gama e a propriedade provada anteriormente, note que

$$f^{(j)}(0) = (i)^j \int_0^{+\infty} t^{kj} e^{-t} dt = (i)^j \Gamma(kj+1) = (i)^j (kj)!.$$

Portanto, $|f^{(j)}(0)| = (kj)!$, $\forall j = 0, 1, 2, \ldots$

Como $k \geq 2$, a expressão $(kj)!$ cresce muito mais rápido que $j!$ quando $j \to \infty$. Logo, a Desigualdade (**??**) vista no Teorema **??**, não é válida em nenhum intervalo aberto que contenha a origem, ou seja, f não é uma função analítica real em nenhum intervalo aberto que contenha a origem. Precisamente, mostramos que se $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo aberto e $0 \in I$ então a função $f \in C^\infty(I)$ mas $f \notin C^w(I)$.

Observação 2.19. Embora a função f apresentada no exemplo anterior possa assumir valores complexos, ela é uma função de uma variável real e dessa forma podemos aplicar a equivalência vista no Teorema **??**.

2.3 Fórmula de Faà di Bruno

Enquanto a *Fórmula de Leibniz* para derivadas de ordem superior do produto entre duas funções é bem conhecida e dada por

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

menos familiar é a fórmula para derivadas de ordem superior da composta entre duas funções, a qual é denominada *Fórmula de Faà di Bruno*. Em nosso contexto, essa fórmula será importante para provar que a composta de duas funções analíticas reais também é uma função analítica real. A demonstração do teorema a seguir foi inspirada nos artigos [**?**] e [**?**].

Teorema 2.20 (Fórmula de Faà di Bruno)**.** *Sejam I um intervalo aberto e $f \in C^\infty(I)$. Suponha que f assume valores em um intervalo aberto J e considere $g \in C^\infty(J)$. Então, a derivada de ordem $n \in \mathbb{N}$ da função composta $h = g \circ f$ é dada pela fórmula:*

$$h^{(n)}(x) = \sum \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_n!} g^{(k)}(f(x)) \left(\frac{f^{(1)}(x)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{f^{(2)}(x)}{2!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right)^{k_n}, \tag{2.5}$$

sendo $k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n$ a soma sobre todos inteiros não negativos $k_1, k_2, \ldots, k_n$ para os quais $k_1 + 2k_2 + \ldots + nk_n = n$.

Demonstração. Vamos primeiramente calcular algumas das derivadas de h. Omitiremos o valor de x.

$h^{(1)} = g^{(1)}(f) f^{(1)}$;

$h^{(2)} = g^{(2)}[f^{(1)}]^2 + g^{(1)}(f) f^{(2)}$;

$h^{(3)} = g^{(3)}(f)[f^{(1)}]^3 + 3g^{(2)}(f)f^{(1)}f^{(2)} + g^{(1)}(f)f^{(3)};$

$h^{(4)} = g^{(4)}(f)[f^{(1)}]^4 + 6g^{(3)}(f)[f^{(1)}]^2f^{(2)} + 3g^{(2)}(f)[f^{(2)}]^2 + 4g^{(2)}(f)f^{(1)}f^{(3)} + g^{(1)}(f)f^{(4)}.$

Note que cada parcela da derivada $h^{(k)}$, $k = 1, 2, 3, 4$, envolve alguma derivada $g^{(j)}(f)$, $1 \leq j \leq k$ multiplicada por potências de derivadas $f^{(j)}$, $1 \leq j \leq k$. De forma geral, usando Indução Matemática, vamos provar que

$$h^{(k)} = \sum_{k=1}^{n} g^{(k)}(f)P_{nk}(f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots, f^{(n)}), \tag{2.6}$$

sendo P_{nk} expressões polinomiais envolvendo as derivadas $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}$, e o índice n em P_{nk} denota o número de variáveis dessa expressão polinomial.

- Para $n = 1$ basta considerar $P_{11}(X_1) = X_1$ e teremos

$$h^{(1)} = \sum_{k=1}^{1} g^{(k)}(f)P_{1k}(f^{(1)}).$$

- Suponha a validade de (**??**) para $n \in \mathbb{N}$. Então, derivando mais uma vez a igualdade (**??**) teremos que

$$\begin{aligned} h^{(n+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \Big[g^{(k+1)}(f) \underbrace{f^{(1)}P_{nk}(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})}_{\widetilde{P}_{nk}} + g^{(k)}(f) \underbrace{DP_{nk}(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})}_{Q_{(n+1)k}} \Big] \\ &= \sum_{k=1}^{n} g^{(k+1)}(f)\widetilde{P}_{nk}(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}) + \sum_{k=1}^{n} g^{(k)}(f)Q_{(n+1)k}(f^{(1)}, \ldots, f^{(n+1)}). \end{aligned}$$

  Fazendo a mudança de índices $k + 1 = j$ na primeira soma do lado direito da igualdade acima obtemos

$$\begin{aligned} h^{(n+1)} &= \sum_{j=2}^{n+1} g^{(j)}(f)P_{n(j-1)}(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}) + \sum_{k=1}^{n} g^{(k)}(f)Q_{(n+1)k}(f^{(1)}, \ldots, f^{(n+1)}) \\ &= g^{(1)}(f)Q_{(n+1)1}(f^{(1)}, \ldots, f^{(n+1)}) + \sum_{k=2}^{n} g^{(k)}(f)[P_{n(k-1)} - Q_{(n+1)k}](f^{(1)}, \ldots, f^{(n+1)}) \\ &+ g^{(n+1)}(f)P_{nn}(f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} g^{(k)}(f)\widetilde{Q}_{(n+1)k}(f^{(1)}, \ldots, f^{(n+1)}), \end{aligned}$$

  onde $\widetilde{Q}_{(n+1)1} = Q_{(n+1)1}$, $\widetilde{Q}_{(n+1)k} = [P_{n(k-1)} - Q_{(n+1)k}]$, se $2 \leq k \leq n$, e $\widetilde{Q}_{(n+1)(n+1)} = P_{nn}$. Segue a validade de (**??**) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Fixemos agora $x_0 \in I$ e denotemos por $y_0 = f(x_0) \in J$. Logo, por (**??**) temos

$$h^{(n)}(x_0) = \sum_{k=1}^{n} g^{(k)}(y_0) P_{nk}(f^{(1)}(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)). \tag{2.7}$$

Note que a fórmula acima depende apenas dos valores das derivadas

$$f^{(1)}(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0), g^{(1)}(y_0), \ldots, g^{(n)}(y_0).$$

Assim, para obter a fórmula desejada num ponto $x_0 \in I$, basta considerar quaisquer funções F e G, cujas derivadas até ordem n, nos pontos x_0 e y_0, respectivamente, coincidam com as derivadas f e g nesses pontos. Considere então as funções:

$$F(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

e

$$G(y) = b_0 + b_1(y - y_0) + \ldots + b_n(y - y_0)^n,$$

sendo $a_k = \dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ e $b_k = \dfrac{g^{(k)}(y_0)}{k!}$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Portanto, $F^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ e $G^{(k)}(y_0) = g^{(k)}(y_0)$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

Por outro lado, considere a fórmula multinomial dada por:

$$(X_1 + \cdots + X_n)^k = \sum_{k=k_1+\cdots+k_n} \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!} X_1^{k_1} X_2^{k_2} \ldots X_n^{k_n}.$$

Note que $y_0 = f(x_0) = F(x_0) = a_0$. Logo, usando a fórmula multinomial com $X_j = a_j(x - x_0)^j$, $j = 1, \ldots, n$, obtemos

$$\begin{aligned}
G(F(x)) &= b_0 + b_1(F(x) - y_0) + b_2(F(x) - y_0)^2 + \ldots + b_n(F(x) - y_0)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} b_k (F(x) - a_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} b_k \Big[a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n\Big]^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} b_k \sum_{k=k_1+\cdots+k_n} \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!} \Big[a_1(x - x_0)\Big]^{k_1} \Big[a_2(x - x_0)^2\Big]^{k_2} \ldots \Big[a_n(x - x_0)^n\Big]^{k_n} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \Bigg[\sum_{k=k_1+\cdots+k_n} \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!} b_k a_1^{k_1} \ldots a_n^{k_n}\Bigg] (x - x_0)^{k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n}.
\end{aligned}$$

Como $G \circ F$ é um polinômio de Taylor centrado em x_0, para encontrar $(G \circ F)^{(n)}(x_0)$ basta usar a relação:

$$\frac{(G \circ F)^{(n)}(x_0)}{n!} = c_n,$$

sendo c_n o coeficiente da potência $(x - x_0)^n$, que nesse caso é

$$c_n = \sum_{\substack{k=k_1+\cdots+k_n \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \frac{k!}{k_1!\dots k_n!} b_k a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n}.$$

Portanto, segue das igualdades anteriores que

$$\begin{aligned}
(G\circ F)^{(n)}(x_0) &= \sum_{\substack{k=k_1+\cdots+k_n \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \frac{n!}{k_1!\dots k_n!} k! b_k a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} \\
&= \sum_{\substack{k=k_1+\cdots+k_n \\ k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n}} \frac{n!}{k_1!\dots k_n!} g^{(k)}(y_0) \left(\frac{f^{(1)}(x_0)}{1!}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\right)^{k_n}
\end{aligned}$$

Por fim, uma vez que as derivadas de F e f coincidem em x_0 e as derivadas de G e g coincidem em $y_0 = f(x_0)$, segue de (**??**) que $(g \circ f)^{(n)}(x_0) = (G \circ F)^{(n)}(x_0)$ e o teorema está demonstrado. $\square$

2.4 Composição de funções analíticas reais

O intuito dessa seção é usar a Fórmula de Faà di Bruno para provar que a composta de funções analíticas reais também é uma função analítica real. Antes disso, precisamos estabelecer o seguinte lema.

Lema 2.21. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada número positivo real R temos*

$$\sum_{\Delta(n)} \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!} R^k = R(1+R)^{(n-1)},$$

sendo $k = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ e $\Delta(n) = \{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n;\ k_1 + 2k_2 + \cdots + nk_n = n\}$.

Demonstração. Considere as funções $f(t) = \dfrac{1}{1-t}$ e $g(x) = \dfrac{1}{1-R(x-1)}$. Podemos reescrever f e g usando séries geométricas, isto é,

$$f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} t^j, \quad t \in (-1, 1)$$

e

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} R^j (x-1)^j, \quad x \in (1 - 1/R, 1 + 1/R).$$

Dessa forma, a função composta $h(t) = g(f(t))$ é dada por

$$\begin{aligned}
h(t) &= g\left(\frac{1}{1-t}\right) = \frac{1-t}{1-(R+1)t} \\
&= \frac{1}{1-(R+1)t} - \frac{t}{1-(R+1)t} \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} (1+R)^j t^j - \sum_{j=0}^{\infty} (1+R)^j t^{j+1}.
\end{aligned}$$

Usando a mudança de índices $k = j + 1$ na segunda série acima temos

$$\sum_{j=0}^{\infty}(1+R)^j t^{j+1} = \sum_{k=1}^{\infty}(1+R)^{k-1}t^k.$$

Assim, segue que

$$\begin{aligned} h(t) &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty}(1+R)^j t^j - \sum_{j=1}^{\infty}(1+R)^{j-1}t^j \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty}[(1+R)^j - (1+R)^{j-1}]t^j \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty}(1+R)^j\left(1 - \frac{1}{1+R}\right)t^j \\ &= 1 + \sum_{j=1}^{\infty}(1+R)^{j-1}Rt^j. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando as séries de Taylor de f em torno de $t = 0$, de g em torno de $x = 1$ e de h em torno de $t = 0$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} &= 1, \quad j = 0, 1, 2, \ldots \\ \frac{g^{(k)}(1)}{k!} &= R^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \\ \frac{h^{(n)}(0)}{n!} &= (R+1)^{n-1}R, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.8}$$

Dessa forma, segue da Fórmula de Faà di Bruno que

$$\begin{aligned} h^{(n)}(0) &= \sum_{\Delta(n)} \frac{n!}{k_1! \ldots k_n!} g^{(k)}(f(0)) \left(\frac{f^{(n)}(0)}{1!}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)^{k_n} \\ &= \sum_{\Delta(n)} \frac{n!}{k_1! \ldots k_n!} R^k k!. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Portanto, segue das igualdades (**??**) e (**??**) que

$$(R+1)^{n-1}R = \sum_{\Delta(n)} \frac{k!}{k_1! \ldots k_n!} R^k.$$

□

Agora, usando os resultados anteriores, vamos provar que a composição de funções analíticas reais também é uma função analítica real.

Proposição 2.22. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f \in C^{\omega}(I)$. Suponha que $f(I) \subset J$, sendo J também um intervalo aberto e $g \in C^{\omega}(I)$. Então $g \circ f \in C^{\omega}(I)$.*

Demonstração. Sejam $\alpha \in I$ e $\beta = f(\alpha) \in J$. Como f é analítica real em I e g é analítica real em J, segue do Teorema **??** que existem constantes positivas C, D, R e S tais que para x num intervalo aberto $\widetilde{I} \subset I$ que contém α valem as desigualdades

$$|f^{(j)}(x)| \leq C\frac{j!}{R^j}$$

e

$$|g^{(j)}(y)| \leq D\frac{j!}{S^j},$$

onde $y = f(x)$.

Logo, usando a Fórmula de Faà di Bruno para a $n-$ésima derivada da função composta $h = g \circ f$ e o lema anterior, obtemos:

$$\begin{aligned}
|h^{(n)}(x)| &\leq \sum_{\Delta(n)} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!}\left|g^{(k)}(y)\left(\frac{f^{(1)}(x)}{1!}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right)^{k_n}\right| \\
&\leq \sum_{\Delta(n)} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} D\frac{k!}{S^k}\left(\frac{C}{R^1}\right)^{k_1}\left(\frac{C}{R^2}\right)^{k_2} \cdots \left(\frac{C}{R^n}\right)^{k_n} \\
&= \sum_{\Delta(n)} \frac{n!}{k_1! \dots k_n!} D\frac{k!}{S^k}\frac{C^{k_1+\dots+k_n}}{R^{k_1+2k_2+\dots+nk_n}} \\
&= n!\frac{D}{R^n}\sum_{\Delta(n)} \frac{k!}{k_1! \dots k_n!}\frac{C^k}{S^k} \\
&= n!\frac{D}{R^n}\left(1+\frac{C}{S}\right)^{n-1}\frac{C}{S} \\
&= n!\frac{1}{R^n}\left(1+\frac{C}{S}\right)^{n}\left(1+\frac{C}{S}\right)^{-1}\frac{C}{S}\cdot D \\
&= E\frac{n!}{T^n}, \quad \forall x \in \widetilde{I},
\end{aligned}$$

onde $E = \left(1+\dfrac{C}{S}\right)^{-1}\dfrac{C}{S}\cdot D$ e $T = R\left(1+\dfrac{C}{S}\right)^{-1}$.

Portanto, segue do Teorema **??** que a função $h = g \circ f$ é analítica real no intervalo I.

□

Exemplo 2.23. A função $h(t) = \cos\left(\dfrac{\pi}{1-t}\right)$ é analítica real no intervalo $I = (-1, 1)$. De fato, note que a função

$$f(t) = \frac{\pi}{1-t} = \pi \sum_{n=0}^{\infty} t^n$$

é analítica real em $I = (-1, 1)$ pelo Teorema **??**. Da mesma forma, a função

$$g(x) = \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

é analítica real em $\mathbb{R}$.

Portanto, pela proposição anterior temos que a função $h(t) = g(f(t))$ é analítica real no intervalo $(-1, 1)$.

Capítulo 3

Equações diferenciais lineares com coeficientes analíticos reais

Como aplicação do estudo feito nos capítulos iniciais, apresentamos neste capítulo uma investigação sobre a regularidade das soluções de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO's) lineares com coeficientes analíticos reais.

Iniciemos considerando a forma geral de uma EDO linear de ordem n, a qual é escrita do seguinte modo

$$P_n(x)y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + P_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = h(x), \tag{3.1}$$

sendo $h(x)$ e $P_i(x)$, $1 \leq i \leq n \in \mathbb{N}$, funções definidas num intervalo aberto I. Além disso, para que essa EDO de fato tenha ordem n, precisamos supor que P_n não seja a função identicamente nula. Porém, isso não impede que ela se anule em alguns pontos.

A ideia será considerar intervalos em que a função P_n não se anula em nenhum ponto e ao normalizarmos a equação (**??**) nesse intervalo, isto é, dividirmos ela por $P_n(x)$, tenhamos uma EDO com coeficientes analíticos reais. Antes de continuarmos essa discussão, estabelecemos algumas nomenclaturas na definição a seguir.

Definição 3.1. *Considere a EDO linear* (**??**)*. Se $P_n(x_0) \neq 0$, então x_0 é chamado de ponto regular da EDO e se $P_n(x_0) = 0$, então x_0 é um ponto singular dessa EDO.*

Observe que se $P_n(x)$ é uma função contínua e x_0 é um ponto regular da EDO, então existe $\epsilon > 0$ tal que $P_n(x) \neq 0$, para todo $x \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.

Vejamos agora exemplos de algumas clássicas equações diferenciais, onde podemos claramente verificar quais são os pontos regulares e quais são os pontos singulares.

Exemplo 3.2. A equação a seguir é chamada de Equação de Airy e é utilizada na teoria de difração

$$y'' + xy = 0.$$

Nessa EDO todos os pontos são regulares, uma vez que $P_n(x) = 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 3.3. Aplicada no estudo das vibrações de membranas, a Equação de Bessel, de ordem $v \geq 0$, é dada por:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0.$$

O único ponto singular dessa EDO é $x = 0$, pois $P_2(x) = x^2 = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

Exemplo 3.4. A EDO chamada de Equação de Hermite, de ordem $p \in \mathbb{R}$, tem todos os pontos regulares:

$$y'' - 2xy' + py = 0.$$

Um tipo especial solução da Equação de Hermite, os polinômios de Hermite, são utilizados na mecânica quântica no estudo das soluções da equação de Schrödinger em oscilações harmônicas.

Exemplo 3.5. A EDO a seguir e conhecida como Equação de Laguerre de ordem $p \in \mathbb{R}$.

$$xy'' + (1-x)y' + py = 0.$$

Um tipo especial de solução, quando são polinômios, é usada na Mecânica Quântica do átomo de hidrogênio. O único ponto singular dessa EDO é obviamente $x = 0$.

Exemplo 3.6. Outra famosa equação da Física Matemática é a Equação de Legendre, que é dada por:

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Ela é usada no estudo das soluções da equação do potencial em esferas. Temos que, $x = 1$ e $x = -1$, são os únicos pontos singulares dessa EDO, uma vez que $P_2(x) = 1 - x^2 = 0$ se, e somente se, $x = 1$ ou $x = -1$.

3.1 Equações diferenciais lineares de segunda ordem

Os exemplos vistos anteriormente mostram que muitas equações clássicas da Física Matemática são EDO's lineares de segunda ordem. Motivados por isso, nessa parte do trabalho vamos nos concentrar nesse tipo de equação, porém os resultados que apresentaremos continuam válidos para equações de ordem $n > 2$. Além disso, vamos considerar EDO's homogêneas, uma vez que existem métodos para encontrar soluções particulares a partir das soluções da equação homogênea associada, por exemplo, *o método de Variação dos Parâmetros.* Mais precisamente, consideremos a equação linear de segunda ordem da forma

$$P_2(x)y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = 0, \tag{3.2}$$

sendo P_0, P_1 e P_2 funções analíticas reais em um intervalo I.

Teorema 3.7. *Se x_0 é um ponto regular da equação (**??**), então a solução geral dessa equação, definida em x_0, é uma função analítica real em x_0.*

Demonstração. Como x_0 é um ponto regular da equação (**??**), então podemos reescrevê-la da seguinte forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{3.3}$$

sendo os coeficientes $p(x) = P_1(x)/P_2(x)$ e $q(x) = P_0(x)/P_2(x)$ são funções analíticas reais em x_0 pelo Corolário **??**. Logo, podemos escrever p e q como séries de potências em torno de x_0, com raios de convergência $\rho_1 > 0$ e $\rho_2 > 0$, respectivamente.

Sendo ρ o menor entre ρ_1 e ρ_2, escrevemos:

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x-x_0)^n \quad \text{e} \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x-x_0)^n, \quad \text{com } |x-x_0| < \rho.$$

Vamos procurar soluções do tipo

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < \rho. \tag{3.4}$$

Derivando formalmente a expressão acima e substituindo $n-1$ por n na primeira derivada e $n-2$ por n na segunda, obtemos:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n$$

e

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2) a_{n+2} (x - x_0)^n,$$

para $|x - x_0| < \rho$.

Agora, usando a Proposição **??**, temos

$$\begin{aligned}
p(x)y'(x) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} p_n (x - x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} (k+1) p_{n-k} a_{k+1}\right](x - x_0)^n, \\
q(x)y(x) &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} q_n (x - x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} q_{n-k} a_k\right](x - x_0)^n.
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões acima na EDO (**??**), podemos reescrevê-la da seguinte maneira:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n}[(k+1)p_{n-k}a_{k+1} + q_{n-k}a_k]\right](x - x_0)^n = 0.$$

Pela unicidade da série de potências, obtemos a *relação de recorrência* dada por:

$$(n+1)(n+2)a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n}[(k+1)p_{n-k}a_{k+1} + q_{n-k}a_k] = 0, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

A expressão (**??**) determina recursivamente os elementos da sequência a_n em função das constantes arbitrárias a_0 e a_1. Por exemplo:

- $n = 0$ implica em $a_2 = -\dfrac{q_0 a_0 + p_0 a_1}{2}$.
- $n = 1$ implica em $a_3 = \dfrac{p_1 a_1 + q_1 a_0 + 2p_0 a_2 + q_0 a_1}{6} = \dfrac{(p_0 q_0 - q_1)a_0 + (-p_1 + p_0^2 - q_0)a_1}{6}$,

e assim por diante.

Mostraremos agora que $y = y(x)$, dada em (**??**), com os termos a_n dados recursivamente por (**??**), é uma série convergente no intervalo I, dado por $|x - x_0| < \rho$.

De fato, dado arbitrariamente $0 < r < \rho$, então segue dos Teoremas **??** e **??** que existe uma constante $M > 0$, tal que

$$|p_n| = \left|\frac{p^{(n)}(x_0)}{n!}\right| \leq \frac{M}{r^n} \quad \text{e} \quad |q_n| = \left|\frac{q^{(n)}(x_0)}{n!}\right| \leq \frac{M}{r^n}, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$$

Dessa forma, segue da relação (**??**) que

$$
\begin{aligned}
(n+1)(n+2)|a_{n+2}| &\leq \frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)|a_{k+1}|+|a_k|]r^k \\
&\leq \frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)|a_{k+1}|+|a_k|]r^k + M|a_{n+1}|r.
\end{aligned}
$$

Denotemos por $b_0 = |a_0|$, $b_1 = |a_1|$ e definimos

$$
(n+1)(n+2)b_{n+2} = \frac{M}{r^n}\sum_{k=0}^{n}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k + Mb_{n+1}r, \quad n = 0,1,2\ldots
$$

Note que, pelos cálculos anteriores, para cada $n = 0,1,2,\ldots$, temos $0 \leq |a_n| \leq b_n$. Vamos então calcular o raio de convergência da série de potências centrada em x_0, com termo geral dado por b_n. Começamos trocando n por $n-1$ e também n por $n-2$ na igualdade acima, obtendo

$$
\begin{aligned}
n(n+1)b_{n+1} &= \frac{M}{r^{n-1}}\sum_{k=0}^{n-1}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k + Mb_n r, \\
(n-1)n\, b_n &= \frac{M}{r^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k + Mb_{n-1}r.
\end{aligned}
$$

Multiplicando a primeira igualdade por r e utilizando a segunda igualdade, obtemos:

$$
\begin{aligned}
rn(n+1)b_{n+1} &= \frac{M}{r^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-1}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k + Mb_n r^2 \\
&= \frac{M}{r^{n-2}}(nb_n + b_{n-1})r^{n-1} + \frac{M}{r^{n-2}}\sum_{k=0}^{n-2}[(k+1)b_{k+1}+b_k]r^k + Mb_n r^2 \\
&= Mr(nb_n + b_{n-1}) + \Big[(n-1)nb_n - Mb_{n-1}r\Big] + Mb_n r^2 \\
&= [n(n-1) + rMn + Mr^2]b_n.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{rn(n+1)}{(n-1)n + Mr(n+r)} \implies \lim_{n\to+\infty}\frac{b_n}{b_{n+1}} = r.
$$

Segue então, conforme Observação **??**, que a série

$$
\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n,
$$

converge para todo x, tal que $|x-x_0| < r$. Sabendo que $|a_n| \leq b_n$, temos que a série dada em (**??**) também converge pelo menos em $|x-x_0| < r$. Como $r < \rho$ foi tomado arbitrário, segue a convergência de (**??**), pelo menos em $|x-x_0| < \rho$.

Além disso, temos pela construção feita acima que (**??**) satisfaz a EDO (**??**). Note que podemos escrever

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots \\
&= a_0 + a_1(x-x_0) + \left(-\frac{q_0a_0 + p_0a_1}{2}\right)(x-x_0)^2 + \\
&+ \left(\frac{(p_0q_0 - q_1)a_0 + (-p_1 + p_0^2 - q_0)a_1}{6}\right)(x-x_0)^3 + \cdots \\
&= a_0\left[1 - \frac{q_0}{2}(x-x_0)^2 + \frac{p_0q_0 - q_1}{6}(x-x_0)^3 + \cdots\right] + \\
&+ a_1\left[(x-x_0) - \frac{p_0}{2}(x-x_0)^2 + \frac{-p_1 + p_0^2 - q_0}{6}(x-x_0)^3 + \cdots\right] \\
&\doteq a_0\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x-x_0)^n}_{y_1(x)} + a_1\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n(x-x_0)^n}_{y_2(x)}.
\end{aligned}$$

Obviamente as séries $y_1(x)$ e $y_1(x)$ também convergem em $|x-x_0| < \rho$. Além disso, temos que $y_1(x_0) = \alpha_0 = 1$, $y_1'(x_0) = \alpha_1 = 0$ e $y_2(x_0) = \beta_0 = 0$, $y_2'(x_0) = \beta_1 = 1$. Portanto, o Wronskiano das funções y_1 e y_2 no ponto x_0 é dado por $W(y_1, y_2)(x_0) \doteq y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0) = 1 \neq 0$. Segue da teoria básica de EDO's lineares (veja por exemplo [**?**], Capítulo 3) que y_1 e y_2 são soluções linearmente independentes da equação (**??**). Portanto, a expressão (**??**) determina a solução geral da EDO (**??**) e consequentemente da EDO (**??**).

$\square$

Exemplo 3.8. Considere a Equação de Legendre

$$(1-x^2)y - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nesse caso $P_2(x) = 1 - x^2$ e os únicos pontos singulares são 1 e -1. Se considerarmos o ponto regular $x_0 = 0$, usando a convergência da séria geométrica temos que

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2} = -2x\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} -2x^{2k+1} \quad \text{e} \quad q(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha(\alpha+1)x^{2k},$$

para todo $x \in (-1, 1)$. Logo, p e q são funções analíticas reais em x_0.

Portanto, pelo teorema anterior as soluções da Equação de Legendre, definidas em $x_0 = 0$, são analíticas reais em $x_0 = 0$ e têm raio de convergência pelo menos igual a 1.

Considerações finais

Este trabalho foi desenvolvido e embasado por diversos assuntos elementares da Análise Matemática e teve como objetivo central o estudo das funções analíticas reais de uma variável. Uma rápida revisão sobre convergência pontual e convergência uniforme de sequências e séries de funções, nos auxiliou na obtenção de importantes resultados sobre séries de potências.

Usando séries de potências definimos as funções analíticas reais, objeto central desse trabalho, as quais formam um importante subespaço das funções infinitamente deriváveis. Verificamos várias propriedades algébricas das funções analíticas reais e o princípio da continuação analítica, que permite ampliar o domínio da função mantendo a analiticidade.

Os resultados obtidos para as funções analíticas reais possibilitaram estudar a regularidade analítica das soluções de equações diferenciais ordinárias lineares de segunda ordem com coeficientes analíticos. Um próximo passo nesse estudo seria generalizar esse resultado para equações lineares de ordens superiores.

Referências Bibliográficas

[1] E. A. Coddington, R. Carlson. *Linear Ordinary Differential Equations.* SIAM, (1997).

[2] E. L. Lima. *Curso de Análise Vol. 1.* Coleção Euclides, IMPA, 12ª edição. (2006).

[3] E. L. Lima. *Curso de Análise Vol. 2.* Coleção Euclides, IMPA, 10ª edição. (2008).

[4] H. L. Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo Vol 4.* LTC, 5ª edição, (2002).

[5] J. K. Hunter. *An Introduction to Real Analysis.* University of California at Davis, Department of Mathematics, pg. 181-204, (2014).

[6] K. Spindler. *A short proof of the formula of Faà di Bruno.* Elemente der Mathematik, 60. Swiss Mathematical society, pg. 33-35. (2005).

[7] M. A. Vilches. *Equações Diferenciais: Métodos de Séries.* Departamento de Análise-IME. UERJ, Rio de Janeiro (2012).

[8] N. Hanges. *Elements of Analytic Hipoellipticity.* IMPA, Rio de Janeiro. (2006).

[9] S. T. Krantz. *Real Analysis and Foundations.* Chapman&Hall/CRC. 2 ed. (1951).

[10] S. T. Krantz, H. R. Partz. *A Primer of Real Analytic Functions.* Birkhäuser, vol 4. Boston. (1992).

[11] S. Roman. *The formula of Faà di Bruno.* Amer. Math. Monthly, 87, pg. 805-809, (1980).

[12] W. E. Boyce, R. C. DiPrima. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno.* LTC, 10ª edição, (2015).