Universidade Federal do Parana
Setor de Ciências Exatas
Curso de Matemática

EQUILÍBRIO E ESTABILIDADE DE ALGUNS SISTEMAS DE ESPÉCIES EM COMPETIÇÃO

DANIEL LEMES DOS SANTOS

Curitiba, Julho de 2014

Universidade Federal do Parana

Setor de Ciências Exatas
Curso de Matemática

EQUILÍBRIO E ESTABILIDADE DE ALGUNS SISTEMAS DE ESPÉCIES EM COMPETIÇÃO

Discente: Daniel Lemes Dos Santos
Orientador: Prof. Dr. Higidio Portillo Oquendo

Trabalho de Conclusão de Curso submetido à Universidade Federal do Paraná como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Licenciado em Matemática.

Curitiba, julho de 2014

TERMO DE APROVAÇÃO

EQUILÍBRIO E ESTABILIDADE DE ALGUNS SISTEMAS DE ESPÉCIES EM COMPETIÇÃO

DANIEL LEMES DOS SANTOS

Trabalho de conclusão de curso aprovado como requisito parcial para a obtenção de grau de Licenciado em Matemática pela Universidade Federal do Paraná

BANCA EXAMINADORA

Orientador, Prof. Dr. Higidio Portilio Oquendo
Departamento de Matemática, UFPR

Prof. Dr. Raul Prado Raya
Departamento de Matemática, UFPR

Curitiba, 17 de julho de 2014

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por me amparar nos momentos difíceis, me dar sabedoria e força para vencer os obstáculos, superar as dificuldades e por guiar-me sempre. Aos meus pais, irmãos e familiares que não mediram esforços para que eu pudesse chegar até aqui.

Agradeço profundamente ao meu orientador, Prof. Dr. Higidio Portilio Oquendo pela dedicação dada a este trabalho, pelas cobranças, paciência, serenidade e atenção com que me orientou; ao prof. Dr Raul Prado Raya por fazer parte da banca examinadora, e a todos os professores que contribuíram para minha formação Profissional nesse curso.

Quero também lembrar do Prof. Nelsom Alderete, professor do Ensino Médio, quem me motivou por seguir esse caminho, e a todas as pessoas que sempre acreditaram em mim e me encorajaram nessa trajetória.

.

Resumo

Este é um trabalho que tem como objetivo principal discutir a estabilidade de algumas equações diferenciais, em torno de pontos críticos, buscando dar ao leitor um panorama geral da estabilidade de algumas equações diferenciais, mostrando que propriedades pode ter as soluções de um fenômeno modelado por equações diferenciais ordinárias em longos períodos de tempo.

Palavra Chave: Estabilidade, Instabilidade, Sistema predador presa, Etc.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O estudo das equações diferenciais ordinárias começou com os próprios criadores do Cálculo, Newton e Leibniz, no final do século XVII, motivados por problemas físicos. Atualmente, além dos problemas físicos conseguimos modelar muitos fenômenos biológicos, econômicos, ecológicos, químicos, entre outros.

No início era natural tentar expressar as soluções de uma equação diferencial explicitamente; entretanto, logo se verificou que o número de equações que podiam ser resolvidas desta forma era muito pequeno, até mesmo quando introduzidas novas funções.

Mediante as dificuldades em obter soluções por métodos confiáveis, surgiram os teoremas de existência e unicidade, tornando-se justificável a busca de soluções através de processos informais, uma vez que obtida, podia ser verificada posteriormente. A partir daí, iniciou-se no século XIX, com Henri Poincaré (1854 - 1912), a fase moderna, que é marcada pelo interesse nas questões qualitativas, ou seja, é marcada pela atitude de retirar das equações diferenciais informações sobre o comportamento de suas soluções, sem a preocupação de escrevê-las explicitamente.

Por exemplo, podemos analisar qualitativamente o comportamento oscilatório do sistema massa-mola que é dado por um bloco de massa m, sobre uma superfície horizontal sem atrito, preso a uma das extremidades de uma certa mola, enquanto a outra extremidade está ligada a um ponto fixo, observando que o seu estado inicial é estável, pois à medida que afastamos o bloco do seu estado inicial (chamado de ponto de equilíbrio) e o soltamos, vemos iniciar um movimento contínuo e oscilatório ao redor do seu ponto de equilíbrio.

Assim, no presente trabalho nos propomos a estudar as equações diferenciais ordinárias de modo qualitativo, buscando informações que permitam concluir algo sobre o comportamento de suas soluções ao longo do tempo.

1.1 Justificativa

Atualmente, prever fenômenos naturais é um grande desafio para ciência, muitas vezes isso não é possível, pretendemos com esse trabalho mostrar, através de algumas equações diferenciais ordinárias.

A importância das equações diferenciais na modelagem de vários fenômenos, foi o que motivou nosso estudo e analise dessas expressões. Então podemos fazer as seguintes perguntas: O que é uma equação diferencial? Para que serve uma equação e como podemos utilizar-las? Estas e outras questões trataremos de responder durante a elaboração desse trabalho.

1.2 Objetivos

- Analisar a estabilidade de alguns problemas governados por equações diferenciais usando técnicas e métodos abordados na literatura descrita na bibliografia.
- Ter uma ideia mais clara de como tais métodos são usados nos problemas abordados e tentar descrever em que outras classes de problemas poderiam ser utilizados.
- Aprofundar os conhecimentos e aprendizado sobre as equações diferenciais desde o ponto de vista teórico e suas aplicações, proporcionando ao leitor da monografia, uma melhor compreensão do tema, de fácil e que estimule o interesse no estudo deste assunto.

1.3 Metodologia

Nossa intenção é desenvolver um trabalho de pesquisa estudando a estabilidade de alguns problemas modelados por equações diferenciais desde o ponto de vista analítico. Este processo será desenvolvido da seguinte forma: Primeiro, iniciaremos tendo uma visão geral sobre os requisitos necessários para atingir nossos objetivos, isto é, estudando os conceitos básicos de resolução de equações diferenciais. Segundo, assimilar os conceitos relacionados à existência e unicidade e comportamento assintótico das soluções de equações diferenciais ordinárias. Terceiro, iniciaremos o processo de assimilação do software "Látex".

Finalmente, aplicaremos os métodos estudados a alguns problemas práticos e elaboraremos a monografia.

Capítulo 2

Revisão Das Equações Diferenciais Ordinárias

Para desenvolver este trabalho nossa primeira abordagem será uma revisão geral da teoria das equações diferenciais ordinária e a modelagem de alguns fenômenos descritos por EDO´s visando uma melhor compreensão do leitor, sobre como podemos modelar os diferentes fenômenos usando as mesmas.

2.1 Equações Diferenciais Ordinárias

As equações diferenciais são expressões matemáticas de certas leis envolvidas em uma modelagem, que podem ser, por exemplo, a segunda lei de Newton, reações químicas, dinâmica populacional, conforme veremos mais adiante e vários outros problemas que podem ser modelados com equações diferenciais. Equações diferenciais simples aparecem no estudo do calculo de primitivas de funções. Neste caso, dada uma função $f = f(t)$, buscamos uma função $x = x(t)$ tal que

$$\frac{d}{dt}x(t) = f(t), \tag{2.1}$$

A relativa simplicidade desta equação está no fato de que o lado direito da equação (2.1) não depende da incógnita $x = x(t)$. A derivada de $x = x(t)$ está dada explicitamente em termos de uma função conhecida. Nesse caso, a solução pode ser obtida, em principio, por integração direta.

As equações diferenciais estão presentes em diversos modelos, em física, química, biologia, economia, engenharia, etc. Vários fenômenos envolvem a variação de uma quantidade em relação a outra, levando naturalmente a modelos baseados em equações diferenciais. Vamos denotar a variável independente por t e as variáveis dependentes, por $x_1, x_2, ..., x_n$ e a diferenciação denotaremos por um apostrofe.

Uma equação diferencial ordinária de ordem n, é uma expressão que envolve uma função(incógnita) e algumas de suas derivadas, onde a derivada n-ésima aparece explicitamente na equação, e pode ser escrita da seguinte forma

$$f(t, x, x', ..., x^{(n)}) = 0$$

onde f é uma função definida em algum subconjunto de $\mathbb{R}^{n+2}$ a valores reais.

Entendemos por solução de uma equação diferencial, uma função $\phi : I \to \mathbb{R}$, continua e derivável até ardem n, que satisfaz a equação diferencial (2.1), da forma .

$$f\big(t, \phi(t), \phi'(t), ..., \phi^{(n)}(t)\big) = 0, \forall t \in I$$

onde a função f toma valores reais.

Exemplos

- $\frac{dp}{dt} = p(1 - \mu p)$ Representa a Dinâmica de uma população.
- $m\frac{d^2z}{dx^2} + Kz = 0$ Representa as oscilações de um sistema massa-mola.
- $LC\frac{d^2q}{dt^2} + RC\frac{dq}{dt} + q = E(t)$ Representa as Cargas elétricas num capacitor.

Equações Diferenciais de Primeira Ordem

As equações diferenciais de primeira ordem são expressões mais simples de entender, ja que só envolve a primeira derivada, a qual na sua forma geral é dada por

$$f(t, x, x') = 0. \tag{2.2}$$

A equação (2.2) é dita de primeira ordem, pois envolve uma função incógnita $x = x(t)$ e sua primeira derivada x'. Um caso particular são as equações que podem ser escritas da forma

$$x' = g(t, x). \tag{2.3}$$

A equação (2.3) é linear quando g for uma função linear na variável x, isto é, $g(t, x) = f(t) - a(t)x$, para algumas funções f e definidas en algum intervalo I, assim uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem terá a forma

$$x' + a(t)x = f(t). \tag{2.4}$$

Dizemos que a equação (2.4) é homogênea quando $f \equiv 0$, nesse caso a equação torna-se

$$x' + a(t)x = 0. \tag{2.5}$$

Caso contrário, isto é se f não for identicamente nula, a equação (2.4) é dita não homogênea.

A solução de uma equação diferencial de primeira ordem é qualquer função ϕ que satisfaz a equação (2.3) para todo t em algum intervalo I. Existem vários métodos de resolução para uma subclasse de equações diferenciais de primeira ordem, que pode ser verificado na bibliografia [1] e quando não conseguirmos encontrar uma solução de forma explicita, podemos usar um resultado que provaremos mais adiante, que garante a existência e unicidade de solução.

Resolução da equação homogênea

Assumamos que x é uma solução de (2.5) no intervalo aberto I, logo, se x nunca se anula, fazemos

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -a(t)$$

ainda, se $x(t)$ for positivo em $\forall t \in I$ temos que

$$\frac{d}{dt}[ln(x(t))] = -a(t)$$

Dai segue que

$$\ln(x(t)) = -A(t) + c_0$$

onde c_0 é uma constante real e A é uma primitiva da função a no intervalo I, isto é, $A'(t) = a(t)$ para todo $t \in I$, o que pode ser escrito da forma

$$A(t) = \int a(t)dt$$

sendo assim a solução desejada é obtida a partir das seguintes manipulações:

$$\begin{array}{rcl} \ln(x(t)) &=& -A(t) + c_0 \\ x(t) &=& e^{-A(t)+c_0} \\ &=& e^{c_0}e^{-A(t)} \\ &=& c_1e^{-A(t)} \quad onde \;\; c_1 = e^{c_0}. \end{array}$$

Observe que a constante c_1 é positiva. Por outro lado se consideramos a função $x(t) = ce^{-A(t)}$ com c uma constante qualquer (positiva, negativa ou nula), teremos

$$\begin{array}{rcl} x(t) = ce^{-A(t)} & \Leftrightarrow & x(t)e^{A(t)} = c \\ & \Leftrightarrow & [x(t)e^{A(t)}]' = 0 \\ & \Leftrightarrow & x'(t)e^{A(t)} + A'(t)e^{A(t)}x(t) = 0 \\ & \Leftrightarrow & e^{A(t)}[x'(t) + a(t)x(t)] = 0 \\ & \Leftrightarrow & x'(t) + a(t)x(t) = 0 \end{array}$$

isto significa que, $x(t) = ce^{-A(t)}$ é solução da equação (2.5). Esse procedimento nos fornece uma outra alternativa para encontrar soluções da equação (2.5), que consiste em multiplicar a equação diferencial pela equação $e^{A(t)}$ e esse termo é chamado de fator integrante, que consiste num método muito útil na resolução de equações diferenciais.

Claramente existem uma infinidade de soluções da equação (2.5) pois basta variar a constante c para encontrar soluções diferentes. Suponhamos que agora que queremos uma solução de (2.5) que satisfaça a condição inicial

$$x(t_0) = x_0$$

onde $t_0 \in I$ e $x_0 \in \mathbb{R}$, neste caso basta determinar a constante C que satisfaça

$$x_0 = x(t_0) = ce^{-A(t_0)} \Longrightarrow c = x_0e^{A(t_0)}$$

portanto a solução procurada será

$$\begin{array}{rcl} x(t) &=& ce^{-A(t)} \\ &=& x_0e^{A(t_0)}e^{-A(t)} \\ &=& x_0e^{A(t_0)-A(t)} \end{array}$$

onde a solução independe das primitivas de a que consideremos, portanto a solução é única.

Exemplo 1. *Encontremos a solução de problema de valor inicial*

$$x' + tx = 0 \qquad\qquad x(0) = 2$$

Usaremos aqui o método fator integrante, isto é, multiplicamos a equação por $e^{\int t dt} = e^{t^2/2}$ *assim obtemos:*

$$e^{t^2/2}x' + e^{t^2/2}tx \;=\; (e^{t^2/2}x)' = 0 \tag{2.6}$$

Integrando a equação (2.6) obtemos

$$\begin{aligned} e^{t^2/2}x &= c \\ x &= ce^{-t^2/2} \end{aligned}$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$, *da condição inicial* $x(0) = 2$ *vem*

$$\begin{aligned} x(0) &= ce^{-t^2/2} \\ &= ce^{-0^2/2} = 2 \Longrightarrow c = 2 \end{aligned}$$

logo, a solução da equação é

$$x(t) = 2e^{-t^2/2}.$$

A solução geral de uma equação diferencial e o método usado no exemplo acima pode ser verificado na referencia bibliográfica [1]

Resolução da equação não homogênea

Multiplicando a equação não homogênea (2.4) por $e^{A(t)}$ obtemos que

$$e^{A(t)}x'(t) + a(t)e^{A(t)}x(t) = e^{A(t)}f(t)$$

isto é, $[e^{A(t)}x(t)]' = e^{A(t)}f(t)$. Antiderivando (aplicando a integral indefinida) temos que

$$e^{A(t)}x(t) = \int e^{A(t)}f(t)dt + c$$

e portanto

$$x(t) = e^{-A(t)}\left(\int e^{A(t)}f(t)dt + c\right)$$

onde c é uma constante qualquer.

Exemplo 2. *Resolver o problema de valor inicial*

$$x' - 3t^2x = t^2, \qquad x(0) = 1/6$$

multiplicando a equação por $e^{-\int 3t^2}dt = e^{-t^3}$ *teremos*

$$e^{-t^3}x' - e^{-t^3}3t^2x = e^{-t^3}t^2$$

isto é, $[e^{-t^3}x]' = e^{-t^3}t^2$ *então*

$$e^{-t^3}x = \int e^{-t^3}t^2dt + c = -\frac{e^{-t^3}}{3} + c$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Logo,

$$x(t) = -\frac{1}{3} + ce^{t^3}$$

para encontrar o valor de c precisamos que

$$\frac{1}{6} = x(0) = -\frac{1}{3} + ce^{0^3}, \quad \Longrightarrow c = \frac{1}{2}$$

Logo a solução do problema de valor inicial será

$$x(t) = -\frac{1}{3} + \frac{e^{t^3}}{2}$$

Teorema de Existência e Unicidade

Nosso objetivo é analisar estabilidade das equações diferenciais, para isso devemos garantir que todas as equaçoes diferenciais possuam pelo menos uma solução e que essa solução é única. Sabemos que, pelos métodos analíticos e técnicas que existem, não é possível encontrar todas as soluções explicitas dessas equações, por isso vamos enunciar e provar o teorema de existência e unicidade de soluções para garantir esse fato.

Queremos determinar condições sobre a função $f(t,x)$ de tal forma que possamos garantir existência e unicidade de soluções do problema de Valor inicial

$$x' = f(t,x); \quad x(t_0) = x_0. \tag{2.7}$$

Teorema 1. *seja $(t_0, x_0) \in R =]a,b[\times]c,d[$. Se f e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são contínuas em $\mathbb{R}$, então existe um intervalo aberto I tal que $t_0 \in I \subset]a,b[$ no qual existe uma única solução $x = \phi(t)$ do problema de valor inicial (2.7)*

Demonstração. Observe que se $x = \phi(t)$ é uma solução temos que $\phi'(t) = f(t, \phi(t))$, então integrando de t_0 a t esta equação temos a equação integral

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds$$

Para encontrar uma função que satisfaça esta equação usamos as aproximações de Picard. Aqui faremos um esboço da prova, maiores detalhes pode ser encontrado na referencia [2] e [1]

Existência: Definimos uma sequência de funções$(\phi_n(t))_{n\in Z_0^+}$ da seguinte forma

$$\phi_0(t) = x_0, \quad \phi_{n+1}(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_n(s))ds$$

Agora suponhamos que esta sequência convirja em algum sentido para uma função $\phi(t)$, isto é

$$\phi_n \to \phi$$

observe que pelo teorema de valor médio, para cada s fixo, existe $h(s) \in [\phi_n(s), \phi(s)]$ tal que

$$f(s, \phi_n(s)) - f(s, \phi(s)) = \frac{\partial f}{\partial x}(s, h(s))(\phi_n(s) - \phi(s))$$

Devido a continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x}$ temos que $\frac{\partial f}{\partial x}(s, h(s))$ é limitada em algum intervalo I que contem o ponto t_0. Dai segue que

$$f(s, \phi_n(s)) \to f(s, \phi(s))$$

Agora tomando limite em

$$\phi_{n+1}(x) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi_n(s))ds$$

encontramos que

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s))ds$$

derivando encontramos que

$$\phi(t)' = f(s, \phi(s))$$

e evidentemente $\phi(t_0) = x_0$

Unicidade : Suponhamos que $\phi(t)$ e $\psi(t)$ são duas soluções do problema de valor inicial, então

$$\phi(t) - \psi(t) = \int_{t_0}^{t} f(s, \phi(s) - f(s, \psi(s))ds.$$

Tomando os valores absolutos, temos, se $t > 0$,

$$\begin{aligned} |\phi(t) - \psi(t)| &\leq \int_{t_0}^{t} |f(s, \phi(s) - f(s, \psi(s))|ds \\ &\leq C \int_{t_0}^{t} |\phi(s) - \psi(s)|ds \end{aligned}$$

Denotemos por $U(t) = \int_{t_0}^{t} |\phi(s) - \psi(s)|ds$, então temos que,
$U(t_0) = 0$ e , $U(t) \geq 0, t \geq t_0$, obtemos

$$U'(t) = |\phi(t) - \psi(t)| \leq CU(t)$$

isto é $U'(t) - CU(t) \leq 0$. Multiplicando por e^{-Ct} encontramos que

$$(e^{-Ct}U(t))' \leq 0$$

integrando de t_0 até t chegamos a que e observando que $U(t_0) = 0$, temos

$$e^{-Ct}U(t) \leq 0$$

Daí segue que $U(t) = 0$, $\forall t \in I$, o qual implica que $|\phi(s) - \psi(s)| = 0$ Logo $\phi(s) = \psi(s), \forall s \in I$ □

Exemplo 3. *Vamos Usar o teorema 1 para encontrar um intervalo que contém o ponto* $t_0 = 1$ *no qual o problema de valor inicial*

$$tx' + 2x = 4t^2, \qquad x(1) = 2 \tag{2.8}$$

tem única solução em algum intervalo que contém $t_0 = 1$.
Dividindo a equação (2.8) por t, obtemos

$$x' + (2/t)x = 4t,$$

na forma da equação (2.4), onde, nesse caso que $a(t) = 2/t$ e $f(t) = 4t$, logo, para essa equação, f é continua para todo $t \in \mathbb{R}$, enquanto a é continua para todo $t < 0$ ou para $t > 0$. O intervalo $]0, \infty[$ contem a $t_0 = 1$, portanto o teorema 1 garante que o problema (2.8) tem única solução em algum sub-intervalo que contenha $t_0 = 1$. Para resolver a equação (2.8), calculamos primeiro o fator integrante $\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t} dt} = e^{2ln|t|} = t^2$. logo

$$t^2x' + 2tx = (t^2x)' = 4t^3$$

e, portanto

$$t^2x = t^4 + c$$

onde c é uma constante arbitraria, dai segue que

$$x = t^2 + \frac{c}{t^2}.$$

Considerando a condição inicial, obtemos $c = 1$, com isso, a solução do problema de valor inicial (2.8) é

$$x = t^2 + \frac{1}{t^2}, \qquad t > 0 \tag{2.9}$$

Suponha, agora, que a condição inicial seja modificada, por exemplo, $x(-1) = 2$. Então, o teorema 1 garante a existência de uma única solução para algum sub-intervalo de $]-\infty, 0[$, que contenha $t_0 = -1$ onde a solução também é dada pela equação (2.9), mas agora no intervalo $]-\infty, 0[$.

Podemos generalizar o teorema 1, para sistemas de equações diferenciais lineares de 1ª ondem, satisfazendo algumas das hipóteses similares a este caso, o qual enunciaremos mais adiante.

Equações Lineares de Segunda Ordem

As equações diferenciais de segunda ordem, serão essenciais na análise da estabilidade de sistemas lineares, que é o foco de nosso estudo. Uma equação linear de segunda ordem é uma equação que envolve uma função incógnita e sua derivada até ordem 2 Uma equação de segunda ordem é da forma

$$g(t, x, x', x'') = 0 \tag{2.10}$$

onde onde g é uma função contínua definida em algum conjunto de $\mathbb{R}^4$. Um caso particular é quando a equação (2.10) pode ser escrita da forma

$$x'' = g(t, x, x') \tag{2.11}$$

A equação (2.11) é dita linear se g tem a forma

$$g(t, x, x') = f(t) - p(t)x' - q(t)x, \tag{2.12}$$

isto é, se g é linear em x e x'. Na equação (2.12) $f, p, q : I \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções continuas no intervalo aberto I, especificadas na variável independente t, mas não dependem de x. Nesse caso, podemos reescrever a equação (2.11) da seguinte forma

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t), \tag{2.13}$$

A equação linear de segunda ordem (2.13) é dita **homogênea** quando $f(t) = 0$ para todo $t \in I$, caso contrario é dita **não-homogênea**,

Soluções fundamentais de Equações lineares Homogênea

Primeiro vamos analisar a solução da equação homogênea de segunda ordem da forma

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0 \tag{2.14}$$

Para desenvolver a teoria de equações diferencias lineares é conveniente usar a notação de operador linear. Sejam, p e q funções num intervalo aberto I. Então, para qualquer função ϕ duas vezes diferenciáveis em I, definimos o operador diferencial L como sendo

$$L[\phi] = \phi'' + p\phi' + q\phi$$

Note que $L[\phi]$ é uma função em I. O valor de $L[\phi]$ em um ponto t é

$$L[\phi](t) = \phi''(t) + p(t)\phi'(t) + q(t)\phi(t).$$

O operador L pode ser escrito na forma, $L = D^2 + pD + q$, onde D é operador derivada.

Vamos estudar a equação homogênea de segunda ordem $L[\phi](t) = 0$, e vamos denotar $x = \phi(t)$, então a equação fica da forma

$$L[x] = x'' + p(t)x' + q(t)x = 0. \tag{2.15}$$

Associamos à equação (2.15) as condições iniciais

$$x(t_0) = x_0, \qquad x'(t_0) = x'_0$$

onde t_0 é qualquer ponto no intervalo I e $x_0 \in \mathbb{R}$.

O resultado teórico fundamental para problemas de valor inicial para equações de segunda ordem será enunciado no próximo teorema, que é um resultado análogo ao teorema de existência e unicidade que foi discutido anteriormente.

Teorema 2. *Considere o problema de valor inicial*

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = f(t), \qquad x(t_0) = x_0 \;\; x'(t_0) = x'_0$$

onde p, q e f são contínuas em um intervalo aberto I. Então, existe exatamente uma solução $x = \phi(t)$ deste problema de valor inicial, e a solução existe en todo intervalo I.

Demonstração. A prova desse teorema é análoga a prova do teorema 1 que ja foi discutido. □

Notemos que o teorema diz que: O problema de valor inicial tem uma única solução, e a solução ϕ está definida em todo o intervalo I, onde os coeficientes são contínuos e ϕ é pelo menos, duas vezes diferenciável.

Nesse caso, se x_1 e x_2 são soluções da equação (2.14) no intervalo I, então, por ser linear, $c_1x_1 + c_2x_2$ também é solução para quaisquer constantes c_1 e c_2. Dizemos que duas funções x_1 e x_2 são linearmente independentes no intervalo I se a única forma de escrever

$$c_1x_1 + c_2x_2 = 0 \quad \forall t \in I$$

é quando as constantes c_1 e c_2 são nulas, caso contrário dizemos que as funções x_1, x_2 são linearmente dependentes.

Definição 1. Seja x_1, x_2 duas funções deriváveis no intervalo I. Definimos o Wroskiano $W(t) = W[x_1, x_2](t)$ destas duas funções como sendo

$$W[x_1, x_2](t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix} = x_1(t)x_2'(t) - x_1'(t)x_2(t), \forall x \in I$$

Agora que já definimos o Wroskiano, estamos em condições de enunciar um teorema que caracteriza a independência linear de duas funções num intervalo I.

Teorema 3. *Sejam x_1, x_2 duas funções deriváveis no intervalo I. Logo,*

1. *Se $W(t_0) \neq 0$ para algum $t_0 \in I$, então x_1, x_2 são linearmente independentes.*

2. *Se x_1, x_2 são linearmente dependentes, então $W(t) = 0$ para todo $t \in I$.*

Demonstração. 1. Seja $t_0 \in I$ tal que $W(t_0) \neq 0$ e suponhamos que

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t) = 0, \qquad \forall t \in I$$

então temos que

$$\begin{aligned} c_1x_1(t_0) + c_2x_2(t_0) &= 0, \\ c_1x_1'(t_0) + c_2x_2'(t_0) &= 0. \end{aligned}$$

Escrevendo o sistema de equações na forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} x_1(t_0) & x_2(t_0) \\ x_1'(t_0) & x_2'(t_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

Como $W(t_0) \neq 0$, então c_1 e c_2 tem que ser nulas. Portanto x_1, x_2 são linearmente independentes.

2. Suponhamos por contradição que, existe $t_0 \in I$ tal que $W(t_0) \neq 0$, pelo item 1 temos que x_1, x_2 são Linearmente independentes, mas, por Hipótese x_1, x_2 são linearmente dependentes, o qual nos leva a uma contradição. portanto, $W(t) = 0, \forall t \in I$.

□

Vamos supor agora que x_1 e x_2 são duas soluções da equação (2.15), ou seja

$$L[x] = x_1'' + p(t)x_1' + q(t)x_1 = 0 \tag{2.16}$$

o mesmo acontece para x_2. Então, podemos gerar mais soluções formando combinações lineares de x_1 e x_2, esse fato é conhecido como **Principio da superposição**, o qual pode ser formalizado através do seguinte teorema.

Teorema 4. *(Principio da superposição) Se x_1 e x_2 são soluções da equação diferencial (2.16).*

$$L[x] = x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$$

então a combinação linear $c_1x_1 + c_2x_2$ também é solução, quaisquer que sejam as constantes c_1 e c_2.

Demonstração. Para provar o teorema, basta substituir x na equação (2.16) pela expressão

$$x = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) \tag{2.17}$$

O resultado é

$$\begin{aligned} L[c_1x_1 + c_2x_2] &= [c_1x_1(t) + c_2x_2(t)]'' + p(t)[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)]' \\ &+ q(t)[c_1x_1(t) + c_2x_2(t)] \\ &= c_1x_1'' + c_2x_2'' + c_1p(t)x_1' + c_2p(t)x_2' + c_1q(t)x_1 + c_2q(t)x_2 \\ &= c_1[x_1'' + p(t)x_1' + q(t)x_1] + c_2[x_2'' + p(t)x_2' + q(t)x_2] \\ . &= c_1L[x_1] + c_2L[x_2] \end{aligned}$$

Como $L[x_1] = 0$ e $L[x_2] = 0$, segue que $L[c_1x_1 + c_2x_2] = 0$. Portanto, independentemente dos valores de c_1 e c_2, x dado pela equação (2.17) satisfaz a equação diferencial (2.15), e a demostração do teorema está completa. □

O teorema 4 diz que, começando com apenas duas soluções da equação (2.15), podemos construir uma família de soluções definida pala equação (2.17), nesse contexto podemos definir o conjunto fundamental de soluções.

Definição 2. As soluções x_1 e x_2, com wronskiano não-nulo, formam um **um conjunto fundamental de soluções** da equação (2.15).

Podemos escrever esse resultado em uma linguagem mais simples de entender, para encontrar a solução geral, ou seja, **todas as soluções** da equação (2.15), precisamos apenas, achar duas soluções da equação dada com wronskiano diferente de zero, é o que podemos ver no exemplo a seguir.

Exemplo 4. *Suponhamos que existem $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ tal que $x_1(t) = e^{r_1t}$ e $x_2(t) = e^{r_2t}$ são duas soluções da equação (2.15). Vejamos que elas formam um conjunto fundamental de soluções se $r_1 \neq r_2$.*

Vamos calcular o wronskiano de x_1 e x_2:

$$W = \begin{vmatrix} e^{r_1t} & e^{r_2t} \\ r_1e^{r_1t} & r_2e^{r_2t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)exp[(r_1 + r_2)t]$$

Como a função exponencial nunca se anula e com estamos supondo que $r_2 - r_1 \neq 0$, segue que $W(t)$ e diferente de zero para todo $t \in I$. Logo x_1 e x_2 formam um conjunto fundamental de soluções.

Equações Homogêneas Com Coeficientes Constantes

Agora vamos concentrar nossa atenção em equação nas quais as funções p e q são constantes. Nesse caso, az equação (2.14) fica

$$x'' + px' + qx = 0 \tag{2.18}$$

onde p e q são contantes dadas. Agora vamos procurar soluções exponenciais para equação (2.18). Suponhamos que $x(t) = e^{rt}$ é uma solução, onde r é um parâmetro a ser determinado. então segue que, $x'(t) = re^{rt}$, e $x''(t) = r^2e^{rt}$ e substituindo na equação (2.18), obtemos

$$(r^2 + pr + q)e^{rt} = 0$$

como $e^{rt} \neq 0$, temos que

$$r^2 + pr + q = 0 \tag{2.19}$$

A equação. (2.19) é chamada **equação característica** da equação diferencial (2.18). Seu significado reside no fato de que, se r é uma rais da equação (2.19), então $x(t) = e^{rt}$ é solução da equação diferencial (2.18). Como a equação (2.19) é uma equação do segundo grau com coeficientes reais, ela possui duas raízes que podem ser reais e distintas, reais e iguais ou complexas conjugadas.

- Caso duas raízes reais e diferentes

Supondo que as raízes da equação característica (2.19) são reais e distintos,denotemos por r_1 e r_2, onde $r_1 \neq r_2$, então, as funções $x_1(t) = e^{r_1 t}$ e $x_2(t) = e^{r_2 t}$ são soluções linearmente independente da equação (2.18), dai segue que

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) = c_1e^{r_1 t} + c_2e^{r_2 t}$$

também é solução da equação (2.18). pois $x(t)$ é uma combinação linear de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ cujo wronskiano e diferente de zero, de fato

$$\begin{aligned} W[x_1, x_2](t) = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1e^{r_1 t} & r_2e^{r_2 t} \end{vmatrix} &= e^{r_1 t}r_2e^{r_2 t} - e^{r_2 t}r_1e^{r_1 t} \\ &= r_2e^{(r_1+r_2)t} - r_1e^{(r_1+r_2)t} \\ &= (r_2 - r_1)e^{(r_1+r_2)t} \end{aligned}$$

Como $r_1 \neq r_2$ e $e^{(r_1+r_2)t} \neq 0$, concluímos que $W[x_1, x_2](t) \neq 0$.

Exemplo 5. *Encontremos a solução geral de*

$$x'' + 5x' + 6x = 0$$

Suponhamos que $x(t) = e^{rt}$, então, r tem que ser rais da equação característica

$$r^2 + 5r + 6 = (r + 2)(r + 3) = 0$$

Assim, os valores possíveis para r são $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$, a solução geral da equação é

$$x(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t}$$

- Caso duas raízes reais e iguais.

Vamos agora considerar o caso quando o sistema (2.18) possui as duas raízes iguais, $r_1 = r_2 = r$, esse caso ocorre quando o discriminante $p^2 - 4q$ é zero. Então, segue da formula para soluções de uma equação do segundo grau que

$$r_1 = r_2 = r = -\frac{p}{2}$$

A dificuldade é que, ambas as raízes, geram a mesma solução

$$x_1(t) = e^{-\frac{pt}{2}}$$

da equação diferencial (2.18), e não é fácil encontrar uma segunda solução.

Para encontrar a solução geral da equação (2.18) precisamos encontrar uma segunda solução que não seja múltiplo de $x_1(t)$. Para encontrar uma segunda solução, vamos usar um método descoberto por D' Alembert no século XVIII. Como $x_1(t)$ é solução da equação (2.18), $cx_1(t)$ também o é para qualquer constante c . A ideia básica é generalizar essa observação substituindo c por uma função $v(t)$ e depois tentar determinar $v(t)$ de modo que o produto $v(t)x_1(t)$ seja solução da equação (2.18)

Supondo que os coeficientes da equação (2.18) satisfazem $p^2 - 4q = 0$, então considerando

$$x(t) = v(t)x_1(t) = v(t)e^{-\frac{pt}{2}}$$

substituindo na equação (2.19), temos

$$\left\{\left[v''(t) - pv'(t) + \frac{p^2}{4}v(t)\right] + p\left[v'(t) - \frac{p}{2}v(t)\right] + qv(t)\right\} e^{-\frac{pt}{2}} = 0 \tag{2.20}$$

Cancelando o fator $e^{-\frac{pt}{2}}$ e reagrupando os termos restantes, encontramos

$$v''(t) + (-p + p)v'(t) + \left(\frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q\right) v(t) = 0$$

Como podemos observar, a parcela envolvendo $v'(t)$ é nula, alem disso o coeficiente de $v(t)$ é $-(p^2 - 4q)$, que também é zero, pois $p^2 - 4q = 0$. Assim, a equação (2.20) se reduz a

$$v''(t) = 0$$

logo

$$v(t) = c_1 t + c_2$$

portanto

$$x(t) = c_1 t e^{-\frac{pt}{2}} + c_2 e^{-\frac{pt}{2}}. \tag{2.21}$$

Então, $x(t)$ é uma combinação linear de duas soluções

$$x_1(t) = e^{-\frac{pt}{2}}, \qquad x_2(t) = te^{-\frac{pt}{2}}.$$

O wronskiano dessas duas soluções é

$$W = \begin{vmatrix} e^{-\frac{pt}{2}} & te^{-\frac{pt}{2}} \\ -\frac{p}{2}e^{-\frac{pt}{2}} & \left(1 - \frac{pt}{2}\right) e^{-\frac{pt}{2}} \end{vmatrix} = e^{-pt}$$

Como o wrosnskaiano nunca se anula, as soluções x_1 e x_2 formam um conjunto fundamental de soluções. Alem disso, a equação (2.21) é a solução geral da equação (2.18).

Exemplo 6. *encontre a solução do problema de valor inicial*

$$x'' - x' + 0,25x = 0, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = \frac{1}{3}$$

A equação característica é

$$r^2 - r + 0,25 = 0$$

de modo que as raízes são $r_1 = r_2 = \frac{1}{2}$, *logo, a solução geral da equação diferencial é*

$$x(t) = c_1 e^{\frac{t}{2}} + c_2 t e^{\frac{t}{2}} \tag{2.22}$$

A primeira condição inicial implica que

$$x(0) = c_1 = 2$$

para satisfazer a segunda equação diferencial, primeiro derivamos a equação (2.22) e depois fazemos $t = 0$. *Isso nos dá*

$$x'(0) = \frac{1}{2}c_1 + c_2 = \frac{1}{3}$$

de modo que $c_2 = -\frac{2}{3}$. *Portanto a solução do problema de valor inicial é*

$$x(t) = 2e^{\frac{t}{2}} - \frac{2}{3}te^{\frac{t}{2}}$$

- Caso raízes complexas

Suponha que $p^2 - 4q < 0$ então as raízes da equação (2.18) são números complexos conjugados, denotemos por

$$r_1 = a + bi, \qquad r_2 = a - bi$$

onde a e b são reais. As expressões correspondentes para x são

$$x_1(t) = e^{(a+bi)t}, \qquad x_2(t) = e^{(a-bi)t} \tag{2.23}$$

Usando a forma de Euler

$$e^{it} = cos\ t + isen\ t$$

para escrever a equação. (2.23) como

$$\begin{aligned} e^{(a+bi)t} = e^{at}e^{ibt} &= e^{at}(cos(bt) + isen(bt)) \\ &= e^{at}cos(bt) + ie^{at}sen(bt) \end{aligned}$$

Soluções reais As funções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ dadas pala equação (2.23), são soluções da equação (2.18) quando a solução da equação característica são números complexos $a + bi$, como as soluções $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são funções que possuem valores complexos, agora precisamos encontrar soluções reais. Tais soluções podem ser encontradas como consequência do teorema da superposição, que diz que, se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são soluções da equação (2.18), então, qualquer combinação linear de $x_1(t)$ e $x_2(t)$ também é solução, em particular, vamos formar a soma e a diferença de $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Temos

$$\begin{aligned} x_1(t) + x_2(t) &= e^{at}(cos(bt) + isen(bt)) + e^{at}(cos(bt) - isen(bt)) \\ &= 2e^{at}cos\ bt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} x_1(t) - x_2(t) &= e^{at}(cos(bt) + isen(bt)) - e^{at}(cos(bt) - isen(bt)) \\ &= 2ie^{at}sen(bt) \end{aligned}$$

Logo, desprezando os fatores 2 e $2i$, respectivamente, obteremos um par de soluções reais,

$$u(t) = e^{at}cos(bt), \qquad v(t) = e^{at}sen(bt)$$

Note que u e v são as partes reais e imaginarias, respectivamente, de $x_1(t)$. Por um calculo direto, pode-se mostrar que o wronskiano de u e v é

$$W[u, v](t) = be^{2at}$$

Portanto, desde que $b \neq 0$, o wronskiano não é nulo, de modo que u e v formam um conjunto fundamental de soluções. Em consequência, se as raízes da equação característica são números complexos $a + bi$ com $b \neq 0$, então a solução geral da equação (2.18) é

$$x = c_1e^{at}cos(bt) + c_2e^{at}sen(bt) \tag{2.24}$$

onde c_1 e c_2 são constantes arbitrarias.

Exemplo 7. *Encontremos a solução geral de*

$$x'' + x' + x = 0$$

A equação característica é

$$r^2 + r + 1 = 0$$

e suas raízes são

$$r = \frac{-1 \pm (1-4)^{\frac{1}{2}}}{2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, $a = -\frac{1}{2}$ *e* $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$*, de modo que a solução geral da equação diferencial é*

$$x(t) = c_1e^{-\frac{t}{2}}cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + c_2e^{-\frac{t}{2}}sen(\frac{\sqrt{3}}{2}t)$$

Como estes três casos incluem todas as possíveis combinações de r_1 e r_2, para completar o processo de resolução de uma equação diferencial Homogênea de segunda ordem, enunciaremos um teorema que formaliza esse procedimento.

Teorema 5. *Para resolver uma equação linear homogênea de segunda ordem da forma*

$$ax'' + bx' + cx = 0$$

primeiro determinamos as raízes r_1 *e* r_2*, da equação característica (2.19). Então, a solução geral da equação dada pode ser expressa em termos de* r_1 *e* r_2*, como segue:*

- *se* $r_1 \neq r_2$ *e reais , então a solução geral é* $x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$
- *se* $r_1 = r_2 = r$*, reais, então a solução geral é* $x = (c_1 + c_2 t)e^{rt}$
- *Se,* $r_1 = a + bi$ *e* $r_2 = a - bi$*, a solução geral é* $x = e^{rt}(c_1 cos\ bx + c_2 sen\ bt)$

Demonstração. A prova desse teorema decorre da analise feita em cada caso e pode ser verificada na referência [1] □

Solução da equação não homogênea

Nesta seção, determinaremos procedimentos para encontrar as soluções da equação não homogênea

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = g(t) \tag{2.25}$$

Suponhamos que a função $x_p(t)$ é uma solução particular de (2.25). Denotemos com $x(t)$ qualquer outra solução de (2.25) e definamos $x_h(t) := x(t) - x_p(t)$. Verifica-se que esta função satisfaz

$$\begin{aligned} x_h'' + p(t)x_h' + q(t)x_h &= x'' + p(t)x' + q(t)x - (x_p'' + p(t)x_p' + q(t)x_p) \\ &= f(t) - f(t) \\ &= 0 \end{aligned}$$

isto É, $x_h(t)$ é solução da equação homogênea

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$$

Agora, suponhamos que conhecemos uma base $x_1(t), x_2(t)$ para esta equação, então existem constantes c_1, c_2 tal que

$$x_h(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \tag{2.26}$$

desde que $x_h(t) = x(t) - x_p(t)$ concluímos que as soluções de (2.25) são da forma

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

onde $x_h(t)$ é dado por (2.26).

Exemplo 8. *Encontremos todas as soluções (solução geral) de*

$$x'' + x' = 3cos(3t) - 9sen(3t)]$$

Solução*: A função* $x_p(t) = sen(3t)$ *é uma solução particular desta equação. A equação homogênea associada é* $x'' + x' = 0$*, que tem como base de soluções as funções*

$$x_1(t) = 1, \qquad x_2(t) = e^{-t} \Rightarrow x_h(t) = c_1 + c_2 e^{-t}$$

Portanto a solução geral da equação não homogênea é

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= c_1 + c_2 e^{-t} + sen(3t) \end{aligned}$$

Assim temos que, para encontrar todas as soluções da equação não homogênea se reduz a encontrar soluções particulares e uma base para a equação homogênea associada.

2.2 Sistemas de Equações Diferenciais

Um grande número de fenômenos é descrito por sistemas de equações diferenciais ordinárias e elas aparecem em problemas envolvendo diversas variáveis dependentes, cada uma das quais sendo uma função da mesma variável independente.

Equações diferenciais ordinárias de ordem n em geral podem ser representadas por um sistema de equações diferencias ordinárias de 1ª ordem. Para isso considere D um aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $F : D \to \mathbb{R}^n$ uma funçao continua. Uma equação de ordem n, em geral pode ser escrita na forma

$$y^{(n)} = F(t, y, y', y'', ..., y^{n-1})$$

Fazendo

$$x_1 = y, \quad x_2 = y', ..., x_n = y^{n-1}$$

resulta o sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= F(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned}$$

Este é um caso particular de um sistema de equações $x' = F(t, x)$ onde $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$, isto é, este sistema pode ser representado por

$$\begin{aligned} x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, ..., x_n) \\ &\vdots \\ x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, ..., x_n) \end{aligned} \tag{2.27}$$

Dizemos que o sistema (2.27) tem uma solução no intervalo $I : \alpha < t < \beta$ se existe um conjunto de n funções $x_1 = \phi_1(t), x_2 = \phi_2(t), ..., x_n = \phi_n(t)$ diferenciáveis em todos os pontos de do intervalo I que satisfazem o sistema (2.27) em todos os pontos desse intervalo. Alem do sistema de equações diferenciais, podem ser dados, também, as condições iniciais da forma

$$x_1(t_0) = x_1^0, \quad x_2(t_0) = x_2^0, \quad ..., \quad x_n(t_0) = x_n^0, \tag{2.28}$$

onde t_0 é um valor especificado de t em I e $x_1^0, ..., x_n^0$ são números dados. As equações diferenciais (2.27) e as condições iniciais (2.28) formam um problema de valor inicial.

As condições a seguir sobre $F_1, ..., F_n$ facilmente verificadas em problemas específicos, que são suficientes para garantir que o problema de valor inicial (2.27), (2.28) tenha uma única solução.

Teorema 6. *Suponhamos que cada uma das funções* $F_1, ..., F_n$ *e suas derivadas parciais* $\frac{\partial F_1}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial F_1}{\partial x_n}, ..., \frac{\partial F_n}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial F_n}{\partial x_n}$ *são continuas numa região* R *do espaço* $t, x_1, ..., x_n$ *definida por* $\alpha < t < \beta$, $\alpha_1 < x_1 < \beta_1, ..., \alpha_n < x_n < \beta_n$ *e suponha que o ponto* $(t_0, x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0)$ *está em* R. *Então, existe um intervalo* $|t - t_0| < h$ *no qual há uma única solução,* $x_1 = \phi_1(t), ..., x_n = \phi_n(t)$ *do sistema de equações diferenciais(2.27) que também satisfaz as condições iniciais (2.28).*

Demonstração. A demonstração desse teorema é análoga a do teorema 1 da seção anterior e pode ser verificada com mais detalhes na referência [1] □

Se cada uma das funções $F_1, ..., F_n$ acima, é uma função linear das variáveis dependentes $x_1, x_2, ..., x_n$, então , o sistema de equações é dito **linear**, caso contrario, é **não-linear**. Assim, o sistema mais geral de n equações diferenciais lineares tem a forma

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + ..., + a_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + ... + a_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}(t)x_1 + ... + a_{nn}(t)x_n + g_n(t). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Se todas as funções $g_1(t), g_2(t), ..., g_n(t)$ forem nulas no intervalo I, então, o sistema (2.29) é dito **homogêneo**, caso contrario, ele é **não-homogêneo**.

Para o sistema (2.29) o teorema de existência e unicidade é expresso de uma forma mais simples e também tem uma conclusão mais forte.

Teorema 7. *Se as funções* $a_{11}, a_{12}, ..., a_{nn}, g_1, ..., g_n$ *são continuas em un intervalo* $I : \alpha < t < \beta$, *então existe única solução* $\mathbf{x}_1 = \phi_1(t), ..., \mathbf{x}_n = \phi_n(t)$ *do sistema (2.29)que também satisfaz as condições iniciais (2.28), onde* t_0 *é qualquer ponto em* I *e* $x_1^0, ..., x_n^0$ *são números arbitrários. Alem disso, a solução existe para todo o intervalo* I.

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser verificada com mais detalhes na referencia [1]. □

Note que, para sistemas lineares, a existência e unicidade de soluções está garantida para todo o intervalo no qual todas as hipóteses são satisfeitas.

Teoria Básica de sistemas de equações lineares de primeira ordem

Para discutir o sistema (2.29) de maneira mais eficiente, usaremos a notação matricial, isto é, vamos considerar $x_1 = \phi_1(t), ..., x_n = \phi_n(t)$ como componente de um vetor $\mathbf{x} = \phi(t)$, analogamente $g_1(t), ..., g_n(t)$ as componentes de um vetor $\mathbf{g}(t)$, e

$a_{11}(t), a_{12}(t)..., a_{nn}(t)$ são elementos de uma matriz $n \times n$ denotada por $\mathbf{P}(t)$. Então, o sistema (2.29) escrito na forma matricial fica

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t) \tag{2.30}$$

Onde

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & ... & a_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}(t) & ... & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{bmatrix}$$

Dizemos que o vetor $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ é uma solução da equação (2.30) se suas componentes satisfazem o sistema de equação (2.29) e supondo que $\mathbf{P}$ e $\mathbf{g}$ são contínuas em algum intervalo $I : \alpha < t < \beta$. De acordo com o teorema 6, isto é suficiente para garantir a existência de solução da equação (2.30). no intervalo $\alpha < t < \beta$.
Consideremos primeiro a equação homogênea

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(\mathbf{t})\mathbf{x} \tag{2.31}$$

onde $\mathbf{g(t)} = \mathbf{0}$ na equação (2.30), usando a notação

$$\mathbf{x_1}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix} ,...., \ \mathbf{x_k}(\mathbf{t}) = \begin{bmatrix} x_{1k}(t) \\ x_{2k}(t) \\ \vdots \\ x_{nk}(t) \end{bmatrix} ...$$

para denotar soluções específicas do sistema (2.31). Os principais fatos sobre a estrutura das soluções do sistema (2.31) estão enunciados no teoremas a seguir.

Teorema 8. *Se as funções vetoriais $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_k$ são soluções do sistema (2.31), então qualquer combinação linear $c_1\mathbf{x}_1 + c_1\mathbf{x}_2 + ... + c_k\mathbf{x}_2$ também é solução para quaisquer que sejam as constantes $c_1, c_2, ..., c_k$.*

Demonstração. Esse é o princípio da superposição: para provar-lo, basta derivar $c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2$ e usar o fato de que $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ satisfazem a equação (2.31). Aplicando repetidas vezes o teorema 8, chegamos a conclusão que, se $\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_k}$ são soluções da equação (2.31), então

$$\mathbf{x} = c_1 \ \mathbf{x}_1(t) + ... + c_k\mathbf{x}_k(t) \tag{2.32}$$

também é solução para quaisquer que sejam as contantes $c_1, ..., c_k$. □

Como indicamos anteriormente, aplicando repetidas vezes o teorema 8, segue que toda combinação linear finita de soluções da equação (2.31) também é solução. Por analogia aos casos anteriores, é razoável esperar que, para um sistema da forma (2.31) de ordem n, seja suficiente formar combinações lineares de n soluções escolhidas apropriadamente. sejam $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$, n soluções do sistema (2.31) e considere a matriz $\mathbf{X}(t)$ cujas colunas são os vetores $\mathbf{x}_1(t), ..., \mathbf{x}_n(t)$:

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & ... & x_{1n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1}(t) & ... & x_{nn}(t) \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

onde as colunas da matriz (2.33) são linearmente independentes.

Definimos o Wroskiano dessas funções como

$$W[\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n](t) = det\mathbf{X}(t). \tag{2.34}$$

Então, as soluções $\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n$ são linearmente independente, se e somente se, $W[\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_n}](t)$ for diferente de zero em algum ponto $t = t_0$. Esse resultado pode ser verificado com mais detalhes na referencia [1]

Vamos considerar um sistema linear homogêneo com coeficientes constantes, da forma:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{2.35}$$

onde A é uma matriz $n \times n$, aqui suporemos que todos os elementos de $\mathbf{A}$ são números reais (e não complexos).

Para construir a solução geral do sistemas (2.35) procedemos por analogia com o tratamento de equações de segunda ordem. procuramos então soluções da forma

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}, \tag{2.36}$$

onde o expoente r e o vetor constante $\boldsymbol{\xi}$ devem ser determinados. Substituindo esta expressão na equação (2.35), obtemos

$$r\boldsymbol{\xi} e^{rt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} e^{rt}$$

cancelando os fatores não nulos e^{rt}, obtemos

$$\mathbf{A}\xi = r\boldsymbol{\xi}$$

ou

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \tag{2.37}$$

onde $\mathbf{I}$ é uma matriz identidade $n \times n$. Assim para resolver o sistema de equações diferenciais (2.35) precisamos resolver o sistema de equações algébricas (2.37). Esse ultimo problema é precisamente o que determina os autovalores e os autovetores da matriz $\mathbf{A}$. Portanto, o vetor $\mathbf{x}$ dado pela equação (2.36) é uma solução da equação (2.35), desde que r seja um autovalor e $\boldsymbol{\xi}$ seja um autovetor da matriz $\mathbf{A}$ associado a esse autovalor.

Para encontrar a solução da equação diferencial (2.35) precisamos encontrar os autovalores de $\mathbf{A}$ a partir do sistema algébrico (2.37), os autovalores $r_1, ..., r_n$ são as raízes da equação polinomial de grau n

$$det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = 0. \tag{2.38}$$

A natureza dos autovalores e dos autovetores associados determina a natureza da solução geral do sistema (2.35). Supondo que $\mathbf{A}$ é uma matriz real temos as seguintes possibilidades para os autovalores de $\mathbf{A}$

1. Todos os autovalores são reais e distintos
2. Alguns autovetores podem ser complexos conjugados.
3. Alguns autovalores podem ser repetidos

Autovalores reais e distintos

Se os autovalores são reais e distintos, então existe um autovetor real $\boldsymbol{\xi}_i$ associado a cada autovalor r_i e os n autovetores $\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_n$ são linearmente independentes. Então as soluções correspondente do sistema diferencial (2.35) são

$$\mathbf{x}_1(t) = \boldsymbol{\xi}_1 e^{r_1 t}, ..., \mathbf{x}_n(t) = \boldsymbol{\xi}_n e^{r_n t}$$

Para mostrar que essas soluções formam um conjunto fundamental, calculamos seu wronskiano

$$\begin{aligned} W[\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n](t) &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{\xi}_{11} e^{r_1 t} & ... & \boldsymbol{\xi}_{1n} e^{r_n t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_{n1} e^{r_1 t} & ... & \boldsymbol{\xi}_{nn} e^{r_n t} \end{vmatrix} \\ &= e^{(r_1 + ... + r_n)t} \begin{vmatrix} \boldsymbol{\xi}_{11} & ... & \boldsymbol{\xi}_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \boldsymbol{\xi}_{n1} & ... & \boldsymbol{\xi}_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Note que, a função exponencial nunca se anula, por outro lado, como os autovetores $\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_n$ são linearmente independente, então seu determinante é diferente de zero. Em consequência o wronskiano nunca se anula. portanto $\mathbf{x}_1, ...\mathbf{x}_n$ formam um conjunto fundamental de soluções. Logo a solução geral da equação (2.35) é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi}_1 e^{r_1 t} + ... + c_n \boldsymbol{\xi}_n e^{r_n t} \tag{2.39}$$

onde $c_1, ..., c_n$ são contantes quaisquer.

Se $\mathbf{A}$ for real e simétrica, sabemos que, todos os autovalores $r_1, ..., r_n$ tem que ser reais. Alem disso, mesmo que alguns autovalores sejam repetidos, sempre existe um conjunto de n autovetores $\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_n$ que são linearmente independentes. Portanto, as soluções correspondentes do sistema de equações diferenciais (2.35) dadas pala equação (2.39) formam um conjunto fundamental de soluções.

Exemplo 9. *Encontremos a solução geral de*

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Note que a matriz de coeficientes é real e simétrica. Os autovalores e os autovetore9990s são $r_1 = 2, \quad r_2 = -1, \quad r_3 = -1$ com seus correspondentes autovetores
$\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \xi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Portanto, um conjunto fundamental de soluções da equação é

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \qquad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}, \qquad \mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

e a solução geral é

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Esse exemplo ilustra o fato de que, embora os autovalores ($r = -1$) tenha multiplicidade algébrica 2, pode ser possível encontrar dois autovetores linearmente independentes para poder construir a solução geral da equação.

Autovalores Complexos

Suponha que $\mathbf{A}$ tenha autovalores complexos, como $\mathbf{A}$ é uma matriz real, então os coeficientes na equação polinomial para r são reais e os autovalores complexos aparecem em pares conjugados. Por exemplo, se $r_1 = \lambda + i\mu$, onde λ e μ são reais, é um autovalor de $\mathbf{A}$, então $r_2 = \lambda - i\mu$ também o é. Alem disso, os autovetores associados $\boldsymbol{\xi}_1$ e $\boldsymbol{\xi}_2$ também são complexos. Para ver isso, suponha que r_1 e $\boldsymbol{\xi}_1$ satisfazem

$$(\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{0}.$$

Aplicando o conjugado a esta equação e observando que $\mathbf{A}$ e $\mathbf{I}$ são reais, obtemos.

$$(\mathbf{A} - \overline{r}_1\mathbf{I})\overline{\boldsymbol{\xi}}_1 = \mathbf{0}$$

onde $\overline{r}_1$ e $\overline{\boldsymbol{\xi}}_1$ são complexos conjugados de r_1 e $\boldsymbol{\xi}_1$, respectivamente, Com isso, as soluções correspondentes

$$\mathbf{x}_1(t) = \boldsymbol{\xi}_1 e^{r_1 t}, \qquad \mathbf{x}_2(t) = \overline{\boldsymbol{\xi}}_1 e^{\overline{r}_1 t} \tag{2.40}$$

da equação diferencial (2.35) são então complexas conjugadas. Portanto podemos encontrar duas soluções reais da equação (2.35) correspondente aos autovalores r_1 e r_2, a saber, as partes reais e imaginárias de $\mathbf{x}_1(t)$ e $\mathbf{x}_2(t)$ dadas pela equação (2.40). Vamos escrever $\boldsymbol{\xi}_1 = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, onde $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são vetores reais, então,

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{(\lambda + i\mu)t} \\ &= (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{\lambda t}(cos(\mu t) + isen(\mu t)). \end{aligned}$$

Separando $\mathbf{x}_1(t)$ em suas partes reais e imaginarias, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= e^{\lambda t}(\mathbf{a}\ cos(\mu t) - \mathbf{b}\ sen(\mu t)) \\ &+ ie^{\lambda t}(\mathbf{a}\ sen(\mu t) + \mathbf{b}\ cos(\mu t)) \end{aligned}$$

se escrevemos $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$, então os vetores

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a}\ cos(\mu t) - \mathbf{b}\ sen(\mu t))$$

$$\mathbf{v}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a}\ sen(\mu t) + \mathbf{b}\ cos(\mu t))$$

são soluções reais da equação (2.35). E possível mostrar que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente independentes (esse fato pode ser verificado na referencia bibliográfica [1]). Aqui vale a pena lembrar que essa analise só se aplica se a matriz de coeficiente $\mathbf{A}$ na equação (2.35) é real, pois só nesse caso os autovalores aparecem em pares conjugados.

Exemplo 10. *Encontremos o conjunto fundamental de soluções reais do sistema*

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{2.41}$$

Para encontrar um conjunto fundamental de soluções, usaremos o raciocínio anterior. Nesse caso, a equaçao característica é

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} - r & 1 \\ -1 & -\frac{1}{2} - r \end{vmatrix} = r^2 + r + \frac{5}{4} = 0$$

Portanto os autovalores são $r_1 = -\frac{1}{2} + i$ *e* $r_2 = -\frac{1}{2} - i$ *e seus autovetores associados são, respectivamente:* $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $\xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$. *Logo, um conjunto fundamental de soluções complexas para o sistema é*

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}+i)t}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}-i)t}$$

Para obter um conjunto de soluções reais, precisamos encontrar as partes reais e imaginarias de $\mathbf{x}_1$ *ou de* $\mathbf{x}_2$. *De fato*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}}(cos\ t + isen\ t) \\ &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}}(cos\ t) \\ -e^{-\frac{t}{2}}(sen\ t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}}(sen\ t) \\ -e^{-\frac{t}{2}}(cos\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto

$$\mathbf{u}(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} cos\ t \\ -sen\ t \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} sen\ t \\ cos\ t \end{pmatrix}$$

é um conjunto de soluções reais. Calculando o wronskiano de $\mathbf{u}(t)$ *e* $\mathbf{v}(t)$ *vemos que*

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{u}, \mathbf{v})(t) &= \begin{vmatrix} e^{-\frac{t}{2}}(cos\ t) & e^{-\frac{t}{2}}(sen\ t) \\ -e^{-\frac{t}{2}}(sen\ t) & e^{-\frac{t}{2}}(cos\ t) \end{vmatrix} \\ &= e^{-t}(cos^2 t + sen^2 t) = e^{-t} \end{aligned}$$

Como o $W(\mathbf{u}, \mathbf{v})(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$, *segue que* $\mathbf{u}(t)$ *e* $\mathbf{v}(t)$ *formam um conjunto fundamental de soluções (Reais) do sistema (2.41).*

Autovalores Repetidos

Consideremos agora o caso em que a matriz $\mathbf{A}$ tem autovalores repetidos. Lembrando que um autovalor repetido com multiplicidade algébrica $k \geq 2$ pode ter multiplicidade geométrica menor do que k, em outras palavras, pode existir menos do que k autovetores linearmente independente associado a esse autovalor.

Considerando o sistema (2.35), suponha que $r = \rho$ é uma raiz de multiplicidade $k \geq 2$ da equação

$$det(\mathbf{A\ \text{-}\ rI}) = 0 \tag{2.42}$$

Então ρ é um autovalor de multiplicidade algébrica k da matriz $\mathbf{A}$. Nesse caso, existem duas possibilidades: ou existem k autovetores linearmente independentes associados ao autovalor ρ ou tem menos do que k desses vetores.

No Primeiro caso, sejam $\boldsymbol{\xi}_1, ..., \boldsymbol{\xi}_k$ os k autovetores linearmente independentes associados ao autovalor ρ de multiplicidade algébrica k. Então, $\mathbf{x}_1(t), ..., \mathbf{x}_k(t) = \boldsymbol{\xi}_1 e^{\rho t}, ..., \boldsymbol{\xi}_k e^{\rho t}$ são k soluções linearmente independentes da equação (2.35). Assim, nesse caso , não faz diferença que o autovalor $r = \rho$ seja repetido, ainda assim existem k soluções linearmente independentes da equação (2.35) da forma $\boldsymbol{\xi} e^{rt}$. Esse caso ocorre sempre que a matriz for auto-adjunta.

No entanto, se a matriz não for auto-adjunta, podem existir menos do que k vetores linearmente independentes associado ao autovetor ρ de multiplicidade algébrica k e, se for esse o caso, haverá menos que k soluções da equação (2.35) da forma $\boldsymbol{\xi} e^{rt}$ associado a esse autovalor. Portanto, para construir a solução geral da equação (2.35) é preciso encontrar outras restantes.

Vamos supor que a multiplicidade algébrica de ρ seja 2 e que $\boldsymbol{\xi}$ seja o único autovetor associado a ρ. Logo, uma solução para a equação (2.35) é da forma

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{\rho t} \tag{2.43}$$

Por analogia ao estudo de equações diferenciais lineares de segunda ordem parece natural tentarmos encontrar uma segunda solução da forma

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}_1 t e^{\rho t} \tag{2.44}$$

onde $\boldsymbol{\xi}$ é um vetor constante a ser determinado. Substituindo $\mathbf{x}$ na equação (2.35) vem,

$$\rho \boldsymbol{\xi} t e^{\rho t} + \boldsymbol{\xi} e^{\rho t} = \mathbf{A} \boldsymbol{\xi} t e^{\rho t} \tag{2.45}$$

Comparando a igualdade temos que $\boldsymbol{\xi} = 0$ é a única solução e portanto $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ é solução trivial para (2.35)

Aqui precisamos soluções não triviais, como a equação (2.45) contém termos em $te^{\rho t}$ e $e^{\rho t}$, é sugestivo que a segunda solução, além de $\boldsymbol{\xi} t e^{\rho t}$ contenha um termo na forma $\boldsymbol{\eta} e^{\rho t}$. Assim, vamos supor que a segunda solução seja

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} t e^{\rho t} + \boldsymbol{\eta} e^{\rho t}$$

onde $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ são vetores constantes. Substituindo $\mathbf{x}$ na equação (2.35) temos

$$\begin{aligned} \rho \boldsymbol{\xi} t e^{\rho t} + \boldsymbol{\xi} e^{\rho t} + \rho \boldsymbol{\eta} e^{\rho t} &= \mathbf{A}[\boldsymbol{\xi} t e^{\rho t} + \boldsymbol{\eta} e^{\rho t}] \Rightarrow \\ & \rho \boldsymbol{\xi} t e^{\rho t} + [\boldsymbol{\xi} + \rho \boldsymbol{\eta}] e^{\rho t} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{\xi} t e^{\rho t} + \boldsymbol{A} \boldsymbol{\eta} e^{\rho t} \end{aligned}$$

Comparando-os, temos que $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ devem satisfazer

$$\begin{cases} \rho \boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\xi} + \rho \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{A} \boldsymbol{\eta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\mathbf{A} - \rho \mathbf{I}) \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \\ (\boldsymbol{A} - \rho \mathbf{I}) \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi} \end{cases} \tag{2.46}$$

Onde $\boldsymbol{\xi}$ é autovetor associado ao autovalor $\rho = r$. Portanto, A solução geral da equação (2.44) é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \boldsymbol{\xi} e^{rt} + c_2 (\boldsymbol{\xi} t e^{rt} + \boldsymbol{\eta} e^{rt})$$

onde o vetor $\boldsymbol{\eta}$ é um vetor generalizado associado ao autovalor repetido. O caso geral pode ser verificado com mais detalhe na referencia [1].

Exponencial de uma matriz

Para terminar esta seção faremos uma pequena abordagem da exponencial de uma matriz. Introduzindo a notação

$$e^{\mathbf{A}t} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathbf{A}^n t^n$$

para uma matriz quadrada $n \times n$, então, a solução do problema de valor inicial

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

é dado por

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)}\mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t} e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{f}(s)ds$$

Os detalhes podem ser encontrados na referência [1].

Capítulo 3

Estabilidade

Até agora, tivemos uma visão geral das equações diferenciais, entraremos a seguir no foco principal do nosso estudo, que são as estabilidades das equações diferenciais, para isso, vamos analisar varias situações e tirar algumas conclusões que serão uteis para o nosso estudo.

A maioria das equações diferenciais não pode ser resolvida analiticamente, mas é importante considerarmos as informações qualitativas que podem ser obtidas da equação, sem de fato resolvê-las. Os resultados sobre estabilidade de pontos de equilíbrio para sistemas não lineares são baseados no comportamento de sistemas lineares com coeficientes constantes associados.

3.1 Estabilidade e Instabilidade

Nessa sessão vamos definir os conceitos de estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade, os quais são de vital importância para nosso estudo. Estamos interessados em estudar o comportamento de soluções de equações da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \tag{3.1}$$

Onde $\mathbf{f} : \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, uma função contínua. O sistema (3.1) é dito autônomo, se $\mathbf{f}$ não depende de t, isto é, um sistema autônomo é da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{3.2}$$

O primeiro conceito que vamos definir é o conceito de ponto **crítico** ou **ponto de equilíbrio**, que consiste nos pontos em que $\mathbf{f}$ se anula.

Definição 3. Um vetor $\overline{\mathbf{x}}$ em $\mathbb{R}^n$ se diz um ponto crítico ou de equilíbrio para o sistema autônomo (3.2) se $\mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$.

Nesse contexto, o primeiro problema da teoria da estabilidade é determinar as condições sobre as quais as soluções do sistema, que partem das vizinhanças de um ponto de equilíbrio $\overline{\mathbf{x}}$, permanecem sempre próxima desse ponto, nesse caso dizemos que o ponto de equilíbrio é **estável**, e as condições sobre as quais não permanecem perto, nesse caso dizemos que o ponto de equilíbrio é **instável.** No que segue, $||\mathbf{v}||$ denotará a norma euclidiana de um vetor $\mathbf{v}$.

Definição 4. Um ponto critico $\overline{\mathbf{x}}$ do sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ é dito **estável** se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que toda solução $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{t})$ do sistema (3.1) que satisfaz, em $t = 0$

$$||\boldsymbol{\phi}(0) - \overline{\mathbf{x}}|| < \delta,$$

existe para todo t positivo e satisfaz

$$||\boldsymbol{\phi}(t) - \overline{\mathbf{x}}|| < \epsilon, \quad \forall t \geq 0$$

O que podemos observar aqui é que todas as soluções que começam suficientemente próximas de $\overline{\mathbf{x}}$ permanecem próximas de $\overline{\mathbf{x}}$, A trajetória da solução não precisa se aproximar do ponto crítico quando $t \to \infty$. Um ponto crítico que não é estável é dito **instável**

Definição 5. Um ponto crítico $\overline{\mathbf{x}}$ é dito **assintoticamente estável** se é estável e se existe um $\delta_0 > 0$ tal que, se uma solução $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ satisfaz

$$||\boldsymbol{\phi}(\mathbf{0}) - \overline{\mathbf{x}}|| < \delta_0,$$

então

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{\phi}(t) = \overline{\mathbf{x}}$$

Logo, as trajetórias que começam próximas de $\overline{\mathbf{x}}$ não apenas permanecem próximas, mas tem que acabar tendendo a $\overline{\mathbf{x}}$ quando $t \to \infty$. Note que a estabilidade assintótica é uma propriedade mais forte do que estabilidade, isso significa que um ponto crítico tem que ser estável para que possamos analisar se ele é assintoticamente estável.

3.2 Estabilidade de Sistemas Lineares

Consideremos agora um sistema linear da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{3.3}$$

Se $\mathbf{f}$ for uma aplicação linear, então $\mathbf{f}$ é da forma $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, onde $\mathbf{A}$ é uma matriz real $n \times n$. Assumindo que $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ é ponto crítico para esse sistema, a equação (3.3) se forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{3.4}$$

Vamos considerar o sistema linear homogêneo com coeficientes constantes, dada por (3.4). Como vimos na seção anterior, soluções não triviais desse sistema, podem ser obtidos da forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$. Supondo que $\mathbf{A}$ seja invertivel, isto é, $det\mathbf{A} \neq 0$, então, $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ **é o único ponto crítico do sistema (3.4)**.

Vamos analisar o caso particular $n = 2$, neste caso $\mathbf{A}$ é uma matriz 2×2 com coeficientes reais. Agora a solução $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t)$ pode ser considerada como uma representação paramétrica de uma curva em $\mathbb{R}^2$. Onde, essa curva pode ser olhada como **caminho** ou **trajetória** percorrida por uma partícula. O plano xy que contem as trajetórias é chamado de **Plano de Fase**.

Nessas condições, ao analisar o sistema (3.4) precisamos considerar três casos, dependendo da natureza dos autovalores da matriz $\mathbf{A}$, onde nosso objetivo é caracterizar a equação diferencial de acordo com o padrão geométrico formado por suas trajetórias.

CASO 1 Dois autovalores reais e distintos.

Nesse caso, assumindo que a matriz $\mathbf{A}$ tem dois autovalores reais e distintos, $r_1 \neq r_2$, a solução geral da equação (3.4) é da forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1\boldsymbol{\xi}_1 e^{r_1 t} + c_2\boldsymbol{\xi}_2 e^{r_2 t} \tag{3.5}$$

onde r_1 e r_2 Assumem as seguintes condições:

1. Suponha que r_1 e r_2 são não positivos

   1.1 Suponha primeiro que, $r_1 < r_2 = 0$, segue da equação (3.5) que $\mathbf{x}(t) \to c_2\boldsymbol{\xi}_2$ quando $t \to \infty$ independente do valor de c_1 *e* c_2, isto implica a origem é um ponto crítico **estável**

   1.2 Suponha agora que, $r_1 < r_2 < 0$, segue da equação (3.5) que $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ quando $t \to \infty$ independente do valor de c_1 *e* c_2, isto é, todas as soluções se aproximam do ponto crítico, na origem quando $t \to \infty$. isto implica a origem é um ponto crítico chamado de **nó**, **nó atrator** , ou **sorvedouro**, e **assintoticamente estável**

2. Suponha agora que r_1 e r_2 são ambos não negativos.

   Nesse caso, se r_1 e r_2 são ambos não negativos, então as trajetórias tem o mesmo padrão do caso anterior, exceto que o sentido do movimento é se afastando do ponto crítico na origem, em vez de se aproximando, nesse caso $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ cresse exponencialmente en função de t. O ponto crítico é chamado, novamente, **nó** ou **fonte** e **instável**.

3. Considere que r_1 e r_2 são, um positivo e outro negativo

   Se $r_1 < 0$ e $r_2 > 0$, temos que a exponencial que contem o expoente positivo é o termo dominante na equação (3.5) para t grande, de modo que todas essas soluções tendem ao infinito assintoticamente à reta determinada pelo autovetor $\boldsymbol{\xi}_2$ correspondente ao autovalor positivo r_2. as únicas soluções que se aproximam do ponto crítico na origem são aquelas que começam precisamente na reta determinada por $\boldsymbol{\xi}_1$. Nesse caso, a origem é chamada **Ponto de Sela** e **instável**

Exemplo 11. *Vamos estudar a estabilidade da solução do sistema*

$$\begin{cases} x' = -2x - 2y \\ y' = -2x - 5y \end{cases}$$

Colocando o sistema na forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}, = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Os autovalores são as soluções da equação

$$(-2-r)(-5-r)-4=0$$

ou seja,

$$r_1=-1 \qquad r_2=-6$$

e os autovetores associados a esses autovalores são

$$\xi_1=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} \qquad e \quad \xi_2=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}.$$

Portanto, a solução geral do sistema é

$$\mathbf{x}(t)=c_1\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}e^{-t}+c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}e^{-6t}=e^{-t}\left\{c_1\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}e^{-5t}\right\}$$

Observe que independente das constantes c_1 e c_2, a solução $\mathbf{x}(t)\to\mathbf{0}$ quando $t\to\infty$, e assim, a origem é assintoticamente estável.

CASO 2 Autovalores iguais

Vamos supor que $r_1=r_2=r$, vamos considerar os casos quando os autovalores são positivos ou negativos ou nulos.

Suponhamos que existem dois autovetores linearmente independentes, então, a solução geral da equação (3.4) é

$$\mathbf{x}(t)=c_1\boldsymbol{\xi}_1e^{rt}+c_2\boldsymbol{\xi}_2e^{rt}=e^{rt}(c_1\boldsymbol{\xi}_1+c_2\boldsymbol{\xi}_2) \tag{3.6}$$

onde $\boldsymbol{\xi}_1$ e $\boldsymbol{\xi}_2$ são autovetores linearmente independentes. a razão $\frac{\mathbf{x}(t)}{e^{rt}}$ é independente de t, mas depende das coordenadas de $\boldsymbol{\xi}_1$ e $\boldsymbol{\xi}_2$ e das constantes arbitrárias c_1 e c_2. Logo toda trajetória está contida em uma reta contendo a origem. O ponto crítico é chamado de **nó próprio** ou **ponto estrela**. Nesse caso, quando:

- $r=0$ a origem é um ponto **estável**.
- $r<0$ as trajetórias se aproximam da origem, e portanto, a origem é um ponto **assintoticamente estável**.
- $r>0$ as trajetórias se afastam da origem e a origem é um ponto **instável**.

Assumamos agora que existe somente um autovetor linearmente independente, então, a solução geral nesse casso da equação (3.4) é

$$\mathbf{x}(t)=c_1\boldsymbol{\xi}e^{rt}+c_2(\boldsymbol{\xi}te^{rt}+\boldsymbol{\eta}e^{rt}) \tag{3.7}$$

Onde $\boldsymbol{\xi}$ é o autovetor e $\boldsymbol{\eta}$ é o autovetor generalizado associado ao autovalor repetido. Quando um autovalor duplo tem único autovetor independente, o ponto crítico é chamado de **nó próprio** ou **degenerado**, nesse caso a estabilidade depende do sinal de r, e com isso temos

- Se $r<0$ o ponto crítico é **assintoticamente estável**.

- Se $r \geq 0$ o ponto crítico é **instável.**

Exemplo 12. *Consideremos o sistema*

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

O sistema possui um autovalor com multiplicidade algébrica 2, sendo ele $r = -1$, e este autovalor r está associado a um único autovetor $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vamos determinar então, o vetor $\boldsymbol{\eta}$ tal que, $\mathbf{x}(t) = \boldsymbol{\xi} te^{-t} + \boldsymbol{\eta} e^{-t}$ seja uma solução para o sistema dado. Esse vetor $\boldsymbol{\eta}$ deve satisfazer $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\xi}$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \boldsymbol{\eta}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

Portanto a solução geral do sistema é:

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} e^{-t} \right\}$$

Fazendo uso de propriedades de limite podemos concluir que $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ quando $t \to \infty$, independentemente das constantes c_1 e c_2. Assim, o ponto $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ é assintoticamente estável.

CASO 3 Autovalores Complexos

Suponha que os autovalores sejam $\lambda \pm \ i\mu$, onde λ e μ são reais, com $\mu > 0$. Nesse caso, as soluções correspondente do sistema linear (3.4) são da forma

$$\mathbf{x}_1(t) = \boldsymbol{\xi}_1 e^{r_1 t}, \qquad \mathbf{x}_2(t) = \overline{\boldsymbol{\xi}}_1 e^{\overline{r}_2 t}$$

como vimos no capitulo anterior anterior, podemos escrever a solução na forma vetorial $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)$, onde os vetores

$$\mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a}\ cos\ \mu t - \mathbf{b}\ sen\ \mu t)$$
$$\mathbf{v}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a}\ sen\ \mu t + \mathbf{b}\ cos\ \mu t)$$

são soluções reais da equação (3.4), onde $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são linearmente independentes. As soluções neste caso são da forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{u}(t) + c_2\mathbf{v}(t)$$

Se $\lambda = 0$, a origem forma um **centro estável**, pois, os autovalores são imaginários puros e a origem é um ponto **estável**.

Se $\lambda < 0$, a origem forma um ponto espiral e **assintoticamente estável**, pois, a exponencial $e^{\lambda t} \to 0$ quando $t \to \infty$.

Se $\lambda > 0$, a origem aforma um ponto espiral **instável** pois, a exponencial $e^{\lambda t} \to \infty$ quando $t \to \infty$.

Exemplo 13. *Vamos determinar a solução geral para o sistema abaixo e descrever seu comportamento quando* $t \to \infty$.

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

O sistema dado têm como autovalores os complexos

$$r = -1 \pm i.$$

Olhando para $r = -1 + i$ *temos o autovetor associado, também complexo, na forma*

$$\xi_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} i$$

Assim, as soluções reais linearmente independentes são

$$\mathbf{u}(t) = e^{-t} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} cos\ t - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} sen\ t \right\}$$

e

$$\mathbf{v}(t) = e^{-t} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} sen\ t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} cos\ t \right\}$$

Logo, a solução geral é dado por

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t)$$

ou seja,

$$\mathbf{x}(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} c_1 cos\ t + c_2 sen\ t \\ c_1(2cos\ t + sen\ t) + c_2(2sen\ t - cos\ t) \end{bmatrix}$$

Essa solução é o produto de uma função limitada (combinação de seno e cosseno) com uma função que tende a zero quando t tende a infinito. Usando propriedades de limite podemos concluir que $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$, *quando* $t \to \infty$. *assim, a origem é assintoticamente estável.*

Depois de fazer uma análise informal de estabilidade para sistemas lineares 2×2 vamos agora formalizar esse conceitos através do teorema a seguir.

Teorema 9. *O ponto crítico* $\overline{\mathbf{x}}$ *do sistema linear (3.4) é:*

i) Estável, mas não assintoticamente estável, se r_1 *e* r_2 *são imaginários puros;*

ii) Assintoticamente estável se os autovalores r_1 *e* r_2 *são reais e negativos ou têm a parte real negativa;*

iii) Instável se r_1 *e* r_2 *são reais e pelo menos um deles é positivo ou se ambos têm parte real positiva.*

Demonstração. A demonstração segue das análises feitas anteriormente. □

Esse teorema nos mostra que, os autovalores r_1 e r_2 da matriz de coeficientes $\mathbf{A}$, determinam as características de estabilidade do ponto crítico $\overline{\mathbf{x}}$.

A seguir, apresentaremos um teorema que será utilizado no próximo capítulo, para demonstrarmos os tipos de estabilidade de pontos de equilíbrio de sistemas não lineares.

Teorema 10. *Seja o ponto crítico* $\overline{\mathbf{x}}$ *do sistema linear (3.4) um ponto assintoticamente estável, então existem constantes positivas* k *e* α *tais que*

$$||e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0|| < ke^{-\alpha t}||\mathbf{x}_0|| \quad \textit{para todo} \quad t \geq 0.$$

Demonstração. Ver referencia [3] □

Após caracterizarmos a estabilidade de pontos críticos de sistemas lineares, na seguinte sessão apresentaremos os sistemas não-lineares e teoremas relacionados à estabilidade de pontos de equilíbrio. Aqui precisamos soluções não triviais

3.3 Sistemas Quase Lineares

Nesta sessão, estudaremos a teoria clássica de estabilidade para uma classe de sistemas de equações não lineares que aparece com muita frequência nos modelos de dinâmica populacional.

Vamos discutir os resultados de estabilidade para sistemas não-lineares da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{3.8}$$

Como na maioria das vezes não é possível determinar a estabilidade de um ponto crítico de um sistema não-linear por meio de soluções explícitas, vamos investigar o comportamento das trajetórias do sistema (3.8) em uma vizinhança de um ponto crítico $\overline{\mathbf{x}}$, considerando que $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ seja um ponto crítico isolado, ou seja, que existe um circulo en torno de $\overline{\mathbf{x}}$ cujo interior não contém outros pontos críticos. Assumindo que $\mathbf{f}$ é suave, segundo o teorema de Taylor tem-se que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Df}(\mathbf{0})\mathbf{x} + \mathbf{r}(\mathbf{x}), \quad \textit{onde}, \lim_{||\mathbf{x}|| \to \mathbf{0}} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{x})}{||\mathbf{x}||}) = \mathbf{0} \tag{3.9}$$

Observe que $\mathbf{f}$ pode ser escrita da forma $\mathbf{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ Logo sua derivada em qualquer ponto será da forma

$$\mathbf{Df}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Denotando com $A = \mathbf{Df}(\mathbf{0})$. A equação (3.9) fica

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} + \mathbf{r}(\mathbf{x}), \tag{3.10}$$

e ainda considerando que $det(\mathbf{A}) \neq 0$ e $\mathbf{r}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, podemos então, definir um sistema quase linear em torno de um ponto crítico $\overline{\mathbf{x}}$.

Definição 6. O sistema autônomo não-linear (3.8) é quase linear no ponto $\overline{\mathbf{x}}$ se existe uma matriz A e uma função $\mathbf{r(x)}$ tal que

$$\mathbf{f(x)} = \mathbf{Ax} + \mathbf{r(x)}, \quad \textit{para } \mathbf{x} \in B_\gamma(\overline{\mathbf{x}}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : ||\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}|| < \gamma\}$$

com $\lim_{\mathbf{x} \to \overline{\mathbf{x}}} \frac{\mathbf{r(x)}}{||\mathbf{x}||} = \mathbf{0}$

Ja fizemos uma descrição das propriedades de estabilidade da solução de equilíbrio em $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ do sistema linear bidimensional $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Agora vamos fazer uma analogia com o sistema bidimensional não linear da forma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{3.11}$$

Analisando alguns casos, podemos observar que perturbações suficientemente pequenas dos coeficientes, não alteram a estabilidade ou instabilidade do sistema, por exemplo se r_1 e r_2 são reais negativos e distintos, então uma mudança pequena nos coeficientes não vai alterar os sinais de r_1 e r_2, nem vai permitir que eles se tornem iguais. Assim, o ponto crítico permanecerá um nó assintoticamente estável.

Por conveniência, escolhemos como ponto crítico a origem, ja que, se $\overline{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$, sempre podemos fazer a substituição $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}$ na equação (3.11), então $\mathbf{u}$ satisfaz um sistema autônomo com um ponto crítico na origem. Suponha agora, que

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{r}(\mathbf{x}) \tag{3.12}$$

e que $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ é um ponto crítico **isolado** do sistema (3.12). Alem disso, vamos supor que $det\mathbf{A} \neq 0$, de modo que $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ também é o único ponto crítico isolado do sistema linear $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.
Supondo que $\mathbf{r(x)}$ seja tal que suas componentes tem derivadas parciais contínuas e que $\mathbf{r}$ satisfaz a condição

$$\frac{||\mathbf{r}(\mathbf{x})||}{||\mathbf{x}||} \to 0 \qquad \textit{quando} \;\; \mathbf{x} \to 0,$$

isto é, $||\mathbf{r}(\mathbf{x})||$ é pequeno em comparação com $||\mathbf{x}||$ próximo à origem.

Exemplo 14. *Vejamos que o sistema*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x^2 - xy \\ -0,75xy - 0,25y^2 \end{pmatrix} \tag{3.13}$$

é quase linear numa vizinhança da origem.
Observe que o sistema (3.13) é da forma (3.12) de modo que (0,0) é um ponto critico e $det(\mathbf{A}) \neq 0$*, podemos mostrar que os pontos (0,2), (1,0) e (0,5, 0,5) também são pontos críticos, com isso, a origem é um ponto crítico isolado. introduzindo coordenadas polares,* $x = rcos\theta$, $y = rsen\theta$*, temos que, para* $\mathbf{r}(\mathbf{x}) = (\mathbf{r_1}(\mathbf{x}), \mathbf{r_2}(\mathbf{x}))^T$ *tem-se*

$$\begin{aligned} \frac{r_1(x,y)}{r} &= \frac{-x^2 - xy}{r} \\ &= \frac{-r^2cos^2\theta - r^2sen\theta cos\theta}{r} \\ &= -r(cos^2\theta + sen\theta cos\theta) \to 0 \end{aligned}$$

quando $r \to 0$*, de maneira análoga podemos mostrar que* $r_2(x,y)/r \to 0$ *quando* $r \to 0$*, então o sistema (3.13) é quase linear em uma vizinhança da origem.*

Voltando ao sistema não-linear (3.11), escrito coordenada a coordenada, onde (x_0, y_0) é ponto crítico,

$$\begin{cases} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{cases} \tag{3.14}$$

temos que o sistema vai ser quase linear em uma vizinhança de (x_0, y_0) sempre que f e g tiverem derivadas parciais contínuas até segunda ordem, isso pode ser mostrado a través do seguinte teorema, que é uma condição suficiente para um sistema não linear ser quase linear no caso bidimensional

Teorema 11. *Um sistema do tipo (3.14) será quase linear numa vizinhança U de um ponto crítico $\overline{\mathbf{x}} = (x_0, y_0)$ sempre que as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ forem duas vezes diferenciáveis e de classe C^1 em U.*

Demonstração. Como f e g são de classe C^1, usando a expansão de Taylor em torno do ponto crítico (x_0, y_0), temos:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + r_1(x, y),$$

$$g(x, y) = g(x_0, y_0) + g_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + r_2(x, y),$$

onde $r_1(x, y)/[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]^{1/2} \to 0$ quando $(x, y) \to (x_0, y_0)$ e analogamente para r_2, note que $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$ e que $dx/dt = d(x-x_0)/dt$ e $dy/dt = d(y-y_0)/dt$ então o sistema (3.14) se reduz a

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_1(x, y) \\ r_2(x, y) \end{pmatrix} \tag{3.15}$$

ou, em notação vetorial

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{D}(\overline{\mathbf{x}})\mathbf{u} + \mathbf{r}(\mathbf{x}) \tag{3.16}$$

onde $\mathbf{u} = (x - x_0, y - y_0)^T$ e $\mathbf{r} = (r_1, r_2)^T$, com $\overline{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ sendo ponto crítico.

□

Esse resultado tem duas consequências. A primeira é que se as funções f e g forem duas vezes diferenciáveis, então, o sistema (3.14) é quase linear e não é necessário usar a definição para mostrar esse fato. A segunda é que o sistema não-linear (3.14) na vizinhança do ponto crítico $\mathbf{0} = (0, 0)$ é aproximado pela parte linear das equações (3.15) ou (3.16), isto é :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

onde $\mathbf{u}_1 = x - x_0$ *e* $\mathbf{u}_2 = y - y_0$. A matriz $A = D\mathbf{f}(x_0, y_0)$ é chamada de **Matriz Jacobiana** do Sistema (3.17) calculada em (x_0, y_0).

A equação (3.17) fornece um método simples e geral para encontrar o sistema linear correspondente ao sistema quase linear na vizinhança de um ponto crítico.

Exemplo 15. *Vamos usar a equação (3.17) para encontrar o sistema linear correspondente ao sistema*

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -\omega^2 \ sen \ x - \gamma y \end{cases} \tag{3.18}$$

em vizinhança dos pontos críticos, a origem e $(\pi, 0)$. Nesse caso temos,

$$f(x, y) = y \qquad e \quad g(x, y) = -\omega^2 \ sen \ x - \gamma y$$

Como essas funções são diferenciáveis tanto quanto necessário, o sistema (3.18) é quase linear numa vizinhança de cada ponto crítico. As derivadas de f e g são

$$f_x = 0, \quad f_y = 1, \quad g_x = -\omega^2 \, cos \; x, \quad g_y = -\gamma$$

Então, o sistema linear correspondente próximo à origem é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Analogamente calculando as derivadas parciais de f e g no ponto $(\pi, 0)$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & -\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

Onde $u = x - \pi$, $v = y$. Esse é o sistema linear correspondente às equações do sistema (3.18) em uma vizinhança do ponto $(\pi, 0)$.

Vimos até aqui que o sistema linear é uma boa aproximação para o sistema quase linear numa vizinhança do ponto de equilíbrio. Agora vamos ver como se relacionam as trajetórias e a estabilidade do sistema quase linear e o linear correspondente.

Teorema 12. *Linearização: Seja $\overline{\mathbf{x}}$ um ponto crítico do sistema quase linear (3.17) e do sistema linear (3.17) correspondente. Então:*

1. *Se $\overline{\mathbf{x}}$ é um ponto assintoticamente estável do sistema linear correspondente, então $\overline{\mathbf{x}}$ é um ponto assintoticamente estável do sistema quase linear;*

2. *Se $\overline{\mathbf{x}}$ é um ponto instável do sistema linear correspondente, então $\overline{\mathbf{x}}$ é um ponto instável do sistema (3.14).*

Demonstração. 1. Inicialmente vamos fazer uma mudança de variável conveniente $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \overline{\mathbf{x}}$, de modo que o ponto de equilíbrio $\overline{\mathbf{x}}$ de $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ corresponda ao ponto de equilíbrio $\overline{\mathbf{y}} = (0, 0)$ do sistema

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}\left(\mathbf{y}(t) + \overline{\mathbf{x}}\right) \tag{3.20}$$

como o sistema (3.14) é quase linear, temos que $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é classe C^1. Assim aplicando a expansão de Taylor na função $\mathbf{f}(\mathbf{y} + \overline{\mathbf{x}})$ em torno do ponto $\overline{\mathbf{x}}$ obtemos:

$$\mathbf{f}(\mathbf{y} + \overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}}) + \mathbf{Df}(\overline{\mathbf{x}})\mathbf{y} + \mathbf{r}(\mathbf{y})$$

onde $\mathbf{r}(\mathbf{y})$ satisfaz $\mathbf{r}(0, 0) = \mathbf{0}$,, Como $\mathbf{f}(\overline{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$, a equação (3.20) pode ser reescrita como

$$\mathbf{y}' = \mathbf{Df}(\overline{\mathbf{x}})\mathbf{y} + \mathbf{r}(\mathbf{y}). \tag{3.21}$$

Vamos mostrar que o ponto crítico, $\overline{\mathbf{y}} = (\mathbf{0}, \mathbf{0})$ da equação (3.21) é assintoticamente estável.

Note que, do fato do sistema (3.20) ser quase linear, temos que, para algum $m > 0$, existe um $\epsilon > 0$ tal que

$$||\mathbf{r}(\mathbf{y})|| \leq m||\overline{\mathbf{y}}|| \;\; se \quad ||\overline{\mathbf{y}}|| < \epsilon. \tag{3.22}$$

Retornando à equação (3.21), suponha que $\mathbf{y}(t)$ é uma solução satisfazendo a condição inicial $\mathbf{y}(0,0) = \mathbf{y}_0$. Se olharmos para $\mathbf{r}(\mathbf{y})$ como uma função de t, então, usando a fórmula da Variação das Constantes (ver referencia [1]) temos:

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{A}t}\overline{\mathbf{y}} + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-s)}\mathbf{r}(\mathbf{y}(s))ds$$

Usaremos a equação (3.22) e o teorema 10 para estimar $||\mathbf{y}(t)||$ em termos de $||\mathbf{y}_0||$.

Suponha que as constantes k e α são dadas como no teorema (10) , $m > 0$ tal que $mk < \alpha$ e $B_\gamma(0,0) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2; ||\mathbf{y}|| \leq \epsilon\}$ tal que a equação (3.22) é satisfeita. Segue do teorema (10) que

$$||\mathbf{y}(t)|| \leq ke^{-\alpha t}||\overline{\mathbf{y}}|| \int_0^t ke^{-\alpha(t-s)}m||\mathbf{y}(s)||ds, \tag{3.23}$$

com $||\mathbf{y}(s)|| < \epsilon$, e $0 \leq s \leq t$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (3.23) por $e^{\alpha t}$, vem:

$$e^{\alpha t}||\mathbf{y}(t)|| \leq k||\overline{\mathbf{y}}|| + \int_0^t ke^{\alpha s}m||\mathbf{y}(s)||ds \tag{3.24}$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall (ver referencia [6]) em (3.24), obtemos:

$$e^{\alpha t}||\mathbf{y}(t)|| \leq k||\overline{\mathbf{y}}||e^{kmt} \tag{3.25}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (3.25) por $e^{-\alpha t}$ segue

$$||\mathbf{y}(t)|| \leq k||\overline{\mathbf{y}}(t)||e^{-(\alpha-km)t}. \tag{3.26}$$

Para concluir a demonstração, escolha $\delta > 0$ tal que $k\delta < \epsilon$. Logo se $||\overline{\mathbf{y}}|| < \delta$ temos, $||\mathbf{y}(t)|| < \epsilon$ pois $\alpha - km > 0$, o que prova a estabilidade de $\mathbf{y}(t)$. Ainda pela equação (3.26), concluímos que$||\mathbf{y}(t)|| \to \mathbf{0}$ quando $t \to \infty$. Logo, o ponto de equilíbrio $\overline{\mathbf{y}} = (0,0)$ é assintoticamente estável.

2. O resultado restante pode ser encontrado em [3]

□

Este teorema nos mostra que podemos estudar a estabilidade de um ponto crítico de um sistema quase linear através de um estudo da estabilidade do sistema linear correspondente. Em apenas uma situação a estabilidade de um ponto crítico é indeterminada, que é quando temos autovalores imaginários puros. Para as outras situações de autovalores, a estabilidade de um ponto crítico em relação aos dois sistemas são as mesmas. Já, em relação a classificação do ponto crítico, observamos alterações em dois casos: quando os autovalores são imaginários puros e quando são reais e iguais.

O exemplo a seguir nos mostra a variação da estabilidade de sistema quase linear quando os autovalores do sistema linear correspondente são imaginários puros.

Exemplo 16. *Vamos estudar a estabilidade próximo ao ponto* $(0,0)$ *dos dois sistemas abaixo.*

$$(i)\begin{cases} x' = & y + x(x^2+y^2) \\ y' = & -x + y(x^2+y^2) \end{cases} \qquad (ii)\begin{cases} x' = & y - x(x^2+y^2) \\ y' = & -x - y(x^2+y^2) \end{cases}$$

Observe que $(0,0)$ *é ponto crítico de cada um dos sistemas acima, e que cada um dos sistemas dados é quase linear na vizinhança de* $(0,0)$ *Para estudarmos a estabilidade do ponto crítico* $(0,0)$*, consideremos,*

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad r > 0, \qquad rr' = xx' + yy'$$

' Sistema (i):

$$\begin{cases} x' = & y + x(x^2+y^2) \\ y' = & -x + y(x^2+y^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xx' = & xy + x^2(x^2+x_2^2) \\ yy' = & -xy + y^2(x^2+y^2) \end{cases}$$

Somando as equações,

$$xx' + yy' = (x^2+y^2)^2 \Rightarrow rr' = r^4 \Rightarrow r' = r^3$$

Resolvendo a EDO, temos

$$r^{-3}dr = dt \Rightarrow \frac{r^{-2}}{-2} = t + c \Rightarrow \frac{1}{r^2} = -2t + k \Rightarrow r^2 = \frac{1}{-2t+k} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{-2t+k}}$$

para a condição inicial em $t = 0$*, tomamos* $r = r_0 > 0$*, logo,*
$r_0 = \frac{1}{\sqrt{k}}, \;\; k > 0 \Rightarrow k = \frac{1}{r_0^2}$
logo

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{-2t + \frac{1}{r_0^2}}}, \qquad onde, -2t + \frac{1}{r_0^2} > 0 \Rightarrow t < \frac{1}{2r_0^2}$$

Assim, quando $t \to \frac{1}{2r_0^2}$*,* $r(t) \to \infty$*. Logo,* $r(t)$ *não está definida para todo* $t \geq 0$ *e portanto o ponto crítico* $(0,0)$ *é instável.*

Sistema (ii):

$$\begin{cases} x' = & y - x(x^2+y^2) \\ y' = & -x - y(x^2+y^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xx' = & xy - x^2(x^2+y^2) \\ yy' = & -xy - y^2(x^2+y^2) \end{cases}$$

Somando as equações,

$$xx + yy' = (x^2+y^2)(-x^2-y^2)^2 \Rightarrow rr' = r^2(-r^2) \Rightarrow r' = -r^3$$

Como $r > 0$ *temos que* $\frac{dr}{dt} < 0$*. Resolvendo a EDO, temos*

$$r^{-3}dr = -dt \Rightarrow \frac{-r^{-2}}{-2} = -t + c \Rightarrow \frac{1}{r^2} = 2t + k \Rightarrow r^2 = \frac{1}{2t+k} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{2t+k}}, \;\; t > \frac{-k}{2}$$

para a condição inicial em $t = 0$*, tomamos* $r = r_0 > 0$*, logo:*
$r_0 = \frac{1}{\sqrt{k}}, \;\; k > 0 \Rightarrow k = \frac{1}{r_0^2}$
logo

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{2t + \frac{1}{r_0^2}}}.$$

Observe que $r(t)$ *está definida para todo* $t \geq 0$ *e que*

$$|r(t)| \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_0^2}}} = r_0,$$

segue que o ponto crítico $(0,0)$ *é estável e desde que*

$$\lim_{t \to 0} r(t) = 0$$

Concluímos que o ponto crítico $(0,0)$ *é assintoticamente estável.*

Capítulo 4

Aplicações

4.1 Espécies em Competição

Na sequência vamos explorar a aplicação da análise do plano de fase em alguns problemas em dinâmica populacional. Vamos analisar e discutir algumas equações simples, se comparadas a outras mais complexas que existem na natureza.

Suponha, duas espécies de peixe num lago, nenhuma sendo presa da outra, mas ambas competindo pela comida disponível. denotando por x e y as populações das duas espécies em um instante t. Vamos supor que a população de cada espécie, na ausência de predadores, seja governada pela equação logística, isto é,

$$\begin{cases} x' = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x) \\ y' = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y) \end{cases} \tag{4.1}$$

onde ϵ_1 e ϵ_2 são as taxas de crescimento das duas espécies, e ϵ_1/σ_1 e ϵ_2/σ_2 são seus níveis de saturação. Quando ambas especies dividem o mesmo espaço, uma afeta o suprimento de comida disponível da outra, sendo assim, a taxa de crescimento da espécie x devido a presença da espécie y, modificando $\epsilon_1 - \sigma_1 x$ para $\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y$ onde α_1 é uma medida do grau de interferência da espécie y na espécie x. Analogamente, modificando $\epsilon_2 - \sigma_2 y$ por $\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x$. Obtemos

$$\begin{cases} x' = x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) \\ y' = y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x) \end{cases} \tag{4.2}$$

Vejamos quais são os estados equilíbrio entre estas duas espécies. Existem quatro casos a serem considerado:

- Caso 1: esse caso acontece quando as duas espécie morrem, isso significa que $x = 0$ e $y = 0$ no sistemas (4.2).

- Caso 2: esse caso acontece quando a espécie x morre e a espécie y sobrevive, isso significa que $x = 0$ no sistema (4.2).

- Caso 3: esse caso acontece quando a espécie x sobrevive e a espécie y morre, isso significa que $y = 0$ no sistema (4.2).

- Caso 4: esse caso acontece quando as duas espécies sobrevivem, ou seja, leva as espécies a um estado em equilíbrio, isso significa que $x \neq 0$ e $y \neq 0$ no sistema (4.2)

Todos esses casos dependem do ponto crítico que estamos analisando, dependendo da orientação relativas das retas

$$\begin{cases} \epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y = 0 \\ \epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

Essas retas são chamadas, respectivamente de **nuliclinais** de x e y, ja que x' e y' se anulam na equação (4.2).

Buscar uma solução onde a competição entre duas espécies levem a um estado de equilíbrio de coexistência nem sempre é possível. Em alguns casos, a competição resulta na extinção de uma das espécies. Para compreender como isso ocorre e aprender a prever qual situação prevalecerá vamos estudar os possíveis casos, dependendo da orientação das retas nuliclinais de x e y, que são as retas onde x' e y' se anulam, respectivamente. Vamos denotar por r_1 e r_2 as retas x e y, respectivamente. com isso temos

$$r_1: \quad \epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y = 0$$
$$r_2: \quad \epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x = 0$$

Para obtermos os pontos críticos fazemos

$$x(\epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ ou \ \epsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y = 0$$

$$y(\epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0 \ ou \ \epsilon_2 - \sigma_2 y - \alpha_2 x = 0$$

Assim temos

$$P_1 = (0,0), \ P_2 = (0, \epsilon_2/\sigma_2), \ P_3 = (\epsilon_1/\sigma_1, 0) \ e \ P_4 = (\hat{X}, \hat{Y})$$

Onde

$$\hat{X} = \frac{\epsilon_1\sigma_2 - \epsilon_2\alpha_1}{\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2} \quad e \quad \hat{Y} = \frac{\epsilon_2\sigma_1 - \epsilon_1\alpha_2}{\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2}, \quad \sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 \neq 0$$

denota um ponto qual

Do ponto de vista biológico, só nos interessam pontos de equilíbrios cujas coordenadas são não negativas. Logo, os pontos P_1, P_2, P_3 sempre satisfazem esta condição e P_4 deve satisfazer à condição $\hat{X} > 0$ e $\hat{Y} > 0$, Vamos analisar o sistema (4.2) em uma vizinhança desses pontos críticos olhando para o sistema linear correspondente a equação (3.17) da seção anterior, seja $P = (X, Y)$ qualquer ponto crítico e

$$F(X,Y) = X(\epsilon_1 - \sigma_1 X - \alpha_1 Y)$$
$$G(X,Y) = Y(\epsilon_2 - \sigma_2 Y - \alpha_2 X),$$

cujo sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 - 2\sigma_1 X - \alpha_1 Y & -\alpha_1 X \\ -\alpha_2 Y & \epsilon_2 - 2\sigma_2 Y - \alpha_2 X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{4.4}$$

- $P_{=}(0,0)$, ambas as especies morem

Nesse caso o sistema (4.4) fica

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Cujo autovalores são $r_1 = \epsilon_1$ e $r_2 = \epsilon_2$, ambos positivos, logo o ponto $(0,0)$ é instável independente dos parâmetros do sistema.

- $P_2 = (0, \epsilon_2/\sigma_2)$

Novamente, usando o sistema (4.4) temos

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 - \alpha_1\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} & 0 \\ -\alpha_2\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} & \epsilon_2 - 2\sigma_2\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

com os autovalores $r_1 = \epsilon_2 - 2\sigma_2\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} = -\epsilon_2 < 0$ e $r_2 = \epsilon_1 - \sigma_1\frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$ Logo, se

$$r_2 < 0 \Rightarrow \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} < \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$$

Ou se

$$r_2 > 0 \Rightarrow \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} > \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$$

Assim, para os casos $\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} < \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$ temos que P_2 é um ponto **Assintoticamente estável**, e quando $\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} > \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$ temos que P_2 é um ponto de sela, portanto **instável.**

- $P_3 = (\epsilon_1/\sigma_1, 0)$

Novamente, usando o sistema (4.4) temos

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 - \alpha_1\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} & 0 \\ -\alpha_2\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} & \epsilon_2 - 2\sigma_2\frac{\epsilon_1}{\sigma_2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

com os autovalores $r_1 = \epsilon_2 - \sigma_2\frac{\epsilon_2}{\sigma_2} = -\epsilon_2 < 0$ e $r_2 = \epsilon_1 - \sigma_1\frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$
Logo, se

$$r_2 < 0 \Rightarrow \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} < \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$$

Ou se

$$r_2 > 0 \Rightarrow \frac{\epsilon_1}{\sigma_1} > \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$$

Assim, para os casos $\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} < \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$ temos que P_3 é um ponto **Assintoticamente estável**, e quando $\frac{\epsilon_1}{\sigma_1} > \frac{\epsilon_2}{\sigma_2}$ temos que P_3 é um ponto de sela, portanto **instável.**

- $P_4 = (\hat{X}, \hat{Y})$

Usando a equação acima determinaremos as condições sob as quais o modelo (4.2) permite a coexistência doas espécies x e y. Usando a solução das equações algébricas (4.3), Com a condição que $\hat{X} > 0$ e $\hat{Y} > 0$, a equação (4.4), se reduz a:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sigma_1\hat{X} & -\alpha_1\hat{X} \\ -\alpha_2\hat{Y} & -\sigma_2\hat{Y} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Os autovalores da equação (4.4) são encontrados a partir da equação

$$r^2 + (\sigma_1 \hat{X} + \sigma_2 \hat{Y})r + (\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2).\hat{X}\hat{Y} = 0$$

logo

$$r_{1,2} = \frac{-(\sigma_1 \hat{X} + \sigma_2 \hat{Y}) \pm \sqrt{(\sigma_1 \hat{X} + \sigma_2 \hat{Y})^2 - 4(\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2)\hat{X}\hat{Y}}}{2} \tag{4.5}$$

Aqui podemos observar que, se $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 < 0$, os autovalores são reais e distintos de sinal oposto, com isso , o ponto crítico $(\hat{X}, \hat{Y})$ é um ponto **instável** e a coexistência não é possível.

Por outro lado se $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 > 0$, os autovalores são reais e negativos e distintos, ou complexos conjugados com parte real negativa. e com isso o ponto crítico é **assintoticamente estável** e é possível uma coexistência sustentável.

As equações (4.3) fornecem uma interpretação biológica do resultado de que a coexistência ocorre ou não, dependendo se $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2$ é positivo ou negativo. Os σ medem o efeito inibitório que o crescimento de cada população tem sobre si mesma. enquanto os α medem o efeito inibitório que o crescimento de cada população tem sobre a outra. Então, quando $\sigma_1\sigma_2 > \alpha_1\alpha_2$ a interação (competição) é fraca e as especies podem coexistir; quando $\sigma_1\sigma_2 < \alpha_1\alpha_2$ a interação é forte e as especies não poderão coexistir, uma tem que ser extinta.

Os modelos aqui apresentados serviram de base para outros modelos mais complexos que descrevem interações deste tipo, entre duas ou mais populações, existem outros modelos mais complexos que não abordaremos nesse estudo.

Exemplo 17. *Discutamos o comportamento qualitativo das soluções do sistema*

$$\begin{cases} dx/dt = x(1 - x - y) \\ dy/dt = y(0.75 - y - 0.5x) \end{cases} \tag{4.6}$$

Para encontrar aos pontos críticos, resolvemos o sistema de equações algébricas

$$\begin{cases} x(1 - x - y) = 0 \\ y(0.75 - y - 0.5x) = 0 \end{cases}$$

onde existem quatro pontos críticos $(0,0)$, $(0,0.75)$, $(1,0)$ *e* $(0.5,0.5)$*, eles correspondem a soluções de equilíbrio do sistema.*

O sistema (4.6) é quase linear em vizinhanças de cada ponto crítico (X,Y)*, e usando a equaçoes (3.17) da seção anterior obtemos*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_x(X,Y) & F_y(X,Y) \\ G_x(X,Y) & G_y(X,Y) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

onde, para o sistema (4.6)

$$F(x,y) = x(1 - x - y)$$
$$G(x,y) = y(0,75 - y - 0,5x)$$

logo a equação (4.7) é da forma

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 2X - Y & -X \\ -0,5Y & 0,75 - 2Y - 0,5X \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{4.8}$$

Agora analisaremos o estabilidade em cada ponto crítico. Para o ponto $(0,0)$ *sabemos que é instável como foi analisado anteriormente. Consideremos agora o ponto onde*

- $x = 1, \; y = 0.$

Esse ponto corresponde a um estado em que a espécie $\mathbf{x}$ *sobrevive e a espécie* $\mathbf{y}$ *não. O sistema linear correspondente é*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{4.9}$$

Seus autovalores e autovetores são

$$r_1 = -1, \qquad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = 0,25 \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$$

e sua solução geral é

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}e^{0,25t}$$

como os autovalores tem sinais opostos, o ponto $(1,0)$ *é um ponto de sela e, portanto um ponto de equilíbrio instável do sistema linear (4.8) e do sistema não-linear (4.9).*

- $x = 0, \; y = 0,75.$

Nesse caso, a especie $\mathbf{y}$ *sobrevive e a especie* $\mathbf{x}$ *não. A analise é semelhante à analise para o ponto* $(1,0)$*. O sistema linear correspondente é*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,25 & 0 \\ -0,375 & -0,75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

Seus autovalores e autovetores são

$$r_1 = 0,25, \qquad \xi_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = -0,75 \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e sua solução geral é

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \end{pmatrix}e^{0,25} + c_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-0,75t}$$

Logo, o ponto $(0, 0,75)$ *também é um ponto de sela e um ponto de equilíbrio instável.*

- $x = 0,5, \; y = 0,5.$

Esse ponto crítico corresponde a um estado de equilíbrio misto, ou de coexistência, na competição entre duas especies. Observe que, nesse caso, $\epsilon_1 = 1,\ \epsilon_2 = 0,75.\ \sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = 1,\ \alpha_1 = 1$ *e* $\alpha_2 = 0,75$ *Os autovalores e os autovetores do sistema linear correspondente*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & -0,5 \\ -0,25 & -0,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

São

$$r_1 = (-2+\sqrt{2})/4 \cong -0,146, \qquad \xi^{(\mathbf{1})} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$r_2 = (-2-\sqrt{2})/4 \cong -0,854 \qquad \xi^{(\mathbf{2})} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

e sua solução geral é

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -1 \end{pmatrix} e^{-0,146t} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0,854t}$$

Como ambos os autovalores são negativos, o ponto crítico $(0,5\ ,\ 0,5)$ *é um nó assintoticamente estável do sistema linear(4.11) e do sistema não-linear (4.6) . Todas as trajetórias se aproximam do ponto crítico quando* $t \to \infty$.

Observe que, nesse caso, $\epsilon_1 = 1,\ \epsilon_2 = 0,75.\ \sigma_1 = 1,\ \sigma_2 = 1,\ \alpha_1 = 1$ *e* $\alpha_2 = 0,75$, *com isso,* $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 = 1 - 0,75 = 0,25 > 0$ *como previsto na equaçao (4.5).*

4.2 Equação Predador-Presa

Ja foi discutido na seção anterior sobre um modelo de duas espécies competindo por um mesmo suprimento de comida. Agora vamos discutir a competição entre duas espécies que uma das espécies(predador) se alimenta da outra espécie (presa), enquanto a presa se alimenta de outra comida. Podemos considerar, por exemplo: raposas e coelhos numa floresta fechada, onde as raposas se alimentam dos coelhos e os coelhos da vegetação da floresta, outro exemplo pode ser peixes num lago onde uma espécie se alimenta da outra.

Para começar, vamos denotar por x e y as populações respectivamente da presa e do predador, em um instante t construindo as interações das duas espécies, fazemos algumas hipóteses:

1. Na ausência de predador, a população de presas aumentam a uma taxa proporcional à população atual, assim $\frac{dx}{dt} = ax,\ a > 0$, quando $y = 0$.

2. Na ausência de presa, o predador é extinto, assim $\frac{dy}{dt} = -cy, c > 0$ quando $x = 0$.

3. O numero de encontros entre predador e presa é proporcional ao o produto das duas populações, onde cada um desses encontro tende a promover o crescimento da população de predadores e a inibir o crescimento da população de presas, assim a taxa de crescimento da população de predadores é aumentada por um termo da forma γxy, enquanto a taxa de crescimento da população de presa é diminuída por um termo da forma $-\alpha xy$, onde γ e α são contantes positivas.

Em consequências dessas hipóteses, somos levados ás equações;

$$\begin{aligned} x' &= ax - \alpha xy = x(a - \alpha y) \\ y' &= -cy + \gamma xy = y(-c + \gamma x) \end{aligned} \tag{4.12}$$

As contantes a , c, α e γ são todas positivas,sendo

- $a \rightarrow$ Taxa de crescimento das presas.
- $c \rightarrow$ Taxa de morte da população de predadores, respectivamente
- α e $\gamma \rightarrow$ são as medidas do efeito da interação entre as duas espécies.

As equações (4.12) são chamadas de equações de Lokta-Volterra. Foram desenvolvida em artigo por Lokta em 1925 e por Volterra em 1926. Embora essas equações sejam bem simples elas caracterizam uma grande classe de problemas.

Para discutir o sistema geral (4.12) considere que os pontos críticos do sistema são as soluções de

$$\begin{cases} x(a - \alpha y) = 0 \\ y(-c + \gamma x) = 0 \end{cases}$$

isto é, os pontos $(0,0)$, $(0, a/\alpha)$, $(c/\gamma, 0)$ e $(c/\gamma, a/\alpha)$. Vamos examinar as soluções do sistema linear correspondente perto dos pontos críticos $(0,0)$ e $(c/\gamma, a/\alpha)$. Para isso vamos considerar a matriz Jacobiana do sistema linear correspondente,

$$J = \begin{pmatrix} a - \alpha y & -\alpha x \\ \gamma y & -c + \gamma x \end{pmatrix}$$

Em uma vizinhança da origem, o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Os autovalores e os autovetores são

$$r_1 = a, \qquad \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$r_2 = -c, \qquad \xi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que a solução geral é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{at} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-ct}$$

logo, a origem é um ponto de sela e, portanto instável.

Vamos considerar agora o ponto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$. Nesse caso fazemos uma mudança de variáveis $x = c/\gamma + u$ e $y = a/\alpha + v$ então o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha c/\gamma \\ \gamma a/\alpha & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Os autovalores do sistema (4.13) são $r = \pm i\sqrt{ac}$, de modo o ponto crítico é um centro estável para o sistema linear. para encontrar a trajetórias do sistema (4.13) podemos dividir a segunda equação pela primeira para obter.

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dt}{du/dt} = -\frac{(\gamma a/\alpha)u}{(\alpha c/\gamma)v}$$

ou

$$\gamma^2 audu + \alpha^2 cvdv = 0$$

em consequência

$$\gamma^2 au^2 + \alpha^2 cv^2 = k$$

onde k é uma contante de integração não-negativa. Logo as trajetórias do sistema são elipses.

Voltando ao sistema (4.12), ele pode ser reduzido a uma única equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{y(-c + \gamma x)}{x(a - \alpha y)} \tag{4.14}$$

A equação. (4.14) é separável e tem solução

$$a \ln\ y - \alpha y + c \ln\ x - \gamma x = C \tag{4.15}$$

onde C é uma contante de integração. Mais uma vez podemos observar que a equação (4.15) é uma curva fechada, para C fixo em torno do ponto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$, logo o ponto crítico também é um centro estável para o sistema geral não-linear (4.12).

A variação cíclica das populações de predadores e de presas pode ser analisadas em mais detalhe quando os desvio em relação ao ponto $(c/\gamma, a/\alpha)$ são pequenos e pode-se usar o sistema linear (4.13), onde a solução do sistema é

$$\begin{aligned} u &= \frac{c}{\gamma} K \cos(\sqrt{ac}\ t + \phi) \\ v &= \frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{a}} K sen(\sqrt{ac}\ t + \phi), \end{aligned} \tag{4.16}$$

onde K e ϕ são determinados pelas condições iniciais. Assim

$$\begin{aligned} x &= \frac{c}{\gamma} + \frac{c}{\gamma} K cos(\sqrt{ac}\ t + \phi) \\ y &= \frac{a}{\alpha} + \frac{a}{\alpha}\sqrt{\frac{c}{a}} K sen(\sqrt{ac}\ t + \phi), \end{aligned}$$

Essas equações são boas aproximações para trajetórias quase elípticas perto do ponto crítico $(c/\gamma, a/\alpha)$. podemos usa-las para tirar diversas conclusões sobre a variação cíclica das populações de predadores e de presas em tais trajetórias.

1. Os tamanhos das populações de predadores e de presas variam de forma senoidal com período $2\pi\sqrt{ac}$. Esse período de oscilação é independente das condições iniciais

2. As populações de predadores e presas estão defasadas por um quarto de ciclo. O numero de presas aumenta primeiro, depois aumenta o numero de predadores.

3. As amplitudes das oscilações são $\frac{cK}{\gamma}$ para população de presas e $\frac{a\sqrt{cK}}{\alpha\ \sqrt{a}}$ para a de predadores e, portanto, dependem das condições iniciais,

4. As populações de predadores e de presas em um ciclo completo são c/γ e a/α, respectivamente. Elas são iguais a população de equilíbrio.

Variações cíclicas de predadores e presas, como previsto pelas equação (4.12) foram observadas na natureza.

Informações adicionais para o modelo a respeito da defasagem das duas populações assim como as populações médias durante um período de tempo, podem ser encontradas na referência [1].

Exemplo 18. *Discutamos as soluções do sistema*

$$\begin{cases} dx/dt = x(1-0,5y) = x - 0,5xy, \\ dy/dt = y(-0.75+0.25x) = -0,75y + 0,25xy \end{cases} \tag{4.17}$$

Para x e y positivos.

Os pontos críticos desse sistema são as soluções das equações algébricas

$$\begin{cases} x(1-0,5y) = 0 \\ y(-0.75+0.25x) = 0 \end{cases} \tag{4.18}$$

a saber, os pontos $(0,0)$ e $(3,2)$.

Vamos examinar, a seguir, o comportamento local das soluções próximas de cada ponto crítico.

- *P = (0.0)*

Perto da origem, podemos desprezar os termos não-lineares nas equação (4.17) para obter o sistema linear correspondente

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0,75 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

Os autovalores e os autovetores são

$$r_1 = 1, \qquad \xi_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$r_2 = -0,75, \qquad \xi_{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

de modo que a solução geral é

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-0,75t} \tag{4.20}$$

Assim, a origem é um ponto de sela para ambos os sistemas, o linear (4.19) e do não-linear (4.17) e, portanto, instável. Um par de trajetórias entra na origem ao longo do eixo dos y, todas as outras trajetórias se afastam da origem.

- *P = (3,2)*

Para examinar o ponto crítico $(3,2)$, *podemos fazer a substituição* $x = 3+u, \quad y = 2+v$ *nas equações (4.17) e depois desprezar os termos não-lineares em u e v , obtemos o sistema linear*

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1,5 \\ -0,5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

Os autovalores e os autovetores são

$$r_1 = \frac{\sqrt{3}i}{2}, \qquad \xi_{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i/\sqrt{3} \end{pmatrix};$$

$$r_2 = -\frac{\sqrt{3}i}{2}, \qquad \xi_{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ i/\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

Como os autovalores são imaginários, o ponto crítico $(3,2)$ *é um centro do sistema linear(4.18) e, portanto, é um ponto crítico estável para esse sistema. Como vimos anteriormente que esse é um dos casos em que o comportamento do sistema linear pode não ser o mesmo, ou não, do sistema não-linear, de modo que a natureza do ponto* $(3,2)$ *não pode ser determinado por essa informação. A maneira mais simples de encontrar as trajetórias do sistema linear (4.18) é dividir a segunda equação pela primeira*

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dt}{du/dt} = \frac{0,5u}{-1,5v} = -\frac{u}{3v}$$

ou

$$u\ du + 3v\ dv = 0$$

em consequência

$$u^2 + 3v^2 = k$$

Onde k é uma constante arbitrária, não negativa, de integração. Logo, as trajetórias do sistema linear (4.18) são elipses centradas no ponto crítico e um tanto alongadas na direção horizontal.

Voltando ao sistema não-linear(4.17) e dividindo a segunda equação pela primeira, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-0.75 + 0.25x)}{x(1 - 0,5y)} \tag{4.22}$$

A equação (4.22) é uma equação separável e pode ser colocada na forma

$$\frac{1 - 0,5y}{y}dy = \frac{(-0.75 + 0.25x)}{x}dx$$

Donde segue que

$$0,75\ ln\ x + ln\ y - 0,5y - 0,25x = c \tag{4.23}$$

onde c é uma constante de integração. Embora não possamos resolver a equação (4.23), explicitamente, usando apenas funções elementares, é possível mostrar que o gráfico da equação para um valor fixo c é uma curva fechada em torno do ponto $(3,2)$, *logo, o ponto crítico também é um centro para o sistema não-linear (4.17), e as populações de predadores e presas exibem uma variação cíclica.*

Capítulo 5

Outra Abordagem da Teoria de Estabilidade

Neste capítulo abordaremos uma forma de analisar estabilidade, conhecido como o segundo método de Liapunov, ou método Direto.

5.1 O Método de Liapunov

O matemático e engenheiro russo Aleksandr M. Liapunov (1857-1918), em sua tese de doutorado, "General problem of stability of motion"(Problema geral de estabilidade de movimento) publicado em 1892, encontrou um importante critério que avalia a estabilidade de pontos de equilíbrio. Este critério ficou conhecido como Método Direto ou Segundo Método de Liapunov. O seu primeiro método, também conhecido como Método Indireto ou Método da Linearização, permite investigar a estabilidade local de um sistema não linear através de seu modelo linearizado. O segundo método surgiu com a tentativa de estudar a estabilidade de pontos de equilíbrio sem qualquer conhecimento das soluções da equação autônoma

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \tag{5.1}$$

ou seja, sem usar a forma explícita das soluções. Neste método, as conclusões sobre a estabilidade são obtidas através de uma função auxiliar apropriada, chamada função de Liapunov.

A técnica ou método, para determinar o comportamento das trajetórias de (5.1) nas vizinhanças da origem quando $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ é baseado no fato bem conhecido de um sistema físico perder energia total numa vizinhança de um ponto de equilíbrio, a energia total do sistema é decrescente ($E' \leq 0$).Mais precisamente, um ponto de equilíbrio estável para um sistema físico é um ponto em que a energia total do sistema é um minimo local, fato que é conhecido na física como o teorema de Lagrange. Assim, procuramos uma função $E : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (uma função-energia).

$$E(\mathbf{x}) = E(x_1, ..., x_n)$$

de classe C^1 em Ω, ou em alguma sub-região de Ω contendo a origem, tal que $E(\mathbf{x}) \geq 0$, e $E(\mathbf{x}) = 0$ se e só se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, então as superfícies $E(\mathbf{x}) = c$, c uma constante positiva, serão em geral superfícies fechadas em $\mathbb{R}^n$ com origem no interior. Ainda mais se $\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}_0)$ é a solução de

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$$
$$\mathbf{x}(\mathbf{0}) = \mathbf{x}_0$$

com $\mathbf{x}_0$ em Ω, a taxa $\partial E/\partial t$ de variação de energia com o tempo ao longo da trajetória definida por esta solução é

$$\mathbf{E}'(\mathbf{x}) := \nabla E \cdot \mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial x_i} F_i \leq 0$$

Essas observações nos motivam a seguinte definição, se o estado de equilibrio é a origem: $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$

Definição 7. Seja $E : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função continua tal que $E(\mathbf{0}) = 0$, então:

1. E é definida semi-positiva se $E(\mathbf{x}) \geq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$
2. E é definida positiva se $E(\mathbf{x}) > 0$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$
3. E é definida semi-negativa se $E(\mathbf{x}) \leq 0$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$
4. E é definida negativa se $E(\mathbf{x}) < 0$, $\forall \mathbf{x} \in \Omega$

Introduzindo o funcional $E'(\mathbf{x}) := \nabla E \cdot \mathbf{F}$, estamos em condições de definir a função de Liapunov.

Definição 8. Uma função E definida positiva, tal que $E' \leq 0$, e definida semi-negativa é chamada funcional de Liapunov

A função de Liapunov é uma técnica para determinar o comportamento das trajetórias em torno de um **ponto crítico** ou **ponto de equilíbrio** nesse método não á necessidade de conhecer algo sobre a solução do sistema de equações diferenciais e permite tirar varias conclusões sobre **estabilidade** e **instabilidade** em torno de um ponto crítico $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ através de uma função auxiliar apropriada que fornece um tipo de informação global. O método de Liapunov também pode ser usado para sistemas que não são quase lineares. O método Liapunov nos fornece uma ferramenta muito útil para analisar o comportamento das trajetórias de um sistema em torno de pontos críticos, sempre e quando podemos encontrar uma função apropriada que satisfaz as condições do método de Liapunov, mas, a grande dificuldade é encontrar essa função.

Supondo que essa função exista, podemos enunciar alguns resultados que facilita muito a análise da estabilidades de pontos críticos de um sistema de equações diferenciais.

Teorema 13. *Assumiremos que a origem é um ponto crítico estável, isto é* $\mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. *A origem é um ponto de equilíbrio estável para o sistema*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \tag{5.2}$$

se existe uma função de Liapunov E para este sistema.

Demonstração. Denotemos por S_r a esfera de raio r centrada na origem de $\mathbb{R}^n$, isto é, S_r consiste dos pontos $\mathbf{x}$ de $\mathbb{R}^n$ tais que $||\mathbf{x}|| = r$ e seja r escolhido de modo que S_r esteja contido em Ω, então, como E é contínua e definida positiva em Ω, E assume um minimo positivo m sobre S_r(compacto), recorrendo a continuidade de E, podemos achar um $\epsilon > 0$ tal que $E(\mathbf{x}) < m$ para todo $\mathbf{x}$ sobre ou no interior da esfera S_ϵ de raio ϵ centrada em $\mathbf{0}$.

Seja agora $\mathbf{x}_0$ qualquer ponto dentro da região delimitada por S_r e seja $\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}_0)$ a solução única de $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ cuja trajetória passa por $\mathbf{x}_0$ quando $t = 0$. Afirmamos que esta trajetória permanece dentro da região S_r para todo $t > 0$, pois caso contrário teríamos $||\boldsymbol{\phi}(t_1, \mathbf{x}_0)|| = r$ para algum $t_1 > 0$, onde $E[\boldsymbol{\phi}(t_1, \mathbf{x}_0)] \geq m$, então $E[\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x_0})] < m \leq E[\boldsymbol{\phi}(t_1, \mathbf{x}_0)]$, $p\mathbf{x} \in S_\epsilon$ mas isso contradiz a hipótese de que $E'[\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}_0)] \leq 0$ em Ω. □

Podemos observar, pelo resultado anterior, que se E for efetivamente decrescente ao longo de toda trajetória $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ numa vizinhança da origem, estas trajetórias teriam que se aproximar da origem, o que sugere a estabilidade assintótica, e é isso que o próximo resultado nos mostra.

Teorema 14. *Se E é uma função de liapunov para $\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ com propriedade que E' é definida negativa ($E' < 0$) em Ω, então o a origem é assintoticamente estável.*

Demonstração. Vimos que existe um $\epsilon > 0$ com a propriedade que E é uma função não-crescente ao longo de qualquer trajetória $\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}_0)$ com $||\mathbf{x_0}|| < \epsilon$. Como E é definida positiva em Ω, resulta que E tem um limite $E_0 \geq 0$ ao longo dessa trajetória quando $t \to \infty$. Assim, teremos terminado se pudermos mostrar que esse limite é zero, pois então o fato de E se anular só na origem implicará que a trajetória em questão deve tender à origem quando $t \to \infty$.

Suponhamos que $E_0 > 0$. Então raciocinando como antes, existiria um $\delta > 0$ tal que $E(\mathbf{x}) < E_0, \quad \forall\ \mathbf{x}$ com $||\mathbf{x}|| < \delta$. Logo, a trajetória definida por $\mathbf{x}(t, \overline{\mathbf{x}})$ nunca penetraria na esfera S_δ de raio δ centrada na origem . Denotemos por $m > 0$ o valor mínimo assumido por $-E'(\mathbf{x})$ na coroa $\delta \leq ||\mathbf{x}|| \leq r$, onde r é como na demonstração anterior. Logo

$$\frac{\partial}{\partial t} E[\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}_0)] \leq -m, \quad \forall t \neq 0, \quad e \tag{5.3}$$

$$E[\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}_0)] - E(\mathbf{x}_0) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} E[\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}_0)] dt \leq -mt \tag{5.4}$$

mas o segundo membro da desigualdade $E[\boldsymbol{\phi}(t, \mathbf{x}_0)] \leq E(\mathbf{x}_0) - mt$ se torna negativo quando $t \to \infty$. Logo, a hipótese $E_0 > 0$ conduz a uma contradição, e esta provado o teorema.

□

Finalmente, o teorema a seguir diz que esses resultados são, num certo sentido, os melhores possível

Teorema 15. *Seja E uma função de a valores reais de classe C^1 em Ω e suponhamos que*

(i) $E(\mathbf{0}) = 0$

(ii) E' *é definida positiva em* Ω, *e*

(iii) Para cada $\epsilon > 0$ existe um $\mathbf{x}_0$ em Ω com $||\mathbf{x}_0|| < \epsilon$ e $E(\mathbf{x_0}) > \mathbf{0}$ (isto é, E assume valores positivos em qualquer vinhaça da origem). Então, a origem é instável para o sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{F}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{F}(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{5.5}$$

Demonstração. A prova do teorema pode ser conferida na ref. [2]

□

O ponto importante quanto a esses teoremas é que eles nos permitem determinar a estabilidade ou instabilidade de pontos de equilíbrio sem resolver o sistema. Assim, em casos em que é impossível obter soluções em forma fechada ou em que são difíceis de analisar, podemos ainda obter informações valiosas sobre sua estabilidade desde que, naturalmente, possamos construir tais funções de Liapunov.

Embora não exista método geral para construir tais funções, veremos que isso é bastante fácil de fazer em muitos casos particulares.

Exemplo 19. *A função de$E(x,y) = x^2 + y^2$ é uma função de liapunov para o sistema*

$$\begin{aligned} x' &= -x + x^2 y, \\ y' &= -y + xy^2 \end{aligned} \tag{5.6}$$

De fato, E é claramente positiva e de classe C^1 no plano xy todo. Alem disso, como

$$\nabla E(x,y) = 2x + 2y$$

e 0o

$$\mathbf{F}(x,y) = (-x + x^2 y) + (-y + xy^2),$$

temos

$$\begin{aligned} \nabla E \cdot \mathbf{F} &= -2(x^2 + y^2) + 2x^3 y + 2xy^3 \\ &= 2(x^2 + y^2)(xy - 1). \end{aligned} \tag{5.7}$$

Logo $-\nabla E \cdot \mathbf{F}$ é definida positiva na região $xy < 1$, e satisfaz todas as exigências do teorema 14 nesta região. Logo a origem é um ponto assintoticamente estável para o sistema (5.6).

Os teoremas estudados, fornecem condições suficientes para estabilidade e instabilidades, respectivamente, como ja vimos anteriormente, não existe método geral para para a construção de uma função de Liapunov. O próximo teorema, fornece um resultado algébrico elementar que é útil, muitas vezes, na construção de funções definidas positivas ou definida negativas:

Teorema 16. *A funçao $E : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

$$E(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 \tag{5.8}$$

é definida positiva se, e somente se,

$$a > 0 \quad e \quad 4ac - b^2 > 0$$

e é definida negativa se, e somente se,

$$a < 0 \quad e \quad 4ac - b^2 < 0$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned} E(x,y) &= ax^2+bxy+cy^2 \\ &= ax^2+bxy+\frac{b^2}{4a}y^2+cy^2-\frac{b^2}{4a}y^2 \\ &= \left(ax^2+bxy+\frac{b^2}{4a}y^2\right)+y^2\left(c-\frac{b^2}{4a}\right) \\ &= a\left(x+\frac{b^2y}{2a}\right)^2+y^2\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right) \end{aligned}$$

1. Se E é definida positiva em Ω, então $E(0,0)=0$ e $E(x,y)>0$, $\forall(x,y)\neq(0,0)\in\Omega$, isto é,

$$a\left(x+\frac{b^2y}{2a}\right)^2+y^2\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)>0\ \forall(x,y)\neq(0,0)\in\Omega \tag{5.9}$$

Como $\left(x+\frac{b^2y}{2a}\right)^2\geq 0$ e $y^2>0\ \ \forall(x,y)\neq(0,0)\in\Omega$ então para termos a expressão (5.9) satisfeita devemos ter $a>0$ e $4ac-b^2>0$. 'Logo,b se $a<0$ e $4ac-b^2>0$ então,$a\left(x+\frac{b^2}{4a}y\right)+y^2\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)>0, \forall(x,y)\neq(0,0)\in\Omega$ e $E(0,0)=0$, logo $E(x,y)$ é definida positiva em Ω.

2. Se E é definida negativa em Ω, então $E(0,0)=0$ e $E(x,y)<0$, $\forall(x,y)\neq(0,0)\in\Omega$, isto é,

$$a\left(x+\frac{b^2y}{2a}\right)+y^2\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)<0\ \forall(x,y)\neq(0,0)\in\Omega \tag{5.10}$$

Como $\left(x+\frac{b^2y}{2a}\right)\geq 0$ e $y^2\geq 0\ \ \forall(x,y)\neq(0,0)\in\Omega$, então, para termos a expressão (5.10) satisfeita devemos ter $a<0$ e $4ac-b^2<0$.

Agora, se $a<0$ e $4ac-b^2<0$ então $a\left(x+\frac{b^2}{4a}y\right)+y^2\left(\frac{4ac-b^2}{4a}\right)>0, \forall(x,y)\neq(0,0)\in\Omega$ e $E(0,0)=0$, logo $E(x,y)$ é definida negativa em Ω.

□

Vamos ilustrar o uso do teorema (16) no exemplo a seguir

Exemplo 20. *Mostre que o ponto crítico* $(0,0)$*do sistema autônomo*

$$\begin{cases} x'=-x-xy^2 \\ y'=-y-x^2y \end{cases} \tag{5.11}$$

é assintoticamente estável.

Devemos tentar construir uma função de Liapunov da forma (5.11). Então, $E_x(x,y)=2ax+by,\ \ E_y(x,y)=bx+2cy$ *de modo que*

$$\begin{aligned} E'(x,y) &= (2ax+by)(-x-xy^2)+(bx+2cy)(-y-x^2y) \\ &= -[2a(x^2+x^2y^2)+b(2xy+xy^3+x^3y)+2c(y^2+x^2y^2)] \end{aligned}$$

Se escolhermos $b=0$ *e* a *e* c *como sendo dois números positivos quaisquer. Então* E' *é definida negativa e* E *é definida positiva pelo teorema 15. Com isso, pelo teorema 14, a origem é um ponto Assintoticamente estável.*

Considerações finais

Ao desenvolver este trabalho pudemos perceber que sistemas de equações diferencias estão presentes em modelagens nas mais diversas áreas, embora nesse texto optamos por apresentar somente modelos de Dinâmica Populacional. O estudo da teoria de estabilidade se torna muito útil, uma vez que quase sempre não é possível obter uma expressão analítica para solução. Dessa forma, obter informações qualitativas da solução é importante para conhecermos o comportamento do sistema.

Referências Bibliográficas

[1] W.E. Boyce e R.C. Diprima. *Equações Diferencias Elementares e Problemas de Valores de Contorno,* 8^a *edição.* LTC, 2006

[2] D.L. Kleider, R.G. Kuller e D.R. Ostberg *Equações Diferenciais.* Edgard Blucher, 1972.

[3] J. K. Hale *Ordinary Diferential Equations,* 2^a *edição.* Florida: Robert and Krieger Publishing Company, Inc, 1980

[4] D.A. Sanchez *Ordinary Differential Equations And stability Theory: An Introduction.* W.H. Freeman And Company, 1968.

[5] Gislene Ramos Bessa *Teoria de estabilidade de equaçoes diferenciais Ordinárias e aplicações: modelos presa predador e competição entre espécies.* UNESP-Rio Claro-SP. Disponivel em http:/www.athena.biblioteca.unesp.br/

[6] Evelize A. S. Ferracini. *Estabilidade de equações diferenciais ordinárias através de funções dicotômicas.* UNESP-Rio Claro-SP. Disponivel em http:/www.athena.biblioteca.unesp.br/