

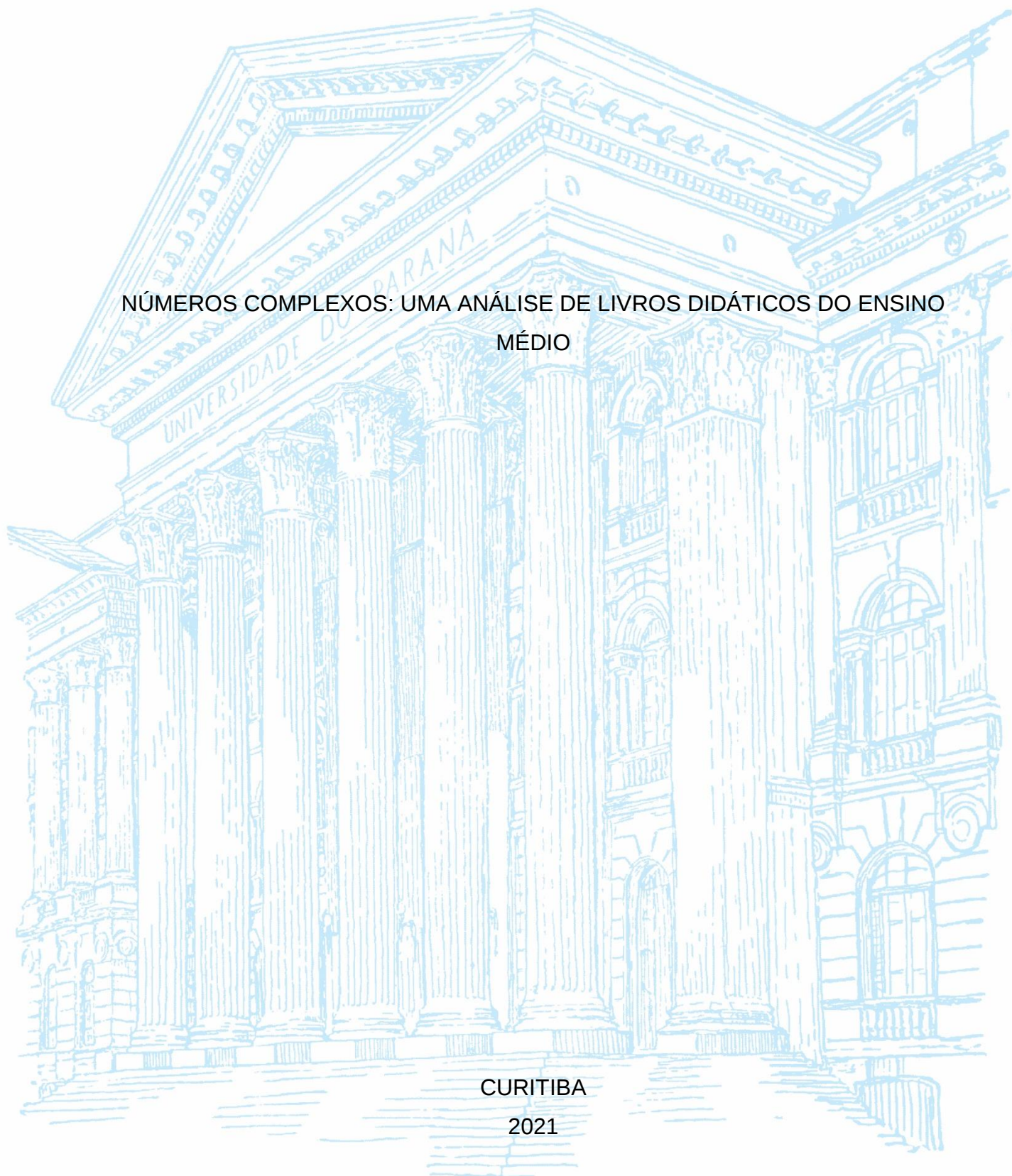
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

BRUNO DOMINGOS FASOLIN

NÚMEROS COMPLEXOS: UMA ANÁLISE DE LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO
MÉDIO

CURITIBA

2021



BRUNO DOMINGOS FASOLIN

NÚMEROS COMPLEXOS: UMA ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO
MÉDIO

Trabalho de Conclusão de Curso II apresentado ao curso de Graduação de Licenciatura em Matemática, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do Título de Licenciado em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Tania Teresinha Bruns Zimer

CURITIBA

2021



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E DO DESPORTO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
COORDENAÇÃO DO CURSO DE MATEMÁTICA

ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

No dia 13 de agosto de 2021, na sala <https://meet.jit.si/defesaBrunoFasolin> foi instalada pela Professora Tania Teresinha Bruns Zimer, a Banca Examinadora para o Trabalho de Conclusão de Curso do curso de graduação em Matemática da UFPR. Estiveram presentes ao Ato, professores alunos e visitantes. A banca examinadora foi constituída pelo professor Marcelo Muniz Silva Alves, do Departamento de Matemática da UFPR; e pela professora Tania Teresinha Bruns Zimer, do Departamento de Teoria e Prática de Ensino da UFPR, orientadora da monografia a quem coube a presidência dos trabalhos. Às 15h, a banca iniciou seus trabalhos, convidando o aluno Bruno Domingos Fasolin a fazer a apresentação da monografia intitulada “Números Complexos: uma análise de livros didáticos do ensino médio”. Encerrada a apresentação, iniciou-se a fase de arguição pelos membros participantes. Após a arguição, a banca com pelo menos 02 (dois) membros reuniu-se para a apreciação do desempenho do estudante. Tendo em vista a monografia e a arguição, os membros presentes da banca decidiram por sua **aprovação, com nota 100.**

Curitiba, 13 de agosto de 2021.

Profa. Dra. Tania T. Bruns Zimer
Presidente

Prof. Dr. Marcelo Alves Muniz
Titular

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Cléa Mara Domingos Fasolin e Walter Dyrany Fasolin, pelo incentivo e apoio que sempre me deram em relação aos estudos.

À minha namorada, Mariane Aurélia da Rocha, pelo incentivo, apoio nos estudos e, também, pela compreensão da ausência em determinados momentos.

À minha orientadora, a Professora Tania Teresinha Bruns Zimer, pelo auxílio e orientação.

Aos amigos e colegas de graduação.

Agradeço também a todos que de alguma forma contribuíram para a realização deste estudo.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo analisar os livros didáticos de Matemática, aprovados no Plano Nacional do Livro Didático do ano de 2018, de modo a investigar como é feita a manipulação geométrica dos Números Complexos; analisar o contexto histórico do surgimento dos Números Complexos; verificar como o conteúdo dos Números Complexos se relaciona com outras áreas. A pesquisa foi realizada por meio de uma revisão sistemática de literatura. Uma das principais motivações do estudo é a de que na disciplina de Matemática de nível Médio, de modo geral, existe uma abordagem puramente algébrica, sem vínculo com aplicações desse conteúdo fora do ambiente matemático. Após a análise dos livros didáticos, é possível verificar que estes abordam os Números Complexos utilizando história e apresentam diversas aplicações desse conteúdo, esses recursos podem ser empregados para despertar o interesse dos alunos de Ensino Médio na disciplina de Matemática. Outro enfoque do tema pode ser o geométrico, permitindo os alunos visualizarem as operações e propriedades.

Palavras-chave: Números Complexos. Revisão Sistemática de Literatura. Livro Didático. Matemática. Ensino Médio.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1- ETAPAS DO PROCESSO DE REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA.....	13
FIGURA 2 - CONTEÚDOS ESTRUTURANTES DCE.....	20
FIGURA 3 - DIVISÃO DE DOIS NÚMEROS COMPLEXOS EM L3	35
FIGURA 4 - PLANO COMPLEXO	38
FIGURA 5 - NÚMERO COMPLEXO REPRESENTADO VETORIALMENTE.....	39
FIGURA 6 - IMAGEM DE UM NÚMERO COMPLEXO z E SEU CONJUGADO $\bar{z}$	40
FIGURA 7 - CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO NO GEOGEBRAPRIM	41
FIGURA 8 - OPOSTO DE UM NÚMERO COMPLEXO.....	42
FIGURA 9 - FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO	45
FIGURA 10 - REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS DO ARGUMENTO PRINCIPAL θ , em que $0 \leq \theta < 2\pi$	46
FIGURA 11 - ATIVIDADE RESOLVIDA ROTAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS EM L6.....	48
FIGURA 12 - EXERCÍCIO RESOLVIDO MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS EM L7	48
FIGURA 13 - EXERCÍCIO RESOLVIDO RAIZ N-ÉSIMA EM L7.....	51
FIGURA 14 - EXERCÍCIOS PROPOSTOS SOBRE RAIZ N-ÉSIMA EM L1	51
FIGURA 15 - EXPLICAÇÃO SOBRE FASOR EM L6.....	53
FIGURA 16 - EXERCÍCIO SOBRE FASOR EM L6.....	54
FIGURA 17 - EXERCÍCIOS PROPOSTOS SOBRE CIRCUITO RLC EM L7.....	55
FIGURA 18 - ROTAÇÃO DE IMAGENS NO PLANO COMPLEXO EM L4.....	56
FIGURA 19 - LUIZ SACILOTTO E SUA OBRA EM L6	57
FIGURA 20 - COMPUTAÇÃO QUÂNTICA EM L5	58

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1- ETAPAS REALIZADAS NO PROCESSO DE REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA DE LITERATURA.....	14
QUADRO 2 - OBRAS ANALISADAS	14
QUADRO 3 – GRANDES TEMAS.....	15
QUADRO 4 - OBRAS APROVADAS NO PNLD DE 2018	16
QUADRO 5 - OBRAS ANALISADAS NO ARTIGO DE VIDAL, ET AL (2016).....	31
QUADRO 6 - PRESENÇA DA REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA NOS LIVROS DIDÁTICOS.....	52
QUADRO 7 - NÚMEROS COMPLEXOS EM OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO.....	59
QUADRO 8 - PRESENÇA DA HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS NOS LIVROS DIDÁTICOS	59

LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

BNCC	- Base Nacional Comum Curricular
DCE	- Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná
ENEM	- Encontro Nacional de Educação Matemática
MEC	- Ministério da Educação
PCN	- Parâmetros Curriculares Nacionais
PCNEM	- Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio
PNE	- Plano Nacional de Educação
PNLD	- Plano Nacional do Livro Didático
PNLEM	- Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio
SBEM	- Sociedade Brasileira de Educação Matemática

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	11
1.1 METODOLOGIA.....	12
1.1.1 Operacionalização da revisão sistemática de literatura	13
2 O CONTEÚDO DOS NÚMEROS COMPLEXOS	18
2.1 CONTEÚDO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NA MATRIZ CURRICULAR.....	18
2.1.1 Propostas de ensino.....	22
2.1.2 Dificuldades de aprendizagem	24
2.2 HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS.....	25
3 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	33
3.1 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS APRESENTADOS NOS ARTIGOS.....	33
3.2 BREVE DESCRIÇÃO SOBRE AS OBRAS ANALISADAS.....	33
3.3 CONTEÚDO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NOS LIVROS DIDÁTICOS APROVADOS NO PNLD DE 2018.....	37
3.3.1 O número i	37
3.3.2 Forma algébrica de um Número Complexo	38
3.3.3 Plano de Argand-Gauss	38
3.3.4 Número Complexo como um vetor	39
3.3.5 O conjunto $\mathbb{C}$	39
3.3.6 Conjugado	40
3.3.7 Oposto de um número complexo	42
3.3.8 Operações com complexos na forma algébrica	42
3.3.8.1 Adição.....	42
3.3.8.2 Subtração	42
3.3.8.3 Multiplicação	43
3.3.8.4 Divisão.....	43
3.3.9 Potência	43
3.3.10 Potências de i	44
3.3.11 Forma trigonométrica de um número complexo	44
3.3.12 Operações com complexos na forma trigonométrica.	47
3.3.12.1 Multiplicação	47
3.3.12.2 Divisão	49
3.3.12.3 Potenciação (Primeira fórmula de De Moivre)	49

3.3.12.4	Radiciação (Segunda fórmula de De Moivre)	50
3.3.13	Interpretação geométrica das raízes enésimas de um número complexo.....	50
3.4	APLICAÇÕES EM OUTRAS ÁREAS	52
3.5	ANÁLISE SOBRE A ABORDAGEM HISTÓRICA NOS LIVROS DIDÁTICOS	59
4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	61
	REFERÊNCIAS.....	63

1 INTRODUÇÃO

O motivo inicial para essa pesquisa surgiu a partir de diálogos com outros colegas matemáticos a respeito do conteúdo dos Números Complexos, verifiquei que muitos acreditam que este tema não tem utilidade no ensino médio. Verifiquei também que alguns acham que este assunto serve somente para lógica. Em consequência disso, senti a necessidade e tive a motivação para pesquisar aspectos do ensino dos Números Complexos que podem ser modificados para torná-lo mais intuitivo e interessante.

Este trabalho apresenta uma revisão sistemática de literatura acerca do conteúdo do conjunto dos Números Complexos. A pesquisa tem como fio condutor a forma como este conjunto numérico é abordado nos livros didáticos do ensino médio. Assim, por meio da revisão sistemática de literatura, é possível observar diversos trabalhos abordando os números complexos de forma motivadora.

O livro didático é o instrumento base para os professores, desta forma, a análise dos livros didáticos de matemática, aprovados no Plano Nacional do Livro Didático (PNLD) do ano de 2018 será o foco principal desta pesquisa. Por meio desta análise, verifico se as obras apresentam alguma contextualização histórica do surgimento dos números complexos, investigo como é feita a manipulação geométrica deste conteúdo e se existe alguma relação deste conteúdo com outras áreas do conhecimento.

No capítulo 1, Metodologia, apresento o processo de revisão sistemática de literatura e quais foram os artigos selecionados, os excluídos e os utilizados. Separo estes artigos por temas, para então traçar meus objetivos acerca dos livros didáticos e apresentar os livros que foram analisados.

No capítulo 2, Matriz Curricular e História dos Números Complexos, analiso alguns documentos curriculares, como Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Diretrizes Curriculares Da Educação Básica do Paraná (DCE) e Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Logo após, apresento a origem da evolução do conjunto dos Números Complexos e verifico como essa abordagem histórica é tratada nos artigos e livros didáticos.

No capítulo 3, Apresentação dos Resultados, por meio dos livros didáticos aprovados no PNLD de 2018, apresento o conjunto dos Números Complexos, suas propriedades e operações. Trago alguns exemplos de como utilizar o enfoque

geométrico desse conjunto numérico e, por fim, faço um levantamento de outras áreas do conhecimento que utilizam os Números Complexos para facilitar os cálculos.

No capítulo 4, Considerações Finais, apresento as conclusões feitas ao analisar como os livros didáticos tratam do conteúdo dos Números Complexos.

1.1 METODOLOGIA

A pesquisa é de natureza qualitativa do tipo bibliográfica.

A pesquisa bibliográfica é desenvolvida a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos. Embora em quase todos os estudos seja exigido algum tipo de trabalho desta natureza, há pesquisas desenvolvidas exclusivamente a partir de fontes bibliográficas. [...] A principal vantagem da pesquisa bibliográfica reside no fato de permitir ao investigador a cobertura de uma gama de fenômenos muito mais ampla do que aquela que poderia pesquisar diretamente. A pesquisa bibliográfica também é indispensável nos estudos históricos. Em muitas situações, não há outra maneira de conhecer os fatos passados senão como base em dados secundários. (GIL, 2008, p.50)

O campo de pesquisa se constitui nos livros didáticos de matemática para o ensino médio, aprovados no PNLD de 2018.

A revisão sistemática de literatura apresentada a seguir é referente ao estudo de outros trabalhos a respeito de Números Complexos e busca complementar a fundamentação teórica deste trabalho.

A revisão sistemática segue critérios rígidos para a realização da coleta e análise de dados das fontes bibliográficas. Tem como finalidade resumir a melhor pesquisa disponível acerca de uma questão específica. Isto é feito por meio da composição dos resultados de diversos estudos (RAMOS; FARIA; FARIA, 2014).

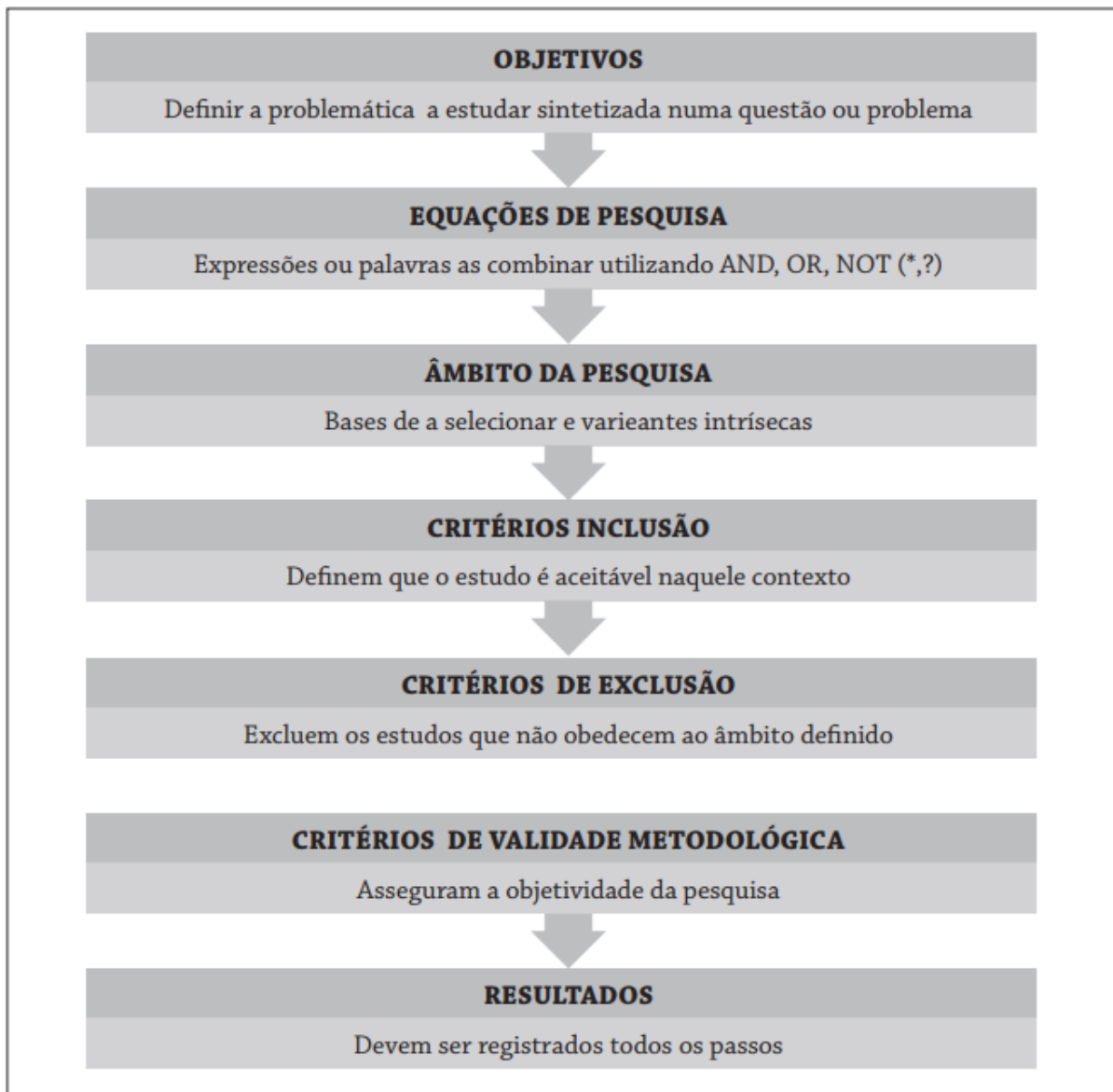
Este processo é comumente aplicado nas ciências médicas há um longo período e tem se mostrado eficiente nos resultados dos estudos (RAMOS; FARIA; FARIA, 2014).

Uma revisão sistemática utiliza métodos confiáveis para localizar, avaliar e sintetizar os resultados de pesquisas relevantes na área em estudo. Por meio de uma síntese de diversas pesquisas publicadas sobre o tema em questão, cujo objetivo é minimizar a divergência de informações, a revisão sistemática emprega uma metodologia de pesquisa com rigor científico (RAMOS; FARIA; FARIA, 2014).

1.1.1 Operacionalização da revisão sistemática de literatura

Para realizar uma revisão sistemática de literatura, é necessário que sejam registradas todas as etapas da pesquisa, de modo que, a pesquisa possa ser replicável por outro investigador, assim como, para (avaliar, verificar) que a revisão sistemática, segue uma série de etapas previamente definidas e absolutamente respeitadas nas várias etapas. De acordo com Ramos; Faria e Faria (2014) a FIGURA 1, apresenta os passos a serem seguidos.

FIGURA 1- ETAPAS DO PROCESSO DE REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA



FONTE: Adaptado de RAMOS; FARIA; FARIA, 2014.

Utilizando a revisão sistemática de literatura, para essa pesquisa realizou-se os passos descritos no QUADRO 1, seguindo o apresentado na FIGURA 1.

QUADRO 1- ETAPAS REALIZADAS NO PROCESSO DE REVISÃO SISTEMÁTICA DE LITERATURA DE LITERATURA.

Objetivos	coletar os estudos apresentados no Encontro Nacional de Educação Matemática, (ENEM) sobre números complexos
Equação de pesquisa	Números complexos
Âmbito da pesquisa	Sociedade Brasileira de Educação Matemática - Anais publicados no Encontro Nacional de Educação Matemática
Critério de inclusão	Somente trabalhos disponíveis nos Anais dos ENEM Trabalhos que abordam Números Complexos
Critério de exclusão	Trabalhos com propostas de ensino superior sobre números complexos.
Crítérios de validade metodológica	Replicação do processo; Verificação dos critérios de inclusão e exclusão.
Resultados	Descrição da pesquisa – Registro de todos os passos

FONTE: Autor, 2021

A pesquisa desenvolvida tem o intuito de coletar os estudos apresentados no Encontro Nacional de Educação Matemática, (ENEM) sobre Números Complexos, utilizando a base de dados da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Por meio da base de dados da SBEM, no total, foram encontrados 13 resultados, no entanto, o arquivo do XIII Encontro não estava disponível para download, assim, foram selecionados 12 artigos. O QUADRO 2 apresenta as obras encontradas, utilizou-se a letra A como sigla de artigo, em seguida um número para identificar o artigo a qual está se referindo.

QUADRO 2 - OBRAS ANALISADAS

OBRA	ENCONTRO/ ANO	REFERÊNCIA
A1	I 1987	MILIES, F. C. P. História dos números complexos.
A2	VII 2001	SILVA, L. P. Quatérnios: os números complexos do espaço quadridimensional.
A3	VIII 2004	CARNEIRO, J. P. A geometria e o ensino dos números complexos.
A4	X 2010	FILHO, F. A. S. B. Números complexos: dificuldades apresentadas pelos discentes de uma escola da região metropolitana de Belém acerca de atividades envolvendo a forma algébrica dos números complexos.
A5	X 2010	BERMEJO, A. P. B. et al. Dificuldades na aprendizagem dos números complexos.
A6	XI 2013	OLIVEIRA, F. E. F; VASCONCELOS, F. R. N. Uma proposta pedagógica para as aulas de números complexos no ensino médio à luz da aprendizagem significativa de Ausubel.
A7	XI 2013	BARBOSA, G. Desafios e possibilidades de integrar o ensino de números complexos ao uso do software geogebra.

A8	XI 2013	FONTES, C. A.; MUNIZ, R. S. S. Coordenadas polares no ensino médio: contribuições para o ensino e a aprendizagem de trigonometria e números complexos.
A9	XI 2013	NETO, R. V. O ensino de números complexos.
A10	XII 2016	AMORIM, T. M.; OLIVEIRA, P. C. O software geogebra: uma ferramenta para o ensino dos números complexos.
A11	XII 2016	JESUS, M. A. S.; TESTANI, G. B. As atitudes em relação à matemática e o desempenho em cálculo diferencial e integral na variável complexa.
A12	XII 2016	VIDAL, F. A. et al. Reflexões sobre a história da matemática abordada nos livros didáticos do ensino médio: uma análise da história da estatística e dos números complexos.

FONTE: Autor, 2021

A etapa seguinte consiste em separar as obras em grandes temas, o QUADRO 3 tem essa finalidade. Os grandes temas foram estruturados a partir de aproximações feitas com a leitura dos títulos dos trabalhos. Após a divisão dos grandes temas, realizou-se uma leitura detalhada dos artigos, de modo que pudesse fazer uma classificação detalhada, assim, observou-se que alguns artigos contemplavam mais de um dos grandes temas, como por exemplo (A3 e A6). Outros artigos podem ser subdivididos, ou seja, subgrupos dos grupos, como exemplo, trabalhos que apresentam propostas com o uso de software (A7 e A10), são subgrupos do grupo proposta de ensino. Artigos com abordagem geométrica (A3 e A8) também são subgrupos da proposta de ensino. Dentro do grupo aprendizagem existem os trabalhos que abordam a dificuldade de aprendizagem (A3, A8).

Como o foco dessa pesquisa é tratar o conteúdo dos Números Complexos no Ensino Médio, dois artigos foram descartados, pois uma das pesquisas trata sobre os Quatérnios e a outra trata do desempenho em Cálculo Diferencial e Integral na Variável Complexa (A2 e A11), conteúdos que são abordados no ensino superior.

QUADRO 3 – GRANDES TEMAS

GRANDES TEMAS	OBRAS
História dos números complexos	A1; A3; A6; A12
Proposta de ensino dos números complexos	A3; A6; A7; A8; A9; A10
Ensino e aprendizagem dos números complexos	A3; A4; A8; A9
Números complexos nos livros didáticos	A6; A9; A12
Dificuldades de aprendizagem dos números complexos	A4; A5
Números complexos no ensino superior	A2; A11

FONTE: Autor, 2021

Nesses grandes temas é possível perceber que a maior incidência de trabalhos encontra-se sobre as propostas de ensino, pois dos 12 trabalhos selecionados 50% pertencem a este grupo. A menor incidência está no tema dificuldades de aprendizagem, pois 16,67% pertencem a este grupo. A discussão sobre as abordagens realizadas sobre os Números Complexos nestes trabalhos será apresentada no próximo capítulo.

Após a análise dos artigos e tendo como base os grandes temas do QUADRO 3, verificou-se a lista dos livros didáticos de matemática para o ensino médio, aprovados no PNLD de 2018. Posteriormente analisou-se como algumas dessas grandes áreas são tratadas nas obras de matemática aprovadas no PNLD de 2018.

As obras analisadas estão elencadas no QUADRO 4 abaixo:

QUADRO 4 - OBRAS APROVADAS NO PNLD DE 2018

OBRA	ANO	REFERÊNCIA
L1	2016	DANTE, L. R. Matemática - contexto & aplicações, 3ª ed. São Paulo: Ática, 2016.
L2	2016	PRESTES, D., CHAVANT, E. Matemática: Quadrante – matemática, 1ª ed. São Paulo: SM, 2016.
L3	2016	DEGENSZAJN, D. et al. Matemática: ciência e aplicações, 9ª ed. São Paulo: Saraiva, 2016.
L4	2016	SMOLE, K. S., DINIZ, M. I. Matemática para compreender o mundo, 1ª ed. São Paulo: Saraiva, 2016.
L5	2016	BALESTRI, R. Matemática: interação e tecnologia, 2ª ed. São Paulo: Leya, 2016.
L6	2016	SOUZA, J. R; GARCIA, J. S. J. #Contato matemática, 1ª ed. São Paulo: FTD, 2016.
L7	2016	LEONARDO, F. M. Conexões com a matemática, 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2016.
L8	2016	PAIVA, M. Matemática, 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2016.

FONTE: Autor, 2021

Cada obra será identificada pelo código da primeira coluna, foi utilizado a letra L como sigla de livro, em seguida um número para identificar o livro ao qual foi referido. Todas as obras foram aprovadas pelo MEC e participaram da escolha no PNLD para serem adotadas pelas escolas públicas no triênio subsequente ao ano de sua edição. A relação das obras aprovadas pode ser encontrada em (<https://www.fnede.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/guia-do-pnld/item/11148-guia-pnld-2018>), Guia de livros didáticos PNLD 2018 - Ensino Médio.

Dentre todas as obras analisadas, L8 (PAIVA, 2016) é a única que não contempla o conteúdo dos Números Complexos.

2 O CONTEÚDO DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Neste capítulo será exposto como o conjunto dos Números Complexos é organizado na matriz curricular. Em seguida, apresenta-se o contexto histórico do surgimento dos Números Complexos. Por fim, exibe-se o estudo sobre esse conteúdo realizado nos trabalhos selecionados da revisão sistemática.

Geralmente, o discente se depara com os Números Complexos, pela primeira vez, no ensino médio, e sua introdução é justificada pela necessidade de resolver equações do segundo grau com discriminante negativo (GIOVANNI e BONJORNO, 2001). No entanto, este conteúdo pode ser introduzido por meio de uma contextualização histórica e este será o objetivo deste capítulo.

2.1 CONTEÚDO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NA MATRIZ CURRICULAR

Neste tópico faz-se uma análise dos documentos oficiais que conduzem a elaboração do currículo de Matemática do Ensino Médio. Serão analisados os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), este é um documento que norteou trabalhos analisados do período de 1997 até a implementação da Base Nacional Comum Curricular. Em seguida analisa-se as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (DCE) e, por fim, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) é um referencial para a educação de qualidade no Ensino Fundamental e Ensino Médio, serve para nortear e organizar o trabalho escolar, apresenta sugestões de práticas educativas e de organização dos currículos, estabelece temas estruturadores do ensino disciplinar em cada área, visando abranger o território nacional. Os PCNs do Ensino Fundamental são divididos em dez volumes, sendo estes Língua Portuguesa; Matemática; História e Geografia; Ciências; Arte; Educação Física; Ética; Meio Ambiente; Saúde; Pluralidade Cultural; Orientação Sexual. A criação do PCN foi para produzir uma educação de qualidade. Segundo este documento, devemos formar cidadãos, para serem inseridos na sociedade, não apenas condicioná-los à resolução de testes classificatórios.

Divisão do PCN:

- caracterização - como a disciplina era ensinada e como ela precisa ser ensinada hoje;
- objetivos – orientam o professor a desenvolver as capacidades dos alunos, buscando a formação integral;
- conteúdos – possuem uma série de sugestões e dicas de blocos temáticos para atingir os objetivos propostos;
- critérios de avaliação – a avaliação tem o objetivo de formar cidadãos para serem inseridos na sociedade, não apenas condicioná-los à resolução de testes classificatórios.

O PCN+ (BRASIL, 2000) sugere um ensino organizado em três temas estruturadores: álgebra: números e funções; geometria e medidas; análise de dados.

O conteúdo de Números Complexos faz parte dos PCNs, porém, sua flexibilidade deixa o profissional com a liberdade de trabalhá-lo ou não com seus alunos.

Os objetos de estudo são os campos numéricos dos números reais e, eventualmente, os números complexos e as funções e equações de variáveis ou incógnitas reais. Para o desenvolvimento desse eixo, são propostas duas unidades temáticas: variação de grandezas e trigonometria (BRASIL, 2007, p.120).

Tradicionalmente, a Matemática do Ensino Médio trata da ampliação do conjunto numérico, introduzindo os números complexos. Como esse tema isolado da resolução de equações perde seu sentido para os que não continuarão seus estudos na área, ele pode ser tratado na parte flexível do currículo das escolas (BRASIL, 2007, p.122).

De acordo com a citação acima, no currículo do Ensino Médio o conteúdo de Números Complexos é de certa forma desvalorizado, pois acredita-se que este conteúdo não tem importância em outras áreas de conhecimento. No entanto, os Números Complexos desempenham um papel importante nos mais diversos ramos da Matemática e têm aplicação em outros campos do conhecimento, como, por exemplo, estudos de circuitos elétricos, sistema massa-mola, mecânica quântica, dentre outros.

As Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Paraná (DCE) apresentam a formulação do currículo para a Educação Básica e as disciplinas aderidas pela Secretaria de Educação do Estado do Paraná de maneira a destacar a importância

dos conteúdos disciplinares e do professor como elaborador de seu plano de ensino. (PARANÁ, 2008)

As DCE sugerem o ensino da Matemática organizado em cinco conteúdos estruturadores, indicadas para a Educação Básica da Rede Pública Estadual, os quais são: Números e Álgebra; Grandezas e Medidas; Geometrias; Funções; Tratamento da Informação.

A FIGURA 2 apresenta os Números Complexos em um dos conteúdos estruturantes no Ensino Médio.

FIGURA 2 - CONTEÚDOS ESTRUTURANTES DCE

CONTEÚDOS ESTRUTURANTES	CONTEÚDOS BÁSICOS	AValiação
NÚMEROS E ÁLGEBRA	• Números Reais; • Números Complexos; • Sistemas lineares; • Matrizes e Determinantes; • Polinômios; • Equações e Inequações Exponenciais, Logarítmicas e Modulares.	• Amplie os conhecimentos sobre conjuntos numéricos e aplique em diferentes contextos; • Compreenda os números complexos e suas operações; • Conceitue e interprete matrizes e suas operações; • Conheça e domine o conceito e as soluções de problemas que se realizam por meio de determinante; • Identifique e realize operações com polinômios; • Identifique e resolva equações, sistemas de equações e inequações, inclusive as exponenciais, logarítmicas e modulares.

FONTE: Diretrizes Curriculares do Paraná, 2008, p.80.

De acordo com a DCE, o estudante deve apenas saber operar com os Números Complexos, esse documento não dá margem para a contextualização histórica, também não menciona sobre uma abordagem geométrica dos Números Complexos.

A Base Nacional Comum Curricular é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica, de modo a que tenham assegurados seus direitos de aprendizagem e desenvolvimento, em conformidade com o que preceitua o Plano Nacional de Educação (PNE) (BRASIL, 2018, p.7).

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018) orienta a elaboração dos currículos e das propostas pedagógicas das escolas públicas e privadas para a formação de professores. Representa um instrumento para a promoção da equidade na medida em que define as aprendizagens essenciais e orienta as políticas educacionais que são implementadas nas escolas de todo o país.

Tem um papel decisivo na formação integral do cidadão e na construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva.

Na BNCC as aprendizagens são expressas sob a forma de competências, estas representam a capacidade dos estudantes de mobilizar, articular e integrar conhecimentos, habilidades, atitudes e valores. Este documento organiza as aprendizagens do ensino médio em quatro áreas do conhecimento, estimulando assim, a interdisciplinaridade. São elas:

- Linguagens e suas Tecnologias;
- Ciências da Natureza e suas Tecnologias;
- Ciências Humanas Sociais e Aplicadas;
- Matemática e suas Tecnologias.

A BNCC de Matemática no Ensino Médio propõe a consolidação, ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no Ensino Fundamental. É organizada por unidades de conhecimento assim como na etapa do Ensino Fundamental. O foco nas cinco competências e quarenta e cinco habilidades ganha destaque considerável, isso direciona para uma formação mais geral e contextualizada. O estudante de Ensino Médio tem capacidade para desenvolver habilidades relacionadas a processos de investigação, construção de modelos e de resolução de problemas.

As cinco competências, da BNCC (BRASIL, 2018), estão indicadas abaixo:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.
2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.

4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

A BNCC (BRASIL, 2018) sugere como possibilidade estruturar as habilidades nas unidades: Número e Álgebra, Geometria e Medidas, Probabilidade e Estatística. Este documento apresenta as habilidades sem indicar a seriação. Alguns conteúdos tradicionais não são mencionados, como é o caso do conjunto dos Números Complexos, porém, não existe nenhum impedimento que os currículos desenvolvam outras aprendizagens.

2.1.1 Propostas de ensino

Tomando como base esses documentos que norteiam e organizam o trabalho escolar e por meio da revisão sistemática de literatura, descreve-se as propostas de ensino dos Números Complexos, assim como é o processo de ensino e aprendizagem dos Números Complexos, por fim, as dificuldades de aprendizagem expostas nos artigos apresentados nos ENEM.

Carneiro (2004), apresenta uma abordagem geométrica dos Números Complexos, utilizando vetores para apresentar as propriedades de soma e multiplicação. Também faz uso de softwares de geometria dinâmica, como forma de motivar e facilitar o entendimento das operações desse conjunto numérico. De acordo com o autor:

O enfoque algébrico permite começar logo a operar com complexos sem dificuldade, mas a experiência tem mostrado que quando se perde a chance de apresentar os complexos imediatamente como entes geométricos, em geral esta oportunidade não se recupera, mesmo quando, mais tarde, aparece (quando aparece) a forma trigonométrica (CARNEIRO, 2004, p. 8 – 9).

Isso acontece porque os estudantes focam em repetir as propriedades e não tentar entender o que está acontecendo geometricamente. A utilização do software de geometria dinâmica é uma forma de motivar e facilita o entendimento das operações desse conjunto numérico.

Filho (2010), apresenta uma pesquisa qualitativa, utilizando uma lista de atividades como forma de coleta de dados, envolvendo uma amostra de quarenta e um estudantes de uma turma de 1º ano do Ensino Médio, de uma escola da região metropolitana de Belém. As atividades envolvendo a forma algébrica dos Números Complexos. Verificou-se que as dificuldades mais frequentes são relacionadas à potenciação de Números Complexos, seguida daquelas relacionadas ao conceito de conjugado.

Oliveira e Vasconcelos (2013), apresentam uma pesquisa realizada em uma escola estadual da cidade de Canindé-Ceará, a pesquisa consiste em verificar como o conteúdo dos Números Complexos é abordado em sala de aula. O autor apresenta uma atividade utilizando o relógio trigonométrico, sendo este uma adaptação do relógio trigonométrico convencional. A modificação está nos ponteiros. Além disso, a utilização do relógio trigonométrico propõe modificar, de forma eficiente, a dinâmica da sala de aula, bem como contribuir para a atribuição de um significado prático a esses números por parte do aluno, do ponto de vista da sua aplicabilidade, tornando as aulas sobre Números Complexos mais instigantes e significativas.

Barbosa (2013), apresenta um relato da prática de estágio docência no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sudeste de Minas Gerais – IFSUDESTE - Campus Juiz de Fora. As aulas foram ministradas em duas turmas de 3º ano dos cursos técnicos de Metalurgia e Informática integrados ao Ensino Médio. Estas tiveram dois momentos, aulas expositivas e atividades no laboratório de informática, utilizando o software geogebra. Houve contratempos contornáveis na turma de Metalurgia, no entanto, a atividade mostrou-se satisfatória, uma vez que, os estudantes afirmavam ter sido uma atividade interessante, justamente pela visualização e possibilidades que o software lhes deu para reforçar o assunto vigente estudado.

Fontes e Muniz (2013), apresentam uma sequência didática, composta por um teste de sondagem e três atividades, aplicada em uma turma do 3º ano do ensino médio de uma Instituição Federal do município de Campos dos Goytacazes. O teste de sondagem consistia em verificar o que os alunos lembravam sobre trigonometria.

Na Lista 1, trabalhou-se com a representação gráfica de pontos nos planos cartesiano e polar. Em seguida o conceito de módulo e argumento. Na Lista 2, o primeiro exercício, foram dados Números Complexos na forma algébrica, para que fossem representados graficamente em coordenadas cartesianas e polares e em seguida escritos na forma trigonométrica. No segundo exercício os Números Complexos estavam na forma trigonométrica, os alunos precisavam representá-los no plano polar e no plano cartesiano, descobrindo primeiro as coordenadas retangulares para depois escrevê-los na forma algébrica. A Lista 3 teve o objetivo de analisar o desempenho dos alunos para ter ideia da contribuição do trabalho realizado. Observou-se que ao longo das aulas e os relatos dos alunos, a introdução de Coordenadas Polares no estudo de Trigonometria e Números Complexos contribuiu para a melhoria do processo de ensino aprendizagem.

Neto (2013), apresenta uma pesquisa bibliográfica sobre a necessidade de manutenção do conteúdo dos Números Complexos no ensino médio e encontrar justificativas para a apresentação abstrata e descontextualizada. De acordo com o autor, os Números Complexos podem ser abordados de maneira diferente da atual, especialmente utilizando as abordagens algébrica e geométrica.

Amorim e Oliveira (2016), apresentam uma pesquisa realizada na escola estadual Coronel Dias Campos, na cidade de Capela do Alto/SP, com uma amostra de treze alunos do 3º ano do Ensino Médio. Foi aplicado um teste contendo vinte e duas questões, elaboradas a partir do Caderno do Aluno (SÃO PAULO/2014). Utilizando as respostas obtidas no teste, foram elaboradas quatro tarefas, sendo que três tarefas com alternativas para serem realizadas com a utilização do software geogebra e a tarefa final para que o aluno se manifestasse através de uma devolutiva sobre sua participação na pesquisa e sua percepção de aprendizagem com a utilização do software. Na tarefa final, os alunos presentes responderam que gostaram de ter participado da pesquisa; a utilização do software tornou a aula mais interessante; ajudou os estudantes a compreender alguns pontos que não tinham sido plenamente compreendidos; a visualização da imagem permite compreender melhor a operação que se está realizando.

2.1.2 Dificuldades de aprendizagem

Filho (2010) apresenta uma pesquisa qualitativa, utilizando uma lista de atividades como forma de coleta de dados, envolvendo uma amostra de quarenta e um estudantes de uma turma de 1º ano do Ensino Médio, de uma escola da região metropolitana de Belém. As atividades envolvendo a forma algébrica dos Números Complexos. Verificou-se que as dificuldades mais frequentes são relacionadas à potenciação de Números Complexos, seguida daquelas relacionadas ao conceito de conjugado.

Bermejo, et al (2010) apresentam uma pesquisa de campo realizada em uma escola da rede pública estadual no município de Belém-PA, para trinta e seis alunos do 1º ano do ensino médio. Foi aplicado um questionário contendo quatro questões abertas. Observou-se no desenvolvimento do trabalho as principais causas das dificuldades de alguns alunos do ensino médio referentes a este conteúdo. Sugere-se que haja uma simbiose entre rigor, contextualização e metodologia adequada.

2.2 HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

Nesta sessão será apresentado um breve histórico abordando o conjunto dos Números Complexos, percorrendo os principais momentos para seu surgimento. Apresentando os principais matemáticos que contribuíram para o seu desenvolvimento. A apresentação será feita na ordem cronológica para possibilitar um melhor entendimento da sequência dos acontecimentos que contribuíram para o surgimento do conjunto dos Números Complexos. Em seguida, são apresentados os artigos que contemplam a história dos Números Complexos, e, por fim, é apresentada a forma que os livros didáticos aprovados no PNLD de 2018 abordam a história dos Números Complexos. Neste sentido, compartilha-se da ideia de que:

A aproximação da história da matemática com os conteúdos ensinados nas salas de aula pode produzir um ambiente fecundo e reflexivo, onde são apresentados os obstáculos epistemológicos na construção de determinado conhecimento matemático (NETO, 2013, p.4).

O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ele tem no mundo (PCN, 2000, p.20, apud NETO, 2013, p. 5).

Assim, partindo-se do contexto histórico, até aproximadamente a época de 1500 d.C., encontrar raiz quadrada de um número negativo, ou o delta resultar em negativo não perturbava muito os matemáticos e eles diziam apenas que o problema não tinha resolução.

Por volta de 1515, Scipione del Ferro (1465 – 1526), professor de matemática em Bolonha, encontrou uma fórmula para resolver a equação cúbica: $x^3 + mx = n$. No entanto Scipione faleceu antes de publicar a solução, mas antes de sua morte, Ferro revelou o segredo a um de seus estudantes, Antonio Maria Fior.

Por volta de 1541, Nicolo Fontana de Brescia (1499 – 1557), conhecido como Tartaglia, anunciou ter encontrado uma fórmula para a equação cúbica. Antonio não acreditou em tal anúncio, então desafiou Nicolo para uma competição envolvendo a resolução de equações cúbicas. No desafio, cada um escolheria trinta equações para o outro resolver. Antes da data de entrega dos problemas, Nicolo conseguiu também a equação cúbica desprovida do termo quadrático. No dia da decisão, Tartaglia tinha resolvido todas as questões propostas por Fior, enquanto que este não tinha resolvido nenhuma das enunciadas por Tartaglia (BOYER, 2001; EVES, 2011).

A notícia que Tartaglia tinha vencido Del Fiore e descoberto uma equação para resolução das cúbicas chegou a Girolamo Cardano (1501 - 1576), médico e matemático muito famoso. Girolamo pediu para que Tartaglia revelasse o método de resolução, mas este recusou. Após a insistência de Cardano e um juramento de manter a solução em segredo, Nicolo revelou o método de resolução. Um pouco depois Cardano publicou em seu livro *Ars Magna* o método de resolução das equações de terceiro grau. Apesar dos protestos de Tartaglia em relação a autoria, Cardano afirmou que trinta anos antes, Scipione del Ferro chegou aos mesmos resultados. Esses protestos também foram contrapostos por Ludivuci Ferrari, um dos mais brilhantes discípulos de Cardano, argumentando que seu mestre recebeu informações de Scipione por meio de uma terceira pessoa, ao mesmo tempo em que acusava Tartaglia de plágio da mesma fonte (EVES 2011). Conforme Eves (2011, p.303) “Tartaglia, com certeza, deu-se por feliz de sair vivo”.

Os números complexos começaram a surgir com Rafael Bombelli (1526-1572) engenheiro hidráulico italiano, admirador da *Ars Magna* de Cardano, no entanto, enquanto trabalhava com a equação cúbica: $x^3 = 15x + 4$ observou que esta equação possui as raízes reais $x = 4$, $x = -2 + \sqrt{3}$, $x = -2 - \sqrt{3}$, porém, quando Bombelli utilizou a fórmula de Cardano-Tartaglia, obteve as raízes quadradas de números

negativos (BOYER, 2001; EVES, 2011). Abaixo estão os passos que Rafael Bombelli seguiu para manipular raízes quadradas de números negativos:

De acordo com o método proposto por Cardano/Tartaglia, a solução de $x^3 + px = q$ é da forma:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2} - \frac{q}{2}}$$

(BOYER, 2001, p. 209)

Da equação $x^3 = 15x + 4$, temos $p = -15$ e $q = 4$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{-15}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{2}\right)^2} + \frac{4}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{-15}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{2}\right)^2} - \frac{4}{2}}$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{(-5)^3 + (2)^2} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{(-5)^3 + (2)^2} - 2}$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-125 + 4} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-125 + 4} - 2}$$

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2}$$

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \quad (1.1)$$

(ROSA, 1998, p.49)

Se a equação cúbica já possui três raízes reais, a solução de (1.1) seria apenas uma delas: 4 (obtida por inspeção). Bombelli utilizou o valor de x em (1.1) e descobriu que seu valor era exatamente 4. Abaixo tem-se uma ideia semelhante à de Bombelli.

Admitindo que existe uma expressão

$$(a + \sqrt{-b}) = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} \quad (1.2)$$

$$(a + \sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{-121} \quad (1.3)$$

(ROSA, 1998, p. 50).

Tem-se também

$$(a - \sqrt{-b}) = \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \quad (1.4)$$

$$(a - \sqrt{-b})^3 = 2 - \sqrt{-121} \quad (1.5)$$

Sendo a equação (1.1) descrita novamente abaixo:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Substituindo (1.2), (1.4) e utilizando o fato da raiz da equação ser 4, tem-se:

$$4 = a + \sqrt{-b} + a - \sqrt{-b}$$

$$2a = 4$$

$$a = 2 \quad (1.6)$$

Substituindo (1.6) em (1.3)

$$(2 + \sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{-121}$$

$$8 + 12\sqrt{-b} - 6b - b\sqrt{-b} = 2 + \sqrt{-121}$$

$$\text{Veja que } \sqrt{-b} = \sqrt{b}\sqrt{-1}$$

É quase uma definição para $\sqrt{-b}$, quando b é positivo.

Por outro lado, se b e c são positivos $\sqrt{-b}\sqrt{-c}$ não é igual a $\sqrt{-b}\sqrt{-c} = \sqrt{bc}$

Ou seja, a regra $\sqrt{bc} = \sqrt{b}\sqrt{c}$, dá problemas quando tentamos estender a função raiz quadrada sobre toda reta real.

$$8 + 12\sqrt{b}\sqrt{-1} - 6b - b\sqrt{b}\sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$$

Separando em sistemas distintos, um com raízes quadradas de números negativos e outro sem raízes quadradas de números negativos.

Parte sem raízes quadradas de números negativos:

$$8 - 6b = 2$$

$$-6b = 6$$

$$b = 1 \quad (1.7)$$

Parte com raízes quadradas de números negativos:

$$12\sqrt{b}\sqrt{-1} - b\sqrt{b}\sqrt{-1} = 11\sqrt{-1} \quad (1.8)$$

Substituindo (1.7) em (1.8)

$$12\sqrt{-1} - 1\sqrt{-1} = 11\sqrt{-1}$$

Substituindo (1.6) e (1.7) em (1.2) obtem-se:

$$(2 + \sqrt{-1}) = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}}$$

De modo análogo pode-se demonstrar que:

$$\sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2} = 2 - \sqrt{-1}$$

Segue

$$\sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

Com esse caso particular, Bombelli passou a ser o primeiro a manipular raízes quadradas de números negativos, escreveu as regras para adição, subtração e multiplicação de Números Complexos (ROSA, 1998).

René Descartes (1596-1650) filósofo e matemático francês, associou os números imaginários com a impossibilidade geométrica, desta forma, Descartes contribuiu com os termos “real” e “imaginário” (MERINO, 2006).

John Wallis (1616-1703) foi o primeiro a conseguir uma interpretação geométrica para os Números Complexos, no entanto, devido a sua complexidade, hoje essa representação é apenas lembrada por historiadores da matemática. Isso se deve ao fato de um pouco mais de um século depois surgiram interpretações geométricas mais simples (RIBEIRO, 2015).

Abraham De Moivre (1667-1754), aos dezoito anos de idade, abandonou a França em busca de refúgio religioso em Londres. Nesta cidade ele fez amizade com Isaac Newton. Em 1698, De Moivre relata que por volta de 1676 Newton sabia uma expressão equivalente ao que é hoje conhecido como Fórmula de De Moivre:

$$(\cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)$$

(MERINO, 2006).

Leonard Euler (1707-1783), nasceu na suíça, introduziu a notação $i = \sqrt{-1}$. Enunciou que se uma equação possui uma raiz da forma $x + yi$, o seu conjugado, $x - yi$, também sempre será raiz. Euler definiu a exponencial complexa, ele estendeu a função exponencial dos reais para os complexos e provou a identidade $e^{i\theta} = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta$ (MOREIRA, 2018; MERINO, 2006).

Caspar Wessel (1745-1818), era um agrimensor, nascido em Jorud, Noruega, foi o primeiro a apresentar os Números Complexos na forma geométrica, com um artigo exibido na Real Academia Dinamarquesa de Ciências em 1797 e publicado nas Atas dessa Academia em 1799. Apenas em 1895 este trabalho foi redescoberto e Caspar foi reconhecido como o pioneiro. Ele utilizou o que hoje chama-se de vetores, a adição geométrica de vetores (lei do paralelogramo) e a multiplicação definida de vetores a qual somam-se os ângulos polares e multiplicam-se as magnitudes (EVES, 2011; MERINO, 2006).

Sem nenhum contato com o trabalho de Wessel, Jean Robert Argand (1768-1822), bibliotecário, suíço, publicou em 1806 um pequeno livro intitulado Ensino sobre

a maneira de representar as quantidades imaginárias nas construções geométricas. Em 1814, publicou novamente, porém desta vez nos Annales de Mathématiques de Gergonne, assim, tornando o trabalho de Argand muito conhecido (EVES, 2011; RIBEIRO, 2015; ROSA 1998).

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) havia feito um estudo geométrico dos números complexos similar ao de Wessel e Argand. Pelo que Gauss deixou escrito, seu feito aconteceu em 1796, anterior ao trabalho de Wessel e Argand.

Segundo Bottazzini (1968 apud Ribeiro, 2015, p. 11)

Em uma carta de 1812 para o matemático francês Pierre Simon Laplace (1749-1827), Gauss escreveu: "Eu tenho em meus papéis muitas coisas das quais eu talvez perca a chance de ser o primeiro a publicar, você sabe, eu prefiro deixar que as coisas amadureçam".

De acordo com Eves (2011), Gauss apontou que a ideia básica da representação geométrica pode ser encontrada em sua tese de doutorado de 1799.

Foi Gauss quem utilizou pela primeira vez a expressão Números Complexos. Em 1799 em sua tese de doutorado, na Universidade de Helmstadt, Gauss deu a primeira demonstração satisfatória do Teorema Fundamental da Álgebra (TFA). (Teorema) Uma equação polinomial, com coeficientes complexos e de grau $n > 0$, tem pelo menos uma raiz complexa (EVES, 2011).

Em 1833, o matemático e físico irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865) descreveu algebricamente os Números Complexos como pares ordenados de números reais (a, b) . Assim, Hamilton definiu a adição e a multiplicação de pares: $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ e $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, bc + ad)$ (MOREIRA, 2018; MERINO¹, 2006; RIBEIRO, 2015; ROSA 1998).

Os artigos analisados que tratam da contextualização histórica são A1 (MILIES, 1987), A3 (CARNEIRO, 2004), A6 (OLIVEIRA; VASCONCELOS, 2013) e A12 (VIDAL; ET AL, 2016).

De acordo com Milies² (1987) a introdução dos Números Complexos é discutida pela descoberta da equação de 3º grau por radicais, a qual é apresentada na "Ars Magna" de Girolamo Cardano em 1545. O cálculo com Números Complexos é

¹ É apresentado que Hamilton descreve a definição de pares ordenados em 1831.

² A escrita do nome Rafael Bombelli aparece como Rafael Bambelli e Hamilton publicou em 1837 os números complexos como pares ordenados.

apresentado por Rafael Bombelli utilizando a fórmula de Cardano. A partir desse ponto, acompanha-se o desenvolvimento gradual desse conjunto numérico, assim como as dúvidas que ele gerava a vários matemáticos na época. As tentativas da representação gráfica começaram com Wallis em 1685, passando por Wessel em 1797 e Argand em 1806, até que Karl F. Gauss em 1831 legitimou essa representação. Finalmente, Sir William R. Hamilton em 1837 publicou os Números Complexos como pares ordenados de números reais.

O artigo de Carneiro (2004), apresenta o contexto histórico dos Números Complexos como forma de motivar o estudo desse conteúdo, uma vez que, de acordo com o autor, este é estudado utilizando algoritmo, resolvendo “lotes de exercícios”.

Oliveira e Vasconcelos (2013), apresentam uma pesquisa realizada em uma escola estadual da cidade de Canindé-Ceará, a pesquisa consiste em verificar como o conteúdo dos Números Complexos é abordado em sala de aula. Os autores utilizam o livro didático do professor Manoel Rodrigues Paiva (2009) para tratar sobre o conteúdo de Números Complexos. O livro apresenta uma breve contextualização histórica sobre o surgimento dos Números Complexos.

O artigo de Vidal, et al (2016), consiste em uma análise das obras aprovadas pelo MEC que participaram da escolha no PNLD para serem adotados pelas escolas públicas no triênio subsequente ao ano de sua edição. As obras estão no QUADRO 5 abaixo:

QUADRO 5 - OBRAS ANALISADAS NO ARTIGO DE VIDAL, ET AL (2016)

<i>OBRA</i>	<i>ANO</i>	<i>REFERÊNCIA</i>
L1	2005	SILVA, C. X., BARRETO FILHO, B., Matemática aula por aula, 2ª ed. renov., São Paulo: FTD, 2005.
L2	2005	GIOVANNI, J. R., BONJORNIO, J. R., Matemática completa, 2ª ed. renov., São Paulo: FTD, 2005.
L3	2009	PAIVA, M., Matemática, 1ª ed., São Paulo: Moderna, 2009.
L4	2010	BARROSO, J. M., Conexões com a Matemática, 1ª ed., vol. 1, São Paulo: Moderna, 2010.
L5	2010	RIBEIRO, J., Matemática: ciência, linguagem e tecnologia, 3: ensino médio. São Paulo: Scipione, 2010.
L6	2013	SOUZA, J. R. Novo olhar Matemática: 3, 2ª edição, São Paulo: FTD, 2013.

FONTE: VIDAL, et al (2016).

Vidal, et al (2016) analisam como a História da Matemática tem sido tratada nos Livros Didáticos do Ensino Médio a respeito do conteúdo de estatística e Números Complexos.

O resultado deste trabalho é a sistematização de uma relação de aspectos analisados nos livros didáticos, que são: contextualização histórica do surgimento dos Números Complexos, abordagem geométrica e aplicações práticas em outras áreas do conhecimento. Esses aspectos serão considerados na análise das obras aqui selecionadas para análise, a serem observadas no próximo capítulo.

3 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Tendo como base os artigos dos ENEM e os livros didáticos de matemática aprovados no PNLD de 2018, este capítulo começa com um levantamento de como os livros didáticos abordavam o conteúdo dos Números Complexos, em seguida, traz como este conteúdo é apresentado nas obras aprovadas no PNLD de 2018, quais autores utilizam a abordagem geométrica do conjunto dos complexos, quais obras apresentam aplicações em outras áreas do conhecimento e, por fim, a utilização da história dos Números Complexos.

3.1 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS APRESENTADOS NOS ARTIGOS

Oliveira e Vasconcelos (2013) apresentam uma análise do livro didático do professor Manoel Rodrigues Paiva, tratando sobre o conteúdo de Números Complexos. O livro intitulado Matemática Paiva (2009) apresenta uma breve contextualização histórica sobre o surgimento dos números complexos. Paiva (2009) não relaciona o conteúdo com outras áreas do conhecimento. Neste livro o conjunto dos números complexos é uma extensão do conjunto dos números reais, assim, conservando as propriedades.

Neto (2013) apresenta uma análise dos livros texto de Ensino Médio realizada pelo IMPA, levando em conta três componentes básicas: a conceituação, a manipulação e a aplicação. O documento do Programa Nacional do Livro Didático para o Ensino Médio (PNLEM, 2009) revela que os números complexos não são explorados satisfatoriamente nos livros didáticos e aulas. A grande maioria dos livros não faz referência a aplicações dos números complexos.

Assim como nos artigos apresentados acima, nesta pesquisa também estão sendo analisados os livros didáticos.

3.2 BREVE DESCRIÇÃO SOBRE AS OBRAS ANALISADAS

L1 (DANTE, 2016) - Esta obra introduz o capítulo dos números complexos comentando sobre corrente elétrica, as grandezas elétricas são analisadas com auxílio desse conteúdo. Nesta obra, esse conjunto é apresentado devido a necessidade de resolver equações do segundo grau com discriminante negativo,

desta forma é introduzido o imaginário i . A contextualização histórica desse livro é rica em detalhes, também possui muitos exemplos e exercícios abordando a representação geométrica dos Números Complexos.

L2 (PRESTES, 2016) - O autor começa o capítulo falando que serão estudadas as principais características do conjunto dos números complexos. Uma breve história sobre o surgimento é apresentada citando o livro *Ars Magna* de Girolamo Cardano e o método para solução da equação de 3º grau que teve grande contribuição para o surgimento do conjunto dos Números Complexos. É mostrado que $i = \sqrt{-1}$, sua representação algébrica e como operar com o conjunto $\mathbb{C}$, a multiplicação é apresentada utilizando a propriedade distributiva e posteriormente é apresentada a divisão de Números Complexos. Em seguida, é mostrada a forma de representar geometricamente um Número Complexo no plano de Argand-Gauss. A apresentação da divisão é semelhante a feita para números racionais, assim é apresentado o conjugado de um Número Complexo. De um modo geral, este livro apresenta vários exercícios resolvidos, algumas resoluções focadas na representação geométrica.

L3 (DEGENSZAJN; ET AL, 2016) - Os autores comentam que os Números Complexos são usualmente apresentados a partir de equações do 2º grau, com discriminante negativo, daí a necessidade desse novo conjunto numérico para resolver esse tipo de problema, em seguida é apresentado o problema “Dividir um segmento de comprimento 10 em duas partes cujo produto seja 40”, para o qual Girolamo Cardano apresentou a equação $x^2 - 10x + 40 = 0$ e constatou que $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ eram soluções da equação. Esse problema fascinou Rafael Bombelli, desta maneira ele descobriu as propriedades dos números complexos ao operar com raízes negativas da mesma forma que operava com números reais. A partir daí, Gauss foi responsável por legitimar a representação geométrica desse conjunto, por fim William R. Hamilton apresenta os Números Complexos como pares ordenados de números reais e define a soma e produto desses pares. Assim, diferente da maioria dos livros, este começa abordando o conjunto dos complexos como pares ordenados, definindo a igualdade e as operações de adição e multiplicação. Apresenta o plano de Argand-Gauss para trabalhar com pares ordenados. A forma algébrica é apresentada a partir de pares ordenados. Exercícios resolvidos para resolução de equações de 2º grau com discriminante negativo. Também possui exemplos

resolvidos sobre representante geométrico do módulo de um Número Complexo. O quociente de dois Números Complexos é apresentado pela FIGURA 3.

FIGURA 3 - DIVISÃO DE DOIS NÚMEROS COMPLEXOS EM L3

Dados os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di \neq 0$, com **a**, **b**, **c** e **d** reais, vamos obter o número complexo **z** tal que $z_2 \cdot z = z_1$.

Fazendo $z = x + yi$, com **x** e **y** reais, temos:

$$z_2 \cdot z = z_1 \Rightarrow (c + di) \cdot (x + yi) = a + bi \Rightarrow (cx - dy) + (cy + dx)i = a + bi \quad *$$

Da definição de igualdade aplicada em *****, obtém-se o sistema seguinte, nas incógnitas **x** e **y**:

$$\begin{cases} cx - dy = a \\ dx + cy = b \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtém-se: $x = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2}$ e $y = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$

Logo: $z = x + yi$, isto é, $z = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \cdot i$

FONTE: DEGENSZAJN, D. et al 2016.

A representação geométrica da forma trigonométrica é feita com o arco trigonométrico, porém o arco trigonométrico não está no plano cartesiano, mas sim no plano complexo.

L4 (SMOLE; DINIZ, 2016) - As autoras começam o capítulo com uma equação de 2º grau, a qual pode ser resolvida pela chamada fórmula de Bhaskara³, a equação apresenta raiz negativa, não tendo solução no conjunto dos números reais. Mas no conjunto dos Números Complexos é possível resolver esta equação. Essa obra traz bastante detalhamento no contexto histórico. O Número Complexo é apresentado por meio de equações quadráticas com discriminante negativo. Posteriormente é apresentado um Número Complexo como par ordenado e em sua forma algébrica. A representação geométrica e a representação geométrica da soma e subtração de dois Números Complexos é apresentada. Diferente das outras obras, esta utiliza $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$ e $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$, também utiliza ρ e r para representar o módulo $|z|$.

³ De acordo com Gustavo Viegas, do canal Toda a Matemática, a fórmula recebe esse nome no Brasil devido a um erro. Por volta de 1960, não se sabe quem, mas algum professor que escrevia livros didáticos pegou o livro Bija Ganita do Bhaskara, em determinada parte do livro, Bhaskara escreve uma equação quadrática e descreve que a resolve pelo método do Sridhara. O autor do livro didático então começou a chamar a fórmula desenvolvida por Sridhara de fórmula de Bhaskara. Em decorrência disso, outros autores utilizaram esse livro como base, sem pesquisar diretamente da fonte, assim, passaram a utilizar o nome Fórmula de Bhaskara como é conhecida no Brasil. No restante do mundo esta equação é chamada de fórmula quadrática, ou para os Indianos Formula de Sridharacharya.

Possui exercícios resolvidos sobre a representação geométrica de um Número Complexo em sua forma polar.

L5 (BALESTRI, 2016) - Esta obra começa explicando sobre a computação quântica. Apresenta o contexto histórico do surgimento dos Números Complexos, descrevendo sobre o problema apresentado na obra *Ars Magna*, que consistia em como dividir um segmento em 10 unidades de comprimento em duas partes, cujo produto seja 40. A solução desse problema seria representar dois segmentos de medidas $5 + \sqrt{-15}$ e $5 - \sqrt{-15}$ unidades de comprimento. Cita que Rafael Bombelli era admirador de Cardano e publicou a obra *L'algebra*, a qual resolve a equação cúbica $x^3 - 15x - 4 = 0$. A partir desse ponto, diversos outros matemáticos dedicaram-se ao estudo das raízes quadradas de números negativos. O autor faz uma comparação da representação algébrica e a representação geométrica. Possui exemplos algébricos e geométricos da soma, oposto e conjugado. Essa obra possui uma atividade para representar conjugado de um Número Complexo utilizando o software de geometria dinâmica GeoGebraPrim. Possui algumas atividades resolvidas relacionando um Número Complexo na forma trigonométrica com a sua representação geométrica. As operações de um Número Complexo na forma trigonométrica não são exploradas.

L6 (SOUZA; GARCIA, 2016) - Esta obra começa falando sobre o artista Luiz Sacilotto, o qual utilizava a rotação de figuras em suas artes. A rotação de figuras pode ser feita com a utilização de Números Complexos. É exposta uma breve contextualização histórica acerca do surgimento dos Números Complexos, falando sobre Tartaglia, Girolamo Cardano. Rafael Bombelli Ao aplicar a fórmula de Cardano-Tartaglia observa que é possível trabalhar com raízes de números negativos, dando assim a possibilidade de novos estudos sobre esse novo conjunto numérico. Descreve os estudos de Wessel, Argand e Gauss sobre a legitimação do plano complexo e William Rowan Hamilton define os Números Complexos como pares ordenados. A introdução do conjunto dos Números Complexos é feita por uma equação quadrática com discriminante negativo. Em seguida o conjunto é apresentado como o conjunto de pares ordenados, seguida da representação algébrica e sua representação geométrica no plano complexo. Assim as atividades iniciais tratam de identificar as diferentes formas de identificar um Número Complexo. As propriedades de adição, subtração e multiplicação são mostradas na forma algébrica e no plano complexo. Alguns exercícios resolvidos utilizam vetores para fazer a soma e subtração de dois

Números Complexos. Esse livro possui um exemplo abordando uma aplicação dos Números Complexos em energia elétrica. Também apresenta uma atividade resolvida para rotacional um triângulo por meio da multiplicação dos Números Complexos.

L7 (LEONARDO, 2016) - O autor apresenta alguns dos matemáticos e estudiosos que contribuíram para os avanços dos Números Complexos, dentre eles Niccolo Tartaglia, Girolamo Cardano, Rafael Bombelli, Leonard Euler, Carl Friedrich Gauss. Os Números Complexos podem ser empregados em diversas áreas do conhecimento, como no campo da engenharia, na utilização de grandezas elétricas, aerodinâmica, linhas de transmissão, sistemas dinâmicos, geometria fractal, no movimento de líquidos e gases ao redor de obstáculos, entre outros. A unidade imaginária é introduzida por meio do exemplo de uma equação do segundo grau com discriminante negativo. A forma algébrica é introduzida, seguida da igualdade de dois Números Complexos, soma, subtração, multiplicação e conjugado, assim, a divisão é definida por meio do conjugado, maneira semelhante à racionalização de denominadores. Um exercício proposto sobre circuito RLC é apresentado. A representação geométrica de um Número Complexo é apresentada com o contexto histórico de seu surgimento, comentando sobre Caspar Wessel, Jean Argand e Gauss. A forma trigonométrica é apresentada da mesma forma dos outros livros, sendo representado pelo módulo e argumento principal. A multiplicação do Número Complexo na forma trigonométrica é representada geometricamente através de um exercício resolvido. A representação geométrica das raízes enésimas também é exibida por exemplos resolvidos.

3.3 CONTEÚDO DOS NÚMEROS COMPLEXOS NOS LIVROS DIDÁTICOS APROVADOS NO PNLD DE 2018

Tomando como base os livros didáticos aprovados no PNLD de 2018, os quais foram apresentados no QUADRO 4. Por meio da análise das obras listou-se todos os conteúdos abordados, os quais serão apresentados a seguir.

3.3.1 O número i

Definimos o número i , não real, denominada como unidade imaginária, ou seja:

$$i = \sqrt{-1} \text{ ou } i^2 = -1$$

Esta definição está presente em todos os livros analisados.

3.3.2 Forma algébrica de um Número Complexo

Qualquer número complexo z pode ser escrito na forma $a + bi$, denominada forma algébrica, com a e b reais e i a unidade imaginária.

Onde $z = a + bi$, a é denominada a parte real de z e b é a parte imaginária.

$$\text{Notação: } \operatorname{Re}(z) = a \text{ e } \operatorname{Im}(z) = b$$

Se $a \neq 0$ e $b = 0$, então o número é real.

$$z = a + 0i \Rightarrow z = a \quad (z \text{ é real})$$

Se $a = 0$ e $b \neq 0$, então o número é imaginário puro.

$$z = 0 + bi \Rightarrow z = bi \quad (z \text{ é imaginário puro})$$

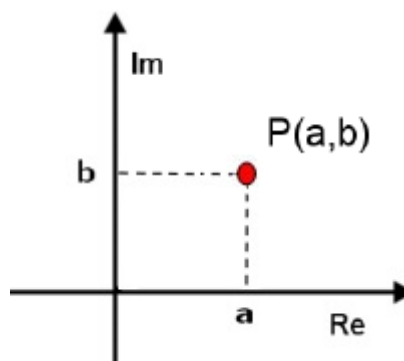
A forma algébrica está presente em todos os livros analisados.

3.3.3 Plano de Argand-Gauss

Convencionou-se associar o número complexo $z = a + bi$ ao ponto $P(a, b)$, estabelecendo uma correspondência biunívoca entre os números complexos e os pontos do plano cartesiano.

No sistema de coordenadas consideramos o eixo das abscissas como eixo real (Re), e o eixo das ordenadas, consideramos como o eixo imaginário (Im), e o plano chamamos de Plano Complexo ou Plano de Argand-Gauss, conforme representado na Figura 4.

FIGURA 4 - PLANO COMPLEXO



FONTE: Autor, 2021.

O Plano de Argand-Gauss está presente em todos os livros analisados.

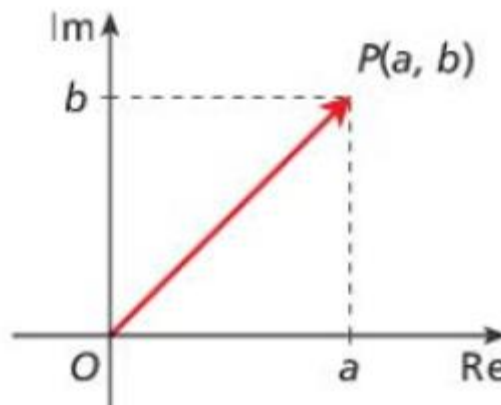
3.3.4 Número Complexo como um vetor

Um número complexo pode ser representado por um vetor, que é um segmento de reta orientado.

Todo vetor é determinado por dois pontos no plano, onde a sua origem é a origem do plano complexo, e a sua extremidade é o ponto $P(a, b)$. Os vetores são caracterizados por um módulo (comprimento do segmento), por uma direção e um sentido.

Assim, um número complexo $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$, pode ser representado no plano complexo por um vetor $\overrightarrow{OP}$, com a origem em $O(0,0)$ e extremidade no ponto $P(a, b)$ como mostrado na FIGURA 5.

FIGURA 5 - NÚMERO COMPLEXO REPRESENTADO VETORIALMENTE



FONTE: LEONARDO 2016.

A representação vetorial não está presente apenas em L3 (DEGENSZAJN; ET AL, 2016).

3.3.5 O conjunto $\mathbb{C}$

Definimos o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$ ao conjunto dos pares ordenados (a, b) de números reais, escritos na forma $a + bi$.

Todos os livros analisados apresentam a definição do conjunto dos Números Complexos.

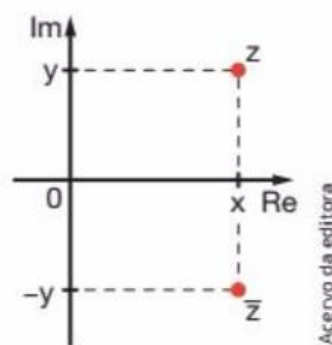
3.3.6 Conjugado

Seja $z = a + bi$, define-se como complexo conjugado de z o complexo $\bar{z} = a - bi$.

A parte real de dois números complexos conjugados é igual e a parte imaginária é simétrica.

No plano complexo, as imagens de um complexo z e seu conjugado $\bar{z}$ são simétricas em relação ao eixo real (Re), conforme pode ser observado na FIGURA 6.

FIGURA 6 - IMAGEM DE UM NÚMERO COMPLEXO z E SEU CONJUGADO $\bar{z}$.



FONTE: SOUZA; GARCIA 2016.

Na obra L5 (BALESTRI, 2016) é apresentada uma sequência utilizando o software GeoGebraPrim para representar o conjugado de um número complexo. A sequência pode ser observada na FIGURA 7.

FIGURA 7 - CONJUGADO DE UM NÚMERO COMPLEXO NO GEOGEBRAPRIM

Conjugado de um número complexo no GeoGebraPrim

No GeoGebraPrim, um número complexo é definido por meio da representação algébrica ($z = a + bi$) e pode ser visualizado na Janela de Visualização por meio de um ponto de coordenadas (a,b), considerando que y seja o eixo imaginário e que x seja o eixo real. Também podemos visualizar o conjugado de um número complexo no GeoGebraPrim. Observe, por exemplo, o número complexo $z = 3 + 3i$.

Passo 1: No GeoGebraPrim, no menu Disposições, clique em **Álgebra e Gráficos**. No menu Opções, clique em **Arredondamento** e, em seguida, em **2 Casas Decimais**. No menu Opções, clique em **Configurações**, selecione a opção **Ponto** e, na aba **Álgebra**, selecione **Número Complexo** no campo **Coordenadas**. Em seguida, clique em **Fechar**.

Passo 2: Digite o comando $z = 3 + 3i$ no campo **Entrada** e pressione **Enter**.

Passo 3: Para auxiliar na visualização do número complexo z , em geral utiliza-se um vetor de origem em $0 + 0i$ e extremidade em $3 + 3i$. Para isso, digite o comando $zero = 0 + 0i$ no campo **Entrada** e, em seguida, crie um vetor de origem no ponto **zero** e extremidade no ponto **z**.

GEOGEBRAPRIM

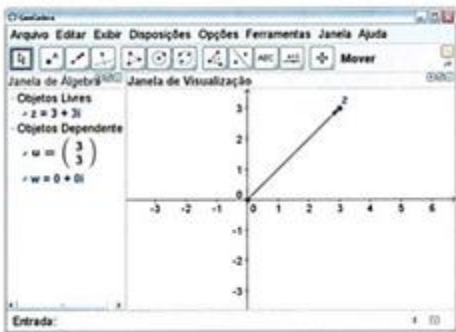
Programa de computador gratuito com recursos dinâmicos, voltado para a aprendizagem de Matemática.

Licença: Pode ser copiado, distribuído e transmitido livremente, para fins não comerciais.

Onde obter: <www.geogebra.org>

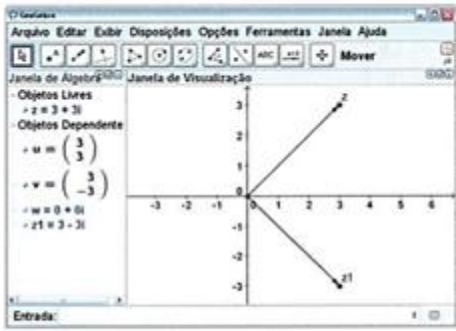
Versão utilizada: 4.0.41.0

Para criar um vetor de origem no ponto zero, utilize a ferramenta **Vetor Definido por Dois pontos**. Para isso, clique primeiro na origem e, em seguida, na extremidade.



Note que o GeoGebraPrim nomeou como **u** o vetor associado a **z**.

Passo 4: No campo **Entrada**, digite o comando $z1 = \text{Conjugate}(z)$ e, em seguida, defina o vetor associado a **z1**, assim como foi feito no passo 3.



Com o auxílio do *mouse*, mova o número complexo **z** e veja o que ocorre com o seu conjugado.

- Escreva uma característica que relaciona o número complexo e seu conjugado.
- Com o auxílio do GeoGebraPrim, escreva o conjugado dos seguintes números complexos.

$2 + i$
 $-1 - 3i$
 $-7i$

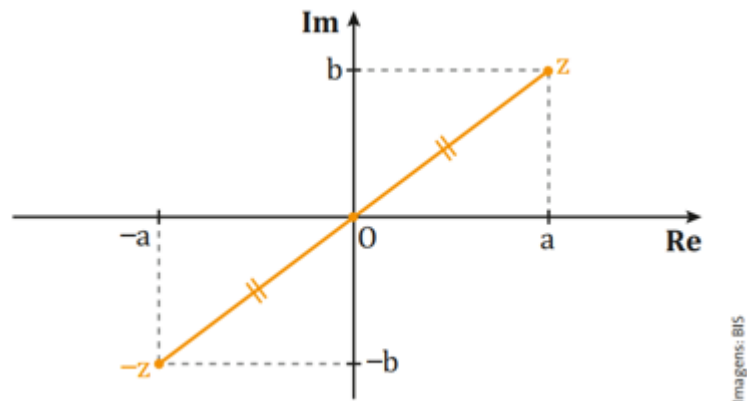
FONTE: BALESTRI 2016.

Todos os livros analisados apresentam a definição de conjugado, no entanto, L2 (PRESTES, 2016) e L7 (LEONARDO, 2016) não apresentam a representação geométrica do conjugado.

3.3.7 Oposto de um número complexo

O oposto do complexo $z = a + bi$ $a, b \in \mathbb{R}$ é $-z = -a - bi$. A sua representação no plano complexo pode ser vista na FIGURA 8 abaixo:

FIGURA 8 - OPOSTO DE UM NÚMERO COMPLEXO



FONTE: SMOLE; DINIZ 2016.

Todos os livros analisados apresentam a definição de oposto, no entanto, somente L4 (SMOLE; DINIZ, 2016) e L5 (BALESTRI, 2016) apresentam a representação geométrica do oposto.

3.3.8 Operações com complexos na forma algébrica

3.3.8.1 Adição

A soma de dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ é dada por:

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di)$$

$$z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$$

3.3.8.2 Subtração

A diferença de dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ é dada por:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (a + bi) - (c + di)$$

$$z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$$

3.3.8.3 Multiplicação

O produto de dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ é dado por:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) \quad \text{Pela distributividade temos}$$

$$z_1 \cdot z_2 = ac + adi + bci + bdi^2$$

$$\text{Note que } i = \sqrt{-1}, \quad i^2 = -1$$

$$z_1 \cdot z_2 = ac + bd(-1) + adi + bci$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

3.3.8.4 Divisão

O quociente de dois números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ é dado por:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}$$

Onde $z_2 \cdot \bar{z}_2$ é um número real:

$$z_2 \cdot \bar{z}_2 = (c + di) \cdot (c - di) = c^2 - cdi + cdi - d^2 i^2 = c^2 - d^2(-1) = c^2 + d^2$$

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 = (a + bi) \cdot (c - di) = ac - adi + bci - bd(-1) = (ac + bd) + (bc - ad)i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$$

3.3.9 Potência

Seja z um número complexo qualquer, definem-se:

$$1) \quad z^0 = 1;$$

$$2) \quad z^1 = z;$$

$$3) \quad z^n = z \cdot z \cdot z \dots z, \forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 2;$$

$$4) \quad z^{-n} = \frac{1}{z^n}, z \neq 0, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Sejam $z, w \in \mathbb{C}$ e $m, n \in \mathbb{R}$, consideramos as propriedades de potenciação dos números reais válidas para o conjunto dos números complexos, temos:

$$\mathbf{P_1.} \quad z^n \cdot z^m = z^{n+m};$$

$$\mathbf{P_2.} \quad z^n : z^m = z^{n-m};$$

$$\mathbf{P_3.} \quad (z^n)^m = z^{n \cdot m};$$

$$\mathbf{P_4.} \quad (z \cdot w)^n = z^n \cdot w^n;$$

$$\mathbf{P_5.} \quad \left(\frac{z}{w}\right)^n = \frac{z^n}{w^n}$$

3.3.10 Potências de i

Existem somente quatro valores para potências de i com expoentes inteiros, são eles:

$$i^0 = 1;$$

$$i^1 = i;$$

$$i^2 = -1;$$

$$i^3 = -i.$$

Para calcular potências de i , basta dividir o expoente n por 4, sendo n inteiro e positivo.

Se o resto for 0, $i^n = 1$.

Se o resto for 1, $i^n = i$.

Se o resto for 2, $i^n = -1$.

Se o resto for 3, $i^n = -i$.

Todos os livros apresentam as operações de 3.3.8.1 até 3.3.10.

3.3.11 Forma trigonométrica de um número complexo

Um número complexo z pode ser determinado por uma distância, denominada módulo e por um ângulo, denominado argumento.

Podemos obter o módulo $|\rho|$ a partir do triângulo retângulo da FIGURA 9, utilizando o Teorema de Pitágoras, temos:

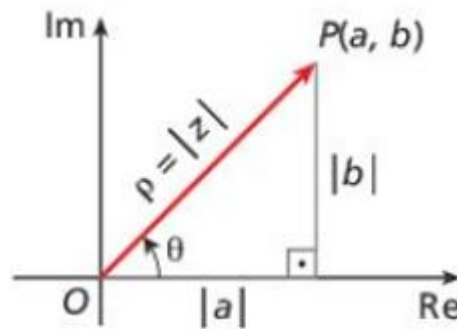
$$\rho^2 = a^2 + b^2$$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

A distância ρ de z até a origem O é definida como módulo de ρ e indicamos:

$$|z| = |a + bi| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

FIGURA 9 - FORMA TRIGONOMÉTRICA DE UM NÚMERO COMPLEXO



FONTE: LEONARDO 2016.

O ângulo θ formado a partir do eixo das abscissas no sentido anti-horário, denomina-se argumento do complexo z . Todo número complexo não-nulo possui uma infinidade de argumentos, dois quaisquer deles diferindo entre si por um múltiplo de 2π .

O argumento principal pertence ao intervalo $[0, 2\pi[$ e é representado por:

$$\theta = \arg z$$

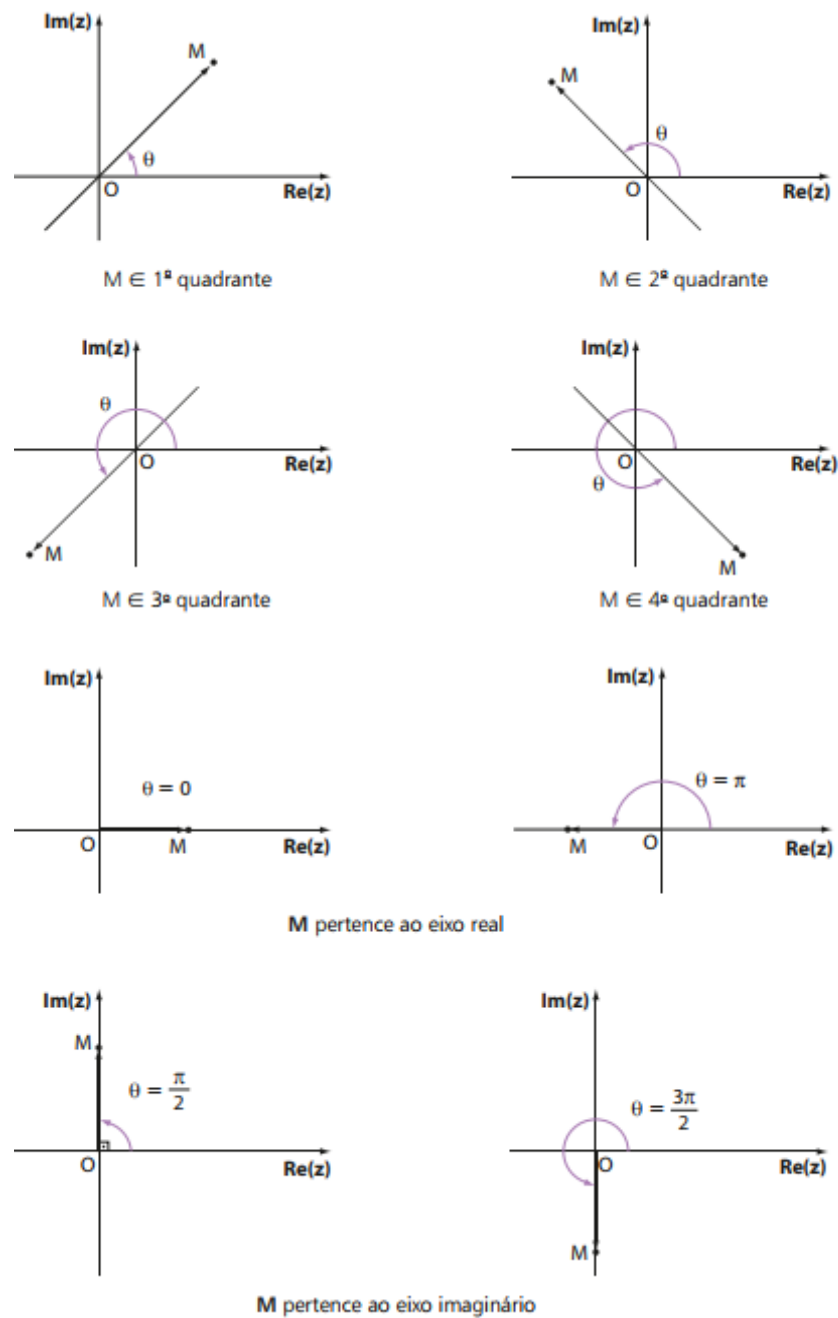
A partir da FIGURA 9, temos:

$$\cos \theta = \frac{a}{|z|} \Rightarrow a = |z| \cos \theta$$

$$\sin \theta = \frac{b}{|z|} \Rightarrow b = |z| \sin \theta$$

O argumento principal também pode ser representado nos outros quadrantes, ou até mesmo sobre o eixo real ou o eixo imaginário do Plano de Argand-Gauss. Podemos observar essas representações geométricas na FIGURA 10.

FIGURA 10 - REPRESENTAÇÕES GEOMÉTRICAS DO ARGUMENTO PRINCIPAL θ , em que $0 \leq \theta < 2\pi$



FONTE: DEGENSAJN, et al 2016.

Somente L3 (DEGENSAJN; ET AL, 2016) apresenta as representações do argumento principal nos outros quadrantes.

Consideramos o número complexo não-nulo $z = a + bi$, podemos reescrever z da forma:

$$z = |z| \cos \theta + r \operatorname{sen} \theta i$$

$$z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Essa é a forma trigonométrica ou forma polar de z .

Os conceitos de módulo, argumento e forma trigonométrica de um Número Complexo são apresentados em todos os livros.

3.3.12 Operações com complexos na forma trigonométrica.

Algumas operações são mais simples quando utilizadas na forma trigonométrica.

L3 (DEGENSZAJN; ET AL, 2016) não apresenta nenhuma das operações dos Números Complexos na forma trigonométrica, desta forma, sempre que mencionar as obras neste subtópico, esta obra estará de fora da análise.

3.3.12.1 Multiplicação

Sejam os complexos $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$, o produto pode ser obtido da forma:

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot \rho_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 i \operatorname{sen} \theta_2 + \cos \theta_2 i \operatorname{sen} \theta_1 + i^2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)$$

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i (\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_2 \cos \theta_1)]$$

Recorde que $\cos(A + B) = \cos(A) \cos(B) - \operatorname{sen}(A) \operatorname{sen}(B)$

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen}(A) \cos(B) + \operatorname{sen}(B) \cos(A)$$

Utilizando as somas de arcos, obtemos:

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Todos os livros apresentam esta operação, assim como sua demonstração.

Geometricamente, esta multiplicação é dada por uma rotação seguida de uma homotetia. Nos livros didáticos a representação geométrica da multiplicação de dois números complexos, é apresentada por exercícios resolvidos, como é o caso das FIGURAS 11, 12.

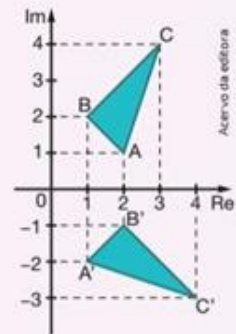
FIGURA 11 - ATIVIDADE RESOLVIDA ROTAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS EM L6

R22. Dado o $\triangle ABC$ de vértices $A(2, 1)$, $B(1, 2)$ e $C(3, 4)$, determine as coordenadas dos vértices do $\triangle A'B'C'$, obtido pela rotação do $\triangle ABC$ em 270° , em torno da origem, no sentido anti-horário.

Resolução

No plano de Argand-Gauss, os pontos A , B e C são correspondentes aos números complexos $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 1 + 2i$ e $z_3 = 3 + 4i$, respectivamente. Obtemos as coordenadas de A' , B' e C' da seguinte maneira:

- $A' = z_1 \cdot (\underbrace{\cos 270^\circ}_0 + i \underbrace{\sin 270^\circ}_{-1}) = (2 + i)(-i) = -2i - i^2 = 1 - 2i \rightarrow A'(1, -2)$
- $B' = z_2 \cdot (\underbrace{\cos 270^\circ}_0 + i \underbrace{\sin 270^\circ}_{-1}) = (1 + 2i)(-i) = -i - 2i^2 = 2 - i \rightarrow B'(2, -1)$
- $C' = z_3 \cdot (\underbrace{\cos 270^\circ}_0 + i \underbrace{\sin 270^\circ}_{-1}) = (3 + 4i)(-i) = -3i - 4i^2 = 4 - 3i \rightarrow C'(4, -3)$



FONTE: SOUZA; GARCIA 2016.

FIGURA 12 - EXERCÍCIO RESOLVIDO MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS COMPLEXOS EM L7

R10. Sejam os números complexos z e w , escritos na forma trigonométrica:

$$z = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) \text{ e } w = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

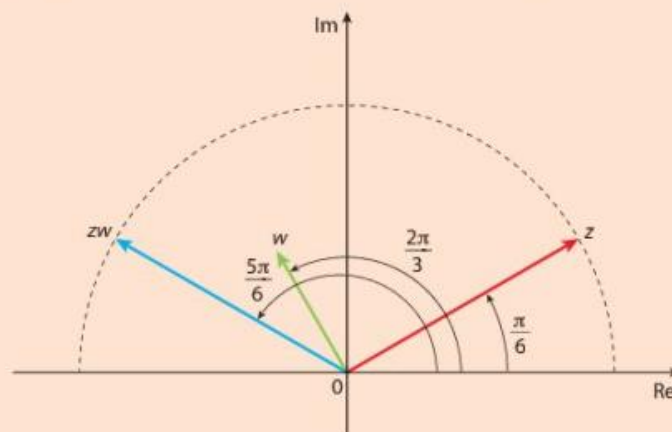
- a) Obter o produto zw .
- b) Representar os vetores associados a z , w e zw no plano complexo.

Resolução

$$\text{a) } zw = 2 \cdot 1 \cdot \left[\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} \right) \right]$$

$$zw = 2 \cdot \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{6} \right)$$

- b) Representando z , w e zw no plano complexo, temos:



Observe que, ao multiplicar z por w :

- como o módulo de w é 1, o módulo de zw é igual ao módulo de z ;
- para obter o vetor que representa zw , basta rotacionar o vetor que representa z em torno da origem, de $\frac{2\pi}{3}$ no sentido anti-horário.

FONTE: LEONARDO 2016.

3.3.12.2 Divisão

Sejam os complexos $z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$, o quociente $\frac{z_1}{z_2}$, sendo $z_2 \neq 0$ pode ser obtido da forma:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{\rho_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{\rho_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)} \cdot \frac{\rho_2(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}{\rho_2(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - i^2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)}{\rho_2^2 (\cos^2 \theta_2 - i^2 \operatorname{sen}^2 \theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)}{\rho_2 (\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - i \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)}{\rho_2 (\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 [\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + i (\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)]}{\rho_2 (\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]}{\rho_2 (\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2)} \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]\end{aligned}$$

Todos os livros apresentam esta operação, no entanto somente em L2 (PRESTES, 2016) e L7 (LEONARDO, 2016) mostram a demonstração, L6 (SOUZA; GARCIA, 2016) deixa a demonstração como exercício.

3.3.12.3 Potenciação (Primeira fórmula de De Moivre)

Seja o complexo $z = \rho(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ e n um número inteiro maior que 1, temos:

$$\begin{aligned}z^n &= z \cdot z \cdot z \cdot z \cdot \dots \cdot z \text{ (n fatores)} \\ z^n &= \rho \cdot \rho \cdot \rho \cdot \dots \cdot \rho [\cos(\theta + \theta + \dots + \theta) + i \operatorname{sen}(\theta + \theta + \dots + \theta)] \\ z^n &= \rho^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]\end{aligned}$$

Todos os livros apresentam esta operação, porém, L4 (SMOLE; DINIZ, 2016) mostra que a primeira fórmula de De Moivre é válida para z^2 e que é válida para z^3, z^4, z^5 etc. Assim podemos utilizar a fórmula para z^n .

3.3.12.4 Radiciação (Segunda fórmula de De Moivre)

Denomina-se raiz enésima do número complexo $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ a todo número complexo w , tal que

$$w^n = z, \text{ para } n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.1)$$

$$\text{Considerando } z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \quad (3.2)$$

$$w = s(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \quad (3.3)$$

Aplicando a Primeira fórmula de De Moivre para w^n , temos:

$$w^n = s^n [\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)] \quad (3.4)$$

Substituindo (3.2) e (3.4) em (3.1), temos:

$$s^n [\cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi)] = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$$

Para a igualdade ser verdadeira, devemos ter:

$$\begin{cases} s^n = r \\ \cos(n\varphi) + i \operatorname{sen}(n\varphi) = \cos \theta + i \operatorname{sen} \theta \end{cases}$$

$$s = \sqrt[n]{r}$$

$$\varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}$$

Substituindo os valores de s e φ em (3.3), para cada $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$

$$w_k = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

A partir de $k = n$ os números w_k se repetem. Mais precisamente $w_k = w_j$ se n é divisor de $k - j$.

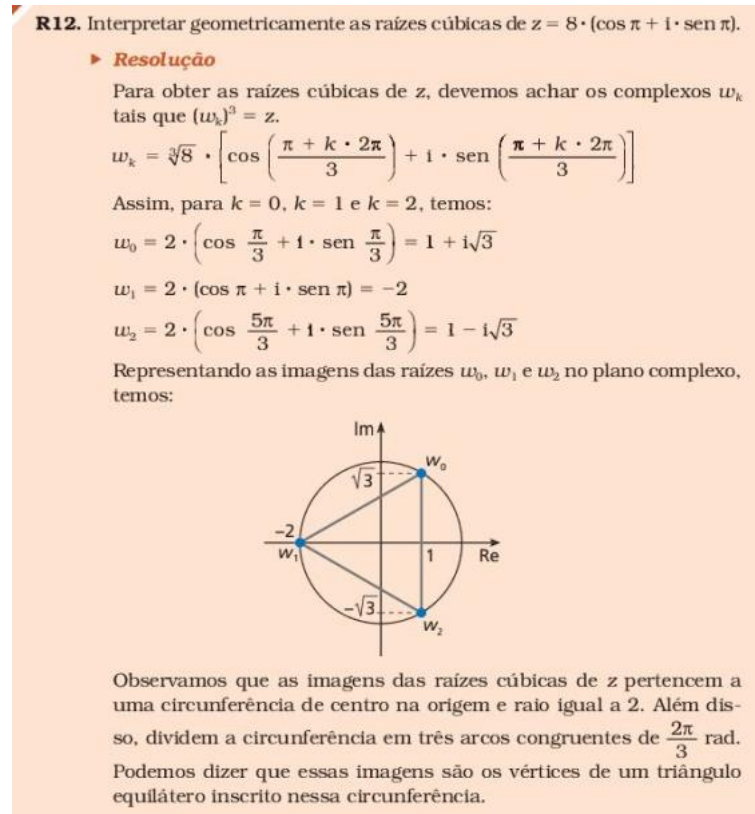
O caso das potências de i , apresentadas em 3.3.10, é um caso particular de w_k , pois i corresponde ao ângulo de $\frac{\pi}{2}$.

Esta fórmula não é apresentada em L5 (BALESTRI, 2016) e L6 (SOUZA; GARCIA, 2016) e sua demonstração é feita apenas em L1 (DANTE, 2016).

3.3.13 Interpretação geométrica das raízes enésimas de um número complexo

De acordo com Smole e Diniz (2016), os afijos das raízes n -ésimas de z não nulo são vértices de um polígono regular de n lados inscritos na circunferência centrada na origem e de raio $\sqrt[n]{r}$. Os argumentos das raízes formam uma P.A de razão $\frac{2\pi}{n}$. A partir da FIGURA 13, podemos observar um exercício resolvido com a representação geométrica das raízes cúbicas de $z = 8(\cos \pi + i \operatorname{sen} \pi)$.

FIGURA 13 - EXERCÍCIO RESOLVIDO RAIZ N-ÉSIMA EM L7



FONTE: LEONARDO 2016.

As obras L1 (DANTE, 2016), L4 (SMOLE; DINIZ, 2016) e L7 (LEONARDO, 2016) propõem exercícios para representar as raízes n-ésimas geometricamente. Podemos observar alguns desses exercícios na FIGURA 14.

FIGURA 14 - EXERCÍCIOS PROPOSTOS SOBRE RAIZ N-ÉSIMA EM L1

Exercícios

33.  Determinem as raízes quadradas dos seguintes números complexos e deem sua representação geométrica:
- a) -4 b) $1 - i$
34.  Determinem as raízes quartas dos seguintes números complexos e deem sua representação geométrica:
- a) -1 b) $\sqrt{3} + i$
35.  Encontrem as raízes cúbicas do número complexo 125 e deem sua representação geométrica.

FONTE: DANTE 2016.

Tendo como base teórica, os artigos dos ENEM, olhar para a representação geométrica dos números complexos pode motivar e facilitar o entendimento das operações. O QUADRO 6 apresenta quais conteúdos são trabalhados com uma abordagem geométrica e as respectivas obras que desfrutaram dessa abordagem.

QUADRO 6 - PRESENÇA DA REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA NOS LIVROS DIDÁTICOS

REPRESENTAÇÃO GEOMÉTRICA	OBRAS
Plano de Argand- Gauss	L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7
Número complexo como vetor	L1, L2 L4, L5, L6, L7
Conjugado	L1, L3, L4, L5, L6
Oposto	L4,L5
Módulo, Argumento	L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7
Forma trigonométrica ou polar	L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7
Rotação	L1,L4,L6, L7
Raízes N-ésimas	L1,L4, L7

FONTE: Autor 2021.

Todas as obras analisadas apresentam a introdução do ponto no plano de Argand Gauss, porém em L2 o ponto $P(a, b)$ é apenas chamado de imagem e em L4 o ponto $P(a, b)$ é chamado somente de afixo.

As obras L4, L5, L6 e L7 mostram que um número complexo pode ser representado como vetor. Em L1 e L2 o conceito de vetor aparece quando é apresentado o módulo e argumento do número complexo.

3.4 APLICAÇÕES EM OUTRAS ÁREAS

Alguns dos livros didáticos analisados mostram outras áreas do conhecimento que utilizam os números complexos. Dante (2016) – L1, introduz o capítulo comentando sobre a corrente elétrica alternada, com o auxílio dos números complexos, pode ser analisada de maneira mais simples.

Eletricistas realizando reparo na rede elétrica. A energia que usamos em casa é produzida por uma usina elétrica e é transmitida por corrente alternada. No sistema brasileiro de transmissão de energia elétrica o fluxo de elétrons dentro de um fio muda de direção 120 vezes por segundo. No caso da corrente alternada, as grandezas elétricas são analisadas com o auxílio de números complexos, a fim de facilitar os cálculos. (DANTE, 2016, p. 172)

Smole e Diniz (2016) – L4 comentam que em áreas como a física e engenharias, com o auxílio dos números complexos podemos explicar fenômenos relacionados à eletricidade e movimento em fluidos como água ou ar.

Souza e Garcia (2016) – L6 utilizam um exercício resolvido para demonstrar como os números complexos são utilizados para cálculo de fasor. A FIGURA 15, apresenta a equação da tensão $v(t) = V \cdot \sin(w \cdot t + \alpha_0)$. Uma forma de representar uma tensão senoidal é por meio do diagrama fasorial. Cada vetor tem um módulo

constante e uma extremidade fixa na origem, neste caso, chamado de fasor. O ângulo que o fasor faz com o eixo horizontal representa o ângulo da tensão naquele instante.

FIGURA 15 - EXPLICAÇÃO SOBRE FASOR EM L6

- 65.** Desde o processo de geração da energia elétrica até o momento em que ela é utilizada, diversos cálculos matemáticos fazem-se necessários.

Dentre os elementos envolvidos nesse processo, podemos destacar a corrente elétrica (fluxo de elétrons que passa por um fio, medido em ampere) e a tensão (energia potencial por unidade de carga elétrica, medida em volt), que podem assumir valores contínuos ou alternados. No caso da corrente elétrica, por exemplo, ela é chamada contínua quando os elétrons se movimentam em um único sentido, e alternada quando estes alternam o sentido do movimento constantemente, fazendo os valores da corrente oscilarem entre um valor máximo e um mínimo.

No sistema de transmissão, por serem alternadas, a tensão e a corrente podem ser representadas por sinais senoidais com os valores instantâneos da tensão (v) e da corrente (i), dados por $v(t) = V \cdot \sin(\omega \cdot t + \alpha_0)$ e $i(t) = I \cdot \sin(\omega \cdot t + \beta_0)$, ou seja, senoides dependentes do tempo t , em segundos, com amplitudes V e I , respectivamente, também chamadas de valores de pico. A frequência angular ω representa a velocidade de oscilação da senoide, que pode ser dada em graus por segundo. Os valores de α_0 e β_0 representam a fase inicial da função.

Essas expressões matemáticas para tensões e correntes elétricas não permitem métodos práticos para a análise de circuitos elétricos, pois não são fáceis de serem algebricamente operadas. Na prática, para facilitar as operações algébricas, costuma-se utilizar um vetor radial girante denominado fasor, o qual, em cada instante, representa um ponto da senoide, possuindo, assim, a mesma frequência.

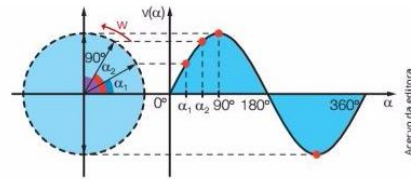
O módulo do fasor corresponde à amplitude de oscilação da senoide.

FONTE: SOUZA; GARCIA 2016.

Para efetuar operações entre senoides, precisamos traçar as duas formas de onda no mesmo plano cartesiano e somar algebricamente as ordenadas em cada ponto ao longo da abscissa, isso se torna um processo muito complicado. Na prática, utilizamos o fasor para efetuar essas operações de forma simples. Podemos observar na FIGURA 16 a representação de certos instantes utilizando fasor.

FIGURA 16 - EXERCÍCIO SOBRE FASOR EM L6

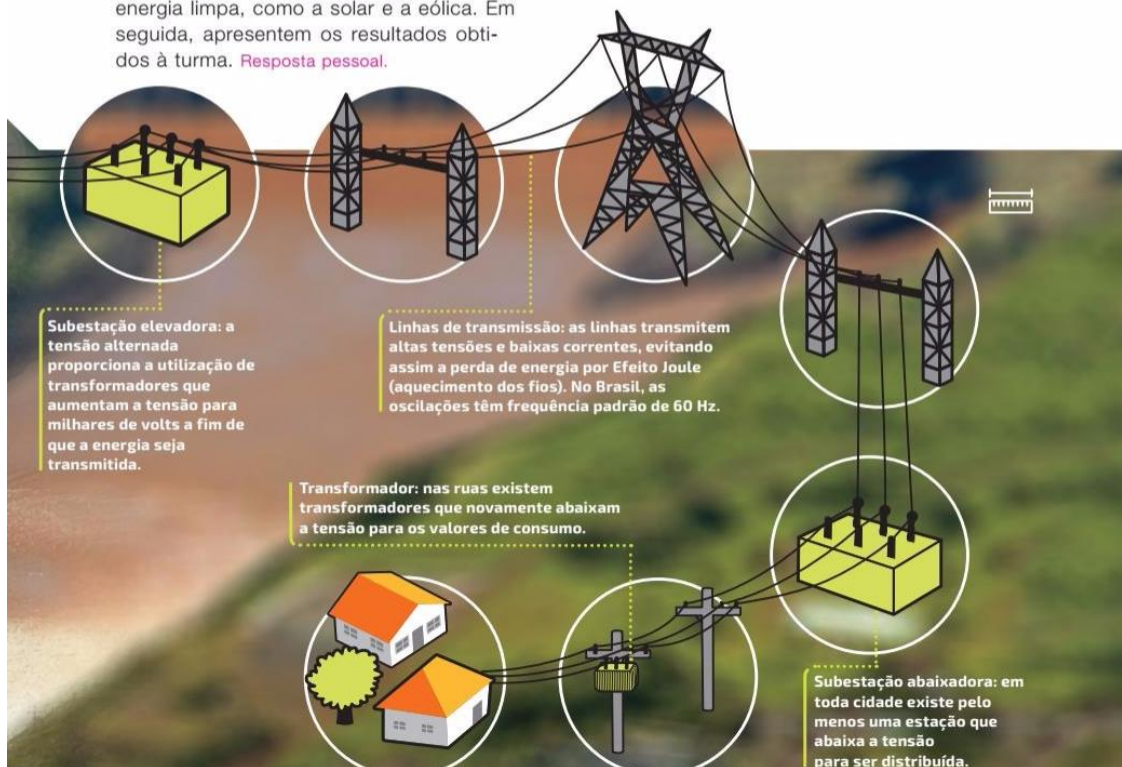
Como são vetores de módulo constante, os fasores podem ser representados por números complexos na forma trigonométrica, o que facilita as operações algébricas dos sinais senoidais. Em relação à tensão alternada no instante inicial ($t=0$), por exemplo, temos o fasor $v = V \cdot (\cos \alpha_0 + j \sin \alpha_0)$.



Note que o símbolo da corrente elétrica é i . Assim, em estudos relacionados à corrente elétrica nos quais são necessários cálculos envolvendo números complexos, a unidade imaginária é representada por j .

De acordo com as informações apresentadas e considerando um circuito de transmissão de tensão e corrente alternadas, em que os valores instantâneos dessas duas grandezas são dados pelas senoides $v(t) = 220 \cdot \sin(100 \cdot t + 30^\circ)$ e $i(t) = 10 \cdot \sin(100 \cdot t + 60^\circ)$, resolva as questões.

- Represente, para o instante inicial, o fasor correspondente a cada senoide na forma complexa trigonométrica. $v = 220(\cos 30^\circ + j \sin 30^\circ)$; $i = 10(\cos 60^\circ + j \sin 60^\circ)$
- Represente, para o instante inicial, o fasor correspondente a cada senoide na forma complexa algébrica. $v = 110\sqrt{3} + 110j$; $i = 5 + 5\sqrt{3}j$
- Potência (P) é definida como a taxa com que a energia é transferida da bateria para algum componente e é dada pelo produto da tensão pela corrente ($P = i \cdot v$). Com as representações de tensão e corrente obtidas nos itens a e b, obtenha a representação complexa nas formas trigonométrica e algébrica para a potência elétrica, medida em watt. $P = 2200(\cos 90^\circ + j \sin 90^\circ)$; $P = 2200j$
- Junte-se a um colega e pesquisem informações sobre meios de geração de energia limpa, como a solar e a eólica. Em seguida, apresentem os resultados obtidos à turma. *Resposta pessoal.*



FONTE: SOUZA; GARCIA 2016.

Leonardo (2016) – L7 comenta sobre diversas áreas, as quais podem ser aplicadas com o auxílio dos números complexos.

Hoje em dia, aplicações desses novos números adquiriram grande importância no campo da Engenharia (por exemplo, na modelagem de circuitos elétricos, no movimento de líquidos e gases ao redor de obstáculos),

na Aerodinâmica (no cálculo da força de sustentação da asa de um avião), na Geometria fractal, em sistemas dinâmicos (por exemplo, no estudo da interferência em linhas de transmissão de energia e telefonia), entre outros. (LEONARDO, 2016, p. 172)

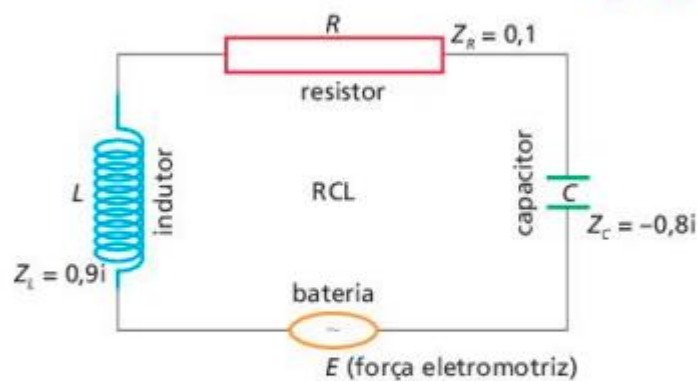
Ainda tratando de grandezas elétricas, Leonardo (2016) propõem dois exercícios sobre circuitos RLC, os quais são apresentados na FIGURA 17.

FIGURA 17 - EXERCÍCIOS PROPOSTOS SOBRE CIRCUITO RLC EM L7

- 15.** Um circuito RLC contém um resistor, um indutor e um capacitor. A medida de resistência de um circuito RLC é chamada de **impedância** (Z) e é expressa por um número complexo.

Em um circuito RLC em série, a impedância equivalente ($Z_{eq.}$) é dada por: $Z_{eq.} = Z_R + Z_L + Z_C$

Determine $Z_{eq.}$ no circuito RLC, em série, abaixo:
 $0,1 + 0,1i$



- 16.** Para um circuito RLC, a primeira lei de Ohm é dada por: $E = Z_{eq.} \cdot I$, em que E é a força eletromotriz, I é a corrente elétrica e $Z_{eq.}$ é a impedância equivalente desse circuito.

Considerando o circuito RLC dado no exercício **15**, determine:

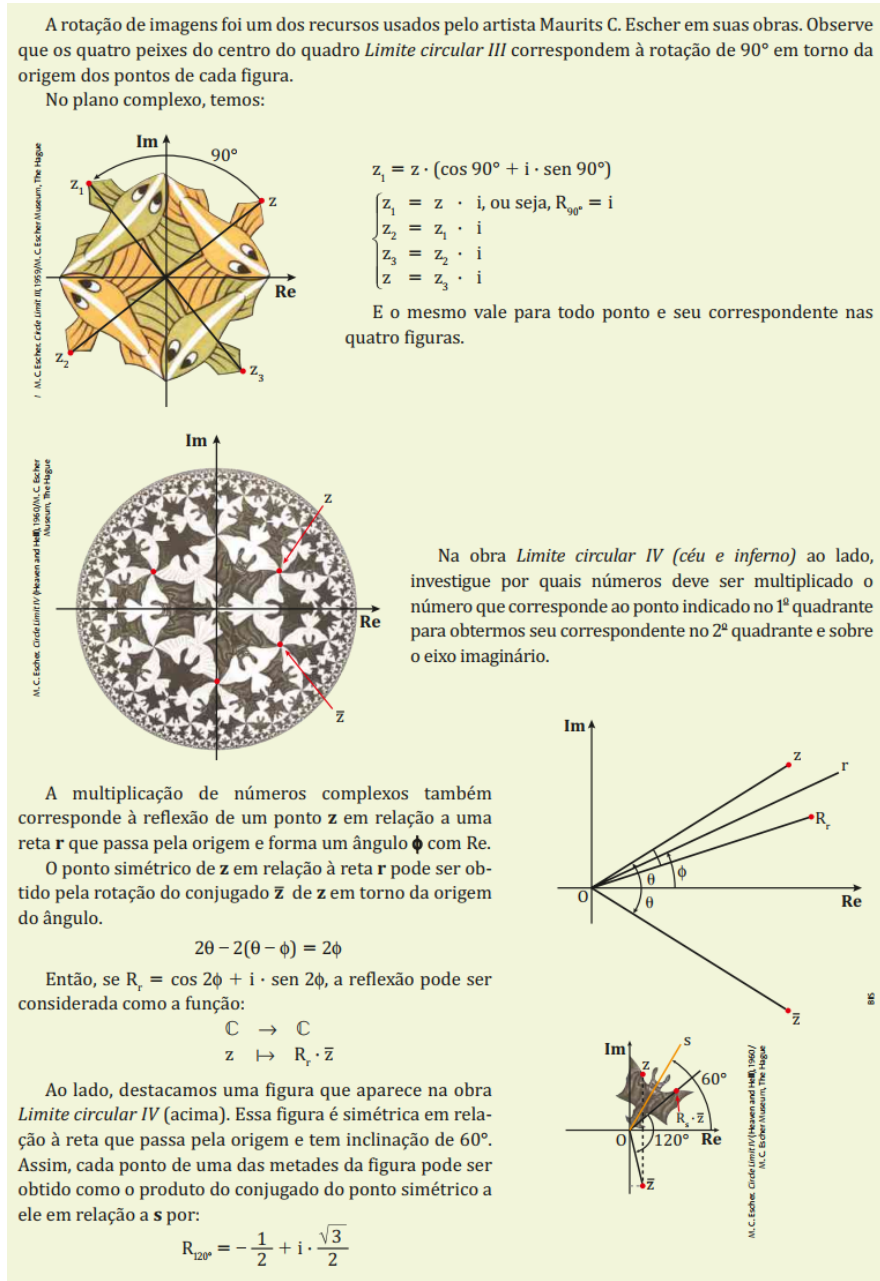
- a) a força E , em volt, quando $I = 20 + 100i$. $-8 + 12i$
 b) a corrente I , em ampères, quando $E = i - 1$. $10i$

FONTE: LEONARDO 2016.

De acordo com Dante (2016) – L1, a multiplicação de números complexos na forma trigonométrica possibilita a rotação de pontos no plano, pois na multiplicação de dois complexos na forma trigonométrica multiplicam-se os módulos e somam-se os argumentos. Essa rotação de pontos é um recurso utilizado na computação gráfica e na arte.

Smole e Diniz (2016) – L4 apresentam que a multiplicação de dois números complexos é um recurso utilizado por artistas, para rotacionar imagens, como pode ser visto na FIGURA 18.

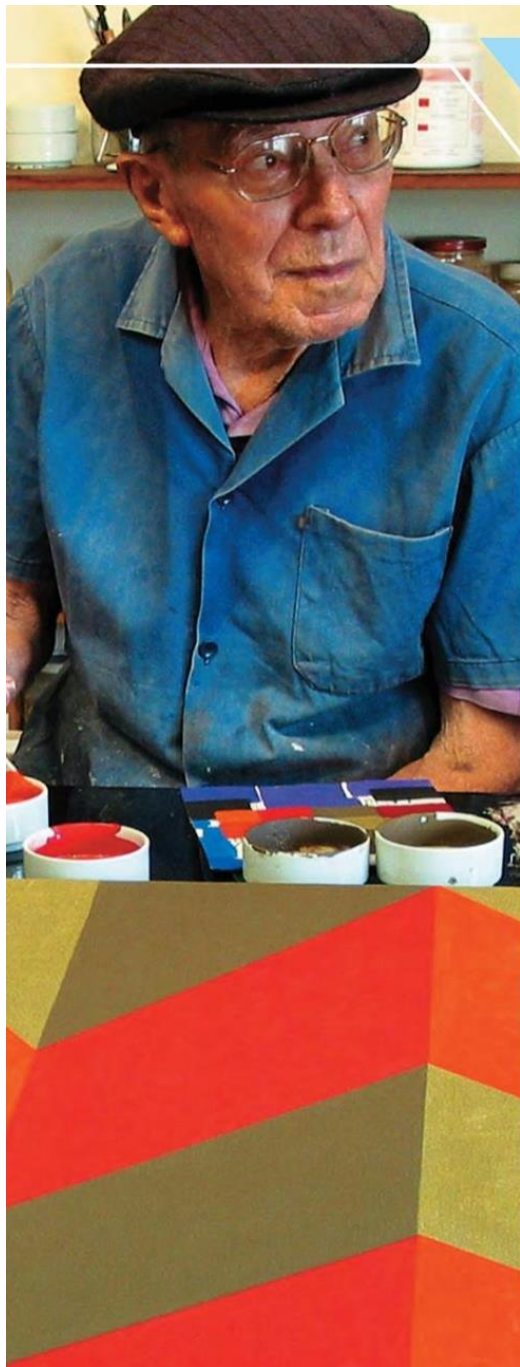
FIGURA 18 - ROTAÇÃO DE IMAGENS NO PLANO COMPLEXO EM L4



FONTE: SMOLE; DINIZ 2016.

Souza e Garcia (2016) – L6 introduzem o capítulo dos números complexos comentando sobre o artista Luiz Sacilotto, este utilizava a rotação de figuras em suas pinturas. Podemos visualizar um pouco da história de Luiz Sacilotto e uma de suas obras utilizando a rotação de figuras geométricas na FIGURA 19.

FIGURA 19 - LUIZ SACILOTTO E SUA OBRA EM L6



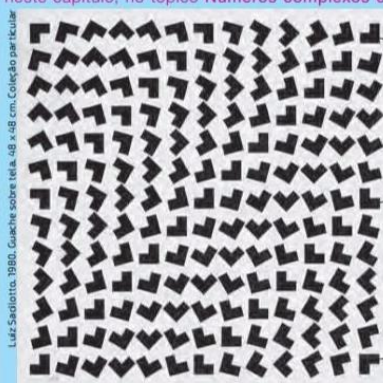
Luiz Sacilotto

Ao longo da história diferentes elementos matemáticos foram utilizados na composição de obras artísticas, como a simetria, a ilusão de ótica, a geometria, a perspectiva e a razão áurea. Um exemplo de movimento artístico em que é notória a utilização da matemática é o Concretismo, cuja base são elementos geométricos. Nas pinturas concretistas, a atenção é voltada ao plano e às cores, alinhados ao rigor formal.

No Brasil, um dos representantes do Concretismo na pintura é Luiz Sacilotto (1924-2003). Nascido em Santo André (SP), esse artista utilizava materiais pouco convencionais em suas obras, como esmalte, madeira compensada, latão e ferro, produzindo efeitos visuais com base em figuras geométricas. Na tela abaixo, por exemplo, Sacilotto rotaciona e reproduz uma mesma figura, criando um interessante padrão visual.

Fonte de pesquisa: <www.sacilotto.com.br>. Acesso em: 10 mar. 2016.

Explique aos alunos que o estudo de rotações no plano será estudado neste capítulo, no tópico Números complexos e geometria.



0266, de Luiz Sacilotto, 1980.

Figura 1

Figura 1 rotacionada 90° no sentido horário ou 270° no sentido anti-horário.

Figura 1 rotacionada 180° no sentido horário ou 180° no sentido anti-horário.

A) Resposta esperada: a base são os elementos geométricos, de maneira que a atenção maior é dada ao plano e às cores, alinhados ao rigor formal.

Oriente os alunos a escreverem as respostas no caderno.

(A) Cite características das pinturas concretistas.

(B) Converse com um colega sobre o efeito visual gerado na tela acima. **Resposta pessoal.**

(C) Ao rotacionar uma imagem em 360°, no sentido horário, o que ocorre com sua posição? **Não se altera.**

FONTE: SOUZA; GARCIA 2016.

Balestri (2016) – L5 introduz o capítulo dos números complexos falando sobre Computação Quântica, uma descrição sobre a relação entre computação quântica e números complexos pode ser vista na FIGURA 20.

FIGURA 20 - COMPUTAÇÃO QUÂNTICA EM L5

Os números complexos têm grande influência em vários campos de estudo, tais como eletromagnetismo e física quântica. Além disso, têm aplicações em resolução de equações algébricas e equações diferenciais.

Uma promissora aplicação dos números complexos está relacionada ao desenvolvimento dos computadores quânticos, cujo funcionamento tem como base conceitos que envolvem esse conjunto numérico. Os computadores quânticos proporcionarão grandes avanços em relação à velocidade de processamento de dados, reduzindo drasticamente o tempo de execução de uma tarefa, quando comparado aos computadores “clássicos”, iguais aos que temos hoje.

Tarefas, como a fatoração de números imensos – de grande utilidade para a criptografia de informações –, podem demorar anos para serem completadas, mesmo com o poder de processamento de vários computadores. Em um computador quântico, conjectura-se que a mesma tarefa poderá ser realizada em questão de segundos.

Imagine o seguinte: em uma lista composta pelos nomes de muitas pessoas e por números de telefones vinculados a esses nomes, pretende-se obter o nome de uma delas conhecendo o número de seu telefone. Um computador clássico compararia números e nomes um a um, levando um bom tempo para executar a tarefa. O computador quântico faria uma análise paralela de todos os itens, ou seja, verificaria todos os números e nomes de uma só vez, sobrepondo as informações, e rapidamente teria o resultado com o nome vinculado ao número de telefone.

FONTE: BALESTRI 2016.

Utilizando o QUADRO 7, podemos observar algumas das áreas, as quais o conteúdo dos números complexos pode ser utilizado, assim como podemos verificar quais obras fazem referência a aplicações dos números complexos.

QUADRO 7 - NÚMEROS COMPLEXOS EM OUTRAS ÁREAS DO CONHECIMENTO

TEMAS RELACIONADOS AOS NÚMEROS COMPLEXOS	OBRAS
Grandezas elétricas	L1, L4, L6, L7
Computação quântica	L5
Rotação de uma mesma figura	L1, L4, L6
Aerodinâmica	L7
Sistemas dinâmicos	L7
Linhas de transmissão	L7
Movimento de líquidos e gases ao redor de obstáculos	L4, L7

FONTE: Autor 2021.

3.5 ANÁLISE SOBRE A ABORDAGEM HISTÓRICA NOS LIVROS DIDÁTICOS

Como descrito anteriormente, Paiva (2016) não contempla o conteúdo dos Números Complexos. Porém, de acordo com Oliveira e Vasconcelos (2013), Vidal, et al (2016), Paiva (2009) contempla o conteúdo dos Números Complexos.

Por meio do quadro de Vidal, et al (2016), o qual tomou-se como base, elaborou-se o QUADRO 8, dentre as obras que contemplam os Números Complexos, todas as obras analisadas apresentam algum fato histórico a respeito do surgimento desse conjunto numérico. Observou-se algumas diferenças, como a escrita do matemático que Johann Karl Friedrich Gauss que também aparece como Johan Carl Friedrich Gauss. Nenhum dos livros didáticos apresenta John Wallis como autor da primeira tentativa de legitimação dos Números Complexos via interpretação geométrica, assim como nenhuma obra cita Augustin-Louis Cauchy utilizando o termo módulo e conjugado de um Número Complexo.

QUADRO 8 - PRESENÇA DA HISTÓRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS NOS LIVROS DIDÁTICOS

HISTÓRIA	OBRAS
Scipione del Ferro encontrou uma fórmula para resolução de equações cúbicas, mas faleceu antes de publicar a solução	L1
Tartaglia como autor da fórmula geral para resolução de equações cúbicas	L1,L4,L5,L6,L7
Raízes quadradas de números negativos (números não reais) citadas por Cardano em sua obra Ars Magna	L1,L2,L3,L4,L5,L6,L7
Raphael Bombelli como preceptor de que, em algumas situações, era preciso operar com números imaginários	L1,L3,L4,L5,L6,L7
Os termos real e imaginário foram utilizados pela primeira vez por René Descartes em 1637	L4
O símbolo $\sqrt{-1}$ foi usado pela primeira vez por Albert Girard	L3,L4

O símbolo i foi usado pela primeira vez por Leonard Euler para representar $\sqrt{-1}$	L1,L4,L7
Creditam apenas Jean Robert Argand e Carl Friedrich Gauss como associadores dos números complexos a pontos do plano real, conhecido como plano de Argand Gauss	L1,L3
Citam Caspar Wessel como um dos precursores da representação geométrica dos números complexos	L1,L4,L5,L6,L7
A fórmula $z^n = \rho^n(\cos n\theta + i.\sin n\theta)$ foi demonstrada pelo matemático francês Abraham De Moivre	L5,L7
Em 1832 Gauss utilizou a expressão Números Complexos	L1,L4,L7
William Rowan Hamilton representou um Número Complexo como par ordenado de números reais	L1,L3,L6

FONTE: Adaptado VIDAL, ET AL 2016.

Em L1 (DANTE, 2016) apresenta que Argand e Gauss foram os primeiros a legitimar o plano complexo, no entanto, o livro tem uma parte com a história dos Números Complexos, posteriormente é falado sobre Wessel como precursor da representação geométrica dos Números Complexos. De acordo com Eves (2011); Ribeiro (2015); Rosa (1998) Caspar Wessel era um agrimensor (cartografo e topógrafo) e Jean Robert Argand era bibliotecário (cuidador de livro). Nas obras L1 (DANTE, 2016), L3 (DEGENSZAJN; ET AL, 2016), L4 (SMOLE; DINIZ, 2016) e L6 (SOUZA; GARCIA, 2016) chamam Wessel e Argand de matemáticos, enquanto em L5 (BALESTRI, 2016) omite o termo matemáticos e em L6 (SOUZA; GARCIA, 2016) os autores utilizam a palavra estudiosos para fazer referência a Wessel, Argand e Gauss.

Em L5 (BALESTRI, 2016) relata que a fórmula $(\cos \alpha + i.\sin \alpha)^n = \cos (n\alpha) + i.\sin (n\alpha)$ não foi demonstrada por De Moivre, em seus trabalhos fica claro que ele conhecia essa fórmula. Por isso a fórmula é conhecida por seu nome.

Em L7 (LEONARDO, 2016) relata que o matemático francês Abraham De Moivre (1667-1754) apresentou pela primeira vez em 1730 a fórmula para o cálculo de z^n chamada de 1ª fórmula de De Moivre.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No período de desenvolvimento desse trabalho, por meio da revisão sistemática de literatura, conheci diversas formas de trabalhar o conjunto dos Números Complexos. Também verifiquei, pelo relato de experiência de outros estudantes e docentes, as diversas dificuldades dos alunos e, até mesmo, as dificuldades dos docentes para conseguir tratar esse conteúdo de forma diferente da puramente algébrica.

Tendo como fios condutores o referencial teórico apresentado neste trabalho e os objetivos iniciais desta pesquisa, sendo eles — investigar como é feita a manipulação geométrica dos Números Complexos; analisar o contexto histórico do surgimento dos Números Complexos; verificar como o conteúdo dos Números Complexos se relaciona com outras áreas — pude analisar quais dos livros didáticos aprovados no PNLD 2018 utilizam outras abordagens para ensinar conteúdo dos Números Complexos. Fazendo uma comparação dos livros analisados neste trabalho e nos artigos de Oliveira e Vasconcelos (2013) e Vidal, et al (2016), o livro do professor Manoel Rodrigues Paiva 1ª edição (2009) contemplava o conteúdo dos Números Complexos, porém na 3ª edição (2016), esse conteúdo foi deixado de lado. Olhando para a BNCC, vemos que esse conteúdo não é mais obrigatório, assim, Paiva (2016) deixou esse capítulo fora de sua obra.

A maior parte dos livros apresenta uma contextualização histórica do surgimento dos Números Complexos, todos apresentam alguma representação geométrica desses números, sendo que apenas Balestri (2016) utiliza um software de geometria dinâmica para apresentar o conceito de conjugado de um Número Complexo. Embora muitos professores defendam a ideia dos Números Complexos não apresentarem quase nenhuma aplicação prática, observei que em vários dos livros analisados mencionavam diversas aplicações, alguns até utilizavam exemplos resolvidos para entender como esse conjunto pode ser empregado em áreas como na arte para rotação de figuras, ou em grandezas elétricas, tanto para o transporte de energia quanto para resolução de circuitos elétricos em corrente alternada.

Ao estudar a História dos Números Complexos, pude notar como foi o trabalho de diversos matemáticos, até que a teoria dos Números Complexos estivesse consolidada. Este recurso serve não apenas como motivação para os alunos encararem este assunto de forma mais interessante, mas a riqueza do longo percurso

histórico dos Números Complexos pode ajudar o aluno a ter uma ideia de como o conhecimento matemático é construído ao longo da história.

Apresentar aplicações pode ser um recurso motivador tanto para o docente quanto para o discente. O aluno tem noção de que aquele conhecimento pode ser empregado em uma situação prática, desta forma o conhecimento é convertido do abstrato para o concreto. Por meio das aplicações também é possível fugir daquela ideia de que o conteúdo é visto apenas para poder passar no vestibular.

Durante a realização desse trabalho, notei alguns aspectos que podem vir a ser novos caminhos para pesquisa futura. Destaco aqui o aspecto de realizar uma aplicação em circuitos elétricos para ensinar Números Complexos, e, deste modo, apresentar alguns componentes elétricos como resistores, capacitores e indutores e seus respectivos comportamentos em corrente alternada.

Uma questão que pode ser aprofundada é a utilização de softwares de geometria dinâmica, como por exemplo o GeoGebra. Com o auxílio deste software, os estudantes podem verificar que os Números Complexos podem ser representados algebricamente ou geometricamente, e assim, fazer a relação entre essas representações.

REFERÊNCIAS

AMORIM, T. M.; OLIVEIRA, P. C. **O software geogebra: uma ferramenta para o ensino dos números complexos**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, 2016, São Paulo. Anais... Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2016. Disponível em: < http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/6777_2846_ID.pdf >. Acesso em: 1 fev. 2021.

BALESTRI, R. **Matemática: interação e tecnologia**. 2ª ed. São Paulo: Leya, 2016. v. 3.

BARBOSA, G. **Desafios e possibilidades de integrar o ensino de números complexos ao uso do software geogebra**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013. Curitiba. Anais... Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2013. Disponível em: < http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/2296_866_ID.pdf >. Acesso em: 1 fev. 2021.

BERMEJO, A. P. B. et al. **Dificuldades na aprendizagem dos números complexos**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, X, 2010. Salvador. Anais... Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2010. Disponível em: < https://atelierdigitas.net/CDS/ENEM10/artigos/PT/T11_PT2135.pdf >. Acesso em: 1 fev. 2021.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. **Guia de livros didáticos: PNLD 2018: Matemática**/ Brasília, 2017. Disponível em: < <http://www.fnede.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/guia-do-pnld/item/11148-guia-pnld-2018> > Acesso em: 02 abr. 2021.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília (DF), 2007. Disponível em: < <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf> >. Acesso em: 18 mar. 2021.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino médio) – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias**. Brasília, Ministério da Educação, 2000. Disponível em: < <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf> > Acesso em: 11 mar. 2021.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais / Secretaria de Educação Fundamental**. – Brasília: MEC/SEF, 1997. Disponível em: < <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf> >. Acesso em: 31 mar. 2021.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 2001.

CARNEIRO, J. P. **A geometria e o ensino dos números complexos**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VIII, 2004, Recife. Anais... Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2004. Recife. Disponível em: < <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/15/PA07.pdf> >. Acesso em: 1 fev. 2021

DANTE, L. R. **Matemática - contexto & aplicações**. 3ª ed. São Paulo: Ática, 2016. v. 3.

DEGENSZAJN, D. et al. **Matemática: ciência e aplicações**. 9ª ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 3.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**; tradução Hygino H. Domingues. 5ª ed. São Paulo: Unicamp, 2011.

FILHO, F. A. S. B. **Números complexos: dificuldades apresentadas pelos discentes de uma escola da região metropolitana de Belém acerca de atividades envolvendo a forma algébrica dos números complexos**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, X, 2010. Salvador. Anais... Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2010. Disponível em: < <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/15/PA07.pdf> >. Acesso em: 1 fev. 2021.

FONTES, C. A.; MUNIZ, R. S. S. **Coordenadas polares no ensino médio: contribuições para o ensino e a aprendizagem de trigonometria e números complexos**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013. Curitiba. Anais... Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2013. Disponível em: < http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/3540_1977_ID.pdf >. Acesso em: 1 fev. 2021.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6ª ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GIOVANNI, José Ruy. BONJORNIO, José Roberto. **Matemática uma nova abordagem**. São Paulo: FTD, 2001. v. 3.

JESUS, M. A. S.; TESTANI, G. B. **As atitudes em relação à matemática e o desempenho em cálculo diferencial e integral na variável complexa**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, 2016, São Paulo. Anais... Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2016. Disponível em: < http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5787_3122_ID.pdf >. Acesso em: 1 fev. 2021.

LEONARDO, F. M. **Conexões com a matemática**. 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2016. v. 3.

MAIORES MATEMÁTICOS – BHASKARA. Toda a Matemática. **Youtube**. 28 de fev. 2021. 21min07s. Disponível em: < https://www.youtube.com/watch?v=MTtrquw5Cko&t=842s&ab_channel=TodaaMatem%C3%A1tica > Acesso em: 21 de jul 2021.

MERINO, O. **A short story of complex numbers**. University of Rhode Island, 2006. Disponível em: <<http://www.math.uri.edu/~merino/spring06/mth562/ShortHistoryComplexNumbers2006.pdf>>. Acesso em: 7 jul. 2021.

MILIES, F. C. P. **História dos números complexos**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, I, 1987. São Paulo. Anais... Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 1987. Disponível em: <www.sbembrasil.org.br/files/eneml.pdf>. Acesso em: 1 fev. 2021.

MOREIRA, A. A. **Motivação para o ensino e aprendizagem dos números complexos: uma abordagem com aplicações**. 2018. 112 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba.

NETO, R. V. **O ensino de números complexos**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013. Curitiba. Anais... Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2013. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/3669_2071_ID.pdf>. Acesso em: 1 fev. 2021.

OLIVEIRA, F. E. F.; VASCONCELOS, F. R. N. **Uma proposta pedagógica para as aulas de números complexos no ensino médio à luz da aprendizagem significativa de Ausubel**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI, 2013. Curitiba. Anais... Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2013. Disponível em: <http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/anais/XIENEM/pdf/2540_1313_ID.pdf>. Acesso em: 1 fev. 2021.

PAIVA, M. **Matemática**. 3ª ed. São Paulo: Moderna, 2016. v. 3.

PARANÁ. Secretaria de Estado de Educação do Paraná. Diretrizes Curriculares da Educação Básica – Matemática. Paraná, 2008. Disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/diretrizes/dce_mat.pdf>. Acesso em: 28 mar. 2021.

PRESTES, D., CHAVANT, E. **Matemática: Quadrante – matemática**. 1ª ed. São Paulo: SM, 2016. v. 3.

RAMOS, A.; FARIA, P. M.; FARIA, Á. **Revisão sistemática de literatura: contributo para a inovação na investigação em Ciências da Educação**. Revista. Diálogo Educacional. Curitiba, v. 14, n. 41, p. 17-36, jan. 2014.

RIBEIRO, R. C. N. **Números complexos: aplicações**. 2015. 70 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.

ROSA, M. S. **Números Complexos: Uma Abordagem Histórica para Aquisição do Conceito**. 1998. 170 p. Dissertação. (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

SILVA, L. P. **Quatérnios: os números complexos do espaço quadridimensional**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, VII, 2001. Rio de Janeiro. Anais... Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2001.

SMOLE, K. S., DINIZ, M. I. **Matemática para compreender o mundo**. 1ª ed. São Paulo: Saraiva, 2016. v. 3.

SOUZA, J. R; GARCIA, J. S. J. **#Contato matemática**. 1ª ed. São Paulo: FTD, 2016. v. 3.

VIDAL, F. A. et al. **Reflexões sobre a história da matemática abordada nos livros didáticos do ensino médio: uma análise da história da estatística e dos números complexos**. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XII, 2016, São Paulo. Anais... Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), 2016. Disponível em: < http://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5638_3235_ID.pdf >. Acesso em: 1 fev. 2021.