

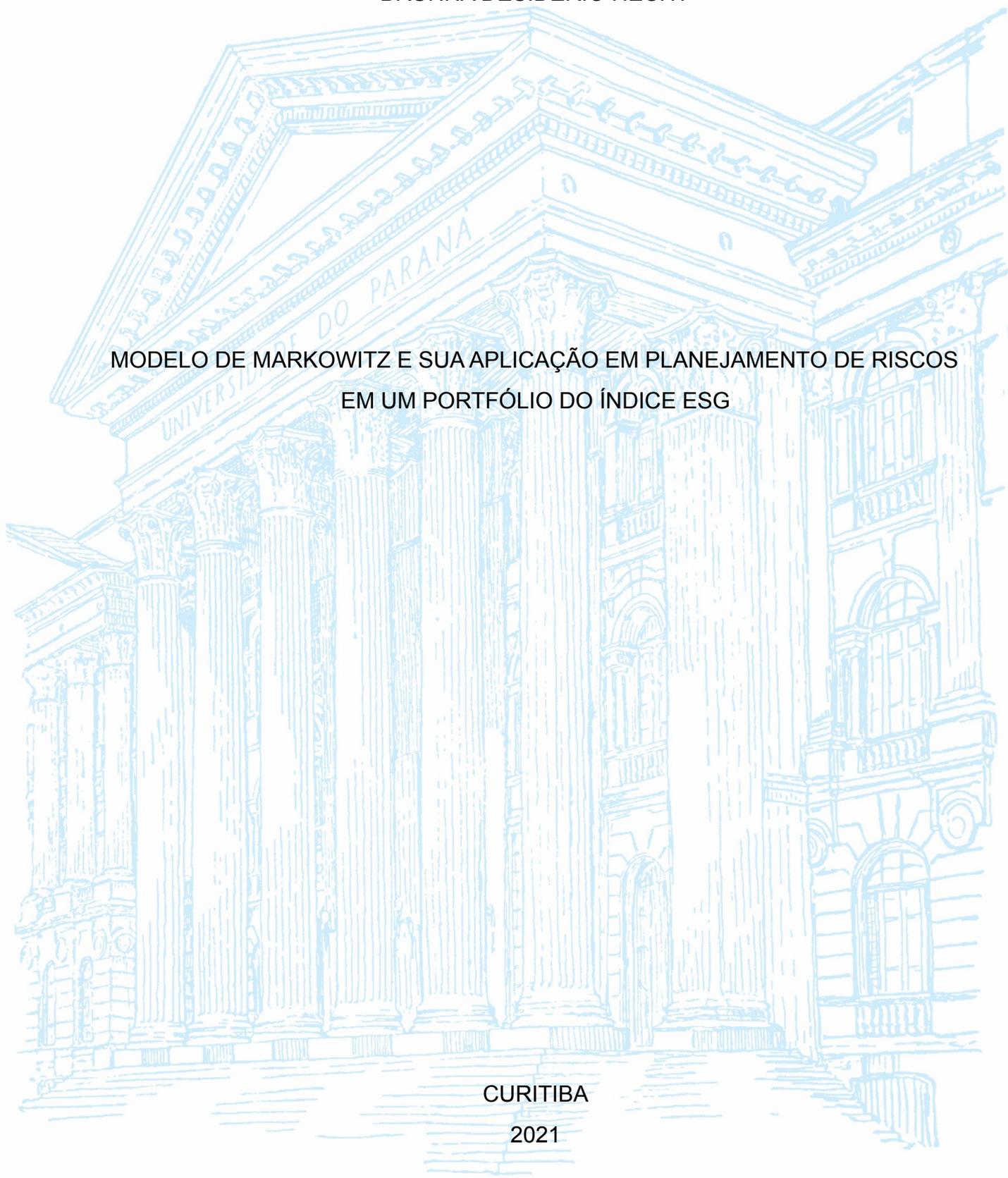
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

BRUNNA DESIDERIO HECHT

MODELO DE MARKOWITZ E SUA APLICAÇÃO EM PLANEJAMENTO DE RISCOS
EM UM PORTFÓLIO DO ÍNDICE ESG

CURITIBA

2021



BRUNNA DESIDERIO HECHT

MODELO DE MARKOWITZ E SUA APLICAÇÃO EM PLANEJAMENTO DE RISCOS
EM UM PORTFÓLIO DO ÍNDICE ESG

Monografia apresentada ao curso de Graduação
em Matemática, Setor de Ciências Exatas,
Universidade Federal do Paraná, como requisito
parcial à obtenção do título de Licenciado em
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Carlos Matioli.

CURITIBA

2021

AGRADECIMENTOS

A minha família, que apesar de todas as dificuldades estiveram sempre me apoiando e nos momentos de alegria estavam ao meu lado para compartilhar. Em especial minha mãe, que me incentiva nos estudos desde pequena e sempre buscou maneiras para que eu pudesse conseguir todas as oportunidades possíveis.

A Deus, pela minha vida, e por permitir que eu pudesse ultrapassar todos os obstáculos enfrentados até o momento e por todo o cuidado para comigo.

Aos meus amigos os quais estiveram juntos comigo nessa caminhada de formação, tanto dentro da universidade quanto fora.

À meu orientador, Luiz Carlos Matioli, por aceitar embarcar nesse desafio comigo e sempre estar à disposição acompanhando meu trabalho.

RESUMO

Este trabalho tem como proposta analisar o desenvolvimento sustentável das empresas, com maior foco no tema *ESG (Environmental, Social and Governance)*.

Para isso, será tomado como base o Modelo de Markowitz e qual a sua aplicabilidade no cenário de planejamento de riscos, exibindo, quando houver, seus pontos positivos e negativos.

É uma pesquisa com abordagem exploratória, conforme Gil (2002) “as pesquisas exploratórias têm como objetivo proporcionar maior familiaridade com o problema, com vistas a torná-lo mais explícito ou a constituir hipóteses”, ou seja, com isso podemos explorar todas as vertentes desse modelo e nos familiarizar com o que nos é proposto e entender como podemos aplicá-lo de maneira eficaz.

Essa pesquisa será embasada no livro de Edwin Elton (2012) “Moderna Teoria de Carteiras e Análise de Investimentos”.

Palavras-chave: Markowitz. Planejamento. Riscos. Fronteira eficiente. ESG.

ABSTRACT

This paper proposes to analyze the sustainable development of companies, with greater focus on the ESG (Environmental, Social and Governance) theme.

For this, the Markowitz Model will be used as a basis together with its applicability in the risk planning scenario, showing, when there is, its positive and negative points.

It is a research with an exploratory approach, according to Gil (2002) "exploratory research aims to provide greater familiarity with the problem, with a view to making it more explicit or constituting hypotheses", that is, with this we can explore all the aspects of this model and familiarize ourselves with what is proposed to us and understand how we can apply it effectively.

This research will be based on the book by Edwin Elton (2012) "Modern Portfolio Theory and Investment Analysis".

Keywords: Markowitz. Planning. Risks. Efficient frontier. ESG.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1. Forma matricial para 2 ativos.....	23
Figura 2. Forma matricial para 3 ativos.....	23
Figura 3. Forma matricial para n ativos.....	24
Figura 4. Concessão e tomada de empréstimo à taxa sem risco.....	28
Figura 5. Combinação de ativos livres de risco e carteira de risco.....	28
Figura 6. Exemplo com 20 ativos.....	34
Figura 7. Exemplo de uso da fórmula em Excel para somar os 20 ativos.....	35
Figura 8. Fórmula MATRIZ.MULT.....	35
Figura 9. Matriz da Covariância.....	36
Figura 10. Variância do Portfólio.....	37
Figura 11. Risco do Portfólio.....	37
Figura 12. Definir Objetivo.....	38
Figura 13. Alterando Células Variáveis.....	39
Figura 14. Restrições.....	39
Figura 15. Sem Venda a Descoberto.....	40
Figura 16. Com Venda a Descoberto	40
Figura 17. Campo Resolver.....	41
Figura 18. Sem Venda a Descoberto Formulado - Markowitz.....	41
Figura 19. Com Venda a Descoberto Formulado - Markowitz.....	42
Figura 20. Coeficiente Angular.....	43
Figura 21. Solver - Resolver.....	44
Figura 22. Sem Venda a Descoberto Formulado - Markowitz.....	48
Figura 23. Com Venda a Descoberto Formulado - Markowitz.....	48

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Ativos selecionados para análise.....	32
Tabela 2 - Ativos selecionados para análise mensalmente.....	33
Tabela 3 - Portfólio Ótimo - SVD e CVD.....	49
Tabela 4 - SVD e CVD - Retorno e Risco.....	50

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	9
2 OBJETIVOS.....	10
3 REFERENCIAL TEÓRICO.....	11
3.1 Perfis de Investidor.....	11
3.2 Tipos de Riscos.....	13
3.3 Introdução ao Modelo de Markowitz.....	14
3.3.1 Otimização do Portfólio.....	14
3.3.2 Teoria Moderna do Portfólio.....	14
3.3.3 Fronteira Eficiente.....	16
3.4 ESG (<i>Environmental, Social and Governance</i>).....	17
3.4.1 Contexto e Problematização.....	18
3.4.2 Aplicabilidade nas Empresas.....	19
3.5 Resultados Obtidos.....	21
3.5.1 Definição de Portfólio segundo Markowitz.....	21
3.5.2 Venda a Descoberto.....	25
3.5.3 Inclusão de um Ativo Livre de Risco.....	27
3.5.4 Modelo de Índice Único.....	30
3.5.5 Seleção dos Ativos - Aplicação.....	32
3.5.5.1 Modelo de Markowitz.....	34
3.5.5.2 Ativo Livre de Risco.....	42
3.5.5.2.1 Sem Venda a Descoberto.....	42
3.5.5.2.1 Com Venda a Descoberto.....	44
3.5.5.3 Modelo de Índice Único.....	45
4 CONSOLIDAÇÃO RESULTADO - MODELO DE MARKOWITZ.....	48
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	51
REFERÊNCIAS.....	52

1 INTRODUÇÃO

Algo natural do ser humano é ter um sentimento de aversão ao pensar em correr algum tipo de risco. Por isso, em grande maioria, gastamos boa parte do nosso tempo nos planejando e buscando formas para estar seguro.

Risco por sua definição em si não tem um significado de algo bom, sendo o oposto de segurança, segundo o dicionário de *Oxford Language* temos “probabilidade de insucesso de determinado empreendimento, em função de acontecimento eventual, incerto, cuja ocorrência não depende exclusivamente da vontade dos interessados” e já para o site TRT9 temos “na vida cotidiana um risco é uma exposição à perda ou dano: Um fator, coisa, elemento ou um caminho que envolve perigo incerto”.

Após sabermos um pouco de sua definição geral, realmente fica difícil que ao ouvirmos essa palavra, não seja remetido a uma sensação ruim automaticamente.

Entretanto, é possível que haja uma “receita” que seguindo passo a passo, possamos entender mais sobre riscos tendo como foco o mercado financeiro? Para isso, vamos explorar um pouco mais sobre o Modelo de Markowitz (1952).

A Teoria de Markowitz, desenvolvida por Harry Markowitz em 1952, apesar de nos chocarmos com relação ao tempo de sua existência, ainda sim continua sendo muito confiável e utilizada por muitos gestores de investimentos.

O seu principal objetivo é permitir calcular o risco de uma carteira de investimentos, considerando qualquer tipo de ativo que a compõe. Ou seja, ela tem como utilidade determinar o nível de risco considerando um certo nível de retorno.

Essa monografia trará à tona o tema *ESG (Environmental, Social and Governance)*, sendo esse termo referenciado a fatores ambientais integrados nas ações de uma empresa. Devido a todas as mudanças climáticas que estão ocorrendo de maneira catastrófica e rápida, foi gerado uma grande demanda por soluções sustentáveis e que as empresas assumam uma parte de responsabilidade social por seus negócios, de modo que investidores e consumidores acabam optando por buscar quem melhor se posiciona nessa pauta ESG.

2 OBJETIVOS

2.1 OBJETIVO GERAL

Realizar uma análise sobre o Modelo de Markowitz e entender sua aplicabilidade no âmbito de riscos dentro do mercado financeiro explorando o conteúdo matemático proposto no livro “Moderna Teoria de Carteiras e Análise de Investimentos”.

2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Analisar sobre três tipos de perfil de investidor, sendo eles: conservador, moderado e agressivo, entendendo sua relação com riscos.
2. Relação Risco x Retorno.
3. Explorar sobre a Teoria das Carteiras e sua influência para demais modelos na área da Economia.
4. Analisar com vistas ao *ESG (Environmental, Social and Governance)* e suas relações de riscos em uma carteira de investimento.

3 REFERENCIAL TEÓRICO

3.1 Perfis de Investidor

Para definir qual é o seu tipo de perfil, segundo a XP Investimento (2020), é necessário descobrir a sua aversão ao risco e o seu horizonte de investimentos. Por exemplo, quanto maior sua disposição a correr risco e quanto maior o horizonte de investimentos, maior arriscado será seu investimento e com isso maior será o seu retorno esperado. Mas o que seria isso? Veremos abaixo suas definições dadas pela XP Investimentos (2020):

- Aversão à Risco: Existem três fontes de aversão à risco sendo: a primeira é o conhecimento, afinal é natural que tenhamos medo de algo que não entendemos, que não temos o conhecimento concreto; a segunda é a reserva de emergência, é importante que tenhamos uma reserva pois caso seja necessário liquidar suas posições em um momento de baixa do mercado, você consegue honrar suas obrigações; e por fim, o emocional, sendo uma espécie de termômetro para medir sua reação quando sofre perdas financeiras.
- Horizonte de Investimentos: Esse é o prazo que você deseja deixar seu dinheiro aplicado, caso não haja nenhum imprevisto. E se houver e for necessário realizar o resgate, desde que não seja um valor representativo e que você consiga realizar os ajustes necessários para que você se mantenha em equilíbrio no seu perfil.

É importante fazer um bom *match* entre essas duas vertentes, ou seja, entre a sua aversão e seu horizonte de investimentos para evitar resultados que possam desagradar e levar a perdas em seus investimentos.

Sabendo dessas informações, vamos verificar um pouco sobre os tipos de perfis e suas especificidades.

Lembrando que o perfil de investidor não é algo que definido uma vez, não mudará mais, ele é mutável. Os investidores podem mudar com o passar do tempo, após adquirir mais prática e experiência, aprimorar o conhecimento e ter mais confiança.

A Anbima (Associação Brasileira das Entidades dos Mercados Financeiros e de Capitais) define três tipos de perfil do investidor: conservador, moderado e agressivo. Veremos a seguir as definições de cada perfil segundo o Nubank (2021):

- Conservador: Possui maior aversão ao risco, prefere investir em produtos que apresentem nenhum ou baixo risco. Busca obter ganhos com o menor risco possível, mesmo que isso afete a rentabilidade. Nesse sentido, podemos exemplificar alguns investimentos, como: CDBs (Certificado de Depósito Bancário), Tesouro Direto e Fundos de Renda Fixa.
- Moderado: Corre um risco médio em suas aplicações, está disposto a assumir riscos um pouco maiores para também ter uma rentabilidade maior, mas não abre mão de certa segurança. Não é completamente avesso ao risco e aceita assumir um pouco de risco para obter ganhos maiores. Nesse sentido, podemos exemplificar alguns investimentos, como: aplicar em Renda Fixa mas também aplicar em Renda Variável (ações, por exemplo).
- Agressivo: Disposto a correr riscos para ter maior rentabilidade e até mesmo perder parte de seu patrimônio para isso. Possui inteligência emocional para lidar com as perdas financeiras, reserva de emergência e conhecimento de mercado. Nesse sentido, podemos exemplificar alguns investimentos, como: Renda Variável - ações, fundos de ações, opções, entre outros.

Saber qual é o seu perfil de investidor oferece segurança no momento de investir e evita surpresas em seus rendimentos. Com seu perfil definido, a partir disso é possível conhecer seus objetos, qual é sua situação financeira e qual é o seu nível de conhecimento sobre o mercado financeiro. Logo, sendo uma boa

combinação de tudo, ajuda a garantir que possa ser proporcionado o resultado esperado de acordo com os riscos que você está disposto a assumir.

3.2 Tipos de Riscos

Existem diversos tipos de riscos que precisamos analisar antes de realizar um investimento. Vamos verificar sobre alguns deles:

- Risco de Crédito: Está relacionado à inadimplência, ou seja, com a possibilidade de não ser cumprido os compromissos financeiros assumidos.
- Risco de Liquidez: Está relacionado a dificuldade ou facilidade de resgatar o dinheiro que foi investido, ou seja, a agilidade em obter recursos, na facilidade em vender um ativo da carteira.
- Risco de Mercado: Está relacionado às oscilações que podem ocorrer no mercado, como por exemplo, bolsa de valores.
- Risco Operacional: Está relacionado a perdas provindas por falhas humanas ou tecnológicas.
- Risco Financeiro: Está relacionado ao quanto há de dívidas para financiar os ativos.
- Risco do Negócio: Está relacionado a oscilação dos seus resultados, do faturamento.
- Risco Legal: Está relacionado ao não cumprimento de contratos, acordos ou promessas que não tiveram uma assistência legal.

3.3 Introdução ao Modelo de Markowitz

3.3.1 Otimização de Portfólios

Markowitz (1952) propôs um modelo que tem como objetivo obter combinações que sejam mais eficientes para as alocações de recursos. É defendido que a minimização do risco é obtida por meio da diversificação de uma carteira e pela correlação mínima entre os ativos que a compõem, sendo isso uma otimização do seu portfólio ou como é mais conhecido, de sua carteira.

3.3.2 Teoria Moderna de Portfólios

Trata-se de uma teoria que permite aos investidores encontrarem o maior nível de retorno para um certo nível de risco e também podendo ser utilizado ao contrário, o menor nível de risco para um certo nível de retorno. Ou seja, ela é utilizada na construção de carteiras/portfólios que otimizem ou maximizem o seu retorno esperado respeitando o nível de risco.

Tem como maiores adeptos os investidores que na sua essência são avessos a risco, mas que também consideram que o risco tem uma dependência a maiores retornos.

Algo imprescindível nessa teoria é que ela aconselha que o risco e o retorno de um ativo não deve ser visto sozinho, ou seja, deve ser analisado qual o impacto desse ativo na carteira/portfólio no total. Isso nos mostra a importância de entender a correlação entre os ativos que compõem a sua carteira/portfólio de investimentos.

Na prática, para a sua aplicação teríamos que passar pelos seguintes passos:

- Análise dos Títulos: analisar profundamente os títulos desejados;
- Análise das Carteiras: realizar projeções dos rendimentos esperados e do risco dos ativos em conjunto;
- Seleção de Carteiras: estudar qual será a melhor combinação dos ativos analisados e encontrar sua carteira/portfólio que mais se encaixa com o seu perfil e que esteja dentro de suas expectativas.

O fato de considerar o risco e retorno em conjunto dentro de uma carteira/portfólio de investimento, é o que seria resultado da construção de "fronteiras eficientes" de portfólios otimizados. Mais à frente veremos do que se trata esse assunto.

Ao se falar desta teoria, existem algumas definições que precisam ser apresentadas para a introdução do modelo.

Para iniciar, temos o retorno médio esperado de um ativo i , sendo sua denotação \bar{R}_i , que é a média aritmética do ativo i no período j e $j \in \{1, 2, 3, \dots, m\}$, utilizamos a barra acima dos símbolos para indicar o valor esperado, R_{ij} indica o j -ésimo resultado possível para o retorno do ativo i (ELTON, 2012), com isso temos:

$$\bar{R}_i = \sum_{j=1}^m \frac{R_{ij}}{m} . \quad (1)$$

Sabendo sobre o valor esperado, outro fator relevante é sobre o operador esperança, que se trata de uma medida de variabilidade, com isso é possível verificar algumas propriedades úteis (ELTON, 2012):

- I. O valor esperado da soma de dois retornos é igual à soma do valor esperado de cada retorno, isto é:

$$E(R_{1j} + R_{2j}) = E(R_{1j}) + E(R_{2j}) . \quad (2)$$

- II. O valor esperado de uma constante C multiplicada por um retorno é a constante multiplicada pelo valor esperado, isto é:

$$E[C(R_{1j})] = CE(R_{1j}) . \quad (3)$$

Outro conceito importante, para a introdução do modelo, é a variância de um ativo i , sendo denotada por σ_i^2 - medida de dispersão em relação à média, ou seja, o quanto os valores resultantes variam em relação à média. Para calcular a variância, ou dispersão em torno da média, utilizamos a fórmula abaixo:

$$\sigma_i^2 = \sum_{j=1}^m \frac{(R_{ij} - \bar{R}_i)^2}{m} . \quad (4)$$

Sabendo da variância não podemos deixar de citar o desvio padrão, sendo denotado por σ_i , que seria o risco do ativo i . Com isso, ficamos:

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^m \frac{(R_{ij} - \bar{R}_i)^2}{m}} . \quad (5)$$

3.3.3 Fronteira Eficiente

Como já descrito, a base do modelo de Markowitz (1952), ou como é mais conhecida, Teoria Moderna de Portfólios se trata da construção de “fronteiras eficientes” de portfólios otimizados, considerando que risco e retorno precisam ser analisados em conjunto na carteira de investimentos.

São as combinações entre os possíveis ativos desejados, que são representados, com mais frequência, como pontos em um gráfico no qual o eixo horizontal é considerado correspondente ao risco e o eixo vertical é considerado correspondente ao retorno.

Após considerarmos todos os ativos desejados e eles já estarem sendo representados no gráfico, conectamos esse pontos e como resultado temos uma curva hiperbólica, e isso é a representação da fronteira eficiente.

Após analisar as várias possibilidades de carteiras existentes sobre a fronteira eficiente, o investidor consegue identificar com mais clareza e precisão qual é a carteira que lhe dará o maior retorno dado o seu perfil de risco.

3.4 ESG (*Environmental, Social and Governance*)

O ESG (*Environmental, Social and Governance*) advém do termo em inglês, ou se pensarmos em português, sua tradução livre ficaria ASG, referindo-se à Ambiental, Social e Governança. No universo empresarial, um investimento ESG é um conjunto de padrões e de boas práticas incorporando a visão de uma empresa socialmente consciente baseada nesses três pilares.

Esses três pilares são utilizados como parâmetro para mensurar se uma empresa possui sustentabilidade empresarial. Veremos abaixo o que significa cada um:

- *Environmental* (Ambiental): examinam o desempenho administrativo de uma empresa referente ao uso de recursos naturais em determinada área atuante. Incluindo emissões de gases de efeito estufa, a eficiência energética, poluição, gestão de resíduos e efluentes, ou seja, sua capacidade de mitigar esses riscos.
- *Social* (Social): examinam como a empresa gerencia as suas políticas e seus relacionamentos com diferentes públicos (colaboradores, fornecedores, clientes, comunidades, etc...). Também contempla os aspectos ligados à inclusão, diversidade, aos direitos humanos, à privacidade e à proteção de dados.
- *Governance* (Governança): examinam como a empresa se posiciona em respeito às esferas de liderança, questões relacionadas à política de remuneração dos cargos altos, à diversidade na composição do conselho de gestão, à transparência, estrutura dos comitês de auditoria e fiscalização, processo de sucessão, ambiente de controle (riscos e compliance).

Como vimos acima, chegamos a conclusão que se busca verificar se a empresa realmente pode ser considerada uma opção viável para investimentos sustentáveis e que seja capaz de impactar positivamente essa tríplice (financeira, social e ambiental).

Resumindo, o ESG nos permite realizar uma avaliação da empresa em que estamos pretendendo investir ou que já investimos considerando o quanto é uma

prioridade para elas a questão da sustentabilidade, assim indo além das métricas padrões de investimentos das quais estamos acostumados a avaliar. Podemos até utilizá-lo como um ponto crucial para atestar que a organização entende o quão importante é o seu papel de influenciador, do impacto negativo ou positivo que ela está exercendo e até mesmo do valor que pode estar gerando resultante de seus negócios.

3.4.1 Contexto e Problematização

Agora que entendemos do que se trata o *ESG*, veremos quando se deu início a esse conceito.

Desde muito tempo atrás é possível notar a constante evolução da ideia de um investimento de maneira concreta e definida por critérios, podemos tomar como exemplo o termo *SRI (Socially Responsible Investing)*, que em sua tradução livre ficaria Investimento Sustentável Responsável, que surgiu entre 1970 e 1980, quando foram considerados critérios sociais na tomada de decisões sobre as empresas. Com isso, essa preocupação sustentável nos negócios se difundiu até que recentemente, exatamente em 2005, tivemos o surgimento da sigla que estamos discutindo em questão, *ESG*.

Então, em 2005, o termo foi citado em um relatório “*Who Cares Wins*” (ou, “Ganha Quem se Importa”), que se trata de uma iniciativa da Organização das Nações Unidas (ONU). Na iniciativa, instituições financeiras de diversos países se reuniram para definir diretrizes e mostrar quão engajadas estavam com essas causas sociais e ações de preservação ao meio ambiente e como à boa governança obtêm melhores resultados.

Sendo assim, os critérios *ESG* passaram a ser fundamentais para tomada de decisões sobre os investimentos, além que servem como incentivo para as empresas melhorarem sua performance pensando ao longo prazo.

3.4.2 Aplicabilidade nas Empresas

Em consequência de tantas mudanças climáticas que estamos enfrentando, o que antes poderia se tratar de um diferencial no mercado, hoje é visto mais como um pré-requisito às práticas *ESG*, seria como um selo atestando a responsabilidade da empresa. Ou seja, não se trata apenas de uma questão de imagem e sim com efeitos sobre os retornos financeiros.

Sem dúvidas, faz com que a liderança das empresas tratem esses conceitos com outros olhos e não sigam o pensamento que para conseguir o resultado desejado, vale tudo.

Segundo Endeavor (2021), podemos verificar como aplicar as práticas em cada vertente dessa tríplice:

- Ambiental:
 - Substituir o uso de energia gerada pela queima de combustíveis fósseis por energias renováveis, como eólica ou solar.
 - Reduzir significativamente ou zerar emissões de gases de efeito estufa, como ao adotar dias de home office ou elaborar um roteiro estratégico para entrega de produtos.
 - Diminuir a geração de resíduos sólidos, o que pode ser feito pela eliminação de descartáveis que não sejam essenciais para a segurança dos trabalhadores.
 - Melhorar o gerenciamento de resíduos. Ou seja, garantir que os resíduos que não puderam ser eliminados recebam o descarte ambientalmente correto.
 - Evitar a poluição das águas, a qual pode ocorrer, por exemplo, pelo descarte de substâncias tóxicas.
 - Respeito à biodiversidade. Lembre-se que a natureza engloba milhares de espécies de seres vivos, os quais dividem o planeta conosco.
 - Adoção de medidas de prevenção a desastres e gestão de riscos.

- Social:
 - Elaborar políticas de inclusão e diversidade. Garantir que o seu quadro de funcionários seja diversificado e não excluir pessoas socialmente vulneráveis.
 - Atuar em conformidade com a legislação. Uma estratégia para isto é a contratação de consultorias com escritórios de advocacia.
 - Promover o bem-estar no ambiente de trabalho, tanto entre os próprios funcionários, quanto entre a diretoria e os funcionários.
 - Executar ações positivas com a comunidade local. Contribuir para projetos sociais desenvolvidos por esta comunidade.
 - Auxiliar no desenvolvimento intelectual dos funcionários e colaboradores.

- Governança:
 - A empresa deve atuar com ética e transparência em todas as relações em que está envolvida.
 - Garantir que os Conselhos incluam a diversidade.
 - Novamente, esteja em consonância com a legislação em todas as práticas executadas.
 - Delimitar as responsabilidades e encargos dos diretores e acionistas.
 - Elaborar ações de combate à corrupção.

Estes são somente alguns exemplos pensando nos princípios *ESG*, mas devemos alertar que não existe um manual de instruções e sim elaborar políticas conforme a realidade de cada empresa.

3.5 Resultados Obtidos

3.5.1 Definição de Portfólio segundo Markowitz

Nesta seção, estaremos tomando como base de estudo o livro de Elton (2012) e também na monografia de Paula Eastwood (2020).

O modelo de média-variância, criado por Harry Markowitz, trata-se de um modelo para seleção de carteiras que podemos classificá-las como “ótimas” na visão do investidor.

Temos a definição matemática de portfólio que seria $x \in R^n$, no qual x é composto por n componentes, em que cada componente x_i é o percentual a ser investido no ativo i , sendo $i = 1, 2, \dots, n$. Pensando na prática, como exemplo, um portfólio que é composto por 3 ativos, sendo que 30% está investido no ativo 1, 50% investido no ativo 2 e 20% investido no ativo 3, logo: $x_1 = 30\%$, $x_2 = 50\%$ e $x_3 = 20\%$. Ou podemos pensar de outra forma, assim teríamos: $x_1 = 0,3$, $x_2 = 0,5$ e $x_3 = 0,2$. Lembrando que a soma de todo o percentual investido no portfólio deve totalizar 100%, ou no segundo caso 1.

Para iniciarmos, o modelo de Markowitz utiliza como primeira medida o retorno médio esperado do portfólio de investimentos, que é denotado por \bar{R}_c , que se trata de uma média ponderada dos retornos de cada ativo, individualmente. Sua fórmula seria:

$$\bar{R}_c = \sum_{i=1}^n x_i \bar{R}_i, \quad (6)$$

sendo \bar{R}_i o retorno médio do ativo i e x_i o percentual a ser investido no ativo i .

Para entender como a equação (6) foi obtida, fazemos uso das expressões (2) e (3) apresentadas anteriormente, ou seja:

$$\bar{R}_c = E(R_c) = E\left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m x_i R_{ij}\right), \quad (7)$$

sendo R_{ij} os retornos históricos do ativo i no período j , em que $i = 1, 2, 3, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$.

Agora, usando as propriedades do operador esperança apresentadas nas equações (2) e (3), temos:

$$\bar{R}_c = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m E(x_i R_{ij}) = \sum_{i=1}^n x_i \bar{R}_i, \quad (8)$$

O próximo passo é obter uma expressão para a variância média do portfólio, que em primeira análise será feita para 2 ativos. Elton (2021) define essa variância de um portfólio c , denotada por σ_c^2 que se trata do valor esperado dos desvios quadrados do retorno médio do portfólio, com isso $\sigma_c^2 = E(R_c - \bar{R}_c)^2$. Sabendo dessas informações, podemos substituir em uma expressão as fórmulas vistas até então, ficamos com:

$$\begin{aligned} \sigma_c^2 &= E(R_c - \bar{R}_c)^2 = \sum_{j=1}^m E \left[x_1 R_{1j} + x_2 R_{2j} - (x_1 \bar{R}_1 + x_2 \bar{R}_2) \right]^2 \\ &= \sum_{j=1}^m E \left[x_1 (R_{1j} - \bar{R}_1) + x_2 (R_{2j} - \bar{R}_2) \right]^2, \end{aligned} \quad (9)$$

em que R_{1j} e R_{2j} são, respectivamente, os retornos dos ativos 1 e 2 no período j e $j = 1, 2, \dots, m$; \bar{R}_1 e \bar{R}_2 são os retornos médios dos ativos 1 e 2 respectivamente e por último, x_1 e x_2 os percentuais a serem investidos nos ativos 1 e 2 respectivamente.

Para auxiliar, lembrando que temos a expansão:

$$(X + Y)^2 = X^2 + 2XY + Y^2. \quad (10)$$

Utilizando as fórmulas (9) e (10), juntamente com as fórmulas (2) e (3), temos:

$$\begin{aligned}\sigma_c^2 &= E \left[x_1^2 (R_{1j} - \bar{R}_1)^2 + 2x_1 x_2 (R_{1j} - \bar{R}_1)(R_{2j} - \bar{R}_2) + x_2^2 (R_{2j} - \bar{R}_2)^2 \right] \\ &= x_1^2 E \left[(R_{1j} - \bar{R}_1)^2 \right] + 2x_1 x_2 E \left[(R_{1j} - \bar{R}_1)(R_{2j} - \bar{R}_2) \right] + x_2^2 E \left[(R_{2j} - \bar{R}_2)^2 \right] \\ &= x_1^2 \sigma_1^2 + 2x_1 x_2 E \left[(R_{1j} - \bar{R}_1)(R_{2j} - \bar{R}_2) \right] + x_2^2 \sigma_2^2.\end{aligned}\tag{11}$$

O termo $E \left[(R_{1j} - \bar{R}_1)(R_{2j} - \bar{R}_2) \right]$ é chamado de covariância entre os ativos 1 e 2 sendo denotado pelo símbolo σ_{12} , logo:

$$\sigma_c^2 = x_1^2 \sigma_1^2 + x_2^2 \sigma_2^2 + 2x_1 x_2 \sigma_{12}, \tag{12}$$

Podemos representar essa expressão na forma matricial para 2 ativos, com isso:

Figura 1. Forma matricial para 2 ativos

$$\sigma_c^2 = (x_1 x_2) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

FONTE: A autora (2021).

Para 3 ativos o desenvolvimento é semelhante ao de 2 ativos, ou seja:

Figura 2. Forma matricial para 3 ativos

$$\sigma_c^2 = (x_1 x_2 x_3) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

FONTE: A autora (2021).

E para generalizar, temos a forma matricial para n ativos:

Figura 3. Forma matricial para n ativos

$$\sigma_c^2 = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n) \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & & \sigma_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x^T Q x$$

FONTE: A autora (2021).

sendo $x^T = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n)$ os percentuais investidos na carteira, de maneira que os valores estejam transpostos, logo, x é a mesma definição de portfólio, somente que está disposto horizontalmente e Q é a matriz de covariâncias, a qual é simétrica definida positiva.

Então, considerando as equações vistas até o momento, temos que a fórmula da variância do portfólio é:

$$\sigma_c^2 = x^T Q x = \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, j \neq i}^n x_i x_j \sigma_{ij}, \quad (16)$$

em que x_i é o percentual a ser investido no ativo i , x_j é o percentual a ser investido no ativo j , σ_i^2 é a variância do ativo i e σ_{ij} a covariância entre os ativos i e j .

Para padronizar a covariância, a qual é uma medida de como o retorno entre os ativos se movem em conjunto, utilizamos o coeficiente de correlação, denotado por ρ_{ij} , ou seja:

$$\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (17)$$

em que ρ_{ij} é a covariância entre os ativos i e j , σ_i e σ_j os riscos dos ativos i e j respectivamente.

O coeficiente de correlação possui uma variação entre -1 e 1, ou seja, $-1 \leq \rho_{ij} \leq 1$, isso é, os ativos estão perfeitamente correlacionados em cada extremo. Assim - 1 os ativos estão perfeitamente correlacionados negativamente, 1 perfeitamente correlacionados positivamente e 0 os ativos que não possuem nenhuma correlação (ELTON, 2012).

Para o risco do portfólio de investimentos, utilizando o desvio padrão, denotado por σ_c , e para seu cálculo é necessário que tiremos a raiz quadrada da variância.

3.5.2 Venda a Descoberto

Outro ponto é que sabendo todos os componentes do seu portfólio e bem como sua situação de risco, pode ser que seja permitido ou não a venda a descoberto dos ativos. Em sua definição, segundo a Clear Corretora, temos que venda a descoberto se trata:

A venda a descoberto é uma operação de alto risco realizada no curto prazo, mas que permite que o investidor lucre com a queda do preço de um ativo, principalmente em momentos de instabilidade na bolsa, em que as ações tendem a cair. Motivada pela expectativa de que o preço de determinado ativo irá cair, a venda a descoberto consiste na venda de uma ação com o preço em alta e na recompra do papel quando o preço tiver caído, podendo ser feita no day trade (operações realizadas em um mesmo dia) ou em datas diferentes. Na venda a descoberto, a ação vendida não pertence ao vendedor. Para poder vendê-la, ele utiliza as ações de terceiros. A posição de quem realiza uma venda a descoberto é chamada de posição vendida, ou short, em inglês. Imagine que uma determinada ação esteja custando R\$ 100. Por algum motivo, como rumores que tenham saído na mídia, por exemplo, você acredita que este papel irá se desvalorizar. Com isso, você aluga esta ação e para isso tem que pagar um prêmio à pessoa que é dona da ação, por exemplo, R\$ 2,00. Uma vez alugada a ação você a vende antes que o preço caia. Se a sua expectativa se concretizar e o preço da ação cair para R\$ 80, você pode comprá-la e lucrar R\$ 18,00 (que corresponde à

diferença do preço de compra mais o valor do aluguel menos o preço de venda). Mas é claro que o contrário também pode acontecer. Se a queda do preço não ocorrer e for necessário readquirir o ativo por um valor superior, você terá prejuízo. Afinal, ao fim da transação, é necessário devolver as ações a quem as emprestou. (Clear Corretora, 2021).

Quando não há venda a descoberto, podemos minimizar o risco do portfólio com n ativos, no modelo de Markowitz, ou seja, minimizar em função da variável x a função que define o risco, conforme visto nas equações acima:

$$\sum x_i^2 \sigma_i^2 + \sum \sum x_i x_j \sigma_{ij} \quad (18)$$

Devendo satisfazer às seguintes restrições:

$$\sum x_i = 1 \text{ e } x_i \geq 0 \quad (19)$$

Na forma matricial:

$$x^T Q x \quad (20)$$

Devendo satisfazer à:

$$x^T e = 1 \text{ e } x \geq 0 \quad (21)$$

a restrição $x \geq 0$ significa que não há venda a descoberto segundo a definição anterior, não sendo permitido emprestar para investir.

Acima foi apresentado o caso em que não é permitido venda a descoberto. Caso seja permitido a venda a descoberto basta apenas retirar as restrições apresentadas nas fórmulas, $x_i \geq 0$ e $x \geq 0$ em (19) e (21) respectivamente.

Conforme Elton (2012), em consequência da diversificação do portfólio, o risco do ativo pode chegar a ser reduzido. É possível que se escolha portfólios que se aproximem de risco zero, isso com a combinação de mais ativos e dependendo também do coeficiente de correlação entre estes. Logicamente que quando aplicamos esse cenário na prática, devido a tantas variáveis é impossível que se torne viável, mas ainda sim é possível que diminuamos o risco através dessa diversificação.

Portanto, sobre a venda a descoberto podemos concluir que no caso que não há venda a descoberto significa que não é possível ter ativos de valores negativos, pois não há autorização para empréstimo de dinheiro. E para o caso que há permissão para esta venda a descoberto significa exatamente o contrário, então é possível ter ativos com valores negativos, no entanto a soma dos positivos e negativos deve resultar 1.

3.5.3 Inclusão de um Ativo Livre de Risco no Portfólio

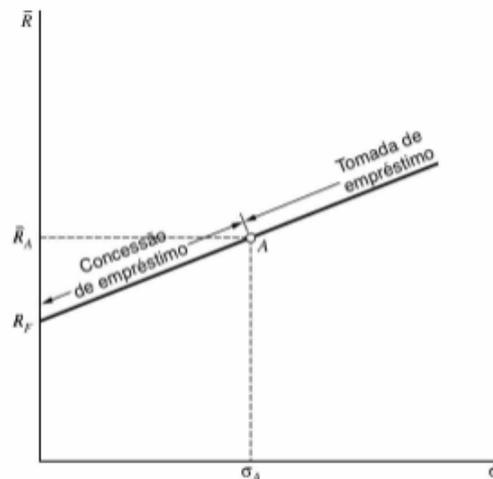
Existem ativos que são tratados no mundo financeiro como livres de riscos, como é o caso por exemplo da poupança e dos títulos do Tesouro Direto, estes últimos contam com a garantia do Governo. A seguir iremos apresentar como essa informação pode ser acrescida ao modelo de Markowitz. Para isso, denotamos o ativo livre de risco por R_f e o risco corresponde igual a zero, $\sigma_f = 0$, pois como dissemos se trata de uma taxa livre de risco. Logo o seu risco é nulo e conseqüentemente seu desvio padrão também. Já para o retorno esperado do portfólio, segundo Elton (2012), temos:

$$\bar{R}_c = R_f + \left(\frac{\bar{R}_p - R_f}{\sigma_p} \right) \sigma_c . \quad (22)$$

Para encontrar o portfólio ótimo, é necessário maximizar o coeficiente angular:

$$\theta(x) = \left(\frac{\bar{R}_p - R_f}{\sigma_p} \right) . \quad (23)$$

Figura 4. Concessão e tomada de empréstimo à taxa sem risco



FONTE: ELTON, Edwin J (2012).

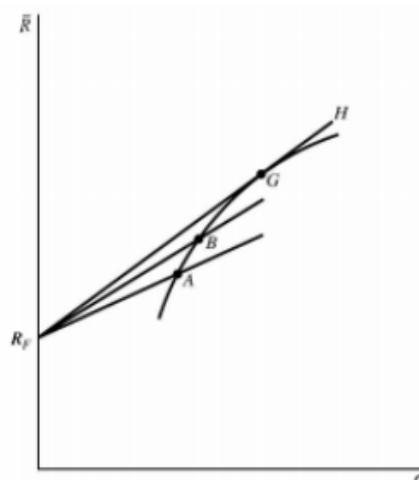
A reta tangente à fronteira eficiente é a composição do ativo livre de risco juntamente ao portfólio que possui ativos de risco, sendo ela:

$$R_p = R_f + \theta(x)(\sigma_c), \quad (24)$$

onde σ_c é o risco do portfólio.

Abaixo segue um gráfico de exemplo que contempla as retas seguindo os parâmetros anteriores, considerando que A, B, G e H são ativos livres de risco.

Figura 5. Combinação de ativos livres de risco e carteira de risco



FONTE: ELTON, Edwin J (2012).

No caso em que é permitido venda a descoberto, ou seja, portfólio com possíveis ativos de valores negativos. Segundo Elton (2012), é necessário solucionar um sistema de equações lineares para que encontremos nosso portfólio eficiente. Sendo o sistema:

$$\begin{aligned} \bar{R}_1 - R_f &= \sigma_1^2 z_1 + \sigma_{12} z_2 + \dots + \sigma_{1n} z_n \\ \bar{R}_2 - R_f &= \sigma_{12} z_1 + \sigma_2^2 z_2 + \dots + \sigma_{2n} z_n \\ &\vdots \\ \bar{R}_n - R_f &= \sigma_{1n} z_1 + \sigma_{2n} z_2 + \dots + \sigma_n^2 z_n \end{aligned} \quad (25)$$

em que R_f é o ativo livre de risco, σ_i^2 a variância do ativo i , σ_{ij} a covariância entre os ativos i e j e z a variável de decisão auxiliar para se chegar a variável x .

O sistema linear anterior na forma matricial fica:

$$Qz = (\bar{R}_c - R_f). \quad (26)$$

Quando utilizado no Excel, para facilitar os cálculos e fórmulas, reescrevemos como:

$$z = Q^{-1}(\bar{R}_c - R_f). \quad (27)$$

Após obtido o valor de z encontramos o portfólio ótimo que é dado por:

$$x_i = \frac{z_i}{\sum_{i=1}^n z_i}, \quad (28)$$

sendo $i = 1, 2, \dots, n$.

Logo, é necessário resolver esse sistema linear para que seja possível determinar o portfólio ótimo com venda a descoberto.

3.5.4 Modelo de Índice Único

Dado tudo que foi visto anteriormente, é possível observar que precisamos de muitos dados dos ativos, como variância, covariância, correlação entre eles, retorno, risco, entre outros. E tudo isso para realizarmos uma composição de portfólio dito eficiente.

Mas pensando em um cenário em que possua uma grande quantidade de ativos, se tornará difícil manipular todos esses dados e até mesmo ocasionando erros nos cálculos.

O modelo de índice único tem o intuito de simplificar e tornar mais eficaz os cálculos e a composição do portfólio. A seguir veremos as fórmulas utilizadas e então as mudanças que acarretam ao modelo de Markowitz. Para isso, nos baseamos em Elton (2012).

Para o retorno esperado do ativo i , temos:

$$\bar{R}_i = \alpha_i + \beta_i \bar{R}_m, \quad (29)$$

sendo \bar{R}_m o retorno esperado do mercado, α_i e β_i constantes, que serão apresentados a posteriori. Na literatura usa-se regressão linear para obtê-los.

Para o risco do ativo i , temos:

$$\sigma_i^2 = \beta_i^2 \sigma_m^2 + \sigma_{ei}^2, \quad (30)$$

sendo σ_m^2 é a variação do mercado e σ_{ei}^2 é a variância do do erro. Vale ressaltar que, no Brasil, o índice Ibovespa, o qual é o índice da bolsa de valores brasileira, é considerado como o índice do mercado. Além disso, a variância do erro é decorrente da regressão linear para obter o α_i e β_i .

A seguir, apresentamos a fórmula do beta (β) dada em Elton (2012). Na literatura, em geral, usa-se, regressão linear para chegar a sua expressão, que é dada por:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2}, \quad (31)$$

sendo $\sigma_{im} = \left[\sum_{t=1}^n (R_i - \bar{R}_i)(R_m - \bar{R}_m) \right]$ e $\sigma_m^2 = \sum_{t=1}^n \frac{(R_m - \bar{R}_m)^2}{n}$, σ_{im} a covariância entre o ativo i e o mercado e σ_m^2 a variância do do mercado, R_m é o retorno do mercado e \bar{R}_m o retorno médio do mercado.

Para medir a variação do erro na aproximação da regressão linear de cada ativo i , temos:

$$\sigma_{ei}^2 = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m [R_{ij} - (\alpha_i + \beta_i \bar{R}_m)]^2, \quad (32)$$

sendo R_{ji} o retorno do ativo i no período j .

Agora para estimar o beta e o alfa da carteira, temos respectivamente:

$$\beta_c = \sum_{i=1}^n x_i \beta_i, \quad (33)$$

$$\alpha_c = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i, \quad (34)$$

sendo x_i o percentual a ser investido no ativo i .

Para o retorno médio e a variância do portfólio temos, respectivamente, as seguintes expressões:

$$\bar{R}_c = \alpha_c + \beta_c \bar{R}_m, \quad (35)$$

$$\sigma_c^2 = \beta_c^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_{ei}^2, \quad (36)$$

Para a covariância entre os ativos i e j , temos:

$$\sigma_{ij} = \beta_i \beta_j \sigma_m^2, \quad (37)$$

3.5.5 Seleção dos Ativos - Aplicação

Para a realização desta monografia, os ativos escolhidos são pertencentes à B3, a qual classificou estes ativos como ESG. Vamos analisar do período de 31/10/2020 à 31/10/2021. A Tabela 1 apresenta os ativos escolhidos:

Tabela 1 - Ativos selecionados para análise

Ativo	Nome do Ativo	Código
1	AMBEV S/A	ABEV3
2	AMERICANAS	AMER3
3	B3	B3SA3
4	BRASIL	BBAS3
5	BRASKEM	BRKM5
6	BTGP BANCO	BPAC11
7	CEMIG	CMIG4
8	CIELO	CIEL3
9	COPEL	CPLE6
10	ENGIE BRASIL	EGIE3
11	GERDAU	GGBR4
12	ITAUSA	ITSA4
13	MAGAZ LUIZA	MGLU3
14	RUMO S.A.	RAIL3

15	SANEPAR	SAPR11
16	SUZANO S.A.	SUZB3
17	TIM	TIMS3
18	ULTRAPAR	UGPA3
19	VIBRA	VBBR3
20	WEG	WEGE3

FONTE: A autora (2021).

E, na Tabela 2 temos o retorno mensal no período referido anteriormente. Os dados abaixo foram coletados da base do site Investing.com (2021).

Tabela 2 - Ativos selecionados para análise mensalmente

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Data	ABEV3	AMER3	B3SA3	BBAS3	BRKM5	BPAC11	CMIG4	CIEL3	CPL6	EGIE3	GGBR4	ITSA4	MGLU3	RAIL3	SAPR11	SUZB3	TIMS3	UGPA3	VBBR3	WEGE3
out-21	11.05%	-3.95%	-6.51%	-1.38%	-8.22%	-10.37%	-8.20%	-4.37%	-18.68%	3.87%	-0.75%	-7.99%	-24.62%	-4.76%	-4.75%	-9.70%	-4.51%	-11.47%	-10.69%	-6.64%
set-21	-10.53%	-25.24%	-9.45%	-5.03%	-10.08%	-10.97%	3.85%	-20.21%	6.43%	-0.24%	-2.92%	-3.63%	-21.38%	-10.31%	-1.14%	-10.62%	-5.70%	2.08%	-13.61%	11.45%
ago-21	2.76%	-15.76%	-7.74%	-3.79%	14.27%	-3.42%	13.15%	-15.09%	11.76%	-1.00%	-6.39%	3.49%	-11.46%	-9.39%	-0.41%	12.82%	10.07%	-18.33%	-4.02%	0.03%
jul-21	-2.52%	-25.90%	-9.33%	-1.56%	-3.02%	-4.13%	-1.57%	-7.14%	3.20%	-3.12%	4.03%	0.18%	-2.60%	7.89%	-6.31%	-9.60%	-1.82%	-3.86%	6.18%	5.99%
jun-21	-4.90%	10.90%	-4.10%	-4.06%	18.93%	-1.77%	-10.68%	-13.54%	-7.05%	-1.61%	-10.08%	2.67%	4.91%	-7.35%	3.08%	-1.51%	-5.26%	-4.72%	3.41%	-1.29%
mai-21	20.15%	-11.24%	2.15%	14.42%	-4.63%	15.33%	14.46%	22.03%	1.92%	-0.31%	0.27%	8.14%	0.65%	3.35%	-4.50%	-11.56%	-0.16%	-8.57%	14.62%	-2.44%
abr-21	-2.29%	10.81%	-5.71%	-3.88%	32.28%	11.05%	-8.95%	-7.26%	-4.43%	-4.58%	9.92%	-2.68%	-1.04%	-1.23%	-4.09%	0.18%	-3.79%	-0.47%	9.22%	-6.09%
mar-21	9.06%	-25.91%	2.71%	8.56%	26.97%	-4.53%	8.95%	3.33%	21.75%	1.65%	17.38%	3.72%	-16.29%	11.88%	11.17%	-6.31%	-1.02%	9.78%	10.81%	-4.01%
fev-21	-7.21%	-0.39%	-9.22%	-17.16%	29.07%	6.94%	-12.70%	-12.41%	-10.33%	-4.21%	11.27%	-6.22%	-4.31%	-10.84%	-9.22%	17.92%	-3.76%	-11.29%	-14.33%	-6.85%
jan-21	-2.99%	8.87%	-2.64%	-12.73%	2.76%	1.84%	-4.02%	2.75%	-12.92%	-2.23%	-4.92%	-9.37%	1.28%	5.51%	-16.15%	6.00%	-9.22%	-8.26%	5.08%	10.64%
dez-20	14.91%	7.40%	10.40%	14.94%	4.29%	18.67%	15.28%	14.29%	14.45%	5.89%	8.91%	11.86%	6.72%	1.48%	4.00%	3.61%	8.60%	16.77%	9.89%	2.99%
nov-20	14.78%	-6.43%	9.99%	0.1428	-0.0105	0.0922	0.2322	0.0542	0.1066	0.0614	0.0423	0.1639	-0.0508	0.0338	0.0553	0.1289	0.1384	0.2411	0.07	-0.0299

FONTE: A autora (2021).

Dado essas informações, poderemos determinar quais serão os portfólios ótimos utilizando os métodos apresentados anteriormente. Primeiramente vamos analisar os passos do processo de cálculo de cada modelo, assim como já realizado anteriormente em nossa monografia de base de estudos, Paula Eastwood (2020).

3.5.5.1 Modelo de Markowitz

Vamos mostrar alguns passos para que possamos determinar o portfólio ótimo pelo modelo de Markowitz. Vamos utilizar o aplicativo Excel e seu suplemento Solver para nos auxiliar. Então:

1º) Criaremos um vetor com componentes x_i , $i = (1, 2, \dots, 20)$, com quaisquer valores que no fim sua soma terá como resultado 1 (Figura 6). Este vetor é necessário para inicializar o método que o Excel usa para resolver o modelo. Para isso, utilizaremos uma linha com 21 colunas, sendo a 21ª coluna a soma das 20 primeiras (Figura 7). Iremos fazer o mesmo processo porém no formato vertical, sendo que cada linha corresponde a uma coluna do vetor anterior. Abaixo segue como ficaria em nosso caso:

Figura 6. Exemplo com 20 ativos

X _i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total
%	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	1,00
X _i	%																				
1	0,05																				
2	0,05																				
3	0,05																				
4	0,05																				
5	0,05																				
6	0,05																				
7	0,05																				
8	0,05																				
9	0,05																				
10	0,05																				
11	0,05																				
12	0,05																				
13	0,05																				
14	0,05																				
15	0,05																				
16	0,05																				
17	0,05																				
18	0,05																				
19	0,05																				
20	=V3																				
Total	1,00																				

FONTE: A autora (2021).

Na Figura 6 vemos o nosso vetor, composto por 20 ativos, sendo que cada ativo possui um percentual de investimento igual a 0,05 - equivalente a 0,5%.

Na Figura 8 temos o retorno médio e o risco de cada ativo que está compondo o nosso portfólio. Em específico, estamos realizando o cálculo do retorno do portfólio, do qual utilizamos os valores do retorno médio de cada ativo e o percentual investido em cada um.

3°) Calcularemos a covariância dos ativos (Figura 9).

Figura 9. Matriz da Covariância

	Matriz de covariância																			
	ABEV3	AMER3	B3SA3	BBAS3	BRKM5	BPAC11	CMIG4	CIEL3	CPL6	EGIE3	GGBR4	ITSA4	MGLU3	RAIL3	SAPRI1	SUZB3	TIMS3	UGPA3	VBBR3	WEGE3
ABEV3	0,93%	-0,03%	0,51%	0,85%	-0,40%	0,43%	0,76%	0,99%	0,38%	0,24%	0,17%	0,49%	0,07%	0,33%	0,26%	-0,11%	0,38%	0,43%	0,51%	-0,22%
AMER3	-0,03%	1,91%	0,19%	-0,26%	0,63%	0,66%	-0,58%	0,24%	-0,86%	-0,03%	-0,16%	-0,10%	0,81%	-0,20%	-0,27%	0,54%	-0,12%	-0,02%	0,18%	-0,19%
B3SA3	0,51%	0,19%	0,47%	0,57%	-0,10%	0,41%	0,57%	0,66%	0,40%	0,18%	0,16%	0,42%	0,25%	0,26%	0,25%	0,09%	0,29%	0,64%	0,43%	-0,05%
BBAS3	0,85%	-0,26%	0,57%	1,03%	-0,44%	0,41%	0,94%	0,90%	0,76%	0,26%	0,20%	0,67%	0,12%	0,38%	0,47%	-0,27%	0,44%	0,80%	0,64%	-0,10%
BRKM5	-0,40%	0,63%	-0,10%	-0,44%	2,12%	0,28%	-0,59%	-0,40%	0,10%	-0,23%	0,51%	-0,11%	0,34%	-0,08%	0,17%	0,64%	-0,08%	-0,13%	0,14%	-0,46%
BPAC11	0,43%	0,66%	0,41%	0,41%	0,28%	0,88%	0,36%	0,77%	0,16%	0,04%	0,25%	0,38%	0,69%	0,15%	0,00%	0,32%	0,25%	0,40%	0,52%	-0,14%
CMIG4	0,76%	-0,58%	0,57%	0,94%	-0,59%	0,36%	1,33%	0,76%	1,06%	0,27%	0,09%	0,73%	0,02%	0,29%	0,43%	0,09%	0,65%	0,76%	0,48%	0,09%
CIEL3	0,99%	0,24%	0,66%	0,90%	-0,40%	0,77%	0,76%	1,46%	0,33%	0,20%	0,28%	0,49%	0,47%	0,58%	0,10%	-0,16%	0,25%	0,56%	0,85%	-0,09%
CPL6	0,38%	-0,86%	0,40%	0,76%	0,10%	0,16%	1,06%	0,33%	1,38%	0,16%	0,35%	0,64%	-0,03%	0,31%	0,62%	0,00%	0,52%	0,81%	0,46%	0,09%
EGIE3	0,24%	-0,03%	0,18%	0,26%	-0,23%	0,04%	0,27%	0,20%	0,16%	0,12%	0,03%	0,16%	-0,06%	0,06%	0,14%	-0,01%	0,15%	0,27%	0,05%	-0,02%
GGBR4	0,17%	-0,16%	0,16%	0,20%	0,51%	0,25%	0,09%	0,28%	0,35%	0,03%	0,61%	0,10%	-0,02%	0,25%	0,17%	0,06%	0,08%	0,43%	0,18%	-0,20%
ITSA4	0,49%	-0,10%	0,42%	0,67%	-0,11%	0,38%	0,73%	0,49%	0,64%	0,16%	0,10%	0,58%	0,26%	0,17%	0,37%	0,10%	0,44%	0,61%	0,42%	-0,07%
MGLU3	0,07%	0,81%	0,25%	0,12%	0,34%	0,69%	0,02%	0,47%	-0,03%	-0,06%	-0,02%	0,26%	0,95%	0,15%	-0,10%	0,29%	0,08%	0,18%	0,56%	0,04%
RAIL3	0,33%	-0,20%	0,26%	0,38%	-0,08%	0,15%	0,29%	0,58%	0,31%	0,06%	0,25%	0,17%	0,15%	0,53%	0,09%	-0,21%	0,04%	0,39%	0,55%	0,04%
SAPRI1	0,26%	-0,27%	0,25%	0,47%	0,17%	0,00%	0,43%	0,10%	0,62%	0,14%	0,17%	0,37%	-0,10%	0,09%	0,49%	-0,07%	0,26%	0,53%	0,19%	-0,12%
SUZB3	-0,11%	0,54%	0,09%	-0,27%	0,64%	0,32%	0,09%	-0,16%	0,00%	-0,01%	0,06%	0,10%	0,29%	-0,21%	-0,07%	0,98%	0,30%	0,05%	-0,18%	-0,12%
TIMS3	0,38%	-0,12%	0,29%	0,44%	-0,08%	0,25%	0,65%	0,25%	0,52%	0,15%	0,08%	0,44%	0,08%	0,04%	0,26%	0,30%	0,47%	0,39%	0,17%	-0,08%
UGPA3	0,43%	-0,02%	0,64%	0,80%	-0,13%	0,40%	0,76%	0,56%	0,81%	0,27%	0,43%	0,61%	0,18%	0,39%	0,53%	0,05%	0,39%	1,43%	0,49%	0,03%
VBBR3	0,51%	0,18%	0,43%	0,64%	0,14%	0,52%	0,48%	0,85%	0,46%	0,05%	0,18%	0,42%	0,56%	0,55%	0,19%	-0,18%	0,17%	0,49%	0,93%	-0,02%
WEGE3	-0,22%	-0,19%	-0,05%	-0,10%	-0,46%	-0,14%	0,09%	-0,09%	0,09%	-0,02%	-0,20%	-0,07%	0,04%	0,04%	-0,12%	-0,12%	-0,08%	0,03%	-0,02%	0,37%

FONTE: A autora (2021).

Na Figura 9 vemos a nossa Matriz de Covariância dos ativos que compõem o nosso portfólio.

4°) Iremos calcular a variância σ_c^2 , utilizaremos a fórmula da multiplicação de matrizes, = $MATRIZ.MULT(matriz1; MATRIZ.MULT(matriz2; matriz3))$ (Figura 10), sendo a *matriz1* os valores de x_i na horizontal, a *matriz2* são os valores da matriz de covariância e a *matriz3* são os valores dos x_i na vertical conforme visto na fórmula (15).

Figura 10. Variância do Portfólio

Matriz de covariância																					
	ABEV3	AMER3	B3SA3	BBAS3	BRKM5	BPAC11	CMIG4	CIEL3	CPLE6	EGIE3	GGBR4	ITSA4	MGLU3	RAIL3	SAPR11	SUZB3	TIMS3	UGPA3	VBBR3	WEGE3	
ABEV3	0,93%	-0,03%	0,51%	0,85%	-0,40%	0,43%	0,76%	0,99%	0,38%	0,24%	0,17%	0,49%	0,07%	0,33%	0,26%	-0,11%	0,38%	0,43%	0,51%	-0,22%	
AMER3	-0,03%	1,91%	0,19%	-0,26%	0,63%	0,66%	-0,58%	0,24%	-0,86%	-0,03%	-0,16%	-0,10%	0,81%	-0,20%	-0,27%	0,54%	-0,12%	-0,02%	0,18%	-0,19%	
B3SA3	0,51%	0,19%	0,47%	0,57%	-0,10%	0,41%	0,57%	0,66%	0,40%	0,18%	0,16%	0,42%	0,25%	0,26%	0,09%	0,29%	0,64%	0,43%	-0,05%		
BBAS3	0,85%	-0,26%	0,57%	1,03%	-0,44%	0,41%	0,94%	0,90%	0,76%	0,26%	0,20%	0,67%	0,12%	0,38%	0,47%	-0,27%	0,44%	0,80%	0,64%	-0,10%	
BRKM5	-0,40%	0,63%	-0,10%	-0,44%	2,12%	0,28%	-0,59%	-0,40%	0,10%	-0,23%	0,51%	-0,11%	0,34%	-0,08%	0,17%	0,64%	-0,08%	-0,13%	0,14%	-0,46%	
BPAC11	0,43%	0,66%	0,41%	0,41%	0,28%	0,88%	0,36%	0,77%	0,16%	0,04%	0,25%	0,38%	0,69%	0,15%	0,00%	0,32%	0,25%	0,40%	0,52%	-0,14%	
CMIG4	0,76%	-0,58%	0,57%	0,94%	-0,59%	0,36%	1,33%	0,76%	1,06%	0,27%	0,09%	0,73%	0,02%	0,29%	0,43%	0,09%	0,65%	0,76%	0,48%	0,09%	
CIEL3	0,99%	0,24%	0,66%	0,90%	-0,40%	0,77%	0,76%	1,46%	0,33%	0,20%	0,28%	0,49%	0,47%	0,58%	0,10%	-0,16%	0,25%	0,56%	0,85%	-0,09%	
CPLE6	0,38%	-0,86%	0,40%	0,76%	0,10%	0,16%	1,06%	0,33%	1,38%	0,16%	0,35%	0,64%	-0,03%	0,31%	0,62%	0,00%	0,52%	0,81%	0,46%	0,09%	
EGIE3	0,24%	-0,03%	0,18%	0,26%	-0,23%	0,04%	0,27%	0,20%	0,16%	0,12%	0,03%	0,16%	-0,06%	0,06%	0,14%	-0,01%	0,15%	0,27%	0,05%	-0,02%	
GGBR4	0,17%	-0,16%	0,16%	0,20%	0,51%	0,25%	0,09%	0,28%	0,35%	0,03%	0,61%	0,10%	-0,02%	0,25%	0,17%	0,06%	0,08%	0,43%	0,18%	-0,20%	
ITSA4	0,49%	-0,10%	0,42%	0,67%	-0,11%	0,38%	0,73%	0,49%	0,64%	0,16%	0,10%	0,58%	0,26%	0,17%	0,37%	0,10%	0,44%	0,61%	0,42%	-0,07%	
MGLU3	0,07%	0,81%	0,25%	0,12%	0,34%	0,69%	0,02%	0,47%	-0,03%	-0,06%	-0,02%	0,26%	0,95%	0,15%	-0,10%	0,29%	0,08%	0,16%	0,56%	0,04%	
RAIL3	0,33%	-0,20%	0,26%	0,38%	-0,08%	0,15%	0,29%	0,58%	0,11%	0,06%	0,25%	0,17%	0,15%	0,93%	0,09%	-0,21%	0,04%	0,39%	0,55%	0,04%	
SAPR11	0,26%	-0,27%	0,25%	0,47%	0,17%	0,00%	0,43%	0,10%	0,62%	0,14%	0,17%	0,37%	-0,10%	0,09%	0,49%	-0,07%	0,26%	0,53%	0,19%	-0,12%	
SUZB3	-0,11%	0,54%	0,09%	-0,27%	0,64%	0,32%	0,09%	-0,16%	0,00%	-0,01%	0,06%	0,10%	0,29%	-0,21%	-0,07%	0,98%	0,30%	0,05%	-0,18%	-0,12%	
TIMS3	0,38%	-0,12%	0,29%	0,44%	-0,08%	0,25%	0,65%	0,25%	0,52%	0,15%	0,08%	0,44%	0,08%	0,04%	0,26%	0,30%	0,47%	0,39%	0,17%	-0,08%	
UGPA3	0,43%	-0,02%	0,64%	0,80%	-0,13%	0,40%	0,76%	0,56%	0,81%	0,27%	0,43%	0,61%	0,18%	0,39%	0,53%	0,03%	0,39%	1,43%	0,49%	0,03%	
VBBR3	0,51%	0,18%	0,43%	0,64%	0,14%	0,52%	0,48%	0,85%	0,46%	0,05%	0,18%	0,42%	0,56%	0,55%	0,19%	-0,18%	0,17%	0,49%	0,93%	-0,02%	
WEGE3	-0,22%	-0,19%	-0,05%	-0,10%	-0,46%	-0,14%	0,09%	-0,09%	0,09%	-0,02%	-0,20%	-0,07%	0,04%	0,04%	-0,12%	-0,12%	-0,08%	0,03%	-0,02%	0,37%	
Xj	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total
%	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	1,00
Xj	%																				
1	0,05																				
2	0,05																				
3	0,05																				

FONTE: A autora (2021).

Na Figura 10 vemos como calcular a variância do nosso portfólio, utilizando os dados já calculados anteriormente da Matriz de Covariância e também os percentuais de cada ativo que o compõem.

5°) Determinaremos σ_c usando a fórmula $=RAIZ(núm)$ (Figura 11), onde $núm$ selecionamos a célula onde está o resultado da variância do portfólio.

Figura 11. Risco do Portfólio

R_c	σ_c^2	σ_c
0,0016	0,0027	=RAIZ(G73)

FONTE: A autora (2021).

6°) Após realizar esses passos, iremos utilizar o Solver, o suplemento do Excel. Isso vai nos possibilitar a realizar as manipulações necessárias e nos indicar os ativos que formarão o portfólio ótimo. Vamos abrir o Solver e iremos inserir as informações em cada campo:

- "Definir objetivo" - selecionamos a célula onde está o valor do σ_c (Figura 12);
- "Para:" - "Mín" (Figura 12);

- “Alterando Células Variáveis:” - selecionamos as células que possuem os valores de x_i na horizontal (Figura 13);
- “Sujeito a Restrições:” → ir em “Adicionar” e iremos preencher os três campos (Figura 14), sendo:
 - “Referência de Célula:” - selecionamos a célula que está o valor da soma dos x_i na horizontal, 21ª coluna;
 - No meio mudamos o sinal para “=” ;
 - “Restrição:” - determinado o valor “1”.
- Clicamos no botão “Ok”.

Figura 12. Definir Objetivo

X_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
%	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
X_i	%																
1	0,05																
2	0,05																
3	0,05																
4	0,05																
5	0,05																
6	0,05																
7	0,05																
8	0,05																
9	0,05																
10	0,05																
11	0,05																
12	0,05																
13	0,05																
14	0,05																
15	0,05																
16	0,05																
17	0,05																
18	0,05																
19	0,05																
20	0,05																
Total	1,00																

R_c	σ^2_c	σ_c
0,0016	0,0027	0,0516

Parâmetros do Solver

Definir Objetivo:

Para: Máx. Min. Valor de:

Alterando Células Variáveis:

Sujeito às Restrições:

Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas

Selecionar um Método de Solução:

Método de Solução
 Seleção o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares.
 Seleção o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Seleção o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.

Ajuda

FONTE: A autora (2021).

Figura 13. Alterando Células Variáveis

Xj	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total
%	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	1,00

Xj	%	Rc	σ^2c	σc
1	0,05			
2	0,05	0,0016	0,0027	0,0516
3	0,05			
4	0,05			
5	0,05			
6	0,05			
7	0,05			
8	0,05			
9	0,05			
10	0,05			
11	0,05			
12	0,05			
13	0,05			
14	0,05			
15	0,05			
16	0,05			
17	0,05			
18	0,05			
19	0,05			
20	0,05			
Total	1,00			

Parâmetros do Solver

Definir Objetivo: \$H\$573

Para: Máx. Míd. Valor de: 0

Alterando Células Variáveis: \$C\$569:\$V\$69

Sujeito às Restrições:

Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas

Selecionar um Método de Solução: GRG Não Linear

Método de Solução
 Seleccione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Seleccione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Seleccione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.

Ajuda Resolver Fechar

FONTE: A autora (2021).

Figura 14. Restrições

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
67																						
68	Xj	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total
69	%	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	1,00
70																						
71	Xj	%																				
72	1	0,05																				
73	2	0,05																				
74	3	0,05																				
75	4	0,05																				
76	5	0,05																				
77	6	0,05																				
78	7	0,05																				
79	8	0,05																				
80	9	0,05																				
81	10	0,05																				
82	11	0,05																				
83	12	0,05																				

Adicionar Restrição

Referência de Célula: \$W\$69 = Restrição: 1

OK Adicionar Cancelar

FONTE: A autora (2021).

7º) Temos que para o caso sem venda a descoberto iremos selecionar e checar o campo “Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas” (Figura 15) e já para o caso com venda a descoberto deixaremos esse campo sem checar, ou seja, em branco (Figura 16).

Figura 15. Sem Venda a Descoberto

Parâmetros do Solver

Definir Objetivo:

Para: Máx. Mín. Valor de:

Alterando Células Variáveis:

Sujeito às Restrições:

SWS69 = 1

Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas

Selecionar um Método de Solução:

Método de Solução

Selecione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Selecione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Selecione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.

Ajuda Resol^{ver} Fechar

FONTE: A autora (2021).

Figura 16. Com Venda a Descoberto

Parâmetros do Solver

Definir Objetivo:

Para: Máx. Mín. Valor de:

Alterando Células Variáveis:

Sujeito às Restrições:

SWS69 = 1

Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas

Selecionar um Método de Solução:

Método de Solução

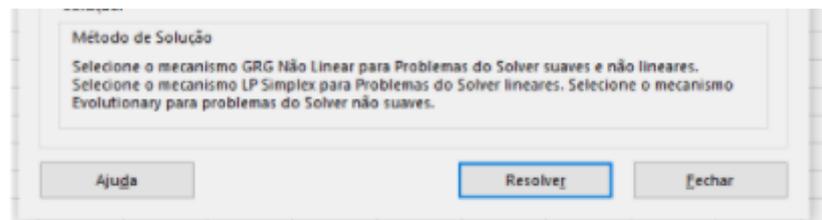
Selecione o mecanismo GRG Não Linear para Problemas do Solver suaves e não lineares. Selecione o mecanismo LP Simplex para Problemas do Solver lineares. Selecione o mecanismo Evolutionary para problemas do Solver não suaves.

Ajuda Resol^{ver} Fechar

FONTE: A autora (2021).

8º) Selecionamos o campo “Resolver” (Figura 17) e então o portfólio será formulado (Figura 18 e Figura 19).

Figura 17. Campo Resolver



FONTE: A autora (2021).

Figura 18. Sem Venda a Descoberto Formulado - Markowitz

Xi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total
%	0,03	0,01	0,00	0,00	0,14	0,00	0,00	0,00	0,00	0,50	0,01	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,31	1,00
Xi	%																				
1	0,03																				
2	0,01																				
3	0,00																				
4	0,00																				
5	0,14																				
6	0,00																				
7	0,00																				
8	0,00																				
9	0,00																				
10	0,50																				
11	0,01																				
12	0,00																				
13	0,00																				
14	0,00																				
15	0,00																				
16	0,00																				
17	0,00																				
18	0,00																				
19	0,00																				
20	0,31																				
Total	1,00																				

FONTE: A autora (2021).

A Figura 18 nos mostra como seria a distribuição dos percentuais para o portfólio ótimo considerando sem venda a descoberto. Temos então que foi alocado 3% no ativo 1 (ABEV3), 1% no ativo 2 (AMER3), 14% no ativo 5 (BRKM5), 50% no ativo 10 (EGIE3), 1% no ativo 11 (GCBR4) e 31% no ativo 20 (WEGE3). Observe que no portfólio ótimo alguns ativos não foram alocados, como por exemplo os ativos 3 (B3SA3), 4 (BBAS3), 6 (BPAC11), 7 (CMIG4), 8 (CIEL3), 9 (CPLE6), 12 (ITSA4), 13 (MGLU3), 14 (RAIL3), 15 (SAP11), 16 (SUZB3), 17 (TIMS3), 18 (UGPA3), 19 (VBBR3) que possuem a participação de 0%. O ativo com maior alocação foi o décimo com 50% de participação.

Figura 19. Com Venda a Descoberto Formulado - Markowitz

X _i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total
%	0,00	-0,07	-0,05	0,09	0,13	0,15	0,08	-0,10	-0,37	0,28	0,13	0,20	-0,09	0,08	0,21	0,01	-0,01	-0,13	0,02	0,44	1,00
X _i	%																				
1	0,00																				
2	-0,07																				
3	-0,05																				
4	0,09																				
5	0,13																				
6	0,15																				
7	0,08																				
8	-0,10																				
9	-0,37																				
10	0,28																				
11	0,13																				
12	0,20																				
13	-0,09																				
14	0,08																				
15	0,21																				
16	0,01																				
17	-0,01																				
18	-0,13																				
19	0,02																				
20	0,44																				
Total	1,00																				

R _c	σ ² _c	σ _c
0,029595	0,000000	0,000002

FONTE: A autora (2021).

A Figura 19 nos mostra como seria a distribuição dos percentuais para o portfólio ótimo considerando com venda a descoberto. Temos então que foi alocado -7% no ativo 2 (AMER3), -5% no ativo 3 (B3SA3), 9% no ativo 4 (BBAS3), 13% no ativo 5 (BRKM5), 15% no ativo 6 (BPAC11), 8% no ativo 7 (CMIG4), -10% no ativo 8 (CIEL3), -37% no ativo 9 (CPLE6), 28% no ativo 10 (EGIE3), 13% no ativo 11 (GCBR4), 20% no ativo 12 (ITSA4), -9% no ativo 13 (MGLU3), 8% no ativo 14 (RAIL3), 21% no ativo 15 (SAP11), 1% no ativo 16 (SUZB3), -1% no ativo 17 (TIMS3), -13% no ativo 18 (UGPA3), 2% no ativo 19 (VBBR3) e 44% no ativo 20 (WEGE3). Observe que no portfólio ótimo teve um ativo que não teve alocação, sendo o ativo 1 (ABEV3), que possui a participação de 0%. O ativo com maior alocação foi o vigésimo com 44% de participação.

3.5.5.2 Ativo Livre de Risco

3.5.5.2.1 Sem Venda a Descoberto

Para determinarmos o portfólio ótimo no caso de um ativo a taxa livre de risco, sem venda a descoberto, é necessário maximizar o coeficiente angular, com suas devidas restrições (ver subseção 3.5.3 para mais detalhes):

$$\theta(x) = \left(\frac{\bar{R}_c - R_f}{\sigma_c} \right) \quad (38)$$

Os primeiros cinco passos para determinar, são os mesmos do item anterior, iremos mudar a partir do 6º passo. Então:

6º) Criaremos uma célula com a fórmula do coeficiente angular (Figura 20), com os dados que serão calculados até esse momento.

Figura 20. Coeficiente Angular

A	B	C	D	E	F	G	H	I
	Xi	1	2	3	4	5	6	7
	%	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05
	Xi	%						
	1	0,05			Rc	σ²c	σ_c	C Angular
	2	0,05			0,0016	0,0027	0,0516	-0)/(H73)
	3	0,05						
	4	0,05						
	5	0,05						
	6	0,05						

FONTE: A autora (2021).

Estamos considerando $R_f = 0$.

7º) Iremos utilizar o Solver, o suplemento do Excel. Vamos abrir o Solver e iremos inserir as informações em cada campo:

- "Definir objetivo" - selecionamos a célula onde está o valor do *C Angular* θ (Figura 21);
- "Para:" - "Máx" (Figura 21);
- "Alterando Células Variáveis:" - selecionamos as células que possuem os valores de x_i na horizontal (Figura 21);

- “Sujeito a Restrições:” → ir em “Adicionar” e iremos preencher os três campos (Figura 21), sendo:
 - “Referência de Célula:” - selecionamos a célula que está o valor da soma dos x_i na horizontal, 21ª coluna;
 - No meio mudamos o sinal para “=” ;
 - “Restrição:” - determinado o valor “1”.
- Clicamos no botão “Ok”.
- Como estamos fazendo Sem Venda a Descoberto, não podemos esquecer de deixar selecionado o campo: “Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas” (Figura 21).
- Clicamos no botão “Resolver” (Figura 21).

Figura 21. Solver - Resolver

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total
%	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	0,05	1,00

x_i	%	R_c	σ_c^2	σ_c	C Angular
1	0,05				
2	0,05				
3	0,05	0,0016	0,0027	0,0516	0,03
4	0,05				
5	0,05				
6	0,05				
7	0,05				
8	0,05				
9	0,05				
10	0,05				
11	0,05				
12	0,05				
13	0,05				
14	0,05				
15	0,05				
16	0,05				
17	0,05				
18	0,05				
19	0,05				
20	0,05				
Total	1,00				

FONTE: A autora (2021).

3.5.5.2.1 Com Venda a Descoberto

Para o caso com venda a descoberto temos que resolver o sistema apresentado na seção 3.5.3. Para isso, os 5 primeiros passos são idênticos aos anteriores. Dessa forma:

6º) Criaremos uma coluna com os valores de $\bar{R}_i - R_f$.

7º) Calcularemos a inversa da matriz de covariâncias, selecionamos 20x20 células em branco, e escrevemos a fórmula = *MATRIZ.INVERSO(matriz)*, selecionando no lugar da *matriz* as células com os valores da matriz de covariâncias. Para que seja replicado para todas as células, deve-se segurar as teclas *Ctrl+Shift* e pressionar *Enter*, assim a matriz inversa estará pronta.

8º) Selecionamos uma coluna de 20 linhas e digitaremos a expressão = *MATRIZ.MULT(matriz1; matriz2)*. No lugar de *matriz1* será selecionado a matriz inversa e no lugar de *matriz2* será a coluna criada no 6º passo. Com isso, fazemos o mesmo processo anterior de replicar para as demais celular, deve-se segurar as teclas *Ctrl+Shift* e pressionar *Enter* e então aparecerá os z_i . Após isso, em uma célula qualquer realizamos a soma de todos os z_i .

9º) No último passo iremos calcular os x_i , no espaço horizontal criado no 1º passo. O x_1 é calculado fazendo os valores de z_1 dividido pelo somatório deles e assim por diante, conforme a fórmula abaixo:

$$x_i = \frac{z_i}{\sum_{i=1}^n z_i} \quad (39)$$

3.5.5.3 Modelo de Índice Único

Para o Modelo de Índice Único iremos utilizar alguns valores que calculamos até o momento. Nesse caso, para que seja calculado o portfólio ótimo é necessário resolver o modelo com as devidas restrições (a depender de ser ou não permitido venda a descoberto). Então:

1º) Criaremos um vetor com componentes x_i , $i = (1, 2, \dots, 20)$, com quaisquer valores que no fim sua soma terá como resultado 1. Para isso, utilizaremos uma

linha com 21 colunas, sendo a 21ª coluna a soma das 20 primeiras. Iremos fazer o mesmo processo porém no formato vertical, sendo que cada linha corresponde a uma coluna do vetor anterior.

2º) Criaremos uma coluna dos betas, utilizando a fórmula:

$$\beta_i = \frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \quad (40)$$

3º) Calcularemos a coluna dos alfas utilizando a fórmula:

$$\alpha_i = \bar{R}_i - \beta_i \bar{R}_m \quad (41)$$

4º) Determinamos a coluna referente ao σ_{ei}^2 , o risco associado ao erro do ativo i , utilizando a fórmula:

$$\sigma_{ei}^2 = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M [R_{ji} - (\alpha_i + \beta_i \bar{R}_m)]^2 \quad (42)$$

5º) Calcularemos o β_c e o α_c , utilizando a fórmula:

$$\beta_c = \sum_{i=1}^n x_i \beta_i \quad (43)$$

$$\alpha_c = \sum_{i=1}^n x_i \alpha_i \quad (44)$$

6º) Estima-se o \bar{R}_c e a σ_c^2 , utilizando as expressões:

$$\bar{R}_c = \alpha_c + \beta_c \bar{R}_m \quad (45)$$

$$\sigma_c^2 = \beta_c^2 \sigma_m^2 + \sum_{i=1}^n x_i^2 \sigma_{ei}^2 \quad (46)$$

7º) Calculamos o risco da carteira, em uma célula utilizamos a fórmula para tirar a raiz quadrada do resultado da variância da carteira.

8º) Após realizar esses passos, iremos utilizar o Solver, o suplemento do Excel. Isso vai nos possibilitar a realizar as manipulações necessárias e nos indicar os ativos que formarão o portfólio ótimo. Vamos abrir o Solver e iremos inserir as informações em cada campo:

- "Definir objetivo" - selecionamos a célula onde está o valor do σ_c ;
- "Para:" - "Mín";
- "Alterando Células Variáveis:" - selecionamos as células que possuem os valores de x_i na horizontal;
- "Sujeito a Restrições:" → ir em "Adicionar" e iremos preencher os três setores, sendo:
 - "Referência de Célula:" - selecionamos a célula que está o valor da soma dos x_i na horizontal, 21ª coluna;
 - No meio mudamos o sinal para "=" ;
 - "Restrição:" - determinado o valor "1".
- Clicamos no botão "Ok"

9º) Temos que para o caso sem venda a descoberto iremos selecionar e checar o campo "Tornar Variáveis Irrestritas Não Negativas" e já para o caso com venda a descoberto deixaremos esse campo sem checar, ou seja, em branco.

10º) Selecionamos o campo "Resolver" e então o portfólio será formulado.

4 Consolidação Resultado - Modelo de Markowitz

Nesse tópico iremos consolidar os resultados obtidos nos itens anteriores. Como o foco desta monografia é referente ao Modelo de Markowitz, então aqui iremos apresentar os resultados obtidos deste modelo que foi realizado seguindo os passos descritos na seção 3.5.5.1.

Conforme apresentado no item anterior, temos os seguintes resultados:

Figura 22. Sem Venda a Descoberto Formulado - Markowitz

Xj	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total
%	0.03	0.01	0.00	0.00	0.14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.50	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.31	1.00
Xj	%																				
1	0.03																				
2	0.01																				
3	0.00																				
4	0.00																				
5	0.14																				
6	0.00																				
7	0.00																				
8	0.00																				
9	0.00																				
10	0.50																				
11	0.01																				
12	0.00																				
13	0.00																				
14	0.00																				
15	0.00																				
16	0.00																				
17	0.00																				
18	0.00																				
19	0.00																				
20	0.31																				
Total	1.00																				

FONTE: A autora (2021).

Figura 23. Com Venda a Descoberto Formulado - Markowitz

Xj	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	Total
%	0.00	-0.07	-0.05	0.09	0.13	0.15	0.08	-0.10	-0.37	0.28	0.13	0.20	-0.09	0.08	0.21	0.01	-0.01	-0.13	0.02	0.44	1.00
Xj	%																				
1	0.00																				
2	-0.07																				
3	-0.05																				
4	0.09																				
5	0.13																				
6	0.15																				
7	0.08																				
8	-0.10																				
9	-0.37																				
10	0.28																				
11	0.13																				
12	0.20																				
13	-0.09																				
14	0.08																				
15	0.21																				
16	0.01																				
17	-0.01																				
18	-0.13																				
19	0.02																				
20	0.44																				
Total	1.00																				

FONTE: A autora (2021).

Nas tabelas abaixo, podemos verificar o portfólio ótimo considerando sem venda a descoberto (SVD) e com venda a descoberto (CVD), e também o retorno e risco de cada, respectivamente. Então:

Tabela 3 - Portfólio Ótimo - SVD e CVDS

Ativo	Código	SVD	CVD
1	ABEV3	3,49%	0,07%
2	AMER3	0,95%	-7,08%
3	B3SA3	0,00%	-5,42%
4	BBAS3	0,00%	8,57%
5	BRKM5	13,94%	13,26%
6	BPAC11	0,00%	15,40%
7	CMIG4	0,00%	8,27%
8	CIEL3	0,00%	-10,08%
9	CPLE6	0,00%	-36,76%
10	EGIE3	49,87%	27,96%
11	GGBR4	0,82%	12,84%
12	ITSA4	0,00%	19,97%
13	MGLU3	0,00%	-8,65%
14	RAIL3	0,00%	7,99%
15	SAPR11	0,00%	21,04%
16	SUZB3	0,00%	0,77%
17	TIMS3	0,00%	-0,75%
18	UGPA3	0,00%	-12,93%
19	VBBR3	0,00%	1,57%
20	WEGE3	30,92%	43,98%
Total		100%	100%

FONTE: A autora (2021).

Tabela 4 - SVD e CVD - Retorno e Risco

Tipo	\bar{R}_c	σ_c
SVD	1,29%	1,80%
CVD	2,96%	0,00016%

FONTE: A autora (2021).

Observando as tabelas acima, podemos concluir que no caso de sem venda a descoberto (SVD) o retorno é 1,29% sendo seu risco de 1,80% e os melhores ativos para investimentos serão: EGIE3 (49,87%), WEGE3 (30,92%), BRKM5 (13,94%), ABEV3 (3,49%), AMER3 (0,95%) e GGBR4 (0,82%).

Enquanto para o caso de com venda a descoberto (CVD) o retorno é 2,96% sendo seu risco de 0,00016% e temos uma diversificação muito maior entre os ativos, os melhores para investimentos serão: WEGE3 (43,98%), EGIE3 (27,96%), SAPR11 (21,04%), ITSA4 (19,97%), BPAC11 (15,40%), BRKM5 (13,26%), GGBR4 (12,84%), BBAS3 (8,57%), CMIG4 (8,27%), RAIL3 (7,99%), VBBR3 (1,57%), SUZB3 (0,77%) e ABEV3 (0,07%).

Considerando os dados acima, podemos considerar a melhor opção para investimento no portfólio com venda a descoberto, temos que o retorno x risco é mais atraente em comparação com a sem venda a descoberto, sendo o retorno maior e o risco se aproximando a zero.

5 Considerações Finais

Nesta monografia foram apresentados três métodos para se compor um portfólio ótimo, todos sendo analisados na visão sem venda a descoberto (SVD) e com venda a descoberto (CVD). Todos os modelos nos permitem calcular uma previsão do que pode ocorrer em cada cenário, deixando evidenciado que não se trata de algo 100% certo já que se trata de dados do mercado e o mesmo pode sofrer mudanças radicais dependendo de eventos inesperados.

O foco principal deste trabalho foi aprofundar os conhecimentos de um modelo em específico, o Modelo de Markowitz. Aplicando os procedimentos necessários conseguimos obter os resultados finais. Nosso banco de dados teve como composição 20 empresas que são consideradas no índice ESG no período de 12 meses.

Tivemos como evidência que o portfólio com venda a descoberto foi o que teve o resultado mais atraente para investimentos, considerando o nível mais alto de diversificação e retorno, sendo seu nível de risco mais baixo. Esse resultado nos afirmou que é interessante a decisão de diversificação do portfólio para obter um investimento com bons retornos considerando segurança.

Outro ponto que podemos deixar em foco é que a empresa participando do índice ESG, se tornando uma empresa preocupada com sustentabilidade e tomando ações que a façam seguir passos que visem o meio ambiente, social e atitudes de governança, ainda sim pode trazer boas rentabilidades ao mercado. Ou seja, contrariando o pensamento de maioria, sustentabilidade e lucratividade podem sim gerar uma boa combinação para sua empresa.

Salienta-se que os dados que foram utilizados para a construção desta monografia são apenas uma amostra de algumas empresas, então devemos pensar que sempre devemos analisar qual cenário estamos trabalhando e qual será a melhor maneira de aplicar os métodos apresentados.

REFERÊNCIAS

ELTON, Edwin J. et al. **Moderna Teoria das Carteiras e Análise de Investimentos**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2012. Tradução: Helga Hoffmann.

TORRENS, Paula Eastwood. **ESTUDO DE MODELOS MATEMÁTICOS EM FINANÇAS PARA A OTIMIZAÇÃO DE UMA CARTEIRA DO ÍNDICE DE SUSTENTABILIDADE EMPRESARIAL**. Orientador: Prof. Dr. Luiz Carlos Matioli. 2020. TCC (Graduação) - Curso de Matemática, Universidade Federal do Paraná.

CRISTINA, T. **APLICAÇÃO DO MODELO DE MARKOWITZ PARA A OTIMIZAÇÃO DE CARTEIRAS DE TÍTULOS PÚBLICOS**. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharel em Engenharia de Produção) - Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2016.

HENRIQUES, C. **ANÁLISE DE UMA CARTEIRA DE INVESTIMENTO UTILIZANDO A TEORIA DE MARKOWITZ E O MODELO CAPM**. Trabalho de Conclusão de Curso (Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Juiz de Fora. Juiz de Fora, 2018.

Conceito: Risco. Disponível em: <https://www.trt9.jus.br/pds/pdstr9/guidances/concepts/risk_AF5840DA.html/>

Acesso em: 20 jul. 2021.

Teoria de Markowitz, o que é? Como funciona, aplicação e diversificação. Disponível em: <<https://investidorsardinha.r7.com/aprender/markowitz-teoria-carteira/>> Acesso em: 27 jul. 2021.

Significado de Pesquisa quantitativa. Disponível em: <<https://www.significados.com.br/pesquisa-quantitativa/>> Acesso em: 30 jul. 2021.

4 características da pesquisa quantitativa. Disponível em: <<https://www.questionpro.com/blog/pt-br/caracteristicas-da-pesquisa-quantitativa/>> Acesso em: 30 jul. 2021.

Conheça os perfis de investimentos recomendados. Disponível em: <<https://conteudos.xpi.com.br/guia-de-investimentos/relatorios/perfis-de-investimentos-recomendados/>> Acesso em: 04 ago. 2021.

Perfil de investidor: quais são e como funcionam. Disponível em: <<https://blog.nubank.com.br/perfil-de-investidor-quais-sao/>> Acesso em: 04 ago. 2021.

O que é e por que é importante conhecer o seu perfil de investidor. Disponível em: <<https://blog.valorem.com.br/perfil-de-investidor/>> Acesso em: 04 ago. 2021.

Riscos financeiros: 5 tipos para você manter sob controle. Disponível em: <<https://andrebona.com.br/riscos-financeiros-5-tipos-para-voce-manter-sob-controle/>> Acesso em 06 ago. 2021.

Teoria de Markowitz – entenda o que é. Disponível em: <<https://www.parmais.com.br/blog/teoria-de-markowitz/>> Acesso em 07 ago. 2021.

Markowitz. Disponível em: <<https://maisretorno.com/portal/termos/m/markowitz>> Acesso em 07 ago. 2021.

ESG no Brasil: já é uma realidade? Disponível em: <https://impacto.voxcapital.com.br/esg-no-brasil-ja-e-uma-realidade/?gclid=CjwKCAiA1aiMBhAUEiwACw25MaiB7u8GUfSOWQvmdh1zhrTLB5e-8BE9g4uXNt6QTMtoq7NG0AfqIBoCCuYQAvD_BwE> Acesso em 20 out. 2021.

ESG de A a Z: Tudo o que você precisa saber sobre o tema. Disponível em: <<https://conteudos.xpi.com.br/esg/esg-de-a-a-z-tudo-o-que-voce-precisa-saber-sobre-o-tema/>> Acesso em 31 out. 2021.

ESG: Conceito, como funciona e principais características. Disponível em: <<https://www.totvs.com/blog/business-performance/esg/>> Acesso em 01 nov. 2021.

Princípios ESG. Disponível em: <https://www.protiviti.com/BR-por/performance-empresarial/principios-esg?gclid=Cj0KCQiA-K2MBhC-ARIsAMtLKRvh3vCw1D25dGAM0ZH-VDVyxvFQSmOd_9Sn7cp8VdzfXfg42PjM8ylaAva9EALw_wcB> Acesso em 01 nov. 2021.

O que é e qual sua influência sobre os investimentos. Disponível em: <<https://blog.genialinvestimentos.com.br/o-que-e-esg/>> Acesso em 01 nov. 2021.

O que é ESG e como aplicar na sua scale-up. Disponível em: <<https://endeavor.org.br/diversidade/o-que-e-esg-e-como-aplicar-na-sua-scale-up/>> Acesso em 02 nov. 2021.

ESG: 6 motivos para você aplicar em sua empresa. Disponível em: <<https://chcadvocacia.adv.br/blog/esg/>> Acesso em 02 nov. 2021.

VOCÊ SABE O QUE É VENDA A DESCOBERTO? Disponível em: <<https://master.clear.com.br/venda-a-descoberto/>> Acesso em 21 nov. 2021.

COMPOSIÇÃO DA CARTEIRA. Disponível em: <https://www.b3.com.br/pt_br/market-data-e-indices/indices/indices-de-sustentabilidade/indice-carbono-eficiente-ico2-composicao-da-carreira.htm> Acesso em 25 nov. 2021.

AÇÕES. Disponível em: <<https://br.investing.com/equities/>> Acesso em 06 dez. 2021.