

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Andrey Modtkoski Friedlaender

Anéis de Grothendieck de
Categorias Finitas

Curitiba

2019

Andrey Modtkoski Friedlaender

Anéis de Grothendieck de Categorias Finitas

Trabalho de conclusão apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em matemática.

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Outeiral
Correa Hoefel

Curitiba
2019

Resumo

Dada uma categoria finita \mathcal{C} , o presente estudo objetiva analisar os Anéis de Grothendieck obtidos a partir de \mathcal{C} , de maneira que através dos dados coletados possamos criar mais exemplos de Anéis de Grothendieck, buscando assim uma relação que nos permita responder à seguinte pergunta: Dada uma R -álgebra \mathcal{A} , podemos determinar se \mathcal{A} é isomorfa ao Anel de Grothendieck de uma categoria finita \mathcal{C} ? E em caso negativo, quais seriam as hipóteses mínimas para que isto ocorresse?

Os resultados aqui apresentados permitem relacionar posets lineares e não lineares com as suas álgebras de incidência, estas coincidindo com os Anéis de Grothendieck dos respectivos posets. Contudo, ainda não foi possível generalizar os resultados obtidos para categorias genéricas, nem obter evidências de que tais resultados continuam válidos ao tomarmos categorias finitas mais gerais.

Palavras-chave: categorias finitas, álgebras de convolução.

Abstract

Given a finite category \mathcal{C} , this study aims to analyze the Grothendieck rings obtained from \mathcal{C} , so that through the collected data we can hopefully gather more examples of Grothendieck rings, thus seeking a relationship that allows us to answer the following question: Given an arbitrary Algebra \mathcal{A} , is it possible to determine if \mathcal{A} is isomorphic to the Grothendieck Ring of a finite category \mathcal{C} ? And if not, what would be the minimum hypotheses for this to occur?

The results presented here allowed us to relate linear and non-linear posets with their incidence algebras, which coincides with their respective Grothendieck rings. However, it has not yet been possible to generalize the obtained results for generic categories, nor to obtain evidence that such results remain valid when we take more general finite categories.

Keywords: finite categories, convolution algebras.

Sumário

Introdução	1
1 Definições e resultados preliminares	3
1.1 Categorias	3
1.2 Funtores, produto e coproduto	6
2 Módulos sobre Anéis Comutativos	12
2.1 Noções básicas	12
2.2 Teoremas de isomorfismo	15
2.3 Soma direta, soma interna e sequências exatas	16
2.4 Coproduto em ${}_R\text{Mod}$	22
2.5 Módulos livres e módulos projetivos	24
2.6 Grupos de Grothendieck	29
2.6.1 *-categorias	29
2.6.2 Grupos de Grothendieck para subcategorias de ${}_R\text{Mod}$	35
3 Álgebras de Convolução e Anéis de Grothendieck	38
3.1 Álgebras sobre anéis comutativos e Produto tensorial	38
3.2 O Anel de Grothendieck	40
3.3 Exemplos de Anéis de Grothendieck	44

3.3.1	Grupóide do par	44
3.3.2	Posets Lineares	47
3.3.3	Posets não-lineares	50
3.4	O Anel de Grothendieck de Árvores finitas	53
4	Considerações Finais	58
	Referências Bibliográficas	60

Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar a relação entre certas R -álgebras e categorias finitas, em especial posets lineares e não-lineares. Um passo importante neste estudo sobre relações entre álgebras de convolução e categorias finitas genéricas seria a obtenção de uma classificação dos Anéis de Grothendieck.

Anéis de Grothendieck, ou álgebras de convolução, são estruturas algébricas que nascem ao definirmos uma R -álgebra cuja multiplicação se dê através da operação de convolução de funções. O trabalho adota um enfoque combinatório, onde o produto de convolução é dado por uma soma finita, evitando assim problemas relacionados à integrabilidade das funções consideradas em nossas álgebras.

O trabalho está dividido em 4 capítulos. No capítulo 1 serão abordadas as definições e propriedades básicas estudadas na teoria de categorias, visando familiarizar o leitor com alguns tópicos que serão abordados mais adiante no texto. No capítulo 2 serão trabalhados os conceitos referentes a módulos sobre anéis comutativos e sequências exatas.

O capítulo 3 trata inicialmente de álgebras sobre anéis comutativos e a construção do Anel de Grothendieck de uma categoria finita, e traz propriedades básicas relacionadas a tal construção. Na sequência encontram-se alguns exemplos de construções de Anéis de Grothendieck para grupóides e posets. Por fim, é apresentado um teorema relacionando o Anel de Grothendieck de posets com as álgebras de matrizes.

O capítulo 4 traz uma síntese do que foi visto no decorrer do texto, apresenta quais foram as dificuldades encontradas no decorrer do trabalho e indica possíveis seguimentos que podem se dar ao presente estudo.

Antes de continuar, é recomendado que o leitor tenha conhecimentos básicos sobre teoria de categorias, teoria de grupos e teoria de anéis para melhor compreender o enfoque deste trabalho.

Capítulo 1

Definições e resultados preliminares

Antes de apresentarmos as definições mais importantes utilizadas no desenvolvimento deste trabalho, iremos trazer algumas definições e alguns conceitos básicos que se fazem imprescindíveis para a compreensão dos resultados a serem mostrados posteriormente.

1.1 Categorias

É importante ressaltar a distinção necessária entre *classes próprias* e *conjuntos*. A noção de conjunto nos é bastante familiar, contudo ao observarmos a teoria de conjuntos, notamos que há conjuntos “demasiadamente grandes”, que causam certos conflitos. A tais conjuntos damos o nome de *classes próprias*. Para mais detalhes sobre classes e conjuntos, recomenda-se a leitura de Halmos [3].

A definição de categoria, fundamental para o desenvolvimento deste estudo, pode ser dada de diversas maneiras. A definição clássica a seguir é a mais usual, porém veremos outras definições equivalentes em seguida.

Definição 1.1.1 (Clássica). *Uma categoria consiste de três partes:*

- i) Uma classe de objetos, que aqui será denotada por $\text{Obj}(\mathcal{C})$;*
- ii) Um conjunto de morfismos para cada par (A, B) de objetos, denotado por $\text{Hom}(A, B)$. Um morfismo $f \in \text{Hom}(A, B)$ é denotado por $A \xrightarrow{f} B$ ou $f :$*

$A \rightarrow B$;

iii) Uma regra de composição $\circ : \text{Hom}(A, B) \times \text{Hom}(B, C) \rightarrow \text{Hom}(A, C)$ que associa um par de morfismos (f, g) à sua respectiva composição gf .

Onde se verificam os seguintes axiomas:

1. Os conjuntos Hom são disjuntos par-a-par, o que garante que cada morfismo f tenha único domínio e contradomínio.
2. Para cada $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, existe um morfismo identidade $1_X \in \text{Hom}(X, X)$ tal que para todo $A \xrightarrow{f} B$, $f1_A = f$ e $1_B f = f$.
3. $h(gf) = (hg)f$, para todos os morfismos $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$, $h : C \rightarrow D$.

Observação 1.1.2. Note que uma categoria pode possuir uma *classe* de objetos, que não é necessariamente um *conjunto* de objetos. Como neste estudo trabalharemos sobre categorias finitas, iremos considerar categorias que possuem *conjuntos* finitos de objetos e morfismos. Categorias cujos objetos e morfismos encontram-se em conjuntos recebem o nome de *categorias pequenas*.

Vejamos agora as definições de categoria através de conceitos relacionadas a monóides e grafos:

Definição 1.1.3 (Monoidal). *Uma categoria \mathcal{C} é um conjunto satisfazendo as seguintes propriedades:*

1. \mathcal{C} é munido de funções $s, t : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$.
2. \mathcal{C} é munido de um produto parcialmente definido:

$$\cdot : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

$$(a, b) \mapsto ba$$

sendo ba definido se, e somente se, $s(b) = t(a)$. Além disso ocorre $(ab)c = a(bc)$, se estes puderem ser definidos, para todos os elementos $a, b, c \in \mathcal{C}$.

3. Existem elementos e com $s(e) = t(e)$, tais que $ea = be$ se ocorrer $t(a) = s(e)$ e $s(b) = t(e)$

Observação 1.1.4. Podemos observar os elementos de \mathcal{C} como morfismos $f : A \rightarrow B$ onde os próprios A e B são os morfismos identidade de A e B . Assim, podemos reescrever a condição 2. da seguinte maneira:

“ \mathcal{C} é munido de um produto parcialmente definido:

$$\circ : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \quad (f, g) \mapsto g \circ f \iff s(g) = t(f),$$

o que nos aproxima da noção de categoria tal como foi abordada na definição clássica

Definição 1.1.5 (Grafos). Uma categoria é um grafo orientado munido de uma operação de composição de morfismos, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. Para cada vértice A , existirá um morfismo $id_A : A \rightarrow A$ tal que, dados outro vértice B e morfismo $f : A \rightarrow B$, vale $fid_A = f$ e $id_B f = f$.
2. Dados vértices A, B, C e D com morfismos $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow C$ e $h : C \rightarrow D$, ocorre $h(gf) = (hg)f$, quaisquer que sejam A, B, C e D .

Observação 1.1.6. Os “morfismos” da categoria vista através da noção de grafos são as arestas do grafo.

Definição 1.1.7. Dizemos que um morfismo $f : A \rightarrow B$ numa categoria \mathcal{C} é um isomorfismo (ou equivalência) se existe $g : B \rightarrow A$ em \mathcal{C} tal que $gf = 1_A$ e $fg = 1_B$. O morfismo g é dito inverso de f .

Vejamos alguns exemplos de categorias:

Exemplo 1.1.8. A categoria de conjuntos, denotada por **SET**, cujos objetos são conjuntos e morfismos são funções entre conjuntos.

Exemplo 1.1.9. A categoria de Posets, **POSET**, onde objetos são conjuntos parcialmente ordenados e morfismos são funções monótonas não-decrescentes.

Exemplo 1.1.10. A categoria $\mathbf{PO}(X)$, obtida a partir de uma relação de ordem num conjunto X , onde os objetos são os elementos de X e existe um único morfismo $a \xrightarrow{f} b$ para $a \leq b$, e nenhum morfismo caso contrário.

Exemplo 1.1.11. A categoria de k -espaços vetoriais, tendo espaços vetoriais como objetos e transformações lineares como morfismos.

Cabe ressaltar agora que no decorrer do texto, com exceção das definições e proposições, os termos *morfismo*, *flecha* e *função* serão utilizados de maneira intercambiada para representar a ideia de relação entre dois objetos ou conjuntos.

No presente estudo serão comumente utilizadas as categorias ${}_R\text{Mod}$ e ${}_R\text{Alg}$, tendo como respectivos objetos Módulos e Álgebras sobre um anel comutativo R e R -morfismos de módulos e álgebras como respectivas flechas. Por estarmos sempre adotando R como anel comutativo, não há a necessidade de explicitar se tratamos de módulos e álgebras à esquerda ou à direita.

Temos também interesse em observar a existência de possíveis relações entre duas categorias supostas distintas a princípio. Para tal, é útil a noção de funtores covariantes e contravariantes.

1.2 Funtores, produto e coproduto

Definição 1.2.1. *Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} categorias. Um funtor covariante $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ é uma função tal que:*

i) Para todo objeto A em $\text{Obj}(\mathcal{C})$, existe um objeto $T(A)$ correspondente em \mathcal{D} , ou seja, $A \in \text{Obj}(\mathcal{C}) \Rightarrow T(A) \in \text{Obj}(\mathcal{D})$;

ii) Se $f : A \rightarrow B$ é um morfismo em \mathcal{C} , teremos $T(f) : T(A) \rightarrow T(B)$ um morfismo em \mathcal{D} .

Em outras palavras, $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C} \Rightarrow T(f) : T(A) \rightarrow T(B) \in \mathcal{D}$;

iii) É preservada a composição de morfismos:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \in \mathcal{C} \Rightarrow T(A) \xrightarrow{T(f)} T(B) \xrightarrow{T(g)} T(C) \text{ e } T(gf) = T(g)T(f) \in \mathcal{D};$$

iv) Morfismos identidade são levados em morfismos identidade:

$$\forall A \in \text{Obj}(\mathcal{C}), T(1_A) = 1_{T(A)} \in \mathcal{D}.$$

Definição 1.2.2. Sejam \mathcal{C} e \mathcal{D} categorias. Um funtor $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ contravariante é uma função tal que:

i) Para todo objeto $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, tem-se $T(A) \in \text{Obj}(\mathcal{D})$;

ii) Para cada $f : A \rightarrow B \in \mathcal{C}$ ocorre $T(f) : T(B) \rightarrow T(A) \in \mathcal{D}$;

iii) A composição é preservada, porém o sentido dos morfismos é invertido:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \in \mathcal{C} \Rightarrow T(C) \xrightarrow{T(g)} T(B) \xrightarrow{T(f)} T(A) \text{ e } T(gf) = T(f)T(g) \in \mathcal{D};$$

iv) Morfismos identidade são levados em morfismos identidade:

$$\forall A \in \text{Obj}(\mathcal{C}), T(1_A) = 1_{T(A)} \in \mathcal{D}.$$

Vejamos alguns exemplos de funtores:

Exemplo 1.2.3. O funtor identidade $Id_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ de uma categoria \mathcal{C} , tal que $Id_{\mathcal{C}}(A) = A$ para todo objeto A de \mathcal{C} e $Id_{\mathcal{C}}(f) = f$ para toda flecha f de $Id_{\mathcal{C}}$.

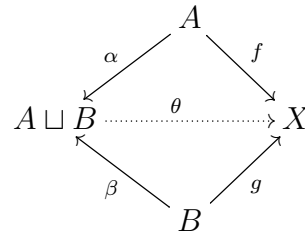
Exemplo 1.2.4. O funtor livre, $\mathcal{L} : SET \rightarrow Vect_k$ definido da categoria de conjuntos Set para a categoria $Vect_k$ de k -espaços vetoriais, que a cada conjunto B em SET associa o espaço vetorial V que possui B como base.

Exemplo 1.2.5. O funtor das partes $\mathcal{P} : SET \rightarrow POSET$, que leva cada conjunto A no conjunto das partes de A , $\mathcal{P}(A)$, e leva cada morfismo $f : A \rightarrow B$ em $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(f(A)) \rightarrow \mathcal{P}(f(B))$. Aqui a estrutura de poset se dá ao observarmos a relação de inclusão como uma relação de ordem parcial: $X \leq Y \iff X \subset Y$.

Na sequência, vejamos algumas operações entre objetos de uma categoria \mathcal{C} :

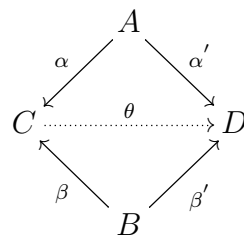
Definição 1.2.6. Se A e B são objetos em uma categoria \mathcal{C} , seu coproduto é definido como um objeto $C \in \text{obj}(\mathcal{C})$, denotado por $A \sqcup B$, que possui morfismos de injeção $\alpha : A \rightarrow A \sqcup B$ e $\beta : B \rightarrow A \sqcup B$ satisfazendo a seguinte propriedade universal:

Para todo objeto X em \mathcal{C} e para cada par de morfismos $f : A \rightarrow X$ e $g : B \rightarrow X$, existe um único morfismo $\theta : A \sqcup B \rightarrow X$ fazendo o seguinte diagrama comutar:

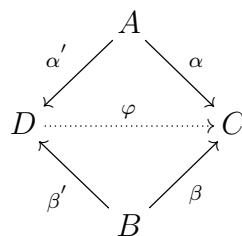


Proposição 1.2.7. *Dados dois objetos A e B de uma categoria \mathcal{C} , seu coproduto (quando existe) é único a menos de isomorfismo.*

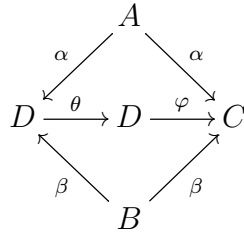
Demonstração. Suponhamos que C e D sejam coprodutos de A e B . Temos então os morfismos $\alpha : A \rightarrow C$; $\beta : B \rightarrow C$; $\alpha' : A \rightarrow D$ e $\beta' : B \rightarrow D$. Se considerarmos $X = D$ na definição de coproduto, temos que existe um morfismo $\theta : C \rightarrow D$ fazendo com que o diagrama a seguir comute:



Analogamente, fazendo $X = C$, temos o seguinte diagrama comutativo com um morfismo $\varphi : D \rightarrow C$:



Sobrepondo ambos os diagramas, obtemos:



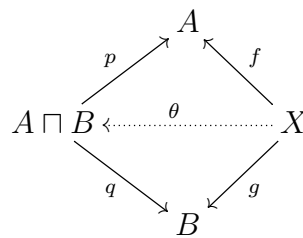
Note que se fizermos a composição $\varphi\theta\alpha$, teremos que $\varphi\theta\alpha = \varphi\alpha' = \alpha$, pela comutatividade dos dois diagramas anteriores. Analogamente, $\varphi\theta\beta = \varphi\beta' = \beta$. Assim, o diagrama obtido pelas sobreposições também é comutativo.

Por fim, a unicidade de θ e φ garante que $\varphi\theta = 1_C$, e que $\theta\varphi = 1_D$. Assim, podemos dizer que as flechas θ e φ são isomorfismos entre C e D . ■

Podemos generalizar a definição de coproduto para uma família. Vejamos a construção dual para o coproduto:

Definição 1.2.8. Se A e B são objetos em uma categoria \mathcal{C} , o seu produto $A \sqcap B$ é um objeto P em \mathcal{C} com morfismos $p : P \rightarrow A$ e $q : P \rightarrow B$ satisfazendo a seguinte propriedade universal:

Para todo objeto X em \mathcal{C} e todo par de morfismos $f : X \rightarrow A$ e $g : X \rightarrow B$, exista um único morfismo $\theta : X \rightarrow P$ fazendo com que o seguinte diagrama comute:



Proposição 1.2.9. Sejam $f : B \rightarrow A$ e $g : C \rightarrow A$ flechas em uma categoria \mathcal{C} . Se o seu produto existir, será único a menos de isomorfismo.

Demonstração. A demonstração é análoga ao caso do coproduto. ■

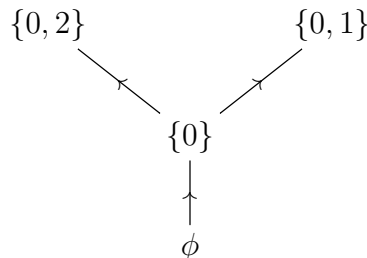
Exemplo 1.2.10. Observando um poset \mathcal{C} como categoria, dados dois objetos a e b de \mathcal{C} , seu coproduto c é um terceiro objeto tal que se verificam os axiomas de coproduto:

1. Existem $\alpha : a \rightarrow c$, $\beta : b \rightarrow c$;
2. Dado um outro objeto x qualquer e morfismos $f : a \rightarrow x$ e $g : b \rightarrow x$, existe um único morfismo θ satisfazendo $\theta\alpha = \theta\beta$.

As condições (1) e (2) garantem que c será o menor elemento tal que $a \leq c$ e $b \leq c$, ou seja, c é a menor das cotas superiores (supremo) do conjunto $\{a, b\}$, e coincidirá com $\max(a, b)$. Analogamente, o produto de a e b é o maior elemento $c \in \mathcal{C}$ tal que $c \leq a$ e $c \leq b$, ou em outras palavras, a maior das cotas inferiores (ínfimo) de \mathcal{C} , e coincidirá com $\min(a, b)$.

Contudo, o produto e coproduto de posets não existirão em geral. Considerando o poset criado a partir dos subconjuntos de no máximo dois elementos do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$, tendo a inclusão como relação de ordem, veremos que este poset não possuirá produto.

De fato, considerando $S = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}\}$, podemos representá-lo no seguinte diagrama:



Note que não há um subconjunto A de no máximo dois elementos tal que $\{0, 1\} \subset A$ e $\{0, 2\} \subset A$. Portanto, o poset criado acima não possuirá supremo e não existe o produto para $\{0, 1\}$ e $\{0, 2\}$.

Exemplo 1.2.11. Veremos no próximo capítulo que, na categoria ${}_R\text{Mod}$ de R -módulos, com R um anel comutativo, temos que o produto e coproduto de um número finito de R -módulos A e B coincidem, e são isomorfos à soma direta $A \oplus B$.

Exemplo 1.2.12. Na categoria **SET**, temos que o produto de dois conjuntos A e B será isomorfo ao produto cartesiano $A \times B$ e seu coproduto será isomorfo à união disjunta $A \sqcup B$. Isso ocorre como consequência da definição de $A \sqcup B$ e $A \times B$.

Antes de abordarmos módulos sobre anéis comutativos, iremos generalizar as definições de produto e coproduto para uma família finita de objetos.

Definição 1.2.13. *Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de objetos numa categoria \mathcal{C} . O produto desta família em \mathcal{C} é um par $(A, (p_i)_{i \in I})$ onde $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e $p_i : A \rightarrow A_i$ são morfismos satisfazendo a seguinte propriedade: Para qualquer outro par $(A', (p'_i)_{i \in I})$, existe um único morfismo $f : A' \rightarrow A$ comutando o seguinte diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{p_i} & A_i \\ \uparrow f & \nearrow p'_i & \\ A' & & \end{array}$$

Definição 1.2.14. *Seja $(A_i)_{i \in I}$ uma família de objetos numa categoria \mathcal{C} . O coproduto desta família em \mathcal{C} é um par $(A, (q_i)_{i \in I})$ onde $A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e $q_i : A_i \rightarrow A$ são morfismos satisfazendo a seguinte propriedade: Para qualquer outro par $(A', (q'_i)_{i \in I})$, existe um único morfismo $f : A \rightarrow A'$ comutando o seguinte diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{q_i} & A_i \\ \downarrow f & \nwarrow q'_i & \\ A' & & \end{array}$$

Novamente, pode-se verificar que o produto e coproduto de uma família de objetos são únicos a menos de isomorfismo. Tal verificação pode ser encontrada em [1], pp. 53-55.

Capítulo 2

Módulos sobre Anéis Comutativos

Neste capítulo trataremos de noções e resultados referentes à teoria de módulos sobre anéis comutativos, que posteriormente serão utilizados na demonstração de certas propriedades referentes a R -álgebras. Iniciemos tratando das definições e propriedades básicas.

2.1 Noções básicas

Definição 2.1.1. *Seja R um anel comutativo. Um R -módulo é um grupo abeliano aditivo M munido de uma multiplicação por escalar $R \times M \rightarrow M$ denotada por*

$$(r, m) \mapsto rm$$

e que satisfaz os seguintes axiomas, $\forall m, m' \in M$ e para todo $r, r' \in R$:

1. $r(m + m') = rm + rm'$;
2. $(r + r')m = rm + r'm$;
3. $(rr')m = r(r'm)$;
4. $1m = m$.

Definição 2.1.2. *Se R é um anel e M e N são R -módulos, então uma função $f : M \rightarrow N$ é chamada de R -homomorfismo (ou R -morfismo) se $\forall m, m' \in M$ e $\forall r \in R$, tem-se:*

$$1. f(m + m') = f(m) + f(m')$$

$$2. f(rm) = rf(m)$$

Note que se um R-homomorfismo é uma bijeção, recebe o nome de R-isomorfismo. Dois módulos M e N são ditos isomorfos ($M \cong N$) se existe um R-isomorfismo $f : M \rightarrow N$.

Definição 2.1.3. *Sejam M e N R-módulos quaisquer, onde R é um anel comutativo. Considere*

$$\text{Hom}_R(M, N) = \{f : M \rightarrow N; f \text{ é R-homomorfismo}\}$$

Tomando $f, g \in \text{Hom}_R(M, N)$, definimos sua adição $f + g : M \rightarrow N$ por

$$f + g : m \mapsto f(m) + g(m)$$

Proposição 2.1.4. *Sejam M e N R-módulos, com R um anel comutativo. Então $\text{Hom}_R(M, N)$ é um R-módulo cuja adição foi definida acima, e multiplicação é dada por*

$$rf : m \mapsto f(rm).$$

Além disso, a soma é distributiva em relação à composição. Para $p : M' \mapsto M$ e $q : N \mapsto N'$, temos:

$$(f + g)p = fp + gp \quad e \quad q(f + g) = qf + qg$$

$$\forall f, g \in \text{Hom}_r(M, N)$$

Demonstração. Basta verificarmos os axiomas da definição de um R-módulo. Considere $m \in M, n \in N; f, g \in \text{Hom}_R(M, N); r, r' \in R$:

$$\text{i) } r((f + g)(m)) = (f + g)(rm) = f(rm) + g(rm) = rf(m) + rg(m) \quad \forall m \in M.$$

$$\therefore r(f + g) = rf + rg.$$

$$\text{ii) } (r + r')f(m) = f((r + r')m) = f(rm + r'm) = f(rm) + f(r'm) = rf(m) + r'f(m) \quad \forall m \in M.$$

$$\therefore (r + r')f = rf + r'f$$

iii) $(rr')f(m) = f(rr'm)$. A comutatividade de R nos dá $rr'm = r'rm$, logo
 $f(rr'm) = f(r'rm) = r'f(rm) = r(r'f(m))$, $\forall m \in M$.
 $\therefore (rr')f = r(r'f)$.

iv) $1f(m) = f(1m) = f(m) \forall m \in M$.
 $\therefore 1f = f$.

■

Definição 2.1.5. *Seja M um R -módulo. Um R -módulo N recebe o nome de submódulo de M (e denota-se por $N \subseteq M$) se N for um subgrupo aditivo de M fechado pela multiplicação por escalar: $rn \in N$ sempre que $n \in N$ e $r \in R$.*

Definição 2.1.6. *Um módulo M é dito finitamente gerado se for gerado por um conjunto finito, isto é, se existe um subconjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset M$ tal que $M = \langle X \rangle = \{\sum_{i=1}^n r_i x_i / r_i \in R, x_i \in X\}$ ($\langle X \rangle$ é dito o conjunto de todas as combinações R -lineares de X).*

Definição 2.1.7. *Se $f : M \rightarrow N$ é um R -morfismo entre R -módulos, definimos:*

- *Kernel de f : $\ker f = \{m \in M / f(m) = 0\}$.*
- *Imagem de f : $\text{im } f = \{n \in N / \exists m \in M \text{ com } n = f(m)\}$.*

Proposição 2.1.8. *Seja $f : M \rightarrow N$ um R -homomorfismo. Então $\ker f$ é um submódulo de M e $\text{im } f$ é um submódulo de N .*

Demonstração. Provaremos que $\ker f$ é submódulo de M . Para mostrar que $\text{im } f$ é submódulo de N , basta utilizar-se da definição de R -homomorfismo.

Vejamos que $\ker f \subseteq M$. De fato, sejam $m_1, m_2 \in \ker f$ e $r, s \in R$, então $f(m_1) = f(m_2) = 0$. Logo, por f ser R -homomorfismo, ocorre $f(m_1+m_2) = f(m_1)+f(m_2) = 0+0 = 0$ e $m_1+m_2 \in \ker f$. Similarmente, $f(rm_1) = r(f(m_1)) = r(0) = 0$ e assim $rm_1 \in \ker f$.

■

Definição 2.1.9. Se N é um submódulo de um R -módulo M , então o módulo quociente é o grupo quociente M/N munido de uma multiplicação por escalar: $r(m+N) = rm + N$.

O morfismo natural, dado por

$$\begin{aligned}\pi : M &\rightarrow M/N \\ m &\mapsto m + N\end{aligned}$$

é um R -morfismo.

2.2 Teoremas de isomorfismo

Teorema 2.2.1 (Primeiro Teorema de Isomorfismo). Se $f : M \rightarrow N$ é um R -morfismo de módulos, então existe um R -isomorfismo entre $M/\ker f$ e $\text{im } f$, dado por:

$$\begin{aligned}\varphi : M/\ker f &\rightarrow \text{im } f \\ m + \ker f &\mapsto f(m)\end{aligned}$$

Demonstração. Tomando M e N apenas como grupos abelianos, de acordo com o primeiro teorema de isomorfismo para grupos, $\varphi : M/\ker f \rightarrow \text{im } f$ é um isomorfismo de grupos. No entanto, ocorre $\varphi(r(m + \ker f)) = \varphi(rm + \ker f) = f(rm)$, e portanto φ é R -morfismo. Agora, como f é também um R -morfismo, podemos escrever $f(rm) = rf(m) = r\varphi(m + \ker f)$. Por ser um isomorfismo de grupos que preserva a multiplicação por escalar definida em M e N , temos que φ é um R -isomorfismo. ■

Teorema 2.2.2 (Segundo Teorema de Isomorfismo). Se S e T são submódulos de um módulo M , então há um R -isomorfismo $S/S \cap T \rightarrow (S + T)/T$.

Demonstração. Considerando-se o morfismo natural $\pi : M \rightarrow M/T$, observamos que $\ker \pi = T$. Definindo $h = \pi|_S$, de forma que $h : S \rightarrow M/T$, temos que $\ker h = S \cap T$ e $\text{im } h = (S + T)/T$. O primeiro teorema de isomorfismo pode ser usado para chegar à conclusão de que $S/S \cap T \cong (S + T)/T$. ■

Teorema 2.2.3 (Terceiro Teorema de Isomorfismo). *Sejam T, S, M R -módulos. Se $T \subseteq S \subseteq M$, então existe um R -isomorfismo*

$$(M/T)/(S/T) \rightarrow M/S$$

.

Demonstração. Considere o seguinte morfismo:

$$\begin{aligned} g : M/T &\rightarrow M/S \\ m + T &\mapsto m + S \end{aligned}$$

Vejam inicialmente que g está bem definida: Se $m + T = m' + T$, então $m - m' \in T \subseteq S$. Com isto, $m + S = m' + S$, ou seja, $g(m + T) = g(m' + T)$.

Temos ainda que:

- $g(m + T) = 0 \Rightarrow m + S = 0 + S$, portanto $m \in S$ e $m + T \in S/T$. Logo $\ker g = S/T$.
- Da definição de M, S e T , segue que $\text{im } g = M/S$.

Aplicando o primeiro teorema de isomorfismo, chegamos à conclusão de que $(M/T)/(S/T) \cong M/S$, como queríamos. ■

2.3 Soma direta, soma interna e sequências exatas

Definição 2.3.1. *Se S e T são R -módulos, com R um anel comutativo, definimos sua soma direta (denotada por $S \sqcup T$) como o produto cartesiano $S \times T$ com operações coordenada-a-coordenada:*

$$\begin{aligned} (s, t) + (s', t') &= (s + s', t + t') \\ r(s, t) &= (rs, rt), \end{aligned}$$

onde $s, s' \in S$, $t, t' \in T$ e $r \in R$.

Existem R -morfismos injetivos $\lambda_S : S \rightarrow S \sqcup T$ dado por $s \mapsto (s, 0)$, e $\lambda_T : T \rightarrow S \sqcup T$ dado por $t \mapsto (0, t)$.

Proposição 2.3.2. *As seguintes afirmações são equivalentes para R -módulos M , S e T quaisquer:*

1. $S \sqcup T \cong M$.

2. *Existem R -morfismos injetivos $i : S \rightarrow M$ e $j : T \rightarrow M$ tais que*

$$M = \text{im } i + \text{im } j \quad \text{e} \quad \text{im } i \cap \text{im } j = \{0\}$$

3. *Existem R -morfismos injetivos $i : S \rightarrow M$ e $j : T \rightarrow M$ tais que para todo $m \in M$, existem únicos $s \in S$ e $t \in T$ com $m = is + jt$.*

4. *Existem R -morfismos injetivos $i : S \rightarrow M$, $j : T \rightarrow M$, $p : M \rightarrow S$ e $q : M \rightarrow T$ tais que*

$$pi = 1_S, \quad qj = 1_T, \quad pj = 0, \quad qi = 0, \quad \text{e} \quad ip + jq = 1_M.$$

Demonstração. (i) \Rightarrow (ii): Seja $\varphi : S \sqcup T \rightarrow M$ um isomorfismo. Definindo $\varphi\lambda_S = i$ e $\varphi\lambda_T = j$, temos que tanto i quanto j são injetoras (pois são composições de aplicações injetoras). Agora, se $m \in M$, existe um único par $(s, t) \in S \sqcup T$ com $m = \varphi(s, t)$. Logo,

$$\begin{aligned} m &= \varphi(s, t) \\ &= \varphi((s, 0) + (0, t)) \\ &= \varphi(s, 0) + \varphi(0, t) \\ &= \varphi\lambda_S(s) + \varphi\lambda_T(t) \\ &= is + jt \in \text{im } i + \text{im } j. \end{aligned}$$

Suponha agora $x \in \text{im } i \cap \text{im } j$. Então, $x = i(s) = j(t)$ para algum $s \in S$ e $t \in T$. Porém, isto implica em $\varphi\lambda_S(s) = \varphi\lambda_T(t)$. Como φ é isomorfismo, ocorre $(s, 0) = \lambda_S(s) = \lambda_T(t) = (0, t)$ em $S \sqcup T$, portanto $s = 0 = t$ e conseqüentemente $x = 0$. Assim, $\text{im } i \cap \text{im } j = \{0\}$.

(ii) \Rightarrow (iii): Considere $m \in M$, sabemos que $m = is + jt$. Resta provar que esta expressão é única. Supondo que existam $s' \in S$ e $t' \in T$ tais que $m = is' + jt'$, temos:

$$\begin{aligned} m &= is + jt = is' + jt' \\ \Rightarrow is - is' &= jt - jt' \\ \Rightarrow i(s - s') &= j(t - t') \in \text{im } i \cap \text{im } j = \{0\} \\ \Rightarrow i(s - s') &= j(t - t') = 0. \end{aligned}$$

Como i e j são R -homomorfismos injetivos, podemos concluir que $s - s' = t - t' = 0$. Portanto, $s = s'$ e $t = t'$.

(iii) \Rightarrow (iv): Se $m \in M$, vimos que existem únicos $s \in S$ e $t \in T$ tal que $m = is + jt$. Portanto, se definirmos as funções

$$p(m) = s \quad e \quad q(m) = t,$$

temos que ambas serão bem-definidas. Decorre imediatamente que p e q satisfazem as propriedades enunciadas na proposição:

1. $pi = 1_S$.
2. $qj = 1_T$.
3. $pj = 0$
4. $qi = 0$
5. Se $m \in M$, então $m = is + jt$ para algum $s \in S$ e $t \in T$. Logo, $ip(m) + jq(m) = is + jt = m$.

(iv) \Rightarrow (i): Tomando $\varphi : S \sqcup T \rightarrow M$, com $\varphi(s, t) = is + jt$, temos:

- φ é R -morfismo:

$$\begin{aligned} \varphi(m + m', n + n') &= i(m + m') + j(n + n') = i(m) + i(m') + j(n) + j(n') = \\ &= i(m) + j(n) + i(m') + j(n') = \varphi(m, n) + \varphi(m', n'). \end{aligned}$$

$$\varphi(r(m, n)) = \varphi(rm, rn) = i(rm) + j(rn) = ri(m) + rj(n) = r(i(m) + j(n)) = r\varphi(m, n).$$

- φ é sobrejetor, pelo fato de $1_M = ip + jq$.
- φ é injetor, pois supondo $\varphi(m, n) = 0$, temos $is + jt = 0$, o que implica em $is = -jt$. Assim, $s = pi(s) = -pj(t) = 0$ e $-t = -qj(t) = qi(s) = 0$.

■

Definição 2.3.3. Se S e T são submódulos de um módulo M , dizemos que M é a soma direta interna de S e T se $M \cong S \sqcup T$, tendo as inclusões $i : S \rightarrow M$ e $j : T \rightarrow M$. A notação que adotaremos é $M = S \oplus T$.

O fato de $M \cong S \sqcup T$ implica no seguinte corolário:

Corolário 2.3.4. As seguintes afirmações são equivalentes para um R -módulo M com submódulos S e T quaisquer:

1. $M \cong S \oplus T$.
2. $S + T = M$ e $S \cap T = \{0\}$.
3. Todo $m \in M$ pode ser expressado de forma única da forma $m = s + t$ com $s \in S$ e $t \in T$.

A prova segue diretamente da Proposição 2.3.2.

Definição 2.3.5. Uma sequência de R -morfismos de R -módulos

$$\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$$

é dita uma sequência exata se $\forall n, \text{im} f_{n+1} = \ker f_n$.

Dessa definição, podemos concluir algumas propriedades:

Proposição 2.3.6. São válidas as seguintes afirmações:

1. Uma sequência $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ será exata se, e só se f é injetiva.

2. Uma seqüência $B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ será exata se, e só se g é sobrejetiva.
3. Uma seqüência $0 \rightarrow A \xrightarrow{h} B \rightarrow 0$ será exata se, e só se h é um isomorfismo.

Demonstração.

1. (\Rightarrow) A imagem do morfismo $0 \rightarrow A$ é $\{0\}$, logo f é injetiva.
 (\Leftarrow) Para $f : A \rightarrow B$, a seqüência $\ker f \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ é exata, e como f é suposta injetiva, ocorre $\ker f = \{0\}$, portanto a seqüência $\ker f = 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$ é exata.
2. (\Rightarrow) O núcleo do morfismo $C \rightarrow 0$ é o próprio C , logo a exatidão da seqüência garante que $\text{img} = C$ e g é sobrejetiva.
 (\Leftarrow) Dada $g : B \rightarrow C$, consideremos a seqüência exata $B \xrightarrow{g} C \rightarrow C/\text{im } g$. Como g é sobrejetiva, ocorre $C = \text{im } g$ e portanto $C/\text{im } g = \{0\}$. Assim, a seqüência $B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0 = C/\text{im } g$ será exata.
3. Pelo que foi provado no item (i), temos que h será injetiva se, e só se $0 \rightarrow A \xrightarrow{h} B$ é exata, e pelo item (ii), h é sobrejetiva se e só se $A \xrightarrow{h} B \rightarrow 0$ for exata. Com isto concluímos que a seqüência $0 \rightarrow A \xrightarrow{h} B \rightarrow 0$ será exata se e somente se h for bijetiva, ou seja, um isomorfismo.

■

Definição 2.3.7. *Uma seqüência exata da forma*

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$$

é dita uma seqüência exata curta.

Proposição 2.3.8.

1. Se $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ é uma seqüência exata curta, então $A \cong \text{im } f$ e $B/\text{im } f \cong C$.
2. Se $T \subseteq S \subseteq M$ são R -módulos, então existe uma seqüência exata

$$0 \rightarrow S/T \xrightarrow{f} M/T \xrightarrow{g} M/S \rightarrow 0$$

Demonstração.

1. Observe que f é injetiva. Logo, há um isomorfismo $A \rightarrow \text{im } f$ e, pelo primeiro teorema de isomorfismo, temos que $B/\ker g \cong \text{im } g$, e ainda, a exatidão da sequência garante $\ker g = \text{im } f$ e $\text{im } g = C$. Portanto, $B/\text{im } f \cong C$.
2. Utilizando o terceiro teorema de isomorfismo, e definindo $f : S/T \rightarrow M/T$ como inclusão e $g : M/T \rightarrow M/S$ por $g(m + T) = m + S$. A função g é sobrejetiva, e assim $\ker g = S/T = \text{im } f$.

■

Definição 2.3.9. Um funtor covariante $T :_R \text{Mod} \rightarrow \text{Ab}$ será chamado de funtor exato se a sequência exata

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$$

for levada por T na sequência exata

$$0 \rightarrow T(A) \xrightarrow{T(i)} T(B) \xrightarrow{T(p)} T(C) \rightarrow 0$$

No caso em que T for um funtor contravariante, diremos que trata-se de um funtor exato contravariante.

Definição 2.3.10. Uma sequência exata curta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} C \rightarrow 0$$

é dita cindida se existe um morfismo $j : C \rightarrow B$ com $pj = 1_C$.

Proposição 2.3.11. Na sequência exata cindida acima, temos que $B \cong A \sqcup C$.

Demonstração. Mostraremos que $B = \text{im } i \oplus \text{im } j$, com $j : C \rightarrow B$ satisfazendo $pj = 1_C$. Seja $b \in B$. Temos então que $pb \in C$. Aplicando p a $b - jpb \in B$, obtemos $pb - pj(jpb) = pb - pb = 0$, pois $pj = 1_C$. A exatidão da sequência nos diz que i é sobrejetiva sobre $\ker p$, logo existe um $a \in A$ com $ia = b - jpb$, e portanto $b = ia + jpb$. Isto significa que $B = \text{im } i + \text{im } j$.

Vejamos também que $\text{im } i \cap \text{im } j = \{0\}$. Suponha $x = ia = jc$, então $px = pia = 0$, pois $\text{im } i = \ker p$ pela exatidão da sequência. Também, $px = pj c = c$ pois $pj = 1_C$. Com isso, temos que deve ocorrer $x = ia = jc = 0$, e assim $\text{im } i \cap \text{im } j = \{0\}$. Concluimos então que $B \cong A \sqcup C$. ■

2.4 Coproduto em $R\text{Mod}$

Proposição 2.4.1. *Se A e B são R -módulos, então seu coproduto C existe, e é a sua soma direta: $C = A \sqcup B$.*

Demonstração. Primeiramente, necessitamos definir os morfismos de injeção $\lambda_A : A \rightarrow C$ e $\lambda_B : B \rightarrow C$. Como os elementos de C constituem-se de pares ordenados de $A \times B$, podemos definir λ_A e λ_B da seguinte maneira:

$$\lambda_A : a \mapsto (a, 0)$$

$$\lambda_B : b \mapsto (0, b)$$

Consideremos agora um R -módulo X , e sejam $f : A \rightarrow X$ e $g : B \rightarrow X$ homomorfismos. Definamos θ da seguinte maneira:

$$\theta : C \rightarrow X$$

$$\theta(a, b) = f(a) + g(b).$$

Vejamos que o diagrama comuta: Se $a \in A$, então $\theta\lambda_A(a) = \theta((a, 0)) = f(a) + g(0) = f(a)$. Analogamente, se $b \in B$, $\theta\lambda_B(b) = \theta((0, b)) = f(0) + g(b) = g(b)$.

Por fim, verifiquemos que θ é único. Supondo que exista um homomorfismo $\varphi : C \rightarrow X$ que faça o diagrama comutar, ocorrerá que $\varphi\lambda_A(a, 0) = f(a)$, $\forall a \in A$ e $\varphi\lambda_B(0, b) = g(b)$, $\forall b \in B$. Além do mais, para todo $(a, b) \in A \times B$:

$$\begin{aligned} \varphi((a, b)) &= \varphi((a, 0) + (0, b)) \\ &= \varphi((a, 0)) + \varphi((0, b)) \\ &= f(a) + g(b) \\ &= \theta((a, b)) \end{aligned}$$

Com isto temos que $\varphi = \theta$ e portanto θ é único, como queríamos. ■

Definiremos agora a soma direta de uma família $(M_i)_{i \in I}$ de R -módulos, onde I é um conjunto arbitrário.

Definição 2.4.2. *Seja R um anel comutativo. Podemos definir a soma direta de uma família arbitrária de R -módulos da seguinte maneira:*

Seja $(M_i)_{i \in I}$ uma família de R -módulos. A soma direta desta família é um par $(M, (\delta_i)_{i \in I})$ onde $M \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e $\delta_i : M_i \rightarrow M$ são morfismos satisfazendo a seguinte propriedade: Para qualquer outro par $(M', (\delta'_i)_{i \in I})$, existe um único morfismo $f : M \rightarrow M'$ comutando o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xleftarrow{\delta_i} & M_i \\
 \downarrow f & & \swarrow \delta'_i \\
 M' & &
 \end{array}$$

Observe que esta é essencialmente a Definição 1.2.13. Disto decorre que a soma direta é o coproduto na categoria ${}_R\text{Mod}$. A verificação de tal fato pode ser encontrada em [1], pp.54-55.

Proposição 2.4.3. *Se $\{A_i; i \in I\}$ é uma família finita de R -módulos, então a soma direta $\sum_{i \in I} A_i$ é seu coproduto em ${}_R\text{Mod}$.*

Demonstração. Primeiramente, necessita-se definir os morfismos de injeção vistos na definição de coproduto. Seja $\alpha_i : A_i \rightarrow \sum_{i \in I} A_i$ com $\alpha_i(a_i) = \alpha_i(a)$, onde para $a_i \in A_i$, $\alpha_i(a) \in \sum_{i \in I} A_i$ será a n -upla cuja i -ésima coordenada é a_i e as demais são nulas.

Suponha agora X um R -módulo qualquer tal que, para cada $i \in I$ exista um homomorfismo $f_i : A_i \rightarrow X$. Tome a aplicação $\theta : \sum_{i \in I} A_i \rightarrow X$ dada por $\theta((a_i)) = \sum_i f_i(a_i)$. Por I ser finito, θ está bem-definida.

Temos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 A_i & \xrightarrow{\alpha_i} & \sqcup_{i \in I} A_i \\
 \downarrow f_i & & \swarrow \theta \\
 & & X
 \end{array}$$

Vejam os se ocorre $\theta\alpha_i = f_i$ para todo $i \in I$. De fato, seja $a_i \in A_i$. Temos que

$$\begin{aligned}\theta\alpha_i(a_i) &= \theta(\alpha_i(a)) \\ &= \sum_{i \in I} f_i(\alpha_i(a)) \\ &= f_1(0, 0, \dots, 0) + \dots + f_i(0, \dots, 0, a_i, 0, \dots, 0) + \dots + f_n(0, 0, \dots, 0) \\ &= f_i(a_i), \forall i \in I.\end{aligned}$$

Com isto, o diagrama comuta. Resta verificarmos que θ é único. Seja $\psi : \sum_{i \in I} A_i \rightarrow X$ tal que o diagrama comute. Então, pelo exposto acima, temos que $\psi(\alpha_i(a_i)) = f_i(a_i)$, mas isto implica que $\psi((a_i)) = \psi(\sum_{i \in I} \alpha_i(a_i)) = \sum_{i \in I} \psi\alpha_i(a_i) = \sum_{i \in I} f_i(a_i)$, donde segue a igualdade $\psi = \theta$. ■

2.5 Módulos livres e módulos projetivos

Definição 2.5.1. Uma função f definida num conjunto X é dita uma função quase-nula em X se existe $F \subset X$ finito tal que $f \equiv 0$ em $X \setminus F$.

Definição 2.5.2. Um R -módulo F é dito um R -módulo livre se F for isomorfo a uma soma direta de “cópias” de R . Ou seja, há um conjunto de índices I (não necessariamente finito), tal que

$$F \cong \sum_{i \in I} R_i$$

Onde $R_i = \langle b_i \rangle \cong R, \forall i$. O conjunto $B = \{b_i; i \in I\}$ é dito “base” de F .

Proposição 2.5.3. Seja F um R -módulo livre, e seja $B = \{b_i; i \in I\}$ base de F . Se M é um R -módulo qualquer e $\gamma : B \rightarrow M$ é uma função, então existe um único R -morfismo $g : F \rightarrow M$ com $g(b_i) = \gamma(b_i)$ para todo $i \in I$.

Demonstração. Cada elemento de F possui expressão única da forma $v = \sum_{i \in I} r_i b_i$ com $r_i \in R$ e $\{r_i; i \in I\}$ é quase-nulo.

Defina agora $g(v) = \sum_{i \in I} r_i \gamma(b_i)$, como visto na Proposição 2.4.3. Por ser coproduto, existe um morfismo único $\theta : F \rightarrow M$ com $\theta(b_i) = \gamma(b_i)$. Por coincidirem na base B , segue que $\theta = g$. ■

Definição 2.5.4. *A cardinalidade de uma base de um R -módulo livre F é dita posto de F , e denota-se com $\text{posto}(F)$.*

Proposição 2.5.5.

- i) *Se R é um anel comutativo não-nulo, então quaisquer bases de um R -módulo livre F possuem o mesmo número de elementos.*
- ii) *Se R é um anel comutativo não-nulo, então dois R -módulos livres F e F' são isomorfos se, e só se $\text{posto}(F) = \text{posto}(F')$.*

Demonstração.

- i) Considere um ideal maximal I de R . Se B é uma base para F , teremos que o conjunto das classes de equivalência $\{x + IF; x \in X\}$ será uma base para o espaço vetorial F/IF sobre o corpo R/I . Por outro lado se Y é também base de F , analogamente temos que $\{y + IF; y \in Y\}$ será base do espaço vetorial F/IF . Porém, como quaisquer duas bases de espaços vetoriais possuem mesma cardinalidade, decorre que $|X| = |Y|$.
- ii) (\Leftarrow) Considere X uma base de F , e seja $\gamma : X \rightarrow X'$ uma bijeção. Agora, ao compormos γ com a inclusão $i : X' \rightarrow F'$, teríamos que $\gamma i : X \rightarrow F'$. Contudo, pela proposição 2.5.3, temos que existe um único R -morfismo $\varphi : X' \rightarrow F'$, estendendo γ . De maneira análoga, podemos considerar $\gamma^{-1} : X' \rightarrow X$ e a inclusão $i_* : X \rightarrow F$, de forma a obter $\gamma^{-1} i_* : X' \rightarrow F$ e conseqüentemente $\psi : F' \rightarrow F$ uma extensão de γ^{-1} . Teríamos portanto que a composição $\varphi \psi$ é uma extensão de 1_X , assim como 1_F . Deve ocorrer então $\varphi \psi = 1_F$.

Similarmente, a composição $\psi \varphi$ é extensão de $1_{X'}$ bem como $1_{F'}$, o que nos dá $\psi \varphi = 1_{F'}$. Assim, podemos concluir que $\varphi : F' \rightarrow F$ é um R -morfismo bijetor, e portanto um isomorfismo.

(\Rightarrow) Por outro lado, supondo $\varphi : F \rightarrow F'$ isomorfismo, se $\{v_i; i \in I\}$ é base de F , teremos que $\{\varphi(v_i); i \in I\}$ será base de F' . Mas como quaisquer duas bases de um módulo livre F' possuem mesma cardinalidade, pelo item (i), segue que $\text{posto}(F) = \text{posto}(F')$. ■

O lema a seguir será importante quando começarmos a definir anéis de Grothendieck.

Lema 2.5.6. *Seja \mathcal{K} um anel comutativo e X um conjunto. Então existe um \mathcal{K} -módulo livre com base X .*

Demonstração. Será apresentada a ideia geral da demonstração deste resultado, utilizando-se das *funções delta de Kronecker*.

Em geral, tendo um conjunto X e um anel \mathcal{K} , temos que $\mathcal{K}[X] = \{f : X \rightarrow \mathcal{K}; f \text{ é quase-nula}\}$ é um R -módulo sobre \mathcal{K} com base X . Para verificar tal fato, definamos a seguinte função, chamada *Delta de Kronecker*: Dado $c \in X$, definimos

$$\delta_c : X \rightarrow \mathcal{K}$$

$$\delta_c(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = c \\ 0, & \text{se } x \neq c. \end{cases}$$

Afirmamos agora que $B = \{\delta_c\}_{c \in X}$ é uma base para $\mathcal{K}[X]$. De fato, seja $f \in \mathcal{K}[X]$, seja $F = \{c_1, c_2, \dots, c_r\}$ o conjunto no qual f é não-nula. Queremos encontrar $k_1, k_2, \dots, k_r \in \mathcal{K}$ tais que $f(x) = k_1\delta_{c_1}(x) + k_2\delta_{c_2}(x) + \dots + k_r\delta_{c_r}(x)$.

Como f é não-nula em F , segue que $f(c_1) = \alpha_1, f(c_2) = \alpha_2, \dots, f(c_r) = \alpha_r$ com $\alpha_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, r$. Portanto, se chamarmos $r_i = \alpha_i$, segue:

$$f(x) = f(c_1)\delta_{c_1}(x) + f(c_2)\delta_{c_2}(x) + \dots + f(c_r)\delta_{c_r}(x).$$

Agora, se $f(x) = 0$ temos que $0 = f(c_1)\delta_{c_1}(x) + f(c_2)\delta_{c_2}(x) + \dots + f(c_r)\delta_{c_r}(x)$, mas $f(c_i) \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, r$. Logo, ocorre $\delta_{c_i}(x) = 0$ para $i = 1, \dots, r$, o que nos dá $x \notin F$. Com isto, $\{\delta_c\}_{c \in X}$ é linearmente independente.

Por fim, se $f(x) \neq 0$, segue que $x \in F$ pelo que foi visto acima, e portanto $x = c_j$ para algum $c_j \in F$. Com isto, $f(x) = f(c_j) = 0 + 0 + \dots + \alpha_j \delta_{c_j} + 0 + \dots + 0$, e portanto $f(x) = \alpha_j = f(c_j)$. Temos assim uma bijeção entre X e $\{\delta_c\}_{c \in X}$.

Em conclusão, se tomarmos f como um vetor $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, onde $x_i \in F$ para $i = 1, \dots, n$ onde $f(x_i) \neq 0$, podemos definir um morfismo

$$f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathcal{K}$$

$$i \mapsto f(i) = x_i,$$

Assim, temos que $B = \{\delta_c\}_{c \in X}$ é base para $\mathcal{K}[X]$, como queríamos. ■

Proposição 2.5.7. *Seja R um anel comutativo e \mathcal{C} uma categoria finita. Então $R\langle\mathcal{C}\rangle$ é R -módulo munido com a operação de composição usual de funções. Além do mais, $R\langle\mathcal{C}\rangle$ é livre.*

Proposição 2.5.8. *Todo R -módulo M é um quociente de um R -módulo livre F . Além disso, M é finitamente gerado se, e somente se F é finitamente gerado.*

Demonstração. Seja F a soma direta de k cópias de R , onde $k = |M|$, e seja $\{x_m; m \in M\}$ uma base de F . Pela Proposição 2.4.3, temos que existirá um R -morfismo $g : F \rightarrow M$ tal que $g(x_m) = m$ para qualquer $m \in M$. Note que g é sobrejetivo. Dos teoremas de isomorfismo, decorre que $F/\ker g \cong M$.

Agora, suponhamos que M seja finitamente gerado. Então, existem m_i , $i = 1, \dots, n$ com $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$. Se escolhermos F de tal modo que seja o R -módulo livre de base $\{x_1, \dots, x_n\}$, teremos que o morfismo $g : F \rightarrow M$ dado por $g(x_i) = m_i$ possuirá a seguinte imagem:

$$\text{img} = \langle g(x_1), \dots, g(x_n) \rangle = \langle m_1, \dots, m_n \rangle = M.$$

E portanto F é finitamente gerado.

A recíproca decorre do fato de que a imagem de um morfismo de módulos finitamente gerados é também finitamente gerada. ■

Teorema 2.5.9. *Seja R um anel comutativo. Se F é um R -módulo livre, então para cada sobrejeção $p : A \rightarrow A''$ e para cada $h : F \rightarrow A''$ existe um homomorfismo g comutando o seguinte diagrama:*

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & \nearrow g & \downarrow p \\ F & \xrightarrow{h} & A'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Demonstração. Seja $B = \{b_i; i \in I\}$ uma base de F . Da sobrejetividade de p , segue que existe um certo $a_i \in A$ tal que $p(a_i) = h(b_i)$ para todo i .

Pela Proposição 2.4.3, temos que existe um R -morfismo $g : F \rightarrow A$ com $g(b_i) = a_i, \forall i \in I$. Logo, temos $pg(b_i) = p(a_i) = h(b_i)$ e portanto a composição pg coincide com h em B . Disso segue que $pg = h$ em $\langle B \rangle = F$, ou seja, $pg = h$, como queríamos. ■

Definição 2.5.10. *Um morfismo $g : F \rightarrow A$ tal que $pg = h$ como no diagrama abaixo recebe o nome de levantamento de h .*

$$\begin{array}{ccc} & & A \\ & \nearrow g & \downarrow p \\ F & \xrightarrow{h} & A'' \longrightarrow 0 \end{array}$$

Definição 2.5.11. *Um R -módulo P é dito projetivo se, sempre que $p : A \rightarrow A''$ é sobrejetivo e $h : F \rightarrow A''$ é um morfismo qualquer, exista um levantamento $g : F \rightarrow A$ como no diagrama acima.*

Podemos, a partir da definição dada de módulos projetivos, buscar novas formas de verificar se, dado um R -módulo F qualquer, este será projetivo. As demonstrações dos fatos abaixo podem ser encontradas em Rotman [6], páginas 475-476.

Proposição 2.5.12. *Seja R um anel comutativo e P um R -módulo. São equivalentes:*

i) P é projetivo.

ii) O funtor $\text{Hom}_R(P, _)$ é exato.

iii) Cada sequência exata curta

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} P \rightarrow 0$$

é cindida.

iv) P é somando direto de um R -módulo livre.

2.6 Grupos de Grothendieck

Nesta seção definiremos Grupos de Grothendieck e buscaremos neles identificar propriedades que sejam convenientes. Dessas propriedades, podemos destacar que num Grupo de Grothendieck podemos ter módulos não-isomorfos A e B denotando o mesmo elemento G , supondo apenas que A e B sejam *estavelmente isomorfos*, isto é, que exista um terceiro módulo C tal que $A \oplus C \cong B \oplus C$, como veremos adiante.

2.6.1 *-categorias

Definição 2.6.1. Dizemos que uma categoria \mathcal{C} é uma *-categoria se \mathcal{C} é munida de uma operação

$$* : \text{Obj}(\mathcal{C}) \times \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{Obj}(\mathcal{C}),$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

i) Para $A, A', B, B' \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, se $A \cong A'$ e $B \cong B'$, então deve ocorrer $A * B \cong A' * B'$;

ii) (Comutatividade) Para $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, $A * B \cong B * A$;

iii) (Associatividade) Para $A, B, C \in \mathcal{C}$, $A * (B * C) \cong (A * B) * C$

Definição 2.6.2. Se \mathcal{C} é uma $*$ -categoria, define-se por $|\text{Obj}(\mathcal{C})|$ o conjunto de todas as classes de isomorfismo $|X|$ de objetos de \mathcal{C} , isto é, $|X| = \{A \in \text{Obj}(\mathcal{C}); A \cong X\}$.

A definição a seguir torna-se problemática ao tomarmos categorias \mathcal{C} com $|\text{Obj}(\mathcal{C})|$ não sendo conjunto. Para evitar incoerências, iremos supor de agora em diante que \mathcal{C} é uma categoria pequena, isto é, \mathcal{C} possui um *conjunto* de objetos e um *conjunto* de morfismos.

Definição 2.6.3. Seja $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ o grupo abeliano livre cuja base é $|\text{Obj}(\mathcal{C})|$ e seja \mathcal{R} o subgrupo de $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ gerado por elementos da forma $|A * B| - |A| - |B|$, com $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.

O Grupo de Grothendieck de \mathcal{C} , denotado por $K_0(\mathcal{C})$ é o grupo abeliano

$$K_0(\mathcal{C}) = \mathcal{F}(\mathcal{C})/\mathcal{R}.$$

Denotaremos a classe de equivalência de A , $|A| \in \mathcal{F}(\mathcal{C})$, por $|A| + \mathcal{R} = [A]$

Proposição 2.6.4. Seja \mathcal{C} uma $*$ -categoria.

- i) Se $x \in K_0(\mathcal{C})$, então x é da forma $[A] - [B]$, para algum $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$.
- ii) Se $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, $[A] = [B]$ em $K_0(\mathcal{C})$ se, e somente se, existe $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ tal que $A * C \cong B * C$.

Demonstração. Note que por $K_0(\mathcal{C})$ ser um grupo abeliano livre, podemos observá-lo como um \mathbb{Z} -módulo livre.

- i) Segue da definição de $K_0(\mathcal{C})$ que cada $x \in K_0(\mathcal{C})$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$x = \sum_{l=1}^n \alpha_l [A_l],$$

com $\alpha_i \in \mathbb{Z}$. Note que, com isto, pode ocorrer $\alpha_i < 0$ para alguns $i = 1, 2, \dots, n$. Podemos reordenar a soma de modo que os índices i para os quais α_i é positivo ocupem as k primeiras posições, e os índices para os quais α_i é negativo ocupem

as posições $k + 1$ até n , obtendo a seguinte expressão:

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i[A_i] = \sum_{i=1}^k \alpha_i[A_i] + \sum_{j=k+1}^n \alpha_j[A_j], \quad (2.1)$$

onde indexamos os escalares α_i negativos por α_j . Agora, como $\alpha_j < 0 \forall j = k + 1, k + 2, \dots, n$, podemos reescrever o último somatório de (1) como:

$$\sum_{j=k+1}^n \alpha_j[A_j] = \sum_{j=k+1}^n -\alpha_j[A_j], \quad (2.2)$$

com $\alpha_j > 0 \forall j = k + 1, \dots, n$. Substituindo (2.2) em (2.1), temos a seguinte igualdade:

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i[A_i] - \sum_{j=k+1}^n \alpha_j[A_j]. \quad (2.3)$$

Como cada A_i pertence à $*$ -categoria \mathcal{C} , ao expandir os somatórios acima, obtemos:

$$x = (\alpha_1[A_1] + \alpha_2[A_2] + \dots + \alpha_k[A_k]) - (\alpha_{k+1}[A_{k+1}] + \alpha_{k+2}[A_{k+2}] + \dots + \alpha_n[A_n]), \quad (2.4)$$

onde $\alpha_l[A_l] = [A_l] + [A_l] + \dots + [A_l] = (|A_l| + |A_l| + \dots + |A_l|) + \mathcal{R} = |A_l * A_l * \dots * A_l| + \mathcal{R} = [A_l^{\alpha_l}]$, para $l = 1, \dots, n$. Isto é, $\alpha_l[A_l]$ equivale à classe de A_l operado por $*$ em α_l iterações.

Substituindo esta notação em (2.4), temos:

$$x = \sum_{i=1}^k [A_i^{\alpha_i}] - \sum_{j=k+1}^n [A_j^{\alpha_j}]. \quad (2.5)$$

Por fim, como $\sum_{i=1}^k [A_i^{\alpha_i}] - \sum_{j=k+1}^n [A_j^{\alpha_j}] = [*_{i=1}^k A_i^{\alpha_i}] - [*_{j=k+1}^n A_j^{\alpha_j}]$ pertence a $K_0(\mathcal{C})$, chamando $A = [*_{i=1}^k A_i^{\alpha_i}] \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e $B = [*_{j=k+1}^n A_j^{\alpha_j}] \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, concluímos que

$$x = [A] - [B],$$

para $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, como queríamos.

ii) Supondo $A * B \cong B * C$, segue que $[A * C] = [B * C]$ em $K_0(\mathcal{C})$. Disso, segue que $[A] + [C] = [B] + [C]$, e por $K_0(\mathcal{C})$ ser um grupo abeliano, a lei de cancelamento nos dá $[A] = [B]$.

Por outro lado, supondo $[A] = [B]$, decorre que $|A| + \mathcal{R} = |B| + \mathcal{R}$, e portanto $|B| - |A| \in \mathcal{R}$, que por sua vez está contido em $\mathcal{F}(\mathcal{C})$. Com isto, temos que pela definição de $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ que $|A|$ e $|B|$ podem ser expressados da seguinte maneira em $\mathcal{F}(\mathcal{C})$, sendo a_i, b_j inteiros positivos e X, Y, U, V objetos de \mathcal{C} :

$$|B| = \sum_i a_i (|X_i * Y_i| - |X_i| - |Y_i|),$$

$$|A| = \sum_j b_j (|U_j * V_j| - |U_j| - |V_j|),$$

e portanto temos

$$|B| - |A| = \sum_i a_i (|X_i * Y_i| - |X_i| - |Y_i|) - \sum_j b_j (|U_j * V_j| - |U_j| - |V_j|).$$

Ou ainda, rearranjando os coeficientes de modo a obter somente termos positivos:

$$|A| + \sum_i a_i (|X_i * Y_i|) + \sum_j b_j (|U_j| + |V_j|) = |B| + \sum_i a_i (|X_i| + |Y_i|) + \sum_j b_j (|U_j * V_j|), \quad (2.6)$$

que é uma expressão num grupo abeliano. Como a_i, b_j são inteiros positivos, pode haver repetições dos objetos $A, B, X_i, Y_i, U_j, V_j, X_i * Y_i, U_j * V_j$.

Porém, como as expressões de elementos de grupos abelianos em termos de uma base são únicas, segue que o conjunto $\{A, X_i * Y_i, U_j, V_j\}$, respeitando as multiplicidades de seus elementos, coincide com o conjunto $\{B, U_j * V_j, X_i, Y_i\}$, onde as multiplicidades dos elementos também é respeitada.

Obtemos a seguinte relação em \mathcal{C} a partir do fato dos conjuntos mencionados acima coincidirem, e tendo que $*$ é uma operação associativa e comutativa:

$$A * (*_i a_i (X_i * Y_i)) * (*_j b_j (U_j * V_j)) \cong B * (*_i a_i (X_i * Y_i)) * (*_j b_j (U_j * V_j)).$$

Como $(*_i a_i (X_i * Y_i)) * (*_j b_j (U_j * V_j)) \cong (*_i a_i (X_i * Y_i)) * (*_j b_j (U_j * V_j))$, definindo $C = *_i a_i (X_i * Y_i) * *_j b_j (U_j * V_j)$, segue $A * C \cong B * C$, como queríamos.

■

Definição 2.6.5. *Seja R um anel comutativo, e seja \mathcal{C} uma subcategoria de ${}_R\text{Mod}$. Dois módulos A e B são ditos estavelmente isomorfos em \mathcal{C} se existe um módulo $C \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ com $A \oplus C \cong B \oplus C$.*

Corolário 2.6.6. *Dois módulos A e B determinam o mesmo elemento do grupo de Grothendieck $K_0({}_R\text{Mod})$ se, e só se, A e B são estavelmente isomorfos.*

Lema 2.6.7. *Seja \mathcal{C} uma $*$ -categoria e G um grupo abeliano arbitrário. Se $h : \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow K_0(\mathcal{C})$ é dada por $A \mapsto [A]$, e $f : \text{Obj}(\mathcal{C}) \rightarrow G$ é tal que $A \cong B \Rightarrow f(A) = f(B)$ e $f(A * B) = f(A) + f(B)$, então existe um único homomorfismo $\tilde{f} : K_0(\mathcal{C}) \rightarrow G$ comutando o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \text{Obj}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{h} & K_0(\mathcal{C}) \\ f \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ G & & \end{array}$$

Demonstração. Definamos $\tilde{f} : K_0(\mathcal{C}) \rightarrow G$ por $\tilde{f}([A]) = f(A)$. Vejamos que \tilde{f} está bem definida e é um homomorfismo de grupos, isto é, $[A] = [B] \Rightarrow \tilde{f}([A]) = \tilde{f}([B])$ e $\tilde{f}([A] + [B]) = \tilde{f}([A]) + \tilde{f}([B])$, $\forall [A], [B] \in K_0(\mathcal{C})$. De fato:

$$\begin{aligned} [A] = [B] &\Rightarrow \exists C \in \text{Obj}(\mathcal{C}); A * C \cong B * C \\ &\Rightarrow f(A * C) = f(B * C) \\ &\Rightarrow f(A) + f(C) = f(B) + f(C) \\ &\Rightarrow f(A) = f(B) \\ &\Rightarrow \tilde{f}([A]) = \tilde{f}([B]), \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \tilde{f}([A] + [B]) &= \tilde{f}([A * B]) \\ &= f(A * B) \\ &= f(A) + f(B) \\ &= \tilde{f}([A]) + \tilde{f}([B]). \end{aligned}$$

Por fim, a unicidade de \tilde{f} segue do fato de que, se $g : K_0(\mathcal{C}) \rightarrow G$ é tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Obj}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{h} & K_0(\mathcal{C}) \\ f \downarrow & \nearrow g & \\ G & & \end{array}$$

comuta, segue que $g([A]) = f(A) = \tilde{f}([A])$, o que implica em $g = \tilde{f}$ para todo $[A] \in K_0(\mathcal{C})$. ■

Como veremos no exemplo abaixo, se adotarmos hipóteses convenientes sobre a categoria \mathcal{C} , podemos obter ou um grupo de Grothendieck $K_0(\mathcal{C})$ isomorfo a certos grupos com os quais somos mais habituados, como \mathbb{Z} , ou obter em $K_0(\mathcal{C})$ propriedades desejáveis que normalmente não são válidas para objetos de \mathcal{C} .

Se R é um anel comutativo, temos que a categoria de R -módulos projetivos finitamente gerados, denotada por $Pr(R)$, é uma $*$ -categoria com a operação de soma direta. Denotamos $K_0(Pr(R))$ por $K_0(R)$ neste caso.

Exemplo 2.6.8. Se R é tal que todo R -módulo projetivo finitamente gerado é livre, segue que $K_0(R) \cong \mathbb{Z}$.

De fato, como os objetos de $Pr(R)$ são R -módulos finitamente gerados, e por hipótese estes são livres, todos os objetos de $Pr(R)$ serão somas diretas de R . Por valer $[X + Y] = [X] + [Y]$ em $K_0(R)$, segue que a classe $[R]$ é o gerador de $K_0(R)$ e este é um grupo cíclico. Definamos $f : \text{Obj}(Pr(R)) \rightarrow \mathbb{Z}$, que para cada R -módulo projetivo finitamente gerado M tenha-se $f(M) = \text{posto}(F)$. Note que estamos nas condições do Lema 2.6.7, pois $f(F \oplus G) = f(F) + f(G)$. Assim, temos que existirá um homomorfismo de grupos $\tilde{f} : K_0(R) \rightarrow \mathbb{Z}$ com $\tilde{f}([A]) = \text{posto}(A)$ para todo R -módulo livre finitamente gerado A comutando o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \text{Obj}(Pr(R)) & \xrightarrow{h} & K_0(R) \\ f \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ \mathbb{Z} & & \end{array}$$

Por fim, o fato de $K_0(R)$ ser cíclico implica que \tilde{f} é isomorfismo, e portanto $K_0(R) \cong \mathbb{Z}$.

Na sequência, vamos definir o grupo de Grothendieck quando \mathcal{C} é uma categoria de módulos. Apesar dessa construção não ser utilizada no âmbito deste trabalho, ela poderá se mostrar conveniente em estudos futuros.

2.6.2 Grupos de Grothendieck para subcategorias de ${}_R\text{Mod}$

Definição 2.6.9. *Seja \mathcal{C} uma categoria de módulos e sejam $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ o grupo abeliano livre de base $\text{Obj}(\mathcal{C})$ e \mathcal{R}' o subgrupo de $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ gerado por elementos da forma $|B| - |A| - |C|$ sempre que houver uma sequência exata $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$.*

Definimos o grupo de Grothendieck $K'(\mathcal{C})$ como $K'(\mathcal{C}) = \mathcal{F}(\mathcal{C})/\mathcal{R}'$. Aqui as classes de equivalência $|A| + \mathcal{R}'$ serão denotadas por (A) .

Neste ponto vale ressaltar que a notação $K_0(R)$ é utilizada para uma categoria de R -módulos projetivos, enquanto $K'(\mathcal{C})$ engloba categorias de módulos em geral.

Proposição 2.6.10. *Seja R um anel comutativo e \mathcal{C} a categoria de R -módulos finitamente gerados. Então existe um homomorfismo*

$$\epsilon : K_0(R) \rightarrow K'(\mathcal{C})$$

$$[A] \mapsto (A), \quad \forall A \in \text{Obj}(\mathcal{C}), \quad \text{com } A \text{ projetivo.}$$

Demonstração. Observe que as classes de isomorfismo de módulos em $\text{Pr}(R)$ formam um subconjunto das classes de isomorfismo de ${}_R\text{Mod}$. Há, portanto, uma inclusão $i : \mathcal{F}(\text{Pr}(R)) \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{C})$. Compondo a inclusão com a projeção canônica de $\mathcal{F}(\mathcal{C})$ sobre $K'(\mathcal{C})$, temos o morfismo $\theta : \mathcal{F}(\text{Pr}(R)) \rightarrow K'(\mathcal{C})$, dado por $\theta(|A|) = |A| + \mathcal{R}'$.

Agora, como ${}_R\text{Mod}$ é uma $*$ -categoria, sendo $*$ a operação de soma direta, se P, Q são R -módulos projetivos finitamente gerados, temos uma sequência exata

$$0 \rightarrow P \rightarrow P \oplus Q \rightarrow Q \rightarrow 0.$$

A sequência exata acima nos dá que o elemento $|P \oplus Q| - |P| - |Q|$ de \mathcal{R} também pertence a \mathcal{R}' . Disto, segue que $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$. Por fim, θ induz um morfismo $\varepsilon : K_0(R) \rightarrow K'(R)$, como queríamos. ■

Proposição 2.6.11. *Seja R um anel comutativo, e seja \mathcal{C} a categoria dos R -módulos projetivos finitamente gerados. Se M é um objeto de \mathcal{C} , e considerando módulos $\{0\} = M_0, M_1, \dots, M_n = M$ tais que*

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \dots \subseteq M_n,$$

com $M_{i-1}/M_i = Q_i$, então

$$(M) = (Q_1) + (Q_2) + \dots + (Q_n)$$

em $K'(\mathcal{C})$.

Demonstração. Segue de $Q_i = M_{i-1}/M_i$ que existem sequências exatas

$$0 \rightarrow M_i \rightarrow M_{i-1} \rightarrow Q_i \rightarrow 0,$$

e portanto $(Q_i) = (M_{i-1}) - (M_i)$ em $K'(\mathcal{C})$. Logo, temos

$$\sum_{i=1}^n (Q_i) = \sum_{i=1}^n ((M_{i-1}) - (M_i)) = (M_0) - (M_n) = (M).$$

Note que o a classe do módulo nulo, (0) , é o elemento neutro do grupo $K'(\mathcal{C})$, o que nos permitiu reescrever o somatório acima como $(M_0) - (M_n)$. ■

A proposição anterior, juntamente com o resultado abaixo, permitem a dedução de uma propriedade conveniente do grupo $K'({}_R\text{Mod})$.

Proposição 2.6.12. *Seja R um anel comutativo e seja \mathcal{C} a categoria de todos os R -módulos finitamente gerados. Se $A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, ocorre $(A) = (B)$ se, e somente se existem $C, U, V \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ tais que as sequências*

$$0 \rightarrow U \rightarrow A \oplus C \rightarrow V \rightarrow 0 \text{ e } 0 \rightarrow U \rightarrow B \oplus C \rightarrow V \rightarrow 0$$

sejam exatas

A demonstraçãõ deste resultado, apesar de ser longa, segue um raciocínio similar à demonstraçãõ da Proposiçãõ 2.6.4 (ii) e pode ser encontrada no livro de Rotman [6], p.493.

A partir dos dois resultados acima, temos que para M, N R -módulos na categoria ${}_R\text{Mod}$, com R anel comutativo, ocorre $(N) = (N \oplus M/N)$, apesar de que em geral $N \cong N \oplus M/N$ não é válido.

Capítulo 3

Álgebras de Convolução e Anéis de Grothendieck

Nesta seção discutiremos os aspectos principais do desenvolvimento deste estudo. Inicialmente veremos a definição de álgebras sobre anéis comutativos, para em seguida introduzirmos a noção de produto tensorial.

O intuito da abordagem desta sequência é introduzir o conceito de anéis de Grothendieck de categorias finitas, buscando estudar a possibilidade de relacionar um anel comutativo \mathcal{A} arbitrário a uma categoria finita \mathcal{C} , de forma que \mathcal{A} seja isomorfo ao anel de Grothendieck de \mathcal{C} .

3.1 Álgebras sobre anéis comutativos e Produto tensorial

Definição 3.1.1. *Seja R um anel comutativo com unidade. Uma álgebra sobre R , ou R -álgebra, é um anel A munido de uma multiplicação por escalar $\cdot : R \times A \rightarrow A$ que define em A uma estrutura de R -módulo compatível com o produto, ou seja, $r \cdot (ab) = (r \cdot a)b = a(r \cdot b)$ para todo $r \in R$, $a, b \in A$.*

Vejamos alguns exemplos de R -álgebras:

Exemplo 3.1.2. *Um anel comutativo R é uma R -álgebra com as operações de R .*

Exemplo 3.1.3. As matrizes $n \times n$ com entradas em R formam a R -álgebra $Mat_n(R)$, com as operações usuais.

Exemplo 3.1.4. O anel $End_R(M)$ de endomorfismos de um R -módulo M é uma R -álgebra.

Definição 3.1.5. Seja R um anel comutativo. Se A e B são R -módulos e G é um grupo abeliano, dizemos que uma função $f : A \times B \rightarrow G$ é R -biaditiva se satisfaz, para cada $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ e $r \in R$:

$$f(a_1 + a_2, b_1) = f(a_1, b_1) + f(a_2, b_1)$$

$$f(a_1, b_1 + b_2) = f(a_1, b_1) + f(a_1, b_2)$$

$$f(a_1 r, b_1) = f(a_1, r b_1).$$

f é dita R -bilinear se for R -biaditiva e satisfaz

$$f(a_1 r, b_1) = f(a_1, r b_1) = r f(a_1, b_1).$$

Será introduzida agora a noção de produto tensorial de dois módulos sobre um anel comutativo R . Note-se que, como toda álgebra sobre R é também um R -módulo, esta construção aplica-se também a R -álgebras.

A ideia inicial para a construção do produto tensorial entre dois R -módulos é a de se obter um ambiente no qual se possa expressar as funções biaditivas em termos de funções lineares, com as quais temos mais familiaridade.

Definição 3.1.6. Seja R um anel comutativo e A, B R -módulos. Seu produto tensorial é um grupo abeliano $A \otimes_R B$ juntamente com uma função R -biaditiva $\otimes : A \times B \rightarrow A \otimes_R B$ tal que, para qualquer grupo abeliano G e qualquer $f : A \times B \rightarrow G$ R -biaditiva, exista um único \mathbb{Z} -homomorfismo $\tilde{f} : A \otimes_R B \rightarrow G$ comutando o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A \times B & \xrightarrow{\otimes} & A \otimes_R B \\ f \downarrow & \searrow \tilde{f} & \\ G & & \end{array}$$

A proposição abaixo nos gnos fornece a ideia básica de como construir o produto de dois R -módulos. Contudo, no presente trabalho será exposta apenas a maneira como o produto tensorial é construído. A demonstração completa pode ser encontrada em [7], pp. 72-73.

Proposição 3.1.7. *Seja R um anel comutativo. Se A e B são R -módulos, então seu produto tensorial existe.*

Demonstração. Seja F o grupo abeliano livre cuja base é $A \times B$. Definimos S como sendo o subgrupo de F gerado por elementos da forma $(a, b+b') - (a, b) - (a, b')$, $(a+a', b) - (a, b) - (a', b)$, $(ar, b) - (a, rb)$.

Defina agora $A \otimes_R B = F/S$, e denote $(a, b) + S$ por $a \otimes b$. Considerando a aplicação $h : A \times B \rightarrow A \otimes_R B$ dada por $h(a, b) = a \otimes b$. Pode-se verificar que h é biaditiva e que satisfaz a definição anterior, e assim concluir que F/S é o produto tensorial de A e B . ■

Em síntese, podemos observar o produto tensorial $A \otimes_R B$ de dois R -módulos como um novo R -módulo (pois R é comutativo), constituído por combinações lineares de produtos $a \otimes b$, para $a \in A$, $b \in B$. Da biaditividade de \otimes temos as seguintes propriedades, para quaisquer $a, a' \in A$, $b, b' \in B$, $r \in R$:

- i) $a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b'$
- ii) $(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$
- iii) $r(a \otimes b) = ra \otimes b = a \otimes rb$

3.2 O Anel de Grothendieck

Dados um anel comutativo R e uma categoria finita \mathcal{C} , iremos de observar as propriedades do conjunto de funções $\{f; f : \mathcal{C} \rightarrow R\}$, de modo a obter a partir da estrutura deste conjunto indícios de uma possível relação entre categorias finitas e certas R -álgebras. O conjunto de funções $\{f; f : \mathcal{C} \rightarrow R\}$ será denotado por $R\langle \mathcal{C} \rangle$.

A primeira propriedade que observamos é a de que $R\langle\mathcal{C}\rangle$ é R -módulo livre. Para provar isto, usaremos o seguinte resultado:

Demonstração. O fato de $R\langle\mathcal{C}\rangle$ ser R -módulo livre segue diretamente do fato de \mathcal{C} ser categoria pequena. Como \mathcal{C} é pequena, $\{f \in \text{Hom}(A, B), A, B \in \text{Obj}(\mathcal{C})\}$ é conjunto, e pelo lema anterior, é uma base para $R\langle\mathcal{C}\rangle$, e este é um R -módulo livre, como queríamos. ■

Podemos definir uma segunda operação em $R\langle\mathcal{C}\rangle$: a convolução de funções. Se $f, g : \mathcal{C} \rightarrow R \in R\langle\mathcal{C}\rangle$ e $h \in \mathcal{C}$, definimos a convolução $f * g : \mathcal{C} \rightarrow R$ da seguinte maneira:

$$f * g(h) = \sum_{i \circ j = h} f(i) \cdot g(j),$$

onde a soma é feita sobre todos os $i, j \in \mathcal{C}$ tais que $i \circ j = h$.

Com a operação de convolução em $R\langle\mathcal{C}\rangle$, este torna-se uma R -álgebra, como veremos na proposição a seguir.

Proposição 3.2.1. *Seja R um anel comutativo e \mathcal{C} uma categoria finita. $R\langle\mathcal{C}\rangle$, munido da operação de convolução de funções, é uma R -álgebra.*

Demonstração. Basta verificar que $*$ definida em $R\langle\mathcal{C}\rangle$ satisfaz a definição 3.1.1. Como já sabemos que $R\langle\mathcal{C}\rangle$ é R -módulo livre, resta verificar que $*$ é associativa.

Sejam $f, g, h \in R\langle\mathcal{C}\rangle$, $l \in \mathcal{C}$ e $r \in R$. Temos:

$$\begin{aligned} [(f * g) * h](l) &= \sum_{i \circ j = l} (f * g)(i) \cdot h(j) \\ &= \sum_{i \circ j = l} \left(\sum_{k \circ m = i} f(k) \cdot g(m) \right) \cdot h(j) \\ &= \sum_{(k \circ m) \circ j = l} f(k)g(m)h(j) \\ &= \sum_{k \circ (m \circ j) = l} f(k)g(m)h(j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k \circ (m \circ j) = l} f(k) \cdot \left(\sum_{m \circ j} g(m) h(j) \right) \\
&= \sum_{k \circ (m \circ j) = l} f(k) \cdot (g * h)(m \circ j) \\
&= [f * (g * h)](l).
\end{aligned}$$

■

Definição 3.2.2. A R -álgebra $R\langle \mathcal{C} \rangle$, com R anel comutativo e \mathcal{C} categoria finita, é chamada Anel de Grothendieck sobre \mathcal{C} .

Em contextos mais gerais, como por exemplo para um anel R e grupo abeliano G quaisquer, esta construção chama-se “álgebra de convolução”. A seguir veremos mais propriedades de $R\langle \mathcal{C} \rangle$ que nos serão úteis posteriormente. Primeiramente, é de nosso interesse verificar que o produto tensorial entre módulos livres é um módulo livre.

Proposição 3.2.3. Sejam A, B R -módulos livres com bases $\{a_i\}_{i \in I}$ e $\{b_j\}_{j \in J}$ respectivamente, com R anel comutativo unitário. Então $A \otimes_R B$ é livre com base $\{a_i \otimes b_j\}_{(i,j) \in I \times J}$.

Demonstração. Da definição de módulos livres, temos $A \cong \sum_{i \in I} R_i$ e $B \cong \sum_{j \in J} R_j$. Logo, da definição de $A \otimes_R B$, segue que $x \in A \otimes_R B$ implica $x = a \otimes b$ para $a \in A, b \in B$. Como A e B são livres, temos $x = r_i a_i \otimes r_j b_j = \sum_{(i,j) \in I \times J} (r_i \cdot r_j) \cdot a_i \otimes b_j$, com $r_i, r_j \in R$ quase-nulos. Com isto temos que $\{a_i \otimes b_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ é gerador de $A \otimes_R B$. Vejamos que este conjunto é linearmente independente.

De fato, por $\{a_i\}_{i \in I}$ e $\{b_j\}_{j \in J}$ serem bases para A e B , respectivamente, segue que $0 = \sum_{(i,j) \in I \times J} (r_i \cdot r_j) \cdot a_i \otimes b_j$ implica ou $a_i \otimes b_j = 0$ ou $r_i \cdot r_j = 0$. Como a_i, b_j são elementos da base de A e B , temos $a_i \otimes b_j \neq 0, \forall (i, j) \in (I \times J)$, logo deve ocorrer $r_i \cdot r_j = 0, \forall (i, j) \in I \times J$ e portanto $\{a_i \otimes b_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ é base para $A \otimes_R B$, como desejado. ■

Proposição 3.2.4. Seja R um anel comutativo e $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ categorias finitas. Então:

1. $R\langle \mathcal{C}_1 \rangle \oplus R\langle \mathcal{C}_2 \rangle \cong R\langle \mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2 \rangle$;

$$2. R\langle \mathcal{C}_1 \rangle \otimes_R R\langle \mathcal{C}_2 \rangle \cong R\langle \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \rangle.$$

Demonstração.

1. Basta verificar que a aplicação

$$\varphi : R\langle \mathcal{C}_1 \rangle \oplus R\langle \mathcal{C}_2 \rangle \rightarrow R\langle \mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2 \rangle$$

$$\varphi(f) \mapsto u + v,$$

para $f = u \oplus v$, é um isomorfismo. De fato, dadas funções $f, g \in \mathcal{C}_1$ e $r \in R$, por $R\langle \mathcal{C}_i \rangle$ ser livre, temos que existem $u, v \in R\langle \mathcal{C}_1 \rangle$, e $t, w \in R\langle \mathcal{C}_2 \rangle$ tais que

$$\begin{aligned} \varphi(f + g) &= \varphi(u \oplus v + t \oplus w) \\ &= \varphi((u + t) \oplus (v + w)) \\ &= (u + t) + (v + w) \\ &= (u + v) + (t + w) \\ &= \varphi(f) + \varphi(g), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi((f * g)(h)) &= \varphi\left(\sum_{i \circ j = h} f(i)g(j)\right) \\ &= \sum_{i \circ j = h} \varphi(f(i))\varphi(g(j)) \\ &= (\varphi(f) * \varphi(g))(h) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \varphi(rf) &= \varphi(r(u \oplus v)) \\ &= \varphi(ru \oplus rv) \\ &= ru + rv \\ &= r(u + v) \\ &= r\varphi(f). \end{aligned}$$

Agora, da definição de φ , se x é tal que $\varphi(x) = 0$, segue que $\varphi(x) = 0 + 0$ e portanto $x = 0$, portanto $\ker \varphi = \{0\}$ e φ é injetora.

Tomando $f \in R\langle \mathcal{C}_1 \sqcup \mathcal{C}_2 \rangle$, temos que para $g = f \oplus 0 \in R\langle \mathcal{C}_1 \rangle \oplus R\langle \mathcal{C}_2 \rangle$, segue $\varphi(g) = f$ e φ é sobrejetora, donde conclui-se que é isomorfismo.

2. Basta verificar que a aplicação

$$\varepsilon : R\langle \mathcal{C}_1 \rangle \otimes_R R\langle \mathcal{C}_2 \rangle \rightarrow R\langle \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \rangle$$

$$\varepsilon(f(c) \otimes g(d)) \mapsto f(c) \cdot g(d)$$

é um isomorfismo. De fato, como o produto tensorial entre R -módulos livres é livre, basta verificar que $\text{posto}(R\langle \mathcal{C}_1 \rangle \otimes_R R\langle \mathcal{C}_2 \rangle) = \text{posto}(R\langle \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \rangle)$

De fato, temos que $X = \{\delta_{a \otimes b}\}_{a \otimes b \in \mathcal{C}_1 \otimes \mathcal{C}_2}$ é base para $R\langle \mathcal{C}_1 \rangle \otimes_R R\langle \mathcal{C}_2 \rangle$ e $Y = \{\delta_{(a,b)}\}_{(a,b) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2}$ é base para $R\langle \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \rangle$. Vejamos que ambos possuem a mesma cardinalidade: defina $\tau : X \rightarrow Y$ dada por $\delta_{a \otimes b} \mapsto \delta_{(a,b)}$.

Note que, se $\tau(\delta_{a \otimes b}) = \tau(\delta_{c \otimes d})$, segue $\delta_{(a,b)} = \delta_{(c,d)}$, donde temos $(a, b) = (c, d)$ e assim $\delta_{a \otimes b} = \delta_{c \otimes d}$, e τ é injetora. A sobrejetividade de τ decorre da observação de que o conjunto formado por elementos $a \otimes b$ e o conjunto formado por elementos (a, b) são ambos formados a partir das categorias finitas \mathcal{C}_1 e \mathcal{C}_2 , logo para $W = \delta_{(x,y)}$ arbitrário em Y , tome $V = \delta_{x \otimes y}$ e assim se terá $\tau(V) = W$. Sendo τ uma bijeção entre X e Y , estes conjuntos possuem mesma cardinalidade, e assim $\text{posto}(R\langle \mathcal{C}_1 \rangle \otimes_R R\langle \mathcal{C}_2 \rangle) = \text{posto}(R\langle \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2 \rangle)$, como queríamos. ■

3.3 Exemplos de Anéis de Grothendieck

Veremos agora alguns exemplos de construções de anéis de Grothendieck feitas utilizando-se categorias conhecidas:

3.3.1 Grupóide do par

Vejamos primeiramente um caso particular: Dados dois objetos quaisquer 1 e 2 numa categoria arbitrária \mathcal{C} , definimos o grupóide do par $\mathcal{G}(1, 2)$ como a categoria com objetos 1 e 2 e morfismos $Id_1 : 1 \rightarrow 1$, $Id_2 : 2 \rightarrow 2$, $f : 1 \rightarrow 2$ e $f^{-1} = g : 2 \rightarrow 1$

como no diagrama abaixo:

$$1 \xrightarrow{id_1} 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{g} \end{array} 2 \xleftarrow{id_2} 2$$

Vejamos quais são as propriedades de seu Anel de Grothendieck:

Sejam $F, G \in R\langle \mathcal{C} \rangle$, expressadas abaixo na forma de diagramas:

$$\begin{array}{ccc} a & \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{array} & b \\ & F & \\ a' & \begin{array}{c} \xrightarrow{\alpha'} \\ \xleftarrow{\beta'} \end{array} & b' \\ & G & \end{array}$$

com $a = F(Id_1)$, $b = F(Id_2)$ e $a' = G(Id_1)$, $b' = G(Id_2)$. Vejamos o que ocorre com suas convoluções:

- $F * G(Id_1) = F(Id_1)G(Id_1) + F(f)G(g) = aa' + \alpha\beta'$,
- $F * G(Id_2) = F(g)G(f) + F(Id_2)G(Id_2) = \beta\alpha' + bb'$,
- $F * G(f) = F(f)G(Id_1) + F(Id_2)G(f) = \alpha a' + b\alpha'$,
- $F * G(g) = F(g)G(Id_2) + F(Id_1)G(g) = \alpha b' + a\beta'$.

Observe que, ao posicionarmos convenientemente os termos $a, b, \alpha, \beta, a', b', \alpha', \beta'$ como entradas de uma matriz 2×2 , temos:

$$\begin{pmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & \alpha' \\ \beta' & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + \alpha\beta' & \alpha a' + b\alpha' \\ \alpha b' + a\beta' & \beta\alpha' + bb' \end{pmatrix},$$

ou melhor,

$$\begin{pmatrix} F(Id_1) & F(f) \\ F(g) & F(Id_2) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} G(Id_1) & G(f) \\ G(g) & G(Id_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F * G(Id_1) & F * G(f) \\ F * G(g) & F * G(Id_2) \end{pmatrix}.$$

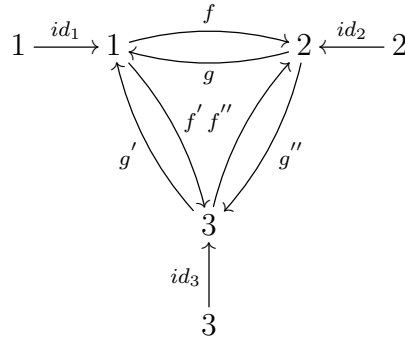
Logo, levantamos a hipótese de que existe um morfismo

$$\varphi : R\langle \mathcal{C} \rangle \rightarrow M_{2 \times 2}(R)$$

$$\varphi(F) = [F(i, j)]_{i, j},$$

onde $x : i \rightarrow j \in \mathcal{C}$ e $[F(i, j)]_{i,j}$ é uma matriz 2×2 , com entrada $F(i, j)$ na i -ésima linha e j -ésima coluna. E além do mais, tal morfismo é um isomorfismo de álgebras.

Provaremos a afirmação acima para o caso geral de grupóides dos pares. Seja X um conjunto finito. Para cada par de elementos $a, b \in X$, definimos o grupóide dos pares (a, b) atribuindo flechas $f : a \rightarrow b, g : b \rightarrow a, id_a : a \rightarrow a$ e $id_b : b \rightarrow b$. O grupóide dos pares do conjunto X será denotado por $\mathcal{G}(X)$. Como exemplo, vejamos o caso do conjunto $C = \{1, 2, 3\}$:



Observe que ao considerarmos os elementos de C dois a dois, teremos para cada par de elementos uma álgebra de matrizes 2×2 , conforme vimos anteriormente. Contudo, ao considerarmos todos os n elementos de um conjunto finito X , ao construirmos $R\langle \mathcal{G}(X) \rangle$ teremos uma álgebra de matrizes $n \times n$. Isto pode ser expressado através do isomorfismo

$$\varphi : R\langle \mathcal{G}(X) \rangle \rightarrow M_{n \times n}(R)$$

$$\varphi(F) = [F(i, j)]_{i,j},$$

onde $x : i \rightarrow j \in \mathcal{C}$, $r \in R$ e $[F(i, j)]_{i,j}$ é a matriz $n \times n$ com valor $F(i, j)$ na i -ésima linha e j -ésima coluna.

Demonstração. Sejam $f, g \in R\langle \mathcal{C} \rangle$, e $i, j \in Obj(\mathcal{C})$. Temos:

- i) $\varphi(F + G(i, j)) = [F(i, j) + G(i, j)]_{i,j} = [F(i, j)]_{i,j} + [G(i, j)]_{i,j} = \varphi(F(i, j)) + \varphi(G(i, j));$
- ii) $\varphi(rF(i, j)) = [rF(i, j)]_{i,j} = r[F(i, j)]_{i,j} = r\varphi(F(i, j));$

$$\text{iii) } \varphi(F * G)(i, j) = [F * G(i, j)]_{i,j} = [\sum_{i \leq k \leq j} F(i, k)G(k, j)]_{i,j}.$$

Como $\sum_{i \leq k \leq j} F(i, k)G(k, j)$ é exatamente o resultado do produto das matrizes $[F(i, j)]_{i,j}$ e $[G(i, j)]_{i,j}$, segue $[\sum_{i \leq k \leq j} F(i, k)G(k, j)]_{i,j} = [F(i, j)]_{i,j} \cdot [G(i, j)]_{i,j} = \varphi(F(i, j)) \cdot \varphi(G(i, j))$.

Com o demonstrado acima, temos que φ é R -homomorfismo de álgebras. Vejamos agora que φ é uma bijeção.

De fato, se $x \in \ker(\varphi)$, $\varphi(x) = 0$ e logo $[x(i, j)]_{i,j} = 0$. Com isto, $x(i, j) = 0$ para todo (i, j) , e portanto $x = 0$. Como $\ker(\varphi) = \{0\}$, este é um R -homomorfismo injetor.

Para verificar a bijetividade de φ , tomemos uma matriz $[a_i, j]_{i,j}$. Definindo $f : \mathcal{C} \rightarrow R$ dada por $f(i, j) = a_i j$, segue $[a_i, j]_{i,j} = [F(i, j)]_{i,j} = \varphi(F)$. Com isto, concluímos que φ é também sobrejetora e portanto é um isomorfismo de álgebras. ■

3.3.2 Posets Lineares

Antes de abordarmos o próximo exemplo, vejamos algumas definições referentes a posets:

Dada uma quantidade finita de elementos a_1, a_2, \dots, a_s , com uma ordem parcial $a_i \leq a_{i+1}$, temos a categoria $\mathbf{PO}(a_1, \dots, a_s)$, como vista no capítulo 1.

Definição 3.3.1. Num poset \mathcal{C} , um elemento a tal que para todo $b \neq a \in \mathcal{C}$, não exista $f : b \rightarrow a$ será dito elemento minimal de \mathcal{C} .

Definição 3.3.2. Num poset \mathcal{C} , um elemento b tal que se para todo $a \neq b \in \mathcal{C}$, não exista $g : b \rightarrow a$ será dito elemento maximal de \mathcal{C} .

Definição 3.3.3. Seja \mathcal{C} um poset. Se há uma subcategoria \mathcal{C}' de \mathcal{C} tal que para quaisquer $a, b \in \mathcal{C}'$, existe única $f : a \rightarrow b$ ou única $g : b \rightarrow a$, isto é, ou $a \leq b$ ou $b \leq a$, diremos que \mathcal{C}' é uma cadeia em \mathcal{C} .

Definição 3.3.4. Um poset \mathcal{C} com um único elemento maximal b e um único minimal a , com uma única cadeia de a a b será dito um poset linear.

- $f * g(1, 2) = f(1, 1)g(1, 2) + f(1, 2)g(2, 2) = a\alpha' + \alpha b'$
- $f * g(1, 3) = f(1, 1)g(1, 3) + f(1, 2)g(2, 3) + \varphi((1, 3))\psi(3, 3) = a\eta' + \alpha\beta' + \eta c'$
- $f * g(2, 2) = f(2, 2)g(2, 2) = bb'$
- $f * g(2, 3) = f(2, 2)g(2, 3) + f(2, 3)g(3, 3) = b\beta' + \beta c'$
- $f * g(3, 3) = f(3, 3)g(3, 3) = cc'$

Ao posicionarmos os termos $a, b, c, a', b', c', \alpha, \beta, \eta, \alpha', \beta', \eta'$... como entradas de matrizes triangulares superiores, teremos as seguintes matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} a & \alpha & \eta \\ 0 & b & \beta \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} a' & \gamma & \eta' \\ 0 & b' & \delta \\ 0 & 0 & c' \end{pmatrix}$$

E seu produto será:

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} a & \alpha & \eta \\ 0 & b & \beta \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' & \alpha' & \eta' \\ 0 & b' & \beta' \\ 0 & 0 & c' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} aa' & a\alpha' + \alpha b' & a\eta' + \alpha\beta' + \eta c' \\ 0 & bb' & b\beta' + \beta c' \\ 0 & 0 & cc' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim, temos que as entradas da matriz resultante do produto $A \cdot B$ coincidem com os resultados de $f * g$ tomando as flechas (i, j) como entradas na i -ésima linha e j -ésima coluna da matriz triangular superior.

Com base nessa comparação, podemos buscar verificar que existe um isomorfismo entre $R\langle \mathcal{C} \rangle$, onde \mathcal{C} é um poset linear genérico com n elementos, e a sub-álgebra $M_n^\Delta(R)$ de matrizes triangulares superiores de ordem n e entradas em R , através da aplicação:

$$\begin{aligned} \Pi : R\langle \mathcal{C} \rangle &\rightarrow M_n^\Delta(R) \\ f &\mapsto \Pi(f) = [a(f(i, j))]_{i, j}, \end{aligned}$$

onde $a(f(i, j)) = f(i, j)$ se $i \leq j$ e $a(f(i, j)) = 0$ se $i > j$. Pelo exemplo do grupóide do par, temos que Π preserva a multiplicação por escalar e a soma de funções. Resta verificar que Π preserva a convolução de funções e que é isomorfismo de álgebras.

Demonstração. Sejam $f, g \in R\langle \mathcal{C} \rangle$, $x, y, z \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ e $r \in R$.

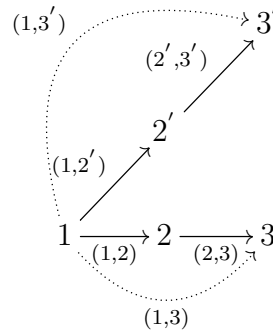
Como a multiplicação de matrizes triangulares resulta em matrizes triangulares, utilizando o mesmo raciocínio do exemplo anterior, temos

$$\Pi(f * g) = [f * g(i, j)]_{i,j} = \Pi(f) \cdot \Pi(g), \forall f, g \in R\langle \mathcal{C} \rangle.$$

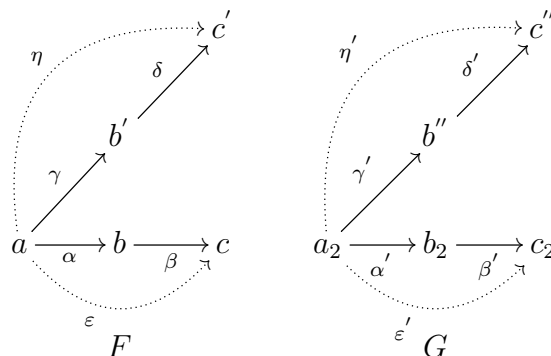
E novamente, temos que se $x \in \ker(\Pi)$, então $x = 0$ e $\ker(\Pi) = \{0\}$, sendo Π então injetor. Além disso, dada uma matriz triangular superior $[a_{i,j}]_{i,j}$, tomando $f : \mathcal{C} \rightarrow R$ com $f(i, j) = a_{i,j}$ para $i \leq j$ e $f(i, j) = 0$ se $i > j$, segue $\Pi(f) = [a_{i,j}]$, e Π é sobrejetor, e portanto isomorfismo. ■

3.3.3 Posets não-lineares

O diagrama abaixo ilustra um poset não-linear \mathcal{C} finito de ordem 3:



Consideremos F, G em $R\langle \mathcal{C} \rangle$, dadas abaixo através de diagramas:



Vejam agora o que ocorre com as convoluções de F e G :

- $F * G(1) = F(1)G(1) = aa_2$
- $F * G(2) = F(2)G(2) = bb_2$
- $F * G(3) = F(3)G(3) = cc_2$
- $F * G(2') = F(2')G(2') = b'b''$
- $F * G(3') = F(3')G(3') = c'c''$
- $F * G((1, 2)) = F(1, 1)G(1, 2) + F(1, 2)G(2, 2) = a\varepsilon' + \varepsilon b_2$
- $F * G((1, 2')) = F(1, 1)G(1, 2') + F(1, 2')G(2', 2') = a\gamma' + \gamma b''$
- $F * G((2, 3)) = F(2, 2)G(2, 3) + F(2, 3)G(3, 3) = b\beta' + \beta c_2$
- $F * G((2', 3')) = F(2', 2')G(2', 3') + F(2', 3')G(3', 3') = b'\delta' + \delta c''$
- $F * G((1, 3)) = F(1, 1)G(1, 3) + F(1, 3)G(3, 3) + F(1, 2)G(2, 3) = a\varepsilon' + \varepsilon' c_2 + \alpha\beta'$
- $F * G((1, 3')) = F(1, 1)G(1, 3') + F(1, 3')G(3', 3') + F(1, 2')G(2', 3') = a\eta' + \eta c'' + \gamma\delta'$

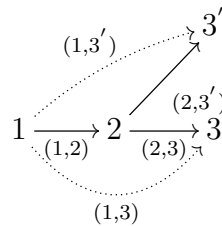
Novamente, posicionamos de forma conveniente os termos obtidos em matrizes triangulares 3×3 . Porém, como existem duas cadeias em \mathcal{C} , teremos um par de matrizes da forma:

$$F = \left(\left(\begin{pmatrix} a & \alpha & \varepsilon \\ 0 & b & \beta \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & \gamma & \eta \\ 0 & b' & \delta \\ 0 & 0 & c' \end{pmatrix} \right) \right)$$

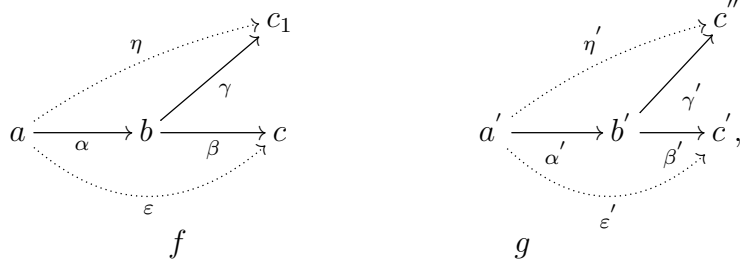
$$G = \left(\left(\begin{pmatrix} a_2 & \alpha' & \varepsilon' \\ 0 & b_2 & \beta' \\ 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & \gamma' & \eta' \\ 0 & b'' & \delta' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix} \right) \right)$$

Onde a entrada a_{11} é comum a todas as matrizes do par, para quaisquer $\varphi, \psi \in R\langle \mathcal{C} \rangle$.

Agora, se tivéssemos um poset não-linear como no diagrama abaixo,



Com flechas $f, g \in R\langle \mathcal{C} \rangle$ dadas por



e seguindo um raciocínio análogo, teríamos os seguintes pares de matrizes:

$$f = \left(\begin{pmatrix} a & \alpha & \varepsilon \\ 0 & b & \beta \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & \alpha & \eta \\ 0 & b & \gamma \\ 0 & 0 & c_1 \end{pmatrix} \right)$$

$$g = \left(\begin{pmatrix} a' & \alpha' & \varepsilon' \\ 0 & b' & \beta' \\ 0 & 0 & c' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & \alpha' & \eta' \\ 0 & b' & \gamma' \\ 0 & 0 & c'' \end{pmatrix} \right),$$

onde o bloco $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$ é comum a todas as matrizes de cada par.

Portanto, levantamos a hipótese de que existe um isomorfismo entre $R\langle \mathcal{C} \rangle$ e esta álgebra de matrizes $\Lambda^\Delta \subset M_{3 \times 3}^\Delta \times M_{3 \times 3}^\Delta$ com os blocos identificados $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$, dado através da seguinte aplicação, onde $\varphi \in R\langle \mathcal{C} \rangle$ percorre ambas as cadeias de \mathcal{C} :

$$\Pi : R\langle \mathcal{C} \rangle \rightarrow \Lambda^\Delta$$

$$\Pi(f) = ([a(f(i_r, j_r))]_{i_r, j_r}, [a(f(i_s, j_s))]_{i_s, j_s}),$$

com (i_r, j_r) denotando as flechas da cadeia $[1, 3]$ e (i_s, j_s) denotando as flechas da cadeia $[1, 3']$, e com $a(f(i, j)) = f(i, j)$ se $i \leq j$ e $a(f(i, j)) = 0$ se $i > j$.

Demonstração. Pelo que foi visto no exemplo dos posets lineares, a aplicação $\Pi_r(f) = [a(f(i_r, j_r))]_{i_r, j_r}$ é um isomorfismo entre o subanel de $R\langle \mathcal{C} \rangle$ constituído pelas funções $R\langle \mathcal{C} \rangle$ restritas à cadeia $[1, 3]$ e a álgebra de matrizes triangulares superiores 3×3 com entradas em R . O mesmo vale para $\Pi_s(f) = [a(f(i_s, j_s))]_{i_s, j_s}$.

Como as cadeias consideradas não possuem termos em comum a partir do elemento 2, temos que a aplicação $\Pi(f) = (\Pi_a(f), \Pi_b(f))$ está bem definida, e por $\Pi_a : R\langle[i_a, j_a]\rangle \rightarrow M_3^\Delta(R)$, $\Pi_b : R\langle[i_b, j_b]\rangle \rightarrow M_3^\Delta(R)$ serem isomorfismos, segue que $Im(\Pi) \cong \Lambda^\Delta \subset M_{3 \times 3}^\Delta \times M_{3 \times 3}^\Delta$. ■

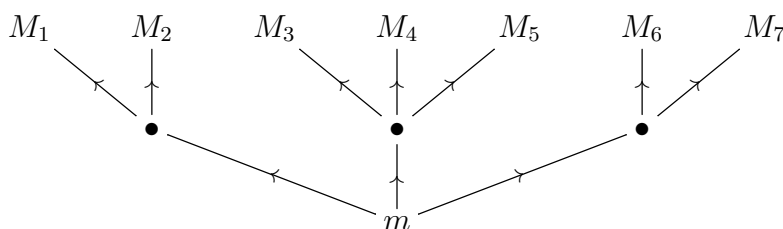
Na seção seguinte será provado um teorema que interligará os casos dos posets lineares e não-lineares.

3.4 O Anel de Grothendieck de Árvores finitas

Podemos generalizar o resultado obtido acima ao observar o caso dos posets não-lineares através da noção de Árvores Finitas.

Definição 3.4.1. *Uma árvore \mathcal{A} , no escopo deste estudo, é definida como um poset não-linear que possui um único elemento minimal a , chamado de raiz, e possui n elementos maximais, tal que para cada maximal b , existe uma única cadeia em \mathcal{A} que sai de a termina em b*

Exemplo 3.4.2. *O diagrama abaixo ilustra uma árvore finita com raiz m e elementos maximais M_1, M_2, \dots, M_7 :*



Observe que há só uma cadeia entre m e M_i , para cada $i = 1, \dots, 7$, sendo elas $[m, M_1]$, $[m, M_2]$, $[m, M_3]$, $[m, M_4]$, $[m, M_5]$, $[m, M_6]$ e $[m, M_7]$.

Provaremos o seguinte teorema para uma árvore finita genérica.

Teorema 3.4.3. *Consideremos R um anel comutativo. Se \mathcal{A} é uma árvore finita com raiz “1” e $\{n_1, n_2, \dots, n_s\}$ elementos maximais, então $R\langle\mathcal{A}\rangle$ é isomorfo a uma subálgebra de $\prod_{i=1}^s M_{n_i \times n_i}(R)$, onde $M_{n_i \times n_i}(R)$ é a álgebra de matrizes $n_i \times n_i$ com entradas em R , para cada $i = 1, 2, \dots, s$.*

Demonstração. Vejamos inicialmente que para cada cadeia $[1_t, m_t]$ a seguinte aplicação é um homomorfismo entre $R\langle \mathcal{A} \rangle$ e $M_{m_t \times m_t}(R)$:

$$\varphi_t : R\langle \mathcal{A} \rangle \rightarrow M_{m_t \times m_t}(R).$$

$$\text{Definindo } \varphi_t(f) = \begin{bmatrix} a_{1_t 1_t} & a_{1_t 2_t} & \cdots & a_{1_t m_t} \\ a_{2_t 1_t} & \ddots & & \vdots \\ a_{3_t 1_t} & a_{3_t 2_t} & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m_t 1_t} & a_{m_t 2_t} & \cdots & a_{m_t m_t} \end{bmatrix}$$

onde $a_{ij} = f(i, j)$ para $i, j \in \text{Obj}([1_t, m_t])$ com $i < j$ e $a_{i,j} = 0$ caso contrário.

Além disso, para $f, g \in R\langle [1_t, m_t] \rangle$ e $\alpha \in R$:

i)

$$\begin{aligned} \varphi_t(f + g) &= \begin{bmatrix} f + g(1_t, 1_t) & \cdots & f + g(1_t, m_t) \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f + g(m_t, m_t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} f(1_t, 1_t) & \cdots & f(1_t, m_t) \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(m_t, m_t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g(1_t, 1_t) & \cdots & g(1_t, m_t) \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g(m_t, m_t) \end{bmatrix} \\ &= \varphi_t(f) + \varphi_t(g). \end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned} \varphi_t(\alpha f) &= \begin{bmatrix} \alpha f(1_t, 1_t) & \cdots & \alpha f(1_t, m_t) \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha f(m_t, m_t) \end{bmatrix} \\ &= \alpha \begin{bmatrix} f(1_t, 1_t) & \cdots & f(1_t, m_t) \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(m_t, m_t) \end{bmatrix} = \alpha \varphi(f). \end{aligned}$$

iii)

$$\varphi_t(f * g) = \begin{bmatrix} f * g(1_t, 1_t) & \cdots & f * g(1_t, m_t) \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f * g(m_t, m_t) \end{bmatrix}.$$

Como $[1_t, m_t]$ é um poset linear, temos que $f * g(i, j) = \sum_{i \leq k \leq j} f(i, k) \cdot g(k, j)$, e portanto temos que

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} f * g(1_t, 1_t) & \cdots & f * g(1_t, m_t) \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f * g(m_t, m_t) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \sum_{1_t \leq k \leq 1_t} f(i, k) \cdot g(k, j) & \cdots & \sum_{1_t \leq k \leq m_t} f(i, k) \cdot g(k, j) \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sum_{m_t \leq k \leq m_t} f(i, k) \cdot g(k, j) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} f(1_t, 1_t) & \cdots & f(1_t, m_t) \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(m_t, m_t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g(1_t, 1_t) & \cdots & g(1_t, m_t) \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & g(m_t, m_t) \end{bmatrix} \\
&= \varphi_t(f) \cdot \varphi_t(g).
\end{aligned}$$

Consideremos agora o seguinte morfismo abrangendo todas as cadeias de \mathcal{A} :

$$\varphi : R\langle \mathcal{A} \rangle \rightarrow \prod_{i=1}^s M_{n_i \times n_i}(R)$$

dado por

$$\varphi(f) = (\varphi_1(f), \dots, \varphi_s(f)).$$

Vejamos que φ é um homomorfismo de álgebras. Temos, para $f, g \in R\langle \mathcal{A} \rangle$ e $\alpha \in R$:

- i) $\varphi(f+g) = (\varphi_1(f+g), \dots, \varphi_s(f+g)) = (\varphi_1(f), \dots, \varphi_s(f)) + (\varphi_1(g), \dots, \varphi_s(g)) = \varphi(f) + \varphi(g)$
- ii) $\varphi(\alpha f) = (\varphi_1(\alpha f), \dots, \varphi_s(\alpha f)) = \alpha(\varphi_1(f), \dots, \varphi_s(f)) = \alpha\varphi(f)$.
- iii) Antes de avaliarmos φ na convolução $f * g$, vale ressaltar que por termos que $[1_1, n_1], \dots, [1_s, n_s]$ são cadeias, teremos que $f * g(i, j)$ poderá ser reescrita como $\sum f(i, k) \cdot g(k, j)$.

Contudo, observando-se que agora analisamos todas as cadeias simultaneamente, poderia ocorrer de termos mais de um possível resultado para $\sum_{i \leq k \leq j} f(i, k) \cdot g(k, j)$. Porém, como árvores finitas não possuem ciclos, podemos garantir que não haverá interferência de termos de outras cadeias ao computarmos tal soma sobre uma cadeia fixa t .

Isto é o que nos permite reescrever cada s -upla $(\varphi_1(f * g), \dots, \varphi_s(f * g))$ como $(\sum_{i_1 \leq k_1 \leq j_1} f(i_1, k_1) \cdot g(k_1, j_1), \dots, \sum_{i_s \leq k_s \leq j_s} f(i_s, k_s) \cdot g(k_s, j_s))$, sem correr o risco de perda de informações ao passar de $R\langle \mathcal{A} \rangle$ para a álgebra de matrizes.

Isto nos garante que

$$\begin{aligned} (\varphi_1(f*g), \dots, \varphi_s(f*g)) &= \left(\sum_{i_1 \leq k_1 \leq j_1} f(i_1, k_1) \cdot g(k_1, j_1), \dots, \sum_{i_s \leq k_s \leq j_s} f(i_s, k_s) \cdot g(k_s, j_s) \right) \\ &= (\varphi_1(f)\varphi_1(g), \dots, \varphi_s(f)\varphi_s(g)) \end{aligned}$$

para todas as funções f, g , e assim conclui-se que $\varphi(f * g) = \varphi(f) \cdot \varphi(g)$.

Por fim, temos que φ é injetora, pois

$$\begin{aligned} \varphi(f) = \varphi(g) &\Rightarrow (\varphi_1(f), \dots, \varphi_s(f)) = (\varphi_1(g), \dots, \varphi_s(g)) \\ &\Rightarrow \varphi_i(f) = \varphi_i(g), \quad i = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Como agora observamos todas as cadeias de \mathcal{A} de maneira simultânea, segue que $\varphi_i(f(x)) = \varphi_i(g(x))$ para todo objeto x de \mathcal{A} , e assim $f = g$, e portanto φ é injetora.

Restringindo o contradomínio de φ ao conjunto de s -uplas de matrizes triangulares superiores, temos que φ torna-se bijetora e portanto descreve um isomorfismo entre $R\langle \mathcal{A} \rangle$ e uma subálgebra de $\prod_{i=1}^s M_{n_i \times n_i}(R)$, como queríamos. ■

Capítulo 4

Considerações Finais

Ao longo deste trabalho foram estudados temas referentes a categorias, módulos, Grupos de Grothendieck e Anéis de Grothendieck, com o objetivo de esclarecer, ao menos parcialmente, se existem R -álgebras \mathcal{A} sobre um anel comutativo R que podem ser descritas como álgebras de convolução de uma categoria finita \mathcal{C} , ou seja, com o objetivo de determinar sob quais condições teríamos $\mathcal{A} \cong R\langle\mathcal{C}\rangle$.

Vimos exemplos envolvendo grupóides, posets lineares e não-lineares, e árvores finitas, estas vistas como uma forma de generalização dos posets não lineares. Concluimos que devido à estrutura definida pela convolução de funções em $R\langle\mathcal{C}\rangle$, os anéis de Grothendieck de grupóides do par são isomorfos a álgebras de matrizes, os anéis de posets são isomorfos a álgebras de matrizes triangulares superiores, e os anéis de árvores são isomorfos a uma “junção” de álgebras de matrizes triangulares.

Contudo, nada podemos dizer ainda sobre os Anéis de Grothendieck para categorias mais genéricas, sendo que a generalização das classificações apresentadas neste trabalho se mostrou como o maior obstáculo encontrado durante o estudo. As dificuldades em expandir nossa classificação residem principalmente no fato de que não foi possível determinar a existência de um funtor $\tau : {}_R\text{Alg} \rightarrow \text{CAT}$, tal que $R\langle\tau(A)\rangle \cong A$.

A respeito de trabalhos futuros, ainda há a necessidade de aprofundar os estudos sobre a functorialidade de $R\langle\mathcal{C}\rangle$ em CAT , de forma a encontrar possíveis hipóteses mínimas que garantam uma forma de relacionar a categoria de álgebras

sobre um anel comutativo com a categoria de categorias. Outra possível continuação para o que foi aqui exposto é a busca por mais exemplos de Anéis de Grothendieck com o objetivo de se obter uma possível classificação das álgebras $R\langle\mathcal{C}\rangle$ em termos do grupo $K_0(R)$.

Referências Bibliográficas

1. ASSEM, I. **Algèbres et Modules**. Les Presses d'Université d'Ottawa, 1997.
2. BARR, M., WELLS, C. **Category theory for computing science**. New York: Prentice Hall, 1990.
3. HALMOS, P. R. **Naive Set Theory**. Van Nostrand, New York, 1960.
4. MAC LANE, S. **Categories for the working mathematician**. Springer Science & Business Media, 2013.
5. NCatLab, **Convolution Algebra**, último acesso em 10/04/2019.
<<https://ncatlab.org/nlab/show/convolution+algebra>>
6. ROTMAN, J. J. **Advanced modern algebra**. 2 ed. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2010.
7. ROTMAN, J. J. **An introduction to homological algebra**. 2 ed. New York: Springer, 2008.