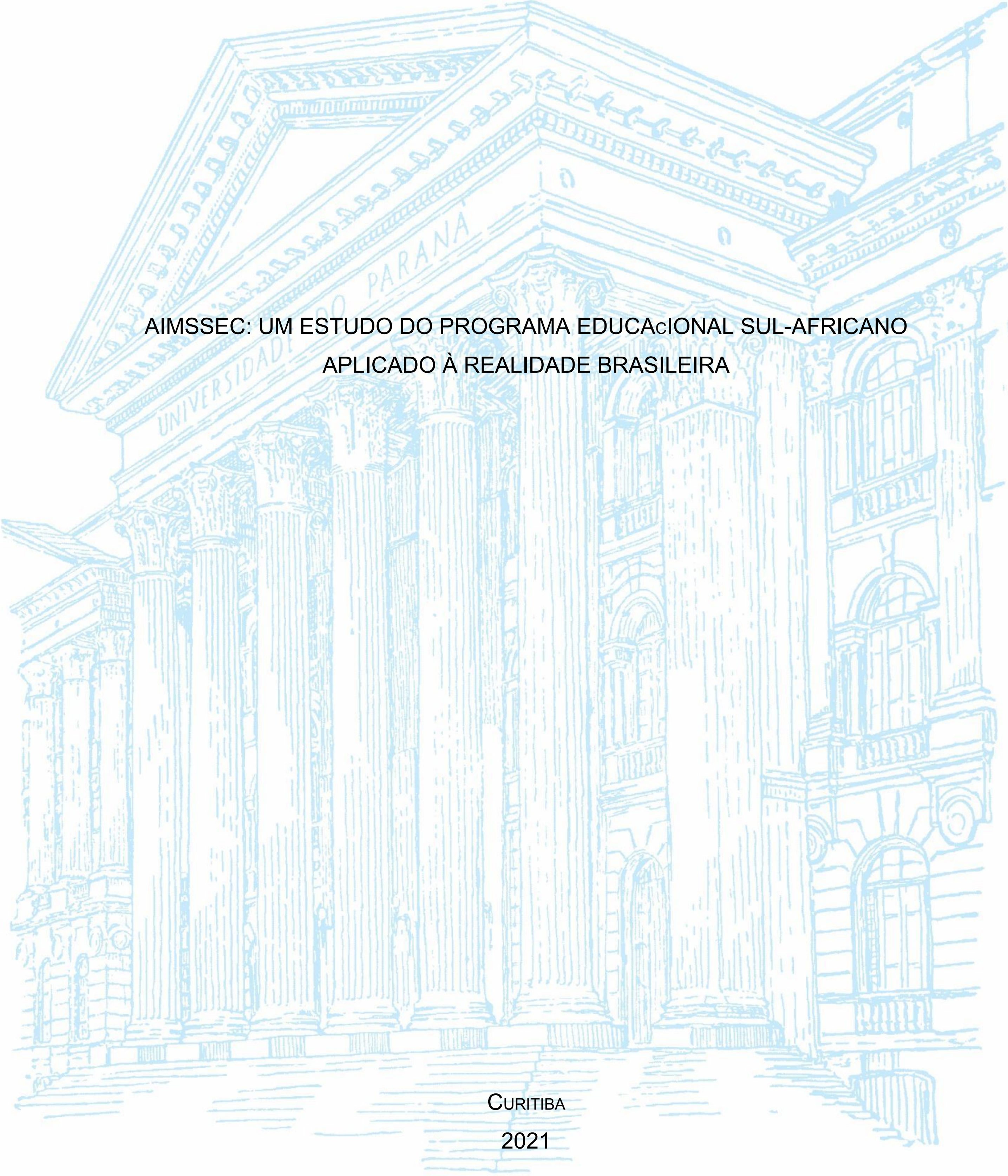
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

AMANDA MARIA GALIOTTO



AIMSSEC: UM ESTUDO DO PROGRAMA EDUCACIONAL SUL-AFRICANO APLICADO À REALIDADE BRASILEIRA

CURITIBA

2021

AMANDA MARIA GALIOTTO

AIMSSEC: UM ESTUDO DO PROGRAMA EDUCACIONAL SUL-AFRICANO APLICADO À REALIDADE BRASILEIRA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná como requisito à obtenção do título de Licenciada em Matemática.

Orientador: Prof.º Dr. Emerson Rolkouski.

CURITIBA

2021

“A educação é a arma mais poderosa que
você pode usar para mudar o mundo.”
(Nelson Mandela)

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos o programa educacional internacional AIMSSEC (*African Institute for Mathematical Sciences Schools Enrichment Centre*), operacionalizado na África do Sul para professores de matemática, e os materiais didáticos (fichas de atividades e notas para o professor). Para atender ao objetivo, esta pesquisa foi estruturada da seguinte forma: contextualização no âmbito educacional na África do Sul, um breve comparativo com o sistema educacional brasileiro, a apresentação do projeto educacional AIMSSEC e seus cursos e materiais desenvolvidos para a formação continuada de professores de matemática. Desta maneira, realizamos a seleção de dez fichas de atividades e, destas, quatro materiais de apoio ao professor (Notas para o professor). Na tentativa de compreender o embasamento teórico da elaboração dessas fichas, discorremos sobre a formação da aprendizagem, em especial o desenvolvimento do pensamento matemático. Obtivemos como resultado que as fichas de atividades e os materiais podem servir como apoio também aos professores brasileiros de modo geral e professores paranaenses em particular, pois atendem as especificações e orientações contidas na BNCC e, em especial, nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná.

Palavras-Chave: Programa Educacional. Formação De Professores De Matemática. Educação Matemática. Pensamento Matemático.

ABSTRACT

In this paper we present the international educational program AIMSSEC (African Institute for Mathematical Sciences Schools Enrichment Centre) operating in South Africa for mathematics teachers and the teaching materials (activity sheets and teacher notes). To meet the objective, this research was structured as follows: contextualization in the educational context in South Africa, a brief comparison with the Brazilian educational system, the presentation of the AIMSSEC educational project and its courses and materials developed for the continuing education of teachers of math. In this way, we selected ten activity sheets and, from these, four teacher support materials (Notes for the teacher). In an attempt to understand the theoretical basis for the preparation of these forms, we discuss the formation of learning, especially the development of mathematical thinking. We obtained as a result that the activity sheets and materials can also serve as support for Brazilian teachers in general and Paraná teachers in particular, as they meet the specifications and guidelines contained in the BNCC, and in particular, in the Curriculum Guidelines of the State of Paraná.

Keywords: Educational Program. Mathematics Teacher Training. Mathematics Education. Mathematical Thinking.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Sempre estudei em escolas públicas[1] e tive facilidade para aprender e entender os conteúdos de matemática. Na época eu considerava divertido resolver os exercícios e os problemas trabalhados em sala.

Ainda no ensino médio, em diálogo com meu professor de Matemática, ao demonstrar interesse em ingressar no ensino superior, ele me falou de um cursinho preparatório chamado *ONG Em Ação*, no qual ele era professor voluntário. No ano seguinte, enquanto cursava o 3.° ano do EM, fiz a inscrição para o processo seletivo do preparatório e, após participar da prova de conhecimentos gerais e da análise socioeconômica, ingressei no curso.

Embora o gosto pela matemática tenha feito parte da minha vida escolar, sempre tive muitas dúvidas e aflições sobre seguir a carreira de professor. Infelizmente, a carreira de docente no Brasil é desvalorizada pelo Estado e pela sociedade, decorrendo daí as más condições no ambiente laboral e a desvalorização salarial.

No entanto, apesar desse receio com a profissão, ingressei no curso de Licenciatura em Matemática na UFPR e durante os anos de curso, participei de ações como: Projeto OBMEP na Escola, trabalho voluntário na ONG Em Ação e estágio não-obrigatório.

Foi da junção desse histórico de vivência escolar com o diálogo com o Prof. Dr. Emerson Rolkouski que surgiu a ideia de desenvolver o tema desta monografia. Observamos que o programa AIMSSEC apresenta questões matemáticas dentro de seus materiais didáticos que auxiliam o professor, principalmente levando em consideração as condições sociais desiguais que a África do Sul apresenta. Desta forma, um estudo sobre este projeto pode contribuir para ampliar as possibilidades de aportes didáticos.

Sendo assim, o objetivo desta monografia é apresentar um programa educacional que pode ser útil para professores brasileiros, ajudando-os na elaboração das aulas de Matemática, com a segurança de tomar como referência materiais desenvolvidos por uma rede de professores de matemática.

---

[1] Escolas públicas que frequentei durante toda a minha trajetória escolar:
Pré a 3.° série – Colégio Municipal Castro;
4° a 6.° série – Colégio Estadual Nossa Senhora Aparecida;
7.° e 8.° série – Colégio Estadual Eurides Brandão;
Ensino Médio – Colégio Estadual do Paraná.

Esta monografia está dividida em cinco capítulos, organizadas da seguinte forma: inicialmente, realizamos a contextualização no âmbito educacional na África do Sul: expondo a segregação na história do referido país, os Aspectos Educacionais, comparativo entre o sistema educacional sul-africano e o brasileiro, expondo a Grade curricular do 10° a 12.° ano escolar sul-africano (equivalente ao EM brasileiro); em seguida, apresentamos o Projeto Educacional AIMSSEC: fichas de atividades, cursos e materiais desenvolvidos na formação continuada de professores de Matemática.

Para este trabalho, selecionamos e traduzimos dez fichas de atividades. Destas, escolhemos quatro materiais de apoio (Notas para o Professor). Após, discorrermos sobre a Formação da Aprendizagem, em especial o pensamento matemático.

2 CONTEXTO EDUCACIONAL NA ÁFRICA DO SUL

A África do Sul é um país marcado pela desigualdade e pela discriminação racial e étnica. Soaria estranho falar sobre o contexto educacional da África do Sul sem mencionar o *Apartheid* (1948 – 1994), que foi uma grande mancha na história da humanidade.

Antes da implementação do *Apartheid*, a educação formal era de responsabilidade quase que exclusiva das missões associadas à Igreja. Durante o período de segregação de raças, o Governo passou a controlar o ensino através da implementação da Lei da Educação Bantu (1953). Essa lei foi aplicada nas escolas destinadas aos negros, tendo como finalidade ensinar somente o necessário para o trabalho futuro (trabalho braçal) e, acima de tudo, controlar e propagar as ideologias do *Apartheid*. Segundo a *AMNESTY international*:

> Na década de 1970, o gasto per capita do governo com a educação de negros era um décimo do gasto para a educação de brancos. Como resultado, as escolas para negros tinham instalações, professores e livros didáticos de qualidade inferior. Em 1978, apenas 20% dos universitários eram negros, embora representassem 70% da população. (AMNESTY, 2020, p. 19)

Vale destacar que, durante o período de segregação, as crianças negras não eram obrigadas a frequentar as escolas.

Com o fim do *Apartheid*, uma das principais prioridades do Estado era de garantir que todas as crianças tivessem acesso à educação. O sistema de ensino sul-africano passou por mudanças e houve diversos desafios. A Educação passou a ser baseada na ideologia neoliberal da competição e do sucesso individual, porém se mostra ineficiente nas escolas pobres e periféricas (NDIMANDE, 2011).

Vale destacar que um dos grandes desafios que o ensino sul-africano enfrenta é a barreira linguística, pois existem 11 línguas oficiais, das quais nove são indígenas. Cerca de 60% dos professores trabalham em escolas com mais de 10% dos alunos cuja primeira língua não é a trabalhada em sala de aula, sendo a compreensão um obstáculo à eficácia no ensino (AMNESTY, 2020, p. 34).

A infraestrutura das escolas públicas nas regiões pobres, segundo a *AMNESTY International*, mostra-se inapropriada para os alunos e professores. As salas de aula não possuem mesas e cadeiras suficientes para atender a comunidade escolar, as paredes e telhados não oferecem proteção contra os fatores climáticos, não há bibliotecas e nem campos para a prática de esportes, entre outros.

Além dos motivos citados anteriormente que privam as crianças a terem acesso à educação de qualidade (idioma, falta de infraestrutura nas escolas e segregação racial), Beardon (2018), no artigo *“Mathematics Education for the 21th Century”,* também destaca:

- Isolamento de comunidades rurais;
- Falta de professores qualificados matematicamente;
- Falta de experiência e de recursos para apoiar os métodos modernos de ensino;
- Turmas grandes, normalmente com 60 ou mais alunos;
- Disposição desigual para educar meninos e meninas, por exemplo, gravidez na adolescência, famílias que não podem pagar as taxas escolares de escolas públicas, enviando os meninos e não as meninas à escola;
- Pobreza e desnutrição;
- Trabalho infantil.

2.1 A SEGREGAÇÃO NA HISTÓRIA DA ÁFRICA DO SUL

A história da África do Sul foi marcada pelo regime de segregação racial chamado *Apartheid* (em africâner significa “separação”), que dividia a sociedade sul-africana em brancos e “não brancos”. Essa segregação foi juridicamente implementada entre os anos de 1948 e 1994.

Antes mesmo da colonização da Cidade do Cabo (que viria a se tornar Estado junto com as repúblicas de Orange, Transvaal e Natal, a atual África do Sul) em 1652 pelos holandeses, vale destacar que o continente africano já era explorado. Nos séculos XV e XVI, Portugal mostrou para a Europa que o continente africano possuía uma grande potencialidade: o fornecimento de escravos para a exploração das Américas, não se limitando apenas na busca de ouro ou ao comércio de especiarias.

Após a colonização dos holandeses através da Companhia das índias Orientais Holandesas, no século XVII, os Bôeres (grupo de fazendeiros de origem holandesa) passaram a morar na região da Cidade do Cabo e a escravizar os nativos para trabalhar nos campos e fazendas.

Com a ascensão do imperialismo no século XIX na Europa, o Império Britânico passou a disputar territórios, expulsando os bôeres da região da Cidade do Cabo. Com isso, os bôeres seguiram em direção ao norte da atual África do Sul. Com essa migração, os bôeres formaram as repúblicas independentes de Orange e Transvaal.

A descoberta de ouro e diamantes no território das repúblicas de Orange e Transvaal resultou na 1.ª Guerra dos Bôeres (1880 – 1881), os holandeses e os franceses se uniram para lutar contra o Império Britânico. Os diversos conflitos na região acarretaram na 2.ª Guerra dos Bôeres (1899 – 1902), na qual o Império Britânico saiu vencedor e as Repúblicas de Orange e Transvaal passaram a ser colônias britânicas. Com isso, em 1910 o Império britânico formou a União Sul Africana que foi a junção das repúblicas independentes com os territórios já pertencentes a esse império: Orange, Transvaal, Cabo e Natal. É importante destacar que durante todos esses períodos de guerras e conflitos dos Imperialistas, as populações nativas sofreram muito.

A partir da formação da União Sul-Africana, começaram a ser criadas as leis específicas nesse território. Com o domínio e influência britânica, foram construídos o Partido Reunido Nacional e os partidos de origem *africaner*, sendo excluída a participação política dos "não brancos", o inglês e o holandês (sendo substituído pelo *afrikaans* em 1925) foram reconhecidos como as línguas oficiais e foi estabelecido o sistema parlamentarista,

Ainda em 1910, através do 1.º Ministro Louis Botha os africaners assumiram o governo, foi incluído a lei onde os "não brancos" não poderiam quebrar contratos de trabalhos com os brancos. Vale destacar que, nesse período, a população sul africana era composta por 4 milhões de negros, 500.000 mestiços ou *cloureds*, 150.000 indianos e 1.275.000 brancos. A partir desse momento, começa o processo da implementação das políticas de segregação racial.

Os anos de 1910 e 1948, foram marcados por diversas políticas racistas. De acordo com Braga (2010):

> A República acrescentou novos marcos racistas na política sul-africana. Podemos destacar: o estabelecimento da reserva dos melhores empregos para os brancos; o *native land act*, lei de 1913 sobre as reservas indígenas,

> que restringia o direito de propriedade e permanência dos negros às terras reservadas (uma legislação precursora do *Group Areas* que instituiu as *homelands* no Apartheid); e a lei de zonas urbanas de 1923, que restringia a permanência de negros em zonas específicas dos subúrbios de acordo com as necessidades de sua força de trabalho. (p. 51 e 52).

Liderado por Daniel François Malan, o Partido Nacional, formado pelos partidos de supremacia branca, venceu as eleições em 1948, sendo ele o grande responsável pela oficialização do *Apartheid* que foi um regime de segregação racial jurídico, ou seja, pautado na lei. Antes de Malan, já existiam algumas leis de segregação racial, porém eram criadas e implementadas de forma lenta, com a posse de Malan, houve a aceleração representando a exclusão de direitos civis básicos como liberdade de expressão e locomoção.

Para que os "não brancos" pudessem transitar na área dos brancos para prestar serviços foi criado um cartão de identificação que era obrigatório portar, caso contrário seriam presos.

Segundo o Portal São Francisco[2], as principais leis do *Apartheid* foram:

- Lei da proibição dos casamentos mistos (1948);
- Emenda à lei da imoralidade (1950);
- Lei de registro populacional (1950);
- Lei de supressão ao comunismo (1950);
- Lei de áreas de Agrupamento (1950);
- Lei da Autodeterminação dos Bantus (1951);
- Lei da Reserva de Benefícios Sociais Separados (1953);
- Lei de Educação Bantu (1953);
- Lei de Minas e Trabalho (1956);
- Lei de Promoção do Autogoverno Negro (1958);
- Lei da Cidadania da Pátria Negra (1971).

Devido a política de ocupação de áreas habitadas por negros e um aumento populacional nas *homelands* (bantustões), os negros viviam em condições precárias na economia, saúde e educação.

De acordo com Pereira:

> A segunda unidade tem a ver com a educação. A evolução aqui foi ambivalente. Antes de 1948, a educação negra havia ficado quase que exclusivamente nas mãos das missões. Com a introdução do *Apartheid*, as

[2] Disponível em https://www.portalsaofrancisco.com.br/historia-geral/apartheid

> escolas destinadas aos negros foram completamente desorganizadas e, em qualquer caso, só cobriam uma parte dos alunos em potencial. Cerca de 30% das crianças com idades entre sete e dezessete anos frequentou a escola em 1949, por exemplo. A iniciativa de Verwoerd em promover o que ficou conhecida como Educação Banto teve um efeito duplo. Por um lado, trouxe a educação africana sob o firme controle do Estado. O sistema escolar conscientemente usado para difundir a mensagem do Apartheid. O ethos que permeava a política educacional, pelo menos fora das reservas, era de que o ensino africano deveria ser limitado às habilidades para a manutenção do funcionamento da economia branca, e sua ênfase se dava nas competências básicas aprendidas nos primeiros quatro anos na escola. Por outro lado, o número de pessoas que foram incluídas no sistema educacional aumentou de maneira substancial com a Educação Bantu. (PEREIRA, 2011, p. s/n).

A Educação Bantu era uma prática de exclusão educacional nas escolas públicas e universidades. Tinha como base o não questionamento ou não críticas ao governo. Os profissionais da educação e os alunos deveriam ser obedientes e apoiadores das políticas do estado.

> As universidades para negros tinham um certo grau de autonomia, mas as escolas de formação de professores negros estavam sob controle direto do estado e seus currículos eram baseados na educação do *Apartheid*. Isso conduzia ao fracasso massivo dos estudantes negros nas escolas e ao insucesso dos estudantes negros nas Escolas de Treinamento de Professores Negros. A maioria desses estudantes com fraco desempenho, no entanto, eram autorizados e indicados para ensinar nas escolas dos negros como docentes não qualificados, com o objetivo de dar continuidade à reprodução das desigualdades sociais (NDIMANDE, 2011, p. 42).

Vale destacar que a segregação da educação, segundo a 14° MINIONU[3] – OUA (1981)[4]:

> O entendimento e a concretização da lógica do *Apartheid* devem perpassar por um dos pontos fundamentais, a educação. Esta tem um papel crucial na construção ideológica do indivíduo, que a internaliza, passando então a se mostrar conformado com situação vigente. Sendo um instrumento muito poderoso utilizado pelo governo sul-africano daquela época. (MINIONU, 1981, p. s/n)

Desde 1912 havia uma grande resistência ao *Apartheid* de forma institucional e era liderada pelo Congresso Nacional Africano (ANC), esse partido

---

[3] O MINIONU é um projeto sem fins lucrativos realizado pelo Departamento de Relações Internacionais da PUC Minas que objetiva levar temas internacionais aos alunos do ensino médio. Ele insere-se no conjunto de simulações das Nações Unidas realizadas em todo mundo. É um projeto pedagógico com concepção abrangente de aprendizado. Disponível em: <https://www.pucminas.br/minionu/
Paginas/default.aspx>. Acesso em: 15 nov. 2021.

[4] Organização da Unidade Africana (OUA)

defendia os direitos dos negros e tentava, por meios constitucionais, mudar as injustiças contra os negros.

A partir do massacre de 1960 no bairro de Sharpeville, em Joanesburgo, que deixou 69 mortos e 180 feridos, resultado de uma ação violenta executada pelo governo, o ANC liderado por Nelson Mandela (1918 – 2013), passou a ter uma postura mais radical dentro do partido, formando um grupo de mão armada, praticando sabotagens em estruturas de domínio do Estado como, por exemplo, instalando bombas em prédios do governo, pois segundo Mandela somente as práticas constitucionais e pacíficas não seriam efetivas para a queda do *Apartheid*.

Em 1962 o governo Sul-Africano decretou a independência à comunidade britânica, pois estava sofrendo diversos embargos econômicos e militares e sendo isolado das relações internacionais que foi o resultado da condenação dada pelas Organizações das Nações Unidas (ONU), pautada na Resolução de 1761, sendo contra as práticas racistas que o Estado sul-africano vinha adotando. Mesmo com todo esse isolamento e pressão da comunidade internacional, o Governo aumentou a repressão ao povo africano.

Em 1963, Nelson Mandela foi preso em um presídio de segurança máxima, pois foi considerado traidor da pátria e em 1964 a língua *africâner* foi introduzida de forma obrigatória nas escolas de negros, gerando uma grande revolta e greve dos estudantes de Soweto, em Joanesburgo.

Em 1968, o presidente Frederik Willian de Klerk anuncia o fracasso do *Apartheid*. Em 1990, o parlamento passa a ser aberto aos partidos formados por “não brancos” e Nelson Mandela é solto, após 26 anos preso.

A nova Constituição sul-africana, assinada em 1993 por Mandela e Klerk – até então presidente - pôs fim a dominação política da minoria branca e promoveu as eleições multirraciais.

Em 1994, Nelson Mandela foi eleito, democraticamente, o primeiro presidente negro da África do Sul e foi um marco para o fim do *Apartheid*.

Atualmente, Cyril Matamela Ramaphosa é o sexto presidente (chefe do executivo) da África do Sul (ANC), após a renúncia de seu antecessor, Jacob Zuma em 2017 depois de diversas acusações de corrupção.

Segundo informações no site oficial do governo sul-africano, a África do Sul é uma democracia constitucional com um sistema de governo de três níveis (nacional, provincial e local) e um judiciário independente. Esses três níveis do sistema do governo têm autoridade legislativa e executiva. A Constituição vigente no país é a de 1996, sendo ela a lei suprema do país.

2.2 ASPECTOS EDUCACIONAIS

No que tange aos aspectos escolares da África do Sul, há dois tipos de escolas públicas: as que são totalmente financiadas pelo Estado e as que cobram uma taxa. As escolas particulares correspondem a cerca de 5% das escolas no país. Também estão sendo criadas escolas de baixo custo ou escolas pagas, sendo apoiadas por empresas multinacionais, fundos de ações, empresas nacionais, investidores privados, entre outros.

Atualmente, há 437.449 professores atuantes desde o nível básico ao FET, distribuídos em 25.154 escolas que atendem os 12.819.542 estudantes, nos 75 distritos das 9 províncias sul-africanas, tendo em média 30 alunos por professor.

Segundo informações retiradas do site oficial do Departamento de Educação Básica (DBE), para se tornar um professor, é necessário ter um diploma de bacharel em educação (B. Ed.) de quatro anos ou um diploma de bacharel de três ou quatro anos e um certificado de pós-graduação em educação (PGCE) de um ano. Após, deverá escolher o nível escolar que deseja se especializar, dentre elas são: básico, intermediário, sênior ou educação e treinamento (FET).

Para os níveis Intermediários, Sênior e FET, o futuro profissional da educação terá que escolher a disciplina na qual deseja se especializar, destas são incluídas as áreas de idiomas, matemática, ciências, tecnologia, negócios e gestão e humanidades.

Segundo os dados disponíveis no site IBGE Países, vale destacar que a taxa de alfabetização das pessoas com 15 anos ou mais (2017) é de 87,0467%, a taxa de conclusão da última série do Ensino Médio é de 93% e a taxa bruta de matrículas para todos os níveis de ensino (2018) é de 80,04815%.

Ainda, segundo dados disponíveis no site IBGE Países, o Governo sul-africano investe 6,2% do PIB (Produto Interno Bruto) na educação.

2.3 COMPARATIVO ENTRE OS SISTEMAS EDUCACIONAIS SUL-AFRICANO E BRASILEIRO

Para realizar um breve comparativo entre os sistemas educacionais da África do Sul e brasileiro, serão analisados os seguintes documentos: as Diretrizes

Curriculares e Políticas de Avaliação de Matemática do 10º à 12º série[5] escolar (*Curriculum and Assessment Policy Statement Grades 10 – 12 Mathematics)* e a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) do Ensino Médio, respectivamente.

As Diretrizes Curriculares e Políticas de Avaliação de Matemática (CAPS) do 10º ao 12º ano escolar está em vigor desde 2012 e trata-se de um documento que orienta o planejamento escolar das instituições de ensino básico sul-africano, contribuindo para a organização, o desenvolvimento e a avaliação das propostas pedagógicas. Já a BNCC está em vigor desde 2018 e é o documento que estabelece quais são as aprendizagens essenciais que todo estudante deve desenvolver, tendo como principal objetivo ajudar e promover a qualidade e equidade no ensino, seja ele público ou particular além de ajudar no desenvolvimento dos currículos educacionais de todos os estados e municípios brasileiros.

Em matemática, a BNCC tem como foco a construção de uma visão integrada da matemática, aplicada à realidade do aluno, levando as vivências e o cotidiano do discente de Ensino Médio como referência na construção do conhecimento. As competências específicas de matemática e suas tecnologias para o Ensino Médio são:

> 1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, ou ainda questões econômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a consolidar uma formação científica geral. 2. Articular conhecimentos matemáticos ao propor e/ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas de urgência social, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, recorrendo a conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática. 3. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos, em seus campos – Aritmética, Álgebra, Grandezas e Medidas, Geometria, Probabilidade e Estatística –, para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente. 4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e fluidez, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático. 5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como

[5] 10º à 12º série escolar sul-africano corresponde ao Ensino Médio brasileiro.
10° série – estudantes com idade entre 15 e 16 anos.
11° série – estudantes com idade entre 16 e 17 anos.
12° série – estudantes com idade entre 17 e 18 anos.

> observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (BNCC, 2018, p. 523)

Para as CAPS, do 10º ao 12º ano escolar em matemática, os objetivos específicos a serem desenvolvidos nos alunos sul-africanos são:

> 1. Desenvolver fluência em habilidades de computação sem depender do uso de calculadoras. 2. A modelagem matemática é um importante ponto focal do currículo. Problemas da vida real devem ser incorporados em todos os níveis sempre que apropriado. Os exemplos usados devem ser realistas e não inventados. Problemas contextuais devem incluir questões relativas a questões de saúde, sociais, econômicas, culturais, científicas, políticas e ambientais quando possível. 3. Para fornecer a oportunidade de desenvolver nos alunos a capacidade de ser metódico, generalizar, fazer conjecturas e tentar justificá-los ou prová-los. 4. Ser capaz de compreender e trabalhar com o sistema numérico. 5. Mostrar a Matemática como uma criação humana, incluindo a história da Matemática. 6. Promover a acessibilidade do conteúdo matemático a todos os alunos. Isso poderá ser alcançado atendendo aos alunos com necessidades diferentes. 7. Desenvolver habilidades de resolução de problemas e cognitivas. O ensino não deve ser limitado a "como", mas sim apresentar o "quando" e o "porquê" dos tipos de problemas. Procedimentos de aprendizagem e provas com um bom entendimento de porque eles são importantes deixar os alunos bem equipados para usar seu conhecimento mais tarde na vida. 8. Preparar os alunos para educação e treinamento adicionais, bem como para o mundo do trabalho (CAPS, 2011, p. 8).

Ambos têm como objetivo desenvolver os problemas matemáticos em diferentes contextos sociais, econômicos e levando como referência a vivência e a realidade dos alunos. Outros objetivos em comum é a preparação dos alunos para o mercado de trabalho e para desenvolver a capacidade de estabelecer conjecturas e provas matemáticas, quando possível.

Os dois documentos analisados estão organizados de formas diferentes, a BNCC organiza o componente curricular de matemática e suas tecnologias em cinco competências específicas e dentro de cada competência são distribuídas as habilidades a serem desenvolvidas em sala durante todo o ensino médio, não especificando quais conteúdos serão trabalhados em cada ano. Já as Diretrizes Curriculares sul-africana, em matemática, são organizadas por tópicos (áreas de conhecimento) e dentro de cada tópico os critérios a serem trabalhados em cada série.

2.4 GRADE CURRICULAR DE MATEMÁTICA NAS SÉRIES 10, 11 E 12

As Diretrizes Curriculares e Políticas de Avaliação de Matemática do 10º ao 12º ano escolar estão divididas em quatro seções. A primeira consiste na Introdução das Diretrizes Curriculares para a composição curricular de Matemática das séries 10, 11 e 12, em que se estipula a quantidade de horas mínimas a serem cumpridas, sendo 4,5 horas semanais. Na segunda seção, é feita uma Introdução à Matemática, são abordados os objetivos e as habilidades específicas, as áreas de conhecimento e a orientação sobre a quantidade de tempo necessária para trabalhar adequadamente cada conteúdo dentro das áreas de conhecimento. Na terceira seção, é desenvolvida uma visão geral dos prazos e do planejamento anual de ensino, vale destacar que esse tópico será fundamental para este trabalho, pois é nele que está especificado o Currículo de Matemática. Já na quarta seção, é tratada a Avaliação em Matemática, o que pode ser tanto informal/diária quanto formal, trazendo informações ao professor no momento da análise dos resultados dos alunos.

2.4.1 Grade curricular – 10.ª série

TABELA 1 – CRITÉRIOS DE APRENDIZAGEM: 10.ª SÉRIE

TÓPICOS	CRITÉRIOS DE APRENDIZAGEM
Funções	Trabalhar a relação entre variáveis e termos numérico, gráfico, verbal e representações simbólicas de funções e converter de forma rápida essas representações (tabelas, gráficos, palavras e fórmulas). Incluindo as funções polinomiais lineares e quadráticas, funções exponenciais, funções racionais e funções trigonométricas.
	Construir gráficos, inicialmente por meio de plotagem ponto a ponto, utilizando tecnologia disponível, para construir e testar conjecturas e, portanto, generalizar o efeito do parâmetro que resulta em um deslocamento vertical e no alongamento vertical e/ou um reflexo sobre o eixo x.
	Resolver problemas envolvendo funções dadas e gráficos.
Padrões numéricos, sequências e séries	Investigar padrões numéricos em que a diferença entre seus termos gera um novo padrão, o que implica que seu termo geral é linear.
Finanças, crescimento e queda	Usar fórmulas de crescimento simples e compostas $A = P(l +)$ e $A = P(1 + i)^n$ para resolver problemas (incluindo juros, locação, inflação, crescimento populacional e outros problemas da vida real).
	As implicações das taxas de câmbio flutuantes.
Álgebra	Compreender que os números reais podem ser irracionais ou racionais.
	Simplificar as expressões usando as leis dos expoentes para expoentes racionais. Dada uma raíz simples, estabelecer entre quais dois números inteiros está localizada. Arredondar os números reais para um grau apropriado de precisão (para um determinado número de dígitos decimais).
	Manipular as expressões algébricas:

	- multiplicar um binômio por um trinômio; - fatoração de trinômios; - fatorar a diferença e as somas de dois cubos; - fatoração por agrupamento em pares; e - simplificar, somar e subtrair frações algébricas com denominadores cúbicos (limitado à soma e diferença de cubos).
	Resolver: - equações lineares; - equações quadráticas; - equações literais (mudando o assunto de uma fórmula); - equações exponenciais; - desigualdades lineares; - sistema de equações lineares; e - problemas com variáveis.
Probabilidade	Comparar a probabilidade relativa de um resultado experimental com o teórico. Resolver problemas envolvendo probabilidade com o auxílio do Diagrama de Venn. Eventos mutuamente exclusivos e eventos complementares. A identidade para quaisquer dois eventos A e B: $P(AouB) = P(A) + (B) - P(AeB)$
Geometria Euclidiana e medidas	Revisar os resultados básicos estabelecidos em séries anteriores. Investigar os segmentos de reta que unem os pontos médios de dois lados de um triângulo. Propriedades dos quadriláteros especiais.
	Resolver problemas envolvendo volume e área de superfície dos sólidos estudados em anos anteriores, bem como esferas, pirâmides, cones e a união desses objetos.
Trigonometria	Definições das razões trigonométricas $sen\theta$, $cos\theta$ e $tan\theta$ em triângulos retângulos. Estender as definições de $sen\theta$, $cos\theta$ e $tan\theta$ para $0° \leq \theta \leq 360°$. Relacionar e usar os valores das razões trigonométricas (sem usar uma calculadora para os ângulos especiais $\theta \in \{0°; 30°; 45°; 60°; 90°\}$) Definir e relacionar as razões trigonométricas.
Geometria Analítica	Representar figuras geométricas em um sistema de coordenadas cartesiano, relacionar e aplicar, para quaisquer dois pontos $(x_1; y_1)$ e $(x_2; y_2)$, uma fórmula para calcular: - a distância entre os dois pontos; - o gradiente do segmento que une os pontos; - condições para retas paralelas e perpendiculares; e - as coordenadas do ponto médio do segmento que une os pontos.
Estatística	Coletar, organizar e interpretar dados numéricos variados para determinar: - medidas de tendência central; - resumo de cinco números (cinco *percentis*); - diagramas de caixa (*box-plot*); e - medidas de dispersão.

FONTE: *DEPARTAMENT OF BASIC EDUCATION* (ADAPTADO – TRADUÇÃO NOSSA)

2.4.2 Grade curricular – 11.ª série.

TABELA 2 – CRITÉRIOS DE APRENDIZAGEM: 11.ª SÉRIE

TÓPICOS	CRITÉRIOS DE APRENDIZAGEM
Função	Retomar a relação entre variáveis e termos numéricos, gráficos, verbais e representações simbólicas de funções e converter de forma rápida essas representações (tabelas, gráficos, palavras e fórmulas). Incluindo as funções polinomiais lineares e quadráticas, funções exponenciais, funções racionais e funções trigonométricas.
	Gerar quantos gráficos forem necessários, inicialmente por meio de plotagem ponto a ponto, utilizando alguma tecnologia disponível, para fazer e testar conjecturas e, portanto, generalizar o efeito do parâmetro que resulta em uma mudança vertical e no alongamento horizontal e/ou um reflexo sobre o eixo y.
	Resolver problemas envolvendo as funções prescritas. Gradiente médio entre dois pontos.
Padrões numéricos e séries	Investigar padrões numéricos em que a diferença entre seus termos gera um novo padrão, o que implica que seu termo geral é quadrático.
Finanças, crescimento e queda	Usar a fórmula de queda simples e composta $A = P(1 +)$ e $A = P(1 - i)^n$ resolvendo problemas (incluindo diminuição linear e sobre um saldo redutor). Relacionar com o estudo das funções.
	O efeito de diferentes períodos de crescimento e decadência composta (incluindo taxas de juros efetivas e nominais).
Álgebra	Observar que existem outros números além dos números reais, os chamados números não reais. É possível elevar ao quadrado certos números não reais e obter números reais negativos como respostas. Raízes naturais.
	Aplicar as leis dos expoentes a expressões envolvendo expoentes racionais. Somar, subtrair, multiplicar e dividir raízes simples.
	Revisar a fatoração.
	Resolver: - equações quadráticas; - inequações quadráticas com uma variável e interpretar a solução graficamente; e - equações com duas incógnitas, uma das quais é linear e a outra quadrática, algebricamente ou graficamente.
Probabilidade	Eventos dependentes e independentes. Diagramas de Venn ou tabelas de contingência e diagramas em árvore auxiliando a resolução de problemas envolvendo probabilidades (onde os eventos não são necessariamente independentes).
Geometria Euclidiana e medidas	Investigar e provar teoremas da geometria em círculos assumindo resultados das séries anteriores, juntamente com resultados na relação entre a tangente e o raio do círculo. Resolver problemas envolvendo geometria no círculo, fornecendo razões quando necessário. *Prove riders*[6]
	Revisar os conteúdos da 10ª série.
Trigonometria	Deduzir e usar as identidades: $tan\Theta = \frac{sin\Theta}{cos\Theta}$ e $sin^2\Theta + cos^2\Theta = 1$. Derivar e reduzir fórmulas. Determinar a solução geral e/ou soluções específicas de equações trigonométricas. Estabelecer as regras de seno, cosseno e área.
	Resolver problemas em duas dimensões.
Geometria Analítica	Usar um sistema de coordenadas cartesianas para deduzir e aplicar: - a equação de uma reta através de dois pontos dados; - a equação de uma reta que passa por um ponto e é paralela ou perpendicular a uma determinada reta; e - a inclinação de uma reta.
Estatística	Representar medidas de tendência central e dispersão em dados numéricos variados:

[6] Em Educação Matemática *riders* refere-se a problemas não rotineiros.

	- usando ogivas; e - calcular a variância e o desvio padrão de conjuntos de dados manualmente (para pequenos conjuntos de dados), usando calculadoras (para conjuntos maiores de dados) e representar os resultados graficamente. (b) Representar dados distorcidos em diagramas de *box-plot* e polígonos de frequência. Identificar os dados atípicos.

FONTE: *DEPARTAMENT OF BASIC EDUCATION* (ADAPTADO – TRADUÇÃO NOSSA)

2.4.3 Grade curricular – 12.ª série.

TABELA 3 - CRITÉRIOS DE APRENDIZAGEM: 12.ª SÉRIE

TÓPICOS	CRITÉRIOS DE APRENDIZAGEM
Função	Apresentar uma definição formal de uma função e continuar o trabalho da 11ª série na relação entre variáveis e termos numérico, gráfico, verbal e representações simbólicas de funções e converter de forma rápida essas representações (tabelas, gráficos, palavras e fórmulas). Incluir funções polinomiais lineares, quadráticas e algumas funções polinomiais cúbicas, funções exponenciais e logarítmicas e algumas funções racionais.
	Encontrar funções inversas e compreender que algumas dessas somente possuem inversa para determinado intervalo em seu domínio.
	Resolver problemas envolvendo as funções e gráficos trabalhados (incluindo a função logarítmica).
Padrões numéricos, sequências e séries	Calcular o valor de n nas fórmulas $A = P(1 + i)^n$ e $A = P(1 - i)^n$. Aplicar o conhecimento de séries geométricas para resolver problemas de anuidade e reembolso de títulos.
	Analisar criticamente as diferentes opções de empréstimo
Álgebra	Demonstrar compreensão da definição de um logaritmo e de quaisquer leis necessárias para resolver problemas da vida real.
	- Observar e entender os Teoremas do Resto para polinômios até do terceiro grau. - Fatorar polinômios de terceiro grau (incluindo exemplos que requerem o Teorema do Resto).
Cálculo Diferencial	Compreender intuitivamente o conceito de limite. Primeiro princípio do cálculo diferencial. Uso das regras da derivada. As equações das tangentes aos gráficos. A habilidade de esboçar gráficos de funções cúbicas. Problemas práticos envolvendo otimização e taxas de mudança (incluindo o cálculo de movimento).
Probabilidade	Generalizar o Princípio Fundamental da Contagem. Resolver problemas de probabilidade usando o Princípio Fundamental da Contagem.
Geometria Euclidiana e medidas	Revisar os conteúdos da série anterior (9ª série) sobre as condições necessárias e suficientes para que polígonos sejam semelhantes. Provar (aceitar os resultados estabelecidos nas séries anteriores): - que uma linha desenhada paralela a um lado de um triângulo divide os outros dois lados proporcionalmente (e o Teorema do Ponto Médio como um caso especial deste teorema); - que os triângulos equiangulares são semelhantes; - que triângulos com lados proporcionais são semelhantes; - o Teorema de Pitágoras por semelhança de triângulos; e - problemas não usuais.
Trigonometria	Demonstrar e utilizar fórmulas da soma, subtração e duplicação de arcos.
	Resolver identidades trigonométricas.
Geometria analítica	Usar um sistema de coordenadas cartesianas bidimensional para deduzir e aplicar: - a equação de um círculo (qualquer centro); e - a equação de uma tangente a um círculo em um determinado ponto do círculo.
Estatística	(a) Representar dados numéricos bivariados em um gráfico e sugerir intuitivamente e por investigação simples se é linear, quadrático ou se a função exponencial se ajustaria melhor aos dados. (b) Usar a calculadora para calcular a linha de regressão que melhor se ajusta a um determinado conjunto de dados numéricos bivariados. (c) Usar a calculadora para calcular a correlação de um coeficiente e de um conjunto de dados numéricos bivariados e fazer deduções relevantes.

FONTE: *DEPARTAMENT OF BASIC EDUCATION* (ADAPTADO-TRADUÇÃO NOSSA)

3 AIMSSEC – PROGRAMA EDUCACIONAL

Segundo informações fornecidas pelo *site* e pela página do *Facebook*[7] oficial, o *African Institute for Mathematical Sciences* (AIMSSEC) é uma organização sem fins lucrativos na área da Educação, com sede na Cidade do Cabo, África do Sul. Esse projeto tem como objetivo melhorar o conhecimento da matemática e capacitar professores de comunidades rurais e municipais desfavorecidas da África do Sul, através de cursos e recursos gratuitos. Sendo assim, O AIMSSEC é formado por uma equipe de voluntários (acadêmicos, pesquisadores, consultores e professores) de todo o mundo que trabalha para capacitar professores sul-africanos para melhorar o ensino da matemática.

Sobre a AIMS *South Africa*, de acordo com informações no site oficial aims.ac.za:

> O Instituto Africano de Ciências Matemáticas (AIMS) é a primeira rede de centros de excelência em ciências matemáticas da África. Capacitamos a juventude do continente a moldar o futuro do continente por meio da educação em Ciência, Tecnologia, Engenharia e Matemática (STEM) - treinando a próxima geração de líderes da África. A AIMS South África é um dos centros de excelência para treinamento, pesquisa e engajamento público na Cidade do Cabo, África do Sul. A AIMS South Africa foi estabelecida em 2003 como um projeto de parceria das seguintes 6 universidades: Cambridge, Cape Town, Oxford, Paris Sud XI, Stellenbosch e Western Cape (AIMS, 2021).

A AIMSSEC foi fundada em 2003 pela Sra. Toni Beardon. Durante mais de 50 anos de carreira na área de educação matemática, Beardon sempre teve como objetivo ajudar e fazer com que a comunidade escolar apreciasse e gostasse da beleza e da utilidade da matemática. Atualmente, Beardon não exerce nenhum cargo de liderança, mas continua sendo voluntária.

Em abril de 2012, a AIMSSEC recebeu o Prêmio UNESCO – Hamdan Bin Rashid Al-Maktoum de Melhores Práticas e Desempenho no Aprimoramento da Eficácia de Professores. Segundo informações no site da UNESCO, esse prêmio é concedido a cada dois anos a projetos que visam melhorar a qualidade do ensino e aprendizagem em todo o mundo, priorizando os países em desenvolvimento e comunidades mais vulneráveis e marginalizadas. Esse prêmio ajudou a AIMSSEC a expandir o trabalho em outras AIMS no continente Africano: AIMS Camarões, AIMS Tanzânia e AIMS Ruanda.

---

7 Disponível em: <https://www.facebook.com/aimssecsa> Acesso em 20 nov. 2021.

3.1 PROGRAMA DE FORMAÇÃO CONTINUADA AOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Atualmente, segundo informações do site oficial da AIMSSEC, os projetos e programas que eles desenvolvem são criados para abordar as lacunas na educação matemática nas escolas mais vulneráveis sul-africanas, por meio da formação continuada dos professores. Os cursos são ministrados por uma equipe internacional de especialistas em educação matemática.

O programa de formação continuada aos professores de matemática tem como objetivo, segundo informações no site:

- Capacitar professores de matemática por meio de cursos de aperfeiçoamento profissional;
- Estabelecer uma rede de professores em todo o país para apoio, compartilhamento de ideias e recursos;
- Distribuir recursos de ensino e aprendizagem;
- Criar uma comunidade de matemática escolar interativa; e
- Incentivar um estudo mais profundo da matemática e da educação matemática.

Para atingir os objetivos acima, a AIMSSEC criou uma sequência de sete cursos (*seven-course sequence*) e o curso de *Mathematical Thinking* (MT) com duração de 3 meses, o qual foi aprovado pelo *South African Council for Educators (SACE)*, ambos com o objetivo de formar professores para serem líderes da disciplina de matemática.

A AIMSSEC salienta que:

> Estes cursos destinam-se à maioria dos professores de matemática subqualificados matematicamente, preparando-os para serem professores, chefes de departamentos e orientadores de disciplinas mais eficazes. Para desenvolver professores especialistas do programa de desenvolvimento profissional contínuo na África do Sul, AIMSSEC segue uma abordagem de aprendizagem combinada que inclui: módulos residenciais, ensino à distância, fóruns online, exames de fim de ano e sessões de quadro interativo. O primeiro livro do AIMSSEC, Pensamento matemático na sala de aula do ensino médio, foi publicado pela *Cambridge University Press* (CUP) em 2016, dando aos educadores acesso a recursos para o

desenvolvimento profissional e prática em sala de aula. Este livro é o primeiro de uma série.

Além disso, o instituto oferece treinamentos intensivos em Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC) como parte do Curso de MT, abordando habilidades no uso de *e-mail*, *Microsoft Word, Excel, PowerPoint*, Geogebra e o uso da internet.

A *AIMS South Africa* oferece um programa de mestrado em Ciências Matemáticas com duração de um ano, com foco na capacitação de acadêmicos, pesquisadores e empresários africanos na área de ciências, tecnologia, engenharia e matemática.

Em 2018, foi criado o Centro de Pesquisa *AIMS South Africa* com a missão de coordenar e desenvolver pesquisas nas ciências matemáticas, deixando contribuições e avanços na ciência e nas universidades africanas.

3.1.1 Sequência de sete cursos

Segundo informações disponíveis no site oficial da AIMSSEC, a sequência de sete cursos tem como objetivo a capacitação de professores de matemática. Todos os cursos foram criados para desenvolver as habilidades de conhecimento pedagógico, conhecimento do conteúdo e tecnologia. Cada curso tem um período presencial seguido de acompanhamento remoto.

No período presencial (7 ou 9 dias), os professores estudam assuntos que envolvem a matemática, a pedagogia e a tecnologia. Já o período remoto (3 ou 6 meses), os docentes aplicam nas escolas que lecionam os conhecimentos adquiridos no curso.

Os sete cursos são sequenciados da seguinte forma: Resolução de problemas de pensamento matemático & no ensino e aprendizagem de matemática; Linguagem e comunicação de conceitos matemáticos no ensino e aprendizagem da matemática; Diferenciação e inclusão no ensino e aprendizagem da matemática; Ensino de matemática para construir habilidades para o século 21; Desenvolvimento conceitual & planejamento para transições na educação; Pesquisa-ação Pesquisa de ação; e Formação de futuros líderes em educação matemática.

Após a conclusão de cada curso, o professor recebe um certificado e pontos de desenvolvimento profissional pela SACE (Conselho Sul-africano para Educadores).

Abaixo, está disposta a tradução da descrição de cada curso disponível no site da AIMSSEC.

a) ***Mathematical Thinking problem solving & it in teaching and learning mathematics*** (Resolução de problemas de pensamento matemático & no ensino e aprendizagem de matemática).

Duração: 9 dias (presencial) e 3 meses (acompanhamento remoto).

Descrição do curso: Curso de desenvolvimento profissional ministrado 32 vezes desde 2003 para 2.000 professores de todas as províncias da África do Sul e na África Oriental. Os professores são organizados em três grupos: primário, secundário, inferior e superior.

b) ***Language and communication of mathematical concepts in teaching and learning mathematics*** (Linguagem e comunicação de conceitos matemáticos no ensino e aprendizagem da matemática)

Duração: 7 dias (presencial) e 3 meses (acompanhamento remoto).

Descrição do curso: Desenvolvimento profissional com foco no ensino eficaz em salas de aula onde a língua materna e a língua de instrução são diferentes para melhorar a compreensão dos conceitos matemáticos e as competências de comunicação (oral e escrita) e trabalho em equipe.

c) ***Differentiation and inclusion in teaching and learning mathematics*** (Diferenciação e inclusão no ensino e aprendizagem da matemática)

Duração: 7 dias (presencial) e 3 meses (acompanhamento remoto).

Descrição do curso: desenvolvimento profissional em avaliação formal e compreensão de como atender às necessidades de aprendizagem de alunos que não possuem dificuldades de aprendizagem, bem como de alunos com dificuldades de aprendizagem e necessidades especiais. Introdução básica às leis relevantes do país.

d) ***Teaching mathematics to build skills for 21ª century*** (Ensino da matemática para construir habilidades para o século 21)

Duração: 7 dias (presencial) e 3 meses (acompanhamento remoto).

Descrição do curso: desenvolvimento profissional colaborativo (DPC) na aprendizagem e ensino baseados na investigação para construir habilidades e competências necessárias para o século 21.

e) ***Conceptual development & planning for transitions in education*** (Desenvolvimento conceitual & planejamento para transições na educação)

Duração: 7 dias (presencial) e 3 meses (acompanhamento remoto).

Descrição do curso: Curso com foco na progressão, desenvolvimento de conceitos e atendimento às necessidades dos alunos em sua próxima etapa na educação (mudança de série).

f) ***Action research*** (Pesquisa-ação)

Duração de 7 dias (presencial) e 6 meses (acompanhamento remoto).

Descrição do curso: os professores são apresentados à metodologia de pesquisa e planejam um projeto de pesquisa-ação de 6 meses para melhorar alguns aspectos de seu ensino e escrevem uma mini tese.

g) ***Training future leaders in mathematics education*** (Formação de futuros líderes em educação matemática)

Duração de 7 dias (presencial) e 6 meses (acompanhamento remoto).

Descrição do curso: concentra-se na prática informada de pesquisa e no desenvolvimento profissional de professores líderes e consultores de disciplinas. Os alunos devem ser Assistentes de Ensino e lecionar no curso de MT.

3.1.2 Curso *Mathematical Thinking* (MT)

O Curso de MT é um curso intensivo presencial com duração de 10 dias para professores sul-africanos em exercício. Os docentes recebem materiais adaptados para o currículo sul-africano. Após o término do curso de 10 dias, os professores aplicam em sala de aula o conhecimento adquirido no curso durante os três meses seguintes. Esse curso tem como objetivo garantir e ampliar o conhecimento de conteúdo matemático e desenvolver percepções pedagógicas que conduzam ao ensino baseado em investigação (*Mathematical Thining Course*, p. 1).

Após a conclusão do curso, o docente recebe o certificado e 20 pontos de desenvolvimento profissional pela SACE.

3.2 REDE AIMINGHIGH

Segundo informações no site oficial, a AimingHigh é uma rede de professores que conecta a comunidade internacional da AIMSSEC com os professores da educação básica. Por meio dessa rede, os educadores podem se reunir para obter ajuda, discutir ideias, preocupações e compartilhar informações com outros profissionais. Para a AimingHigh, a eficácia no ensino da matemática se baseia em um forte conhecimento do assunto, compreensão de como os alunos aprendem matemática e ter habilidade e a confiança para aplicar o conhecimento em sala.

As atividades disponíveis no site da *AimingHigh* são criadas para desenvolver, no aluno, o pensamento matemático. Em todas as atividades são fornecidas as soluções (Notas para professores), para que o professor se concentre apenas na aplicação da atividade, pois a ideia é que o ensino fique centrado no aluno e não no professor.

No fórum da AimingHigh, os professores podem compartilhar ideias, sugestões e ajudar outros professores a planejar aulas para que sejam bem-sucedidas e motivadoras.

4 DAS ATIVIDADES ELABORADAS PELA AIMMSEC

Para a AIMSSEC, a aprendizagem é formada através da descoberta, compreensão, discussão, colaboração, desafios e do pensamento matemático[8], não apenas das práticas mecânicas[9].

Houve uma busca nos sites oficiais da AIMS acerca da fundamentação teórica e quais autores as instituições parceiras se pautam para criar e desenvolver as atividades, porém sem êxito. Como já dito, a AIMSSEC é um instituto formado com parceria de seis universidade, dentre elas duas inglesas (Cambridge e Oxford). A ausência de fundamentação teórica explícita em materiais de formação ingleses é destacada também por Rolkouski (2019), no estudo da *Maths Hubs*[10], o qual expõe que os materiais de formação ingleses não possuem referência bibliográfica, não é possível compreender a origem exata das ideias que embasam o programa.

4.1 DA SELEÇÃO DAS ATIVIDADES

Todas as atividades selecionadas para compor este trabalho foram retiradas do site da Rede *AimingHigh* (no tópico "*Lesson Activities*") e os conteúdos escolhidos foram Geometrias, Grandezas e Medidas.

Foram escolhidas 10 fichas de atividades dentro dos conteúdos estruturantes mencionados acima. A filtragem das fichas foi realizada da seguinte forma:

- Primeiramente, foram selecionadas todas as fichas que envolviam os conteúdos estruturantes de Geometria, Grandezas e Medidas de todos os níveis (4ª a 12ª série). No total, foram encontradas 130 atividades.
- Depois, definimos que, para este trabalho, serão escolhidas as atividades que podem ser aplicados para a 10ª à 12ª série, que é equivalente ao ensino médio brasileiro. A partir dessa filtragem, foram encontradas 90 atividades.

---

8 Na tentativa de compreender o embasamento teórico, adiante, discorreremos sobre o pensamento matemático na perspectiva de autores brasileiros e ingleses.

9 Informação disponível em <https://pa.linkedin.com/company/aimssecsa>.

10 O *Maths Hubs Program* desenvolvido na Inglaterra é coordenado pela NCETM que tem como objetivo auxiliar o desenvolvimento profissional de professores de matemática baseado no conceito *Teaching for Mastery*. Para melhor entendimento desse programa, sugere-se a leitura: Rolkouski, E. Diálogos com uma política de formação de professores que ensinam matemática na Inglaterra: O caso do Math Hubs. **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 14, n. 1, p. 1-18, 2019.

- Destas 90 fichas, foram escolhidas 10 para fazer a tradução e interpretação para o português. Todas as fichas possuem notas para o professor[11], no entanto, para que o trabalho não se tornasse excessivamente extenso, traduzimos apenas as notas de quatro dessas fichas por questão de espaço.

4.1.1 Fichas de atividades

Todas as atividades e exercícios elaborados pela comunidade da AIMSSEC, publicados na rede *AimingHigh,* têm como objetivo desenvolver o pensamento matemático nos alunos.

Além de serem publicadas no site da *AimingHigh*, as atividades são divulgadas na página oficial da AIMSSEC no *Facebook*[12]. Qualquer educador, com acesso à internet, pode acessar os materiais dos exercícios desenvolvidos pela AIMSSEC, não sendo necessário cadastros e afins.

As atividades são postadas no site da *AimingHigh* constantemente. Até o presente momento, há pouco mais de 390 atividades publicadas, envolvendo os conteúdos de Geometria, Álgebra, Probabilidade, Porcentagem, Gráficos, Aritmética, Números Complexos, etc.; para diversos níveis de escolarização, desde a 6.ª a 12.ª série sul-africana.

As dez fichas selecionadas e traduzidas nesta pesquisa, desenvolvidas pela Rede *AimingHigh*, são:

a) Com as notas para o professor:

Semelhando Pitágoras, **Beijando Círculos, Pipa no Quadrado e Grande Pirâmide**

b) Sem as notas para o professor: No Máximo, Não Acrescenta, Dobrando o Triângulo, Bondinho, Razão Surpresa, e Cíclico.

---

[11] No item 4.1.2 será abordado sobre a “Notas para o Professor”.
[12] Acesso por meio do link: <https://www.facebook.com/aimssecsa>.

4.1.2 Notas para o professor

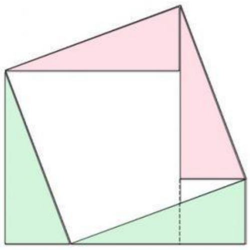
Em todas as atividades desenvolvidas e compartilhadas pela Rede *AimingHigh* são disponibilizados materiais de apoio ao professor. Dentre esses materiais, está disponível o documento “Notas para o professor”. Este arquivo, de modo geral, contém:

- O exercício apresentado;
- Dicas: espaço destinado a dicas simples de como conduzir o raciocínio para a solução do problema;
- Depois: espaço destinado a dicas mais elaboradas para a condução da solução da atividade;
- Notas para o professor: espaço destinado à solução e ao aprofundamento da atividade;
- Avaliação diagnóstica: exercício para ser aplicado em aula para identificar se o aluno compreendeu o conceito da atividade;
- Por que fazer essa atividade?;
- Objetivos de aprendizagem;
- Competências gerais;
- Sugestões de ensino: são sugestões de sequências de como o docente pode aplicar e conduzir a atividade em sala;
- Perguntas chaves: são perguntas coringas para auxiliar e conduzir o entendimento do aluno sobre a atividade.
- Acompanhamento: espaço destinado a atividades já publicadas na *AimingHigh* que possuem alguma similaridade com a atividade proposta.

Neste trabalho, foram selecionadas, traduzidas e interpretadas as notas correspondentes a quatro temas. Estas notas auxiliam na preparação da aula com dicas para melhor conduzir o desenvolvimento do pensamento matemático no aluno. Foram selecionadas as notas para as seguintes fichas: Semelhando Pitágoras, Beijando Círculos, Pipa no Quadrado e Grande Pirâmide.

a) Ficha de atividade “Semelhando Pitágoras” e “Notas para o professor”.

SEMELHANDO PITÁGORAS



Existem centenas de provas do Teorema de Pitágoras.

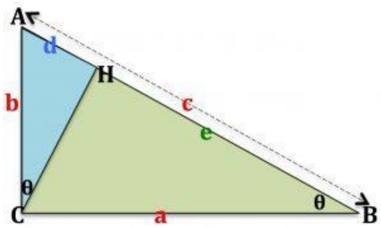
Este diagrama mostra uma prova.

Olhe com atenção. Você pode ver três quadrados?

Supondo que sejam quadrados, você pode provar que quatro dos triângulos são congruentes?

Agora, você pode escrever e explicar uma prova do Teorema de Pitágoras?

A figura ao lado mostra uma prova bem conhecida usando triângulos semelhantes.



Ângulo ACB é um ângulo reto e CH é perpendicular em AB.

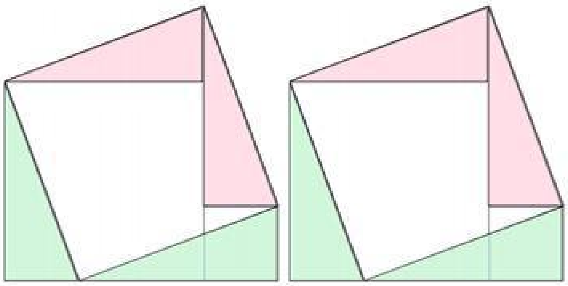
Explique por que os dois ângulos marcados θ devem ser iguais.

Explique por que $b^2 = dc$ (1).

Explique por que $a^2 = ec$ (2).

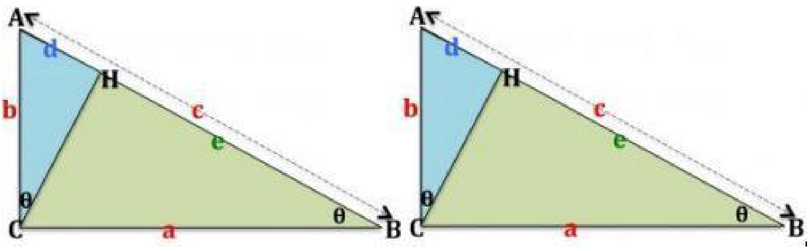
Utilize as equações (1) e (2) para dar uma prova do Teorema de Pitágoras.

<u>Notas ao professor para a ficha de atividade “Semelhando Pitágoras”</u>

Dica
Faça duas cópias da figura abaixo.  Corte cada figura em 6 pedaços. Compare os triângulos. O que você percebe? Coloque o triângulo rosa e as peças brancas juntas para montar um quadrado. O que você observa sobre o quadrado? Coloque os triângulos verdes e as peças brancas juntas e faça dois quadrados. O que você

observa sobre o quadrado? O que você pode deduzir a partir desta atividade?

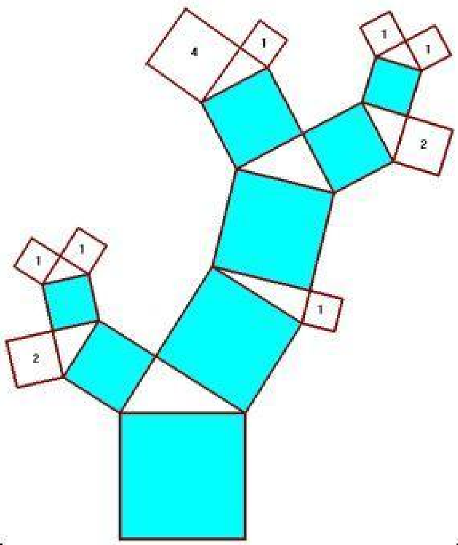
Prova da Semelhança de Triângulos



Recorte as duas figuras acima. Corte a primeira figura em dois triângulos. Coloque os triângulos um sobre o outro e verifique que os todos os ângulos dos três triângulos se correspondem e, consequentemente, os triângulos são semelhantes. O triângulo ABC é uma ampliação de cada um dos triângulos menores. Qual é a razão entre eles? O que você pode dizer sobre o comprimento de *e*? O que você pode dizer adicionando as medidas de *d* e *e*?

Depois

<u>Árvore pitagórica</u>



Todos os triângulos da árvore são retângulos. Recorte as 24 peças.

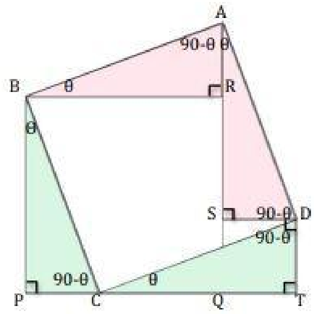
Você pode reconstruir a árvore?

Trabalhe com as áreas das peças em azul.

Desenhe sua própria árvore pitagórica.

Notas para o Professor

<u>Solução</u>

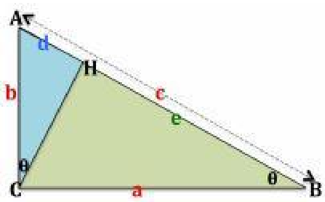


Como ABCD, RBPQ e DSQT são quadrados, segue que os triângulos ABR, DAS, DCT e CBP têm ângulos correspondentes iguais a 90°-ϴ, ϴ e 90° e as hipotenusas têm os comprimentos iguais. Assim, os triângulos ABR, DAS, DCT e CBP são congruentes.

Como triângulos congruentes possuem a mesma medida de área:

1. Remova os dois triângulos rosas ABR e DAS e coloque os dois quadrados nos dois lados mais curtos PQ e QT;
2. Remova os dois triângulos verdes DCT e CBP deixando o quadrado junto com a hipotenusa.

Portanto, a área do quadrado da hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados dos dois lados mais curtos. Isso prova o teorema de Pitágoras.



O ângulo ACB é reto e CH é perpendicular a AB. Se <HBC=ϴ então <BCH=90-ϴ pois <CHB=90°. Segue que <HCA=ϴ pois <AVB=90°.

Assim, os triângulos ABC, CBH e ACH são semelhantes (ângulos de mesma medida).

Então, dos triângulos ACH e ABC, obtemos $\frac{d}{b} = \frac{b}{c}$ e, portanto, $b^2 = dc$. (1)

Dos triângulos CBH e ABC obtemos $\frac{e}{a} = \frac{a}{c}$ e, portanto, $a^2 = ec$. (2)

Somando as equações (1) e (2) $a^2 + b^2 = ec + dc = (e + d)c = c^2$ o que prova o Teorema de Pitágoras.

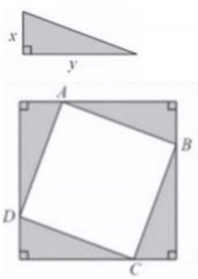
Avaliação Diagnóstica

Não requer nenhum conhecimento do Teorema de Pitágoras.

A avaliação pode ser feita em turma conforme descrito abaixo ou individualmente.

Mostre a pergunta abaixo e pergunte aos alunos: *"Levante 1 dedo se achar que a resposta é a A, 2 dedos para B, 3 dedos para C e 4 dedos para D."*

Quatro desses triângulos circundam o quadrado ABCD apenas tocando nesses pontos. Qual é a área do quadrado externo?



A. $x^2 + y^2$
B. $\sqrt{(x^2 + y^2)}$
C. $x^2 + 2xy + y^2$
D. $x + y$

Observe como os alunos respondem. Peça para que eles expliquem o porquê da resposta escolhida e NÃO diga se está certo ou errado, simplesmente agradeça ao aluno pela resposta.

É importante que os alunos expliquem o motivo de escolherem a resposta, colocando seu pensamento em palavras, eles desenvolvem habilidades de comunicação para obter um melhor entendimento.

Em grupo, certifique-se de que os outros alunos escutem essas razões e tente decidir se sua própria resposta estava certa ou errada.

Peça aos alunos que votem na resposta certa novamente colocando 1, 2 ou 3 dedos. Observe se algum aluno mudou a resposta escolhida anteriormente e quais foram que deram a resposta correta e a incorreta.

C é a resposta correta.

Note: Isso fornece uma prova do Teorema de Pitágoras.

Área do quadrado externo = $(x + y)^2$

Área dos quatro triângulos = $4\left(\frac{1}{2}xy\right) = 2xy$

Área do quadrado ABCD = Área do quadrado externo – Área dos quatro triângulos = $4\left(\frac{1}{2}xy\right) = 2xy$.

ar

A. Pode ter compreendido que a resposta é $(x + y)^2$, mas o aluno não foi capaz de expandir essa fórmula.

B. Claramente o aluno estava confuso, pois usou uma fórmula ligada ao Teorema de Pitágoras sem entender que se trata de uma medida de comprimento e não medida de área.

D. O aluno estava confuso com o conceito de área ou ele escolheu este item por adivinhação.

Por que fazer essa atividade?
Esta atividade de Pitágoras fornece uma sequência de etapas simples relacionadas a cada figura que pode ser seguido para deduzir duas provas diferentes do Teorema de Pitágoras. Os alunos podem receber uma ou ambas as figuras e solicitar que sigam as etapas. Depois de eles trabalharem nesta atividade, o professor pode extrair os fatos necessários em uma sessão de perguntas e respostas com base no que os alunos fizeram por si próprios. O *Jigsaw Inclusion and Home Learning Guide*[13] fornece uma coleção de quebra-cabeças, todos de alguma forma relacionados a triângulos retângulos e Teorema de Pitágoras. Os professores podem atender às necessidades de aprendizagem individuais de cada aluno da classe atribuindo a atividade de aprendizagem mais adequada. Os alunos podem fazer um dos quebra-cabeças ou eles podem tentar mais de um. Todos os quebra-cabeças, de maneiras diferentes, demonstram o Teorema de Pitágoras. Não deve haver pressão sobre os alunos para escreverem provas formais até que estejam no *Upper secondary stage*[14], mas todos os alunos podem ser solicitados a procurar padrões nos diagramas e a explicar o que veem. Os alunos mais jovens podem simplesmente colocar as peças juntas e conversarem sobre as formas e suas propriedades.

Objetivos de aprendizado
Ao fazer esta atividade, os alunos terão a oportunidade de: ● Se divertir resolvendo quebra-cabeças simples; ● Desenvolver uma familiaridade com propriedades que levam à congruência e semelhança de polígonos em figuras que exibem relações entre áreas de quadrados nas arestas de triângulos retos.

Competências gerais
Ao fazer esta atividade, os alunos terão a oportunidade de: ● desenvolver raciocínio lógico e habilidades de resolução de problemas ● desenvolver habilidades de visualização; ● desenvolver habilidades para explicar as provas.

[13] O *Jigsaw Inclusion and Home Learning Guide* é um documento que fornece atividades lúdicas utilizando o jogo de quebra-cabeça. Esse arquivo é adequado para idade entre 5 e 18 anos. Os alunos mais jovens podem montar os quebra-cabeças e aprender sobre as formas geométricas e suas propriedades e os alunos mais velhos devem dar explicações e provas.

[14] *Upper secondary stage* é o equivalente ao ensino médio brasileiro, estudantes com idade entre 15 e 18.

Sugestões de ensino

Primeiro, dê à classe alguns minutos para decidir sobre a resposta à pergunta da diagnóstica.

Receba as respostas da classe e discuta como você não precisa USAR o Teorema de Pitágoras, mas o diagrama sugere e ilustra uma prova do teorema.

Existem muitas provas do Teorema de Pitágoras. Você pode escolher dar uma ou ambas as provas de acordo com o tempo disponível.

Prova 1 - usando triângulos congruentes

Dê aos alunos o primeiro diagrama e as perguntas. Identifique os pontos A, B, C, D, P, Q, R, S e T. Você pode pedir para que alunos trabalhem nele individualmente por alguns minutos e depois peça-lhes que trabalhem em duplas.

Se você puder se locomover pela sala de aula, poderá fazer as perguntas-chave às duplas de alunos de acordo com o progresso e se você precisa dar mais suporte a alguns indivíduos, talvez poderá apresentar-lhes a seção DICA. Se você não conseguir circular pela sala de aula, escreva as perguntas-chave no quadro e diga aos alunos que as perguntas estão no quadro para ajudá-los.

Você pode pedir para as duplas que venham ao quadro e expliquem suas provas. Por fim, escreva a prova no quadro, explique o passo a passo e peça aos alunos para copiá-lo em seus cadernos.

Questões-chave - Prova 1

- Quantos triângulos retos você consegue ver?
- Identifique todos os ângulos que você sabe que são iguais ao ângulo ABR (chame-os de θ).
- Algum dos ângulos dos triângulos é igual aos ângulos dos outros triângulos? Por quê?
- Você consegue ver algum par de triângulos congruentes?
- O que resta se você retirar os dois triângulos rosa?
- O que resta se, em vez disso, tirar os dois triângulos verdes?
- O que isso diz sobre a soma das áreas dos dois quadrados menores comparando com a área da maior praça?

Prova 2 - usando triângulos semelhantes

Dê aos alunos o segundo diagrama e as perguntas. Você pode pedir para que os alunos trabalhem nele individualmente por alguns minutos para começar e depois peça-lhes para que trabalhem em duplas.

Se você puder se locomover pela sala de aula, poderá fazer as perguntas-chave às duplas de alunos de acordo com seu progresso e se você precisa dar mais suporte a alguns indivíduos, talvez possa fornecer-lhes a seção DICA. Se você não conseguir circular pela sala de aula, escreva as perguntas-chave no quadro e diga aos alunos que as perguntas estão no quadro para ajudá-los.

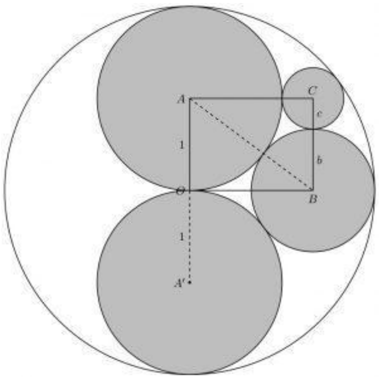
Você pode pedir para as duplas que venham ao quadro e expliquem suas provas. Por fim, escreva a prova no quadro e explique o passo a passo e peça aos alunos para copiá-lo em seus cadernos.

Perguntas-chave - Prova 2
• Você pode provar que todos os três triângulos no diagrama são semelhantes entre si? • O que você sabe sobre as proporções dos lados correspondentes em triângulos semelhantes? • O que os comprimentos *d* e *e* somam?

Acompanhamento
Veja a Atividade da Árvore Pitagórica. Treinando em Pitágoras 1 https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-8-11-riding-on-pythagoras-1/ Treinando em Pitágoras 2 https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-8-11-riding-on-pythagoras-2/

b) Ficha de atividade “Beijando Círculos” e “Notas para o professor”.

BEIJANDO CÍRCULOS



O círculo externo, de centro O, tem raio de 2 unidades.

Os pontos O, A, A', B e C são centros de círculos tangentes uns aos outros.

Pode-se mostrar que OACB é um retângulo.

1. Prove que OA é perpendicular a OB.
2. Localize os raios *b* e *c* e a razão entre os raios dos círculos com centros A, B e C.

O que você nota sobre o triângulo OAB?

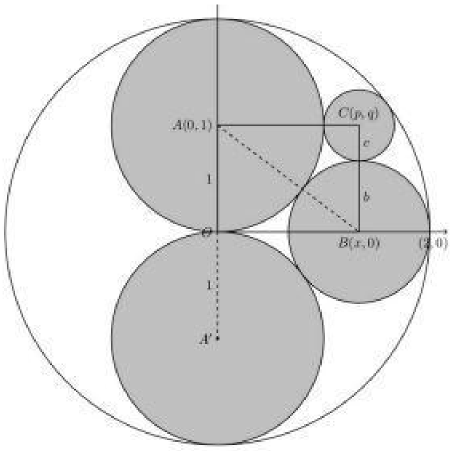
<u>Notas para o professor para a ficha de atividade “Beijando círculos”.</u>

Dica
Onde os círculos se tocam, eles têm uma tangente comum e cada raio é perpendicular à

tangente. O que isso diz a você sobre as linhas que unem os centros dos círculos?

Depois

A prova de que OACB é um retângulo pode ser feita usando a geometria analítica, pela fórmula da distância entre dois pontos e o fato de que todos os círculos se tangenciam.



1. Prove que OA⊥OB. Em seguida, use o Teorema de Pitágoras para ΔAOB e o fato de que o círculo de centro B toca o círculo externo de centro O para mostrar que $b = \frac{2}{3}$.
2. O centro do círculo C toca outros três círculos, use:

a) Escreva 3 equações envolvendo *p*, *q* e *c* e, depois, 3 expressões iguais a $p^2 + q^2 - c^2$.

b) Encontre 3 expressões lineares envolvendo *p*, *q* e *c*.

c) Encontre uma expressão que forneça *p* em termos de *c*.

d) Encontre uma expressão que forneça *q* em termos de *c*.

e) Elimine *p* e *q* para produzir uma equação quadrática em *c* e resolva esta equação para encontrar *c*.

3. Para cada valor de c, encontre p e q e identifique os dois círculos aos quais esses valores correspondem.
4. Explique por que os valores encontrados mostram que OACB é retângulo.

Notas para o professor

<u>Solução</u>

1. OB é tangente ao círculo de centro A em O e o segmento OA é o raio desse círculo, então OA⊥OB.
2. Onde os círculos se tocam, eles têm uma tangente em comum, e cada raio é perpendicular a tangente. Isso significa que as linhas que unem os centros dos círculos passam pelo ponto de tangência. Assumindo que OACB é um retângulo, isso dá:

   OA=BC=b+c=1

   OB=AC=1+c

   AB=1+b

   Pelo Teorema de Pitágoras $AB^2 = OA^2 + OB^2$ então $(1 + b)^2 = 1^2 + (1 + c)^2$ mas

$b + c = 1$ e isso dá $(1 + b)^2 = 1 + (2 - b)^2$ que tem a solução $b = \frac{2}{3}$. Então $a = 1$, $b = \frac{2}{3}$ e $c = \frac{1}{3}$. Dando a proporção $a : b : c = 3 : 2 : 1$.

3. O triângulo OBA tem medidas 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{3}$. É um triângulo 3 – 4 – 5, ou seja, é pitagórico.

<u>Aprofundando</u>

1. A prova de que OA⊥OB é dado acima. Aplicando o Teorema de Pitágoras no △AOB temos $1 + x^2 = (1 + b)^2$ e o fato de que o centro do círculo B tangencia o círculo externo, temos $x + b = 2$.

Então $1 + (2 - b)^2 = (1 + b)^2$ dá $b = \frac{2}{3}$ e $x = \frac{4}{3}$.

3. a) De OP: $\sqrt{\left(p^2 + q^2\right) + c} = 2$ [1]

De BC: $\left(p - \frac{4}{3}\right)^2 + q^2 = \left(\frac{2}{3} + c\right)^2$ [2]

De AC: $\left(p^2 + (q - 1)^2\right) = (1 + c)^2$ [3]

De [1] $\left(p^2 + q^2 - c^2\right) = 4 - 4c$

De [2] $\left(p^2 + q^2 - c^2\right) = \frac{8}{3}p - \frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{4c}{3} = \frac{8}{3}p - \frac{4}{3} + \frac{4c}{3}$

De [3] $\left(p^2 + q^2 - c^2\right) = 2q - 1 + 1 + 2c = 2q + 2c$

De [2], [2] e [3]: $p = 2 - 2c$ e $q = 2 - 3c$ então $p^2 + q^2 = (2 - 2c)^2 + (2 - 3c)^2 = (2 - c)^2$.

Isso dá a equação quadrática para c: $3c^2 - 4c + 1 = 0$

$$(c - 1)(3c - 1) = 0$$

Assim $c = \frac{1}{3}$, $p = \frac{4}{3}$, $q = 1$ corresponde a medida do raio de centro C. $c = \frac{1}{3}$ unidade ou $c = 1, p = 0, q = -1$ corresponde a medida do raio de centro A, sendo 1 unidade.

4. As coordenadas encontradas para o centro C $(p, q) = \left(\frac{4}{3}, 1\right)$ mostrando que CA⊥CB e OACB é retângulo.

Avaliação Diagnóstica

Isso deve levar cerca de 5 a 10 minutos. Pode ser usado antes ou depois da aula.

Escreva a pergunta abaixo no quadro e pergunte à classe: “Levante 1 dedo se achar que a resposta é A, 2 dedos para B, 3 dedos para C ou 4 dedos para D”.

Qual das seguintes afirmações é falsa?

A. Uma tangente a um círculo é perpendicular ao raio no ponto de encontro.

B. A tangente a um círculo corta o círculo em dois pontos coincidentes.

C. Duas tangentes a um círculo a partir de um ponto fora do círculo pode ser de diferentes comprimentos.

D. O ângulo entre uma tangente a um círculo e uma corda tem a mesma medida do ângulo inscrito na circunferência do arco menor formado pelos pontos cortados pela corda.

1. Observe como os alunos respondem. Pergunte a um aluno que deu a resposta A para explicar por que ele ou ela deu essa resposta, NÃO diga se está certo ou errado e agradeça ao aluno por dar a resposta. É importante que cada aluno explique a própria resposta
2. Em seguida, faça o mesmo para as respostas B, C e D. Tente se certificar de que os alunos ouçam esses motivos e faça com que eles decidam se a resposta deles estava certa ou errada.
3. Peça à classe novamente para votar na resposta certa colocando 1, 2, 3 ou 4 dedos. Observe se há uma mudança e quem deu respostas certas e erradas.

A resposta correta é: C. Esta afirmação é falsa.

Por que fazer essa atividade?

A atividade dá aos alunos a experiência de aplicar o que sabem sobre a geometria do círculo para resolver um problema. Envolve a aplicação do fato de que uma tangente a um círculo é perpendicular ao raio no ponto em comum. O problema do Aprofundando envolve geometria analítica e fornece um desafio extra para alunos mais velhos que estão entusiasmados com os desafios da matemática.

Objetivos de aprendizado

Ao fazer esta atividade, os alunos terão a oportunidade de revisar a geometria do círculo.

Competências gerais

Ao fazer esta atividade, os alunos terão a oportunidade de raciocinar logicamente e construir um argumento dando provas de todas as afirmações que fazem.

Sugestões de ensino

Comece com o Questionário da diagnóstica e uma revisão do que os alunos sabem sobre a geometria no círculo.

Se possível, distribua cópias da figura da atividade principal ou escreva a pergunta no quadro-negro.

Os alunos devem trabalhar individualmente e depois trabalhar em duplas, comparar e verificar as suas respostas e argumentos. Depois, as duplas devem trabalhar com outra dupla para comparar e verificar suas respostas.

A primeira pergunta, assumindo que OACB é um retângulo, é direta e qualquer aluno da 12.ª ou 13.ª série deve ser capaz provar. A segunda parte da pergunta não requer matemática avançada (além do nível ensinado na escola), mas envolve muita álgebra, em particular 3 equações simultâneas envolvendo expressões quadráticas. Resolvendo as 3 equações simultâneas exigem cuidado e perseverança, mas os alunos que gostam de desafios podem obter muita satisfação em trabalhar a álgebra e obter o resultado.

Em seguida, peça aos alunos que apresentem seu trabalho à classe. Por fim, sintetize o que foi aprendido.

Perguntas chaves

- Esses dois círculos se tocam. O que você sabe sobre a reta que une os centros dos círculos?
- Você consegue encontrar os comprimentos dos catetos desse triângulo?
- Você sabe que é um retângulo. O que você pode dizer sobre o comprimento dos lados?
- Sua proporção envolve frações. Como você expressaria a mesma proporção em números inteiros?
- Imagine estender a reta OB até a borda do círculo externo. O que você poderia deduzir disso?

Acompanhamento

Investigando Teoremas do Círculo

https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-10-11-investigating-circle-theorems/

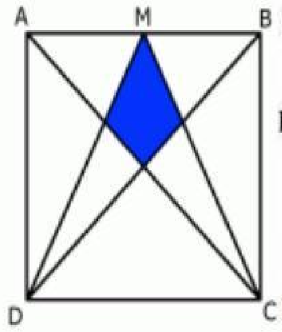
Círculo inscrito em um quadrilátero

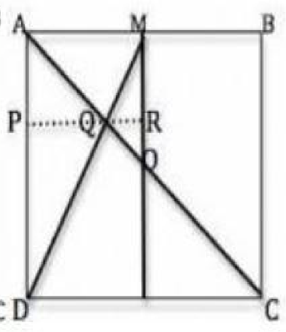
https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-10-12-circle-inscribed-in-quadrilateral/

https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-11-12-cyclic/

c) **Ficha de atividade “Pipa no Quadrado” e “Notas para o professor”.**

PIPA NO QUADRADO





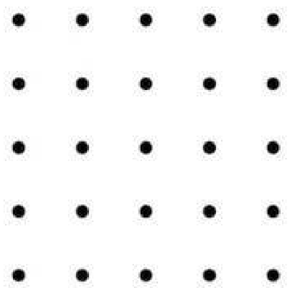
ABCD é um quadrado de lado 1. AM = MB e O é o centro do quadrado.

Encontre a área da pipa.

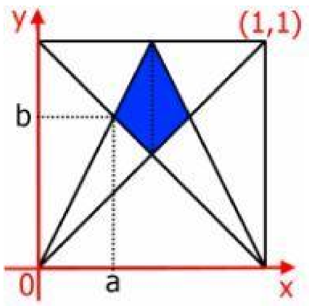
Você pode encontrar esta área por mais de um método?

<u>Notas para o professor para a ficha de atividade “Pipa no quadrado”</u>

Dica
Comece desenhando o quadrado em um papel pontilhado. O que você nota sobre os triângulos ADQ e MQO? O que você pode descobrir sobre os comprimentos PQ e QR?



Depois

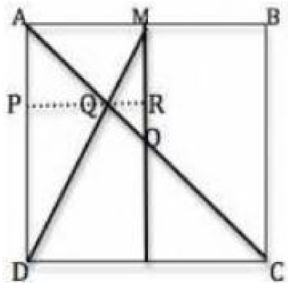


A figura acima pode sugerir outro método. Você pode encontrar a área da pipa por dois métodos diferentes?

Você consegue encontrar as áreas dos outros triângulos no diagrama?

Notas para o Professor

<u>Solução por semelhança de triângulos</u>

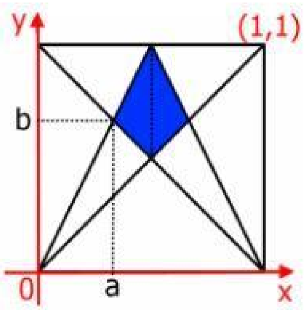


Os triângulos ADQ e QOM são semelhantes porque $ADQ = QMO$ (ângulos alternos AD // MO) e $DAQ = QOM$ (ângulos alternos AD // MO).

Então $PQ = 2QR$, isso é $PQ = \frac{1}{3}$ e $QR = \frac{1}{6}$.

Área $\Delta QOM = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$ e a área da pipa $\frac{1}{12}$.

<u>Solução por coordenadas</u>



O ponto (a, b) é a interseção das retas $y = 2x$ e $y = 1 - x$ então $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{2}{3}$.

A pipa é composta por dois triângulos congruentes;

Um triângulo tem vértices $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ altura perpendicular $\frac{1}{6}$ e área $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$.

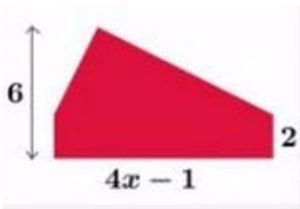
Área da pipa $\frac{1}{12}$.

Avaliação de diagnóstica

Isso deve levar cerca de 5 a 10 minutos.

1. Escreva a pergunta no quadro e diga à classe: “Levante 1 dedo se você acha que a resposta é A, 2 dedos para B, 3 dedos para C e 4 dedos para D”.

Qual alternativa dá a expressão da área da figura.



A. $24x - 6$
B. $24x - 2$
C. $16x - 2$
D. $16x - 4$

2. Observe como os alunos responderam. Peça a um aluno que deu a resposta A para explicar por qual motivo ele deu essa resposta e NÃO diga se está certo ou errado, simplesmente agradeça ao aluno por responder.
3. É importante que os alunos expliquem o motivo da sua resposta, pois os ajuda a esclarecer suas próprias ideias e desenvolver suas habilidades de comunicação.
4. Em seguida, faça o mesmo para as respostas B, C e D. Tente se certificar de que os alunos ouçam esses motivos e faça com que os alunos decidam se a resposta deles estava certa ou errada.
5. Peça à turma novamente para votar em uma das alternativas levantando 1, 2, 3 ou 4 dedos. Observe se há uma mudança e quem deu respostas certas e erradas.
6. O conceito de área é necessário para a realização da atividade, então explique a resposta certa ou dê uma tarefa corretiva.

A resposta correta é D.

$$Área do retângulo + Área do triângulo = 2(4x - 1) + \frac{1}{2} \times 4(4x - 1) = 4(4x - 1) = 16x - 4$$

<u>Equívocos comuns</u>

A. Esta é a área da 'caixa’ que envolve a figura vermelha.

B. (e C) Os alunos que deram essas respostas provavelmente foram dadas aleatoriamente, sem nenhuma compreensão de área.

Por que fazer essa atividade?

Esta atividade é mais simples do que parece e dá aos alunos a experiência de usar o que sabem sobre triângulos semelhantes para resolver um problema envolvendo área.

Objetivos de aprendizado

Ao fazer esta atividade, os alunos terão a oportunidade de resolver um problema geométrico envolvendo lados e ângulos desconhecidos em triângulos e quadriláteros, usando propriedades conhecidas de triângulos e quadriláteros, bem como propriedades de triângulos congruentes e semelhantes.

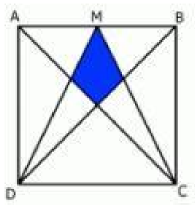
Competências gerais

Ao fazer esta atividade, os alunos terão a oportunidade de:

- pensar matematicamente, raciocinar logicamente e dar explicações e provas;
- visualizar - desenvolver a habilidade de interpretar e criar imagens visuais para representar conceitos e situações;
- interpretar e resolver problemas.

Sugestões de ensino

Comece com a Questão Diagnóstica e descubra se seus alunos podem trabalhar a área da figura dividindo-a em um retângulo e um triângulo e encontrando essas áreas.



Mostre a primeira imagem do problema e pergunte aos alunos o que eles observam sobre isso. Discuta as simetrias na figura. Em seguida, diga à turma: "ABCD é um quadrado com borda 1 unidade. M é o ponto médio de AB. Encontre a área da pipa sombreada no diagrama. "

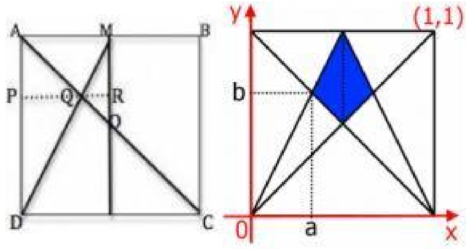
Entregue a pergunta da secção DEPOIS ou escreva-a no quadro.

Você pode usar a estratégia 1 - 2 – 4 ou outras estratégias. Peça aos alunos para trabalharem por cerca de 5 a 10 minutos. Em seguida, peça-lhes que trabalhem em duplas e comparem os seus métodos e respostas. Eles obtiveram a mesma resposta?

Dê aos alunos um tempo para resolverem o problema. Enquanto eles estão trabalhando, circule pela sala e veja os métodos que estão utilizando. Use as perguntas-chave para orientar o raciocínio dos alunos.

Se os alunos tiverem dificuldade para começar, você pode dar-lhes a DICA. Se alguns grupos terminarem antes de outros, dê a eles o tópico DEPOIS.

Depois de algum tempo, peça para que as duplas formem grupos de 4 e comparem, novamente, seus métodos e respostas.



Faça uma discussão em sala sobre a solução e peça para que os alunos expliquem o percurso percorrido até chegar no resultado.

Se todos usaram o mesmo método, desenhe estes dois diagramas no quadro e dê-lhes uma dica sobre um segundo método de solução. Deixe-os trabalhar em um segundo método. Veja qual método eles preferem.

Perguntas chave

Método para figuras semelhantes:

- quais ângulos são congruentes?
- quais triângulos são semelhantes?
- quais triângulos são congruentes?
- você consegue encontrar os comprimentos PQ e QR?
- quais comprimentos conhecemos?

Para o método de Coordenadas:

- quais são as equações das retas?
- onde elas se cruzam?

Acompanhamento

Kissing Triangles https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-9-11-kissing-triangles/

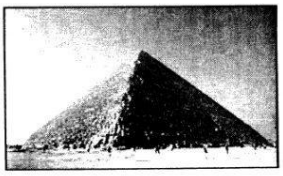
Why the same https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-11-12-why-the-same/

Square Hole https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-11-12-square-hole/

Wedge on Wedge https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-10-11-wedge-on-wedge/

d) **Ficha de atividade “Grande Pirâmide” e “Notas para o professor”.**

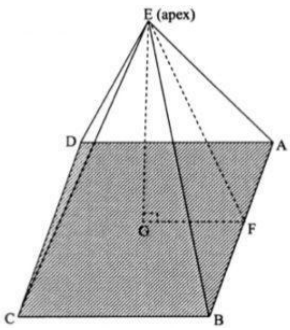
GRANDE PIRÂMIDE



Great Pyramid at Giza in Egypt

A Grande Pirâmide de Gizé, no Egito, foi construída por volta de 2500 a.C. A pirâmide possui base quadrada ABCD de lado 232,6 metros. A distância de cada vértice da base e do vértice E (topo) é originalmente de 221,2 metros.

Desenhe um esquema da pirâmide para mostrar dois triângulos retos a partir dos quais você pode escrever equações trigonométricas para responder às perguntas a seguir.

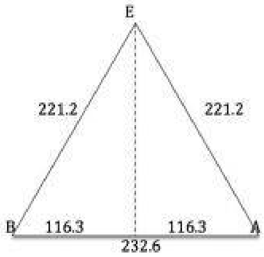


Você pode achar útil construir uma pirâmide quadrada com pedaços de papel e cortar um triângulo como o triângulo EGF para caber dentro.

1. Se F é um ponto em AB tal que EF é perpendicular a AB e G está verticalmente abaixo do vértice E, o que você pode dizer sobre os triângulos EFA e EGF?
2. Calcule a medida do ângulo formado pelo vértice E da pirâmide com uma de suas faces (por exemplo, ângulo AEB). Você pode encontrar essa medida por dois métodos diferentes?
3. Calcule a medida do ângulo que cada face faz com a base da pirâmide (por exemplo, ângulo EFG). Calcule a altura da pirâmide.

Notas para o professor para a ficha de atividade “Grande pirâmide”

Dica
Você achará útil desenhar esta figura para que seja fácil ver os triângulos retângulos.

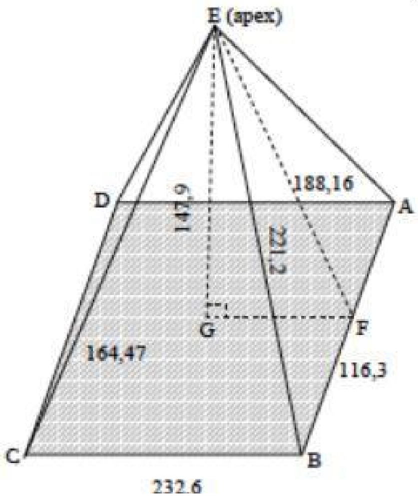


Depois

Escreva todas as arestas e os ângulos na pirâmide quanto possível, por exemplo CG e <ECG.

Notas para o professor

Solução



1. Se F é um ponto em AB tal que EF é perpendicular a AB e G está verticalmente abaixo do vértice E, então os triângulos EFA e EGF são retos.
2. $AF = 116,3m$ (metade do comprimento de AB)

   EA$221,2m$ (comprimeto da aresta)

   $sen\,AEF = \frac{116,3}{221,2} = 0,5258$

   $<AEF = 31,7°$

   $<AEB = 63,4°$

Método alternativo usando a lei dos cossenos para ∆AEB:

$$2(221,2)^2 cosAEB = 221,2^2 + 221,2^2 - 232,6^2$$

$$cosAEB = 1 - \frac{\frac{1}{2}(232,6)^2}{221,2^2} = 0,4471$$

$$AEB = 63,4°$$

3. Pelo Teorema de Pitágoras

$$EF^2 = 221,2^2 - 116,3^2 = 35403,75$$

$$EF = 188,16m$$

$$cosEFG = \frac{116,3}{118,16} = 0,6181$$

$$EFG = 51,8°$$

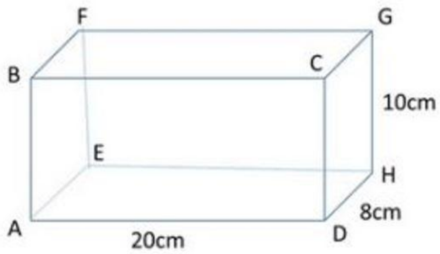
4. $EG = 116,3tanEFG = 147,9m$

Avaliação diagnóstica

Isso deve levar cerca de 5 a 10 minutos

1. Escreva a pergunta no quadro e diga à classe: “Levante 1 dedo se achar que a resposta é A, 2 dedos para B, 3 dedos para C e 4 dedos para D”.

Qual das seguintes alternativas abaixo não é um triângulo retângulo?



A. BDA
B. CFE
C. BFH
D. AHC

2. Observe como os alunos responderam. Peça a um aluno que deu a resposta A para explicar o porquê ele deu essa resposta e NÃO diga se está certo ou errado, simplesmente agradeça ao aluno por responder.
3. É importante que os alunos expliquem o motivo da resposta, pois os ajuda a esclarecer suas próprias ideias e desenvolver suas habilidades de comunicação.
4. Em seguida, faça o mesmo para as respostas B, C e D. Tente se certificar de que os alunos ouçam esses motivos e faça com que eles decidam se a resposta deles estava certa ou errada.
5. Peça à classe novamente para votar na resposta certa levantando 1, 2, 3 ou 4 dedos. Observe se há uma mudança e quem deu respostas certas e erradas.
6. Se o conceito for necessário para a lição a seguir, explique a resposta certa ou dê uma tarefa complementar. É importante que os alunos expliquem o motivo de sua resposta, caso contrário, muitos alunos escolherão uma alternativa aleatória sem embasamento teórico.

A alternativa correta é a D.

<u>Equívocos comuns</u>

A. AD $\perp$ CDHG então AD $\perp$ DG (segmentos no plano CDHG) então GDA é um triângulo retângulo. Os alunos podem pensar que os segmentos devem ir para os cantos opostos da figura para formar o ângulo reto.
B. EF $\perp$ BCGF então EF $\perp$ FC (segmentos no plano BCGF) então CFE é um triângulo retângulo. Os alunos podem pensar que o CFE não é um triângulo retângulo porque não se parece na imagem.
C. BF $\perp$ EFGH então BF $\perp$ FH (segmento no plano EFGH) então BFH é um triângulo retângulo.

Por que fazer essa atividade?

Esta atividade dá aos alunos a oportunidade de desenvolver sua capacidade de visualizar estruturas 3D e aplicar a trigonometria que aprenderam em um problema do mundo real. É importante que os alunos sejam capazes de usar e aplicar a matemática que aprenderam.

Objetivos de aprendizado

Ao fazer esta atividade, os alunos terão a oportunidade de:

- desenvolver a visualização de estruturas 3D;
- praticar a resolução de problemas usando triângulos retângulos e trigonometria.

Competências gerais

Ao fazer esta atividade, os alunos terão a oportunidade de desenvolver a visualização e aplicar seus conhecimentos para resolver problemas em um contexto da vida real.

Sugestões de ensino

Você pode achar útil construir uma pirâmide de base quadrada com pedaços de papel e recortar um triângulo feito de papel como o triângulo EGF para entrar na pirâmide.

Faça um estoque de palitos de papel para que você possa fazer modelos de demonstração rápida. Basta enrolar o papel firmemente em torno de um pedaço de barbante e prender com fita adesiva. Se quiser facilidade de armazenamento para seus palitos de papel, basta desfazer o nó do barbante e desmontar o modelo.

Você pode decidir se deseja usar a avaliação diagnóstica no início ou no final da lição.

Para que os alunos pratiquem a compreensão da leitura, você pode dar-lhes o primeiro parágrafo e dizer que você lhes dará 5 minutos para desenhar o diagrama da pirâmide. Peça-lhes para encontrarem dois triângulos a partir dos quais eles podem escrever expressões trigonométricas para encontrar ângulos e comprimentos na figura.

Primeiramente, os alunos podem desenhar uma pirâmide quadrada em uma escala grande, no caderno ou no papel.

Em seguida, peça aos alunos que desenhem a pirâmide no quadro. Identifique os vértices da pirâmide e desenhe dois triângulos retos EFA e EGF.

Use a estratégia 1 - 2 - 4 – ou outra. Comece com os alunos trabalhando por conta própria. Então peça para que trabalhem em duplas e sugira que cada um encontre respostas e verifiquem uns com os outros se as respostas são as mesmas.

Em seguida, diga às duplas para trabalhar com outra dupla ou em quatro alunos e novamente peça para verificar com o outro grupo se eles tiverem as mesmas respostas. Depois disso, junte toda a turma e peça para que os alunos apresentem e expliquem seus métodos de solução para a classe.

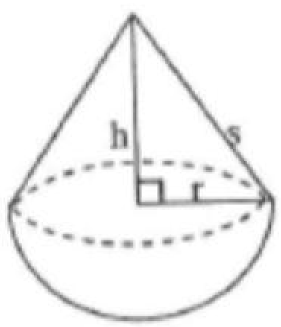
Por fim, faça uma reflexão e resuma o que foi aprendido

Perguntas chaves
• Você pode desenhar (ou me mostrar) qualquer triângulo retângulo na pirâmide? • O que você pode dizer sobre os triângulos EFA e EFB? • O que você pode dizer sobre triângulos EFG? • Que comprimentos você conhece nesse triângulo? • Se você conhece dois catetos em um triângulo retângulo, como você pode encontrar os ângulos?

Acompanhamento
Em um estádio de futebol https://aiminghigh.aimssec.ac.za/year-12-in-a-soccer-stadium/

e) **Ficha de atividade “No Máximo”.**

NO MÁXIMO



Para sua empresa, você deve construir piões feitos de duas peças coladas, sendo uma semiesfera e um cone, e deve planejar como eles serão fabricados, embalados e vendidos.

(1) O raio da superfície circular onde as peças são coladas é de 3 cm. A altura do cone é de 5 cm. Calcule o volume total e a área da superfície do pião (pião A).

(2) Cada pião é embalado em uma caixa medindo 6,5 cm por 6,5 cm por 7,5 cm. Quantos piões cabem em uma caixa medindo 55 cm x 55 cm x 55 cm?

(3) Você deve investigar outros modelos para mais dois piões, feitos da mesma forma com a superfície circular onde as peças são coladas com raio de 3 cm.

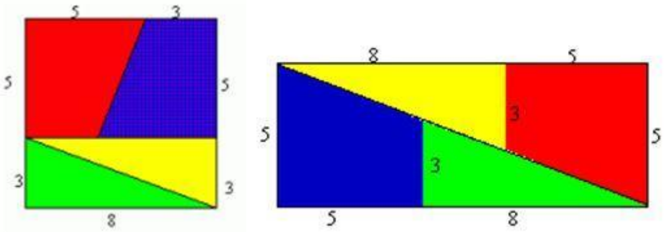
Para o pião B, o volume da semiesfera é igual o volume do cone e para o pião C a área da superfície da semiesfera é a mesma que a área da superfície do cone. Encontre h cm, a altura dos cones para o pião B e para o pião C.

(4) Construa um cone e um cilindro de mesma altura, usando os modelos da planilha, de papel ou cartão para rascunho ou plástico. Encha o cone com areia, lentilha, arroz ou algo semelhante e investigue a relação entre o volume do cone e o volume do cilindro. Esta não é uma prova da fórmula para o volume do cone, pois você precisará aprender o cálculo integral para provar a fórmula.

(5) Calcule as dimensões de um cuboide com o mesmo volume e altura do cilindro e do cone.

f) Ficha de atividade "Não Acrescenta".

NÃO ACRESCENTA



Veja este quadrado dividido em quatro peças: dois triângulos idênticos e dois trapézios idênticos.

A aresta de comprimento 3 de cada triângulo coincide com a aresta de comprimento 3 de um trapézio, de modo que as quatro peças do quadrado agora ocupam um espaço retangular.

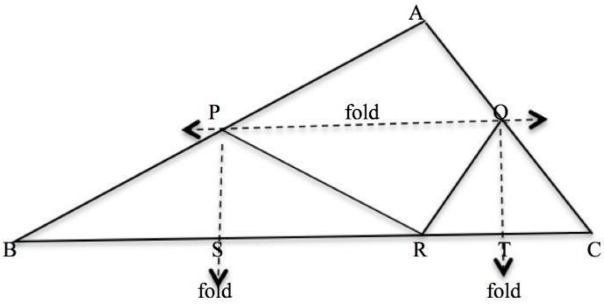
O quadrado tinha comprimento lateral 8 e área 64.

A área do retângulo é igual 65 unidades quadradas (13 por 5).

A área pode ter mudado? Você pode explicar o que aconteceu?

g) Ficha de atividade "Dobrando o Triângulo"

DOBRANDO O TRIÂNGULO



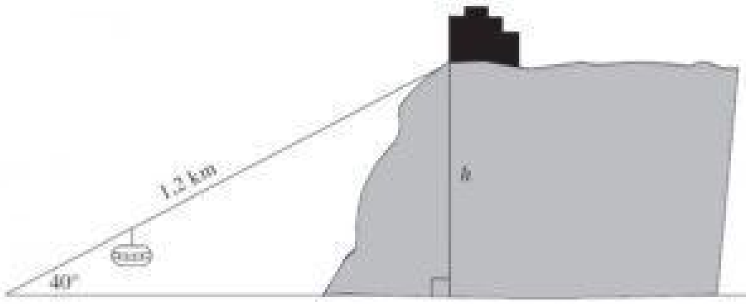
Pegue um triângulo ABC qualquer, sendo A o maior ângulo. Dobre o triângulo ao longo de PQ, PS e QT, onde os pontos P e Q são os pontos médios de AB e AC, respectivamente, e PS e PT são perpendiculares a BC.

O que você percebe? Por que isso acontece? Isso acontecerá com todos os triângulos? Se sim, você pode provar isso? O experimento de dobradura diz mais alguma coisa sobre triângulos?

h) Ficha de atividade "Bondinho".

BONDINHO

O teleférico da Cidade do Cabo leva os turistas ao topo da *Table Mountain*. O cabo tem 1,2 km de comprimento e faz um ângulo de 40° com o solo.



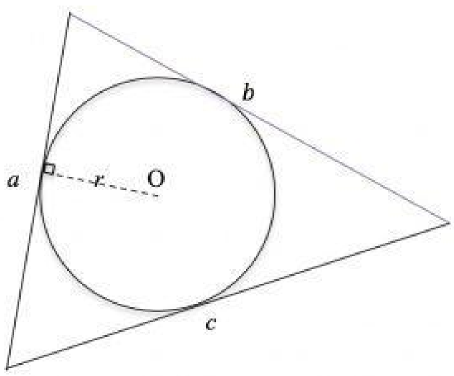
Desenhe um diagrama em escala e use-o para encontrar um valor aproximado da altura vertical (h) escalada pelo teleférico.

Calcule a altura vertical (h) usando trigonometria.

A estação inferior do teleférico está a 302 metros acima do nível do mar. Qual é a altura da estação superior do teleférico? Quanto você tem que subir para chegar ao ponto mais alto da montanha com 1.085 metros?

i) Ficha de atividade "Razão Surpresa".

RAZÃO SURPRESA



Um círculo de raio r e de centro O está inscrito num triângulo de lados medindo a, b e c.

Encontre a medida da área e o comprimento da circunferência do círculo.

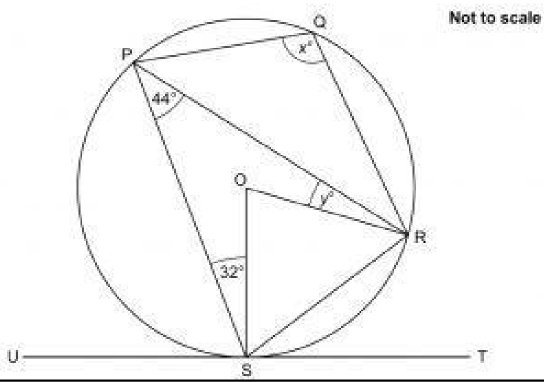
Encontre a medida da área e o perímetro do triângulo.

O que você nota sobre as proporções das duas áreas e as proporções dos dois perímetros?

O que você nota sobre a proporção entre o perímetro e a área de cada figura geométrica?

j) Ficha de atividade “Cíclico”.

CÍCLICO



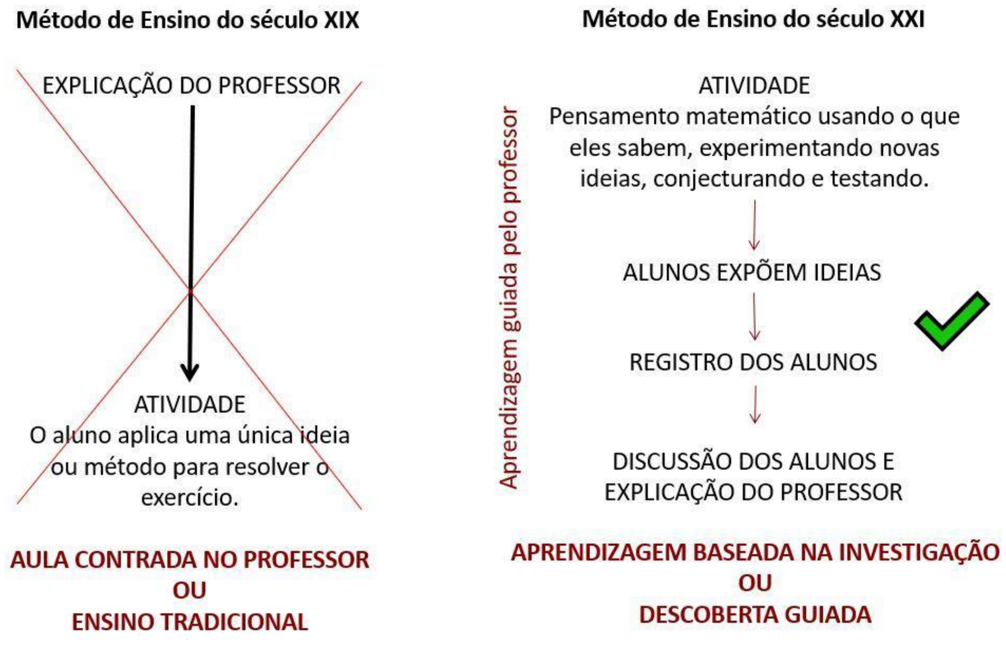
A figura mostra um círculo de centro O com pontos P, Q, R e S na circunferência. UST é uma reta tangente ao círculo em S. Dado as medidas dos ângulos RPS = 44º e PSO = 32º, encontre a medida dos ângulos x e y.

1 5 FORMAÇÃO DA APRENDIZAGEM

Na tentativa de compreender o embasamento teórico das atividades desenvolvidas pela AIMSSEC e, tendo em visa que nos sites oficiais da AIMS não há referências bibliográficas, neste capítulo iremos discorrer sobre a formação da aprendizagem, em especial o pensamento matemático na perspectiva de autores brasileiros e ingleses.

Para a AIMSSEC, a aprendizagem é formada através da descoberta, da compreensão, da colaboração, do pensamento matemático e do papel do professor, que cumpre o papel de orientador, distanciando da ideia do professor do século XIX, época em que o ensino era centrado no professor.

FIGURA 1 – MÉTODOS DE ENSINO DOS SÉCULOS XIX E XXI



FONTE: Beardon (2018, p. 3) / TRADUÇÃO: Autora.

Para a AIMSSEC, o ensino da matemática deve ser abordado com base na investigação ou na descoberta guiada, seguindo os passos do esquema acima, em que o professor seleciona a atividade, o aluno expõe as ideias com base no conhecimento que já possui, registra as ideias e a solução e, com a intervenção do professor, compartilha com a turma a solução e, por fim, o professor realiza a explicação. No quadro abaixo, Beardon (2018) simplifica os caminhos para o ensino e a aprendizagem que os professores podem adotar em sala de aula.

FIGURA 2 – CAMINHOS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM

FONTE: Beardon (2018, p. 4) / TRADUÇÃO: Autora.

5.1 O QUE É O PENSAMENTO MATEMÁTICO E COMO APLICAR EM SALA DE AULA

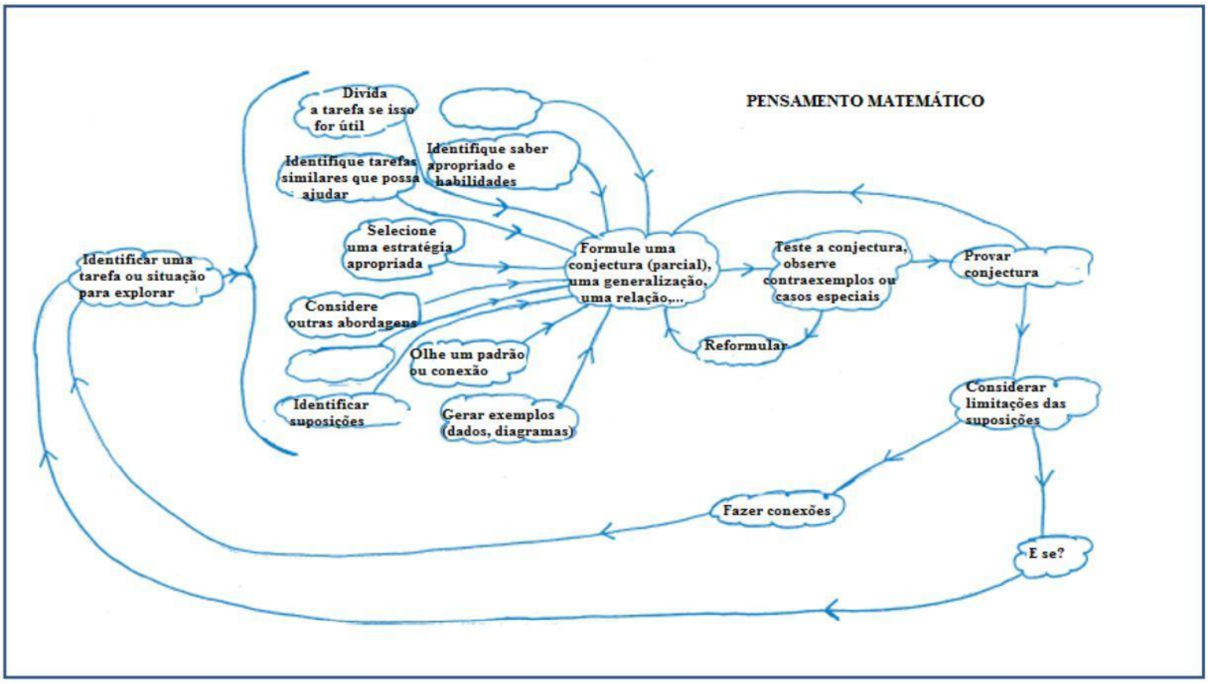
Nos canais e sites oficiais da comunidade AIMSSEC é destacado diversas vezes que “as atividades criadas e compartilhadas pela comunidade da AIMSSEC, através da Rede *AimingHigh*, são preparadas para desenvolver nos alunos o **pensamento matemático**”. Por não haver, explicitamente, quais referências esses profissionais utilizam, nesta subseção, será feita uma tentativa de compreender e agregar conhecimento sobre o Pensamento Matemático.

Chaparin (2019), em sua tese de doutorado “A formação de professores que ensinam matemática, centrada na resolução de problemas e em processos do pensamento matemático” conclui que:

> O objetivo principal dessa metodologia é cultivar nos alunos a autonomia, capacidade de encontrar questões, aprender pensar, fazer julgamentos e agir por si próprio, para que cada criança ou aluno possa resolver problemas mais habilmente, independentemente de como a sociedade pode mudar no futuro, ou seja, a capacidade de pensar e fazer julgamentos de forma independente é pensamento matemático. (CHAPARIM, 2019, p.78).

Ball (2002), no artigo *What is mathematical thinking?* esquematiza o pensamento matemático da seguinte forma:

FIGURA 3 – O QUE É O PENSAMENTO MATEMÁTICO?



FONTE: Ball, 2002, p.19 / TRADUÇÃO: Chaparin (2019, p.77)

Na ilustração acima, observamos que Ball deixou alguns espaços em banco, pois ela possibilita ao leitor criar diferentes formas de chegar à “formulação de conjecturas”. Chaparin (2002, p. 77) sugere um possível preenchimento desses dois espaços: “Fazer uma relação com problemas similares já resolvidos anteriormente; resolver problemas mais simples para servir de referência”.

No livro *“Questions and prompts for mathematical thinking”,* os autores Anne Watson e John Mason (1998), Ball (2002, p. 181) e Chaparin (2002, P.77) ilustram em seus trabalhos a descrição do pensamento matemático com exemplos de instruções/ações que o professor pode adotar em sala de aula para estimular os alunos a pensarem matematicamente.

TABELA 4 – DESCRIÇÃO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO

Palavras que descrevem o pensamento matemático	**Exemplos de instruções**
Exemplificação Especialização	Dê-me um ou mais exemplos de... Descreva, demonstre, mostre, desenhe, encontre.
Completar Deletar Corrigir	O que deve ser adicionado, removido ou alterado? Conte-me o que está errado com... O que precisa ser mudado de modo que...
Comparar Classificar Organizar	O que é igual e diferente em ...? Classifique ou organize o seguinte de acordo com ... É ou não é ...?
Mudar/Variar Alterar	E se...? Faça de um ou mais modos. Qual é o mais rápido, mais fácil...?
Conjecturar Generalizar	O que acontece no geral? É sempre, alguma vez, nunca...? Descreva todas as possibilidades.
Explicar, justificar Verificar, convencer Refutar	Explique por que... Dê me uma razão... Como pode ter certeza de...

FONTE: Chaparin, 2002, p. 78 e 79 (Tradução: A Autora).

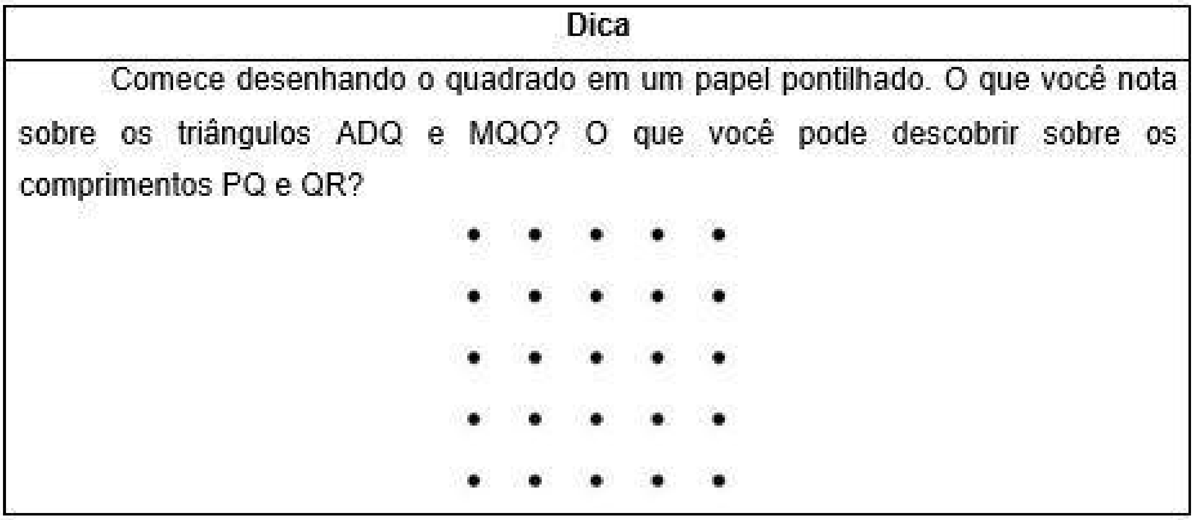
Para Blanco (1993, p.1), fazer matemática em sala de aula deve consistir em tarefas que permitam: "abstrair, aplicar, convencer, classificar, compreender, organizar, representar, comparar, explicar, projetar e desenvolver modelos, validar, sintetizar e classificar, entre outros". Estas ideias vão ao encontro de propostas que visam ao desenvolvimento do pensamento matemático.

As premissas do Pensamento Matemático estão contidas nos documentos nacionais e estaduais. A BNCC (2017, p. 518) determina que para o desenvolvimento das habilidades e competências no ensino da matemática no Ensino Médio "o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade" e para que o aluno atinja esse objetivo a orientação para os professores é a de ajudá-los a desenvolver o raciocínio, a representação, comunicação e a argumentação. Ao mesmo tempo, as Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (2008, p. 45) designa em seu componente curricular de matemática que "A aprendizagem da Matemática consiste em criar estratégias que possibilitam ao aluno atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas de modo a tornar-se capaz de estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar”. Conclui-se, portanto, que, mesmo tendo sido desenvolvido em contexto diferente do brasileiro e do paranaense, as ideias contidas nas atividades da AIMSSEC são coerentes com o que preconizam documentos curriculares brasileiros.

5.2 POR QUE AS FICHAS DE ATIVIDADES DESENVOLVIDAS PELA AIMSSEC AUXILIAM O DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO MATEMÁTICO?

Para responder a esta pergunta, compararemos o material de apoio “notas para o professor” da ficha de atividade *Pipa no Quadrado* com o quadro de Ball sobre o pensamento matemático.

FIGURA 4 – DICA DA FICHA DE ATIVIDADE “PIPA NO QUADRADO”


Dica

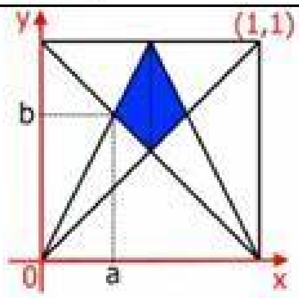
Comece desenhando o quadrado em um papel pontilhado. O que você nota sobre os triângulos ADQ e MQO? O que você pode descobrir sobre os comprimentos PQ e QR?

FONTE: SITE AIMSSEC / TRADUÇÃO: AUTORA.

As informações no quadro DICAS é o espaço destinado a orientações simples de como conduzir o raciocínio para a solução do problema, ou seja, ele olha para um padrão ou conexão com o exercício proposto. Neste quadro, o autor dividiu a tarefa e identificou o saber apropriado e a habilidade necessária.

FIGURA 5 – DEPOIS DA FICHA DE ATIVIDADE “PIPA NO QUADRADO”

Depois



A figura acima pode sugerir outro método. Você pode encontrar a área da pipa por dois métodos diferentes?

Você consegue encontrar as áreas dos outros triângulos no diagrama?

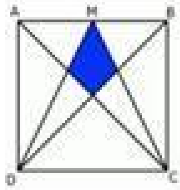
FONTE: SITE AIMSSEC / TRADUÇÃO: AUTORA.

As informações no quadro DEPOIS são destinadas a dicas mais elaboradas, ou seja, gera exemplos (dados, diagramas), identifica suposições e considera outras abordagens, instigando o aluno a encontrar mais de uma solução.

FIGURA 6 – SUGESTÃO DE ENSINO DA FICHA DE ATIVIDADE “PIPA NO QUADRADO”

Sugestões de ensino

Comece com a Questão Diagnóstica e descubra se seus alunos podem trabalhar a área da figura dividindo-a em um retângulo e um triângulo e encontrando essas áreas.



Mostre a primeira imagem do problema e pergunte aos alunos o que eles observam sobre isso. Discuta as simetrias na figura. Em seguida, diga à turma: "ABCD é um quadrado com borda 1 unidade. M é o ponto médio de AB. Encontre a área da pipa sombreada no diagrama. "

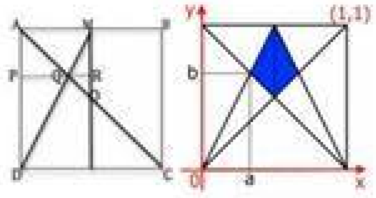
Entregue a pergunta da secção DEPOIS ou escreva-a no quadro.

Você pode usar a estratégia 1 - 2 – 4 ou outras estratégias. Peça aos alunos para trabalharem por cerca de 5 a 10 minutos. Em seguida, peça-lhes que trabalhem em duplas e comparem os seus métodos e respostas. Eles obtiveram a mesma resposta?

Dê aos alunos um tempo para resolverem o problema. Enquanto eles estão trabalhando, circule pela sala e veja os métodos que estão utilizando. Use as perguntas-chave para orientar o raciocínio dos alunos.

Se os alunos tiverem dificuldade para começar, você pode dar-lhes a DICA. Se alguns grupos terminarem antes de outros, dê a eles o tópico DEPOIS.

Depois de algum tempo, peça para que as duplas que formem grupos de 4 e comparem, novamente, seus métodos e resposta.



Faça uma discussão em sala sobre a solução e peça para os alunos explicarem seu trabalho.

Se todos usaram o mesmo método, desenhe estes dois diagramas no quadro e dê-lhes uma dica sobre um segundo método de solução. Deixe-os trabalhar em um segundo método. Veja qual método eles preferem.

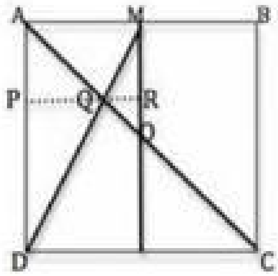
FONTE: SITE AIMSSEC / TRADUÇÃO: AUTORA.

No quadro SUGESTÃO DE ENSINO, são utilizados os comandos de identificar uma tarefa ou situação para explorar e dividir a tarefa em partes, identificar os conhecimentos e habilidades apropriadas, olhar um padrão ou conexão e ainda sugere a aplicação de uma atividade similar que possa ajudar o aluno. Por conseguinte, é sugerido ao professor para que organize discussões em sala, para que os alunos exponham as ideias e conhecimentos aplicados. Desse modo, o discente desenvolve a habilidade da argumentação.

FIGURA 7 – NOTAS PARA O PROFESSOR DA FICHA DE ATIVIDADE “PIPA NO QUADRADO”

Notas para o Professor

Solução por semelhança de triângulos

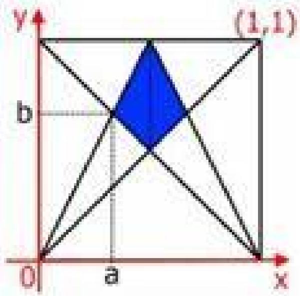


Os triângulos ADQ e QOM são semelhantes porque $< ADQ = < QMO$ (ângulos alternos AD // MO) e $< DAQ = < QOM$ (ângulos alternos AD // MO).

Então $PQ = 2QR$, isso é $PQ = \frac{1}{3}$ e $QR = \frac{1}{6}$.

Área $\Delta QOM = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$ e a área da pipa $= \frac{1}{12}$.

Solução por coordenadas



O ponto (a, b) é a interseção das retas $y = 2x$ e $y = 1 - x$ então $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{2}{3}$.

A pipa é composta por dois triângulos congruentes

Um triângulo tem vértices $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ altura perpendicular $\frac{1}{6}$ e área $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$.

Área da pipa $= \frac{1}{12}$.

FONTE: SITE AIMSSEC / TRADUÇÃO: AUTORA.

As informações no quadro NOTAS PARA O PROFESSOR são destinadas para a solução e o aprofundamento da atividade, assim sendo após selecionar uma estratégia apropriada é formulada uma conjectura para a solução do problema. Nesta ficha de atividade, foram sugeridas duas soluções possíveis, o professor é livre para desenvolver outras soluções.

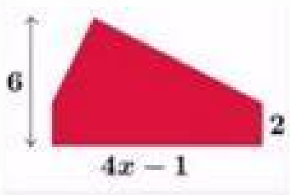
FIGURA 8 – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA DA FICHA DE ATIVIDADE “PIPA NO QUADRADO”

Avaliação de diagnóstica

Isso deve levar cerca de 5 a 10 minutos.

1. Escreva a pergunta no quadro e diga à classe: “Levante 1 dedo se você acha que a resposta é A, 2 dedos para B, 3 dedos para C e 4 dedos para D”.

Qual alternativa dá a expressão da área da figura.



A. $24x - 6$
B. $24x - 2$
C. $16x - 2$
D. $16x - 4$

2. Observe como os alunos responderam. Peça a um aluno que deu a resposta A para explicar por qual motivo ele deu essa resposta e NÃO diga se está certo ou errado, simplesmente agradeça ao aluno por responder.
3. É importante que os alunos expliquem o motivo da sua resposta, pois os ajuda a esclarecer suas próprias ideias e desenvolver suas habilidades de comunicação.
4. Em seguida, faça o mesmo para as respostas B, C e D. Tente se certificar de que os alunos ouçam esses motivos e faça com que os alunos se decidirem se a resposta deles estava certa ou errada.
5. Peça à turma novamente para votar em uma das alternativas levantando 1, 2, 3 ou 4 dedos. Observe se há uma mudança e quem deu respostas certas e erradas.

O conceito de área é necessário para a realização da atividade, então explique a resposta certa ou dê uma tarefa corretiva.

A resposta correta é D.

$$\acute{A}rea\ do\ ret\hat{a}ngulo + \acute{A}rea\ do\ tri\hat{a}ngulo = 2(4x-1) + \frac{1}{2} \times 4(4x-1) = 4(4x-1) = 16x - 4$$

<u>Equívocos comuns</u>

A. Esta é a área da 'caixa' que envolve a figura vermelha.

B. e C. Os alunos que deram essas respostas provavelmete foram dadas aleatoriamente, sem nenhuma compreensão de área.

FONTE: SITE AIMSSEC / TRADUÇÃO: AUTORA.

O quadro AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA é destinado a exercícios para identificar a compreensão do aluno, pode-se testar a conjectura, observar contraexemplos ou casos especiais e fazer conexões com o saber desenvolvido.

FIGURA 9 – PERGUNTA CHAVE DA FICHA DE ATIVIDADE “PIPA NO QUADRADO”

Perguntas chave
Método para figuras semelhantes: • quais ângulos são congruentes? • quais triângulos são semelhantes? • quais triângulos são congruentes? • você consegue encontrar os comprimentos PQ e QR? • quais comprimentos conhecemos? Para o método de Coordenadas: • quais são as equações das retas? • onde elas se cruzam?

FONTE: SITE AIMSSEC / TRADUÇÃO: AUTORA.

No quadro PERGUNTAS CHAVE, podemos comparar com o quadro “Palavras que descrevem o pensamento matemático” de Chaparin (2002). Nesta ficha de atividades, são utilizados termos que remetem à Especialização (descrever, demonstrar, mostrar, desenhar, encontrar).

FIGURA 10 – ACOMPANHAMENTO DA FICHA DE ATIVIDADE “PIPA NO QUADRADO”

Acompanhamento
Kissing Triangles https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-9-11-kissing-triangles/
Why the same https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-11-12-why-the-same/
Square Hole https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-11-12-square-hole/
Wedge on Wedge https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-10-11-wedge-on-wedge/

FONTE: SITE AIMSSEC / TRADUÇÃO: AUTORA.

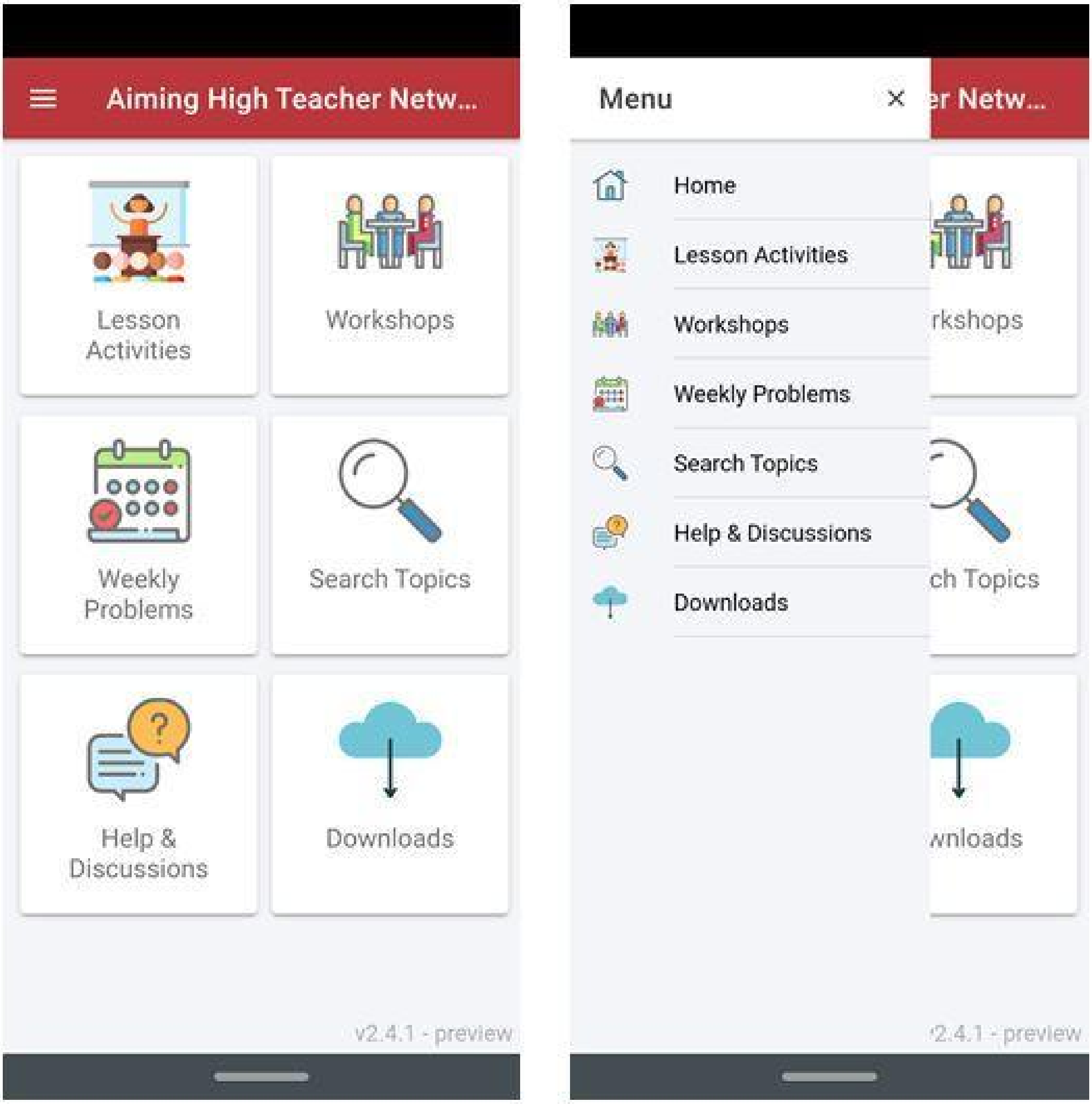
As fichas de atividades propostas no quadro ACOMPANHAMENTO sugere tarefas que fazem conexões com o novo saber e proporciona ao aluno outras abordagens para tratar exercícios parecidos com mais ou menos dificuldades de solução.

De maneira análoga, podemos analisar as Notas Para o Professor das outras nove fichas de atividades selecionadas para este trabalho e chegaremos às mesmas conclusões, visto que elas orientam os professores a não apenas dar a solução do problema, mas sim desenvolver o pensamento matemático.

5.3 PREPARAÇÃO DAS AULAS – UTILIZANDO O APLICATIVO *AIMNGH HIGH*

Os professores podem acessar as fichas de atividades da Rede *Aimingh High* através do aplicativo *Aiming High,* disponível para celulares com sistema operacional *Android* e *IOS*. Este aplicativo, assim como o site estão na língua inglesa.

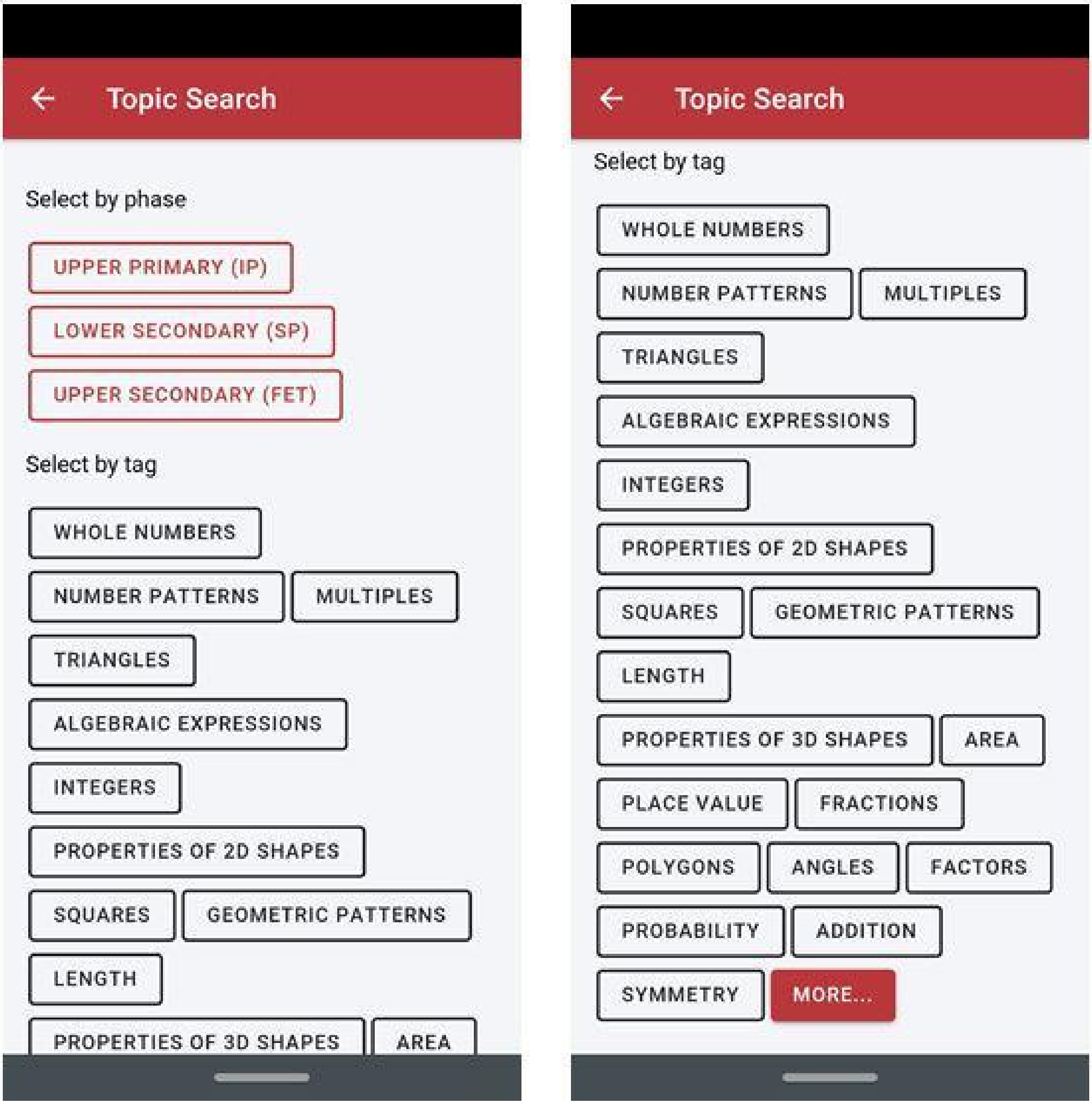
FIGURA 11 – TELA INICIAL DO APLICATIVO AIMING HIGH



FONTE: APLICATIVO *AIMING HIGH*

Dessa forma, o professor tem, na palma da mão, um aplicativo rico em atividades que são compartilhadas semanalmente com conteúdo variado. No momento da preparação das aulas, o professor pode procurar na lupa atividades que se enquadrem no tema da aula e à serie escolar. O educador poderá baixar as fichas de atividades no celular, podendo usar em inteiro teor ou servir como inspiração.

FIGURA 12 – TÓPICO DE PESQUISA NO APLICATIVO AIMING HIGH



FONTE: APLICATIVO *AIMING HIGH*

Dessa forma, o professor pode elaborar as aulas incluindo atividades diferenciadas, sem se limitar aos exercícios disponíveis no livro didático, que dependendo da localização e das políticas públicas (tendo em vista que o Brasil é um país extremamente desigual), podem estar desatualizados.

5.4 Sugestão na aplicação das fichas de atividades da AIMSSEC nas escolas brasileiras

Por trás das fichas de atividades e materiais de apoio ao professor, a metodologia de contribuir no desenvolvimento do Pensamento Matemático no aluno está de acordo com as orientações da BNCC e das Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná. Por conta disso, é seguro indicar aos professores brasileiros a utilização nas aulas de matemática do conteúdo que trabalhamos neste capítulo.

Estes materiais incentivam e disponibilizam ao docente brasileiro a oportunidade de trabalhar o ensino da matemática de maneira diferenciada, atual e condizente com as necessidades dos alunos.

O professor pode incluir as fichas de atividades no decorrer das aulas, por exemplo, para introduzir um conteúdo novo, retomar conteúdo ou no fechamento. Outra sugestão é aplicar esse material nas aulas de apoio[15], de forma a incentivar o aluno que possui dificuldade na aprendizagem a pensar e desenvolver novas ferramentas ou reforçar conceitos matemáticos.

Utilizar as fichas de atividades como um material complementar irá enriquecer as aulas de matemática, oportunizando aos alunos a habilidade de investigar, visualizar e resolver problemas de diferentes formas, além de desenvolver o raciocínio lógico e de se familiarizar com explicações e provas matemáticas.

[15] Se houver na escola, aulas de matemática no contraturno para alunos com dificuldades de aprendizagem.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Após confrontarmos os conteúdos do programa estudado juntamente com a realidade brasileira, chegamos ao resultado de que o programa educacional internacional AIMSSEC pode ser um apoio aos professores brasileiros, sendo as atividades apresentadas, fonte de inspiração ou de aplicação direta em suas aulas de Matemática. Desta maneira, expomos aqui as contribuições, os projetos e os cursos utilizados para uma melhor qualidade na educação matemática em territórios mais desfavorecidos economicamente na África do Sul, para então sugestionar o uso desses dispositivos no nosso país, visto que as desigualdades e a falta de recurso serem similares.

Posto isso, consistindo na observação de materiais didáticos criados por este programa, os quais estão disponíveis na Rede *AIMING HIGH*, selecionamos e traduzimos 10 fichas de atividades e, destas, quatro materiais de apoio para o professor (Notas para o professor). Sendo assim, de modo a entender quais referências os profissionais utilizam para a elaboração desses materiais, realizamos uma tentativa de compreender e agregar conhecimento sobre o Pensamento Matemático, buscando publicações de autores brasileiros e ingleses que corroborassem para a pesquisa.

Os resultados que obtivemos a partir dos estudos desta monografia mostraram-se promissores. Primeiramente, verificamos que as atividades e as orientações para aplicação se enquadram nas ideias do Pensamento Matemático. Além disso, essas ideias condizem com o que preconizam os documentos curriculares brasileiros. Logo, é seguro concluir que a utilização das fichas de atividades e materiais de apoio ao professor são adaptáveis ao ensino de matemática no Brasil, podendo ser aplicado de forma integral ou parcial.

Por fim, como forma de contribuir para as questões de ensino da matemática no Brasil, este trabalho poderá ser base para futuras pesquisas, bem como uma forma de influenciar a prática do que é exposto aqui, a partir da aplicação das fichas de atividades nas aulas de matemática e verificação se, na prática, esse material é viável. Para futuras pesquisas, uma sugestão de complemento a esta monografia é o aprofundamento nos estudos sobre o Método Heurístico e as ideias do pensamento matemático, pois o campo de pesquisa desses estudos é amplo, matéria para futuras averiguações nessas áreas.

Referências

AIMSSEC. CABLE CAR in: **AIMINGHIGH TEACHER NETWORK.** Disponível em: <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/cablecar/>. Acesso em: 16 nov. 2021.

______. **CURSO DE PENSAMENTO MATEMÁTICO**. Disponível em: <https://www.aimssec.ac.za/our-work/courses/mathematical-thinking-course/>. Acesso em: 16 nov. 2021.

______. CYCLIC in: **AIMINGHIGH TEACHER NETWORK.** Disponível em: <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/?s=cyclic>. Acesso em: 16 nov. 2021.

______. DOESN'T ADD UP in: **AIMINGHIGH TEACHER NETWORK.** Disponível em: < https://aiminghigh.aimssec.ac.za/doesnt-add-up/>. Acesso em: 16 nov. 2021.

______. GREAT PYRAMID in: **AIMINGHIGH TEACHER NETWORK.** Disponível em: <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/?s=great+pyramid>. Acesso em: 16 nov. 2021.

______. KISSING CIRCLES in: **AIMINGHIGH TEACHER NETWORK.** Disponível em: <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/?s=kissing+circles>. Acesso em: 16 nov. 2021.

______. KITE IN A SQUARE in: **AIMINGHIGH TEACHER NETWORK.** Disponível em: <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/kite-in-a-square/>. Acesso em: 16 nov. 2021.

______. PYTHAGORAS SIMILARLY in: **AIMINGHIGH TEACHER NETWORK.** Disponível em: <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/pythagoras-similarly/>. Acesso em: 16 nov. 2021.

______. **SEQUÊNCIA DE SETE CURSOS**. Disponível em: <https://www.aimssec.ac.za/7-courses-sequence/ >. Acesso em: 16 nov. 2021.

______. SURPRISE RATIOS in: **AIMINGHIGH TEACHER NETWORK.** Disponível em: <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/years-9-12-surprise-ratios/>. Acesso em: 16 nov. 2021.

______. TOPS in: **AIMINGHIGH TEACHER NETWORK.** Disponível em: <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/tops/>. Acesso em: 16 nov. 2021.

______. TRI FOLD in: **AIMINGHIGH TEACHER NETWORK.** Disponível em: <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/tri-fold/>. Acesso em: 16 nov. 2021.

AMNESTY Internation, **Broken and unequal the state of education in South Africa**. 2020. Disponível em: <https://www.amnesty.org/en/documents/afr53/1705/2020/en/>. Acesso em: 21 nov. 2021.

BALL, B. **Whats Is Mathematical Thinking?** Mathematics Teaching, Derby, v. 181, p.17-19, 2002. Disponível em: <https://www.atm.org.uk/write/mediauploads/journals/mt181/non-member/atm-mt181-17-19.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2021.

BEARDON, T. **Mathematics Education for the 21th Century**. 2018. Disponível em: <https://aiminghigh.aimssec.ac.za/wp-content/uploads/2018/10/SAMSA2018-Mathematics-Education-for-the-21st-Century-Beardon.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2021.

BLANCO, L. J. **Una clasificación de problemas matemáticos**. n. 25. Sevilla: Épsilon, 1993. Disponível em: <https://www.eweb.unex.es/eweb/ljblanco/documentos/blanco93.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2021.

BRAGA, Pablo de Rezende Saturnino. **A rede de ativismo transnacional contra o apartheid na África do Sul**. Dissertação (Mestrado) -Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Instituto de Relações Internacionais, 2010. Disponível em: <https://www.dbd.puc-rio.br/pergamum/tesesabertas/0812654>_10_cap_03.pdf>. Acesso em: 16 nov. 2021

CHAPARIN, R. O. **A formação continuada de professores que ensinam matemática, centrada na resolução de problemas e em processos do pensamento matemático, Brasil**. 2019. 430 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Setor de Educação, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2013. Disponível em: <https://tede2.pucsp.br/handle/handle/22820>. Acesso em: 21 nov. 2021.

DEPARTAMENT OF BASIC EDUCATION. **Curriculum and assessment policy statement grades 10 – 12 Mathematics**. Disponível em: <https://www.education.gov.za/Curriculum/CurriculumAssessmentPolicyStatements(CAPS)/CAPSFET.aspx>. Acesso em 16 nov. 2021.

______. **Infographic:** Education in SA. Disponível em: <https://www.education.gov.za/Home.aspx>. Acesso em 16 nov. 2021.

EMBAIXADA da República da África do Sul. **História da África do Sul**. Disponível em: <https://www.africadosul.org.br/historia>. Acesso em: 16 nov. 2021.

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasil, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2021.

NDIMANDE, B. S. Lutas docentes nas escolas públicas para negros na África do Sul pós-apartheid. **Cadernos de Educação**, Pelotas, mai./ago. 2011. Disponível em: < https://periodicos.ufpel.edu.br/ojs2/index.php/caduc/article/viewFile/1527/1433 >. Acesso em: 21 nov. 2021.

PEREIRA, A. D. A. (Longa) História da Desigualdade na África do Sul. **Philia&Filia**, Porto Alegre, v.2, n.1, jul./dez. 2011. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/Philiaefilia/article/view/24428>. Acesso em: 21 nov. 2021.

SECRETARIA DA EDUCAÇÃO DO PARANÁ. **Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática**. Paraná, 2008. Disponível em <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/conteudo/conteudo.php?conteudo=1> Acesso em: 16 nov. 2021.

SOUTH AFRICAN GOVERNMENT. **História**. Disponível em <https://www.gov.za/about-sa/history>. Acesso em: 16 nov. 2021.

______. **Sistemas Governamentais**. Disponível em <https://www.gov.za/about-sa/government-systems>. Acesso em: 16 nov. 2021.

UNITED NATIONS DEVELOPMENT PROGRAMME. **Relatório de desenvolvimento Humano 2020**. Nova York, 2020. Disponível em: <http://hdr.undp.org/sites/default/files/hdr2020_pt.pdf>. Acesso em: 21 nov. 2021.

ROLKOUSKI, E. Diálogos Com Uma Política Pública De Formação De Professores Que Ensinam Matemática Na Inglaterra: O Caso Do *Math Hubs*. **Revista Eletrônica de Educação Matemática.** Florianópolis, v.14, n. 1/18. 2019. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2019.e59007>. Acesso em 21 nov. 2021.

UNESDOC. **História geral da Africa, VIII**: Africa desde 1935. MAZRUI, Ali A; WONDJI, Christophe (Org). Disponível em: <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000190256>. Acesso em 16 nov. 2021.