Universidade Federal do Paraná

Adriano Aparecido da Silva

O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações

Curitiba

2019

Adriano Aparecido da Silva

O Teorema do Ponto Fixo de Banach e Aplicações

Trabalho de conclusão apresentado ao curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial à obtenção do grau de licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Cleber de Medeira

Curitiba

2019

"A utopia está lá no horizonte. Eu sei que nunca a alcançarei. Me aproximo dois passos, ela se afasta dois passos. Caminho dez passos e o horizonte corre dez passos. Para que serve a utopia? Serve para isso: para que eu não deixe de caminhar".

– Eduardo Galeano citando Fernando Birri

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família, em especial meus pais Ana Maria Figueiredo da Silva e Atayde Fermino da Silva, por ser meu porto seguro e inspiração para superar as adversidades;

Ao professor Cleber Medeira pela paciência, atenção e principalmente dedicação para o desenvolvimento deste trabalho;

Ao meus amigos que tornaram essa trajetória muito mais leve e divertida;

À Universidade Federal do Paraná por fornecer todas as ferramentas necessárias para a melhor formação possível;

Em especial, agradeço Tiago Gonçalves de Andrade por tornar tudo isso possível, e pela habilidade de transformar um dia péssimo em um dia inesquecível, sempre com muita paciência, animação e amizade;

Enfim, agradeço à todos que de alguma forma me ajudaram à realizar esse sonho.

Resumo

Neste trabalho estudamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, assim como todos os requisitos necessários para compreendê-lo e demonstrá-lo, como: espaços métricos completos, continuidade de funções lipschtzianas e o método das aproximações sucessivas. Por fim, apresentaremos alguns exemplos de aplicações diretas do teorema principal do trabalho, com a finalidade de estabelecer condições para que certas equações possuam solução única.

Abstract

In this work we study the Banach Fixed Point Theorem, as well the necessary requirements to understand and prove it, such as: complete metric spaces, Lipschitz continuity of functions, and the successive approximations method. Finally, we show some applications of the main result in order to establish conditions for the existence and uniqueness of solutions of certain equations.

Sumário

Introdução

A palavra *solução*, do ponto de vista etmológico, está relacionada com o termo *decomposição*, não é por menos que na Química solução é um sistema homogêneo, à grosso modo, é um sistema em que certas substâncias foram decompostas pelo solvente. Quando o assunto é Matemática, podemos tomar como objeto de estudo, por exemplo, as equações algébricas que podem ser decompostas em produto de polinômios de menor grau para facilitar a obtenção da solução, isto é, obter os valores em que as incógnitas satisfazem a igualdade. Surgem duas perguntas naturais quando o assunto é a solução de equações, sejam elas equações algébricas, diferenciais ou integrais: "sob que condições essas equações possuem uma solução?", no caso afirmativo, "a solução é única?". Com a intenção de responder essas perguntas em algumas situações, vamos estudar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, que assegura a existência e unicidade de um ponto fixo de funções em espaços métricos completos. Além disso, outro objetivo deste trabalho é analisar sob quais condições podemos usar o teorema principal para garantir a existência e unicidade de soluções de algumas equações.

O principal responsável pela concepção desse teorema foi o matemático polonês Stefan Banach, que foi membro da Escola de Matemática da Polônia, grupo esse responsável por ter desenvolvido importantes trabalhos principalmente na área de Topologia. Afortunadamente foi dispensado do exército um pouco antes da Primeira Guerra Mundial, podendo focar seus esforços no Instituto Politécnico de Lviv, atualmente na Ucrânia, terminando seu Ph.D mesmo sem possuir estudos universitários em Matemática. Seus trabalhos foram fundamentais para o desenvolvimento da Análise Funcional como conhecemos hoje, com contribuições na Teoria das Séries Ortogonais e Teoria de Medida e Integração. Com o objetivo de tentar generalizar equações integrais, ele introduziu o conceito de Espaços Vetoriais Normados que ele denominou de Espaços do tipo B, hoje conhecido como Espaços de Banach. Além disso, ele desenvolveu importantes resultados da área de Análise Funcional como por exemplo o "Teorema de Hahn- Banach" e o "Teorema de Banach-Steinhaus".

Para o desenvolvimento deste trabalho, inicialmente utilizamos o livro [1] como base, a fim de abordar do ponto de vista teórico, as definições de Métrica e Espaço Métrico, para discutirmos as propriedades que cercam Espaços Normados, e para estudarmos a continuidade de funções, em particular do tipo lipschitzianas. Também estudamos neste capítulo definições importantes como a de Isometria e Bola, fazendo uma investigação geométrica do seu comportamento.

No Capítulo 2, estudamos Espaços Métricos Completos, mais precisamente utilizamos exemplos e resultados à respeito de sequências de Cauchy para definirmos com mais rigor o que são Espaço Métricos Completos. Recorremos ao livro [2] para fundamentarmos brevemente o que são Espaços de Banach e Espaços de Hilbert, assim como, é neste capítulo que demonstramos o Teorema do Ponto Fixo de Banach, empregando dentre outras ferramentes o Método das Aproximações Sucessivas. Por fim, utilizando-se também do livro [3], apresentamos no capítulo final algumas das mais usuais aplicações do teorema principal do trabalho, dentre essas, o Teorema de Picard para verificar a existência e unicidade de soluções em Equações Diferenciais Ordinárias.

Capítulo 1

Espaços Métricos

Neste capítulo faremos um breve estudo sobre espaços métricos, apresentaremos algumas definições, exemplos e resultados importantes para o desenvolvimento do trabalho.

1.1 Definições e exemplos

Definição 1 (Métrica). *Uma métrica em um conjunto M é uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}^+$, que relaciona cada par ordenado (x, y), com $x, y \in M$, a um número real não negativo $d(x, y)$, de modo que dados $x, y, z \in M$ sejam satisfeitas as seguintes condições:*

(M1) $d(x, x) = 0$*;*

(M2) Se $x \neq y$*, então* $d(x, y) > 0$*;*

(M3) $d(x, y) = d(y, x)$*;*

(M4) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Podemos considerar $d(x, y)$ como sendo a distância entre os elementos x, y no conjunto M.

As propriedades da definição acima podem ser reescritas se tratarmos as duas primeiras como uma só, isto é, $d(x, y) \geq 0$, de modo que a distância entre x e y será nula unicamente se $x = y$. É interessante observar também que a propriedade (M4) recebe o nome de "desigualdade triangular", e refere-se a um importante teorema da Geometria Euclidiana que assegura, que o comprimento de um dos lados de um triângulo é sempre inferior a soma do comprimento dos outros dois lados.

Exemplo 1. Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto arbitrário. Vamos definir uma função $d : M \times M \to \mathbb{R}^+$ com a seguinte regra:

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y \end{cases}.$$

Para mostrar que essa função é uma métrica, precisamos averiguar cada uma das propriedades da Definição 1. Para tal, uma vez que as condições $(M1), (M2), (M3)$ são imediatas, basta verificarmos que a condição $(M4)$ vale para este exemplo.

Queremos verificar que: dados $x, y, z \in M$, então, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Como $d(x,y) \geq 0, \forall x, y \in M$, logo se $x = y$ a desigualdade é imediata. Se $x \neq y$, então não pode ocorrer o caso $x = y$ e $y = z$, isto é, $x \neq y$ ou $y \neq z$, portanto, $d(x,y) + d(y,z) \geq 1 = d(x,z)$.

Portanto, d é uma métrica. Considerando d como a função que determina a distância entre os elementos no conjunto M, podemos observar pela regra da função que, se x e y forem distintos, a função assume valor 1, agora, se x e y forem iguais, a função assume valor 0. Tendo em vista esse comportamento binário, denominaremos essa função como *métrica zero-um*.

Exemplo 2. Podemos definir uma métrica em $\mathscr{B}(X;\mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R};\ f \text{ é limitada}\}$, pondo para $f, g \in \mathscr{B}(X;\mathbb{R})$ o seguinte:

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|.$$

Vamos verificar que o supremo da diferença de funções limitadas caracteriza uma métrica em $\mathscr{B}(X;\mathbb{R})$. Como as condições $(M1), (M2)$ e $(M3)$ são imediatas, basta verificarmos que vale a *desigualdade triangular* $(M4)$.

Sejam $f, g, h \in \mathscr{B}(X;\mathbb{R})$, observe que:

$$\begin{aligned} |f(x) - h(x)| &= |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \\ &\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \\ &\leq \sup_{y \in X} |f(y) - g(y)| + \sup_{y \in X} |g(y) - h(y)| \\ &\leq d(f,g) + d(g,h). \end{aligned}$$

Dessa forma, $d(f,g) + d(g,h)$ é uma cota superior do conjunto $\{|f(x) - h(x)|/x \in X\}$, o que implica

$$\sup_{x \in X} |f(x) - h(x)| \leq d(f,g) + d(g,h).$$

Portanto, $d(f,g) = \sup\limits_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ é uma métrica em $\mathscr{B}(X;\mathbb{R})$.

Definição 2 (Espaço Métrico)**.** *Um espaço métrico é um par (M,d), onde M é um conjunto e d é uma métrica em M.*

Exemplo 3. O conjunto dos números reais possui uma métrica natural dada pelo módulo, ou seja, a distância entre números na reta real dada por:

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x,y) & \longmapsto & |x-y| \end{array}$$

define uma métrica em $\mathbb{R}$.

Para verificarmos que o conjunto $\mathbb{R}$ munido da métrica d configura um espaço métrico, basta provarmos que a função d é de fato uma métrica em $\mathbb{R}$. Para isso, vamos investigar as propriedades da Definição 1.

É trivial que vale $(M1), (M2)$, então, vamos mostrar que as condições $(M3)$ e $(M4)$ são satisfeitas.

A condição $(M3)$ é observada, afinal:

$$d(x,y) = |x-y| = |(-1).(y-x)| = |-1|.|y-x| = |y-x| = d(y,x).$$

Por fim, observe que vale a desigualdade triangular:

$$\begin{aligned} d(x,z)^2 = |x-z|^2 = (x-z)^2 = (x-y+y-z)^2 = (x-y)^2 + (y-z)^2 + 2(x-y)(y-z) \\ \leq (x-y)^2 + (y-z)^2 + 2|x-y||y-z| = (|x-y| + |y-z|)^2 = (d(x,y) + d(y,z))^2 \\ \Rightarrow d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z). \end{aligned}$$

Portanto, o par $(\mathbb{R}, d)$ é um espaço métrico.

Esse exemplo é interessante para observarmos que se tomarmos um intervalo I arbitrário, onde $I \subset \mathbb{R}$, e considerarmos a mesma métrica d acima indicada, teremos um novo espaço métrico (I,d). Podemos estender essa propriedade para qualquer espaço métrico, isto é, seja (M,d) um espaço métrico, e seja S um subconjunto não vazio de M, então (S,d) configura um espaço métrico, considerando d restrita à $S \times S$. Diremos que essa é uma restrição de d em S e a métrica induzida da métrica definida sobre M.

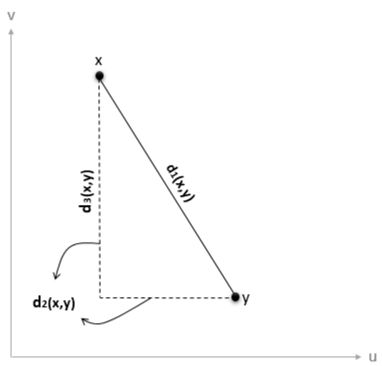
O próximo passo lógico é compreender o que acontece no caso $\mathbb{R}^n$, isto é, expandir o exemplo anterior para o espaço euclidiano. Nesse caso específico, o nosso trabalho será o de analisar algumas funções para verificar se constituem uma métrica no conjunto $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 4. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$.

Inicialmente considere dois pontos $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ no plano cartesiano. De forma natural e bem conhecida da Geometria Analítica temos que a distância entre x e y é dada por:

$$d_1(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2};$$

a qual é consequência imediata do Teorema de Pitágoras. Podemos considerar, além dessa, outras distâncias que são muito úteis em problemas práticos. Por exemplo, a distância $d_2(x, y)$ dada pela soma dos catetos do triângulo retângulo que é conhecida como a *distância do carteiro*, pensando que um carteiro só pode mover-se em direções paralelas aos eixos. Além dessas, temos a distância $d_3(x, y)$ dada pelo maior dos catetos do triângulo retângulo, conforme figura abaixo.



Podemos estender a ideia dessas distâncias no plano para o $\mathbb{R}^n$, ou seja, vamos denotar cada elemento $x \in \mathbb{R}^n$ por $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ com $x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, estabelecendo as funções abaixo:

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2} = \Big[\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2\Big]^{1/2}; \\ d_2(x, y) &= |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n| = \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|; \\ d_3(x, y) &= \max\{|x_1 - y_1|, ..., |x_n - y_n|\} = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|. \end{aligned}$$

Vamos verificar que cada uma das funções acima define uma métrica em $\mathbb{R}^n$, o que carateriza $\mathbb{R}^n$ como espaço métrico em relação à $d_1(x, y), d_2(x, y)$ ou $d_3(x, y)$.

A distância euclidiana $d_1(x,y)$ é uma métrica:

Dados $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$ e $z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{R}^n$, observe que as condições $(M1),(M2)$ e $(M3)$ são imediatas. A condição $(M4)$ pode ser obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
d_1(x,z)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i+y_i-z_i)^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)(y_i-z_i)\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2\right)^{1/2}\\
&= d_1(x,y)^2+d_1(y,z)^2+2d_1(x,y)d(y,z)=\left(d_1(x,y)+d_1(y,z)\right)^2.
\end{aligned}$$

Segue a validade da desigualdade tringular para a distância euclidiana $d_1(x,y)$. A desigualdade usada na terceira linha do cálculo acima é conhecida como *Desigualdade de Cauchy-Schwarz* e será demonstrada no Exemplo 5 mais adiante.

A função $d_2(x,y)$ é uma métrica:

Dados $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$ e $z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{R}^n$, temos que as condições inerentes a Definição 1 são satisfeitas. De fato, observe que $(M1),(M2)$ e $(M3)$ são imediatas, portanto, vamos averiguar apenas a condição $(M4)$.

$$\begin{aligned}
d_2(x,z) &= \sum_{i=1}^{n}|x_i-z_i|\\
&= \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i+y_i-z_i|\\
&\leq \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|+\sum_{i=1}^{n}|y_i-z_i|\\
&= d_2(x,y)+d_2(y,z)
\end{aligned}$$

. **A função $d_3(x,y)$ é uma métrica**:

Dados $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,\ldots,y_n)$ e $z=(z_1,\ldots,z_n)\in\mathbb{R}^n$, vejamos que as condições inerentes da Definição 1 são satisfeitas. Com efeito, note que $(M1),(M2)$ e $(M3)$ são imediatas, dessa forma, vamos novamente averiguar apenas a condição $(M4)$. Dado $i \in \{1, \ldots, n\}$ temos:

$$\begin{aligned} |x_i - z_i| &\leq |x_i - y_i| + |y_i - z_i| \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - y_i|\} + \max_{1 \leq i \leq n} \{|y_i - z_i|\} \\ &= d_3(x, y) + d_3(y, z). \end{aligned}$$

Como o lado direito da desigualdade acima não depende do índice i escolhido segue que

$$d_3(x, z) = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i - z_i|\} \leq d_3(x, y) + d_3(y, z).$$

Definição 3 (Espaço vetorial normado)**.** *Um espaço vetorial normado é um par* $(E, \|\cdot\|)$*, onde* E *é um espaço vetorial e* $\|\cdot\|$ *é uma norma em* E*.*

Denotando $v = (v_1, ..., v_n)$, o espaço $\mathbb{R}^n$ torna-se um espaço vetorial em relação a cada uma das normas abaixo:

$$\begin{aligned} \|v\|_1 &= \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + ... + {v_n}^2} \\ \|v\|_2 &= |v_1| + |v_2| + |v_3| + ... + |v_n| \\ \|v\|_3 &= \max_{1 \leq i \leq n} |v_i| \end{aligned}$$

Exemplo 5 (Espaço Vetorial com produto interno)**.** Seja E um espaço vetorial real. Um produto interno em E é uma função do tipo:

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \quad E \times E &\to \mathbb{R} \\ (u, v) &\mapsto \langle u, v \rangle \end{aligned}$$

de modo que valem as condições abaixo. Dados $u, u', v \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos que:

(1) $\langle u + u', v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u' + v \rangle$;

(2) $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \cdot \langle u, v \rangle$;

(3) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$;

(4) Se $u \neq 0 \Rightarrow \langle u, u \rangle > 0$.

A partir do produto interno, conseguimos definir uma norma em E, pondo $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$. As primeiras duas propriedades de norma são imediatas, quanto a $(N3)$, decorre da "*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*", isto é, $|\langle u, v\rangle| < \|u\| \cdot \|v\|$, que verificaremos abaixo:

Sejam u e v elementos de E linearmente dependentes, então, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ de modo que $u = \alpha \cdot v$, disso temos:

$$\begin{aligned}|\langle u, v\rangle| &= |\langle \alpha \cdot v, v\rangle| = |\alpha \cdot \langle v, v\rangle| = |\alpha| \cdot \langle v, v\rangle = |\alpha|\sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\alpha^2\langle v, v\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle}\\ &= \sqrt{\alpha\langle \alpha v, v\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\alpha\langle v, \alpha v\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\langle \alpha v, \alpha v\rangle}\sqrt{\langle v, v\rangle} = \|u\|\|v\|.\end{aligned}$$

Caso u e v não sejam linearmente dependentes, a desigualdade não valerá, como observado abaixo:

Se u e v não são linearmente independentes, então, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $u + \alpha v \neq e_E$ de modo que $\langle u + \alpha v, u + \alpha v\rangle > 0$. Isso implica que:

$$\begin{aligned}\langle u + \alpha v, u + \alpha v\rangle &= \langle u, u\rangle + \langle u, \alpha v\rangle + \langle \alpha v, u\rangle + \langle \alpha v, \alpha v\rangle =\\ &= \langle u, u\rangle + \alpha\langle u, v\rangle + \alpha\langle u, v\rangle + \alpha^2\langle v, v\rangle > 0.\end{aligned}$$

Portanto, a equação de segundo grau $\langle u, u\rangle + 2 \cdot \alpha\langle u, v\rangle + \alpha^2\langle v, v\rangle = 0$ não possui raízes reais e, portanto, seu discriminante precisa ser menor do que zero.

$$4 \cdot \langle u, v\rangle^2 - 4 \cdot \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle < 0 \Rightarrow 4 \cdot \langle u, v\rangle^2 < 4 \cdot \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle \Rightarrow \langle u, v\rangle^2 < \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle.$$

Finalmente, extraindo a raíz quadrada de ambos os lados da desigualdade e utilizando o fato de que $\langle u, u\rangle$ e $\langle v, v\rangle$ são positivos, temos que:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|.$$

O que conclui nossa prova. Diretamente desse resultado, conseguimos mostrar que vale $(N3)$:

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \cdot \langle x, y\rangle \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \cdot (\|x\| + \|y\|)^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

1.2 Isometrias

Definição 4 (Imersão isométrica). *Sejam M e N espaços métricos. Dizemos que uma função $f : M \to N$ é uma imersão isométrica, quando $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, $\forall x, y \in M$.*

Do ponto de vista intuitivo, uma imersão isométrica é uma função f que preserva distâncias.

Observe que uma imersão isométrica é sempre injetiva. Com efeito, se $f : M \to N$ é uma imersão isométrica, e $x, y \in M$ são tais que $f(x) = f(y)$, então:

$$d(x,y) = d(f(x), f(y)) = 0,$$

o que implica que $x = y$.

Exemplo 6. Seja $(\mathbb{R}^n, d)$ um espaço métrico munido de uma norma arbitrária. Tomando $a, u \in \mathbb{R}^n$ e $\|u\| = 1$ definimos a seguinte função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ onde $f(t) = a + t \cdot u$. Vamos averiguar que é uma imersão isométrica da reta em $\mathbb{R}^n$.

Observe que dados elementos quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$, temos que:

$$\begin{aligned} d(f(s), f(t)) &= \|f(s) - f(t)\| = \|a + s \cdot u - (a + t \cdot u)\| \\ &= \|a + s \cdot u - a - t \cdot u\| = \|a - a + s \cdot u - t \cdot u\| \\ &= \|s \cdot u - t \cdot u\| = \|(s - t) \cdot u\| = |(s - t)| \cdot \|u\| = |s - t|, \end{aligned}$$

Portanto, f é uma imersão isométrica.

Definição 5 (Isometria). *Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetiva.*

Como vimos que uma imersão isométrica é sempre injetiva, então, uma isometria é uma bijeção que preserva distâncias. As isometrias são importantes para a Geometria, pois, do ponto de vista das transformações geométricas, as isometrias traduzem a superposição euclidiana de figuras.

Preliminarmente, precisamos verificar duas afirmações importantes à respeito das isometrias.

Proposição 1. *A função composta de duas isometrias é uma isometria.*

Demonstração. Com efeito, se tomarmos M, N, R espaços métricos e estando determinadas duas isometrias arbitrárias $f : M \to N$ e $g : N \to R$, podemos definir devido ao caráter bijetor das funções, a função composta:

$$g \circ f : M \to R,$$

como f, g são isometrias, preservam distâncias, isto é, para todos $x, y \in M$, temos que:

$$d((g \circ f)(x), (g \circ f)(y)) = d(g(f(x)), g(f(y)) = d(f(x), f(y)) = d(x, y),$$

logo, a composta de isometrias é um isometria. □

Proposição 2. *A inversa de uma isometria é uma isometria.*

Demonstração. De fato, análogo ao caso anterior, se tomarmos M, N espaços métricos e estando determinada uma isometria qualquer $f : M \to N$; como f é uma bijeção, somos capazes de definir a função inversa abaixo:

$$f^{-1} : N \to M,$$

como f é uma isometria, preserva distâncias, isto é, para todos $x, y \in M$ deve valer que:

$$d(f(x), f(y)) = d(x, y),$$

portanto, tomando dois pontos quaisquer $w, z \in N$, onde N é o $Dom f^{-1}$, temos que $f^{-1}(w) = f^{-1}(f(x)) = x$ e $f^{-1}(z) = f^{-1}(f(y)) = y$, para algum $x, y \in M$, devido ao cunho bijetor da função, temos:

$$d(f^{-1}(w), f^{-1}(z)) = d(x, y) = d(f(x), f(y)) = d(w, z))$$

logo, a inversa de uma isometria é ainda uma isometria. □

Exemplo 7. A translação pelo vetor a é uma isometria, isto é, fixado um elemento $a \in \mathbb{R}^n$, a aplicação $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $g(x) = x + a$ é uma isometria.

De fato, tomando $s, t \in \mathbb{R}^n$, temos que:

$$d(g(t), g(s)) = |g(t) - g(s)| = |t + s - (s + a)| = |t - s| = d(t, s),$$

logo, g é uma imersão isométrica, basta provar que também é sobrejetiva.

Seja $y \in \mathbb{R}^n$ um elemento no contra domínio de g, então considere $x = y - a$, assim:

$$g(x) = g(y - a) = (y - a) + a = y,$$

portanto a função $g(x)$ é sobrejetiva e uma Isometria.

Exemplo 8. A função $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $h(x) = -x$ é uma Isometria.

De fato, vejamos primeiramente que a função h é uma imersão isométrica. Dados $s, t \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\begin{aligned} d(h(t), h(s)) &= |h(t) - h(s)| = |-t + s| = |(-1).(t - s)| \\ &= |-1|.|t - s| = |t - s| = d(t, s). \end{aligned}$$

Por fim, basta mostrarmos que h é sobrejetiva:

$$\text{Se } y = -x \Rightarrow x = -y \Rightarrow h^{-1}(x) = -x$$

portanto, h é uma isometria.

1.3 Pseudométricas

Definição 6 (Pseudométrica)**.** *Sejam $x, y, z \in M$. Uma pseudométrica num conjunto M é uma função real $d : M \times M \to \mathbb{R}^+$, onde são satisfeitas as seguintes condições:*

(PM1) $d(x, x) = 0$*;*

(PM2) $d(x, y) = d(y, x)$ *e*

(PM3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$*.*

Observe que uma pseudométrica é uma função d que cumpre exatamente as mesmas propriedades de uma métrica, salvo o fato de que em uma pseudométrica mesmo pontos x, y diferentes no domínio dessa função podem assumir $d(x, y) = 0$. Definir uma pseudométrica abre espaço para novas definições como a de *espaço pseudométrico* e *pseudonormas*, à grosso modo, basta adaptar as definições de métrica e norma.

Definição 7 (Espaço pseudométrico)**.** *Um espaço pseudométrico é um par (M, d) onde M é um conjunto e d é uma pseudométrica em M.*

Definição 8 (Pseudonorma)**.** *Sejam $u, v \in E$ e seja $\lambda \in \mathbb{R}$. Uma pseudonorma num espaço vetorial E é uma função $|\cdot| : E \to \mathbb{R}$ que respeita as seguintes condições:*

(PN1) $|u| \geq 0$*;*

(PN2) $|\lambda.u| = |\lambda|.|u|$ *e*

(PN3) $|u + v| \leq |u| + |v|$*.*

Exemplo 9. Sempre podemos definir uma pseudométrica trivial em um conjunto P qualquer, pondo $d(x, y) = 0$, $\forall x, y \in P$.

Seja qual for o conjunto P, assumindo a função acima estaremos determinando uma pseudométrica trivial e observe que todas as propriedades que cercam essa função d que caracterizam ela como pseudométrica são evidentes, por essa razão omitiremos sua demonstração.

Exemplo 10. Uma pseudonorma ocorre no espaço E das funções $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que são integráveis no sentido de Riemann, quando se define:

$$\|f\| = \int_a^b |f(x)| dx$$

Observe que, como aqui as funções f não precisam ser contínuas, pode ocorrer que $|f| = 0$, sem que f se anule em todos os pontos de seu domínio, bastando tomar um número finito de pontos no intervalo $[a, b]$.

1.4 Bolas e Esferas

Nas próximas unidades deste capítulo apresentaremos progressivamente certas noções de topologia, por ora, vamos nos ater a três definições fundamentais que estão diretamente ligadas ao conceito de métrica, sendo elas: bola aberta, bola fechada e esfera. Nosso objetivo nessa unidade será o de compreender as definições, estudar certos exemplos e analisar as alterações que ocorrem no comportamento geométrico das bolas em relação à métricas específicas.

Definição 9 (Bola aberta). *A bola aberta de centro a e raio r, é o conjunto $B(a;r)$ dos pontos de M cujo a distância ao ponto a é menor que r, ou seja:*

$$B(a;r) = \{x \in M; d(x,a) < r\}.$$

Definição 10 (Bola fechada). *A bola fechada de centro a e raio r, é o conjunto $B[a;r]$ dos pontos de M cujo a distância ao ponto a é menor ou igual à r, ou seja:*

$$B[a;r] = \{x \in M; d(x,a) \leq r\}.$$

Definição 11. *Uma esfera de centro a e raio r é o conjunto $S(a;r)$ formado pelos pontos que equidistam de a em relação à r, isto é:*

$$S(a;r) = \{x \in M; d(x,a) = r\}.$$

Evidentemente, a partir das definições acima, podemos verificar que:

$$B[a;r] = B(a;r) \cup S(a;r).$$

Exemplo 11. Seja M um espaço métrico munido da métrica zero-um, então, para todo $a \in M$, temos que $B(a;r) = B[a;r] = M$ se $r > 1$, e $B(a;r) = B[a;r] = \{a\}$ se $r < 1$.

Já sabemos que a métrica zero-um é representada pela aplicação:

$$d : M \times M \to \mathbb{R}$$
$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq y \\ 0, & \text{se } x = y \end{cases}$$

Então, uma bola nesse espaço métrico tem um comportamento atípico, porque, ou representa o espaço métrico na sua totalidade ou apenas um ponto. No caso específico em que $r > 1$, é evidente que a bola aberta representa todo o espaço métrico M, afinal, para todo ponto $x \in M$, temos que $d(x, a) = 0$ ou $d(x, a) = 1$, logo, se $r > 1$ a bola em questão atenderá todos os pontos. Agora no caso em que $r < 1$ deve valer que:

$$B(a; r) = B[a; r] = \{x \in M; d(x, a) < 1\},$$

mas a distância $d(x, a) < 1$ apenas para o ponto a, já que para todo outro ponto $x \neq a$, $d(x, a) = 1$.

Com um raciocínio análogo somos capazes de compreender os casos abaixo:

$$B(a; r) = B[a; r] = \{x \in M; d(x, a) \leq 1\} = M;$$
$$S[a; r] = \{x \in M; d(x, a) = 1\} = M - \{a\}.$$

Exemplo 12. Na reta com a métrica usual, temos que as bolas são representadas por intervalos e a esfera é formada pelos extremos do intervalo relacionado, definidas da seguinte forma: $B(a; r) = (a - r, a + r)$, $B[a; r] = [a + r, a - r]$, e $S = \{a - r, a + r\}$.

Um caso mais interessante é o das métricas usuais do $\mathbb{R}^2$. Futuramente demonstraremos que as três métricas em questão são equivalentes, por enquanto nosso objetivo será mostrar que isso não se traduz em definir uma bola geometricamente idêntica.

Exemplo 13. As métricas usuais do $\mathbb{R}^2$.

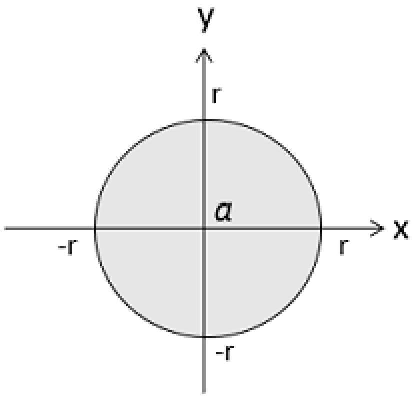
Considerando $X \in \mathbb{R}^2$ definido como $X = (x_1, x_2)$, e assumindo por comodidade o centro $a = (0, 0)$, vamos estudar as três métricas abaixo e a sua relação com as definições da unidade.

- A métrica euclidiana $d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$.

Em virtude da métrica euclidiana, considerando $X \in \mathbb{R}^2$, podemos determinar a bola fechada do seguinte modo:

$$B[a; r] = \{X \in \mathbb{R}^2; \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2} \leq r\};$$

nesse caso, podemos observar que se $\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} \leq r$, então, $(x_1)^2 + (x_2)^2 \leq r^2$, que já verificamos se tratar da esfera usual no $\mathbb{R}^2$, mas dada a desigualdade, estendendo-se para todos os pontos internos da bola aberta relacionada, como na figura abaixo.

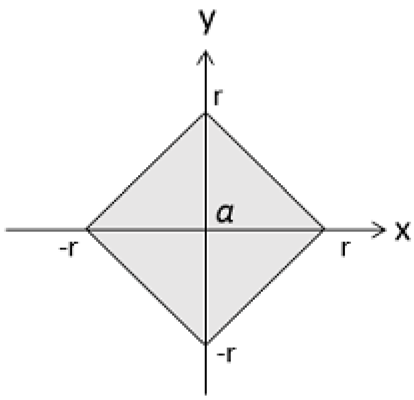


- A métrica $d(x,y) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$.

Assumindo essa métrica, podemos determinar a bola fechada do seguinte modo:

$$B[a;r] = \{X \in \mathbb{R}^2; |x_1| + |x_2| \leq r\};$$

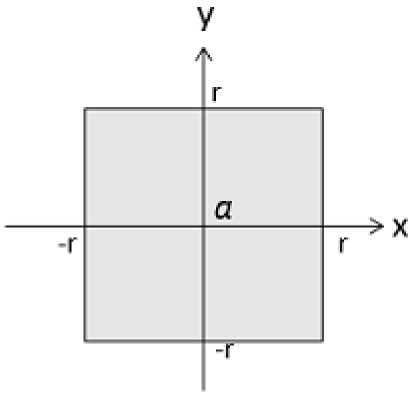
isto é, vamos somar o valor absoluto das coordenadas de modo que não ultrapasse o raio r, formando uma bola fechada inusitada como na figura abaixo.



- A métrica $d(x,y) = \max\{|x_1|, |x_2|\}$.

Nesse último caso, a definição de bola basicamente limita o maior dos valores absolutos das coordenadas ao raio, formando uma bola fechada tão inusitada quanto a anterior, da seguinte forma:

$$B[a;r] = \{X \in \mathbb{R}^2; \max\{|x_1|, |x_2|\} \leq r\};$$



Esses são exemplos que evidenciam como a definição de bola depende diretamente da métrica e o espaço métrico relacionado, análogo a esse caso, podemos determinar a condição para que uma função limitada esteja numa bola fechada em um espaço de funções limitadas $\mathscr{B}([a,b];\mathbb{R})$.

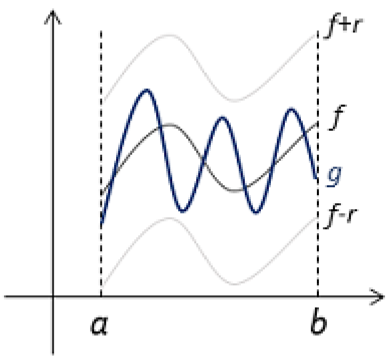
Exemplo 14. Seja $\mathscr{B}([a,b];\mathbb{R})$ o conjunto das funções limitadas no intervalo $[a,b]$. Dessa forma, se $f,g \in \mathscr{B}([a,b];\mathbb{R})$, ja definimos uma métrica para conjunto de funções do seguinte modo:

$$\begin{aligned} d(f,g) : \mathscr{B} \times \mathscr{B} &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (f,g) &\mapsto \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|. \end{aligned}$$

A condição para que uma função limitada $g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ pertença a bola fechada $B[f;r]$ é que $|f(x) - g(x)| \leq r$, $\forall x \in [a,b]$. De fato, pela definição de bola fechada temos que $B[f;r] = \{g \in \mathscr{B};\ d(f,g) \leq r\}$; mas

$$d(f,g) \leq r \Leftrightarrow \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| \leq r \Leftrightarrow |f(x) - g(x)| \leq r$$

Graficamente é ainda mais simples, podendo ser representado como na figura abaixo.



1.5 Espaço Métrico Discreto

Definição 12. *Seja M um espaço métrico, dizemos que um ponto $a \in M$ é um ponto isolado de M, se ele é uma bola aberta em M, isto é:*

$$\exists r > 0, \text{ de modo que } B(a;r) = \{a\}.$$

Exemplo 15. Seja $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros, então, todo ponto $x_0 \in \mathbb{Z}$ é um ponto isolado.

Evidente, porque se utilizarmos a métrica usual em $\mathbb{R}$ podemos concluir à partir da própria definição de bola aberta que:

$$B(x_0;1) = \{x \in \mathbb{Z}; d(x,x_0) < 1\} \Rightarrow B(x_0;1) = \{x \in \mathbb{Z}; |x - x_0| < 1\},$$

contudo,

$$|x - x_0| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - x_0 < 1,$$

e como estamos no conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$, vale que

$$x - x_0 = 0 \Rightarrow x = x_0,$$

logo,

$$B(x_0;1) = \{x_0\}.$$

Por outro lado, se assumirmos $\bar{P}$ um conjunto definido como $\bar{P} = \{0, 1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$, o mesmo não vale, pois, por menor que seja o raio r que escolhermos, sempre haverá um $n \in \mathbb{Z}$, de modo que $d(0, 1/n) < r$. Em particular, $\bar{P} = \{1, 1/2, \ldots, 1/n, \ldots\}$ é tal que todos seus pontos são isolados.

Definição 13 (Espaço métrico discreto)**.** *Um espaço métrico M é dito discreto se todo $x \in M$ é ponto isolado.*

Ser discreto é uma característica de determinados conjuntos que não está necessariamente relacionada ao conjunto ser finito ou não, todavia, é evidente que todo conjunto finito é discreto.

Alguns exemplos de espaços métricos discretos são: a Imagem da métrica zero-um, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\bar{P} - \{0\}$, ou qualquer outro subconjunto de M se o mesmo for um conjunto discreto.

Proposição 3. *Dados os pontos $a \neq b$ num espaço métrico M, e sejam $r > 0$ e $s > 0$ de modo que $r + s \leq d(a,b)$, então, as bolas abertas $B(a;r)$ e $B(b;s)$ são disjuntas.*

Demonstração. Vamos supor que exista $x \in B(a;r) \cap B(b;s)$, então:

$$\begin{aligned} &d(a,x) < r \text{ e } d(b,x) < s \\ &\Rightarrow d(a,x) + d(x,b) < r + s \leq d(a,b); \end{aligned}$$

por outro lado, como vale a desigualdade triangular, então:

$$\begin{aligned} d(a,b) \leq d(a,x) + d(b,x) < r + s \leq d(a,b) \\ \Rightarrow d(a,b) < d(a,b). \end{aligned}$$

Absurdo. □

Esse resultado é muito importante, pois, ele verifica que todo espaço métrico M é um Espaço de Hausdorff, isto é, sem muitos detalhes, um Espaço de Hausdorff é um espaço topológico em que quaisquer dois pontos distintos possuem vizinhanças disjuntas. Um resultado interessante derivado dessa proposição é que, se $r + s < d(a,b)$, então as bolas fechadas $B[a;r]$ e $B[b;s]$ são também disjuntas. De fato, tendo em vista que se existir $x \in B(a;r) \cap B(b;s)$, análogo ao caso anterior, teremos que $d(a,b) \leq d(a,x) + d(b,x) < r + s \leq d(a,b)$, o que caracteriza uma contradição.

1.6 Funções Contínuas

Definição 14 (Função contínua num ponto)**.** *Sejam M, N espaços métricos. Diz-se que a função $f : M \to N$ é contínua no ponto $a \in M$ quando, $\forall \varepsilon > 0$, é possível obter um $\delta > 0$ de modo que $d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.*

A definição acima refere-se à continuidade num ponto $a \in M$, por esse motivo dizemos que trata-se de uma definição local, consequentemente uma função $f : M \to N$ é continua se ela é contínua em todos os pontos do seu domínio. Observe também que definir uma função contínua $f : M \to N$ num ponto $a \in M$ é equivalente à dizer que, para qualquer bola $B_2(f(a);\varepsilon)$, existe uma bola $B_1(a;\delta)$, de modo que $f(B_1) \subset B_2$.

Quando estamos estudando a continuidade de funções no caso real, dizer que f é contínua no ponto $a \in M$ significa que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ de modo que se $x \in M$:

$$a - \delta < x < a + \delta \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon.$$

Exemplo 16 (Funções lipschitzianas)**.** Vamos considerar uma constante $c \in \mathbb{R}$, então, a função $f : M \to N$ é dita lipschtziana se para todo $x, y \in M$, vale:

$$d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y).$$

As funções lipschitzianas (como são chamadas devido ao matemático alemão do século XIX Rudolf Lipschitz), são uma categoria de funções em que a distância entre as imagens de dois pontos é sempre menor ou igual a distância entre dois pontos multiplicado por uma constante, porém, por mais que essa característica à defina, não é a mais interessante. A propriedade mais intrigante das funções lipschitzianas é que se f é uma função lipschitziana então f é contínua. Com efeito, iremos demonstrar que $f : M \to N$ é contínua em todo seu domínio.

Seja $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{c}$, $\forall a \in M$ temos que:

$$\begin{aligned} d(x, a) < \delta \quad &\Rightarrow \quad d(f(x), f(a)) \leq c.d(x, a) < c.\delta \\ &\Rightarrow \quad d(f(x), f(a)) < c.\delta = \frac{c.\varepsilon}{c} = \varepsilon, \end{aligned}$$

logo, $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$, e isso conclui nossa demonstração.

1.6.1 Propriedades elementares das funções contínuas

Proposição 4. *A composta de duas aplicações contínuas é também contínua. Mais precisamente, se $f : M \to N$ é contínua no ponto a e $g : N \to P$ é contínua no ponto $f(a)$, então $g \circ f : M \to P$ é contínua no ponto a.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, como g é contínua em $f(a)$, então $\exists \lambda > 0$ tal que $d(x, f(a)) < \lambda \Rightarrow d(g(x), g(f(a))) < \varepsilon$. Por sua vez, dado $\lambda > 0$; $\exists \delta > 0$ de tal modo que $d(x_2, a) < \delta \Rightarrow d(f(x_2), f(a)) < \lambda$, logo, dado $\varepsilon > 0$; $\exists \delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(g(f(x)), g(f(a))) < \varepsilon$, portanto $g \circ f$ é contínua.

□

Um resultado interessante diz respeito ao que acontece com funções que possuem derivadas limitadas, mais precisamente, se uma função real $f : I \to \mathbb{R}$, definida num intervalo I, é derivável e $|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in I$, então, pelo Teorema do Valor Médio, temos que dado $x, y \in \mathbb{R}$, existe z entre x e y tal que $f(x) - f(y) = f'(z).(x - y)$, então $|f(x) - f(y)| \leq c.|x - y|$. Assim, toda função com derivada limitada num intervalo é lipschitziana.

Exemplo 17. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^n$ é lipschitziana em cada parte limitada de $\mathbb{R}$.

Para verificarmos esse resultado basta tomar uma parte limitada de $\mathbb{R}$, ou seja, vamos tomar apenas os $x \in \mathbb{R}$ de modo que $|x| \leq a$. Se $|x| \leq a \Rightarrow |f'(x)| = n|x|^{n-1} \leq n.a^{n-1}$, isso nos mostra que $|f'(x)| \leq n.a^{n-1}$ mas, se uma função tem derivada limitada num intervalo, então é lipschitziana.

Definição 15 (Contrações). *Se $f : M \to N$ é tal que $d(f(x), f(y)) < c \cdot d(x, y)$ para todo $x, y \in M$, com $0 \leq c < 1$, dizemos que f é uma contração. No caso particular em que $c = 1$ denominamos a função de contração fraca.*

Exemplo 18 (Função constante). Seja $f : M \to N$ definida por $f(x) = k$, então, f é contínua.

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\delta > 0$ de modo que $B(a; \delta) = \{a\}$. Se isso ocorre, $d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) = 0 < \varepsilon$.

Decorre naturalmente que se M é um conjunto discreto, então toda função $f : M \to N$ é contínua.

1.6.2 Homeomorfismo

Exemplo 19. Seja M a reta com a métrica zero-um. A aplicação identidade $i : M \to \mathbb{R}$ é contínua, mas sua inversa $j : \mathbb{R} \to M$ (também dada por $j(x) = x$) não será contínua.

Exemplo 20. Tomamos agora $M = [-1, 0] \cup (1, \infty)$, $N = [0, \infty)$ e $f : M \to N$ definida por $f(x) = x^2$. Para todo $x \in M$, então, f é contínua.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, observe que:

$$|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |(x - a)(x + a)| = |x - a|.|x + a|.$$

Observe também que nas proximidades de a podemos compreender o comportamento de x, e $(x + a)$:

$$2a - 1 < x + a < 2a + 1 \Rightarrow |x - a|.|x + a| < \delta(2a + 1) = \frac{\varepsilon}{(2a + 1)}.(2a + 1) = \varepsilon.$$

Portanto, para $\delta = \frac{\varepsilon}{(2a+1)}$ concluímos que f é contínua, e como é evidentemente bijetiva, podemos determinar sua inversa $f^{-1}(x)$.

Note que a função inversa $f^{-1}(x)$ é definida da seguinte forma:

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } 1 < x \\ -\sqrt{x}, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Portanto, é evidente pelo gráfico que a função f^{-1} é descontínua no ponto 1.

Definição 16 (Homeomorfismo)**.** *Sejam M e N espaços métricos. Um homeomorfismo de M sobre N é uma bijeção contínua $f : M \to N$ cuja inversa $f^{-1} : N \to M$ também é contínua.*

Definição 17 (Espaços homeomorfos)**.** *Dizemos que M e N são homeomorfos se existe um homeomorfismo de M sobre N.*

Exemplo 21. Tomamos $M = [0, \infty)$, $N = [0, \infty)$ então $f : M \to N$ definida como $f(x) = x^2$ é contínua e possui inversa contínua.

De fato, análogo ao exemplo anterior, seja $f : M \to N$ definida por $f(x) = x^2$ e dado $\varepsilon > 0$, vale que $|f(x) - f(a)| = |x^2 - a^2| = |(x-a)(x+a)| = |x-a|.|x+a|$, logo observe que $|x-a| < \delta$ e nas proximidades de a vale que:

$$\begin{gathered} a - 1 < x < a + 1 \\ \Rightarrow 2a - 1 < x + a < 2a + 1 \\ \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \delta(2a+1) = \frac{\varepsilon}{(2a+1)}(2a+1) = \varepsilon. \end{gathered}$$

Logo, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{2a+1}$. Portanto, f é contínua.

Sobre ser bijetiva, é evidente nesse caso.

(i) Injetiva: Se $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

De fato, se $(x_1)^2 = (x_2)^2 \Rightarrow \pm\sqrt{(x_1)^2} = \pm\sqrt{(x_2)^2} \Rightarrow \pm(x_1) = \pm(x_2)$, e como só estamos preocupados com $x \geq 0$, temos que $x_1 = x_2$.

(ii) Sobrejetiva: Para todo $y \in N$, $\exists x \in M / f(x) = y$.

Se $y \in N$, temos que $y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y}$, logo $f(x)$ é sobrejetiva.

Portanto, f é contínua e bijetiva, e observe que o mesmo vale para $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Proposição 5. *Se $f : M \to N$ e $g : N \to P$ são homeomorfismos, então $g \circ f : M \to P$ e $f^{-1} : N \to M$ também são homeomorfismos.*

Demonstração. Se $f : M \to N$ e $g : N \to P$ são homeomorfismos, então f, g são contínuas e bijetivas, e $f^{-1} : N \to M$ e $g^{-1} : P \to N$ também são contínuas.

Agora, como f, g são contínuas e bijetivas, então $g \circ f$ também será, e como f^{-1}, g^{-1} são contínuas também, então $(g \circ f)^{-1}$ é contínua, logo $g \circ f$ é um homeomorfismo como gostaríamos. □

Proposição 6. *Toda isometria é um homeomorfismo.*

Demonstração. Seja $f : M \to N$ uma isometria, então, $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$, logo f é uma contração fraca e, portanto, contínua.

Agora, como f é uma isometria, f^{-1} também é, logo f é um homeomorfismo. □

Exemplo 22. Se o espaço métrico N é discreto e $f : M \to N$ é um homeomorfismo, então M também é discreto.

Se N é discreto, então existe uma bola $B(f(a); \varepsilon) = \{f(a)\}$. Como f é contínua, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $f(B(a; \delta)) \subset B(f(a); \varepsilon) = \{f(a)\}$, e como f é injetiva, a bola $B(a; \delta)$ tem um único elemento. Portanto, M é discreto.

Observe também que se M e N são discretos, e possuem o mesmo número cardinal, então são homeomorfos. De fato, se M e N são discretos e possuem o mesmo número de elementos, então qualquer f bijetiva entre eles é um homeomorfismo.

Observação: Ser discreto e, portanto, não ser discreto, é uma propriedade topológica, mas ser limitado é uma propriedade métrica. Um exemplo interessante é $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ e $P = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$, como $\mathbb{N}$ e P são discretos e possuem infinitos elementos, são homeomorfos, mas dividem a mesma propriedade métrica (ser limitado), mas gozam da mesma propriedade topológica.

"Toda propriedade topológica é métrica, mas não vale a recíproca".

Exemplo 23. (Homeomorfismo de bolas) Duas bolas fechadas no espaço normado E são homeomorfos.

Antes de pensar em bolas fechadas, vamos compreender o caso em que as bolas são abertas. Vamos tomar duas bolas abertas $B(a; r)$ e $B(b; s)$ em E, e mostrar como construímos um homeomorfismo entre elas.

Observe que t_a e m_λ são evidentemente contínuas e de maneira análoga, as inversas $(t_a)^{-1} = t_{-a}$ e $(m_\lambda)^{-1} = m_\mu$ são contínuas. Logo, t_a e m_λ são homeomorfismos.

Vamos construir uma função composta ρ, que é um homeomorfismo entre $B(a; r)$ e $B(b; s)$.

1. Transladamos $B(a;r)$ de modo que seu centro torne-se a origem. (t_{-a}).

2. Multiplicamos os vetores de $B(a;r)$ por s/r, isso fará com que todos os vetores $v < r$, tornem-se vetores $v' < s$. $(m_{s/r})$
   $\rightarrow$ Nesse caso, $B(a;r)$ tornou-se $B(0;s)$.

3. Transladamos $B(0;s)$ centralizando no ponto b.

Logo, $\varphi(B(a;r)) = B(b;s)$, um homeomorfismo, pois apenas utilizamos translação e homotetia. Mas, quem é φ?

$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2 \circ \varphi_3 = t_b \circ m_{s/r} \circ t_{-a}$.

O mesmo obviamente vale para duas bolas fechadas.

Observação: Convém observar que, num espaço métrico arbitrário, duas bolas abertas podem não ser homeomorfismos. Podemos pegar um espaço métrico M onde $B(a;r) = \{a\}$ (ponto isolado) e $B(b;s)$ com b não isolado, não tem como determinarmos uma bijeção, pois $B(b;s)$ é um conjunto infinito.

Exemplo 24 (Imersão Topológica)**.** Uma aplicação injetiva $f : M \rightarrow N$ que é um homeomorfismo de M sobre sua imagem $f(M)$ chama-se uma *imersão topológica*. Disso, tiramos que toda imersão isométrica é uma imersão topológica.

De fato, toda imersão isométrica é uma imersão topológica, pois $f : M \rightarrow N$ é uma imersão isométrica se, para todo $x, y \in M$ temos $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$. Já provamos que f é injetiva se é uma imersão isométrica.

Essa $f : M \rightarrow N$ será uma imersão topológica, se $f : M \rightarrow f(M)$ for um homeomorfismo. Observe que, se f é uma imersão isométrica, então f é lipschitziana, e por isso contínua. Como é injetiva, $f^{-1} : f(M) \rightarrow M$ é lipschitziana e por fim contínua. Logo, toda imersão isométrica é uma imersão topológica.

Exemplo 25. A aplicação $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $f(t) = (t, t^2)$ é uma imersão topológica da reta no plano, ou seja, deve valer que $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um homeomorfismo;

Com efeito, a inversa $f^{-1} : f(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f^{-1}(t, t^2)$ é a restrição a $f(\mathbb{R})$ da projeção $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Exemplo 26. Toda bola aberta de um espaço vetorial normado E é homeomorfo ao espaço inteiro E.

No Exemplo 23 discutimos que $B(a;r)$ é sempre homeomorfa a $B(b;s)$, logo, se mostrarmos que qualquer $B(c;t)$ é homeomorfa a E, já teremos mostrado que esse resultado vale para toda bola do espaço vetorial normado E. Mais precisamente, podemos mostrar que esse resultado vale no caso mais trivial, $B = B(0;1)$.

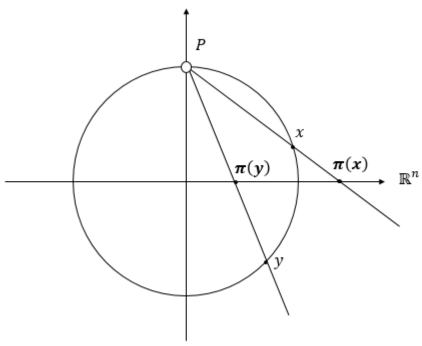
Vamos exibir uma função $f : E \to B$, no caso, $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, observe que $|f'(x)| = \left|\dfrac{c}{1+\|x\|}\right| < 1$, para todo $x \in E$, ou seja, $f(x)$ será um vetor $v \in B$, com módulo menor que 1.

Observe agora que essa função é contínua em todos os pontos do seu domínio, e podemos definir uma função $g(x)$ inversa.

$$y = \frac{x}{1+\|x\|} \Rightarrow x = \frac{y}{1+\|y\|} \Rightarrow x.(1+\|y\|) = y \Rightarrow x + x\|y\| - y = 0 \Rightarrow y = \frac{-x}{x-1} \Rightarrow y = \frac{x}{1-\|x\|},$$

mas $\|x\| < 1$, pela sua função anterior, deve valer que essa função inversa $g(x) = \dfrac{x}{1-\|x\|}$ ou $g(y) = \dfrac{y}{1-\|y\|}$, é contínua. Logo, há um homeomorfismo $f : E \to B$, o que significa que B e E são homeomorfos.

Exemplo 27 (A projeção estereográfica). Seja $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \langle x, x\rangle = 1\}$ Vamos pegar a esfera n-dimensional e o ponto $p = (0,0,\ldots,0,1) \in S^n$, como na figura abaixo:



Então, a projeção estereográfica $\pi : S^n - \{p\} \to \mathbb{R}^n$ estabelece um homeomorfismo entre a esfera menos o polo norte, com o espaço R^n.

Vamos compreender o que acontece no caso $\mathbb{R}^2$. Basicamente, a cada $x \in S^2$ temos um correspondente diferente em S^2 atingindo infinitos pontos no espaço euclidiano. Geometricamente, $\pi(x)$ é o ponto em que a semi reta px intercepta o espaço euclidiano, isto é, $x_{n+1} = 0$.

Podemos obter uma fórmula para $\pi(x)$, observando que os pontos da semi reta px tem a forma $p + t.(x - p)$, onde $t > 0$. Esse ponto pertence ao hiperplano $x_{n+1} = 0$, quando sua última coordenada é $1 + t \cdot (x_{n+1} - 1) = 0$, então:

$$\begin{aligned} 1 + t \cdot (x_{n+1} - 1) = 0 \quad &\Rightarrow \quad t \cdot (x_{n+1} - 1) = -1 \\ &\Rightarrow \quad t = \frac{-1}{x_{n+1} - 1} = \frac{1}{1 - x_{n+1}} \\ &\Rightarrow \quad \pi(x) = P + \frac{x - p}{1 - x_{n+1}}. \end{aligned}$$

Então, se temos um ponto $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, convencionando $x' = (x_0, x_1, \ldots, x^n)$, podemos considerar a função $\pi(x) = \dfrac{x'}{(1 - x_{n+1})}$. Observe que como x_{n+1} nunca vai ser 1, e a função $\pi(x)$ é contínua, bem como sua função inversa: $\phi : \mathbb{R}^n \to S^n - \{P\}$ definida como $\phi(y) = x$, então $\pi(x)$ é um homeomorfismo.

1.7 Métricas Equivalentes

Definição 18. *Diremos que uma métrica d_1 é mais fina que uma métrica d_2, e denotaremos $d_1 > d_2$, quando a aplicação identidade $i_{12} : M_1 \to M_2$ for contínua.*

Como $i_{12}(x) = x$ para todo $x \in M_1$, a definição de continuidade oferece a seguinte condição suficiente para que d_1 seja mais fina que d_2:

Condição suficiente e necessária: Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de tal modo que se $x \in B_1(a; \varepsilon)$, então, $x \in B_2(a; \delta)$. Portanto, é suficiente dizer que $d_1 > d_2$ se, e somente se, toda bola aberta segundo d_2 contém uma bola aberta de mesmo centro segundo d_1.

Exemplo 28. Se o espaço métrico (M, d_1) é discreto, então, d_1 é mais fina do que qualquer outra métrica d_2 em M.

De fato, se (M, d_1) é um espaço métrico discreto, então, existe $\varepsilon > 0$ de tal modo que $B_1(a; \varepsilon) = \{a\}$. Se supormos que exista uma métrica $d_2 > d_1$, ela necessariamente precisa ser discreta, afinal, para este $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ onde $B_2(a; \delta) \subset B_1(a; \varepsilon) = \{a\}$.

Exemplo 29. Se existir uma constante $c > 0$ tal que $d_2(x, y) \leq c \cdot d_1(x, y)$ para quaisquer $x, y \in M$, então, d_1 é mais fina que d_2. Com efeito, se:

$$d_2(x, y) \leq c \cdot d_1(x, y) \Rightarrow d_2(i_{12}(x), i_{12}(x)) \leq c \cdot d_1(x, y);$$

portanto $i_{12}(x)$ é lipschtziana, o que implica ser contínua. Observe que estamos basicamente mostrando que $B_1(a;\varepsilon/c) \subset B_2(a;\varepsilon)$.

Exemplo 30. Vamos estudar um resultado que decorre exatamente do exemplo anterior. Seja $E = \rho([a,b],\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções contínuas limitadas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Já sabemos que $||f|| = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ define uma norma, e com isso, define uma métrica em E.

Observe que, como toda função em E é integrável, então a definição $||f||_1 = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ introduz uma pseudo norma, como visto na Secção 1.3.

Agora note que se $f \in E$, ela é contínua e limitada o que significa que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$ se, somente se, todos os pontos de $[a,b]$ são nulos. Podemos concluir que:

$$d_1(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \leq (b-a) \cdot \sup_{a \leq x \leq b} |f(x) - f(y)| = (b-a)||f-g||.$$

Pelo exemplo anterior, a métrica $d = ||f||$ é mais fina que a métrica $d_1 = ||f||_1$.

Proposição 7. *A aplicação injetiva $f : (M, d_m) \to (N, d_n)$ é contínua se, e somente se, a métrica d_m é mais fina que a métrica d_1, induzida em M por f.*

Demonstração. Indiquemos com $f_1 : (M, d_1) \to (N, d_n)$, a mesma aplicação que f, quando se toma no domínio a métrica d_1. Não há perda de generalidade supor que f e f_1 sejam sobrejetivas, isso faz de f_1 uma isometria, ou seja, um homeomorfismo. Como $f = i_{M_1} \circ f_1$, então, f só é contínua se $d_1 > d_M$. □

Definição 19 (Métricas equivalentes)**.** *Duas métricas d_1 e d_2 num espaço M chamam-se equivalentes, quando cada uma delas é mais fina do que a outra, isto é, quando a aplicação $i_{12} : (M, d_1) \to (M, d_2)$ é um homeomorfismo. Escreve-se que $d_1 \sim d_2$.*

Proposição 8. *A bijeção $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ é um homeomorfismo se, e somente se, a métrica d_M é equivalente à métrica d_1, induzida em M por f.*

Demonstração. Da Proposição 7, d_M tem que ser mais fina que d_1, para que f seja contínua. Agora basta analisarmos $f^{-1} : (N, d_N) \to (M, d_M)$. Vamos indicar $g : (N, d_N) \to (M, d_1)$ que é um homeomorfismo.

Como $f^{-1} = i_{1M} \circ g$, então, f^{-1} é contínua, se i_{1M} for. □

Exemplo 31. Se existirem constantes $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ tais que $\alpha \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta \cdot d_1(x,y)$, para todo $x, y \in M$, então as métricas d_1 e d_2 são equivalentes.

Observe que esse resultado é suficiente para mostrar que duas métricas são equivalentes, contudo, não é necessário, pois, nem sempre existirá β que satisfaça a inequação acima. Um exemplo está relacionado com uma métrica não limitada d.

$$d(x,y) \leq \beta \cdot d_1(x,y);$$

se d_1 é limitada, então:

$$d(x,y) \leq \beta \cdot c.$$

Condição suficiente e necessária: Se $d_1 \sim d_2$, então, $d_1 > d_2$ bem como $d_2 > d_1$. Portanto, $B_1(a;\delta_1) \subset B_2(a;\varepsilon_2)$ e $B_2(a;\delta_2) \subset B_1(a;\varepsilon_1)$, isto é, qualquer bola aberta em relação a uma métrica, deve conter uma bola aberta de mesmo centro em relação à outra.

Exemplo 32. As métricas d_1, d_2, d_3 do plano $\mathbb{R}^2$ são equivalentes.

Quando discutimos essas métricas d_1, d_2 e d_3 no plano $\mathbb{R}^2$, conseguimos definir cada uma das bolas abertas relacionadas, e discutimos como elas são diferentes do ponto de vista geométrico. Seguindo a condição suficiente para constatar que as métricas são equivalentes, basta observar que isso sempre é possível. Todo disco centrado em a, contém um quadrado com diagonais paralelas aos eixos, que contém um quadrado, e assim por diante, repetidamente.

Por outro lado, observe que isso também decorre diretamente do Exemplo 31, afinal,

$$d_3(x,y) \leq d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq n \cdot d_3(x,y).$$

Capítulo 2

Espaços Métricos Completos e o Teorema do Ponto Fixo de Banach

Nesse capítulo vamos enunciar e demonstrar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, mas antes disso, precisamos definir alguns conceitos importantes tais como sequências convergentes, sequências de Cauchy e espaços métricos completos. Além disso, vamos apresentar diversos exemplos sobre esses conceitos aqui abordados. É nesse capítulo também que apresentamos os espaços de Banach e Hilbert.

2.1 Limites de sequências

A ideia de sequência está relacionada com dar continuidade a algo que foi iniciado previamente, por exemplo, a sequência de filmes *"O Senhor dos Anéis"* que nada mais é que uma continuação vinculada ao primeiro filme *"A Sociedade do Anel"*, ou até mesmo a continuação dos próprios livros escritos pelo escritor britânico J.R.R Tolkien. Essa noção do que é uma sequência pode ser observada diretamente na etmologia, derivada do latim *sequentia,* a palavra significa continuação.

Em Matemática, o termo sequência significa exatamente a mesma coisa, entretanto, em uma linguagem diferente. Nesse sentido, introduziremos esse capítulo do trabalho apresentando uma definição matematicamente precisa de sequência.

Definição 20 (Sequência num conjunto). *Uma sequência num conjunto não vazio M é uma função $x : \mathbb{N} \to M$, que relaciona cada número natural com um elemento em M.*

Uma sequência $x : \mathbb{N} \to M$ é usualmente identificada com os elementos $x(n)$, $n \in \mathbb{N}$, da sua imagem. Devido a isso vamos denotar uma sequência através da notação $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots)$ e o valor que a sequência assume $x_n \doteq x(n)$, em cada $n \in \mathbb{N}$, será chamado de n-ésimo elemento ou termo geral da sequência. Muitas vezes vamos nos referir a uma sequência considerando apenas seu termo geral.

Exemplo 33. Uma forma simples de obtermos uma sequência real, $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, é discretizando uma função definida em uma variável contínua $t \in I \supset \mathbb{N}$. Por exemplo, tomemos a função $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ dada por $f(t) = t^2$ e consideremos a restrição $x = f|_{\mathbb{N}}$, a qual produz a sequência real de termo geral $x_n = n^2$.

Exemplo 34. A sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ de termo geral $x_n = 1/n$ relaciona cada $n \in \mathbb{N}$ à um termo no conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, nesse caso $(x_n) = (1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots)$.

Exemplo 35. Considere o conjunto $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\}$. Fixemos $a \in \mathbb{R}$ e consideremos a sequência $z : \mathbb{N} \to S^1$ definida por $z_n = e^{ina} = \cos(na) + i\,\mathrm{sen}(na)$.

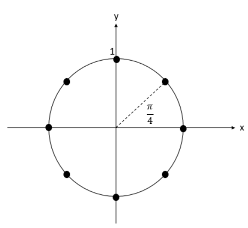
Um fenômeno interessante ocorre quando fixamos $a = 2\pi/p$, com $p \in \mathbb{N}$, o que torna a sequência $z_n = e^{ina}$ cíclica, ou seja, seus termos se repetem de forma periódica assumindo somente os valores finitos

$$e^{\frac{i2k\pi}{p}}, \text{ com } k = 0, 1, 2, \ldots, p-1.$$

Esses valores são exatamente as raízes da equação $z^p = 1$ as quais dividem o círculo S^1 em p partes iguais. Por exemplo, se considerarmos a equação $z^8 = 1$, que tem como raízes os finitos valores:

$$e^{\frac{ik\pi}{4}} \text{ com } k = 0, 1, \ldots, 7,$$

obtemos uma sequência cíclica (z_k) que divide o círculo S^1 em oito partes iguais conforme ilustrado na figura abaixo.



O nosso principal objetivo nesta seção é compreender como se comporta uma sequência (x_n), definida num espaço Métrico (M,d), quando $n \in \mathbb{N}$ torna-se muito grande. Mais precisamente, queremos saber se existe um elemento $a \in M$ de forma que os termos da sequência (x_n) se aproximam quando n tende para o infinito.

Definição 21 (Sequência convergente). *Uma sequência (x_n) num espaço métrico (M,d) converge para um elemento $a \in M$ se, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(x_n, a) < \varepsilon$, para todo $n > n_0$.*

Usaremos a notação

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

para indicar que a sequência (x_n) converge para a.

Exemplo 36. Toda sequência constante $x_n = a$ é convergente, e nesse caso $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. De fato, observe que dado $\varepsilon > 0$, temos $d(x_n, a) = 0 < \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 37. Dada a sequência de números reais $x_n = 1/n$, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. De fato, para cada $\varepsilon > 0$ considere $n_0 \geq 1/\varepsilon$, logo

$$d(x_n, 0) = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon,$$

para todo $n > n_0$.

Definição 22 (Sequência limitada). *Uma sequência (x_n) no espaço métrico M, chama-se limitada quando o conjunto formado pelos seus termos é limitado, isto é, existe $c > 0$ de tal modo que:*

$$d(x_m, x_n) \leq c, \text{ para quaisquer } m, n \in \mathbb{N}.$$

Note que uma sequência (x_n) é limitada se, e somente se, existe uma bola fechada $B[a,c]$, tal que $x_n \in B[a,c]$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Exemplo 38. A sequência $x_n = (-1)^n$ evidentemente tem seu conjunto de termos limitado.

Exemplo 39. Seja $a \in \mathbb{R}$, com $|a| > 1$, então a sequência de números reais $x_n = a^n$ não é limitada. Com efeito, considere a *Desigualdade de Bernoulli:*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx, \quad \forall x > -1. \tag{2.1}$$

Se $a > 1$, então existe $b > 0$ tal que $a = 1 + b$, portanto da Desigualdade(2.1) temos:

$$a^n > 1 + nb, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

o que comprova que a sequência a^n não é limitada.

Se $a < -1$, então $-a > 1$ e como visto anteriormente a sequência $(-a)^n = (-1)^n a^n$ é não limitada. Como $(-1)^n$ é uma sequência limitada então segue que a^n não pode ser limitada.

Por outro lado, se considerarmos $|a| \leq 1$ obtemos uma sequência $x_n = a^n$ limitada, pois $|a^n| = |a|^n < 1$.

Proposição 9. *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração. Suponha que a sequência (x_n) convirja para $a \in M$. Então, dado $\varepsilon > 0$ podemos obter $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que:

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon \Rightarrow x_n \in B(a, \varepsilon).$$

Considere $c > 0$ o maior valor entre ε e $d \doteq \max_{1 \leq j \leq n_0} d(x_j, a)$, então teremos $x_n \in B[a, c]$ para todo $n \in \mathbb{N}$. □

Exemplo 40. A sequência de números reais $x_n = (-1)^n$ é limitada mas não converge, ou seja, a recíproca da proposição anterior é falsa.

Proposição 10 (Unicidade do limite)**.** *Uma sequência não pode convergir para dois elementos $a, b \in M$ distintos.*

Demonstração. Vamos supor que existam $a, b \in M$, de tal modo que $a \neq b$, $\lim_{n \to \infty} x_n = a$ e $\lim_{n \to \infty} x_n = b$. Dessa forma, dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, de modo que:

$$n > n_1 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon/2$$
$$\text{e } n > n_2 \Rightarrow d(x_n, b) < \varepsilon/2.$$

Portanto, se $n > \max\{n_1, n_2\}$ então

$$0 \leq d(a, b) \leq d(a, x_n) + d(x_n, b) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

ou seja, $d(a, b) < \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$, o que implica $d(a, b) = 0$, que é uma contradição pois $a \neq b$.

□

Definição 23 (Subsequência)**.** *Considere uma sequência (x_n) num espaço métrico (M, d). Uma subsequência de (x_n) é uma restrição da aplicação $n \mapsto x_n$ à um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\} \subset \mathbb{N}$.*

Exemplo 41. Dada uma sequência $(x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, então podemos considerar a subsequência com os índices pares $(x_{n_k}) = (x_2, x_4, \ldots, x_{2k}, \ldots)$.

De um ponto de vista mais criterioso, uma subsequência não é de fato uma sequência, afinal, estamos definindo-a apenas em um subconjunto dos números naturais. Porém, podemos considerá-la como uma sequência definindo a aplicação $k \in \mathbb{N} \mapsto x_{n_k} \in M$.

Proposição 11. *Se* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$*, então toda subsequência de* (x_n) *converge para* a*.*

Demonstração. Se a sequência (x_n) converge para a, então, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ de tal modo que:

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon.$$

Tomemos um subconjunto arbitrário $\mathbb{N}' = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\} \subset \mathbb{N}$. Sendo assim, existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n_{k_0} > n_0$, o que implica

$$n_k > n_{k_0} \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon.$$

Portanto, a subsequência (x_{n_k}) converge para a.

$\square$

Proposição 12. *Um ponto* a*, num espaço métrico* M*, é limite de uma subsequência de* (x_n) *se, e somente se, toda bola aberta centrada em* a *contém termos de* (x_n) *com índices* n *arbitrariamente grandes.*

Demonstração. Suponha inicialmente que $a = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$, então

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \text{ tal que } k > k_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \varepsilon;$$

logo, para k arbitrariamente grande, $x_{n_k} \in B(a, \varepsilon)$.

Reciprocamente, suponha que toda bola aberta centrada em a contém termos de (x_n) com índices suficientemente grandes. Logo, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $x_{n_k} \in B(a, 1/k)$. Por hipótese, podemos considerar $n_k < n_{k+1}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ considere } k_0 \geq 1/\varepsilon, \text{ logo se } k > k_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, a) < \frac{1}{k} < \frac{1}{k_0} \leq \varepsilon.$$

Portanto, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. $\square$

A partir de noções já conhecidas de Topologia, podemos reescrever o enunciado da Proposição 12 trocando bola aberta de centro a por, conjunto aberto ou vizinhança de a.

No caso especial em que o espaço métrico é um espaço vetorial normado $(E, \| \ \|)$, podemos considerar operações com soma e multiplicação por escalar. Finalizamos dessa forma esta seção com o seguinte resultado.

Proposição 13. *Sejam (x_n) e (y_n) sequências num espaço vetorial normado $(E, \| \ \|)$ e (λ_n) uma sequência real. Se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ e $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda$, então:*

(1) $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$;

(2) $\lim_{n\to\infty} \lambda_n \cdot x_n = \lambda \cdot a$.

Demonstração. (1) Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \|x_n - a\| < \varepsilon/2 \ \text{ e } \ \|y_n - b\| < \varepsilon/2.$$

Portanto, se $n > n_0$ teremos

$$\|(x_n + y_n) - (a + b)\| \leq \|x_n - a\| + \|y_n - b\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

(2) Como a sequência (λ_n) é convergente, logo limitada, então existe $M > 0$ tal que $|\lambda_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Além disso, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow \|x_n - a\| < \frac{\varepsilon}{M + \|a\|} \text{ e } |\lambda_n - \lambda| < \frac{\varepsilon}{M + \|a\|}.$$

Logo, se $n > n_0$ teremos

$$\begin{aligned} \|\lambda_n x_n - \lambda a\| &= \|\lambda_n x_n - \lambda_n a + \lambda_n a - \lambda a\| \\ &\leq |\lambda_n|\|x_n - a\| + |\lambda_n - \lambda| \ \|a\| \\ &< M\frac{\varepsilon}{M + \|a\|} + \frac{\varepsilon}{M + \|a\|}\|a\| = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

2.2 Sequência de Cauchy

Definição 24 (Sequência de Cauchy)**.** *Uma sequência (x_n) num espaço métrico (M, d) é dita de Cauchy quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal modo que:*

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Intuitivamente, uma sequência é de Cauchy se seus termos x_n estão cada vez mais próximos na medida em que os índices n tornam-se arbitrariamente grandes.

É imediato notar que uma sequência (x_n) é de Cauchy se é válida a seguinte caracterização: para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon, \ \ \forall p \in \mathbb{N}.$$

Proposição 14. *Toda subsequência de uma sequência de Cauchy (x_n) também é de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy, isto é, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, de modo que:

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Seja (x_{n_k}) uma subsequência arbitrária da sequencia (x_n), logo existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $j, k > k_0$ temos $n_j, n_k > n_0$, o que implica que $d(x_{n_k}, x_{n_j}) < \varepsilon$.

Queremos mostrar que $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $k > k_0 \Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_{k_o}}) < \varepsilon$. Mas, assumindo $k_0, k > n_0$ obtemos diretamente que $d(x_{n_k}, x_{n_{k_0}}) < \varepsilon$.

Logo, toda subsequência de uma sequência de Cauchy, é também de Cauchy.

□

Vimos anteriormente que uma sequência (x_n) é convergente se seus termos se aproximam de um ponto fixado a ao passo que n torna-se muito grande. Logo, intuitivamente é natural pensar que uma sequência é convergente se seus os termos ficam próximos quando n fica cada vez maior. Mais precisamente temos o seguinte resultado.

Proposição 15. *Toda sequência convergente é de Cauchy.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência convergente, então, para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal modo que:

$$n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, a) < \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Logo,

$$m, n \geq n_0 \Rightarrow d(x_m, a) < \tfrac{\varepsilon}{2} \text{ e } d(x_n, a) < \tfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq d(x_m, a) + d(x_n, a) < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Portanto, (x_n) é uma sequência de Cauchy.

$\square$

Por outro lado, a recíproca da proposição anterior não é válida, ou seja, uma sequência de Cauchy nem sempre converge. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 42. Considere o espaço Métrico $(\mathbb{Q}, |\ |)$ e uma sequência de números racionais (x_n) convergindo para um número irracional a. Por exemplo, $x_1 = 3,\ x_2 = 3,1,\ x_3 = 3,14,\ x_4 = 3,141$ e assim por diante de forma que $\lim_{n\to\infty} x_n = \pi$. Evidentemente a distância entre os termos dessa sequência diminui na medida que n aumenta arbitrariamente, portanto (x_n) é uma sequência de Cauchy, mas não converge em $\mathbb{Q}$.

Proposição 16. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy. Então dado $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que:

$$n, m > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

Segue da definição que o subconjunto $\{x_{n_0+1}, x_{n_0+2}, \dots\}$ é limitado. Como $\{x_1, x_2, \dots, x_{n_0}\}$ é finito, basta considerar $c > 0$ como o maior valor entre ε e $d = \max_{1\leq j,k\leq n_0} d(x_j, x_k)$. Dessa forma, $d(x_n, x_m) < c$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$, e segue que a sequência (x_n) é limitada.

$\square$

Exemplo 43. Observe que a recíproca da proposição anterior não é valida, isto é, nem toda sequência limitada é de Cauchy. Basta considerar a sequência $x_n = (-1)^n$ que é limitada contúdo não é de Cauchy.

Exemplo 44. A sequência de números reais definida por $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ não é de Cauchy pois não é limitada.

Proposição 17. *Uma sequência de Cauchy que possui uma subsequência convergente é também convergente (e tem o mesmo limite que a subsequência).*

Demonstração. Sejam (x_n) uma sequência de Cauchy no espaço métrico M e (x_{n_k}) uma subsequência que converge para o ponto $a \in M$. Queremos provar que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $k > p \Rightarrow d(n_k, a) < \frac{\varepsilon}{2}$, bem como, se x_n é de Cauchy, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > q \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Seja $n_0 = max\{p, q\}$, para todo $n > n_0$, existe $n_k > n_0$ de modo que:

$$d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, a sequência (x_n) converge para $a \in M$.

$\square$

Como consequência da proposição anterior, se uma sequência (x_n) possui duas subsequências que convergem para limites distintos, então (x_n) não é de Cauchy. Mais ainda, uma sequência de Cauchy divergente não pode ter subsequência convergente.

Definição 25 (Função uniformemente contínua)**.** *A função $f : M \to N$ é dita uniformemente contínua quando dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta(\varepsilon) > 0$ de modo que:*

$$d\,(x, y) < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow d\,(f(x), f(y)) < \varepsilon, \quad \forall x, y \in M$$

Proposição 18. *Toda aplicação uniformemente contínua transforma sequências de Cauchy em sequências de Cauchy.*

Demonstração. Seja $f : M \to N$ uma aplicação uniformemente contínua entre os espaços métricos M e N, ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon, \ \ \forall x, y \in M.$$

Precisamos mostrar que $(f(x_n))$ é uma sequência de Cauchy em N, sempre que (x_n) for uma sequência de Cauchy em M.

Considere arbitrariamente uma sequência de Cauchy (x_n) em M. Então, para o $\delta > 0$ considerado acima existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow d(x_m, x_n) < \delta.$$

Logo, do exposto acima, se $m, n > n_0$ temos

$$d(x_n, x_m) < \delta \Rightarrow d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon.$$

Portanto, $f(x_n)$ é de Cauchy. $\square$

2.3 Espaços Métricos Completos

Definição 26. *Dizemos que um espaço métrico M é completo, quando toda sequência de Cauchy em M é convergente.*

Exemplo 45. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ munido da métrica $d(x,y) = |x-y|$ não é completo. De fato, basta considerar a sequência (x_n) em $\mathbb{Q}$ dada por $x_1 = 3,\ x_2 = 3,1,\ x_3 = 3,14,\ x_4 = 3,141,\ \ldots$ com $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pi$. Nesse caso, a sequência (x_n) é de Cauchy, mas não converge em $\mathbb{Q}$.

Definição 27. *Dizemos que uma métrica d é uniformemente discreta quando existir um $\varepsilon > 0$ de modo que se $x, y \in M$ e $d(x,y) < \varepsilon \Rightarrow x = y$.*

Claramente um espaço métrico M munido de uma métrica uniformemente discreta é completo. De fato, dada uma sequência de Cauchy (x_n) em M, então para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n, x_{n+p}) < \varepsilon \Rightarrow x_n = x_{n+p}$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Desse modo, toda sequência de Cauchy num espaço uniformemente discreto é constante a partir de um índice n_0, logo, é convergente.

Exemplo 46. *Todo conjunto M munido da métrica zero-um é um espaço métrico completo, pois a métrica zero-um é uniformemente discreta.*

Exemplo 47. O conjunto dos números reais com a métrica dada por $d(x,y) = |x-y|$ é completo. De fato, Seja (x_n) uma sequência de Cauchy, pela Proposição 16 ela é limitada. Se ela é limitada, por um resultado amplamente conhecido que não demonstramos no trabalho, o Lema de Bolzano-Weierstrass que estabelece que "Seja (x_n) uma sequência limitada em $\mathbb{R}$, então existe uma subsequência convergente x_{n_k}", concluímos que x_n possui uma subsequência convergente, pela Proposição 17, concluimos que qualquer sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ é convergente e, portanto, $\mathbb{R}$ com a métrica dada por $d(x,y) = |x-y|$ é completo.

Exemplo 48. O espaço $\mathbb{R}^N$ munido da métrica euclidiana

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_N - y_N)^2}$$

é uma espaço métrico completo. De fato, tomando uma sequência de Cauchy (x_n) em $\mathbb{R}^N$, vamos denotar cada elemento dessa sequência por $x_n = ({x_n}^{(1)}, {x_n}^{(2)}, \ldots, {x_N}^{(N)})$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de tal modo que:

$$n, m > n_0 \Rightarrow \sqrt{\left(x_n{}^{(1)} - x_m{}^{(1)}\right)^2 + \cdots + \left(x_n{}^{(N)} - x_m{}^{(N)}\right)^2} = d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Em particular, para cada índice $i = 1, \ldots, N$, temos que:

$$m, n > n_0 \Rightarrow |x_n{}^{(i)} - x_m{}^{(i)}| < \varepsilon,$$

logo, para cada i a sequência $(x_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em $\mathbb{R}$ e portanto converge para um número real $x^{(i)}$. Considere $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(N)}) \in \mathbb{R}^N$, cujas coordenadas são os limites das sequências de Cauchy $(x_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ obtidas anteriormente. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_1 \Rightarrow |x_n{}^{(i)} - x^{(i)}| < \varepsilon/\sqrt{N}, \quad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Portanto, segue que

$$n > n_1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} |x_n{}^{(i)} - x^{(i)}|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon,$$

ou seja, a sequência (x_n) converge para x em $\mathbb{R}^n$.

Pode-se provar também que $\mathbb{R}^N$ é um espaço métrico completo com relação as métricas

$$d_2(x, y) = \max_{j=1,\ldots,N} |x_j - y_j|,$$

ou

$$d_3(x, y) = \sum_{j=1}^{N} |x_j - y_j|.$$

A demonstração desse fato é semelhante a feita acima para a métrica euclidiana.

Proposição 19. *O espaço $\mathscr{C}[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R};\ f$ é contínua$\}$ é completo em relação a métrica dada por*

$$d(x, y) = \max_{t\in[a,b]} |x(t) - y(t)|.$$

Demonstração. Seja (x_n) uma sequência de Cauchy em $\mathscr{C}[a, b]$, então, dado $\varepsilon > 0$ existe um

$n_0 > 0$ de tal modo que se $n, m > n_0$ vale que:

$$d(x_m, x_n) = \max_{t \in J} |x_m(t) - x_n(t)| < \varepsilon, \tag{2.2}$$

com $J = [a, b] \in \mathbb{R}$. Então, fixando $t = t_0 \in J$, temos:

$$|x_m(t_0) - x_n(t_0)| < \varepsilon.$$

Isso implica que a sequência $(x_1(t_0), x_2(t_0), \dots)$ é uma sequência de Cauchy de números reais, então, como o conjunto dos reais é completo como verificado no Exemplo 47, podemos concluir que a sequência converge para um $x(t_0)$ na medida em que n torna-se arbitrariamente grande.

Nesse sentido, conseguimos relacionar cada $t \in J$ com um número real único $x(t)$, definindo assim uma função x com domínio em J. Basta agora mostrar que $x \in \mathscr{C}[a, b]$ e que x_n converge para x.

Fazendo $n \to \infty$ em (2.2) teremos

$$\max_{t \in J} |x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall m > n_0,$$

então para cada $t \in J$, tem-se

$$|x_m(t) - x(t)| \leq \varepsilon.$$

Concluímos a partir disso que x_n converge uniformemente para a função x. Como as funções x_n são contínuas no intervalo fechado J, temos que $x \in \mathscr{C}[a, b]$. Segue que $\mathscr{C}[a, b]$ é um espaço métrico completo.

□

Proposição 20. *Se (M, d) é um espaço métrico completo então um subespaço $F \subset M$ é completo com a métrica d se, e somente se, F é fechado.*

Demonstração. Seja $F \subset M$, com M completo. Vamos considerar uma sequência de Cauchy (x_n) arbitrária em F. Como M é completo, a sequência (x_n) converge para um $a \in M$, considerando F fechado, $a \in F$. Logo F é completo. Reciprocamente, se $F \subset M$ é um subespaço completo, tomando uma sequência $(x_n) \in F$ convergindo para $a \in M$, a sequência (x_n) é de Cauchy pela Proposição 15, portanto, existe um elemento $b \in F$ de modo que $\lim_{n \to \infty} x_n = b$, e pela unicidade do limite, $a = b$, portanto F é fechado. $\square$

2.3.1 Espaços de Banach

Definição 28 (Espaços de Banach)**.** *Um espaço vetorial normado que é completo em relação a métrica induzida pela norma chama-se Espaço de Banach.*

São alguns exemplos de espaço de Banach: $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$, $(\mathbb{C}^n, \|\cdot\|_2)$ e $C([a, b])$.

Proposição 21. Sejam E e F espaços vetoriais normados. Se F é completo, então o espaço vetorial das transformações lineares contínuas $L(E, F)$ também é completo.

Demonstração. Seja (T_n) uma sequência de Cauchy no espaço $L(E, F)$. Logo dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|T_n(x) - T_m(x)\|}{\|x\|} = \|T_n - T_m\| < \varepsilon.$$

Portanto, para cada $x \in E$, $x \neq 0$, temos $\|T_n(x) - T_m(x)\| < \varepsilon\|x\|$ o que implica que $(T_n(x))$ é de Cauchy em F. Como F é completo a sequência $(T_n(x))$ converge em F. Definimos então

$$T(x) = \lim_{n \to \infty} T_n(x), \quad x \neq 0,$$

e $T(0) = 0$. Como limite da soma é a soma dos limites, é imediato notar que T linear.

Como (T_n) é de Cauchy em $L(E, F)$, então (T_n) é limitada, ou seja, existe $K > 0$ tal que $\|T_n\| \leq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\|T_n(x)\| \leq \|T_n\|\|x\| \leq K\|x\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in E$. Dessa forma temos

$$\|T(x)\| = \|\lim_{n \to \infty} T_n(x)\| = \lim_{n \to \infty} \|T_n(x)\| \leq K\|x\|, \quad \forall x \in E,$$

donde segue que $T \in L(E, F)$.

Além isso, como vimos anteriormente, para cada $x \in E$ temos

$$m, n > n_0 \Rightarrow \|T_n x - T_m x\| = \|T_n - T_m\| \, \|x\| \leq \varepsilon \, \|x\|.$$

Logo, fazendo $m \to \infty$ obtemos

$$\|T_n(x) - T(x)\| \leq \varepsilon \, \|x\|,$$

para todo $x \in E$ e $n > n_0$.

Portanto, se $n \geq n_0$ vale que

$$\|T_n - T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|T_n(x) - T(x)\|}{\|x\|} \leq \varepsilon,$$

o que implica que T_n converge para T em $L(E, F)$. □

Proposição 22. Uma série $\sum x_n$ em um espaço vetorial normado E diz-se normalmente convergente quando $\sum \|x_n\|$ é convergente. Se o espaço E é completo, toda série normalmente convergente é convergente em E.

Demonstração. Com efeito, considere uma série normalmente convergente $\sum x_n$ e defina a seguinte soma $S_n = x_1 + \cdots + x_n$ em E. Então, uma vez que $\sum |x_n| < \infty$, pelo critério de Cauchy temos que para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n > n_0 \Rightarrow |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_{n+p}| < \varepsilon, \forall p \in \mathbb{N}.$$

Segue disso que, para $n > n_0$, temos:

$$\begin{aligned} |S_{n+p} - S_n| &= |x_2 + x_3 + \cdots + x_n + x_{n+p} - (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)| \\ &= |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{n+p}| \\ &\leq |x_{n+1}| + |x_{n+2}| + \cdots + |x_{n+p}| < \varepsilon, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

portanto, a sequência de somas parciais S_n é de Cauchy em E que é um Espaço de Banach, logo S_n é convergente.

□

Em particular, esse resultado se aplica a séries de números reais, de números complexos, de vetores em $\mathbb{R}^n$ e de funções limitadas $f_n : X \mapsto \mathbb{R}^k$. Nesse último caso, obtemos o chamado "Teste M de Weierstrass" onde a condição $\sum \|f_n\| < \infty$ implica que existe uma série convergente de números reais $\sum C_n$ de forma que $|f_n(x)| \leq C_n$, para todo $x \in X$ (basta considerar $C_n = \|f_n\|$ por exemplo). Nesse caso o teste afirma que $\sum f_n(x)$ converge uniformemente em X.

Proposição 23. *Sejam E e F espaços vetoriais normados, com* $\dim E = \dim F = n$*, então, E e F são isomorfos.*

Ideia da prova: Basta definir uma transformação $T : E \to F$, que leva cada elemento da base de E na base de F. Essa transformação é linear, injetiva e sobrejetiva, contudo, iremos omitir os detalhe da prova.

Proposição 24. *Se E é um espaço vetorial normado e $\dim E < \infty$, então E é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja E um espaço vetorial normado com $\dim E = n$, então, E é isomorfo à $\mathbb{R}^n$ pela proposição anterior, e como $\mathbb{R}^n$ é um espaço de Banach, concluímos nossa demonstração. $\square$

2.4 Método das Aproximações Sucessivas

Vamos tratar agora de um método bastante simples para determinar a solução de algumas equações. Suponhamos que nosso objetivo seja determinar uma solução x de uma equação na forma $f(x) = b$, onde b está fixado e f é uma aplicação contínua definida numa parte fechada do espaço $\mathbb{R}^n$ e tomando valores em $\mathbb{R}^n$. Escrevendo: $\varphi(x) = f(x) + x - b$; queremos determinar um elemento x tal que $\varphi(x) = x$, o que equivale determinar um x de forma que $f(x) = b$.

Para resolver esta última equação, tomamos um ponto arbitrário x_0 e consideramos a sequência de pontos: $x_1 = \varphi(x_0)$, $x_2 = \varphi(x_1), \ldots,$ $x_n = \varphi(x_{n-1}) \ldots$, chamados de "aproximações sucessivas da solução procurada".

Se esta sequência convergir no domínio de φ, então $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \varphi(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \varphi(a)$. Isto é, a é uma raiz da equação $\varphi(x) = x$, portanto, da função $f(x) = b$. Note que só pudemos concluir a terceira igualdade pela definição das aproximações sucessivas.

Definição 29 (Ponto Fixo). *Um ponto fixo de uma aplicação $f : M \to M$ é um ponto $x \in M$ tal que $f(x) = x$.*

Exemplo 49. A origem $O \in \mathbb{R}^n$ é o único ponto fixo da aplicação $x \mapsto -x$ de $\mathbb{R}^n$ em si mesmo. A aplicação $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, tem dois pontos fixos, a saber 0 e 1.

Exemplo 50. Um famoso resultado de Topologia, chamado o "Teorema do Ponto fixo de Brower", diz que, se $B = B[0; 1]$ é a bola unitária fechada do espaço $\mathbb{R}^n$, então toda aplicação contínua $f : B \to B$ possui pelo menos um ponto fixo $x \in B$.

Vamos considerar o caso $n = 1$. Dada uma função contínua $f : [0, 1] \to [0, 1]$ vejamos que essa possui ao menos um ponto fixo. Consideremos a função contínua $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por: $\varphi(x) = f(x) - x$. Como $0 \leq f(x) \leq 1$, $\forall x \in [0, 1]$, então $\varphi(0) = f(0) \geq 0$, e $\varphi(1) = f(1) - 1 \leq 0$. Pelo Teorema do Valor Médio, deve existir $x \in [0, 1]$ tal que $\varphi(x) = 0$, isto é, $f(x) = x$.

2.4.1 O Teorema do Ponto Fixo de Banach

Vamos agora apresentar um dos principais resultados desse trabalho, o qual possui diversas aplicações em várias áreas da Matemática.

Teorema 1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Considere um espaço métrico completo* (M, d)*. Se* $f : M \to M$ *é uma contração, então existe um único ponto fixo de* f *em* M*.*

Demonstração. Escolhemos um ponto $x_0 \in M$ arbitrário, e definimos uma sequência iterativa (x_n) da seguinte forma:

$$x_1 = f(x_0),\ x_2 = f(x_1),\ x_3 = f(x_2), \ldots,\ x_n = f(x_{n-1}), \ldots.$$

Evidentemente, esta é uma sequência de imagens de x_0 dada por repetidas aplicações da função f. Vamos mostrar que (x_n) é uma sequência de Cauchy.

De fato, como f é uma contração então existe $0 < c < 1$, tal que $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)$ para todo $x, y \in M$. Assim,

$$\begin{aligned}
d(x_{m+1}, x_m) &= d(f(x_m), f(x_{m-1})) \\
&\leq c \cdot d(x_m, x_{m-1}) \\
&= c \cdot d(f(x_{m-1}), f(x_{m-2})) \\
&\leq c^2 \cdot d(x_{m-1}, x_{m-2}) \\
&\vdots \\
&\leq c^m \cdot d(x_1, x_0).
\end{aligned}$$

Se $m < n$, segue da desigualdade triangular:

$$\begin{aligned}
d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{m+1}) + d(x_{m+1}, x_{m+2}) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n) \\
&\leq (c^m + c^{m+1} + \cdots + c^{n-1}) \cdot d(x_0, x_1) \\
&= c^m \cdot \frac{(1 - c^{n-m})}{(1 - c)} \cdot d(x_0, x_1).
\end{aligned}$$

Como $0 < c < 1$, temos que $(1 - c^{n-m}) < 1$, consequentemente:

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{c^m}{1 - c} \cdot d(x_0, x_1).$$

O lado direito da desigualdade acima tende para zero quando m cresce arbitrariamente. Logo, (x_n) é uma sequência de Cauchy, portanto, como M é um espaço métrico completo, x_n converge para um elemento $x \in M$. Sabendo disso, vamos mostrar que x é o único ponto fixo da contração f.

Dado $\varepsilon > 0$, considere m suficientemente grande de modo que

$$d(x, x_{m-1}) < \varepsilon/2 \ \text{ e } \ d(x, x_m) < \varepsilon/2.$$

Da desigualdade triangular temos:

$$\begin{aligned} d(x, f(x)) &\leq d(x, x_m) + d(x_m, f(x)) \\ &= d(x, x_m) + d(f(x_{m-1}), f(x)) \\ &\leq d(x, x_m) + c \cdot d(x_{m-1}, x) \\ &\leq d(x, x_m) + d(x_{m-1}, x) \\ &< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $d(x, f(x)) = 0$, o que implica $f(x) = x$.

Agora basta mostrarmos que x é o único ponto fixo, para isso, suponhamos que também existe $x' \in M$ de modo que $f(x') = x'$, então,

$$d(x, x') = d(f(x), f(x')) \leq c \cdot d(x, x') \Rightarrow d(x, x') = 0 \Rightarrow x = x'.$$

□

Capítulo 3

Algumas Aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach

3.1 Aplicações do Método das Aproximações Sucessivas

Para construir a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach visto no Capítulo 2, utilizamos o Método das Aproximações Sucessivas, tendo isso em vista, vamos compreender melhor do que se trata esse método de iterações, assim como, vamos apresentar alguns exemplos de aplicação direta do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Exemplo 51. Considere a reta real $\mathbb{R}$, com a métrica usual, e considere também a seguinte equação não linear:

$$x = k\cos(x);$$

onde $0 < k < 1$ é uma constante real.

Uma pergunta natural que surge é "sera que essa equação possui solução?". Vamos utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para mostrar que essa equação não linear possui uma única solução.

No Capítulo 2, mostramos que a reta real $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo, portanto, basta mostrarmos que a função $f(x) = k\cos(x)$ é uma contração.

Observe que:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= |k\cos(x) - k\cos(y)| = k|\cos(x) - \cos(y)| \\ &= k\left|\int_x^y \operatorname{sen}(t)dt\right| \leq k\int_x^y \operatorname{sen}(t)dt; \end{aligned}$$

mas, $|\operatorname{sen}(t)| \leq 1$, portanto:

$$d(f(x), f(y)) = k \int_x^y |\operatorname{sen}(t) dt < k|x-y| = kd(x,y);$$

o que implica em:

$$d(f(x), f(y)) \leq kd(x,y),$$

Logo, $f(x)$ é uma contração, e segue do Teorema do Ponto Fixo de Banach que a equação $x = k\cos(x)$ admite uma única solução.

Para que possamos determinar especificamente qual é essa solução, ou pelo menos uma boa aproximação dela, podemos utilizar o método das aproximações sucessivas, por exemplo, considere $k = 1/3$ e $x_0 = 0,5$ como valor inicial, vamos obter os seguintes valores:

$x_1 = \frac{1}{3}\cos(0,5) = 0,29242752$
$x_2 = \frac{1}{3}\cos(0,29242752) = 0,31917265$
$x_3 = \frac{1}{3}\cos(0,31917265) = 0,31649845$
$x_4 = \frac{1}{3}\cos(0,31649845) = 0,316777022$
$x_5 = \frac{1}{3}\cos(0,31677702) = 0,31674811$
$x_6 = \frac{1}{3}\cos(0,31674811) = 0,31675111.$

Observe que na quinta iteração já temos uma precisão de quatro casa decimais, ou seja, a raíz da equação é aproximadamente $0,3167111$.

Exemplo 52. Considere novamente a reta $\mathbb{R}$ com a métrica usual. Agora considere a equação não linear $x = e^{-x}$. Vamos verificar se essa equação possui solução.

Análogo ao Exemplo 51, queremos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para concluir que a equação acima possui apenas uma solução, feito isso, vamos utilizar o Método das Aproximações Sucessivas com o objetivo de determinar aproximadamente a solução. Para esse fim, basta provarmos que a função $f(x) = e^{-x}$ é uma contração, já que a reta real $\mathbb{R}$ é um espaço métrico completo.

Considere a função $f : [0,1] \to [0,1]$ dada por $f(x) = e^{-x}$. Como $M = [0,1]$ é fechado em $\mathbb{R}$, é completo em relação à métrica $d(x,y) = |x-y|$, então basta provar que $f(x)$ é uma contração.

Note que, como estamos analisando essa função no intervalo $M = [0,1]$, podemos concluir que:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(x);$$

assumindo $f'(x)$ como a inclinação da função no gráfico, exatamente no ponto $(x, f(x))$. Por outro lado, observe que:

$$|f'(x)| = |e^{-x}| = e^{-x} < 1.$$

Logo,

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| = |f'(x)| \Rightarrow \left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| < 1 \Rightarrow |f(x) - f(y)| < k|x - y|.$$

Podemos concluir portanto que $f(x)$ é uma contração, e com isso, há apenas uma solução para a equação $x = e^{-x}$. Vamos utilizar agora as iterações sucessivas para obter uma aproximação da solução desta equação.

Assumindo $x_0 = 1/5$ (valor aleatório colhido entre 0 e 1).

$x_1 = f(1/5) = e^{-1/5} = 0,8187307531$
$x_2 = e^{-0,8187307531} = 0,440991025943$
$x_3 = e^{-0,440991025943} = 0,643398480442$
$x_4 = e^{-0,643398480442} = 0,525503472633$
$x_5 = e^{-0,525503472633} = 0,591257607392$
$x_6 = e^{-0,591257607392} = 0,553630596815$
$x_7 = e^{-0,553630596815} = 0,574858536094$
$x_8 = e^{-0,574858936094} = 0,562784251753$
$x_9 = e^{-0,562784251753} = 0,569620885981$
$x_{10} = e^{-0,569620885981} = 0,565739877967.$

Note que foram necessárias 10 iterações para que conseguíssemos obter uma precisão de duas casas decimais, mesmo assim, podemos concluir que a solução da equação $x = e^{-x}$ é aproximadamente $0,56$.

3.2 Teorema de Picard

Nessa seção estudaremos, sob certas condições, a existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias.

Essa é uma das mais interessantes aplicações do Teorema do Ponto Fixo de Banach. Para discutirmos sobre esse resultado, vamos considerar o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad x(t_0) = x_0. \tag{3.1}$$

Quando estudamos equações diferenciais da forma acima, descobrimos que as soluções, quando existem, são na verdade uma família de funções. Contudo, veremos que para certas hipóteses sobre f, o PVI (3.1) possui exatamente uma única solução que resolve simultaneamente a equação diferencial e a condição inicial.

Caso f seja contínua podemos integrar a equação e substituir a condição inicial do problema (3.1) chegando na seguinte igualdade:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau. \tag{3.2}$$

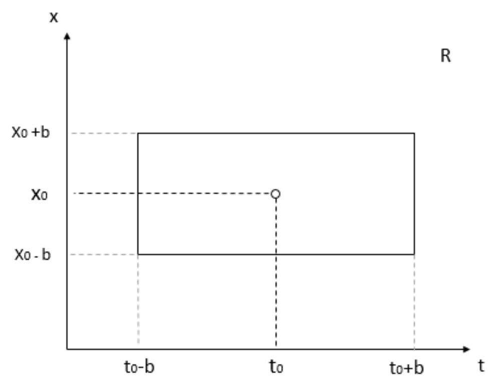
É imediato notar que resolver o problema (3.1) em algum intervalo aberto contendo t_0 é equivalente a resolver a igualdade (3.2).

Teorema 2 (Existência e Unicidade - Picard)**.** *Seja f uma função contínua, definida sobre o retângulo:*

$$R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2;\ |t - t_0| \leq a,\ |x - x_0| \leq b\}.$$

Se f é Lipschitz com relação a segunda variável, então o PVI (3.1) *possui uma única solução definida num intervalo $J \subset [t_0 - a, t_0 + a]$.*

Demonstração. Considere a função f contínua sobre o retângulo R como na figura abaixo:



Como f é contínua em R, então existe $c > 0$ tal que $|f(t, x)| \leq c$, para todo $(t, x) \in R$. Vamos considerar também que f satisfaça a condição de Lipschitz na segunda variável sobre R, ou seja, existe $k > 0$, de modo que:

$$|f(t,x) - f(t,v)| \leq k \cdot |x - v|, \quad \forall (t,x),(t,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Nessas condições, veremos que o problema de valor inicial tem uma única solução definida no intervalo $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$, sendo

$$\beta < \min\left\{a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k}\right\}.$$

De fato, considere $\mathscr{C}(J)$ o espaço métrico das funções contínuas a valores reais, que estão definidas no intervalo $J = [t_0 - \beta, t_0 + \beta]$. Considere a métrica usual em $\mathscr{C}(J)$ dada por:

$$d(x,y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|.$$

Vimos na Proposição 19 que $\mathscr{C}(J)$ é um espaço métrico completo em relação a métrica acima.

Agora, vamos considerar o subespaço $\mathscr{C}'$ do espaço $\mathscr{C}(J)$, contendo todas as funções $x(t)$ que satisfazem:

$$|x(t) - x_0| \leq c \cdot \beta, \quad \forall t \in J.$$

Seja (x_n) uma sequência em $\mathscr{C}'$, convergindo para $x \in \mathscr{C}(J)$. Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $d(x_m, x) < \varepsilon$. Portanto, para cada $t \in J$ temos:

$$|x(t) - x_0| \leq |x(t) - x_m(t)| + |x_m(t) - x_0| \leq d(x, x_m) + c\beta < \varepsilon + c\beta.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $|x(t) - x_0| \leq c \cdot \beta$, para todo $t \in J$, o que implica que $x \in \mathscr{C}'$, logo $\mathscr{C}'$ é fechado. Pela Proposição 20 segue que $\mathscr{C}'$ é completo.

Conforme discutido no início da seção, resolver o PVI (3.1) é equivalente a encontrar uma solução da equação (3.2). Motivados por esse fato, definimos a aplicação $T : \mathscr{C}' \to \mathscr{C}'$ por

$$Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau.$$

Veremos que nas condições assumidas até aqui, a aplicação T está bem definida e é uma contração no espaço métrico completo $\mathscr{C}'$, portanto pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach teremos que T possui um único ponto fixo $x \in \mathscr{C}'$, ou seja, $x = Tx$.

Primeiramente note que T está bem definida para todo $x \in \mathscr{C}'$, afinal, se $x \in \mathscr{C}'$, então $(t, x(t)) \in R$ para todo $t \in J$, uma vez que $|x(t) - x_0| \leq c \cdot \beta < b$. Assim, como f é contínua em R, temos que a expressão integral dada na definição de T existe e logo a aplicação é bem definida. Além disso, note que

$$|Tx(t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau\right| \leq c \cdot |t - t_0| \leq c \cdot \beta, \quad \forall t \in J,$$

ou seja, $\mathscr{C}'$ é invariante sob a ação de T.

Por fim, vejamos que T é uma contração em $\mathscr{C}'$. Com efeito, dado $t \in J$ temos:

$$\begin{aligned} |Tx(t) - Tv(t)| &= \left|\int_{t_0}^{t} [f(\tau, x(\tau)) - f(\tau, v(\tau))]d\tau\right| \\ &\leq |t - t_0| \max_{t \in J} k|x(t) - v(t)| \\ &\leq k\ \beta\ d(x, v). \end{aligned}$$

Como o lado direito da inequação acima não depende de t, tomando o máximo no lado esquerdo temos que $d(Tx, Tv) \leq k\ \beta\ d(x, v)$. Como $k\ \beta < 1$, segue que T é uma contração em $\mathscr{C}'$.

Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único $x \in \mathscr{C}'$ de forma que $x = Tx$, ou seja,

$$x(t) = Tx(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, x(\tau))d\tau, \quad t \in J. \tag{3.3}$$

Consequentemente, a função x encontrada satisfaz o PVI (3.1), pois é derivável. Logo, a prova está completa.

$\square$

3.3 Equações Integrais

O nosso objetivo nessa última seção é provar a existência e unicidade de certas equações integrais. Vamos considerar a equação dada da seguinte forma:

$$x(t) - \mu \int_{a}^{b} k(t, \tau)x(\tau)d\tau = v(t). \tag{3.4}$$

Esse tipo de equação integral é chamada de *Equação de Fredholm do segundo tipo*, onde a função $k(t, \tau)$ é denominada núcleo da equação. A constante μ é um parâmtro a ser determinado mais adiante.

Em nossa demonstração, vamos buscar resolver a equação acima no espaço $\mathscr{C}(J)$ das funções contínuas, definidas no intervalo $J = [a, b]$. A métrica a ser usada será a usual, dada por:

$$d(x, y) = \max_{t \in J} |x(t) - y(t)|.$$

Vamos assumir também que $v \in \mathscr{C}(J)$ e o núcleo $k(t, \tau)$ é contínuo em $G \doteq [a, b] \times [a, b]$. Dessa forma, k é limitada em G, ou seja, existe $c > 0$ tal que:

$$|k(t, \tau)| \leq c, \quad \forall (t, \tau) \in G.$$

Considere agora a aplicação $T : \mathscr{C}(J) \to \mathscr{C}(J)$ dada por:

$$Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau) x(\tau) d\tau.$$

Como k e v são contínuas, essa aplicação está bem definida. Nas condições acima, vamos mostrar que T possui um único ponto fixo no espaço métrico completo $\mathscr{C}(J)$. Para isso, vamos determinar que condição a constante μ torna T uma contração. Note que

$$\begin{aligned}
d(Tx, Ty) &= \max_{t \in J} |Tx(t) - Ty(t)| \\
&= |\mu| \max_{t \in J} \left| \int_a^b k(t, \tau)[x(\tau) - y(\tau)] d\tau \right| \\
&\leq |\mu| \max_{t \in J} \int_a^b |k(t, \tau)||x(\tau) - y(\tau)| d\tau \\
&\leq |\mu| \, c \max_{\sigma \in J} |x(\sigma) - y(\sigma)| \int_a^b d\tau \\
&= |\mu| \, c \, (b - a) \, d(x, y).
\end{aligned}$$

Assim, se adicionarmos a condição

$$|\mu| < \frac{1}{c(b - a)},$$

teremos que T é uma contração em $\mathscr{C}(J)$. Então, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach a aplicação T possui um único ponto fixo $x \in \mathscr{C}(J)$, ou seja, existe um única função contínua x definida em $J = [a, b]$ de forma que

$$x(t) = Tx(t) = v(t) + \mu \int_a^b k(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad t \in J,$$

e fica assim provado que existe um única solução em $\mathscr{C}(J)$ para a equação de Fredholm (3.4).

Considerações Finais

A construção desse trabalho tornou possível a demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Banach, bem como um estudo sobre algumas das suas aplicações diretas, além disso, possibilitou uma análise considerável à respeito dos Espaços Métricos, Espaços Normados, Isometrias, continuidade de funções e um conjunto de diversos outros conceitos, exemplos e resultados matemáticos.

Existem diversos teoremas que validam a existência de pontos fixos em determinadas equações, por exemplo, os teoremas de ponto fixo de Brouwer, Schauder e Schaefer, contudo, o Teorema do Ponto Fixo de Banach é o único dentre esses que garante mais do que a existência de um ponto fixo, a unicidade. Indiretamente e nas condições ideais, isso nos proporciona a resposta de duas perguntas importantes quando o problema envolve uma equação do tipo $f(x) = x$ que são: "essa equação possui solução?", e em caso afirmativo, "essa solução é única?".

Estudar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, nesse sentido, nos disponibiliza uma ferramenta para garantir, caso tenhamos uma contração em um Espaço Métrico Completo, que a função possui apenas um ponto fixo, e mais do que isso, utilizando o Método das Aproximações Sucessivas conseguimos ao menos determinar aproximadamente qual é essa solução, tornando o estudo à respeito dessas equações menos complexo.

Referências Bibliográficas

[1] E.L. Lima; *Espaços Métricos*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1993.

[2] E. Kreyszig; *Introductory Functional Analysis with Applications*, University of Windsor, 1978

[3] C.S. Hönig; *Aplicações da Topologia à Análise*, Universidade Federal de Pernambuco, 1976

[4] C.D.V. Barros; *O Teorema do Ponto Fixo de Banach e algumas aplicações.* 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal da Paraíba.

[5] W. Zelasko; *A short history of polish mathematics*, Mathematical Institute, Polish Academy of Sciences Sniadeckich, 2004. Disponível em: https://www.impan.pl/Sixty/polmat.pdf