

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SANDRO RODRIGUES

ESTIMATIVA E REDUÇÃO DO ERRO DE DISCRETIZAÇÃO PARA O PROBLEMA
DE POROELASTICIDADE

CURITIBA

2023

SANDRO RODRIGUES

ESTIMATIVA E REDUÇÃO DO ERRO DE DISCRETIZAÇÃO PARA O PROBLEMA
DE POROELASTICIDADE

Tese apresentada ao curso de doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE), Setor de Exatas e de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador:

Prof. Dr. Marcio Augusto Villela Pinto.

Coorientadores:

Prof. Dr. Marcio André Martins;

Prof. Dr. Sebastião Romero Franco.

CURITIBA

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Rodrigues, Sandro

Estimativa e redução do erro de discretização para o problema de poroelasticidade / Sandro Rodrigues. – Curitiba, 2023.

1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia .

Orientador: Marcio Augusto Villela Pinto

Coorientadores: Marcio André Martins; Sebastião Romero Franco

1. Erros de discretização. 2. Poroelasticidade. 3. Diferenças finitas – Método. 4. Múltiplas Extrapolações de Richardson. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia . III. Pinto, Marcio Augusto Villela. IV. Martins, Marcio André. V. Franco, Sebastião Romero. VI. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MÉTODOS NUMÉRICOS
EM ENGENHARIA - 40001016030P0

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **SANDRO RODRIGUES** intitulada: **ESTIMATIVA E REDUÇÃO DO ERRO DE DISCRETIZAÇÃO PARA O PROBLEMA DE POROELASTICIDADE**, sob orientação do Prof. Dr. MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 30 de Junho de 2023.

Assinatura Eletrônica

03/07/2023 13:55:16.0

MARCIO AUGUSTO VILLELA PINTO

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

11/07/2023 15:14:05.0

NEYVA MARIA LOPES ROMEIRO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA)

Assinatura Eletrônica

03/07/2023 09:56:49.0

ROBERTO DALLEDONE MACHADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

03/07/2023 09:12:58.0

GUILHERME BERTOLDO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

08/07/2023 21:39:41.0

VIVIANA COCCO MARIANI

Avaliador Externo (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO PARANÁ)

Centro Politécnico - UFPR - Curitiba - Paraná - Brasil

CEP 81530-015 - Tel: (01) 0000-0000 - E-mail: ppgmne@ufpr.br

Documento assinado eletronicamente de acordo com o disposto na legislação federal Decreto 8539 de 08 de outubro de 2015.

Gerado e autenticado pelo SIGA-UFPR, com a seguinte identificação única: 296146

Para autenticar este documento/assinatura, acesse <https://siga.ufpr.br/siga/visitante/autenticacaoassinaturas.jsp> e insira o código 296146

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar minha sincera gratidão a todos que contribuíram para a realização desta jornada acadêmica, culminando na conclusão desta tese de doutorado. Este trabalho não teria sido possível sem o apoio, orientação e incentivo de várias pessoas, e é com imenso apreço que dedico estas palavras de agradecimento.

Primeiramente, desejo expressar minha profunda gratidão ao meu orientador, Prof. Dr. Marcio Augusto Villela Pinto, por sua orientação sábia e dedicada ao longo de todo o processo. Sua expertise e orientação foram fundamentais para a construção deste trabalho e para o meu crescimento como pesquisador.

Agradeço também aos meus coorientadores, Prof. Dr. Marcio André Martins e Prof. Dr. Sebastião Romero Franco, por sua orientação valiosa e contribuições substanciais que enriqueceram esta pesquisa. Sua orientação conjunta trouxe perspectivas únicas para o desenvolvimento desta tese.

Aos ilustres membros da banca examinadora, Profa. Dra. Neyva Maria Lopes Romeiro, Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado, Prof. Dr. Guilherme Bertoldo e Profa. Dra. Viviana Cocco Mariani, expresso minha sincera gratidão pelo tempo dedicado à leitura cuidadosa e análise criteriosa deste trabalho. Suas contribuições foram inestimáveis para o refinamento final desta tese.

Gostaria de dedicar um agradecimento especial à minha esposa, Vantielen, e ao meu filho Érico, pelo apoio inabalável e compreensão ao longo desta jornada desafiadora. Seu amor e paciência foram a âncora que me permitiu enfrentar os desafios com determinação.

À minha família, meus pais Erica e José, expresso minha gratidão por seu apoio constante, incentivo e crença em minha capacidade.

Minha gratidão se estende aos amigos João Paulo, Jotair, Vania e Marcelo, que compartilharam risos, apoio e amizade verdadeira ao longo desses anos. As trocas de conhecimento e experiências foram essenciais para moldar minhas ideias e enriquecer meu percurso acadêmico.

Minha gratidão se estende a todos os colegas que, de uma forma ou outra, contribuíram para o desenvolvimento deste trabalho.

Não posso deixar de expressar minha gratidão ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia (PPGMNE) da Universidade Federal do Paraná (UFPR) e ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO) pelo afastamento concedido, permitindo-me dedicar tempo integral aos estudos e à pesquisa.

Por fim, a todos que, de alguma maneira, colaboraram para esta conquista, expresso meu mais profundo agradecimento.

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo reduzir e estimar o erro de discretização (E_h) através da aplicação de Múltiplas Extrapolações de Richardson (MER) ao problema de escoamento em meio poroso deformável em domínios unidimensionais e bidimensionais. Tal método caracteriza-se como um procedimento de pós-processamento que requer baixo custo computacional fundamentado na série de Richardson. Neste sentido, realiza-se a verificação numérica de soluções obtidas com o emprego do Método das Diferenças Finitas, em que são aplicadas aproximações espaciais de segunda ordem, bem como condições de contorno de Dirichlet e Neumann. As aproximações temporais são executadas através do método de Crank-Nicolson, gerando assim grandes sistemas de equações lineares. Para resolver esses sistemas, é utilizado o método *multigrid* em conjunto com o suavizador Vanka, otimizando assim a convergência do processo iterativo. As variáveis de interesse são classificadas de acordo com suas localizações, tais como nodais e não nodais, durante o refinamento da malha. Os resultados são agrupados da seguinte forma: para variáveis com localização nodal fixa, a aplicação de MER leva a uma redução substancial no erro E_h . No entanto, para variáveis com coordenadas variáveis durante o refinamento da malha, a aplicação direta de MER não se mostra eficaz. Para lidar com essa situação, uma metodologia é proposta, envolvendo interpolação polinomial prévia e um método de otimização. Os resultados obtidos revelam que essa abordagem é promissora para redução do erro de discretização e aumento da ordem de acurácia das soluções numéricas, quando aplicada a esse tipo de variável. Além disso, busca-se a obtenção de estimativas do erro de discretização após a aplicação de MER. A análise abrange diversos estimadores presentes na literatura, destacando-se o estimador de Richardson Corrigido, recomendado por sua maior acurácia e confiabilidade em comparação com outros estimadores examinados neste trabalho.

Palavras-chave: Múltiplas Extrapolações de Richardson, Erros de discretização, Estimator de erro, Poroelasticidade

ABSTRACT

The current work aims to reduce and estimate discretization error (E_h) through the utilization of Repeated Richardson Extrapolation (RRE) to the problem of flow in a deformable porous medium within one-dimensional and two-dimensional domains. The adopted methodology is characterized as a post-processing procedure, requiring low computational cost and grounded in the Richardson series. In this context, numerical verification is conducted on solutions attained using the Finite Difference Method, where second-order spatial approximations are applied, alongside Dirichlet and Neumann boundary conditions. Temporal approximations are executed through the Crank-Nicolson method, resulting in the formulation of large systems of linear equations. To solve these systems, the multigrid method together with the Vanka smoother is employed, thereby optimizing the convergence of the iterative process. The variables of interest are categorized based on their positions, including nodal and non-nodal, throughout mesh refinement. The results are organized as follows: for variables with fixed nodal locations, the application of RRE leads to a substantial reduction in error E_h . However, for variables with varying coordinates during mesh refinement, the direct application of RRE proves ineffective. To address this situation, a methodology is proposed, involving prior polynomial interpolation and an optimization method. The obtained results reveal that this approach holds promise for reducing discretization error and enhancing the accuracy order of numerical solutions when applied to this type of variable. Furthermore, the work seeks to obtain estimations of discretization error subsequent to the application of RRE. The analysis encompasses various estimators present in the literature, with the Corrected Richardson Estimator standing out as recommended due to its greater accuracy and reliability compared to other estimators examined in this study.

Keywords: Repeated Richardson Extrapolation, Discretization Errors, Error Estimator, Poroelasticity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Desempenho de MER sobre E_h para a variável p_c	17
Figura 2 – Desempenho de MER sobre E_h para a variável p_{max}	17
Figura 3 – Espaço poroso em solos arenosos, siltosos e argilosos.	22
Figura 4 – Volume elementar de solo.	24
Figura 5 – Ilustração do experimento da coluna de areia de Darcy.	28
Figura 6 – Exemplo de uma malha uniforme unidimensional.	30
Figura 7 – Exemplo de uma malha uniforme bidimensional.	31
Figura 8 – Aproximações temporais.	34
Figura 9 – Estrutura do ciclo V	57
Figura 10 – Estrutura do ciclo F	58
Figura 11 – Estrutura do ciclos W	58
Figura 12 – Cinco incógnitas atualizadas simultaneamente com o suavizador Vanka, caso 2D.	60
Figura 13 – Variável com localização nodal fixa, sem alteração de coordenadas, ao se considerar malhas distintas, com o refino de Ω^h	61
Figura 14 – Variável com localização indeterminada, apresenta alteração de coordenadas ao se considerar malhas distintas.	62
Figura 15 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis u_c e p_c	65
Figura 16 – Erro de discretização E_h , E_m e suas estimativas, variáveis u e p	67
Figura 17 – Ordem de acurácia associada a variável p_c , com e sem MER.	68
Figura 18 – Resíduo adimensionalizado ao longo das iterações, para a variável p_c com $\Omega^h = 8193$	68
Figura 19 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis u_{max} e p_{max}	69
Figura 20 – Erro de discretização para interpolação polinomial sem MER (E_p) e com MER (E_{pm}) para $p = 2, 4, 6, 8$ versus discretização espacial (h).	70
Figura 21 – Erro de discretização para interpolação polinomial sem MER (E_p), com MER (E_{pm}) e sua estimativa U_{pmc} versus discretização espacial (h).	70
Figura 22 – Ordem de acurácia associada a variável u_{max} , com e sem MER.	72
Figura 23 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis u_{max} e p_{max}	73
Figura 24 – Ordem de efetiva p_E , para variável u_{max} , com e sem interpolação polinomial.	74
Figura 25 – Desempenho de MER sobre E_h , para interpolação polinomial seguida de um método de otimização para as variáveis u_{max} e p_{max}	75

Figura 26 – Erro de discretização para interpolação polinomial sem MER (E_p), com MER (E_{pm}) e sua estimativa U_{pmc} versus discretização espacial (h).	76
Figura 27 – Ordem de acurácia associada à variável u_{max} , com e sem MER.	77
Figura 28 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis p_3 e p_5	79
Figura 29 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis p_3 e p_5	80
Figura 30 – Desempenho de MER sobre Eh , para variáveis u_1, u_2, u_3, u_4 e u_5	83
Figura 31 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis v_3 e v_4	84
Figura 32 – Erro de discretização E_h, E_m e suas estimativas, para as variáveis u_3 e u_4	85
Figura 33 – Erro de discretização E_h, E_m e suas estimativas, para as variáveis p_3 e p_4	86
Figura 34 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis p_1 e p_3	87
Figura 35 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis u_2 e u_3	88
Figura 36 – Erro de discretização E_h, E_m e suas estimativas, variáveis u_2 e u_3	90
Figura 37 – Erro de discretização E_h, E_m e suas estimativas, variáveis p_2 e p_3	91
Figura 38 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis u_{max} e p_{max}	92
Figura 39 – Ordem efetiva p_E , para as variáveis u_{max} e p_{max} com e sem interpolação polinomial.	93
Figura 40 – Erro de discretização para interpolação polinomial sem MER (E_p) e com MER (E_{pm}).	93
Figura 41 – Erro de discretização para interpolação polinomial sem MER (E_p) e com MER (E_{pm}).	95
Figura 42 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis u_{max} e p_{max}	96
Figura 43 – Erro de discretização para interpolação polinomial sem MER (E_p) e com MER (E_{pm}).	96
Figura 44 – Erro de discretização para interpolação polinomial sem MER (E_p) e com MER (E_{pm}).	97
Figura 45 – Intervalos de valores de condutividade hidráulica K e de permeabilidade k	107
Figura 46 – Valores típicos de condutividade hidráulica K	108

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Representação esquemática do emprego de MER.	42
Tabela 2 – Representação esquemática do emprego de U_{pm}	43
Tabela 3 – Representação esquemática do emprego de U_{ψ}	43
Tabela 4 – Parâmetros de entrada para o primeiro problema poroelástico 1D. . . .	64
Tabela 5 – Erro de discretização E_h e E_m , para as variáveis u_c e p_c	65
Tabela 6 – Efetividade dos estimadores U_{Δ} , U_{pmc} , U_{ψ} e U_{ψ^*} , para a variável u_c . . .	66
Tabela 7 – Efetividade dos estimadores U_{Δ} , U_{pmc} , U_{ψ} e U_{ψ^*} , para a variável p_c . . .	67
Tabela 8 – Ordens efetiva (p_E) e aparente (p_U) para as variáveis u_{max} e p_{max} , sem interpolação polinomial.	69
Tabela 9 – Ordens efetiva p_E e aparente p_U para as variáveis u_{max} e p_{max}	71
Tabela 10 – Efetividade dos estimadores U_{Δ} , U_{pmc} , U_{ψ} e U_{ψ^*} , para E_{pm} , $p = 6$ e variável u_{max}	71
Tabela 11 – Efetividade dos estimadores U_{Δ} , U_{pmc} , U_{ψ} e U_{ψ^*} , para E_{pm} , $p = 4$ e variável p_{max}	72
Tabela 12 – Parâmetros de entrada para o segundo problema poroelástico 1D. . . .	73
Tabela 13 – Ordens efetiva p_E e aparente p_U para as variáveis u_{max} e p_{max} , sem interpolação polinomial.	74
Tabela 14 – Efetividade dos estimadores U_{Δ} , U_{pmc} , U_{ψ} e U_{ψ^*} , para E_{pm} , $p = 6$ e variável u_{max}	75
Tabela 15 – Efetividade dos estimadores U_{Δ} , U_{pmc} , U_{ψ} e U_{ψ^*} , para E_{pm} , $p = 4$ e variável p_{max}	76
Tabela 16 – Parâmetros de entrada para o primeiro problema poroelástico 2D. . . .	78
Tabela 17 – Redução do erro em três malhas distintas, variável p_3	79
Tabela 18 – Ordens efetiva p_E e aparente p_U , para variáveis p_3 e p_5	80
Tabela 19 – Ordens efetiva p_E e aparente p_U , para variáveis p_3 e p_5	81
Tabela 20 – Redução do erro em três malhas distintas, variável u_3	82
Tabela 21 – Efetividade dos estimadores U_{Δ} , U_{pm} , U_{pmc} , U_{ψ} e U_{ψ^*} , para a variável u_3 . . .	82
Tabela 22 – Efetividade dos estimadores U_{Δ} , U_{pm} , U_{pmc} , U_{ψ} e U_{ψ^*} , para a variável u_4 . . .	84
Tabela 23 – Efetividade dos estimadores U_{Δ} , U_{pm} , U_{pmc} , U_{ψ} e U_{ψ^*} , para a variável p_3 . . .	84
Tabela 24 – Efetividade dos estimadores U_{Δ} , U_{pm} , U_{pmc} , U_{ψ} e U_{ψ^*} , para a variável p_4 . . .	85
Tabela 25 – Parâmetros de entrada para o segundo problema poroelástico 2D. . . .	86
Tabela 26 – Redução do erro em duas malhas distintas, para as variáveis p_1 e p_3 . . .	87
Tabela 27 – Redução do erro em duas malhas distintas, variáveis u_2 e u_3	88
Tabela 28 – Efetividade dos estimadores U_{Δ} , U_{pm} , U_{pmc} , U_{ψ} e U_{ψ^*} , para a variável u_2 . . .	89
Tabela 29 – Efetividade dos estimadores U_{Δ} , U_{pm} , U_{pmc} , U_{ψ} e U_{ψ^*} , para a variável u_3 . . .	89
Tabela 30 – Efetividade dos estimadores U_{Δ} , U_{pm} , U_{pmc} , U_{ψ} e U_{ψ^*} , para a variável p_2 . . .	90
Tabela 31 – Efetividade dos estimadores U_{Δ} , U_{pm} , U_{pmc} , U_{ψ} e U_{ψ^*} , para a variável p_3 . . .	91

Tabela 32 – Ordens efetiva p_E e aparente p_U para as variáveis u_{max} e p_{max} , sem interpolação polinomial.	92
Tabela 33 – Efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} , para a variável u_{max} ($p = 6$).	94
Tabela 34 – Efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} , para a variável p_{max} ($p = 6$).	94
Tabela 35 – Parâmetros de entrada para o terceiro problema poroelástico 2D.	95
Tabela 36 – Efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} , para a variável u_{max} ($p = 6$).	97
Tabela 37 – Efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} , para a variável p_{max} ($p = 6$).	97

LISTA DE SÍMBOLOS

E	módulo de Young
E	erro numérico
E_h	erro de discretização
E_m	erro de discretização obtido após o emprego de MER com o maior nível de extrapolação possível ($m = g - 1$)
E_p	erro numérico obtido após o emprego de interpolação polinomial sobre os pontos nodais
E_{pm}	erro numérico obtido após o emprego de interpolação polinomial e MER com o maior nível de extrapolação possível ($m = g - 1$)
E_I	erro de iteração
E_π	erro de arredondamento
E_T	erro de truncamento
g	indicador do nível de malha
G	número total de malhas consideradas
h	espaçamento entre os pontos nodais (ou nós) da malha
K	condutividade hidráulica
m	indicador do nível de extrapolação
N	número de pontos nodais da malha em cada direção
p	grau do polinômio interpolador
p	pressão (nas equações da poroelasticidade)
p_m	valor médio da incógnita p
p_L	ordem de acurácia
p_E	ordem efetiva
$(p_E)_{g,m}$	ordem efetiva inerente à solução obtida com o emprego de MER
p_V	conjunto das ordens verdadeiras
p_U	ordem aparente

$(pU)_{g,m}$	ordem aparente inerente à solução obtida com o emprego de MER
r	razão de refino de malha
r_e	razão de engrossamento da malha no método <i>multigrid</i>
u	variável de interesse, deslocamento na direção coordenada x
u_c	valor da incógnita u no centro do domínio
U_h	estimativa para E_h
U_Δ	estimador Δ
U_{Ri}	estimador Richardson
U_{pm}	U_{Ri} com base em p_v para MER, estimador pm
U_{pmc}	U_{pm} corrigido
U_ψ	estimador ψ
U_{ψ^*}	U_ψ corrigido
v	deslocamento na direção coordenada y
x	abscissa – coordenada espacial
\mathcal{U}	termo fonte relacionado ao deslocamento na direção u
\mathcal{V}	termo fonte relacionado ao deslocamento na direção v
\mathcal{P}	termo fonte relacionado a pressão p

Letras Gregas

Φ	solução analítica para a variável de interesse
ϕ	solução numérica para variável de interesse
ϕ_∞	solução analítica estimada
$\theta(U)$	efetividade da estimativa U
τ	distância entre os pontos da aproximação temporal
Ω	domínio de cálculo (contínuo)
Ω^h	domínio de cálculo discretizado com espaçamento h (malha uniforme)
ξ	polinômio

ξ_p	polinômio de grau p
λ, μ	constantes de Lamé (usadas nas equações da poroelasticidade)
Δ	operador Laplaciano

Acrônimos

CDS	<i>Central Differencing Scheme</i>
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
CN	Crank-Nicolson
ER	Extrapolação de Richardson
MDF	Método das Diferenças Finitas
MER	Múltipla Extrapolação de Richardson

índices

i	posição do nó na direção x
j	posição do nó na direção y
n	posição do nó na direção t

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Descrição do problema	16
1.2	Revisão bibliográfica	18
1.3	Objetivos	20
1.4	Organização do texto	21
2	TEORIA DA CONSOLIDAÇÃO DE BIOT	22
2.1	Relações constitutivas	23
2.2	Equações de equilíbrio	24
2.3	Escoamento de um fluido em um meio poroso (lei de Darcy)	28
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	30
3.1	Método das Diferenças Finitas	30
3.2	Métodos para a aproximação temporal	33
3.2.1	Método de Euler	34
3.2.2	Método de Crank-Nicolson	35
3.3	Erro numérico	36
3.3.1	Erro de truncamento e erro de discretização	36
3.3.2	Erro de iteração	37
3.3.3	Erro de arredondamento	38
3.4	Estimativas para o erro de discretização	38
3.4.1	Estimador Δ	38
3.4.2	Estimador de Richardson	38
3.4.3	Estimador ψ	39
3.4.4	Efetividade de uma estimativa de erro	39
3.5	Múltipla Extrapolação de Richardson	40
3.6	Estimativas para o erro de discretização baseadas em MER	41
3.6.1	Estimador Δ	41
3.6.2	Estimador de Richardson corrigido (p_{mc})	42
3.6.3	Estimador ψ^*	43
3.7	Interpolação polinomial	44
3.8	Métodos de otimização	45
4	MODELOS MATEMÁTICOS E NUMÉRICOS	47
4.1	Modelos matemáticos	47
4.2	Modelos numéricos	49
4.3	<i>Multigrid</i> e <i>solver</i> Vanka	56

4.3.1	Método <i>multigrid</i>	56
4.3.2	Suavizador Vanka	59
5	VARIÁVEIS DE INTERESSE	61
5.1	Variáveis do tipo 1	61
5.2	Variáveis do tipo 2	62
6	RESULTADOS	64
6.1	Problemas de poroelasticidade unidimensionais	64
6.1.1	Primeiro problema poroelástico unidimensional	64
6.1.1.1	Variáveis com mesma localização nodal em malhas distintas	65
6.1.1.2	Variáveis com ponto extremo	68
6.1.2	Segundo problema poroelástico unidimensional	73
6.2	Problemas de poroelasticidade bidimensionais	77
6.2.1	Primeiro problema poroelástico bidimensional	77
6.2.1.1	Erro de discretização com e sem MER, para a variável pressão	78
6.2.1.2	Erro de discretização com e sem MER, para a variável deslocamento	81
6.2.1.3	Estimativas para o erro de discretização	82
6.2.2	Segundo problema poroelástico bidimensional	86
6.2.2.1	Erro de discretização com e sem MER	87
6.2.2.2	Estimativas para o erro de discretização	89
6.2.2.3	Variáveis com ponto extremo	91
6.2.3	Terceiro problema poroelástico bidimensional	95
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	99
7.1	Escopo do trabalho	99
7.2	Conclusão geral	99
7.3	Principais contribuições	100
7.4	Propostas de trabalhos futuros	101
	REFERÊNCIAS	102
	APÊNDICE A – VALORES TÍPICOS PARA A CONDUTI- VIDADE HIDRÁULICA	107

1 INTRODUÇÃO

Um dos grandes desafios dos pesquisadores na área da Dinâmica dos Fluidos Computacional (em inglês, *Computational Fluid Dynamic*, CFD) é avaliar o nível de acurácia das soluções numéricas. Embora os erros numéricos não possam ser totalmente eliminados, é imprescindível que sejam controlados, ou minimizados, em simulações numéricas computacionais. De todas as fontes de erros numéricos, o erro de discretização (E_h) é considerado como a mais significativa (ROY; OBEEKAMPF, 2011).

Como formas de reduzir E_h , algumas alternativas podem ser avaliadas, porém as mesmas apresentam vantagens e desvantagens, como: o refinamento da malha, eleva o custo computacional; o aumento da ordem de acurácia das aproximações, aumenta a complexidade do modelo numérico; a utilização de técnicas de extrapolação, considerada um pós-processamento é de fácil implementação e baixo custo computacional (RICHARDSON; GAUNT, 1927; SIDI, 2003; MARCHI *et al.*, 2013b).

Atualmente, a utilização de técnicas de extrapolação como ferramentas computacionais eficazes, é cada vez mais reconhecida no meio científico. A qualidade de um método de extrapolação pode ser avaliada mediante a consideração do comportamento assintótico de uma sequência convergente, conforme (SIDI, 2003). A Extrapolação de Richardson (ER), um dos métodos mais conhecidos, baseia-se no comportamento assintótico de uma sequência convergente para melhorar a precisão da estimativa. O método utiliza uma fórmula de extrapolação para gerar uma nova sequência de estimativas com uma taxa de convergência superior à sequência original. Ao se aplicar ER de forma recursiva é possível potencializar a sua eficácia e esse processo é denominado Múltipla Extrapolação de Richardson (MER) (em inglês, *Repeated Richardson Extrapolation*, RRE) (DAHLQUIST; BJORCK, 2008).

Alguns problemas em CFD possuem em seus modelos matemáticos equações diferenciais e seus acoplamentos (composições) e, a verificação numérica para esses problemas requer atenção. Em particular, a poroelasticidade é um destes problemas, onde as equações modelam matematicamente a interação entre a deformação de um material elástico poroso e o fluxo de fluido dentro dele. No entanto, a verificação numérica desse modelo não está consolidada na literatura e ainda é objeto de estudo e discussão. A teoria geral, formulada por Biot (1941), é conhecida atualmente como modelo de consolidação de Biot. A análise e a simulação numérica do modelo de Biot tornaram-se mais populares e vêm sendo discutidas em trabalhos recentes devido a sua gama de aplicações como na Medicina, Engenharia do Petróleo, Biomecânica, dentre outros campos da Ciência e da Engenharia (EHLERS W. ANDA BLUHM, 2002; RODRIGO, 2010; FRANCO, 2017; FRANCO *et al.*, 2018).

Os modelos matemáticos utilizados neste trabalho abordam o problema de escoamento monofásico em meio poroso deformável tanto em casos unidimensionais quanto

bidimensionais. O problema de escoamento de apenas um único fluido em um meio poroelástico, será denotado por "problema de poroelasticidade", onde as equações são resolvidas numericamente com o emprego do Método das Diferenças Finitas (MDF) utilizando aproximações espaciais de segunda ordem de acurácia, condições de contorno de Dirichlet e de Neumann. Além disso, o método de Crank-Nicolson é utilizado para realizar a aproximação temporal e a conexão espacial e temporal, gerando com isso um sistema de equações lineares que é resolvido iterativamente pelo suavizador Vanka. O suavizador Vanka é um método que realiza suavizações por blocos e todas as incógnitas no sistema são consideradas acopladas. Nas simulações numéricas utilizou-se precisão quádrupla e um número suficiente de iterações para atingir o nível de acurácia conhecido como erro de máquina.

As soluções numéricas analisadas correspondem:

- a) ao deslocamento e a pressão para variáveis que apresentam mesma localização nodal com o processo de refinamento de malha na solução numérica;
- b) às médias dos deslocamentos e das pressões (variáveis globais);
- c) ao valor máximo para o deslocamento e para a pressão (variáveis que apresentam mudança na coordenada (nodal) com o processo de refinamento de malha na solução numérica).

Os resultados obtidos a partir dessas análises indicam que a metodologia empregada é promissora no sentido de elevar a acurácia das soluções numéricas para o problema de poroelasticidade.

1.1 Descrição do problema

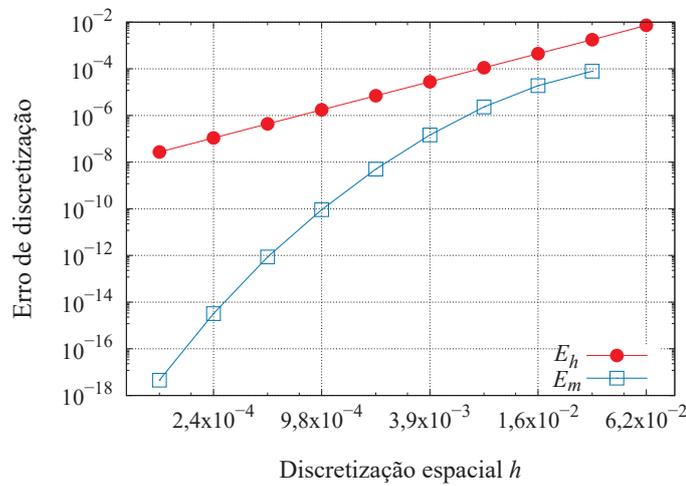
De modo sumário, para apresentação do problema que motivou esta tese, suponha um processo de refinamento de malha de modo que para cada malha obtenham-se soluções numéricas distintas. Nesse panorama, para o modelo citado anteriormente, considera-se a variável pressão no centro do domínio, ou seja, a variável p_c . Tal variável apresenta a mesma localização nodal com o processo de refinamento de malha, embora seus valores sejam distintos em cada malha considerada. Mediante a representação do erro de discretização associado a esta variável, *versus* h (dimensão do elemento de malha ou espaçamento entre os nós de cada malha), ilustram-se na Figura 1 as magnitudes de E_h e E_m , ou seja, o erro de discretização sem e com o emprego de MER, para o problema de poroelasticidade unidimensional (detalhes sobre o modelo matemático/numérico de poroelasticidade, bem como sobre a técnica de MER, serão dados nos capítulos 4 e 5).

Nota-se que os valores para E_h (erro de discretização sem o emprego de MER) são superiores ao E_m (erro de discretização com o emprego de MER) e E_m tornam-se

progressivamente menores com o processo de refino de malha. Essa é a situação ideal na aplicação de MER, isto é, apresentar uma redução progressiva de E_m e com isso elevar a ordem de acurácia. Essa elevação pode ser verificada com o aumento do declive do gráfico do erro *versus* h em escala bilogarítmica (Figura 1).

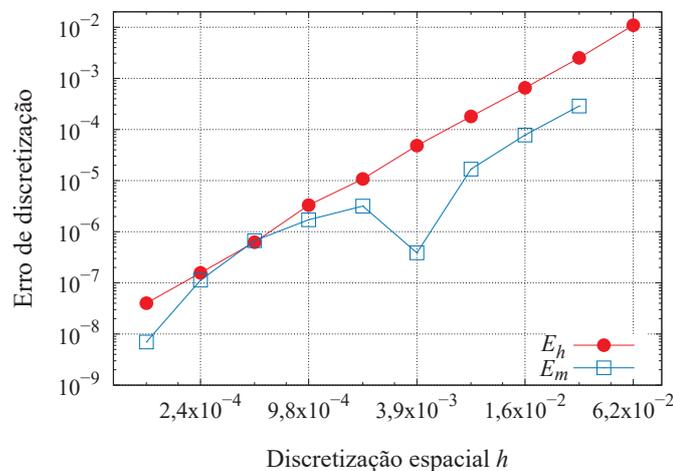
Por outro lado, para variáveis que apresentam mudança na coordenada (nodal) com o processo de refinamento de malha, como exemplo o valor máximo da pressão (p_{max}), a aplicação direta de MER não se mostra eficiente na redução de E_h , como anteriormente para p_c , ou seja, a magnitude de E_m não apresenta redução significativa em relação ao E_h com o processo de refino de malha (Figura 2). Logo, para esse tipo de variável, a aplicação direta de MER não se mostra uma ferramenta eficiente.

Figura 1 – Desempenho de MER sobre E_h para a variável p_c .



FONTE: O autor (2023).

Figura 2 – Desempenho de MER sobre E_h para a variável p_{max} .



FONTE: O autor (2023).

Isso posto, o presente trabalho busca estabelecer uma metodologia que seja capaz

de reduzir a magnitude de E_h com o emprego de MER e estimar E_m , especialmente para variáveis que apresentam mudança na coordenada (nodal) com o processo de refinamento de malha.

1.2 Revisão bibliográfica

Nesta seção são apresentados alguns trabalhos relacionados à Múltipla Extrapolação de Richardson (MER), destacando sua eficiência e algumas necessidades de aprimoramento. Richardson e Gaunt (1927) consideraram a aplicação da Extrapolação de Richardson (ER) com dois níveis de extrapolação, aplicando essa técnica a equações na forma integral, como a equação integral de Volterra; e diferencial, como as derivadas no Teorema de Leibnitz.

Ertuk, Corke e Gokçol (2005) aplicaram dois níveis de ER, utilizando três malhas distintas no problema de escoamento permanente bidimensional de fluido incompressível em uma cavidade com tampa móvel e obtiveram sexta ordem de acurácia para a solução numérica.

Rahul e Bhattacharyya (2006) abordaram a avaliação da ordem de precisão das soluções obtidas através de aproximações numéricas unilaterais utilizando o método das Diferenças Finitas. Esse estudo foi direcionado a situações em que as condições de contorno demandam o cálculo de derivadas. Por meio da aplicação da Múltipla Extrapolação de Richardson com a utilização de três malhas distintas e dois níveis de extrapolação, foi possível alcançar uma ordem de acurácia quatro.

Marchi e Germer (2013) avaliaram o desempenho de MER na redução do erro de discretização quando associado a dez tipos de esquemas numéricos em CFD: de primeira, segunda e terceira ordens de acurácia para resolver a equação unidimensional de advecção-difusão. Os autores mostraram que MER é extremamente eficaz na redução do erro de discretização para todas as variáveis avaliadas (temperatura no centro do domínio, média do campo de temperatura e taxa de transferência de calor), esquemas numéricos e número de Peclet, atingindo uma ordem de acurácia superior a 18. Dentre as aproximações estudadas, o esquema de diferenças centrais (em inglês, *Central Differencing Scheme*, CFD), de segunda ordem de acurácia, apresentou o melhor desempenho quando associado com MER.

Marchi *et al.* (2013a) examinaram a capacidade de MER em minimizar o erro de discretização em malhas triangulares e quadrangulares durante a abordagem numérica (por meio de volumes finitos) da equação de Laplace. A análise revelou que, embora o erro numérico tenha sido reduzido, a performance teórica esperada da MER não se manifestou de maneira uniforme para todas as variáveis. Especificamente, essa disparidade foi mais evidente para as variáveis localizadas nas fronteiras do domínio computacional quando a geometria triangular foi considerada. Os autores reconhecem que a razão subjacente

pela qual a MER não atingiu eficácia nesse contexto específico de variáveis de interesse e geometria triangular permanece ambígua.

Marchi *et al.* (2013b) utilizaram MER para reduzir e estimar o erro de discretização de soluções numéricas para a equação de Laplace 2D em malhas quadrangulares. Os autores demonstraram que MER reduziu significativamente o erro de discretização. Como exemplo, de $2,25 \times 10^{-7}$ para $3,19 \times 10^{-32}$ com nove níveis de extrapolações e uma malha de 1.025×1.025 pontos (nós). Demonstraram ainda que a ordem de acurácia alcançada foi de aproximadamente 19 e que para se obter um determinado nível de acurácia requerido, foi necessário muito menos tempo de processamento e de memória RAM do que sem sua aplicação.

Martins (2013) e Marchi *et al.* (2016) apresentaram algumas necessidades de aprimoramento referentes ao emprego de MER e propõem um novo procedimento numérico para reduzir o erro de discretização associado a vários tipos de variáveis de interesse, as quais foram classificadas em cinco tipos de acordo com suas localizações coordenadas em malhas distintas. Desenvolveram estratégias, propondo um conjunto de procedimentos buscando reduzir o E_h onde a utilização direta de MER apresentava resultados insatisfatórios. Esses procedimentos, que envolviam interpolação polinomial, foram aplicados a três problemas modelados por equações clássicas da literatura: Poisson 1D, Burgers 2D e Navier – Stokes 2D. Concluíram que o erro de discretização é significativamente reduzido e a ordem de acurácia também é elevada.

AbdelMigid *et al.* (2017) analisaram a solução das equações de Navier-Stokes com escoamentos incompressíveis para a faixa de variação do número de Reynolds entre 100 e 5000. Utilizaram computação paralela para obter as soluções numéricas em malhas uniformes e MER foi usada para a redução dos erros de discretização. Os autores obtiveram uma elevação da ordem de acurácia de 2 para 6 com o emprego de MER.

Rodrigues *et al.* (2020) verificaram a eficiência de MER para reduzir E_h quando aplicada ao problema de poroelasticidade unidimensional. As variáveis de interesse analisadas foram o deslocamento e a pressão no centro do domínio e, o valor médio da pressão e do deslocamento. Verificou-se que o emprego de MER resultou em uma redução significativa da magnitude de E_h , assim como uma elevação da sua ordem de acurácia.

Guo e Chang (2020) avaliaram a eficiência de MER associado a sequência de Romberg. Esta abordagem foi desenvolvida sob o modelo de *Constant Elasticity of Variance*. Os autores concluíram que o método reduziu significativamente os erros para o *European knock-out*.

Rodrigues *et al.* (2022) realizaram um estudo para avaliar a eficiência de MER, considerando variáveis com valores extremos, correspondentes ao problema de poroelasticidade unidimensional. Os autores verificaram que a aplicação direta de MER em variáveis com valores extremos não foi eficiente e utilizaram uma metodologia que

envolve interpolação polinomial seguida de um método de otimização previamente ao emprego de MER. Os resultados obtidos indicam que a metodologia utilizada neste estudo é promissora em termos de redução do erro de discretização e aumento da acurácia das soluções numéricas, além de obtenção de estimativas para o erro de discretização confiáveis e acuradas.

Foltran, Marchi e Moura (2023) analisaram a eficiência de MER em problemas de meios participantes e não participantes de transferência de calor por radiação, alcançando bons resultados. As estimativas de erro mostraram-se acuradas e confiáveis para verificação de código e solução. Nesse trabalho também foram apresentadas equações que quantificam o erro de discretização espacial dentro do domínio quando o Método das Ordenadas Discretas é usado para simular problemas de meios participantes e quando regras básicas de integração numérica são usadas para resolver problemas de meios não participantes.

Com base nesses trabalhos pode-se considerar que a aplicação de MER é uma metodologia promissora para a redução de E_h , assim como para a elevação da ordem de acurácia das soluções numéricas em CFD. Entretanto, observa-se também a alteração do seu desempenho conforme a tipificação da variável de interesse, especialmente um certo comprometimento nos casos em que há alteração de coordenadas com o processo de refinamento de malhas. Portanto, esta tese está enquadrada nesse pleito, pois preenche a lacuna da literatura ao apresentar verificação numérica para o problema de poroelasticidade unidimensional e bidimensional mediante o emprego de MER com o intuito de reduzir e estimar E_h , em acordo com os objetivos descritos na sequência.

1.3 Objetivos

O presente trabalho tem como objetivo geral estabelecer o emprego da Múltipla Extrapolação de Richardson (MER) como metodologia para a redução e estimativa de E_h para variáveis que apresentam mudança na coordenada (nodal) com o processo de refinamento de malha, no problema de poroelasticidade unidimensional e bidimensional.

Como objetivos específicos têm-se:

- analisar na literatura especializada os resultados sobre o emprego de MER na redução e estimativa do erro de discretização;
- experimentar o emprego de MER em diversos tipos de variáveis de interesse para o problema de poroelasticidade unidimensional e bidimensional;
- propor um procedimento complementar ao emprego de MER para os casos em que seu emprego não resulta na redução imediata do erro de discretização;
- indicar um estimador confiável e acurado para o erro de discretização com o emprego de MER para o problema de poroelasticidade unidimensional e bidimensional.

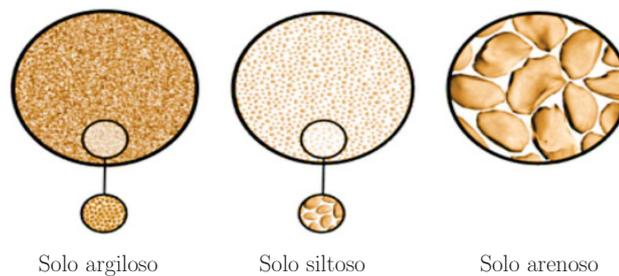
1.4 Organização do texto

Este trabalho está dividido em mais 6 capítulos. O primeiro capítulo constou da situação e apresentação desta proposta de tese, com apoio na literatura especializada. No capítulo 2 é apresentada a teoria da consolidação de Biot e suas equações; no capítulo 3 é descrita a fundamentação teórica necessária para o embasamento deste trabalho; no capítulo 4 são apresentados os modelos matemáticos e numéricos; no capítulo 5 são apresentados os tipos de variáveis com base no processo de refinamento de malha e também são expostos os procedimentos específicos para o emprego efetivo de MER, considerando cada tipo de variável; no capítulo 6 são expostos os resultados e, finalmente, no capítulo 7 são apresentadas: as considerações finais, as principais contribuições do trabalho e sugestões para trabalhos futuros.

2 TEORIA DA CONSOLIDAÇÃO DE BIOT

Quando um solo saturado é submetido a um acréscimo de tensão, a pressão dos poros aumenta imediatamente. Para solos arenosos, o recalque elástico e o adensamento ocorrem quase que instantaneamente, no entanto, o mesmo não acontece para solos argilosos, nos quais o recalque elástico ocorre quase que instantaneamente, porém o adensamento ocorre ao longo do tempo. Essa dependência temporal está relacionada com as propriedades do solo tais como a porosidade (Figura 3), a permeabilidade, e com a velocidade que o fluido se move entre os vazios (DAS; KHALED, 2019).

Figura 3 – Espaço poroso em solos arenosos, siltosos e argilosos.



Fonte: Adaptada de Ganat (2020).

O tratamento matemático desse processo foi inicialmente proposto por Terzaghi (1923), baseado em seus experimentos de laboratório unidimensionais e é conhecido como Teoria do Adensamento. Rendulic (1936) expande a teoria de Terzaghi para uma análise tridimensional, originando a Teoria de Terzaghi-Rendulic, porém esta teoria ainda considerava o problema de fluxo desacoplado do problema mecânico. A teoria tridimensional geral da poroelasticidade foi formulada por Biot em 1941.

As hipóteses adotadas por Biot (1941) para as propriedades básicas dos solos são as seguintes:

- o material é considerado isotrópico, ou seja, suas propriedades físicas são iguais independentemente da direção;
- o material é considerado perfeitamente elástico, ou seja, o carregamento e o descarregamento seguem o mesmo caminho no gráfico tensão-deformação;
- as deformações do material são pequenas;
- a água contida nos vazios é considerada incompressível;
- o escoamento da água no meio poroso ocorre segundo a lei de Darcy; e
- o solo é considerado saturado, ou seja, os vazios são totalmente preenchidos por água.

No artigo de Biot (1941) foi introduzida uma nova grandeza escalar, denominada de variação do volume de água (ζ) e definida como o incremento de volume de água por unidade de volume de solo. O acoplamento de termos mecânicos no problema de fluxo é caracterizado pela relação de dependência de ζ e às tensões atuantes no solo. O acoplamento de termos de fluido no problema mecânico, fez-se ao introduzir o termo de poropressão (p) nas relações constitutivas derivadas da lei de Hooke e descritas pela teoria de elasticidade.

Neste capítulo são apresentadas as relações constitutivas e as equações de equilíbrio que darão o suporte para se descrever as equações que modelam o escoamento de um fluido em um meio poroso.

2.1 Relações constitutivas

Os conceitos-chave da teoria poroelástica de Biot para um meio poroso isotrópico preenchido com fluido estão contidos em apenas duas equações constitutivas lineares, para o caso de um campo de tensão σ aplicado. Além de σ , outras grandezas utilizadas para descrever essas equações são: o incremento de volume de fluido ζ , a pressão do fluido p e a deformação volumétrica ϵ .

As equações constitutivas representam ϵ e ζ como uma combinação linear de σ e p e são dadas por (WANG, 2000)

$$\epsilon = a_{11}\sigma + a_{12}p, \quad (2.1)$$

$$\zeta = a_{21}\sigma + a_{22}p. \quad (2.2)$$

O significado físico de cada coeficiente a_{ij} é dado pela razão entre uma variável dependente e uma variável independente, enquanto a outra variável independente é mantida constante. Essas razões são expressas por:

$$a_{11} = \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial \sigma} \right|_{p=const} \equiv \frac{1}{K}; \quad a_{12} = \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right|_{\sigma=const} \equiv \frac{1}{H}; \quad (2.3)$$

$$a_{21} = \left. \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} \right|_{p=const} \equiv \frac{1}{H_1}; \quad a_{22} = \left. \frac{\partial \zeta}{\partial p} \right|_{\sigma=const} \equiv \frac{1}{R}, \quad (2.4)$$

em que $\frac{1}{K}$ é a compressibilidade drenada, $\frac{1}{R}$ é o coeficiente de armazenamento específico irrestrito, $\frac{1}{H}$ e $\frac{1}{H_1}$ são os coeficientes de expansão poroelástica.

Biot (1941) demonstra que $a_{12} = a_{21}$. Com isso, tem-se a seguinte relação de reciprocidade: a expansão do volume sob tensão constante devido a um aumento na pressão dos poros é o mesmo que o volume de fluido expelido sob pressão constante devido a um aumento na tensão de compressão. Matematicamente, essa relação é dada por

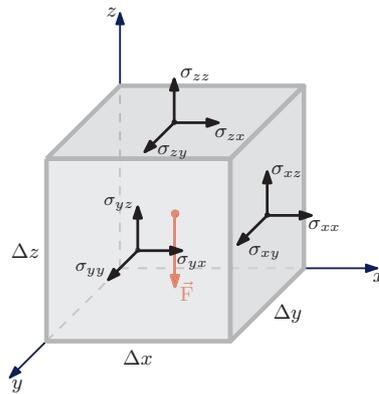
$$\frac{1}{H} = \frac{1}{H_1} \Rightarrow \left. \frac{\partial \epsilon}{\partial p} \right|_{\sigma=const} = \left. \frac{\partial \zeta}{\partial \sigma} \right|_{p=const}, \quad (2.5)$$

e assim, a resposta poroelástica para tensão isotrópica aplicada se caracteriza completamente (WANG, 2000).

2.2 Equações de equilíbrio

Para a construção das equações de equilíbrio, toma-se um elemento de solo com lados paralelos aos eixos coordenados e dimensões suficientemente grandes quando comparado às dimensões dos poros existentes, de forma que o solo pode ser considerado um material homogêneo. No entanto, o elemento deve ser suficientemente pequeno quando comparado à dimensão macroscópica do problema, podendo ser assumido como um volume infinitesimal no tratamento matemático, o qual será denominado por volume elementar de solo ilustrado na Figura 4.

Figura 4 – Volume elementar de solo.



Fonte: Adaptada de Cheng (2016).

As tensões atuantes no volume elementar de solo, Figura 4, são as tensões normais σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} e as tensões tangenciais, que são características da teoria da elasticidade. As tensões são então agrupadas em um tensor de tensões totais $\boldsymbol{\sigma}$ escrito como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

em que, as tensões cisalhantes perpendiculares à linha de intersecção entre as faces ortogonais do cubo são iguais, isto é

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx},$$

$$\sigma_{yz} = \sigma_{zy},$$

$$\sigma_{zx} = \sigma_{xz}.$$

As equações de equilíbrio de força translacional, incluindo uma força de corpo por unidade de volume (\vec{F}), podem ser obtidas da Figura 4. Por exemplo, a força resultante na direção x deve somar zero, logo

$$\begin{aligned} & [\sigma_{xx}(x + \Delta x, y, z) - \sigma_{xx}(x, y, z)] \Delta y \Delta z + [\sigma_{yx}(x, y + \Delta y, z) - \sigma_{yx}(x, y, z)] \Delta x \Delta z \\ & + [\sigma_{zx}(x, y, z + \Delta z) - \sigma_{zx}(x, y, z)] \Delta x \Delta y + F_x \Delta x \Delta y \Delta z = 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Cada termo entre colchetes, na equação (2.7), pode ser aproximado linearmente pela derivada do componente de tensão vezes a distância através do volume elementar de solo, ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx}(x + \Delta x, y, z) - \sigma_{xx}(x, y, z) = \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} \Delta x \\ \sigma_{yx}(x, y + \Delta y, z) - \sigma_{yx}(x, y, z) = \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} \Delta y \\ \sigma_{zx}(x, y, z + \Delta z) - \sigma_{zx}(x, y, z) = \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} \Delta z \end{array} \right. \cdot \quad (2.8)$$

Com isso, as equações de equilíbrio de forças são dadas por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + F_x = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + F_y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0 \end{array} \right. \cdot \quad (2.9)$$

Denominando as componentes do vetor deslocamento do meio poroso nas direções x , y e z por u , v e w , respectivamente, e adotando a hipótese das pequenas deformações (WANG, 2000), tem-se que as deformações no solo são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{array} \right. \cdot \quad (2.10)$$

Ao levar em consideração as hipóteses adotadas por Biot para as propriedades dos solos, a relação tensão-deformação do meio poroso é expressa pela lei de Hooke, por meio da teoria da elasticidade como

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \\ \epsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) \\ \epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{xx}) \\ \epsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \\ \epsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G} \\ \epsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G} \end{array} \right. , \quad (2.11)$$

em que as constantes E , ν e G são, respectivamente, o módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young, o coeficiente de Poisson e o módulo de elasticidade transversal, e são relacionadas por

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.12)$$

Em Biot (1941), os termos definidos na equação (2.11) são reescritos adicionando um termo aos componentes de deformações longitudinais. Esse termo adicionado por Biot, considera o efeito da pressão do fluido e atua apenas nas direções longitudinais do volume elementar de solo, não ocasionando deformações cisalhantes. Com isso, a equação (2.11) é reescrita como

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \frac{p}{3H} \\ \epsilon_{yy} = \frac{\sigma_{yy}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{xx} + \sigma_{zz}) + \frac{p}{3H} \\ \epsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{yy} + \sigma_{xx}) + \frac{p}{3H} \\ \epsilon_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{2G} \\ \epsilon_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{2G} \\ \epsilon_{yz} = \frac{\sigma_{yz}}{2G} \end{array} \right. , \quad (2.13)$$

em que p é a pressão no interior dos poros, também conhecida como poropressão e $\frac{1}{H}$, como já foi dito, é o coeficiente de expansão poroelástica. Assim, a equação (2.13) representa uma das relações fundamentais (equação (2.1)), que descreve o estado de deformações do meio poroso sob condições de equilíbrio. A outra relação fundamental dada na equação (2.1) é representada pelo incremento de volume do fluido (ζ). A entrada ou saída de fluido do volume de controle pode ser dada em razão da deformação deste volume, pela variação da pressão do fluido, fontes de geração ou sumidouros (WANG, 2000). Essa relação é

$$\zeta = \frac{1}{H} \bar{\sigma} + \frac{p}{R}, \quad (2.14)$$

em que $\bar{\sigma}$ é a tensão total média dada por

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}, \quad (2.15)$$

e $\frac{1}{R}$ é o coeficiente de armazenamento específico irrestrito. Verifica-se que para definir essas relações, são necessárias quatro constantes físicas ν , G , $\frac{1}{R}$ e $\frac{1}{H}$, diferente do que acontece na elasticidade clássica que são necessárias apenas duas.

Resolvendo a equação (2.13) em função de ϵ , tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{xx} = 2G\epsilon_{xx} + 2G\frac{\nu}{1-2\nu}\epsilon - \alpha p \\ \sigma_{yy} = 2G\epsilon_{yy} + 2G\frac{\nu}{1-2\nu}\epsilon - \alpha p \\ \sigma_{zz} = 2G\epsilon_{zz} + 2G\frac{\nu}{1-2\nu}\epsilon - \alpha p \\ \sigma_{xy} = 2G\epsilon_{xy} \\ \sigma_{xz} = 2G\epsilon_{xz} \\ \sigma_{yz} = 2G\epsilon_{yz} \end{array} \right. , \quad (2.16)$$

em que ϵ é a deformação volumétrica formada pela soma das componentes normais do tensor deformação ($\epsilon = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz}$) e α o coeficiente de Biot, dado por

$$\alpha = \frac{2(1+\nu)G}{3(1-2\nu)H}. \quad (2.17)$$

Substituindo as equações (2.16) em (2.14), pode-se escrever a equação (2.18) para o incremento de fluido em função da deformação e da poropressão,

$$\zeta = \alpha\epsilon + \frac{p}{Q}, \quad (2.18)$$

em que Q é o módulo de Biot, dado por

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{R} - \frac{\alpha}{H}. \quad (2.19)$$

As equações diferenciais parciais que representam o equilíbrio mecânico são obtidas por relações substitutivas nas equações de equilíbrio de forças. Para isso, substitui-se as equações constitutivas, equação (2.16), na equação (2.9), resultando em

$$\left\{ \begin{array}{l} G\nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = \alpha \frac{\partial p}{\partial x} - F_x \\ G\nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) = \alpha \frac{\partial p}{\partial y} - F_y \\ G\nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \alpha \frac{\partial p}{\partial z} - F_z \end{array} \right. , \quad (2.20)$$

em que ∇^2 é o operador laplaciano, isso é,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (2.21)$$

Nota-se que o sistema de equações (2.20) está indeterminado, pois apresenta apenas três equações para quatro incógnitas u, v, w e p . Logo, necessita-se de mais uma equação, a qual será representada pelo modelo matemático do escoamento de um fluido em um meio poroso (lei de Darcy) junto à equação de conservação de massa.

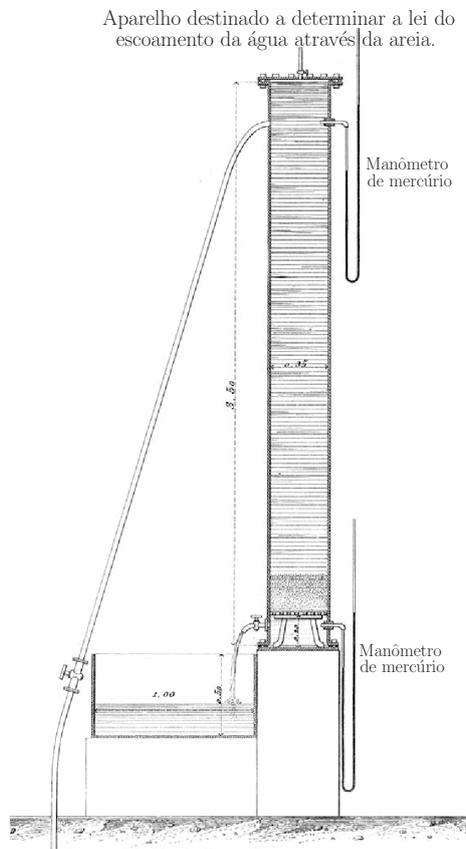
2.3 Escoamento de um fluido em um meio poroso (lei de Darcy)

Em 1856 Henry P. G. Darcy realizou uma série de experimentos, expressando uma relação empírica para o fluxo unidimensional por

$$q_z = -K \frac{dh}{dz}, \quad (2.22)$$

em que, q_z é a descarga específica (volume de fluido cruzando a área unitária por unidade de tempo), h é a carga hidráulica e K é a condutividade hidráulica. A Figura 5 ilustra o aparato experimental utilizado por Darcy para realizar este experimento.

Figura 5 – Ilustração do experimento da coluna de areia de Darcy.



Fonte: Adaptada de Hubbert (1957).

Hubbert (1957) mostrou que a carga hidráulica de Darcy é a energia potencial do fluido por unidade de peso e, para fluidos incompressíveis a carga hidráulica h pode ser expressa em função da carga altimétrica e da poropressão (p). Com isso, a lei de Darcy tridimensional pode ser expressa como (CHENG, 2016)

$$\begin{cases} q_x = -K_x \frac{dp}{dx} \\ q_y = -K_y \frac{dp}{dy} \\ q_z = -K_z \frac{dp}{dz} \end{cases} . \quad (2.23)$$

Considerando a hipótese de Biot de fluido incompressível, tem-se que a taxa de variação do volume de fluido, para volume elementar de solo, é igual a soma dos fluxos que atravessam as faces do mesmo, assim

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q}, \quad (2.24)$$

em que $\mathbf{q} = (q_x, q_y, q_z)$ é o vetor de descarga específica.

Substituindo as equações (2.18) e (2.23) na equação (2.24), tem-se

$$\frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} - K \nabla^2 p = -\alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right), \quad (2.25)$$

que é a equação formulada por Biot (1941) para representar o escoamento do fluido em um meio poroso deformável.

Assim, a formulação matemática para o problema clássico da consolidação de Biot para um meio poroso saturado, homogêneo e isotrópico, está completa e é dada por

$$\begin{cases} G \nabla^2 u + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) = \alpha \frac{\partial p}{\partial x} - F_x \\ G \nabla^2 v + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) = \alpha \frac{\partial p}{\partial y} - F_y \\ G \nabla^2 w + \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) = \alpha \frac{\partial p}{\partial z} - F_z \\ \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) - K \nabla^2 p = 0 \end{cases}, \quad (2.26)$$

em que, as quatro incógnitas do problema são os deslocamentos u, v e w , nas direções x, y e z , respetivamente e, a poropressão p .

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo será apresentada a fundamentação teórica necessária para o embasamento da tese.

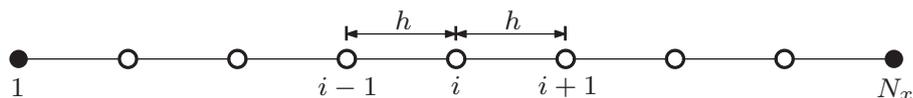
3.1 Método das Diferenças Finitas

A solução analítica de uma equação Diferencial Parcial (EDP), ou mesmo um sistema de EDPs, pode ser complexa, dependendo de suas equações, da geometria do seu domínio e condições de contorno e iniciais, as quais prejudicam, ou até mesmo, tornam impossível a resolução.

Para superar essas dificuldades, as EDPs são resolvidas utilizando métodos numéricos. Existem diversos métodos numéricos para se obter a solução aproximada de uma EDP, como o Método das Diferenças Finitas (MDF) (GOLUB; ORTEGA, 1992; FERZIGER; PERIĆ, 2002; SAAD, 2003; PLETCHER; TANNEHILL; ANDERSON, 2013), dos Volumes Finitos (MVF) (GOLUB; ORTEGA, 1992; MALISKA, 2004) e dos Elementos Finitos (MEF) (HUGHES, 2000; THOMPSON, 2005), entre outros. O princípio básico desses métodos é tornar o problema contínuo, em um problema discreto, com o número finito de pontos no domínio de cálculo, ou seja, é estabelecido ao longo do domínio quais coordenadas se almeja determinar para a variável dependente por meio da aplicação de uma estrutura geométrica discreta. Para este trabalho, o MDF foi utilizado (GASPAR; LISBONA; VABISHCHEVICH, 2003; FRANCO, 2017; FRANCO *et al.*, 2018).

No Método dos Elementos Finitos (MEF), a abordagem comumente adotada para a discretização emprega uma malha geométrica discreta que é organizada de forma localizada. Nesse contexto, cada ponto, ou nó, na malha pode ser concebido como o ponto de origem de um sistema de coordenadas local. Os eixos desse sistema coincidem com as linhas definidas pela estrutura da malha em questão. A ilustração das Figuras 6 e 7 exemplifica arranjos de malhas cartesianas, uniformes e em dimensões unidimensionais e bidimensionais, respectivamente. Os nós localizados ao longo das fronteiras são denotados por (●), enquanto os nós internos da malha são indicados por (○).

Figura 6 – Exemplo de uma malha uniforme unidimensional.

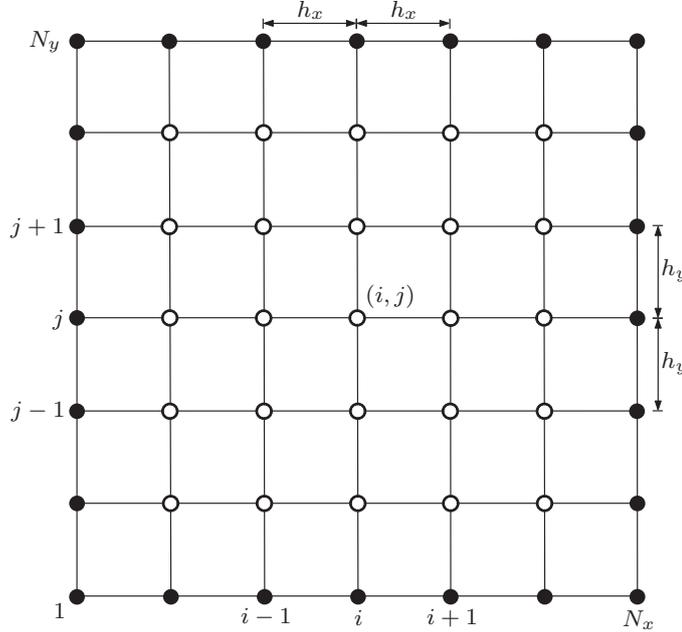


Fonte: Adaptada de Fortuna (2000).

No contexto unidimensional, cada ponto nodal é indicado pela posição i . Os nós adjacentes são identificados como $i - 1$ e $i + 1$, correspondendo às posições Oeste e Leste em relação ao nó em consideração. Para o caso bidimensional, cada nó é definido unicamente pela interseção das linhas de malhas na posição (i, j) e seus nós vizinhos, adotando a ordem

lexicográfica, são definidos por $(i - 1, j)$, $(i + 1, j)$, $(i, j - 1)$ e $(i, j + 1)$, representando os nós nas posições Oeste, Leste, Sul e Norte, respectivamente.

Figura 7 – Exemplo de uma malha uniforme bidimensional.



Fonte: Adaptada de Fortuna (2000).

Aproximações pelo MDF podem ser obtidas de várias formas, sendo as mais comuns a expansão por série de Taylor e a interpolação polinomial. Com a utilização da expansão por série de Taylor, tanto as aproximação numéricas quanto seus erros de truncamento podem ser obtidos (FORTUNA, 2000). Qualquer função $\Lambda(x)$ que possua caráter analítico na vizinhança de x_i pode ser representada por meio de uma expansão em série de Taylor:

$$\Lambda_x = \Lambda_i + (x - x_i) \left(\frac{d\Lambda}{dx} \right)_i + \frac{(x - x_i)^2}{2!} \left(\frac{d^2\Lambda}{dx^2} \right)_i + \frac{(x - x_i)^3}{3!} \left(\frac{d^3\Lambda}{dx^3} \right)_i + \dots \quad (3.1)$$

em que Λ_x representa $\Lambda(x)$, Λ_i representa $\Lambda(x_i)$ e $\left(\frac{d\Lambda}{dx} \right)_i$ representa $\frac{d}{dx}\Lambda(x_i)$.

Ao considerar todos os termos presentes na expansão em série de Taylor, a determinação de Λ_x é exata. Aplicando a equação (3.1) aos nós $i - 1$ e $i + 1$ a partir do ponto i em um malha uniforme, ou seja, com espaçamento h entre os nós constante (Figura 6), tem-se para $x = x_{i+1}$,

$$\Lambda_{i+1} = \Lambda_i + h \left(\frac{d\Lambda}{dx} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2\Lambda}{dx^2} \right)_i + \frac{h^3}{6} \left(\frac{d^3\Lambda}{dx^3} \right)_i + \dots \quad (3.2)$$

e para $x = x_{i-1}$,

$$\Lambda_{i-1} = \Lambda_i - h \left(\frac{d\Lambda}{dx} \right)_i + \frac{h^2}{2} \left(\frac{d^2\Lambda}{dx^2} \right)_i - \frac{h^3}{6} \left(\frac{d^3\Lambda}{dx^3} \right)_i + \dots \quad (3.3)$$

As equações que descrevem a derivada de primeira ordem podem ser derivadas da combinação das equações (3.2) e (3.3). A seleção das equações a empregar determina a natureza do esquema adotado, bem como a ordem do erro de truncamento incorrido. A seguir, são expostos os exemplos usuais dos esquemas para a aproximação das derivadas utilizadas nesta tese.

• **Aproximação da primeira derivada com diferença central (CDS)**

Subtraindo-se a equação (3.3) da equação (3.2), tem-se que

$$A_{i+1} - A_{i-1} = 2h \left(\frac{d\Lambda}{dx} \right)_i + \frac{2h^3}{6} \left(\frac{d^3\Lambda}{dx^3} \right)_i + \frac{2h^5}{120} \left(\frac{d^5\Lambda}{dx^5} \right)_i + \dots \quad , \quad (3.4)$$

ou

$$\left(\frac{d\Lambda}{dx} \right)_i = \underbrace{\frac{A_{i+1} - A_{i-1}}{2h}}_{\text{considerado}} - \underbrace{\frac{h^2}{6} \left(\frac{d^3\Lambda}{dx^3} \right)_i - \frac{h^4}{120} \left(\frac{d^5\Lambda}{dx^5} \right)_i - \dots}_{\text{desprezado (erro de truncamento)}} \quad . \quad (3.5)$$

Dessa forma, a derivada primária de Λ é aproximada utilizando o esquema centrado (CDS) no ponto i , por meio de

$$\left(\frac{d\Lambda}{dx} \right)_i^{CDS} = \frac{A_{i+1} - A_{i-1}}{2h} + O(h^2), \quad (3.6)$$

em que o erro de truncamento é expresso por

$$\varepsilon \left(\frac{d\Lambda}{dx} \right)_i^{CDS} = -\frac{h^2}{6} \left(\frac{d^3\Lambda}{dx^3} \right)_i - \frac{h^4}{120} \left(\frac{d^5\Lambda}{dx^5} \right)_i - \dots = O(h^2). \quad (3.7)$$

De forma semelhante, ao exposto anteriormente para aproximações da primeira derivada, podem ser encontradas relações para expressar aproximações da segunda derivada.

• **Aproximação da segunda derivada com diferença central (CDS)**

Ao somar a equação (3.2) com a equação (3.3), tem-se

$$A_{i-1} + A_{i+1} = 2A_i + h^2 \left(\frac{d^2\Lambda}{dx^2} \right)_i + \frac{h^4}{12} \left(\frac{d^4\Lambda}{dx^4} \right)_i + \frac{h^6}{360} \left(\frac{d^6\Lambda}{dx^6} \right)_i + \dots \quad , \quad (3.8)$$

ou

$$\left(\frac{d^2\Lambda}{dx^2} \right)_i = \underbrace{\frac{A_{i-1} - 2A_i + A_{i+1}}{h^2}}_{\text{considerado}} - \underbrace{\frac{h^2}{12} \left(\frac{d^4\Lambda}{dx^4} \right)_i - \frac{h^4}{360} \left(\frac{d^6\Lambda}{dx^6} \right)_i - \dots}_{\text{desprezado (erro de truncamento)}} \quad (3.9)$$

Portanto, a segunda derivada de Λ é calculada usando o esquema centrado com três pontos (CDS) no ponto P , por meio de

$$\left(\frac{d^2\Lambda}{dx^2} \right)_i^{CDS} = \frac{A_{i-1} - 2A_i + A_{i+1}}{h^2} + O(h^2), \quad (3.10)$$

e o erro de truncamento é dado por

$$\varepsilon \left(\frac{d^2 \Lambda}{dx^2} \right)_i^{CDS} = -\frac{h^2}{12} \left(\frac{d^4 \Lambda}{dx^4} \right)_i - \frac{h^4}{360} \left(\frac{d^6 \Lambda}{dx^6} \right)_i - \frac{h^6}{20160} \left(\frac{d^8 \Lambda}{dx^8} \right)_i - \dots = O(h^2). \quad (3.11)$$

Com os resultados apresentados nas equações (3.6) e (3.10), percebe-se que o termo de ordem $O(h^2)$ correspondente ao erro de truncamento das aproximações numéricas consideradas (BURDEN; FAIRES, 2016; SAAD, 2003; FERZIGER; PERIĆ, 2002; FORTUNA, 2000; TANNEHILL; ANDERSON; PLETCHER, 1997).

Com expansões em série de Taylor para qualquer função analítica $\Lambda(x,y)$ na vizinhança de (x_i, y_i) , pode-se também determinar expressões que envolvem derivadas mistas. Neste trabalho, aproximações para as derivadas mistas (caso bidimensional) serão utilizadas na seção 4.2. Para a aproximação destas derivadas basta utilizar a ideia apresentada anteriormente e tomar como função as derivadas já existentes. Para um estudo mais detalhado a este respeito, consultar Dahlquist e Bjorck (2008), Fortuna (2000) e Saad (2003).

3.2 Métodos para a aproximação temporal

Para as aproximações temporais, tem-se na literatura as formulações numéricas: explícita, implícita e totalmente implícita (MALISKA, 2004; TANNEHILL; ANDERSON; PLETCHER, 1997). Uma formulação é considerada explícita em relação a um passo de tempo quando todas as incógnitas adjacentes ao ponto i são calculadas com base nos passos de tempo anteriores (n), e, portanto, já estão estabelecidas (Figura 8a). Uma formulação é tida como implícita para um passo de tempo quando as incógnitas vizinhas ao ponto i são determinadas nos passos de tempo atual ($n + 1$) e passado (n) (Figura 8b). Além disso, uma formulação é considerada totalmente implícita em relação a um passo de tempo quando todas as incógnitas vizinhas ao ponto i são avaliadas no instante de tempo corrente ($n + 1$) e, como tal, não são totalmente conhecidas (isso depende da sequência de atualização das incógnitas), conforme ilustrado na Figura 8c.

Para exemplificar as formulações explícita, implícita e totalmente implícita, descreve-se o Problema de Valor Inicial (PVI) em uma malha bidimensional, a ser resolvido em cada nó da malha, denotado por

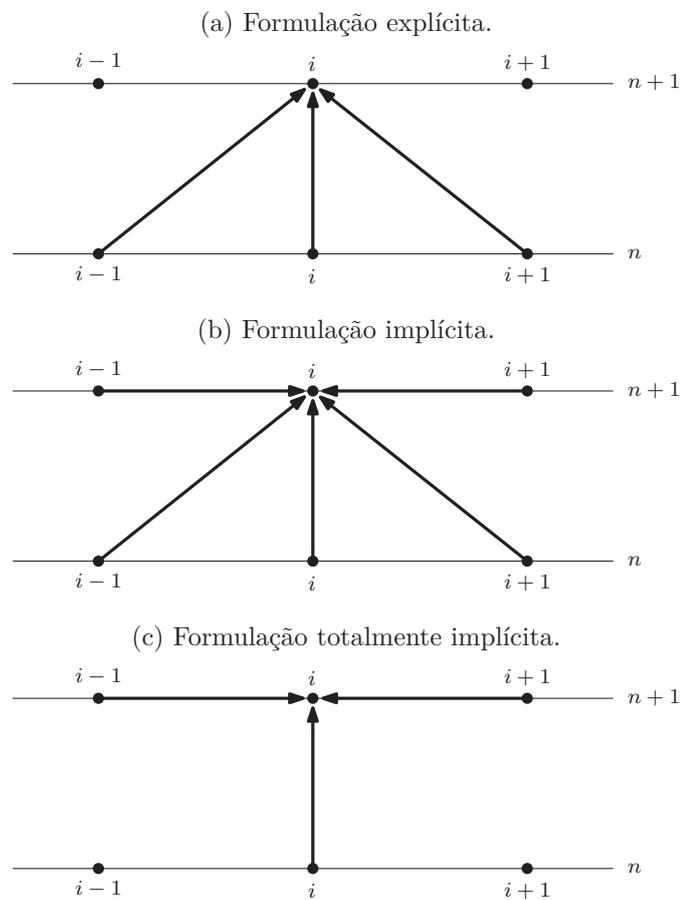
$$\begin{cases} \frac{du_{i,j}(t)}{dt} = f_{i,j}(t, u_{i,j}(t)), \\ u_{i,j}(t_0) = u_{i,j}^0, \end{cases} \quad (3.12)$$

em que $u_{i,j}(t)$ e $f_{i,j}(t, u_{i,j}(t))$ são funções a serem resolvidas para todo nível de tempo t nos pontos (i, j) da malha. O índice (i, j) representa as coordenadas dos nós na malha, onde i varia de 1 a N e j varia de 1 a M , indicando as posições nas direções x e y , respectivamente.

A equação diferencial parcial é expressa pela derivada temporal $\frac{du_{i,j}(t)}{dt}$ igual a uma função $f_{i,j}(t, u_{i,j}(t))$, que depende do tempo t e da solução $u_{i,j}(t)$ no ponto (i, j) da malha. As condições iniciais são dadas por $u_{i,j}(t_0) = u_{i,j}^0$, onde t_0 é o tempo inicial e $u_{i,j}^0$ é o valor inicial da solução $u_{i,j}$ no ponto (i, j) da malha.

Observa-se que a derivada temporal é considerada ordinária, ou seja, mesmo dependendo dos valores espaciais em cada nó (i, j) , a derivada é calculada considerando (x_i, y_j) como conhecidos durante o cálculo da variável temporal. Nesse caso, a notação (x_i, y_j, t) é simplificada para $u(t)$ para indicar que u é uma função apenas da variável temporal t .

Figura 8 – Aproximações temporais.



FONTE: Adaptada de Maliska (2004).

3.2.1 Método de Euler

O método de Euler é um procedimento utilizado para alcançar uma aproximação discreta da solução $u(t)$ da equação (3.12) no intervalo $[t_0, t_f]$, referidos como pontos discretos na malha. Estabelece-se que esses pontos da malha estão distribuídos uniformemente ao longo do intervalo $[t_0, t_f]$, e ao selecionar um número inteiro positivo

N_t , os pontos da malha (em t) podem ser expressos como

$$t_{n+1} = t_0 + (n + 1)\tau, \quad (3.13)$$

para cada $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$, em que o tamanho de passo de tempo é dado por $\tau = \frac{t_f - t_0}{N_t}$.

Ao considerar $u(t)$ como a solução única da equação (3.12), em que $u \in C^2[t_0, t_f]$, e supondo que sua expansão em série de Taylor para cada valor de $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$ é dada por:

$$u(t_{n+1}) = u(t_n) + \tau \frac{d}{dt}u(t_n) + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2}{dt^2}u(t_n) + \dots \quad (3.14)$$

Utilizando v como uma aproximação para u , o método de Euler estabelece a construção de $v^n \approx u(t_n)$ para cada valor de $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$, ao negligenciar os termos $\frac{\tau^2}{2} \frac{d^2}{dt^2}u(t_n) + \dots$. Assim, o método de Euler, que representa uma aproximação de primeira ordem no tempo, pode ser expresso como:

$$\begin{cases} v^0 = y^0 \\ v^{n+1} = v^n + \tau f(v^{n+1}, t_{n+1}) \end{cases}, \quad (3.15)$$

para cada $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$.

Para calcular o valor de v^{n+1} , é empregado o método de Euler Implícito, onde os valores correspondentes aos passos de tempo n e $n + 1$ são utilizados na função f . Caso apenas os valores relacionados ao passo de tempo $n + 1$ em f sejam empregados para determinar o valor de v^{n+1} , o método recebe a designação de Método de Euler Totalmente Implícito. Alternativamente, se apenas os valores ligados ao passo de tempo n forem necessários, o método é identificado como Método de Euler Explícito (BURDEN; FAIRES, 2016). Os métodos Implícito e Totalmente Implícito possuem primeira ordem de aproximação temporal, notavelmente, exibem estabilidade incondicional, ou seja, a sua convergência não está sujeita à relação entre o tamanho do passo de tempo e o tamanho da discretização espacial (BURDEN; FAIRES, 2016; FERZIGER; PERIĆ, 2002; FORTUNA, 2000; FRANCO, 2017).

3.2.2 Método de Crank-Nicolson

O método de Crank-Nicolson (CN) apresenta segunda ordem de aproximação temporal ($O(\tau^2)$) e é caracterizado por sua estabilidade incondicional (BURDEN; FAIRES, 2016; FERZIGER; PERIĆ, 2002; FORTUNA, 2000).

Considerando por exemplo o PVI (3.12), o método de CN consiste em fazer

$$\begin{cases} v^0 = y^0 \\ v^{n+1} = v^n + \frac{\tau}{2} [f(v^{n+1}, t_{n+1}) + f(v^n, t_n)] \end{cases}, \quad (3.16)$$

para $n = 0, 1, \dots, N_t - 1$, em que os subíndices $n + 1$ e n indicam os passos de tempo atual e anterior, respectivamente.

3.3 Erro numérico

Para uma determinada variável de interesse, o erro numérico (E) é definido como a diferença entre a solução analítica exata (Φ) e sua solução numérica (ϕ) (FERZIGER; PERIĆ, 2002), ou seja,

$$E(\phi) = \Phi - \phi. \quad (3.17)$$

O erro numérico pode ser causado por diversas fontes, dentre essas, o erro numérico é tipificado como: erro de truncamento (E_T), erro de iteração (E_I) e erro de arredondamento (E_π) (FERZIGER; PERIĆ, 2002; MARCHI, 2001). A seguir, cada fonte de erro será descrita com mais detalhes.

3.3.1 Erro de truncamento e erro de discretização

A ocorrência do erro de truncamento se dá quando se realiza a transição de um modelo matemático contínuo com informações provenientes de um conjunto infinito para um modelo discreto com informações limitadas a um conjunto finito. De forma mais precisa, o erro de truncamento emerge como o efeito resultante da interrupção de um processo infinito (ROACHE, 1998). Para Tannehill, Anderson e Pletcher (1997), ao considerarmos equações diferenciais, o erro de truncamento corresponde ao resíduo resultante da substituição da solução analítica exata da variável dependente na versão discretizada do modelo matemático.

Quando E_I e E_π são minimizadas ou mesmo inexistentes, E_T passa a ser denominado em Ferziger e Perić (2002) como erro de discretização (E_h). Sendo o E_h a única fonte de erro numérico, então, o E_h a partir da série de Taylor será representado por

$$E_h = E(\phi) = c_0 h^{p_0} + c_1 h^{p_1} + c_2 h^{p_2} + \dots = \sum_{V=0}^{\infty} c_V h^{p_V}, \quad (3.18)$$

onde os coeficientes c_0, c_1, c_2, \dots são números reais e podem ser funções da variável dependente e de suas derivadas, mas independem de h . Os expoentes p_0, p_1, p_2, \dots são as ordens verdadeiras de E_h e seu conjunto é representado por $p_V = \{p_0, p_1, p_2, \dots\}$.

Os elementos de p_V são números inteiros positivos seguindo geralmente a relação $1 \leq p_0 < p_1 < \dots$ os quais representam uma progressão aritmética de razão $p_1 - p_0$. O primeiro termo p_0 é denominado de ordem assintótica (ou de acurácia) de $E(\phi)$ (ou da solução numérica ϕ) e será denotado por p_L .

À medida que $h \rightarrow 0$, a contribuição dominante para o erro E_h é predominantemente influenciado pelo primeiro componente da equação (3.18), ou seja, $c_0 h^{p_L}$ assume o papel principal na composição de E_h . Ao considerar o gráfico de E_h em escala bilogarítmica *versus* h , tem-se que a inclinação em relação ao eixo horizontal converge para o valor de p_L . Assim, quanto maior for esse valor, mais acentuada se torna a redução de E_h com o refino da malha.

O E_h pode ser estimado *a priori* ou *a posteriori* ao cálculo da solução numérica, em que as estimativas *a priori* consistem, basicamente, em estimar p_L (SZABÓ; BABUSKA, 1991). Obtendo p_L , é possível avaliar previamente o efeito da diminuição de h em E_h . Considerando os erros de discretização E_{h_1} e E_{h_2} obtidos e duas malhas distintas Ω^{h_1} e Ω^{h_2} , grossa e fina, respectivamente, tem-se

$$\frac{E_{h_1}}{E_{h_2}} = \frac{ch_1^{p_L}}{ch_2^{p_L}} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{p_L} = r^{p_L}, \quad (3.19)$$

onde $r = \frac{h_1}{h_2}$ representa a razão de refino de malha. Dessa forma, o fator de redução de E_h , com o refinamento de malha é dado por r^{p_L} .

De outro modo, a análise de p_L *a posteriori* da solução numérica é baseada no cálculo das ordens efetiva p_E , quando a solução analítica é conhecida, ou aparente p_U , nos casos em que não se conhecem a solução analítica, dadas por

$$p_E = \frac{\log\left(\frac{E_{h_1}}{E_{h_2}}\right)}{\log(r)} \quad (3.20)$$

e

$$p_U = \frac{\log\left(\frac{\phi_2 - \phi_1}{\phi_3 - \phi_2}\right)}{\log(r)}, \quad (3.21)$$

em que ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 correspondem, respectivamente, às soluções numéricas obtidas nas malhas Ω^{h_1} (grossa), Ω^{h_2} (fina) e Ω^{h_3} (superfina), com $r = h_1/h_2 = h_2/h_3$ (razão de refino constante).

3.3.2 Erro de iteração

Ao considerar a solução numérica (ϕ) para determinada variável de interesse, o erro de iteração E_I , de acordo com Ferziger e Perić (2002), é dado pela diferença entre a solução exata (ϕ_{ex}) para o sistema de equações algébricas, e a solução numérica na iteração n (ϕ_n), definido por

$$E_I = \phi_{ex} - \phi_n. \quad (3.22)$$

As principais origens do erro E_I compreendem diversas situações: a adoção de métodos iterativos para resolver o conjunto de equações algébricas que surge do processo de discretização; a resolução de sistemas não lineares, nos quais a matriz dos coeficientes é influenciada pela variável dependente do problema; e a presença de modelos matemáticos constituídos por múltiplas equações, cada uma delas sendo tratada independentemente. Em geral, os efeitos decorrentes de E_I tendem a diminuir conforme o número de iterações n aumenta, ou seja, à medida que $n \rightarrow \infty \Rightarrow E_I \rightarrow 0$. Um estudo detalhado sobre o controle e estimativa desse tipo de erro em CFD, pode ser encontrado em Martins e Marchi (2008).

3.3.3 Erro de arredondamento

Os erros de arredondamento (E_π), causados pela representação finita das variáveis nas computações numéricas, estão relacionado à precisão utilizada para a representação das variáveis nas computações. Esse tipo de erro está vinculado tanto ao compilador (*software*) empregado para gerar o código computacional quanto ao computador (*hardware*) no qual o código é executado. A precisão adotada para representar as variáveis exerce impacto direto nos valores de E_π ; assim, quanto maior a precisão, menores são os valores de erro E_π . No entanto, esse aumento de precisão exige maior capacidade de memória computacional para o armazenamento das variáveis, (MARCHI, 2001). Em geral, as linguagens de programação possuem opções de precisão para escolha do usuário: precisão simples com quatro *bytes*, precisão dupla com oito *bytes* ou precisão quádrupla com dezesseis *bytes* por variável do tipo real.

3.4 Estimativas para o erro de discretização

Ao não se conhecer a solução analítica exata (Φ) de um modelo matemático, o erro da solução numérica, $E(\phi)$, para uma determinada variável de interesse não pode ser calculado. Quando isso ocorre, uma estimativa para esse erro pode ser calculada. Esta estimativa é denominada de incerteza da solução numérica (U) e é calculada pela diferença entre a solução analítica estimada (ϕ_∞) para a determinada variável de interesse e sua solução numérica (ϕ) (CHAPRA; CANALE, 1994; MEHTA, 1996). Sua expressão é representada por

$$U(\phi) = \phi_\infty - \phi. \quad (3.23)$$

O cálculo para estimar o erro de uma solução numérica é realizado por meio dos estimadores de erro. A seguir, serão descritos alguns desses estimadores.

3.4.1 Estimador Δ

Ao se considerar soluções numéricas ϕ_g e ϕ_{g-1} obtidas em duas malhas distintas Ω^{h_g} e $\Omega^{h_{g-1}}$, respectivamente, uma estimativa para E_h pode ser calculada com o estimador Δ por

$$U_\Delta(\phi_g) = |\phi_g - \phi_{g-1}|. \quad (3.24)$$

Sua estimativa representa um intervalo em torno da solução numérica ϕ_g e não leva em consideração a razão de refino (r) ou o valor da ordem assintótica p_L .

3.4.2 Estimador de Richardson

A estimativa para o E_h com o estimador de Richardson será denotada por U_{Ri} e dada por

$$U_{Ri}(\phi_g) = \frac{\phi_g - \phi_{g-1}}{r^{p_L} - 1}, \quad (3.25)$$

em que ϕ_g e ϕ_{g-1} representam as soluções nas malhas Ω^{h_g} (fina) e $\Omega^{h_{g-1}}$ (grossa).

U_{Ri} fornece, além da magnitude do E_h , o seu sinal e pode ser empregada em diversos níveis de malhas, isto é, para Ω^g com $g = 2, \dots, G$ (MARCHI, 2001).

3.4.3 Estimador ψ

O emprego da Extrapolação de Richardson foi abordada em Marchi e Silva (2002) por meio da série de Richardson, denotada R_∞ e representada por

$$R_\infty = \frac{1}{\psi} + \frac{1}{\psi^2} + \frac{1}{\psi^3} + \frac{1}{\psi^4} + \dots, \quad (3.26)$$

em que $\psi \in \mathbb{R}$ é denominada razão de convergência da série.

Se $|\psi| > 1$, a série geométrica representada pela equação (3.26), é dada por

$$R_\infty = \frac{1}{\psi - 1}. \quad (3.27)$$

Ao se admitir r e P números reais positivos, pode-se definir $|\psi| = r^P$, de modo que

$$R_\infty = \begin{cases} \frac{1}{r^P - 1}, & \text{se } \psi > 1 \\ -\frac{1}{r^P + 1}, & \text{se } \psi < -1 \end{cases}, \quad (3.28)$$

e considerando $P = p_L$, pode-se reescrever a equação (3.25) como

$$\phi_\infty = \phi_g + R_\infty(\phi_g - \phi_{g-1}). \quad (3.29)$$

Dessa forma, admite-se a existência de um estimador $U_\psi(\phi_g) = \phi_\infty - \phi_g$, baseado no valor de ψ correspondente à malha Ω^{h_g} , dado por

$$U_\psi(\phi_g) = \frac{\phi_g - \phi_{g-1}}{\psi - 1}. \quad (3.30)$$

3.4.4 Efetividade de uma estimativa de erro

Uma estimativa de erro (U) para o erro (E) pode ser avaliada mediante o cálculo de sua efetividade $\theta(U)$, definida em Zhu e Zienkiewicz (1990) pela razão entre U e E , ou seja,

$$\theta(U) = \frac{U}{E}. \quad (3.31)$$

Para o caso ideal, a efetividade $\theta(U) = 1$, ocorrendo quando $U = E$. Uma estimativa U será dita confiável quando $\theta(U) \geq 1 \Rightarrow U \geq E$; e acurada quando $\theta(U) \approx 1 \Rightarrow U \approx E$ (MARCHI, 2001).

3.5 Múltipla Extrapolação de Richardson

Ao se dispor de uma técnica de aproximação que apresente um termo indicativo de erro de modo previsível (que dependa de um parâmetro real, por exemplo, o espaçamento h entre os pontos nodais) e que tal técnica possua uma representação por meio de uma série analítica, então a metodologia denominada Extrapolação de Richardson (ER) (BURDEN; FAIRES, 2016) pode ser adotada.

A ER teve inicialmente o objetivo de combinar aproximações a fim de gerar resultados com maior ordem de acurácia (p_A) considerando-se alguns parâmetros específicos, $p_L = 2$, $p_1 = 4$ e razão de refino $r = 2$. Tal procedimento ficou conhecido como Extrapolação de Richardson padrão e, posteriormente, passou-se a considerar valores gerais para tais parâmetros, ficando então conhecida por Extrapolação de Richardson generalizada (OBERKAMPF; ROY, 2010).

A ER é considerada um pós-processamento que pode ser empregado *a posteriori* nas soluções $\phi(h)$ obtidas em diferentes malhas Ω^h , levando em consideração a razão de refino ($r = h_g/h_{g+1}$), em que os subíndices $g + 1$ e g representam a malha fina e grossa, respectivamente. A equação de Richardson na forma original, dada em Richardson e Gaunt (1927) é

$$\phi_\infty = \frac{h_g^2 \phi_{g+1} - h_{g+1}^2 \phi_g}{h_g^2 - h_{g+1}^2} + E(\phi_\infty), \quad (3.32)$$

onde ϕ_∞ é a solução analítica estimada, ϕ_{g+1} e ϕ_g são as soluções numéricas nas malhas fina e grossa, respectivamente. Ao se generalizar a ER para qualquer ordem assintótica (p_L) e r , tem-se

$$\phi_\infty = \phi_{g+1} + \frac{\phi_{g+1} - \phi_g}{r^{p_L} - 1}, \quad (3.33)$$

e será efetiva se as soluções numéricas ϕ_g possuem apenas erros de discretização.

A técnica conhecida como Múltipla Extrapolação de Richardson (MER) envolve a aplicação repetida de ER com o intuito de aumentar a ordem de acurácia do erro de discretização (E_h). A abordagem recursiva é estabelecida a partir da equação (3.33), isto é, consiste em considerar

$$\phi_0(h_g) = \phi(h_g), \quad g = 1, 2, \dots, \quad (3.34)$$

$$\phi_1(h_{g+1}) = \phi_0(h_{g+1}) + \frac{\phi_0(h_{g+1}) - \phi_0(h_g)}{r^{p_L} - 1}, \quad g = 1, 2, \dots \quad (3.35)$$

A partir disso, considerando m os níveis de extrapolação e g indicando a malha Ω^h , com m e g sendo números naturais não nulos, a generalização da equação (3.35) passa a ser representada em Marchi *et al.* (2013b) por

$$\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1}, \quad (3.36)$$

com $m = 1, 2, \dots$ e $g = m + 1, m + 2, \dots$

Do ponto de vista teórico, a equação (3.36) tem a possibilidade de iterações infinitas. No entanto, em contextos práticos, é adotado um limite para o parâmetro g , sendo definido como $g = G$, em que G é um valor inteiro positivo representando o número de malhas utilizadas. Supõe-se que a aplicação repetitiva desse processo recursivo, como expresso na equação (3.36), gradualmente aumente a ordem de precisão do erro E_h , (MARCHI *et al.*, 2016).

Uma análise da ordem de acurácia pode ser realizada *a posteriori*, com base nos valores de p_E quando a solução analítica (Φ) é conhecida, ou os valores de p_U quando Φ não é conhecida. Uma generalização de p_E e p_U para MER, pode ser encontrado em Marchi *et al.* (2013a) como:

$$(p_E)_{g,m} = \frac{\log\left(\frac{E_{h_{g-1,m}}}{E_{h_{g,m}}}\right)}{\log(r)} \quad (3.37)$$

e

$$(p_U)_{g,m} = \frac{\log\left(\frac{\phi_{g-1,m} - \phi_{g-2,m}}{\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m}}\right)}{\log(r)}, \quad (3.38)$$

em que $g = 2, \dots, G$ e $m = 1, \dots, g - 1$ para a equação (3.37); e $g = 3, \dots, G$ e $m = 1, \dots, \text{Int}((g - 3)/2)$ para a equação (3.38), onde $\text{Int}(\gamma)$ corresponde à parte inteira do número real γ . Nesta perspectiva, quando não se conhece a solução analítica, e portanto, não se conhece as ordens verdadeiras, o cálculo de MER realizado pela equação (3.36), pode ser realizado levando-se em consideração os valores de $(p_U)_{g,m-1}$ no lugar de $p_{(m-1)}$.

Uma representação esquemática do emprego de MER é apresenta na Tabela 1. Quando $m = 0$, tem-se a solução numérica ϕ sem qualquer extrapolação. Para $m = 1$ tem-se um nível de extrapolação, para $m = 2$ tem-se dois níveis de extrapolações e assim sucessivamente até o valor máximo permitido para m na malha Ω^{h_g} , ou seja, $m = G - 1$. Teoricamente, $\phi_{G,G-1}$ apresenta o maior nível de acurácia dentre todos as $\phi_{g,m}$.

Ao analisar a Tabela 1 verifica-se que para cada valor obtido de $\phi_{m,g}$, necessita-se da solução numérica em pelo menos duas malhas distintas (g e $g - 1$) ao aplicar p_E . Isto posto, quando se utiliza p_U (Φ não é conhecido), faz-se necessário pelo menos três malhas distintas ($g, g - 1$ e $g - 2$), (equação (3.38)).

3.6 Estimativas para o erro de discretização baseadas em MER

3.6.1 Estimador Δ

Para estimar o erro de discretização após o emprego de MER (E_m), com G malhas distintas, o estimador Δ foi proposto por Marchi, Suero e Araki (2009) para fornecer uma estimativa do E_m para a malha mais fina adotada, da seguinte forma

$$U_{\Delta}(\phi_{G,m}) = |\phi_{G,m-1} - \phi_{G-1,m-1}|, \quad (3.39)$$

Tabela 1 – Representação esquemática do emprego de MER.

$m = 0$	$m = 1$	$m = 2$	\dots	$m = G - 2$	$m = G - 1$
$\phi_{1,0} = \phi_1$					
$\phi_{2,0} = \phi_2$	\searrow \rightarrow	$\boxed{\phi_{2,1}}$			
$\phi_{3,0} = \phi_3$		$\phi_{3,1}$	\searrow \rightarrow	$\boxed{\phi_{3,2}}$	
\vdots		\vdots	\ddots		
$\phi_{G-1,0} = \phi_{G-1}$		$\phi_{G-1,1}$	$\phi_{G-1,2}$	\dots	$\boxed{\phi_{G-1,G-2}}$
$\phi_{G,0} = \phi_G$		$\phi_{G,1}$	$\phi_{G,2}$	\dots	$\phi_{G,G-2}$
				\searrow \rightarrow	$\boxed{\phi_{G,G-1}}$

FONTE: Adaptada de Martins (2013).

em que $m = G - 1$ representa o último nível de extrapolação considerado e $m - 1$ é o nível imediatamente anterior. Com isso, $U_{\Delta}(\phi_{G,m})$ fornece uma estimativa para E_m associada a $\phi_{G,m}$ levando em consideração os valores de $\phi_{G,m-1}$ e $\phi_{G-1,m-1}$.

3.6.2 Estimador de Richardson corrigido (p_{mc})

Para soluções obtidas com o emprego de MER, Marchi *et al.* (2013a) propuseram uma extensão do estimador de Richardson (equação (3.25)), dada por:

$$U_{p_m}(\phi_{g,m}) = \frac{\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m}}{r^{p_m} - 1}, \quad (3.40)$$

em que g representa o nível de malha e m o nível de extrapolação, sendo válida para $m = [0, G - 2]$ e $g = [m + 2, G]$.

A utilização da simbologia U_{p_m} , refere-se à aplicação do estimador de Richardson com base em $p_V = \{p_m, m = 0, 1, 2, \dots\}$, sobre as soluções obtidas com o emprego de MER, sendo então, denominado estimador p_m (MARTINS, 2013).

Mas, como pode ser verificado na equação (3.40) e na Tabela 2, o estimador U_{p_m} não é apropriado para estimar o erro de discretização associado à $\phi_M = \{\phi_{2,1}, \phi_{3,2}, \dots, \phi_{g,g-1}, \dots, \phi_{G,G-1}\}$.

Sua aplicação é para soluções com um nível a menos de extrapolação $\{\phi_{2,0}, \phi_{3,1}, \dots, \phi_{g,g-2}, \dots, \phi_{G,G-2}\}$, ou seja, $m = g - 2$, e seu erro de discretização será denotado por E_{m_2} .

Tendo em vista que U_{p_m} estima E_{m_2} , então, para se estimar E_m sob a concepção de U_{p_m} deve-se encontrar uma relação entre E_m e E_{m_2} . Essa relação está deduzida em Martins (2013), sendo representada por

$$\frac{E_m}{E_{m_2}} = r^{p_m}. \quad (3.41)$$

Tabela 2 – Representação esquemática do emprego de U_{p_m} .

Malha	Nível de extrapolação m	
$\Omega^{h_{g-1}}$	$\phi_{g-1,m}$	\searrow
Ω^{h_g}	$\phi_{g,m}$	$\rightarrow U_{p_m}(\phi_{g,m}) = \frac{\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m}}{r^{p_m} - 1}$

FONTE: Adaptada de Martins (2013).

Ao se considerar a equação (3.41), uma vez que U_{p_m} estima E_{m_2} , logo, E_m pode ser estimado usando um fator de correção (r^{p_m}). Esse estimador será denotado por $U_{p_{mc}}$ e descrito como

$$U_{p_{mc}}(\phi_{g,m}) = r^{p_m} U_{p_m}(\phi_{g+1,m}), \quad (3.42)$$

em que $m = g - 1$. Devido ao fator de correção r^{p_m} , $U_{p_{mc}}$ é denominado estimador p_m corrigido.

3.6.3 Estimador ψ^*

Ao se considerar as soluções numéricas ϕ_M conforme a Tabela 1, a equação (3.30) referente ao estimador ψ pode ser empregada considerando a razão de convergência de ϕ_M para se estimar E_m da seguinte forma:

$$U_\psi(\phi_{g,m}) = \frac{\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m-1}}{\psi - 1}, \quad \text{onde } \psi = (\psi_M)_g = \frac{\phi_{g-1,m-1} - \phi_{g-2,m-2}}{\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m-1}}, \quad (3.43)$$

para $g = 3, \dots, G$. A Tabela 3 apresenta o emprego desse estimador para E_m ($m = g - 1$).

Tabela 3 – Representação esquemática do emprego de U_ψ .

Malha	Nível de extrapolação		
	$m - 2$	$m - 1$	m
$\Omega^{h_{g-2}}$	$\phi_{g-2,m-2}$	\searrow	
$\Omega^{h_{g-1}}$	$\phi_{g-1,m-2}$	$\rightarrow \phi_{g-1,m-1}$	\searrow
Ω^{h_g}	$\phi_{g,m-2}$	$\rightarrow \phi_{g,m-1}$	$\rightarrow \phi_{g,m} \Rightarrow U_\psi(\phi_{g,m}) = \frac{\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m-1}}{\psi - 1}$

FONTE: Adaptada de Martins (2013).

O emprego de U_ψ somente será efetivo se $|\psi| > 1$, que garante a convergência de ϕ_M e, conseqüentemente, ocorrendo a redução da magnitude de E_m .

Na equação (3.43), $\psi = (\psi_M)_g$ é a ordem aparente de E_m na malha Ω^{h_g} . Devido seu cálculo envolver três malhas distintas, é natural pressupor que o seu valor corresponda a uma inclinação média para o gráfico da estimativa de E_m , nessas três malhas.

A correção para o estimador ψ é dada pelo cálculo de ψ^* , equação (3.44), em que a razão de convergência de ϕ_M ($m = g - 1$) é atribuída à malha intermediária do trio $\Omega^{h_{g-1}}$, Ω^{h_g} e $\Omega^{h_{g+1}}$, ou seja

$$\psi^* = \begin{cases} \frac{\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m-1}}{\phi_{g+1,m+1} - \phi_{g,m}}, & g = 2, 3, \dots, G - 1 \\ \frac{(\phi_{g-1,m-1} - \phi_{g-2,m-2})^2}{(\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m-1})(\phi_{g-2,m-2} - \phi_{g-3,m-3})}, & g = G \end{cases}. \quad (3.44)$$

O cálculo de ψ^* para $g = 2, 3, \dots, G - 1$ é obtido para valores de ϕ em $\Omega^{h_{g-1}}$, Ω^{h_g} e $\Omega^{h_{g+1}}$ e o resultado atribuído a Ω^{h_g} . Para $g = G$, a malha $\Omega^{h_{g+1}}$ não está disponível para o cálculo de ψ^* , com isso, busca-se estabelecer uma relação entre os valores obtidos para ψ e ψ^* , considerando a obtenção de ψ^* através da razão entre o quadrado de ψ para $g = G$ e o seu valor para $g = G - 1$, na equação (3.43) (MARTINS, 2013).

O cálculo da estimativa do erro numérico associado a ϕ_M , após a determinação de ψ^* , por analogia a U_ψ (equação (3.43)), é dado por

$$U_{\psi^*}(\phi_{g,m}) = \frac{\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m-1}}{\psi^* - 1}. \quad (3.45)$$

3.7 Interpolação polinomial

Muitas vezes é necessário avaliar em uma localização não nodal, determinadas variáveis de interesse. Neste caso, a interpolação polinomial é uma técnica indicada para obter um polinômio ξ para auxiliar nesta tarefa.

Dada uma função contínua f definida em um domínio Ω limitado, é possível encontrar um polinômio ξ que permite mapear os pontos disponíveis tão próximos de f quanto for desejável (BURDEN; FAIRES, 2016). Dados $p + 1$ pontos distintos $\{x_i, f(x_i)\}$, $i = 0, \dots, p$, é possível encontrar um polinômio ξ de grau menor ou igual a n no qual

$$\xi(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, p, \quad x_i \in \Omega. \quad (3.46)$$

A equação (3.46) representa a um sistema de equações algébricas lineares, que em razão da estrutura de sua matriz de coeficientes (Matriz de Vandermonde) é determinado e compatível. Tal estrutura garante a existência e unicidade do polinômio ξ que interpola f em Ω (ANTON; RORRES, 2012). Os métodos de Lagrange e Newton estão entre os mais utilizados para encontrar os polinômios interpoladores (BURDEN; FAIRES, 2016).

No caso de funções com mais de uma variável independente, as aproximações são denominadas aproximações multidimensionais. Especificamente para o caso bidimensional, para uma função $f(x, y)$ com valores conhecidos $f(x_i, y_j)$, para $i = 0, 1, \dots, p$ e $j =$

$0, 1, \dots, q$, é possível obter um polinômio de grau máximo p em x e grau máximo q em y , para interpolar esses valores. Para obter mais informações detalhadas, recomenda-se consultar Burden e Faires (2016), Martins (2013), Dahlquist e Bjorck (2008).

3.8 Métodos de otimização

Ademais da utilização da interpolação polinomial na avaliação de uma variável não nodal, como exposto anteriormente, a obtenção de um ponto extremo (ponto de máximo ou de mínimo) pode ser necessário, como por exemplo obter a pressão máxima (ou mínima) em determinado campo de variação. Se o ponto extremo pertence à região do domínio de cálculo na qual ξ está definida, seu valor pode ser calculado com a utilização de métodos de otimização.

Pode-se colocar o problema de otimização como: seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, busca-se o valor máximo de $\xi(\chi)$ (ou o valor mínimo), tal que $\chi \in \Omega$.

Os problemas de otimização analisados neste trabalho são de maximização irrestrita ou seja, a função objetivo não possui restrições. Como ξ é considerada uma função polinomial definida em um conjunto Ω convexo, ela se caracteriza como uma função convexa (ou côncava) o que garante a unicidade e existência do ponto de máximo global (BAZARAA; SHERALI; SHETTY, 2006).

Uma técnica de otimização irrestrita apresentada em Bazaraa, Sherali e Shetty (2006) é o método do Gradiente. Como as funções obtidas são polinomiais, o método do Gradiente torna-se atraente devido a expressão analítica para o gradiente ser obtida facilmente. Esta abordagem é do tipo sequencial, isto é, gera-se uma sequência de pontos $\{\chi^{(I)}\} \in \Omega$ em que $\chi^{(I)}$ é o ponto obtido na iteração I , ou seja,

$$\chi^{(I)} = \chi^{(I-1)} + \delta^{(I)} d^{(I)}, \quad (3.47)$$

com $\delta^{(I)}$ o passo tomado na I -ésima iteração e $d^{(I)}$ a direção de subida (ou descida), em que $d^{(I)}$ é gradiente de ξ avaliado em $\chi^{(I-1)}$, ou seja, $d^{(I)} = \pm \nabla \xi(\chi^{(I-1)})$. Os pontos $\chi^{(I)}$ são gerados de forma que $\xi(\chi^{(I)})$ é uma sequência crescente (ou decrescente) de números reais. Assim, para um valor suficientemente grande de I , $\chi^{(I)}$ é considerada uma boa aproximação para a solução investigada.

Para o caso unidimensional a equação (3.47) pode ser apresentada pelo método de Newton para funções não lineares (BURDEN; FAIRES, 2016) com $g(x) = \nabla \xi(x) = \xi'(x)$, ou seja,

$$x^{(I)} = x^{(I-1)} \pm \nabla g(x^{(I-1)})^{-1} g(x^{(I-1)}). \quad (3.48)$$

Para o caso bidimensional, é necessário empregar um critério para determinar $\delta^{(I)}$, sendo a busca linear de Armijo (BAZARAA; SHERALI; SHETTY, 2006) um método bastante conhecido pela sua eficiência e facilidade na implementação. Essa abordagem

depende da escolha dos escalares $0 < \beta < 1$ e $\theta > 1$; e então, define-se $\delta^{(I)} = 1/\theta^m$ em que m é o primeiro inteiro, não negativo, para o qual a seguinte condição é satisfeita, para maximização tem-se:

$$\xi(\chi^{(I)}) \geq \chi^{(I-1)} + \beta\delta^{(I)}\chi^{(I-1)}d^{(I)}, \quad (3.49)$$

ou a relação inversa \leq no caso de minimização. Para um estudo mais detalhado sobre o assunto, é possível encontrar mais informações em Martins (2013).

4 MODELOS MATEMÁTICOS E NUMÉRICOS

4.1 Modelos matemáticos

Considera-se o problema clássico da consolidação de Biot para um meio poroso saturado, homogêneo, isotrópico e de fluido incompressível que segue o modelo descrito no Capítulo 2. Para se chegar às equações (4.1) e (4.8) utilizou-se relações entre as constantes poroelásticas, sendo essas mesmas equações descritas em Gaspar, Lisbona e Vabishchevich (2003, 2006), Rodrigo (2010), Franco (2017) e Franco *et al.* (2018). Para o caso unidimensional, considerando o domínio espacial $\Omega = (0, \frac{1}{2})$ [m] e domínio temporal $(0, T)$ [s] tem-se

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x} \left(E \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \alpha \frac{\partial p}{\partial x} = \mathcal{U} \\ \frac{1}{Q} \frac{\partial p}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(K \frac{\partial p}{\partial x} \right) = \mathcal{P} \end{cases}, \quad (4.1)$$

o parâmetro E [N/m²] representa o módulo de Young, enquanto K [m/s] guarda informações das características físicas associadas à porosidade e permeabilidade do meio, sendo designado como coeficiente de condutividade hidráulica, α é a constante de Biot-Willis, Q [Pa] é o módulo de Biot, \mathcal{U} a densidade da força exercida sobre o corpo e \mathcal{P} a força relacionada à injeção ou extração de fluido no meio poroso. As funções $u(x, t)$ e $p(x, t)$ denotam o deslocamento e a pressão ao longo da dimensão espacial x , respectivamente. No presente conjunto de equações, a primeira expressão corresponde à equação de deslocamento u , enquanto a segunda representa a equação de pressão p .

No que se refere às condições de contorno, é adotado um cenário no qual a fronteira esquerda se caracteriza por um deslocamento constante e permeável (indicativo de drenagem livre). Por outro lado, a fronteira direita exibe rigidez (deslocamento nulo) e ausência de variação de pressão.

$$\begin{cases} E \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \text{se } x = 0 \\ p = 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad (4.2)$$

e

$$\begin{cases} u = 0, & \text{se } x = \frac{1}{2} \\ K \frac{\partial p}{\partial x} = 0, & \text{se } x = \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (4.3)$$

Fundamentando-se na abordagem do método das soluções fabricadas (ROY, 2005), ao se considerar a solução analítica expressa por

$$u(x, t) = x \operatorname{sen}(2\pi x) e^{-t} \quad (4.4)$$

e

$$p(x,t) = \left(\sin(2\pi x) + \frac{8}{3}\pi x^3 \right) e^{-t}, \quad (4.5)$$

que atendem às condições de contornos delineadas nas equações (4.2) e (4.3), é possível estabelecer os termos forçantes \mathcal{U} e \mathcal{P} como

$$\mathcal{U} = 2\pi \left(\cos(2\pi x) + 2E\pi x \sin(2\pi x) - 2E \cos(2\pi x) + 4x^2 \right) e^{-t} \quad (4.6)$$

e

$$\mathcal{P} = \left(4K\pi^2 \sin(2\pi x) - \sin(2\pi x) - 2\pi x \cos(2\pi x) - 16K\pi x \right) e^{-t}, \quad (4.7)$$

em que as condições iniciais (CI), atendem as soluções analíticas fabricadas.

O contexto da poroelasticidade em duas dimensões é caracterizado pelo uso das variáveis $u(x,y,t)$ e $v(x,y,t)$, que indicam os deslocamentos, e $p(x,y,t)$, responsável por representar as variações de pressão no plano bidimensional (x,y) . O modelo matemático correspondente, considerando o domínio espacial $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ [m²], é formulado como segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial p}{\partial x} = \mathcal{U} \\ -(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial p}{\partial y} = \mathcal{V} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - K \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = \mathcal{P} \end{array} \right. , \quad (4.8)$$

em $(x,y) \in \Omega$ e $t \in (0,T]$ [s]. As constantes λ [N/m²] e μ [N/m²] representam os coeficientes de Lamé, dados em termos do módulo de Young E [N/m²] e da razão de Poisson ν como

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}, \quad (4.9)$$

além disso, o parâmetro K [m/s] guarda informações sobre as características físicas relacionadas à porosidade e permeabilidade do meio, sendo denominado coeficiente de condutividade hidráulica. As grandezas \mathcal{U} e \mathcal{V} indicam a densidade da força exercida sobre o corpo, enquanto \mathcal{P} simboliza a força resultante da injeção ou extração de fluido no meio poroso. O sistema de equações correspondente consiste na primeira equação referente ao deslocamento u , a segunda referente ao deslocamento v e a terceira à pressão p .

Neste trabalho a hipótese adotada é que $\partial\Omega$ (a fronteira de Ω) é rígida (deslocamento zero) e permeável (drenagem livre). Como resultado, é estabelecida uma condição de contorno de Dirichlet.

$$u(x,y,t) = 0, \quad v(x,y,t) = 0, \quad p(x,y,t) = 0, \quad (x,y) \in \partial\Omega. \quad (4.10)$$

Através do método das soluções fabricadas, considerando-se a solução analítica

$$u(x,y,t) = v(x,y,t) = p(x,y,t) = \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) e^{-t}, \quad (4.11)$$

tem-se as respectivas expressões para \mathcal{U} , \mathcal{V} e \mathcal{P}

$$\begin{aligned} \mathcal{U} = & (\lambda + 3\mu)\pi^2 \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) e^{-t} - (\lambda + \mu)\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) e^{-t} \\ & + \pi \cos(\pi x) \text{sen}(\pi y) e^{-t}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = & (\lambda + 3\mu)\pi^2 \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) e^{-t} - (\lambda + \mu)\pi^2 \cos(\pi x) \cos(\pi y) e^{-t} \\ & + \pi \text{sen}(\pi x) \cos(\pi y) e^{-t} \end{aligned} \quad (4.13)$$

e

$$\mathcal{P} = 2K\pi^2 \text{sen}(\pi x) \text{sen}(\pi y) e^{-t} - \pi \text{sen}(\pi(x+y)) e^{-t}, \quad (4.14)$$

em que as condições iniciais (CI), atendem as soluções analíticas fabricadas.

4.2 Modelos numéricos

Para o modelo numérico, o domínio espacial é discretizado pelo Método das Diferenças Finitas (MDF), malhas uniformes e diferença central (CDS). A abordagem empregada para a aproximação temporal e a conexão espacial e temporal envolve a utilização de um método de discretização implícita. Ademais, utilizou-se uma versão reformulada para o sistema de equações exposta em Gaspar *et al.* (2007), a qual apresenta um termo de suavização adicional na equação correspondente à pressão, tornando o sistema mais estável sem alterar seu resultado final. Esse termo é dado por

$$-\frac{h^2}{4(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial \Delta p}{\partial t}. \quad (4.15)$$

As deduções apresentadas na sequência (casos uni e bidimensionais) foram retiradas de Franco (2017, p. 80–90).

Caso unidimensional

No contexto unidimensional, são adotadas as seguintes considerações: K constante, $E = \lambda + 2\mu$, $Q \rightarrow \infty$ e $\alpha = 1$. A equação (4.1) que incorpora o termo de suavização (equação (4.15)) junto à equação da pressão, pode ser discretizada nos pontos internos, isto é, $i = 2, 3, \dots, N - 1$, por meio da aplicação dos métodos de Euler implícito e Crank-Nicolson.

Método de Euler

Com o emprego do método de Euler para aproximação temporal, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} -E \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{p_{i+1}^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}}{2h} = \mathcal{U}_i^{n+1} \\ \frac{\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} - \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h}}{\tau} - K \frac{p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}}{h^2} \\ - \frac{h^2}{4E\tau} \left[\frac{p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n}{h^2} \right] = \mathcal{P}_i^{n+1} \end{array} \right. , \quad (4.16)$$

reorganizando os termos, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2E}{h^2} u_i^{n+1} - \frac{E}{h^2} (u_{i+1}^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i+1}^{n+1} - p_{i-1}^{n+1}) = \mathcal{U}_i^{n+1} \\ \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\tau h} - \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\tau h} - \frac{K}{h^2} (p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}) \\ - \frac{1}{4E\tau} [p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1} - (p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n)] = \mathcal{P}_i^{n+1} \end{array} \right. , \quad (4.17)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2E}{h^2} u_i^{n+1} = \frac{E}{h^2} (u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i-1}^{n+1} - p_{i+1}^{n+1}) + \mathcal{U}_i^{n+1} \\ \left(\frac{2K}{h^2} + \frac{1}{2E\tau} \right) p_i^{n+1} + \frac{1}{2\tau h} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) - \left(\frac{K}{h^2} + \frac{1}{4E\tau} \right) (p_{i+1}^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}) \\ - \frac{1}{2\tau h} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{4E\tau} (p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n) = \mathcal{P}_i^{n+1} \end{array} \right. , \quad (4.18)$$

ou ainda

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2E}{h^2} u_i^{n+1} = \frac{E}{h^2} (u_{i-1}^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i-1}^{n+1} - p_{i+1}^{n+1}) + \mathcal{U}_i^{n+1} \\ \left(\frac{h^2 + 4E\tau K}{2E\tau h^2} \right) p_i^{n+1} = \frac{1}{2\tau h} (u_{i-1}^{n+1} - u_{i+1}^{n+1}) + \left(\frac{h^2 + 4E\tau K}{4E\tau h^2} \right) (p_{i-1}^{n+1} + p_{i+1}^{n+1}) \\ - \frac{1}{2\tau h} (u_{i-1}^n - u_{i+1}^n) - \frac{1}{4E\tau} (p_{i-1}^n - 2p_i^n + p_{i+1}^n) + \mathcal{P}_i^{n+1} \end{array} \right. . \quad (4.19)$$

Em $x = 0$ ($i = 1$), tem-se a condição de contorno $E \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0$, ou

$$E \frac{u_2^{n+1} - u_0^{n+1}}{2h} = 0$$

$$u_0^{n+1} = u_2^{n+1} \quad (4.20)$$

e considerando a equação

$$-E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial p}{\partial x} = \mathcal{U} , \quad (4.21)$$

tem-se

$$-\mathbb{E} \frac{u_2^{n+1} - 2u_1^{n+1} + u_0^{n+1}}{h^2} + \frac{p_2^{n+1} - p_0^{n+1}}{2h} = \mathcal{U}_i^{n+1}. \quad (4.22)$$

Para $p(0,t) = 0$, $p_1 = 0$ e $\frac{p_2 + p_0}{2} = p_1 = 0 \implies p_0 = -p_2$, na equação (4.22) e substituindo a equação (4.20) na equação (4.22), tem-se

$$\begin{aligned} -\mathbb{E} \frac{u_2^{n+1} - 2u_1^{n+1} + u_2^{n+1}}{h^2} + \frac{p_2^{n+1} + p_2^{n+1}}{2h} &= \mathcal{U}_1^{n+1}, \\ -\mathbb{E} \frac{u_2^{n+1} - 2u_1^{n+1} + u_2^{n+1}}{h^2} + \frac{2p_2^{n+1}}{2h} &= \mathcal{U}_1^{n+1}, \\ \frac{-2\mathbb{E}}{h^2} (u_2^{n+1} - u_1^{n+1}) + \frac{1}{h} p_2^{n+1} &= \mathcal{U}_1^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Reorganizando os termos na equação (4.23), tem-se

$$\frac{2\mathbb{E}}{h^2} u_1^{n+1} = \frac{2\mathbb{E}}{h^2} u_2^{n+1} - \frac{1}{h} p_2^{n+1} + \mathcal{U}_1^{n+1}. \quad (4.24)$$

Em $x = \frac{1}{2}$ ($i = N$), tem-se

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) - K \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{h^2}{4\mathbb{E}} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = \mathcal{P}, \quad (4.25)$$

que na forma discretizada torna-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{h^2 + 4\mathbb{E}\tau K}{2\mathbb{E}\tau h^2} \right) p_N^{n+1} &= \frac{1}{2\tau h} (u_{N-1}^{n+1} - u_{N+1}^{n+1}) + \left(\frac{h^2 + 4\mathbb{E}\tau K}{4\mathbb{E}\tau h^2} \right) (p_{N-1}^{n+1} + p_{N+1}^{n+1}) \\ &\quad - \frac{1}{2\tau h} (u_{N-1}^n - u_{N+1}^n) - \frac{1}{4\mathbb{E}\tau} (p_{N-1}^n - 2p_N^n + p_{N+1}^n) + \mathcal{P}_N^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Considerando a condição de contorno $u(\frac{1}{2}, t) = 0$, tem-se

$$\frac{u_{N+1} + u_{N-1}}{2} = u_N = 0 \implies u_{N+1} = -u_{N-1} \quad (4.27)$$

e com a condição $K \frac{\partial p(1,t)}{\partial x} = 0$, obtém-se

$$K \frac{p_{N+1} - p_{N-1}}{2h} = 0 \implies p_{N+1} = p_{N-1}. \quad (4.28)$$

Com a substituição das equações (4.27) e (4.28) na equação (4.26), tem-se

$$\begin{aligned} \left(\frac{h^2 + 4\mathbb{E}\tau K}{2\mathbb{E}\tau h^2} \right) p_N^{n+1} &= \frac{1}{\tau h} u_{N-1}^{n+1} + \left(\frac{h^2 + 4\mathbb{E}\tau K}{2\mathbb{E}\tau h^2} \right) p_{N-1}^{n+1} \\ &\quad - \frac{1}{\tau h} u_{N-1}^n - \frac{1}{2\mathbb{E}\tau} (p_{N-1}^n - p_N^n) + \mathcal{P}_N^{n+1}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Método de Crank-Nicolson

Ao se aplicar o método de Crank-Nicolson (CN) para realizar a discretização temporal, reformula-se a equação da pressão conforme apresentada na equação (4.1). Em seguida, incorpora-se o termo de suavização, conforme definido na equação (4.15) de acordo com o seguinte procedimento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{h^2}{4E} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \right) = K \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \mathcal{P}, \quad (4.30)$$

assim, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{\frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2h} - \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h}}{\tau} - \frac{h^2}{4E\tau} \left[\frac{p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n}{h^2} \right] \\ &= \frac{K}{2} \left(\frac{p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n}{h^2} \right) + \frac{\mathcal{P}_i^{n+1} + \mathcal{P}_i^n}{2}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

reorganizando os termos, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{2\tau h} - \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\tau h} - \frac{1}{4E\tau} \left[p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1} - (p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n) \right] \\ &= \frac{K}{2h^2} \left(p_{i+1}^{n+1} - 2p_i^{n+1} + p_{i-1}^{n+1} + p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n \right) + \frac{\mathcal{P}_i^{n+1} + \mathcal{P}_i^n}{2}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

ou

$$\begin{aligned} & \left(\frac{K}{h^2} + \frac{1}{2E\tau} \right) p_i^{n+1} = -\frac{1}{2\tau h} (u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) + \left(\frac{K}{2h^2} + \frac{1}{4E\tau} \right) (p_{i+1}^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}) \\ & + \frac{1}{2\tau h} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \left(\frac{K}{2h^2} - \frac{1}{4E\tau} \right) (p_{i+1}^n - 2p_i^n + p_{i-1}^n) + \frac{\mathcal{P}_i^{n+1} + \mathcal{P}_i^n}{2}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

ou ainda

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h^2 + 2E\tau K}{2E\tau h^2} \right) p_i^{n+1} = \frac{1}{2\tau h} (u_{i-1}^{n+1} - u_{i+1}^{n+1}) + \left(\frac{h^2 + 2E\tau K}{4E\tau h^2} \right) (p_{i+1}^{n+1} + p_{i-1}^{n+1}) \\ & - \frac{1}{2\tau h} (u_{i-1}^n - u_{i+1}^n) + \left(\frac{2E\tau K - h^2}{4E\tau h^2} \right) (p_{i-1}^n - 2p_i^n + p_{i+1}^n) + \frac{\mathcal{P}_i^{n+1} + \mathcal{P}_i^n}{2}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Para os contornos, as abordagens de aproximação seguem padrões semelhantes aos já descritos para o método de Euler, os quais não serão detalhados aqui.

Caso bidimensional

No contexto bidimensional, aborda-se a equação (4.8) e se adiciona o termo de suavização proveniente da equação (4.15) na formulação da equação de pressão.

Método de Euler

Utilizando o método de Euler implícito para discretização temporal, as equações discretizadas nos pontos internos ($i = j = 2, 3, \dots, N - 1$) são expressas da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{array}{l} -(\lambda + 2\mu) \frac{u_{i-1,j}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}}{h^2} - \mu \frac{u_{i,j-1}^{n+1} - 2u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}}{h^2} \\ -(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_{i+1,j}^{n+1} - v_{i-1,j}^{n+1}}{2h} \right) + \frac{p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}}{2h} = \mathcal{U}_{i,j}^{n+1} \\ -(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h} \right) - \mu \frac{v_{i-1,j}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i+1,j}^{n+1}}{h^2} \\ -(\lambda + 2\mu) \frac{v_{i,j-1}^{n+1} - 2v_{i,j}^{n+1} + v_{i,j+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{p_{i,j+1}^{n+1} - p_{i,j-1}^{n+1}}{2h} = \mathcal{V}_{i,j}^{n+1} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2h} \right) \\ -K \left(\frac{p_{i-1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1}}{h^2} + \frac{p_{i,j-1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1}}{h^2} \right) \\ - \frac{h^2}{4(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p_{i-1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1}}{h^2} + \frac{p_{i,j-1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1}}{h^2} \right) = \mathcal{D}_{i,j}^{n+1} \end{array} \right. , \quad (4.35)$$

ou

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{2(\lambda + 3\mu)}{h^2} u_{i,j}^{n+1} - \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} (u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}) - \frac{\mu}{h^2} (u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}) - \frac{(\lambda + \mu)}{4h^2} \\
\cdot (v_{i+1,j+1}^{n+1} - v_{i+1,j-1}^{n+1} - v_{i-1,j+1}^{n+1} + v_{i-1,j-1}^{n+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i+1,j}^{n+1} - p_{i-1,j}^{n+1}) = \mathcal{U}_{i,j}^{n+1} \\
- \frac{\lambda + \mu}{4h^2} (u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i+1,j-1}^{n+1} - u_{i-1,j+1}^{n+1} + u_{i-1,j-1}^{n+1}) + \frac{2(\lambda + 3\mu)}{h^2} v_{i,j}^{n+1} \\
- \frac{\mu}{h^2} (v_{i-1,j}^{n+1} + v_{i+1,j}^{n+1}) - \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} (v_{i,j-1}^{n+1} + v_{i,j+1}^{n+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i,j-1}^{n+1} - p_{i,j+1}^{n+1}) = \mathcal{V}_{i,j}^{n+1} \\
\frac{1}{2h\tau} [u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1} + v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1} - (u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n + v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n)] \\
- K \left(\frac{p_{i-1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1}}{h^2} + \frac{p_{i,j-1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1}}{h^2} \right) \\
- \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} (p_{i-1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1}) \\
+ \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} (p_{i-1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i+1,j}^n + p_{i,j-1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j+1}^n) = \mathcal{P}_{i,j}^{n+1}
\end{array} \right. , \quad (4.36)$$

ou, ainda,

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{2(\lambda + 3\mu)}{h^2} u_{i,j}^{n+1} = \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} (u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}) + \frac{\mu}{h^2} (u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}) + \frac{(\lambda + \mu)}{4h^2} \\
\cdot (v_{i+1,j+1}^{n+1} - v_{i+1,j-1}^{n+1} - v_{i-1,j+1}^{n+1} + v_{i-1,j-1}^{n+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i-1,j}^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}) + \mathcal{U}_{i,j}^{n+1} \\
\frac{2(\lambda + 3\mu)}{h^2} v_{i,j}^{n+1} = \frac{\lambda + \mu}{4h^2} (u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i+1,j-1}^{n+1} - u_{i-1,j+1}^{n+1} + u_{i-1,j-1}^{n+1}) \\
+ \frac{\mu}{h^2} (v_{i-1,j}^{n+1} + v_{i+1,j}^{n+1}) + \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} (v_{i,j-1}^{n+1} + v_{i,j+1}^{n+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i,j-1}^{n+1} - p_{i,j+1}^{n+1}) + \mathcal{V}_{i,j}^{n+1} \\
\frac{1}{2h\tau} (u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1} + v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}) + \left(\frac{4k}{h^2} + \frac{1}{(\lambda + 2\mu)\tau} \right) p_{i,j}^{n+1} \\
- \left(\frac{K}{h^2} + \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} \right) (p_{i-1,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1}) \\
- \frac{1}{2h\tau} (u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n + v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n) \\
+ \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} (p_{i-1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i+1,j}^n + p_{i,j-1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j+1}^n) = \mathcal{P}_{i,j}^{n+1}
\end{array} \right. , \quad (4.37)$$

e reorganizando os termos, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2(\lambda + 3\mu)}{h^2} u_{i,j}^{n+1} = \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} (u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}) + \frac{\mu}{h^2} (u_{i,j-1}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}) + \frac{(\lambda + \mu)}{4h^2} \cdot \\ \cdot (v_{i+1,j+1}^{n+1} - v_{i+1,j-1}^{n+1} - v_{i-1,j+1}^{n+1} + v_{i-1,j-1}^{n+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i-1,j}^{n+1} - p_{i+1,j}^{n+1}) + \mathcal{U}_{i,j}^{n+1} \\ \\ \frac{2(\lambda + 3\mu)}{h^2} v_{i,j}^{n+1} = \frac{\lambda + \mu}{4h^2} (u_{i+1,j+1}^{n+1} - u_{i+1,j-1}^{n+1} - u_{i-1,j+1}^{n+1} + u_{i-1,j-1}^{n+1}) + \\ + \frac{\mu}{h^2} (v_{i-1,j}^{n+1} + v_{i+1,j}^{n+1}) + \frac{\lambda + 2\mu}{h^2} (v_{i,j-1}^{n+1} + v_{i,j+1}^{n+1}) + \frac{1}{2h} (p_{i,j-1}^{n+1} - p_{i,j+1}^{n+1}) + \mathcal{V}_{i,j}^{n+1} \\ \\ \left(\frac{h^2 + 4k(\lambda + 2\mu)\tau}{h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \right) p_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2h\tau} (u_{i-1,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1} - v_{i,j+1}^{n+1}) \\ + \left(\frac{h^2 + 4k(\lambda + 2\mu)\tau}{4h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \right) (p_{i-1,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1}) \\ + \frac{1}{2h\tau} (u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n + v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n) \\ + \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} (4p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n - p_{i+1,j}^n - p_{i,j-1}^n - p_{i,j+1}^n) + \mathcal{P}_{i,j}^{n+1} \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Método de Crank-Nicolson

Ao adotar o método de Crank-Nicolson (CN) para realizar a discretização temporal, reformula-se a equação da pressão, conforme definida na equação (4.8), e incorpora-se o termo de suavização, como indicado na equação (4.15), por meio do seguinte procedimento:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - K \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) - \frac{h^2}{4(\lambda + 2\mu)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) = \mathcal{P},$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{h^2}{4(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \right] = K \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) + \mathcal{P},$$

e, com a discretização das variáveis espaciais pode-se escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1}}{2h} + \frac{v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1}}{2h} - \frac{h^2}{4(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{p_{i-1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1}}{h^2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{p_{i,j-1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1}}{h^2} \right) \right] = \frac{K}{2} \left(\frac{p_{i-1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1}}{h^2} + \frac{p_{i,j-1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1}}{h^2} \right. \\ \left. + \frac{p_{i-1,j}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i+1,j}^n}{h^2} + \frac{p_{i,j-1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j+1}^n}{h^2} \right) + \frac{\mathcal{P}_{i,j}^{n+1} + \mathcal{P}_{i,j}^n}{2}, \end{aligned}$$

que, com a aproximação temporal, fica

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h\tau} \left[u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1} + v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1} - \left(u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n + v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n \right) \right] \\ & - \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} \left(p_{i-1,j}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1} - 2p_{i,j}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1} \right) + \frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} \left(p_{i-1,j}^n \right. \\ & \left. - 2p_{i,j}^n + p_{i+1,j}^n + p_{i,j-1}^n - 2p_{i,j}^n + p_{i,j+1}^n \right) = \frac{K}{2} \left(\frac{p_{i-1,j}^{n+1} - 4p_{i,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1}}{h^2} \right. \\ & \left. \frac{p_{i-1,j}^n - 4p_{i,j}^n + p_{i+1,j}^n + p_{i,j-1}^n + p_{i,j+1}^n}{h^2} \right) + \frac{\mathcal{P}_{i,j}^{n+1} + \mathcal{P}_{i,j}^n}{2}, \end{aligned}$$

reorganizando os termos, tem-se

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h\tau} \left(u_{i+1,j}^{n+1} - u_{i-1,j}^{n+1} + v_{i,j+1}^{n+1} - v_{i,j-1}^{n+1} \right) + \left(\frac{2k}{h^2} + \frac{1}{(\lambda + 2\mu)\tau} \right) p_{i,j}^{n+1} - \left(\frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} \right. \\ & \left. + \frac{K}{2h^2} \right) \left(p_{i-1,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1} \right) - \frac{1}{2h\tau} \left(u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n + v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n \right) \\ & + \left(\frac{1}{4(\lambda + 2\mu)\tau} - \frac{K}{2h^2} \right) \left(p_{i-1,j}^n - 4p_{i,j}^n + p_{i+1,j}^n + p_{i,j-1}^n + p_{i,j+1}^n \right) = \frac{\mathcal{P}_{i,j}^{n+1} + \mathcal{P}_{i,j}^n}{2}, \end{aligned}$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned} & \left(\frac{h^2 + 2k(\lambda + 2\mu)\tau}{h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \right) p_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2h\tau} \left(u_{i-1,j}^{n+1} - u_{i+1,j}^{n+1} + v_{i,j-1}^{n+1} - v_{i,j+1}^{n+1} \right) + \left(\frac{2k(\lambda + 2\mu)\tau}{4h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \right. \\ & \left. + \frac{h^2}{4h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \right) \left(p_{i-1,j}^{n+1} + p_{i+1,j}^{n+1} + p_{i,j-1}^{n+1} + p_{i,j+1}^{n+1} \right) + \frac{1}{2h\tau} \left(u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n + v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n \right) \\ & + \left(\frac{h^2 - 2k(\lambda + 2\mu)\tau}{4h^2(\lambda + 2\mu)\tau} \right) \left(4p_{i,j}^n - p_{i-1,j}^n - p_{i+1,j}^n - p_{i,j-1}^n - p_{i,j+1}^n \right) + \frac{\mathcal{P}_{i,j}^{n+1} + \mathcal{P}_{i,j}^n}{2}. \end{aligned}$$

4.3 Multigrid e solver Vanka

4.3.1 Método multigrid

O método conhecido como *multigrid* representa uma abordagem numérica que oferece uma alternativa para a resolução iterativa de sistemas de equações do tipo $Au = f$, obtidos ao se discretizar uma equação diferencial. A gênese deste método pode ser atribuída à proposta inicial apresentada por Fedorenko (1964), mostrando que a velocidade de convergência com o uso de tal técnica é melhor que a dos métodos iterativos puros (sem o uso de *multigrid*), neste caso, chamados de *singlegrid*.

O método tem como princípio básico, utilizar um conjunto de malhas e alternar suavizações em cada nível de malha e as aproximações destas soluções em uma malha mais grossa (com uma certa razão de engrossamento r_e). Estas soluções em malhas grossas são feitas através de operadores que transferem informações da malha fina para a malha imediatamente mais grossa (operador de restrição), resolvem o problema nesta malha

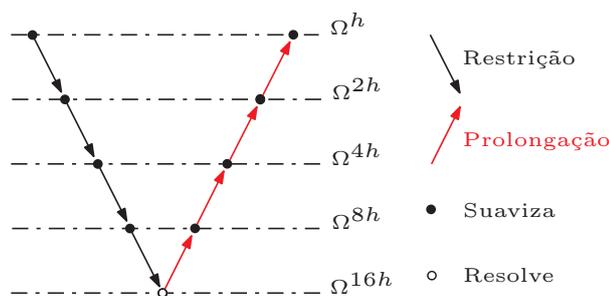
grossa, e em seguida, transferem informações da malha grossa para a malha imediatamente mais fina (operador de prolongação), desta forma reduzindo todo espectro de erros de iteração (erros de alta e baixa frequência) (WESSELING, 1992; BRIGGS; HENSON; MCCORMICK, 2000; TROTTEBERG; OOSTERLEE; SCHÜLLER, 2001).

Dependendo do tipo de informação a ser transportada entre as malhas, tem-se o esquema CS (*Correction Scheme*), onde há transferência apenas do resíduo, ou o esquema FAS (*Full Approximation Scheme*), onde há transferência do resíduo e da solução. Briggs, Henson e McCormick (2000) recomendam os esquemas CS para problemas lineares e FAS para problemas não lineares. A ideia para o esquema CS, no caso de duas malhas, é apresentado a seguir:

- Suavize $Au = f$ na malha fina Ω^h ν_1 vezes para obter uma aproximação v^h .
- Calcule o resíduo $r^h = f - Av^h$.
 - * Obter $r^{2h} = I_h^{2h} r^h$ na malha grossa Ω^{2h} .
 - * Resolva a equação residual $Ae = r$ em Ω^{2h} com estimativa inicial $e = 0$ para obter uma aproximação para o erro e^{2h} .
 - * Obter $e^h = I_{2h}^h r^{2h}$ na malha fina Ω^h .
- Corrija a aproximação obtida em $\Omega^h : v^h \leftarrow v^h + e^h$.
- Suavize $Au = f$ na malha fina Ω^h ν_2 vezes com estimativa inicial v^h .

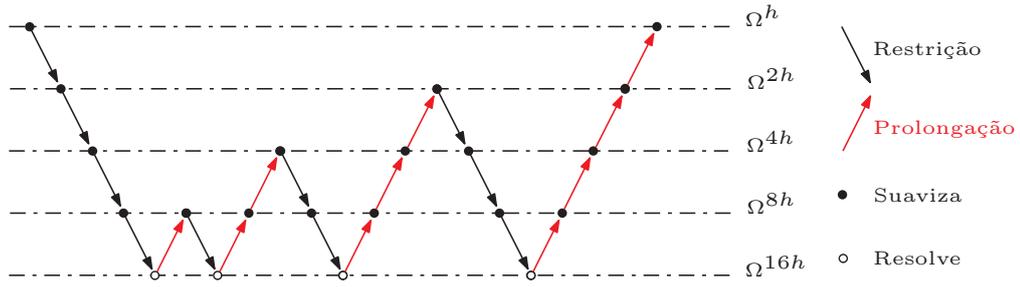
Neste caso, ν_1 e ν_2 são chamados, respectivamente, de número de pré e pós-suavização, e I_h^{2h} e I_{2h}^h são os operadores de restrição e prolongação. O procedimento apresenta um esquema CS para o caso de duas malhas, porém, pode ser estendido para o número de malhas desejadas. A sequência com que as diversas malhas são visitadas caracteriza um ciclo *multigrid* que pode ser do tipo V, W, F , entre outros. As Figuras 9, 10 e 11 ilustram os ciclos V, F e W , respectivamente.

Figura 9 – Estrutura do ciclo V .



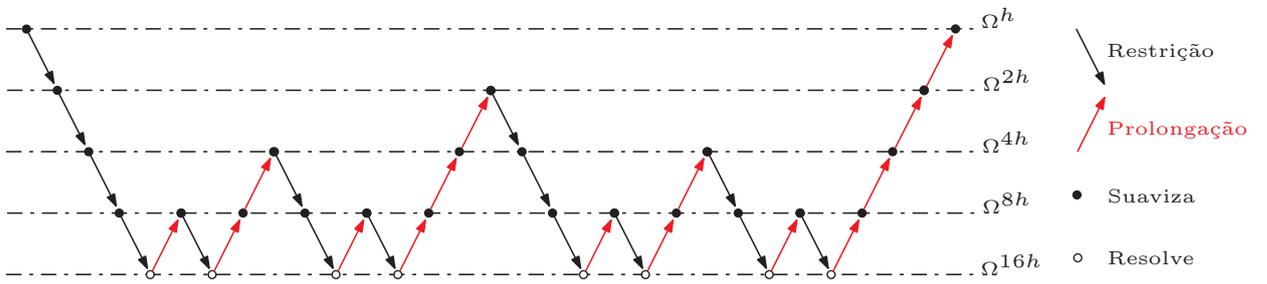
FONTE: O autor (2023).

Figura 10 – Estrutura do ciclo F .



FONTE: O autor (2023).

Figura 11 – Estrutura do ciclos W .



FONTE: O autor (2023).

Uma generalização dos ciclos V, W e F é apresentada em Wesseling (1992), Briggs, Henson e McCormick (2000) e Trottenberg, Oosterlee e Schüller (2001), compreendidos como parte de uma família de ciclos denominada μ -ciclo. No Algoritmo 1 (FRANCO, 2017, p. 65) apresenta-se um esquema para o ciclo V ou o ciclo W dependendo do valor de μ . Se $\mu = 1$ tal algoritmo realiza um ciclo V e se $\mu = 2$ realiza um ciclo W . O Algoritmo 2 (FRANCO, 2017, p. 65) apresenta um esquema para o ciclo F .

Algoritmo 1: MG- μ -ciclo (l)

if $l = L_{max}$ é o nível de malha mais grossa **then**
 Resolva o sistema $A_l v^{(l)} = f^{(l)}$ na malha grossa $\Omega^{2^{l-1}h}$.
else
 Suavize ν_1 vezes $A_l v^{(l)} = f^{(l)}$ na malha $\Omega^{2^{l-1}h}$.
 Calcule e restrinja o resíduo: $f^{(l+1)} = I_{2^{l-1}h}^{2^l h}(f^{(l)} - A_l v^{(l)})$.
for ciclo = 1 : μ **do**
 Resolva no próximo nível: **MG- μ -ciclo** ($l + 1$).
end for
 Corrija usando interpolação: $v^{(l)} \leftarrow v^{(l)} + I_{2^{l-1}h}^{2^l h} v^{(l+1)}$.
 Suavize ν_2 vezes $A_l v^{(l)} = f^{(l)}$ na malha $\Omega^{2^{l-1}h}$.
end if

Algoritmo 2: MG-Ciclos-F (l)

if $l = L_{max}$ é o nível de malha mais grossa **then**

Resolva o sistema $A_l v^{(l)} = f^{(l)}$ na malha grossa $\Omega^{2^{l-1}h}$.

else

Suavize ν_1 vezes $A_l v^{(l)} = f^{(l)}$ na malha $\Omega^{2^{l-1}h}$.

Calcule e restrinja o residuo: $f^{(l+1)} = I_{2^{l-1}h}^{2^l h}(f^{(l)} - A_l v^{(l)})$.

Resolva no próximo nível: **MG-Ciclos-F** ($l + 1$).

Corrija usando interpolação: $v^{(l)} \leftarrow v^{(l)} + I_{2^l h}^{2^{l-1} h} v^{(l+1)}$.

Suavize ν_2 vezes $A_l v^{(l)} = f^{(l)}$ na malha $\Omega^{2^{l-1}h}$.

if $l \neq 1$ **then**

Resolva no próximo nível: **MG- μ -ciclo** (l) usando o algoritmo 1 e $\mu = 1$.

end if

end if

Sobre os diversos operadores de restrição, de prolongação e suavizadores que podem ser utilizados, consulte Wesseling (1992), Briggs, Henson e McCormick (2000) e Trottenberg, Oosterlee e Schüller (2001).

4.3.2 Suavizador Vanka

O suavizador Vanka foi originalmente proposto por Vanka (1986) para resolver as equações de Navier-Stokes discretizadas pelo Método das Diferenças Finitas. Sua ideia básica é decompor a malha em pequenos subdomínios e tratar esses subdomínios separadamente, (WOBKER; TUREK, 2009). Esse método pertence a uma classe de suavizadores que realizam suavizações por blocos e, consiste em um algoritmo iterativo na estrutura do método de Gauss-Seidel, no qual um sistema pontual é empregado para atualizar simultaneamente tanto o valor da pressão quanto todas as incógnitas dos deslocamentos adjacentes. Em outras palavras, no caso unidimensional, três incógnitas (pressão p_i e deslocamentos u_{i-1}, u_{i+1}) são atualizadas concomitantemente. Já no cenário bidimensional, são tratadas cinco incógnitas (pressão $p_{i,j}$ e deslocamentos $u_{i+1,j}, u_{i-1,j}, v_{i,j+1}, v_{i,j-1}$) ao mesmo tempo, conforme representado na Figura 12.

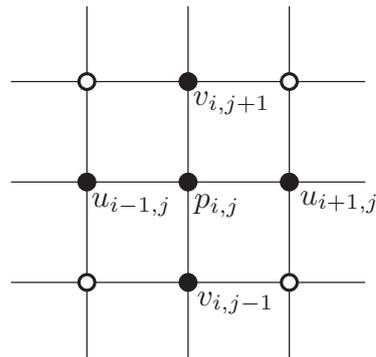
Para cada ponto na malha, um sistema de equações é solucionado, no qual todas as incógnitas do sistema são consideradas acopladas. Para cada ponto na malha em que as incógnitas correspondem aos deslocamentos e à pressão, como ilustrado na Figura 12, o sistema de equações é resolvido.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{b} \\ \mathbf{d}^t & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}^u \\ x^p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ f \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

em que \mathbf{A} é a matriz que contém os coeficientes referentes aos deslocamentos nas equações do deslocamento, \mathbf{b} o vetor com os coeficientes referentes à pressão nas equações do

deslocamento, \mathbf{d} o vetor que contém os coeficientes referentes aos deslocamentos na equação referente à pressão e c o vetor com os coeficientes referentes à pressão na equação da pressão. Os vetores \mathbf{x}^u e \mathbf{x}^p são as incógnitas relacionadas ao deslocamento e a pressão, respectivamente, e \mathbf{f} e f os respectivos termos fontes. O sistema linear dado pela equação (4.39) deve ser resolvido a cada ponto. Como em geral este sistema é de pequeno porte (3×3 no caso 1D e 5×5 no caso 2D), sua solução pode ser feita de forma eficiente por qualquer método direto (FRANCO, 2017; FRANCO *et al.*, 2018).

Figura 12 – Cinco incógnitas atualizadas simultaneamente com o suavizador Vanka, caso 2D.



Fonte: Adaptada de Franco *et al.* (2018).

Em comparação com os suavizadores Jacobi e Gauss-Seidel padrão (ponto a ponto), o suavizador Vanka apresenta como vantagem crucial, a capacidade de lidar com blocos tendendo a zero que aparecem na diagonal da matriz do sistema (em particular, o bloco formado pelo vetor c , que tende a zero quando a condutividade hidráulica é pequena). Esses sistemas, chamados sistemas com pontos de sela, são decorrentes da discretização das equações da poroelasticidade (GASPAR *et al.*, 2004; RODRIGO, 2010; GASPAR; RODRIGO, 2015) e também pode ocorrer na discretização das equações incompressíveis de Navier-Stokes (WOBKER; TUREK, 2009).

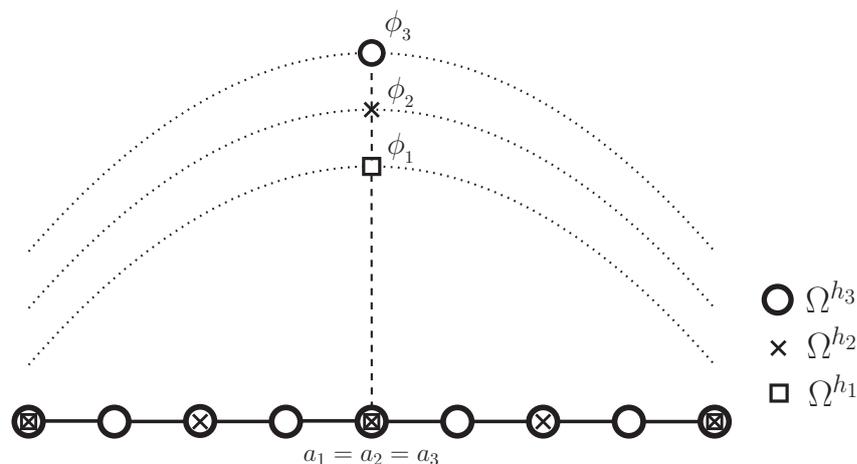
5 VARIÁVEIS DE INTERESSE

A utilização da técnica de Múltipla Extrapolação de Richardson (MER) necessita da geração de soluções numéricas em várias malhas distintas, para uma variável específica de interesse. Nesse trabalho as variáveis de interesse utilizadas estão divididas em dois tipos: *i*) variáveis do tipo 1: são variáveis que apresentam mesma localização nodal, em todas as malhas, com o refino de Ω^h e, essa localização pode ser predefinida. Neste tipo estão inclusas ainda as variáveis globais, isto é, que representam as médias das variáveis de interesse sobre o domínio de cálculo; *ii*) variáveis do tipo 2: são variáveis que apresentam mudanças em suas coordenadas com o refino de Ω^h e, sua localização nodal não pode ser predefinida. As descrições para estas variáveis são apresentadas nas Seções 5.1 e 5.2. As Figuras 13 e 14, ilustram os tipos de variáveis adotadas neste trabalho, em que ϕ_1 com coordenadas a_1 , ϕ_2 com coordenadas a_2 e ϕ_3 com coordenadas a_3 , correspondem, respectivamente, às soluções numéricas obtidas nas malhas Ω^{h_1} (grossa), Ω^{h_2} (fina) e Ω^{h_3} (superfina), com razão de refino constante ($r = h_1/h_2 = h_2/h_3$).

5.1 Variáveis do tipo 1

São variáveis, cuja a localização da coordenada a_j é a mesma para todas as malhas Ω^{h_j} , utilizadas no emprego de MER, e coincide com um ponto nodal. Como exemplo, uma variável de interesse representada pela solução numérica ϕ_j e calculada no ponto central do domínio (Figura 13). Esse tipo de variáveis, também pode ser caracterizado por uma variável global.

Figura 13 – Variável com localização nodal fixa, sem alteração de coordenadas, ao se considerar malhas distintas, com o refino de Ω^h .



Fonte: Adaptada de Marchi *et al.* (2016).

O emprego de MER para variáveis do tipo 1, ocorre de forma direta, isto é, utiliza-se apenas a equação (3.36), de acordo com o Algoritmo 3, apresentado a seguir.

Algoritmo 3: Aplicação de MER em variáveis do tipo 1

```

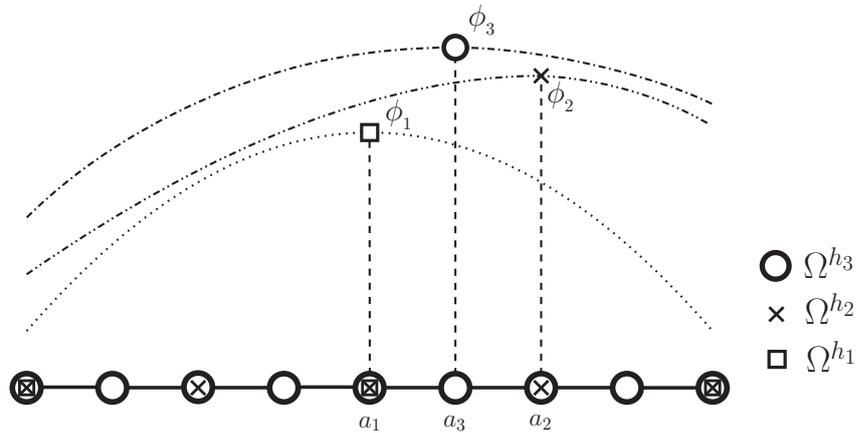
Calcule  $\phi$ , em  $G$  malhas distintas:  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_G$ .
for  $i = 1 : G$  do
   $\phi_{i,0} = \phi_i$ .
end for
for  $m = 1 : G - 1$  do
  for  $g = m + 1 : G$  do
     $\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1}$ .
  end for
end for

```

5.2 Variáveis do tipo 2

Para as variáveis do tipo 2, não é possível determinar previamente a coordenada a_j referente à solução ϕ_j . A localização de a_j , depende da malha Ω^{h_j} adotada, ou seja, a_j muda com o refino de Ω^h (Figura 14). Variáveis com ponto extremo (máximo ou mínimo), são exemplos de variáveis que podem pertencer ao tipo 2. A utilização direta de MER sobre as ϕ obtidas em malhas distintas para esse tipo de variáveis, pode ter seu desempenho comprometido devido a alteração de coordenadas ao se refinar a malha, conforme ilustrado na seção 1.1.

Figura 14 – Variável com localização indeterminada, apresenta alteração de coordenadas ao se considerar malhas distintas.



Fonte: Adaptada de Marchi *et al.* (2016).

O emprego de MER para variáveis do tipo 2 deve ser realizado de forma que os efeitos causados pela alteração de coordenadas em malhas distintas sejam minimizados. De acordo com Martins (2013) e Marchi *et al.* (2016), a combinação de interpolação polinomial com a aplicação de métodos de otimização tem demonstrado resultados satisfatórios para esse propósito.

Diante disso, são selecionados os $p + 1$ pontos nodais, situados nas proximidades do ponto discreto de máximo (ou mínimo), ou seja, corresponde ao valor nodal mais alto

(ou mais baixo) obtido na malha Ω^h , e esses pontos são utilizados para calcular ξ_p (função polinomial de grau igual ou menor que p). Dado que ξ_p representa uma função convexa, a existência e unicidade do ponto máximo (ou mínimo) no intervalo definido por esses pontos são garantidas. Após a determinação desses pontos de máximo (ou de mínimo) (ϕ_{ext_i}), com $i = 1, \dots, G$, para cada malha Ω^h , o emprego de MER é aplicado através da utilização da equação (3.36), conforme Algoritmo 4.

Algoritmo 4: Aplicação de MER em variáveis com ponto extremo

Calcule ϕ , em G malhas distintas: $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_G$.

Obtenha ξ_p , aplicando a interpolação polinomial.

Calcule o ponto máximo (ϕ_{ext_i}) de ξ_p , para cada malha Ω^h , $i = 1, \dots, G$.

for $i = 1 : G$ **do**

$$\phi_{i,0} = \phi_{ext_i}.$$

end for

for $m = 1 : G - 1$ **do**

for $g = m + 1 : G$ **do**

$$\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{r^{p_{m-1}} - 1}.$$

end for

end for

Neste trabalho, para variáveis com ponto extremo, adotou-se interpolação polinomial de graus 2, 4, 6 e 8, para o cálculo de E_{pm} .

6 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados os resultados obtidos com a utilização de MER, metodologia descrita na seção 3.5, a qual foi abordada na concepção de redução e estimativa do erro de discretização para variáveis com mesma localização nodal em malhas distintas e para variáveis com ponto extremo (localização variável) no problema de poroelasticidade uni e bidimensional. As simulações numéricas foram realizadas em linguagem Fortran utilizando o compilador Intel® Fortran Compiler e Intel® oneAPI HPC Toolkit. O computador utilizado possui processador Intel® Core™ i7-9700KF, CPU 3.60 GHz e 16 GB de memória RAM.

6.1 Problemas de poroelasticidade unidimensionais

Nesta seção são expostos os resultados para dois casos, os quais foram obtidos por meio do problemas de poroelasticidade unidimensional (equação 4.1), com a variação do módulo de Young (E) e da condutividade hidráulica (K). As soluções numéricas foram obtidas mediante o emprego do Método das Diferenças Finitas com aproximações espaciais de segunda ordem e aproximações temporais pelo método de Crank-Nicolson.

Para todas as simulações utilizou-se o método *multigrid* no intuito de acelerar a convergência do processo iterativo (esquema CS, ciclo W(1,1), razão de engrossamento padrão $r_e = 2$, operador de restrição por ponderação completa e operador de prolongação por interpolação linear), suavizador Vanka, precisão quádrupla e critério de parada até se atingir o nível de acurácia do erro de máquina. A razão de refino entre as malhas é $r = 2$.

6.1.1 Primeiro problema poroelástico unidimensional

Os parâmetros de entrada para o primeiro problema poroelástico estão listados na Tabela 4. Esses valores de E e K são valores típicos, usados academicamente para avaliar a eficácia da metodologia adotada, possibilitando o refinamento em diversos níveis de malha, porém, sem levar em consideração seus valores físicos realísticos.

Tabela 4 – Parâmetros de entrada para o primeiro problema poroelástico 1D.

Símbolo	Quantidade	Valor	Unidade
Ω	domínio espacial	$(0, \frac{1}{2})$	m
T	tempo final	1,0	s
E	módulo de Young	1,0	N/m ²
K	condutividade hidráulica	1,0	m/s

Fonte: O autor (2023).

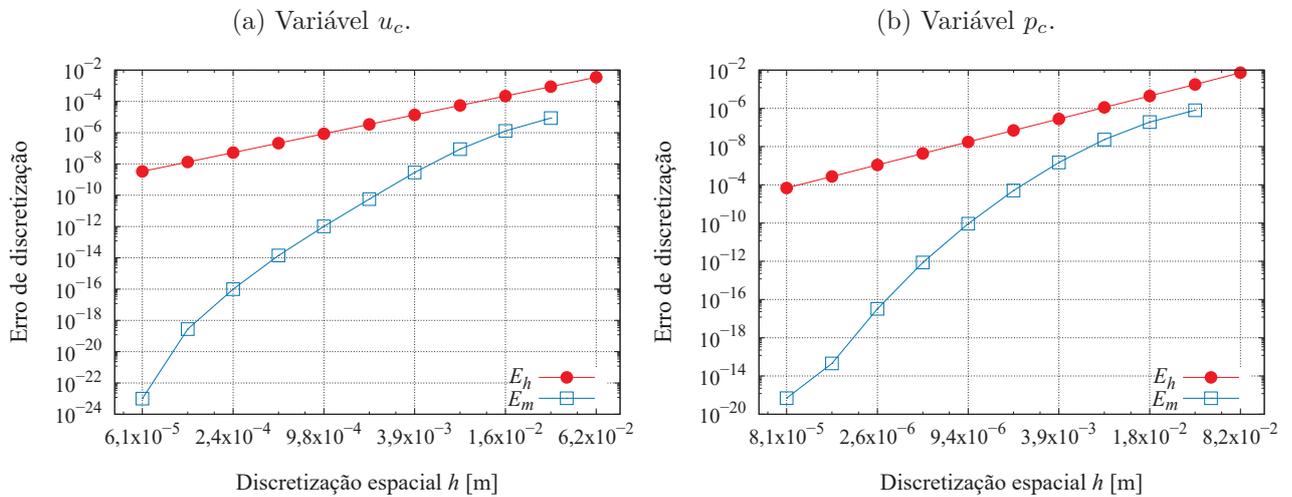
Na sequência, são apresentados os resultados obtidos para E_h , E_m e suas estimativas, para as variáveis de interesse pressão e deslocamento.

6.1.1.1 Variáveis com mesma localização nodal em malhas distintas

Como descrito na seção 5.1 o emprego de MER para variáveis com mesma localização nodal, ocorre de forma direta, isto é, utiliza-se apenas a equação (3.36). Para essas variáveis, têm-se como representantes o deslocamento e a pressão no ponto central do domínio, as quais são denominadas por u_c e p_c , respectivamente. A malha mais grossa considerada apresenta $N = 9$ e a mais refinada $N = 8193$ pontos nodais, totalizando com isso $G = 11$ malhas.

Os resultados obtidos para E_h e E_m são apresentados na Figura 15 e Tabela 5, para as variáveis u_c e p_c .

Figura 15 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis u_c e p_c .



FONTE: O autor (2023).

Tabela 5 – Erro de discretização E_h e E_m , para as variáveis u_c e p_c .

h	variável u_c		variável p_c	
	$ E_h $	$ E_m $	$ E_h $	$ E_m $
$6,25 \times 10^{-2}$	$3,53 \times 10^{-3}$	—	$7,32 \times 10^{-3}$	—
$3,12 \times 10^{-2}$	$8,76 \times 10^{-4}$	$8,57 \times 10^{-6}$	$1,77 \times 10^{-3}$	$7,96 \times 10^{-5}$
$1,56 \times 10^{-2}$	$2,19 \times 10^{-4}$	$1,29 \times 10^{-6}$	$4,48 \times 10^{-4}$	$1,91 \times 10^{-5}$
$7,81 \times 10^{-3}$	$5,48 \times 10^{-5}$	$8,92 \times 10^{-8}$	$1,12 \times 10^{-4}$	$2,33 \times 10^{-6}$
$3,91 \times 10^{-3}$	$1,37 \times 10^{-5}$	$2,84 \times 10^{-9}$	$2,80 \times 10^{-5}$	$1,47 \times 10^{-7}$
$1,95 \times 10^{-3}$	$3,42 \times 10^{-6}$	$5,69 \times 10^{-11}$	$6,99 \times 10^{-6}$	$5,02 \times 10^{-9}$
$9,77 \times 10^{-4}$	$8,56 \times 10^{-7}$	$1,02 \times 10^{-12}$	$1,75 \times 10^{-6}$	$9,21 \times 10^{-11}$
$4,88 \times 10^{-4}$	$2,14 \times 10^{-7}$	$1,40 \times 10^{-14}$	$4,37 \times 10^{-7}$	$8,63 \times 10^{-13}$
$2,44 \times 10^{-4}$	$5,35 \times 10^{-8}$	$9,89 \times 10^{-17}$	$1,09 \times 10^{-7}$	$3,24 \times 10^{-15}$
$1,22 \times 10^{-4}$	$1,34 \times 10^{-8}$	$2,76 \times 10^{-19}$	$2,73 \times 10^{-8}$	$4,53 \times 10^{-18}$
$6,10 \times 10^{-5}$	$3,34 \times 10^{-9}$	$9,96 \times 10^{-24}$	$6,83 \times 10^{-9}$	$6,90 \times 10^{-20}$

Fonte: O autor (2023).

Observa-se na Figura 15 e Tabela 5, que a emprego de MER para variáveis com mesma localização nodal em malhas distintas apresenta resultados significativos, corroborando com o descrito na literatura.

Muitas vezes não é possível calcular a solução analítica Φ de um modelo matemático, logo, o erro da solução numérica $E(\Phi)$ para uma determinada variável de interesse não pode ser calculado. Quando isso ocorre, uma estimativa para esse erro pode ser obtida. A seguir apresenta-se alguns resultados para essas estimativas.

Estimativas para o erro de discretização E_m

As estimativas apresentadas a seguir, são estimativas a posteriori para E_m calculadas com base em soluções numéricas obtidas em malhas Ω^h distintas e são usadas para estimar efetivamente a magnitude do erro de discretização. Ao se calcular uma estimativa para o erro, objetiva-se que ela seja confiável e acurada. Uma forma de quantificar essas características, confiabilidade e acurácia, é mediante o cálculo de sua efetividade $\theta = \frac{U}{E}$. Se $\theta \geq 1$ a estimativa para o erro é confiável. Se $\theta \approx 1$ a estimativa para o erro é acurada.

As Tabelas 6 e 7 apresentam os resultados de θ , obtidos para os estimadores $U_\Delta, U_{pmc}, U_\psi$ e U_{ψ^*} , para as variáveis u_c e p_c .

Tabela 6 – Efetividade dos estimadores $U_\Delta, U_{pmc}, U_\psi$ e U_{ψ^*} , para a variável u_c .

h	U_Δ/E_m	U_{pmc}/E_m	U_ψ/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$3,12 \times 10^{-2}$	$4,127385 \times 10^2$	1,150334	–	1,150457
$1,56 \times 10^{-2}$	7,651851	1,069213	$2,126703 \times 10^{-2}$	$9,381258 \times 10^{-1}$
$7,81 \times 10^{-3}$	$1,544825 \times 10^1$	1,031872	1,893973	$9,672636 \times 10^{-1}$
$3,91 \times 10^{-3}$	$3,237507 \times 10^1$	1,020018	2,027106	$9,888630 \times 10^{-1}$
$1,95 \times 10^{-3}$	$5,095406 \times 10^1$	1,017962	1,556339	$9,980230 \times 10^{-1}$
$9,77 \times 10^{-4}$	$5,667449 \times 10^1$	1,013686	1,110068	$9,958733 \times 10^{-1}$
$4,88 \times 10^{-4}$	$7,406959 \times 10^1$	1,007066	1,301537	$9,935574 \times 10^{-1}$
$2,44 \times 10^{-4}$	$1,425220 \times 10^2$	1,002794	1,911767	$9,957880 \times 10^{-1}$
$1,22 \times 10^{-4}$	$3,588580 \times 10^2$	1,000036	2,507307	$9,972570 \times 10^{-1}$
$6,10 \times 10^{-5}$	$2,773771 \times 10^4$	–	$7,708236 \times 10^1$	$-1,819036 \times 10^4$

Fonte: O autor (2023).

Observa-se que as estimativas para o erro de discretização mais acuradas, são estabelecidas pelos estimadores U_{pmc} e U_{ψ^*} , isto é, $\frac{U_{pmc}}{E_m} \approx 1$ e $\frac{U_{\psi^*}}{E_m} \approx 1$. No entanto, dentre esses dois estimadores o que se apresentou mais confiável foi U_{pmc} , o qual obteve $\theta \geq 1$ para todas as malhas analisadas de u_c e, para p_c não obteve $\theta \geq 1$ apenas na malha $h = 2,44 \times 10^{-4}$.

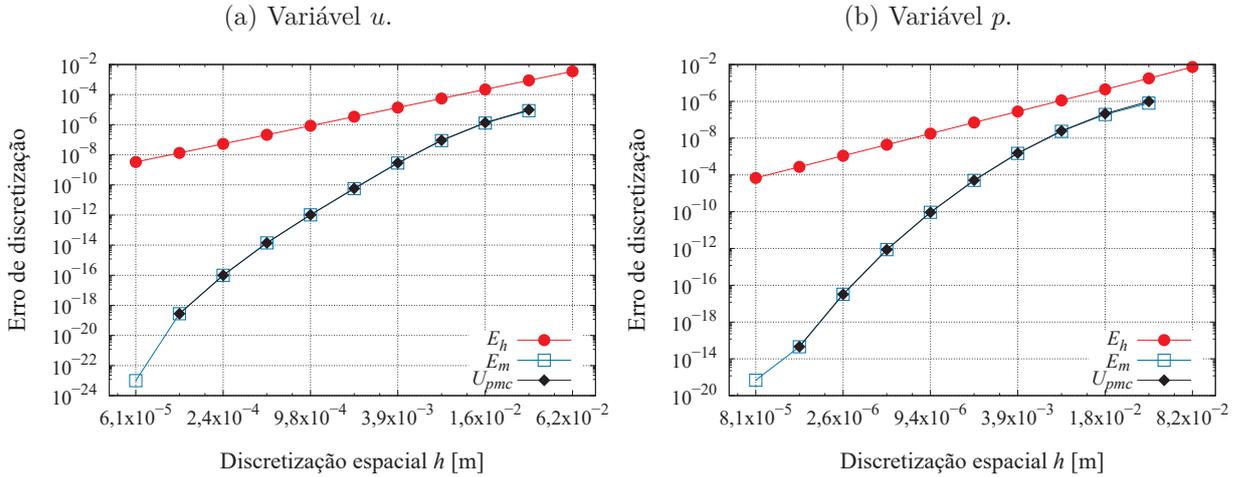
Apresenta-se na Figura 16 os erros de discretização E_h, E_m e suas estimativas. Os estimadores utilizados para a confecção dos gráficos, são os que apresentaram maior acurácia e confiabilidade (Tabelas 6 e 7).

Tabela 7 – Efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} , para a variável p_c .

h	U_Δ/E_m	U_{pmc}/E_m	U_ψ/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$3,12 \times 10^{-2}$	$9,295681 \times 10^1$	1,240215	—	1,239921
$1,56 \times 10^{-2}$	5,162936	1,121653	$6,797615 \times 10^{-2}$	$9,214641 \times 10^{-1}$
$7,81 \times 10^{-3}$	9,220097	1,063303	1,645573	$9,533573 \times 10^{-1}$
$3,91 \times 10^{-3}$	$1,679711 \times 10^1$	1,034119	1,736820	$9,741451 \times 10^{-1}$
$1,95 \times 10^{-3}$	$3,030952 \times 10^1$	1,018328	1,757795	$9,852268 \times 10^{-1}$
$9,77 \times 10^{-4}$	$5,556095 \times 10^1$	1,009374	1,806038	$9,913641 \times 10^{-1}$
$4,88 \times 10^{-4}$	$1,076759 \times 10^2$	1,003754	1,921242	$9,944830 \times 10^{-1}$
$2,44 \times 10^{-4}$	$2,674163 \times 10^2$	$9,986027 \times 10^{-1}$	2,469828	$9,948876 \times 10^{-1}$
$1,22 \times 10^{-4}$	$7,146842 \times 10^2$	1,015242	-2,658890	1,016687
$6,10 \times 10^{-5}$	$6,660659 \times 10^1$	—	$-9,475238 \times 10^{-2}$	$1,835524 \times 10^1$

Fonte: O autor (2023).

Figura 16 – Erro de discretização E_h , E_m e suas estimativas, variáveis u e p .



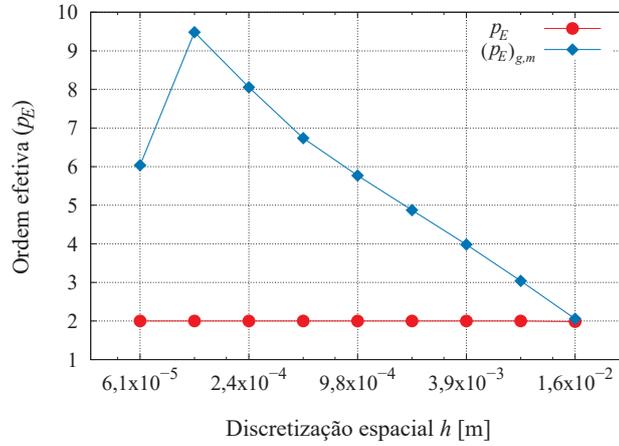
Fonte: O autor (2023).

Ilustra-se na Figura 17 a ordem de acurácia p_E para a variável p_c , sem MER (p_E) e com MER $(p_E)_{g,m}$. Observa-se que com o refinamento de malha, $p_E \rightarrow 2$, o que é compatível com o método de segunda ordem empregado, também apresenta um aumento progressivo de $(p_E)_{g,m}$ que é uma condição desejada com a aplicação de MER.

Para a última malha analisada ($h = 6,1 \times 10^{-5}$), ocorre uma queda no valor de $(p_E)_{g,m}$, indicando que o erro de arredondamento E_π torna-se a principal fonte de erro numérico, prejudicando a eficiência de MER. Uma justificativa pode ser elaborada a partir da observação da Figura 18, ou seja, uma vez que, embora os cálculos são realizados com precisão quadrupla, nota-se que para uma malha com $N = 8193$ pontos nodais, o menor valor para o resíduo corresponde a grandeza aproximada de 10^{-25} . A interpretação para tal situação é que os valores que estão sendo usados para calcular u_c na malha mais refinada, encontram-se no limite da precisão estabelecida, e como a resolução do sistema de equações utilizado para determinar as variáveis u e p é resolvido de forma acoplada, os E_π presentes

em u_c começam a afetar p_c (Figuras 16b e 17).

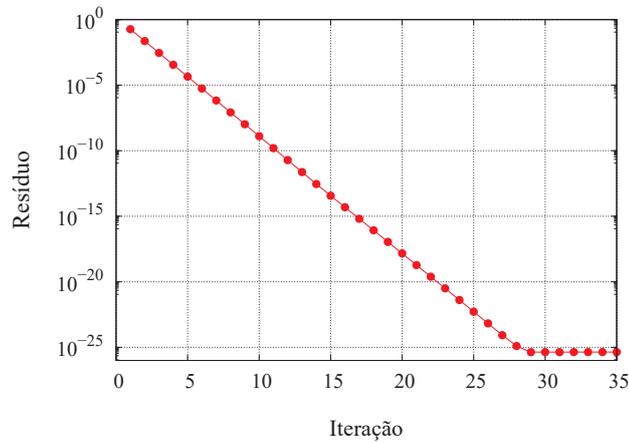
Figura 17 – Ordem de acurácia associada a variável p_c , com e sem MER.



FONTE: O autor (2023).

Na Figura 18 é representado o resíduo adimensionalizado (L^n/L^0), ao longo das iterações (representado na figura apenas pelo termo resíduo), em que L^n é a norma infinito do resíduo na iteração n e L^0 a norma infinito do resíduo da estimativa inicial.

Figura 18 – Resíduo adimensionalizado ao longo das iterações, para a variável p_c com $\Omega^h = 8193$.



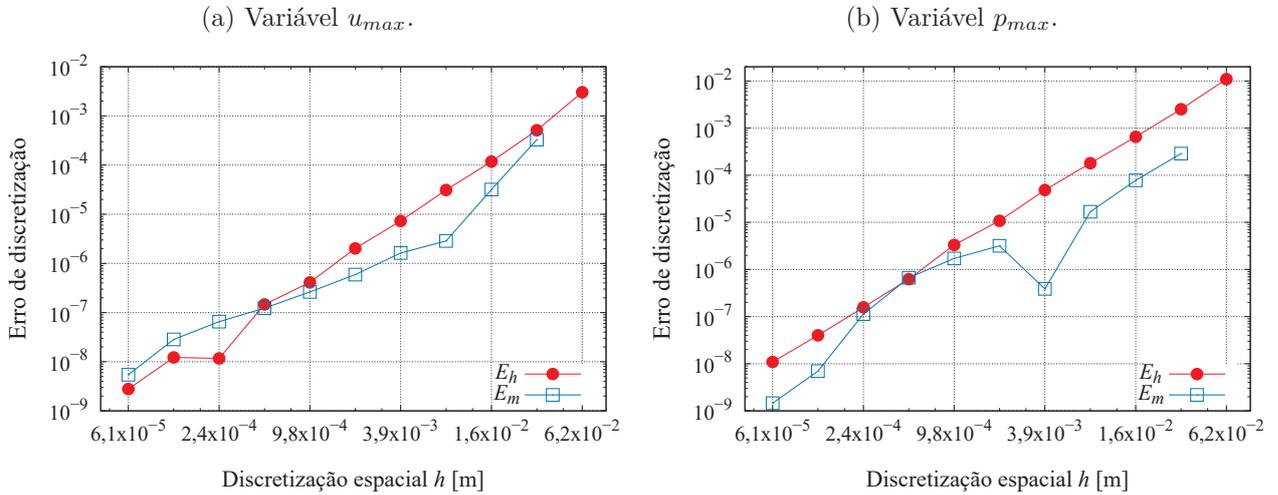
FONTE: O autor (2023).

6.1.1.2 Variáveis com ponto extremo

Para as variáveis com ponto extremo, têm-se como representantes o valor máximo do deslocamento (u_{max}) e o valor máximo da pressão (p_{max}). As soluções para $\phi = u_{max}$ e $\phi = p_{max}$ foram obtidas utilizando os mesmos dados apresentados na Seção 6.1.1 (Tabela 4). Com as ϕ nodais calculadas, aplica-se MER, e ao observar a Figura 19 nota-se que o seu emprego para esse tipo de variável não apresenta redução significativa de E_m com relação a E_h . Em acordo com a literatura, isso ocorre devido a mudança nas coordenadas de ϕ em

malhas distintas, ocasionando como consequência, o comportamento não convergente da seqüência de p_E e p_U com o refino de malha (Tabela 8), prejudicando assim o desempenho de MER.

Figura 19 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis u_{max} e p_{max} .



FONTE: O autor (2023).

Tabela 8 – Ordens efetiva (p_E) e aparente (p_U) para as variáveis u_{max} e p_{max} , sem interpolação polinomial.

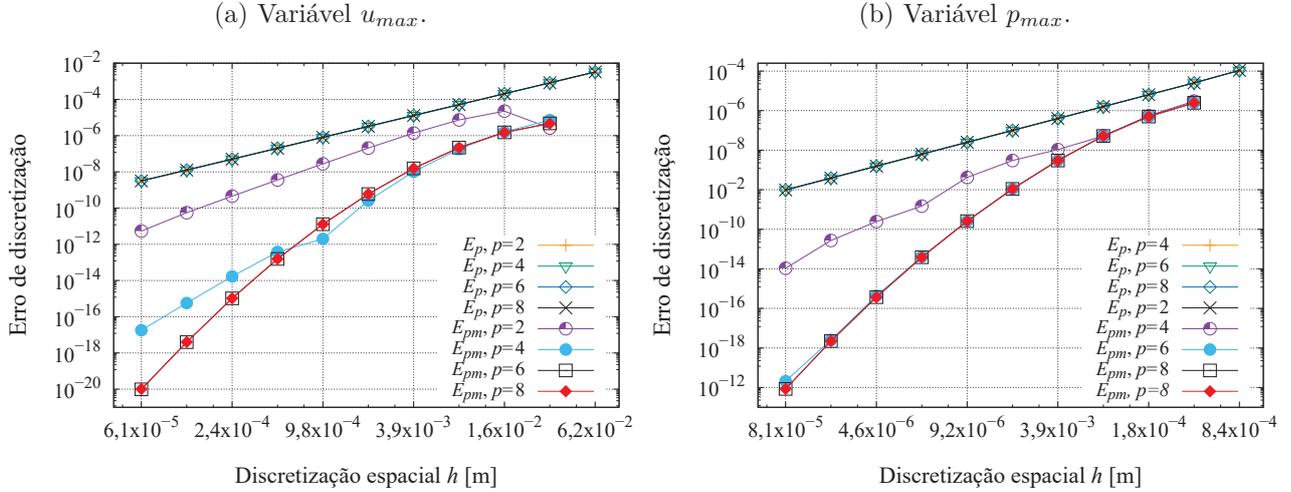
h	variável u_{max}		variável p_{max}	
	p_E	p_U	p_E	p_U
$1,56 \times 10^{-2}$	1,9457908	2,1749278	2,1184084	2,6809902
$7,81 \times 10^{-3}$	1,8609592	1,9767519	1,9141392	2,1856072
$3,91 \times 10^{-3}$	1,8929451	1,8489923	2,0949736	1,8540270
$1,95 \times 10^{-3}$	2,1667539	1,8038588	1,8525138	2,1780054
$9,77 \times 10^{-4}$	1,6996514	2,3341417	2,3009125	1,7119923
$4,88 \times 10^{-4}$	2,4098868	1,4695377	1,4881730	2,6095888
$2,44 \times 10^{-4}$	1,9918371	2,5269040	3,6448813	$9,7247163 \times 10^{-1}$
$1,22 \times 10^{-4}$	1,9678033	1,9999998	$-6,3626431 \times 10^{-2}$	7,9957424
$6,10 \times 10^{-5}$	1,8779512	1,9999999	2,1368503	-4,1625317

Fonte: O autor (2023).

Uma forma de melhorar o desempenho de MER para esse tipo de variável é usar o procedimento descrito na seção 5.2, isto é, aplicar interpolação polinomial, em seguida utilizar métodos de otimização para calcular o máximo de ξ_p e, então aplicar MER (Algoritmo 4).

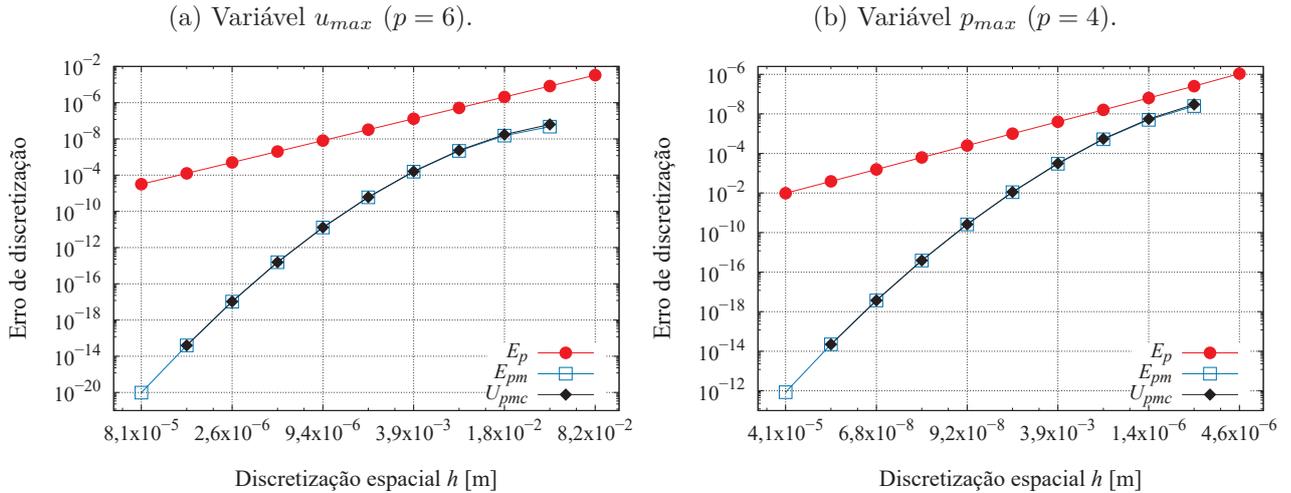
Com os valores de ϕ resultantes do cálculo do valor máximo de ξ_p , determina-se E_p de maneira equivalente a E_h então, posteriormente calcula-se E_{pm} com o emprego de MER, de forma análoga a E_m . Os resultados obtidos para E_p, E_{pm} são apresentados na Figura 20 e suas estimativas na Figura 21.

Figura 20 – Erro de discretização para interpolação polinomial sem MER (E_p) e com MER (E_{pm}) para $p = 2, 4, 6, 8$ versus discretização espacial (h).



FONTE: O autor (2023).

Figura 21 – Erro de discretização para interpolação polinomial sem MER (E_p), com MER (E_{pm}) e sua estimativa U_{pmc} versus discretização espacial (h).



FONTE: O autor (2023).

Nota-se que, com o refino de malha ($h \rightarrow 0$), o erro de discretização $E_{pm} \rightarrow 0$, corroborando a afirmação de que a aplicação da interpolação polinomial seguida de um método de otimização, mostra-se eficaz para o emprego de MER em variáveis com pontos extremos, ocasionando uma redução significativa de E_{pm} com relação a E_p . Observa-se, portanto, que existe um limite para o aumento de p . Para a variável u_{max} , esse limite foi $p = 6$, já que para $p = 8$ os resultados são equivalentes (Figura 20a).

Para a variável p_{max} , esse limite foi $p = 4$, os resultados para valores de $p > 4$ são equivalentes (Figura 20b). Esse comportamento também foi avaliado para valores de $p > 8$, por exemplo, $p = 10$ e $p = 12$, levando às mesmas conclusões. Em outras palavras,

nestes casos, ao se considerar polinômios interpoladores de ordem mais elevada não há uma maior influência sobre a redução da magnitude de E_{pm} .

Outro fato que deve ser destacado é que o comportamento não convergente da sequência de valores de p_E e p_U quando $h \rightarrow 0$, devido à mudança de coordenadas de ϕ em malhas distintas, apresentados na Tabela 8, é amenizado com a aplicação de interpolação polinomial seguida de um método de otimização, gerando um comportamento convergente para a sequência de valores de p_E e p_U quando $h \rightarrow 0$ (Tabela 9), acarretando em resultados promissores ao emprego de MER.

Tabela 9 – Ordens efetiva p_E e aparente p_U para as variáveis u_{max} e p_{max} .

h	variável u_{max} ($p = 6$)		variável p_{max} ($p = 4$)	
	p_E	p_U	p_E	p_U
$3,12 \times 10^{-2}$	1,9937449	—	2,1033748	—
$1,56 \times 10^{-2}$	2,0038594	1,9903697	1,9784819	2,1434947
$7,81 \times 10^{-3}$	1,9999292	2,0051671	1,9997939	1,9713059
$3,91 \times 10^{-3}$	2,0000267	1,9998967	1,9996272	1,9998495
$1,95 \times 10^{-3}$	2,0000069	2,0000334	1,9999143	1,9995315
$9,77 \times 10^{-4}$	2,0000018	2,0000086	1,9999787	1,9998928
$4,88 \times 10^{-4}$	2,0000005	2,0000023	1,9999947	1,9999733
$2,44 \times 10^{-4}$	2,0000001	2,0000006	1,9999987	1,9999934
$1,22 \times 10^{-4}$	2,0000000	2,0000001	1,9999997	1,9999984
$6,10 \times 10^{-5}$	2,0000000	2,0000000	1,9999999	1,9999996

Fonte: O autor (2023).

As Tabelas 10 e 11 apresentam os valores da efetividade θ dos estimadores $U_\Delta, U_{pmc}, U_\psi$ e U_{ψ^*} para as variáveis u_{max} e p_{max} , respectivamente. Os resultados são semelhantes aos obtidos para as variáveis com mesma localização nodal em malhas distintas.

Tabela 10 – Efetividade dos estimadores $U_\Delta, U_{pmc}, U_\psi$ e U_{ψ^*} , para E_{pm} , $p = 6$ e variável u_{max} .

h	U_Δ/E_m	U_{pmc}/E_m	U_ψ/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$3,12 \times 10^{-2}$	$6,894356 \times 10^2$	1,319292	—	1,319214
$1,56 \times 10^{-2}$	4,131934	1,143042	$-7,921954 \times 10^{-3}$	$8,953547 \times 10^{-1}$
$7,81 \times 10^{-3}$	7,990945	1,070982	1,731569	$9,444086 \times 10^{-1}$
$3,91 \times 10^{-3}$	$1,508798 \times 10^1$	1,038599	1,783171	$9,717099 \times 10^{-1}$
$1,95 \times 10^{-3}$	$2,690764 \times 10^1$	1,021519	1,732930	$9,841570 \times 10^{-1}$
$9,77 \times 10^{-4}$	$4,746960 \times 10^1$	1,012060	1,736219	$9,909332 \times 10^{-1}$
$4,88 \times 10^{-4}$	$8,391856 \times 10^1$	1,006698	1,751809	$9,947648 \times 10^{-1}$
$2,44 \times 10^{-4}$	$1,502953 \times 10^2$	1,003803	1,781590	$9,971428 \times 10^{-1}$
$1,22 \times 10^{-4}$	$2,639781 \times 10^2$	1,002481	1,751378	$9,986884 \times 10^{-1}$
$6,10 \times 10^{-5}$	$4,040575 \times 10^2$	—	1,528640	$-5,325574 \times 10^2$

Fonte: O autor (2023).

Tabela 11 – Efetividade dos estimadores $U_\Delta, U_{pmc}, U_\psi$ e U_{ψ^*} , para $E_{pm}, p = 4$ e variável p_{max} .

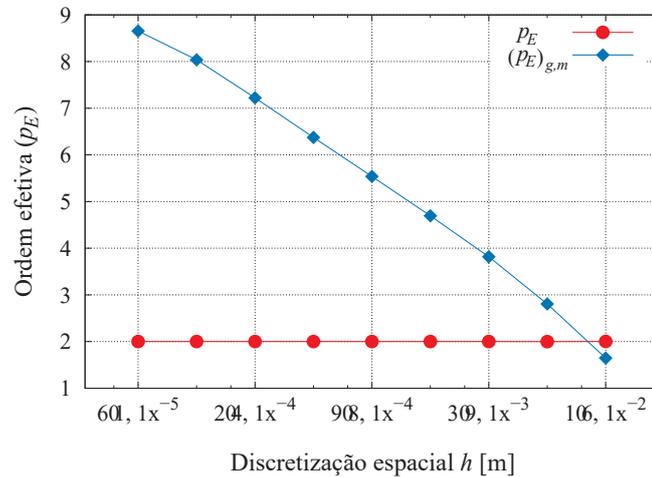
h	U_Δ/E_m	U_{pmc}/E_m	U_ψ/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$3,12 \times 10^{-2}$	$4,431086 \times 10^1$	1,200551	–	1,168882
$1,56 \times 10^{-2}$	5,986230	1,104250	$1,579118 \times 10^{-1}$	$9,322780 \times 10^{-1}$
$7,81 \times 10^{-3}$	$1,059227 \times 10^1$	1,057907	1,649607	$9,618432 \times 10^{-1}$
$3,97 \times 10^{-3}$	$1,826886 \times 10^1$	1,036576	1,658924	$9,809193 \times 10^{-1}$
$1,95 \times 10^{-3}$	$2,833973 \times 10^1$	1,023727	1,521659	$9,880366 \times 10^{-1}$
$9,77 \times 10^{-4}$	$4,314445 \times 10^1$	1,015686	1,504188	$9,923256 \times 10^{-1}$
$4,88 \times 10^{-4}$	$6,474922 \times 10^1$	1,010623	1,489236	$9,950919 \times 10^{-1}$
$2,44 \times 10^{-4}$	$9,513034 \times 10^1$	1,005809	1,462001	$9,952860 \times 10^{-1}$
$1,22 \times 10^{-4}$	$1,731425 \times 10^2$	$9,917696 \times 10^{-1}$	1,811475	$9,861210 \times 10^{-1}$
$6,10 \times 10^{-5}$	$2,628040 \times 10^2$	–	$-6,863061 \times 10^{-1}$	$1,424667 \times 10^2$

Fonte: O autor (2023).

Os estimadores mais acurados são U_{pmc} e U_{ψ^*} , ou seja, o cálculo da efetividade resultou em $\frac{U_{pmc}}{E_p} \approx 1$ e $\frac{U_{\psi^*}}{E_p} \approx 1$. O estimador que se apresentou mais confiável foi U_{pmc} , o qual resultou em $\theta > 1$ em todas as malhas analisadas para a variável u_{max} e para a variável p_{max} não ocorreu $\theta > 1$ apenas para a malha $h = 1,22 \times 10^{-4}$.

A Figura 22 ilustra o comportamento das ordens efetivas p_E e $(p_E)_{g,m}$ para a variável u_{max} .

Figura 22 – Ordem de acurácia associada a variável u_{max} , com e sem MER.



FONTE: O autor (2023).

Ao observar a Tabela 9 e a Figura 22, nota-se que quando $h \rightarrow 0$ a ordem efetiva $p_E \rightarrow 2$, sendo compatível com o método de segunda ordem utilizado. Também na Figura 22 nota-se um aumento progressivo de $(p_E)_{g,m}$, apresentando com isso a condição desejada na aplicação de MER.

6.1.2 Segundo problema poroelástico unidimensional

Na sequência, outro teste realizado para variáveis com ponto extremo é apresentado. As soluções $\phi = u_{max}$ e $\phi = p_{max}$ foram obtidas a partir do modelo matemático apresentado na seção 4.1. Os parâmetros de entrada para o segundo problema poroelástico são listados na Tabela 12.

Tabela 12 – Parâmetros de entrada para o segundo problema poroelástico 1D.

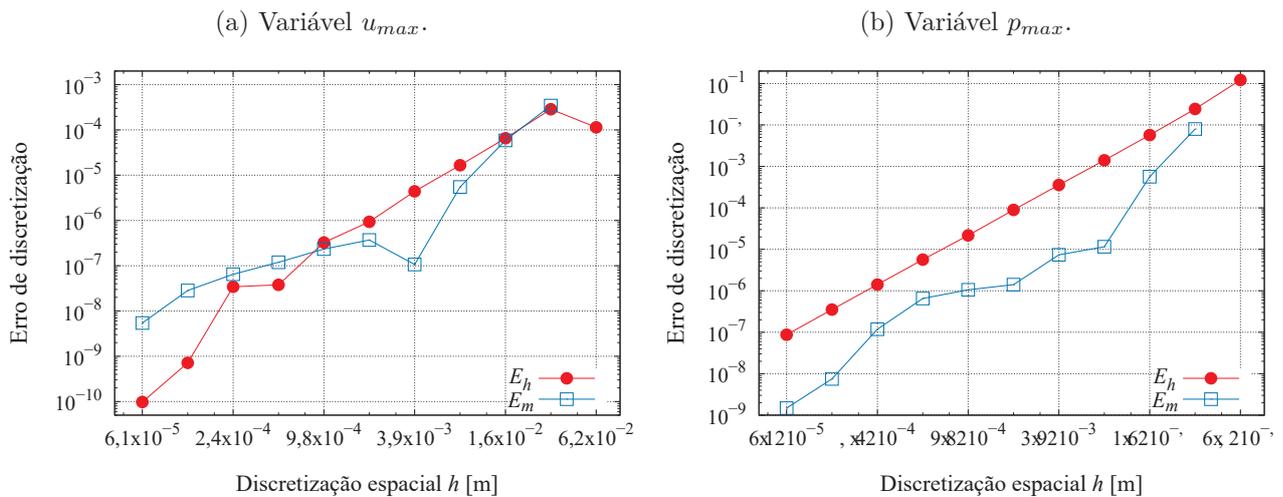
Símbolo	Quantidade	Valor	Unidade
Ω	domínio espacial	$(0, \frac{1}{2})$	m
T	tempo final	1,0	s
E	modulo de Young	$1,0 \times 10^2$	N/m ²
K	condutividade hidráulica	$1,0 \times 10^{-2}$	m/s

Fonte: O autor (2023).

O valor para a condutividade hidráulica $K = 1,0 \times 10^{-2}$ m/s, está relacionado com problemas físicos para solos como: cascalho limpo, misturas de areia e cascalho ou para rochas de calcário cárstico ou basalto permeável (BEAR, 1972; FREEZE; CHERRY, 1979; KNAPPETT; CRAIG, 2019), portanto, estes são dados de um problema realístico. A malha mais grossa considerada apresenta $N = 9$ e a mais refinada $N = 8193$ pontos nodais, totalizando assim $G = 11$ malhas.

A Figura 23 mostra o desempenho de MER sobre E_h , se empregado de forma direta, para as variáveis u_{max} e p_{max} .

Figura 23 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis u_{max} e p_{max} .



FONTE: O autor (2023).

Os resultados apresentado na Figura 23 corroboram o expostos anteriormente na Seção 6.1.1.2, ou seja, a aplicação direta de MER para variáveis que apresentam mudanças

nas coordenados nodais com o refinamento de malha não apresenta resultados significativos para a redução do erro de discretização. Considera-se que este fato é uma consequência do comportamento divergente para a sequência de valores de p_E e/ou p_U em relação à p_L .

A Tabela 13 apresenta os valores de p_E e p_U para as variáveis u_{max} e p_{max} , sem interpolação polinomial.

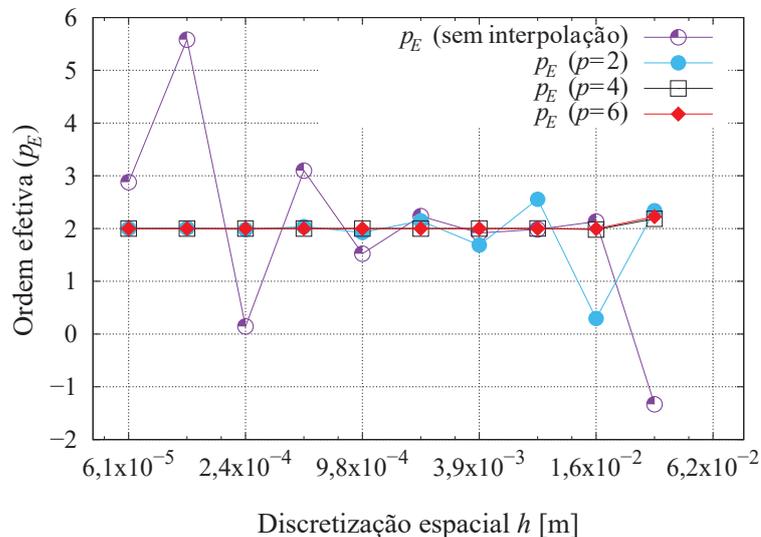
Tabela 13 – Ordens efetiva p_E e aparente p_U para as variáveis u_{max} e p_{max} , sem interpolação polinomial.

h	variável u_{max}		variável p_{max}	
	p_E	p_U	p_E	p_U
$3,12 \times 10^{-2}$	-1,3314357	—	2,3179762	—
$1,56 \times 10^{-2}$	2,1315617	$-3,5694075 \times 10^{-1}$	2,0930330	2,3803719
$7,81 \times 10^{-3}$	1,9847287	2,1780047	2,0175457	2,1169555
$3,91 \times 10^{-3}$	1,9153148	2,0089724	1,9822581	2,0293099
$1,95 \times 10^{-3}$	2,2359338	1,8151592	1,9944983	1,9781339
$9,77 \times 10^{-4}$	1,5232191	2,5085359	2,0408104	1,9793089
$4,88 \times 10^{-4}$	3,0972413	1,0856383	1,9426228	2,0738056
$2,44 \times 10^{-4}$	$1,4492220 \times 10^{-1}$	6,3052383	2,0009023	1,9226778
$1,22 \times 10^{-4}$	5,5811232	$-3,2721739$	2,0036215	1,9999978
$6,10 \times 10^{-5}$	2,8787534	5,4270379	2,0145815	1,9999987

Fonte: O autor (2023).

Neste caso, aplica-se interpolação polinomial seguida de um método de otimização com o objetivo de contornar tal impedimento, e, assim, tornar efetivo o emprego de MER para a redução de E_h . A Figura 24 mostra os valores de p_E para u_{max} , sem interpolação e com interpolação polinomial de grau $p = 2, 4$ e 6 .

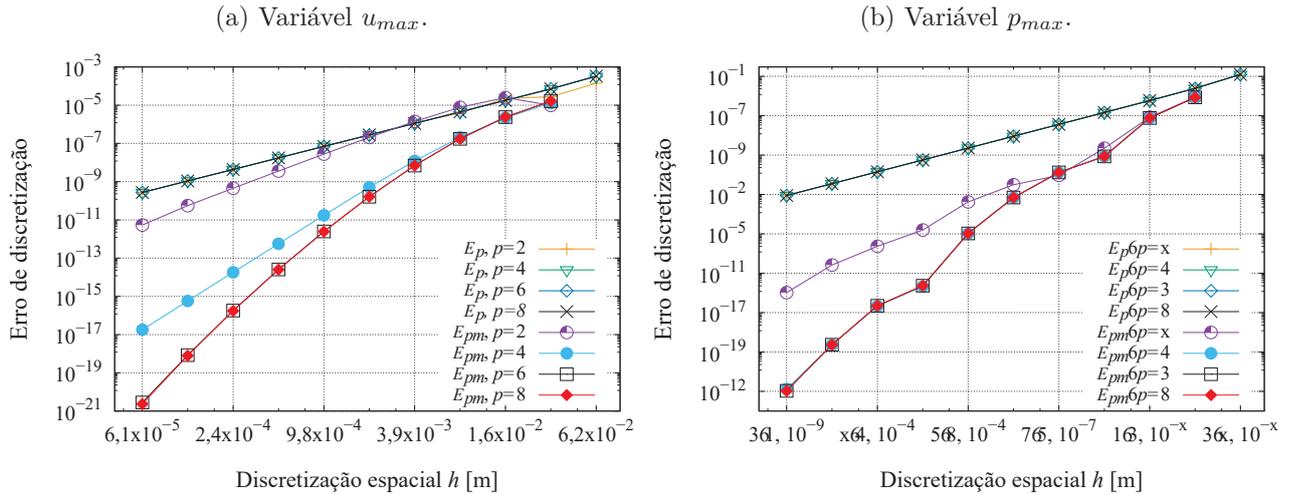
Figura 24 – Ordem de efetiva p_E , para variável u_{max} , com e sem interpolação polinomial.



FONTE: O autor (2023).

Observa-se na Figura 24 que a aplicação de interpolação polinomial seguida de um método de otimização, faz com que os valores de $p_E \rightarrow p_L$, e com isso a aplicação da MER torna-se mais efetiva. Os resultados obtidos para E_p, E_{pm} após a aplicação de interpolação polinomial seguida de um método de otimização são ilustrados na Figura 25 para as variáveis u_{max} e p_{max} .

Figura 25 – Desempenho de MER sobre E_h , para interpolação polinomial seguida de um método de otimização para as variáveis u_{max} e p_{max} .



FONTE: O autor (2023).

Ao analisar a Figura 25 nota-se que os resultados apresentados são semelhantes aos expostos na Seção 6.1.1.2, isto é, elevando o valor de p a magnitude do E_{pm} é reduzido, tendo com valor limite $p = 6$ para u_{max} e $p = 4$ para p_{max} .

Os valores da efetividade θ , para os estimadores $U_\Delta, U_{pmc}, U_\psi$ e U_{ψ^*} das variáveis u_{max} e p_{max} são apresentados nas Tabelas 14 e 15.

Tabela 14 – Efetividade dos estimadores $U_\Delta, U_{pmc}, U_\psi$ e U_{ψ^*} , para E_{pm} , $p = 6$ e variável u_{max} .

h	U_Δ/E_m	U_{pmc}/E_m	U_ψ/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$3,12 \times 10^{-2}$	$2,169207 \times 10^1$	1,147962	—	1,148161
$1,56 \times 10^{-2}$	7,758478	1,073100	$3,899486 \times 10^{-1}$	$9,427104 \times 10^{-1}$
$7,81 \times 10^{-3}$	$1,467994 \times 10^1$	1,039929	1,783718	$9,711337 \times 10^{-1}$
$3,91 \times 10^{-3}$	$2,604447 \times 10^1$	1,023493	1,722940	$9,847923 \times 10^{-1}$
$1,95 \times 10^{-3}$	$4,356666 \times 10^1$	1,015203	1,647340	$9,920855 \times 10^{-1}$
$9,77 \times 10^{-4}$	$6,677492 \times 10^1$	1,010365	1,520576	$9,953049 \times 10^{-1}$
$4,88 \times 10^{-4}$	$9,748064 \times 10^1$	1,007022	1,452985	$9,967252 \times 10^{-1}$
$2,44 \times 10^{-4}$	$1,434128 \times 10^2$	1,004702	1,466375	$9,977120 \times 10^{-1}$
$1,22 \times 10^{-4}$	$2,136898 \times 10^2$	1,003309	1,486624	$9,986202 \times 10^{-1}$
$6,10 \times 10^{-5}$	$3,032126 \times 10^2$	—	1,416980	$-6,161586 \times 10^2$

Fonte: O autor (2023).

Tabela 15 – Efetividade dos estimadores $U_\Delta, U_{pmc}, U_\psi$ e U_{ψ^*} , para Epm , $p = 4$ e variável p_{max} .

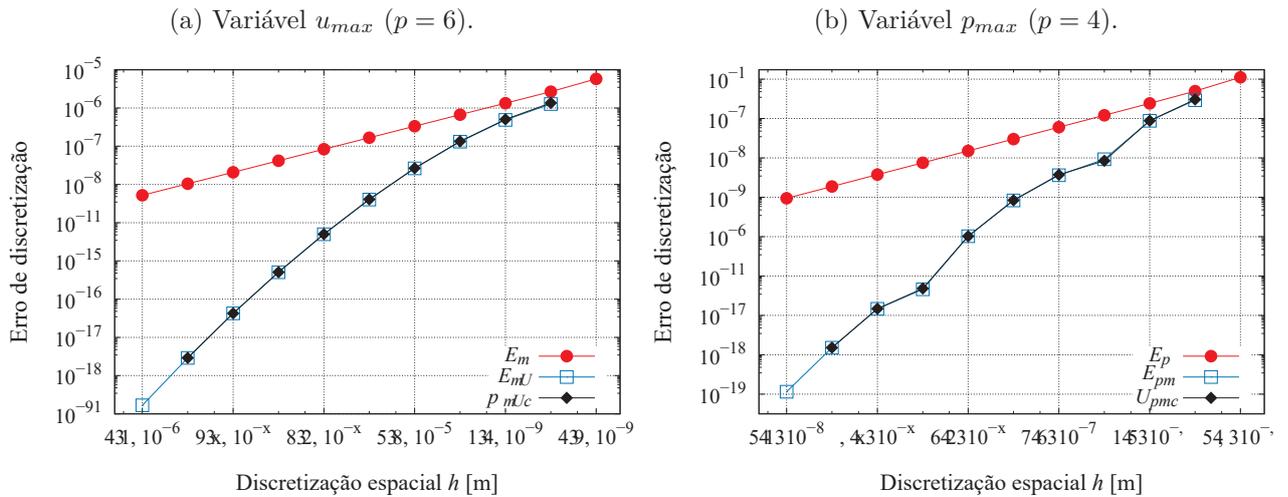
h	U_Δ/E_m	U_{pmc}/E_m	U_ψ/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$3,125 \times 10^{-2}$	$1,556945 \times 10^1$	1,090047	–	1,114315
$1,562 \times 10^{-2}$	$1,210531 \times 10^1$	1,011227	$7,920624 \times 10^{-1}$	$9,332660 \times 10^{-1}$
$7,812 \times 10^{-3}$	$9,006947 \times 10^1$	$8,461112 \times 10^{-1}$	6,943958	$8,382368 \times 10^{-1}$
$3,906 \times 10^{-3}$	5,498198	1,052579	$-5,116930 \times 10^{-2}$	1,301796
$1,953 \times 10^{-3}$	$2,001895 \times 10^1$	1,015181	-4,739841	$9,661846 \times 10^{-1}$
$9,766 \times 10^{-4}$	$6,687291 \times 10^1$	$9,977870 \times 10^{-1}$	3,227521	$9,831182 \times 10^{-1}$
$4,883 \times 10^{-4}$	$4,508753 \times 10^2$	1,095627	-6,628451	1,098296
$2,441 \times 10^{-4}$	$1,145733 \times 10^1$	1,010421	$-2,790912 \times 10^{-2}$	$9,285337 \times 10^{-1}$
$1,221 \times 10^{-4}$	$9,695968 \times 10^1$	1,004513	7,857882	$9,942130 \times 10^{-1}$
$6,104 \times 10^{-5}$	$2,225761 \times 10^2$	–	2,282269	$-2,962763 \times 10^1$

Fonte: O autor (2023).

Constata-se que os estimadores mais acurados são U_{pmc} e U_{ψ^*} , ou seja, $\frac{U_{pmc}}{E_p} \approx 1$ e $\frac{U_{\psi^*}}{E_p} \approx 1$. Entretanto, ao se analisar a Tabela 14, relacionada à variável u_{max} e grau de polinômio $p = 6$, nota-se que dentre os dois estimadores, somente o U_{pmc} se apresentou confiável, ou seja, $\frac{U_{pmc}}{E_m} > 1$. Contudo, para a variável p_{max} e grau de polinômio $p = 4$ (Tabela 15), nota-se que para as malhas $h = 7,81 \times 10^{-3}$ e $h = 9,77 \times 10^{-4}$, o estimador U_{pmc} não se apresentou confiável, ou seja, $\frac{U_{pmc}}{E_m} < 1$.

Apresenta-se na Figura 26 os erros de discretização E_p, E_{pm} e sua estimativa U_{pmc} . Os estimadores utilizados para a confecção dos gráficos são os que apresentaram maiores níveis de acurácia e confiabilidade (Tabelas 14 e 15).

Figura 26 – Erro de discretização para interpolação polinomial sem MER (E_p), com MER (E_{pm}) e sua estimativa U_{pmc} versus discretização espacial (h).

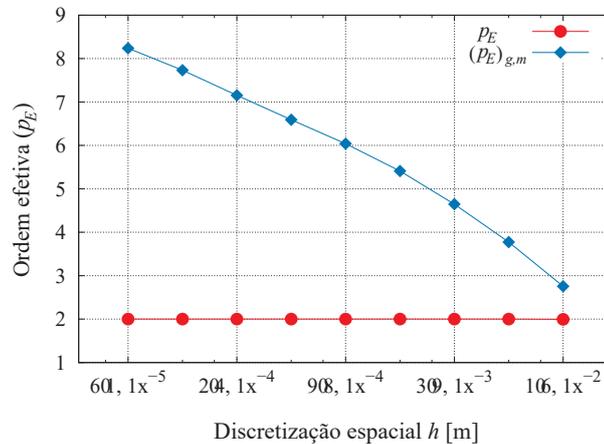


FONTE: O autor (2023).

Na Figura 27 ilustra-se a ordem de acurácia para a variável u_{max} , sem MER (p_E) e com MER (p_E)_{g,m}. Observa-se que, com o refino de malha, $p_E \rightarrow 2$, que é um

comportamento compatível com o método de segunda ordem empregado ($p_L = 2$). Observa-se também um aumento progressivo de $(p_E)_{g,m}$, que é a condição desejada na aplicação de MER.

Figura 27 – Ordem de acurácia associada à variável u_{max} , com e sem MER.



FONTE: O autor (2023).

Nesta Seção 6.1, foram apresentados os resultados obtidos com a aplicação de MER, para variáveis com mesma localização nodal em malhas distintas, e para variáveis com ponto extremo, para o problema de poroelasticidade unidimensional.

Constatou-se que, para variáveis com localização nodal fixa em malhas distintas, a aplicação de MER é feita de forma direta, e com isso obtêm-se bons resultados (comportamento teórico esperado). Ao considerar variáveis que envolvem pontos extremos, a aplicação direta de MER ocasionou resultados ineficazes sobre a redução de E_h , por esse motivo, utiliza-se a interpolação polinomial, seguido da aplicação de um método de otimização. Essa metodologia apresentou-se eficaz para a redução de E_h , apresentando resultados relevantes. No que se refere às estimativas para o erro de discretização, considerando soluções obtidas com o emprego de MER, o estimador indicado é U_{pmc} , o qual destacou-se dos demais pela sua acurácia e confiabilidade.

6.2 Problemas de poroelasticidade bidimensionais

6.2.1 Primeiro problema poroelástico bidimensional

São apresentados os resultados obtidos com a utilização de MER, que foi abordada na concepção de redução e estimativa de E_h para variáveis com mesma localização nodal em malhas distintas, aplicada ao problema de poroelasticidade 2D.

Para esse tipo de variáveis, têm-se como representantes a pressão p e os deslocamentos u e v em determinadas coordenadas do domínio de cálculo. Assim, consideram-se as soluções numéricas para estas variáveis nos pontos nodais com

coordenadas: $(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$, $(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$. Por simplicidade de notação, denota-se $u_1 \equiv u(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $u_2 \equiv u(\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, $u_3 \equiv u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $u_4 \equiv u(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$ e $u_5 \equiv u(\frac{3}{4}, \frac{3}{4})$, sendo as mesmas relações de subíndices válidas para as variáveis v e p , nestas respectivas coordenadas.

As soluções numéricas foram obtidas a partir do modelo matemático apresentado na seção 4.1 em oito malhas distintas, em que a malha mais grossa considerada apresenta $N_x \times N_y = 5 \times 5$ e a mais refinada $N_x \times N_y = 513 \times 513$ pontos nodais. As soluções numéricas foram obtidas mediante o emprego do Método das Diferenças Finitas e aproximações temporais pelo método de Crank-Nicolson. Em todos os casos, o método *multigrid* foi utilizado no intuito de acelerar a convergência do processo iterativo e a razão de refino entre as malhas foi $r = 2$. A seguir são apresentados os resultados obtidos para diferentes casos, obtidos a partir da variação do módulo de Young (E) e condutividade hidráulica (K).

Os parâmetros de entrada para este primeiro problema poroelástico bidimensional estão listados na Tabela 16.

Tabela 16 – Parâmetros de entrada para o primeiro problema poroelástico 2D.

Símbolo	Quantidade	Valor	Unidade
Ω	domínio espacial	$(0,1) \times (0,1)$	m^2
T	tempo final	1,0	s
E	módulo de Young	1,0	N/m^2
K	condutividade hidráulica	1,0	m/s
ν	razão de Poisson	$2,0 \times 10^{-1}$	—

Fonte: O autor (2023).

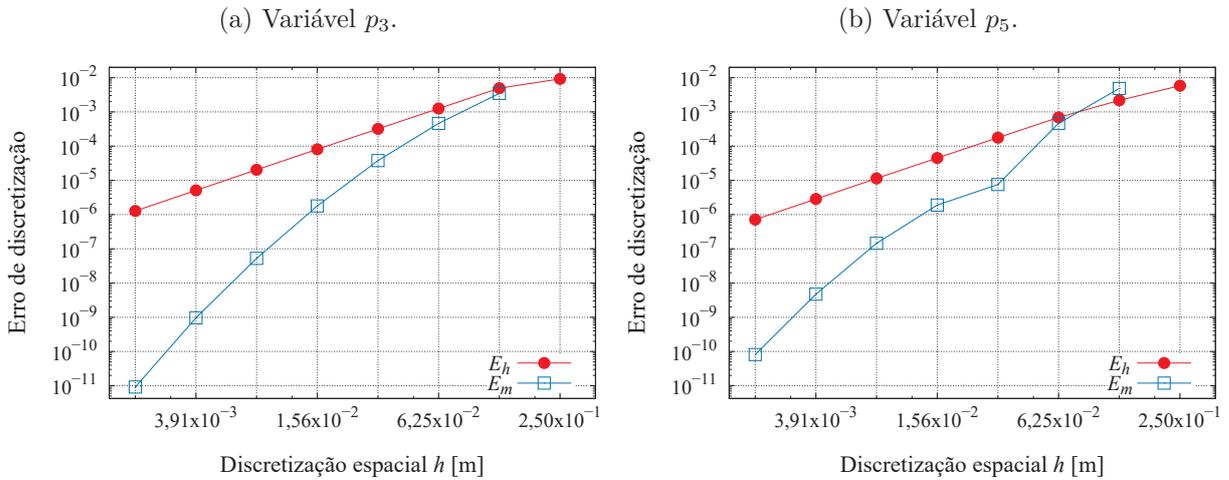
Esses valores de E e K são valores típicos, usados academicamente para avaliar a eficácia da metodologia adotada, possibilitando o refinamento em diversos níveis de malha, porém, sem levar em consideração seus valores físicos realísticos. Valores para E e K mais realísticos serão abordados nas seções subsequentes.

6.2.1.1 Erro de discretização com e sem MER, para a variável pressão

As Figuras 28a e 28b ilustram o desempenho de MER sobre E_h , para as variáveis de interesse p_3 e p_5 , respectivamente. Para as demais variáveis p_1 , p_2 e p_4 os resultados não serão expostos, em razão de apresentarem comportamentos numéricos semelhantes, $p_1 \cong p_3$, $p_2 \cong p_4$ e $p_4 \cong p_5$.

Observa-se na Figura 28 que o emprego de MER resultou em uma redução significativa de E_h . A Tabela 17 apresenta alguns exemplos que caracterizam o efeito de MER sobre E_h , os quais foram avaliados mediante o cálculo da razão $|E_h|/|E_m|$. Para isso levou-se em consideração as três últimas malhas.

Figura 28 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis p_3 e p_5 .



Fonte: O autor (2023).

Tabela 17 – Redução do erro em três malhas distintas, variável p_3 .

$N_x \times N_y$	129×129	257×257	513×513
h	$7,812 \times 10^{-3}$	$3,906 \times 10^{-3}$	$1,953 \times 10^{-3}$
m para E_m	5	6	7
$ E_h $	$2,031 \times 10^{-5}$	$5,092 \times 10^{-6}$	$1,274 \times 10^{-6}$
$ E_m $	$5,259 \times 10^{-8}$	$9,654 \times 10^{-10}$	$9,172 \times 10^{-12}$
$ E_h / E_m $	$3,862 \times 10^2$	$5,274 \times 10^3$	$1,389 \times 10^5$

Fonte: O autor (2023).

Verifica-se na Tabela 17 que, para a malha $N_x \times N_y = 129 \times 129$ nós, ao se aplicar cinco níveis de extrapolação ($m = 5$), E_h foi reduzido mais de 385 vezes. Ao se aumentar o número de extrapolações empregando MER, essa redução se torna sucessivamente maior. Para seis níveis de extrapolação ($m = 6$) a redução foi mais de cinco mil vezes e para sete níveis ($m = 7$) essa redução ultrapassou 138 mil vezes (Tabela 17).

Essa redução significativa de E_h ao empregar-se MER, está em acordo com a literatura vigente (Marchi *et al.* (2016)), porém, observa-se na Figura 28b, que no primeiro e no segundo nível de extrapolação, E_m não apresentou redução sobre E_h . Além disso, para a variável p_3 (Figura 28a) no primeiro e no segundo nível de MER, E_m não apresentou uma redução relevante sobre E_h . Martins (2013) relata que o emprego de MER deve ocorrer a partir de um certo nível de refinamento de Ω^h e, essa determinação de Ω^h (inicial) pode ser realizada com base no monitoramento dos valores calculados para p_E e/ou p_U , sendo desejável que a sequência gerada por tais parâmetros apresente um comportamento convergente e monotônico com a redução de h e, com isso, do ponto de vista prático, o emprego de MER pode ser realizado sem que haja prejuízo em seu desempenho. Isso posto, analisa-se o comportamento de p_E e p_U para verificar se a não redução ou a redução

não significativa de E_m sobre E_h , mencionada anteriormente, está relacionada com o comportamento de p_E e/ou p_U .

As Tabelas 18a e 18b apresentam os valores de p_E e p_U para, respectivamente, as variáveis p_3 e p_5 com a redução de h . Observa-se que, para ambos os casos p_U apresenta um comportamento convergente com o refino de malha, porém, o comportamento monotônico ocorre somente quando $h < 3,12 \times 10^{-2}$, para a variável p_3 , e $h < 6,25 \times 10^{-2}$ para p_5 .

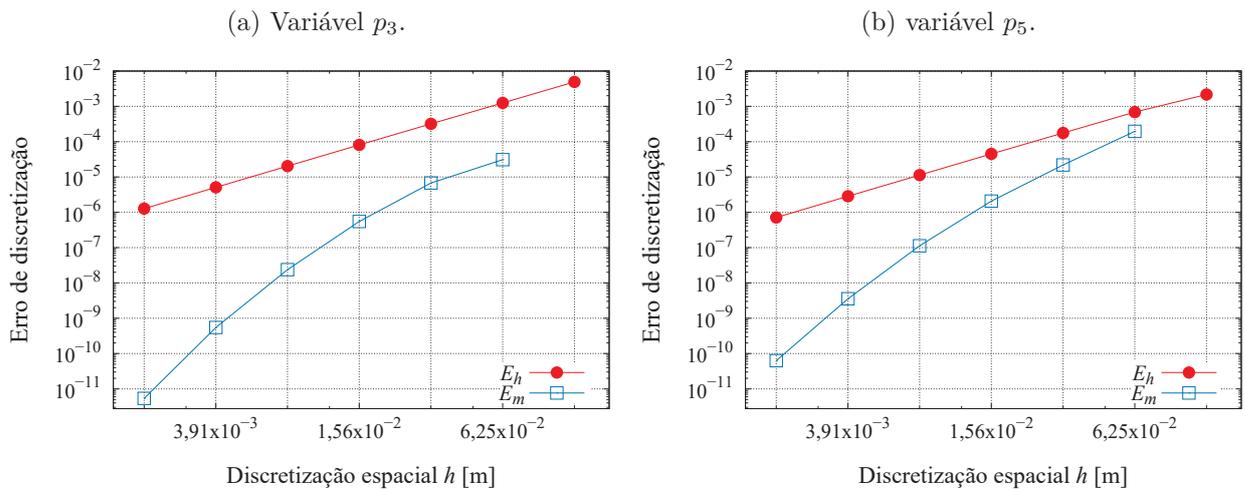
Tabela 18 – Ordens efetiva p_E e aparente p_U , para variáveis p_3 e p_5 .

(a) Variável p_3 .			(b) Variável p_5 .		
h	$p_E(p_3)$	$p_U(p_3)$	h	$p_E(p_3)$	$p_U(p_3)$
$1,25 \times 10^{-1}$	0,90764	–	$1,25 \times 10^{-1}$	1,41674	–
$6,25 \times 10^{-2}$	1,97294	0,23314	$6,25 \times 10^{-2}$	1,65314	2,42776
$3,12 \times 10^{-2}$	1,96654	1,97513	$3,12 \times 10^{-2}$	1,96656	1,52745
$1,56 \times 10^{-2}$	1,98466	1,96036	$1,56 \times 10^{-2}$	1,97141	1,96490
$7,81 \times 10^{-3}$	1,99241	1,98205	$7,81 \times 10^{-3}$	1,98638	1,96632
$3,91 \times 10^{-3}$	1,99622	1,99113	$3,91 \times 10^{-3}$	1,99326	1,98407
$1,95 \times 10^{-3}$	1,99812	1,99559	$1,95 \times 10^{-3}$	1,99664	1,99213

Fonte: O autor (2023).

Por conseguinte, a fim de determinar qual Ω^h (inicial) deve-se utilizar, a malha mais grosseira foi retirada e empregou-se MER para sete malhas distintas em que a primeira malha considerada passou a ter $N_x \times N_y = 9 \times 9$ pontos nodais. Desta forma, a Figura 29 ilustra o desempenho de MER sobre E_h e a Tabela 19 as ordens p_E , p_U para variáveis p_3 e p_5 .

Figura 29 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis p_3 e p_5 .



Fonte: O autor (2023).

Na Figura 29b, nota-se que o gráfico do E_m apresenta o comportamento teórico esperado com a aplicação de MER, uma redução de E_m mediante uma elevação progressiva

Tabela 19 – Ordens efetiva p_E e aparente p_U , para variáveis p_3 e p_5 .

(a) Variável p_3 .			(b) Variável p_5 .		
h	$p_E(p_3)$	$p_U(p_3)$	h	$p_E(p_3)$	$p_U(p_3)$
$6,25 \times 10^{-2}$	1,97294	–	$6,25 \times 10^{-2}$	1,65314	–
$3,12 \times 10^{-2}$	1,96654	1,97513	$3,12 \times 10^{-2}$	1,96656	1,52745
$1,56 \times 10^{-2}$	1,98466	1,96036	$1,56 \times 10^{-2}$	1,97141	1,96490
$7,81 \times 10^{-3}$	1,99241	1,98205	$7,81 \times 10^{-3}$	1,98638	1,96632
$3,91 \times 10^{-3}$	1,99622	1,99113	$3,91 \times 10^{-3}$	1,99326	1,98407
$1,95 \times 10^{-3}$	1,99812	1,99559	$1,95 \times 10^{-3}$	1,99664	1,99213

Fonte: O autor (2023).

da sua ordem de acurácia, isto é, com um aumento da inclinação no gráfico correspondente, o que não ocorre na Figura 28b (para a mesma variável de interesse e localização nodal).

Ao verificar o último nível de extrapolação, com e sem a malha $N_x \times N_y = 5 \times 5$, nota-se que a magnitude do erro de discretização E_m apresentou uma pequena redução ao retirar-se a malha $N_x \times N_y = 5 \times 5$, isto é, para a malha mais refinada, $h = 1,95 \times 10^{-3}$, os valores de E_m são $8,15 \times 10^{-11}$ e $6,27 \times 10^{-11}$, respectivamente nas Figuras 28b e 29b.

Para a variável p_3 na malha mais refinada, $h = 1,95 \times 10^{-3}$, os valores de E_m são de $9,17 \times 10^{-12}$ e $5,36 \times 10^{-12}$ nas Figuras 28a e 29a, respectivamente. Deste ponto em diante, todos resultados das simulação numéricas serão realizados com sete malhas distintas em que a malha mais grossa considerada apresenta $N_x \times N_y = 9 \times 9$ e a mais refinada $N_x \times N_y = 513 \times 513$ pontos nodais.

6.2.1.2 Erro de discretização com e sem MER, para a variável deslocamento

Na Figura 30 é apresentado o desempenho de MER sobre E_h para as variáveis de interesse u_1, u_2, u_3, u_4 e u_5 . Nota-se que E_m apresenta uma redução relevante sobre E_h . Na Tabela 20 estão representados os resultados que caracterizam essa redução com o cálculo da razão $|E_h|/|E_m|$, considerando-se as três malhas mais refinadas, para a variável u_3 . Observa-se na Tabela 20 que, com o aumento dos níveis de MER, a redução do E_m com relação a E_h torna-se gradativamente mais expressiva.

Como exemplo, para $N_x \times N_y = 129 \times 129$, a redução de E_h foi superior a 300 mil vezes, já para $N_x \times N_y = 257 \times 257$ e $N_x \times N_y = 513 \times 513$ essas reduções foram superiores a 935 mil e 5,8 milhões de vezes, respectivamente. Para as variáveis v_1, v_2, v_3, v_4 e v_5 os resultados numéricos apresentaram valores similares das variáveis u_1, u_2, u_3, u_4 e u_5 . Na Figura 31 ilustra-se o desempenho de MER sobre E_h para as variáveis v_3 e v_4 .

Tabela 20 – Redução do erro em três malhas distintas, variável u_3 .

$N_x \times N_y$	129×129	257×257	513×513
h	$7,812 \times 10^{-3}$	$3,906 \times 10^{-3}$	$1,953 \times 10^{-3}$
m para E_m	4	5	6
$ E_h $	$1,528 \times 10^{-5}$	$3,819 \times 10^{-6}$	$9,546 \times 10^{-7}$
$ E_m $	$5,091 \times 10^{-11}$	$4,083 \times 10^{-12}$	$1,626 \times 10^{-13}$
$ E_h / E_m $	$3,001 \times 10^5$	$9,352 \times 10^5$	$5,872 \times 10^6$

Fonte: O autor (2023).

6.2.1.3 Estimativas para o erro de discretização

As estimativas apresentadas a seguir, são do erro *a posteriori*, calculadas com base em soluções numéricas obtidas em malhas Ω^h distintas. Ao se calcular uma estimativa para o erro, objetiva-se que ela seja confiável e acurada. Como já dito anteriormente, uma estimativa para o erro é confiável se a sua magnitude é maior que a magnitude do erro, e é acurada se a magnitude da incerteza U é aproximadamente igual a do erro. Quanto mais próximas estão as magnitudes da estimativa e do erro, mais acurado é o estimador.

Variável de interesse: deslocamento

Nas Tabelas 21 e 22, apresentam-se os valores das efetividades dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} para as variáveis u_3 e u_4 . Utilizam-se esses estimadores para estimar o erro de discretização após o emprego de MER, ou seja, para estimar E_m .

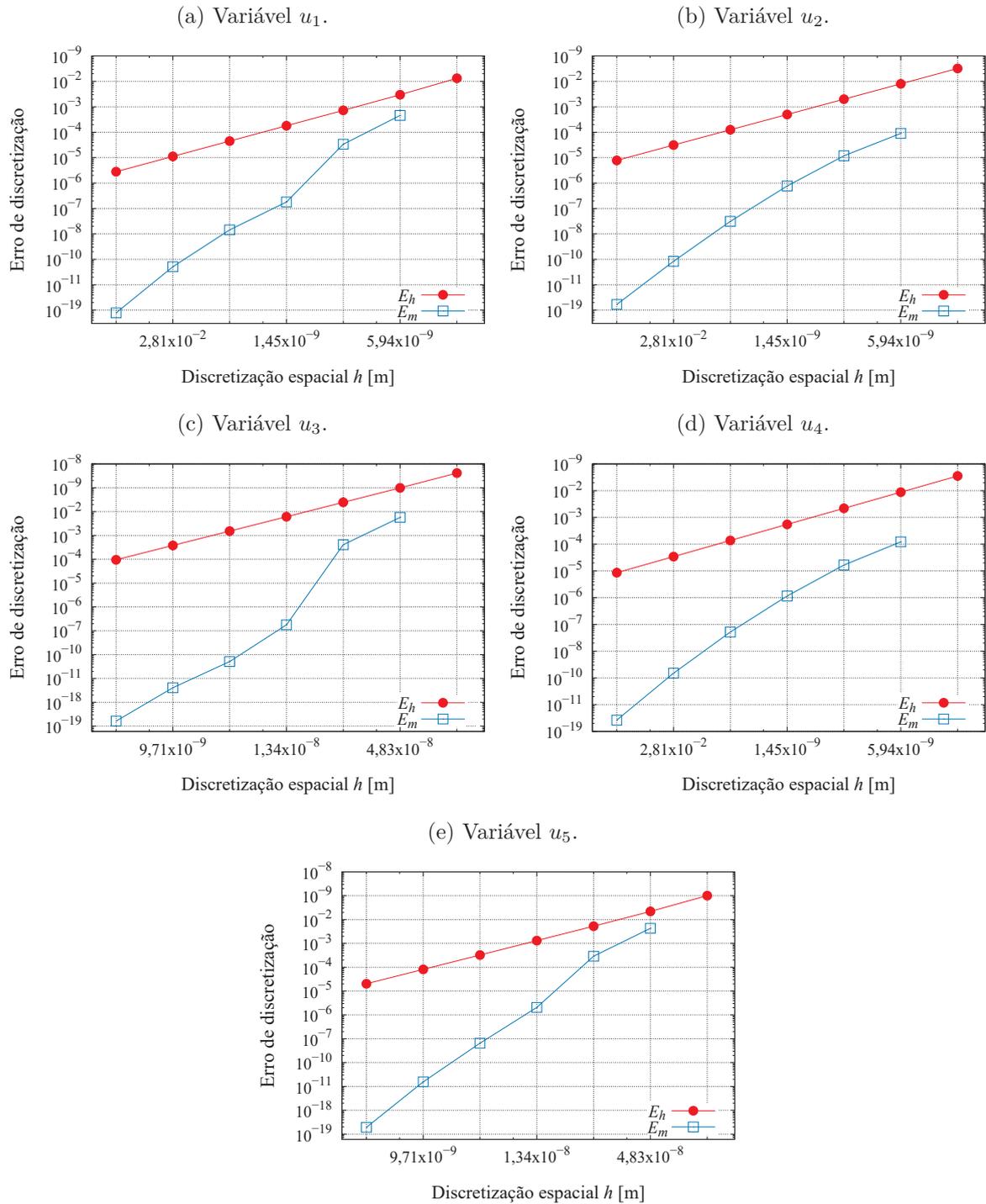
Tabela 21 – Efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} , para a variável u_3 .

h	U_Δ/E_m	U_{pm}/E_m	U_{pmc}/E_m	U_ψ/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$6,25 \times 10^{-2}$	$5,526 \times 10^1$	$1,340 \times 10^{-1}$	1,072	–	1,056
$3,12 \times 10^{-2}$	$1,306 \times 10^1$	$6,253 \times 10^{-2}$	1,000	$2,141 \times 10^{-1}$	$9,376 \times 10^{-1}$
$1,56 \times 10^{-2}$	$2,160 \times 10^3$	$3,035 \times 10^{-2}$	$9,713 \times 10^{-1}$	$1,447 \times 10^2$	$9,709 \times 10^{-1}$
$7,81 \times 10^{-3}$	$3,279 \times 10^1$	$1,688 \times 10^{-2}$	1,080	$-1,427 \times 10^{-2}$	1,116
$3,91 \times 10^{-3}$	$1,326 \times 10^1$	$8,124 \times 10^{-3}$	1,040	$-4,440 \times 10^{-1}$	$9,653 \times 10^{-1}$
$1,95 \times 10^{-3}$	$2,591 \times 10^1$	–	–	1,872	$1,848 \times 10^1$

Fonte: O autor (2023).

Observa-se que as estimativas de E_m mais acuradas, são obtidas pelos estimadores U_{pmc} e U_{ψ^*} , ou seja, o cálculo das suas efetividades é $\theta \approx 1$. Entretanto, outra característica desejada, além da acurácia, é a confiabilidade dos estimadores. Nas Tabelas 21 e 22, verifica-se que entre os estimadores que se apresentaram mais acurados, o estimador U_{pmc} é o mais confiável, isto é, ao calcular efetividade obteve-se $\theta \geq 1$ em todas as malhas, para a variável u_4 , e não se obteve $\theta \geq 1$ apenas na malha $h = 1,56 \times 10^{-2}$, para a variável u_3 .

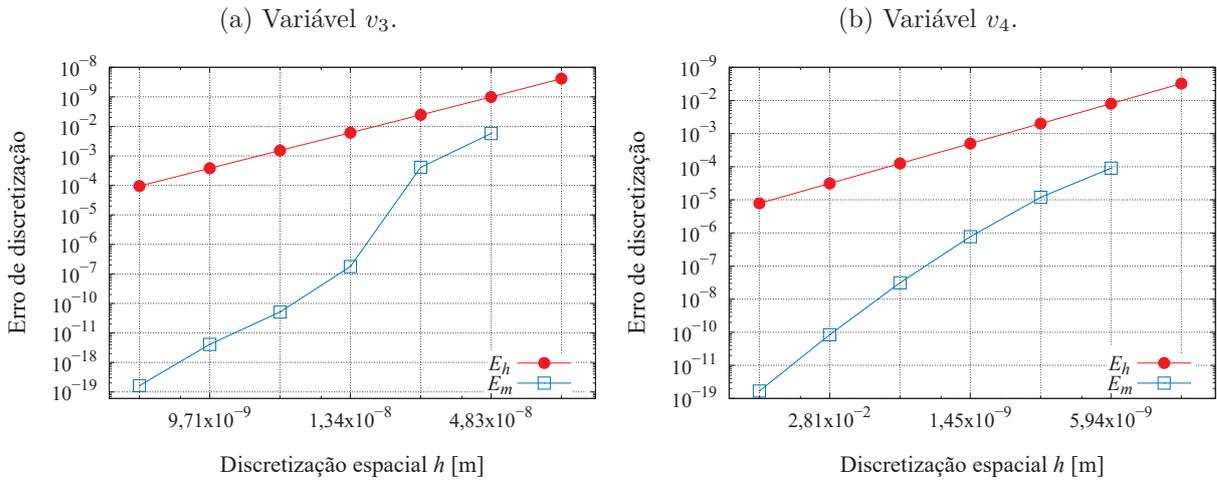
Figura 30 – Desempenho de MER sobre Eh , para variáveis u_1, u_2, u_3, u_4 e u_5 .



Fonte: O autor (2023).

Nas Figuras 32a e 32b apresentam-se os erros de discretização e suas estimativas para as variáveis u_3 e u_4 , respectivamente. Os estimadores utilizados para a confecção dos gráficos, são os que apresentaram maior confiabilidade e acurácia (Tabelas 21 e 22).

Figura 31 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis v_3 e v_4 .



Fonte: O autor (2023).

Tabela 22 – Efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} , para a variável u_4 .

h	U_Δ/E_m	U_{pm}/E_m	U_{pmc}/E_m	U_ψ/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$6,25 \times 10^{-2}$	$2,185 \times 10^2$	$1,420 \times 10^{-1}$	1,136	–	1,132
$3,12 \times 10^{-2}$	7,309	$6,683 \times 10^{-2}$	1,069	$3,245 \times 10^{-2}$	$9,480 \times 10^{-1}$
$1,56 \times 10^{-2}$	$1,446 \times 10^1$	$3,266 \times 10^{-2}$	1,045	1,750	$9,788 \times 10^{-1}$
$7,81 \times 10^{-3}$	$2,245 \times 10^1$	$1,608 \times 10^{-2}$	1,029	1,471	$9,852 \times 10^{-1}$
$3,91 \times 10^{-3}$	$3,501 \times 10^1$	$7,950 \times 10^{-3}$	1,018	1,512	$9,893 \times 10^{-1}$
$1,95 \times 10^{-3}$	$5,746 \times 10^1$	–	–	1,611	$-1,049 \times 10^2$

Fonte: O autor (2023).

Variável de interesse: pressão

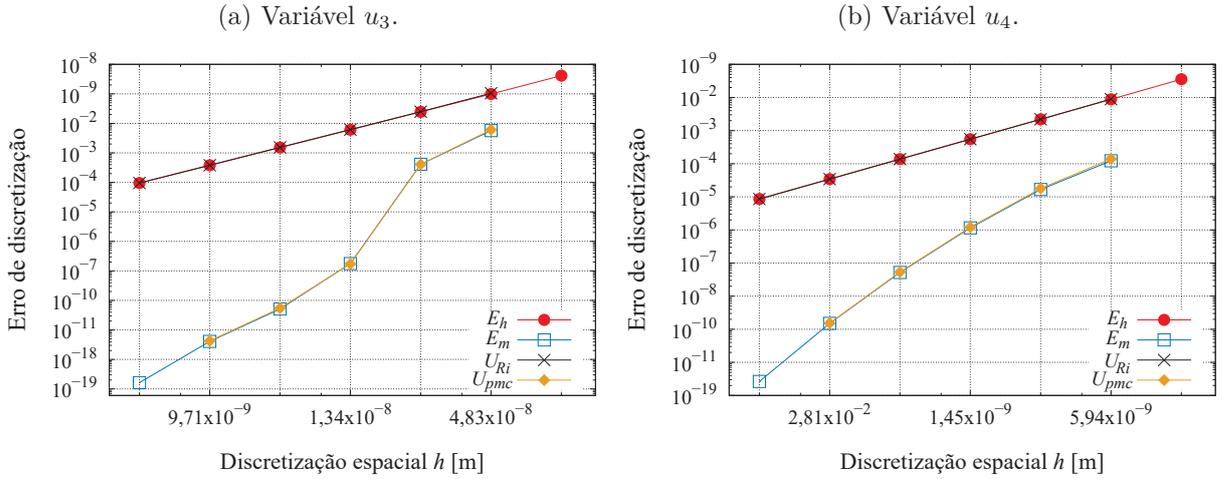
A seguir são apresentados os valores para a efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} , para as variáveis de interesse p_3 e p_4 . Verifica-se nas Tabelas 23 e 24, que os estimadores U_{pmc} e U_{ψ^*} se apresentaram mais acurados para estimar E_m , ou seja, o cálculo da efetividade resulta $\theta \approx 1$.

Tabela 23 – Efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} , para a variável p_3 .

h	U_Δ/E_m	U_{pm}/E_m	U_{pmc}/E_m	U_ψ/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$6,25 \times 10^{-2}$	$1,181 \times 10^2$	$9,775 \times 10^{-2}$	$7,820 \times 10^{-1}$	–	$7,859 \times 10^{-1}$
$3,12 \times 10^{-2}$	3,139	$6,760 \times 10^{-2}$	1,082	$1,791 \times 10^{-2}$	1,548
$1,56 \times 10^{-2}$	$1,243 \times 10^1$	$3,260 \times 10^{-2}$	1,043	-5,722	$9,671 \times 10^{-1}$
$7,81 \times 10^{-3}$	$2,342 \times 10^1$	$1,598 \times 10^{-2}$	1,023	1,763	$9,815 \times 10^{-1}$
$3,91 \times 10^{-3}$	$4,375 \times 10^1$	$7,889 \times 10^{-3}$	1,010	1,805	$9,874 \times 10^{-1}$
$1,95 \times 10^{-3}$	$1,021 \times 10^2$	–	–	2,287	$-1,194 \times 10^2$

Fonte: O autor (2023).

Figura 32 – Erro de discretização E_h , E_m e suas estimativas, para as variáveis u_3 e u_4 .



Fonte: O autor (2023).

Tabela 24 – Efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} , para a variável p_4 .

h	U_Δ/E_m	U_{pm}/E_m	U_{pmc}/E_m	U_ψ/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$6,25 \times 10^{-2}$	8,859	$1,364 \times 10^{-1}$	1,091	–	1,202
$3,12 \times 10^{-2}$	$1,048 \times 10^1$	$6,839 \times 10^{-2}$	1,094	-1,219	1,003
$1,56 \times 10^{-2}$	$1,088 \times 10^1$	$3,299 \times 10^{-2}$	1,056	$9,717 \times 10^{-1}$	$9,677 \times 10^{-1}$
$7,81 \times 10^{-3}$	$1,835 \times 10^1$	$1,613 \times 10^{-2}$	1,033	1,579	$9,792 \times 10^{-1}$
$3,91 \times 10^{-3}$	$3,117 \times 10^1$	$7,962 \times 10^{-3}$	1,019	1,637	$9,874 \times 10^{-1}$
$1,95 \times 10^{-3}$	$5,286 \times 10^1$	–	–	1,661	$-7,674 \times 10^1$

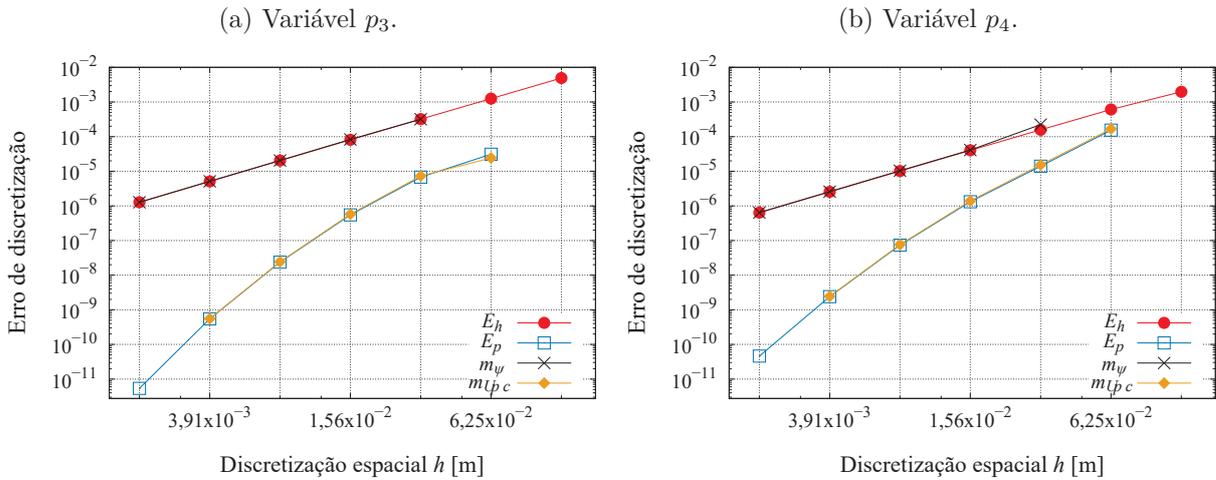
Fonte: O autor (2023).

Com relação à confiabilidade dos estimadores, os resultados são semelhantes aos obtidos para as variáveis u_3 e u_4 . O estimador que se apresenta mais confiável entre U_{pmc} e U_{ψ^*} , é o U_{pmc} dado que não se obteve $\theta \geq 1$ apenas na malha $h = 6,25 \times 10^{-2}$, para p_3 . Para p_4 , obteve-se $\theta \geq 1$ para todas as malhas consideradas.

As Figuras 33a e 33b representam os erros de discretização e suas estimativas, para as variáveis p_3 e p_4 , respectivamente.

Utilizou-se para a confecção dos gráficos os estimadores que apresentaram maiores níveis de confiabilidade e acurácia. Para os estimadores de E_m analisados nessa seção, conclui-se que o estimador U_Δ apresenta-se confiável para todas as malhas consideradas, porém pouco acurado. Os estimadores mais acurados para se estimar E_m são U_{pmc} e U_{ψ^*} e, entre estes estimadores o que apresenta maior confiabilidade é o U_{pmc} .

Figura 33 – Erro de discretização E_h , E_m e suas estimativas, para as variáveis p_3 e p_4 .



Fonte: O autor (2023).

6.2.2 Segundo problema poroelástico bidimensional

Os parâmetros de entrada para o segundo problema poroelástico são listados na Tabela 25.

Tabela 25 – Parâmetros de entrada para o segundo problema poroelástico 2D.

Símbolo	Quantidade	Valor	Unidade
Ω	domínio espacial	$(0,1) \times (0,1)$	m^2
T	tempo final	1,0	s
E	modulo de Young	$1,0 \times 10^4$	N/m^2
K	condutividade hidráulica	$1,0 \times 10^{-6}$	m/s
ν	razão de Poisson	$2,0 \times 10^{-1}$	—

Fonte: O autor (2023).

O valor para a condutividade hidráulica, $K = 1,0 \times 10^{-6}$ m/s, está relacionado com problemas físicos para solos tais como: areia siltosa, silte, loesse, marga, solonetz e turfa ou para rochas como: ígneas fraturadas, metamórficas e basalto permeável, (BEAR, 1972; FREEZE; CHERRY, 1979; KNAPPETT; CRAIG, 2019). Uma relação mais abrangente para valores típicos da condutividade hidráulica encontra-se no Apêndice A.

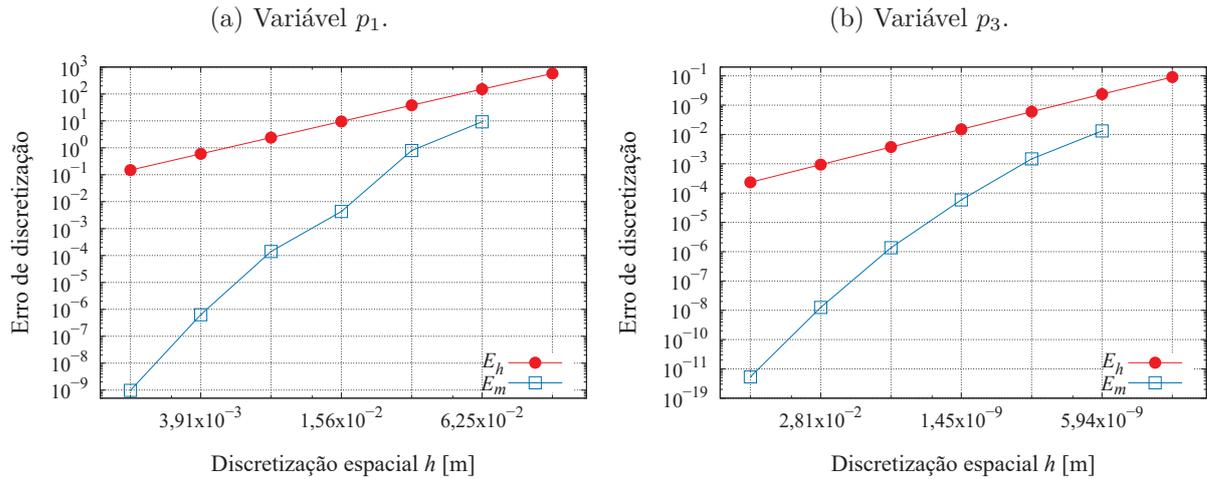
Nas seções subsequentes, são apresentados os resultados obtidos para E_h , E_m e suas estimativas, para as variáveis de interesse pressão e deslocamento.

6.2.2.1 Erro de discretização com e sem MER

Variável de interesse: pressão

As Figuras 34a e 34b apresentam o desempenho de MER sobre E_h , para as variáveis p_1 e p_3 , respectivamente. As variáveis p_2 , p_4 e p_5 não são apresentadas, visto que, possuem comportamentos numéricos semelhantes, $p_1 \cong p_5$ e $p_2 \cong p_3 \cong p_4$.

Figura 34 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis p_1 e p_3 .



Fonte: O autor (2023).

Observa-se na Figura 34 que o emprego de MER provocou uma redução significativa no erro de discretização. A Tabela 26, dimensiona essa redução mediante o cálculo da razão $|E_h|/|E_m|$.

Tabela 26 – Redução do erro em duas malhas distintas, para as variáveis p_1 e p_3 .

$N_x \times N_y$	variável p_1		variável p_3	
	129×129	513×513	129×129	513×513
m para E_m	4	6	4	6
$ E_h $	2,383	$1,489 \times 10^{-1}$	$3,733 \times 10^{-4}$	$2,333 \times 10^{-5}$
$ E_m $	$1,402 \times 10^{-4}$	$9,725 \times 10^{-10}$	$1,363 \times 10^{-7}$	$5,311 \times 10^{-12}$
$ E_h / E_m $	$1,701 \times 10^4$	$1,531 \times 10^8$	$2,738 \times 10^3$	$4,392 \times 10^6$

Fonte: O autor (2023).

Para a variável p_1 , verifica-se que para a malha $N_x \times N_y = 129 \times 129$, ao aplicar quatro níveis de MER, o erro se reduz em mais de 17 mil vezes e para a malha $N_x \times N_y = 513 \times 513$, ao utilizar seis níveis de MER, essa redução é de mais de $1,5 \times 10^8$ vezes.

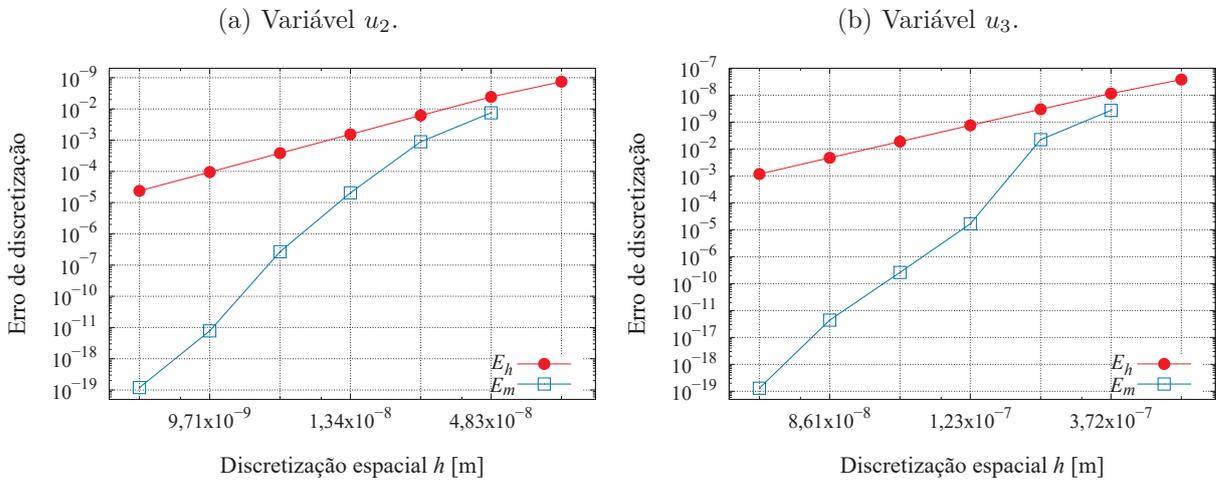
Para a variável p_3 , tem-se que essa redução foi mais de $2,7 \times 10^3$ e $4,3 \times 10^6$ vezes para as malhas $N_x \times N_y = 257 \times 257$ e $N_x \times N_y = 513 \times 513$, respectivamente.

Com isso, tem-se que a aplicação de MER para a variável de interesse pressão, se mostrou eficaz para a redução do erro de discretização. A seguir são apresentados os resultados obtidos para E_h e E_m para a variável de interesse deslocamento.

Variável de interesse: deslocamento

Na Figura 35, representa-se o desempenho de MER sobre E_h , para as variáveis u_2 e u_3 . As variáveis u_1 , u_4 e u_5 não são apresentadas, visto que, possuem comportamentos numéricos semelhantes, $u_1 \cong u_3 \cong u_5$ e $u_2 \cong u_4$. O mesmo ocorre para a variável v , isto é, $v \cong u$.

Figura 35 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis u_2 e u_3 .



Fonte: O autor (2023).

Observa-se nas Figuras 35a e 35b que o emprego de MER apresenta uma redução significativa do E_m em relação ao E_h . A Tabela 27 apresenta essa redução tomando a razão $|E_h|/|E_m|$. Como exemplo, para a variável u_3 tem-se que a redução do E_m em relação ao E_h é superior à $7,2 \times 10^4$ vezes, para a malha $N_x \times N_y = 257 \times 257$. Para a malha $N_x \times N_y = 513 \times 513$ essa redução foi superior à $9,0 \times 10^7$ vezes.

Tabela 27 – Redução do erro em duas malhas distintas, variáveis u_2 e u_3 .

$N_x \times N_y$	variável u_2		variável u_3	
	129×129	513×513	129×129	513×513
m para E_m	4	6	4	6
$ E_h $	$3,819 \times 10^{-6}$	$2,373 \times 10^{-7}$	$1,891 \times 10^{-5}$	$1,180 \times 10^{-6}$
$ E_m $	$2,685 \times 10^{-9}$	$1,190 \times 10^{-13}$	$2,593 \times 10^{-10}$	$1,307 \times 10^{-14}$
$ E_h / E_m $	$1,422 \times 10^3$	$1,993 \times 10^6$	$7,294 \times 10^4$	$9,033 \times 10^7$

Fonte: O autor (2023).

Ao se observar as Figuras 35a, 35b e a Tabela 27, percebe-se que a aplicação de MER se mostra como uma metodologia promissora para a redução de E_h na resolução numérica do problema em estudo. A seguir são apresentados os erro de discretização e suas estimativas.

6.2.2.2 Estimativas para o erro de discretização

Variável de interesse: deslocamento

Apresentam-se nas Tabelas 28 e 29 os valores da efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} para as variáveis u_2 e u_3 . Esses estimadores são utilizados para estimar o erro de discretização, após o emprego de MER.

Tabela 28 – Efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} , para a variável u_2 .

h	U_Δ/E_m	U_{pm}/E_m	U_{pmc}/E_m	U_ψ/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$6,25 \times 10^{-2}$	6,675	$1,398 \times 10^{-1}$	1,118	—	1,279
$3,12 \times 10^{-2}$	8,269	$6,395 \times 10^{-2}$	1,023	-1,358	$9,232 \times 10^{-1}$
$1,56 \times 10^{-2}$	$4,143 \times 10^1$	$3,166 \times 10^{-2}$	1,013	4,317	$9,903 \times 10^{-1}$
$7,81 \times 10^{-3}$	$7,530 \times 10^1$	$1,558 \times 10^{-2}$	$9,971 \times 10^{-1}$	1,742	$9,845 \times 10^{-1}$
$3,91 \times 10^{-3}$	$3,377 \times 10^2$	$7,932 \times 10^{-3}$	1,015	-4,345	1,018
$1,95 \times 10^{-3}$	$6,604 \times 10^1$	—	—	$-1,976 \times 10^{-1}$	$1,248 \times 10^1$

Fonte: O autor (2023).

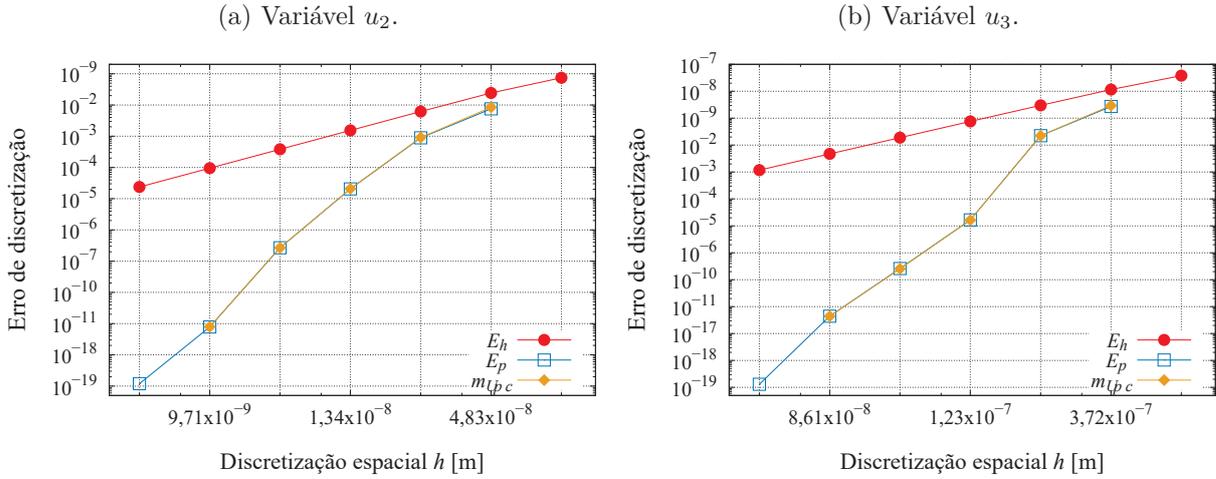
Tabela 29 – Efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} , para a variável u_3 .

h	U_Δ/E_m	U_{pm}/E_m	U_{pmc}/E_m	U_ψ/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$6,25 \times 10^{-2}$	9,742	$1,352 \times 10^{-1}$	1,082	—	1,180
$3,12 \times 10^{-2}$	$1,156 \times 10^1$	$6,255 \times 10^{-2}$	1,001	-1,200	$9,303 \times 10^{-1}$
$1,56 \times 10^{-2}$	$1,257 \times 10^3$	$3,076 \times 10^{-2}$	$9,845 \times 10^{-1}$	$9,448 \times 10^1$	$9,837 \times 10^{-1}$
$7,81 \times 10^{-3}$	$6,137 \times 10^1$	$1,536 \times 10^{-2}$	$9,830 \times 10^{-1}$	$-4,646 \times 10^{-2}$	$9,985 \times 10^{-1}$
$3,91 \times 10^{-3}$	$5,680 \times 10^1$	$7,789 \times 10^{-3}$	$9,970 \times 10^{-1}$	$9,094 \times 10^{-1}$	1,015
$1,95 \times 10^{-3}$	$3,344 \times 10^2$	—	—	5,926	$-3,303 \times 10^3$

Fonte: O autor (2023).

Observa-se nestas tabelas que os estimadores que se apresentaram mais acurados, $\theta \approx 1$, são U_{pmc} e U_{ψ^*} . Desses estimadores o que se apresenta mais confiável, $\theta \geq 1$, é o estimador U_{pmc} . Na Figura 36 apresenta-se graficamente E_m e sua estimativa. O estimador utilizado para a confecção dos gráficos é o que apresentou maior nível de confiabilidade e acurácia.

Figura 36 – Erro de discretização E_h , E_m e suas estimativas, variáveis u_2 e u_3 .



Fonte: O autor (2023).

Variável de interesse: pressão

Nas Tabelas 30 e 31 são apresentados os valores da efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} para as variáveis p_2 , p_3 . Constata-se que os estimadores mais acurados são U_{pmc} e U_{ψ^*} e, entre eles, o que se apresenta confiável, $\theta \geq 1$, é o estimador U_{pmc} .

Tabela 30 – Efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} , para a variável p_2 .

h	U_Δ/E_m	U_{pm}/E_m	U_{pmc}/E_m	U_ψ/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$6,25 \times 10^{-2}$	$5,054 \times 10^1$	$1,422 \times 10^{-1}$	1,138	—	1,157
$3,12 \times 10^{-2}$	7,230	$6,596 \times 10^{-2}$	1,055	$-1,419 \times 10^{-1}$	$9,358 \times 10^{-1}$
$1,56 \times 10^{-2}$	$1,789 \times 10^1$	$3,187 \times 10^{-2}$	1,020	2,161	$9,682 \times 10^{-1}$
$7,81 \times 10^{-3}$	$4,962 \times 10^1$	$1,572 \times 10^{-2}$	1,006	2,599	$9,864 \times 10^{-1}$
$3,91 \times 10^{-3}$	$1,716 \times 10^2$	$7,853 \times 10^{-3}$	1,005	3,357	$9,995 \times 10^{-1}$
$1,95 \times 10^{-3}$	$1,906 \times 10^2$	—	—	1,101	$-7,986 \times 10^1$

Fonte: O autor (2023).

Na Figura 37 apresenta-se graficamente E_m e sua estimativa. O estimador utilizado para a confecção dos gráficos é o que apresentou maior nível confiabilidade e acurácia.

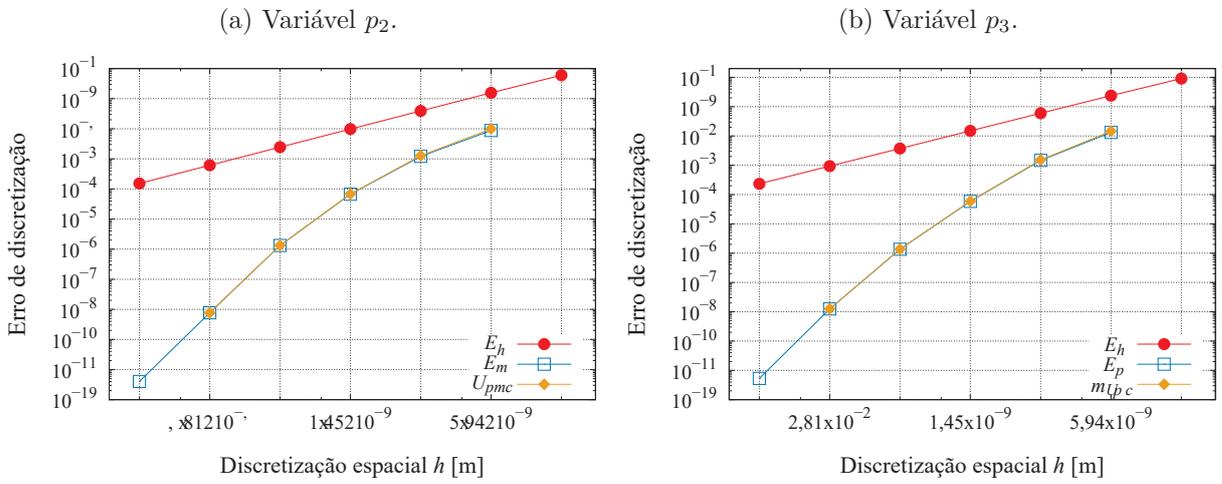
Nesta seção foram apresentados os resultados numéricos referentes à efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} , em relação às suas acurácias e confiabilidades. Com isso, concluí-se que: a) O estimador U_Δ se apresenta confiável para todos os casos analisados, porém, não se apresenta acurado, $\theta \gg 1$; b) Os estimadores U_{pm} e U_ψ , não se mostraram confiáveis e acurados nos casos analisados; c) Os estimadores mais acurados são U_{pmc} e U_{ψ^*} ; d) O estimador que apresentou maior confiabilidade é U_{pmc} .

Tabela 31 – Efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} , para a variável p_3 .

h	U_Δ/E_m	U_{pm}/E_m	U_{pmc}/E_m	U_ψ/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$6,25 \times 10^{-2}$	$5,105 \times 10^1$	$1,389 \times 10^{-1}$	1,111	–	1,130
$3,12 \times 10^{-2}$	8,733	$6,499 \times 10^{-2}$	1,040	$-1,657 \times 10^{-1}$	$9,417 \times 10^{-1}$
$1,56 \times 10^{-2}$	$2,449 \times 10^1$	$3,198 \times 10^{-2}$	1,023	2,465	$9,847 \times 10^{-1}$
$7,81 \times 10^{-3}$	$4,252 \times 10^1$	$1,577 \times 10^{-2}$	1,009	1,655	$9,865 \times 10^{-1}$
$3,91 \times 10^{-3}$	$1,085 \times 10^2$	$7,846 \times 10^{-3}$	1,004	2,478	$9,952 \times 10^{-1}$
$1,95 \times 10^{-3}$	$2,341 \times 10^2$	–	–	2,130	$-1,548 \times 10^2$

Fonte: O autor (2023).

Figura 37 – Erro de discretização E_h , E_m e suas estimativas, variáveis p_2 e p_3 .



Fonte: O autor (2023).

6.2.2.3 Variáveis com ponto extremo

Para as variáveis com ponto extremo, têm-se como representantes os valores máximos para os deslocamentos (u_{max} , v_{max}) e para a pressão (p_{max}). As soluções para $\phi = u_{max}$, $\phi = v_{max}$ e $\phi = p_{max}$ foram obtidas utilizando os mesmos parâmetros de entrada apresentados na Tabela 16.

Daqui em diante, uma mudança na solução fabricada anteriormente (equação (4.11)) fez-se necessária. Essa mudança justifica-se ao calcular o valor máximo para os deslocamentos (u_{max} e v_{max}) e para a pressão (p_{max}), utilizando tal equação. Para ambos os casos, tem-se que as coordenadas desses pontos são $x = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{1}{2}$. Com isso, o problema recai no caso anterior, onde as variáveis de interesse são do tipo 1 (apresentam mesma localização nodal, com o refino de malhas).

Utiliza-se então, outra solução fabricada dada por

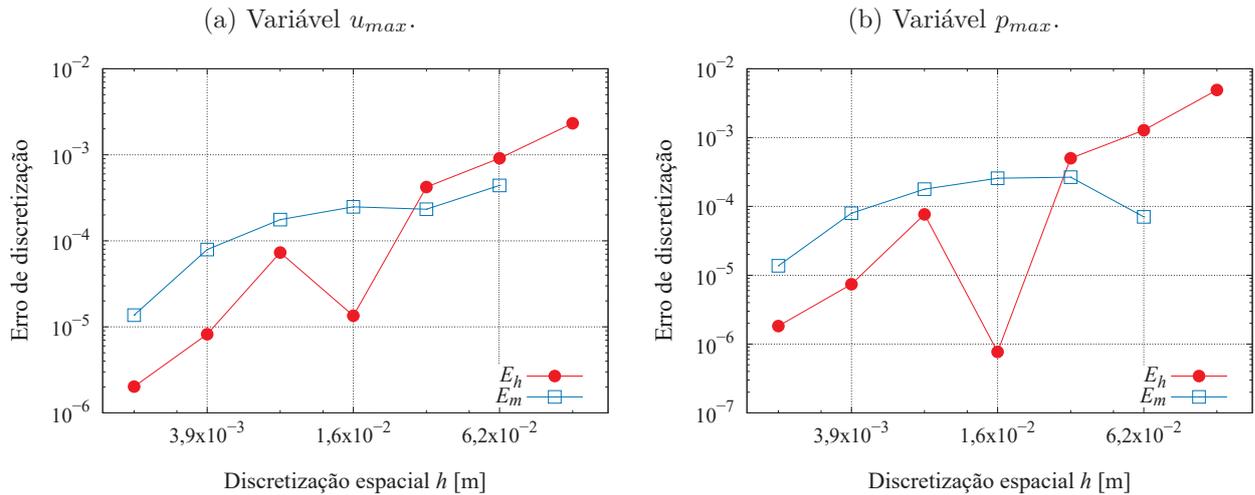
$$u(x,y,t) = v(x,y,t) = p(x,y,t) = \text{sen}(\pi x^2) \text{sen}(\pi y^2) e^{-t}. \tag{6.1}$$

Ao se calcular u_{max} , v_{max} e p_{max} , utilizando a equação (6.1), tem-se que suas

coordenadas são $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, ou seja, não coincidem com as coordenadas dos pontos nodais obtidos com a discretização do domínio Ω^h .

Com as ϕ nodais calculadas, aplica-se MER. Nota-se que a aplicação direta de MER para esse tipo de variável não apresenta redução significativa de E_m em relação a E_h (Figura 38).

Figura 38 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis u_{max} e p_{max} .



FONTE: O autor (2023).

Na Tabela 32 são apresentados os valores de p_E e p_U para as variáveis u_{max} e p_{max} sem a aplicação de interpolação polinomial.

Tabela 32 – Ordens efetiva p_E e aparente p_U para as variáveis u_{max} e p_{max} , sem interpolação polinomial.

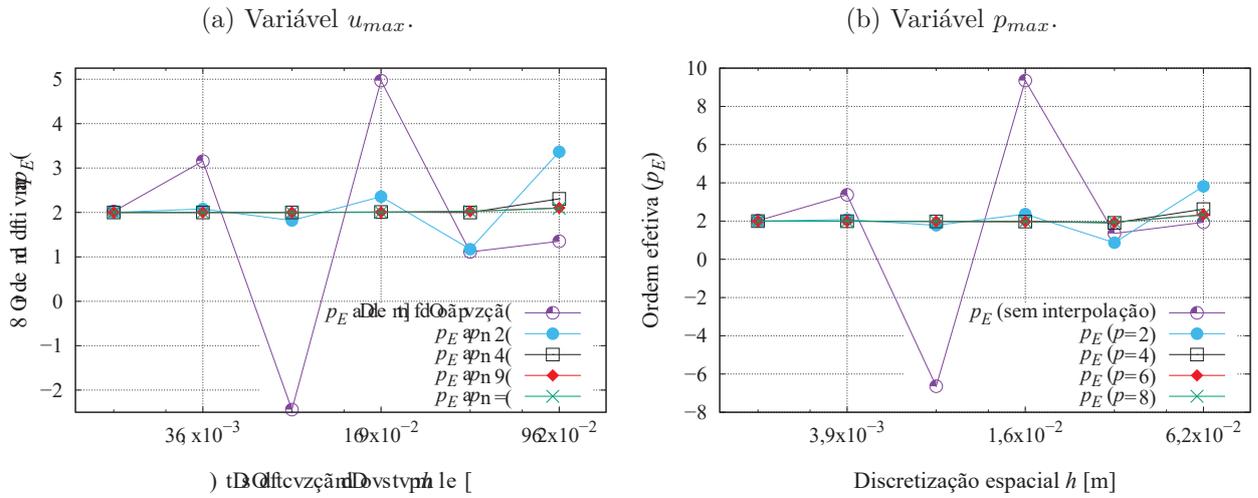
h	variável u_{max}		variável p_{max}	
	p_E	p_U	p_E	p_U
$6,25 \times 10^{-2}$	1,3506374	—	1,9391298	—
$3,12 \times 10^{-2}$	1,1105419	1,5298274	1,3535374	2,2194888
$1,56 \times 10^{-2}$	4,9688677	$1,6786605 \times 10^{-1}$	9,3492440	$6,3948013 \times 10^{-1}$
$7,81 \times 10^{-3}$	-2,4408175	2,3295101	-6,6397309	2,7218407
$3,90 \times 10^{-3}$	3,1557683	$9,0462448 \times 10^{-2}$	3,3718317	$-1,4757878 \times 10^{-1}$
$1,95 \times 10^{-3}$	2,0221156	3,7169336	2,0207854	3,9130442

Fonte: O autor (2023).

Busca-se, então, melhorar o desempenho de MER com o procedimento descrito na seção 5.2, isto é, aplica-se interpolação polinomial e um método de otimização (Gradiente) previamente ao emprego de MER (Algoritmo 4). Na Figura 39 são apresenta-se os valores de p_E para u_{max} e p_{max} , sem e com aplicação de interpolação polinomial.

Como já mencionado, para que o emprego de MER seja realizado sem que haja prejuízo em seu desempenho, é desejável que p_E apresente um comportamento convergente

Figura 39 – Ordem efetiva p_E , para as variáveis u_{max} e p_{max} com e sem interpolação polinomial.

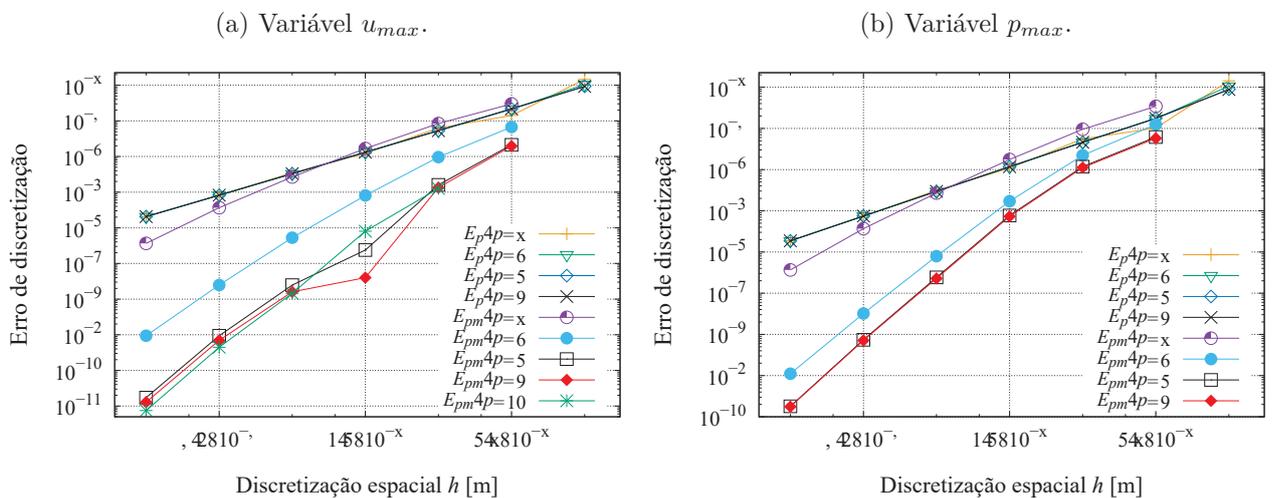


FONTE: O autor (2023).

e monotônico com a redução de h . Observa-se na Figura 39, que após a aplicação de interpolação polinomial esse comportamento desejável ocorre.

Na Figura 40, representa-se o desempenho de MER sobre E_h , para as variáveis u_{max} e p_{max} , após a aplicação de interpolação polinomial seguida de um método de otimização.

Figura 40 – Erro de discretização para interpolação polinomial sem MER (E_p) e com MER (E_{pm}).



FONTE: O autor (2023).

Na Figura 20, para o caso unidimensional, verificou-se que a magnitude de E_{pm} foi reduzida com a elevação de p , porém, isso só era efetivo até o limite de $p = 6$, com resultados equivalentes para valores de $p > 6$. Ao observar a Figura 40, tem-se que os resultados são similares para o caso bidimensional.

Estimativas para o erro de discretização

Para se estimar os erros de discretização utilizou-se os estimadores U_{Δ} , U_{pm} , U_{pmc} , U_{ψ} e U_{ψ^*} . Nas Tabelas 33 e 34, respectivamente para u_{max} e p_{max} , apresentam-se as efetividades destes estimadores.

Tabela 33 – Efetividade dos estimadores U_{Δ} , U_{pm} , U_{pmc} , U_{ψ} e U_{ψ^*} , para a variável u_{max} ($p = 6$).

h	U_{Δ}/E_m	U_{pm}/E_m	U_{pmc}/E_m	U_{ψ}/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$6,25 \times 10^{-2}$	$3,357 \times 10^1$	$1,344 \times 10^{-1}$	1,075	–	1,050
$3,12 \times 10^{-2}$	$1,252 \times 10^1$	$6,343 \times 10^{-2}$	1,015	$3,356 \times 10^{-1}$	$9,477 \times 10^{-1}$
$1,56 \times 10^{-2}$	$6,382 \times 10^1$	$3,449 \times 10^{-2}$	1,104	4,510	1,086
$7,81 \times 10^{-3}$	$1,030 \times 10^1$	$1,622 \times 10^{-2}$	1,038	$1,697 \times 10^{-1}$	$9,457 \times 10^{-1}$
$3,91 \times 10^{-3}$	$2,693 \times 10^1$	$7,957 \times 10^{-3}$	1,018	2,433	$9,819 \times 10^{-1}$
$1,95 \times 10^{-3}$	$5,476 \times 10^1$	–	–	1,981	$-3,404 \times 10^1$

Fonte: O autor (2023).

Tabela 34 – Efetividade dos estimadores U_{Δ} , U_{pm} , U_{pmc} , U_{ψ} e U_{ψ^*} , para a variável p_{max} ($p = 6$).

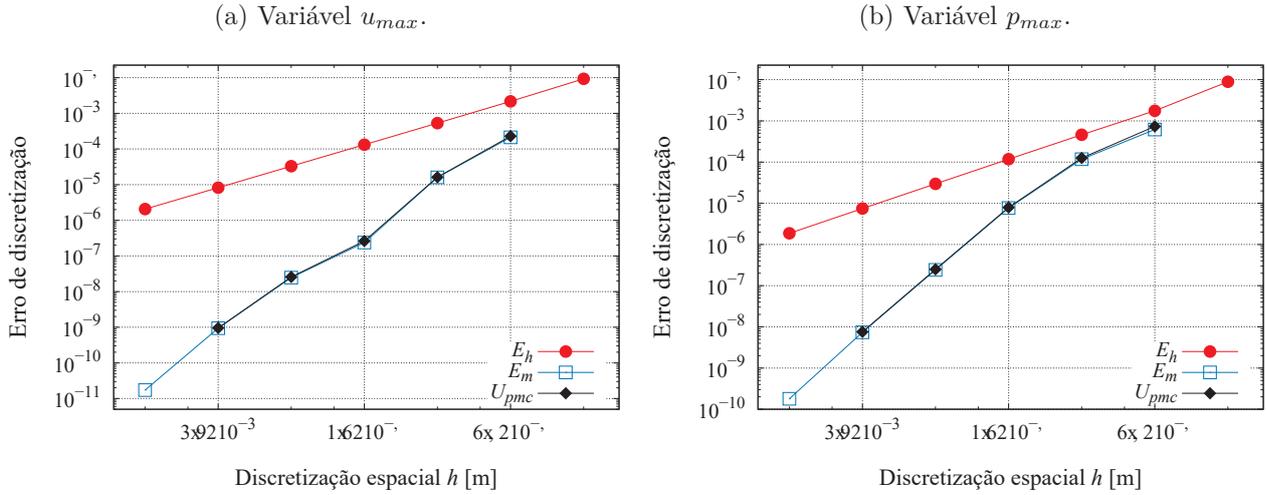
h	U_{Δ}/E_m	U_{pm}/E_m	U_{pmc}/E_m	U_{ψ}/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$6,25 \times 10^{-2}$	$1,156 \times 10^1$	$1,489 \times 10^{-1}$	1,191	–	1,105
$3,12 \times 10^{-2}$	5,459	$6,658 \times 10^{-2}$	1,065	$4,476 \times 10^{-1}$	$9,099 \times 10^{-1}$
$1,56 \times 10^{-2}$	$1,531 \times 10^1$	$3,223 \times 10^{-2}$	1,031	2,381	$9,701 \times 10^{-1}$
$7,81 \times 10^{-3}$	$3,183 \times 10^1$	$1,610 \times 10^{-2}$	1,031	1,952	$9,992 \times 10^{-1}$
$3,91 \times 10^{-3}$	$3,316 \times 10^1$	$8,002 \times 10^{-3}$	1,024	1,025	$9,941 \times 10^{-1}$
$1,95 \times 10^{-3}$	$4,180 \times 10^1$	–	–	1,243	$-1,328 \times 10^3$

Fonte: O autor (2023).

Os estimadores que se apresentaram mais acurados ($\theta \approx 1$), são U_{pmc} e U_{ψ^*} , porém o único que se apresenta confiável ($\theta \geq 1$), é o estimador U_{pmc} .

Na Figura 41 apresenta-se graficamente E_m e sua estimativa. O estimador utilizado para a confecção dos gráficos é o que apresentou maior nível de confiabilidade e acurácia (Tabelas 33 e 34).

Figura 41 – Erro de discretização para interpolação polinomial sem MER (E_p) e com MER (E_{pm}).



FONTE: O autor (2023).

6.2.3 Terceiro problema poroelástico bidimensional

Os parâmetros de entrada para o terceiro problema poroelástico bidimensional são listados na Tabela 35.

Tabela 35 – Parâmetros de entrada para o terceiro problema poroelástico 2D.

Símbolo	Quantidade	Valor	Unidade
Ω	domínio espacial	$(0,1) \times (0,1)$	m^2
T	tempo final	1,0	s
E	modulo de Young	$1,0 \times 10^2$	N/m^2
K	condutividade hidráulica	$1,0 \times 10^{-2}$	m/s
ν	razão de Poisson	$2,0 \times 10^{-1}$	—

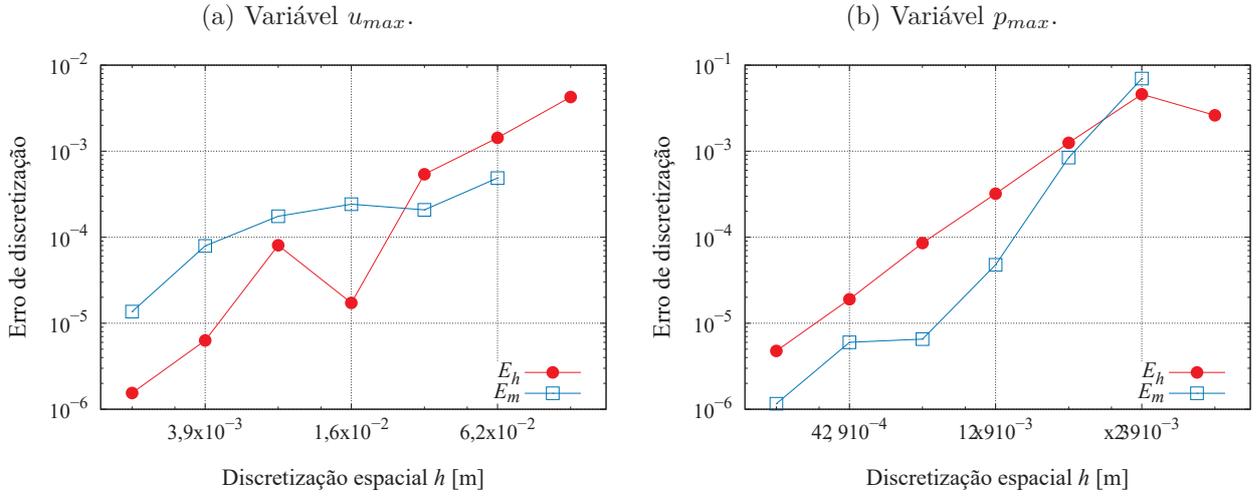
Fonte: O autor (2023).

O valor para a condutividade hidráulica $K = 1,0 \times 10^{-2}$ m/s, está relacionado com problemas físicos para solos como: cascalho limpo, misturas de areia e cascalho ou para rochas de calcário cárstico ou basalto permeável (BEAR, 1972; FREEZE; CHERRY, 1979; KNAPPETT; CRAIG, 2019).

Na Figura 42 ilustra-se o desempenho do emprego direto de MER sobre E_h , para as variáveis u_{max} e p_{max} . Como já discutido anteriormente, verifica-se que a aplicação direta de MER não ocasiona uma redução significativa de E_m com relação a E_h .

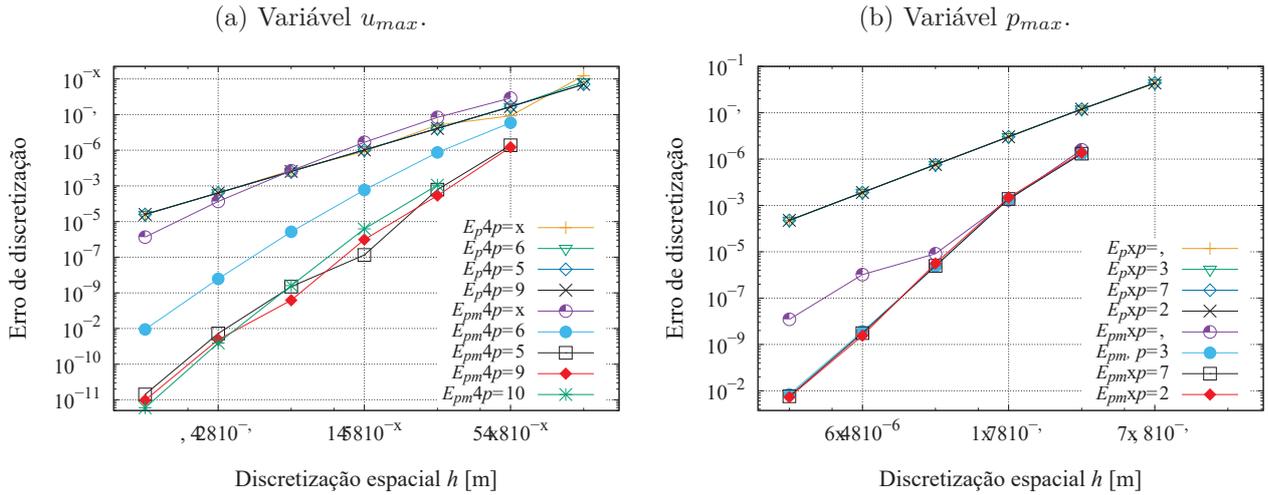
Para melhorar o desempenho de MER, aplica-se o procedimento descrito na Seção 5.2, ou seja, utiliza-se interpolação polinomial seguida de um método de otimização (Algoritmo 4). Representa-se nas Figuras 43a e 43b o desempenho de MER sobre E_p , após utilizar interpolação polinomial seguida de um método de otimização, respectivamente para as variáveis u_{max} e p_{max} .

Figura 42 – Desempenho de MER sobre E_h , para variáveis u_{max} e p_{max} .



FONTE: O autor (2023).

Figura 43 – Erro de discretização para interpolação polinomial sem MER (E_p) e com MER (E_{pm}).



FONTE: O autor (2023).

Ao se comparar a Figura 42 com a Figura 43, verifica-se que a aplicação da interpolação polinomial seguida de um método de otimização faz com que MER apresente melhores resultados, reduzindo E_{pm} com o aumento de p . Como dito anteriormente, essa melhora no desempenho é efetiva até o limite de $p = 6$, para valores de $p > 6$ os resultados são semelhantes.

Estimativas para o erro de discretização

Para se estimar os erros de discretização, utilizou-se os estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} . Nas Tabelas 36 e 37 apresentam-se os valores para as efetividades desses estimadores. Os estimadores mais acurados são U_{pmc} e U_{ψ^*} , um seja, os valores para $\theta \approx 1$.

Tabela 36 – Efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} , para a variável u_{max} ($p = 6$).

h	U_Δ/E_m	U_{pm}/E_m	U_{pmc}/E_m	U_ψ/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$6,25 \times 10^{-2}$	$3,933 \times 10^1$	$1,321 \times 10^{-1}$	1,057	–	1,036
$3,12 \times 10^{-2}$	$1,627 \times 10^1$	$6,158 \times 10^{-2}$	$9,852 \times 10^{-1}$	$3,674 \times 10^{-1}$	$9,357 \times 10^{-1}$
$1,56 \times 10^{-2}$	$6,261 \times 10^1$	$2,723 \times 10^{-2}$	$8,713 \times 10^{-1}$	–3,360	$8,828 \times 10^{-1}$
$7,81 \times 10^{-3}$	6,558	$1,639 \times 10^{-2}$	1,049	$8,949 \times 10^{-2}$	1,241
$3,91 \times 10^{-3}$	$2,120 \times 10^1$	$7,965 \times 10^{-3}$	1,019	–3,948	$9,734 \times 10^{-1}$
$1,95 \times 10^{-3}$	$5,191 \times 10^1$	–	–	2,365	$1,225 \times 10^1$

Fonte: O autor (2023).

Tabela 37 – Efetividade dos estimadores U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} , para a variável p_{max} ($p = 6$).

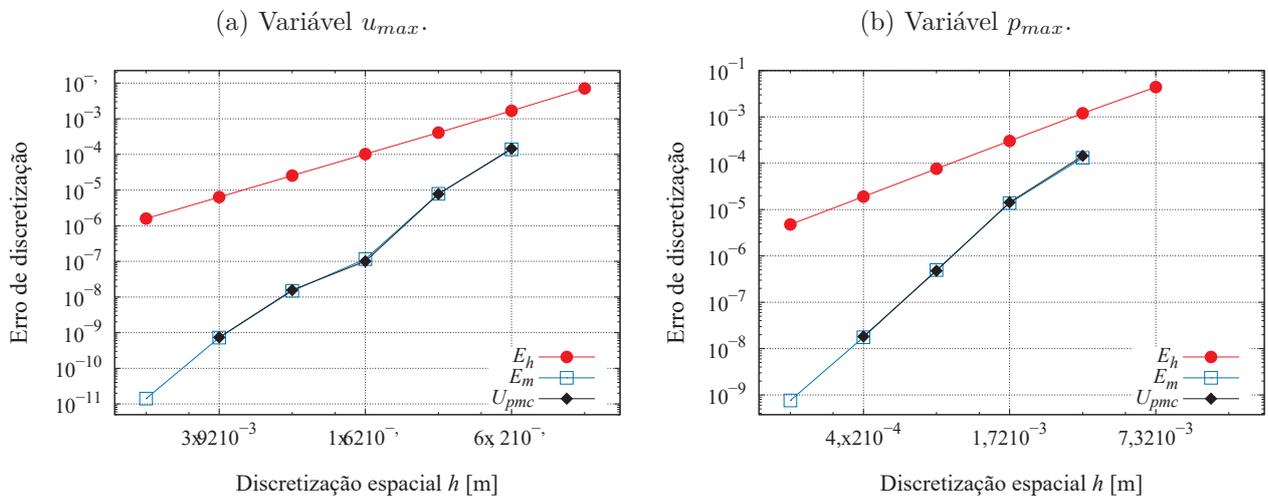
h	U_Δ/E_m	U_{pm}/E_m	U_{pmc}/E_m	U_ψ/E_m	U_{ψ^*}/E_m
$3,12 \times 10^{-2}$	$2,455 \times 10^1$	$1,382 \times 10^{-1}$	1,106	–	1,144
$1,56 \times 10^{-2}$	9,161	$6,475 \times 10^{-2}$	1,036	$-3,660 \times 10^{-1}$	$9,427 \times 10^{-1}$
$7,81 \times 10^{-3}$	$2,700 \times 10^1$	$3,015 \times 10^{-2}$	$9,646 \times 10^{-1}$	2,593	$9,334 \times 10^{-1}$
$3,91 \times 10^{-3}$	$2,643 \times 10^1$	$1,630 \times 10^{-2}$	1,043	$-8,843 \times 10^{-1}$	1,085
$1,95 \times 10^{-3}$	$2,367 \times 10^1$	–	–	$-9,562 \times 10^{-1}$	$1,282 \times 10^1$

Fonte: O autor (2023).

Com relação a confiabilidade, levando em consideração os estimadores com maior nível de acurácia, (U_{pmc} e U_{ψ^*}), para a variável u_{max} tem-se que ambos os estimadores apresentam-se confiáveis para as malhas $h = 6,25 \times 10^{-2}$ e $h = 7,81 \times 10^{-3}$. Para a variável p_{max} , garante-se a confiabilidade para as malhas $h = 3,12 \times 10^{-2}$ e $h = 3,91 \times 10^{-3}$ com o estimador U_{ψ^*} , e não se garante para a malha $h = 7,81 \times 10^{-3}$, com o estimador U_{pmc} .

Na Figura 44 apresenta-se graficamente E_m e sua estimativa.

Figura 44 – Erro de discretização para interpolação polinomial sem MER (E_p) e com MER (E_{pm}).



FONTE: O autor (2023).

Nesta Seção 6.2.3, foram apresentados os resultados obtidos com a aplicação de MER, para variáveis com ponto extremo, que apresentam mudança de coordenadas nodais com o refino da malha, para o problema de poroelasticidade bidimensional.

Constatou-se que a aplicação direta de MER ocasionou resultados não exitosos em relação à redução de E_h . Utilizou-se, então, interpolação polinomial seguida da aplicação de um método de otimização previamente ao emprego de MER. Essa metodologia apresentou-se eficaz para a redução do erro de discretização, apresentando resultados promissores. No que se refere às estimativas para o erro de discretização, considerando soluções obtidas com o emprego de MER, com os testes analisados, indica-se U_{pmc} , o qual destacou-se dos demais pela sua acurácia e confiabilidade.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo apresenta-se um resumo das principais constatações e contribuições desta tese. Ao final, sugestões de temas para trabalhos futuros são propostas, a fim de complementar as limitações do estudo ora exposto.

7.1 Escopo do trabalho

Neste trabalho foi realizada a verificação numérica de soluções resultantes do emprego de MER no problema da consolidação de Biot para um meio poroso saturado, homogêneo, isotrópico e incompressível (problema de poroelasticidade) para os casos uni e bidimensional.

Diferentes valores para módulo de Young (E) e condutividade hidráulica (K) foram utilizados, sendo $E = 1,0 \text{ N/m}^2$ e $K = 1,0 \text{ m/s}$ considerado como um problema acadêmico, a fim de avaliar a eficácia da metodologia adotada, possibilitando o refinamento em diversos níveis de malha, porém, sem levar em consideração seus valores físicos realísticos. Outros valores para E e K foram $E = 10^2 \text{ N/m}^2$ e $K = 10^{-2} \text{ m/s}$ relacionado com valores típicos para a condutividade hidráulica para solos como: cascalho limpo, misturas de areia e cascalho ou para rochas de calcário cárstico ou basalto permeável, e $E = 10^4 \text{ N/m}^2$ e $K = 10^{-6} \text{ m/s}$ relacionado com valores típicos para a condutividade hidráulica para solos tais como: areia siltosa, silte, loesse, marga, solonetz e turfa ou para rochas como: ígneas fraturadas, metamórficas e basalto permeável.

O trabalho teve como objetivo reduzir e estimar E_h . O desempenho de alguns estimadores disponíveis na literatura foram utilizados como alternativas para a obtenção de estimativas para os erros de discretização após o emprego de MER. Os estimadores utilizados foram U_Δ , U_{pm} , U_{pmc} , U_ψ e U_{ψ^*} .

O problema foi discretizado utilizando o método de diferenças finitas (discretização espacial) e o método de Crank-Nicolson (discretização temporal). Para calcular as soluções numéricas utilizou-se o método *multigrid* no intuito de acelerar a convergência do processo iterativo (esquema CS, ciclo W(1,1), razão de engrossamento padrão, operador de restrição por ponderação completa e operador de prolongação por interpolação linear (caso 1D) e bilinear (caso 2D)), suavizador Vanka, precisão quádrupla e critério de parada até atingir o erro de máquina.

7.2 Conclusão geral

Avaliou-se a eficácia de MER a fim de se reduzir e estimar o E_h resultante de soluções numéricas do problema de poroelasticidade uni e bidimensional para dois tipos de variáveis: 1) variáveis locais (variáveis com coordenada nodal fixa com o refino de malha); e 2) variáveis com mudança na coordenada nodal com o refino de malha, visando reduzir

o erro de discretização e aumentar a precisão da solução numérica. A partir dos testes realizados, conclui-se que:

- o uso de MER mostrou-se promissor na elevação do nível de acurácia das soluções numéricas para problemas de poroelasticidade;
- para o primeiro tipo de variável estudado, variáveis com localização nodal fixa, o emprego direto de MER é recomendado, ou seja, ocorreu uma redução significativa de E_h ;
- para o segundo tipo de variável estudado, variáveis com localização nodal previamente indeterminada, o emprego direto de MER não é recomendado. Recomenda-se o emprego prévio de interpolação polinomial seguido de um método de otimização, para então se aplicar MER.
- a aplicação prévia de interpolação polinomial para variáveis com valores extremos seguida do uso de um método de otimização resultou em uma redução considerável de E_h ;
- com relação à ordem de acurácia do erro de discretização, MER proporcionou uma elevação progressiva e significativa.
- no que diz respeito às estimativas para o erro de discretização, considerando as soluções obtidas com a aplicação de MER, o estimador de Richardson Corrigido (U_{pmc}) é recomendado por fornecer melhor precisão e confiabilidade do que os outros analisados neste trabalho.

7.3 Principais contribuições

Mediante os resultados obtidos, considera-se que o objetivo geral da tese foi alcançado. Com isso, as contribuições podem ser sumarizadas como:

- desenvolvimento de verificação numérica no problema de poroelasticidade uni e bidimensional;
- estabelecimento de MER como uma alternativa para a redução do erro de discretização no problema de poroelasticidade uni e bidimensional;
- investigação sobre o comportamento de MER para diferentes casos, obtidos a partir da variação do módulo de Young (E) e condutividade hidráulica (K);
- análise sobre a realização de procedimentos numéricos prévios ao emprego de MER, para variáveis que apresentam mudanças de coordenadas nodais com o refino de malha;

- estudo sobre estimadores para o erro de discretização resultante da aplicação de MER no problema de poroelasticidade uni e bidimensional.

7.4 Propostas de trabalhos futuros

Com a finalidade de complementar e expandir os estudos deste trabalho, os seguintes temas são sugeridos:

- realização de verificação das soluções numéricas do problema de poroelasticidade tridimensional mediante o emprego de MER;
- verificação das soluções numéricas mediante o emprego de MER, porém, para escoamento multifásico;
- resolver o problema de poroelasticidade por meio do método de volumes finitos, empregar MER para redução e estimativa de E_h e comparar os resultados com os obtidos neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- ABDELMIGID, T. A. *et al.* Revisiting the lid-driven cavity flow problem: Review and new steady state benchmarking results using gpu accelerated code. *Alexandria Engineering Journal*, v. 56, n. 1, p. 123 – 135, 2017. Citado na página 19.
- ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra Linear com Aplicações*. 10ed. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. Citado na página 44.
- BAZARAA, M. S.; SHERALI, H. D.; SHETTY, C. M. *Nonlinear programming: theory and algorithms*. 3rd. ed. New York: Wiley & Sons, 2006. Citado na página 45.
- BEAR, J. *Dynamics of Fluids in Porous Media*. New York, NY, USA: Dover Publications, 1972. Citado 4 vezes nas páginas 73, 86, 95 e 108.
- BIOT, M. A. General theory of three dimensional consolidation. *Journal of Applied Physics*, v. 12, n. 2, p. 155–164, 1941. Citado 5 vezes nas páginas 15, 22, 23, 26 e 29.
- BRIGGS, W. L.; HENSON, V. E.; MCCORMICK, S. F. *A Multigrid Tutorial*. 2nd. ed. Philadelphia: SIAM, 2000. Citado 3 vezes nas páginas 57, 58 e 59.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. 10th. ed. Boston: Cengage Learning, 2016. Citado 5 vezes nas páginas 33, 35, 40, 44 e 45.
- CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. *Introduction to Computing for Engineers*. 2nd. ed. New York: McGraw-Hill College, 1994. Citado na página 38.
- CHENG, A. H. D. *Theory and Applications of Transport in Porous Media*. Switzerland: Springer, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 24 e 29.
- DAHLQUIST, G.; BJORCK, A. *Numerical methods in scientific computing*. Philadelphia: SIAM, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 15, 33 e 45.
- DAS, B. M.; KHALED, S. *Fundamentos de engenharia geotécnica*. São Paulo: Cengage, 2019. Citado na página 22.
- EHLERS W. ANDA BLUHM, J. *Porous Media: Theory, Experiments and Numerical Applications*. Berlin, Germany: Springer, 2002. Citado na página 15.
- ERTUK, E.; CORKE, T. C.; GOKÇOL, C. Numerical solutions of 2-d steady incompressible driven cavity flow at high reynolds numbers. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 48, p. 747–774, 2005. Citado na página 18.
- FEDORENKO, R. P. On the speed of convergence of an iteration process. *USSR Comput. Math. and Math. Phys.*, n. 4, p. 227, 1964. Citado na página 56.
- FERZIGER, J. H.; PERIĆ, M. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. 3rd. ed. New York: Springer, 2002. Citado 5 vezes nas páginas 30, 33, 35, 36 e 37.
- FOLTRAN, A. C.; MARCHI, C. H.; MOURA, L. M. Verification of numerical solutions of thermal radiation problems in participating and nonparticipating media. *Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals*, p. 1–23, 2023. Citado na página 20.

- FORTUNA, A. O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: conceitos básicos e aplicações*. 2nd. ed. São Paulo: Edusp, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 30, 31, 33 e 35.
- FRANCO, S. R. *Métodos multigrid espaço-tempo para resolver as equações do calor e da poroelasticidade*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017. Citado 7 vezes nas páginas 15, 30, 35, 47, 49, 58 e 60.
- FRANCO, S. R. *et al.* A multigrid waveform relaxation method for solving the poroelasticity equations. *Comp. Appl. Math*, v. 37, p. 4805–4820, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 15, 30, 47 e 60.
- FREEZE, R. A.; CHERRY, J. A. *Groundwater*. London: Prentice-Hall. Inc., 1979. Citado 4 vezes nas páginas 73, 86, 95 e 107.
- GANAT, T. A. O. *Fundamentals of Reservoir Rock Properties*. Switzerland: Springer, 2020. Citado na página 22.
- GASPAR, F. *et al.* A systematic comparison of coupled and distributive smoothing in multigrid for the poroelasticity system. *Numerical Linear Algebra with Applications*, v. 11, n. 28, p. 93–113, 2004. Citado na página 60.
- GASPAR, F. J. *et al.* An efficient multigrid solver for a reformulated version of the poroelasticity system. *Computer Methods Applied Mechanics Engineering*, v. 196, p. 1447–1457, 2007. Citado na página 49.
- GASPAR, F. J.; LISBONA, F. J.; VABISHCHEVICH, P. N. A finite difference analysis of Biot’s consolidation model. *Applied Numerical Mathematics*, v. 44, p. 487–506, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 47.
- GASPAR, F. J.; LISBONA, F. J.; VABISHCHEVICH, P. N. Staggered grid discretizations for the quasi-static Biot’s consolidation problem. *Applied Numerical Mathematics*, v. 56, p. 888–898, 2006. Citado na página 47.
- GASPAR, F. J.; RODRIGO, C. Local fourier analysis of vanka smoother based multigrid for staggered discretization of biot’s consolidation problem. *Australian Journal of Basic and Applied Sciences*, v. 9, n. 28, p. 18–25, 2015. Citado na página 60.
- GOLUB, G. H.; ORTEGA, J. M. *Scientific Computing and Differential Equations: An Introduction to Numerical Methods*. San Diego: Academic Press, 1992. Citado na página 30.
- GUO, J. H.; CHANG, L. F. Repeated richardson extrapolation and static hedging of barrier options under the cev model. *Journal of Futures Markets*, v. 40, n. 6, p. 974–988, 2020. Citado na página 19.
- HUBBERT, M. K. Darcy’s law and the field equations of the flow of underground fluids. *International Association of Scientific Hydrology. Bulletin*, v. 2, p. 23–59, 1957. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.
- HUGHES, T. J. R. *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Mineola (USA): Dover Publications, 2000. Citado na página 30.
- KNAPPETT, J. A.; CRAIG, R. F. *Craig’s Soil Mechanics*. 9th. ed. London: CRC Press, 2019. Citado 3 vezes nas páginas 73, 86 e 95.

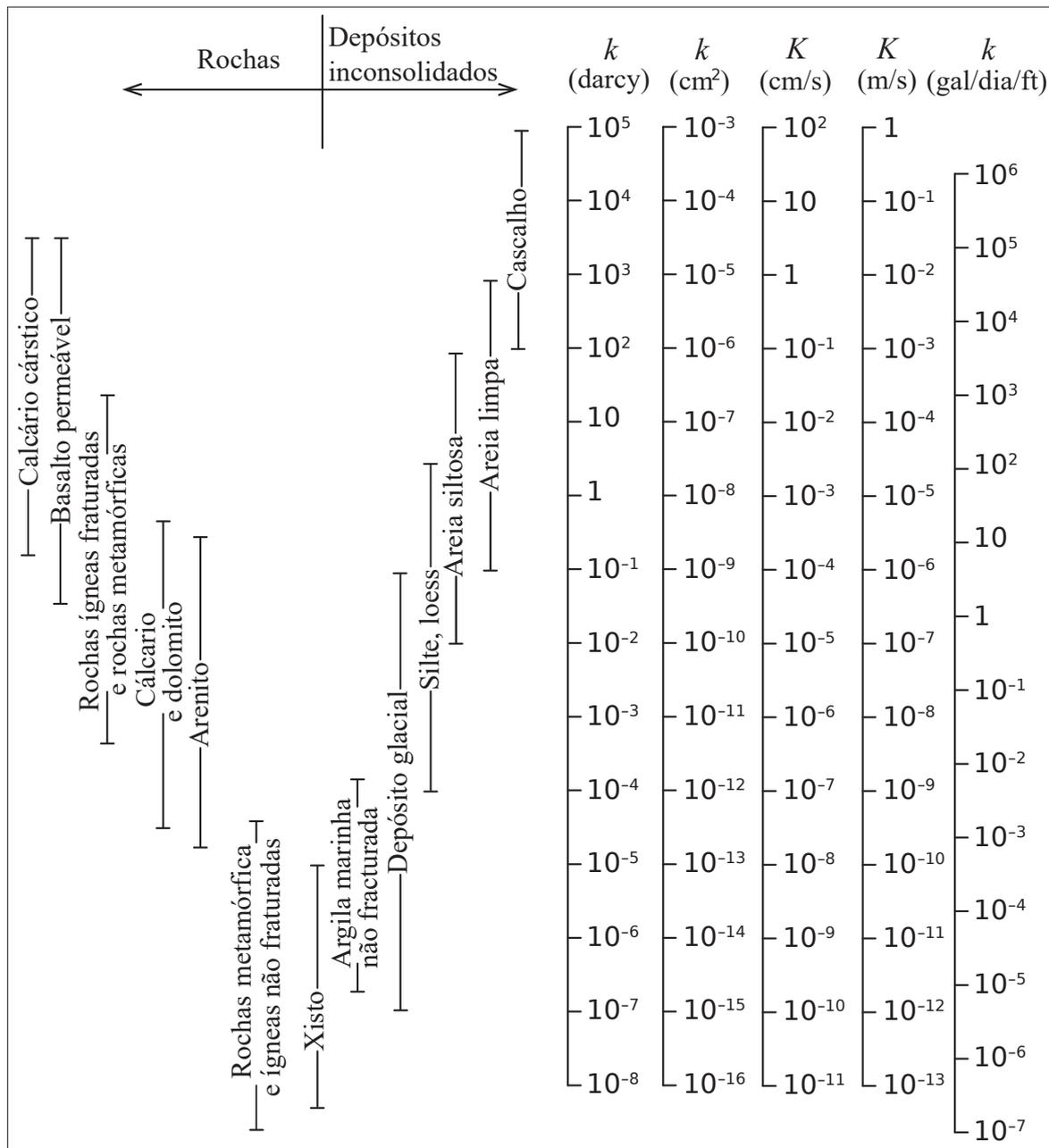
- MALISKA, C. R. *Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacionais*. 2nd. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2004. Citado 3 vezes nas páginas 30, 33 e 34.
- MARCHI, C. H. *Verificação de soluções numéricas unidimensionais em dinâmica dos fluidos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 36, 38 e 39.
- MARCHI, C. H. *et al.* Repeated richardson extrapolation applied to the two-dimensional laplace equation using triangular and square grids. *Applied Mathematical Modelling*, v. 37, n. 1, p. 4661–4675, 2013a. Citado 3 vezes nas páginas 18, 41 e 42.
- MARCHI, C. H.; GERMER, E. M. Effect of ten cfd numerical schemes on repeated richardson extrapolation (rre). *Journal of Applied & Computational Mathematics*, v. 2, n. 128, p. 1–8, 2013. Citado na página 18.
- MARCHI, C. H. *et al.* Polynomial interpolation with repeated richardson extrapolation to reduce discretization error in CFD. *Applied Mathematical Modelling*, v. 40, p. 8872–8885, 2016. Citado 5 vezes nas páginas 19, 41, 61, 62 e 79.
- MARCHI, C. H. *et al.* Highly accurate numerical solutions with repeated richardson extrapolation for 2d laplace equation. *Applied Mathematical Modelling*, v. 37, p. 7386–7397, 2013b. Citado 3 vezes nas páginas 15, 19 e 40.
- MARCHI, C. H.; SILVA, A. F. C. Unidimensional numerical solution error estimation for convergent apparent order. *Numerical Heat Transfer, Part B*, v. 42, p. 167–188, 2002. Citado na página 39.
- MARCHI, C. H.; SUERO, R.; ARAKI, L. K. The lid-driven square cavity flow: numerical solution with a 1024 x 1024 grid. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 31, n. 3, p. 186–198, 2009. Citado na página 41.
- MARTINS, M. A. *Multiextrapolação de Richardson com interpolação para reduzir e estimar o erro de discretização em CFD*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2013. Citado 8 vezes nas páginas 19, 42, 43, 44, 45, 46, 62 e 79.
- MARTINS, M. A.; MARCHI, C. H. Estimate of iteration errors in computational fluid dynamics. *Numerical Heat Transfer, Part B*, v. 53, p. 234–245, 2008. Citado na página 37.
- MEHTA, U. B. Guide to credible computer simulations of fluid flows. *Journal of Propulsion and Power*, v. 15, p. 940–948, 1996. Citado na página 38.
- OBERKAMPF, W. L.; ROY, C. J. *Verification and validation in scientific computing*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. Citado na página 40.
- PLETCHER, R. H.; TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. USA: CRC Press, 2013. Citado na página 30.
- RAHUL, K.; BHATTACHARYYA, S. N. One-sided finite-difference approximations suitable for use with richardson extrapolation. *Journal of Computational Physics*, v. 219, p. 13–20, 2006. Citado na página 18.
- RENDULIC, L. Porenziffer und porenwasserdruck in tonen. *Der Bauingenieur*, v. 17, p. 559–564, 1936. Citado na página 22.

- RICHARDSON, L. F.; GAUNT, J. A. The deferred approach to the limit. *Philosophical Proceedings of the Royal Society of London*, v. 226, p. 299–361, 1927. Citado 3 vezes nas páginas 15, 18 e 40.
- ROACHE, P. J. *Fundamentals of Computational Fluid Dynamics*. Albuquerque, USA: Hermosa Publishers, 1998. Citado na página 36.
- RODRIGO, C. *Geometric Multigrid Methods on Semi-Structured Triangular Grids*. Tese (Doutorado) — Universidad de Zaragoza, Zaragoza, España, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 15, 47 e 60.
- RODRIGUES, S. *et al.* Reducing the discretization error for global and local variables in poroelasticity problems. *Proceedings of the Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, p. 1–7, 2020. Citado na página 19.
- RODRIGUES, S. *et al.* Reducing the discretization error for a poroelasticity problem in variables having extreme values. *J Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.*, v. 44, n. 147, p. 1–11, 2022. Citado na página 19.
- ROY, C. J. Review of code and solution verification procedures for computational simulation. *Journal of Computational Physics*, v. 205, p. 131–156, 2005. Citado na página 47.
- ROY, C. J.; OBEEKAMPF, W. L. A comprehensive framework for verification, validation, and uncertainty quantification in scientific computing. *Comp. Meth. in Appl. Mech. Eng.*, v. 200, p. 2131–2144, 2011. Citado na página 15.
- SAAD, Y. *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*. 2nd. ed. Philadelphia: PWS, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 33.
- SIDI, A. *Practical Extrapolation Methods; Theory and Applications*. Cambridge: Cambridge University Press, 2003. Citado na página 15.
- SZABÓ, B.; BABUSKA, I. *Finite element analysis*. New York: Wiley & Sons, 1991. Citado na página 37.
- TANNEHILL, J. C.; ANDERSON, D. A.; PLETCHER, R. H. *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*. 2nd. ed. Washington: Taylor & Francis, 1997. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 36.
- TERZAGHI, K. Die berechnung der durchlassigkeitsziffer des tones aus dem verlauf der hydrodynamischen spannungserscheinungen akademie der wissenschaften in wien. *Mathematisch-Naturwissen-Schaftliche Klasse*, v. 132, p. 125–138, 1923. Citado na página 22.
- THOMPSON, E. G. *Introduction to the Finite Element Method: Theory, Programming and Applications*. Hoboken, NJ: John Wiley, 2005. Citado na página 30.
- TROTTEBERG, U.; OOSTERLEE, C.; SCHÜLLER, A. *Multigrid*. San Diego: Academic Press, 2001. Citado 3 vezes nas páginas 57, 58 e 59.
- VANKA, S. P. Block-implicit multigrid solution of navier-stokes equations in primitive variables. *J. Comput. Phys.*, v. 65, p. 138–158, 1986. Citado na página 59.

- WANG, H. F. *Theory of Linear Poroelasticity with Applications to Geomechanics and Hydrogeology*. Princeton: Princeton University Press, 2000. Citado 4 vezes nas páginas 23, 24, 25 e 26.
- WESSELING, P. *An Introduction to Multigrid Methods*. Chichester: John Wiley & Sons, 1992. Citado 3 vezes nas páginas 57, 58 e 59.
- WOBKER, H.; TUREK, S. Numerical studies of vanka-type smoothers in computational solid mechanics. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, v. 1, p. 29–55, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 59 e 60.
- ZHU, J. Z.; ZIENKIEWICZ, O. C. Superconvergence recovery technique and a *posteriori* error estimators. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, v. 30, p. 1321–1339, 1990. Citado na página 39.

APÊNDICE A – VALORES TÍPICOS PARA A CONDUTIVIDADE HIDRÁULICA

Figura 45 – Intervalos de valores de condutividade hidráulica K e de permeabilidade k .



Fonte: Traduzida de Freeze e Cherry (1979).

Figura 46 – Valores típicos de condutividade hidráulica K .

$-\log_{10} K$ [m/s]	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Permeabilidade	Permeável			Semipermeável				Impermeável						
Solos	Cascalho limpo		Areia limpa ou areia e cascalho		Areia muito fina, silte, loesse, marga, solonetz									
					Turfa		Argila estratificada		Argila intemperizada					
Rochas					Rochas petrolíferas			Arenito		Calcário, dolomita		Granito		

Fonte: Traduzida e Adaptada de Bear (1972).