

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
FÍSICA

MARCELO PRADO CIONEK

DESENVOLVIMENTO DE ALGORITMOS DE ANÁLISE ÓPTICA DO OLHO HUMANO
EM UMA PLATAFORMA LIVRE

CURITIBA

2022

MARCELO PRADO CIONEK

DESENVOLVIMENTO DE ALGORITMOS DE ANÁLISE ÓPTICA DO OLHO HUMANO
EM UMA PLATAFORMA LIVRE

Trabalho de conclusão de curso apresentado
à disciplina TCC-B do Curso de Licenciatura
em Física da Universidade Federal do Paraná,
como requisito parcial para a obtenção do grau
de Licenciado em Física.

Orientador: Dr. Emerson Cristiano Barbano
Coorientador: Dr. André Orlandi de Oliveira

CURITIBA

2022



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

INFORMAÇÃO Nº 55/2022/UFPR/R/ET/DFIS

ATA DA APRESENTAÇÃO E ARGUIÇÃO ORAL DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO

Aos 21 dias do mês de setembro de 2021, às 14 horas, reuniram-se remotamente usando a Plataforma Microsoft Teams, disponibilizada pela Agência de Tecnologia da Informação e Comunicação da UFPR, o acadêmico **Marcelo Prado Cionek**, aluno do Curso de Licenciatura em Física do Setor de Exatas da Universidade Federal do Paraná, para fazer a apresentação e arguição oral relativa ao seu **Trabalho de Conclusão de Curso (TCC)**, intitulado “**Desenvolvimento de algoritmos de análise óptica do olho humano em uma plataforma livre**”, orientado pelo Prof. Dr. Emerson Cristiano Barbano, perante a banca examinadora, que foi assim constituída: o Prof. Dr. Emerson Cristiano Barbano, como Presidente da Banca, a Dra. Fatima Maria Mitsue Yasuoka, como 1º Membro da Banca e o Prof. Dr. Cristiano Francisco Woellner, como 2º Membro da Banca. Após assistirem a exposição do acadêmico, acima nomeado, e arguirem-no sobre diferentes aspectos do TCC apresentado, os membros da banca reuniram-se para atribuição da nota final, a qual foi 100 (cem), de acordo com o **Relatório de Avaliação de TCC**, que acompanha esta Ata, estando o acadêmico aprovado na disciplina TCCB, com a recomendação de que todas as sugestões de correções indicadas pela Banca sejam atendidas e que a versão definitiva do TCC seja entregue conforme as regras estabelecidas pelo Colegiado de Curso e no prazo fixado. A nota final foi comunicada ao acadêmico. Nada mais havendo a ser tratado, o Presidente da Banca declarou encerrada a seção e todos os membros da Banca assinaram eletronicamente a presente Ata.

Curitiba, 20 de setembro de 2022.



Documento assinado eletronicamente por **CRISTIANO FRANCISCO WOELLNER, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 21/09/2022, às 16:26, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **EMERSON CRISTIANO BARBANO, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 21/09/2022, às 16:27, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **Fatima Yasuoka, Usuário Externo**, em 21/09/2022, às 16:34, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **MARCELO PRADO CIONEK, Usuário Externo**, em 22/09/2022, às 13:32, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



A autenticidade do documento pode ser conferida [aqui](#) informando o código verificador **4909474** e o código CRC **C360E082**.

Este trabalho é dedicado a todos que combatem o obscurantismo, iluminando o mundo com conhecimento.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente à minha mãe, por me trazer a este mundo e me dar o apoio e as condições para que eu pudesse seguir meu sonho de entender o universo. Ao meu irmão, pela fraternidade e o compartilhamento de ideias e aspirações desde pequenos, além do suporte para as minhas ferramentas de trabalho.

À Universidade Federal do Paraná, pela oportunidade de receber um ensino de qualidade, e a todos os funcionários dos campi, dos departamentos de Física e de Teoria e Prática de Ensino e da coordenação do curso que tornaram isso possível.

Ao professor Emerson, por sempre ter sido compreensivo e ter acolhido um aluno deixado sem rumo pela pandemia, pela orientação, o incentivo e a autonomia dadas a mim para desenvolver minhas ideias. Ao professor André Orlandi, por ter me introduzido aos estudos do olho humano e mostrado as oportunidades de pesquisa na área. Ao Bruno Laissener, pelas ideias para trabalhos futuros e apoio com os materiais de referência. Aos colegas do grupo de Óptica Não-Linear, pela atenção e as contribuições ao longo do trabalho e por me ensinar tantas coisas novas.

Aos meus amigos Jhionathan e João, pela parceria nas disciplinas de laboratório e em outros trabalhos, além das divagações sobre os absurdos da física e da matemática em noites geladas após as aulas. Ao Matheus e Egbert, pelas boas risadas e discussões. Ao Yohan, pela companhia e o apreço, especialmente ao fim da minha graduação. Também agradeço a todos da nossa gangue por terem tolerado minhas ideias malucas nos horários mais inusitados.

A todos os membros do UFPR OPTICA Student Chapter, pelo companheirismo e os trabalhos que desenvolvemos, possibilitando unir minha aspiração artística à causa da divulgação científica.

À Thais, por ter sido uma pessoa tão gentil e paciente, que me acompanha nessa jornada desde o primeiro minuto em que chegamos no Politécnico.

À Liana, por me ajudar a desatar os nós da consciência, reconhecer as minhas necessidades e a confrontar as diversas situações da vida preservando meu bem estar.

Às minhas amigas do Rio de Janeiro e no resto do mundo, que transcendem a distância e sempre me ofereceram acolhimento, especialmente durante o isolamento social, e com quem pude compartilhar dos momentos mundanos até os mais especiais.

RESUMO

A visão permite a obtenção de informações a respeito do universo, trazidas aos olhos pela luz. Há muitos séculos, estudiosos elaboram hipóteses sobre o funcionamento desse sentido e os fenômenos luminosos. Desde então, o entendimento da luz evoluiu substancialmente graças a teorias físicas e de engenhosos experimentos com espelhos, lentes, interferômetros e a interação com a matéria. Apesar de ser percebida como um fenômeno emergente de uma partícula quântica, a sua interpretação como uma onda guiada por raios ainda é extremamente útil. Por outro lado, muitos detalhes do funcionamento do olho humano permaneceram ocultos até recentemente, com a sofisticação de equipamentos de medição e o processamento de dados em computadores. Diversos trabalhos buscaram modelar matematicamente o olho utilizando medições reais, mas ainda não há um consenso sobre a melhor forma de representar os elementos ópticos do olho, em particular o cristalino. Esses modelos são de vital importância para os avanços no entendimento da visão e de grande interesse da medicina, como no ramo de cirurgias refrativas. Neste trabalho foi desenvolvida uma simulação do olho humano no GeoGebra, uma plataforma aberta que possibilita a edição e disponibilização das construções feitas nela para o público. Para isso, foram desenvolvidos algoritmos de análise óptica restrita ao um plano que contém o eixo óptico, em que as superfícies são definidas por funções ou conjuntos de pontos, para meios homogêneos e com gradiente de índice de refração (GRIN), de forma que possam ser adaptados para qualquer plataforma com as ferramentas matemáticas necessárias para processá-los. Os algoritmos foram implementados em simulações isoladas, entre as quais está um modelo da estrutura GRIN do cristalino, que reproduz os valores de poder refrativo encontrados na literatura, e uma proposta de tratamento de dados obtidos em medições de superfícies sem interpolação através de equações lineares, cujos resultados convergem para o caso suave quando o número de pontos é da ordem de centenas. As escolhas feitas durante a integração dos algoritmos priorizaram o desempenho computacional do software, de forma que é possível utilizá-lo mesmo em navegadores de internet. Os usuários podem comparar a qualidade óptica do olho humano para diversos parâmetros e atestar o aumento do poder refrativo graças à estrutura GRIN do cristalino.

Palavras-chaves: Simulação de óptica. Design óptico do olho humano. Modelos do olho. Traçado de raios. GeoGebra.

ABSTRACT

Vision makes it possible to obtain information about the universe, brought to the eyes by light. For several centuries, scholars have developed hypotheses about the workings of this sense and the optical phenomena. The understanding of light has evolved substantially since then, thanks to physical theories and ingenious experiments with mirrors, lenses, interferometers, and the interaction with matter. Despite being perceived as an emergent phenomenon of a quantum particle, its interpretation as a wave guided by rays is still extremely useful. On the other hand, many details of the functioning of the human eye remained hidden until recently, with the sophistication of measuring equipment and data processing in computers. Several works have sought to mathematically model the eye using real measurements, but there is still no consensus on the best way to represent the optical elements of the eye, particularly the crystalline lens. These models are of vital importance for advances in the understanding of vision and of great interest in medicine, such as in the field of refractive surgery. In this work, a simulation of the human eye was developed in GeoGebra, an open platform that allows editing and publishing of constructions made in it. For this, optical analysis algorithms restricted to a plane that contains the optical axis were developed, in which the surfaces are defined by functions or sets of points, for homogeneous and gradient refractive index (GRIN) media, so that they can be adapted to any platform with the mathematical tools needed to compute them. The algorithms were implemented in isolated simulations, among which is a model of the GRIN structure of the lens, which reproduces the values of refractive power found in the literature, and a proposal for the treatment of real surface data without interpolation through linear equations, whose results converge to the smooth case when the number of points is on the order of hundreds. The choices made during the integration of the algorithms prioritized the computational performance of the software, so that it is possible to use it even in internet browsers. Users can compare the optical quality of the human eye for various parameters and attest to the increase in refractive power thanks to the GRIN structure of the lens.

Key-words: Optics simulation. Human eye's optical design. Eye models. Ray tracing. GeoGebra.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – A NÃO-LINEARIDADE DA REFRAÇÃO	14
FIGURA 2 – REFRAÇÃO EM UM PLANO	14
FIGURA 3 – EXPERIMENTO CASEIRO DE REFRAÇÃO	15
FIGURA 4 – ABERRAÇÃO CROMÁTICA	17
FIGURA 5 – ÓPTICA PARAXIAL	18
FIGURA 6 – LENTES CÔNICAS	19
FIGURA 7 – ABERRAÇÃO ESFÉRICA	20
FIGURA 8 – COMA	20
FIGURA 9 – ASTIGMATISMO	21
FIGURA 10 – CURVATURA DE CAMPO	22
FIGURA 11 – DISTORÇÃO	22
FIGURA 12 – ÓPTICA DIFERENCIAL	23
FIGURA 13 – O DISCO DE AIRY	27
FIGURA 14 – ERRO DA FRENTE DE ONDA	28
FIGURA 15 – TRANSFERÊNCIA DE MODULAÇÃO	29
FIGURA 16 – POLINÔMIOS DE ZERNIKE	31
FIGURA 17 – ANATOMIA DO OLHO HUMANO	32
FIGURA 18 – SIMULAÇÃO DIDÁTICA DO OLHO HUMANO NO GEOGEBRA	38
FIGURA 19 – TRABALHOS ANTERIORES NO GEOGEBRA	44
FIGURA 20 – INTERSEÇÃO NAS LENTES SEGMENTADAS	52
FIGURA 21 – A FUNÇÃO θ_m	54
FIGURA 22 – TRANSFORMAÇÃO ANGULAR PELA FUNÇÃO θ_m	54
FIGURA 23 – MAPA DE CORES DE UM GRADIENTE DE ÍNDICE DE REFRAÇÃO	60
FIGURA 24 – DISCRETIZAÇÃO DAS TRAJETÓRIAS EM UM GRADIENTE RA- DIAL	61
FIGURA 25 – O PROBLEMA DA PREVISÃO DE TRAJETÓRIA	63
FIGURA 26 – MAPA DE CORES DO ÍNDICE DE REFRAÇÃO DO CRISTALINO E DO ÂNGULO DO SEU GRADIENTE	66
FIGURA 27 – ALGORITMO INTEGRADO (TENTATIVA 1)	68
FIGURA 28 – ESTRUTURAS DO ALGORITMO INTEGRADO 1	68
FIGURA 29 – ALGORITMO INTEGRADO (TENTATIVA 2)	69
FIGURA 30 – PRIMEIRA TENTATIVA DE INTEGRAÇÃO DO ALGORITMO GRIN	70
FIGURA 31 – SIMULAÇÃO DA FRENTE DE ONDA	77
FIGURA 32 – EFEITO DA FUNÇÃO DE SUAVIZAÇÃO θ_m	78

FIGURA 33 – COMPARAÇÃO DO TRAÇADO DE RAIOS PARA LENTES SEGMENTADAS	79
FIGURA 34 – DISCREPÂNCIA NO VALOR DO FOCO PARAXIAL DAS LENTES SEGMENTADAS	80
FIGURA 35 – FOCALIZAÇÃO E PODER REFRAATIVO DA SUPERFÍCIE CORNEAL ANTERIOR	81
FIGURA 36 – INTERVALO DE ANÁLISE DA FOCALIZAÇÃO DAS LENTES SEGMENTADAS	81
FIGURA 37 – PODER REFRAATIVO DAS LENTES SEGMENTADAS NA REGIÃO PARAXIAL	82
FIGURA 38 – PLOT DE $P \times N_S$ PARA $Y_0 = 0,1\text{ mm}$	83
FIGURA 39 – PLOT DE $P \times N_S$ PARA $Y_0 = 0,9\text{ mm}$	83
FIGURA 40 – TRAÇADO DE RAIOS EM UMA REGIÃO GRIN DESCRITA POR UMA FUNÇÃO LORENTZIANA	84
FIGURA 41 – TRAÇADO DE RAIOS RADIAL EM TORNO DE UM BURACO NEGRO DE SCHWARZCHILD	85
FIGURA 42 – TRAÇADO DE RAIOS PARALELOS EM TORNO DE UM BURACO NEGRO DE SCHWARZCHILD	85
FIGURA 43 – COMPARAÇÃO DO TRAÇADO DE RAIOS ANALÍTICO E DO ALGORITMO GRIN	86
FIGURA 44 – CURVAS DELIMITADORAS DO CRISTALINO COM VARIAÇÃO DA ACOMODAÇÃO E IDADE	87
FIGURA 45 – VARIAÇÃO DO ÍNDICE DE REFRAÇÃO NO INTERIOR DO CRISTALINO	88
FIGURA 46 – TRAÇADO DE RAIOS PARALELOS ATRAVÉS DO CRISTALINO	89
FIGURA 47 – COMPARAÇÃO DO PODER REFRAATIVO DO CRISTALINO HOMOGÊNEO E DE PERFIL GRIN	90
FIGURA 48 – PODER REFRAATIVO DO CRISTALINO VERSUS IDADE	90
FIGURA 49 – PODER REFRAATIVO DO CRISTALINO VERSUS GRAU DE ACOMODAÇÃO	91
FIGURA 50 – ALGORITMO INTEGRADO 1.0	92
FIGURA 51 – MEDIÇÕES DAS ABERRAÇÕES LONGITUDINAL E TRANSVERSAL NO ALGORITMO INTEGRADO	93
FIGURA 52 – MEDIÇÃO DA WFE NO ALGORITMO INTEGRADO	93
FIGURA 53 – AS FRENTES DE ONDA PERTO DO PONTO FOCAL	94
FIGURA 54 – OSCILAÇÃO DA WFE COM O NÚMERO DE PASSOS	95
FIGURA 55 – OSCILAÇÃO DA WFE COM O TAMANHO DOS PASSOS	96
FIGURA 56 – O ERRO INTRÍNSECO DO ALGORITMO GRIN	96
FIGURA 57 – FIT MANUAL DOS POLINÔMIOS DE ZERNIKE	97

FIGURA 58 – RELAÇÕES ANGULARES DA REFLEXÃO	106
FIGURA 59 – RELAÇÕES ANGULARES DA REFRAÇÃO	107

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	A NATUREZA DA LUZ	11
1.2	O SENTIDO DA VISÃO	11
1.3	A REFRAÇÃO E A ORIGEM DAS ABERRAÇÕES	13
1.4	PROBLEMA DE PESQUISA	16
2	REVISÃO DE LITERATURA	17
2.1	FORMALISMOS DA ÓPTICA GEOMÉTRICA	17
2.1.1	Geometria pura	17
2.1.2	Óptica Matricial	22
2.1.3	Cálculo Diferencial	23
2.1.4	Cálculo Variacional	25
2.1.5	Óptica de frentes de onda	26
2.2	A MEDIÇÃO DE ABERRAÇÕES	28
2.3	OLHO HUMANO E SUA MODELAGEM	32
2.3.1	Córnea	33
2.3.2	Cristalino	34
2.3.3	Retina	36
2.4	FERRAMENTAS DE TRAÇADO DE RAIO E ANÁLISE ÓPTICA	36
2.4.1	Estrutura e Funcionalidades do GeoGebra	38
3	METODOLOGIA	44
3.1	ESCOLHA DA PLATAFORMA	44
3.2	FUNDAMENTAÇÃO DA SIMULAÇÃO	45
3.3	DEFINIÇÃO DO SISTEMA ÓPTICO	48
3.3.1	Funções-superfície segmentadas	50
3.3.2	Variação contínua do ângulo ao longo do segmento	53
3.4	TRAÇADO DE RAIOS	55
3.5	FRENTES DE ONDA	57
3.6	MEDIÇÃO DE ABERRAÇÕES	58
3.7	REFRAÇÃO VARIÁVEL	59
3.7.1	Discretização da função	59
3.7.2	Discretização da trajetória	60
3.7.3	Construção do cristalino	65
3.8	INTEGRAÇÃO DOS ALGORITMOS	67
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	77
4.1	ERRO DA FRENTE DE ONDA	77
4.2	ANÁLISE DAS LENTES SEGMENTADAS	78
4.3	RESULTADOS DO ALGORITMO GRIN	84
4.4	ANÁLISE DO CRISTALINO	87
4.5	ALGORITMO INTEGRADO	91

5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	98
	REFERÊNCIAS	100
	APÊNDICE 1 - DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE TRAÇADO DE RAIOS	104
	APÊNDICE 2 - SUPORTE A MÚLTIPLAS FUNÇÕES-SUPERFÍCIE	107

1 INTRODUÇÃO

1.1 A NATUREZA DA LUZ

Através da luz, recebemos informações dos demais objetos e fenômenos do universo. Desde a antiguidade, filósofos ponderaram sobre a sua natureza e como ela se propaga, reflete e refrata, formando a área do conhecimento denominada óptica. Até 1801, com o interferômetro de Thomas Young, poucos pensavam na luz como uma onda [1], enquanto o consenso era a hipótese mais intuitiva de que a luz é uma partícula ou um raio que se propaga retilineamente. Consequentemente, existem séculos de trabalhos desenvolvidos com essa lógica, a óptica geométrica.

Até onde se sabe, a luz é uma excitação nos campos elétrico e magnético que se sustenta sem a presença de carga ou massa uma vez que é gerada, a qual chamamos de radiação eletromagnética. No vácuo, essa excitação se propaga pelo espaço-tempo a $c = 299.792.458$ metros por segundo para todos os referenciais, como se fosse uma onda transversal à sua direção de propagação, de acordo com a teoria da relatividade. O comprimento de onda λ corresponde à distância de uma oscilação completa no espaço, enquanto a frequência f é o inverso do período de uma oscilação no tempo. Essas três grandezas caracterizam a onda e estão relacionadas pela equação

$$c = \lambda f \quad (1.1)$$

1.2 O SENTIDO DA VISÃO

A luz emitida pelo Sol, cuja superfície tem uma temperatura média de 5800°C , tem seu pico de intensidade em uma faixa de comprimentos de onda de 400 nm a 700 nm [2], chamada de luz visível, a qual os humanos e outros seres vivos são capazes de detectar com a retina, um conjunto de células fotossensitivas no interior dos seus olhos [3]. Entre as várias possíveis razões para os olhos terem evoluído para priorizar a absorção dessa luz em detrimento das demais, estão: com exceções como o fogo, magma, raios e vagalumes, esse tipo de luz raramente é emitida por objetos terrestres em fenômenos naturais, mas o Sol é uma fonte de luz muito mais intensa e constante; comprimentos de onda maiores, como o infravermelho distante, são emitidos pelo próprio corpo humano devido à sua temperatura [4], o que poderia ativar as células fotossensitivas constantemente; comprimentos de onda menores são quase totalmente bloqueados pela atmosfera [5]; os primeiros organismos com olhos eram aquáticos e a luz visível corresponde à faixa de menor absorção da água [6], e mesmo para nós,

a água compõe em torno de 99% [7] dos materiais que preenchem o interior do olho, então a luz é capaz de chegar até a retina com poucas perdas.

No caso dos humanos, existem em torno de 126 milhões de sensores distribuídos na retina [3], que enviam sinais elétricos distintos para o cérebro de acordo com a intensidade da luz absorvida. Os bastonetes têm pico de sensibilidade - medida de absorção de luz para cada comprimento de onda - em $497,6\text{ nm}$ [8] e se apresentam em maior quantidade para que o olho funcione mesmo no escuro. O cérebro então processa os sinais, levando em conta a posição dos sensores que os enviaram, criando assim um “mapa” em que cada ponto da sua superfície tem uma intensidade associada, o qual chamamos de imagem. A capacidade de realizar esse processamento pode ser entendida como o sentido da visão.

Além disso, a retina apresenta três tipos de células cones “azul”, “verde” e “vermelho” com picos de sensibilidade em comprimentos de onda diferentes, permitindo associar informações distintas de acordo com as proporções entre as respectivas absorções, dando origem à noção de cor, o que não é equivalente a distinguir comprimentos de onda, pois a percepção de uma mesma cor pode ser gerada por luz de um único comprimento de onda (monocromática) ou de uma combinação de comprimentos de onda maiores e menores [9].

A variedade de direções das quais a luz pode ser captada é proporcional ao campo de visão (a extensão do mapa visual), enquanto a abertura da pupila, regulada pela íris, determina a quantidade de luz que pode chegar à retina. Câmeras e demais dispositivos de imageamento realizam processos análogos de captura de luz e conversão de informação.

Como o ar dificilmente desvia e tampouco torna evidente seu comportamento ondulatório, a luz se propaga de forma retilínea na maior parte do tempo. Convenientemente, o cérebro dos seres vivos semelhantes a nós evoluiu para traçar a posição dos objetos a partir da direção da luz que vem deles, como se as coisas emitissem raios de luz que vêm direto a nós. É um processo simples, intuitivo e que funciona bem para fins de sobrevivência, mas falha quando o traçado dos raios não coincide com a posição do objeto, pois essa intuição nos induz ao erro: basta olhar para um espelho ou um canudo aparentemente partido ao meio em um copo d'água. A imagem ou posição aparente, portanto, é percebida no encontro do traçado de raios, mesmo quando eles nunca se cruzam (o que caracteriza uma imagem virtual).

Existe algo mais fundamental impedindo a interpretação da visão de ser tão “trivial”: a luz vinda de uma única fonte pode atingir pontos diferentes dos olhos, ativando mais de um sensor visual e tornando a informação incerta (borrada). Tal fenômeno se chama desfocalização. Apesar de uma imagem borrada ainda conseguir ser interpretada pelo cérebro, perdem-se os detalhes, ao ponto em que a visão pode ser inutilizada.

A situação ideal, onde há foco, é quando a imagem de um ponto é de fato apenas um ponto (o mínimo possível de sensores é ativado). Os seres vivos também evoluíram para lidar com isso através da refração.

1.3 A REFRAÇÃO E A ORIGEM DAS ABERRAÇÕES

No entendimento da física clássica, a luz se propaga com uma velocidade característica em cada meio material. O índice de refração n expressa a razão entre a velocidade da luz no vácuo e a velocidade em um determinado meio v_{meio} :

$$n_{\text{meio}} \equiv \frac{c}{v_{\text{meio}}} \quad (1.2)$$

A refração é o desvio da trajetória da luz na fronteira entre dois meios, dependendo do ângulo de entrada θ_1 e dos índices de refração, de forma não-linear. A Lei de Snell diz que, quanto maior o ângulo de incidência em relação ao eixo normal à superfície, mais refratada a luz será, e possibilita calcular o ângulo de saída θ_2 a partir dessas informações:

$$n_1 \sin(\theta_1) = n_2 \sin(\theta_2) \quad (1.3)$$

$$\theta_2 = \arcsen\left(\frac{n_1}{n_2} \sin(\theta_1)\right) \quad (1.4)$$

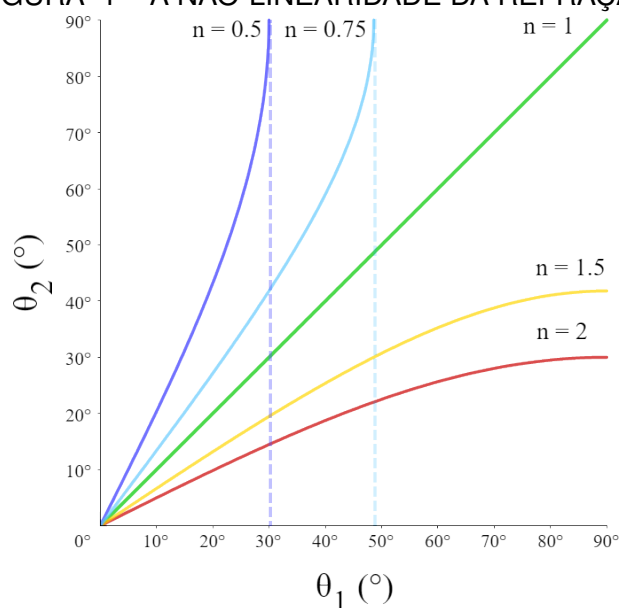
Em meios reais, existe a possibilidade de uma porcentagem da luz ser absorvida pelo material, enquanto outra parte sempre será refletida de acordo com a lei da reflexão:

$$\theta_1 = \theta_2 \quad (1.5)$$

Quando o segundo meio é menos refrativo que o primeiro, existe um ângulo crítico $\theta_c = \arcsen(n_2/n_1)$ a partir do qual a luz será totalmente refletida, conforme mostra a Figura 1.

Objetos que redirecionam a luz através da refração, focalizando ou desfocalizando os raios, são chamados de lentes. O preço a se pagar pelas lentes é que a não-linearidade da refração cria diversas situações em que a focalização não é perfeita, na verdade, isso é a norma e não a exceção, como mostra a Figura 2, em que raios sofrem refração no caso mais simples, onde a transição dos meios é abrupta e plana.

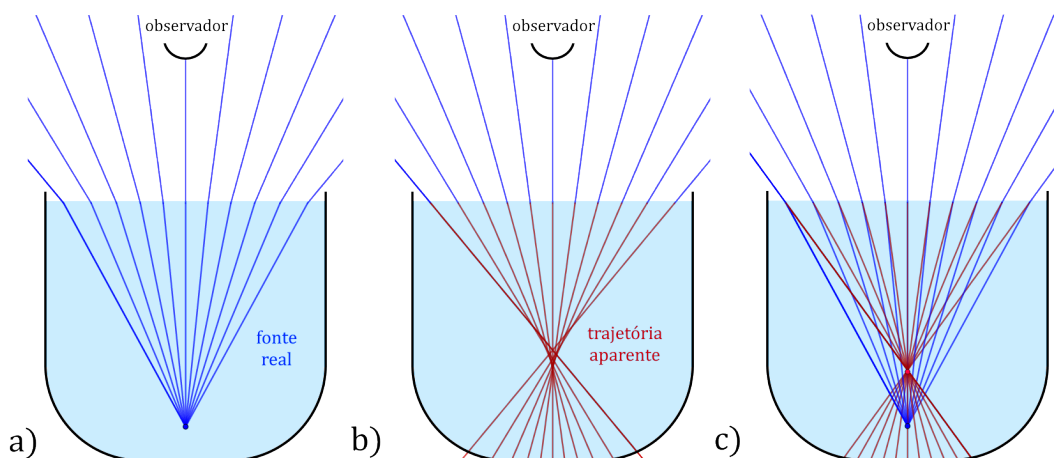
FIGURA 1 – A NÃO-LINEARIDADE DA REFRAÇÃO



FONTE: O autor (2022).

LEGENDA: Gráfico do ângulo refratado em função do ângulo incidente, para diferentes valores do índice de refração relativo $n = n_2/n_1$. Note que para $n < 1$, a função é delimitada pelo ângulo crítico.

FIGURA 2 – REFRAÇÃO EM UM PLANO



FONTE: O autor (2022).

LEGENDA: Um objeto imerso em um copo d'água, alinhado ao olho do observador. a) Em azul, raios representando a trajetória real da luz que parte do objeto. b) Na perspectiva do observador, o objeto está mais próximo e distorcido, pois os raios não se encontram no mesmo ponto. c) Caso fictício, em que a refração altera a inclinação de forma a produzir um foco virtual perfeito¹. A trajetória real (em azul) e a aparente (em vermelho) estão sobrepostas. Nota-se que há deslocamento da imagem (magnificação), mas não distorção.

¹ Para este caso, a lei da refração é dada por $n_1 \tan \theta_1 = n_2 \tan \theta_2$. O foco virtual é perfeito pois a posição de incidência de todos os raios se dá em uma mesma reta (por construção) e os coeficientes angulares das retas que os descrevem são alterados por um fator independente do ângulo $n = n_2/n_1$, então se a fonte em x_o é pontual, o foco também será, com posição em $x_i = nx_o$.

Para um objeto não-pontual, a magnificação em uma superfície plana ocorre de forma análoga, facilmente verificável em um experimento caseiro, como mostram as fotografias na Figura 3.

FIGURA 3 – EXPERIMENTO CASEIRO DE REFRAÇÃO



Fonte: O autor (2022).

LEGENDA: Comparação entre duas imagens de uma pedra no fundo de um copo, antes (à esquerda) e após (à direita) esse ser preenchido com água, capturadas aproximadamente da mesma posição. O efeito de magnificação é mais significativo que a distorção.

Apesar de serem a norma, chamamos essas estruturas geométricas formadas pelos raios refratados (ou refletidos) de aberrações geométricas, e as mais relevantes recebem nomes únicos e representações matemáticas dependendo da teoria escolhida. Costuma-se definir um círculo de menor confusão como o plano em que a espessura do feixe é menor (está melhor focalizado), ou seja, onde a imagem ficará melhor definida.

Como o ângulo de incidência é medido em relação à direção normal à superfície, as lentes podem ser moldadas de forma a contribuir negativamente com as aberrações, corrigindo seus defeitos. Para quase a totalidade dos sistemas ópticos artificiais, utilizam-se conjuntos de lentes com superfícies delimitadas por esferas, devido à facilidade de fabricação. Determinar o sistema óptico que melhor corrige as aberrações para um determinado propósito é o principal objetivo do desenho óptico.

Matematicamente, a lente “perfeita”, capaz de focalizar a luz vinda de um ponto específico em outro ponto é delimitada por dois hiperboloides, que podem ser calculados para qualquer índice de refração e distância focal desejados através do cálculo variacional (princípio de Fermat) [10], de uma equação diferencial ou do conhecimento de seções cônicas. No entanto, lentes asféricas são muito mais difíceis de fabricar e a imagem pode desfocar muito mais facilmente conforme o objeto se afasta do foco.

O sistema óptico do olho contém duas lentes biológicas chamadas de córnea e cristalino. Não se deve subestimar a “simplicidade” do olho, pois comparado a dispositivos de imageamento modernos, que podem ter até uma dezena de elementos ópticos, o olho é extremamente eficiente, o que indica uma complexidade das suas lentes e do processamento no cérebro que não são óbvios à primeira vista.

As curvaturas e estruturas internas das lentes, assim como a habilidade de moldá-las através do processo de acomodação pelos músculos ciliares, foram bem refinados pela evolução. Thomas Young foi um dos primeiros a estabelecer teorias de óptica fisiológica, primeiro sobre a acomodação do cristalino, processo em que a lente varia sua curvatura para alterar o ponto focal [11], e depois formulou a base da teoria de que a visão adquire cor graças a três tipos de células fotorreceptoras diferentes, mais tarde identificados como os cones. Apesar da sua sofisticação, o olho não é perfeito e pode apresentar malformações e degradações, devido a desgastes, doenças ou meramente a idade, que amplificam ou introduzem aberrações à visão. Uma boa visão é aquela em que as aberrações são minimizadas, portanto, entender a visão e como melhorá-la passa obrigatoriamente pelo estudo das lentes. A função da lente dos óculos e das lentes de contato é contribuir negativamente com as aberrações presentes, mas desde o século XX as técnicas de cirurgias refrativas, que buscam corrigir as lentes dos olhos, em especial a superfície externa da córnea, vêm sendo desenvolvidas.

1.4 PROBLEMA DE PESQUISA

As análises dos modelos teóricos envolvidos no estudo do olho humano, assim como das suas medições, requerem uma quantidade razoável de cálculos, geralmente feitos por softwares especializados em análise de frentes de onda ou design óptico, como é o caso do Zemax, que possui as componentes do olho em suas bibliotecas de materiais e onde trabalhos voltados para esse tipo de análise já existem [12]. Essas ferramentas nem sempre são gratuitas e de fácil acesso para pessoas que têm interesse nessa área de estudo. Na internet, só são encontradas simulações educativas [13] [14], que apenas ilustram o funcionamento do olho e não representam a sua óptica de forma realista.

A fim de contribuir com os estudos do olho humano e a acessibilidade das ferramentas para tal, neste trabalho foram desenvolvidos algoritmos de base capazes de simular a óptica do olho humano de acordo com dados presentes na literatura, possibilitando o desenvolvimento de uma nova ferramenta, sem a ambição de criar algo tão completo e geral quanto os softwares utilizados na indústria. A escolha por uma plataforma aberta favorece a personalização dos códigos e a disponibilidade para o público interessado, pois não depende de softwares com licenças restritivas.

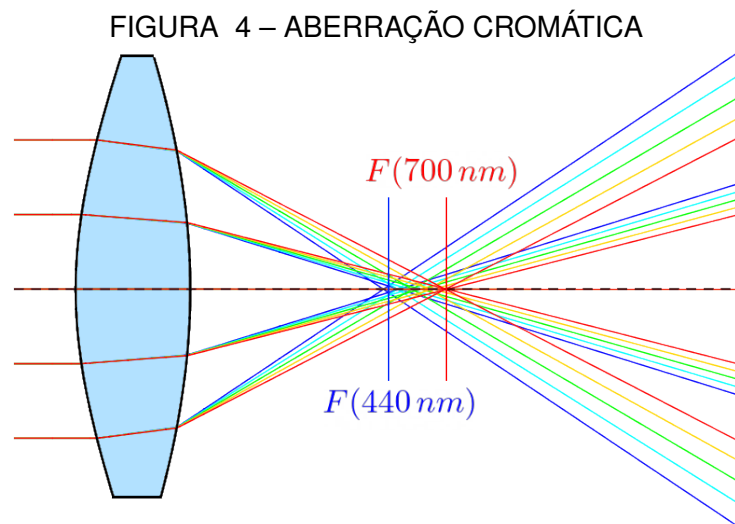
2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 FORMALISMOS DA ÓPTICA GEOMÉTRICA

2.1.1 Geometria pura

Desde a Antiguidade com Euclides, a geometria (euclidiana) é utilizada para estudar a luz. A sua trajetória, assumida como retilínea, pode ser despreendida da realidade física e estudada de um ponto de vista puramente matemático, como retas que se movem em paralelo, refletem, convergem ou divergem após incidirem sobre outra forma geométrica, e esses desvios seguem as regras da reflexão ou da refração. Espelhos e lentes anaclásticas (sem aberrações), a princípio, podem ser deduzidas tendo apenas o domínio das seções cônicas, como fez o matemático e físico persa Ibn Sahl no século X [15][16]. Mesmo na atualidade, a geometria pura ainda é amplamente usada no estudo de sistemas ópticos.

O índice de refração é determinado pela resposta do meio material a cada comprimento de onda da luz, então cores diferentes sofrem refração em intensidades diferentes, dando origem ao fenômeno de dispersão, ou aberração cromática ¹ no contexto de lentes, como mostra a Figura 4, então mesmo a lente de Ibn Sahl só é anaclástica para um índice de refração específico.



Fonte: O autor (2022).

LEGENDA: Um feixe contendo comprimentos de onda do vermelho ao azul focaliza a luz de cada comprimento de onda em uma região diferente.

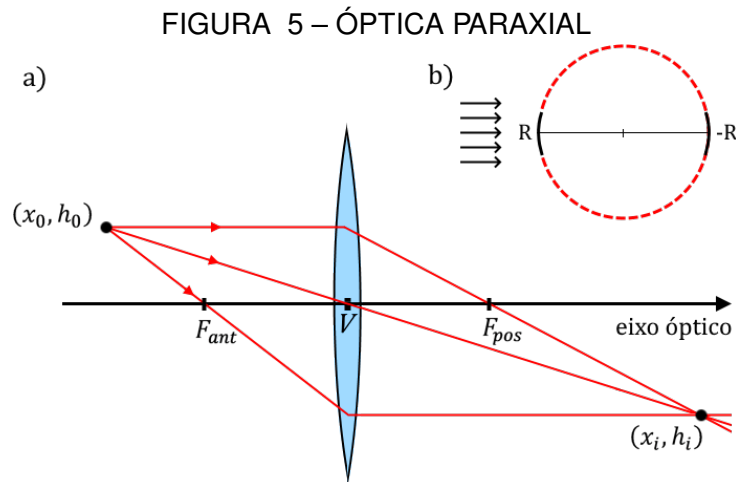
Em 1840, Carl Friedrich Gauss estudou a formação de imagens de forma analítica sob a aproximação paraxial, em que todos os raios de luz envolvidos se

¹ A aberração cromática pode ser dividida em longitudinal, quando o poder de focalização varia com λ , e transversal, quando a posição da imagem varia com λ [17].

encontram em um plano coaxial com o eixo óptico (isto é, que contém o eixo óptico) com baixos ângulos e alturas, e que os raios de curvatura das superfícies estão numa ordem de grandeza muito maior que a do sistema óptico, enquanto as espessuras das lentes são desprezíveis. Nessas condições, raios paralelos formam imagens reais (que podem ser captadas por um anteparo) ou virtuais (percebidas apenas pelo traçado de raios reverso) de forma perfeita, com posição e magnificação dadas por equações simples. A relação entre a distância focal F , a posição de um objeto situado em (x_0, h_0) e da imagem, em (x_i, h_i) , é dada por:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{x_o} + \frac{1}{x_i} \quad (2.1)$$

Sendo as distâncias medidas em relação ao vértice da superfície, com a convenção de sinal de que o objeto está à esquerda, numa distância positiva, enquanto a imagem formada pode ser real (positiva, à direita) ou virtual (negativa, à esquerda). A posição da imagem é determinada pelo ponto de intersecção de dois raios, conforme mostra a Figura 5.



Fonte: O autor

LEGENDA: a) Partindo de um mesmo ponto, o raio principal passa pelo centro da lente e não tem sua trajetória desviada, e um raio paralelo ao eixo óptico, que é refratado para o ponto focal (posterior). Por simetria, um terceiro raio é traçado passando pelo ponto focal (anterior) e refratado paralelo ao eixo óptico. b) Convenção de sinais de raio de curvatura em relação ao sentido do raio.

A magnificação é uma medida relativa do aumento (ou diminuição) do objeto, quando este não se encontra sobre o eixo óptico. Uma imagem real tem magnificação negativa, pois é invertida em relação ao objeto.

$$M = -\frac{x_i}{x_0} = \frac{h_i}{h_0} \quad (2.2)$$

Essas equações podem ser aplicadas iterativamente para sistemas ópticos com diversas lentes, utilizando a imagem da primeira lente como objeto da segunda, e nesse caso a magnificação total é a multiplicação das magnificações.

Uma grandeza utilizada no estudo de lentes é a dioptria ou vergência, medida em $D = m^{-1}$ e caracteriza o poder refrativo de uma lente:

$$D \equiv \frac{1}{F} \quad (2.3)$$

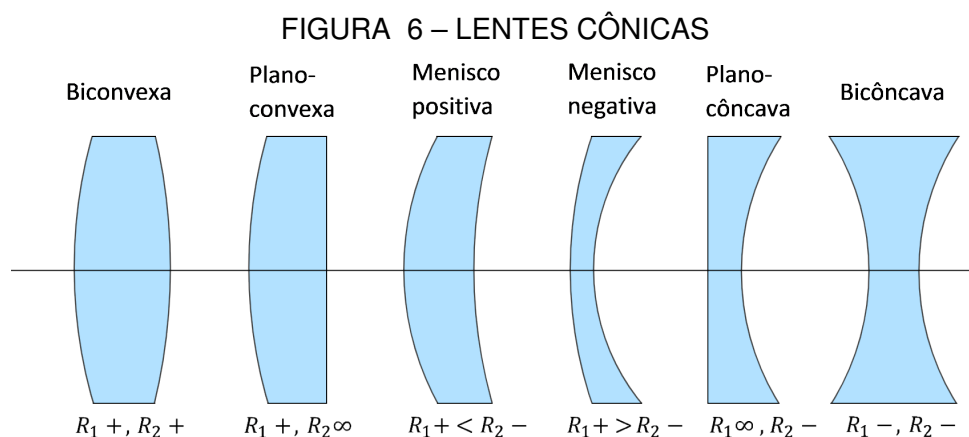
o poder refrativo de uma superfície, na região paraxial, é dado por:

$$D = \frac{1}{F} = \frac{n_2 - n_1}{R} \quad (2.4)$$

Onde R , n_1 e n_2 são o raio de curvatura da superfície e os índices de refração anterior e posterior a ela, respectivamente. Quando há duas superfícies conjuntas, o poder refrativo total é dado pela equação do fabricante de lentes:

$$D = D_1 + D_2 - D_1 D_2 \frac{n_1}{n_2} \quad (2.5)$$

Sendo d a espessura da lente no eixo óptico ou a diferença de posição entre os vértices $|V_2 - V_1|$, normalmente aproximada como 0, fazendo com o poder refrativo da lente seja a soma do poder refrativo das suas superfícies isoladamente [18]. A Figura 6 mostra que as combinações de sinais e magnitudes dos raios de curvatura resultam em seis tipos de lentes cônicas, nas quais se incluem as esféricas, elipsoidais, parabólicas e hiperbólicas.

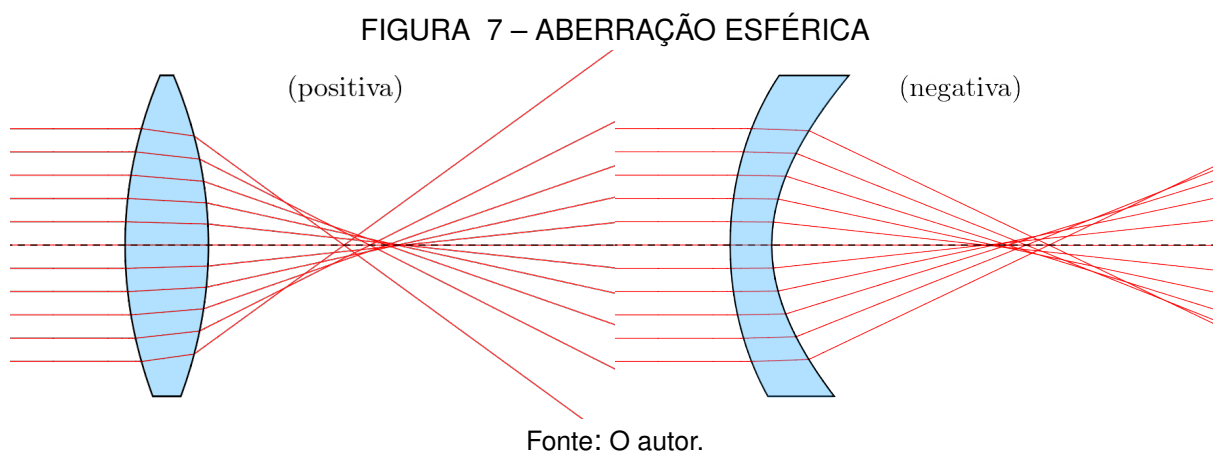


Fonte: O autor.

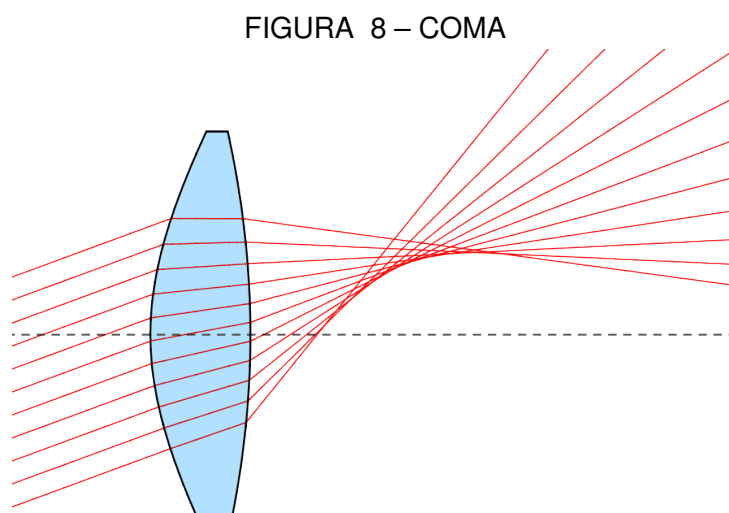
LEGENDA: Combinações possíveis de lentes com duas superfícies cônicas. Os símbolos após os raios indicam as relações de sinais relativos e proporcionalidade. As lentes com orientação oposta não estão incluídas para evitar redundância.

Em 1856, Ludwig von Seidel ampliou o escopo da óptica geométrica analítica para além das condições de Gauss, onde ocorrem aberrações, e desenvolveu uma teoria qualitativa e quantitativa a respeito delas [19]. As cinco aberrações clássicas são:

Aberração esférica (Figura 7): A posição em que os raios refratados interceptam o eixo óptico, isto é, a distância focal, varia como uma função da distância radial do eixo óptico. Isso cria estruturas de “funil”, convergentes no caso em que F diminui com r (aberração positiva) e divergentes quando F aumenta com r (aberração negativa). A aberração esférica não é exclusiva de lentes esféricas, e sim de todo sistema não-ideal com simetria de revolução.



Coma (Figura 8): Estrutura formada por um feixe ou imagem desalinhada com o eixo óptico em razão da curvatura da lente não ser adequada para focalizar tal imagem. Enquanto raios de uma extremidade do feixe são altamente refratados, os da outra extremidade são muito pouco refratados, e então se cruzam em uma posição diferente dos raios centrais. Quando o objeto é um ponto, a imagem será composta por vários discos de raio decrescente e intensidade crescente centrados ao longo de uma curva até o disco que corresponde à imagem mais nítida, formando um “rastro” que se assemelha a um cometa.

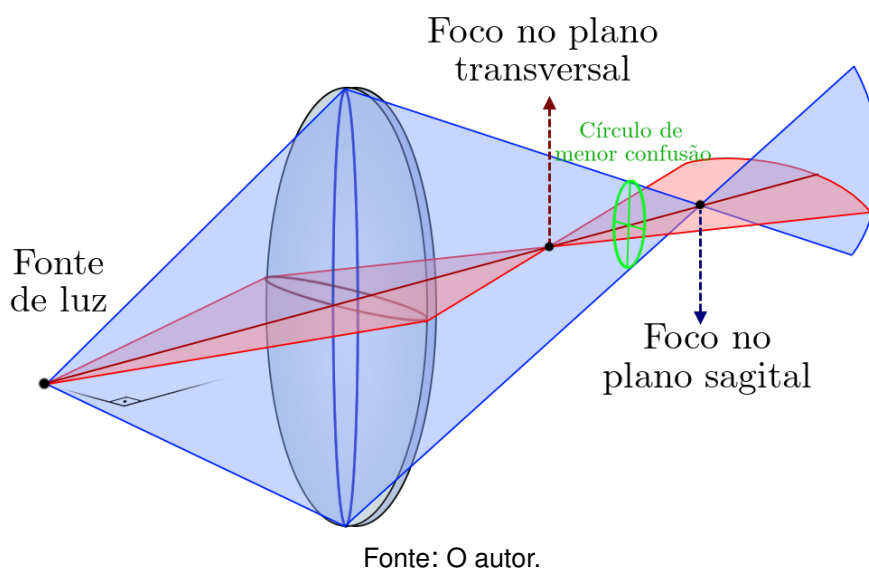


Pode também ser interpretado como um “funil” de apenas um lado, pois as suas

estruturas e intensidades estão relacionadas e costumam ocorrer ao mesmo tempo. Por isso, sistemas de lentes que corrigem a aberração esférica também diminuem a coma.

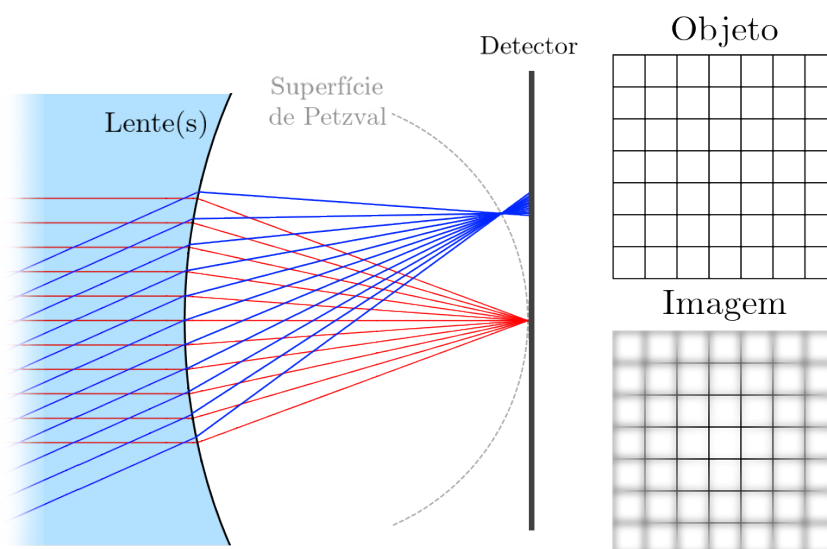
Astigmatismo (Figura 9) (apenas em três dimensões): Para pontos fora do eixo óptico, definem-se dois planos a partir do raio principal: o plano tangencial, sobre o qual o raio está, e o plano sagital, que é ortogonal ao plano tangencial. Devido ao deslocamento h em relação ao eixo óptico, dois raios com o mesmo ângulo, cada um pertencendo a um plano, irão incidir sobre uma curvatura local diferente, e sendo assim serão focalizados para uma região diferente. Ao se considerar todos os raios pertencentes ao plano, a imagem será uma linha perpendicular em uma posição específica, enquanto a do plano sagital será outra linha, em outra posição. Nas direções intermediárias, discos achatados se formam com orientação dada pela proximidade aos focos sagital e tangencial.

FIGURA 9 – ASTIGMATISMO



Curvatura de campo (Figura 10): Ocorre quando raios vindos de pontos diferentes não focalizam no mesmo plano. Em sistemas com pouca aberração, a focalização pouco se altera com a direção de incidência, então o conjunto dos pontos focais formam uma superfície de Petzval (esférica, caso a variação da distância focal com o ângulo seja nula). Portanto, a curvatura de campo está presente em sistemas ideais. É possível transformar a superfície de Petzval em um plano com uma lente de menisco, ou dispoendo os sensores de luz numa disposição com curvatura similar à da superfície de Petzval [20], como é o caso da retina.

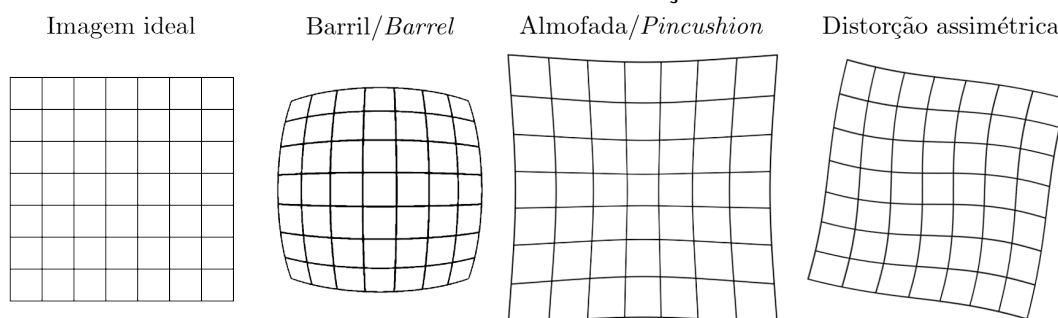
FIGURA 10 – CURVATURA DE CAMPO



Fonte: O autor.

Distorção (Figura 11): Ocorre quando a magnificação varia ao longo do plano da imagem: o que seria uma grade quadriculada retilínea adquire curvatura. Quando a magnificação aumenta com a distância do eixo óptico (com simetria), tem-se a distorção pincushion (“almofada”), e quando diminui ocorre a distorção barrel (“barril”), onde linhas retas se tornam curvas côncavas ou convexas, respectivamente. Combinações das duas aberrações, chamadas de mustache (bigode) ou até distorções sem simetria também são possíveis [21].

FIGURA 11 – DISTORÇÃO



Fonte: O autor.

2.1.2 Óptica Matricial

Nesta abordagem, os raios de luz são tratados como vetores em um espaço com coordenadas homogêneas [19], onde pontos (x, y, z) cartesianos definem semirretas parametrizadas por uma nova coordenada w : $(X, Y, Z, w) = (\frac{x}{w}, \frac{y}{w}, \frac{z}{w}, w)$, partindo da origem e indo até o infinito, caracterizando uma direção. O tratamento matricial permite que a mudança de coordenadas, a translação, rotação, reflexão e refração ocorram através da multiplicação de matrizes, o que não pode ser feito de forma direta

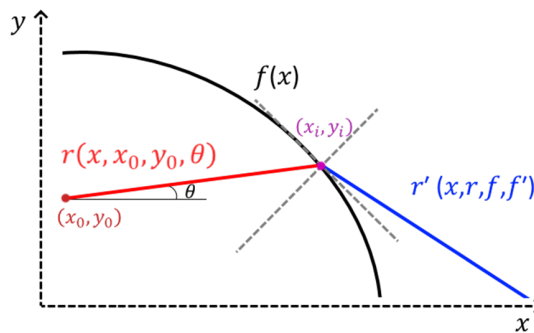
em coordenadas cartesianas. As principais linguagens de renderização na computação gráfica aplicam a óptica matricial, permitindo o traçado de raios em larga escala e em tempo real, resultando em imagens fotorrealistas. O sucesso da abordagem é devido à forma que modelos 3D funcionam: os objetos são definidos por conjuntos finitos de vértices, delimitando planos que, juntos, formam a superfície total do modelo, e, portanto, não tem curvatura real e as direções envolvidas nos cálculos são dadas totalmente por equações lineares.

2.1.3 Cálculo Diferencial

Com o advento do cálculo, foi possível relacionar medidas de curvaturas da geometria a taxas de variação infinitesimais de funções, além de determinar o mínimo de uma grandeza calculando as raízes da sua taxa de variação. Ao mesmo tempo, o cálculo de áreas e a soma de grandezas contínuas também se tornou possível através das integrais. Naturalmente, a óptica geométrica também desfruta dessas ferramentas. Por exemplo, engenheiros ópticos podem escrever uma aberração óptica a ser minimizada em um sistema escrevendo-a em função das curvaturas das lentes envolvidas, e então calcular a curvatura correspondente ao mínimo dessa função.

Embora haja uma rápida complicação dos cálculos analíticos, também é possível tratar os raios de luz como retas $r(x)$ e as superfícies de lentes e espelhos como funções $f_i(x)$, como mostra a Figura 12 e então realizar todas as interações utilizando álgebra e cálculo ².

FIGURA 12 – ÓPTICA DIFERENCIAL



Fonte: O autor.

Sendo (x_0, y_0) a posição inicial e θ_0 a inclinação do raio em relação ao eixo x , a função que descreve a trajetória da luz é:

$$r(x) = \tan \theta_0 (x - x_0) + y_0 \quad (2.6)$$

Nessa abordagem, todos os ângulos envolvidos são medidos em relação ao eixo x , então as curvaturas das superfícies são determinadas pelas derivadas $f'_i(x)$. Para

² As equações apresentadas nessa subseção foram deduzidas pelo autor em um estudo prévio independente. O detalhamento dos cálculos pode ser encontrado no Apêndice 1.

computar a reflexão e refração, resolve-se primeiro a equação de incidência, para obter o ponto I onde o raio e a superfície se encontram:

$$I = (x_i, y_i), \quad \text{Onde } x_i \text{ é tal que } r(x_i) = f(x_i) \quad (2.7)$$

Quando $\theta_0 = 0$, a equação de incidência se torna $y_0 = f(x_i)$, de forma que $x_i = f^{-1}(y_0)$. O caso de raios paralelos ao eixo óptico, portanto, é de análise muito mais simples. Para computar as interações, é necessário medir o ângulo de incidência em relação ao eixo normal da superfície no ponto $(x_i, r(y_i))$, o que é conhecido do cálculo diferencial:

$$\theta_N = \arctan \left(-\frac{1}{f'(x_i)} \right) \quad (2.8)$$

Através de trigonometria, as duas leis na sua forma angular se tornam:

$$\text{Reflexão} \quad \theta_r = 2\theta_N - \theta_0 \quad (2.9)$$

$$\text{Refração} \quad \theta_d = \theta_N - \arcsen \left(\frac{n_1}{n_2} \sen(\theta_N - \theta_0) \right) \quad (2.10)$$

O foco F pode ser definido como o valor de x para o qual os raios interceptam o eixo x após a interação, ou seja, a solução da equação $r(F) = 0$.

$$F(x_0, y_0, \theta_0, f) = x_i - \frac{y_i}{\tan \theta_{r,d}} \quad (2.11)$$

No estudo da interação de raios paralelos com uma superfície, a equação 2.11 fornece uma curva do foco em função exclusivamente da altura inicial e da inversa da função-superfície:

$$F(y_0, f^{-1}) = f^{-1}(y_0) - \frac{y_0}{\tan \theta_{r,d}((f^{-1})'(y_0))} \quad (2.12)$$

O foco paraxial, em tese, seria a função aplicada em $y_0 = 0$, porém isso resulta em uma indeterminação. A razão é que se, $y_0 = 0$ e $\theta_0 = 0$, o raio incidente está sobre o eixo óptico e permanece no eixo óptico após a interação, então ele intercepta o eixo x em *todos* os pontos. Deve-se então recorrer ao uso dos limites:

$$F_0 = \lim_{y_0 \rightarrow 0} F(y_0) \quad (2.13)$$

A grande vantagem da “óptica diferencial” é que não é necessário conhecer de antemão as propriedades das superfícies para realizar os cálculos. Além disso, as próprias superfícies podem ser tratadas como incógnitas, tornando todas as equações apresentadas em equações diferenciais, sujeitas a imposições (por exemplo, de que o foco seja perfeito ou que seja uma função específica da altura). A partir disso, é possível obter o resultado de que o espelho perfeito é a parábola e a lente perfeita é a hipérbole, sem nunca ter estudado sobre seções cônicas. Para outros sistemas,

porém, a matemática se torna complicada demais e soluções analíticas não existem por falta de relações entre as curvaturas e as posições, ou a impossibilidade de isolar a derivada f' e calcular a sua primitiva. Apesar disso, as soluções numéricas para esses problemas ainda podem ser calculadas e são naturalmente esféricas.

A trajetória de um raio em um meio de refração variável 1D $n(x)$ também pode ser calculada partindo da definição de inclinação da reta e aplicando a lei da refração.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \tan \theta(x), \quad r(x_0) = y_0 \quad (2.14)$$

2.1.4 Cálculo Variacional

A primeira elaboração do cálculo variacional foi feita por Leonhard Euler em 1733 para resolver o problema da curva braquistócrona, e posteriormente generalizada de forma analítica por Joseph-Louis Lagrange. Essa abordagem permite encontrar quaisquer funções-incógnitas que minimizam integrais em que elas mesmas são variáveis no integrando, uma ferramenta muito mais potente que o cálculo de mínimos, que se torna um caso particular. Em 1657, Pierre de Fermat postulou que o caminho percorrido por um raio de luz entre dois pontos é aquele em que o tempo de viagem é mínimo, e com isso foi capaz de demonstrar a lei de Snell. Nos termos do cálculo variacional, o princípio correto diria que o tempo de viagem é estacionário, ou seja, é um mínimo local, o menor entre as possibilidades próximas e não entre todas as possibilidades, mesmo que na maioria dos casos seja um mínimo global. Entre as aplicações possibilitadas por essa matemática, está o cálculo da trajetória da luz em um meio não-homogêneo, onde a refração é dada por uma função $n(x, y)$, usando o princípio de Fermat. Assim como no problema da braquistócrona, o tempo de viagem é escrito na forma de uma integral do inverso da velocidade ao longo do espaço:

$$T = \int dt = \int \frac{ds}{v} \quad (2.15)$$

Em seguida, a velocidade é substituída em termos do índice de refração variável:

$$\frac{1}{v} = \frac{n(x, y)}{c} \quad (2.16)$$

E o diferencial da trajetória é reescrito como função de x através do teorema de Pitágoras, válido somente na geometria euclidiana:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (2.17)$$

Dessa forma, obtém-se o tempo total escrito como um funcional em que todas as variáveis dependem (implicitamente) de x .

$$T = \frac{1}{c} \int_{x_i}^{x_f} n(x, y) \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{x_i}^{x_f} F(x, y, y') dx \quad (2.18)$$

A imposição do tempo estacionário $dT/ds = 0$ resulta na equação de Euler-Lagrange, cuja solução é a trajetória $y(x)$ do raio de luz.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) \quad (2.19)$$

O princípio variacional vale no vácuo, onde $n = 1$, na descontinuidade de meios (refração simples) e em meios de refração variável, mas também pode ser usado para calcular o caminho óptico em geometrias não-euclidianas, levando em consideração a curvatura do espaço na definição de ds e a sua relação com a velocidade da luz [1].

2.1.5 Óptica de frentes de onda

Até agora, o caráter ondulatório da luz foi ocultado e a atenção da análise foi voltada para os raios de luz, que representam a direção de propagação das ondas eletromagnéticas, ou seja, são perpendiculares às frentes de onda. A razão é que, quando as dimensões do problema são muito maiores que o comprimento de onda, a difração e interferência de ondas não se manifesta e as duas abordagens são equivalentes. Quando se trata de óptica geométrica, a trajetória da luz é vista de uma perspectiva atemporal, pois todas as posições e direções possíveis das frentes de onda estão sendo representadas simultaneamente. Eis algumas opções para determinar a evolução de frentes de onda:

- Resolver as equações de onda de Maxwell para obter a evolução temporal do vetor de Poynting ou dos campos eletromagnéticos.
- Recuperar a dimensão temporal dos raios de luz e tratá-los como trajetórias de equações cinemáticas $\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}t$. A distribuição de posições e velocidades iniciais caracteriza pontos pertencentes à frente de onda inicial, e sua evolução no tempo é dada totalmente por equações lineares. É válido contanto que não haja fenômenos de interferência.
- Traçar iterativamente a frente de onda a partir de um ponto desejado da distribuição de raios, seguindo a regra de que ela é perpendicular a todos os raios.

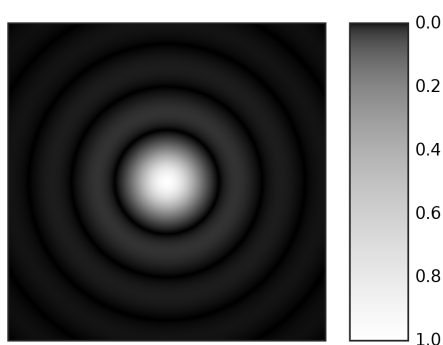
Em tese, as frentes de onda também poderiam ser obtidas analiticamente a partir dos raios de luz usando a definição de trajetória ortogonal (e vice-versa), que envolve a derivação implícita [22], no entanto, a rápida complicação dos cálculos analíticos do traçado de raios impossibilitam a solução das equações diferenciais envolvidas.

Em uma lente perfeita, todos os raios focalizam no mesmo ponto. Uma interpretação equivocada dessa afirmação pode levar à conclusão de que toda a energia do feixe refratado é concentrada em um ponto infinitesimal, mas conforme a luz se focaliza em um volume cada vez menor, as dimensões envolvidas se aproximam cada vez mais do comprimento de onda da luz, tornando impossível ignorar o seu caráter ondulatório.

Devido à natureza da equação da onda, cada ponto das frentes de onda se comporta como uma fonte pontual (que se espalha em todas as direções). Como existe uma quantidade “infinita” de fontes vizinhas em uma frente de onda plana, todas as contribuições negativas e positivas se suavizam e formam uma frente de onda na mesma fase de oscilação. Quando a luz encontra uma abertura finita, a frente de onda é “cortada” e apenas uma parte segue em frente, resultando em uma nova superposição gerada por muito menos pontos. Se a abertura for da ordem do comprimento de onda, a quantidade de fontes pontuais é insuficiente para suavizar as intensidades, e então as fontes passam a interferir construtiva e destrutivamente umas com as outras devido à diferença de fase espacial. Isso faz com que, independentemente da oscilação temporal das ondas, existam regiões com mais ou menos intensidade no espaço, de forma fixa. Em razão disso, quando a luz interceptar um plano (um anteparo ou sensores), o que será visto é um padrão de difração.

As lentes não escapam da difração, pois a própria interface do sistema óptico atua como uma abertura. Em uma lente perfeita, o menor padrão de difração possível é o disco de Airy, que corresponde a um padrão de discos concêntricos cujo espaçamento é da ordem do comprimento de onda da luz, conforme mostra a figura 13.

FIGURA 13 – O DISCO DE AIRY



Fonte: Licenciado sob domínio público, via Wikimedia Commons. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Airy_disk%23/media/File:Airy-pattern.svg. Acesso em 30 abr. 2022.

LEGENDA: Mapa de intensidade luminosa relativa de um disco de Airy.

Dois pontos gerariam no mínimo dois discos de Airy, mas se estiverem próximos demais, os dois padrões irão se sobrepor. O critério de Rayleigh estabelece que não é possível distinguir dois pontos se a sua distância for menor que a do primeiro mínimo do disco de Airy (no melhor dos casos). Sendo λ o comprimento de onda da luz e D o

diâmetro de abertura, a separação angular mínima é dada por

$$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad (2.20)$$

Sendo assim, ao menos na óptica linear, esse resultado impõe um limite máximo de resolução para qualquer sistema de imageamento, e consequentemente não há como otimizá-los para obter focalizações de ordem menor que o disco de Airy sem alterar a abertura ou o comprimento de onda [23].

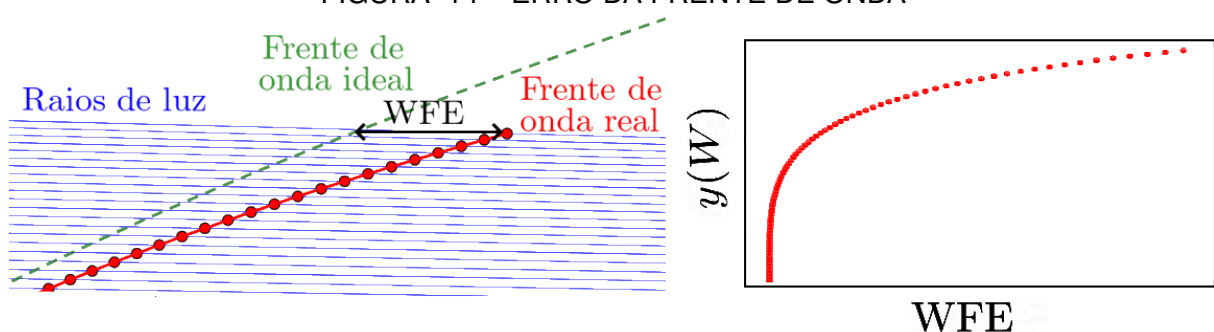
2.2 A MEDIÇÃO DE ABERRAÇÕES

Embora as estruturas geométricas das aberrações sejam notáveis e características, quantificá-las facilita a comparação entre sistemas ópticos e fornece uma melhor noção de como otimizá-los. Existem diversas abordagens semelhantes, mas não matematicamente idênticas, de definir as aberrações ópticas, seja na geometria dos raios ou das frentes de onda. Em essência, todas as medições se baseiam na diferença entre uma grandeza característica do sistema e a respectiva grandeza ideal.

Aberração longitudinal e transversal: Sistemas não-ideais focalizam raios em uma distância F diferente do foco paraxial $F_0 = (\lim_{r \rightarrow 0} F)$. Para raios no plano coaxial, a aberração longitudinal é definida como $\delta_x = F - F_0$. O valor de altura de cada raio quando $x = F_0$ corresponde à aberração transversal $\delta_y = h(F_0)$. Ambas as funções apresentam curvas caracterizadas pela aberração total.

Wavefront error (WFE): Distância entre a frente de onda gerada pelo sistema e uma frente de onda ideal (geralmente esférica) ΔW , como mostra a Figura 14. Também costuma ser medido o seu *root mean square* (RMS) [24]. No caso de raios paralelos, a frente de onda ideal é plana. No caso de uma lente convergente, a frente de onda ideal é esférica e seu raio é igual a distância ao foco. O erro é medido em comprimentos de onda λ , e erros menores que $\lambda/4$ são considerados aceitáveis para um sistema real, pois afetam muito pouco a qualidade óptica do sistema (critério de frente de onda de Rayleigh) [25]. O RMS fornece apenas uma medida da aberração total do sistema, não sendo possível decompor a contribuição das diferentes aberrações.

FIGURA 14 – ERRO DA FRENTE DE ONDA

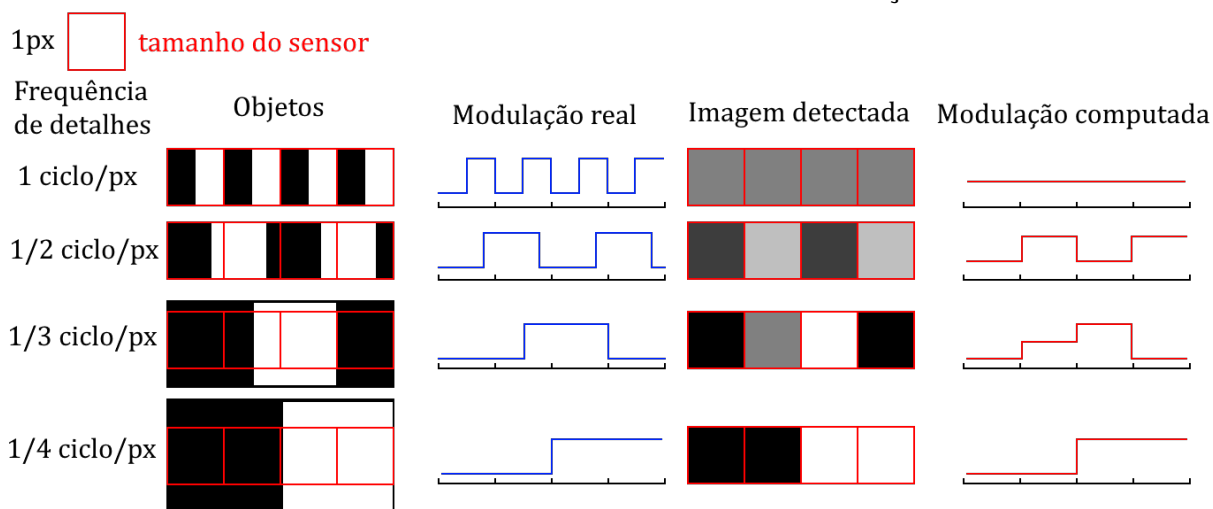


Fonte: O autor.

Em um sistema de imageamento, um ponto que está no foco deve ser detectado como apenas um ponto (ou um disco de Airy, se ele estiver limitado pela difração). No entanto, as aberrações de um sistema óptico fazem com que a superfície detetora receba luz em torno do foco principal numa maior região que a desejada, causando desfoque e perda de contraste. A partir da imagem de um impulso de luz, a *edge-spread function* (ESF) corresponde à intensidade luminosa no espaço analisado. A razão do seu nome é que a sua taxa de variação está associada ao quanto uma borda (variação abrupta) é suavizada pelo sistema, ou seja, perde contraste. Esse gradiente (2D, 3D) fornece a *point-spread function* (PSF) e no caso 1D, a *line-spread function* (LSF) [19].

Mesmo que o sistema óptico seja “perfeito”, a resolução das imagens captadas ainda é limitada pela quantidade finita de sensores do sistema de imageamento, e o olho humano não é uma exceção. A intensidade luminosa percebida pelos sensores é uma média, o que não é um problema quando a imagem é muito maior que a área do sensor. Para detalhes menores, aumentam as chances de eles incidirem entre sensores, dividindo a sua intensidade e perdendo contraste, enquanto detalhes menores que a área do sensor não podem ser diferenciados, como mostra a Figura 15.

FIGURA 15 – TRANSFERÊNCIA DE MODULAÇÃO



Fonte: O autor.

LEGENDA: Imageamento de padrões preto-e-branco, que têm o máximo de contraste possível, com frequências espaciais proporcionais ao tamanho do sensor, medido em pixels. A fase dos padrões foi definida de forma arbitrária.

Nota-se que a transferência de modulação poderia ser perfeita para $1/2$ ciclo/px se houvesse alinhamento com os sensores, mas esse seria um caso particular, como é ilustrado para $1/4$ ciclo/px. Na prática, a modulação transferida corresponde a uma média de todas as possibilidades de alinhamento.

Matematicamente, a imagem de um objeto pode ser definida como uma composição de infinitas ondas com frequências e intensidades diferentes, uma série de

Fourier. Como a PSF caracteriza a imagem e indica o desfoque ao longo do espaço, ao tomar a sua transformada de Fourier, é obtida a *optical transfer function* (OTF) e a sua parte real, a *modulation transfer function* (MTF) que indicam o nível de desfoque ao longo das frequências espaciais [19]. Quando normalizada, costuma ser interpretada como a eficiência de transmissão de detalhes, sendo $MTF = 1$ a transmissão sem nenhuma perda ou suavização da imagem. É de se esperar que a MTF seja uma função decrescente, pois quanto maior o detalhe, menor é a porcentagem alterada da sua modulação original pelos desfoques, enquanto que a função tende a zero para frequências espaciais abaixo da resolução do sistema. No entanto, para sistemas não-ideais, o decrescimento da MTF deixa de parecer linear e pode até apresentar crescimentos locais, criando curvas características de acordo com as aberrações presentes.

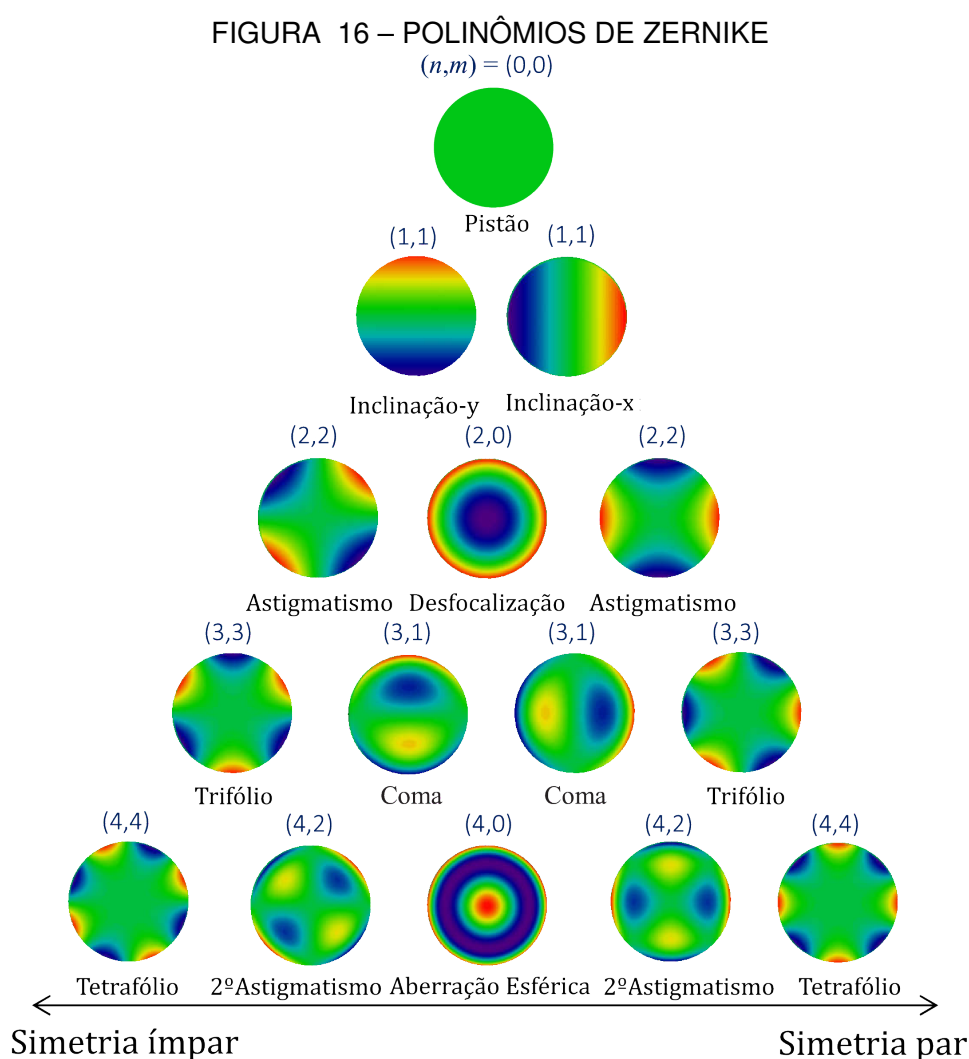
Os polinômios de Seidel foram a maneira com que Ludwig von Seidel dividiu a aberração total da WFE nas cinco aberrações clássicas. Na derivação moderna, assume-se que a WFE de um ponto da frente de onda depende apenas das suas coordenadas x, y e da posição de uma imagem paraxial (x_i, y_i) e, portanto, ela pode ser escrita como uma combinação infinita desses termos, tal qual uma série de Taylor. As variáveis são reescritas em coordenadas cilíndricas, de forma que a posição da imagem paraxial é redefinida como $(x_i, y_i) = (h_i, 0)$, ou seja, é colocada sobre o eixo cilíndrico. Restringindo ao caso em que há simetria de rotação, apenas termos de dimensão par das combinações $x^2 + y^2 = r^2$, $xx_i + yy_i = r \cos \theta h_i$ e $x_i^2 + y_i^2 = h_i^2$ podem estar presentes na série [1][16][23] :

$$\Delta W(r, \theta, h_i) = A_d r^2 + A_t h_i r \cos \theta + A_p h_i^2 + S_s r^4 + S_c h_i r^3 \cos \theta + S_a h_i^2 r^2 \cos^2 \theta + S_f h^2 r^2 + S_d h_i^3 r \cos \theta + A_p^{(2)} h_i^4 + O^6 \quad (2.21)$$

O primeiro termo corresponde à desfocalização, a aberração mais simples. O termo seguinte corresponde ao *tilt* (inclinação), que não afeta a imagem, enquanto o terceiro e o último, que dependem apenas de h_i , são conhecidos como pistão e são redundantes, pois só se relacionam ao valor central (médio) da frente de onda e são comumente ignorados. A cada um dos cinco termos de quarta ordem com coeficiente S (coeficientes de Seidel) está associada uma aberração clássica: aberração esférica, coma, astigmatismo, curvatura de campo e distorção, respectivamente [26]. A teoria de Seidel é considerada *de terceira ordem* pela do ordem polinômio da WFE ser 4, uma vez que a *aberração dos raios* é obtida com a derivada da aberração da onda (reduzindo a ordem para 3), pelas equações apresentadas em [27].

Os polinômios correspondentes às demais aberrações (6^a , 8^a , ... n -ésima ordem) são conhecidos como aberrações de alta ordem e têm $1/8(n+3)(n+5) - 1$ termos [19]. Mais importante, todos esses termos são ortogonais. Isso permite que os coeficientes de cada termo (coeficientes de Seidel) sejam determinados através do produto interno de uma WFE medida com a base de polinômios.

Em 1934 Frits Zernike, futuro ganhador do Nobel de Física de 1953, criou novas funções para o estudo de espelhos, e acabou por expandir ainda mais a análise de aberrações [28]. As funções são compostas por polinômios radiais de grau n multiplicados por fatores angulares de $\cos m\theta$ ou $\sin m\theta$, e são capazes de abranger sistemas assimétricos, ao mesmo tempo que reduzem o número de variáveis para duas (r, θ) . Os dois índices, n e m , representam a quantidade de meridianos afetados e o número de distorções ao longo dos meridianos, respectivamente. A Figura 16 mostra um mapa de cores dos polinômios até a quarta ordem. As aberrações de trevo ($n = m > 2$) são análogas ao astigmatismo, em mais de duas direções (três no trifólio, quatro no tetrafólio, etc.).



Fonte: Adaptado de [28].

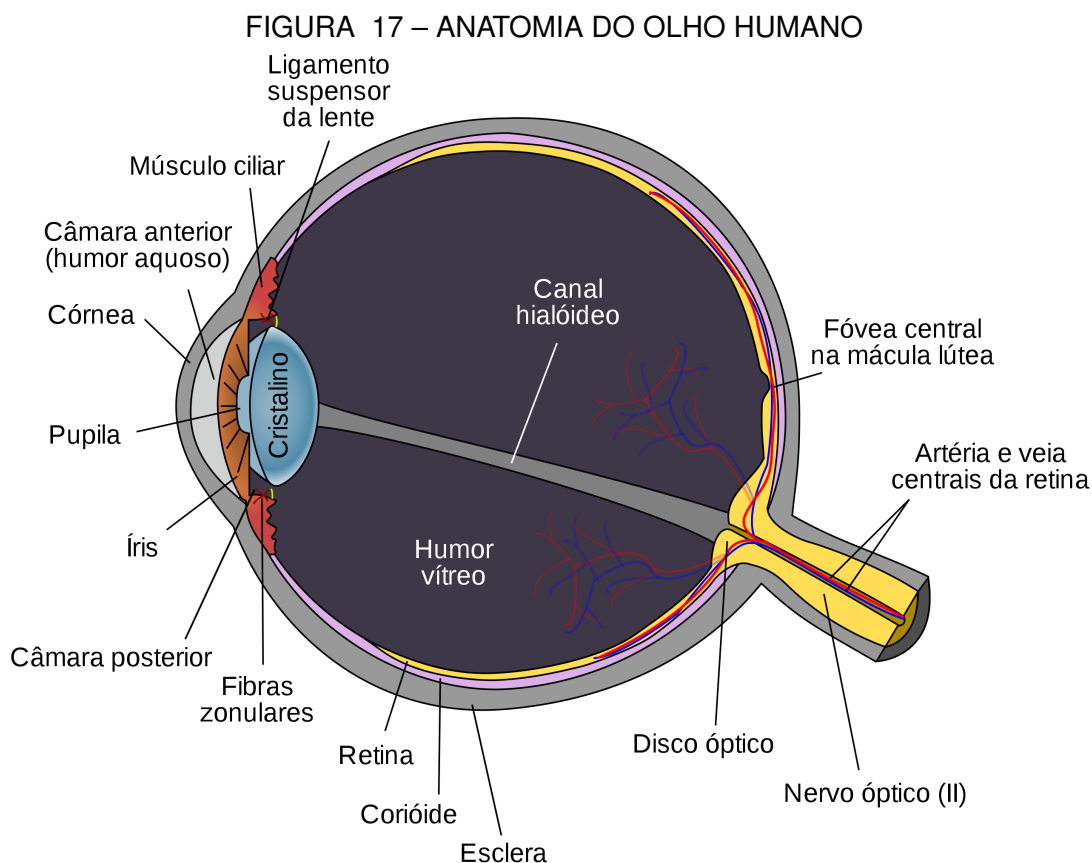
LEGENDA: Polinômios de Zernike dentro do círculo unitário.

Os polinômios de Zernike são utilizados para decompor perfis de frente de onda ou suas funções de erro, e assim como os de Seidel, cada termo corresponde a uma aberração óptica específica. Por serem ortonormais, é possível alterar a contribuição de cada aberração sem afetar as demais. As expressões para os polinômios até a

décima ordem podem ser encontrados em [29].

2.3 OLHO HUMANO E SUA MODELAGEM

O olho humano, assim como qualquer órgão, é composto por diversas estruturas com funções distintas. A Figura 17 apresenta um esquema das componentes principais do olho, sem detalhar suas estruturas internas.



Fonte: Licenciado sob domínio público, via Wikimedia Commons. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Schematic_diagram_of_the_human_eye_horizontal_pt.svg. Acesso em 1 mai. 2022.

LEGENDA: O humor aquoso e o humor vítreo são substâncias que preenchem as respectivas cavidades.

Medições internas das dimensões do “globo” ocular de um humano adulto resultam em um elipsoide de dimensões $24,2\text{ mm}$, $23,7\text{ mm}$ e $22,0 - 24,8\text{ mm}$ ($\pm 2\text{ mm}$ quando há miopia ou hipermetropia) nos planos transversal, sagital e axial, respectivamente [30]. A camada da esclera tem espessura variando de $1 - 0,9\text{ mm}$ nas proximidades do nervo óptico até $0,39 - 0,53\text{ mm}$ perto da junção esclerocorneal (onde se conecta com a córnea) [31]. Para que o sistema óptico focalize raios paralelos na retina, portanto, precisa ter um poder refrativo na ordem de $1/(0,023\text{ m}) = 43,5\text{ D}$.

Um dos grandes contribuidores para o estudo da óptica do olho humano é Rafael Navarro, e os trabalhos em que participou apresentam comparações entre

métodos de medição das aberrações do olho [32], simulações do olho utilizando dados reais a fim de comparar com modelos teóricos e medições experimentais de aberrações e outras grandezas ópticas [33]. Também teve *insights* sobre a qualidade do olho humano e as propriedades do seu sistema óptico, como a sua capacidade de ter um amplo campo de visão com qualidade relativamente homogênea, e realizou uma ampla revisão de literatura de modelos do olho existentes, listando as suas capacidades e problemas. Segundo o autor, os modelos mais completos são construídos com acurácia anatômica, levando em consideração a córnea, a retina e o cristalino, a variação de curvatura do cristalino com a acomodação e o envelhecimento e a sua estrutura GRIN (*Gradient Refractive INdex*, um meio de refração variável) e abrangem situações assimétricas em todo o campo de visão, incluindo a dispersão cromática [34].

2.3.1 Córnea

A córnea é uma lente de menisco negativa, de espessura média de $0,54 - 0,56 \text{ mm}$ composta por seis camadas de material biológico, além do filme lacrimal acima, e, portanto, não é um meio homogêneo. Os modelos do olho costumam utilizar um índice de refração constante de $1,376$. O poder refrativo das superfícies anterior e posterior é de 48 D e -6 D , respectivamente.

Enquanto modelos mais primitivos consideravam a superfície anterior como esférica, a forma que melhor se encaixa às geometrias medidas é um elipsoide rotacionado em relação à linha de visão. Sendo x o eixo óptico, a distância entre a superfície anterior e o centro geométrico da curva é dada pela cônica generalizada:

$$x = \left(\frac{z^2}{R_z} + \frac{y^2}{R_y} \right) \left(1 + \sqrt{1 - (1 + Q_z) \frac{z^2}{R_z^2} - (1 + Q_y) \frac{y^2}{R_y^2}} \right)^{-1} \quad (2.22)$$

Em que as constantes cônicas $Q_z = -0,46 \pm 0,14$ e $Q_y = -0,48 \pm 0,14$ indicam elipsoides, enquanto os valores para os raios de curvatura são de $R_z = 7,63 \pm 0,9 \text{ mm}$ e $R_y = 7,4 \pm 0,28 \text{ mm}$.

Existem diversas formas de tentar medir a topologia da córnea. A superfície anterior e a espessura da córnea são suficientes para caracterizá-la tridimensionalmente. A paquimetria ultrassônica utiliza uma sonda para medir a espessura da córnea em um olho anestesiado, fornecendo mapas de elevação da córnea que delimitam as superfícies anterior e posterior. Já a tomografia de coerência óptica (OCT) utiliza um padrão de anéis iluminados, que refletem de forma diferente nas superfícies anterior e posterior, enquanto um laser lateral faz um escaneamento 3D do olho. A função de erro desse modelo em relação à topologia medida pode ser decomposta em polinômios de Zernike, e a junção dos dois resulta em um modelo extremamente preciso. No entanto, para que os polinômios de Zernike possam ser ajustados é necessária uma medição

muito bem alinhada, dificultada pelo desalinhamento natural entre os eixos de simetria da pupila, da córnea e da linha de visão. Apesar da sua geometria ser boa para reduzir a aberração esférica, essa falta de alinhamento aumenta a presença de astigmatismo, coma e trevo [34]. Olhos com aberrações corneais podem ser corrigidos através de cirurgias refrativas, que retiram material da córnea para ajustar o seu formato. Para isso é necessário não só entender as aberrações da sua geometria e a relação com o cristalino, como também determinar como a córnea irá se alterar com a idade. Uma alteração na córnea pode ser a melhor possível para o momento, mas futuramente causará sérios riscos à visão. Por exemplo, a aberração esférica, medida pelo polinômio de Zernike Z_4^0 , pode crescer ao longo da vida [35].

2.3.2 Cristalino

Após passar pela córnea, a luz entra na câmara anterior, de profundidade de aproximadamente $3,04\text{ mm}$ [36], preenchida pelo humor aquoso, um meio líquido com índice de refração $n = 1,336$, e atinge o cristalino, uma lente biconvexa com um núcleo e um córtex, cujos índices de refração são de aproximadamente $n_{int} = 1,42$ e $n_{ext} = 1,37$. Como os índices de refração relativos ao humor aquoso e ao humor vítreo ($n = 1,3374$) são muito menores que o da córnea com o ar, a refração é menos intensa que a da córnea. A sua função principal é ajustar o poder refrativo do olho e alterar o foco para distâncias diferentes, variando sua espessura e curvatura através do processo de acomodação. O cristalino cresce e perde a elasticidade e transparência com a idade, afetando significativamente a eficiência da acomodação, condição chamada de presbiopia. Por essa complexidade, e por se localizar no interior do olho, carece de informações experimentais em comparação com a córnea, que atrapalha o próprio imageamento do cristalino. As medições em olhos *in vitro* requerem um esticamento artificial, normalmente realizado por braços mecânicos, para simular a tensão dos músculos que realizam a acomodação [37].

A sua estrutura GRIN é ainda mais difícil de ser analisada, sendo modelada através de funções que são ajustadas com valores experimentais, porém a escolha da função pode afetar bastante a contribuição resultante do cristalino e não há consenso sobre a abordagem correta. Entre os exemplos mais completos encontrados na literatura [3], estão os modelos de Navarro et al., como o publicado em 2007 [38] [39], que descreve o cristalino através de curvas cônicas ω_a , ω_i e ω_p , cujos parâmetros estão em função da idade e acomodação. O interior é modelado como várias estruturas conicoidais concêntricas, de forma que o índice de refração é constante nas bordas e atinge um valor máximo n_0 no centro, variando de acordo com um polinômio de grau não-inteiro. Os valores dos parâmetros³ estão dispostos na Tabela 1.

³ Os dois artigos de referência divergem quanto ao termo em azul em f_{pos} . Enquanto em [38] a constante é t_{ant} , em [39] é t_{post} . Foi verificado que a expressão correta está no primeiro artigo.

TABELA 1 – Parâmetros do modelo GRIN adaptativo do cristalino

Variável	Valor	Função
n_0	1,418	Índice de refração máximo
δn	-0,0472	Variação do índice de refração
A	20 a 60	Idade (em anos)
D	0 a 8	Acomodação (em dioptries)
t, t_a, t_p	$2,93 + 0,0236A + D(0,058 - 0,0005A)$ $0,6t, \quad 0,4t$	Espessura das lentes
R_a, R_p	$1 / (1 / (12,7 - 0,058A) + 0,0077D),$ $-1 (1 / (5,9 - 0,013A) + 0,0043D)$	Raio de curvatura
Q_a, Q_p	$-2,8 + 0,025A - 0,0013A^2 - 0,25D,$ $0,1 - 0,06A$	Constante cônica
a_a, a_p	$R_a / (Q_a + 1), \quad R_p / (Q_p + 1)$	Semi-eixo maior
b_a, b_p	$b_a^2 = R_a a_a, \quad b_p^2 = R_p a_p$	Semi-eixo menor
$\varepsilon_a, \varepsilon_p$	-1 (hiperboloides) ou 1 (elipsoides)	Fator de correção da cônica
Δ_a, Δ_p	$\varepsilon_a a_a, \quad t - \varepsilon_p a_p$	Deslocamento no eixo z
f_a, f_p	$(t_a^2 - 2t_a \Delta_a) / a_a^2,$ $(t_p^2 - 2t_p (\Delta_p - t_a) / a_p^2)$	Constantes de normalização
p	$1,1 \times 10^{-7} A^4 + 2,85$	Expoente do raio normalizado

Fonte: Adaptado de Navarro et al. (2007).

As equações utilizadas estão dispostas a seguir ⁴:

$$\omega_a = \sqrt{2R_a z_a - (1 + Q_a)z_a^2}, \quad \omega_p = \sqrt{2R_p(z_p - t) - (1 + Q_p)(z_p - t)^2} \quad (2.23)$$

$$\left(\frac{1}{f_p a_p^2} + \frac{1}{f_a a_a^2} \right) z_i^2 - 2 \left(\frac{\Delta_p}{f_p a_p^2} + \frac{\Delta_a}{f_a a_a^2} \right) z_i + \left(\frac{1}{f_p b_p^2} + \frac{1}{f_a b_a^2} \right) \omega_i^2 + \left(\frac{2\Delta_p t_a - t_a^2}{f_p a_p^2} \right) = 1 \quad (2.24)$$

$$n_a(z, \omega) = n_0 + \delta_n \left(1 - \frac{1}{f_a} \left(\frac{z^2 - 2\Delta_a z}{a_a^2} + \frac{\omega^2}{b_a^2} \right) \right)^p, \quad (z_a, \omega_a) \leq (z, \omega) < (z_i, \omega_i) \quad (2.25)$$

$$n_p(z, \omega) = n_0 + \delta_n \left(\frac{1}{f_p} \left(\frac{z^2 - t_a^2 - 2\Delta_p(z - t_a)}{a_p^2} + \frac{\omega^2}{b_p^2} \right) \right)^p, \quad (z_i, \omega_i) \leq (z, \omega) \leq (z_p, \omega_p) \quad (2.26)$$

⁴ No artigo, os sinais destacados em vermelho são dados pelas constantes ε_a e ε_p . Ao testar as equações para este trabalho, a função resultante não coincidiu com a que estava descrita no texto, se corrigindo apenas ao se fixar ambos termos como positivos. Isso provavelmente decorre de problemas em manipulações envolvendo potenciação com grandezas negativas.

Sendo z a posição no eixo óptico e $\omega^2 = x^2 + y^2$ a distância no plano perpendicular. Os índices a , p e i correspondem às superfícies anterior, posterior e hipotética, respectivamente.

2.3.3 Retina

Por último, a retina é a superfície interna do globo ocular com as células fotossensitivas. As células, por sua vez, estão apontadas aproximadamente para o eixo da pupila e apresentam um pico de sensibilidade para essa direção, de forma a não receber raios espalhados no interior do olho. Medições de alta precisão do sistema óptico total do olho podem ser obtidas através de reflexões na retina: O sensor de frentes de onda Hartmann-Shack (H-S) é composto por uma rede de micro-lentes, que capturam a curvatura local da frente de onda pelo ponto atingido, permitindo reconstruir sua geometria total [40] e a decomposição para análise de aberrações. Os retinógrafos via *Laser Ray Tracing* (LRT) emitem diferentes feixes de laser do mesmo ponto mirados em diferentes pontos da pupila, que então são refletidos no interior do olho e capturados novamente por uma câmera. O emissor e a câmera são controlados de forma sincronizada. A imagem capturada deverá apresentar as aberrações vistas pelo olho, como se a fonte de luz estivesse na retina. Esse método pode fornecer resultados equivalentes aos do H-S, mas exige que o olho permaneça estático por mais tempo [32].

2.4 FERRAMENTAS DE TRAÇADO DE RAIOS E ANÁLISE ÓPTICA

Atualmente, o estudo de espelhos e lentes sem o uso de aproximações é feito por softwares especializados em design óptico, com a capacidade de inserir diversos elementos ópticos em um sistema, alterar seus valores de curvatura, posição, índice de refração, e então traçar raios a partir de uma distribuição escolhida. A partir disso, fornecem dados de medida de aberrações, análise de frentes de onda, capacidade de magnificação e focalização, PSF, entre outros, e possibilitam a otimização automática do sistema para reduzir aberrações. O traçado dos raios costuma ser feito de duas formas:

Sequencial A sequência em que ocorrem as interações dos raios e os tipos de interações (refração, reflexão e absorção) são fixas e definidas previamente pelo usuário.

Não-sequencial Aqui, a trajetória dos raios não é conhecida a priori, pois eles partem da origem e são evoluídos no tempo, enquanto algoritmos identificam a superfície mais próxima a ser atingida. O tipo de interação que ocorre é escolhido aleatoriamente de acordo com os materiais envolvidos. Ao computar uma grande

quantidade de raios, se obtém distribuições de medidas características do sistema, que podem então ser analisadas estatisticamente (método de Monte Carlo) [41].

O [Zemax/OpticStudio](#), disponível comercialmente desde 1990, dispõe de uma vasta lista de funcionalidades que vai além das citadas acima [42]. O software se consolidou como a principal opção para o uso na indústria e na pesquisa devido à sua sofisticação e variedade de ferramentas.

O [KDP-2 Optical Design and Analysis Software](#) é um software de desenho óptico gratuito, desenvolvido a partir de 1987 na linguagem Fortran. Possibilita a obtenção de uma variedade de medidas a partir de um sistema óptico altamente personalizável.

Dentro da linguagem de programação Python, existem diversas bibliotecas capazes de realizar as mais diversas operações matemáticas, com uma precisão limitada apenas pela capacidade de memória e processamento do computador, permitindo o desenvolvimento de uma infinidade de ferramentas. Usuários podem criar algoritmos de imageamento em 3D e disponibilizá-los [43] [44] ou usar algoritmos mais avançados como o Fresnel [45], que é potencializado pelo algoritmo de aceleração NVIDIA Optix [46]. Além disso, existem algumas bibliotecas criadas especificamente para o design óptico que podem ser instaladas com facilidade, como a RayTracing (limitada a duas dimensões) [47].

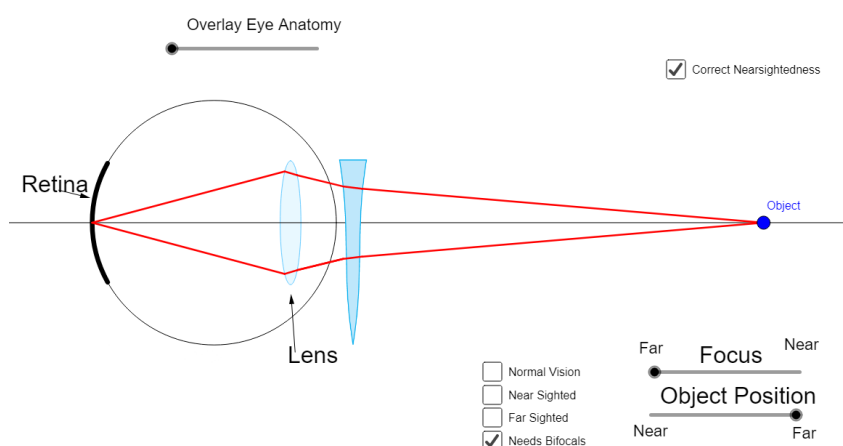
O [GeoGebra](#) é uma plataforma matemática que integra geometria, álgebra e cálculo de forma dinâmica (pode ser alterada em tempo real e animada) e com uma interface simples e intuitiva, ou seja, também tem os blocos de construção necessários para uma ferramenta de traçado de raios. O software está disponível em diversas línguas, utiliza código aberto e uma licença garante que as construções feitas através dele são de livre uso, cópia e distribuição, contanto que não sejam comercializadas ou utilizadas para adquirir algum tipo de vantagem ou compensação financeira sem autorização dos desenvolvedores.

No GeoGebra, cada arquivo pode ter duas disposições 2D e uma em 3D⁵ ao mesmo tempo, e a quantidade de variáveis e funções inseridas é limitada apenas pela memória alocada para o programa. O GeoGebra 5 é uma versão mais antiga com menos funcionalidades, programado em Java, mas que pode apresentar uma performance melhor. Já o GeoGebra 6 está em desenvolvimento contínuo e apresenta uma interface mais moderna, incluindo formatação automática de equações, e pode ser utilizado baixado para uso em computadores e celulares, além da versão on-line

⁵ Infelizmente, a disposição 3D não produz mapas de cor. Ainda é possível fazê-los manualmente através de abordagens que exploram a pintura dos objetos.

no próprio site. Todos os arquivos podem ser armazenados no dispositivo ou enviados para a nuvem, onde há a opção de torná-los públicos. Tom Walsh, professor de física e usuário da plataforma, produziu e disponibilizou diversas simulações de física, entre elas, uma simulação do olho humano (Figura 18).

FIGURA 18 – SIMULAÇÃO DIDÁTICA DO OLHO HUMANO NO GEOGEBRA



Fonte: Captura de tela em <https://www.geogebra.org/m/SjGyuKNs>. Acesso em 1 de maio de 2022.

LEGENDA: Arquivo público *Optics of the Human Eye* no GeoGebra. Arquivo público *Optics of the Human Eye* no GeoGebra. A simulação ilustra a acomodação do cristalino para diferentes posições de um objeto, assim como o uso de lentes para corrigir a miopia e a hipermetropia.

Apesar de ser apenas uma construção geométrica sem computação direta da refração, esse exemplo já pode ser visto como um exemplo da capacidade do GeoGebra para representar o sistema óptico do olho humano em duas dimensões.

2.4.1 Estrutura e Funcionalidades do GeoGebra

A ferramenta principal do GeoGebra é a Linha de Entrada, um campo onde os objetos são definidos. O separador decimal utilizado é o ponto, enquanto a vírgula separa coordenadas e argumentos de comandos. Os objetos podem existir em duas categorias: Um *objeto livre* é aquele em que em sua definição não há dependências com nenhum outro objeto, enquanto os *objetos dependentes* dependem de ao menos um objeto. A consequência disso é que apenas os objetos livres podem ter seus valores numéricos alterados, e os objetos dependentes (seus *descendentes*) são atualizados automaticamente. Um objeto dependente será excluído automaticamente se um dos seus *ascendentes* for removido, assim como se tornará indefinido (representado pelo símbolo ?) se um dos seus ascendentes se tornar indefinido. Quando o descendente de um objeto também for seu ascendente, o programa irá impedir a ação de ser concluída devido a uma definição circular (Exemplo: 1º, $A = B$; 2º, $B = 2C$; 3º, $C = 1 - A$).

A Janela de Álgebra é uma lista contendo todos os objetos já inseridos no arquivo, e pode ser organizada para dispor os objetos por tipo ou ordem de dependência. Os objetos podem ser dispostos em duas Janelas de Visualização 2D, além de uma Janela de Visualização 3D. Suas propriedades gráficas como cor, espessura de linha, transparência, símbolo, etc. podem ser ajustadas e vinculadas a objetos ao serem selecionados nessas três janelas, enquanto que as propriedades que os definem, como posição inicial, ângulo, etc. podem ser ajustados em tempo real manualmente usando os Controles Deslizantes (ou, em alguns casos, clicando e arrastando o objeto em si com o mouse) ou usando a função Animar, que varia os controles com incrementos e velocidades escolhidas pelo usuário. A aba de Configurações permite editar diversos parâmetros de todas as janelas, assim como as propriedades dos objetos. Além disso, o programa dispõe de uma função de Planilha de Cálculos, que permite importar e exportar listas de dados e manipulá-los com fórmulas recursivas. A descrição completa das capacidades do GeoGebra pode ser encontrada no seu Manual em <https://wiki.geogebra.org/en/Manual>.⁶

Em seguida, estarão dispostos alguns dos objetos matemáticos que são necessários ou úteis para qualquer construção no GeoGebra. As definições dentro do programa estarão dispostas no lado esquerdo das equações, enquanto as suas equivalências em notação matemática convencional estarão no lado direito.

Ponto

$$P = (X, Y, Z) \quad (2.27)$$

Extrair coordenada de um objeto

$$\begin{aligned} x(P) &\equiv P \cdot \hat{x} \\ y(P) &\equiv P \cdot \hat{y} \\ z(P) &\equiv P \cdot \hat{z} \end{aligned} \quad (2.28)$$

Vetor a partir de um ponto

$$\vec{V} = \text{Vetor}(\text{Ponto}) \equiv P_x \hat{x} + P_y \hat{y} + \dots \quad (2.29)$$

Vetor definido por dois pontos (parte de (1) e acaba em (2))

$$\vec{V} = \text{Vetor}((\text{Ponto 1}), (\text{Ponto 2})) \quad (2.30)$$

Produto Escalar (aceita pontos e vetores como argumento do comando)

$$\text{ProdutoEscalar}(A, B) \equiv A \cdot B = A_x B_x + A_y B_y + \dots \quad (2.31)$$

⁶ O link direciona para o manual original, em inglês. A enciclopédia do GeoGebra também existe em [português](#), mas nem todos os artigos foram traduzidos até o momento.

Se dois pontos/vetores forem escritos em conjunto, então o GeoGebra interpretará automaticamente como um produto interno:

$$A B \equiv A \cdot B \quad (2.32)$$

Exemplo: Extrair a coordenada x do ponto $P = (X, Y)$ fazendo o produto interno com o ponto $(1, 0)$ (matematicamente equivalente ao comando $x(P)$):

$$P_x = P(1, 0) = P_x \cdot 1 + P_y \cdot 0 = x(P) \quad (2.33)$$

Função

$$f(x_1, x_2, \dots) = \text{função} \quad (2.34)$$

Se for o caso de uma função de múltiplas variáveis independentes (não confundir com variáveis livres), sua definição deve explicitar tais dependências. Exemplos:

$$f = a + x^2 \quad (2.35)$$

Sendo a uma constante (variável livre). Apenas x é variável independente, então a função pode ser escrita apenas como f . Por outro lado,

$$f(x, y, a) = a + y x^2, \quad g(j_3, K_A, \Theta_{344}) = \Theta_{344} + K_A j_3^2 \quad (2.36)$$

Nesse caso, a é uma variável independente. Note que f e g são matematicamente equivalentes, pois ao chamar, por exemplo, $f(w, 2, 1)$ e $g(w, 2, 1)$, necessariamente escolhe-se valores para as três variáveis independentes e obtém-se a mesma função $1 + 2w^2$. Os nomes das variáveis, portanto, são arbitrários, apenas a **posição** da variável⁷ e seu papel na definição importam na prática.

Função restrita a um intervalo

$$\text{Se}(a \leq x \leq b, f) \equiv f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (2.37)$$

Função paramétrica

$$c = \text{Curva}(\text{Expressão } x, \text{Expressão } y, \text{Variável}, \text{Valor Inicial}, \text{Valor Final}) \quad (2.38)$$

Exemplo:

$$\text{Curva}(\cos(t), \sin(t), t, 0, 2\pi) \equiv c : \left. \begin{array}{l} x = \cos(t) \\ y = \sin(t) \end{array} \right\} 0 \leq t \leq 2\pi \quad (2.39)$$

⁷ Quando há muitas variáveis independentes, existe a possibilidade de o programa forçadamente colocá-las nos argumentos da função em ordem alfabética. Por exemplo, definir $f(x, b, d, c, a, e, h, f, g)$ resultaria em $f(a, b, c, d, e, f, g, h, x)$. A razão e as condições para isso acontecer não são encontradas no manual.

Derivada de uma função

$$\text{Derivada}(\text{função}, \text{variável}, \text{ordem}) \equiv \frac{d^n}{dx_j^n} [f] \quad (2.40)$$

Primitiva de uma função

$$\text{Integral}(\text{função}, \text{variável}) \equiv \frac{d^{-1}}{dx_j^{-1}} [f] \quad (2.41)$$

Esse comando só fornecerá de fato a primitiva se houver solução analítica para a integral indefinida da função, e a quantidade de passos e técnicas de integração necessárias para obter tal resultado não for muito grande. Do contrário, o comando retornará uma indefinição.

Integral definida (se primitiva for calculável)

$$\text{Integral}(\text{função}, \text{valor inicial}, \text{valor final}) \equiv \left[\frac{d^{-1}}{dx_j^{-1}} [f] \right]_{x_i}^{x_f} \quad (2.42)$$

Integral numérica (compatível com qualquer função)

$$\text{IntegralNumérica}(\text{função}, \text{valor inicial}, \text{valor final}) \approx \int_{x_i}^{x_j} f(x) dx \quad (2.43)$$

É necessário cautela ao escolher o intervalo de integração para evitar indeterminações do tipo 0/0 e assíntotas verticais, caso existam.

Expansão em série de Taylor

$$\text{PolinômioDeTaylor}(\text{função}, x_0, m) \equiv \sum_{n=0}^m \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (2.44)$$

Função inversa (se existir solução analítica):

$$\text{FunçãoInversa}(\text{função}) \equiv f^{-1}(x) \quad (2.45)$$

Raízes numéricas de uma função

$$\text{Raízes}(\text{função}, x \text{ inicial}, x \text{ final}) \equiv x | f(x) = 0 \quad (2.46)$$

Interseção numérica

$$\text{Interseção}(\text{Objeto}, \text{Objeto}) \equiv (x_i, y_i) | o_1(x_i, y_i) = o_2(x_i, y_i) \quad (2.47)$$

Pode retornar mais de um ponto se houverem múltiplas soluções, ou resultar em indeterminação mesmo quando existe uma solução.

Conjunto (definição manual)

$$A = \{A_1, A_2, \dots, A_m\} \equiv \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Conjunto (definição automática)

$$\text{Sequência}(\text{expressão}, \text{variável}, \text{valor inicial}, \text{valor final}) \quad (2.49)$$

Esse comando permite criar conjuntos a partir de expressões matemáticas. Exemplo:

$$\text{Sequência}(1 + n^2, n, 1, 3) = \{2, 5, 10\} \quad (2.50)$$

Extrair elemento do conjunto Seja A_i o i -ésimo elemento do conjunto A , então

$$A(i) \equiv A_i \quad (2.51)$$

Se o elemento for uma função de múltiplas variáveis x_m , então elas devem ser explicitadas em conjunto com a posição do elemento:

$$A(i, x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv A_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.52)$$

Matriz Um conjunto em que seus elementos são conjuntos, com o mesmo número de elementos, compõe uma matriz retangular.

$$M = \{\{A\}, \dots, \{Z\}\} \equiv \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_1 & Z_2 & \dots & Z_m \end{bmatrix} \quad (2.53)$$

Extrair elemento M_{ij} da matriz Utiliza dois índices, sendo i a linha e j a coluna:

$$M(i, j) \equiv M_{ij} \quad (2.54)$$

Analogamente ao caso de conjuntos, se M_{ij} for uma função de múltiplas variáveis x_m ,

$$M(i, j, x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv M_{ij}(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2.55)$$

Elementos dos conjuntos não podem ser definidos usando outros elementos das matrizes às quais eles mesmos pertencem, pois isso torna a matriz uma definição circular. Se cada linha da matriz só fosse calculada após a linha anterior, então seria possível definir toda a matriz diretamente por um processo iterativo, sem a necessidade de definir os conjuntos um por vez.

Rastro O rastro é uma funcionalidade que mantém a imagem dos objetos na tela mesmo quando as variáveis que os definem são alteradas, e pode ser habilitado para todos os objetos dispostos em uma das janelas de visualização marcando a opção Habilitar Rastro. Sempre que as definições em si forem alteradas ou o campo de visão for deslocado, ampliado ou reduzido, o rastro é automaticamente “limpo” da tela. Essa ferramenta permite visualizar simultaneamente uma quantidade arbitrária de estados de um objeto matemático, sem a necessidade de criar um objeto para cada estado, o que economiza muita memória e processamento. Usando a Planilha, também é possível gravar os valores de uma determinada grandeza conforme o objeto se move.

Scripting Todos os objetos do GeoGebra podem ser incrementados com funções adicionais na linguagem JavaScript ou na linguagem própria do GeoGebra (GeoGebra Script), que, por sua vez, é uma seleção limitada de códigos do Javascript, em notação mais acessível. Uma das desvantagens do GeoGebra Script é que, assim como a Linha de Entrada da própria plataforma, não há indentação e os comandos são escritos em apenas uma linha, o que pode tornar a leitura e modificação de códigos longos um trabalho complicado e confuso.

Para cada objeto, existem três possibilidades de código: o *Click Script* (Ao Clicar), o *Update Script* (Ao Atualizar) e o *Global JavaScript*. O código Ao Clicar é executado apenas ao clicar no objeto na janela de visualização, enquanto o código Ao Atualizar é executado automaticamente quando o objeto ou seus ascendentes são atualizados por qualquer meio. O JavaScript Global só pode ser programado em JavaScript e não se restringe a essas condições.

Para facilitar com que os usuários explorem toda a potencialidade do GeoGebra com o JavaScript, os desenvolvedores disponibilizam uma vasta lista de comandos compatíveis com o programa, que pode ser acessada em https://wiki.geogebra.org/en/Reference:GeoGebra_Apps_API.

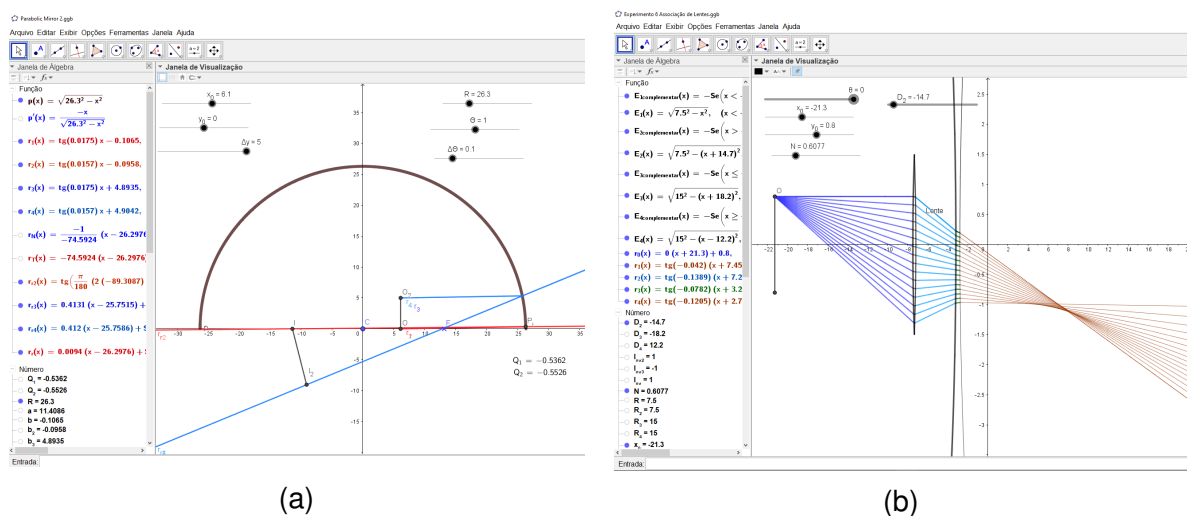
3 METODOLOGIA

3.1 ESCOLHA DA PLATAFORMA

Tendo o objetivo de construir uma simulação de óptica geométrica do olho humano, capaz de alternar entre modelos teóricos, primeiro é necessário escolher uma plataforma que suporta o desenvolvimento dos algoritmos que irão estruturar a simulação. Para este trabalho, foram desenvolvidos algoritmos capazes de inserir no sistema óptico e personalizar uma quantidade arbitrária de superfícies contínuas e/ou segmentadas e processar interações de reflexão e refração de uma quantidade arbitrária de raios de luz partindo de qualquer configuração inicial, em meios homogêneos ou de refração variável, assim como determinar suas frentes de onda.

A plataforma GeoGebra foi escolhida pela gratuidade em múltiplos dispositivos e a facilidade para construir, visualizar e testar estruturas matemáticas, sem necessitar o conhecimento de uma linguagem de programação específica, possibilitando a criação de uma prova de conceito da simulação, que pode então ser portada para plataformas mais gerais e avançadas através de programação, como em Python. Outro motivo foi a experiência prévia do autor com a plataforma, que a utilizou muito frequentemente durante a graduação para criar construções que auxiliassem em estudos de Física e Cálculo, nas quais se incluem simulações de óptica geométrica, como a formação de imagens em espelhos e associações de lentes, dispostas na Figura 19, que foram desenvolvidas a partir do ano de 2019 e serviram de base para os algoritmos desenvolvidos neste trabalho.

FIGURA 19 – TRABALHOS ANTERIORES NO GEOGEBRA



Fonte: O autor.

LEGENDA: a) Formação de imagens em espelhos (27 de março de 2019).
b) Associação de lentes (3 de outubro de 2019).

O GeoGebra 5 foi escolhido ao invés do 6 devido à melhor performance no aplicativo para computador e a facilidade para alterar a memória RAM alocada, sendo o padrão 247MB e o máximo em torno de 1.5GB para usuários de Windows, pois é um aplicativo Java 32-bit (o programa foi utilizado com alocação máxima de RAM). Além disso, a formatação em tempo real na Linha de Entrada do GeoGebra 6 é frequentemente um empecilho na hora de escrever códigos complexos. No entanto, ao fazer isso, assumiu-se o risco de lidar com *bugs* para os quais não há expectativa de conserto em um futuro próximo pelos desenvolvedores, visto que o foco foi transferido para a versão seguinte do programa.

Certos processos podem levar a resultados matematicamente equivalentes, mas computacionalmente requerem uma quantidade diferente de verificações e cálculos, e isso deve afetar o tempo de processamento. Isso significa que um algoritmo mais generalizado, que faz diversas verificações para determinar qual caso particular está sendo calculado, exigirá mais processamento do que um algoritmo que apenas calcula diretamente tal caso particular. A otimização de cada função do GeoGebra está além do conhecimento e do controle do autor. Isso significa que funcionalidades assumidas como simples podem exigir um tempo de processamento muito maior do que as assumidas como complexas, pela maneira que o GeoGebra e o Java operam, e isso não necessariamente é uma desvantagem inerente aos algoritmos escolhidos. Se um algoritmo causa mais lentidão no GeoGebra do que outro, isso não implica que isso também vai acontecer em outra plataforma. A questão da lentidão só foi contornada quando o tempo de processamento tornou a simulação inutilizável.

3.2 FUNDAMENTAÇÃO DA SIMULAÇÃO

A partir daqui, serão descritos todos os componentes utilizados na construção da simulação do olho humano, desde as equações e definições até o raciocínio por trás dos algoritmos que a compõem. A ordem de escrita irá priorizar os objetos livres e estruturas principais, para só então introduzir os algoritmos que dependem dessas construções fundamentais para funcionar. Sempre que possível, as estruturas matemáticas estarão escritas tanto na forma que foram inseridas no GeoGebra quanto em notação matemática convencional, de forma a facilitar a leitura e possíveis adaptações dos algoritmos em outras plataformas no futuro. O traçado de raios foi feito de forma sequencial.

É preciso salientar que cada um dos algoritmos utilizados neste trabalho foram primeiramente desenvolvidos, implementados e testados em simulações isoladas, principalmente ao longo do primeiro semestre de 2022, e não necessariamente na ordem em que serão apresentados neste capítulo, conforme mostra a Tabela 2.

TABELA 2 – Períodos de desenvolvimento das primeiras versões funcionais de cada algoritmo.

Algoritmo	Primeira versão funcional
Traçado de raios	Março de 2019
Lei da Reflexão	
Lei da Refração	Outubro de 2019
Refração variável em x ou y ¹	Fevereiro de 2020
Lente de correção de aberrações ²	15 de fevereiro a 24 de março de 2022
Interação com lente segmentada	4 de abril de 2022
Evolução da frente de onda	10 de abril de 2022
Refração variável em x e y	13 a 16 de abril de 2022
Medição de aberrações	28 de junho a 8 de julho de 2022
Implementação do modelo do cristalino	10 a 21 de agosto de 2022

Os algoritmos também foram readaptados mais de uma vez para funcionar com os demais de forma integrada, em uma única construção do GeoGebra, e esses processos serão descritos ao fim do capítulo. Naturalmente, as notações e definições utilizadas foram alteradas diversas vezes ao longo do desenvolvimento deste trabalho até a integração mais recente, e aqui serão apresentadas apenas nessas formas mais refinadas.

As tabelas 3, 4 e 5 apresentam as notações adotadas para cada tipo de grandeza na simulação integrada.

TABELA 3 – Valores escolhidos pelo usuário, que definem as quantidades de elementos envolvidos na simulação e suas características

Variáveis livres	Símbolo
Posição	X_0, Y_0
Ângulo	θ_0
Passo	$\Delta s, \Delta X, \Delta Y, \Delta \theta$
Tempo	t
Índice de refração	n_i
Coeficientes de função	c_{nm}

¹ Feito na plataforma de programação em Python do Projeto Jupyter, limitou-se ao traçado de raios em regiões retangulares onde o índice de refração varia unidimensionalmente. Foi descontinuado.

² Gera lentes que transformam *inputs* de ângulos em quaisquer *outputs*. A aberração dos espelhos não-parabólicos para raios paralelos ao eixo óptico foi resolvida com esse algoritmo. Foi deixado de fora deste trabalho pois ainda não foi adaptado para o contexto do olho humano.

TABELA 4 – Quantidade de estruturas matemáticas da simulação.

Quantidade	Parâmetro	Função
Raios de luz	N_R	define a quantidade de raios de luz iniciais
Funções	N_F	define a quantidade de interações e meios materiais
Segmentos	N_{Si}	ajusta a precisão da i-ésima função, se ela for definida por pontos discretos

TABELA 5 – Quantidade de conjuntos que agrupam as variáveis livres e dependentes da simulação.

Variáveis	Nº de conjuntos	Nº de elementos
Coeficientes de função	N_F	4
Funções	1	N_F
Índice de refração	1	N_F ou $N_F + 1$
Posição	N_F ou $N_F + 1$	N_R
Tempo de viagem	N_F ou $N_F + 1$	N_R
Ângulos	$2N_F$ ou $2N_F + 1$	N_R
Segmentos	nº de funções	N_{Si}
Vértices	segmentadas	$N_{Si} + 1$

As informações necessárias para descrever os raios são a posição inicial $I = (I_x, I_y)$ e o ângulo θ . A distribuição de raios iniciais é de livre escolha e regulável através das variáveis $X_0, Y_0, \theta_0, \Delta X, \Delta Y$ e $\Delta\theta$. É conveniente escolher N_R como um número ímpar e distribuir os raios igualmente nos dois sentidos, de forma que o raio central esteja no meio do conjunto, definindo as variáveis iniciais da seguinte forma ³:

$$I_{x1} = \text{Sequência}(X_0 + n\Delta X, n, -\text{floor}(N_R/2), \text{floor}(N_R/2))$$

$$\equiv \left[X_0 - \lfloor \frac{N_R}{2} \rfloor \Delta X \quad \dots \quad X_0 \quad \dots \quad X_0 + \lfloor \frac{N_R}{2} \rfloor \Delta X \right] \quad (3.1)$$

$$I_{y1} = \text{Sequência}(Y_0 + n\Delta Y, n, -\text{floor}(N_R/2), \text{floor}(N_R/2))$$

$$\equiv \left[Y_0 - \lfloor \frac{N_R}{2} \rfloor \Delta Y \quad \dots \quad Y_0 \quad \dots \quad Y_0 + \lfloor \frac{N_R}{2} \rfloor \Delta Y \right] \quad (3.2)$$

$$\theta_1 = \text{Sequência}(\theta_0 + n\Delta\theta, n, -\text{floor}(N_R/2), \text{floor}(N_R/2))$$

$$\equiv \left[\theta_0 - \lfloor \frac{N_R}{2} \rfloor \Delta\theta \quad \dots \quad \theta_0 \quad \dots \quad \theta_0 + \lfloor \frac{N_R}{2} \rfloor \Delta\theta \right] \quad (3.3)$$

³ Para incluir números pares, a expressão correta para o valor inicial das sequências é $1 + \lfloor -N_R/2 \rfloor$

É possível escolher $\Delta\theta = 0$ para obter distribuições paralelas ou $\Delta X = \Delta Y = 0$ para distribuições angulares pontuais. Configurações mais específicas podem ser obtidas definindo os três incrementos de forma não-linear e/ou em função dos demais.

3.3 DEFINIÇÃO DO SISTEMA ÓPTICO

Tendo as condições iniciais estabelecidas, a primeira estrutura matemática a ser definida deve ser o sistema óptico, uma vez que ele é o objeto de análise da simulação. As superfícies do sistema óptico podem ser criadas a partir de funções com coeficientes variáveis, de forma que quaisquer parâmetros podem ser escolhidos. A essas funções generalizadas será atribuído o nome de **famílias de funções-superfície (FFS)**. Uma versão do algoritmo que tem suporte a uma quantidade arbitrária de FFSs foi desenvolvida e está descrita no Apêndice 2, no entanto, essa funcionalidade não foi necessária para este trabalho inicial, visto que a cônica generalizada (Eq. 2.22) é uma função que consegue abranger sozinha os círculos, elipses e hipérboles, que são as curvas utilizadas na grande maioria dos modelos do olho humano. Além da função contínua, a lente segmentada também foi adicionada como opção. Para indicar o tipo de função, N_F variáveis f_{type_i} foram inseridas em um conjunto F_I :

$$F_I = \{f_{type_1}, f_{type_2}, \dots, f_{type_{N_F}}\} \quad (3.4)$$

De forma que, por exemplo, $F_I = \{2, 1, 1, 1\}$ indica que a primeira função é segmentada, enquanto as outras três são contínuas. Note que as variáveis são escritas uma a uma na definição do conjunto, o que inviabiliza variar N_F livremente. É possível definir o conjunto automaticamente, através de uma sequência em que os elementos são chamados pelo comando Objeto():

$$F_I = \text{Sequência}(\text{Objeto}("f_{type_i}"), 1, i, N_F) \quad (3.5)$$

No entanto, em um fórum da comunidade do GeoGebra, um dos moderadores alertou que o comando Objeto() é instável e pode ocasionar erros (que ocorreram durante o desenvolvimento deste trabalho), especialmente se variáveis que dependem da Planilha estiverem vinculadas ⁴. Ao longo do texto, algumas matrizes poderiam ser definidas usando os comandos Sequência() e Objeto() de forma análoga à Eq. 3.5 e se ajustarem automaticamente ao se alterar N_F . Para evitar o *bug*, no entanto, todas serão definidas como na Eq. 3.4, exigindo que os conjuntos sejam editados manualmente sempre que o número de linhas for aumentado.

Ao assumir que o sistema óptico tem simetria de rotação em torno do seu próprio eixo, pode-se também restringir a análise para um plano que é coaxial com

⁴ A discussão pode ser lida em https://www.reddit.com/r/geogebra/comments/w0y55a/comment/ighqrpj/?utm_source=reddit&utm_medium=web2x&context=3. Isso resultou na descontinuação da segunda integração dos algoritmos.

o eixo óptico sem muitas perdas, de forma que na definição da cônica generalizada, $Z = 0$, $R_x = R_y = R$ e $Q_x = Q_y = Q$, simplificando a Eq. 2.22 para:

$$x(y) = \frac{y^2}{R + \sqrt{R^2 - (1 + Q)y^2}} \quad (3.6)$$

Ao isolar y , obtém-se a curva na forma de uma função $y = f(x)$:

$$f(x) = \pm \sqrt{2Rx - x^2(1 + Q)} \quad (3.7)$$

E os valores dos dois vértices são obtidos fazendo $f(V) = 0$

$$V_1 = 0, \quad V_2 = \frac{2R}{1 + Q} \quad (3.8)$$

Com a adição de uma variável V , que representa a coordenada x do primeiro vértice, tem-se uma FFS para a cônica generalizada com uma variável para cada uma de suas propriedades:

$$f_1(x, V, Q, R) \equiv \pm \sqrt{2R(x - V) - (1 + Q)(x - V)^2} \quad (3.9)$$

A solução da equação de incidência (Eq. 2.7) pode ser escrita como uma nova função S_1 , que depende dos parâmetros da curva (denotados por c_i) e os parâmetros da reta ($a_1 = X$, $a_2 = Y$ e $a_3 = \theta$):

$$S_1(a_1, a_2, a_3, c_1, c_2, c_3) = \frac{a_1 \tan^2(a_3) - a_2 \tan(a_3) + c_1(1 + c_2) + c_3}{\sec^2(a_3) + c_2} \cdot \text{sgn}(c_3) \frac{\sqrt{(a_1 \tan^2(a_3) - a_2 \tan(a_3) + c_1(1 + c_2) + c_3)^2 - (\sec^2(a_3) + c_2)((a_2 - a_1 \tan(a_3))^2 + c_1(c_1(c_2 + 1) + 2c_1c_3))}}{\sec^2(a_3) + c_2} \quad (3.10)$$

Pode-se também estabelecer um ponto de “corte” para a função, cuja coordenada x vale K . Como cada uma das N_F funções irá utilizar valores diferentes para esses quatro parâmetros, convém criar uma matriz dos coeficientes C , de dimensões $N_F \times 4$, em que cada linha estão contidos os valores de V, Q, R e K :

$$C = \{\{c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}\}, \dots, \{c_{N_F1}, c_{N_F2}, c_{N_F3}, c_{N_F4}\}\} \equiv \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{N_F1} & c_{N_F2} & c_{N_F3} & c_{N_F4} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

A matriz C possibilita a criação de um conjunto F , que contém todas as funções contínuas delimitadas pelos respectivos valores de corte, através de um condicional que leva em consideração o sinal do raio de curvatura (que define a concavidade da

curva em relação ao eixo x):

$$\begin{aligned}
 F &= \text{Sequência}(\text{Se}(\text{sgn}(C(j, 3)) \geq 1, \text{Se}(C(j, 1) \leq x \leq C(j, 4), f_1(x, C(j, 1), C(j, 2), C(j, 3))), \\
 &\quad \text{Se}(C(j, 4) \leq x \leq C(j, 1), f_1(x, C(j, 1), C(j, 2), C(j, 3)))), j, 1, N_F) \\
 &\equiv \left\{ f(x, c_{11}, c_{12}, c_{13}) \begin{cases} c_{11} \leq x \leq c_{14}, & \text{sgn}(c_{13}) > 0 \\ c_{14} \leq x \leq c_{11}, & \text{sgn}(c_{13}) < 0 \end{cases}, \right. \\
 &\quad \left. \dots, f(x, c_{N_F1}, c_{N_F2}, c_{N_F3}) \begin{cases} c_{N_F1} \leq x \leq c_{N_F4}, & \text{sgn}(c_{N_F3}) > 0 \\ c_{N_F4} \leq x \leq c_{N_F1}, & \text{sgn}(c_{N_F3}) < 0 \end{cases} \right\} \quad (3.12)
 \end{aligned}$$

Para fins visuais, um conjunto complementar pode ser definido para que a parte negativa das superfícies fique visível (dado que elas só estão definidas para $y \geq 0$):

$$F_- = -F \quad (3.13)$$

Como a medição do ângulo de incidência em relação ao eixo x depende da derivada da função-superfície, convém criar um conjunto auxiliar que contém as derivadas das funções escolhidas.

$$F_D = \text{Derivada}(F) \equiv \left\{ \frac{dF(1)}{dx}, \frac{dF(2)}{dx}, \dots \right\} \quad (3.14)$$

Tendo as fronteiras entre os meios delimitadas pelas superfícies, os índices de refração de cada meio homogêneo também podem ser agrupados em um conjunto.

$$N = \{n_1, n_2, \dots\} \quad (3.15)$$

Sendo n_1 o índice de refração do meio *anterior* a $F(1)$. Se o sistema óptico for aberto, existem $N_F + 1$ meios materiais com os quais a luz irá interagir, enquanto que se for fechado, apenas N_F meios.

3.3.1 Funções-superfície segmentadas

A motivação para a construção de lentes segmentadas está no uso de medições reais de superfícies, como a córnea, dentro de programas de simulação óptica. Uma das possibilidades é assumir que a superfície medida pode ser aproximada por uma curva conhecida, como a cônica generalizada, e fazer uma regressão com os pontos para obter os melhores valores para os coeficientes. Apesar de o GeoGebra ter comandos de regressão, propõe-se aqui um método capaz de tratar conjuntos de pontos como vértices de uma superfície poligonal, uma lente segmentada. É razoável pensar que, com uma quantidade suficientemente grande de pontos, cujo espaçamento é de ordem muito menor que o tamanho da lente, as propriedades dessa lente fictícia serão semelhantes às da superfície real e de curvas contínuas que poderiam estar sendo utilizadas no seu lugar.

No GeoGebra, as coordenadas dos vértices podem ser importadas para a Planilha, por exemplo, nas colunas B e C, e transformadas em conjuntos de coordenadas (x_{si}, y_{si}) , sendo i a ordem da superfície no sistema óptico. Se $N_{Si} = 100$, então:

$$\begin{aligned} x_{si} &= \text{RemoverIndefinidos}(B1 : B101) \\ y_{si} &= \text{RemoverIndefinidos}(C1 : C101) \end{aligned} \quad (3.16)$$

A partir desses valores, é possível construir um conjunto de vértices que representa a lente, para fins de visualização:

$$\text{ver}_i = \text{Sequência}(\text{Segmento}((x_s(n), y_s(n)), (x_s(n+1), y_s(n+1))), n, 1, N_S) \quad (3.17)$$

O ângulo de cada segmento em relação ao eixo x pode ser medido pela função atan2 , que utiliza dois argumentos, y e x . Será convencionado que os valores da coordenada y_s das listas de pontos estarão em ordem decrescente, de forma que não será necessário colocar condicionais para calcular o ângulo corretamente em todos os casos.

$$\theta_{si} = \text{Sequência}(\text{atan2}(y_{si}(j+1) - y_{si}(j), x_{si}(j+1) - x_{si}(j)), j, 1, N_S) \quad (3.18)$$

Uma equação de interseção entre duas retas sempre fornecerá uma solução finita, a não ser que sejam paralelas. Isso apresenta um problema para o caso das lentes segmentadas, pois um raio incidente interceptará todas retas que definem os segmentos em algum ponto. Para que a solução da equação de incidência seja única, deve-se considerar apenas a solução que de fato pertença à lente segmentada. Em tese, o comando Interseção (Eq. 2.47) é a saída mais simples, no entanto, nos testes feitos o comando falhou muito facilmente nas proximidades dos vértices.

Para contornar esse problema, foi desenvolvido um método analítico para encontrar o segmento correto. Seja i o número da interação, $X_{si}(n, j)$ a coordenada x de interseção do n -ésimo raio com a j -ésima reta que define um segmento, $Ix_{i+1}(n)$ a solução real para o n -ésimo raio e $id_i(n)$ o número do segmento que corresponde à solução real, então

$$\begin{aligned} X_{si}(n, j) &\in [x_{si}(j), x_{si}(j+1)) \\ \tan(\theta_i)(X_{si}(n, j) - Ix_i) + Iy_i &\in [y_{si}(j), y_{si}(j+1)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

É necessário, portanto, encontrar $X_{si}(n, j)$ e $id_i(n)$. O primeiro pode ser determinado através da equação de incidência entre cada raio e cada segmento:

$$\tan(\theta_i(n))(X_{si}(j, n) - Ix_i(n)) + Iy_i(n) = \tan(\theta_{si}(j))(X_{si}(j, n) - x_{si}(j)) + y_{si}(j) \quad (3.20)$$

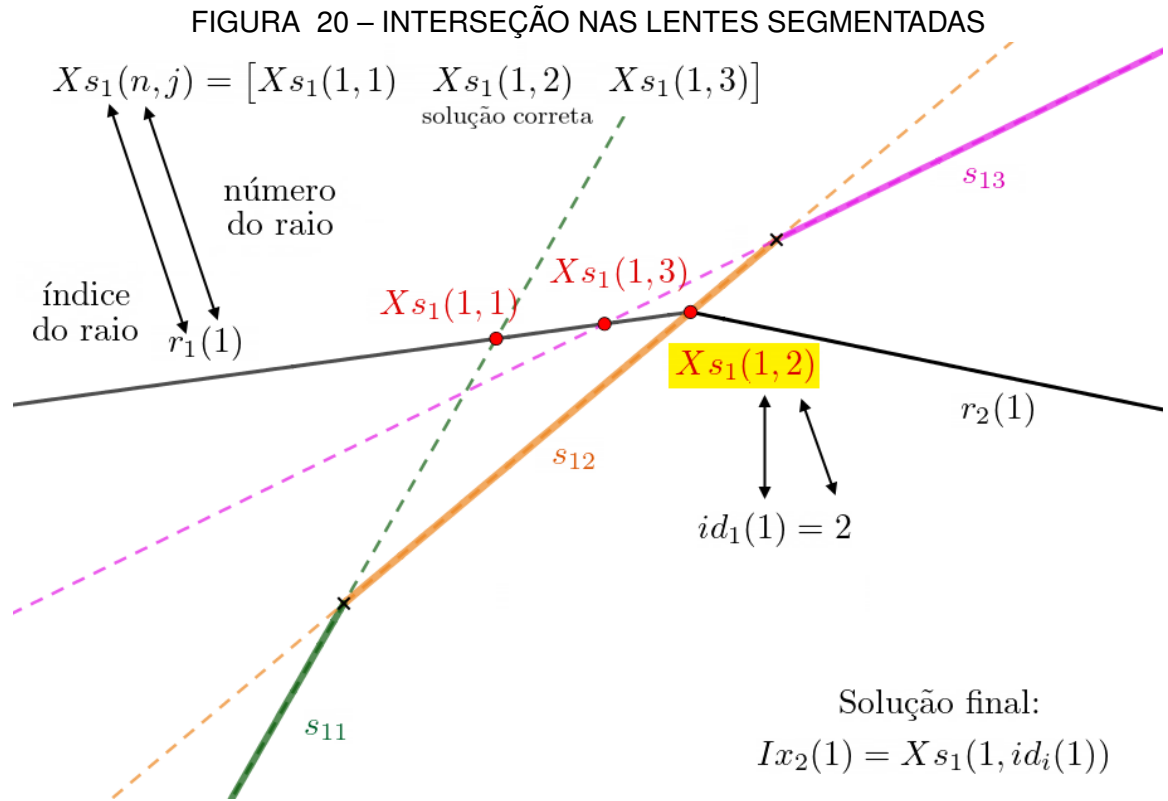
Ao levar em consideração todas as possibilidades, obtém-se uma matriz $N_{Si} \times N_R$, em que os elementos de cada linha são as soluções das equações de incidência de cada

raio com o respectivo segmento. A Figura 20 mostra o caso simples onde há apenas um raio e três segmentos, resultando em uma matriz de soluções 1×3 .

$$X_{s_i} = \text{Sequência}(\text{Sequência}(\frac{\tan(\theta_i(n)) Ix_i(n) - \tan(\theta_{si}(j)) x_{si}(j) + y_{si}(j) - Iy_i(n)}{\tan(\theta_i(n)) - \tan(\theta_{si}(j))}, j, 1, N_{Si}), n, 1, N_R) \quad (3.21)$$

Agora, para cada raio, é possível criar uma função-filtro, que soma todas as soluções (ou seja, soma a sua respectiva linha da matriz X_{s_i}), mas coloca peso zero sobre os valores que não pertencem aos respectivos segmentos, resultando na única solução correta.

$$\begin{aligned} \text{Dom}(s_x, s_y, x_1, x_2, y_1, y_2) &= \text{Se}(\text{Se}(x_1 < x_2, x_1, x_2) < s_x \leq \text{Se}(x_1 < x_2, x_2, x_1), \\ &\quad \text{Se}(\text{Se}(y_1 < y_2, y_1, y_2) < s_y \leq \text{Se}(y_1 < y_2, y_2, y_1), 1, 0), 0) \\ &\equiv \begin{cases} 1, & s_x \in (x_1, x_2) \text{ e } s_y \in (y_1, y_2) \\ 0 \end{cases} \quad (3.22) \end{aligned}$$



Fonte: O autor.

LEGENDA: Representação do problema da lente segmentada. Apesar de cada segmento estar bem delimitado, as retas que os definem matematicamente se estendem por todo o espaço (representadas pelas retas pontilhadas), então existe uma solução da equação de interseção $X_{s_1}(1, j)$ para cada um deles (os pontos em vermelho), mesmo que a solução real $Ix_2(1) = X_{s_1}(1, 2)$ seja única (note que os demais pontos não pertencem aos próprios segmentos).

O argumento s_x será cada valor de $X_{s_i}(n, j)$, enquanto s_y corresponde à coordenada y da n -ésima reta do raio de luz para esse valor de x , ou seja, $\tan(\theta_i)(X_{s_i}(n, j) - Ix_i) + Iy_i$, caracterizando assim as duas coordenadas do ponto de incidência a ser filtrado. Ao multiplicar a função-filtro pelo índice do segmento, obtém-se o índice do segmento ao qual a solução real pertence, ou seja, $id_i(j)$:

$$id_i = \text{Sequência}(\text{Soma}(j \cdot \text{Dom}(X_{s_i}(n, j), \tan(\theta_i(n))(X_{s_i}(n, j) - Ix_i(n)) + Iy_i(n), x_{si}(j), x_{si}(j+1), y_{si}(j), y_{si}(j+1)), j, 1, N_{si} - 1), n, 1, N_R) \quad (3.23)$$

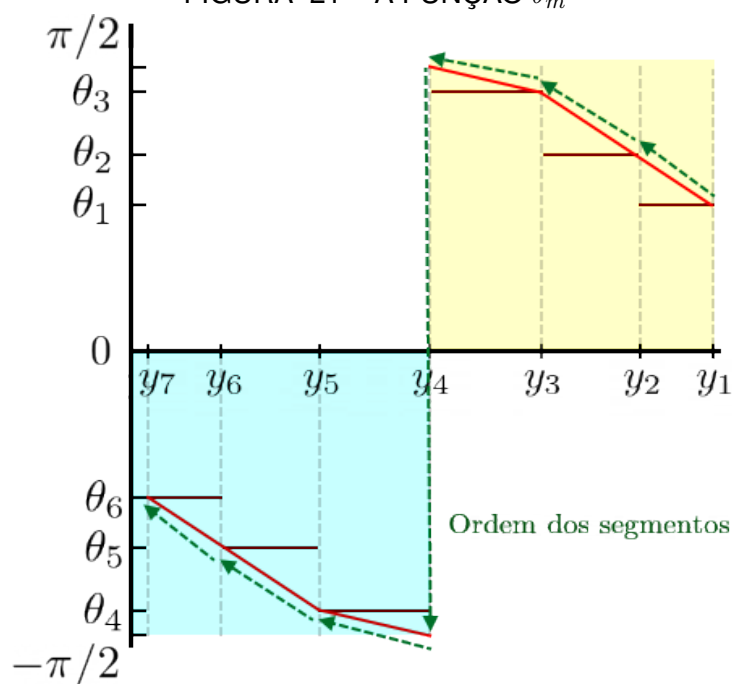
O ângulo utilizado no cálculo da refração será o elemento id_i do conjunto θ_s .

3.3.2 Variação contínua do ângulo ao longo do segmento

Uma desvantagem imediata das funções segmentadas é que dois raios paralelos incidindo sobre o mesmo segmento são desviados com o mesmo ângulo, ou seja, permanecem paralelos entre si após passarem pela lente e não focalizam. Aqui, foi feita uma tentativa de contornar esse problema através de uma função que cria uma falsa suavidade, de forma que, na interação, os raios são refratados como se o ângulo do segmento variasse continuamente de um ponto para o outro. Existem diversas maneiras de fazer essa transformação, entre elas está a seguinte função:

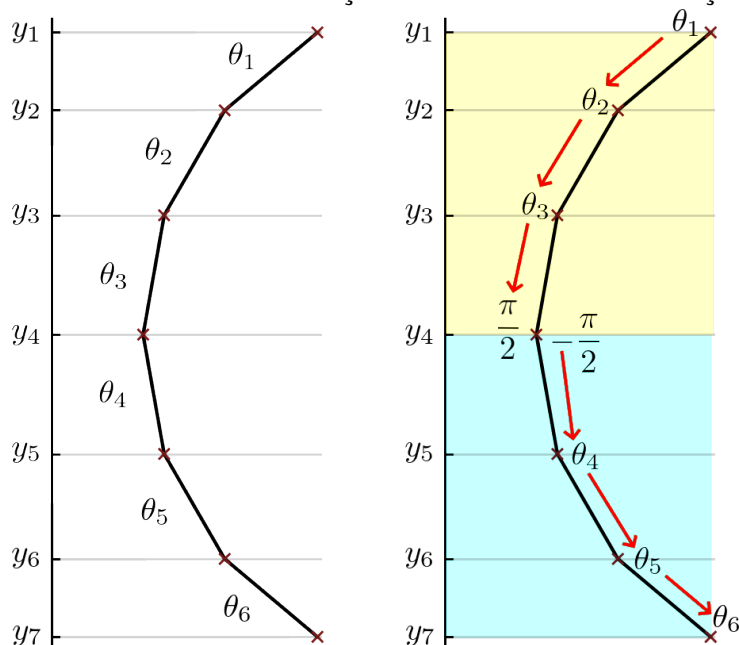
$$\begin{aligned} \theta_m(x, \theta_0, \theta_1, \theta_2, x_0, x_1, x_2) &= \text{Se}(\text{sgn}(\theta_2) \text{sgn}(\theta_1) \neq 1, \frac{\pi/2 - \theta_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \theta_1, \\ &\quad \text{Se}(\text{sgn}(\theta_0) \text{sgn}(\theta_1) \neq 1, \frac{\theta_1 + \pi/2}{x_2 - x_1}(x - x_1) - \pi/2, \\ &\quad \text{Se}(\text{sgn}(\theta_1) == 1, \frac{\theta_2 - \theta_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \theta_1, \frac{\theta_1 - \theta_0}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \theta_0))) \\ &\equiv \begin{cases} \frac{\pi/2 - \theta_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \theta_1, & \text{sgn}(\theta_2) \text{sgn}(\theta_1) \neq 1 \\ \frac{\theta_1 + \pi/2}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \frac{\pi}{2}, & \text{sgn}(\theta_1) \text{sgn}(\theta_0) \neq 1 \\ \frac{\theta_2 - \theta_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \theta_1, & \text{sgn}(\theta_1) = 1 \\ \frac{\theta_1 - \theta_0}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \theta_0, & \text{sgn}(\theta_1) = -1 \end{cases} \quad (3.24) \end{aligned}$$

Onde os índices 0, 1, 2 representam o segmento anterior, atual e o seguinte, respectivamente. Os condicionais são necessários devido à inversão de sinal do ângulo em relação ao eixo x ao passar do semi-plano superior para o inferior, e o princípio de que a superfície é perpendicular ao eixo óptico no vértice. A relação $\text{sgn}(a)\text{sgn}(b) \neq 1$ ocorre quando o sinal de a não é igual ao sinal de b , o que, neste contexto, indica a necessidade de tornar o ângulo $\pm\pi/2$, pois deve haver uma inclinação vertical na transição entre um par de ângulos positivo e negativo. O gráfico da função está representado na Figura 21 e o resultado da transformação na Figura 22.

FIGURA 21 – A FUNÇÃO θ_m 

Fonte: O autor.

LEGENDA: Gráfico da função θ_m para uma lente esférica de 6 segmentos (em vermelho) ao longo do eixo y , sobreposta ao gráfico dos ângulos antes da transformação (em vermelho escuro).

FIGURA 22 – TRANSFORMAÇÃO ANGULAR PELA FUNÇÃO θ_m 

Fonte: O autor.

LEGENDA: Representação dos ângulos da lente segmentada ao longo do eixo y antes (à esquerda) e após a aplicação da função θ_m (à direita). Na suavização, entre y_1 e y_2 , o ângulo “sentido” pelo raio incidente na refração varia linearmente entre θ_1 e θ_2 . O mesmo raciocínio se aplica para os demais segmentos.

Posteriormente, uma lente segmentada cujos vértices coincidem com a superfície anterior da córnea foi construída, e o traçado de raios foi testado para o caso contínuo, abrupto e suavizado, e o número de segmentos foi variado de 4 a 500. Com 500 segmentos e fazendo alturas iniciais da ordem de $10^{-4} mm$, o valor do foco paraxial para as lentes segmentadas não coincidiu com a da lente contínua, apesar do padrão de refração visto ser praticamente idêntico. Na verdade, o foco paraxial convergiu para um valor bem definido e diferente do caso analítico conforme N_S crescia. Para investigar a origem dessa discrepância, foi feito um gráfico do poder refrativo $D = 1/F$ em função da altura inicial, que variava de $10^{-4} mm$ a $1 mm$, seguido de um gráfico do foco “paraxial” para o valor de altura que melhor convergiu em ambos os casos em função do número de segmentos. Os resultados estão dispostos na seção 4.2.

3.4 TRAÇADO DE RAIOS

Tendo definido todos os objetos matemáticos envolvidos no sistema óptico, pode-se começar a computar o traçado dos raios. As coordenadas de incidência dos raios sobre as funções-superfície podem ser obtidas numericamente utilizando o comando Interseção:

$$I_i = \text{Sequência}(\text{Interseção}(f_i(x), \tan(\theta_{i-1}(n))(x - x(I_{i-1}(n))) + y(I_{i-1}(n)), n, 1, N_R)) \quad (3.25)$$

No entanto, por ser um método numérico, o comando exige especificar um intervalo específico no qual as soluções serão procuradas, e mesmo quando a solução se encontra no intervalo, não há garantia de que o GeoGebra conseguirá encontrar a solução. Como tanto a cônica generalizada quanto a lente segmentada têm soluções analíticas para a equação de incidência (já apresentadas), o cálculo exato será priorizado. O valor de cada Ix_i será a função S aplicada nos parâmetros dos respectivos raios e funções caso elas sejam cônicas, ou dadas pelo método descrito na seção 3.3.1 casos as superfícies sejam segmentadas, enquanto Iy_i será o valor da equação da reta de cada raio avaliada em Ix_i .

$$Ix_{i+1} = \text{Sequência}(\text{Se}(F_I(i) == 1, S_1(Ix_i(n), Iy_i(n), \theta_i(n), C(i, 1), C(i, 2), C(i, 3)), Xs_i(id_i(n), n)), n, 1, N_R) \quad (3.26)$$

$$Iy_i = \text{Sequência}(\text{sgn}(\tan(\theta_{i-1}(n))(Ix_i(n) - Ix_{i-1}(n)) + Iy_{i-1}(n))F(i-1, Ix_i(n)), n, 1, N_R) \quad (3.27)$$

Tendo as coordenadas da incidência, a etapa seguinte é calcular a refração. Primeiro, obtém-se os ângulos normais à superfície nos pontos de incidência θ_N com a Eq. 2.8:

$$\theta_{Ni} = \text{Sequência}(\text{Se}(F_I(i) == 1, \text{sgn}(Iy_{i+1}(j)) \arctan\left(-\frac{1}{F_D(i, Ix_{i+1}(j))}\right), \text{sgn}(Iy_{i+1}(j)) \arctan\left(\frac{-1}{\tan(\theta_s(id_i(j)))}\right)), j, 1, N_R) \quad (3.28)$$

Em seguida, calcula-se os ângulos dos raios seguintes (refratados) θ_i usando a Eq. 2.10:

$$\theta_{i+1} = \text{Sequência}\left(\theta_{Ni}(j) - \arcsen\left(\frac{N(i)}{N(i+1)} \sin(\theta_{Ni}(j) - \theta_i(j))\right), j, 1, N_R\right) \quad (3.29)$$

Os ângulos de reflexão ρ_i também podem ser determinados usando a Eq. 2.9.

$$\rho_i = \text{Sequência}(2\theta_{Ni}(j) - \theta_i(j), j, 1, N_R) \quad (3.30)$$

Os valores dos ângulos dos raios principais podem ser armazenados em uma única matriz Θ :

$$\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{N_F+1}\} = \begin{bmatrix} \theta_1(1) & \cdots & \theta_1(N_R) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \theta_{N_F+1}(1) & \cdots & \theta_{N_F+1}(N_R) \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Por fim, a matriz das posições Π conterà os pontos iniciais e os pontos de interseção dos raios de luz com cada superfície:

$$\begin{aligned} \Pi &= \{(Ix_1, Iy_1), (Ix_2, Iy_2), \dots, (Ix_{N_F+1}, Iy_{N_F+1})\} \\ &\equiv \begin{bmatrix} (X_0, Y_0) - \lfloor \frac{N_R}{2} \rfloor (\Delta X, \Delta Y) & \cdots & (X_0, Y_0) + \lfloor \frac{N_R}{2} \rfloor (\Delta X, \Delta Y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (Ix_{N_F+1}(1), Iy_{N_F+1}(1)) & \cdots & (Ix_{N_F+1}(N_R), Iy_{N_F+1}(N_R)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.32)$$

Como todos os parâmetros das retas já estão contidos nas matrizes Π e Θ , para traçar todas as retas basta uma única definição, a matriz dos raios Γ

$$\begin{aligned} \Gamma &= \text{Sequência}(\text{Sequência}(\text{Se}(\text{Se}(\text{EstáDefinido}(x(\Pi(j+1, n))), x(\Pi(j, n)) \leq x \leq \\ &\quad x(\Pi(j+1, n)), x(\Pi(j, n)) \leq x), \tan(\Theta(j, n))(x - x(\Pi(j, n))) + y(\Pi(j, n))), n, 1, N_R), j, 1, N_F + 1) \\ &\equiv \begin{bmatrix} r_1(x, 1) & \cdots & r_1(x, N_R) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{N_F+1}(x, 1) & \cdots & r_{N_F+1}(x, N_R) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

$$\text{onde } r_i(x, n) = \tan(\theta_i(n))(x - Ix_i(n)) + Iy_i(n), \quad Ix_i(n) \leq x \leq Ix_{i+1}(n) \quad (3.33)$$

3.5 FRENTES DE ONDA

Neste trabalho, o método escolhido para computar as frentes de onda é o cinemático, descrito na seção 2.1.5. O tempo de viagem entre dois pontos em uma situação de movimento retilíneo uniforme é dado por:

$$t = \frac{x_f - x_i}{v \cos \theta} \quad (3.34)$$

O tempo de viagem entre cada superfície de interação do sistema óptico T'_i pode ser calculado pela equação acima, utilizando os valores das matrizes Π e Θ e considerando a velocidade da luz como unitária, de forma que $n = \frac{1}{v}$.

$$T'(i, j) = \text{Sequência}(\text{Sequência}((x(\Pi(i+1, j)) - x(\Pi(i, j)))N(i) / \cos(\Theta(i, j))), j, 1, N_R) i, 1, N_F) \quad (3.35)$$

$$\equiv \begin{bmatrix} T'_{11} & T'_{12} & \cdots & T'_{1N_R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T'_{N_F 1} & T'_{N_F 2} & \cdots & T'_{N_F N_R} \end{bmatrix}$$

Para obter o tempo em que ocorre cada interação a partir do ponto de partida, uma matriz de tempo total T pode ser criada, estabelecendo o tempo inicial de todos os pontos da frente de onda como 0 e o tempo final como o tempo em que ocorre a última interação ⁵. O valor absoluto do tempo em cada interação será dado pelo somatório dos tempos de viagem que ocorreram até ali:

$$T_{1j} = 0 \quad (3.36)$$

$$T_{ij} = \sum_{i=1}^i T'_{(k-1)j} \quad i \leq 1 \quad (3.37)$$

$$T = \text{Sequência}(\text{Sequência}(\text{Soma}(\text{sgn}(i)T_R(k, j), k, 1, i), j, 1, N_R), i, 0, N_F)$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ T'_{11} & T'_{12} & \cdots & T'_{1N_R} \\ T'_{11} + T'_{21} & T'_{12} + T'_{22} & \cdots & T'_{1N_R} + T'_{2N_R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{N_F} T'_{i1} & \sum_{i=1}^{N_F} T'_{i2} & \cdots & \sum_{i=1}^{N_F} T'_{iN_R} \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

A matriz dos pontos da frente de onda $W(t)$ é definida por equações de movimento retilíneo uniforme, restritas aos respectivos intervalos temporais de viagem.

⁵ Se o sistema for aberto, é possível definir um valor arbitrário de tempo final T_F , e então alterar a matriz com um condicional para que todos os seus valores sejam T_F na linha $N_F + 1$, e alterar o valor final de i para $N_F + 1$

No GeoGebra, a variável livre t pode ser variada automaticamente, de forma a animar a evolução da frente de onda entre $t = 0$ e $t = T_F$.

$$W = \text{Sequência}(\text{Sequência}(\text{Se}(T(j+1, k) > t \geq T(j, k), \\ \Pi(j, k) + \frac{t - T(j, k)}{N(j)} (\cos(\Theta(j, k)), \sin(\Theta(j, k)))), k, 1, N_R), j, 1, N_F + 1) \quad (3.39)$$

Por fim, os pontos podem ser conectados por segmentos w .

$$w = \text{Sequência}(\text{Sequência}(\text{Segmento}(W(k, n), W(k, n+1)), n, 1, N_R - 1), k, 1, N_F + 1) \quad (3.40)$$

3.6 MEDIÇÃO DE ABERRAÇÕES

Os algoritmos de medição de aberrações desenvolvidos são capazes de calcular a aberração transversal, longitudinal e o erro da frente de onda, para fontes alinhadas ao eixo óptico. Como as três medidas dependem da posição do foco paraxial F_0 , convém defini-lo primeiro. Ao fazer $\theta_0 = 0$ e escolher Y_0 como um valor muito próximo, mas diferente de zero, o raio central da distribuição estará no regime paraxial. Ao inserir os valores do último raio central na equação do foco (Eq. 2.11), tem-se que:

$$F_0 = x(\Pi(N_F, \lceil N_R/2 \rceil)) - \frac{y(\Pi(N_F, \lceil N_R/2 \rceil))}{\tan(\Theta(N_F, \lceil N_R/2 \rceil))} \quad (3.41)$$

Os valores de x para os quais cada raio intercepta o eixo óptico podem ser armazenados em um único conjunto:

$$\phi = \text{Sequência} \left(x(\Pi(N_F, n)) - \frac{y(\Pi(N_F, n))}{\tan(\Theta(N_F, n))}, n, 1, N_R \right) \quad (3.42)$$

Por definição, a aberração longitudinal para cada altura inicial será a diferença $\phi(n) - F_0$:

$$\delta_x = \text{Sequência}((\phi(n) - F_0, Iy_1(n)), n, 1, N_R) \quad (3.43)$$

A aberração transversal será a coordenada y de cada reta do raio de luz quando $x = F_0$:

$$\delta_y = \text{Sequência}((\tan(\Theta(N_F, n))(F_0 - x(\Pi(N_F, n))) + y(\Pi(N_F, n)), Iy_1(n)), n, 1, N_R) \quad (3.44)$$

O erro de frente de onda exige um cálculo mais complexo, pois a frente de onda evolui no tempo, e portanto depende da variável t . Os pontos da frente de onda foram definidos na Eq. 3.39 de forma que não assumem nenhum valor se t não pertencer ao intervalo de tempo correspondente, e para cada um dos meios materiais, há uma linha de pontos na matriz, então é preciso selecionar a linha correta para cada valor de tempo. Para isso, foi criada a variável W_i :

$$W_i = \text{Soma}(\text{Se}(\text{Se}(\text{EstáDefinido}(T(n+1, \lceil N_R/2 \rceil), \\ T(n, \lceil N_R/2 \rceil) < t < T(n+1, \lceil N_R/2 \rceil), T(n, \lceil N_R/2 \rceil) < t), n, 0)), n, 1, N_F + 1) \quad (3.45)$$

Dessa forma, o ponto central da frente de onda correspondente ao valor atual de instante de tempo é

$$W_c = W(W_i, \lceil N_R/2 \rceil) \quad (3.46)$$

Isso permite definir um círculo centrado em F_0 , cujo raio é a distância entre o foco e o ponto da frente de onda do raio paraxial no atual instante de tempo, representando a frente de onda ideal:

$$c = \text{Círculo}((F_0, 0), F_0 - x(W_c)) \quad (3.47)$$

O erro da frente de onda pode então ser definido como a distância horizontal entre cada ponto da frente de onda W e a curva c em função da altura do ponto avaliado. O comando `Distância()` pode ser utilizado, mas é mais seguro inserir a solução analítica:

$$\text{wfe} = \text{Sequência}((x(W(W_i, n)) - F_0 + \text{sgn}(y(W(n)))\sqrt{(x(W_c) - F_0)^2 - y(W(W_i, n))^2}, \\ y(W(W_i, n))), n, 1, N_R) \quad (3.48)$$

Uma simulação à parte foi feita afim de visualizar a evolução da frente de onda ao passar por uma lente anaclástica (cujo foco é perfeito) e por uma lente esférica, além de obter a medição das respectivas WFEs, na expectativa de que a frente de onda convergisse exatamente em um ponto para o primeiro caso e sua WFE fosse 0, enquanto que o mesmo não ocorreria para o segundo caso. Os resultados estão dispostos na seção 4.1.

3.7 REFRAÇÃO VARIÁVEL

A refração variável ocorre em meios não-homogêneos, como o cristalino, onde o índice de refração varia de forma gradual ao longo do espaço.

$$n(x, y) = [\text{função de } x \text{ e } y] \quad (3.49)$$

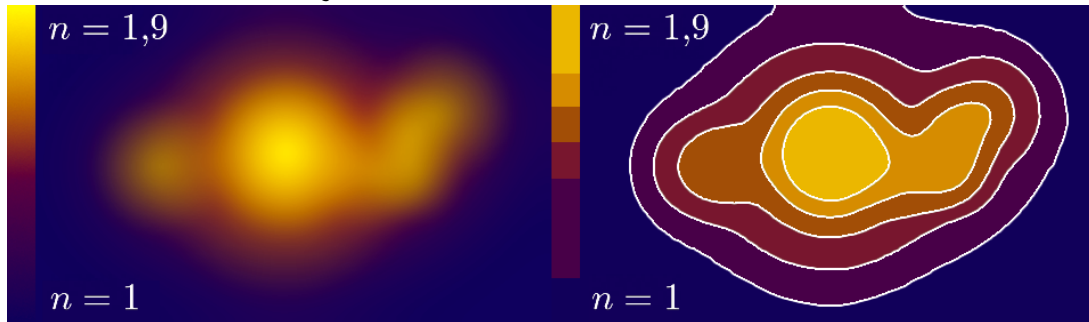
Estruturas GRIN exigem um algoritmo diferente de traçado de raios pois, em tese, a trajetória da luz é curvilínea. Sem resolver a Eq. 2.18 para obter uma função analítica de $r(x)$, é necessário buscar alternativas numéricas que, naturalmente, envolvem uma discretização que tende à solução real conforme a precisão é aumentada. Ao longo do desenvolvimento deste trabalho, dois métodos diferentes foram considerados: a discretização da função e a discretização da trajetória.

3.7.1 Discretização da função

Este método divide a função em uma quantidade discreta de regiões em que o valor do índice de refração é considerado constante, delimitadas pelas curvas de

nível da função (as soluções da equação $n(x, y) = cte$) conforme mostra a Figura 23. A vantagem deste método é a redução do problema da refração variável ao caso da refração simples, pois a região GRIN é tratada como um conjunto de lentes contidas umas nas outras.

FIGURA 23 – MAPA DE CORES DE UM GRADIENTE DE ÍNDICE DE REFRAÇÃO



Fonte: O autor.

LEGENDA: Mapa de cores de uma função $n(x, y)$ contínua genérica e uma possível alternativa discretizada, cujas regiões são delimitadas por curvas de nível.

No entanto, isso apresenta uma incompatibilidade com o traçado de raios sequencial, pois não é possível saber por quantas superfícies cada raio passará a priori: usando a Figura 23 de exemplo, a trajetória de um raio de luz central terá de ser dividido em onze segmentos, enquanto um raio marginal em apenas três. Para contornar isso, é necessário elaborar um algoritmo não-sequencial que atue dentro da estrutura GRIN e procure a superfície mais próxima, para só então traçar o raio até ela e refratá-lo, e então repita o processo de forma iterativa até que o raio saia do meio não-homogêneo. Pela sofisticação matemática necessária para implementá-lo, o método da discretização da função não foi levado adiante neste trabalho.

3.7.2 Discretização da trajetória

O segundo método discretiza a trajetória da luz em pequenos passos retilíneos, cujo comprimento é proporcional ao índice de refração local, considerado constante em cada intervalo. Mesmo na escala infinitesimal, um deslocamento de dr implica em cruzar a fronteira de um meio com índice de refração n para outro com índice de refração $n \pm dn$, então a Lei de Snell é válida localmente. Essa fronteira coincide com as curvas de nível, pois ao longo delas n não varia, enquanto “antes” e “após”, o valor corresponde a $n \pm dn$.

Seja Δs o tamanho do passo quando $n(x, y) = 1$. Partindo de um ponto $I_1 = (X_1, Y_1)$ com ângulo θ_1 , é necessário estabelecer as equações recursivas que evoluam essas variáveis. A posição será simplesmente deslocada por uma distância proporcional a $\Delta s/n$ com o ângulo atual, de forma que a luz precise de mais passos

para atravessar o espaço quanto maior o índice de refração (simulando a variação de velocidade).

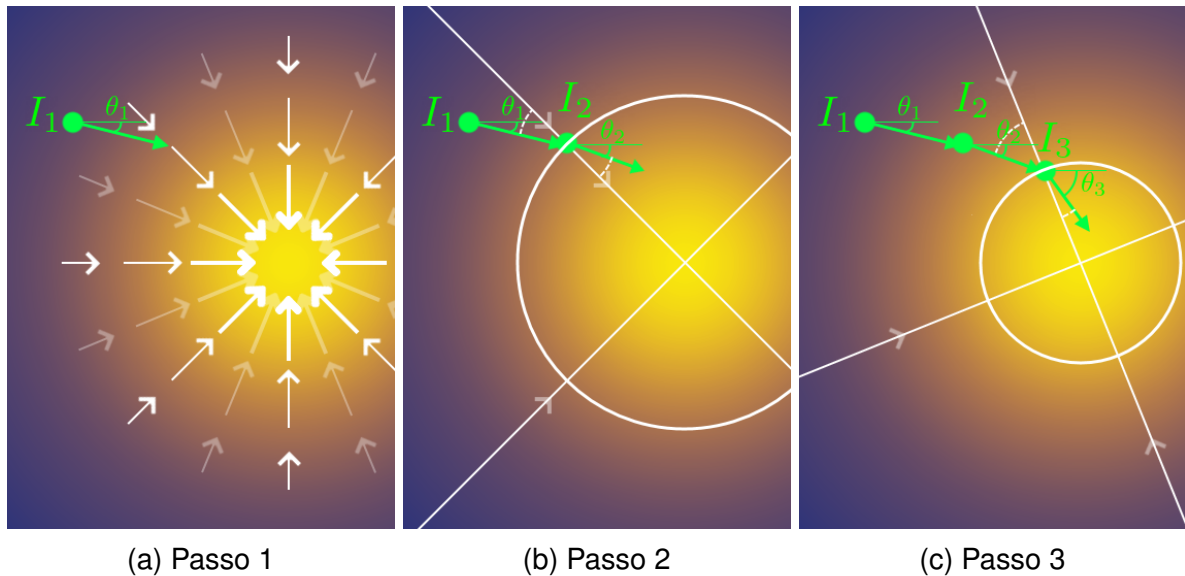
O ângulo local em relação ao eixo x da curva de nível pode ser obtido isolando $y(x)$ na equação $n(x, y) = cte$ para usar sua derivada na Eq. 2.8, ou usando o fato de que o gradiente da função é perpendicular às curvas de nível:

$$\vec{G}(x, y) = \nabla n = G_x \hat{x} + G_y \hat{y}, \quad G_x(x, y) = \frac{\partial n}{\partial x}, \quad G_y(x, y) = \frac{\partial n}{\partial y}, \quad (3.50)$$

$$\theta_N(x, y) = \arctan \left(\frac{G_y}{G_x} \right) \quad (3.51)$$

A Figura 24 ilustra o método a partir do passo inicial.

FIGURA 24 – DISCRETIZAÇÃO DAS TRAJETÓRIAS EM UM GRADIENTE RADIAL



(a) Passo 1

(b) Passo 2

(c) Passo 3

Fonte: O autor.

LEGENDA: Método da discretização das trajetórias aplicado a um índice de refração que varia radialmente. a) O raio parte de I_1 com ângulo θ_1 e faz um deslocamento proporcional a $\Delta s/n(I_1)$. Para evitar poluição visual, os vetores do gradiente são ilustrado apenas aqui. b) O raio incide sobre uma curva de nível em I_2 , e seu ângulo de incidência é medido em relação ao gradiente. O raio se desloca por $\Delta s/n(I_2)$ com um novo ângulo θ_2 . c) O processo é repetido.

No GeoGebra, a função do ângulo do gradiente pode ser definida de forma automática utilizando o comando Derivada para G_x e G_y :

$$g(x, y) = \text{Se} \left(\text{Derivada}(n(x, y), x) \neq 0, \arctan \left(\frac{\text{Derivada}(n(x, y), y)}{\text{Derivada}(n(x, y), x)} \right), 0 \right) \quad (3.52)$$

No entanto, é recomendável calcular $g(x, y)$ manualmente, pois ao dividir as duas derivadas é comum que a maior parte dos fatores se cancelem, enquanto que

o GeoGebra não fará essa simplificação automaticamente. Por exemplo, quando há simetria polar, o ângulo do gradiente terá o mesmo valor para *qualquer* função, de forma que é possível definir o ângulo sem calcular as derivadas parciais:

$$g(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (3.53)$$

A função arco-tangente fornece valores entre $\pm\pi/2$ mas aqui existe a possibilidade de o raio de luz se propagar no sentido negativo do eixo x (ângulos de módulo maior que $\pi/2$). Embora tomar a tangente de um ângulo medido de $-\pi/2$ a $\pi/2$ tenha o mesmo resultado que de um ângulo medido de 0 a 2π , o deslocamento do passo é dado por $\cos(\theta)$ e $\sin(\theta)$ em duas coordenadas separadas, além de que intervalo escolhido tem que ser o mesmo ao se fazer operações angulares nos argumentos da Lei da Refração (Eq. 2.10). Para o ângulo de saída em cada passo, foram feitas diversas tentativas de elaborar uma fórmula que contornasse esse problema, até que os resultados fossem consistentes independentemente da direção inicial escolhida.

Para a Lei da Refração, uma boa aproximação seria comparar uma região meio passo atrás de I_i e outra meio passo adiante, de forma que a razão avaliada seria:

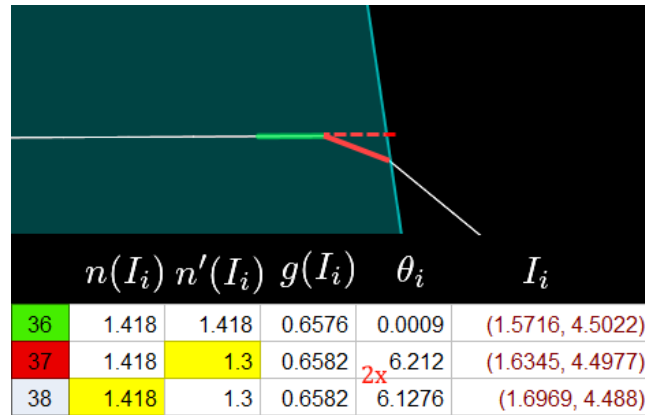
$$\frac{n\left(I_i - \frac{\Delta s}{2n(I_i)}(\cos(\theta_{i-1}), \sin(\theta_{i-1}))\right)}{n\left(I_i + \frac{\Delta s}{2n(I_i)}(\cos(\theta_{i-1}), \sin(\theta_{i-1}))\right)} \quad (3.54)$$

No entanto, foi verificado que as fórmulas que usam “previsões” da posição adiante (comprimento do passo anterior de $(k-1)\Delta s$ e posterior de $k\Delta s$, com $0 < k \leq 1$) geram a possibilidade de um raio refratar duas vezes numa transição entre duas regiões quando $n(x, y)$ é descontínuo. A Figura 25 mostra um erro ocorrido utilizando essa fórmula. Com $k = 0$ na Eq. 3.54, tem-se a razão:

$$\frac{n(I_i - \Delta s(\cos(\theta_{i-1}), \sin(\theta_{i-1})))}{n(I_i)} \equiv \frac{n(I_{i-1})}{n(I_i)} \quad (3.55)$$

Onde o raio avançará para I_{i+1} com base na comparação entre os índices de refração das duas posições anteriores, e como não apresenta refração dupla em transições descontínuas, foi escolhida para o algoritmo. Também foi verificado que as duas posições escolhidas para a razão na Lei da Refração pouco afetam o poder refrativo da lente, desde que a distância seja da ordem do passo e que o passo seja de ordem muito menor que as dimensões da lente.

FIGURA 25 – O PROBLEMA DA PREVISÃO DE TRAJETÓRIA



Fonte: O autor.

LEGENDA: Teste da refração por previsão de trajetória em um meio descontínuo. Na etapa 37, é previsto que o índice de refração após o passo sem desvio $n'(I_i)$ será 1,3, e então a razão 1,418/1,3 é usada na fórmula da refração. No entanto, devido ao desvio, o segmento continua dentro da região com $n = 1,418$ ao fim do passo, e isso faz com que ele refrate novamente com a razão 1,418/1,3 no passo seguinte.

O método iterativo resultante dessas escolhas é o seguinte:

$$I_2 = I_1 + \frac{\Delta s}{n(I_1)} (\cos(\theta_1), \sin(\theta_1)) \quad (3.56)$$

$$\theta_{N2} = \arctan(g(I_2)) \equiv \arctan\left(\frac{g_y(I_2)}{g_x(I_2)}\right) \quad (3.57)$$

$$\theta_2 = \theta_{N2} + \frac{\pi}{2} - \text{sgn}(\cos(\theta_1 - \theta_{N2})) \left(\frac{\pi}{2} - \arcsen\left(\frac{n(I_1)}{n(I_2)} (\theta_{N2} - \theta_1)\right) \right) \quad (3.58)$$

Por construção, o tempo de cada passo é fixo e numericamente idêntico a Δs :

$$\Delta t = \frac{|I_2 - I_1|}{v} = n(I_1) \frac{\Delta s}{n(I_1)} = \Delta s \quad (3.59)$$

Então o tempo total da trajetória é a soma dos tempos de N_p passos:

$$T = N_p \Delta s \quad (3.60)$$

No GeoGebra, métodos recursivos só podem ser feitos através da Planilha ou com a criação de *muitas* variáveis com Scripting, e da primeira forma cada raio ocupa, no mínimo, uma coluna inteira (aqui foram usadas duas, uma para a posição e outra para o ângulo, mas o ângulo poderia ser tratado como uma terceira coordenada da posição). No entanto, isso não é um impedimento para visualizar os resultados para uma distribuição arbitrária de raios graças à opção Habilitar Rastro, que mantém a imagem do raio em cada posição pela qual passou, então ao variar a sua posição inicial cem vezes, por exemplo, obtém-se a imagem de cem raios paralelos passando pelo sistema óptico.

Para testar esse algoritmo, foi construída uma simulação à parte e usadas funções contínuas com simetria radial em relação à origem para a testagem com distribuições pontuais e paralelas, sendo elas uma função lorentziana, sendo $N \geq 1$ o valor máximo do índice de refração:

$$n(x, y) = 1 + \frac{N - 1}{x^2 + y^2 + 1} \quad (3.61)$$

Também foram testadas funções que representam o índice de refração efetivo de um buraco negro de Schwarzschild (sem rotação ou carga elétrica) de raio R_s , em particular a aproximação que ignora a anisotropia do espaço-tempo da métrica que o descreve [48] [49]. Para isso, no entanto, algumas abordagens fazem transformações de coordenadas que preveem resultados não-físicos, como o valor do índice de refração explodir para $+\infty$ em distâncias diferentes de R_s (fora ou dentro do horizonte de eventos). A partir da expressão correta que considera a anisotropia [50], é possível tratar todos os raios como se estivessem se movendo na direção radial ⁶, resultando em:

$$n(x, y) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2} - R_s} \quad (3.62)$$

O método também foi testado em uma função degrau radial, que simula um meio com índice de refração $n_1 = 1$ com uma esfera ou cilindro de raio 1 e índice de refração $n_2 = 2$ centrada na origem.

$$n(x, y) = n_1 + (n_2 - 1) \frac{1 + \text{sgn}(1 - \sqrt{x^2 + y^2})}{2} \quad (3.63)$$

Nesse caso, foi preciso de um raciocínio adicional para definir o gradiente, pois a princípio ele vale zero em todo o espaço, exceto na fronteira esférica $x^2 + y^2 = 1$. Considere o seguinte: nos passos que começam e terminam no mesmo meio material, $n_i = n_{i-1}$; na Lei da Refração, isso faz com que os termos que dependem do gradiente se cancelem, restando apenas $\theta_i = \theta_{i-1}$, ou seja, a função escolhida não faz diferença nesse caso; quando um passo cruzar a fronteira entre os dois meios, basta pensar nas aproximações analíticas da função degrau: se elas têm simetria radial, então o ângulo do gradiente é dado pela Eq. 3.53. Sendo assim, é razoável imaginar que manter a mesma equação para o gradiente no caso descontínuo não irá produzir resultados não-físicos. Em seguida, utilizando o método de traçado de raios simples já construído, a mesma situação de uma lente esférica foi testada e os resultados foram comparados, confirmando a validade da discretização das trajetórias mesmo

⁶ De acordo com Karimi e Khorasani, a expressão mais abrangente seria $n(r, \psi) = (1 - R_s/r)^{-1/2} (1 - (R_s/r) \cos^2(\psi))^{-1/2}$, onde ψ é o ângulo entre o vetor de onda $\vec{k}$ e o vetor posição $\vec{r}$. Quando $\vec{r} \parallel \vec{k}$, $\cos^2(\psi) = 1$ e obtém-se a Eq. 3.62. O algoritmo GRIN poderia computar a refração anisotrópica ao se inserir $n(x, y, \psi)$ e $g(x, y, \psi)$ diretamente nas definições de I_i e θ_i , porém não houve tempo de implementar essa alternativa.

para casos de refração simples. As demais funções foram integradas em um único arquivo em que é possível alternar a distribuição radial de $n(x, y)$ com apenas um clique e ver como fontes paralelas e pontuais se comportam nas proximidades da origem. Todos os resultados descritos estão dispostos na seção 4.3.

3.7.3 Construção do cristalino

A partir desse sucesso, o foco foi voltado à implementação do modelo adaptativo do cristalino, elaborado por Navarro et al. [39], fazendo as devidas mudanças de variáveis ($z \rightarrow x$, $\omega \rightarrow y$, $n_0 \rightarrow n_a$ e $t \rightarrow d$). Houveram muitas complicações na implementação das funções do índice de refração anterior n_a e posterior n_p , devido à inconsistências que aconteciam ao utilizar os valores de ε e a constante de normalização f_p sugeridos em [39]. A expressão correta para f_p está presente no artigo que antecedia à referência utilizada [38], já as dependências com ε tiveram que ser corrigidas por tentativa e erro até que as funções apresentassem as propriedades esperadas.

Tendo o modelo do cristalino devidamente implementado na simulação da discretização da trajetória, a função $n(x, y)$ foi definida por condicionais que faziam com que os valores fossem dados por n_a e n_p dentro das curvas delimitadoras, enquanto na região anterior e posterior ao cristalino, o valor fosse constante e igual ao do humor aquoso $n_3 = 1.336$ e humor vítreo $n_4 = 1.3374$, respectivamente. O ângulo do gradiente foi calculado manualmente para a região anterior e posterior:

$$g_a(x, y) = \arctan\left(\frac{\varepsilon_a y}{x - \Delta_a} \frac{a_a^2}{b_a^2}\right), \quad g_p(x, y) = \arctan\left(\frac{\varepsilon_p y}{\Delta_p - x} \frac{a_p^2}{b_p^2}\right) \quad (3.64)$$

Por fim, a função $g(x, y)$ foi criada com condicionais que fazem g_a valer para todo o espaço antes da curva hipotética, enquanto g_p vale após essa fronteira. A Figura 26 mostra uma representação dos mapas de cores das funções $n(x, y)$ e $g(x, y)$ no cristalino e em torno dele.

Para a testagem, foi escolhida a quantidade de 175 passos, com as seguintes definições para o comprimento do passo Δs , o foco F_Y de um raio (Eq. 2.11) e o poder refrativo P ⁷ (Eq. 2.3):

$$\Delta s = 1,1 \cdot \frac{n_4 d}{175} \quad (3.65)$$

$$F_Y = x(\text{F175}) - \frac{y(\text{F175})}{\tan(\text{E175})} \quad (3.66)$$

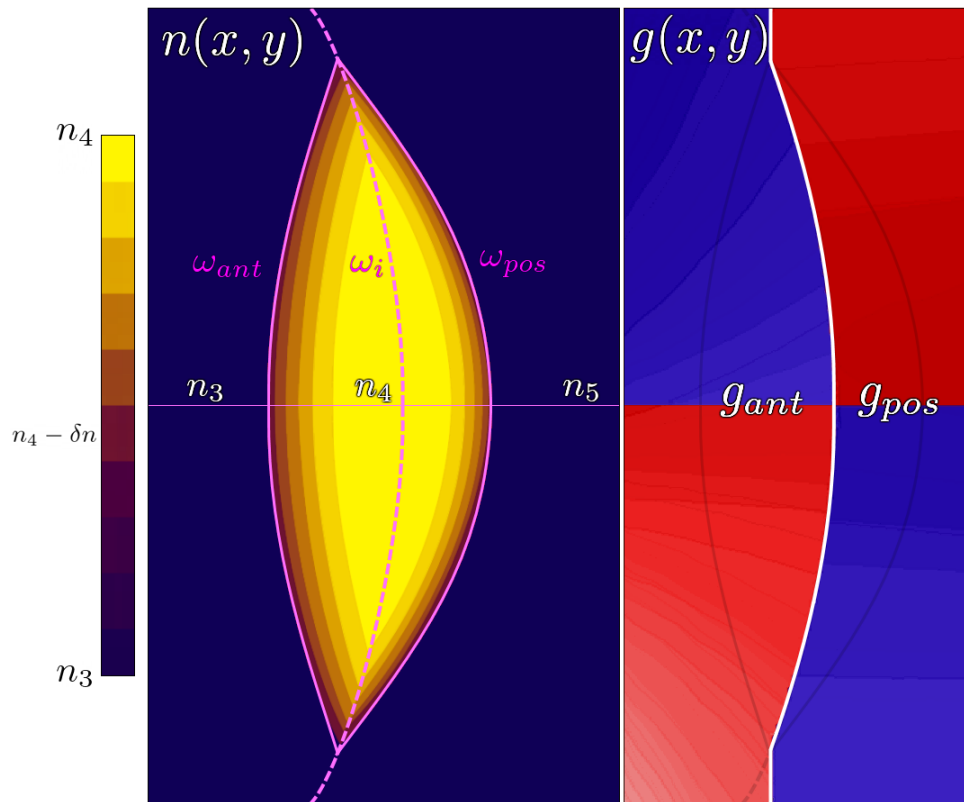
$$P = 1000 \frac{n_3}{F_Y} \quad (3.67)$$

Sendo E175 e F175 o ângulo e a posição do último segmento. A definição de Δs dependendo de d e n_4 garante que o regime de discretização da trajetória não irá se

⁷ Neste contexto, a variável P será atribuída ao poder refrativo ao invés de D , para evitar confusão com a variável associada à acomodação.

encerrar antes que o raio saia do cristalino, enquanto o fator $1000 n_3$ converte a unidade do foco para metros e normaliza o poder refrativo em relação ao meio (humor aquoso).

FIGURA 26 – MAPA DE CORES DO ÍNDICE DE REFRAÇÃO DO CRISTALINO E DO ÂNGULO DO SEU GRADIENTE



Fonte: O autor.

LEGENDA: À esquerda, um mapa de cores discreto de $n(x, y)$ e as curvas que delimitam a função. À direita, uma representação do mapa de cores de $g(x, y)$, em que as regiões em azul indicam ângulos negativos, enquanto as vermelhas, ângulos positivos, de forma que mesmo para além do cristalino o gradiente aponta para o seu núcleo.

As funções dadas pelo modelo de Navarro et. al. foram plotadas para diversas idades A e graus de acomodação D , primeiro para verificar como seu formato se altera com as duas variáveis. Calculando as curvas de nível ($n_a(x, y) = k$ e $n_p(x, y) = k$), e mapeando seus valores com o parâmetro k de 0 a 1, correspondendo ao intervalo de $n = 1,418$ a $1,371$, foi possível criar uma fórmula para as cores dinâmicas da curva de nível e, habilitando o rastro das curvas e animando k para transitar lentamente através do intervalo, foi possível gerar um mapa de cor contínuo.

O algoritmo GRIN foi então testado na lente, assim como na sua versão homogênea ($\delta n = 0$), e foram feitos gráficos do poder refrativo em função dessas variáveis na Janela de Visualização 2, criando, por exemplo, um ponto $(D, 1/F_0)$ e habilitando seu rastro. Os valores encontrados estavam de acordo com o que foi apresentado por Navarro et al. no trabalho original. Todos os resultados parciais

descritos nessa seção estão dispostos na seção 4.4. Com essa validação, foi possível partir para a integração de todos os algoritmos em uma única simulação.

3.8 INTEGRAÇÃO DOS ALGORITMOS

Ao fim do primeiro semestre de 2022, uma versão funcional da maior parte dos algoritmos apresentados já estava pronta, então a etapa seguinte foi integrá-los em uma única simulação com os parâmetros do olho humano. As cinco funções-superfície do conjunto F (Eq. 3.12) são as superfícies anteriores e posteriores da córnea e do cristalino, e por fim a retina. Ao completar a matriz dos coeficientes e definir os conjuntos Ix_i , Iy_i e θ_i , tem-se o traçado de raios básico. Tendo as definições corretas em mãos, integrar os algoritmos não é uma tarefa complexa. Na prática, problemas inerentes ao GeoGebra 5 inviabilizaram as duas primeiras tentativas de integração, até que uma terceira tentativa foi desenvolvida para concluir este trabalho. Os detalhes de desenvolvimento de cada Algoritmo Integrado estão resumidos na Tabela 6:

TABELA 6 – Algoritmos Integrados

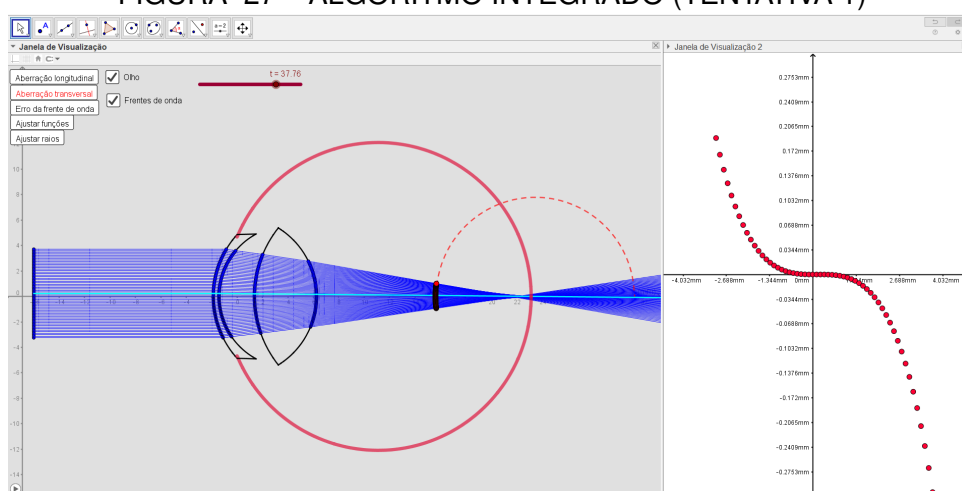
Algoritmo Integrado	Versão 1	Versão 2	Versão 3
Desenvolvimento inicial	27 de junho de 2022	15 de julho de 2022	20 de agosto de 2022
Traçado de raios	Sim	Sim	Sim
Famílias de funções	Múltiplas	Múltiplas	Cônica (simetria polar)
Lentes segmentadas	Não	Uma	Duas
Frentes de onda	Sim	Não	Sim
Refração variável	Não	Não	Sim
Medição de aberrações	Sim	Não	Sim
Interface do usuário	Completa	Inacabada	Completa
Status	Descontinuado	Descontinuado	Concluído

Fonte: O autor.

Uma razão prática para recomeçar a integração em novos arquivos foi a reformulação de certas fundamentações da simulação. Embora o GeoGebra atualize automaticamente o nome de variáveis nas definições dos demais objetos ao renomeá-las, o programa costuma impedir que alterações nas definições das variáveis sejam feitas caso elas causem erros nas suas variáveis dependentes. Ao invés de contornar isso para dezenas de objetos, é mais rápido recriar os objetos do zero em ordem de dependência com as novas definições desejadas. Infelizmente, a principal razão para a descontinuação das versões 1 e 2 do Algoritmo Integrado foi a má otimização do GeoGebra para certas funcionalidades.

A versão 1 era capaz de, em uma fração de segundo, traçar dezenas de raios e realizar as três medições de erro em um modelo simplificado da córnea e do cristalino, conforme mostra a Figura 27. No entanto, a interface desenvolvida para auxiliar o usuário a ajustar os parâmetros sem abrir a Janela de Álgebra (Figura 28) exigiu muito mais tempo de processamento do que o esperado. Por exemplo, ao clicar em um botão que esconde textos e controles dos parâmetros do sistema óptico e mostra os controles da distribuição de raios, ocorriam “congelamentos” no programa de mais de meio minuto! Como os botões foram programados em GeoGebra Script, assumiu-se que a raiz do problema está na forma com que os códigos são processados pelo programa.

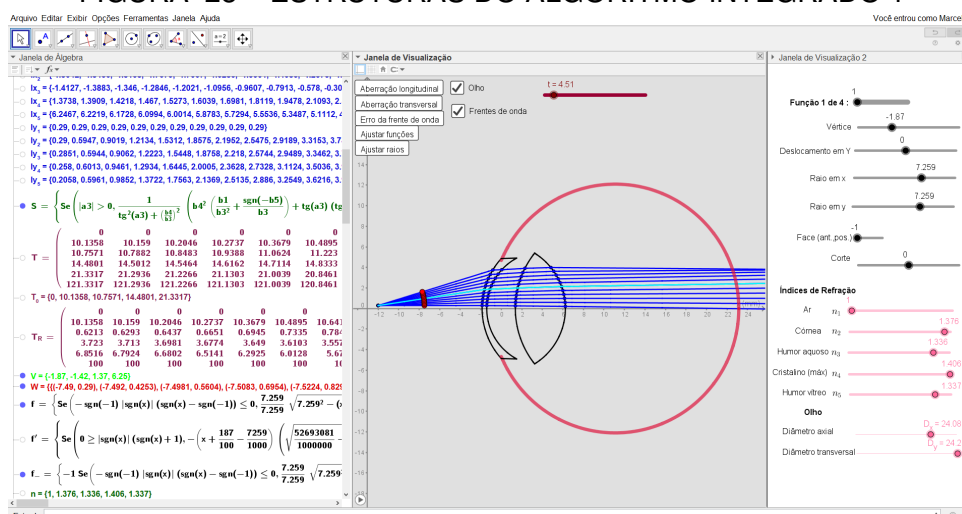
FIGURA 27 – ALGORITMO INTEGRADO (TENTATIVA 1)



Fonte: O autor.

LEGENDA: Primeiro algoritmo integrado em funcionamento. À esquerda, um feixe de raios paralelos é focalizado na retina. À direita, a aberração transversal dos raios.

FIGURA 28 – ESTRUTURAS DO ALGORITMO INTEGRADO 1



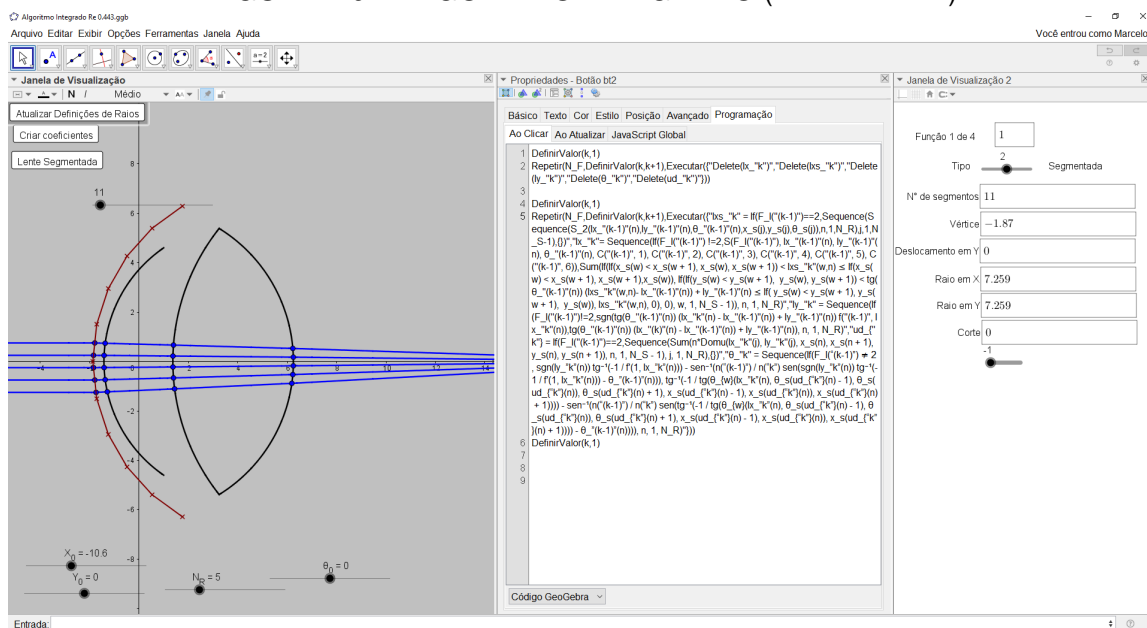
Fonte: O autor.

LEGENDA: Estruturas do primeiro algoritmo integrado. À esquerda, a Janela de Álgebra com os conjuntos de posição Ix_i , Iy_i , as matrizes de tempo, as funções e soluções. À direita, o menu de funções.

Ao iniciar a versão 2, esperava-se determinar o ponto a partir do qual o travamento começava. A oportunidade foi usada para elaborar uma fundamentação mais generalizada para o sistema óptico, de forma que fosse possível alternar entre lentes contínuas e segmentadas, além de aumentar o número de funções-superfície do sistema livremente, sem a necessidade de criar novas variáveis na Janela de Álgebra para levar em conta as novas interações. No entanto, para que essa generalidade e automação fossem possíveis, a conjunção de comandos Sequência(Objeto()) era necessária, o que não causou problemas para as funções contínuas. Para atualizar as definições quando N_F fosse alterado, foi criado um botão em GeoGebra Script. Como mostra a Figura 29, a ausência de um ciclo *for* nessa linguagem exige que o processo iterativo seja feito em uma única linha com o comando Repetir.

Sem indentação ou sequer coloração automática, é muito fácil errar a quantidade de parênteses num comando com 1496 caracteres. Após horas de falhas e verificações, foi possível gerar todo o traçado de raios com apenas um clique.

FIGURA 29 – ALGORITMO INTEGRADO (TENTATIVA 2)



Fonte: O autor.

LEGENDA: Última iteração da versão 2 do Algoritmo Integrado. À esquerda, a simulação funcionando com lentes contínuas e segmentadas. Ao centro, o botão que atualiza todas as definições do traçado de raios em GeoGebra Script. À direita, o menu de funções, generalizado para uma quantidade arbitrária de superfícies.

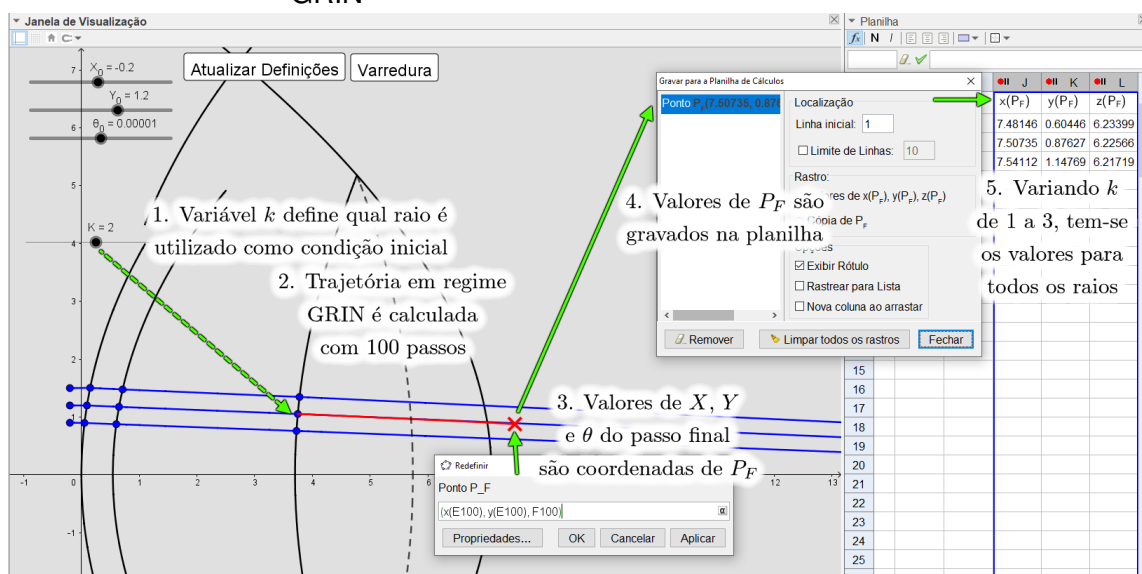
Ao trocar para as lentes segmentadas, que dependiam de dados da Planilha, diversos erros começaram a acontecer. Por exemplo, ao variar o parâmetro Y_0 de 0.2 para 0.5, os raios a partir da lente segmentada correspondiam ao valor de $Y_0 = 0.2$, ou seja, o valor anterior. Para contornar isso, era necessário incluir um *UpdateScript* que atualizava cada variável livre com o próprio valor toda vez que fossem atualizadas,

de forma que o valor anterior sempre fosse igual ao valor atual. As únicas soluções oferecidas pela moderação do GeoGebra para contornar o problema foram o uso da Planilha e alternativas que perdiam a generalidade desejada. Além disso, foi observado que o tempo de processamento ao alterar valores e definições, além do uso de memória, aumentou substancialmente ao incluir as lentes segmentadas, e especialmente ao aumentar a quantidade de pontos da planilha.

A versão 2 foi paralisada por algumas semanas enquanto se esperava assistência dos desenvolvedores da comunidade do GeoGebra quanto aos *bugs* encontrados, porém, não houve sucesso. A implementação do modelo do cristalino no algoritmo GRIN foi bem sucedida nas semanas seguintes, e então o passo seguinte foi integrá-lo com o traçado de raios comum na versão 3 do Algoritmo Integrado.

Assim como o último segmento de raio no regime GRIN foi utilizado para se calcular o foco na Equação 3.66, a ideia inicial foi de usar seu ângulo e posição como valores iniciais do raio em regime normal, o que é um processo simples desde que o número de passos seja fixo. No entanto, o algoritmo de traçado de raios desenvolvido trabalha com uma quantidade arbitrária de raios N_R , enquanto que o algoritmo GRIN dependia da Planilha, sendo necessário criar uma ou duas novas colunas para cada novo raio, e não há como fazer isso de forma automática. Pensou-se em introduzir uma variável k , que começaria em 1 e terminaria em N_R , de forma que o algoritmo GRIN utilizasse o k -ésimo raio como condição inicial, e então animar essa variável para que todos os valores finais fossem calculados e salvos na Planilha através da função Gravar para a Planilha de Cálculos, conforme mostra a Figura 30.

FIGURA 30 – PRIMEIRA TENTATIVA DE INTEGRAÇÃO DO ALGORITMO GRIN



Fonte: O autor.

LEGENDA: Tentativa de integrar o algoritmo GRIN com o traçado de raios através da gravação de dados na Planilha.

Essa etapa funcionou, então um botão foi criado para limpar automaticamente as três colunas de dados gravados e animar k a partir do início toda vez que a varredura tivesse que ser refeita, pois os conjuntos Ix_5 , Iy_5 e θ_5 usam os valores dessas colunas e as gravações se acumulam se não houver uma forma de *reset*, fazendo com que os conjuntos fiquem maiores que N_R e causando erros nas matrizes Π e Θ .

Ao definir os três conjuntos, os problemas começaram a surgir. Em condições que ainda não ficaram claras, a planilha passou a gravar apenas um dos três valores para cada passo de k na varredura, além de que o *reset* das células não funcionava. É possível que a dependência dos conjuntos com essas células tenha impedido a sua alteração, pois o programa interpretou que indeterminações poderiam surgir. Tendo em vista isso e o que ocorreu com as lentes segmentadas, é muito provável que existam ainda mais problemas quando a hierarquia de objetos dependentes vai e volta da Planilha dessa forma.

Devido a essas instabilidades, buscou-se abandonar o uso da Planilha por completo. Havia apenas duas possibilidades para prosseguir com a integração dos algoritmos: desistir da proposta de computar múltiplos raios simultaneamente e trabalhar apenas com um por vez (variando parâmetros com rastro habilitado), o que poderia inviabilizar a medição de aberrações, ou usar JavaScript para fazer o processo recursivo da Planilha com variáveis comuns. Usando o guia disponível no site do GeoGebra, e aprendendo com códigos de simulações de outros usuários, a partir de 22 de agosto todos os algoritmos de traçado de raios, interface do usuário, etc. que usavam GeoGebra Script e a Planilha foram substituídos por análogos mais eficientes em JavaScript.

Nessa versão, a matriz dos coeficientes que define as cinco funções-superfície usa os dados apresentados na seção 2.3. As posições dos vértices (primeira coluna) do cristalino dependem das posições dos vértices da córnea, de forma que se o sistema for deslocado, a profundidade da câmara anterior se mantém constante.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -0,26 & 7,83 & c_{31} \\ 0,545 & -0,66 & 6,5 & c_{14} + 0,5 \\ 3,04 + c_{21} & -2,8 + 0,025A - 0,0013A^2 - 0,25D & \frac{1}{12,7 - 0,058A} + 0,0077D & x_m \\ d + c_{31} & 0,1 - 0,06A & -\frac{1}{5,9 - 0,013A} + 0,0043D & x_m \\ D_x - Sc & 22,615^2/21,5^2 - 1 & -22,615^2/(2 \cdot 21,5) & c_{24} \end{bmatrix},$$

Onde $x_m = c_{31} + \frac{d + dc_{42} + c_{43} - c_{33} + \sqrt{(d + dc_{42} + c_{43} - c_{33})^2 - (c_{42} - c_{32})(2c_{43}d + d^2c_{42} + d^2)}}{c_{42} - c_{32}}$

(3.68)

A constante cônica e o raio de curvatura da retina (c_{52} e c_{53}) são aproxima-

mente os valores do globo ocular ao subtrair a espessura da esclera nos dois eixos e a protuberância da córnea no eixo axial. A posição de corte (quarta coluna) é arbitrária, mas foi escolhida de forma que o sistema seja visualmente próximo da anatomia real. O valor de Sc corresponde ao valor médio da espessura da esclera na parte de trás do olho ($0,915\text{ mm}$), enquanto D_x é o diâmetro axial anteroposterior ($24,4\text{ mm}$). Para fins visuais, um fator de $1/(x - x_m - 0,3)^2$ foi multiplicado a uma cópia da função da retina, além da inserção de uma curva que representa o globo ocular:

$$O = \text{Se} \left(x > c_{14}, f_1 \left(x, D_x, \frac{D_y^2}{22.9} - 1, -\frac{D_y}{2 \cdot 22.9} \right) \right) \quad (3.69)$$

Onde $D_y = 23,7\text{ mm}$ é o diâmetro transversal do globo ocular. A combinação de todos esses parâmetros produziu um olho emetropo com espessura da esclera variando de forma similar aos dados apresentados por [31].

A interface do usuário é composta por botões, textos, controles deslizantes e booleanos, valores que alternam entre 1 (verdadeiro) e 0 (falso), que controlam a visibilidade dos objetos. Através desses comandos, é possível alternar entre uma quantidade arbitrária de gráficos e menus na Janela de Visualização 2. Por exemplo, todos os elementos do menu que configura as funções têm visibilidade condicional com o booleano `adjf`, enquanto os do menu de raios dependem de `adjr = 1`. Para abrir o segundo menu e esconder o primeiro, basta criar um botão com o seguinte JavaScript:

```
1 ggbApplet.setValue('adjr', 1);
2 ggbApplet.setValue('adjf', 0);
```

Para ajustar automaticamente os eixos do gráfico a um determinado conjunto de pontos como a aberração longitudinal δ_x , é possível ir na aba Básico da Janela de Visualização 2 e atribuir variáveis aos valores mínimos e máximos de x e y , por exemplo, x Mín: $x_{min} - 0.1x_l$, sendo x_l a distância entre x_{min} e x_{max} , de forma que o gráfico não acaba imediatamente no ponto mínimo. Para atualizar essas variáveis de acordo com δ_x , basta usar o seguinte código:

```
1 var xmin = ggbApplet.getValue('Min(x( $\delta_x$ ))');
2 var xmax = ggbApplet.getValue('Max(x( $\delta_x$ ))');
3 var ymin = ggbApplet.getValue('Min(y( $\delta_x$ ))');
4 var ymax = ggbApplet.getValue('Max(y( $\delta_x$ ))');
5 ggbApplet.setValue('xmin', xmin);
6 ggbApplet.setValue('xmax', xmax);
7 ggbApplet.setValue('ymin', ymin);
8 ggbApplet.setValue('ymax', ymax);
```

A grande vantagem do JavaScript são as variáveis temporárias, que só existem en-

quanto o código é executado, desprezando a necessidade de definir um objeto que vale 'Mínimo($x(\delta_x)$)' e impedindo que os eixos fiquem vinculados à δ_x diretamente. Sem isso, os eixos seriam atualizados automaticamente toda vez que qualquer variável do traçado de raios fosse alterada, pois a δ_x depende delas, o que implicaria no recálculo de todas as disposições da Janela de Visualização 2 mesmo quando não há intenção de atualizar os eixos.

Um código mais robusto é necessário para o Algoritmo GRIN, pois $2 \cdot N_R \cdot N_p$ variáveis precisam ser criadas através do método recursivo (Eq. 3.58) e ocultadas da visualização, e ao fim os dados do último passo de cada raio precisam ser inseridos nos conjuntos de posição e ângulo do traçado de raios simples. Por fim, um conjunto de segmentos de reta é construído a partir de todos os pontos para que seja possível visualizar as trajetórias de forma nítida.

```

1  ggbApplet.setValue('GRIN', '0'); //Desativa o algoritmo GRIN para evitar
    indefinicoes nos objetos dependentes
2  var kf = ggbApplet.getValue('N_R');
3  var jf = ggbApplet.getValue('N_p');
4  for (var k = 1; k <= kf; k++) { //Repete o loop para a quantidade de raios
5      ggbApplet.evalCommand('Ig_{' + k + ',1} = (Ix_4(' + k + '),Iy_4(' + k +
        '))'); //Define o primeiro passo a partir das coordenadas de incidencia
6      ggbApplet.setVisible('Ig_{' + k + ',1}', false); //Esconde o ponto
7      ggbApplet.evalCommand('θg_{' + k + ',1} = θ_4(' + k + ')'); //Define o
        primeiro angulo a partir do raio inicial
8      for (var i = 2; i <= jf; i++) { //Repete o loop para a quantidade de passos
9          ggbApplet.evalCommand('Ig_{' + k + ', ' + i + '} = Ig_{' + k + ', ' + (i -
            1) + '} + Δs / n(Ig_{' + k + ', ' + (i - 1) + '} (cos(θg_{' + k +
            ', ' + (i - 1) + '}), sin(θg_{' + k + ', ' + (i - 1) + '})))');
            //Calcula a posicao de cada passo
10         ggbApplet.evalCommand('θg_{' + k + ', ' + i + '} = Mod(g(Ig_{' + k + ', '
            + i + '} + sgn(cos(θg_{' + k + ', ' + (i - 1) + '} - g(Ig_{' + k +
            ', ' + i + '}))) * arcsin(n(Ig_{' + k + ', ' + (i - 1) + '} / n(Ig_{' +
            k + ', ' + (i) + '})) sin(θg_{' + k + ', ' + (i - 1) + '} - g(Ig_{' + k
            + ', ' + i + '}))) + pi*(1/2-1/2*sgn(cos(θg_{' + k + ', ' + (i - 1) +
            '} - g(Ig_{' + k + ', ' + i + '}))))), 2*pi)'); //Calcula o angulo de
            cada passo
11         ggbApplet.setAuxiliary('Ig_{' + k + ', ' + i + '}', true); //Torna o
            objeto auxiliar para nao tumultuar a janela de algebra
12         ggbApplet.setAuxiliary('θg_{' + k + ', ' + i + '}', true);
13         ggbApplet.setVisible('Ig_{' + k + ', ' + i + '}', false); //Esconde o
            ponto
14     }

```

```

15     var ma = []; //Cria um conjunto temporario vazio
16     var mb = [];
17     for (var k = 1; k <= kf; k++) {
18         ma.push("Ig_{ " + k + ", " + jf + " }");
19         mb.push("θg_{ " + k + ", " + jf + " }");
20     } //Coleta o nome das ultimas posicoes e angulos e as insere nos conjuntos
        temporarios ma e mb, respectivamente
21     ggbApplet.evalCommand('Igx = x({ ' + ma + ' })'); //Cria conjunto no GeoGebra
        que sera utilizado na definicao de Ix_5
22     ggbApplet.evalCommand('Igy = y({ ' + ma + ' })'); //Utilizado na definicao de
        Iy_5
23     ggbApplet.evalCommand('θg = { ' + mb + ' })'; //Utilizado na definicao de θ_5
24     var sga = []
25     for (var k = 1; k <= kf; k++) {
26         var sg = []
27         for (var i = 1; i <= jf - 1; i++) {
28             sg.push("Segment((Ig_{ " + k + ", " + i + " }), (Ig_{ " + k + ", " + (i +
                1) + " })))"); // Cria um conjunto temporario com os N_p segmentos
                do k-esimo raio
29         }
30         sga.push("{ " + sg + " }"); //Insere cada conjunto de segmentos numa matriz
                temporaria
31     }
32     ggbApplet.evalCommand('seg={ ' + sga + ' })'; //Cria uma matriz contendo
        todos os segmentos
33     ggbApplet.setColor('seg', '0', '255', '102'); //Pinta o conjunto
34     ggbApplet.evalCommand('SetConditionToShowObject(seg, GRIN==true)') //Mostra
        o conjunto apenas se o algoritmo GRIN estiver ativo
35     ggbApplet.evalCommand('SetVisibleInView(seg, 1,true)') //Garante que o
        conjunto sera mostrado apenas na janela 1
36     ggbApplet.evalCommand('SetVisibleInView(seg, 2,false)')
37 }

```

A partir disso, os conjuntos Ix_5 , Iy_5 e θ_5 são definidos com um condicional do booleano GRIN, assumindo os valores de Igx , Igy e θ_g caso ele seja verdadeiro, ou seguindo as equações analíticas apresentadas na seção 3.4 caso ele seja falso, de forma que é possível desativar o algoritmo GRIN a qualquer momento. Posteriormente, condicionais foram acrescentados ao código para evitar cálculos redundantes, de forma que se o número de raios N_R e/ou de passos N_p diminui, as variáveis que não são mais utilizadas são apagadas, e se aumentam, os ciclos *for* do código produzem apenas as variáveis que precisam ser acrescentadas. Graças a esse código, a geração da

trajetória discretizada no regime GRIN para uma quantidade arbitrária de raios pôde ser integrada aos demais algoritmos, bastando apenas de um botão que executa o código acima e redefine as variáveis.

Para as lentes segmentadas, os valores da Planilha usados nos conjuntos x_s e y_s foram substituídos pelo comando Sequência, que cria pontos a partir das funções contínuas correspondentes a um espaçamento de altura constante. Sem a Planilha, o processamento de dados externos ficou inviabilizado (embora ainda seja possível colocar os dados manualmente), mas o algoritmo foi mantido na simulação como prova de conceito. Nos conjuntos de posição e ângulo, as seguintes mudanças foram feitas para levar em consideração os dois tipos de superfícies:

$$Ix_2 = \text{Sequência}(\text{Se}(F_I(1) == 1, S(Ix_1(n), Iy_1(n), \theta_1(n), c_{11}, c_{12}, c_{13}), X_{s1}(n, id_1(n))), n, 1, N_R) \quad (3.70)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 = & \text{Sequência}(\text{Se}(F_I(1) \neq 2, \text{sgn}(Iy_2(n)) \arctan(-1/F_D(1, Ix_2(n))) \\ & - \arcsen(N(1)/N(2) \text{sen}(\text{sgn}(Iy_2(n)) \arctan(-1/F_D(1, Ix_2(n))) - \theta_1(n))), \\ & \arctan(-1/\tan(\theta_m)) - \arcsen(N(1)/N(2) \text{sen}(\arctan(-1/\tan(\theta_m)) - \theta_1(n))), n, 1, N_R) \end{aligned} \quad (3.71)$$

A função de suavização do segmento θ_m (Eq. 3.24) deve ser escrita explicitamente com seus sete argumentos:

$$\theta_m(Ix_2(n), \theta_{s1}(id_1(n) - 1), \theta_{s1}(id_1(n)), \theta_{s1}(id_1(n) + 1), x_{s1}(id_1(n) - 1), x_{s1}(id_1(n)), x_{s1}(id_1(n) + 1)) \quad (3.72)$$

Alternativamente, um outro conjunto poderia ser criado para que a definição do ângulo refratado não ficasse tão extensa. Acrescentando 1 a todos os índices nas equações 3.8 e 3.71, tem-se as definições equivalentes para a segunda lente. Isso permite alternar entre lente contínua e segmentada nas superfícies anterior e posterior da córnea mudando o valor de f_{type_1} e f_{type_2} , respectivamente.

Na evolução das frentes de onda, um condicional na matriz dos tempos de viagem T' (Eq. 3.35) faz com que a quarta linha seja igual a $N_p \Delta s$ (Eq. 3.60) caso o algoritmo GRIN esteja ativo. Para mostrar a frente de onda dentro do cristalino no regime GRIN seria necessário usar todos os N_p valores de posição $Ig_{k,j}$ e ângulo $\theta g_{k,j}$ nos condicionais do conjunto W (Eq. 3.39), então optou-se por deixá-la indefinida. A matriz dos tempos foi alterada para que o último tempo seja equivalente a um valor livre T_F , e um botão foi adicionado para definir o valor da variável do tempo t como 99.99% do valor do tempo T_W em que o raio central atinge o foco (pois fazer $t = T_W$ torna a WFE indefinida, uma vez que o raio do círculo ideal vale zero no foco), dessa forma a frente de onda evolui mesmo após passar pela superfície da retina.

Com todos os algoritmos integrados a uma única simulação em funcionamento, bastou aperfeiçoar a interface do usuário, aspectos gráficos da simulação e alguns

códigos para assegurar que a simulação não “quebrassem”. Enquanto os parâmetros da simulação são alterados e as estruturas são editadas, o GeoGebra acumula uso de memória RAM, até se aproximar do limite de aproximadamente 1.3GB alocado. A partir desse ponto, o programa se torna muito mais lento e qualquer operação pesada pode fazer com que ele “congele”. Como o GeoGebra não limpa o cache de memória sozinho, sempre foi mais prático reiniciar o programa (ao total, foram centenas de vezes).

Na medição de aberrações, foi adicionada uma medida de RMS via somatório para o erro da frente de onda, porém ela só fornece valores com algum significado quando se tem dezenas de raios. É necessário um algoritmo adicional para obter essa medida para vários pontos sem aumentar N_R , uma vez que a gravação na Planilha de Cálculos não é um método seguro.

Para finalizar, o papel da refração variável do cristalino foi estudado utilizando-se o Algoritmo Integrado, e as curvas das aberrações do caso homogêneo analítico (algoritmo GRIN desativado) foram comparadas com as curvas geradas com o algoritmo GRIN ativo, para o caso homogêneo ($\delta n = 0$) e o de perfil GRIN ($\delta n = -0,0472$).

O poder refrativo foi definido através da aproximação da Eq. 2.5, onde $P = P_1 + P_2$, enquanto o poder refrativo *absoluto* foi definido como $P = 1/F_0$ e representa a medida efetiva do sistema.

Todos os gráficos foram gerados utilizando o próprio GeoGebra com o rastro habilitado. Apesar de o programa dispor de configurações para o ajuste dos eixos e a separação entre as marcações, a legenda dos eixos só pode ser inserida através da ferramenta de texto e o tamanho da fonte dos valores é atrelada à escala global das fontes do GeoGebra, então para melhor visualização, essas propriedades dos gráficos foram refeitas com o auxílio de um editor de imagens. A sobreposição de gráficos do mesmo tipo também foi feita através de edição de imagens, pois os botões de varredura limpam o rastro deixado anteriormente (a limpeza poderia ser desabilitada, mas foi mais conveniente obter as imagens separadamente, para então mudar suas cores sem necessidade de alterar os objetos no GeoGebra).

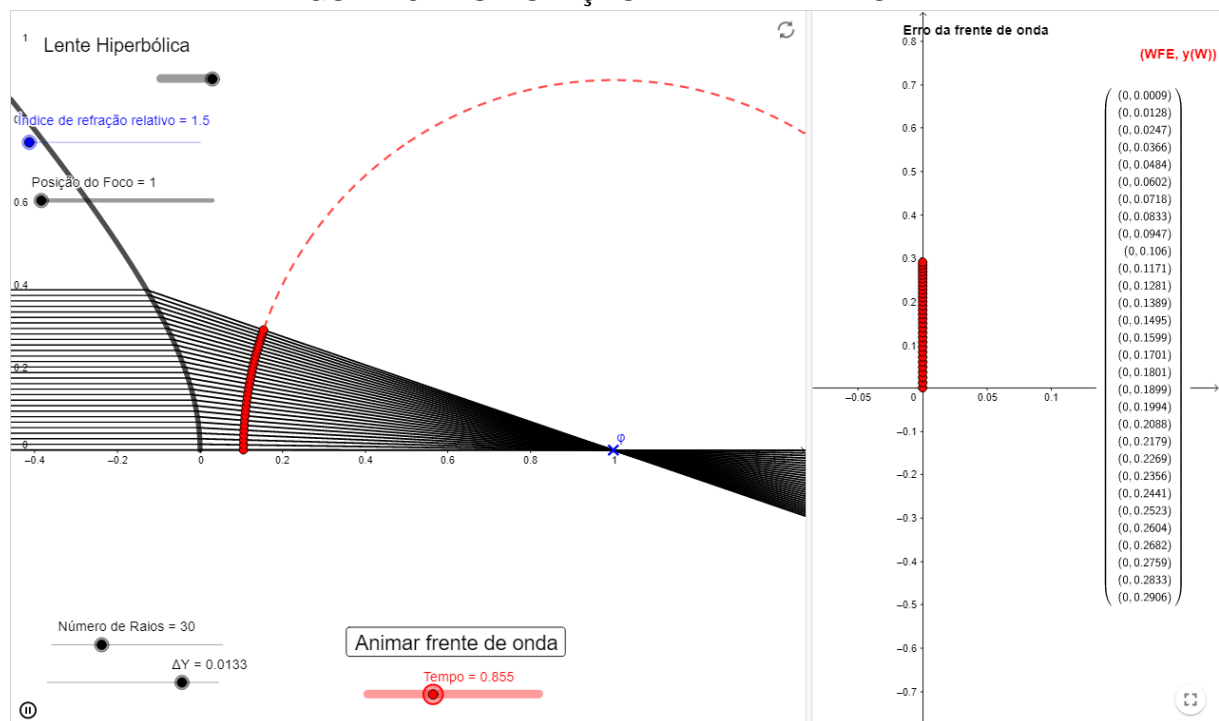
Utilizando o Algoritmo Integrado, foi possível comparar os resultados produzidos pelo traçado de raios analítico e a mesma situação calculada com a discretização de trajetórias, possibilitando um melhor entendimento dos erros gerados pelo algoritmo GRIN construído neste trabalho, e a partir disso mais análises foram produzidas (em arquivos com eixos e objetos modificados especificamente para tal propósito, não fazendo parte da versão publicada). O desempenho da simulação na sua versão de lançamento e os resultados produzidos estão dispostos na seção 4.5.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 ERRO DA FRENTE DE ONDA

A simulação das frentes de onda passando por uma lente anaclástica e uma lente esférica pôde ser construída sem problemas e publicada em <https://www.geogebra.org/m/cuyb5utr>. O algoritmo fornece o resultado previsto de que a WFE vale zero para todos os pontos quando há focalização perfeita, conforme mostra a Figura 31, enquanto que curvas diversas são formadas para o caso não-ideal.

FIGURA 31 – SIMULAÇÃO DA FRENTE DE ONDA



Fonte: O autor.

LEGENDA: Simulação da frente de onda. À esquerda, o traçado de raios e a frente de onda. À esquerda, o gráfico de $y(W) \times wfe$ (é vertical pois a wfe é nula para todos os pontos).

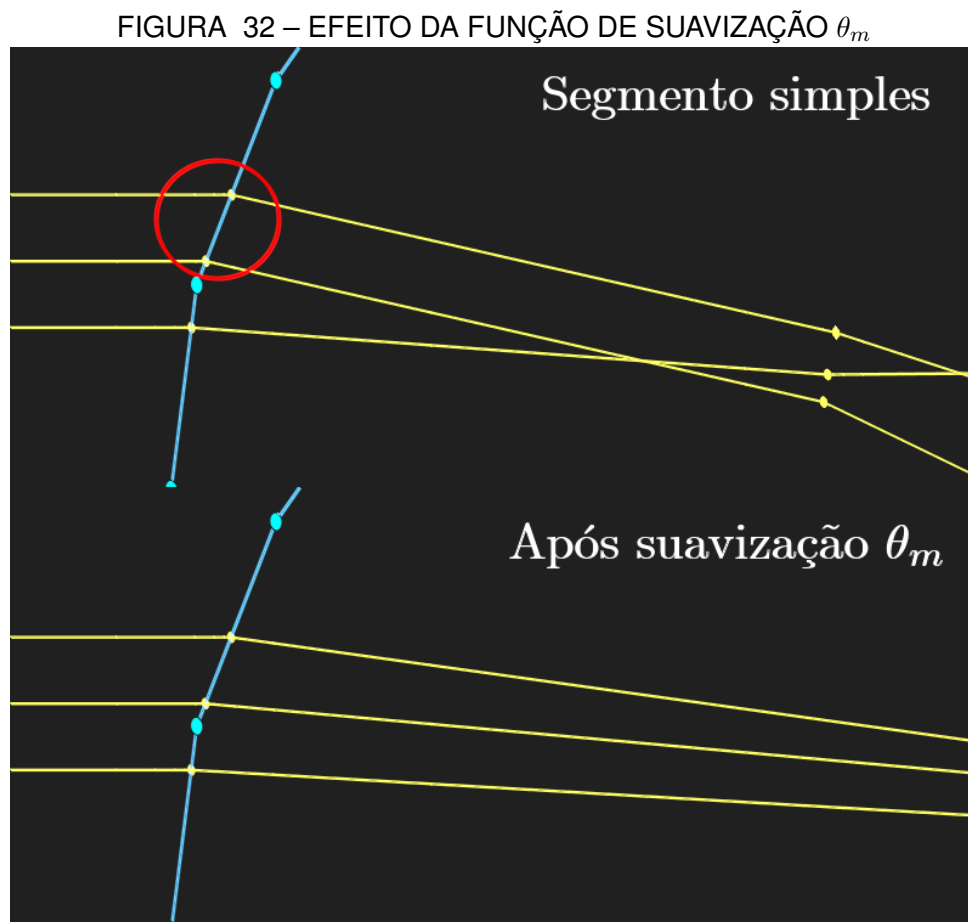
Ao evoluir a frente de onda perto da superfície, é possível visualizar como seus pontos marginais conseguem chegar no ponto focal ao mesmo tempo que os raios centrais, pois a distância adicional que precisam percorrer é compensada pelo maior tempo em que passam no meio onde o índice de refração é menor (onde se movem com mais velocidade que dentro da lente).

Se a curvatura fosse invertida, tornando a lente divergente, o foco continuaria sendo perfeito, embora virtual. Na perspectiva temporal, a única mudança seria a inversão no tempo de viagem entre os raios. Sendo Δt a diferença do tempo de viagem

entre um raio na altura y e o raio central ($y = 0$), a inversão pode ser escrita como $\Delta t'(y) = t(0) - \Delta t(y)$. Como os padrões gerados pela refração são caracterizados pelas posições de incidência e a curvatura local, é natural que haja um vínculo entre o tempo de viagem e a focalização, uma vez que o caminho Δs e o tempo estão relacionados por $\Delta t = \frac{n}{c} \Delta s$.

4.2 ANÁLISE DAS LENTES SEGMENTADAS

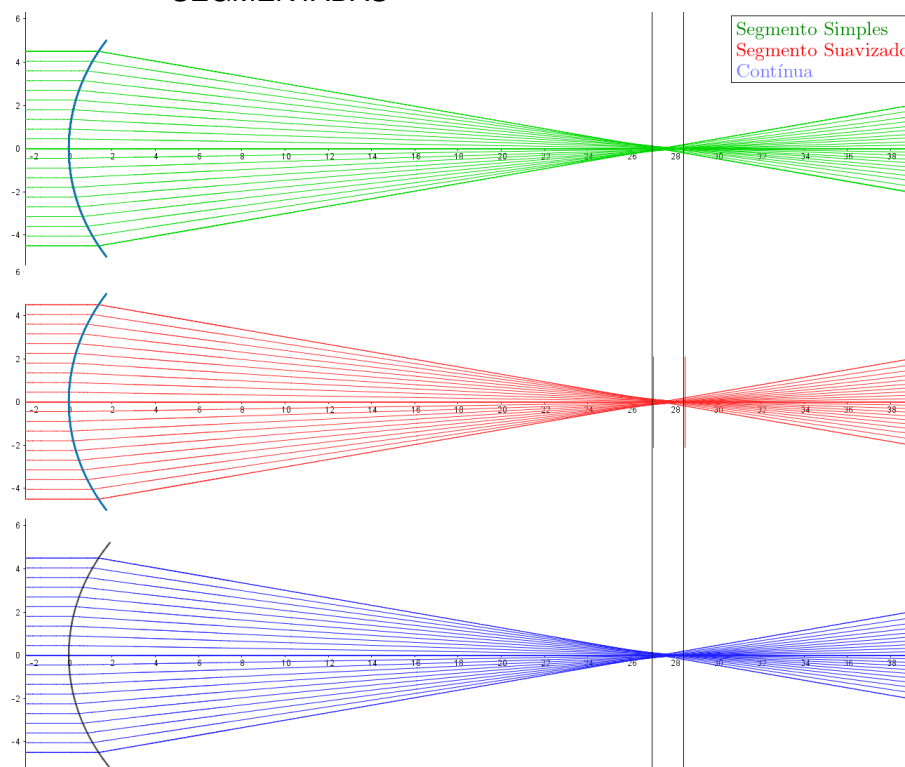
A função θ_m que suaviza os ângulos “percebidos” pelos raios de luz ao interagirem com as lentes segmentadas conseguiu resolver o problema dos raios paralelos que incidem sobre um mesmo segmento saírem paralelos, além de eliminar descontinuidades na distribuição de raios refratados, como mostra a Figura 32



Fonte: O autor.

A Figura 33 mostra que as lentes segmentadas apresentaram uma boa convergência quando o tamanho dos segmentos é de ordem muito menor que as dimensões da lente, com e sem a suavização dos ângulos.

FIGURA 33 – COMPARAÇÃO DO TRAÇADO DE RAIOS PARA LENTES SEGMENTADAS

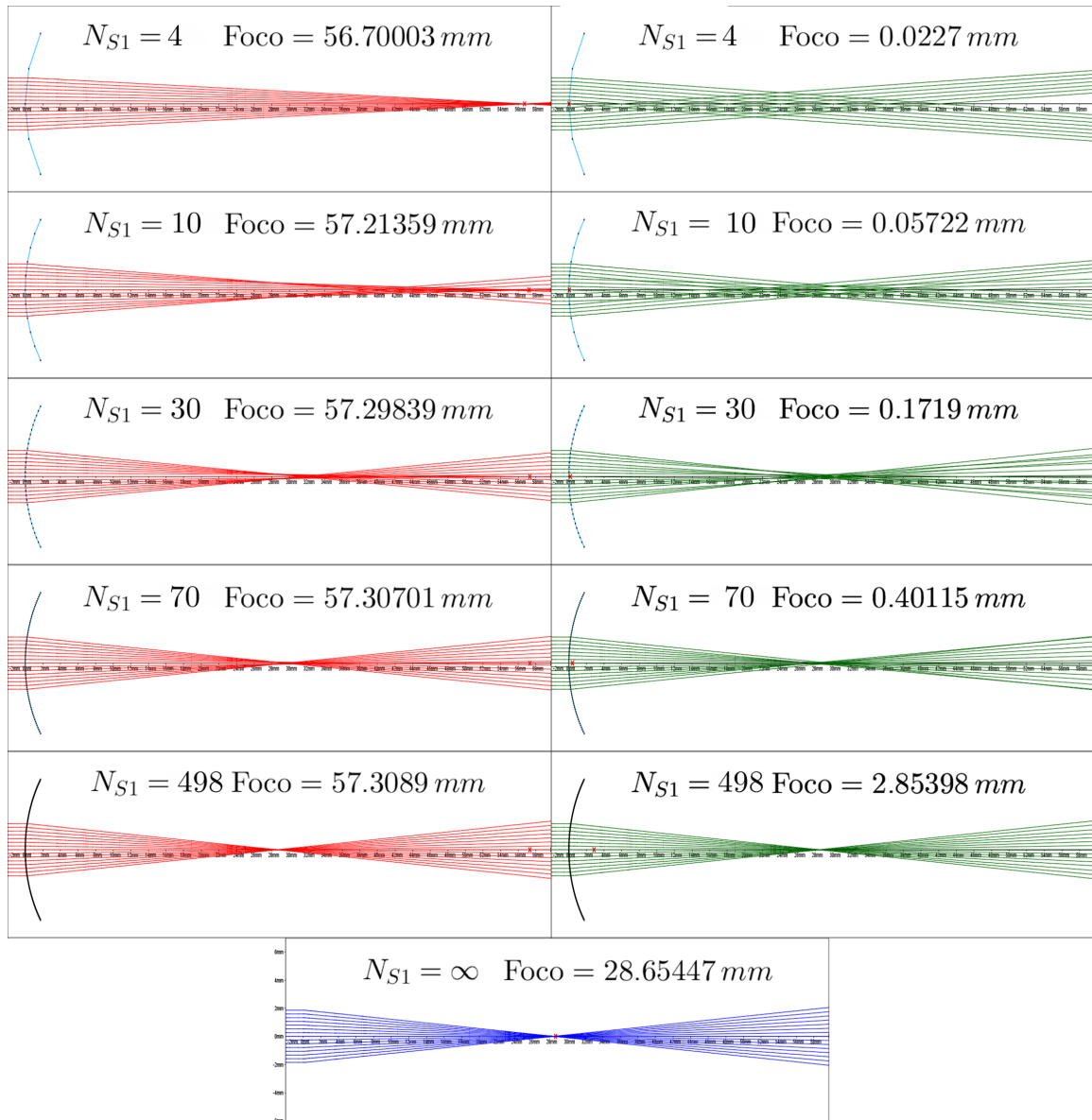


Fonte: O autor.

LEGENDA: Traçado de raios da superfície corneal anterior, no caso contínuo (em azul) e com a lente segmentada, no caso simples (em verde) e quando há suavização dos ângulos (em vermelho), para 500 segmentos. As linhas verticais mostram que a diferença entre as imagens está na ordem de 1 pixel.

Em qualquer tipo de modelagem matemática, existe um erro característico das aproximações escolhidas, e, embora a discrepância no padrão de refração das lentes segmentadas com o caso real fosse esperado, a convergência com o caso real quando o número de segmentos N_S tende a infinito foi confirmada. No entanto, uma discrepância inusitada foi observada ao tentar calcular o foco paraxial, fazendo Y_0 em torno de $10^{-4} mm$, conforme mostra a Figura 34. Apesar da convergência do padrão de refração dos feixes como um todo, em ambas as lentes o valor do foco esteve longe de coincidir com o valor real. Ao aumentar a ordem de grandeza de Y_0 , o valor do foco passou a discordar do real apenas em casas decimais. Aumentando o número de segmentos, a ordem de grandeza de Y_0 pôde ser diminuída, mas caso se tornasse pequena demais, voltava a dar valores incorretos. Sendo assim, existe uma relação entre a ordem de grandeza dos segmentos e o tamanho da região paraxial onde ocorre essa discrepância.

FIGURA 34 – DISCREPÂNCIA NO VALOR DO FOCO PARAXIAL DAS LENTES SEGMENTADAS



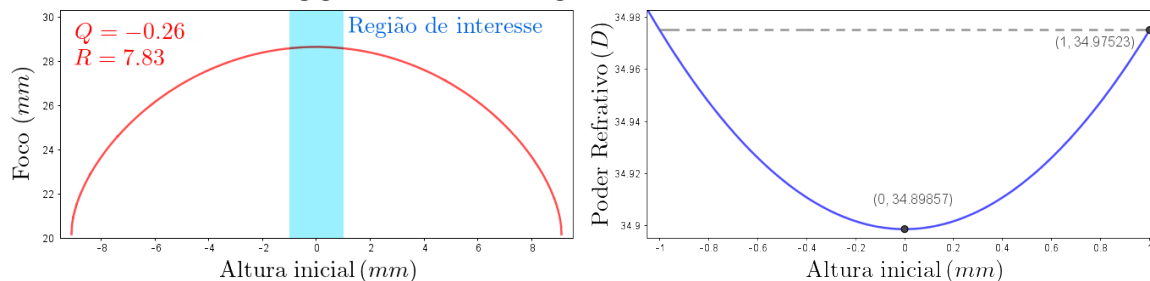
Fonte: O autor.

LEGENDA: À esquerda, a lente com ângulo suavizado. À direita, a lente simples. Ao fim, a lente contínua, representada por $N_S = \infty$, com o valor real do foco.

Notou-se também que o foco paraxial da lente suavizada tendia para o valor de $57,30894 \text{ mm}$, o que é *exatamente* o dobro do foco real de $28,65447 \text{ mm}$. Ao retornar para a equação 2.13, recorda-se que o foco paraxial é o resultado de um limite, e os limites são por natureza extremamente sensíveis a pequenos detalhes quando se trata de indeterminações. Quanto mais próxima de zero é a altura inicial, mais as diferenças entre a lente contínua e a sua versão segmentada se tornam relevantes, fazendo com que o resultado do limite não coincida. Seria possível tentar provar que $F_{seg} = 2F_{cont}$, no entanto, nesta seção será feita uma análise qualitativa de como ocorrem essas convergências e divergências. Usando a equação 2.12 para obter o foco analítico em

função da altura inicial, e passando para o domínio do poder refrativo ($1/F$), foram obtidos os gráficos da Figura 35.

FIGURA 35 – FOCALIZAÇÃO E PODER REFRATIVO DA SUPERFÍCIE CORNEAL ANTERIOR

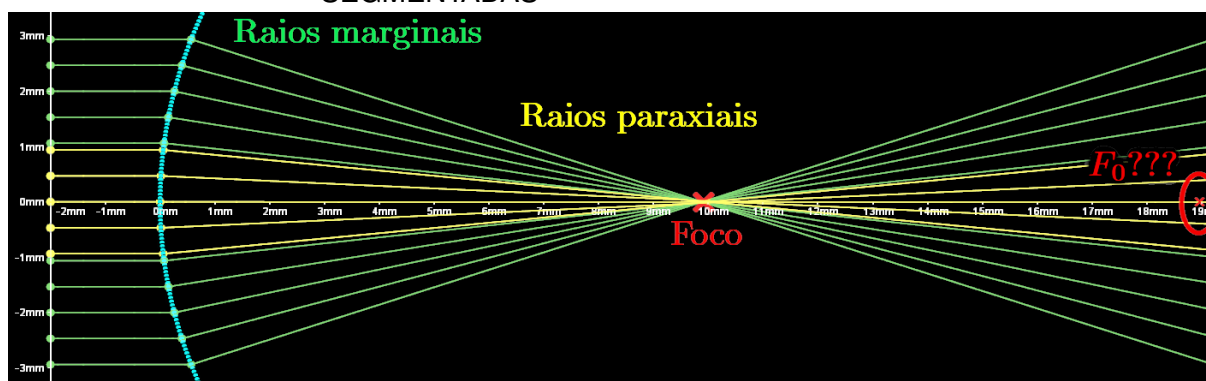


Fonte: O autor.

LEGENDA: À esquerda, plot do foco da superfície corneal em função da altura inicial em todo o domínio. À direita, plot do poder refrativo em função da altura inicial na região paraxial.

De $Y = 0$ a 1 mm , o poder refrativo $P(Y_0)$ de $34,89857\text{ D}$ varia apenas em $0,22\%$ ($0,0767\text{ D}$). Sendo assim, a função escolhida para a córnea tem uma boa focalização na região paraxial e há pouca influência da escolha da altura inicial, de forma que não é uma aproximação grosseira dizer que o poder refrativo é constante nesse intervalo, e que o mesmo ocorre para a lente segmentada, como é evidenciado pelo traçado de raios destacado na Figura 36.

FIGURA 36 – INTERVALO DE ANÁLISE DA FOCALIZAÇÃO DAS LENTES SEGMENTADAS

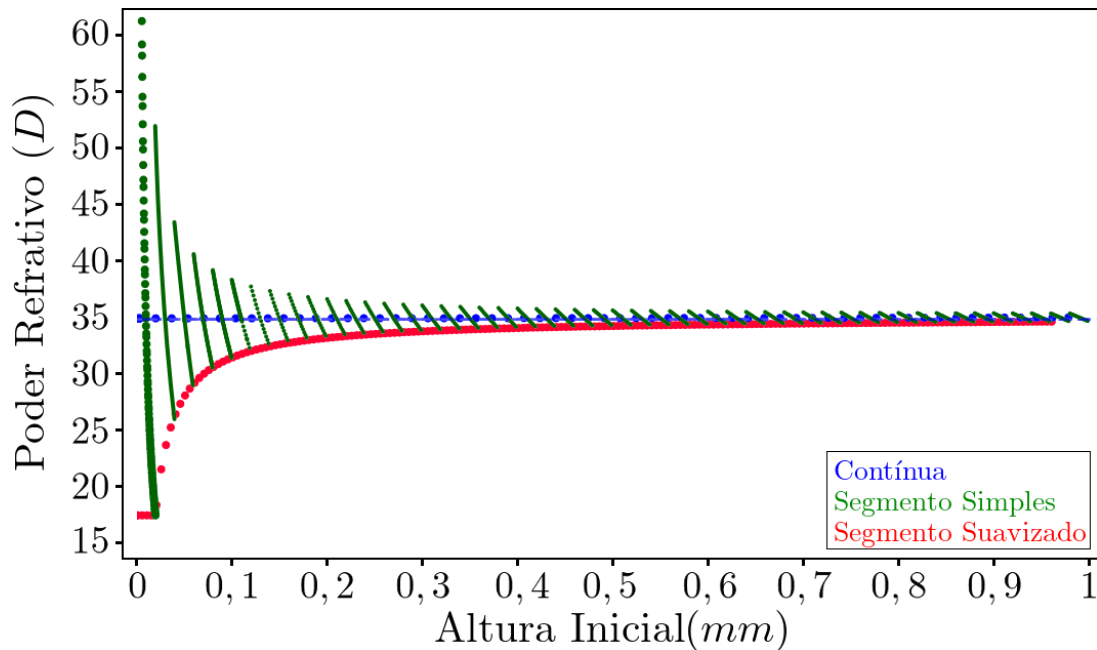


Fonte: O autor.

LEGENDA: Em ciano, os pontos da lente segmentada. Em amarelo, os raios do intervalo de análise, que, assim como os raios marginais (em verde), são focalizados na região marcada por um X vermelho. À direita, o valor do foco do raio central.

A Figura 37 mostra o valor do poder refrativo paraxial para centenas de valores de Y no intervalo de análise, para ambas as lentes segmentadas.

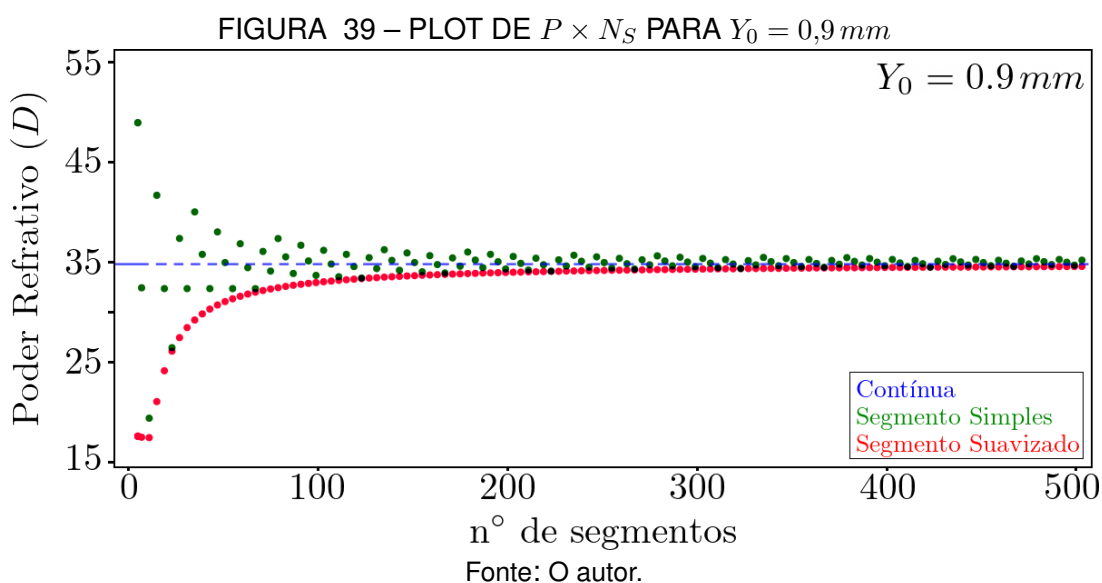
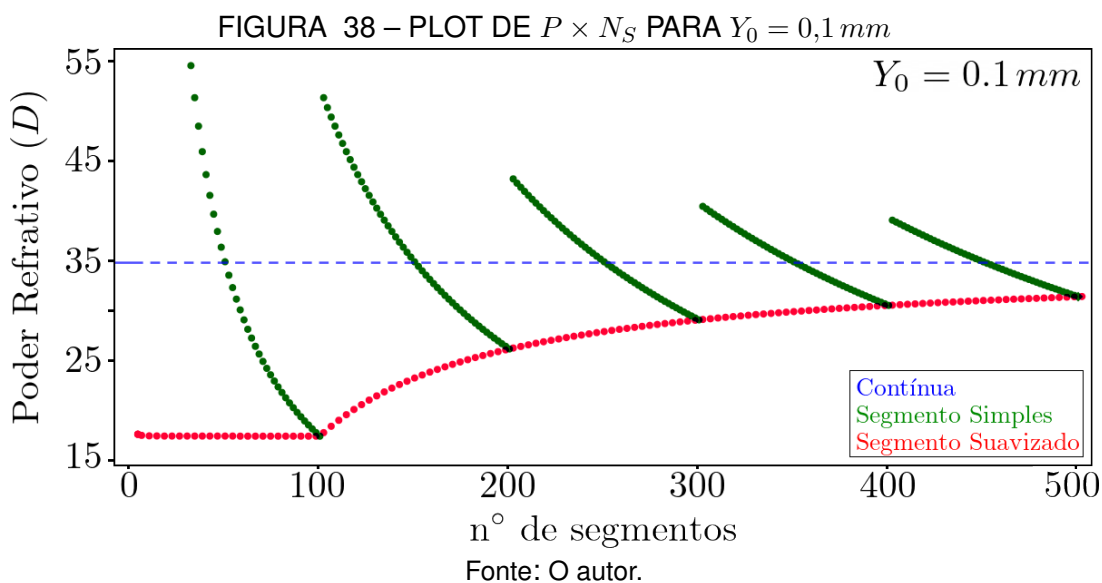
FIGURA 37 – PODER REFRAATIVO DAS LENTES SEGMENTADAS NA REGIÃO PARAXIAL



Fonte: O autor.

LEGENDA: Poder refrativo das três lentes analisadas para alturas próximas ao vértice. O tamanho dos segmentos é da ordem de $0,02\text{ mm}$.

Observa-se que o poder refrativo explode para $+\infty$ quando Y tende a zero para o caso simples, o que indica que o limite do foco vale zero (pois o segmento não é vertical). Mais importante, o valor oscila de forma descontínua com período regular e igual ao tamanho dos segmentos, enquanto a amplitude da oscilação é envelopada pela curva do caso suavizado a partir do segundo segmento. Nota-se também que no caso suavizado o poder refrativo é duas vezes menor apenas dentro do primeiro segmento (implicando em foco paraxial duas vezes maior, como foi visto), o que pode ter relação com a fórmula θ_m escolhida para forçar o ângulo vertical do vértice (Eq. 3.24) ser linear e não radicial ou quadrática, como são as dependências da derivada da função-superfície contínua. De todo modo, o poder refrativo converge para os valores esperados em ambos os casos no limite superior da região paraxial. Além disso, a lente suavizada não introduz nenhum erro novo, mas por seu poder refrativo ser o limite inferior do caso simples, a focalização do feixe como um todo precisa de mais segmentos para convergir para o caso real e a lente sempre será levemente mais fraca. Isso concorda com todos os casos vistos na Figura 34 e explica porque o foco da lente suavizada está um pixel à frente das demais no caso de alta precisão da Figura 33. Por fim, as figuras 38 e 39 mostram o poder refrativo paraxial em dois valores do intervalo de alturas, $Y_0 = 0,1\text{ mm}$ e $0,9\text{ mm}$, conforme o número de segmentos aumenta.



O poder refrativo da lente segmentada simples também oscila nesse caso pois a altura é fixa, mas ao variar N_S o ângulo do segmento que o raio atinge se altera, e quando passa a atingir um segmento diferente, ocorre a descontinuidade.

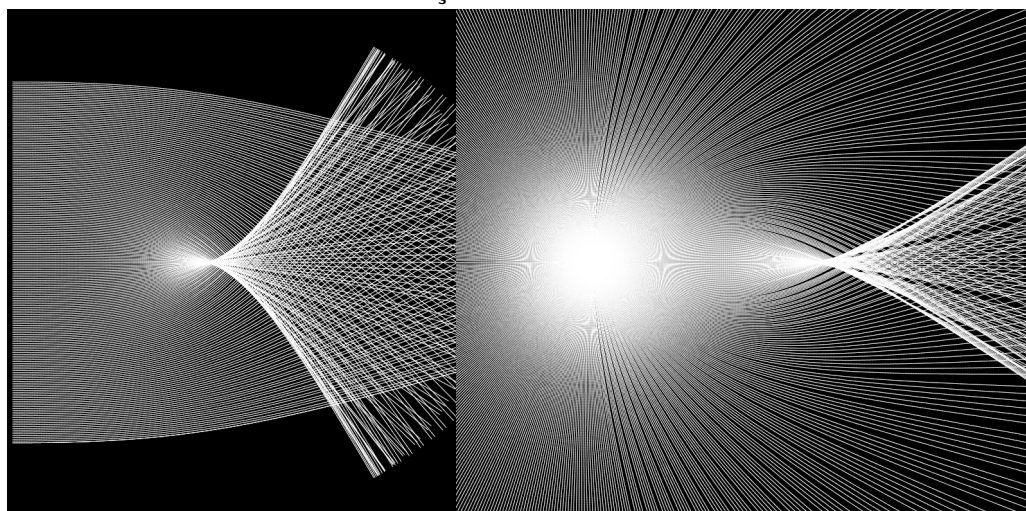
As respectivas diferenças percentuais em relação ao valor de referência foram de 9,99% (3,486 D) e 0,941% (0,329 D) para $N_S = 500$ no caso suavizado. Tendo em vista o resultado anterior, era esperado que baixas alturas precisassem de muito mais segmentos para convergirem para o valor real, no entanto, isso sugere que para obter uma convergência de $P(0,1 \text{ mm})$ semelhante à de $0,9 \text{ mm}$ seriam necessários milhares de segmentos. Elevando o GeoGebra aos seus limites com $N_S = 3000$, o valor de $P(0,1 \text{ mm})$ ainda era de 34,46 D (diferença percentual de 1,26%), ou seja o valor de $P(0,9 \text{ mm})$ para $N_S = 500$ continuou quase 4 vezes mais próximo do valor de referência, com 6 vezes menos segmentos.

Apesar dos problemas no limite paraxial, os resultados obtidos com as lentes segmentadas foram satisfatórios, mostrando que as lentes segmentadas também são uma abordagem válida para o tratamento de dados experimentais, desde que a sua quantidade seja na ordem das centenas e a análise não necessite de valores paraxiais com muita precisão, onde definitivamente seria mais apropriado utilizar interpolação.

4.3 RESULTADOS DO ALGORITMO GRIN

A maior dificuldade durante a construção do algoritmo GRIN foi de encontrar a fórmula certa para a refração em todos os casos possíveis (ângulos nos quatro quadrantes em relação ao eixo x e também em relação à direção do gradiente), pois sem ela a luz pode violar a lei da refração, indo para um quadrante proibido ou considerando o ângulo de incidência como $\pi/2 - \theta$, refratando muito mais do que deveria. O teste das funções $n(x, y)$ foi bem sucedido, apresentando pouco ou nenhum defeito nas curvas uma vez que o passo Δs estivesse na ordem de 10^{-2} unidades. A Figura 40 mostra o teste da função lorentziana (Eq. 3.61) para 350 passos. Nota-se que uma região com esse perfil é capaz de focalizar de forma semelhante tanto raios paralelos quanto uma fonte pontual muito próxima ao foco, com pouca perda de poder refrativo.

FIGURA 40 – TRAÇADO DE RAIOS EM UMA REGIÃO GRIN DESCRITA POR UMA FUNÇÃO LORENTZIANA

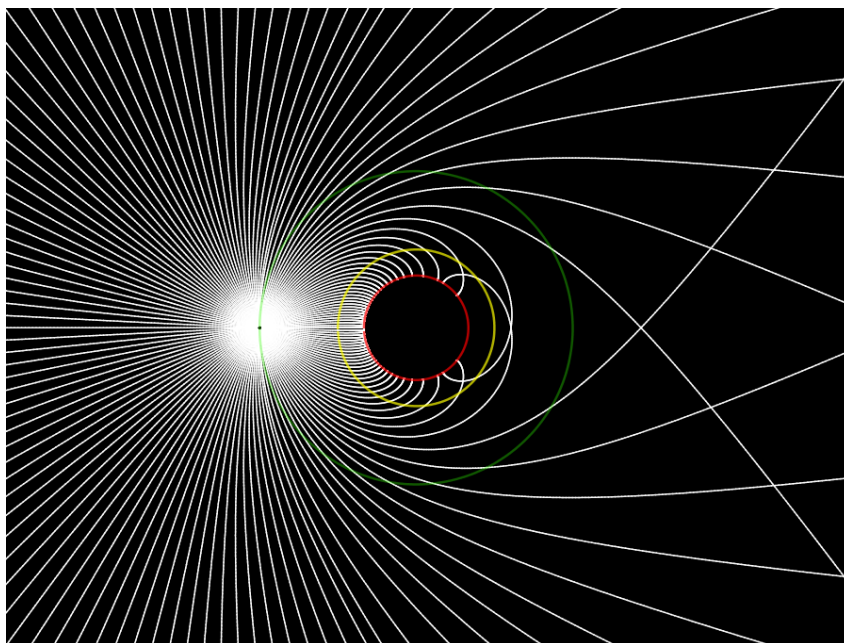


Fonte: O autor.

LEGENDA: O índice de refração máximo N vale 3. À esquerda, um feixe de raios paralelos cobrindo as alturas de -3 a 3 . À direita, uma fonte pontual situada a 2.5 unidades da origem.

No caso do buraco negro de Schwarzschild (Eq. 3.62), fenômenos conhecidos foram observados para o caso de uma fonte pontual (Figura 41) e de raios paralelos (Figura 42), como a lente gravitacional de objetos distantes e a formação de imagens diametralmente opostas a um objeto situado atrás do buraco negro.

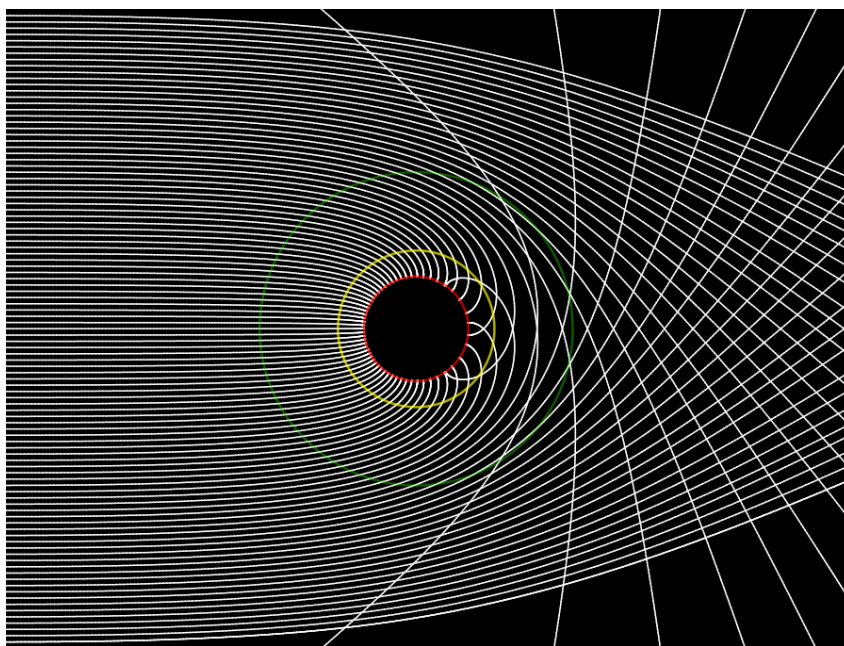
FIGURA 41 – TRAÇADO DE RAIOS RADIAL EM TORNO DE UM BURACO NEGRO DE SCHWARZCHILD



Fonte: O autor.

LEGENDA: Fonte de luz pontual sob o regime GRIN de um buraco negro. O círculo amarelo representa a esfera de fótons, a partir da qual todas as trajetórias colapsam para o horizonte de eventos, em vermelho. O terceiro círculo, em verde, tem raio igual a $3R_s$.

FIGURA 42 – TRAÇADO DE RAIOS PARALELOS EM TORNO DE UM BURACO NEGRO DE SCHWARZCHILD



Fonte: O autor.

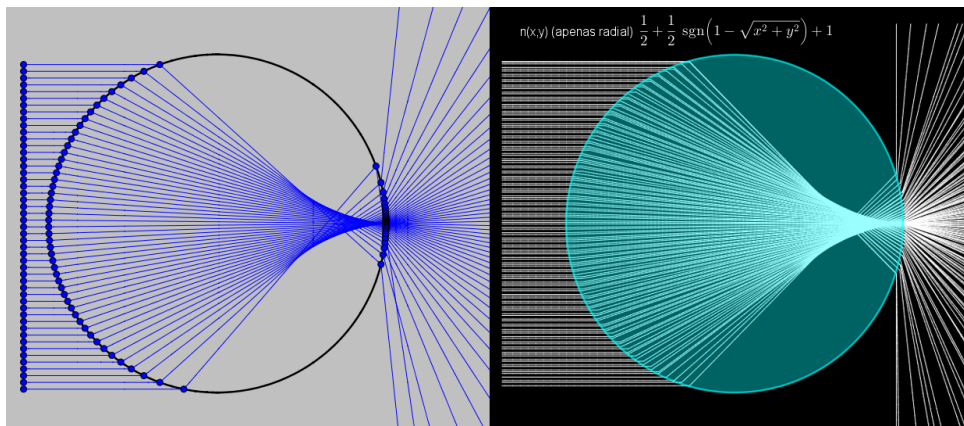
LEGENDA: Desvio de raios paralelos ($X = -8$) por um buraco negro calculado pelo algoritmo GRIN. É possível ver raios em órbitas extremas circundando o buraco negro.

Como também é previsto pela relatividade geral [51] [52], todas as trajetórias que chegaram mais próximas que $3R_s/2$, cruzando a esfera de fótons, colapsaram inevitavelmente em direção ao horizonte de eventos, enquanto que imediatamente acima desse limite sofreram desvios extremos, ao ponto de dar voltas em torno do buraco negro. Sendo assim, o algoritmo escolhido para computar a refração variável forneceu os resultados corretos mesmo para um caso extremo em que $n(x, y)$ diverge.

Em ambas as funções não houve ocorrência de indeterminação por ângulo crítico, pois a variação do índice de refração entre cada passo era pequena. No caso contínuo, a reflexão interna total jamais deve acontecer, exceto possivelmente quando o raio se tornar perpendicular às curvas de nível, pois $\theta_c = \arcsen\left(\frac{n}{n \pm dn}\right) = \frac{\pi}{2}$.

A Figura 43 mostra a comparação entre um feixe de raios paralelos passando por uma esfera de $n = 2$, no traçado de raios comum e no algoritmo GRIN. É possível fazer uma sobreposição das imagens e verificar que os resultados são indistinguíveis nessa escala.

FIGURA 43 – COMPARAÇÃO DO TRAÇADO DE RAIOS ANALÍTICO E DO ALGORITMO GRIN



Fonte: O autor.

LEGENDA: Refração em uma esfera computada pelo traçado de raios (à esquerda) e pelo algoritmo GRIN (à direita).

Portanto, o algoritmo de discretização das trajetórias se demonstrou compatível com três funções radiais muito distintas e previu os resultados corretos quando foi possível fazer comparações. Em tese, seria possível substituir o algoritmo de traçado de raios comum pela discretização das trajetórias, bastando apenas delimitar a função $n(x, y)$ e o gradiente $g(x, y)$ com os condicionais corretos. Para não fazer cálculos redundantes quando o meio é sabidamente homogêneo, seria possível aumentar o tamanho do passo consideravelmente dentro dessa região sem risco de erro. Além disso, seria possível incluir o caso da reflexão quando há ângulo crítico, ou mesmo inserir uma função probabilística que decide se o raio será refletido ou refratado em cada interação, uma vez que essa probabilidade é caracterizada pelo índice de refração.

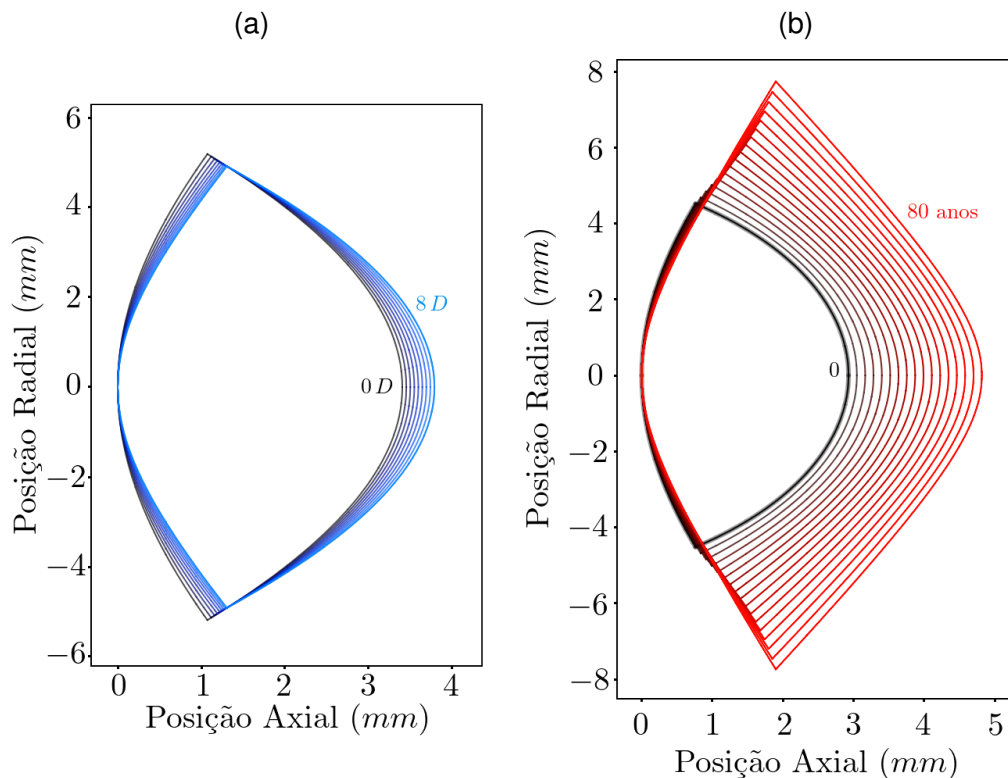
Essas funcionalidades caracterizariam um algoritmo não-sequencial completo.

A simulação contendo as funções do buraco negro de Schwarzschild, a distribuição lorentziana (e gaussiana) e a função degrau, além da possibilidade de inserir qualquer função radial para o índice de refração, pode ser acessada em <https://www.geogebra.org/m/n3dgr3ta>. Mesmo usando 500 passos, a performance em navegadores é razoável.

4.4 ANÁLISE DO CRISTALINO

A implementação do modelo adaptativo do cristalino de Navarro et. al., após as complicações para definir corretamente as funções, produziu curvas com as propriedades descritas no artigo original. A acomodação muda o formato do cristalino de forma a aumentar a sua curvatura e espessura (Figura 44a), enquanto a idade aumenta a asfericidade e as dimensões das curvas, em contraste com o formato elipsoidal previsto para um recém-nascido (Figura 44b).

FIGURA 44 – CURVAS DELIMITADORAS DO CRISTALINO COM VARIAÇÃO DA ACOMODAÇÃO E IDADE

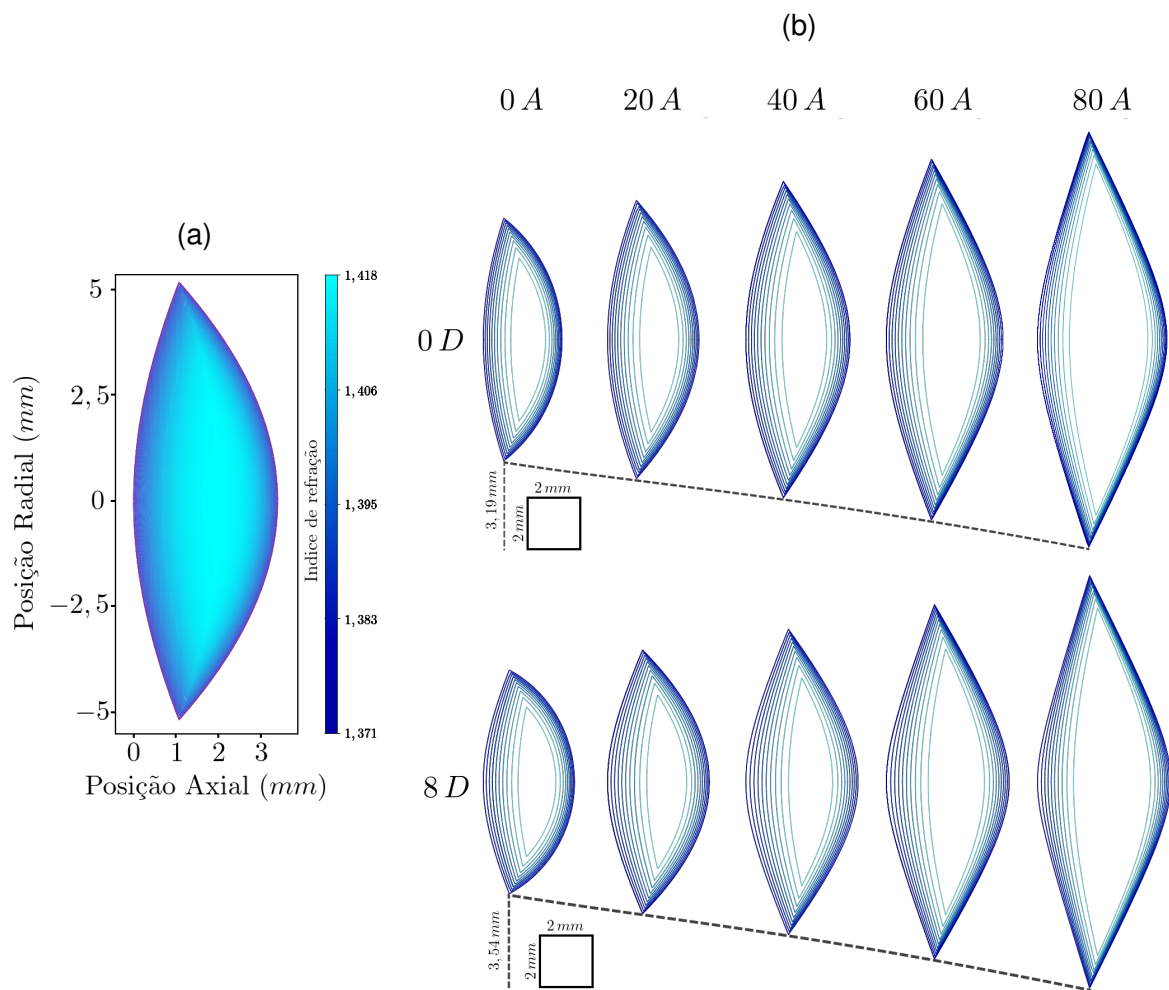


Fonte: O autor.

LEGENDA: a) Idade $A = 20$ fixa, onde cada curva a partir da preta ($D = 0$) corresponde a um acréscimo de 1 D de acomodação. b) Acomodação $D = 0$ fixa, onde cada curva a partir da preta (0 anos) corresponde a um acréscimo de 5 anos.

A Figura 45a mostra o mapa de cores para $A = 20$ anos e $D = 0$. Embora a função $n(x, y)$ já tivesse sido observada na Janela de Visualização 3D, essa técnica gera uma figura mais fácil de visualizar. É possível notar que o valor é praticamente homogêneo no núcleo, decaindo rapidamente nas bordas. Por ser um processo demorado, as curvas de nível foram processadas com espaçamento de apenas $0.1\delta n$ para outras idades, em relaxamento e acomodação máxima (Figura 45b). As figuras apresentam grande correspondência com o que foi apresentado no artigo original.

FIGURA 45 – VARIAÇÃO DO ÍNDICE DE REFRAÇÃO NO INTERIOR DO CRISTALINO



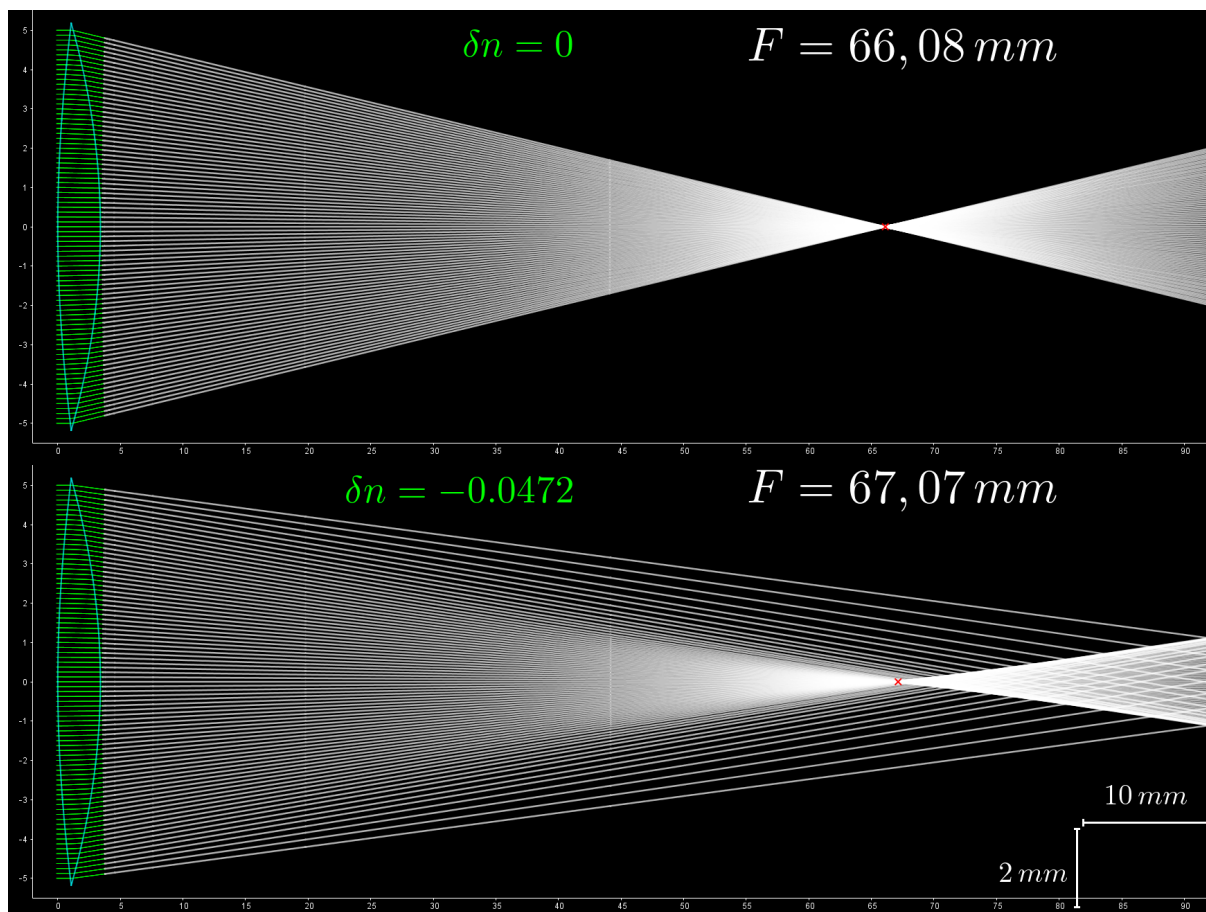
Fonte: O autor.

LEGENDA: a) Mapa de cores do índice de refração no interior do cristalino (para $A = 20$, $D = 0$) feito a partir do rastro da curva de nível. b) Curvas delimitadoras do cristalino quando $A = 20$, onde cada linha a partir da curva menor ($D = 0$) corresponde a um acréscimo de $1 D$.

Após a implementação das funções do modelo no algoritmo GRIN, o teste da focalização de uma distribuição de raios paralelos mostrou que a refração variável diminui muito o poder da lente nas bordas, enquanto que no caso homogêneo as

aberrações são imperceptíveis, como mostra a Figura 46. Uma conclusão precipitada seria a de que o cristalino aumenta as aberrações do olho, mas os raios nunca chegam paralelos ao cristalino devido à córnea. Para fazer afirmações sobre o seu real efeito, portanto, é necessário levar em conta todo o sistema óptico, o que só pôde ser feito com a integração dos algoritmos.

FIGURA 46 – TRAÇADO DE RAIOS PARALELOS ATRAVÉS DO CRISTALINO

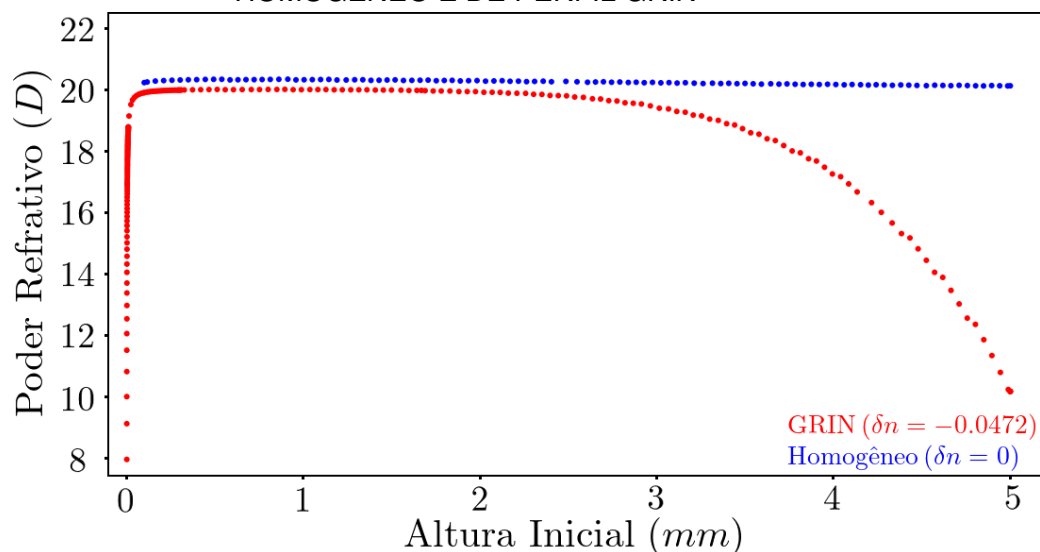


Fonte: O autor.

LEGENDA: Acima, $\delta n = 0$, resultando em um índice de refração homogêneo de 1,418; abaixo, a estrutura GRIN com $\delta n = -0,0472$.

O valor do foco paraxial encontrado convergiu para 0 quando a ordem de grandeza de Y se tornou menor que a dos passos, o que não é uma surpresa tendo em vista que o mesmo ocorreu no caso das lentes segmentadas quando Y era menor que o tamanho dos segmentos. É possível que o valor de F_0 convirja no método da discretização das funções conforme o número de camadas aumenta, pois suas equações de incidência são analíticas. A Figura 47 mostra essa divergência no poder refrativo conforme a altura em relação ao eixo óptico diminui, além do decaimento próximo às bordas da lente.

FIGURA 47 – COMPARAÇÃO DO PODER REFRAATIVO DO CRISTALINO HOMOGÊNEO E DE PERFIL GRIN

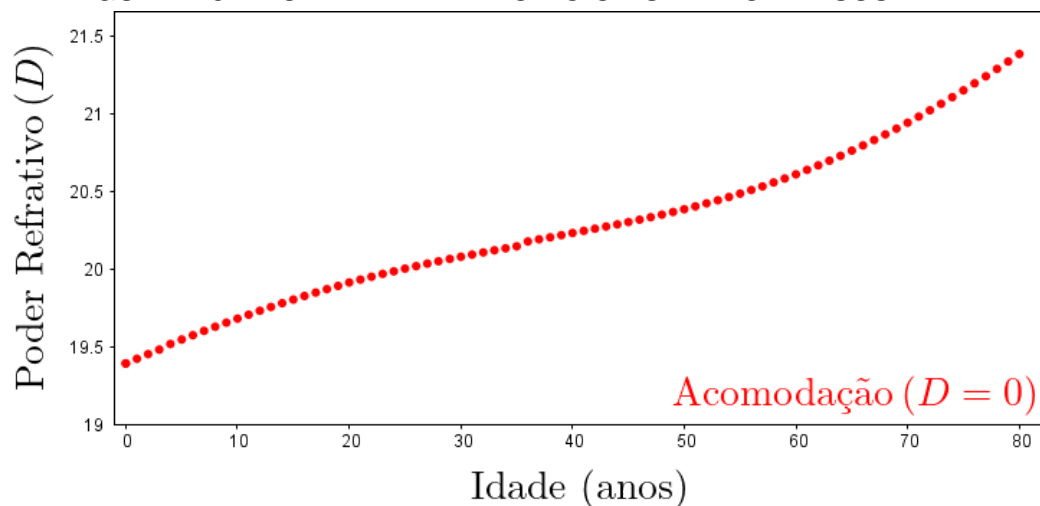


Fonte: O autor.

LEGENDA: Plot do poder refrativo versus altura inicial, para o caso homogêneo e com o perfil GRIN

Quanto à variação dos parâmetros, a Figura 48 mostra que o poder refrativo paraxial aumenta em aproximadamente $2D$ entre 0 e 80 anos, o que está associado ao aumento de tamanho e homogeneização do índice de refração, como é visto na Figura 44. Por outro lado, a Figura 49 mostra que o efeito da acomodação decai com a idade, o que implica em maior esforço dos músculos ciliares para focalizar os objetos¹.

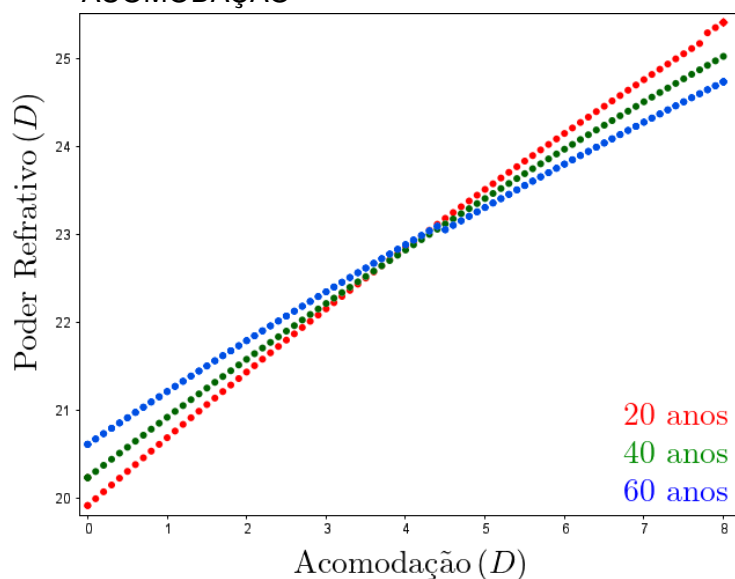
FIGURA 48 – PODER REFRAATIVO DO CRISTALINO VERSUS IDADE



Fonte: O autor.

¹ No artigo original de Navarro et. al., considera-se que o valor máximo da acomodação também diminui com a idade, então as curvas de 40 e 60 anos acabam antes que a de 20 anos no eixo D .

FIGURA 49 – PODER REFRAATIVO DO CRISTALINO VERSUS GRAU DE ACOMODAÇÃO



Fonte: O autor.

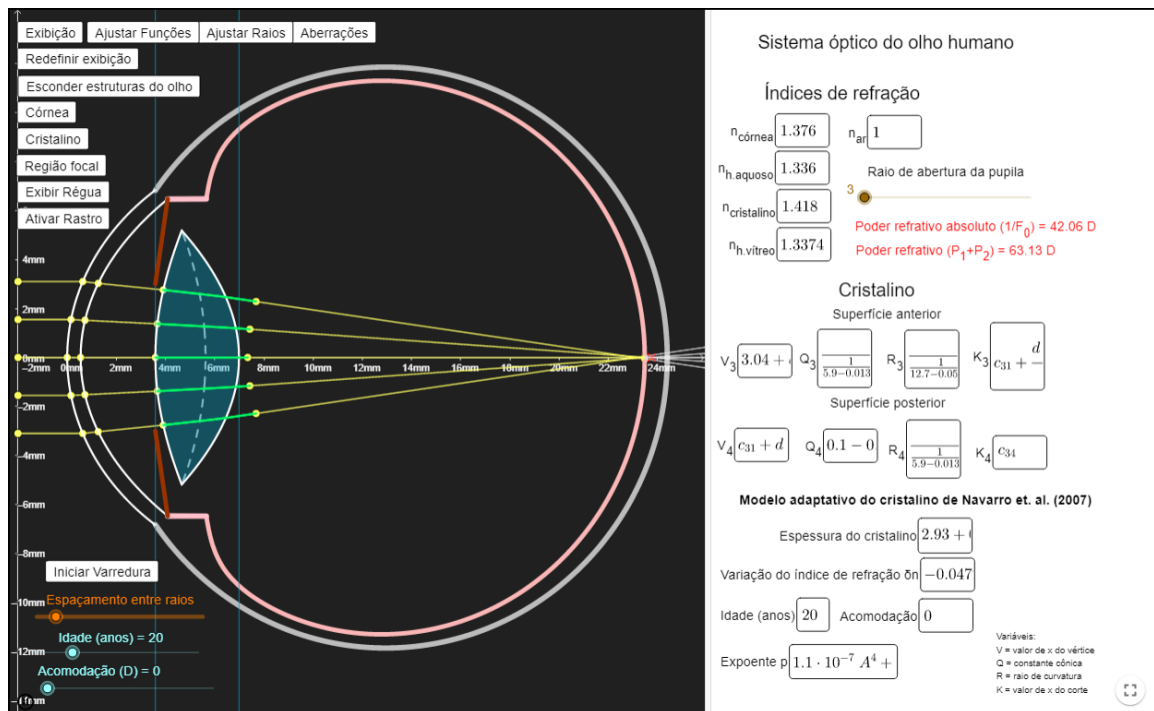
A simulação do cristalino está disponível em <https://www.geogebra.org/m/v6hwncew>. Não houve tempo para automatizar a geração de gráficos de análise, então a funcionalidade não está incluída nessa versão pública.

4.5 ALGORITMO INTEGRADO

Graças ao JavaScript, os problemas da programação interna do GeoGebra foram evitados em sua maioria, em particular o travamento nos menus, que agora funciona de forma quase instantânea mesmo no navegador. A versão de lançamento do algoritmo integrado (Figura 50) está disponível em <https://www.geogebra.org/m/kjkmzue3>.

O uso de memória “em repouso” também diminuiu mesmo a simulação sendo mais robusta que suas antecessoras, embora o problema do acúmulo de RAM não possa ser resolvido, necessitando reiniciar o arquivo depois de um certo tempo de uso. A ação mais pesada é a atualização das definições após N_R ou N_p serem alterados, levando entre 30 segundos a vários minutos para recalculer os objetos, dependendo da quantidade de raios e passos (pois todos os objetos da simulação com exceção do sistema óptico são redefinidos). Alguns campos de entrada para atualizar as funções podem resultar em indefinições apenas por clicar sem qualquer alteração ser feita, e a razão desse *bug* é desconhecida, mas a maior parte dos parâmetros do sistema óptico podem ser ajustados com liberdade pelo usuário sem causar problemas. É possível notar o quão sensível é o desenho óptico do olho humano ao variar apenas casas decimais dos parâmetros das curvas, em especial da superfície anterior da córnea.

FIGURA 50 – ALGORITMO INTEGRADO 1.0



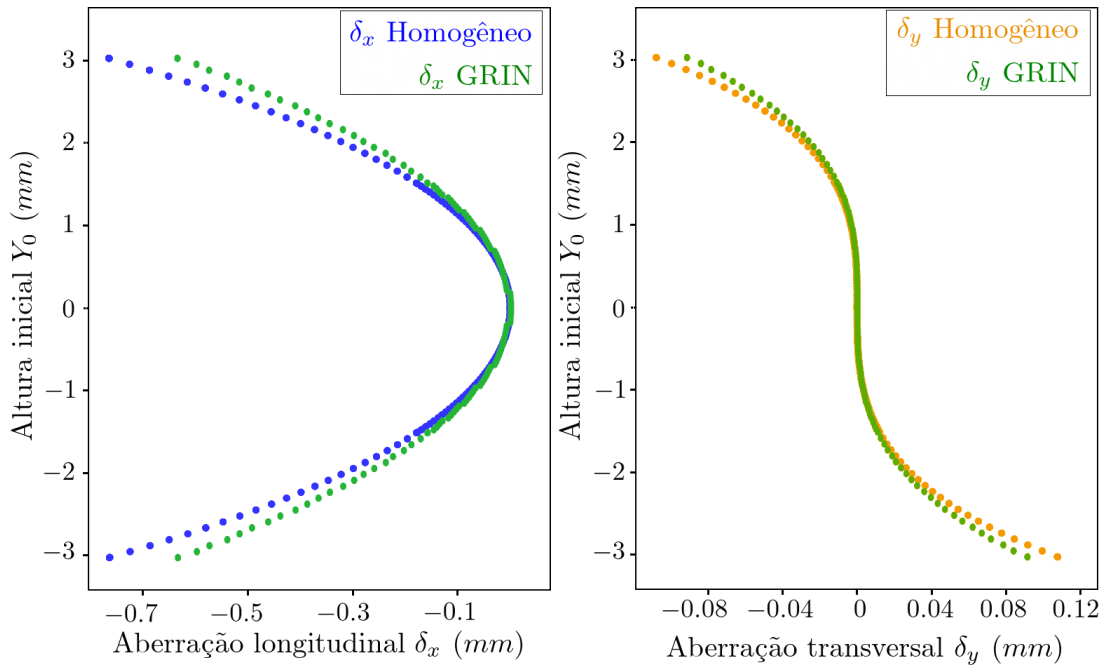
Fonte: O autor.

LEGENDA: À direita, a janela da simulação, onde os segmentos em amarelo são traçados com equações analíticas, enquanto os segmentos em verde são calculados pelo algoritmo GRIN (e portanto, são resultados aproximados). À esquerda, o menu de personalização do sistema óptico.

O poder refrativo dos parâmetros escolhidos é 63,13 D, o que está dentro da faixa de valores encontrados literatura [3]. Já o poder refrativo absoluto foi de 42,06 D para o cristalino com GRIN (100 passos) e de 41,06 D no caso homogêneo, mostrando que na prática o cristalino aumenta levemente o poder refrativo do olho. Isso implica que a contribuição do perfil GRIN não é desprezível e afeta mesmo os raios paraxiais, comprometendo a validade de grande parte das equações utilizadas para estimar as propriedades dos sistemas ópticos (como a Eq. 2.5), uma vez que elas se baseiam no limite paraxial com n constante ao longo das lentes. Como as aberrações de Seidel também são definidas a partir de valores paraxiais, talvez não seja possível calculá-las de antemão sem computar o traçado de raios quando o algoritmo GRIN está ativo.

O efeito do perfil GRIN do cristalino sobre as aberrações longitudinal e transversal para um raio de pupila de 3 mm e $N_p = 100$ pode ser encontrada na Figura 51. As aberrações se mostraram levemente menores na região avaliada, indicando uma melhoria na qualidade óptica do olho humano. Por outro lado, o erro da frente de onda (para um valor de tempo arbitrário e maior que 12 unidades, quando a onda já passou pelo cristalino e não sofre mais refração) apresentou valores de módulo maior e com grande instabilidade, como mostra a Figura 52, evidenciando que o erro do algoritmo GRIN é mais relevante nessa medida.

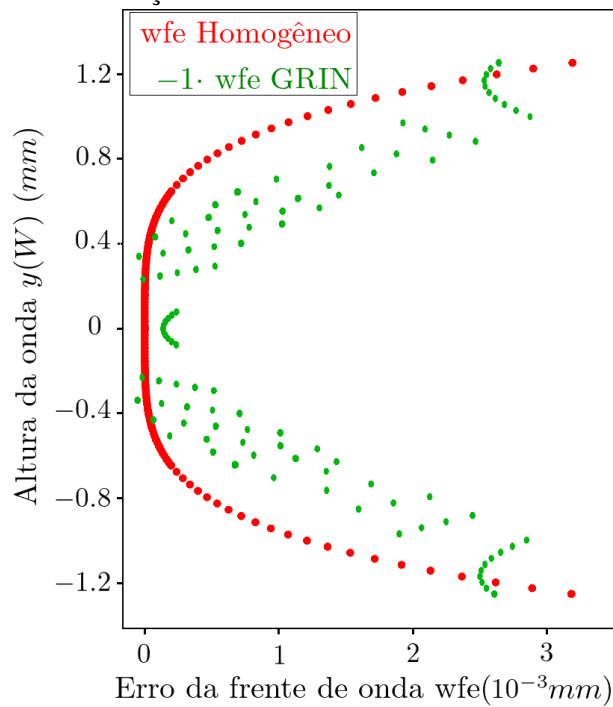
FIGURA 51 – MEDIÇÕES DAS ABERRAÇÕES LONGITUDINAL E TRANSVERSAL NO ALGORITMO INTEGRADO



Fonte: O autor.

LEGENDA: As curvas homogêneas foram calculadas com o algoritmo GRIN desativado, e portanto são analíticas.

FIGURA 52 – MEDIÇÃO DA WFE NO ALGORITMO INTEGRADO



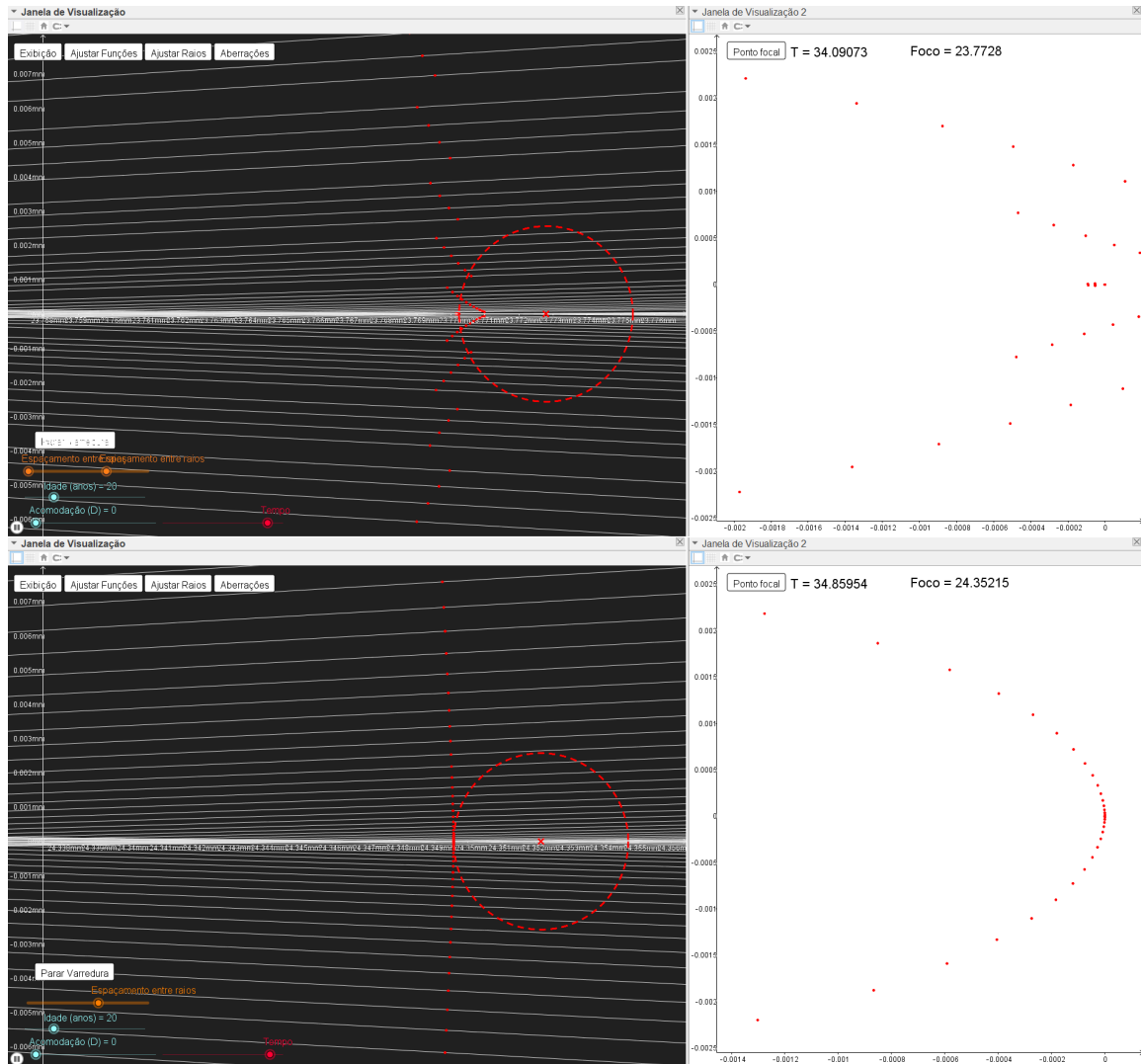
Fonte: O autor.

LEGENDA: Para fazer a comparação, a curva com algoritmo GRIN foi espelhada no eixo x .

Fazendo um *zoom* na região focal, considerando a extensão dos raios para

além da incidência sobre a retina e com $t = 0,9999T_W$, pôde-se observar a WFE tornando-se indefinida a partir de um certo raio de pupila para ambos os casos, e as descontinuidades na distribuição dos raios e da posição dos pontos do conjunto da frente de onda $W(t)$ quando o algoritmo GRIN está ativo, como mostra a Figura 53.

FIGURA 53 – AS FRENTES DE ONDA PERTO DO PONTO FOCAL



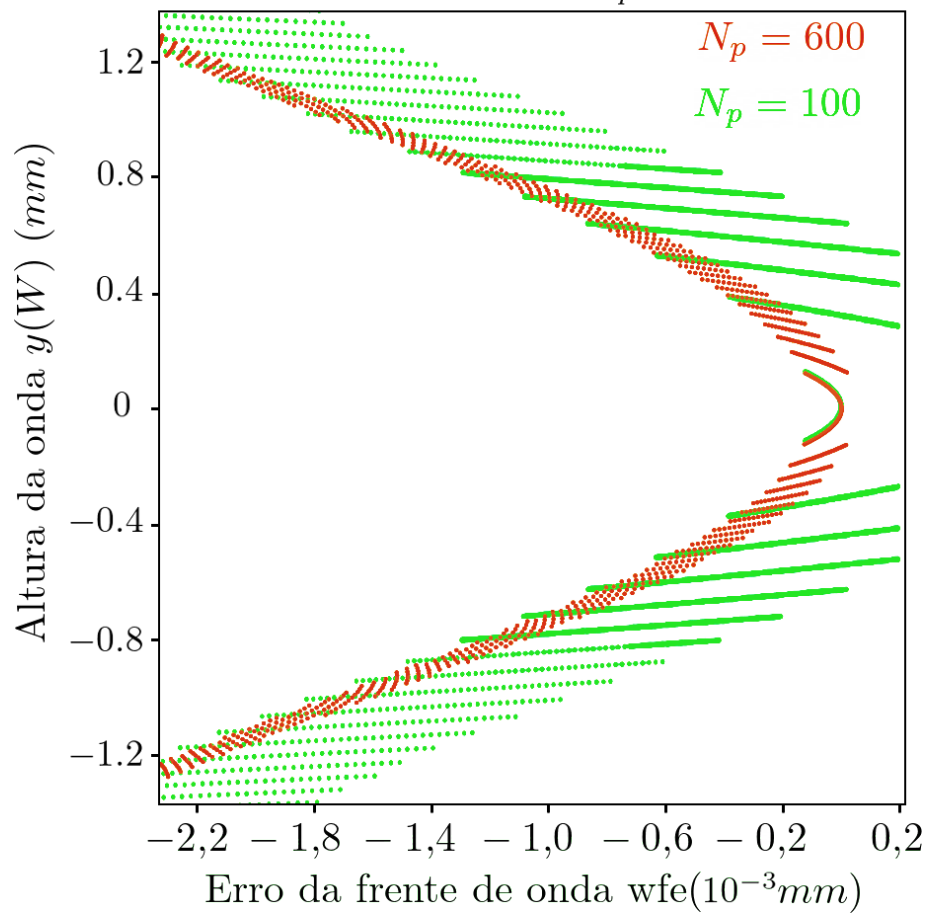
Fonte: O autor.

LEGENDA: Visualização das frentes de onda no Algoritmo Integrado. A Janela de Visualização corresponde a uma região de aproximadamente $0,018\text{ mm} \times 0,014\text{ mm}$. As retas em branco são as extensões dos raios, o círculo tracejado representa a frente de onda ideal e os pontos vermelhos são a frente de onda $W(t)$. Acima, o algoritmo GRIN está ativo e o foco se encontra em $23,7728\text{ mm}$; abaixo, o algoritmo GRIN está desativado (cristalino homogêneo) e o foco está em $24,35215\text{ mm}$. Os valores máximos da WFE são de aproximadamente $-0,002\text{ mm}$ e $-0,0014\text{ mm}$, respectivamente.

Revertendo o tempo para um valor próximo do utilizado na Figura 52 (por conveniência, pois a escala da região focal é muito pequena), o número de passos da discretização das trajetórias foi aumentado para 100, 200, 400 e então 600 (o que

levou em torno de 30 minutos), uma vez que alterá-lo diretamente de 100 para 600 foi impossível dentro das limitações do GeoGebra (e apenas manter a simulação com 600 passos já beira o limite do uso de memória), e os valores da WFE foram comparados para as duas precisões (Figura 54), evidenciando que o tamanho dos passos aumenta o número de oscilações, mas diminui sua amplitude, de forma que a curva se estabiliza conforme N_p cresce.

FIGURA 54 – OSCILAÇÃO DA WFE COM O NÚMERO DE PASSOS
 $\Delta s = 1.01N_p d$

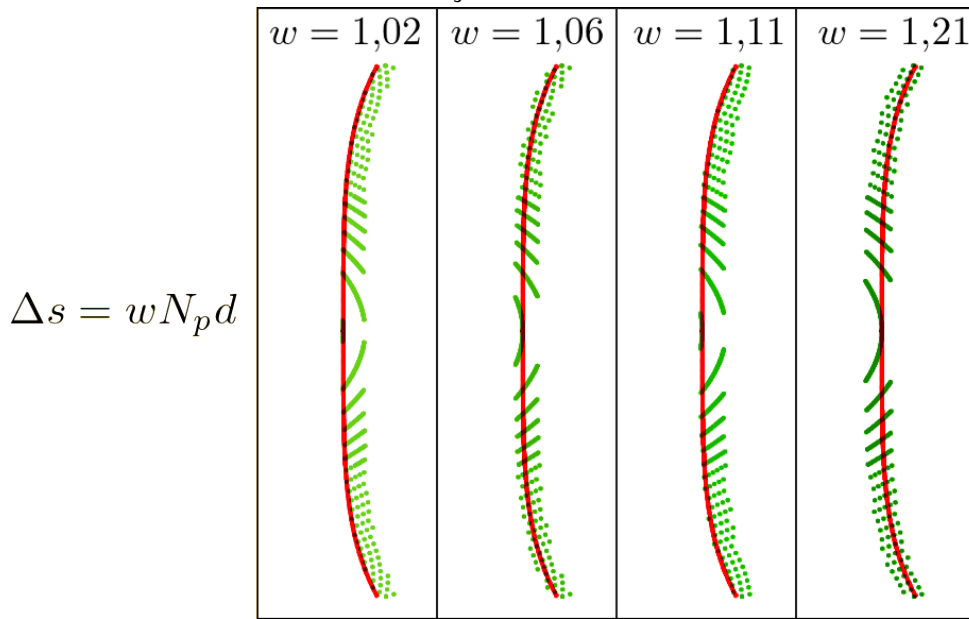


Fonte: O autor.

LEGENDA: Sobreposição de gráficos. A curva verde corresponde à wfe da Figura 52 com muito mais pontos, revelando que existem intervalos de continuidade e não uma oscilação aleatória.

Além disso, como o perfil GRIN do cristalino torna-se equivalente ao caso homogêneo ao definir-se $\delta n = 0$, foi possível comparar o erro da frente de onda no cristalino homogêneo com a discretização das trajetórias habilitada e o seu correspondente analítico. Retornando para $N_p = 100$ passos e variando Δs , também foi possível verificar a sensibilidade da medida em relação ao tamanho dos passos (Figura 55).

FIGURA 55 – OSCILAÇÃO DA WFE COM O TAMANHO DOS PASSOS

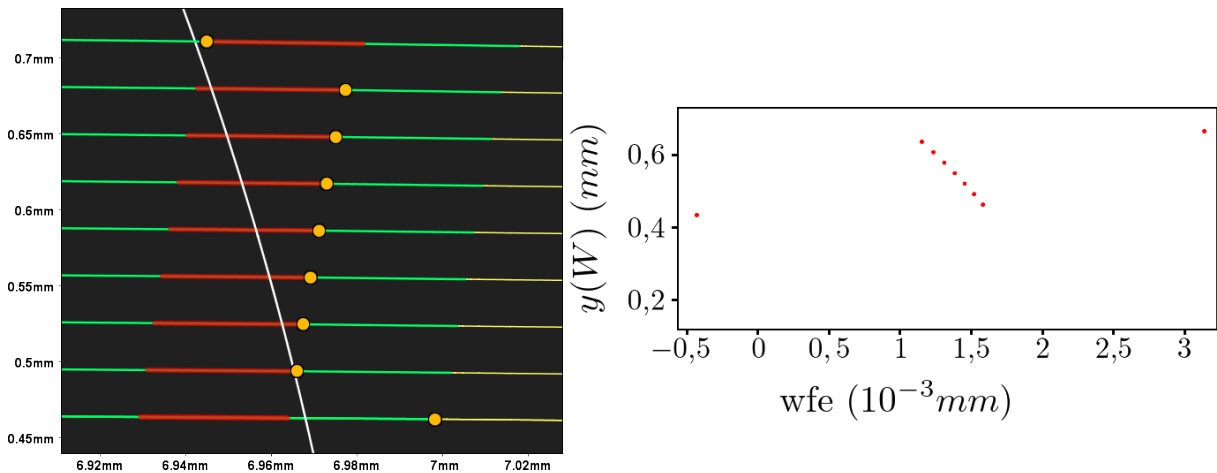


Fonte: O autor.

LEGENDA: A curva vermelha corresponde ao caso analítico da Figura 52, enquanto as curvas verdes foram geradas pelo algoritmo GRIN com Δs em diferentes valores de w . As escalas foram omitidas.

A razão para determinados valores de Δs ocasionarem em valores de WFE oscilando acima, abaixo ou entre a curva analítica está no próprio funcionamento do algoritmo GRIN: o raio “não sabe” onde está a fronteira entre os meios de índice de refração n_4 e n_5 , apenas que entre um passo e outro, o índice de refração variou, então deve ocorrer refração, e a posição desse passo, por construção, nunca será a posição de incidência analítica, gerando um erro intrínseco, como explicita a Figura 56.

FIGURA 56 – O ERRO INTRÍNSECO DO ALGORITMO GRIN



Fonte: O autor.

LEGENDA: À esquerda, o traçado de raios no regime de discretização de trajetórias (em verde), com destaque para o 99º passo, em vermelho, e a primeira posição após a transição entre os meios, em laranja, onde ocorre a refração. À esquerda, o gráfico da WFE para cada um dos raios.

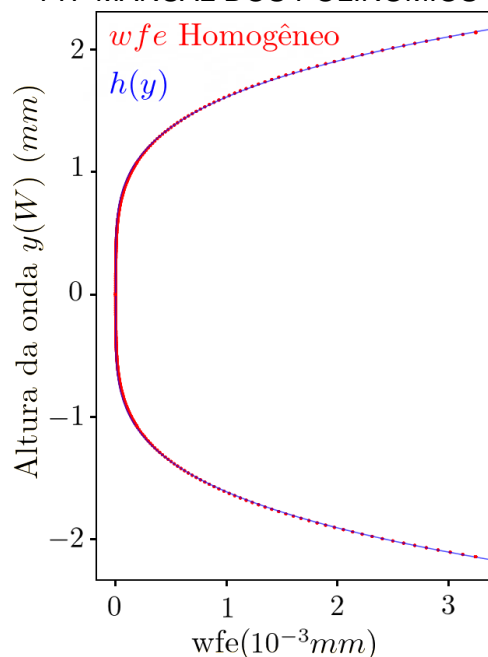
Aqui, os raios passam por duas interações com a córnea antes de interagir com a superfície anterior do cristalino e entrar no regime de discretização das trajetórias. Para obter uma medida “pura” do erro intrínseco do algoritmo GRIN em função de N_p ou Δs , seria possível fazer essa análise para uma única interação, com a lente anaclástica utilizada na simulação da seção 4.1, uma vez que sua WFE vale zero e qualquer desvio teria origem no problema descrito acima. A partir disso, tornaria-se mais claro qual a melhor maneira de melhorar o algoritmo em transições descontínuas como essa.

A decomposição em polinômios de Zernike, embora não elaborada neste trabalho, foi avaliada de forma qualitativa após notar-se que a WFE homogênea tem o formato de uma curva quártica. Como os raios estão em um plano coaxial e alinhados ao eixo óptico, apenas as aberrações de $m = 0$ podem estar presentes. Somando os dois polinômios radiais correspondentes à aberração esférica $Z_4^0 = a_4^0 \sqrt{5}(6\rho^4 - 6\rho^2 + 1)$ e à desfocalização $Z_2^0(\rho) = a_2^0 \sqrt{3}(2\rho^2 - 1)$ [29] no GeoGebra e variando a razão entre seus coeficientes $u = a_4^0/a_2^0$, notou-se que um valor de u entre 0,25 e 0,26 produz um formato que se encaixa muito bem com a curva observada. Para fazer um ajuste aproximado sobre os pontos via tentativa e erro, a seguinte função foi inserida no GeoGebra:

$$h(y) = \sqrt{3}(2(by)^2) + u\sqrt{5}(6(by)^4 - 6(by)^2) \quad (4.1)$$

Onde b é um fator de escala para compensar a normalização do coeficiente de Zernike da desfocalização. Os termos constantes foram removidos dos polinômios para garantir $h(0) = 0$. Com um valor de $u = 0,25854$ e $b = 1,15463$, obteve-se uma concordância muito boa entre a WFE do sistema e os polinômios de Zernike (Figura 57).

FIGURA 57 – FIT MANUAL DOS POLINÔMIOS DE ZERNIKE



Fonte: O autor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal desse trabalho era construir uma simulação do olho humano numa plataforma livre, mas ao longo do desenvolvimento dos algoritmos que a estruturaram, foi produzida uma riqueza de materiais que auxiliam no estudo da óptica e podem ser aplicados em contextos diversos, além de testar as qualidades e problemas dos métodos de traçado de raios e verificar resultados científicos, e então o escopo do trabalho foi extrapolado (por um bom motivo).

O GeoGebra se provou uma ferramenta de fácil uso e muito poderosa para a construção de simulações, especialmente para leigos em linguagens de programação. É inegável que o desenvolvimento desse trabalho não seria possível em um período tão curto sem a possibilidade de ver as estruturas matemáticas enquanto elas são construídas e as salvaguardas internas do programa, que permitem seu funcionamento mesmo quando existem indeterminações matemáticas, e apontam para o usuário o que precisa ser ajustado com clareza. No entanto, ao explorar as potencialidades do GeoGebra, suas limitações também se evidenciaram. A má otimização no processamento de algumas funções se tornou um obstáculo conforme as simulações se tornaram mais robustas, ao ponto de inviabilizá-las como um todo e forçando a reconstrução do que era proposto com outras abordagens. A própria dinamicidade do programa é muitas vezes um obstáculo durante a edição de estruturas já colocadas, além de que uma quantidade considerável de memória e processamento são usados para manter os objetos da construção atualizados após cada ação, o que nem sempre é interessante para o usuário e pode até contribuir para que o programa pare de funcionar em operações mais pesadas.

A proposta de tratar uma quantidade finita de pontos como uma lente segmentada ao invés de criar uma superfície suave com interpolação produziu resultados satisfatórios, porém os problemas inerentes à Planilha de Cálculos inviabilizaram a importação de dados experimentais de forma direta. Futuramente, seria possível buscar alternativas com JavaScript que importem arquivos de texto e os transformem em conjuntos compatíveis com o GeoGebra, além de explorar abordagens semelhantes que produzam uma melhor convergência dos valores na região paraxial.

O algoritmo de discretização das trajetórias não só pôde confirmar os resultados do modelo do cristalino de Navarro et. al., como também se provou uma ferramenta válida para estudar qualquer distribuição de índice de refração, suave, abrupta ou divergente, o que indica que o sistema óptico como um todo poderia ser representado por uma função $n(x, y)$ e todo o traçado de raios ser computado pelo algoritmo GRIN. O resultado seria um algoritmo não-sequencial que pode ser útil para outras análises,

como as que envolvem a probabilidade de reflexão da luz.

Para melhorias futuras, a medição de aberrações pode se tornar mais abrangente ao se modificar as equações para que as coordenadas do foco, ou até o círculo de menor confusão, sejam calculados corretamente quando o raio central do feixe não é paralelo ao eixo óptico, possibilitando avaliar a qualidade óptica do olho para objetos em diferentes direções.

A análise da aberração cromática tornaria-se possível ao substituir-se as constantes dos índices de refração por funções do comprimento de onda λ . Para fins visuais, também seria possível pintar os raios de acordo com o comprimento de onda através da função de cor dinâmica do GeoGebra, bastando inserir as equações que convertem λ para o seu equivalente no sistema de cores RGB.

Também seria possível introduzir modelos de córnea e globo ocular que variam com a idade ou um determinado grau de uma doença ou deformação, consolidando uma simulação do olho humano em que todas as suas principais componentes são personalizáveis, o que faz-se necessário para aplicações médicas visto as particularidades de cada paciente, além da inserção de lentes artificiais oculares ou intraoculares no sistema óptico.

Tendo todos os algoritmos integrados em uma única simulação, disponível para o público e de livre edição, espera-se que este trabalho também sirva como base teórica e prova de conceito para o desenvolvimento de simulações mais sofisticadas, seja no próprio GeoGebra ou em outras linguagens de programação dotadas das ferramentas matemáticas e gráficas necessárias para reproduzir essas construções. Apesar de já existirem ferramentas de análise óptica muito bem consolidadas e aplicáveis em diversos campos do conhecimento, é possível que a simulação do olho humano apresentada neste trabalho seja a mais completa, ou talvez até a primeira, disponibilizada publicamente em plataforma livre de forma tão acessível.

REFERÊNCIAS

- [1] BORN, Max; WOLF, Emil. Principles of Optics, 7th (expanded) edition. **United Kingdom: Press Syndicate of the University of Cambridge**, v. 461, p. 868–869, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 11, 26, 30.
- [2] IQBAL, Muhammad. **An introduction to solar radiation**. [S.l.]: Elsevier, 2012. Citado 1 vez na página 11.
- [3] GROSS, Herbert; BLECHINGER, Fritz; ACHTNER, Bertram. **Handbook of optical systems, Volume 4: Survey of optical instruments**. [S.l.]: Wiley-VCh, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 11, 12, 34, 92.
- [4] HARDY, James D; MUSCHENHEIM, Carl et al. The radiation of heat from the human body. IV. The emission, reflection, and transmission of infra-red radiation by the human skin. **The Journal of clinical investigation**, Am Soc Clin Investig, v. 13, n. 5, p. 817–831, 1934. Citado 1 vez na página 11.
- [5] MACKENZIE, Fred T; LERMAN, Abraham. Heat Balance of the Atmosphere and Carbon Dioxide. In: CARBON in the Geobiosphere—Earth's Outer Shell—. [S.l.]: Springer, 2006. P. 61–88. Citado 1 vez na página 11.
- [6] FERNALD, Russell D. The evolution of eyes. **Brain, Behavior and Evolution**, Karger Publishers, v. 50, n. 4, p. 253–259, 1997. Citado 1 vez na página 11.
- [7] LE GOFF, MM; BISHOP, PN. Adult vitreous structure and postnatal changes. **Eye**, Nature Publishing Group, v. 22, n. 10, p. 1214–1222, 2008. Citado 1 vez na página 12.
- [8] BOWMAKER, James K; DARTNALL, HJk. Visual pigments of rods and cones in a human retina. **The Journal of physiology**, Wiley Online Library, v. 298, n. 1, p. 501–511, 1980. Citado 1 vez na página 12.
- [9] NEITZ, Jay; JACOBS, Gerald H. Polymorphism of the long-wavelength cone in normal human colour vision. **Nature**, Nature Publishing Group, v. 323, n. 6089, p. 623–625, 1986. Citado 1 vez na página 12.
- [10] MAESUMI, Mohsen. Parabolic mirrors, elliptic and hyperbolic lenses. **The American mathematical monthly**, JSTOR, v. 99, n. 6, p. 558–560, 1992. Citado 1 vez na página 15.
- [11] YOUNG, Thomas. II. The Bakerian Lecture. On the mechanism of the eye. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, The Royal Society London, n. 91, p. 23–88, 1801. Citado 1 vez na página 16.

- [12] COELHO, João MP; FREITAS, José; WILLIAMSON, Craig A. Optical eye simulator for laser dazzle events. **Applied Optics**, Optica Publishing Group, v. 55, n. 9, p. 2240–2251, 2016. Citado 1 vez na página 16.
- [13] DIRECT, Vision. **Human Eye**. 2020. Disponível em: <https://www.visiondirect.co.uk/the-human-eye>. Acesso em: 1 set. 2022. Citado 1 vez na página 16.
- [14] WOOD, Tim; ANDRIAMIARISOA, Miary. **3D Eye Movement Simulator**. Western University of Health Sciences. 2019. Disponível em: <https://edtech.westernu.edu/3D-eye-movement-simulator/>. Acesso em: 1 set. 2022. Citado 1 vez na página 16.
- [15] RASHED, Roshdi. A pioneer in anaclastics: Ibn Sahl on burning mirrors and lenses. **Isis**, Department of History e Science, University of Pennsylvania, v. 81, n. 3, p. 464–491, 1990. Citado 1 vez na página 17.
- [16] MAHAJAN, Virendra N. Fundamentals of geometrical optics. In: SOCIETY OF PHOTO-OPTICAL INSTRUMENTATION ENGINEERS. Citado 2 vezes nas páginas 17, 30.
- [17] THIBOS, LN et al. Theory and measurement of ocular chromatic aberration. **Vision research**, Elsevier, v. 30, n. 1, p. 33–49, 1990. Citado 1 vez na página 17.
- [18] COX, Michael J. Optics of the Human Eye DA Atchison, G. Smith; Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000, 269 pages, ISBN 0-7506-3775-7, £ 27.50. **Ophthalmic and Physiological Optics**, Wiley Online Library, v. 21, n. 5, p. 12–13, 2001. Citado 1 vez na página 19.
- [19] LIN, Psang Dain. **Advanced geometrical optics**. [S.l.]: Springer, 2017. Citado 5 vezes nas páginas 19, 22, 29, 30.
- [20] SCHROEDER, Daniel J. **Astronomical optics**. [S.l.]: Elsevier, 1999. Citado 1 vez na página 21.
- [21] WANG, Quanzeng et al. Development of the local magnification method for quantitative evaluation of endoscope geometric distortion. **Journal of biomedical optics**, SPIE, v. 21, n. 5, p. 056003, 2016. Citado 1 vez na página 22.
- [22] RAO, Balachandra. **Differential Equations**. [S.l.]: Universities Press, 1998. Citado 1 vez na página 26.
- [23] ROMER, Hartmann. **Theoretical optics: an introduction**. [S.l.]: Wiley-VCH, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 28, 30.
- [24] GOODWIN, Eric P; WYANT, James C. Field guide to interferometric optical testing. In: SPIE BELLINGHAM, WA. Citado 1 vez na página 28.

- [25] BARAKAT, Richard. Rayleigh Wavefront Criterion. **J. Opt. Soc. Am.**, Optica Publishing Group, v. 55, n. 5, p. 572–573, mai. 1965. Citado 1 vez na página 28.
- [26] WELFORD, Walter Thompson. **Aberrations of optical systems**. [S.l.]: Routledge, 2017. Citado 1 vez na página 30.
- [27] RAYCES, JL. Exact relation between wave aberration and ray aberration. **Optica Acta: International Journal of Optics**, Taylor & Francis, v. 11, n. 2, p. 85–88, 1964. Citado 1 vez na página 30.
- [28] HSIEH, YH et al. Integral-based parallel algorithm for the fast generation of the Zernike polynomials. **Optics Express**, Optical Society of America, v. 28, n. 2, p. 936–947, 2020. Citado 1 vez na página 31.
- [29] LAKSHMINARAYANAN, Vasudevan; FLECK, Andre. Zernike polynomials: a guide. **Journal of Modern Optics**, Taylor & Francis, v. 58, n. 7, p. 545–561, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 32, 97.
- [30] BEKERMAN, Inessa; GOTTLIEB, Paul; VAIMAN, Michael. Variations in eyeball diameters of the healthy adults. **Journal of ophthalmology**, Hindawi, v. 2014, 2014. Citado 1 vez na página 32.
- [31] OLSEN, Timothy W et al. Human sclera: thickness and surface area. **American journal of ophthalmology**, Elsevier, v. 125, n. 2, p. 237–241, 1998. Citado 2 vezes nas páginas 32, 72.
- [32] MORENO-BARRIUSO, Esther; NAVARRO, Rafael. Laser ray tracing versus Hartmann–Shack sensor for measuring optical aberrations in the human eye. **JOSA A**, Optical Society of America, v. 17, n. 6, p. 974–985, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 33, 36.
- [33] ESCUDERO-SANZ, Isabel; NAVARRO, Rafael. Off-axis aberrations of a wide-angle schematic eye model. **JOSA A**, Optical Society of America, v. 16, n. 8, p. 1881–1891, 1999. Citado 1 vez na página 33.
- [34] NAVARRO, Rafael. The optical design of the human eye: a critical review. **Journal of Optometry**, Elsevier, v. 2, n. 1, p. 3–18, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 33, 34.
- [35] AL-SAYYARI, Tarfah M; FAWZY, Samah M; AL-SALEH, Ahmed A. Corneal spherical aberration in Saudi population. **Saudi Journal of Ophthalmology**, Elsevier, v. 28, n. 3, p. 207–213, 2014. Citado 1 vez na página 34.
- [36] ELBAZ, Uri et al. Comparison of different techniques of anterior chamber depth and keratometric measurements. **American journal of ophthalmology**, Elsevier, v. 143, n. 1, p. 48–53, 2007. Citado 1 vez na página 34.

- [37] GLASSER, Adrian; CAMPBELL, Melanie CW. Presbyopia and the optical changes in the human crystalline lens with age. **Vision research**, Elsevier, v. 38, n. 2, p. 209–229, 1998. Citado 1 vez na página 34.
- [38] NAVARRO, Rafael; PALOS, Fernando; GONZÁLEZ, Luis. Adaptive model of the gradient index of the human lens. I. Formulation and model of aging ex vivo lenses. **JOSA A**, Optica Publishing Group, v. 24, n. 8, p. 2175–2185, 2007. Citado 3 vezes nas páginas 34, 65.
- [39] NAVARRO, Rafael; PALOS, Fernando; GONZÁLEZ, Luis M. Adaptive model of the gradient index of the human lens. II. Optics of the accommodating aging lens. **JOSA A**, Optica Publishing Group, v. 24, n. 9, p. 2911–2920, 2007. Citado 4 vezes nas páginas 34, 65.
- [40] NEAL, Daniel R; COPLAND, James; NEAL, David A. Shack-Hartmann wavefront sensor precision and accuracy. In: SPIE. **ADVANCED Characterization Techniques for Optical, Semiconductor, and Data Storage Components**. [S.l.: s.n.], 2002. v. 4779, p. 148–160. Citado 1 vez na página 36.
- [41] SROKA, Adam et al. Time-resolved non-sequential ray-tracing modelling of non-line-of-sight picosecond pulse LIDAR. In: SPIE. **ADVANCED Optics for Defense Applications: UV through LWIR**. [S.l.: s.n.], 2016. v. 9822, p. 157–163. Citado 1 vez na página 37.
- [42] ZEMAX. **Optic Studio Feature Comparison**. 2022. Disponível em: <https://www.zemax.com/blogs/product-overviews/features-in-each-edition>. Acesso em: 1 set. 2022. Citado 1 vez na página 37.
- [43] AFLAK, Omar. **Ray Tracing From Scratch in Python**. 2020. Disponível em: <https://medium.com/swlh/ray-tracing-from-scratch-in-python-41670e6a96f9>. Acesso em: 1 set. 2022. Citado 1 vez na página 37.
- [44] LABS, Excamera. **A reasonably speedy Python ray-tracer**. Disponível em: <https://excamera.com/sphinx/article-ray.html>. Acesso em: 1 set. 2022. Citado 1 vez na página 37.
- [45] GROUP, Glotzer. **Fresnel Homepage**. Universidade de Michigan. 2016. Disponível em: <https://fresnel.readthedocs.io/en/stable/>. Acesso em: 1 set. 2022. Citado 1 vez na página 37.
- [46] IGELBRINK, Felix. **Python-OptiX**. 2021. Disponível em: <https://github.com/mortacious/python-optix#readme>. Acesso em: 1 set. 2022. Citado 1 vez na página 37.
- [47] COTE, Daniel. **RayTracing Project description**. DCCLab. 2022. Disponível em: <https://pypi.org/project/raytracing/>. Acesso em: 1 set. 2022. Citado 1 vez na página 37.

- [48] EVANS, James; NANDI, Kamal K; ISLAM, Anwarul. The optical–mechanical analogy in general relativity: New methods for the paths of light and of the planets. **American Journal of Physics**, American Association of Physics Teachers, v. 64, n. 11, p. 1404–1415, 1996. Citado 1 vez na página 64.
- [49] KHORASANI, Sina; RASHIDIAN, Bizhan. Optical anisotropy of schwarzschild metric within equivalent medium framework. **Optics communications**, Elsevier, v. 283, n. 7, p. 1222–1228, 2010. Citado 1 vez na página 64.
- [50] KARIMI, Farhad; KHORASANI, Sina. Ray-tracing and Interferometry in Schwarzschild Geometry. **arXiv preprint arXiv:1001.2177**, 2010. Citado 1 vez na página 64.
- [51] KAPLAN, So Ao. On Circular Orbits in Einstein’s Theory of Gravitation. **arXiv preprint arXiv:2201.07971**, 2022. Citado 1 vez na página 86.
- [52] JEFREMOV, Paul I; TSUPKO, Oleg Yu; BISNOVATYI-KOGAN, Gennady S. Innermost stable circular orbits of spinning test particles in Schwarzschild and Kerr space-times. **Physical Review D**, APS, v. 91, n. 12, p. 124030, 2015. Citado 1 vez na página 86.

APÊNDICE 1 - DEDUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE TRAÇADO DE RAIOS

Para computar o traçado de raios em um sistema de coordenadas fixo, os ângulos de incidência, reflexão e refração da luz devem ser medidos em relação a esse referencial.

EQUAÇÃO DA RETA

Se a luz segue uma trajetória retilínea, ela pode ser representada por uma equação da reta. Queremos que o raio passe por um determinado ponto inicial $O = (x_0, y_0)$ com um ângulo θ_0 em relação ao eixo x .

$$r(x) = \tan(\theta_0)(x - x_0) + y_0 \quad (1.1)$$

Sendo uma função de x , as inclinações de $\pm 90^\circ$ são proibidas, pois isso implica em $\tan(\theta_0) = \pm\infty$. Restringimos então θ entre $-\pi/2$ e $\pi/2$. Se o raio atingir uma determinada superfície em x_i (leia o índice i como *de incidência*), seu comportamento deve mudar através da reflexão ou refração, passando a ser descrito por uma nova equação da reta. O domínio da primeira função então deve ser $x_0 \leq x \leq x_i$.

FUNÇÃO-SUPERFÍCIE

Podemos usar função uma suave $f(x)$ para representar o contorno de uma superfície qualquer, sendo essa a face de um espelho ou a fronteira entre dois meios. Partindo do ponto O , o raio de luz irá incidir sobre a superfície em um determinado ponto (x_i, y_i) , que é dado pelas raízes da *equação de incidência*, a interseção entre a reta e a função. No entanto, se $f(x) - r(x) = 0$ for uma equação transcendental ou for um polinômio de grau maior que 5, somos limitados a aproximações numéricas, o que impede que as funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas sejam funções-superfície passíveis de manipulação analítica quando os raios incidentes não são paralelos.

Para calcular a lei da reflexão e a lei da refração, é necessário medir o ângulo de incidência em qualquer que seja o ponto sobre o qual o raio de luz irá incidir, e essa medida será dada pela derivada da função-superfície no ponto de incidência, uma vez que ela fornece o coeficiente angular da reta tangente à função no ponto x_i .

$$\tan \theta_T = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x_i} \quad (1.2)$$

Para obter o coeficiente angular da reta normal, basta tomar o negativo do inverso do coeficiente angular da reta tangente:

$$\tan \theta_N = -\frac{1}{\tan \theta_T} \quad (1.3)$$

Tomando a arcotangente dos dois coeficientes, temos:

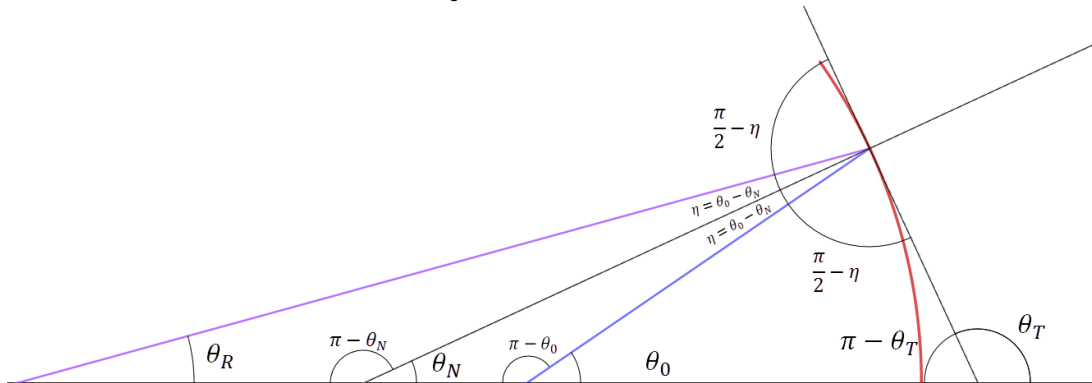
$$\theta_T = \arctan(f'(x_i)), \quad \theta_N = \arctan\left(-\frac{1}{f'(x_i)}\right) \quad (1.4)$$

Nas deduções a seguir, os ângulos com a marcação (') indicam que são medidos em relação à superfície local do ponto de incidência.

LEI DA REFLEXÃO

A lei da reflexão local é dada por $\theta'_0 = \theta'_R$. Para calcular a equivalência no eixo x , é possível usar trigonometria para completar os ângulos, como mostra a Figura 58.

FIGURA 58 – RELAÇÕES ANGULARES DA REFLEXÃO



Fonte: O autor.

LEGENDA: Em vermelho, a função-superfície, que atua como espelho. Em azul e lilás, os raios incidente e refratado, respectivamente. A reta de inclinação θ_N entre os dois corresponde ao eixo normal à superfície.

$$\begin{aligned} \theta_R + (\pi - \theta_N) + (\theta_0 - \theta_N) &= \pi \\ \Rightarrow \theta_R &= 2\theta_N - \theta_0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

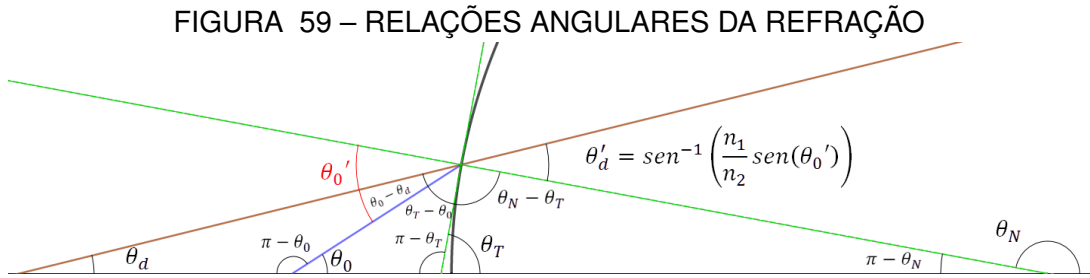
O ângulo refletido depende do ângulo incidente e do ângulo da reta normal, como esperado.

LEI DA REFRAÇÃO

A lei da refração relaciona o ângulo de incidência θ'_0 com o ângulo refratado θ'_d de forma não linear. Sendo n_1 e n_2 os índices de refração dos meios anterior e

posterior à superfície, os ângulos em relação ao eixo x também podem ser obtidos por trigonometria (Figura 59), levando em consideração a seguinte expressão:

$$(I) \theta'_d = \arcsen\left(\frac{n_1}{n_2} \sen(\theta'_i)\right) \quad (1.6)$$



Fonte: O autor.

LEGENDA: As retas em verde sobre a função-superfície (curva preta) representam o sistema de coordenadas local da refração. O segmento de reta em azul corresponde ao raio de luz incidente, enquanto a reta marrom, estendida para trás até o eixo x , representa o raio de luz refratado.

(II) Arco na reta refratada = 180°

$$\theta'_d + (\theta_N - \theta_T) + (\theta_T - \theta_0) + (\theta_0 - \theta_d) = \pi$$

$$\theta_d = \theta'_d + \theta_N - \pi$$

(III) Arco na reta normal = 180°

$$\theta'_0 + (\theta_N - \theta_T) + (\theta_T - \theta_0) = \pi$$

$$\theta'_0 = \theta_0 - \theta_N + \pi$$

Juntando (I), (II) e (III), tem-se:

$$\theta_d = \theta_N + \arcsen\left(\frac{n_1}{n_2} \sen(\theta_0 - \theta_N + \pi)\right) - \pi$$

Podemos usar a periodicidade das funções trigonométricas $\tan(x \pm n\pi) = \tan(x)$ e $\sen(x \pm \pi) = -\sen(x)$ para omitir π da equação. Assim, a lei da refração se simplifica para

$$\tan(\theta_d) = \tan\left(\theta_N - \arcsen\left(\frac{n_1}{n_2} \sen(\theta_N - \theta_0)\right)\right) \quad (1.7)$$

APÊNDICE 2 - SUPORTE A MÚTIPLAS FUNÇÕES-SUPERFÍCIE

MÚTIPLOS TIPOS DE FUNÇÕES

Famílias de funções-superfície

Ao optar por trabalhar com múltiplos tipos de funções-superfície, é conveniente criar uma biblioteca de famílias de funções-superfície (FFS) e chamá-las a partir desse conjunto, e ao construí-lo é necessário escolher uma ordem de inserção das FFS. Por isso, é conveniente denotá-las por f_j , onde o índice j representa a posição na biblioteca. Suponha que uma elipse será a primeira família de funções a inserir no GeoGebra. Ao escrevê-la na Linha de Entrada, devemos escolher um nome e explicitar que todos os coeficientes são variáveis independentes. Neste caso, a curva é $y(x, a, b, X, Y)$, então a definição será

$$f_1(x, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}) = c_{14} + \frac{c_{12}}{c_{11}} \sqrt{c_{11}^2 - (x - c_{13})^2} \quad (2.1)$$

Com isso, torna-se possível adicionar na simulação quantas elipses forem necessárias, bastando chamar a função e definir seus coeficientes, ao invés de reescrever a expressão da elipse para cada uma delas. Por exemplo, $g = f_1(x, 1, 1, 5, 2)$ corresponde a uma elipse centrada em $(5, 2)$ com ambos eixos de tamanho 1, enquanto $h = f_1(x, 4, 1, -2, 0)$ corresponde a uma elipse centrada em $(-2, 0)$ com semi-eixo maior 4 e semi-eixo menor 1.

Biblioteca de famílias de funções BFF

Tendo as famílias f_1, f_2 , etc. definidas, uma biblioteca de famílias pode ser construída através de um conjunto, em que a posição do elemento coincide com o índice da função.

$$F = \{f_1(x, c_{11}, \dots, c_{1n}), \dots, f_m(x, c_{m1}, \dots, c_{mn})\} \quad (2.2)$$

$$F = \{f_1, \dots, f_m\} \equiv [f_1 \cdots f_{N_F}]$$

Exemplo: Na definição, $f_4(x, c_{41}, c_{42}, c_{43}) = c_{42}x^{c_{41}} + c_{43}$. Sendo a quarta função da biblioteca, ela pode ser chamada a partir do conjunto: $F(4, x, 3, 2, 1) = 2x^3 + 1$

É conveniente que todas as funções da biblioteca tenham, no máximo, a mesma quantidade de coeficientes, de forma que é possível construir uma matriz que armazena todos eles. Se a quantidade escolhida for seis, então a matriz será de dimensões $N_F \times 6$:

$$\begin{aligned}
C &= \text{Sequência}(\text{Sequência}(\text{Objeto}(\text{"c_{"j" "n" }"}), n, 1, 6), j, 1, N_F) \\
&\equiv \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{N_F1} & c_{N_F2} & c_{N_F3} & c_{N_F4} & c_{N_F5} & c_{N_F6} \end{bmatrix} \quad (2.3)
\end{aligned}$$

Os seis coeficientes não precisam representar as mesmas propriedades entre as diversas funções, tampouco as funções precisam usar todos os seis coeficientes na prática. A razão dessa uniformização é a possibilidade de chamar funções de qualquer tipo com a mesma definição, o que será explicitado ao final do apêndice.

Se a equação de incidência não for transcendental ou envolver um polinômio de grau maior que 5, então deve haver uma solução analítica escrita apenas em termos dos coeficientes c da função e da reta ($a_1 = X, a_2 = Y$ e $a_3 = \theta$), calculável apenas por manipulações matemáticas e o uso da fórmula de Bhaskara.

O conjunto das soluções S agrupará as soluções analíticas de cada função da biblioteca F , em ordem:

$$S = \{S_1, S_2, \dots\} \quad (2.4)$$

Biblioteca de derivadas das famílias de funções F_D

Como a medição do ângulo de incidência em relação ao eixo x depende da derivada da função-superfície, convém criar um conjunto auxiliar da BFF que contém as derivadas das funções escolhidas.

$$F_D = \text{Derivada}(F) \equiv \left[\frac{df_1}{dx}, \frac{df_2}{dx}, \dots \right] \quad (2.5)$$

Superfícies do Sistema Óptico (SSO)

Finalmente, as superfícies que de fato estarão no sistema óptico podem ser geradas a partir da BFF. Para isso, pode-se definir N_F variáveis f_{type_j} que indicam o tipo de cada função, e essas configurações são armazenadas no **Conjunto de Índices** F_I :

$$F_I = \text{Sequência}(\text{Objeto}(\text{"ftype_{"n" }"}), n, 1, N_F) \equiv [f_{type_1}, f_{type_2}, \dots, f_{type_{N_F}}] \quad (2.6)$$

Por exemplo, $F_I = \{1, 1, 1, 2\}$ indica que as três primeiras superfícies do sistema óptico são construídas a partir de f_1 , enquanto a última, de f_2 .

O conjunto final, f , conterà todas as funções-superfície que de fato fazem parte do sistema óptico, utilizando os tipos e coeficientes definidos.

$$f = \text{Sequência}(F(F_I(j), x, C(j, 1), C(j, 2), C(j, 3), C(j, 4), C(j, 5), C(j, 6)), j, 1, \text{Comprimento}(F_I)) \\ \equiv [f_{F_I(1)}(x, c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{14}, c_{15}, c_{16}), \dots, f_{F_I(N_F)}(x, c_{N_F1}, c_{N_F2}, c_{N_F3}, c_{N_F4}, c_{N_F5}, c_{N_F6})] \quad (2.7)$$

Note que a escolha de fixar um número de coeficientes para todos os tipos de função evita complicações na definição de f , pois se, por exemplo, f_2 dependesse de apenas cinco coeficientes, chamar $f_2(x, c_{21}, c_{22}, c_{23}, c_{24}, c_{25}, c_{26})$ resultaria em um erro.

Para o traçado de raios, a coordenada x de cada incidência será determinada diretamente pela respectiva solução do conjunto S .

$$Ix_{i+1} = \text{Sequência}(S(F_I(i), Ix_i(n), Iy_i(n), \theta_i(n), c_{i1}, c_{i2}, c_{i3}, c_{i4}, c_{i5}, c_{i6}), n, 1, N_R) \quad (2.8)$$