

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ANA PAULA DELOWSKI CINIELLO

APLICAÇÃO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO NA IDENTIFICAÇÃO DO MÓDULO DE
RELAXAÇÃO DE MATERIAIS VISCOELÁSTICOS NO DOMÍNIO DO TEMPO

CURITIBA

2016

ANA PAULA DELOWSKI CINIELLO

APLICAÇÃO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO NA IDENTIFICAÇÃO DO MÓDULO DE
RELAXAÇÃO DE MATERIAIS VISCOELÁSTICOS NO DOMÍNIO DO TEMPO

Tese apresentada como requisito para obter o título de Doutor em Engenharia Mecânica no Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, na área de concentração Fenômenos de Transportes e Mecânica dos Sólidos.

Orientador: Prof. Carlos Alberto Bavastri, *D.Sc.*
Coorientador: Prof. Jucélio Tomás Pereira, *D.Sc.*

CURITIBA

2016

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Ciniello, Ana Paula Delowski

Aplicação do cálculo fracionário na identificação do módulo de relaxação de materiais viscoelásticos no domínio do tempo / Ana Paula Delowski Ciniello. – Curitiba, 2016.

1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Orientador: Carlos Alberto Bavastri

Coorientador: Jucélio Tomás Pereira

1. Materiais viscoelásticos. 2. Fenômenos de relaxação. 3. Cálculo fracionário. 4. Zener – Modelo de. 5. Mittag-Leffler – Função de. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Bavastri, Carlos Alberto. IV. Pereira, Jucélio Tomás. V. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
Setor TECNOLOGIA
Programa de Pós Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA
Código CAPES: 40001016040P5

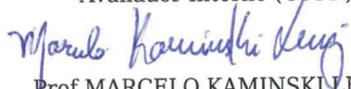
TERMO DE APROVAÇÃO

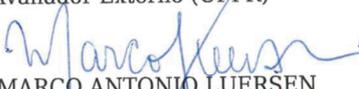
Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Tese de Doutorado de **ANA PAULA DELOWSKI CINIELLO**, intitulada: "**APLICAÇÃO DO CÁLCULO FRACIONÁRIO NA IDENTIFICAÇÃO DO MÓDULO DE RELAXAÇÃO DE MATERIAIS VISCOELÁSTICOS NO DOMÍNIO DO TEMPO**", após terem inquirido a aluna e realizado a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO.

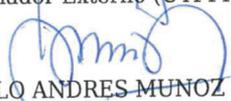
Curitiba, 26 de Agosto de 2016.


Prof JUCÉLIO TOMAS PEREIRA
Presidente da Banca Examinadora (UFPR)


Prof EDUARDO MARCIO DE OLIVEIRA LOPES
Avaliador Interno (UFPR)


Prof MARCELO KAMINSKI LENZI
Avaliador Externo (UFPR)


Prof MARCO ANTONIO LUERSEN
Avaliador Externo (UFPR)


Prof PABLO ANDRES MUNOZ ROJAS
Avaliador Externo (UDESC)

“Totus Tuus Mariae”.

Aos meus pais Luiz e Gabriela.

AGRADECIMENTOS

A Deus, por mais esta oportunidade, pois, sem Ele, nada fazemos como nada somos.

Ao Prof. Jucélio Tomás Pereira, pela paciência, dedicação, pelas opiniões, críticas e pelo conhecimento transmitido durante o trabalho. Suas lições serão sempre lembradas.

Ao Prof. Carlos Alberto Bavastri, pelas sugestões e esclarecimentos ao longo do trabalho.

Aos meus pais, Luiz e Gabriela, os quais com humildade, mas com sabedoria, ensinaram-me os caminhos de uma vida vitoriosa estribada na honestidade.

Ao meu irmão Marcos Paulo, pela força e apoio em nossas conversas.

Ao meu esposo Rafael, amigo e companheiro, pelo amor, carinho, ajuda, dedicação e compreensão.

Aos colegas do laboratório Lavibs, pelas conversas alegres e motivadoras. Ao colega Tiago Lima de Sousa pelas contribuições aos resultados requeridos.

E, a todos aqueles que, direta ou indiretamente, positiva ou negativamente, me ajudaram a crescer como pessoa e profissional.

“Deus nos antecede, concede-nos o que precisamos para ser quem somos.
O resto é com a gente. Nunca fará por nós a parte que nos cabe”.

Pe. Fábio de Melo

RESUMO

Materiais viscoelásticos (MVEs) têm sido amplamente empregados como materiais estruturais em engenharia. Entretanto, seu uso de forma adequada exige o conhecimento do seu comportamento mecânico bem como de um modelo matemático que o descreva com precisão. Uma importante propriedade mecânica desse tipo de material é a função módulo de relaxação que, segundo experimentos, possui dependências do tempo, da temperatura e da pressão. O conhecimento preciso dessa propriedade (módulo de relaxação) é fundamental em projetos de estruturas mecânicas compostas com esses materiais. Este trabalho trata do desenvolvimento de uma metodologia para identificação do comportamento mecânico de MVEs lineares, termo e piezorreologicamente simples no domínio do tempo, descrito através do modelo de Zener fracionário e considerando as influências da temperatura, da pressão e da temperatura e pressão simultaneamente. Embora a consideração da influência da pressão caracterize uma não linearidade do material, é suposto que essa influência seja pequena o suficiente para que o material seja considerado viscoelástico linear. Com isso, a relação constitutiva pode ser posta diretamente através do princípio da superposição de Boltzman. A formulação de identificação proposta baseia-se em derivadas fracionárias de Riemann-Liouville com toda a complexidade do tratamento da função Mittag-Leffler. Para tanto, parte-se de um conjunto de dados experimentais obtidos através de ensaios uniaxiais de tração, considerando diferentes taxas de deformação, em diferentes temperaturas de ensaio. Através do modelo constitutivo de Zener fracionário e de modelos que consideram as influências da temperatura e da pressão, os parâmetros característicos do comportamento material são obtidos utilizando técnicas de otimização. Mais especificamente, é utilizada uma técnica híbrida de otimização baseada na aplicação inicial de algoritmos genéticos para aproximar o ponto de mínimo global, e no posterior uso de técnicas de programação não linear, para melhor aproximar esse ponto de ótimo. A metodologia de identificação é implementada no ambiente MatLab® e os resultados se mostram promissores, modelando de forma adequada o comportamento do MVE empregado.

Palavras-chave: Materiais viscoelásticos, modelo constitutivo de Zener fracionário, função de Mittag-Leffler, domínio do tempo, módulo de relaxação, influência da temperatura e/ou pressão.

ABSTRACT

Viscoelastic materials (VEMs) have been widely used as structural materials in engineering. However, their proper use requires knowledge of their mechanical behavior, that is, a constitutive model that accurately describes how they respond to applied loads. An important mechanical property of such materials is the relaxation modulus function which, according to experiments has time dependencies on temperature and pressure. The precise knowledge of this property (relaxation modulus) is fundamental for the design of mechanical structures made of these materials. This work deals with the development of a methodology to identify the mechanical behavior of linear and thermo/piezorheologically simple VEMs in the time domain. The constitutive model employed is the fractional Zener model and the influence of temperature and pressure independently or combined is taken into account. Although consideration of the influence of pressure characterizes a non-linearity of the material, this influence is assumed to be small enough for the material to be considered linear viscoelastic. With this, the constitutive relation can be put directly through the Boltzman superposition principle. Therefore, it is proposed in a formulation derived from fractional Riemann-Liouville with all the complexity of treatment of the Mittag-Leffler function. To this end, one starts with a set of experimental data obtained by uniaxial tensile considering different shear rates, at different test temperatures. Through the fractional Zener model and constitutive models that consider the influence of temperature and pressure, the behavior characteristic parameters of the material are obtained using optimization techniques. More specifically, a hybrid optimization technique is used based on the initial application of genetic algorithms to approximate the global minimum point, and the further use of nonlinear programming techniques to better approximate this optimum point. The identification methodology is implemented in Matlab® and the results appear promising, matching appropriately the behavior of the VEMs studied in this work.

Keywords: Viscoelastic materials, constitutive model of fractional Zener, Mittag-Leffler function, time domain, relaxation modulus, influence of temperature and/or pressure

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: ELASTICIDADE INSTANTÂNEA.	38
FIGURA 2: FLUÊNCIA SOB TENSÃO CONSTANTE.	38
FIGURA 3: RELAXAÇÃO DE TENSÃO SOB DEFORMAÇÃO CONSTANTE.	39
FIGURA 4: ENSAIO UNIAXIAL DE MVE: HISTÓRICOS DE TENSÃO APLICADA (A) E DE DEFORMAÇÃO GERADA (B) TRECHO (BC): RECUPERAÇÃO INSTANTÂNEA, TRECHO (CD): RECUPERAÇÃO TARDIA E TRECHO (DE): DEFORMAÇÃO PERMANENTE.....	40
FIGURA 5: ENSAIO DE FLUÊNCIA: TENSÃO CONSTANTE E HISTÓRICO DA DEFORMAÇÃO.	40
FIGURA 6: ENSAIO DE RELAXAÇÃO: DEFORMAÇÃO CONSTANTE E HISTÓRICO DE TENSÃO.....	41
FIGURA 7: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO DE BOLTZMANN.	43
FIGURA 8: REPRESENTAÇÃO DOS MODELOS MECÂNICOS BÁSICOS: A) MOLA PARA O MODELO DE HOOKE, B) AMORTECEDOR PARA O DE NEWTON, C) MOLA E AMORTECEDOR EM PARALELO PARA KELVIN-VOIGT, D) MOLA E AMORTECEDOR EM SÉRIE PARA MAXWELL.....	45
FIGURA 9: MODELOS MECÂNICOS DE ZENER: A) MODELO DE KELVIN-VOIGT COM UMA MOLA EM SÉRIE B) MODELO DE MAXWELL COM UMA MOLA EM PARALELO.....	49
FIGURA 10: MODELO DE MAXWELL GENERALIZADO EM PARALELO.	51
FIGURA 11: MODELO DE WIECHERT.....	52
FIGURA 12: INTERPRETAÇÃO DA DERIVADA FRACIONÁRIA.	58
FIGURA 13: FUNÇÃO MITTAG-LEFFLER PARA UM PARÂMETRO: $\tau_a = 1$ E COM VARIAÇÃO DO PARÂMETRO ν	61
FIGURA 14: FUNÇÃO MITTAG-LEFFLER PARA UM PARÂMETRO $\nu = 0,5$ E COM VARIAÇÃO DO PARÂMETRO τ_a	62

FIGURA 15: REPRESENTAÇÃO DOS MODELOS MECÂNICOS FRACIONÁRIOS:.....	64
FIGURA 16: REPRESENTAÇÃO DO MODELO DE ZENER FRACIONÁRIO.	66
FIGURA 17: MÓDULO DE RELAXAÇÃO VIA MODELO DE ZF – VARIAÇÃO DO PARÂMETRO ν	70
FIGURA 18: MÓDULO DE RELAXAÇÃO VIA MODELO DE ZF – VARIAÇÃO DO PARÂMETRO E_{∞}	70
FIGURA 19: MÓDULO DE RELAXAÇÃO VIA MODELO DE ZF – VARIAÇÃO DO PARÂMETRO r_{μ}	71
FIGURA 20: MÓDULO DE RELAXAÇÃO VIA MODELO DE ZF – VARIAÇÃO DO PARÂMETRO τ_a	71
FIGURA 21: CURVA MÁSTER DE UM MATERIAL EPÓXI MODIFICADO.....	74
FIGURA 22: DIAGRAMA VOLUME-TEMPERATURA.....	75
FIGURA 23: EFEITO DA PRESSÃO NO MÓDULO DE CISALHAMENTO.....	78
FIGURA 24: EFEITO DA PRESSÃO NA RESPOSTA VISCOELÁSTICA DE UM POLÍMERO.	81
FIGURA 25: TENSÕES EXPERIMENTAIS E DO MODELO DE ZENER FRACIONÁRIO VERSUS DEFORMAÇÃO PARA UMA DETERMINADA TAXA DE DEFORMAÇÃO.	85
FIGURA 26: FLUXOGRAMA DA ESTRUTURA COMPUTACIONAL IMPLEMENTADA NO SOFTWARE MATLAB® PARA CARACTERIZAÇÃO DO MVE.....	93
FIGURA 27: COMPARAÇÃO ENTRE AS METODOLOGIAS PARA A OBTENÇÃO DO CÁLCULO DA FUNÇÃO MITTAG-LEFFLER. (A) VISÃO GERAL DA CURVA; (B) VISÃO DA REGIÃO EM DESTAQUE.	96
FIGURA 28: NOMOGRAMA DO MATERIAL C-2003 FORNECIDO PELO FABRICANTE EAR – AERO TECHNOLOGIES.....	98
FIGURA 29: NOMOGRAMA DO MATERIAL C-2003 IDENTIFICADO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	98

FIGURA 30: MÓDULO DE RELAXAÇÃO DO MATERIAL C-2003, CONSIDERANDO OS CASOS DA TABELA 4.....	103
FIGURA 31: AJUSTE (INDIVIDUAL DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510 SEM CONSIDERAR A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO.....	106
FIGURA 32: AJUSTE (INDIVIDUAL DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510 CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF.....	108
FIGURA 33: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510 CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF.....	110
FIGURA 34: FUNÇÃO MÓDULO DE RELAXAÇÃO IDENTIFICADA CONSIDERANDO TAXA DE DEFORMAÇÃO DE 0.0833 ((MM/MM)/S) E TEMPERATURAS DE -40°C, 23°C, 43°C, 66°C E TEMPERATURAS SIMULTÂNEAS.....	110
FIGURA 35: COMPARAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES MÓDULOS DE RELAXAÇÃO OBTIDAS VIA MODELO DE ZF E O MODELO DE WIECHERT – MATERIAL CYCOLAC BDT5510.....	111
FIGURA 36: AJUSTE (INDIVIDUAL DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510 CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA PRESSÃO VIA MODELO OR.....	114
FIGURA 37: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510 CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO FMT.....	117
FIGURA 38: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) DO MATERIAL	

CYCOLAC BDT5510 CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO UFPR.....	119
FIGURA 39: COMPARAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES MÓDULOS DE RELAXAÇÃO DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510 OBTIDAS VIA MODELOS WLF, FMT E UFPR.....	121
FIGURA 40: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE -35°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO, CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF – MATERIAL STAMAX 40YM240.....	124
FIGURA 41: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE 23°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO, CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF – MATERIAL STAMAX 40YM240.....	125
FIGURA 42: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE 80°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO, CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF – MATERIAL STAMAX 40YM240.....	126
FIGURA 43: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE -35°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO FMT – MATERIAL STAMAX 40YM240.....	128
FIGURA 44: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE 23°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO FMT – MATERIAL STAMAX 40YM240.....	129
FIGURA 45: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE	

80°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO FMT – MATERIAL STAMAX 40YM240.....	130
FIGURA 46: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE -35°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO UFPR – MATERIAL STAMAX 40YM240.	132
FIGURA 47: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE 23°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO UFPR – MATERIAL STAMAX 40YM240.	133
FIGURA 48: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE 80°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO UFPR – MATERIAL STAMAX 40YM240.	134
FIGURA 49: COMPARAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES MÓDULOS DE RELAXAÇÃO DO MATERIAL STAMAX 40YM240 OBTIDAS VIA MODELOS WLF, FMT E UFPR.....	136

LISTA DE TABELAS

TABELA 1: VALORES DOS PARÂMETROS DO MÓDULO DE RELAXAÇÃO DO MODELO DE ZF.....	69
TABELA 2: CORRESPONDÊNCIA DOS PARÂMETROS DO MÓDULO DE RELAXAÇÃO ENTRE O DOMÍNIO DO TEMPO E O DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.....	100
TABELA 3: LIMITES DOS PARÂMETROS UTILIZADOS NO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO DO MATERIAL C-2003.....	101
TABELA 4: RESULTADOS NUMÉRICOS DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF - MATERIAL C-2003.....	102
TABELA 5: LIMITES DOS PARÂMETROS MATERIAIS DA EQUAÇÃO CONSTITUTIVA DO MODELO DE ZF UTILIZADOS NO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510.....	104
TABELA 6: RESULTADOS NUMÉRICOS DE IDENTIFICAÇÃO SEM CONSIDERAR A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510.....	105
TABELA 7: LIMITES DOS PARÂMETROS CARACTERÍSTICOS DO MATERIAL VIA MODELO WLF – MATERIAL CYCOLAC BDT5510.....	106
TABELA 8: RESULTADOS NUMÉRICOS DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF - MATERIAL CYCOLAC BDT5510.....	107
TABELA 9: COMPARAÇÃO DO RESULTADOS NUMÉRICOS DE IDENTIFICAÇÃO: SEM CONSIDERAR A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA (S/ WLF) E COM A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF (C/ WLF) - MATERIAL CYCOLAC BDT5510.....	108
TABELA 10: LIMITES DOS PARÂMETROS CARACTERÍSTICOS DO MATERIAL VIA MODELO OR – MATERIAL CYCOLAC BDT5510.....	112

TABELA 11: COMPARAÇÃO DO RESULTADOS NUMÉRICOS DE IDENTIFICAÇÃO: SEM CONSIDERAR A INFLUÊNCIA DA PRESSÃO(S/ OR) E COM A INFLUÊNCIA DA PRESSÃO VIA MODELO OR (C/ OR) - MATERIAL CYCOLAC BDT5510.....	113
TABELA 12: LIMITES DOS PARÂMETROS CARACTERÍSTICOS DO MATERIAL VIA MODELO FMT – MATERIAL CYCOLAC BDT5510.	115
TABELA 13: RESULTADOS NUMÉRICOS DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO FMT - MATERIAL CYCOLAC BDT5510.....	116
TABELA 14: LIMITES DOS PARÂMETROS CARACTERÍSTICOS DO MATERIAL VIA MODELO UFPR – MATERIAL CYCOLAC BDT5510.....	118
TABELA 15: RESULTADOS NUMÉRICOS DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO UFPR - MATERIAL CYCOLAC BDT5510.....	118
TABELA 16: COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS DO AJUSTE SIMULTÂNEO DAS CURVAS, DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF E TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELOS FMT E UFPR - MATERIAL CYCOLAC BDT5510.....	120
TABELA 17: LIMITES DOS PARÂMETROS MATERIAIS DA EQUAÇÃO CONSTITUTIVA DO MODELO DE ZF UTILIZADOS NO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO DO MATERIAL STAMAX 40YM240.	121
TABELA 18: LIMITES DOS PARÂMETROS CARACTERÍSTICOS DO MATERIAL VIA MODELO WLF – MATERIAL STAMAX 40YM240.....	122
TABELA 19: RESULTADOS NUMÉRICOS DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF - MATERIAL STAMAX 40YM240.....	123

TABELA 20: RESULTADOS NUMÉRICOS DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO FMT - MATERIAL STAMAX 40YM240.	127
TABELA 21: RESULTADOS NUMÉRICOS DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO UFPR - MATERIAL STAMAX 40YM240.	131
TABELA 22: COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS DO AJUSTE SIMULTÂNEO DAS CURVAS, DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF E TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELOS FMT E UFPR - MATERIAL STAMAX 40YM240.	135

LISTA DE ABREVIATURAS

AG	Algoritmo Genético.
FMT	Modelo de Fillers–Moonan–Tschoegl.
MVE	Material Viscoelástico.
MZF	Modelo de Zener Fracionário.
OR	Modelo de O’Reilly.
PNL	Programação Não Linear.
PSTP	Princípio da Superposição Tempo-Pressão.
PSTT	Princípio da Superposição Tempo-Temperatura.
PSTTP	Princípio da Superposição Tempo-Temperatura-Pressão.
WLF	Modelo de Williams-Landel-Ferry.
ZF	Zener Fracionário.

LISTA DE SÍMBOLOS

Alfabeto Latino

C_1^P	Constante do material para o fator de deslocamento de pressão utilizando modelo O'Reilly.
$C_1^{P(\text{sup})}$	Limite superior da variável de projeto C_1^P .
$C_1^{P(\text{inf})}$	Limite inferior da variável de projeto C_1^P .
C_m^T	Constante do material para o fator de deslocamento de temperatura – modelo WLF ($m = 1$ a 2).
$C_m^{T(\text{sup})}$	Limite superior da variável de projeto C_m^T .
$C_m^{T(\text{inf})}$	Limite inferior da variável de projeto C_m^T .
$C_m^{T,P}$	Constante do material para o fator de deslocamento de temperatura e pressão – modelo FMT ($m = 1$ a 6), ou modelo UFPR ($m = 1$ a 4).
$C_m^{T,P(\text{sup})}$	Limite superior da variável de projeto $C_m^{T,P}$.
$C_m^{T,P(\text{inf})}$	Limite inferior da variável de projeto $C_m^{T,P}$.
D	Operador diferencial em relação ao tempo, $D = \frac{d}{dt}$.
D^2	Distância total.
${}_c D_{a,t}^\alpha f(t)$	Derivada fracionária de Caputo à esquerda de ordem α .
${}_c D_{t,b}^\alpha f(t)$	Derivada fracionária de Caputo à direita de ordem α .
${}_{GL} D_{a,t}^\alpha f(t)$	Derivada fracionária de Grünwald-Letnikov à esquerda de ordem α .
${}_{GL} D_{t,b}^\alpha f(t)$	Derivada fracionária de Grünwald-Letnikov à direita de ordem α .
${}_{RL} D_{a,t}^\alpha f(t)$	Derivada fracionária de Riemann-Liouville à esquerda de ordem α .
${}_{RL} D_{t,b}^\alpha f(t)$	Derivada fracionária de Riemann-Liouville à direita de ordem α .
$D_{a,t}^{-\alpha} f(t)$	Integral fracionária de Riemann-Liouville à esquerda de ordem α .
$D_{t,b}^{-\alpha} f(t)$	Integral fracionária de Riemann-Liouville à direita de ordem α .
E_0	Módulo de relaxação instantâneo.
E_∞	Módulo de relaxação de equilíbrio.
E_∞^{inf}	Limite inferior da variável de projeto E_∞ .
E_∞^{sup}	Limite superior da variável de projeto E_∞ .
$E(t)$	Módulo de relaxação no domínio do tempo.
$E_R(\Omega_R)$	Módulo de armazenamento dinâmico.

$E_\nu(z)$	Função de Mittag-Leffler para um parâmetro.
$E_{\nu,\mu}(z)$	Função de Mittag-Leffler para dois parâmetros.
erf	Função erro de Mittag-Leffler.
$erfc$	Função erro complementar de Mittag-Leffler.
$H(t)$	Função Heavyside.
$J(t)$	Módulo de fluência no domínio do tempo.
NC	Número de curvas.
$NTax$	Número total de taxas de deformação.
$NTemp$	Número total de temperaturas.
$NPtos$	Número total de pontos amostrados de cada curva.
P	Pressão.
P_0	Pressão de referência.
R	Módulo de elasticidade (Módulo de Young).
T	Temperatura.
T_0	Temperatura de referência.

Alfabeto Grego

α_P	Fator de deslocamento para pressão.
α_T	Fator de deslocamento para temperatura.
$\alpha_{T,P}$	Fator de deslocamento para temperatura e pressão.
$\delta(t)$	Função delta de Dirac.
ε	Deformação.
ε_0	Deformação constante.
$\dot{\varepsilon}(t)$	Taxa de deformação no tempo.
$\dot{\varepsilon}_i$	Taxa de deformação para a i-ésima curva.
ξ	Variável de integração.
η	Viscosidade do material.
$\eta_G(\Omega_R)$	Fator de perda.
$\hat{\mu}(s)$	Módulo complexo de cisalhamento.
ν	Ordem de diferenciação do amortecedor de Scott-Blair.
σ	Tensão.
σ_0	Tensão constante.
σ_{kij}^Z	Tensão segundo o modelo de Zener fracionário.

σ^{exp}	Tensão dos dados experimentais.
$\dot{\sigma}(t)$	Taxa de tensão no tempo.
τ_a	Tempo de relaxação.
τ_ε	Tempo de retardação.
$\Gamma(\alpha)$	Função Gamma de Euler.
Ω_R	Frequência reduzida.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	24
1.1	O PROBLEMA.....	27
1.2	ESTADO DA ARTE	28
1.2.1	Aplicação do cálculo fracionário em viscoelasticidade	28
1.2.2	Identificação de MVEs no domínio do tempo	31
1.2.2.1	Identificação de MVEs no domínio do tempo e utilizando derivadas inteiras	32
1.2.2.2	Identificação de MVEs no domínio do tempo e utilizando cálculo fracionário.....	34
1.3	OBJETIVOS	35
1.3.1	Objetivo geral	35
1.3.2	Objetivos específicos.....	35
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO.....	36
2	REVISÃO CONCEITUAL	37
2.1	MATERIAIS VISCOELÁSTICOS.....	37
2.1.1	Ensaio de fluência	40
2.1.2	Ensaio de relaxação de tensão	41
2.1.3	Princípio da superposição de Boltzmann	42
2.1.4	Relação entre módulo de fluência e módulo de relaxação	43
2.2	MODELOS MECÂNICOS A DERIVADAS INTEIRAS	44
2.2.1	Alguns modelos mecânicos clássicos de viscoelasticidade.....	45
2.2.1.1	Modelo clássico de Hooke.....	45
2.2.1.2	Modelo clássico de Newton	46
2.2.1.3	Modelo clássico de Kelvin-Voigt.....	46
2.2.1.4	Modelo clássico de Maxwell	47
2.2.1.5	Modelo clássico sólido linear padrão (ou modelo de Zener)	48
2.2.1.6	Modelos generalizados em derivada inteira	50
2.3	CÁLCULO FRACIONÁRIO.....	53
2.3.1	Integral e derivada fracionária de Riemann-Liouville.....	54
2.3.2	Derivadas fracionárias de Caputo	55
2.3.3	Derivadas fracionárias de Grünwald-Letnikov	55
2.3.4	Interpretação da derivada fracionária	57

2.3.5	Função de Mittag-Leffler.....	58
2.4	MODELOS MECÂNICOS A DERIVADAS FRACIONÁRIAS	63
2.4.1	Modelo de Scott-Blair	64
2.4.2	Modelo fracionário de Kelvin-Voigt	64
2.4.3	Modelo fracionário de Maxwell	65
2.4.4	Modelo de Zener fracionário (ou modelo fracionário Sólido Linear Padrão).....	65
2.5	MODELO DE ZENER FRACIONÁRIO: ANÁLISE DOS PARÂMETROS DA FUNÇÃO MÓDULO DE RELAXAÇÃO	69
2.5.1	Parâmetro material ν	69
2.5.2	Parâmetro material E_{∞}	70
2.5.3	Parâmetro material r_{μ}	70
2.5.4	Parâmetro material τ_a	71
2.6	INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA NO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE MVES	72
2.6.1	Modelo de Williams, Landel e Ferry	76
2.6.2	Modelo de Arrhenius	77
2.7	INFLUÊNCIA DA PRESSÃO NO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE MVES	77
2.7.1	Modelo O'Reilly	79
2.8	INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO NO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE MVES	80
2.8.1	Modelo Fillers-Moonan-Tschoegl	80
2.8.2	Modelo UFPR	81
3	MATERIAIS E MÉTODOS	84
3.1	MATERIAIS	84
3.2	FORMULAÇÃO DA CORRENTE ABORDAGEM DE IDENTIFICAÇÃO.....	84
3.2.1	Cálculo da tensão segundo o modelo de ZF e considerando a influência da temperatura	86
3.2.2	Cálculo da tensão segundo o modelo de ZF e considerando a influência da pressão ou temperatura e pressão simultâneas.....	87
3.3	PROBLEMA PADRÃO DE OTIMIZAÇÃO	90
3.4	ESTRUTURA COMPUTACIONAL	92
3.4.1	Implementação da função Mittag-Leffler	94

3.4.2	Denominadores das funções FMT e UFPR.....	96
3.5	VALIDAÇÃO DO MODELO PROPOSTO.....	97
3.5.1	Material C-2003.....	97
3.5.2	Identificação das propriedades do MVE no domínio da frequência a partir do nomograma.	97
3.5.3	Interconversão entre o domínio do tempo e o domínio da frequência.....	99
3.5.4	Pseudo-ensaios.....	100
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES.....	104
4.1	RESULTADOS NUMÉRICOS: POLÍMERO CYCOLAC BDT5510.....	104
4.1.1	Identificação do material sem considerar a influência da temperatura e pressão.....	104
4.1.2	Identificação considerando a influência da temperatura via modelo WLF	105
4.1.3	Identificação considerando a influência da pressão via modelo OR.....	111
4.1.4	Identificação considerando a influência da temperatura e pressão via modelo FMT.	114
4.1.5	Identificação considerando a influência da temperatura e pressão via modelo UFPR.....	117
4.2	RESULTADOS NUMÉRICOS: POLÍMERO STAMAX 40YM240.....	121
4.2.1	Identificação considerando a influência da temperatura via modelo WLF	121
4.2.2	Identificação considerando a influência da temperatura e pressão via modelo FMT.....	126
4.2.3	Identificação considerando a influência da temperatura e pressão via modelo UFPR.....	130
5	CONCLUSÕES.....	137
5.1	INTRODUÇÃO.....	137
5.1.1	Sobre a metodologia proposta.....	138
5.1.2	Análise considerando a influência da temperatura.....	138
5.1.3	Análise considerando a influência da pressão.....	139
5.1.4	Análise considerando as influências da temperatura e da pressão.....	139
5.2	SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS.....	139
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	141
	APÊNDICES.....	148
	ANEXOS.....	155

1 INTRODUÇÃO

Durante as últimas décadas tem-se visto um grande aumento da utilização de materiais poliméricos em aplicações na engenharia estrutural. A boa aceitação de componentes mecânicos fabricados a partir desse tipo de material decorre, em parte, da facilidade com que estes podem ser moldados em praticamente qualquer formato e, em parte, por causa do seu excelente desempenho geral em ambientes corrosivos e como elemento dissipador de energia mecânica.

O comportamento mecânico dos materiais é caracterizado pela resposta que estes apresentam quando submetidos a carregamentos mecânicos. Para os polímeros, a tensão e a deformação não são relacionadas através de simples constantes de proporcionalidade, como o módulo de elasticidade (NIELSEN; LANDEL, 1994). Os polímeros se caracterizam por apresentar um comportamento intermediário entre os materiais ditos elásticos e os viscosos, dependendo da temperatura e da escala de tempo do experimento. Essa característica é denominada viscoelasticidade.

Os materiais ditos elásticos são aqueles que se deformam imediatamente quando aplicada uma tensão, e quando esta é retirada, retornam a sua forma e volume originais. A energia de deformação também é recuperada neste momento, estando este tipo de comportamento relacionado ao armazenamento de energia. Como mostra a lei de Hooke, um material é dito linearmente elástico quando a tensão é proporcional à deformação, mas independente da taxa de deformação.

Já o conceito de materiais viscosos diz respeito àqueles que se deformam continuamente quando submetidos a uma tensão, comportamento este que está relacionado à dissipação de energia. Por exemplo, de acordo com a dissipação viscosa segundo a lei de Newton, a tensão é diretamente proporcional à taxa de deformação, porém independe da deformação em si.

Nos polímeros, por serem materiais altamente viscoelásticos (uma combinação de comportamento elástico com viscoso), suas propriedades mecânicas variam constantemente com a velocidade de aplicação dos carregamentos. Por esse motivo, é importante ter em mãos modelos que possibilitem prever, com precisão, o comportamento mecânico desse tipo de materiais viscoelásticos (MVEs) durante sua

vida útil, seja no domínio do tempo, motivo deste trabalho, como no domínio da frequência.

A modelagem matemática do comportamento mecânico de MVEs pode, portanto, ser realizada tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo. Na abordagem no domínio da frequência, em geral, a ideia é impor um carregamento harmônico com frequência variável e amplitude conhecida e usar algum modelo dinâmico do sistema para obter o módulo dinâmico (módulo de armazenamento) e o fator de perda em um intervalo de frequências pré-determinado (MARTINEZ-AGIRRE; ELEJABARRIETA, 2010; MOREIRA et al., 2010). Já no domínio do tempo, a ideia é impor um histórico de tensões e obter um histórico de deformações ou, ao contrário, impor um histórico de deformações e obter um histórico de tensões e, em seguida, aplicar um modelo do sistema (LIU; SUBHASH, 2006; PLASEIED; FATEMI, 2008; CHAE et al., 2010). Geralmente, em ambos os domínios, a caracterização é um processo inverso de identificação.

Três características comportamentais importantes destacam-se na relação entre tensão e deformação dependente do tempo dos MVEs. São elas: relaxação, quando aplica-se no material uma deformação constante e ocorre uma redução da tensão ao longo do tempo; fluência, quando se aplica no material uma tensão constante e ocorre um aumento da deformação ao longo do tempo; e histerese, que representa um atraso de fase entre tensão e deformação. Os ensaios de fluência e relaxação são frequentemente utilizados para obtenção das funções módulo de fluência e módulo de relaxação definidas no domínio do tempo.

A maioria dos materiais exibe um comportamento linear ou quase linear, quando submetidos a pequenos níveis de tensão, enquanto que o mesmo material pode ter um comportamento não linear para valores elevados dos mesmos. A teoria da viscoelasticidade linear possibilita a construção de modelos matemáticos para a representação das relações tensão-deformação-tempo que permite soluções razoavelmente simples para muitos problemas de análise de tensão. Por conseguinte, nos últimos anos pode ser notada uma considerável atividade de pesquisa nesta área, buscando o desenvolvimento de novas representações matemáticas do comportamento viscoelástico e novos métodos de análise desse fenômeno. Em menor escala, o mesmo ocorre para comportamentos e modelos não lineares.

Uma forma de representar matematicamente os modelos de comportamento viscoelástico linear é através de equações diferenciais de ordem inteira. Uma vantagem de se utilizar essa abordagem está na facilidade de armazenar e manipular os termos, quase sempre triviais, em suas derivadas e integrais. Uma desvantagem é que, para representar bem o comportamento material, em geral, é necessário um elevado número de termos, o que gera um alto custo computacional (BRINSON; BRINSON, 2008).

Outra forma de representar esses materiais é por meio de modelos baseados em cálculo fracionário (CF). Esses modelos mostram-se atraentes para a descrição do comportamento viscoelástico de numerosos materiais, quando adicionados a estruturas de engenharia com o objetivo de aumentar a quantidade de energia dissipada (BAGLEY; TORVIK, 1983a). Esses modelos possuem vantagens sobre a viscoelasticidade linear clássica (baseada em derivadas de ordem inteira) visto que um menor número de termos são exigidos para uma boa representação do comportamento material – por exemplo, quatro ou cinco parâmetros – o que, *a priori*, facilita o cálculo e a simulação numérica no domínio da frequência (PRITZ, 1996).

A abordagem do CF na viscoelasticidade evoluiu como um método empírico de descrever as propriedades dos materiais viscoelásticos. A observação inicial de Nutting (1921, 1943, 1946) sobre o fenômeno de relaxação de tensão é que este pode ser modelado por potências fracionárias no tempo. Caputo e Mainardi (1971) mostram que as relações constitutivas que empregam o CF podem descrever as propriedades mecânicas de alguns metais e vidros. Assim, o emprego do CF nas relações constitutivas passa a ser um meio atrativo de descrever o comportamento viscoelástico de numerosos materiais, especialmente polímeros para controle de vibrações (TORVIK; BAGLEY, 1984; BAGLEY; TORVIK, 1986; SURGULADZE, 2002).

Uma melhoria dos modelos clássicos da viscoelasticidade linear pode ocorrer com a substituição dos amortecedores viscosos de Newton por amortecedores fracionários de Scott-Blair (MAINARDI, 2010). Com isso, as equações diferenciais do modelo mecânico escritas em termos de derivadas de ordem inteira são substituídas por equações envolvendo diferenciações de ordem não-inteiras (não necessariamente de ordem fracionária).

Durante o processo de caracterização dos MVEs, fica evidente a influência da temperatura, da pressão ou de ambas, no comportamento destes materiais. No

caso da influência da temperatura, um material pode ser definido como termorreologicamente simples quando todos os seus tempos de relaxação são afetados da mesma forma, pela temperatura, permitindo assim a aplicação do Princípio da Superposição Tempo-Temperatura (PSTT).

O PSTT pode não ser válido se o material passar por uma transformação de fase no intervalo de temperatura de interesse, ou se é um compósito com dois ou mais processos de relaxação (que dá origem à viscoelasticidade) que dependem de temperaturas diferentes. Quando isso ocorre o material é denominado termorreologicamente complexo (LAKES, 2008).

Ao aplicar o PSTT, o comportamento viscoelástico, a uma dada temperatura, pode ser relacionado a uma outra temperatura através de um simples deslocamento na escala tempo. Esse deslocamento permite a previsão das propriedades do material por um longo período de tempo, partindo de dados de testes realizados em períodos de tempo relativamente curtos.

De forma análoga ao que ocorre no comportamento material com a influência da temperatura, tem-se a influência da pressão. Portanto, quando todos os tempos de relaxação são afetados pela pressão da mesma forma, o material é definido como piezorreologicamente simples, sendo possível aplicar o Princípio da Superposição Tempo-Pressão (PSTP). Já o Princípio da Superposição Tempo-Temperatura-Pressão (PSTTP) é aplicado em materiais que apresentam ambos os comportamentos: termorreologica e piezorreologicamente simples.

A caracterização, a modelagem e a identificação de MVEs são de grande interesse para diversos ramos da engenharia. A intenção de identificar esses materiais é de melhorar a precisão na predição do comportamento mecânico dos sistemas envolvidos, ajudando na construção de modelos mais confiáveis os quais fornecem a base da engenharia moderna. Esses modelos são utilizados para compreender, controlar fenômenos envolvidos e, provavelmente, a sua aplicação principal, prever o comportamento futuro.

1.1 O PROBLEMA

O comportamento mecânico dos materiais viscoelásticos é influenciado, entre outros, por parâmetros como tempo, temperatura e/ou pressão. O estudo da influência desses parâmetros é objeto frequente de pesquisas que visam buscar a melhor metodologia para determinar seu impacto no comportamento de estruturas

construídas com MVEs. Nesse contexto, o objetivo deste trabalho é estabelecer uma metodologia para a identificação de MVEs no domínio do tempo, considerando o modelo constitutivo de Zener fracionário. Com essa finalidade, parte-se de um conjunto de dados experimentais obtidos através de ensaios uniaxiais de tração de um MVE, considerando várias taxas de deformação, em diferentes temperaturas de ensaio. A influência da temperatura é analisada via modelo desenvolvido por Willians, Landel e Ferry (1955) e para a influência da pressão via modelo O'Reilly (TSCHOEGL et al. 2002). Considerando a influência da temperatura e pressão, simultaneamente, os modelos aplicados são o Fillers-Moonan-Tschoegl – FMT (TSCHOEGL et al. 2002) – e o modelo aqui denominado UFPR. Os parâmetros característicos do material são obtidos utilizando uma técnica híbrida de otimização. Essa técnica consiste em aplicar inicialmente algoritmos genéticos para aproximar o ponto de mínimo global e, posteriormente, o uso de técnicas de programação não linear, para melhor aproximar esse ponto de ótimo.

1.2 ESTADO DA ARTE

Nesta seção, a explanação científica é apresentada através de dois subitens: Aplicação do cálculo fracionário em viscoelasticidade e identificação de materiais viscoelásticos no domínio do tempo. Para o segundo subitem, a abordagem do tema se dá pelos modelos baseados em derivadas de ordens inteiras e os modelos baseados em derivadas fracionárias.

1.2.1 Aplicação do cálculo fracionário em viscoelasticidade

Viscoelasticidade linear é, certamente, o campo de aplicações mais extenso de cálculo fracionário (MAINARDI, 2012). Durante o século XX, uma série de autores utilizou esse ramo do conhecimento como um método empírico para descrever as propriedades dos MVEs. Na primeira metade desse século, os primeiros contribuintes foram: Andrew Gemant nos EUA (GEMANT, 1936, 1938), George William Scott Blair na Inglaterra (SCOTT-BLAIR, 1944, 1947, 1949) e A. Gerasimov e Yuri N. Rabotnov na ex-União Soviética, em 1948 (MAINARDI, 2012).

Segundo Mainardi (2012), em 1950, Andrew Gemant publicou um livro intitulado “*Fractional Phenomena*” o qual reuniu seus respectivos 16 artigos que levam o mesmo título do livro, que haviam sido publicados entre 1941 e 1943, no

conceituado periódico *Journal of Applied Physics*. Mainardi (2012) destaca a observação feita por Gemant quanto à necessidade de se utilizar operadores diferenciais fracionários para calcular a forma das curvas de relaxação para alguns fluídos elasto-viscosos.

Scott Blair (1947, 1949) usou a abordagem de CF para modelar as observações feitas por Nutting (1921, 1943, 1946) de que o fenômeno de relaxação da tensão pode ser descrito por potências fracionárias no tempo. Naquele trabalho, foi observado que derivadas temporais de ordem fracionária serviriam para modelar, simultaneamente, as observações de Nutting na relaxação de tensão e as observações de Andrew Gemant na dependência da frequência.

Segundo Mainardi (2012), os trabalhos de A. Gerasimov e Yuri N. Rabotnov foram publicadas em russo em 1948, e o seu conteúdo permaneceu desconhecido para a maioria dos cientistas ocidentais até a tradução para o inglês. Nesses trabalhos, Gerasimov explicitou o uso de derivadas fracionárias para definir o seu modelo de viscoelasticidade (semelhante ao modelo de Scott Blair), enquanto Rabotnov preferiu usar os operadores integrais de Volterra com núcleo fracamente singular, os quais poderiam ser interpretados em termos de integrais e derivadas fracionárias.

No final dos anos 1960, Caputo (1966, 1967, 1969) e Caputo e Mainardi (1971a, 1971b) explicitamente sugerem que derivadas de ordem fracionária (do tipo Caputo) poderiam ser usadas com sucesso para modelar mecanismos de dissipação em sismologia e na metalurgia.

O início das aplicações modernas de CF na viscoelasticidade linear é geralmente atribuído à tese de doutorado de 1979 realizada por Ronald L. Bagley, sob a supervisão do Prof. Peter J. Torvik (BAGLEY, 1979), seguido de um número de documentos relevantes (BAGLEY; TORVIK, 1979, 1983a, 1983b; TORVIK; BAGLEY, 1984).

Christensen (1982) e Tschoegl (1989), em seus respectivos textos clássicos, apresentam a teoria da viscoelasticidade linear incluindo soluções de problemas avançados de interesse de pesquisas em relação às leis constitutivas tensão-deformação no tempo e um estudo detalhado com ênfase nas equações constitutivas de derivadas inteiras.

Lakes (1999) apresenta a teoria de sólidos viscoelásticos, incluindo os efeitos transitórios e dinâmicos, com ênfase sobre a viscoelasticidade linear e métodos experimentais para caracterização de materiais viscoelásticos.

Pritz (2003) utiliza o modelo de derivada fracionária com quatro parâmetros para descrever a variação de propriedades dinâmicas elásticas e de amortecimento em uma ampla faixa de frequências. Nesse estudo, é descrita a assimetria do pico do fator de perda e o comportamento de propriedades dinâmicas em experimentos em alta frequência em alguns materiais poliméricos.

Ainda, Pritz (1996, 2003) relata que a imprecisão dos modelos mecânicos pode estar na relação tensão-deformação definida no domínio do tempo, apresentada por uma equação diferencial linear de ordem inteira. Essa equação diferencial pode ser generalizada, substituindo-se as derivadas de ordem inteira por derivadas de ordem fracionária (CAPUTO; MAINARDI, 1971; BAGLEY, 1979). Os novos modelos são denominados generalizados, ou modelos de derivadas fracionária, sendo uma ferramenta importante para descrever o comportamento dinâmico de vários materiais.

Lopes et al. (2004) utilizam uma modelagem generalizada, baseada em modelos de CF, para caracterizar, de forma integrada em frequência e temperatura, materiais como borracha butílica e silicone através das funções transmissibilidade que foram obtidas experimentalmente para várias temperaturas de ensaio.

Cruz (2004) apresenta uma metodologia para determinar as propriedades mecânicas do material viscoelástico no projeto ótimo de neutralizadores dinâmicos. Devido à necessidade de se utilizar um material viscoelástico em uma aplicação específica, a metodologia apresentada pelo autor baseia-se em, formular o sistema composto em termos das coordenadas generalizadas do sistema primário, usando par tal fim o conceito de parâmetros equivalentes generalizados para os neutralizadores viscoelásticos. Posteriormente, faz-se uma transformação através de uma matriz de autovetores do sistema primário, para as coordenadas principais (espaço modal). Nesse espaço, aplicam-se algoritmos genéticos para determinar as propriedades mecânicas do material viscoelástico mais adequado para aplicação específica ou de estudo. O modelo a derivada fracionária de quatro parâmetros é utilizado para modelar o material viscoelástico do neutralizador dinâmico.

Mainardi (2010), em seu livro *"Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity – An Introduction to Mathematical Models"*, demonstra como o CF

fornece um adequado método para descrever as propriedades dinâmicas de meios viscoelásticos lineares, incluindo problemas de propagação de ondas e difusão.

Mainardi e Spada (2011) apresentam um levantamento geral da teoria da viscoelasticidade linear e uma discussão sistemática com representações gráficas das principais propriedades (ensaio de fluência e relaxação de tensão) dos modelos clássicos de Hooke, Kelvin-Voigt, Maxwell, Zener, Anti-Zener e Burgers, utilizando o cálculo fracionário.

Xiao et al. (2014) desenvolvem um modelo numérico, no domínio do tempo, para identificar os parâmetros constitutivos no campo viscoelástico fracionário. Uma equação baseada em elementos finitos é obtida para o problema direto, que é resolvida por transformada de Laplace. A identificação dos parâmetros constitutivos fracionários é tratada como um problema de otimização e é resolvida por um algoritmo que necessita da solução fornecida pelo Método dos Elementos Finitos. Porém, a técnica não necessita das soluções de derivadas com relação aos parâmetros constitutivos. A viabilidade da abordagem proposta foi analisada, via ensaio numérico, de um problema de identificação formulada pelo modelo de Kelvin-Voigt fracionário,

1.2.2 Identificação de MVEs no domínio do tempo

Quando a identificação é realizada no domínio do tempo, a ideia é impor um histórico de tensão e obter um histórico de deformação ou, ao contrário, impor um histórico de deformação e obter um histórico de tensão e, em seguida, aplicar um modelo do sistema, através de um processo inverso.

Os modelos clássicos da viscoelasticidade (modelos de derivada de ordem inteira) frequentemente requerem um número elevado de parâmetros para representar corretamente o comportamento material (PRITZ, 1996). Portanto, existe uma necessidade de modelos mais precisos e que possam ser descritos com um menor número de parâmetros possível. A esse respeito, equações constitutivas usando derivadas fracionárias, em vez de derivadas de ordem inteira, têm a vantagem de representar o comportamento do material com menos parâmetros.

1.2.2.1 Identificação de MVEs no domínio do tempo e utilizando derivadas inteiras

Park e Schapery (1999) aplicam um método numérico, utilizando séries de Prony, para relacionar as funções de relaxação e fluência de MVEs, o qual foi testado utilizando dados experimentais de alguns materiais poliméricos. Este método é restrito a viscoelasticidade linear, e é aplicável para a interconversão entre as funções de relaxação e fluência nos domínios do tempo, frequência e das transformadas de Laplace. Naquele trabalho são mostrados também os efeitos dos diferentes valores dos parâmetros, em especial os tempos de relaxação e de retardo, para os materiais polimetilmetacrilato e poliisobutileno, onde as funções dos materiais foram comparadas entre a fonte dos dados e as calculadas através do método desenvolvido.

No estudo apresentado por Hu et al. (2006), um teste de relaxação de tensão é utilizado para a caracterização da viscoelasticidade de um componente de epóxi, através da determinação do módulo de relaxação do material como função do tempo. Os testes de relaxação de tensão foram conduzidos em um equipamento Instron Microtester 5848 equipado com forno. Uma deformação constante de 0,25% foi aplicada ao espécime e os esforços resultantes medidos em função do tempo. As propriedades mecânicas viscoelásticas do componente epóxi foram determinadas em termos dos coeficientes das séries de Prony, tempo de relaxação e fatores de deslocamento tempo-temperatura.

Liu e Subhash (2006) apresentam uma nova abordagem para caracterizar experimentalmente a natureza viscoelástica de uma barra polimérica (barra de pressão polímero Hopkinson - SHPB). O algoritmo deconvolutivo chamado L-SIDA foi apresentado para caracterizar a não parametricidade da propagação da onda que foi extraída diretamente da função resposta de impulso de uma barra polimérica viscoelástica a partir dos sinais de tensão discretos medidos no domínio do tempo. Os parâmetros de viscoelasticidade foram identificados através do ajuste da função resposta obtidos a partir da função resposta de impulso, a fim de caracterizar a viscoelasticidade paramétrica tendo por base o modelo de Maxwell generalizado.

Plaseied et al. (2008) modificam e utilizam o modelo clássico sólido linear padrão (elemento de Maxwell com uma mola em paralelo) para representar o comportamento tensão-deformação do polímero éster de vinil sob uma vasta gama de taxas de deformação e temperaturas. As constantes materiais para o modelo em

questão foram obtidos dos testes de tração na temperatura ambiente e taxas de deformação variando entre 0,0001 e 1/s. Os autores mostram que a relação tensão-deformação do modelo estavam em concordância razoável com os resultados obtidos dos ensaios experimentais. Posteriormente, os parâmetros materiais do modelo sólido linear padrão foram modificados com o objetivo de registrar a variação da deformação com as temperaturas variando entre a temperatura ambiente e 100°C. Segundo o autor, as curvas tensão-deformação previstas com base nas constantes modificadas mostram boas correlações com os resultados obtidos experimentalmente.

Chae et al. (2010) realizam experimentos de relaxação de tensão em componentes poliméricos no domínio do tempo com o objetivo de determinar a curva máster do módulo de relaxação, utilizando as séries de Prony para caracterizar o comportamento do material (um composto de moldagem à base de epóxi). Após a obtenção dos fatores de deslocamento e dos coeficientes da Série de Prony através de dois métodos, a curva máster a uma temperatura de referência foi transferida para as demais temperaturas medidas, em comparação aos dados experimentais. A rotina de ajustes de curvas não lineares do ANSYS foi utilizada para determinar os parâmetros de Prony que foram utilizados como entradas para as simulações posteriores.

Sorvari e Hamalainen (2010) discutem o desempenho dos métodos semi-analíticos convencionais e métodos implícitos de Runge-Kutta para o modelo integral de viscoelasticidade linear utilizando séries de Prony. Assim, estes métodos são avaliados analiticamente e numericamente. Exemplos numéricos que envolvem um problema uniaxial simples e simulações multiaxiais são apresentados com o objetivo de analisar e comparar os integradores do tempo.

Pacheco (2015) apresenta uma metodologia para caracterização de MVEs (material STAMAX 40YM240) através de um problema inverso de identificação. Para tal fim, dados experimentais no domínio do tempo, extraídos de curvas de tensão *versus* deformação, a diferentes taxas de deformação e temperaturas, foram utilizados. A metodologia desenvolvida permitiu caracterizar, no domínio do tempo, modelos de MVEs baseados em séries de Prony com comportamento termorreologicamente e piezorreologicamente simples.

1.2.2.2 Identificação de MVEs no domínio do tempo e utilizando cálculo fracionário

A identificação de propriedades mecânicas de MVEs no domínio do tempo e considerando modelos constitutivos baseados em CF é bastante recente. Em virtude da complexidade da modelagem e do elevado custo computacional para avaliação dos termos envolvidos, poucos trabalhos são encontrados na bibliografia. Essa seção trata deste tema.

Welch et al. (1999) analisam a resposta viscoelástica quase-estática de materiais poliméricos (goma de borracha natural vulcanizada, GR-S e Hevea, cristais de sal e pó de alumínio e poliisobutileno) utilizando modelos constitutivos baseados no CF no domínio do tempo. Partindo de dados experimentais obtidos na literatura dos materiais poliméricos citados, o autor compara essas informações com a curva do módulo de relaxação do modelo fracionário. A abordagem para a montagem do módulo de relaxação é a minimização da função erro quadrática da diferença entre os pontos experimentais e a função módulo relaxação. O autor faz uso dos modelos fracionários de quatro e seis parâmetros para as funções de relaxação de tensão, que são capazes de modelar materiais em que os dados de relaxação manifestam-se em um patamar vítreo.

Jiménez et al. (2002) apresentam um estudo de relaxação de tensão em amostras de polímeros PMMA e PTFE (politetrafluoretileno e metilmetacrilato). De posse dos resultados experimentais obtidos nos ensaios de tração para as amostras dos polímeros, por meio de ajuste de curvas, os autores concluem que o modelo de Scott-Blair é o que apresenta melhor resultado, quando comparado com os modelos clássicos. Já o modelo de Maxwell fracionário fornece um bom ajuste dos dados experimentais no qual a tensão aparece como derivadas de ordem não inteiras.

Moschen (2006) estabelece uma comparação entre dois processos aplicados na obtenção da função relaxação de tensão em MVEs: método da deconvolução aplicada à função creep pela inversão exata (função de Mittag-Leffler) e o método da inversão aproximada da transformada de Laplace. O modelo material utilizado é o sólido padrão fracionário (ou Zener fracionário). Segundo o autor, o grau de dificuldade da computação numérica da função relaxação de tensão é proveniente da função exponencial generalizada ou função Mittag-Leffler, visto que a mesma depende basicamente dos valores numéricos dos parâmetros fracionários.

García-Barruetabeña et al. (2011) avaliam o comportamento viscoelástico do material adesivo flexível ISR-70-03, por meio de testes dinâmicos e de relaxação. Os testes foram realizados num equipamento DMTA, em diferentes temperaturas e taxas de deformação. De posse dos dados experimentais, curvas máster foram construídas, utilizando o princípio da superposição tempo-temperatura, tanto no domínio do tempo quanto no domínio da frequência. Os módulos de relaxação e os módulos complexos seguem o modelo generalizado de Maxwell (séries de Prony) e o modelo fracionário de quatro parâmetros. Em seus respectivos domínios, os modelos são comparados com os dados experimentais.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo geral

O objetivo deste trabalho é propor e implementar uma metodologia de identificação do módulo de relaxação de MVEs no domínio do tempo, utilizando o modelo constitutivo de Zener fracionário segundo a definição de Riemann-Liouville e considerando a influência da temperatura via modelo Williams, Landel e Ferry (1955), a influência da pressão via modelo O'Reilly (1962) e a influência da temperatura e pressão, via modelo FMT (MOONAN et al., 1983) e uma nova abordagem no desenvolvimento de um modelo que considera a influência da temperatura e pressão, aqui denominado, modelo UFPR.

1.3.2 Objetivos específicos

O objetivo geral pode ser detalhado nos seguintes objetivos secundários:

- i. Propor uma metodologia de identificação de MVEs no domínio do tempo baseado no modelo de Zener fracionário;
- ii. Formular e implementar computacionalmente a metodologia;
- iii. Aplicar a metodologia para identificação de dois MVEs;
- iv. Analisar a influência da temperatura no comportamento do material considerando a metodologia proposta;
- v. Analisar a influência da pressão no comportamento do material considerando a metodologia proposta;

- vi. Analisar a influência da temperatura e pressão no comportamento do material considerando a metodologia proposta.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

O corrente trabalho está estruturado em cinco capítulos, dois apêndices e dois anexos.

No Capítulo 1, apresenta-se uma introdução e o estado da arte da presente pesquisa. Também são especificados o problema e os objetivos que, com o presente trabalho, tenta-se atingir.

No Capítulo 2 é apresentada uma revisão conceitual sobre materiais viscoelásticos e são discutidos alguns modelos mecânicos a derivadas inteiras. Em seguida, alguns conceitos sobre o cálculo fracionário e alguns modelos mecânicos a derivadas de ordens fracionária são mostrados. Realiza-se uma breve análise dos parâmetros característicos da função módulo de relaxação decorrente do modelo de Zener fracionário. A influência da temperatura e/ou pressão no comportamento mecânico de MVEs finaliza esse capítulo.

No Capítulo 3 são mostrados os materiais utilizados no processo de identificação, a formulação da corrente abordagem de identificação e a estrutura computacional utilizada. O capítulo é encerrado com a validação do modelo proposto.

No Capítulo 4 são apresentados alguns resultados numéricos e os gráficos decorrentes da implementação da metodologia proposta na identificação dos materiais CYCOLAC BDT5510 e STAMAX 40YM240

No Capítulo 5, relatam-se as principais conclusões sobre este trabalho de tese e sugestões para trabalhos futuros.

As referências bibliográficas, os dois apêndices e os dois anexos utilizados para a presente pesquisa encontram-se no final do trabalho.

2 REVISÃO CONCEITUAL

Neste capítulo são apresentados alguns conceitos sobre MVEs e alguns modelos mecânicos a derivadas de ordem inteiras. Também são apresentados um breve histórico sobre o CF, algumas definições pertinentes e alguns modelos mecânicos a derivadas fracionárias. O capítulo é finalizado com uma breve explanação sobre a influência da temperatura, a influência da pressão e a influência da temperatura e pressão simultaneamente no comportamento mecânico de MVEs.

2.1 MATERIAIS VISCOELÁSTICOS

Os materiais viscoelásticos apresentam uma combinação de comportamento elástico e viscoso. A tensão e/ou deformação em um ponto específico no material pode variar significativamente com o tempo, embora os carregamentos aplicados permaneçam constantes.

Os polímeros, que são materiais com comportamento viscoelástico, podem ser classificados segundo inúmeros critérios. Uma classificação pode ser realizada com base na estrutura molecular, visto que estruturas moleculares diferentes implicam em propriedades físicas completamente diferentes. Segundo Mano (1985), os polímeros são divididos entre os que possuem apenas estruturas lineares ou ramificadas (ditos termoplásticos), e os que possuem ligações cruzadas (os termofixos).

Os termoplásticos constituem a maior parte dos polímeros existentes. Estes possuem a capacidade de tornarem-se mais maleáveis com o calor, serem remoldados e voltarem a endurecer sem perder suas propriedades. Por possuírem estruturas lineares (ou ramificadas), suas ligações intermoleculares, mais fracas que as covalentes primárias, são dissociadas muito antes da quebra das cadeias poliméricas, permitindo assim que as moléculas se desloquem e reorganizem criando novas ligações intermoleculares ao retirar energia do sistema (a fonte de calor). Na temperatura ambiente, dependendo de suas estruturas, os termoplásticos podem ser maleáveis, rígidos ou frágeis (MCCRUM et al., 1997).

Por outro lado, os termofixos são estruturas poliméricas de ligações cruzadas onde a quebra ou dissociação de possíveis ligações secundárias não altera de forma pungente a estrutura molecular no todo. Os polímeros termofixos são

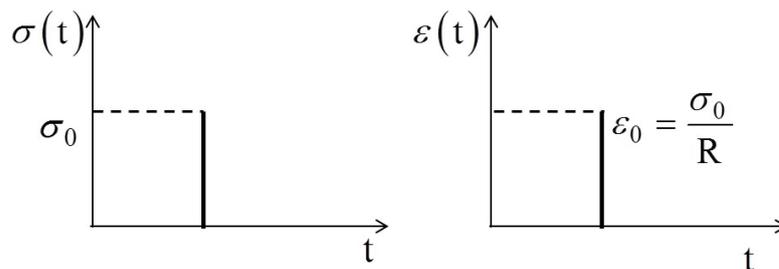
aptos a suportar temperaturas mais altas. Entretanto, quando a energia térmica inserida no sistema é suficiente para dissociar as ligações covalentes primárias, a molécula se desfaz, causando danos irreparáveis no material (CREMA, 2007).

Segundo textos clássicos sobre o tema (FINDLEY et al., 1976), vários fenômenos constitutivos são comuns a muitos MVEs. Entre eles:

- Elasticidade instantânea

Quando tensões são aplicadas no material, em geral ocorre uma deformação elástica instantânea (FIGURA 1). Após o alívio da tensão, essa deformação é totalmente recuperada. Denota-se por R o módulo de elasticidade constante (ou módulo de Young)

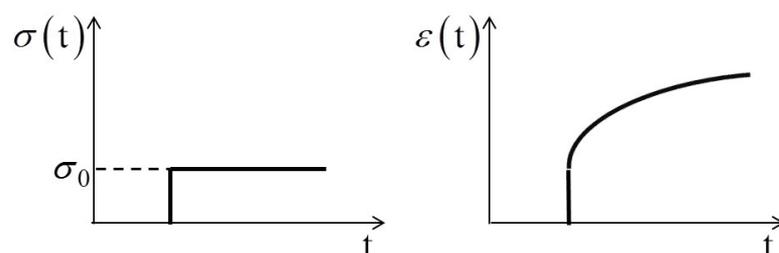
FIGURA 1: ELASTICIDADE INSTANTÂNEA.



- Fluência

A fluência, representada na FIGURA 2, é um processo de deformação que ocorre num material, quando submetido a uma tensão constante ou quase constante, em função do tempo, isto é, $\epsilon = \epsilon(t)$. A ocorrência da fluência varia em função das propriedades dos materiais, das tensões aplicadas, do tempo e da temperatura.

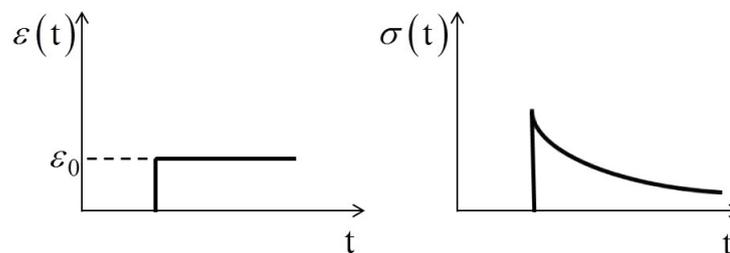
FIGURA 2: FLUÊNCIA SOB TENSÃO CONSTANTE.



- Relaxação de tensão

Esse fenômeno, visualizado na FIGURA 3, ocorre quando uma amostra de material é inicialmente deformada rapidamente até um determinado e relativo baixo nível de deformação (ε_0). A tensão $\sigma(t)$ necessária para manter esta deformação é medida em função do tempo, enquanto a temperatura é mantida constante. Verifica-se que a tensão decresce com o tempo devido a processos de relaxação molecular que ocorrem dentro do material.

FIGURA 3: RELAXAÇÃO DE TENSÃO SOB DEFORMAÇÃO CONSTANTE.



- Recuperação instantânea

Quando é aplicada uma tensão constante em uma amostra de MVE, esta sofre imediatamente uma resposta elástica. Quando a tensão é removida a recuperação elástica é instantânea (FIGURA 4.b, segmento BC).

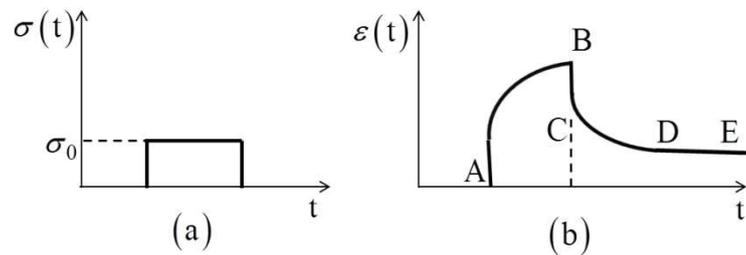
- Recuperação tardia

Além da recuperação instantânea, quando é retirado o carregamento aplicado ao MVE este sofre uma recuperação de deformação dependente do tempo a uma taxa de variação continuamente decrescente, denominada de recuperação tardia (FIGURA 4.b, segmento CD).

- Deformação permanente

Após a remoção da tensão no MVE, uma porção mensurável da deformação não desaparece após um longo período de tempo, sendo esta porção residual diretamente afetada pelo tempo de aplicação do carregamento. Esta deformação é denominada deformação permanente. Na FIGURA 4.b, o trecho representado pelo segmento DE, demonstra a deformação permanente.

FIGURA 4: ENSAIO UNIAXIAL DE MVE: HISTÓRICOS DE TENSÃO APLICADA (A) E DE DEFORMAÇÃO GERADA (B) TRECHO (BC): RECUPERAÇÃO INSTANTÂNEA, TRECHO (CD): RECUPERAÇÃO TARDIA E TRECHO (DE): DEFORMAÇÃO PERMANENTE.

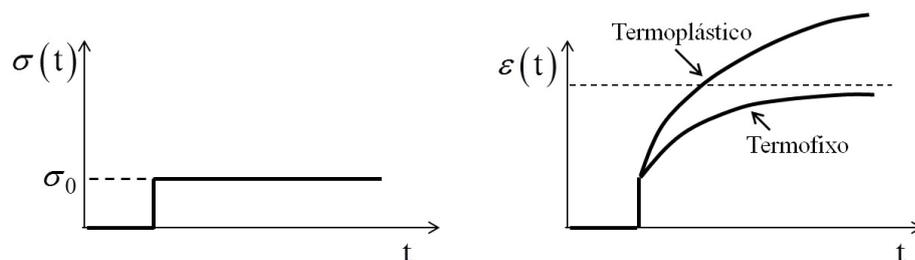


Os principais ensaios para caracterização de um MVE no domínio do tempo são: ensaio de fluência e ensaio de relaxação.

2.1.1 Ensaio de fluência

Em um ensaio de fluência, o MVE é submetido a uma tensão constante σ_0 e a deformação, por sua vez, aumenta de forma lenta e progressiva com o tempo. Durante esse ensaio, para um polímero termofixo, a deformação tenderá assintoticamente para um valor constante após um longo tempo. Já para um polímero termoplástico, a deformação continuará a crescer tendendo à fratura (FIGURA 5).

FIGURA 5: ENSAIO DE FLUÊNCIA: TENSÃO CONSTANTE E HISTÓRICO DA DEFORMAÇÃO.



Para um MVE linear, a deformação $\varepsilon(t)$ pode ser representada pela relação

$$\varepsilon(t) = \sigma_0 J(t). \quad (2.1)$$

Ou seja,

$$J(t) = \varepsilon(t) / \sigma_0. \quad (2.2)$$

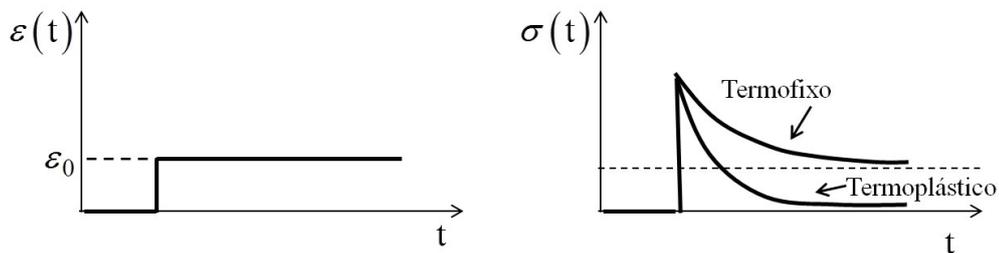
Nesse caso, a função $J(t)$ é denominada módulo de compliância ou módulo de fluência (*creep compliance*), isto é, a deformação de fluência por unidade de

tensão aplicada. A função módulo de fluência é uma propriedade do material. Em materiais viscoelásticos lineares, $J(t)$ não é afetada pelo nível de tensão atuante.

2.1.2 Ensaio de relaxação de tensão

Em um ensaio de relaxação, o material é submetido a uma deformação constante ε_0 e a tensão decresce gradativamente com o tempo. Segundo Brinson e Brinson (2006), quando um MVE é submetido ao ensaio de relaxação, a tensão $\sigma(t)$ necessária para manter essa deformação constante diminui no decorrer do tempo, tendendo assintoticamente a zero para um MVE termoplástico ideal, ou a um valor constante não-nulo para um termofixo (FIGURA 6). Nesse ensaio, o material pode armazenar parte da energia interna ao mesmo tempo em que flui sob deformação constante (em vez de dissipar tudo em forma de calor) e pode também devolver parte da deformação quando a tensão é retirada.

FIGURA 6: ENSAIO DE RELAXAÇÃO: DEFORMAÇÃO CONSTANTE E HISTÓRICO DE TENSÃO.



Se o comportamento do material é linear, a tensão $\sigma(t)$ pode ser representada por

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E(t). \quad (2.3)$$

Ou seja,

$$E(t) = \sigma(t) / \varepsilon_0. \quad (2.4)$$

A função $E(t)$ obtida é denominada módulo de relaxação. Esta função representa a tensão por unidade de deformação aplicada e é um comportamento característico do material. Em materiais viscoelásticos não-lineares, o módulo de relaxação depende do nível de tensão atuante.

2.1.3 Princípio da superposição de Boltzmann

É comum na bibliografia, definir os MVEs lineares como materiais com memória. Ou seja, o estado de tensões num dado ponto do material, para um certo instante de tempo, não depende somente do estado de deformações naquele mesmo instante, mas também de toda a história de deformação à qual aquele ponto esteve exposto. A recíproca, por sua vez, também é verdadeira. Pode-se descrever esse comportamento por meio do princípio de Boltzmann.

Seja, por exemplo, um ensaio de fluência, onde uma tensão constante σ_1 é aplicada no tempo ξ_1 . Assim, a deformação de fluência correspondente, medida em qualquer instante t , pode ser escrita como (FINDLEY et al., 1976)

$$\varepsilon(t) = \sigma_1 J(t - \xi_1) H(t - \xi_1), \quad (2.5)$$

sendo $H(\cdot)$ a função Heaviside com argumento (\cdot) .

Se uma outra tensão constante σ_2 for aplicada no tempo ξ_2 , a deformação de fluência terá a mesma forma que a equação (2.5), porém o tempo será deslocado para ξ_2 .

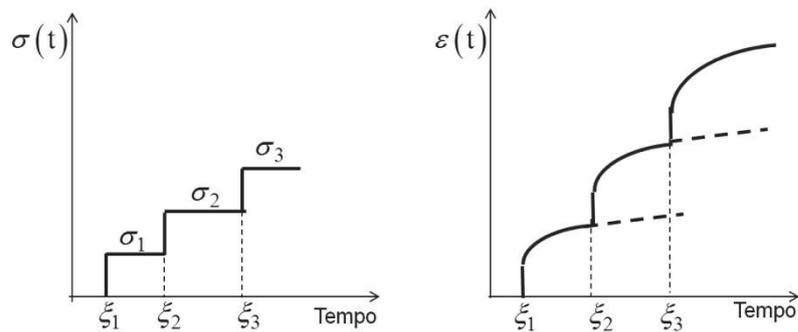
O princípio da superposição de Boltzmann estabelece que, para uma MVE linear, a deformação total no tempo t é dada pela superposição de cada efeito, na forma

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1(t) + \varepsilon_2(t) = \sigma_1 J(t - \xi_1) H(t - \xi_1) + \sigma_2 J(t - \xi_2) H(t - \xi_2). \quad (2.6)$$

Para uma aplicação conjunta de vários incrementos de carregamentos $\Delta\sigma_i$ em um material, visualizada na FIGURA 7, a deformação em um instante de tempo t qualquer (sendo $t > \xi_i$, $i = 1, 2, \dots, n$) pode ser posta, em forma geral, como

$$\varepsilon(t) = \Delta\sigma_1 J(t - \xi_1) H(t - \xi_1) + \Delta\sigma_2 J(t - \xi_2) H(t - \xi_2) + \Delta\sigma_3 J(t - \xi_3) H(t - \xi_3) + \dots \quad (2.7)$$

FIGURA 7: REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO PRINCÍPIO DA SUPERPOSIÇÃO DE BOLTZMANN.



Considerando a aplicação de um histórico de tensões $\sigma(\xi)$, definido entre o instante inicial ($t = 0$) e um tempo t qualquer, tem-se que a deformação total nesse instante t , $\varepsilon(t)$, pode ser representada na forma integral como

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \xi) \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi. \quad (2.8)$$

Esta equação pode ser usada para descrever a deformação gerada por qualquer histórico de tensão, desde que o módulo de fluência $J(t)$ seja conhecido e o MVE seja linear.

Para um ensaio específico de relaxação de tensão, o comportamento pode ser representado de forma similar, só que, nesse caso, a deformação do material é que é incrementada de valores $\Delta\varepsilon$ em intervalos de tempo $\Delta\xi$. Assim, a tensão em qualquer tempo t pode ser posta em função da função módulo de relaxação $E(t)$ na forma

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \xi) \frac{d\varepsilon}{d\xi} d\xi. \quad (2.9)$$

2.1.4 Relação entre módulo de fluência e módulo de relaxação

Considerando que os fenômenos de fluência e relaxação são dois aspectos do mesmo comportamento viscoelástico dos materiais, estes podem ser relacionados. Em outras palavras, um é previsível se o outro é conhecido e vice-versa.

Aplicando a transformada de Laplace à equação (2.8) em um material sem qualquer tensão e deformação iniciais, têm-se as equações algébricas no espaço transformado da variável s , na forma

$$\hat{\varepsilon}(s) = s\hat{J}(s)\hat{\sigma}(s). \quad (2.10)$$

Realizando o mesmo processo na equação (2.9), tem-se

$$\hat{\sigma}(s) = s\hat{E}(s)\hat{\varepsilon}(s). \quad (2.11)$$

Nesses casos, $\hat{\varepsilon}(s)$ e $\hat{\sigma}(s)$ são, respectivamente, a deformação e a tensão no espaço de Laplace s , e $\hat{J}(s)$ e $\hat{E}(s)$ são, respectivamente, a função de fluência e a função de relaxação no mesmo espaço.

Assim, da equação (2.11) tem-se

$$\frac{\hat{\sigma}(s)}{\hat{\varepsilon}(s)} = s\hat{E}(s) = \frac{1}{s\hat{J}(s)}. \quad (2.12)$$

Multiplicando (2.12) por $\hat{J}(s)$ e dividindo por s , resulta

$$\hat{J}(s)\hat{E}(s) = \frac{1}{s^2}. \quad (2.13)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace a essa equação tem-se

$$\int_0^t J(t - \xi) E(\xi) d\xi = t \quad (2.14)$$

e

$$\int_0^t E(t - \xi) J(\xi) d\xi = t. \quad (2.15)$$

As equações (2.13), (2.14) e (2.15) definem a relação entre as funções módulo de fluência $J(t)$ e módulo de relaxação $E(t)$ para MVEs lineares.

2.2 MODELOS MECÂNICOS A DERIVADAS INTEIRAS

Nesta seção são apresentados alguns modelos clássicos de viscoelasticidade, estabelecendo-se a equação constitutiva através de derivadas de ordem inteira.

Observa-se, pelas equações (2.8) e (2.9), que, conhecendo o histórico de tensões $\sigma(t)$ (ou de deformações $\varepsilon(t)$), é possível obter o histórico de deformações $\varepsilon(t)$ (ou de tensões $\sigma(t)$). Entretanto, isso só é possível se as expressões para $J(t)$ e

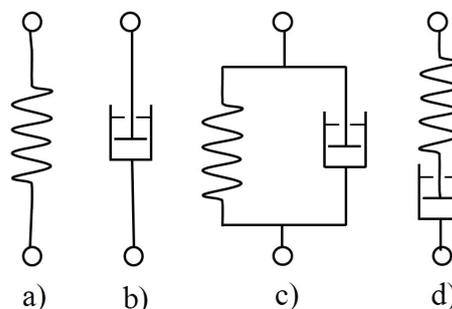
$E(t)$ forem conhecidas. Esta seção apresenta alguns diferentes modelos mecânicos que resultarão em diferentes modelos matemáticos e cujas soluções fornecem as funções características do MVE.

2.2.1 Alguns modelos mecânicos clássicos de viscoelasticidade

Uma forma de obter o comportamento viscoelástico linear é considerando o comportamento de modelos mecânicos simples. Estes são construídos a partir de combinações geométricas de molas e amortecedores lineares, dispostos isoladamente ou em ramos de dois (em série ou em paralelo), como mostrados na FIGURA 8.

Esses modelos mecânicos têm um importante papel na literatura devido ao seu desenvolvimento histórico. De fato, as primeiras teorias foram estabelecidas com o auxílio destes modelos, que ainda são úteis para visualizar as propriedades e as leis da teoria geral. A FIGURA 8 mostra alguns destes modelos.

FIGURA 8: REPRESENTAÇÃO DOS MODELOS MECÂNICOS BÁSICOS: a) MOLA PARA O MODELO DE HOOKE, b) AMORTECEDOR PARA O DE NEWTON, c) MOLA E AMORTECEDOR EM PARALELO PARA KELVIN-VOIGT, d) MOLA E AMORTECEDOR EM SÉRIE PARA MAXWELL.



2.2.1.1 Modelo clássico de Hooke

O modelo mecânico visto na FIGURA 8.a, representado por uma mola, é um elemento elástico linear, no qual a força é proporcional à sua extensão. Este componente representa um corpo elástico perfeito obedecendo a lei de Hooke. Por esse motivo, esse modelo é referido como o modelo de Hooke.

Denotando por R o módulo de elasticidade constante (ou módulo de Young), o modelo constitutivo de Hooke pode ser posto como

$$\sigma_H(t) = R\varepsilon_H(t), \quad (2.16)$$

onde σ_H e ε_H são, respectivamente, a tensão e a deformação do elemento de Hooke.

As funções módulo de fluência, $J_H(t)$, e de relaxação, $E_H(t)$, para esse modelo são, respectivamente,

$$J_H(t) = 1/R \quad (2.17)$$

e

$$E_H(t) = R. \quad (2.18)$$

Nesse modelo, $E_H(t) \cdot J_H(t) = 1$.

2.2.1.2 Modelo clássico de Newton

O elemento que dissipa energia em um MVE, em geral, é representado por um amortecedor viscoso e linear (FIGURA 8.b). Nesse elemento, a força é proporcional à taxa de deformação, representando um corpo perfeitamente viscoso e que obedece a lei de Newton. Nesse caso, denotando por η o coeficiente de viscosidade, a relação constitutiva para esse modelo pode ser posta como

$$\sigma_N(t) = \eta \frac{d\varepsilon_N}{dt}. \quad (2.19)$$

onde σ_N e ε_N são, respectivamente, a tensão e a deformação neste elemento de Newton.

Assim, as funções módulos de fluência, $J_N(t)$, e relaxação, $E_N(t)$, para o modelo de Newton são, respectivamente,

$$J_N(t) = t/\eta \quad (2.20)$$

e

$$E_N(t) = \eta\delta(t) \quad (2.21)$$

onde $\delta(t)$ é a função delta de Dirac.

2.2.1.3 Modelo clássico de Kelvin-Voigt

Um modelo constituído por uma mola de módulo elástico R em paralelo com um amortecedor de viscosidade η é conhecido como o modelo de Kelvin-Voigt

(FIGURA 8.c). Neste caso, a tensão total para o modelo de Kelvin-Voigt, $\sigma_{KV}(t)$, pode ser escrita como

$$\sigma_{KV}(t) = \sigma_H(t) + \sigma_N(t) \quad (2.22)$$

e a deformação total, $\varepsilon_{KV}(t)$, como

$$\varepsilon_{KV}(t) = \varepsilon_H(t) = \varepsilon_N(t). \quad (2.23)$$

Considerando as equações (2.16) e (2.19), a relação tensão-deformação para o modelo de Kelvin-Voigt pode ser posta como

$$\sigma_{KV}(t) = R\varepsilon_{KV}(t) + \eta \frac{d\varepsilon_{KV}}{dt}. \quad (2.24)$$

Considerando um ensaio de fluência onde uma tensão constante σ_0 é aplicada, a solução da equação diferencial apresentada na equação (2.24) é da forma

$$\varepsilon_{KV}(t) = \frac{\sigma_0}{R} (1 - e^{-Rt/\eta}). \quad (2.25)$$

Nota-se, por essa expressão, que a deformação aumenta e aproxima-se assintoticamente do valor σ_0/R quanto t tende para o infinito.

Para o modelo de Kelvin-Voigt, os módulos de fluência $J_{KV}(t)$ e relaxação $E_{KV}(t)$ são, respectivamente,

$$J_{KV}(t) = \frac{1}{R} (1 - e^{-t/\tau_\varepsilon}) \quad (2.26)$$

e

$$E_{KV}(t) = R + \eta\delta(t), \quad (2.27)$$

onde $\tau_\varepsilon = \frac{\eta}{R}$ é denominado tempo de retardação do material.

2.2.1.4 Modelo clássico de Maxwell

Um modelo constituído por uma mola e um amortecedor em série é conhecido como o modelo de Maxwell (FIGURA 8.d). Neste caso, a tensão sobre o amortecedor e a mola são iguais à tensão total $\sigma_M(t)$. Ou seja,

$$\sigma_M(t) = \sigma_H(t) = \sigma_N(t) \quad (2.28)$$

e a deformação total $\varepsilon_M(t)$ é a soma das deformações de cada componente,

$$\varepsilon_M(t) = \varepsilon_H(t) + \varepsilon_N(t). \quad (2.29)$$

Diferenciando as equações (2.16) e (2.29) tem-se, respectivamente

$$\frac{d\varepsilon_H}{dt} = \frac{1}{R} \frac{d\sigma_H}{dt} \quad (2.30)$$

e

$$\frac{d\varepsilon_M}{dt} = \frac{d\varepsilon_H}{dt} + \frac{d\varepsilon_N}{dt}. \quad (2.31)$$

Substituindo as equações (2.19) e (2.30) na equação (2.31), obtém-se a equação diferencial para o modelo constitutivo de Maxwell, como

$$\sigma_M(t) + \frac{\eta}{R} \frac{d\sigma_M}{dt} = \eta \frac{d\varepsilon_M}{dt}. \quad (2.32)$$

Desta forma, os módulos de fluência $J_M(t)$ e relaxação $E_M(t)$ para esse modelo podem ser obtidos e são dados, respectivamente, por

$$J_M(t) = \frac{1}{R} + \frac{1}{\eta} t \quad (2.33)$$

e

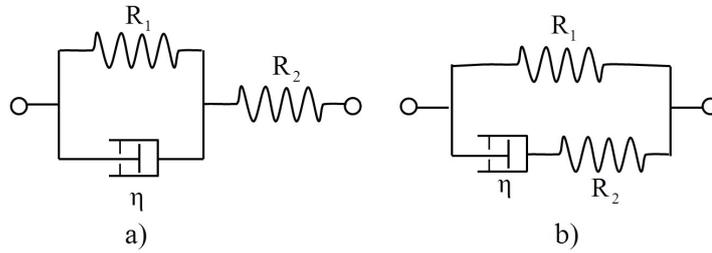
$$E_M(t) = \text{Re}^{-t/\tau_\sigma}, \quad (2.34)$$

onde $\tau_\sigma = \frac{\eta}{R}$ é denominado tempo de relaxação do material.

2.2.1.5 Modelo clássico sólido linear padrão (ou modelo de Zener)

Adicionando uma mola em série a um modelo de Kelvin-Voigt, ou adicionando uma mola em paralelo a um modelo de Maxwell (FIGURA 9), obtém-se o modelo de Zener (1948), também denominado de modelo Sólido Linear Padrão (MAINARDI, 2010). Neste trabalho, o modelo em questão é referido como modelo de Zener.

FIGURA 9: MODELOS MECÂNICOS DE ZENER: A) MODELO DE KELVIN-VOIGT COM UMA MOLLA EM SÉRIE B) MODELO DE MAXWELL COM UMA MOLLA EM PARALELO.



Considerando o modelo mecânico apresentado na FIGURA 9.a, tem-se que a deformação total para o modelo de Zener ($\varepsilon_Z(t)$) é soma da deformação do elemento de Kelvin-Voigt com a deformação do elemento de Hooke, ou seja

$$\varepsilon_Z(t) = \varepsilon_{KV}(t) + \varepsilon_H(t). \quad (2.35)$$

No domínio de Laplace, a equação (2.35) pode ser posta como

$$\hat{\varepsilon}_Z(s) = \hat{\varepsilon}_{KV}(s) + \hat{\varepsilon}_H(s). \quad (2.36)$$

A tensão total do modelo de Zener ($\sigma_Z(t)$) é igual à tensão do modelo de Hooke que, por sua vez, é igual à tensão do modelo de Kelvin-Voigt. Assim, no domínio de Laplace, pode-se escrever a tensão do modelo de Zener como

$$\hat{\sigma}_Z(s) = \hat{\sigma}_{KV}(s) = \hat{\sigma}_H(s). \quad (2.37)$$

Das equações (2.16) e (2.37), o elemento de Hooke que compõe o modelo de Zener, pode ser posto no domínio de Laplace como

$$\hat{\varepsilon}_H(s) = \frac{\hat{\sigma}_Z(s)}{R_2}. \quad (2.38)$$

Da equação (2.24) a relação tensão-deformação do elemento de Kelvin-Voigt que compõe o modelo de Zener, pode ser escrita no domínio de Laplace como

$$\hat{\varepsilon}_{KV}(s) = \frac{\hat{\sigma}_Z(s)}{R_1 + \eta s}. \quad (2.39)$$

Substituindo as equações (2.38) e (2.39) em (2.36) e considerando a equação (2.37) obtém-se, no domínio de Laplace, a relação tensão-deformação do modelo de Zener, ou seja

$$\hat{\varepsilon}_Z(s) = \frac{\hat{\sigma}_Z(s)}{R_1 + \eta s} + \frac{\hat{\sigma}_Z(s)}{R_2}. \quad (2.40)$$

A equação (2.40) pode ser manipulada, resultando em

$$\hat{\varepsilon}_Z(s) = \left[\frac{(R_2 + R_1) + \eta s}{R_1 R_2 + R_2 \eta s} \right] \hat{\sigma}_Z(s). \quad (2.41)$$

Rearranjando a equação (2.41) e aplicando a transformada inversa de Laplace, o modelo constitutivo de Zener, associado ao modelo mecânico mostrado na FIGURA 9.a, pode ser posto como (MAINARDI, 2010)

$$\left(1 + \frac{\eta}{R_1 + R_2} \frac{d}{dt} \right) \sigma_Z(t) = \left(\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_2 \eta}{R_1 + R_2} \frac{d}{dt} \right) \varepsilon_Z(t). \quad (2.42)$$

Considerando os ensaios de fluência e relaxação, obtêm-se as respectivas funções módulo de fluência $J_Z(t)$ e módulo de relaxação $E_Z(t)$, postas como

$$J_Z(t) = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1} (1 - e^{-t/\tau_\varepsilon}) \quad (2.43)$$

e

$$E_Z(t) = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_2^2}{R_1 + R_2} e^{-t/\tau_\sigma}, \quad (2.44)$$

sendo $\tau_\varepsilon = \frac{\eta}{R_1}$ e $\tau_\sigma = \frac{\eta}{R_1 + R_2}$ denominados, respectivamente, tempo de retardação e tempo de relaxação do material.

2.2.1.6 Modelos generalizados em derivada inteira

Em virtude da deficiência dos modelos apresentados anteriormente de representarem adequadamente o comportamento de MVEs, geralmente são empregados modelos com maior número de células de Maxwell e/ou de Kelvin-Voigt. Estes são ditos modelos generalizados (BRINSON; BRINSON, 2008).

A forma geral da equação constitutiva para esses modelos baseados em derivadas de ordem inteira pode ser posta como

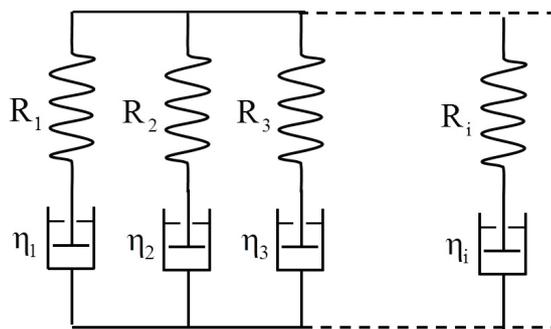
$$\begin{aligned} \sigma(t) + b_1 \frac{d}{dt} \sigma(t) + b_2 \frac{d^2}{dt^2} \sigma(t) + \dots + b_n \frac{d^n}{dt^n} \sigma(t) = \\ a_0 \varepsilon(t) + a_1 \frac{d}{dt} \varepsilon(t) + a_2 \frac{d^2}{dt^2} \varepsilon(t) + \dots + a_m \frac{d^m}{dt^m} \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (2.45)$$

onde t é o tempo, $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ e b_1, b_2, \dots, b_n são constantes características do material a determinar. Segundo Pritz (2003), as ordens das derivadas em função do tempo da tensão e da deformação na equação (2.45) não podem ser arbitrárias para assegurar que o modelo seja fisicamente realizável satisfazendo os requisitos termodinâmicos. Para Pritz (2003) os requisitos termodinâmicos são satisfeitos somente se $m = n$ ou $m = n + 1$.

Vários modelos de Maxwell postos em paralelo (FIGURA 10) caracterizam o modelo de Maxwell generalizado. Este modelo tem a capacidade de representar os fenômenos de elasticidade instantânea, elasticidade de atraso com vários tempos de retardação, relaxação de tensão com vários tempos de relaxação e também fluxo viscoso. Para prever a tensão associada com uma variação de deformação prescrita, o modelo de Maxwell generalizado (FIGURA 10) é bastante conveniente, visto que a deformação aplicada é a mesma em cada elemento e a tensão resultante é a soma das contribuições individuais (FINDLEY et al., 1976).

Segundo Brinson e Brinson (2008), para representar de forma adequada o comportamento de um MVE são necessários de 5 a 15 elementos de Maxwell em paralelo, podendo esse valor ser ainda maior.

FIGURA 10: MODELO DE MAXWELL GENERALIZADO EM PARALELO.



Definindo o operador diferencial em relação ao tempo t como $D = \frac{d}{dt}$, pode-se apresentar a equação diferencial constitutiva deste modelo material como (BRINSON; BRINSON, 2008)

$$\left[\left(\frac{D}{R_1} + \frac{1}{\eta_1} \right) \left(\frac{D}{R_2} + \frac{1}{\eta_2} \right) \dots \right] \sigma(t) = \left[\left(\frac{D}{R_1} + \frac{1}{\eta_1} \right) \left(\frac{D}{R_2} + \frac{1}{\eta_2} \right) \dots \right] \left[\frac{D}{\frac{D}{R_1} + \frac{1}{\eta_1}} + \frac{D}{\frac{D}{R_2} + \frac{1}{\eta_2}} + \dots \right] \varepsilon(t). \quad (2.46)$$

Para um ensaio de relaxação de tensão com uma deformação constante, $\varepsilon(t) = \varepsilon_0$, a solução da equação diferencial pode ser encontrada por superposição resultando em

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \sum_{i=1}^n R_i e^{-t/\tau_i}. \quad (2.47)$$

Portanto o módulo de relaxação do modelo de Maxwell generalizado é dado por

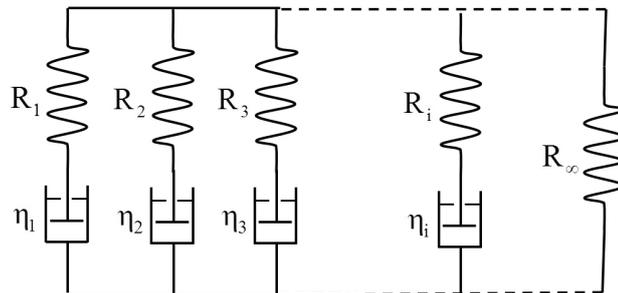
$$E(t) = \sum_{i=1}^n R_i e^{-t/\tau_i}. \quad (2.48)$$

onde $\tau_i = \frac{\eta_i}{R_i}$ é o tempo de relaxação, η_i é o coeficiente de viscosidade do amortecedor de Newton e R_i o módulo de elasticidade (ou módulo de Young) do i -ésimo elemento de Maxwell.

A representação dada pela equação (2.48) é denominada de série de Prony (BRINSON; BRINSON, 2008). As séries de Prony são particularmente atraentes, destacando-se o fato de se tratar de uma série de exponenciais simples, que são fáceis de armazenar e manipular matematicamente, sendo quase sempre triviais as derivadas e as integrais dos termos.

Com a adição de mais um termo de mola no modelo de Maxwell generalizado, tem-se o modelo conhecido como modelo de Wiechert (BRINSON; BRINSON, 2008), representado na FIGURA 11.

FIGURA 11: MODELO DE WIECHERT.



Para esse modelo de Wiechert, a solução para um ensaio de relaxação de tensão fornece

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 \left(\sum_{i=1}^n R_i e^{-t/\tau_i} + R_\infty \right). \quad (2.49)$$

Com isso, a função módulo de relaxação é

$$E(t) = R_{\infty} + \sum_{i=1}^n R_i e^{-t/\tau_i} \quad (2.50)$$

onde R_{∞} é o módulo de equilíbrio do MVE ($R_{\infty} = \lim_{t \rightarrow 0} E(t)$).

2.3 CÁLCULO FRACIONÁRIO

Em 1695, Guillaume François Antonie Marquês de L'Hôpital (1661-1704) levanta a questão quanto ao significado que poderia ser atribuído a $D^{\nu}f(x)$ se ν fosse uma fração. Desde então, o cálculo fracionário atraiu a atenção de muitos matemáticos famosos, tais como Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), Leonhard Paul Euler (1707-1783), Pierre Simon Marquis de Laplace (1749-1827), Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), Niels Henrik Abel (1802-1829), Joseph Liouville (1809-1882), Georg Fridrich Bernhard Riemann (1826-1866) e Laurent Schwartz (1915-2002).

De acordo com Podlubny (1999), durante três séculos, a teoria de derivadas fracionárias desenvolveu-se principalmente como um campo teórico puro da matemática, útil apenas para matemáticos. Entretanto, nas últimas décadas, muitos autores afirmam que derivadas e integrais de ordem não inteira são muito adequadas para a descrição de propriedades de vários materiais reais como, por exemplo, polímeros.

Hilfer (2000) afirma que o nome "cálculo fracionário" tornou-se um equívoco, pois ν pode ser racional ou irracional, positivo ou negativo, real ou complexo para os operadores $D^{\nu}f(x)$. Segundo o autor, a melhor descrição poderia ser "*integração e diferenciação de ordem arbitrária*". No entanto, seguindo a tradição, refere-se a esta teoria como o cálculo fracionário.

Miller e Ross (1993) mencionam os trabalhos de Abel, à quem atribuem a primeira aplicação do cálculo fracionário na resolução de uma equação integral que aparece na modelagem do problema da *tautócrona*, que consiste em determinar a equação da trajetória descrita por uma partícula que desce sem atrito, sob a ação da gravidade, de um ponto a outro, de modo que o tempo transcorrido seja independente do ponto de partida.

No período de 1900 a 1970 houve uma modesta quantidade de trabalhos dedicados ao cálculo fracionário (MILLER e ROSS, 1993). A partir deste período,

ocorreu uma significativa dinamização da pesquisa sobre o assunto, com aumento do número de publicações, incluindo vários livros, e a realização de conferências internacionais em praticamente todos os ramos da Ciência e Engenharia.

Nesta seção são apresentadas algumas definições de integrais e derivadas fracionárias encontradas na literatura. Segundo Li e Zeng (2015), integração fracionária muitas vezes significa integral de Riemann-Liouville, mas para o caso de diferenciação fracionária existem várias definições.

2.3.1 Integral e derivada fracionária de Riemann-Liouville

Considerando que, no presente estudo, o sistema estrutural encontra-se inicialmente em repouso, não há necessidade de se tratar as informações que ocorrem para um tempo $t < 0$. Assim, para este trabalho, são mais apropriadas as definições de Riemann-Liouville. Para tanto, seja $f(t)$, $t \in (a,b)$, α um número real e positivo e $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ a função Gama de Euler (LI; ZENG, 2015). A integral fracionária de Riemann-Liouville à esquerda de ordem α é definida por

$$D_{a,t}^{-\alpha} f(t) = {}_{RL}D_{a,t}^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds, \quad (2.51)$$

e a integral fracionária de Riemann-Liouville à direita de ordem α é definida por

$$D_{t,b}^{-\alpha} f(t) = {}_{RL}D_{t,b}^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (s-t)^{\alpha-1} f(s) ds. \quad (2.52)$$

Com isso, as derivadas fracionárias de Riemann-Liouville à esquerda e à direita de ordem α , onde m é um número inteiro e positivo, tal que, $m-1 \leq \alpha < m$, são definidas, respectivamente, como

$${}_{RL}D_{a,t}^{\alpha} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} \left[D_{a,t}^{-(m-\alpha)} f(t) \right] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} f(s) ds \quad (2.53)$$

e

$${}_{RL}D_{t,b}^{\alpha} f(t) = (-1)^m \frac{d^m}{dt^m} \left[D_{t,b}^{-(m-\alpha)} f(t) \right] = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_t^b (s-t)^{m-\alpha-1} f(s) ds. \quad (2.54)$$

2.3.2 Derivadas fracionárias de Caputo

A definição das derivadas fracionárias de Caputo é bastante semelhante à definição de Riemann-Liouville. Porém, aqui, a ordem de integração fracionária é invertida com a ordem de derivação. Com isso, essa definição é um pouco mais restritiva do que a de Riemann-Liouville, pois requer a integrabilidade da derivada de ordem α da função (CAMARGO, 2009). A maior vantagem da definição de Caputo é que as condições iniciais para as equações diferenciais fracionárias são de ordem inteira, possibilitando dessa forma uma melhor interpretação física (PODLUBNY, 1999).

As derivadas fracionárias de Caputo à esquerda e à direita, de ordem $\alpha > 0$ da função $f(t)$, $t \in (a,b)$, onde m é um número inteiro e positivo, tal que, $m - 1 \leq \alpha < m$, são definidas, respectivamente, como

$${}_c D_{a,t}^\alpha f(t) = D_{a,t}^{-(m-\alpha)} [f^{(m)}(t)] = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \int_a^t (t-s)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds \quad (2.55)$$

e

$${}_c D_{t,b}^\alpha f(t) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_t^b (s-t)^{m-\alpha-1} f^{(m)}(s) ds. \quad (2.56)$$

2.3.3 Derivadas fracionárias de Grünwald-Letnikov

A derivada inteira de ordem n , $n \in \mathbb{Z}$, de uma função $f(t)$, pode ser posta como

$$D^n [f(t)] = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{(\Delta t)^n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(t - j\Delta t) \right], \quad (2.57)$$

onde $\binom{n}{j} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(n-j+1)}$ são os coeficientes binominais. Substituindo Δt pela fração $\frac{t}{N}$, tal que $N = 1, 2, 3, \dots$, a equação (2.57) pode ser escrita como

$$D^n [f(t)] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{t}{N} \right)^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(n-j+1)} f \left(t - j \frac{t}{N} \right) \right]. \quad (2.58)$$

Note que

$$\binom{n}{j} = 0 \text{ para } j > n. \quad (2.59)$$

Se n for substituído por qualquer número real α , considerando $h = \frac{t}{N}$ e definindo

$$\gamma(\alpha, j) = (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha-j+1)}, \quad (2.60)$$

tem-se que a definição da derivada fracionária de Grünwald-Letnikov pode ser posta como

$$D^\alpha[f(t)] = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h^\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma(\alpha, j) f(t - jh) \right]. \quad (2.61)$$

Assim, as definições das derivadas à esquerda e à direita de Grünwald-Letnikov de ordem $\alpha > 0$ da função $f(t)$, $t \in (a, b)$, podem ser escritas, respectivamente, como

$${}_{GL}D_{a,t}^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} [h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma(\alpha, j) f(t - jh)] \quad (2.62)$$

e

$${}_{GL}D_{t,b}^\alpha f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} [h^{-\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} \gamma(\alpha, j) f(t + jh)]. \quad (2.63)$$

Observa-se que as derivadas de Grünwald-Letnikov, as derivadas de Caputo e a derivadas de Riemann-Liouville não são equivalentes (LI; ZENG, 2015). Se a função $f(t)$ é tal que $f \in C^m[a, b]$, então a derivada de Grünwald-Letnikov de $f(t)$ e a derivada de Riemann-Liouville de $f(t)$ são equivalentes, isto é,

$${}_{RL}D_{a,t}^\alpha f(t) = {}_{GL}D_{a,t}^\alpha f(t), \quad {}_{RL}D_{t,b}^\alpha f(t) = {}_{GL}D_{t,b}^\alpha f(t). \quad (2.64)$$

A derivada de Riemann-Liouville e a derivada de Caputo de $f(t)$ têm a seguinte relação:

$${}_{RL}D_{a,t}^\alpha f(t) = {}_cD_{a,t}^\alpha f(t) + \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(a) \frac{(t-a)^{k-\alpha}}{\Gamma(k+1-\alpha)} \quad (2.65)$$

onde $m - 1 < \alpha < m$, m é um número inteiro e positivo, $f \in C^{m-1}[a, t]$ e $f^{(m)}$ é integrável em $[a, t]$. A equação (2.65) pode ser obtida realizando repetidamente a

integração por partes. Além disso, se $f \in C^m[a, t]$ tem-se, da equação (2.65) ou da expansão da série de Taylor, que

$${}_{RL}D_{a,t}^\alpha [f(t) - \phi(t)] = {}_cD_{a,t}^\alpha f(t), \quad (2.66)$$

onde $\phi(t) = \sum_{k=0}^{m-1} f^{(k)}(a) \frac{(t-a)^k}{\Gamma(k+1)}$. Por outro lado, tem-se

$${}_{RL}D_{a,t}^\alpha f(t) = {}_cD_{a,t}^\alpha f(t), \quad (2.67)$$

se $f^{(k)}(a) = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots, m-1$ e $m-1 < \alpha < m$) ou $a \rightarrow -\infty$.

Para a função contínua $f(t)$, tem-se

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} D_{a,t}^{-\alpha} f(t) = f(t), \quad \alpha > 0. \quad (2.68)$$

Suponha que $f(t)$ seja adequadamente suave, $m-1 < \alpha < m$, m é um número inteiro e positivo. Então, tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow m^-} {}_{RL}D_{a,t}^\alpha f(t) &= f^{(m)}(t), & \lim_{\alpha \rightarrow (m-1)^+} {}_{RL}D_{a,t}^\alpha f(t) &= f^{(m-1)}(t), \\ \lim_{\alpha \rightarrow m^-} {}_cD_{a,t}^\alpha f(t) &= f^{(m)}(t), & \lim_{\alpha \rightarrow (m-1)^+} {}_cD_{a,t}^\alpha f(t) &= f^{(m-1)}(t) - f^{(m-1)}(0). \end{aligned} \quad (2.69)$$

A derivada de Riemann-Liouville recai na derivada clássica quando a ordem fracionária α se aproxima de um número inteiro para o t fixo, mas não é o caso para a derivada de Caputo se as condições iniciais homogêneas não estão satisfeitas.

2.3.4 Interpretação da derivada fracionária

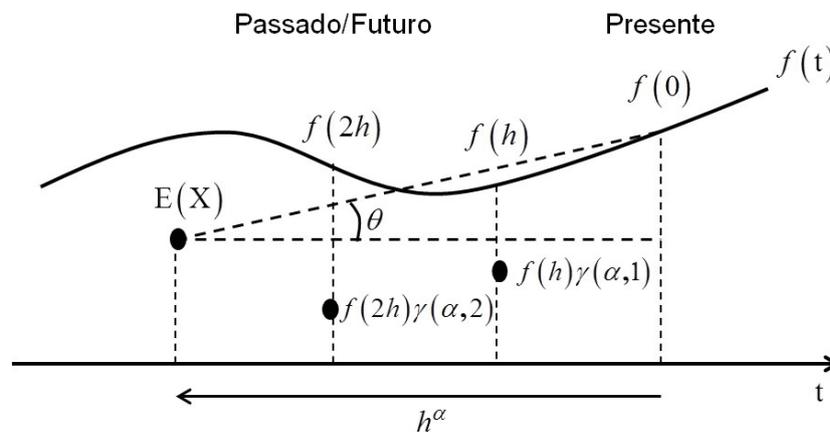
Segundo Machado (2003), devido à quantidade e à complexidade de representações existentes para derivadas de ordem fracionárias, a existência de uma interpretação física não tão clara e objetiva quanto para a ordem inteira. Segundo o autor, diversos pesquisadores propuseram diferentes aproximações para tal interpretação, porém uma alternativa plausível é a abordagem probabilística.

Machado (2003) considera a representação Grünwald-Letnikov apresentada na equação (2.61), em que a derivada de ordem fracionária pode ser vista como uma soma ponderada do valor atual da função $f(t)$, obtido para $j = 0$ e valores

passados de $f(t)$, obtidos para $j > 1$, ou seja, para $f(t-h)$, $f(t-2h)$, ..., $f(t-jh)$, Considerando $0 < \alpha < 1$, o fator de ponderação de $f(t)$ é sempre igual a 1, e para os demais valores, quanto mais próximos do valor presente, $f(t)$, mais próximo de 1 é o fator de ponderação (MACHADO, 2003). A FIGURA 12 ilustra graficamente o cálculo de uma derivada de ordem fracionária.

Assim, a derivada de ordem fracionária corresponde à inclinação θ do triângulo indicado, sendo um dos vértices o valor presente de $f(t)$ e o outro dado por $E(X)$, situado em $t = h^\alpha$, que representa uma média dos valores de $f(t)$ ponderados, ou seja, o produto $\gamma(\alpha, j)f(t-jh)$. A base é sempre paralela ao eixo t . Desta forma, quando $\alpha = 1$, todos os valores de γ são iguais a zero, e o valor imediatamente antes da informação presente tem valor 1, assim resulta a clássica fórmula da tangente. Quando $\alpha = 0$, todos os valores de γ são iguais a zero, apenas o valor presente que é igual a 1, resultando no próprio valor da função. Assim, a medida que $h \rightarrow 0$, tem-se que $t g \theta \rightarrow D^\alpha[f(t)]$ (MACHADO, 2003).

FIGURA 12: INTERPRETAÇÃO DA DERIVADA FRACIONÁRIA.
FONTE: ADAPTADO DE MACHADO (2003)



2.3.5 Função de Mittag-Leffler

Desde os tempos de Magnus Gösta Mittag-Leffler¹, vários cientistas têm reconhecido a importância das funções do tipo Mittag-Leffler (ML), discutindo

¹ Magnus Gösta Mittag-Leffler: matemático sueco cuja área de atuação foi principalmente a análise matemática (1846-1927).

aplicações matemáticas e físicas da mesma (MAINARDI; GORENFLO, 2000). O interesse nas funções de ML decorre da estreita ligação destas com equações diferenciais e integrais de ordem fracionária (não inteira) e equações integrais do tipo Abel (GORENFLO et al., 2002). Assim como a natureza da função exponencial é a solução de equações diferenciais de ordem inteira, a função de ML tem um papel análogo para solução de equações diferenciais de ordem não inteira.

Pode-se citar, como trabalho pioneiro de natureza matemática no campo de integral fracionária e equações diferenciais, o trabalho desenvolvido por Hille e Tamarkin (1930). Esse trabalho apresentou a solução da equação integral de Abel de segunda espécie em termos da função de ML. Além disso, Barret (1954) expressou a solução geral da equação diferencial linear fracionária com coeficientes constantes em termo da função de ML (LORENZO; HARTLEY, 1999). Caputo e Mainardi (1971) mostram que funções de ML podem estar presentes nas derivadas de ordem fracionária que são introduzidas nas equações constitutivas de um corpo viscoelástico linear. Segundo Mainardi (2010), Rabotnov², também introduziu na viscoelasticidade linear as funções tipo ML. A conexão para o uso de operadores de derivada fracionária em equações constitutivas de viscoelasticidade linear foi estabelecida por Koeller e Raj (1978) e Koeller (1984). Desde então, diversos outros autores indicaram a relevância dessas funções para modelos viscoelásticos fracionários.

A função de ML para um parâmetro, denotada por $E_\nu(z)$ com $\nu > 0$, é definida por uma representação em série convergente em todo plano complexo (MAINARDI, 2010), na forma

$$E_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(1+\nu n)}, \quad \nu > 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.70)$$

Segundo Mainardi (2010), para a convergência da série de potência na equação (2.70) o parâmetro ν pode ser complexo, desde que $\text{Re}(\nu) > 0$.

A função de ML pode ser vista como uma generalização da função exponencial tendo em mente a substituição de $n! = \Gamma(n + 1)$ com $(\nu n)! = \Gamma(\nu n + 1)$,

² Yury Nikolaevich Rabotnov: cientista russo, do campo da mecânica, fez importantes contribuições para a teoria da viscoelasticidade, especialmente relacionando o CF e suas aplicações na mecânica dos sólidos (1914-1985).

onde Γ é a função gama. Seguem, da equação (2.70), as seguintes relações, para $z \in \mathbb{C}$:

$$E_1(z) = e^z, \quad E_2(z^2) = \cosh z, \quad E_2(-z^2) = \cos z \quad (2.71)$$

e

$$E_{1/2}(\pm z^{1/2}) = e^z [1 + \operatorname{erf}(\pm z^{1/2})] = e^z \operatorname{erfc}(\mp z^{1/2}) \quad (2.72)$$

onde erf é a função erro e erfc é a função erro complementar, definidas respectivamente como (HAUBOLD et al., 2009)

$$\operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-u^2} du, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2.73)$$

e

$$\operatorname{erfc}(z) := 1 - \operatorname{erf}(z) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-u^2} du, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.74)$$

Uma extensão da função de ML é obtida substituindo a constante aditiva 1 do argumento da função gama (Eq. 2.70) por um parâmetro complexo arbitrário μ . Assim, a representação da função de ML em dois parâmetros, ν e μ , é da forma

$$E_{\nu,\mu}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\mu + \nu n)}, \quad \nu, \mu \in \mathbb{C}, \quad \Re(\nu) > 0, \quad \Re(\mu) > 0, \quad z \in \mathbb{C}. \quad (2.75)$$

Duas importantes relações entre as funções de ML de um e dois parâmetros são dadas pelas seguintes expressões (MAINARDI, 2011):

$$E_\nu(z) = E_{\nu,1}(z) = 1 + zE_{\nu,1+\nu}(z) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dz} E_\nu(z^\nu) = z^{\nu-1} E_{\nu,\nu}(z^\nu). \quad (2.76)$$

No corrente trabalho, a função de ML é de ordem $\nu \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ e o argumento z é sempre real e negativo. Nesse caso, esse argumento é convenientemente redefinido como

$$z = -\left(\frac{t}{\tau_a}\right)^\nu, \quad (2.77)$$

onde τ_a é um parâmetro fixo e característico do sistema analisado. Assim, das equações (2.70) e (2.75) tem-se

$$E_\nu \left(- \left(\frac{t}{\tau_a} \right)^\nu \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{t}{\tau_a} \right)^{\nu n}}{\Gamma(1+\nu)} \quad (2.78)$$

e

$$E_{\nu,\mu} \left(- \left(\frac{t}{\tau_a} \right)^\nu \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{t}{\tau_a} \right)^{\nu n}}{\Gamma(\mu+\nu n)}. \quad (2.79)$$

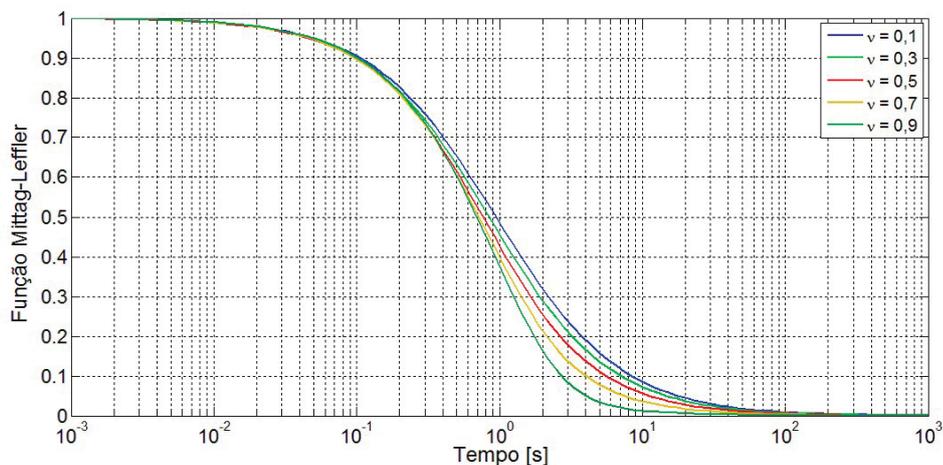
Algumas importantes propriedades limites dessa função de ML para um parâmetro podem ser destacadas a partir da equação (2.78). Analisando os comportamentos assintóticos para um tempo muito pequeno e para um tempo muito grande, tem-se (MAINARDI, 2010)

$$E_\nu \left(- \left(\frac{t}{\tau_a} \right)^\nu \right) \sim \begin{cases} 1 - \frac{\left(\frac{t}{\tau_a} \right)^\nu}{\Gamma(1+\nu)}, & \left(\frac{t}{\tau_a} \right) \rightarrow 0^+ \\ \frac{\left(\frac{t}{\tau_a} \right)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}, & \left(\frac{t}{\tau_a} \right) \rightarrow +\infty \end{cases} \quad (2.80)$$

para $\left(\frac{t}{\tau_a} \right) \geq 0$. Nesse caso, observa-se que a função de ML apresenta um decréscimo muito rápido para $\left(\frac{t}{\tau_a} \right) \rightarrow 0^+$ e quando $\left(\frac{t}{\tau_a} \right) \rightarrow +\infty$ ocorre um decréscimo muito lento, devido à potência negativa (MAINARDI; SPADA, 2011). Isso pode ser evidenciado graficamente pelas FIGURAS 13 e 14.

A representação gráfica da FIGURA 13 é a função de ML apresentada na equação (2.78). Nesse caso, o valor do parâmetro τ_a é fixado em 1 e é realizada somente uma variação do parâmetro ν .

FIGURA 13: FUNÇÃO MITTAG-LEFFLER PARA UM PARÂMETRO: $\tau_a = 1$ E COM VARIAÇÃO DO PARÂMETRO ν .



Já na FIGURA 14, a função de ML, apresentada na equação (2.78), tem o valor do parâmetro ν fixado em 0,5 e é realizada uma variação do parâmetro τ_a .

Existem várias relações diferenciais e integrais associadas às funções de ML. Em geral, estas relações são estabelecidas pela aplicação das fórmulas das funções gama e beta e de outras técnicas (SHUKLA; PRAJAPATI, 2007). Destaca-se, neste trabalho, a seguinte integral associada à função de ML:

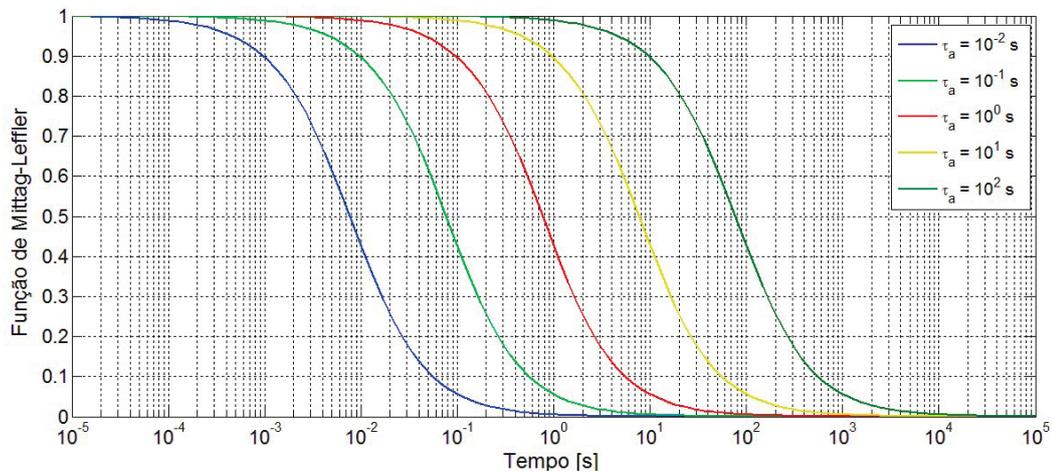
$$\int_0^t \eta^{\mu-1} E_{\nu,\mu}(\omega\eta^\nu) d\eta = t^\mu E_{\nu,\mu+1}(\omega t^\nu), \quad \Re(\mu) > 0 \text{ e } \omega \in \mathbb{C}. \quad (2.81)$$

Considerando a equação (2.81) e o caso especial onde $\mu = 1$ e $\omega = -1$, tem-se

$$\int_0^t E_\nu(-\eta^\nu) d\eta = t E_{\nu,2}(-t^\nu), \quad (2.82)$$

onde $E_{\nu,2}(\cdot)$ é a função de ML com dois parâmetros (Eq. 2.75).

FIGURA 14: FUNÇÃO MITTAG-LEFFLER PARA UM PARÂMETRO $\nu = 0,5$ E COM VARIAÇÃO DO PARÂMETRO τ_a .



Com vistas à sua aplicação no modelo constitutivo do MVE, a equação (2.82) é rearranjada considerando a variável limite superior de integração t como $t = t_k/\tau_a$, onde t_k é um tempo qualquer. Assim, realizando uma transformação de coordenadas onde $\eta = \frac{t_k - \xi}{\tau_a}$, tem-se que o lado esquerdo da equação (2.82) torna-se

$$\int_0^t E_\nu(-\eta^\nu) d\eta = \int_{t_k}^0 E_\nu\left(-\left(\frac{t_k - \xi}{\tau_a}\right)^\nu\right) \left(-\frac{1}{\tau_a}\right) d\xi = \frac{1}{\tau_a} \int_0^{t_k} E_\nu\left(-\left(\frac{t_k - \xi}{\tau_a}\right)^\nu\right) d\xi. \quad (2.83)$$

Igualando esse resultado ao lado direito da equação (2.82), tem-se o importante resultado para o corrente trabalho:

$$\int_0^{t_k} E_\nu \left(- \left(\frac{t_k - \xi}{\tau_a} \right)^\nu \right) d\xi = t_k E_{\nu,2} \left(- \left(\frac{t_k}{\tau_a} \right)^\nu \right). \quad (2.84)$$

2.4 MODELOS MECÂNICOS A DERIVADAS FRACIONÁRIAS

Os modelos constitutivos baseados em derivadas fracionárias são eficientes em descrever a dinâmica do comportamento de MVEs. Uma melhoria dos modelos clássicos da viscoelasticidade linear pode ocorrer com a substituição dos amortecedores viscosos de Newton por amortecedores fracionários de Scott-Blair (MAINARDI, 2010). Com isso, as equações diferenciais do modelo mecânico, escritas em termos de derivadas de ordem inteira, são substituídas por equações envolvendo diferenciações de ordem não-inteiras (não necessariamente de ordem fracionária).

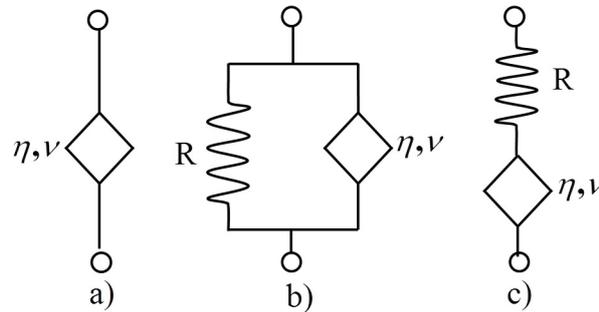
Segundo Pritz (2003), quando ocorre a substituição das derivadas de ordem inteira por derivadas de ordem fracionárias, pode-se escrever a forma geral da equação constitutiva para o modelo do MVE baseado no CF como

$$\begin{aligned} \sigma(t) + b_1 \frac{d^{\beta_1}}{dt^{\beta_1}} \sigma(t) + b_2 \frac{d^{\beta_2}}{dt^{\beta_2}} \sigma(t) + \dots + b_n \frac{d^{\beta_n}}{dt^{\beta_n}} \sigma(t) = \\ a_0 \varepsilon(t) + a_1 \frac{d^{\alpha_1}}{dt^{\alpha_1}} \varepsilon(t) + a_2 \frac{d^{\alpha_2}}{dt^{\alpha_2}} \varepsilon(t) + \dots + a_m \frac{d^{\alpha_m}}{dt^{\alpha_m}} \varepsilon(t) \end{aligned} \quad (2.85)$$

onde $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m < 1$ e $0 < \beta_1 < \beta_2 < \dots < \beta_n < 1$.

A seguir são obtidos alguns modelos reológicos fracionários no tempo, para um estado unidimensional de tensão e deformação, substituindo o amortecedor viscoso de Newton nos modelos reológicos clássicos, pelo amortecedor fracionário de Scott-Blair.

FIGURA 15: REPRESENTAÇÃO DOS MODELOS MECÂNICOS FRACIONÁRIOS:
 A) AMORTECEDOR DE SCOTT-BLAIR, B) KELVIN-VOIGT FRACIONÁRIO E
 C) MAXWELL FRACIONÁRIO.



2.4.1 Modelo de Scott-Blair

Os modelos mecânicos fracionários utilizam um modelo intermediário entre molas ideais e amortecedores Newtonianos, denominado modelo de Scott-Blair (FIGURA 15.a), que é representado pela derivada de ordem fracionária. A equação constitutiva para este modelo pode ser obtida da equação (2.19) na forma

$$\sigma(t) = \eta \frac{d^{\nu} \varepsilon}{dt^{\nu}}. \quad (2.86)$$

Neste caso, os módulos de fluência e de relaxação para o modelo de Scott-Blair são dados, respectivamente, por (MAINARDI, 2010)

$$J(t) = \frac{t^{\nu}}{\eta \Gamma(1+\nu)} \quad (2.87)$$

e

$$E(t) = \eta \frac{t^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)}. \quad (2.88)$$

2.4.2 Modelo fracionário de Kelvin-Voigt

Para o modelo de Kelvin-Voigt fracionário (FIGURA 15.b), a equação constitutiva pode ser obtida a partir das equações (2.24) e (2.86) e posta como

$$\sigma(t) = R\varepsilon(t) + \eta \frac{d^{\nu} \varepsilon}{dt^{\nu}}. \quad (2.89)$$

Os módulos de fluência e de relaxação para o modelo de Kelvin-Voigt podem ser, respectivamente, na forma (MAINARDI, 2010)

$$J(t) = \frac{1}{R} \left[1 - E_\nu \left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\nu \right) \right] \quad (2.90)$$

e

$$E(t) = R + \eta \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^{-\nu}}{\Gamma(1-\nu)} \quad (2.91)$$

onde $\tau^\nu = \frac{\eta}{R}$ e $E_\nu(\cdot)$ é a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

2.4.3 Modelo fracionário de Maxwell

Da equação (2.32) pode-se obter a equação constitutiva para o modelo de Maxwell fracionário (FIGURA 15.c) posto como

$$\sigma(t) + \frac{\eta}{R} \frac{d^\nu \sigma}{dt^\nu} = \eta \frac{d^\nu \varepsilon}{dt^\nu}. \quad (2.92)$$

Com isso, o módulo de fluência $J(t)$ e o módulo de relaxação $E(t)$ desse modelo são dados, respectivamente, por (MAINARDI, 2010)

$$J(t) = R + \frac{1}{\eta} \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^\nu}{\Gamma(1+\nu)} \quad (2.93)$$

e

$$E(t) = R E_\nu \left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\nu \right) \quad (2.94)$$

onde $\tau^\nu = \frac{\eta}{R}$ e $E_\nu(\cdot)$ é a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

2.4.4 Modelo de Zener fracionário (ou modelo fracionário Sólido Linear Padrão)

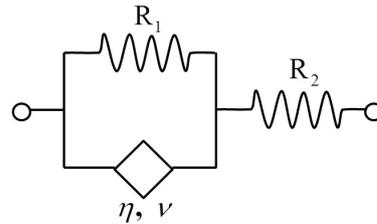
Entre os vários modelos constitutivos possíveis, o modelo de Zener fracionário (ZF) se mostra bastante eficiente para prever o comportamento material com variação da frequência (PRITZ, 2003).

Considerando um elemento de MVE baseado no modelo mecânico da FIGURA 16, a equação diferencial que relaciona a tensão normal (ou cisalhante) $\sigma(t)$ com as deformações longitudinal (ou cisalhante) $\varepsilon(t)$ para problemas unidimensionais, pode ser obtida através da equação (2.42) na forma

$$\sigma(t) + \frac{\eta}{R_1 + R_2} \frac{d^\nu \sigma(t)}{dt^\nu} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \varepsilon(t) + \frac{R_2 \eta}{R_1 + R_2} \frac{d^\nu \varepsilon(t)}{dt^\nu}, \quad (2.95)$$

sendo R_1 e R_2 os módulos de rigidez dos elementos elásticos, η o coeficiente de viscosidade e ν a ordem de diferenciação do amortecedor de Scott-Blair. Essa equação resulta na equação constitutiva do modelo de Zener (equação 2.42) se $\nu = 1$.

FIGURA 16: REPRESENTAÇÃO DO MODELO DE ZENER FRACIONÁRIO.



Outra forma de obter a equação constitutiva para o modelo mecânico da FIGURA 16 é a partir da equação (2.85) com o pressuposto de que todos os parâmetros são iguais a zero, com a exceção de a_0, a_1, b_1, α_1 e β_1 , assim

$$\sigma(t) + b_1 \frac{d^{\beta_1}}{dt^{\beta_1}} \sigma(t) = a_0 \varepsilon(t) + a_1 \frac{d^{\alpha_1}}{dt^{\alpha_1}} \varepsilon(t). \quad (2.96)$$

Considerando que todos os quatro membros da equação (2.96) são necessários para modelar o comportamento dinâmico de um material sólido, uma maneira de reduzir o número dos parâmetros é supor que: $\beta_1 = \alpha_1 = \nu$. Segundo Pritz (2003), isso ocorre para que o modelo seja consistente termodinamicamente. Desse modo, obtém-se a equação constitutiva para o modelo de Zener fracionário (equação 2.95).

Definindo os parâmetros $E_\infty = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, $r_\mu = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$ e $\tau_a^\nu = \frac{\eta}{R_1 + R_2}$, pode-se reescrever a equação (2.95) como

$$\sigma(t) + \tau_a^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \sigma(t) = E_\infty \varepsilon(t) + E_\infty r_\mu \tau_a^\nu \frac{d^\nu}{dt^\nu} \varepsilon(t). \quad (2.97)$$

Devido à complexidade algébrica do modelo de Zener fracionário gerada pelo aumento do número de parâmetros reológicos independentes envolvidos (MAINARDI; SPADA, 2011), opta-se em trabalhar no domínio de Laplace para obter a solução da equação diferencial (Eq. 2.97). Para tanto, algumas informações se fazem necessárias.

Em reologia e sismologia da terra, é comum escrever a relação de tensão-deformação unidimensional no domínio de Laplace em termos do módulo complexo de rigidez, $\hat{\mu}(s)$, como (MAINARDI; SPADA, 2011)

$$\hat{\sigma}(s) = \hat{\mu}(s)\hat{\varepsilon}(s). \quad (2.98)$$

Considerando a equação (2.98) e substituindo nas equações (2.10) e (2.11), as funções $\hat{J}(s)$ e $\hat{E}(s)$ podem ser expressas em termos do módulo complexo de rigidez $\hat{\mu}(s)$ como

$$\hat{J}(s) = \frac{1}{s\hat{\mu}(s)} \quad \text{e} \quad \hat{E}(s) = \frac{\hat{\mu}(s)}{s}. \quad (2.99)$$

Portanto, obtendo o módulo complexo de rigidez, $\hat{\mu}(s)$, para o modelo de ZF, facilmente obtém-se o módulo de fluência, $J(t)$, e o módulo de relaxação, $E(t)$.

Com essa finalidade, define-se $\hat{\mu}_{ZF}(s)$ como módulo complexo de rigidez do modelo de ZF e $\hat{\mu}_{KV}(s)$, $\hat{\mu}_H(s)$ como os módulos complexos de rigidez dos modelos de Kelvin-Voigt e de Hooke, respectivamente. Como $\hat{\mu}_{ZF}(s)$ é dado pela combinação em série de $\hat{\mu}_{KV}(s)$ e $\hat{\mu}_H(s)$, esse pode ser escrito como

$$\frac{1}{\hat{\mu}_{ZF}(s)} = \frac{1}{\hat{\mu}_H(s)} + \frac{1}{\hat{\mu}_{KV}(s)}. \quad (2.100)$$

Considerando o modelo posto na FIGURA 16, os parâmetros definidos na equação (2.97) e a equação (2.98), o módulo complexo de rigidez do modelo Hooke pode ser posto como

$$\hat{\mu}_H(s) = E_{\infty}. \quad (2.101)$$

A equação constitutiva para o modelo de Kelvin-Voigt, posto pela equação (2.97) é da forma

$$\sigma(t) = E_{\infty}\varepsilon(t) + E_{\infty}\Gamma_{\mu}\tau_a^{\nu}\frac{d^{\nu}}{dt^{\nu}}\varepsilon(t). \quad (2.102)$$

Assim, o módulo complexo de rigidez do modelo de Kelvin-Voigt é obtido igualando a equação (2.102), no domínio de Laplace, com a equação (2.98), resultando em

$$\hat{\mu}_{KV}(s) = E_{\infty}(1 + (s\tau_1)^{\nu}) \quad (2.103)$$

sendo $\tau_1^{\nu} = r_{\mu}\tau_a^{\nu}$ o tempo de relaxação.

Portanto, substituindo as equações (2.101) e (2.103) em (2.100), tem-se como módulo complexo de rigidez do modelo de ZF

$$\frac{1}{\hat{\mu}_{ZF}(s)} = \frac{1}{E_{\infty}} + \frac{1}{E_{\infty}(1+(s\tau_1)^{\nu})}. \quad (2.104)$$

Substituindo a equação (2.104) na equação (2.99), e reorganizando os termos, obtém-se o módulo de fluência no domínio de Laplace,

$$\hat{J}(s) = \frac{1}{s} \frac{1}{E_{\infty}} \left[1 - \frac{(s\tau_1)^{\nu}}{(1+(s\tau_1)^{\nu})} \right]. \quad (2.105)$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace na equação (2.105) obtém-se o módulo de fluência para o modelo de Zener fracionário

$$J(t) = \frac{1}{E_{\infty}} \left[1 - E_{\nu} \left(- \left(\frac{t}{\tau_1} \right)^{\nu} \right) \right], \quad t \geq 0, \quad (2.106)$$

sendo $E_{\nu}(\cdot)$ a função de Mittag-Leffler de um parâmetro.

De maneira análoga, obtém-se o módulo de relaxação no domínio do tempo do modelo de Zener fracionário, que pode ser posto como (MAINARDI; SPADA, 2011)

$$E(t) = E_{\infty} \left[1 + r_{\mu} E_{\nu} \left(- \left(\frac{t}{\tau_a} \right)^{\nu} \right) \right]. \quad (2.107)$$

Utilizando a expansão assintótica apresentada na equação (2.80), destacam-se dois importantes parâmetros materiais da equação (2.107). São eles, o módulo de relaxação instantâneo, E_0 , dado por

$$E_0 = \lim_{t \rightarrow 0^+} E(t) = E_{\infty}(1 + r_{\mu}) \quad (2.108)$$

e o módulo de relaxação de equilíbrio, E_{∞} , dado por

$$E_{\infty} = \lim_{t \rightarrow +\infty} E(t). \quad (2.109)$$

2.5 MODELO DE ZENER FRACIONÁRIO: ANÁLISE DOS PARÂMETROS DA FUNÇÃO MÓDULO DE RELAXAÇÃO

Como visto, a função módulo de relaxação associada ao modelo de Zener fracionário é dada pela equação (2.107) como

$$E(t) = E_{\infty} \left[1 + r_{\mu} E_{\nu} \left(-\left(t/\tau_a \right)^{\nu} \right) \right] \quad (2.110)$$

e tem como parâmetros ν , E_{∞} , r_{μ} e τ_a . Vale ressaltar que essa equação possui mais um importante parâmetro intrínseco: o módulo de relaxação instantâneo - E_0 (Eq. 2.108).

O objetivo desta seção é analisar graficamente como cada parâmetro material influencia a função módulo de relaxação. Para tanto, são arbitrados valores para cada parâmetro conforme a TABELA 1. Assim, as representações gráficas dos módulos de relaxação são obtidas fazendo a variação de um parâmetro enquanto os demais permanecem constantes. De posse desses gráficos, é possível compará-los a fim de verificar a influência de cada parâmetro na representação da função módulo de relaxação.

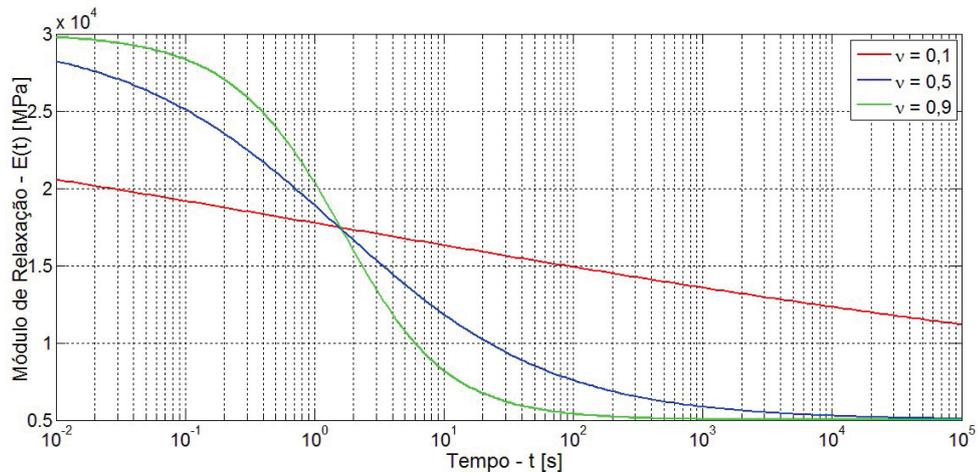
TABELA 1: VALORES DOS PARÂMETROS DO MÓDULO DE RELAXAÇÃO DO MODELO DE ZF.

ν	E_{∞} (MPa)	r_{μ}	τ_a (s)
0,1	100	1,1	0,1
0,5	5000	5	1
0,9	10000	10	1000

2.5.1 Parâmetro material ν

Para analisar a influência do parâmetro material ν , fixam-se os demais parâmetros nos valores de $E_{\infty} = 5000$ MPa, $r_{\mu} = 5$ e $\tau_a = 1$ s e faz-se a variação de ν em 0,1, 0,5 e 0,9.

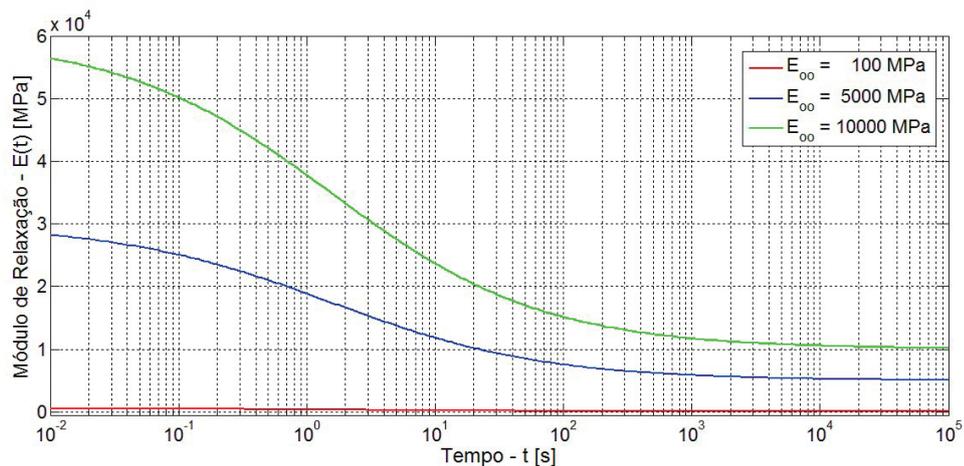
Na FIGURA 17, observa-se que a variação de ν está relacionada diretamente com a curvatura da função módulo de relaxação. Quando ν tende a 1, a curvatura da função módulo de relaxação passa a ser mais acentuada, ao contrário do que ocorre quando ν tende a 0.

FIGURA 17: MÓDULO DE RELAXAÇÃO VIA MODELO DE ZF – VARIÇÃO DO PARÂMETRO ν .

2.5.2 Parâmetro material E_{∞}

Para a análise do parâmetro material E_{∞} , fixam-se os demais parâmetros em $\nu = 0,5$, $r_{\mu} = 5$ e $\tau_a = 1$ s e faz-se a variação de E_{∞} em 100, 5000 e 10000 MPa.

Observa-se na FIGURA 18 que o parâmetro E_{∞} corresponde ao valor assintótico da curva quando o tempo tende a infinito, isto é, o módulo de relaxação de equilíbrio, conforme visto na equação (2.109).

FIGURA 18: MÓDULO DE RELAXAÇÃO VIA MODELO DE ZF – VARIÇÃO DO PARÂMETRO E_{∞} .

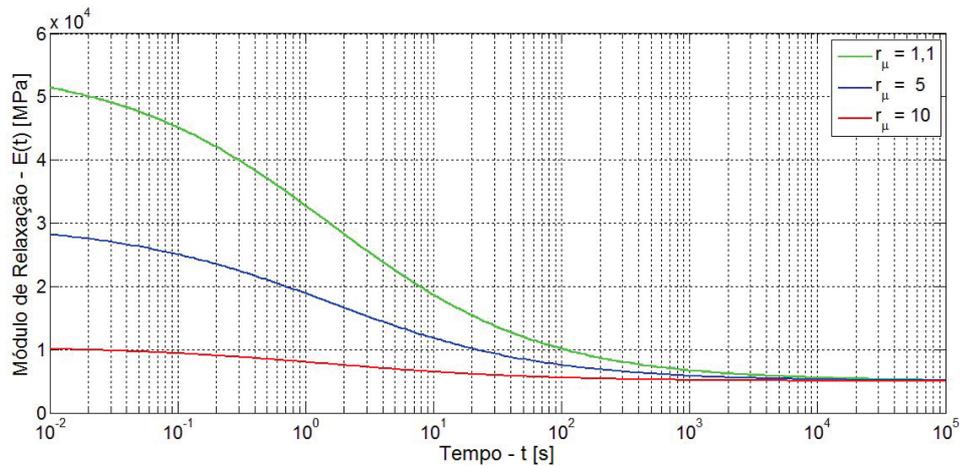
2.5.3 Parâmetro material r_{μ}

A variação do parâmetro material r_{μ} ocorre para os valores de 1, 5 e 10 e, os demais parâmetros são fixados em $\nu = 0,5$, $E_{\infty} = 5000$ MPa e $\tau_a = 1$ s. Através

da FIGURA 19, observa-se que o parâmetro r_μ está relacionado com o módulo instantâneo (E_0). Assim, da equação (2.133):

- * para $r_\mu = 1,1$ e $E_\infty = 5000$ MPa, tem-se $E_0 = 10500$ MPa,
- * para $r_\mu = 5$ e $E_\infty = 5000$ MPa, tem-se $E_0 = 30000$ MPa,
- * para $r_\mu = 10$ e $E_\infty = 5000$ MPa, tem-se $E_0 = 55000$ MPa.

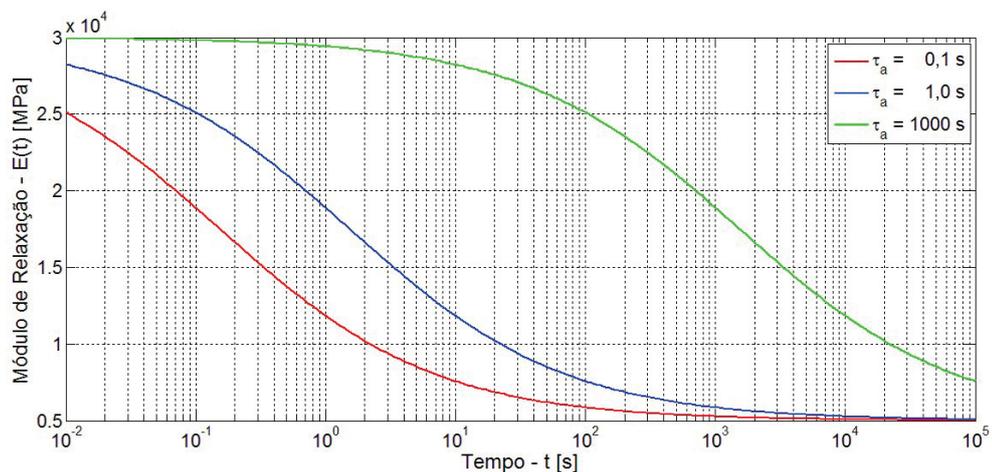
FIGURA 19: MÓDULO DE RELAXAÇÃO VIA MODELO DE ZF – VARIAÇÃO DO PARÂMETRO r_μ .



2.5.4 Parâmetro material τ_a

Para analisar a influência do parâmetro material τ_a , fixam-se os demais parâmetros em $\nu = 0,5$, $E_\infty = 5000$ MPa e $r_\mu = 5$ e faz-se a variação de τ_a em 0,1, 1 e 1000 s. Observa-se, na FIGURA 20, que o parâmetro τ_a está relacionado com a posição do ponto de inflexão da curva da função módulo de relaxação.

FIGURA 20: MÓDULO DE RELAXAÇÃO VIA MODELO DE ZF – VARIAÇÃO DO PARÂMETRO τ_a .



2.6 INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA NO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE MVES

Uma das funções mais importantes da concepção de engenharia é ser capaz de prever o desempenho de uma estrutura durante sua vida útil. Necessariamente o comportamento mecânico dos materiais utilizados na estrutura deve ser também conhecido sobre o tempo de vida útil da estrutura (BRINSON; BRINSON, 2008).

Durante o processo de caracterização dos MVEs, fica evidente a influência da temperatura no comportamento destes materiais. Nesse caso, um material pode ser definido como termorreologicamente simples quando todos os seus tempos de relaxação são afetados igualmente pela temperatura, permitindo assim a aplicação do Princípio da Superposição Tempo Temperatura (PSTT). Este princípio pode ser utilizado para extrapolar as propriedades mecânicas do material na escala temporal, e é posto como (LAKES, 2008 e CHAE et al., 2010)

$$E(t, T) = E(t_R, T_0), \quad t_R = \frac{t}{\alpha_T(T, T_0)}, \quad (2.111)$$

em que T é uma dada temperatura do ensaio, t é o tempo real de medição, T_0 é uma temperatura de referência arbitrária, t_R é chamado o tempo reduzido, e o fator de escala $\alpha_T(T, T_0)$ é denominado de fator de translação tempo-temperatura. Esse fator de translação tempo-temperatura pode ser determinado tomando a relação entre tempo de relaxação numa temperatura T , $\tau(T)$, e o tempo de relaxação numa outra temperatura T_0 , $\tau(T_0)$, na forma

$$\alpha_T(T, T_0) = \frac{\tau(T)}{\tau(T_0)}. \quad (2.112)$$

De acordo com o PSTT, o comportamento viscoelástico, a uma dada temperatura, pode ser relacionado com o comportamento em uma outra temperatura através de um simples deslocamento na escala tempo. Esse deslocamento permite a previsão das propriedades do material por um período de tempo longo, partindo de dados de testes realizados em períodos de tempo relativamente curtos. Ou vice-versa.

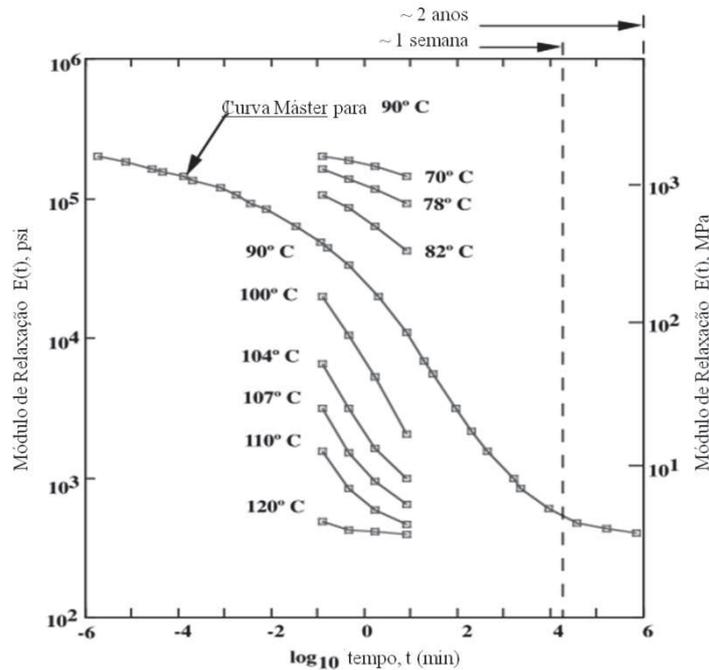
Uma forma de determinar se um material é classificado como termorreologicamente simples é realizando testes experimentais de relaxação ou fluência a diferentes temperaturas, constantes em cada experimento, e construir um gráfico mostrando a função em relação ao logaritmo do tempo. Após isso, deve-se transladar as curvas obtidas a diferentes temperaturas, ao longo do eixo logaritmo do tempo, para verificar se as mesmas coincidem para valores definidos da função medida. Caso as curvas coincidam satisfatoriamente, o material pode ser classificado como termorreologicamente simples (SCHWARZL; STAVERMAN, 1952).

O PSTT pode falhar se o material passar por uma fase de transformação no intervalo de temperatura de interesse, ou se é um compósito com dois ou mais processos de relaxação (que dá origem à viscoelasticidade) que dependem de temperaturas diferentes. Quando isso ocorre o material é denominado de termorreologicamente complexo (LAKES, 2008).

Com base no pressuposto de que o material é termorreologicamente simples, uma curva máster pode ser construída a uma temperatura de referência arbitrária, deslocando o módulo de relaxação em todas as outras temperaturas para o temperatura de referência. Em um gráfico log – log, o módulo de relaxação em função do tempo equivale a uma translação horizontal das curvas por uma distância $\log \alpha_T(T)$. É por isso que $\alpha_T(T)$ é normalmente chamado de fator de translação tempo-temperatura.

Um exemplo de aplicação do PSTT, conforme Brinson e Brinson (2008), pode ser visto na FIGURA 21 para um adesivo de epóxi modificado. Durante o ensaio de relaxação, um curto intervalo de tempo (em torno de 10 minutos de duração) é usado em temperaturas que variam de 70°C a 120°C para produzir uma curva máster do módulo de relaxação, definida na temperatura de referência de 90°C e abrangendo 12 décadas de tempo (de 10^{-6} min. a dois anos) em escala logarítmica.

FIGURA 21: CURVA MÁSTER DE UM MATERIAL EPÓXI MODIFICADO.
 FONTE: ADAPTADO DE BRINSON E BRINSON (2008).



A correspondência entre tempo e temperatura e seus efeitos nos processos de relaxação podem ser representados matematicamente por alguns modelos. Segundo Tschoegl et al. (2002) destacam-se: o modelo Williams-Landel-Ferry (WLF) (WILLIAMS et al., 1955), o modelo de Bueche, o modelo Bestul-Chang, o modelo Goldstein e o modelo Adam-Gibbs. Com exceção do modelo de Bueche, todos os outros modelos de superposição tempo-temperatura têm a forma da equação similar àquela do modelo WLF ou pode ser reduzida a ela, diferenciando apenas na interpretação dos parâmetros da equação (TSCHOEGL et al., 2002).

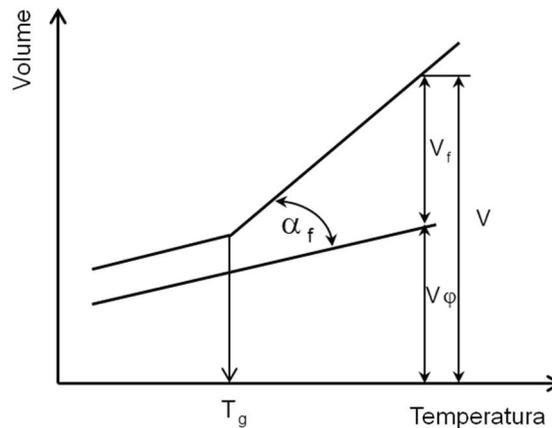
Em alguns modelos teóricos, o efeito de parâmetros termodinâmicos, no comportamento de polímeros no domínio do tempo, tal como temperatura, são baseados no conceito de volume livre, o qual é definido como aquele volume constituído pelos espaços vazios não preenchidos pelas moléculas do fluido. Segundo Doolittle e Dolittle (1957), a viscosidade η depende da distribuição dos espaços vazios no fluido e a mesma pode ser dada por

$$\eta = Ae^{B\left(\frac{V_\varphi}{V_f}\right)} = Ae^{B\left(\frac{V-V_f}{V_f}\right)} = Ae^{B\left(\frac{1}{f}-1\right)}, \quad (2.113)$$

onde A e B são constantes empíricas características do material, V_φ é o volume ocupado pelas moléculas do líquido e V_f é o volume livre. Dessa forma, o volume

total do material é $V = V_f + V_\phi$ e a fração de volume livre pode ser definida como $f = V_f/V$. Tem-se, portanto, que f depende tanto da temperatura (T) quanto da pressão (P). Uma ilustração desses conceitos pode ser visualizada na FIGURA 22.

FIGURA 22: DIAGRAMA VOLUME-TEMPERATURA.
FONTE: ADAPTADO DE TSCHOEGL et al. (2002).



Segundo Williams et al. (1955), a viscosidade η e o tempo de relaxação dependem da temperatura. Dessa forma, adaptaram a equação (2.113) para polímeros e, considerando apenas a influência da temperatura, relacionaram as viscosidades com os tempos de relaxação, na forma

$$\frac{\eta(T)}{\eta(T_0)} = \frac{\tau(T)}{\tau(T_0)} = e^{B\left(\frac{1}{f(T)} - \frac{1}{f(T_0)}\right)}, \quad (2.114)$$

onde η é a viscosidade e τ é o tempo de relaxação nas mesmas temperaturas, T ou T_0 .

Recorrendo a essa proporcionalidade, o fator de translação tempo-temperatura, $\alpha_T(T, T_0)$, (equação 2.112) pode ser reescrito como

$$\alpha_T(T, T_0) = \frac{\tau(T)}{\tau(T_0)} = e^{B\left(\frac{1}{f(T)} - \frac{1}{f(T_0)}\right)} \quad (2.115)$$

onde $f(T_0)$ é a fração de volume livre na temperatura T_0 . Tomando o logaritmo desta equação, tem-se

$$\log \alpha_T = (\log e)B \left(\frac{1}{f(T)} - \frac{1}{f(T_0)} \right) \quad (2.116)$$

ou ainda,

$$\log \alpha_T = \frac{B}{2,303} \left(\frac{1}{f(T)} - \frac{1}{f(T_0)} \right). \quad (2.117)$$

A equação (2.117) serve de base para o desenvolvimento das funções deslocamento de temperatura baseadas no conceito de volume livre.

2.6.1 Modelo de Williams, Landel e Ferry

A função WLF, assim denominada por ter sido desenvolvida pelos pesquisadores Williams, Landel e Ferry (1955), modela o deslocamento tempo-temperatura para muitos polímeros amorfos. Williams et al. (1955), consideraram que a fração de volume livre (f) varia linearmente com a temperatura, ou seja

$$f(T) = f(T_0) + \alpha_f(T - T_0), \quad (2.118)$$

onde α_f é um coeficiente de expansividade da fração de volume. Com base nas equações (2.117) e (2.118), tem-se

$$\log \alpha_T = - \frac{\left(\frac{B}{2,303 \cdot f(T_0)} \right) (T - T_0)}{\frac{f(T_0)}{\alpha_f} + T - T_0}. \quad (2.119)$$

Escrevendo-a em forma mais compacta, tem-se

$$\log \alpha_T = - \frac{C_1^T (T - T_0)}{C_2^T + (T - T_0)}, \quad (2.120)$$

onde

$$C_1^T = \frac{B}{2,303 \cdot f(T_0)}, \quad (2.121)$$

e

$$C_2^T = \frac{f(T_0)}{\alpha_f}. \quad (2.122)$$

A equação (2.120) proposta originalmente tem validade para materiais operando acima da região de transição vítrea (TSCHOEGL et al., 2002). Entretanto, neste trabalho, esta é utilizada indiscriminadamente em todas as regiões.

2.6.2 Modelo de Arrhenius

Segundo Rudin (1982) e Chanda e Roy (2006), a viscosidade em polímeros dependente da temperatura pode ser expressa pelo modelo de Arrhenius conforme

$$\eta = K e^{\frac{\Delta g_a}{RT}} \quad (2.123)$$

onde Δg_a é a energia de ativação envolvida no processo de relaxação, R é a constante universal dos gases e K é uma constante empírica.

Assim, definindo $\eta(T)$ como a viscosidade do polímero em uma temperatura T qualquer e $\eta(T_0)$ como a viscosidade na temperatura de referência T_0 , tem-se

$$\frac{\eta(T)}{\eta(T_0)} = e^{\frac{\Delta g_a}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)} = \alpha_T. \quad (2.124)$$

Tomando o logaritmo dessa equação, tem-se

$$\log \alpha_T = \log e \cdot \frac{\Delta g_a}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right). \quad (2.125)$$

Segundo Kaliappan (2006), a equação (2.125) pode prever com sucesso o comportamento de polímeros abaixo da temperatura de transição vítrea. Colocando-a em forma mais compacta tem-se

$$\log \alpha_T = C_A^T \left(\frac{T_0 - T}{T \cdot T_0} \right), \quad (2.126)$$

onde

$$C_A^T = \frac{1}{2,303} \frac{\Delta g_a}{R}. \quad (2.127)$$

A expressão anterior é denominada equação de Arrhenius, pois foi desenvolvida pelo pesquisador sueco Svante Arrhenius (1859–1927). Ela é geralmente utilizada para temperaturas abaixo da região de transição vítrea.

2.7 INFLUÊNCIA DA PRESSÃO NO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE MVES

O efeito da pressão sobre o comportamento de relaxação nos polímeros piezorreologicamente simples é análogo ao efeito da temperatura sobre os

polímeros termorreologicamente simples, tendo em vista que a alta temperatura corresponde a uma baixa pressão e vice-versa. Em contraste com o efeito da temperatura, os dados sobre o efeito da pressão sobre as propriedades dependentes do tempo de materiais poliméricos são relativamente escassos porque eles são difíceis de determinar experimentalmente (TSCHOEGL et al., 2002).

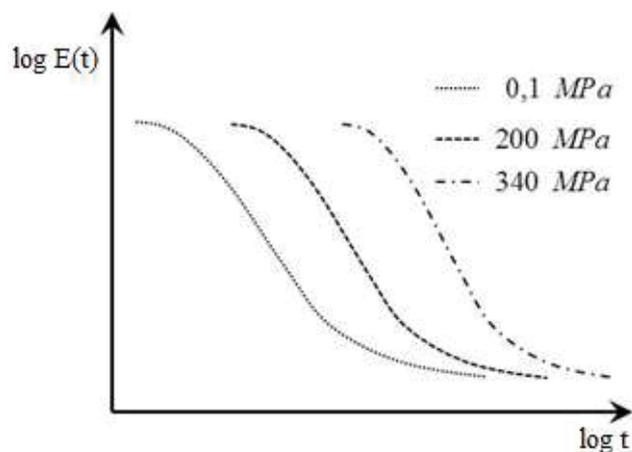
O material é definido como piezorreologicamente simples, quando todos os seus tempos de relaxação são afetados igualmente pela pressão, permitindo assim a aplicação do Princípio da Superposição Tempo-Pressão (PSTP).

Quando há aumento ou diminuição de pressão no MVE esse pode ficar mais rígido ou maleável. Matematicamente, isso é traduzido pela alteração do módulo de relaxação do polímero. Uma relação entre o módulo de relaxação $E(P, t)$, obtido em uma pressão P qualquer aplicada ao material, e o módulo de relaxação $E(P_0, t/\alpha_P(P, P_0))$, definido em uma pressão de referência P_0 , pode ser posto tal que

$$E(P, t) = E\left(P_0, t/\alpha_P(P, P_0)\right), \quad (2.128)$$

onde $\alpha_P(P, P_0)$ é denominado fator de deslocamento tempo-pressão e corresponde ao quanto a curva $E(P, t)$ se desloca a partir da pressão de referência (FILLERS; TSCHOEGL, 1977). Por exemplo, tomando como referência o material representado pela FIGURA 23 e conhecendo apenas uma curva, esta relacionada à pressão de referência $P_0 = 0,1 \text{ MPa}$, as outras duas curvas podem ser previstas por uma adequada translação da primeira.

FIGURA 23: EFEITO DA PRESSÃO NO MÓDULO DE CISALHAMENTO.
FONTE: ADAPTADO DE TSCHOEGL et al. (2002).



Moonan e Tshoegl (1983) demonstraram experimentalmente a viabilidade do PSTP. Segundo os autores, para um material piezologicamente simples a equação a seguir é válida para todos os tempos de relaxação:

$$\frac{\tau_i(P)}{\tau_i(P_0)} = \alpha_p. \quad (2.129)$$

Nesse caso, $\tau_i(P)$ é o i -ésimo tempo de relaxação obtido para uma pressão média P e $\tau_i(P_0)$ é o mesmo tempo de relaxação, porém, obtido em uma pressão de referência P_0 .

Conforme Ferry (1980), à medida que se aumenta a pressão num líquido comum tem-se também um aumento na viscosidade. Esse comportamento pode ser entendido em termos da mobilidade molecular e da fração de volume livre que, por sua vez, decrescem linearmente com a pressão. Nessas condições,

$$f(P) = f(P_0) - k_f(P - P_0), \quad (2.130)$$

onde k_f é um coeficiente de compressibilidade, P é a pressão de teste e P_0 é a pressão de referência.

Tendo como base as equações (2.117) e (2.130), reescreve-se o fator de deslocamento baseado na fração de volume, como função da pressão, de acordo com a expressão

$$\log \alpha_p = \frac{B}{2,303} \left(\frac{1}{f(P)} - \frac{1}{f(P_0)} \right). \quad (2.131)$$

Segundo Tschoegl et al. (2002), alguns modelos matemáticos que representam a correspondência entre tempo e pressão, são: o modelo de Ferry-Stratton, o modelo de Bueche's, o modelo O'Reilly e o modelo de Kovacs-Tait. Neste trabalho o modelo escolhido é o O'Reilly.

2.7.1 Modelo O'Reilly

O'Reilly (1962) estudou o efeito da pressão no comportamento do polivinil acetato na região próxima à temperatura de transição vítrea, T_g , através de técnicas de medição dielétricas e volumétricas. Com isso, desenvolveu um fator de deslocamento considerando o efeito da pressão, α_p , que considera uma relação entre uma constante característica do material e a pressão aplicada ao mesmo. O

modelo OR, desenvolvido por O'Reilly (1962), propõe um fator de deslocamento para a pressão na forma

$$\log \alpha_p = C_1^P (P - P_0), \quad (2.132)$$

onde α_p denota a relação entre os tempos de relaxação submetidos a pressões P e P_0 , sendo esta última um valor de pressão de referência e C_1^P é uma constante característica do material.

2.8 INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO NO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE MVES

As seções anteriores apresentam modelos para superposição tempo-pressão ou tempo-temperatura. Aqui, volta-se a atenção para modelos de superposição tempo-temperatura-pressão. Nesse caso, o interesse é estudar fatores de deslocamento que acomodem simultaneamente ambas as mudanças de temperatura e pressão.

O Princípio da Superposição Tempo-Temperatura-Pressão (PSTTP) é aplicado em materiais que apresentam ambos os comportamentos: termorreologicamente e piezorreologicamente simples. Tschoegl et al. (2002) apresentam os seguintes modelos de correspondência Tempo-Temperatura-Pressão: modelo de Simha-Somcynsky, o modelo Havlíček-Ilavský-Hrouz e o modelo Fillers-Moonan-Tschoegl (FMT). Destaca-se, neste trabalho, o modelo conhecido como FMT, e o modelo aqui apresentado e denominado UFPR.

2.8.1 Modelo Fillers-Moonan-Tschoegl

Nessa linha de pesquisa, Moonan e Tschoegl (1983) desenvolveram um aparelho para investigar a influência da temperatura e da pressão nas propriedades mecânicas dos materiais poliméricos dependentes do tempo. Os autores propuseram uma equação para o fator de deslocamento, α_{TP} , que descreve a dependência da pressão e da temperatura semelhantemente ao PSTT. Assim como nos casos anteriores, este fator provoca um deslocamento horizontal na curva módulo de relaxação versus tempo, e é posto como

$$\log \alpha_{TP} = -\frac{C_1^{TP}(T-T_0-\theta(P))}{C_2^{TP}+T-T_0-\theta(P)}, \quad (2.133)$$

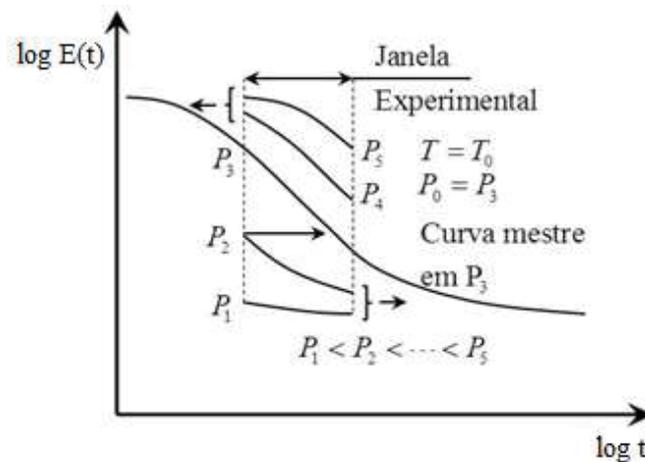
onde

$$\theta(P) = C_3^{TP} \ln \left[\frac{1+C_4^{TP}P}{1+C_4^{TP}P_0} \right] - C_5^{TP} \ln \left[\frac{1+C_6^{TP}P}{1+C_6^{TP}P_0} \right] \quad (2.134)$$

e C_1^{TP} , C_2^{TP} , C_3^{TP} , C_4^{TP} , C_5^{TP} e C_6^{TP} são constantes empíricas. Esse modelo é denominado modelo FMT, em virtude de ter sido desenvolvido pelos pesquisadores R. W. Fillers, W. K. Moonam e N. W. Tschoegl.

Segundo Sharpe (2008), esse fenômeno possibilita estabelecer o Princípio da Superposição Tempo-Temperatura-Pressão (PSTTP), aplicável a materiais termo-piezoreologicamente simples. Para ilustrá-lo, representam-se graficamente, na FIGURA 24, os módulos de relaxação isotérmico-isobárico como função do tempo em escala logarítmica. As curvas ilustradas podem ser deslocadas isotérmica e isobaricamente.

FIGURA 24: EFEITO DA PRESSÃO NA RESPOSTA VISCOELÁSTICA DE UM POLÍMERO.
FONTE: ADAPTADO DE SHARPE (2008).



2.8.2 Modelo UFPR

Esta seção apresenta uma nova abordagem no desenvolvimento de um modelo matemático, que computa simultaneamente as influências da temperatura e pressão sobre o módulo de relaxação de um MVE. Este é aqui denominado modelo UFPR. Wenbo et al (2001) apresentam uma abordagem diferente para o desenvolvimento de um modelo similar ao apresentado aqui.

Para tal, define-se a função $f(T, P)$ que representa a fração de volume livre dependendo da temperatura e da pressão. Considerando T_0 e P_0 , respectivamente, como a temperatura e pressão de referências e que essa função é diferenciável, obtém-se por uma expansão em série de Taylor de 1ª ordem como

$$f(T, P) \cong f(T_0, P_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial T} \right|_{T_0, P_0} \cdot (T - T_0) + \left. \frac{\partial f}{\partial P} \right|_{T_0, P_0} \cdot (P - P_0). \quad (2.135)$$

Esta expressão pode ser reescrita na forma

$$f(T, P) = f(T_0, P_0) + g_T(T - T_0) - g_P(P - P_0) \quad (2.136)$$

onde

$$g_T = \left. \frac{\partial f}{\partial T} \right|_{T_0, P_0} \quad (2.137)$$

e

$$g_P = - \left. \frac{\partial f}{\partial P} \right|_{T_0, P_0}. \quad (2.138)$$

Tendo em vista que o fator de deslocamento tempo-temperatura, apresentado na (2.117), e o fator de deslocamento tempo-pressão, apresentado na equação (2.131), possuem a mesma relação, o fator de deslocamento tempo-temperatura-pressão, pode ser posto como

$$\log \alpha_{TP} = \frac{B}{2,303} \left(\frac{1}{f(T, P)} - \frac{1}{f(T_0, P_0)} \right). \quad (2.139)$$

Rearranjando os termos da equação (2.139), tem-se

$$\log \alpha_{TP} = \beta \frac{f(T, P) - f(T_0, P_0)}{f(T, P)} \quad (2.140)$$

onde

$$\beta = - \frac{B}{2,303 \cdot f(T_0, P_0)}. \quad (2.141)$$

Substituindo a equação (2.136) em (2.140), e reorganizando os termos, obtém-se o, aqui denominado, modelo UFPR, cujo fator de deslocamento α_{TP} depende da pressão (P) e temperatura (T) simultaneamente. Esse pode ser escrito como

$$\log \alpha_{TP} = \frac{-C_1^{TP}(T-T_0) + C_2^{TP}(P-P_0)}{1 + C_3^{TP}(T-T_0) - C_4^{TP}(P-P_0)} \quad (2.142)$$

onde

$$C_1^{TP} = \frac{g_T \beta}{f(T_0, P_0)}, \quad (2.143)$$

$$C_2^{TP} = \frac{g_P \beta}{f(T_0, P_0)}, \quad (2.144)$$

$$C_3^{TP} = \frac{g_T}{f(T_0, P_0)}, \quad (2.145)$$

$$C_4^{TP} = \frac{g_P}{f(T_0, P_0)}. \quad (2.146)$$

3 MATERIAIS E MÉTODOS

Neste capítulo são apresentados os materiais cujos resultados foram disponibilizados para os ensaios de identificação. São eles: CYCOLAC BDT5510 e STAMAX 40YM240. Posteriormente, é apresentada a metodologia desenvolvida para o processo de identificação de MVEs seguida da estrutura computacional do algoritmo utilizado. O capítulo é finalizando com a validação do modelo proposto utilizando um material real denominado C-2003.

3.1 MATERIAIS

O material CYCOLAC BDT5510 é um polímero do tipo acrilonitrila butadieno estireno (ABS). Sua temperatura de fusão (T_m) é aproximadamente 260°C, como pode ser observado no Anexo 1. Os experimentos foram realizados pela empresa SABIC®, conforme a norma ASTM D638, em quatro temperaturas distintas (-40°C, 23°C, 43°C e 66°C), sendo que, em cada temperatura, o material foi submetido a ensaios de tração com taxa fixa de deformação de 0,0833(mm/mm)/s. Essas informações são postas no Apêndice 1.

O material STAMAX 40YM240 é um polipropileno preenchido com 40% de fibra de vidro, possuindo temperatura de fusão (T_m) na faixa de 220°C a 280°C, conforme as informações apresentadas no Anexo 2. Os resultados experimentais foram disponibilizados pela empresa SABIC®, sendo que os experimentos com este polímero foram realizados de acordo com a norma ISO 527/1B, em três temperaturas distintas (-35°C, 23°C e 80°C). Em cada uma destas temperaturas, o material foi submetido a ensaios de tração com diferentes taxas de deformação (0,0001, 0,001, 0,10 e 1,00 mm/mm/s). Os dados dos testes experimentais do material STAMAX 40YM240, podem ser vistos no Apêndice 2.

3.2 FORMULAÇÃO DA CORRENTE ABORDAGEM DE IDENTIFICAÇÃO

O objetivo central do corrente trabalho é formular e implementar computacionalmente a identificação do módulo de relaxação de um MVE no domínio do tempo considerando o modelo constitutivo de Zener fracionário e as influências

da temperatura e/ou pressão. Para tanto, é analisada uma família de pontos obtidos experimentalmente através de um conjunto de ensaios uniaxiais de tração em diferentes temperaturas com diferentes taxas de deformação constantes e deformação inicial nula. Ou seja,

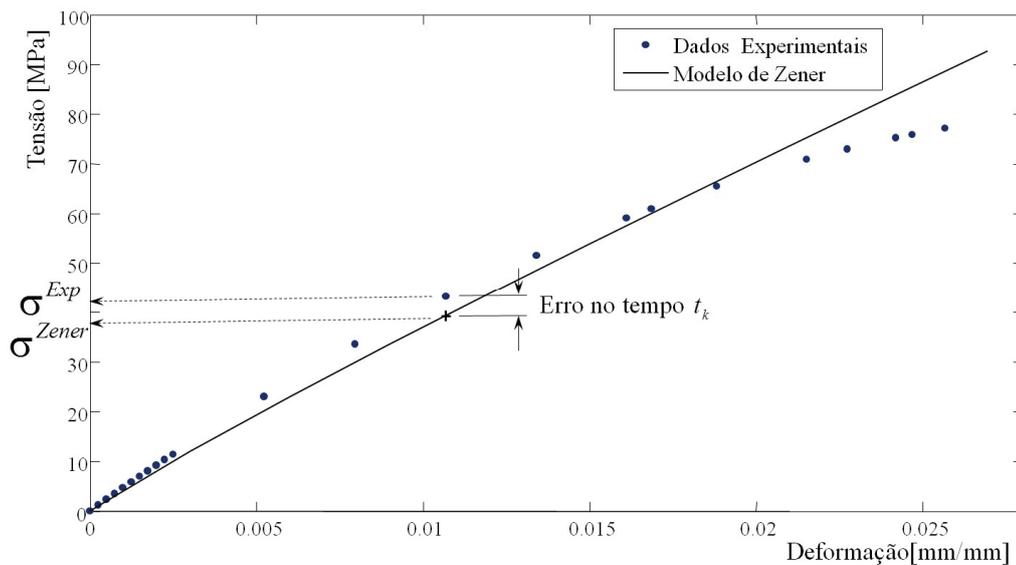
$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \dot{\varepsilon} = \text{constante para qualquer tempo } t. \quad (3.1)$$

Logo, a partir da equação (2.9) tem-se a seguinte expressão reduzida relacionando os históricos de tensão e deformação:

$$\sigma(t) = \dot{\varepsilon} \int_0^t E(t - \xi) d\xi. \quad (3.2)$$

Na FIGURA 25 é apresentado um exemplo gráfico dos valores experimentais de tensão e seu correspondente obtido numericamente segundo o modelo constitutivo de Zener fracionário, considerando uma taxa de deformação fixa e uma temperatura qualquer e constante. Essa abordagem é similar àquela apresentada por Pacheco (2013) que, para o devido fim, utilizou o modelo constitutivo de Wiechert.

FIGURA 25: TENSÕES EXPERIMENTAIS E DO MODELO DE ZENER FRACIONÁRIO VERSUS DEFORMAÇÃO PARA UMA DETERMINADA TAXA DE DEFORMAÇÃO.



Para tanto, definem-se o número total de temperaturas como $NTemp$, o número total de taxas de deformação como $NTax$ e o número total de pontos

amostrados em cada curva como $NPtos$. Tem-se, dessa forma, σ_{kij}^{exp} como sendo o valor da tensão experimental no k -ésimo ponto ($1 \leq k \leq NPtos$) amostrado, para a j -ésima temperatura ($1 \leq j \leq NTemp$) e a i -ésima taxa de deformação ($1 \leq i \leq NTax$).

Neste ponto, é definida, de forma geral, a influência da temperatura e/ou pressão, através do parâmetro α , ou seja, $\alpha = \alpha_T(T)$, $\alpha = \alpha_P(P)$ ou $\alpha = \alpha_{TP}(T,P)$. Assim, a tensão obtida através do modelo de Zener fracionário pode ser explicitada, substituindo a equação (2.107) na equação (3.2), como

$$\sigma_{kij}^Z = \sigma^Z(t_k, \dot{\epsilon}_i, T_j) = E_\infty \dot{\epsilon}_i t_k + E_\infty r_\mu \dot{\epsilon}_i \int_0^{t_k} E_\nu \left(- \left(\frac{t-\xi}{\alpha \tau_a} \right)^\nu \right) d\xi. \quad (3.3)$$

Nesta equação, a grande dificuldade está na realização do termo integral. Isso, pois, a mesma é dependente do fator de deslocamento, α , e este pode ser dependente da pressão. Caso o fator α seja independente da pressão (ou seja, $\alpha = 1$ ou $\alpha = \alpha_T(T)$) a integral pode ser realizada analiticamente. Caso contrário, $\alpha = \alpha_P(P)$ ou $\alpha = \alpha_{TP}(T,P)$, é adotada uma metodologia baseada na discretização do intervalo de integração. Essas duas situações são apresentadas a seguir.

3.2.1 Cálculo da tensão segundo o modelo de ZF e considerando a influência da temperatura

Durante o processo de caracterização dos MVEs a temperatura é um dos fatores que influencia o comportamento destes materiais. Para analisar a influência dessa variável no modelo proposto, tem-se que $\alpha = \alpha_T(T_j)$ que corresponde ao modelo WLF. Como a temperatura do ensaio é constante em todos os pontos amostrados, a integral da função ML da equação (3.3) pode ser obtida diretamente da equação (2.84). Portanto, a tensão segundo o modelo de Zener fracionário considerando a influência da temperatura, pode ser posta como

$$\sigma_{kij}^Z = \sigma^Z(t_k, \dot{\epsilon}_i, T_j) = E_\infty \dot{\epsilon}_i t_k \left[1 + r_\mu E_{\nu,2} \left(- \left(\frac{t_k}{\alpha_T(T_j) \tau_a} \right)^\nu \right) \right]. \quad (3.4)$$

3.2.2 Cálculo da tensão segundo o modelo de ZF e considerando a influência da pressão ou temperatura e pressão simultâneas

Do conjunto de dados experimentais obtidos dos ensaios uniaxiais de tração de um MVE, a temperatura dos ensaios permanece constante, porém a pressão varia continuamente ao longo da curva, visto que a mesma depende da tensão aplicada. Assim, pode-se definir a pressão P_k em cada ponto amostrado da curva como

$$P_k = -\frac{\sigma_k^{\text{exp}}}{3} \text{ com } k = 1, 2, \dots, N\text{Ptos.} \quad (3.5)$$

Escolhida a influência a ser analisada, ou seja, a influência da pressão, ou pressão e temperatura, obtém-se o respectivo fator de deslocamento ($\alpha = \alpha_p(P)$ ou $\alpha = \alpha_{TP}(T,P)$), aqui descrito de forma geral como α . Assim, α_p e α_{p+1} correspondem respectivamente aos fatores de deslocamento nos pontos extremos do intervalo genérico p ($1 \leq p \leq N\text{Ptos} - 1$).

Dessa forma, pode-se definir $\bar{\alpha}_p$ como o valor médio dos fatores de deslocamento do intervalo p , ou seja,

$$\bar{\alpha}_p = \frac{\alpha_p + \alpha_{p+1}}{2}. \quad (3.6)$$

Na maior parte dos amortecedores Newtonianos isotérmicos, em geral, a densidade e a viscosidade são consideradas constantes. Tal suposição, no entanto, é válida somente quando considera-se uma fraca influência da pressão sobre essas propriedades. Do contrário, podem ser introduzidos erros significativos quando da ocorrência de valores mais elevados de pressões (POYIADJI, et al 2015; HOUSIADAS, K.D., 2015, HOUSIADAS, K.D.; GEORGIU, G.C., 2016). A dependência das propriedades materiais em relação a pressão (e, portanto, da tensão em cada instante) caracteriza um material viscoelástico não linear. Com isso, o princípio da superposição de Boltzam não pode ser aplicado diretamente.

Uma forma de incorporar tanto a não linearidade (dependência de propriedades sobre a carga ou tensão) e a dependência do tempo (viscoelasticidade) é um modelo introduzido por Fung (1984) denominado viscoelasticidade quasi-linear.

O modelo de viscoelasticidade quasi-linear posto por Fung (1984) descreve a função de relaxação, que é uma função da deformação e do tempo para um material não linearmente viscoelástico, dividida em dois componentes: um em função do tempo e um em função da deformação, e esses são multiplicados, ou seja $E(t, \varepsilon) = E_t(t)g(\varepsilon)$. A função $g(\varepsilon)$ é responsável pela não-linearidade elástica e dependente da deformação, enquanto que a função $E_t(t)$ depende do tempo e é independente da deformação. Essa função relaxação então é usada na integral de Boltzmann, obtendo-se assim o modelo de viscoelasticidade quasi-linear como $\sigma(\varepsilon, t) = \int_0^t E_t(t - \tau) \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau$. Uma formulação semelhante é obtida para o módulo de fluência.

Segundo Fung (1984), um experimento realizado somente em uma taxa de tensão ou de deformação é insuficiente para diferenciar os modelos lineares e não lineares. Em particular, tal experiência serve para observar que a viscoelasticidade é dependente do tempo, mas não pode validar a viscoelasticidade quasi-linear. Se não são observados bons resultados em uma curva de tensão-deformação, isso pode demonstrar a não linearidade, mas é insuficiente para determinar que tipo de não linearidade.

No desenvolvimento do modelo apresentado a seguir, considera-se a premissa que os materiais sejam fracamente dependentes da pressão, ou seja, o modelo construído pode ser aplicado para MVEs lineares.

Assim, quando é considerada a influência da pressão, ou da pressão e temperatura simultaneamente, a equação (3.3) passa a ser escrita através de um somatório de integrais da função ML realizado ao longo dos $N_{Ptos} - 1$ intervalos, ou seja,

$$\sigma_{kij}^Z = \sigma^Z(t_k, \dot{\varepsilon}_i, T_j) = E_{\infty} \dot{\varepsilon}_i t_k + E_{\infty} r_{\mu} \dot{\varepsilon}_i \sum_{p=1}^{k-1} \int_{t_p}^{t_{p+1}} E_{\nu} \left(- \left(\frac{t_k - \xi}{\bar{\alpha}_p(T_j) \tau_a} \right)^{\nu} \right) d\xi. \quad (3.7)$$

Analisando apenas o termo da integral da função Mittag-Leffler da equação (3.7), esse pode ser reescrito como

$$\int_{t_p}^{t_{p+1}} E_{\nu} \left(- \left(\frac{t_k - \xi}{\bar{\alpha}_p(T_j) \tau_a} \right)^{\nu} \right) d\xi = I_{p+1} - I_p \quad (3.8)$$

onde

$$I_{p+1} = \int_0^{t_{p+1}} E_\nu \left(- \left(\frac{t_k - \xi}{\bar{\alpha}_p(\Gamma_j)\tau_a} \right)^\nu \right) d\xi \quad (3.9)$$

e

$$I_p = \int_0^{t_p} E_\nu \left(- \left(\frac{t_k - \xi}{\bar{\alpha}_p(\Gamma_j)\tau_a} \right)^\nu \right) d\xi. \quad (3.10)$$

Para resolver a equação (3.9) adota-se um procedimento similar àquele utilizado na dedução da equação (2.83). Para isso, seja $t = \frac{t_k - t_{p+1}}{\bar{\alpha}_p(\Gamma_j)\tau_a}$ o limite superior da equação (2.82), onde t_k e t_{p+1} são tempos quaisquer tal que $t_k \geq t_{p+1}$. Realizando uma transformação de coordenadas onde $\eta = \frac{t_k - t_{p+1} - \xi}{\bar{\alpha}_p(\Gamma_j)\tau_a}$, tem-se que o lado esquerdo da equação (2.82) torna-se

$$\begin{aligned} \int_0^t E_\nu(-\eta^\nu) d\eta &= \int_{t_k - t_{p+1}}^0 E_\nu \left(- \left(\frac{t_k - t_{p+1} - \xi}{\bar{\alpha}_p(\Gamma_j)\tau_a} \right)^\nu \right) \left(- \frac{1}{\bar{\alpha}_p(\Gamma_j)\tau_a} \right) d\xi \\ &= \frac{1}{\bar{\alpha}_p(\Gamma_j)\tau_a} \int_0^{t_k - t_{p+1}} E_\nu \left(- \left(\frac{t_k - t_{p+1} - \xi}{\bar{\alpha}_p(\Gamma_j)\tau_a} \right)^\nu \right) d\xi \end{aligned} \quad (3.11)$$

Igualando esse resultado ao lado direito da equação (2.82), tem-se

$$\int_0^{t_k - t_{p+1}} E_\nu \left(- \left(\frac{t_k - t_{p+1} - \xi}{\bar{\alpha}_p(\Gamma_j)\tau_a} \right)^\nu \right) d\xi = (t_k - t_{p+1}) E_{\nu,2} \left(- \left(\frac{t_k - t_{p+1}}{\bar{\alpha}_p(\Gamma_j)\tau_a} \right)^\nu \right). \quad (3.12)$$

De forma análoga, da equação (3.10) tem-se

$$\int_0^{t_k - t_p} E_\nu \left(- \left(\frac{t_k - t_p - \xi}{\bar{\alpha}_p(\Gamma_j)\tau_a} \right)^\nu \right) d\xi = (t_k - t_p) E_{\nu,2} \left(- \left(\frac{t_k - t_p}{\bar{\alpha}_p(\Gamma_j)\tau_a} \right)^\nu \right). \quad (3.13)$$

Substituindo as Eqs. (3.12) e (3.13) em (3.8) e então em (3.7), obtém-se a expressão para a tensão segundo o modelo de Zener fracionário, considerando a influência da pressão ou temperatura e pressão simultâneas, posta como

$$\begin{aligned} \sigma^Z(t_k, \dot{\epsilon}_i, \Gamma_j) &= \dot{\epsilon}_i E_\infty t_k + \\ &+ r_\mu \dot{\epsilon}_i E_\infty \sum_{p=1}^{k-1} \left\{ \left[(t_k - t_{p+1}) E_{\nu,2} \left(- \left(\frac{t_k - t_{p+1}}{\bar{\alpha}_p(\Gamma_j)\tau_a} \right)^\nu \right) \right] - \left[(t_k - t_p) E_{\nu,2} \left(- \left(\frac{t_k - t_p}{\bar{\alpha}_p(\Gamma_j)\tau_a} \right)^\nu \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

3.3 PROBLEMA PADRÃO DE OTIMIZAÇÃO

O objetivo desta seção é apresentar o problema de identificação dos parâmetros materiais na forma de um problema de otimização. Para isso, considera-se a equação da tensão segundo o modelo de Zener fracionário, dada pela equação (3.4) ou (3.14), e de posse dos dados experimentais, formula-se um problema padrão de otimização adequado para a obtenção das propriedades do MVE. Nesse caso, é definida uma função distância relativa, $d(t, \dot{\epsilon}_i, T_j)$, entre as curvas tensões-deformações teórica e experimental em uma temperatura T_j e uma taxa $\dot{\epsilon}_i$ constantes. Nesse caso, a função distância pode ser escrita como

$$d(t, \dot{\epsilon}_i, T_j) = \frac{\sigma^Z(t, \dot{\epsilon}_i, T_j) - \sigma^{\text{exp}}(t, \dot{\epsilon}_i, T_j)}{\sigma^{\text{exp}}(t, \dot{\epsilon}_i, T_j)}. \quad (3.15)$$

Define-se a função objetivo através de uma medida da distância quadrática (\bar{D}_{ic}^2) entre as curvas do modelo teórico de Zener fracionário e as curvas obtidas experimentalmente. Segundo Rektorys (1980), a distância entre duas funções pode ser obtida através da norma da diferença entre elas. No corrente trabalho, opta-se por empregar a norma L_2 dessa diferença, resultando em

$$\bar{D}_{ic}^2 = \int_0^{t_f} [d(t, \dot{\epsilon}_i, T_j)]^2 dt = \int_0^{t_f} \left[\frac{\sigma^Z(t, \dot{\epsilon}_i, T_j) - \sigma^{\text{exp}}(t, \dot{\epsilon}_i, T_j)}{\sigma^{\text{exp}}(t, \dot{\epsilon}_i, T_j)} \right]^2 dt, \quad (3.16)$$

onde t_f é o tempo do último ponto amostrado de cada curva analisada ic ($1 \leq ic \leq NC$), a qual é caracterizada pelo par $\dot{\epsilon}_i - T_j$. Neste caso, NC é o número total de curvas amostradas.

É importante frisar que a função $\sigma^{\text{exp}}(t, \dot{\epsilon}_i, T_j)$ não é conhecida totalmente, mas somente os valores obtidos na amostragem experimental. Para tanto, a função distância $d(t, \dot{\epsilon}_i, T_j)$, apresentada na equação (3.15), é substituída por uma aproximação linear por partes, aqui denotada por $\tilde{d}(t)$ e definida em cada intervalo de amostragem (t_p a t_{p+1} , sendo $p = 1, 2, \dots, N_{\text{Ptos}} - 1$). Assim, considerando um número suficiente de pontos amostrados, de tal forma que a linearização da função distância, $d(t)$, seja aceitável para cada intervalo p , tem-se

$$d(t) \cong \tilde{d}^{(p)}(t) = A_p t + B_p \quad (t_p \leq t \leq t_{p+1}), \quad (3.17)$$

onde

$$A_p = \left(\frac{\tilde{d}_2 - \tilde{d}_1}{t_{p+1} - t_p} \right) \quad \text{e} \quad B_p = \tilde{d}_1 - \left(\frac{\tilde{d}_2 - \tilde{d}_1}{t_{p+1} - t_p} \right) t_p. \quad (3.18)$$

Nesse caso, as distâncias \tilde{d}_1 e \tilde{d}_2 são conhecidas e dadas por

$$\tilde{d}_1 = d(t_p, \hat{\varepsilon}_i, T_j) = \frac{\sigma^Z(t_p, \hat{\varepsilon}_i, T_j) - \sigma^{\text{exp}}(t_p, \hat{\varepsilon}_i, T_j)}{\sigma^{\text{exp}}(t_p, \hat{\varepsilon}_i, T_j)} \quad (3.19)$$

e

$$\tilde{d}_2 = d(t_{p+1}, \hat{\varepsilon}_i, T_j) = \frac{\sigma^Z(t_{p+1}, \hat{\varepsilon}_i, T_j) - \sigma^{\text{exp}}(t_{p+1}, \hat{\varepsilon}_i, T_j)}{\sigma^{\text{exp}}(t_{p+1}, \hat{\varepsilon}_i, T_j)}. \quad (3.20)$$

Assim, a versão aproximada da norma L_2 da diferença entre as duas funções pode ser posta na forma aproximada como

$$\bar{D}_{ic}^2 \cong \tilde{d}_{ic}^2 = \sum_{p=1}^{NP_{ic}-1} \int_{t_p}^{t_{p+1}} [\tilde{d}(t_k)]^2 dt. \quad (3.21)$$

Nessa equação, NP_{ic} representa o número total de pontos da ic -ésima curva experimental. Substituindo a equação (3.17) em (3.21), e reorganizando os termos, tem-se

$$\bar{D}_{ic}^2 = \sum_{p=1}^{NP_{ic}-1} \left[\left(\frac{1}{3} A_p^2 (t_{p+1}^3 - t_p^3) + A_p B_p (t_{p+1}^2 - t_p^2) + B_p^2 (t_{p+1} - t_p) \right) \right]. \quad (3.22)$$

Para uma maior facilidade de análise dos resultados e visando uma ponderação entre as curvas com tempos de experimentos com diferentes magnitudes, a equação (3.22) é dividida pelo tempo máximo da correspondente ic -ésima curva, t_{ic}^{max} . Assim,

$$D_{ic}^2 = \frac{1}{t_{ic}^{\text{max}}} \bar{D}_{ic}^2. \quad (3.23)$$

Além disso, quando se ajustam simultaneamente várias curvas, a distância quadrática total, aqui denotada por D^2 , é dividida pelo número total de curvas, NC , resultando em

$$D^2 = \frac{1}{NC} \sum_{ic=1}^{NC} D_{ic}^2. \quad (3.24)$$

Conforme discutido, o objetivo é ajustar um modelo teórico do comportamento material (nesse caso, o modelo de Zener fracionário) a um conjunto de curvas experimentais. Um valor escalar que fornece uma medida da distância entre as várias curvas (experimentais e teóricas) é dada pela equação (3.24), e esta é definida como a função objetivo do problema de otimização. Assim, é possível explicitar o problema padrão de otimização como:

$$\text{minimizar } D^2(\mathbf{x}): \mathbb{R}^{4+m} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{onde } \mathbf{x} = (v, E_\infty, r_\mu, \tau_a, C_1^n, C_2^n, \dots, C_m^n) \quad (3.25)$$

$$\text{restrições } \left\{ \begin{array}{l} 0 < v^{inf} \leq v \leq v^{sup} < 1 \\ 0 < E_\infty^{inf} \leq E_\infty \leq E_\infty^{sup} \\ 1 < r_\mu^{inf} \leq r_\mu \leq r_\mu^{sup} \\ \tau_a^{inf} \leq \tau_a \leq \tau_a^{sup} \\ C_i^{n(inf)} \leq C_i^n \leq C_i^{n(sup)}; i = 1, \dots, m \end{array} \right.$$

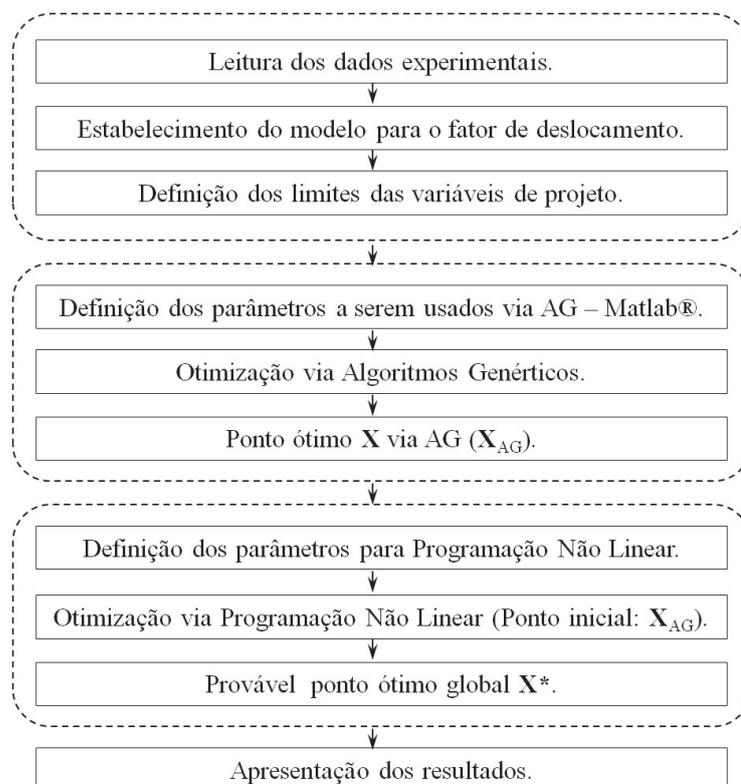
onde m é o número de parâmetros de cada modelo de influência da temperatura e/ou pressão e n é uma indicação desse modelo ($1 \leq i \leq m(n)$). Além disso, os símbolos $(\cdot)^{inf}$ e $(\cdot)^{sup}$ representam os valores limites, inferior e superior, para cada componente do vetor de variáveis de projeto x , composto pelos parâmetros característicos do material.

3.4 ESTRUTURA COMPUTACIONAL

Resultados iniciais do problema de otimização baseados exclusivamente em técnicas de programação não linear (PNL) indicam a existência de vários pontos de mínimos locais. Com isso, a obtenção das propriedades ótimas se mostra fortemente dependente do ponto inicial do processo de otimização. Para evitar essa dificuldade, a implementação computacional da metodologia de identificação proposta no corrente trabalho é baseada em uma técnica de otimização híbrida.

O processo computacional, visualizado na FIGURA 26, foi implementado em um conjunto de rotinas no software Matlab®. Inicialmente, ocorre a leitura dos dados a partir de testes experimentais, seguido de uma preparação da rotina por algoritmos genéticos (AG) e o respectivo processo de otimização. Em seguida, o melhor ponto obtido a partir do processo de otimização usando AG (denotado X_{AG}) é utilizado como dado de entrada para a preparação da rotina em programação não linear (PNL) e sua execução. Como a técnica de otimização por AG não é determinística e tendo como objetivo aumentar a probabilidade de encontrar o ponto ótimo global, o processo de otimização híbrido (AG e PNL) é repetido 10 vezes, sendo esse valor um número arbitrado. Os parâmetros materiais ótimos são tomados considerando o conjunto de valores que resulta na menor distância quadrática D^2 . Neste processo de otimização, foram utilizadas as funções `ga.m` e `fmincon.m`, da biblioteca do software do MatLab®.

FIGURA 26: FLUXOGRAMA DA ESTRUTURA COMPUTACIONAL IMPLEMENTADA NO SOFTWARE MATLAB® PARA CARACTERIZAÇÃO DO MVE.



Os parâmetros utilizados no processo de otimização por AG são: tamanho da população sendo 100; número de gerações igual a 1000; tolerância de parada é 10^{-7} (o algoritmo pára se a mudança relativa média ao longo das gerações é menor

ou igual ao valor fixado) e taxa de mutação de 0,02. O processo de otimização por PNL se baseia no método de programação sequencial quadrática, sendo que a estimativa da matriz Hessiana da função objetivo é estimada através do método de Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS). Os parâmetros de otimização por PNL são: número máximo de avaliações da função igual a 1000, número máximo de iterações permitidas é de 600 e tolerância de parada (norma do gradiente) é 10^{-10} .

Os limites superiores e inferiores dos parâmetros materiais são apresentados nas respectivas seções em que cada material é analisado. É importante frisar que a escolha desses valores limites foi realizada por experimentos numéricos mas tomando-se o cuidado para que o ponto de ótimo não se encontrasse na fronteira do espaço de projetos. Porém, vale ressaltar que nos processos de identificação onde as curvas são analisadas individualmente, por vezes esses limites são alcançados.

3.4.1 Implementação da função Mittag-Leffler

O argumento da função Mittag-Leffler (Eq. 2.77) considerando a influência da temperatura e/ou pressão pode ser posto como

$$c = -\left(\frac{t}{\alpha \tau_a}\right)^\nu. \quad (3.26)$$

Ou seja, definidos os parâmetros materiais τ_a e ν , e o fator de deslocamento α ($\alpha = \alpha_T(T)$ ou $\alpha = \alpha_P(P)$ ou $\alpha = \alpha_{TP}(T,P)$), o argumento c pode ser obtido para qualquer tempo t . Entretanto, a avaliação desta função Mittag-Leffler é significativamente onerosa do ponto de vista computacional, visto que esta decorre da realização de um longo somatório, dado pela equação (2.78), e que é fortemente dependente da precisão desejada.

Com o intuito de reduzir o tempo despendido com essa operação, este trabalho optou por realizar uma aproximação dos valores da função ML no intervalo no qual se encontram todas as curvas experimentais. Observa-se que no processo de otimização, para uma dada configuração, o argumento c da função ML só é dependente do tempo t e do fator α (que depende da temperatura/pressão de cada curva). Nesse sentido, o processo de aproximação da função ML se baseia em obter valores extremos do argumento c para cada curva ic -ésima ($1 \leq ic \leq NC$):

$$c_{\text{inf}}|_{ic} = - \left(\frac{\text{tempo}_{\text{max}}|_{ic}}{\alpha|_{ic} \cdot \tau_a} \right)^{\nu} \quad (3.27)$$

e

$$c_{\text{sup}}|_{ic} = - \left(\frac{\text{tempo}_{\text{min}}|_{ic}}{\alpha|_{ic} \cdot \tau_a} \right)^{\nu}. \quad (3.28)$$

Nesse caso, $\text{tempo}_{\text{min}}|_{ic}$ é o tempo no primeiro ponto amostrado (e não nulo) da ic -ésima curva. Igualmente $\text{tempo}_{\text{max}}|_{ic}$ é o tempo do último ponto e $\alpha|_{ic}$ é o fator de deslocamento obtido para a temperatura/pressão de ensaio dessa curva.

Com isso, podem ser obtidos os valores extremos entre todas as curvas:

$$c_{\text{inf}} = \min\{c_{\text{inf}}|_{ic} (1 \leq ic \leq NC)\}, \quad (3.29)$$

e

$$c_{\text{sup}} = \max\{c_{\text{sup}}|_{ic} (1 \leq ic \leq NC)\}. \quad (3.30)$$

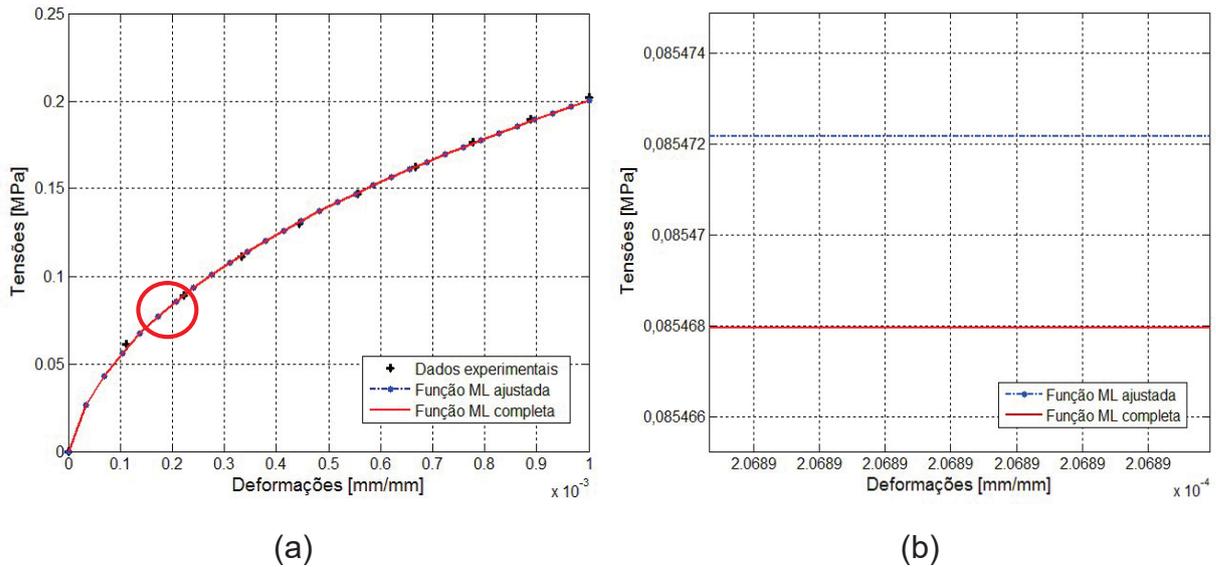
Em seguida, o intervalo $[c_{\text{inf}}, c_{\text{sup}}]$ é dividido em um número suficiente de pontos uniformemente espaçados em uma escala logarítmica. Para cada ponto, calcula-se a função ML via algoritmo apresentado por Gorenflo et al. (2002). Estes pontos e os respectivos valores da função ML são tabelados e armazenados.

Assim que o processo de minimização se inicia, para a ic -ésima curva, o k -ésimo ponto deve ser avaliado. Portanto, de posse do argumento da função ML para esse k -ésimo ponto, recorre-se à tabela previamente obtida e, localizado o intervalo no qual o argumento pertence, obtém-se o valor correspondente da função ML para o argumento avaliado através de uma interpolação linear. Realizando esse procedimento, observa-se uma significativa redução no tempo computacional com o cálculo da função Mittag-Leffler, todas as vezes que essa recorrência se faz necessária.

A curva tensão-deformação mostrada na FIGURA 27 refere-se a um “pseudo-ensaio” experimental de um material fictício. O objetivo dessa figura é mostrar que os valores da função Mittag-Leffler obtidos através da metodologia descrita convergem para os valores da função Mittag-Leffler obtidos via algoritmo apresentado por Gorenflo et al. (2002). O tempo computacional gasto para a identificação desse material utilizando o algoritmo apresentado por Gorenflo et al. (2002) foi de 5771 segundos, enquanto que o tempo computacional gasto na metodologia descrita anteriormente foi de 4886 segundos. Além disso, graficamente

observa-se que não há uma diferença significativa entre os resultados obtidos. Dessa forma, a metodologia descrita nessa seção é adotada em todo o trabalho.

FIGURA 27: COMPARAÇÃO ENTRE AS METODOLOGIAS PARA A OBTENÇÃO DO CÁLCULO DA FUNÇÃO MITTAG-LEFFLER. (a) VISÃO GERAL DA CURVA; (b) VISÃO DA REGIÃO EM DESTAQUE.



3.4.2 Denominadores das funções FMT e UFPR

Quando se analisa a influência da temperatura e pressão simultaneamente, via modelos FMT e UFPR, sob o comportamento do MVE, um cuidado se faz necessário quanto à combinação algébrica que pode ocorrer no denominador da equação (2.133) ou da equação (2.142).

De posse do conjunto de curvas a serem identificadas, define-se T_{\min} e T_{\max} , respectivamente, como a menor e a maior entre as temperatura em análise. Além disso, define-se como pressão mínima, P_{\min} , a pressão correspondente ao primeiro ponto amostrado, ou seja, $P_{\min} = 0$ e, pressão máxima, P_{\max} , como a maior dentre as máximas pressões obtidas, essas correspondem ao último ponto amostrado de cada curva.

Em qualquer ponto (T,P) do conjunto $\Omega = [P_{\min}, P_{\max}] \times [T_{\min}, T_{\max}] \subset \mathbb{R}^2$, a função do denominador de qualquer uma das equações que modelem as influências de temperatura e/ou pressão não pode se anular. Isso porque ocorreria uma singularidade no fator de deslocamento nesse ponto. Portanto, o valor da função denominador deve possuir o mesmo sinal em todos os quatro vértices desse

conjunto de pontos. Caso não se obtenha o mesmo sinal nos quatro vértices, calcula-se a distância quadrática máxima correspondente para esse ponto.

3.5 VALIDAÇÃO DO MODELO PROPOSTO

Nesta seção é apresentado um processo de validação da metodologia proposta para um material real conhecido como C-2003. A partir do nomograma fornecido pelo fabricante, o comportamento do material C-2003 é identificado no domínio da frequência considerando o módulo complexo de Young e o correspondente fator de perda, representado pelo modelo de derivadas fracionárias de quatro parâmetros.

Com base nos parâmetros obtidos no domínio da frequência, realiza-se uma interconversão para o domínio do tempo e, posteriormente, são gerados “pseudos ensaios experimentais”. De posse das curvas no domínio do tempo, aplica-se a metodologia proposta, onde são comparados os resultados obtidos no domínio do tempo com os resultados obtidos na identificação no domínio da frequência.

3.5.1 Material C-2003

Segundo o fabricante, EAR–Aearo Technologies, o material C-2003 pertence à família do vinilo ISODAMP e uretano ISOLOSS. Não são fornecidas maiores informações a respeito da composição do material, com exceção do nomograma de suas propriedades mecânicas no domínio da frequência (FIGURA 28).

3.5.2 Identificação das propriedades do MVE no domínio da frequência a partir do nomograma.

De posse do nomograma fornecido pelo fabricante são obtidos diferentes pontos do módulo complexo, $\bar{E}(\Omega, T)$, para diferentes temperaturas (T) e frequências (Ω). Tendo esses pontos, é realizado um ajuste pelo método dos mínimos quadrados com o objetivo de obter os parâmetros materiais no domínio da frequência. Nesse caso, para realizar esse ajuste é utilizado o módulo complexo de Young, apresentado por Pritz (1996) como

$$\bar{E}(\Omega, T) = \frac{\bar{E}_0 + \bar{E}_\infty \phi_0 (i\Omega_R)^{\beta_T}}{1 + \phi_0 (i\Omega_R)^{\beta_T}} = E_R(\Omega_R) \cdot [1 + i\eta_G(\Omega_R)], \quad (3.31)$$

onde, segundo Lopes (1998), \bar{E}_0 é o módulo borrachoso e \bar{E}_∞ é o módulo vítreo. O parâmetro real ϕ_0 depende do tempo de relaxação e da ordem de derivada fracionária β_T , Ω_R é a frequência reduzida (dada por $\Omega_R = \Omega \alpha_T(T)$ onde Ω é a frequência circular em rad/s), $E_R(\Omega_R)$ é o módulo de Young dinâmico e $\eta_G(\Omega_R)$ é o fator de perda do MVE. Essas funções são apresentadas graficamente na FIGURA 29. Dessa forma, identificam-se os parâmetros materiais que correspondem à curva mestra mostrada na FIGURA 28, incluindo os parâmetros do modelo WLF. Os resultados obtidos na identificação são: $\bar{E}_0 = 6,989 \cdot 10^7$ Dyn/cm², $\bar{E}_\infty = 9,863 \cdot 10^{10}$ Dyn/cm², $\phi_0 = 1,59 \cdot 10^{-3} s^{\beta_T}$, $\beta_T = 0,466$, $C_1^T = 146,012$, $C_2^T = 1281,529^\circ\text{C}$ para uma temperatura de referência (T_0) de 41,9 °C.

FIGURA 28: NOMOGRAMA DO MATERIAL C-2003 FORNECIDO PELO FABRICANTE EAR – AERO TECHNOLOGIES.

FONTE: [HTTP://WWW.EARSC.COM/PDFS/ENGINEERING/NOMOGRAMS/C2003.PDF](http://www.earsc.com/pdfs/engineering/nomograms/c2003.pdf)

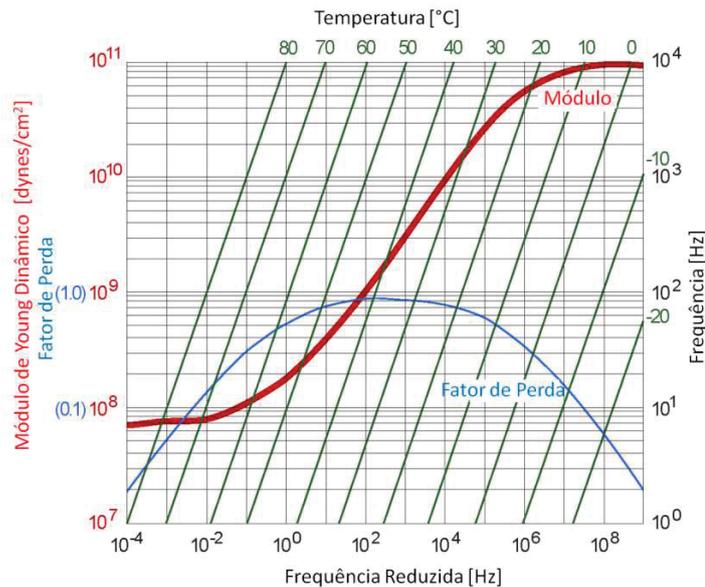
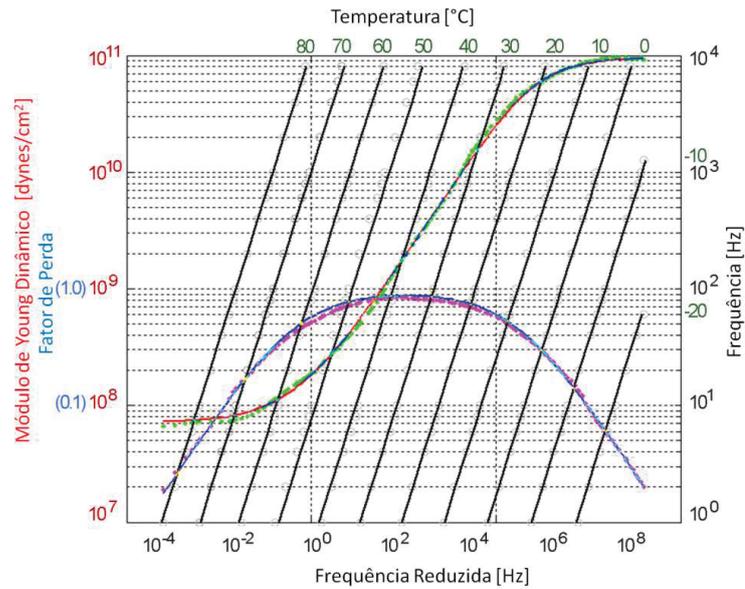


FIGURA 29: NOMOGRAMA DO MATERIAL C-2003 IDENTIFICADO NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.



3.5.3 Interconversão entre o domínio do tempo e o domínio da frequência

Conhecidos os parâmetros materiais do MVE no domínio da frequência, é possível realizar uma interconversão para o domínio do tempo, obtendo as propriedades do modelo neste espaço. Para tanto, é aplicada a transformada de Fourier a cada termo da equação diferencial do modelo (Eq. 2.97), ou seja,

$$\mathcal{F}(\sigma(t)) = \sigma(\Omega_R), \quad (3.32)$$

$$\mathcal{F}\left(\tau_a^\nu \frac{d^\nu \sigma(t)}{dt^\nu}\right) = \tau_a^\nu (i\Omega_R)^\nu \sigma(\Omega_R), \quad (3.33)$$

$$\mathcal{F}(E_\infty \varepsilon(t)) = E_\infty \varepsilon(\Omega_R), \quad (3.34)$$

$$\mathcal{F}\left(E_\infty r_\mu \tau_a^\nu \frac{d^\nu \varepsilon(t)}{dt^\nu}\right) = E_\infty r_\mu \tau_a^\nu (i\Omega_R)^\nu \varepsilon(\Omega_R). \quad (3.35)$$

Neste caso $\sigma(\Omega_R)$ e $\varepsilon(\Omega_R)$ são, respectivamente, a tensão normal e a deformação longitudinal no material, ambas descritas no domínio da frequência.

Portanto, é possível reescrever a equação constitutiva do modelo Zener fracionário no domínio da frequência (Ω_R) como

$$[1 + \tau_a^\nu (i\Omega_R)^\nu] \sigma(\Omega_R) = E_\infty [1 + r_\mu \tau_a^\nu (i\Omega_R)^\nu] \varepsilon(\Omega_R). \quad (3.36)$$

Definindo o módulo de Young complexo como $E(\Omega) = \frac{\sigma(\Omega_R)}{\varepsilon(\Omega_R)}$, da equação (3.38) tem-se

$$E(\Omega, T) = \frac{E_\infty + E_\infty r_\mu \tau_a^\nu (i\Omega_R)^\nu}{1 + \tau_a^\nu (i\Omega_R)^\nu}. \quad (3.37)$$

Comparando as equações (3.31) e (3.37) obtêm-se a correspondência dos parâmetros materiais entre o domínio do tempo e o domínio da frequência. Essa correspondência está apresentada na TABELA 2.

TABELA 2: CORRESPONDÊNCIA DOS PARÂMETROS DO MÓDULO DE RELAXAÇÃO ENTRE O DOMÍNIO DO TEMPO E O DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA.

Domínio do Tempo	Domínio da Frequência
ν	β_T
E_∞	\bar{E}_0
r_μ	$\bar{E}_\infty / \bar{E}_0$
τ_a	ϕ_0^{1/β_T}

3.5.4 Pseudo-ensaios

A partir dos parâmetros materiais no domínio do tempo, foram gerados “pseudo-ensaios” experimentais nas temperaturas de $T_1 = -20^\circ\text{C}$, $T_2 = 20^\circ\text{C}$, $T_3 = 41,9^\circ\text{C}$ e $T_4 = 60^\circ\text{C}$ e considerando as taxas de deformações $\dot{\varepsilon}_A = 0,0001$, $\dot{\varepsilon}_B = 0,003$ e $\dot{\varepsilon}_C = 0,1$ (mm/mm)/s. Para cada pseudo-ensaio experimental, foram obtidas as tensões via relação constitutiva baseada no modelo de Zener fracionário (Eq. 2.95).

De posse dessas tabelas, o processo de otimização foi executado, combinando algumas situações:

- i) uma taxa lenta ($\dot{\varepsilon}_A$) a uma temperatura quente T_4 ,
- ii) uma taxa rápida ($\dot{\varepsilon}_C$) a uma temperatura fria T_1 ,
- iii) uma taxa intermediária ($\dot{\varepsilon}_B$) nas temperaturas T_1 , T_2 , T_3 e T_4 , e
- iv) todas as taxas e temperaturas simultaneamente.

Os limites simples dos parâmetros materiais utilizados no processo de otimização para esse problema estão descritos na TABELA 3.

Os resultados obtidos no processo de identificação são apresentados na TABELA 4. Nesta tabela, além dos 6 parâmetros do processo de otimização, são apresentados os resultados do módulo de relaxação instantânea, E_0 (Eq. 2.108), a distância total quadrática do ponto ótimo encontrado no processo de AG, D_{AG}^2 , a distância total quadrática do ponto ótimo encontrado no processo de PNL, D_{PNL}^2 , além do tempo computacional gasto no processo de otimização.

TABELA 3: LIMITES DOS PARÂMETROS UTILIZADOS NO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO DO MATERIAL C-2003.

Parâmetro	Valor
ν [-]	$0,02 \leq \nu \leq 0,98$
E_∞ [MPa]	$0,00 \leq E_\infty \leq 10,00$
r_μ [-]	$1,001 \leq r_\mu \leq 3000$
τ_a [s]	$10^{-8} \leq \tau_a \leq 1,00$
C_1^T [-]	$0 \leq C_1^T \leq 200$
C_2^T [°C]	$0 \leq C_2^T \leq 1800$
T_0 [°C]	41,9

Observando a TABELA 4, nota-se que o ensaio numérico realizado com todas as temperaturas e taxas simultaneamente apresenta uma melhor convergência dos parâmetros materiais quando comparados com o material de referência. Vale ressaltar que o ensaio realizado com a taxa de deformação rápida ($\dot{\epsilon}_C$) e temperatura fria (T_1), fornece uma convergência considerável do parâmetro E_0 , o que não ocorre no ensaio com a taxa de deformação lenta ($\dot{\epsilon}_A$) e temperatura alta (T_4). Em contrapartida, no ensaio realizado com a taxa de deformação lenta ($\dot{\epsilon}_A$) e temperatura alta (T_4), observa-se a convergência do parâmetro E_∞ quando esse é comparado com o material de referência. Destaca-se também a boa convergência dos resultados obtidos no ensaio realizado com todas as temperaturas simultaneamente e com uma taxa de deformação intermediária ($\dot{\epsilon}_B$). Portanto, a metodologia apresentada converge, e a melhor aproximação dos resultados é obtida quando são avaliadas várias curvas simultaneamente.

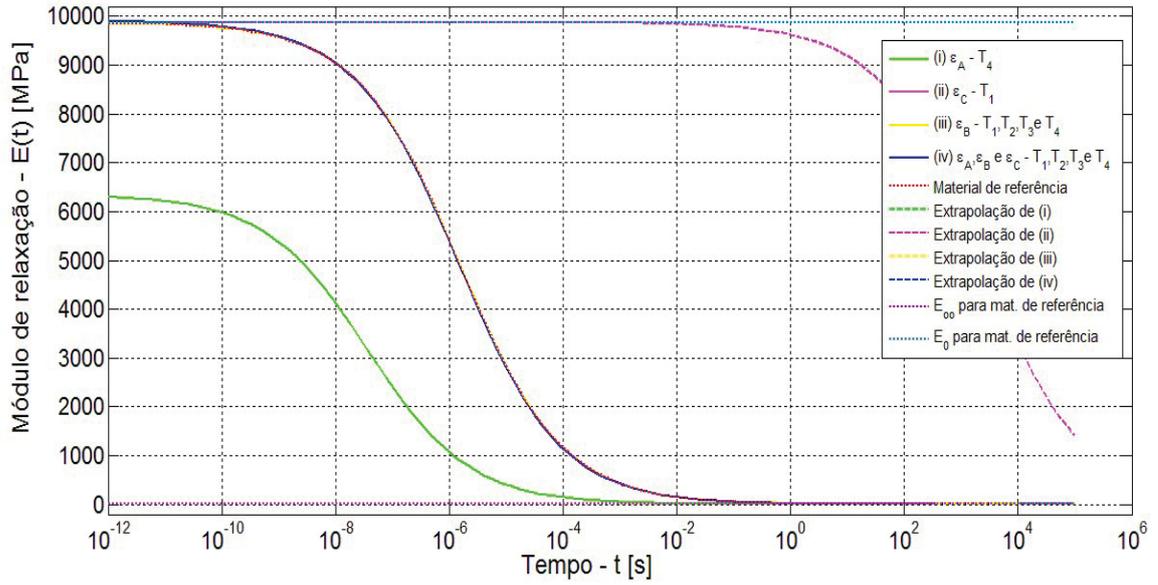
Inserindo os valores obtidos na TABELA 4 na equação (2.107), obtém-se a função módulo de relaxação, a qual pode ser visualizada na FIGURA 30. Esta função considera a história de todas as temperaturas e taxas de deformações, e representa a curva máster para uma temperatura de referência (nesse caso, de 41,9°C) obtida através do processo de otimização. Observa-se que o melhor resultado obtido apresenta um erro muito baixo quando comparado com a curva do material de referência, visto que as curvas praticamente se sobrepõem.

TABELA 4: RESULTADOS NUMÉRICOS DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF - MATERIAL C-2003.

Taxa	$\dot{\epsilon}_A$	$\dot{\epsilon}_C$	$\dot{\epsilon}_B$	$\dot{\epsilon}_A, \dot{\epsilon}_B$ e $\dot{\epsilon}_C$	Material
Temperatura	T_4	T_1	T_1, T_2, T_3 e T_4	T_1, T_2, T_3 e T_4	Referência
$\nu[-]$	0,466	0,465	0,466	0,466	0,466
$E_\infty[\text{MPa}]$	6,989	7,286	6,988	6,991	6,989
$r_\mu[-]$	906,818	1353,894	1411,495	1411,494	1411,200
$\tau_a[\text{s}]$	$9,303e^{-7}$	$1,441e^{-7}$	$9,853e^{-7}$	$9,820e^{-7}$	$9,872e^{-7}$
$C_1^T[-]$	75,098	180,337	144,663	145,866	146,012
$C_2^T[^\circ\text{C}]$	834,784	985,449	1270,316	1280,591	1281,529
$E_0[\text{MPa}]$	6344,740	9871,758	9870,515	9874,746	9870,000
$D_{AG}^2[-]$	$2,878e^{-7}$	$2,138e^{-7}$	$1,768e^{-2}$	$1,378e^{-5}$	---
$D_{PNL}^2[-]$	$8,086e^{-10}$	$6,030e^{-10}$	$4,526e^{-7}$	$5,664e^{-7}$	---
Tempo[s]	286	551	6229	2713	---

Aqui cabe uma ressalva quanto às representações gráficas dos módulos de relaxação apresentadas nesse trabalho. A partir do tempo máximo de cada ensaio experimental, os gráficos apresentam uma continuação da linha cheia, representadas por linhas tracejadas (---), que indicam extrapolações das funções módulo de relaxação.

FIGURA 30: MÓDULO DE RELAXAÇÃO DO MATERIAL C-2003, CONSIDERANDO OS CASOS DA TABELA 4.



4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Neste capítulo são mostrados os resultados numéricos e gráficos decorrentes da implementação da metodologia proposta para identificar os materiais CYCOLAC BDT5510 e STAMAX 40YM240.

4.1 RESULTADOS NUMÉRICOS: POLÍMERO CYCOLAC BDT5510

Nesta seção são apresentados e discutidos os resultados obtidos na caracterização do comportamento mecânico do material CYCOLAC BDT5510. Os resultados dos testes experimentais desse material estão disponíveis no Apêndice 1. Os limites dos parâmetros materiais da equação constitutiva do modelo de ZF utilizados nos ensaios estão descritos na TABELA 5.

TABELA 5: LIMITES DOS PARÂMETROS MATERIAIS DA EQUAÇÃO CONSTITUTIVA DO MODELO DE ZF UTILIZADOS NO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510.

Parâmetro	Valor
ν [-]	$0,02 \leq \nu \leq 0,98$
E_{∞} [MPa]	$0,00 \leq E_{\infty} \leq 30,00$
r_{μ} [-]	$1,001 \leq r_{\mu} \leq 3000$
τ_a [s]	$10^{-5} \leq \tau_a \leq 20,00$

4.1.1 Identificação do material sem considerar a influência da temperatura e pressão.

O objetivo da realização desse ensaio é, através da comparação dos resultados, mostrar que o material sofre influência da temperatura e/ou pressão. Aqui, o fator de deslocamento α_T do modelo WLF (Eq. 2.120) tem valor igual a 1, isto é, as propriedades materiais só são válidas para cada temperatura analisada e portanto, os valores obtidos podem ser discrepantes para diferentes temperaturas. Na TABELA 6 encontram-se os resultados obtidos considerando isoladamente as temperaturas $T_1 = -40^{\circ}\text{C}$, $T_2 = 23^{\circ}\text{C}$, $T_3 = 43^{\circ}\text{C}$ e $T_4 = 66^{\circ}\text{C}$ e com taxa de deformação igual a 0,0833 mm/mm/s.

TABELA 6: RESULTADOS NUMÉRICOS DE IDENTIFICAÇÃO SEM CONSIDERAR A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510.

Temperatura	$T_1 = -40^\circ\text{C}$	$T_2 = 23^\circ\text{C}$	$T_3 = 43^\circ\text{C}$	$T_4 = 66^\circ\text{C}$
$\nu[-]$	0,088	0,185	0,98	0,98
$E_\infty[\text{MPa}]$	6,296	1,987	0,092	0,118
$r_\mu[-]$	116,916	665,837	2541,196	1809,417
$\tau_a[\text{s}]$	$1,481e^{-4}$	$2,201e^{-5}$	$4,727e^{-1}$	$4,337e^{-1}$
$E_0[\text{MPa}]$	742,399	1325,005	233,882	214,629
$D_{AG}^2[-]$	$7,344e^{-5}$	$2,011e^{-3}$	$5,779e^{-4}$	$3,524e^{-4}$
$D_{PNL}^2[-]$	$6,043e^{-5}$	$1,559e^{-3}$	$2,985e^{-4}$	$2,583e^{-4}$
Tempo [s]	1568	5537	439	458

Pelos resultados mostrados na TABELA 6, pode-se observar a clara influência da temperatura sobre o comportamento material. Isso fica evidente em decorrência da grande disparidade entre os valores obtidos para cada propriedade em diferentes temperaturas, embora os erros de ajuste em cada curva (D_{PNL}^2) sejam baixos.

Na FIGURA 31 tem-se a representação gráfica dos dados experimentais (+) e as suas correspondentes curvas tensão-deformação considerando o modelo constitutivo de Zener fracionário (Eq. 3.4).

4.1.2 Identificação considerando a influência da temperatura via modelo WLF

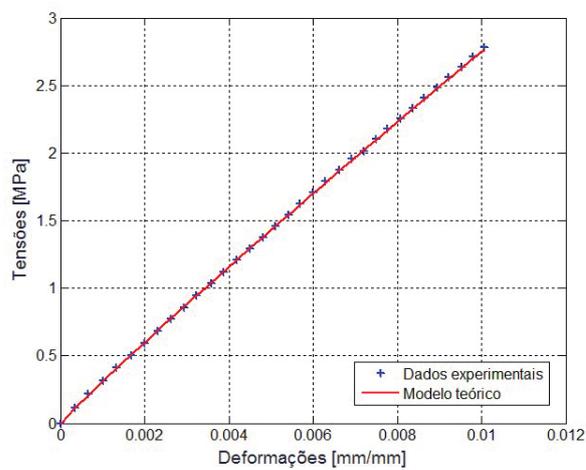
Nesta seção, o problema de otimização é resolvido tendo por base a relação tensão-deformação segundo o modelo de ZF e considerando a influência da temperatura, via modelo WLF, conforme a equação (3.4).

Para o processo de otimização, os limites apresentados na TABELA 5 são utilizados, além dos limites dos parâmetros característicos do material via modelo WLF, que são apresentados na TABELA 7, considerando a temperatura de referência de 23°C .

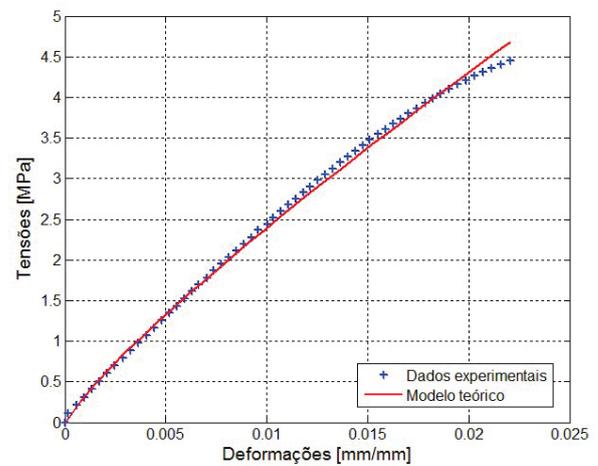
TABELA 7: LIMITES DOS PARÂMETROS CARACTERÍSTICOS DO MATERIAL VIA MODELO WLF – MATERIAL CYCOLAC BDT5510.

Parâmetro	Valor
C_1^T [-]	$0 \leq C_1^T \leq 200$
C_2^T [°C]	$0 \leq C_2^T \leq 8000$
T_0 [°C]	23

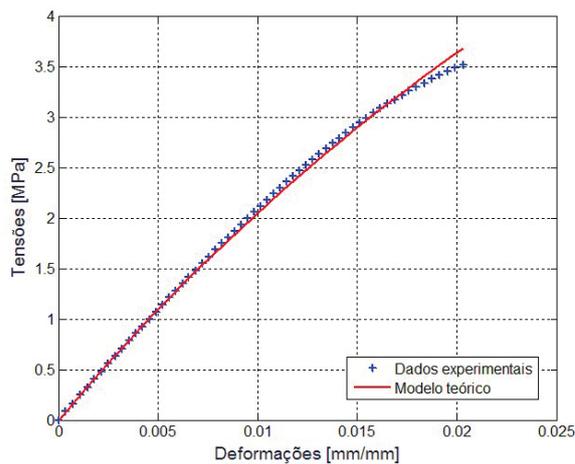
FIGURA 31: AJUSTE (INDIVIDUAL DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510 SEM CONSIDERAR A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO.



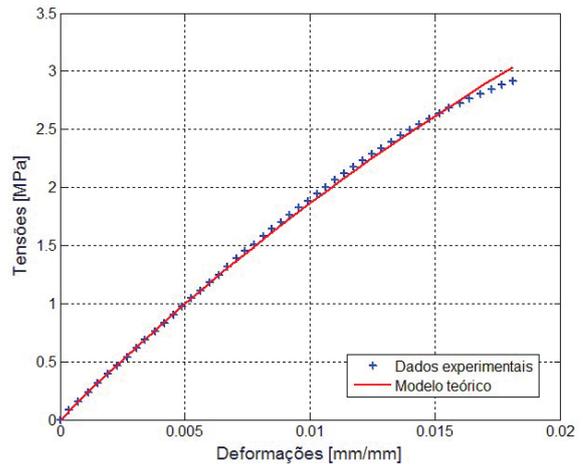
a) $T_1 = -40^\circ\text{C}$



b) $T_2 = 23^\circ\text{C}$



c) $T_3 = 43^\circ\text{C}$



d) $T_4 = 66^\circ\text{C}$

Na TABELA 8 são apresentados os resultados numéricos decorrentes dos processos de identificação de cada curva individualmente e de todas as curvas simultaneamente, considerando a temperatura de referência de 23°C . São

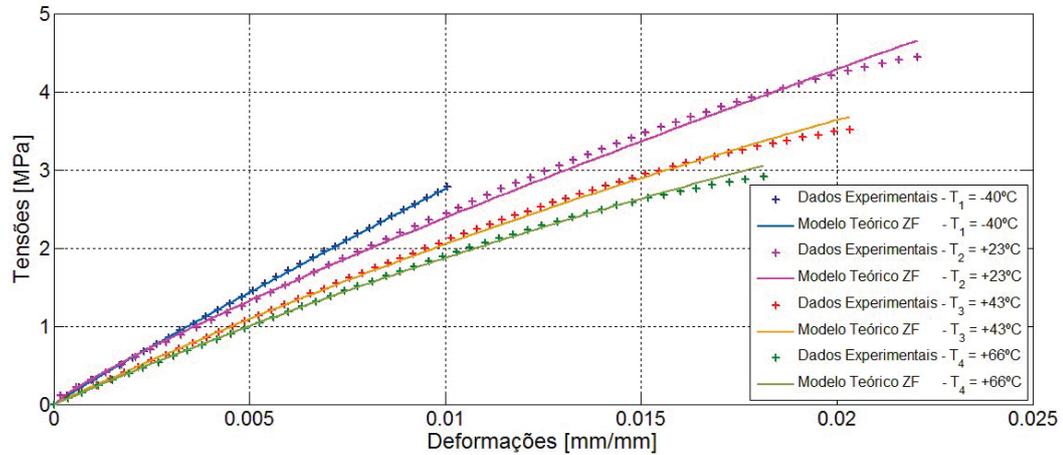
consideradas as temperaturas de $T_1 = -40^\circ\text{C}$, $T_2 = 23^\circ\text{C}$, $T_3 = 43^\circ\text{C}$ e $T_4 = 66^\circ\text{C}$ e taxa de deformação de 0,0833 mm/mm/s. Vale ressaltar, que para o material CYCOLAC BDT5510, os ensaios foram realizados com apenas uma taxa de deformação (0,0833 mm/mm/s) que não é nem muito baixa e nem muito alta. Isso ajuda a explicar a falta de convergência dos parâmetros E_∞ e E_0 , observados no material C-2003.

Todas as curvas tensão-deformação decorrentes do processo de identificação são apresentadas na mesma ilustração (FIGURA 32). Ao observar essas curvas, nota-se um bom ajuste do modelo teórico quando comparado com as curvas experimentais, apresentando erros de baixo valor, conforme os resultados numéricos apresentados na TABELA 8.

TABELA 8: RESULTADOS NUMÉRICOS DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF - MATERIAL CYCOLAC BDT5510.

Temperatura	$T_1 = -40^\circ\text{C}$	$T_2 = 23^\circ\text{C}$	$T_3 = 43^\circ\text{C}$	$T_4 = 66^\circ\text{C}$	$T_1, T_2, T_3, \text{ e } T_4$
$\nu[-]$	0,088	0,189	0,98	0,98	0,256
$E_\infty[\text{MPa}]$	5,885	1,104	0,094	0,086	0,613
$r_\mu[-]$	122,339	1131,749	2482,617	2508,986	545,069
$\tau_a[\text{s}]$	$2,417e^{-4}$	$3,827e^{-5}$	4,322	1,657	1,646
$C_1^T[-]$	0,00	---	198,462	96,062	174,008
$C_2^T[^\circ\text{C}]$	1302,866	---	4109,632	7055,094	7074,586
$E_0[\text{MPa}]$	725,850	1250,555	233,459	215,859	334,740
$D_{AG}^2[-]$	$9,029e^{-5}$	$2,003e^{-3}$	$3,066e^{-4}$	$2,586e^{-4}$	$3,283e^{-3}$
$D_{PNL}^2[-]$	$6,066e^{-5}$	$1,576e^{-3}$	$2,985e^{-4}$	$2,583e^{-4}$	$3,282e^{-3}$
Tempo [s]	1810	4828	874	993	1293

FIGURA 32: AJUSTE (INDIVIDUAL DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510 CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF.



Na TABELA 9 são apresentados os resultados obtidos na identificação do material CYCOLAC BDT5510 sem considerar a influência da temperatura (TABELA 6) e considerando a influência da temperatura (TABELA 8).

TABELA 9: COMPARAÇÃO DO RESULTADOS NUMÉRICOS DE IDENTIFICAÇÃO: SEM CONSIDERAR A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA (S/ WLF) E COM A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF (C/ WLF) - MATERIAL CYCOLAC BDT5510.

	$T_1 = -40^{\circ}\text{C}$		$T_2 = 23^{\circ}\text{C}$		$T_3 = 43^{\circ}\text{C}$		$T_4 = 66^{\circ}\text{C}$	
	S/ WLF	C/ WLF	S/ WLF	C/ WLF	S/ WLF	C/ WLF	S/ WLF	C/ WLF
$\nu[-]$	0,088	0,088	0,185	0,189	0,98	0,98	0,98	0,98
$E_{\infty}[\text{MPa}]$	6,296	5,885	1,987	1,104	0,092	0,094	0,118	0,086
$r_{\mu}[-]$	116,916	122,339	665,837	1131,749	2541,196	2482,617	1809,417	2508,986
$\tau_a[\text{s}]$	$1,481\text{e}^{-4}$	$2,417\text{e}^{-4}$	$2,201\text{e}^{-5}$	$3,827\text{e}^{-5}$	$4,727\text{e}^{-1}$	4,322	$4,337\text{e}^{-1}$	1,657
$T_0 [^{\circ}\text{C}]$	-40	23	23	23	43	23	66	23
$C_1^T[-]$	---	0,000	---	---	---	198,462	---	96,062
$C_2^T[^{\circ}\text{C}]$	---	1302,866	---	---	---	4109,632	---	7055,094
$E_0[\text{MPa}]$	742,399	725,850	1325,005	1251,555	233,882	233,459	214,629	215,859
$D_{AG}^2[-]$	$7,344\text{e}^{-5}$	$9,029\text{e}^{-5}$	$2,011\text{e}^{-3}$	$2,003\text{e}^{-3}$	$5,779\text{e}^{-4}$	$3,066\text{e}^{-4}$	$3,524\text{e}^{-4}$	$2,586\text{e}^{-4}$
$D_{PNL}^2[-]$	$6,043\text{e}^{-5}$	$6,066\text{e}^{-5}$	$1,559\text{e}^{-3}$	$1,576\text{e}^{-3}$	$2,985\text{e}^{-4}$	$2,985\text{e}^{-4}$	$2,583\text{e}^{-4}$	$2,583\text{e}^{-4}$
Tempo[s]	1568	1810	5537	4828	439	874	458	993

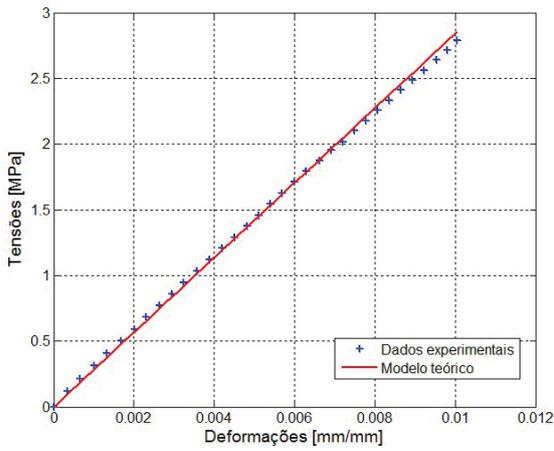
Os resultados gráficos do ajuste simultâneo das curvas estão ilustrados na FIGURA 33. Observa-se que os resultados obtidos do processo de caracterização do polímero em estudo ajustam-se as curvas experimentais, apresentando baixos

valores para a medida da diferença quadrática (D_{PNL}^2), conforme os resultados numéricos apresentados na TABELA 8.

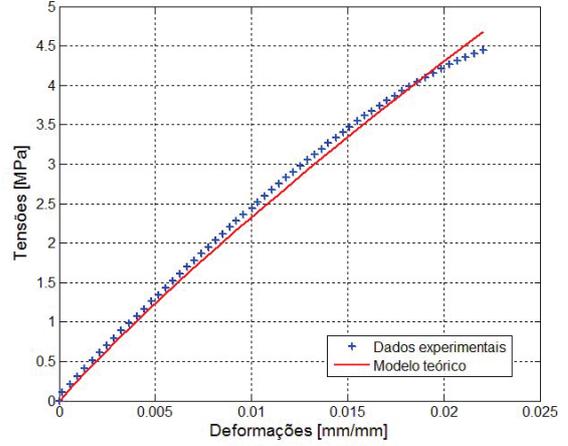
Após a identificação dos parâmetros que caracterizam as propriedades mecânicas do MVE, é possível obter a representação gráfica dos módulos de relaxação dos resultados apresentados na TABELA 8 (FIGURA 34). Destaca-se a representação obtida a partir dos dados da temperatura de $T_1 = -40^\circ\text{C}$ isoladamente. A essa temperatura, o material tem um comportamento predominantemente elástico, evidenciado pelo valor de ν (ordem da derivada fracionária) ser 0,088, como mostrado na TABELA 8. Ou seja, quando a ordem de diferenciação ν tende a zero, observa-se pela equação (2.97) que essa tende a uma simples relação linear entre tensão e deformação, sem envolver qualquer diferenciação. Portanto, um comportamento típico de combinação de molas em série e paralelo.

Os resultados obtidos anteriormente são confrontados com resultados obtidos por um processo de identificação similar, mas utilizando outro modelo constitutivo. Nesse caso, a metodologia utilizada é apresentada por Pacheco (2015) e refere-se à caracterização de MVEs, no domínio do tempo, porém utilizando as séries de Prony, via modelo constitutivo de Weichert (Eq. 2.48), que são baseadas em equações constitutivas de ordem inteira. Nesse caso, a caracterização foi realizada considerando os tempos de relaxação τ_i fixos, sendo $\tau_1 = 10^{-2}$ s, $\tau_{NT} = 10^4$ s e NT o número total de termos utilizados na série de Prony. Os tempos de relaxação intermediários foram arbitrados através de um espaçamento homogêneo em uma escala logarítmica do tempo.

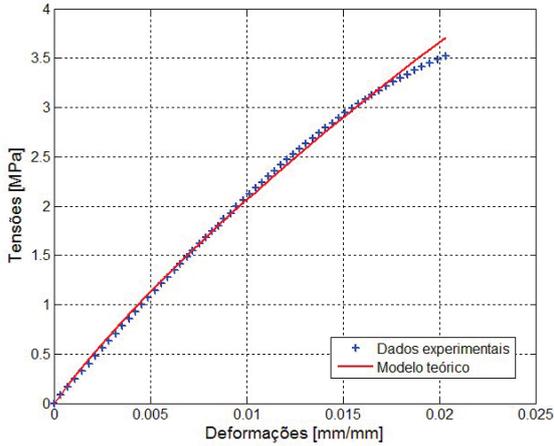
FIGURA 33: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510 CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF.



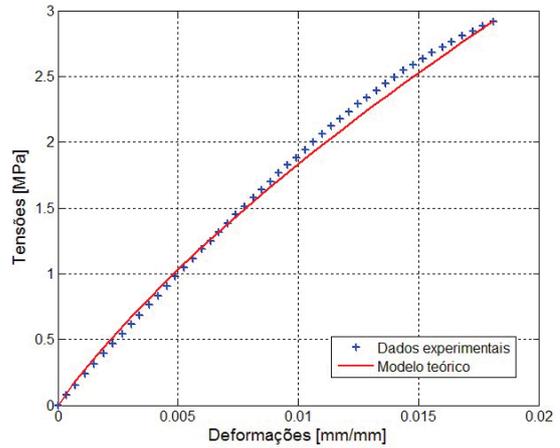
a) $T_1 = -40^\circ\text{C}$



b) $T_2 = 23^\circ\text{C}$

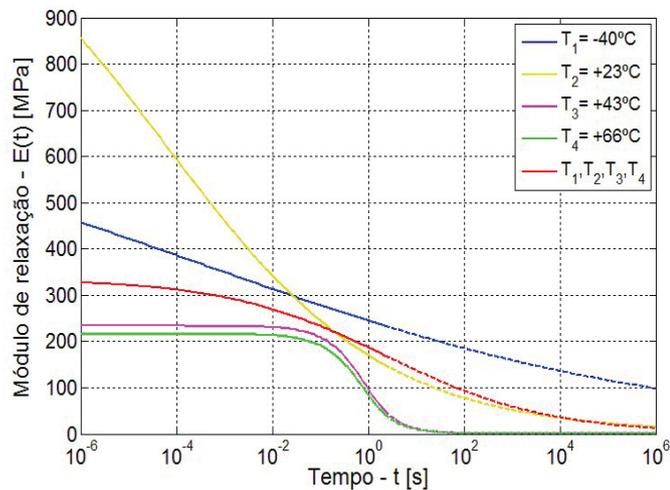


c) $T_3 = 43^\circ\text{C}$



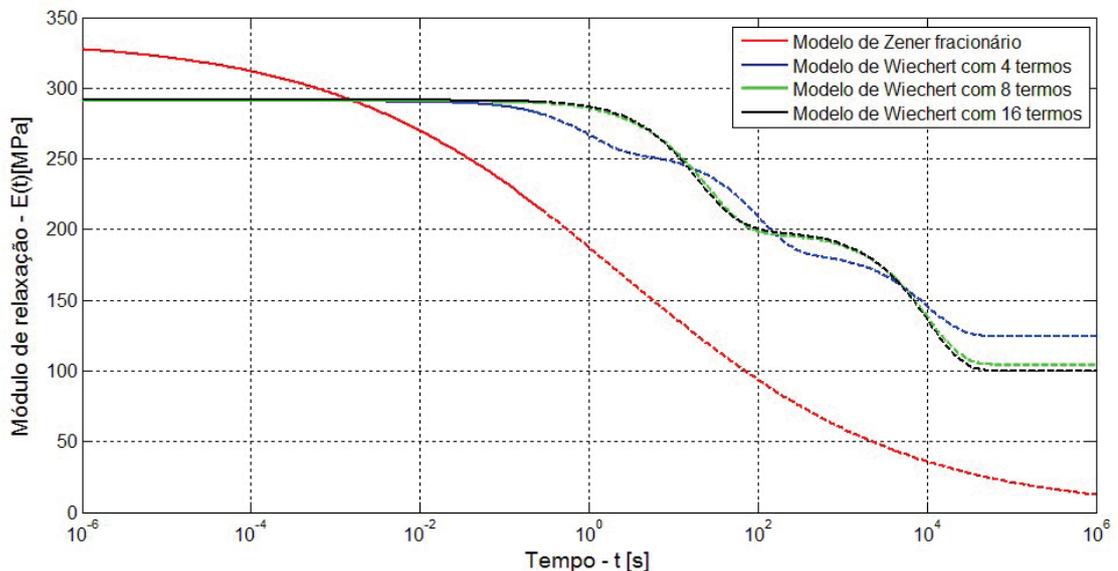
d) $T_4 = 66^\circ\text{C}$

FIGURA 34: FUNÇÃO MÓDULO DE RELAXAÇÃO IDENTIFICADA CONSIDERANDO TAXA DE DEFORMAÇÃO DE 0.0833 ((MM/MM)/S) E TEMPERATURAS DE -40°C , 23°C , 43°C , 66°C E TEMPERATURAS SIMULTÂNEAS.



Na FIGURA 35 são apresentadas as funções módulos de relaxação obtidas na identificação do material CYCOLAC BDT5510 via modelo Weichert (com 4, 8 e 16 termos) e o modelo proposto nesse trabalho. Observa-se que, os resultados obtidos pelas duas metodologias distintas, não mostram convergência. Isso pode ter ocorrido pelo fato de se ter disponível poucas curvas experimentais, que como consequência, fornecem poucas informações a respeito do comportamento do material ao longo do tempo.

FIGURA 35: COMPARAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES MÓDULOS DE RELAXAÇÃO OBTIDAS VIA MODELO DE ZF E O MODELO DE WIECHERT – MATERIAL CYCOLAC BDT5510.



4.1.3 Identificação considerando a influência da pressão via modelo OR.

Para analisar a influência da pressão no comportamento mecânico do polímero CYCOLAC BDT5510, o processo de identificação é realizado considerando a relação tensão-deformação segundo o modelo de ZF sob a influência unicamente da pressão (Eq. 3.14). O fator de deslocamento, α_p , segue o modelo OR, conforme a equação (2.132).

Para o processo de otimização, os limites apresentados na TABELA 5 são utilizados, assim como os limites dos parâmetros característicos do modelo OR, os quais são apresentados na TABELA 10.

Para realizar a plotagem das curvas que sofrem a influência da pressão é utilizado um processo recursivo para a estimativa do $\bar{\alpha}_p$ (Eq. 3.14), evitando dessa

maneira a utilização dos dados experimentais. Para isso, seja $\sigma^Z(t_{p-2})$ e $\sigma^Z(t_{p-1})$ as tensões obtidas pela equação (3.14) nos pontos $p - 2$ e $p - 1$. Utilizando um processo de extrapolação obtém-se a tensão para o ponto t_p , ou seja, $\sigma^{Z_{\text{ext}}}(t_p)$. De $\sigma^{Z_{\text{ext}}}(t_p)$ tem-se a primeira estimativa para $\bar{\alpha}_{p1}$ que é utilizada para calcular a tensão utilizando o modelo de Zener fracionário (Eq. 3.14), $\sigma^{Z_1}(t_p)$. De posse de $\sigma^{Z_1}(t_p)$, esse dado é utilizado para atualizar a segunda estimativa para $\bar{\alpha}_{p2}$ e assim finalmente obter o valor atualizado de $\sigma^Z(t_p)$.

TABELA 10: LIMITES DOS PARÂMETROS CARACTERÍSTICOS DO MATERIAL VIA MODELO OR – MATERIAL CYCOLAC BDT5510.

Parâmetro	Valor
C_1^p [MPa ⁻¹]	$0,0 \leq C_1^p \leq 2,5$
P_0 [MPa]	0,0

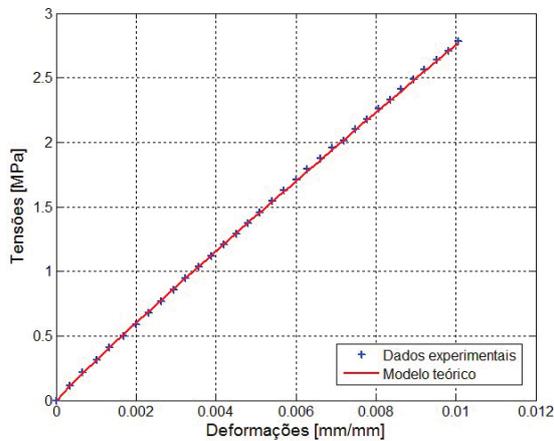
Na TABELA 11 são apresentados os resultados obtidos no processo de identificação individual das curvas nas temperaturas $T_1 = -40^\circ\text{C}$, $T_2 = 23^\circ\text{C}$, $T_3 = 43^\circ\text{C}$ e $T_4 = 66^\circ\text{C}$ e taxa de deformação de 0,0833 mm/mm/s, além dos resultados obtidos nos processos de identificação do material CYCOLAC BDT5510 sem considerar a influência da pressão (TABELA 6). Nota-se que o material em fala, quando em baixas temperaturas (neste caso para $T \leq 23^\circ\text{C}$) não fica evidente a influência da pressão sobre seu comportamento. Isso fica evidente pelo fator da constante $C_1^p = 0$ para $T_1 = -40^\circ\text{C}$ e $T_2 = 23^\circ\text{C}$.

Na FIGURA 36 são apresentadas as curvas resultantes do processo de ajuste apresentados na TABELA 11. Observa-se que há um bom ajuste das curvas teóricas às experimentais, analisadas isoladamente, visto que os erros finais apresentados na TABELA 11 não são superiores a $1,567e^{-3}$.

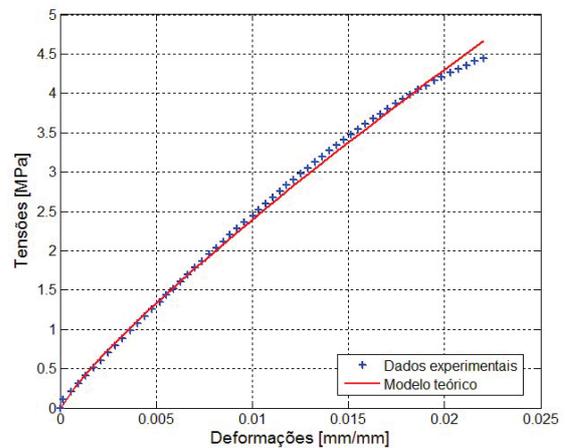
TABELA 11: COMPARAÇÃO DO RESULTADOS NUMÉRICOS DE IDENTIFICAÇÃO: SEM CONSIDERAR A INFLUÊNCIA DA PRESSÃO(S/ OR) E COM A INFLUÊNCIA DA PRESSÃO VIA MODELO OR (C/ OR) - MATERIAL CYCOLAC BDT5510.

	$T_1 = -40^{\circ}\text{C}$		$T_2 = 23^{\circ}\text{C}$		$T_3 = 43^{\circ}\text{C}$		$T_4 = 66^{\circ}\text{C}$	
	S/ OR	C/ OR	S/ OR	C/ OR	S/ OR	C/ OR	S/ OR	C/ OR
$\nu[-]$	0,088	0,092	0,185	0,193	0,98	0,621	0,98	0,504
$E_{\infty}[\text{MPa}]$	6,296	4,089	1,987	9,903	0,092	1,375	0,118	0,741
$r_{\mu}[-]$	116,916	166,382	665,837	120,364	2541,196	163,725	1809,417	284,023
$\tau_a[\text{s}]$	$1,481\text{e}^{-4}$	$9,222\text{e}^{-4}$	$2,201\text{e}^{-5}$	$4,812\text{e}^{-5}$	$4,727\text{e}^{-1}$	12,967	$4,337\text{e}^{-1}$	23,311
$T_0 [^{\circ}\text{C}]$	-40	23	23	23	43	23	66	23
$C_1^p[\text{MPa}^{-1}]$	---	0,000	---	0,000	---	1,719	---	2,226
$E_0[\text{MPa}]$	742,399	684,425	1325,005	1201,868	233,882	226,497	214,629	211,202
$D_{AG}^2[-]$	$7,344\text{e}^{-5}$	$1,523\text{e}^{-4}$	$2,011\text{e}^{-3}$	$2,857\text{e}^{-3}$	$5,779\text{e}^{-4}$	$2,173\text{e}^{-5}$	$3,524\text{e}^{-4}$	$8,986\text{e}^{-5}$
$D_{PNL}^2[-]$	$6,043\text{e}^{-5}$	$6,167\text{e}^{-5}$	$1,559\text{e}^{-3}$	$1,567\text{e}^{-3}$	$2,985\text{e}^{-4}$	$1,214\text{e}^{-5}$	$2,583\text{e}^{-4}$	$8,772\text{e}^{-5}$
Tempo[s]	1568	4146	5537	8075	439	3315	458	3815

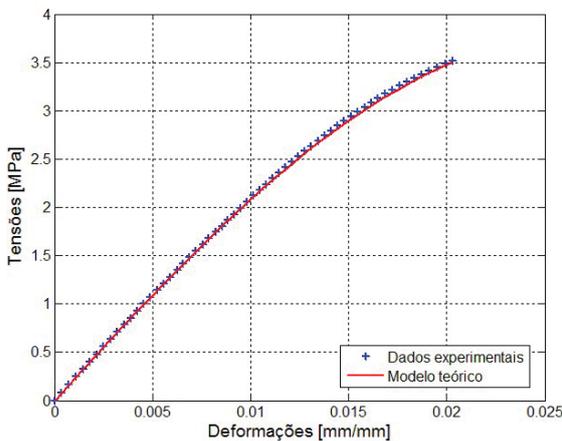
FIGURA 36: AJUSTE (INDIVIDUAL DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510 CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA PRESSÃO VIA MODELO OR.



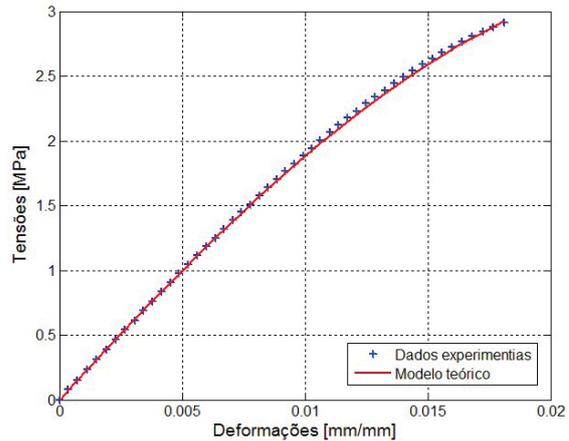
a) $T_1 = -40^{\circ}\text{C}$



b) $T_2 = 23^{\circ}\text{C}$



c) $T_3 = 43^{\circ}\text{C}$



d) $T_4 = 66^{\circ}\text{C}$

4.1.4 Identificação considerando a influência da temperatura e pressão via modelo FMT.

Nesta seção, as influências da temperatura e pressão sobre o comportamento material são analisadas simultaneamente. Neste caso, o fator de deslocamento, α_{TP} , segue o modelo Fillers-Moonan-Tschoegl (Eq. 2.133). Assim, o problema de otimização é resolvido tendo por base a relação tensão-deformação segundo o modelo de ZF e considerando a influência da temperatura e pressão, conforme a equação (3.14).

Para o processo de otimização do material CYCOLAC BDT5510, são utilizados os limites apresentados na TABELA 5, bem como os limites dos parâmetros característicos do material via modelo FMT, os quais podem ser

visualizados na TABELA 12. A temperatura e pressão de referência, são respectivamente, 23°C e 0,0 MPa.

Na TABELA 13 são apresentados os resultados obtidos no processo de caracterização que consistem na análise individual e no ajuste simultâneo das curvas para as temperaturas de $T_1 = -40^\circ\text{C}$, $T_2 = 23^\circ\text{C}$, $T_3 = 43^\circ\text{C}$ e $T_4 = 66^\circ\text{C}$ e taxa de deformação de 0,0833 mm/mm/s. Os resultados gráficos obtidos do ajuste simultâneo das curvas podem ser visualizados na FIGURA 37, os quais demonstram um bom ajuste entre o modelo teórico e os dados experimentais.

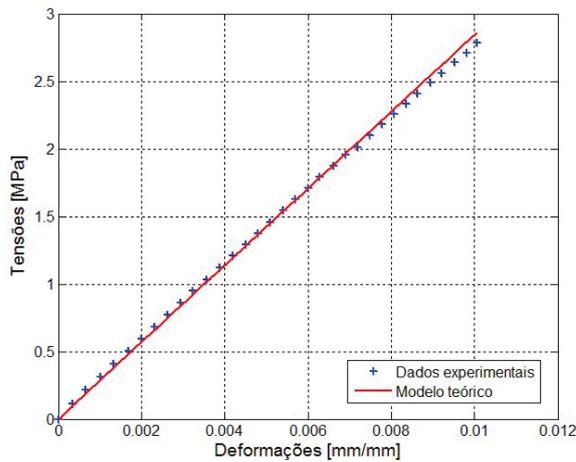
TABELA 12: LIMITES DOS PARÂMETROS CARACTERÍSTICOS DO MATERIAL VIA MODELO FMT – MATERIAL CYCOLAC BDT5510.

Parâmetros	Valores
C_1^{TP} [-]	$0 \leq C_1^{TP} \leq 100$
C_2^{TP} [°C]	$0 \leq C_2^{TP} \leq 200$
C_3^{TP} [°C]	$0 \leq C_3^{TP} \leq 800$
C_4^{TP} [MPa ⁻¹]	$0 \leq C_4^{TP} \leq 2,00$
C_5^{TP} [°C]	$0 \leq C_5^{TP} \leq 500$
C_6^{TP} [MPa ⁻¹]	$0 \leq C_6^{TP} \leq 2,00$
T_0 [°C]	23
P_0 [MPa]	0,0

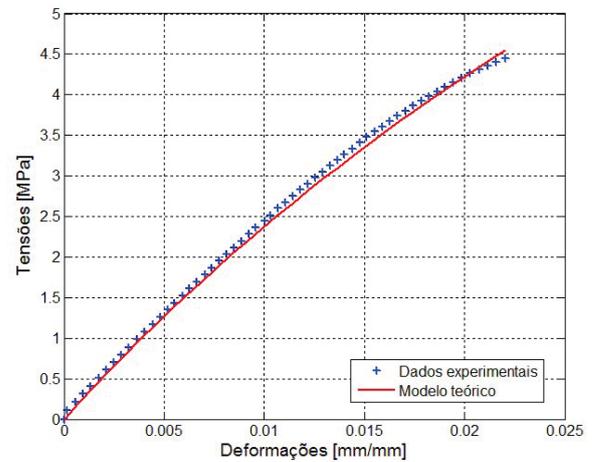
TABELA 13: RESULTADOS NUMÉRICOS DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO FMT - MATERIAL CYCOLAC BDT5510.

Temperatura	$T_1 = -40^{\circ}\text{C}$	$T_2 = 23^{\circ}\text{C}$	$T_3 = 43^{\circ}\text{C}$	$T_4 = 66^{\circ}\text{C}$	$T_1, T_2, T_3, \text{ e } T_4$
$\nu[-]$	0,125	0,139	0,684	0,121	0,549
$E_{\infty}[\text{MPa}]$	1,412	4,965	0,379	29,831	2,646
$r_{\mu}[-]$	860,991	291,707	601,501	10,895	106,518
$\tau_a[\text{s}]$	0,943	0,502	15,306	11,766	2,012
$C_1^{\text{TP}}[-]$	5,039	66,419	5,842	7,504	2,171
$C_2^{\text{TP}}[^{\circ}\text{C}]$	9,877	106,043	166,081	88,927	62,705
$C_3^{\text{TP}}[^{\circ}\text{C}]$	498,559	666,365	238,886	204,842	393,352
$C_4^{\text{TP}}[\text{MPa}^{-1}]$	0,539	0,661	0,543	1,019	0,039
$C_5^{\text{TP}}[^{\circ}\text{C}]$	476,518	204,495	385,281	427,009	142,479
$C_6^{\text{TP}}[\text{MPa}^{-1}]$	0,972	0,399	0,287	0,592	$3,393\text{e}^{-4}$
$E_0[\text{MPa}]$	1217,131	1453,290	228,348	354,839	284,480
$D_{AG}^2[-]$	$5,919\text{e}^{-5}$	$7,513\text{e}^{-4}$	$2,899\text{e}^{-4}$	$5,847\text{e}^{-4}$	$4,615\text{e}^{-3}$
$D_{\text{PNL}}^2[-]$	$2,456\text{e}^{-5}$	$7,012\text{e}^{-4}$	$5,633\text{e}^{-6}$	$9,791\text{e}^{-6}$	$2,902\text{e}^{-3}$
Tempo [s]	5191	10893	11832	11926	11927

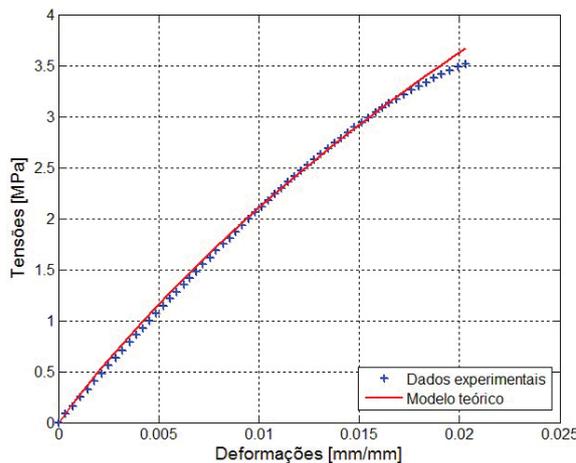
FIGURA 37: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510 CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO FMT.



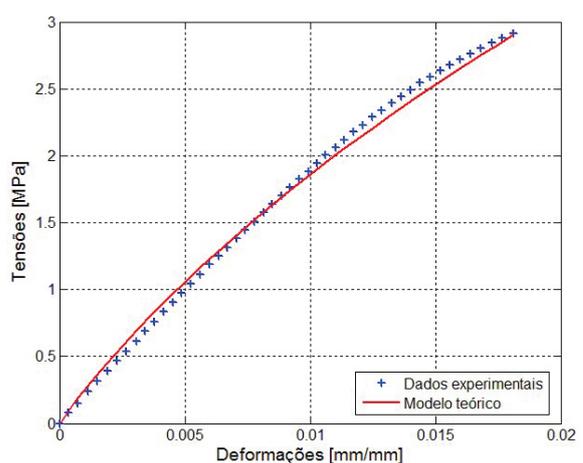
a) $T_1 = -40^\circ\text{C}$



b) $T_2 = 23^\circ\text{C}$



c) $T_3 = 43^\circ\text{C}$



d) $T_4 = 66^\circ\text{C}$

4.1.5 Identificação considerando a influência da temperatura e pressão via modelo UFPR.

Nesta seção, o problema de otimização é resolvido tendo por base a relação tensão-deformação segundo o modelo de ZF e considerando a influência da temperatura e pressão simultaneamente, conforme a equação (3.4). Neste caso, o fator de deslocamento α_{TP} segue o modelo UFPR, conforme a equação (2.142).

Para o processo de otimização do polímero CYCOLAC BDT5510, os limites apresentados na TABELA 5 são utilizados, além dos limites dos parâmetros característicos do material via modelo UFPR, que são apresentados na TABELA 14. A temperatura e pressão de referência, são respectivamente, 23°C e $0,0\text{ MPa}$.

TABELA 14: LIMITES DOS PARÂMETROS CARACTERÍSTICOS DO MATERIAL VIA MODELO UFPR – MATERIAL CYCOLAC BDT5510.

Parâmetros	Valores
C_1^{TP} [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]	$0,0 \leq C_1^{TP} \leq 200$
C_2^{TP} [MPa^{-1}]	$0,0 \leq C_2^{TP} \leq 4,0$
C_3^{TP} [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]	$0,0 \leq C_3^{TP} \leq 4000$
C_4^{TP} [MPa^{-1}]	$0,0 \leq C_4^{TP} \leq 4,0$
T_0 [$^{\circ}\text{C}$]	23
P_0 [MPa]	0,0

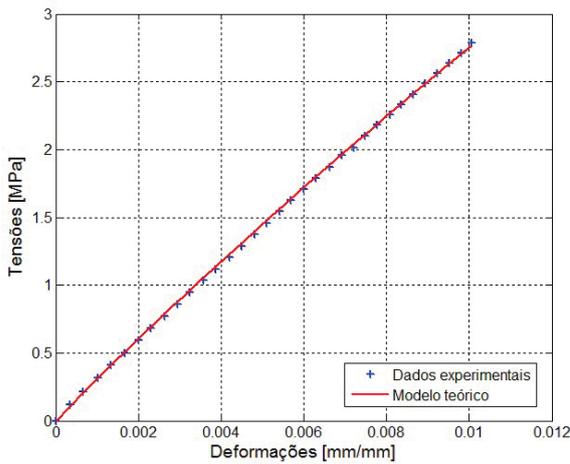
Na TABELA 15 são apresentados os resultados decorrentes do processo de identificação que consistem na análise individual e simultânea das curvas, nas temperaturas de $T_1 = -40^{\circ}\text{C}$, $T_2 = 23^{\circ}\text{C}$, $T_3 = 43^{\circ}\text{C}$ e $T_4 = 66^{\circ}\text{C}$ e taxa de deformação de 0,0833 mm/mm/s.

TABELA 15: RESULTADOS NUMÉRICOS DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO UFPR - MATERIAL CYCOLAC BDT5510.

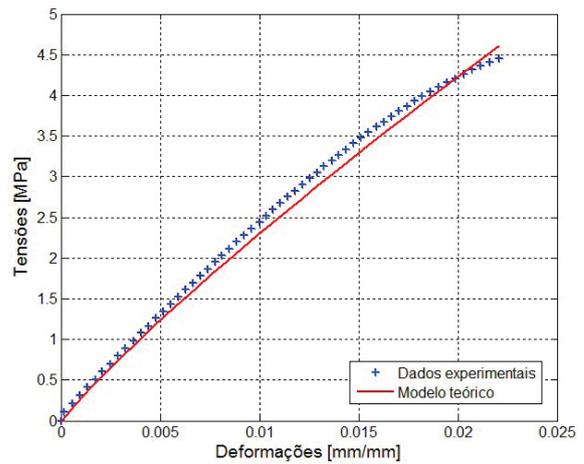
Temperatura	$T_1 = -40^{\circ}\text{C}$	$T_2 = 23^{\circ}\text{C}$	$T_3 = 43^{\circ}\text{C}$	$T_4 = 66^{\circ}\text{C}$	$T_1, T_2, T_3, \text{ e } T_4$
ν [-]	0,119	0,240	0,98	0,606	0,207
E_{∞} [MPa]	1,070	65,841	0,398	6,016	29,716
r_{μ} [-]	485,120	17,705	586,183	33,951	9,778
τ_a [s]	0,205	$5,683e^{-5}$	0,419	17,404	12,921
C_1^{TP} [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]	0,000	0,015	165,069	$8,278e^{-3}$	$4,071e^{-2}$
C_2^{TP} [MPa^{-1}]	0,000	0,000	$8,921e^{-3}$	1,766	1,303
C_3^{TP} [$^{\circ}\text{C}^{-1}$]	$1,147e^{-5}$	$4,254e^{-5}$	3177,991	$1,181e^{-4}$	$1,835e^{-7}$
C_4^{TP} [MPa^{-1}]	2,281	1,603	$9,773e^{-3}$	0,000	0,216
E_0 [MPa]	520,148	1231,555	233,698	210,265	320,279
D_{AG}^2 [-]	$1,171e^{-4}$	$2,386e^{-3}$	$5,173e^{-4}$	$9,532e^{-5}$	$3,219e^{-3}$
D_{PNL}^2 [-]	$6,853e^{-5}$	$1,485e^{-3}$	$2,987e^{-4}$	$8,889e^{-5}$	$3,021e^{-3}$
Tempo [s]	1131	9838	1053	1811	5679

Na FIGURA 38 tem-se a representação gráfica dos dados experimentais (+) e as suas correspondentes curvas tensão-deformação considerando o modelo constitutivo de Zener fracionário (Eq. 3.14), com os parâmetros materiais obtidos através do ajuste simultâneo das curvas (TABELA 15).

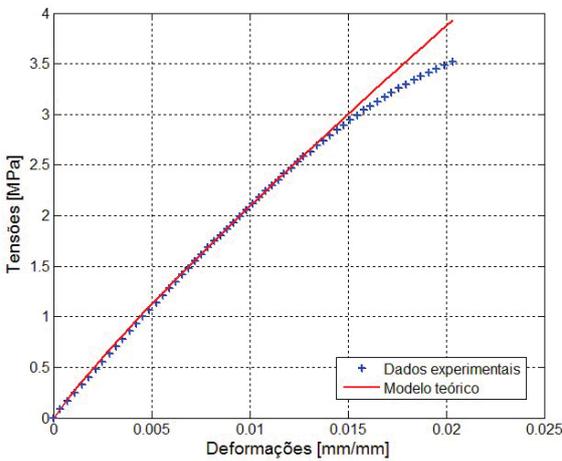
FIGURA 38: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510 CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO UFPR.



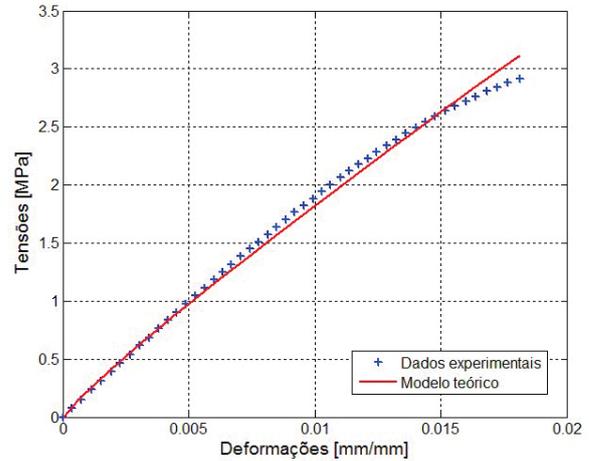
a) $T_1 = -40^{\circ}\text{C}$



b) $T_2 = 23^{\circ}\text{C}$



c) $T_3 = 43^{\circ}\text{C}$



d) $T_4 = 66^{\circ}\text{C}$

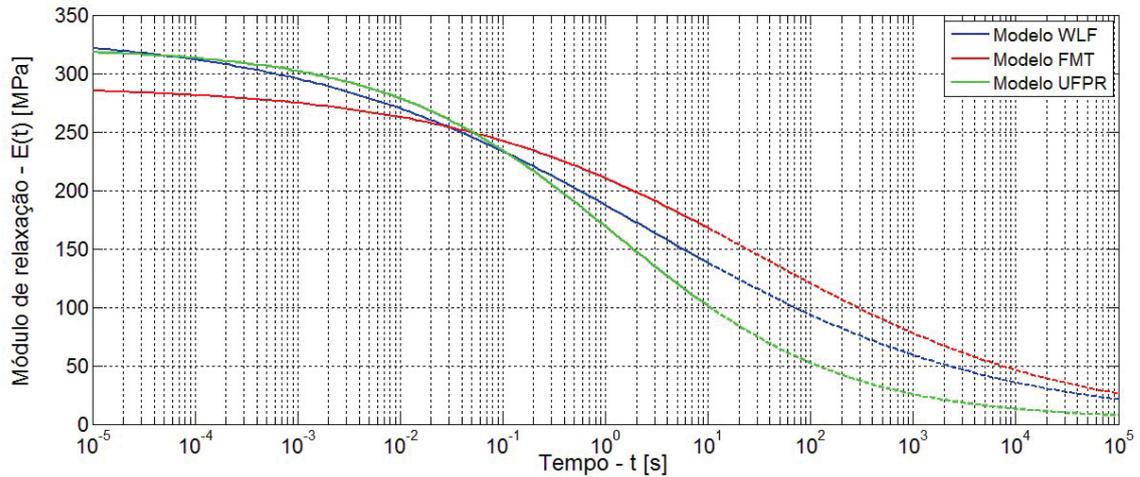
Na TABELA 16 estão reescritos os resultados obtidos nos ensaios simultâneos, apresentados nas TABELAS 8, 13 e 15. Esses podem ser comparados com a finalidade de verificar a influência da pressão. Ao realizar essa análise, observa-se que os resultados obtidos na distância total quadrática, D_{PNL}^2 , apresentam menores valores nos casos em que a pressão é considerada, isto é, nos modelos FMT e UFPR.

Considerando que os ensaios apresentados na TABELA 16 fossem realizados na temperatura e pressão de referência, isto é, $\alpha = \alpha_T = \alpha_{TP} = 1$, é possível obter as respectivas funções módulo de relaxação, que podem ser visualizadas na FIGURA 39. Observa-se, na FIGURA 39, a convergência do parâmetro E_0 entre os modelos WLF e UFPR e, a convergência do parâmetro E_∞ entre os modelos WLF e FMT.

TABELA 16: COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS DO AJUSTE SIMULTÂNEO DAS CURVAS, DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF E TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELOS FMT E UFPR - MATERIAL CYCOLAC BDT5510.

Parâmetros	Modelo Considerado		
	WLF	FMT	UFPR
ν [-]	0,256	0,284	0,207
E_∞ [MPa]	0,613	0,469	29,716
r_μ [-]	545,069	615,418	9,778
τ_a [s]	1,646	19,999	12,921
C_1^T [-]	174,008	---	---
C_2^T [°C]	7074,586	---	---
$C_1^{TP(FMT)}$ [-]	---	4,166	---
$C_2^{TP(FMT)}$ [°C]	---	65,477	---
$C_3^{TP(FMT)}$ [°C]	---	294,091	---
$C_4^{TP(FMT)}$ [MPa ⁻¹]	---	0,547	---
$C_5^{TP(FMT)}$ [°C]	---	496,031	---
$C_6^{TP(FMT)}$ [MPa ⁻¹]	---	0,351	---
$C_1^{TP(UFPR)}$ [°C ⁻¹]	---	---	4,071e ⁻²
$C_2^{TP(UFPR)}$ [MPa ⁻¹]	---	---	1,303
$C_3^{TP(UFPR)}$ [°C ⁻¹]	---	---	1,835e ⁻⁷
$C_4^{TP(UFPR)}$ [MPa ⁻¹]	---	---	0,216
E_0 [MPa]	334,740	289,100	320,279
D_{AG}^2 [-]	3,283e ⁻³	3,513e ⁻³	3,219e ⁻³
D_{PNL}^2 [-]	3,282e ⁻³	2,739e ⁻³	3,021e ⁻³
Tempo [s]	1293	7700	5679

FIGURA 39: COMPARAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES MÓDULOS DE RELAXAÇÃO DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510 OBTIDAS VIA MODELOS WLF, FMT E UFPR.



4.2 RESULTADOS NUMÉRICOS: POLÍMERO STAMAX 40YM240

Nesta seção são apresentados e discutidos os resultados obtidos na caracterização da função módulo de relaxação do material STAMAX 40YM240. Os resultados dos testes experimentais desse material são mostrados no Apêndice 2. Os limites dos parâmetros materiais da equação constitutiva do modelo de Zener fracionário utilizados no processo de otimização para a identificação podem ser vistos na TABELA 17.

TABELA 17: LIMITES DOS PARÂMETROS MATERIAIS DA EQUAÇÃO CONSTITUTIVA DO MODELO DE ZF UTILIZADOS NO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO DO MATERIAL STAMAX 40YM240.

Parâmetro	Valor
ν [-]	$0,02 \leq \nu \leq 0,98$
E_{∞} [MPa]	$0,00 \leq E_{\infty} \leq 200,00$
r_{μ} [-]	$1,001 \leq r_{\mu} \leq 6000$
τ_a [s]	$1e^{-8} \leq \tau_a \leq 10,00$

4.2.1 Identificação considerando a influência da temperatura via modelo WLF

Para analisar a influência da temperatura no comportamento mecânico do polímero STAMAX 40YM240, o problema de otimização é resolvido considerando a relação tensão-deformação segundo o modelo de ZF sob a influência da

temperatura (Eq. 3.4). O fator de deslocamento, α_T , segue o modelo WLF conforme a equação (2.120). Os limites mostrados na TABELA 17 e na TABELA 18 são utilizados para o processo de otimização.

TABELA 18: LIMITES DOS PARÂMETROS CARACTERÍSTICOS DO MATERIAL VIA MODELO WLF – MATERIAL STAMAX 40YM240.

Parâmetro	Valor
C_1^T [-]	$0,0 \leq C_1^T \leq 200$
C_2^T [°C]	$0,0 \leq C_2^T \leq 400$
T_0 [°C]	23

São realizados ajustes individuais entre os dados experimentais e aqueles obtidos através do modelo teórico de Zener fracionário. Para isso, utilizam-se dados experimentais disponíveis nas taxas de deformação de $\dot{\epsilon}_A = 0,0001$, $\dot{\epsilon}_B = 0,01$, $\dot{\epsilon}_C = 0,1$ e $\dot{\epsilon}_D = 1,0000$ mm/mm/s e com o material ensaiado nas temperaturas de $T_1 = -35^\circ\text{C}$, $T_2 = 23^\circ\text{C}$ e $T_3 = 80^\circ\text{C}$. Na TABELA 19 são apresentados os resultados obtidos nos ensaios combinando três situações:

- i) uma taxa lenta ($\dot{\epsilon}_A$) nas temperaturas T_1 , T_2 e T_3 ,
- ii) uma taxa rápida ($\dot{\epsilon}_D$) nas temperaturas T_1 , T_2 e T_3 , e
- iii) todas as taxas e temperaturas simultaneamente.

As FIGURAS 40, 41 e 42 mostram as representações gráficas dos dados experimentais e as suas correspondentes curvas tensão-deformação considerando o modelo constitutivo de ZF (Eq. 3.4), para os resultados obtidos do ajuste simultâneo das taxas $\dot{\epsilon}_A$, $\dot{\epsilon}_B$, $\dot{\epsilon}_C$ e $\dot{\epsilon}_D$ com as temperaturas T_1 , T_2 e T_3 , vistos na TABELA 20.

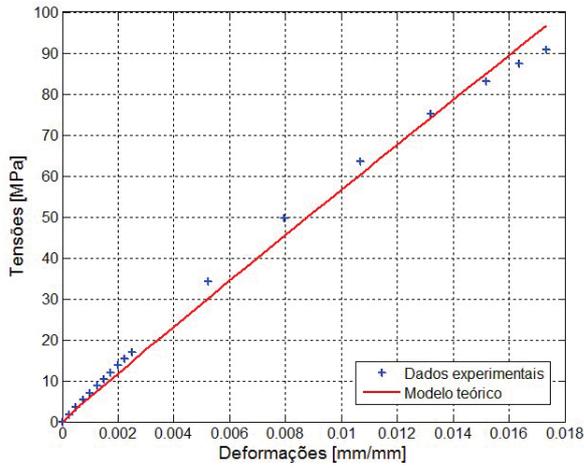
Analisando os resultados gráficos das FIGURAS 40, 41 e 42 observa-se que não ocorre um perfeito ajuste entre as curvas teóricas e os dados experimentais. Isso poderia ser explicado pelo fato de que este material é um polímero composto. Neste caso, este é composto que contém 40% de fibra de vidro (Anexo 2). Pacheco (2013) e Sousa (2015) identificam esse mesmo material, porém usando uma metodologia baseada em séries de Prony, e tiveram a mesma conclusão a respeito desse material.

Portanto, este material não atende satisfatoriamente aos princípios da superposição tempo-temperatura por, provavelmente, não se tratar de um material termorreologicamente simples.

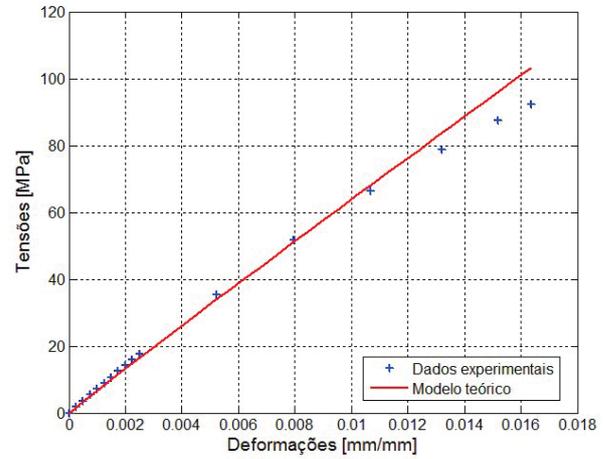
TABELA 19: RESULTADOS NUMÉRICOS DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF - MATERIAL STAMAX 40YM240.

Taxa	$\dot{\epsilon}_A$	$\dot{\epsilon}_D$	$\dot{\epsilon}_A, \dot{\epsilon}_B, \dot{\epsilon}_C$ e $\dot{\epsilon}_D$
Temperatura	T_1, T_2 e T_3	T_1, T_2 e T_3	T_1, T_2 e T_3
$\nu[-]$	0,182	0,086	0,052
$E_\infty[\text{MPa}]$	2,056	5,087	5,404
$r_\mu[-]$	5471,289	2579,809	2252,255
$\tau_a[\text{s}]$	1,179	$3,755e^{-6}$	$4,289e^{-7}$
$C_1^T[-]$	9,149	16,425	34,411
$C_2^T[^\circ\text{C}]$	324,444	275,667	343,121
$E_0[\text{MPa}]$	11251,026	13128,575	12176,590
$D_{AG}^2[-]$	$3,139e^{-3}$	$1,205e^{-3}$	$1,043e^{-2}$
$D_{PNL}^2[-]$	$3,078e^{-3}$	$7,983e^{-4}$	$8,986e^{-3}$
Tempo [s]	12366	5597	9371

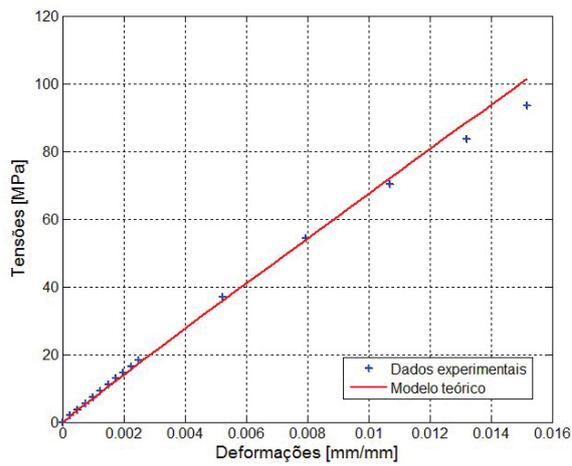
FIGURA 40: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE -35°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO, CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF – MATERIAL STAMAX 40YM240.



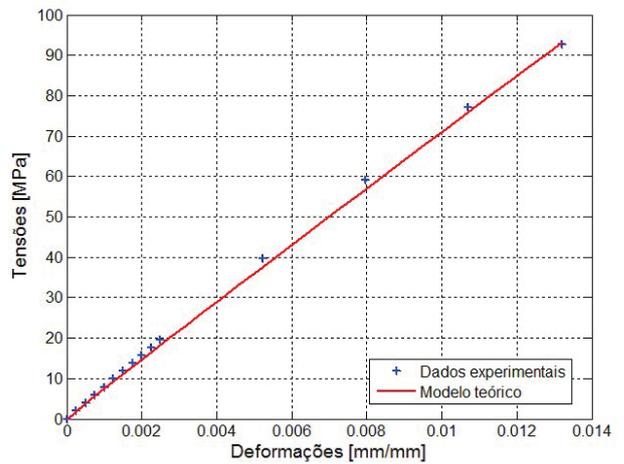
a) $\dot{\epsilon}_A = 0,0001 \text{ mm/mm/s}$



b) $\dot{\epsilon}_B = 0,01 \text{ mm/mm/s}$

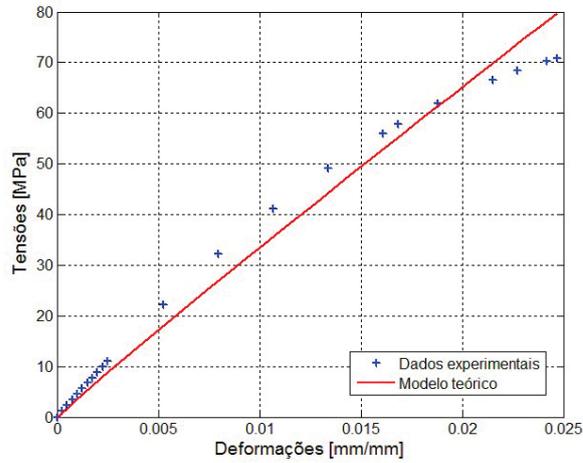


c) $\dot{\epsilon}_C = 0,10 \text{ mm/mm/s}$

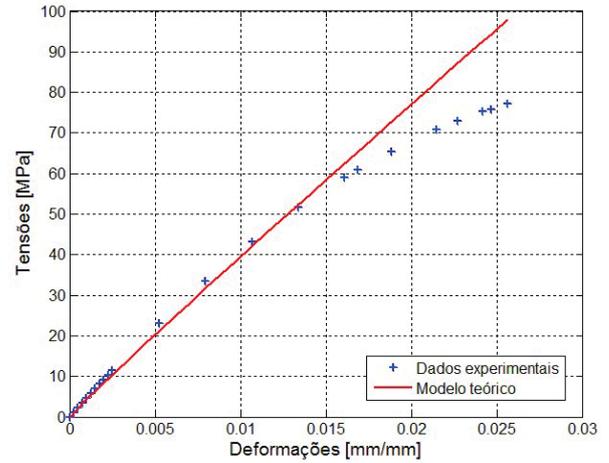


d) $\dot{\epsilon}_D = 1,00 \text{ mm/mm/s}$

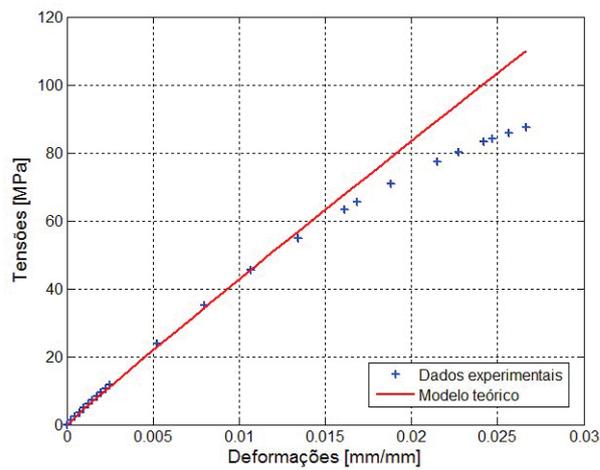
FIGURA 41: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE 23°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO, CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF – MATERIAL STAMAX 40YM240.



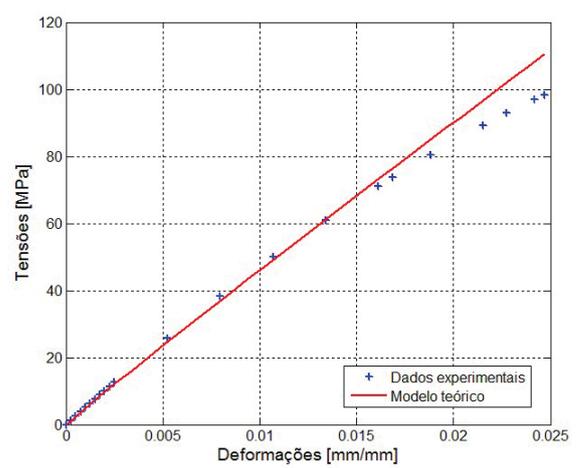
a) $\dot{\epsilon}_A = 0,0001$ mm/mm/s



b) $\dot{\epsilon}_B = 0,01$ mm/mm/s

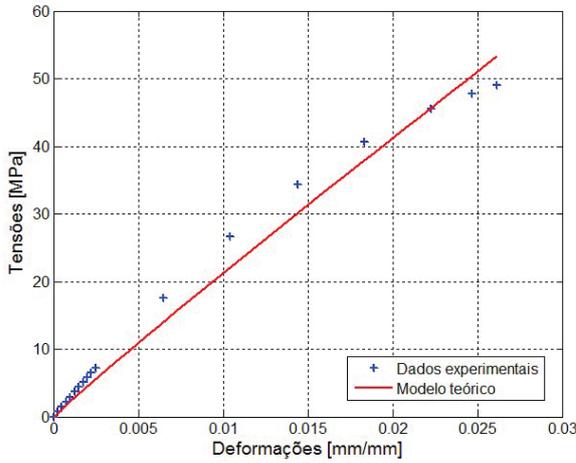


c) $\dot{\epsilon}_C = 0,10$ mm/mm/s

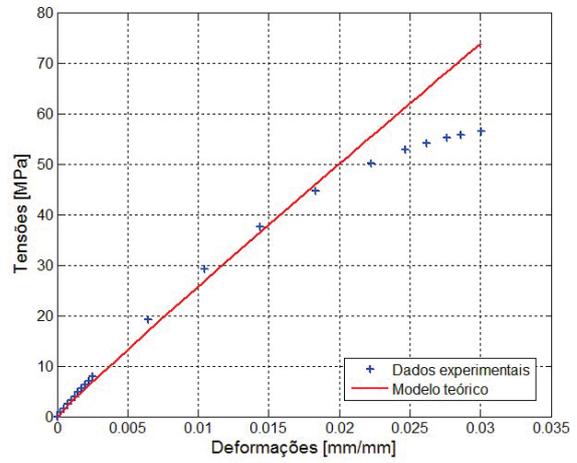


d) $\dot{\epsilon}_D = 1,00$ mm/mm/s

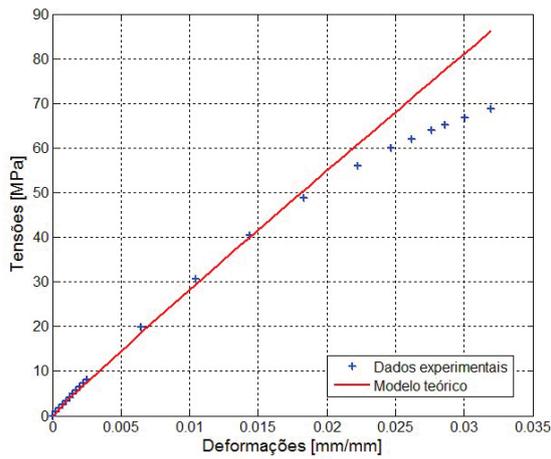
FIGURA 42: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE 80°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO, CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF – MATERIAL STAMAX 40YM240.



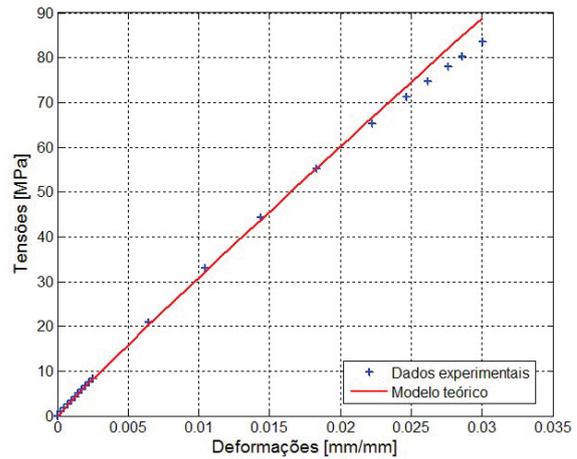
a) $\dot{\epsilon}_A = 0,0001 \text{ mm/mm/s}$



b) $\dot{\epsilon}_B = 0,01 \text{ mm/mm/s}$



c) $\dot{\epsilon}_C = 0,10 \text{ mm/mm/s}$



d) $\dot{\epsilon}_D = 1,00 \text{ mm/mm/s}$

4.2.2 Identificação considerando a influência da temperatura e pressão via modelo FMT

Nesta seção, as influências da temperatura e pressão sobre o comportamento mecânico do polímero STAMAX 40YM240 são analisadas simultaneamente. O fator de deslocamento α_{TP} segue o modelo FMT, conforme a equação (2.133). O processo de otimização é resolvido considerando a relação tensão-deformação segundo o modelo de ZF e considerando a influência da temperatura e pressão, conforme a equação (3.14). Os limites dos parâmetros

materiais utilizados no processo de otimização são os apresentados nas TABELAS 12 e 17.

Na TABELA 20 são mostrados os resultados obtidos no ensaio simultâneo de todas as curvas considerando a temperatura referência de 23°C e pressão de referência de 0,0 MPa.

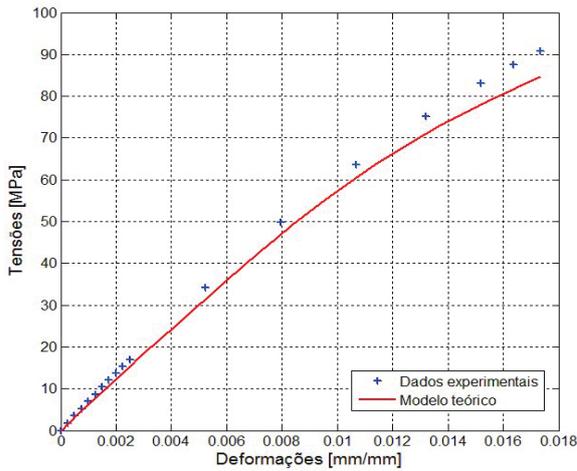
TABELA 20: RESULTADOS NUMÉRICOS DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO FMT - MATERIAL STAMAX 40YM240.

Taxa	$\dot{\epsilon}_A, \dot{\epsilon}_B, \dot{\epsilon}_C$ e $\dot{\epsilon}_D$
Temperatura	T_1, T_2 e T_3
ν [-]	0,056
E_∞ [MPa]	9,663
r_μ [-]	1314,308
τ_a [s]	$4,769e^{-6}$
C_1^{TP} [-]	20,267
C_2^{TP} [°C]	176,269
C_3^{TP} [°C]	235,725
C_4^{TP} [MPa ⁻¹]	0,021
C_5^{TP} [°C]	422,870
C_6^{TP} [MPa ⁻¹]	$1,009 e^{-2}$
E_0 [MPa]	12709,821
D_{AG}^2 [-]	$6,286e^{-3}$
D_{PNL}^2 [-]	$5,169e^{-3}$
Tempo [s]	12106

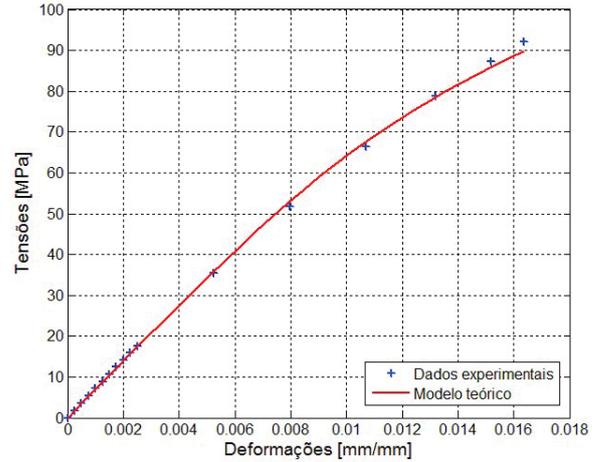
Nas FIGURAS 43, 44 e 45, são ilustrados os dados experimentais (+) e as respectivas curvas tensão-deformação considerando o modelo constitutivo de ZF (Eq. 3.14). Novamente, observa-se que não ocorre um bom ajuste do modelo teórico em relação aos dados experimentais, pelo mesmo motivo levantado anteriormente: o material analisado é um polímero composto. Assim, por se tratar da influência da pressão, conclui-se que não fica evidente que o material STAMAX 40YM240 possa

ser classificado como piezorreologicamente simples, não obedecendo, portanto, o princípio da superposição tempo-pressão.

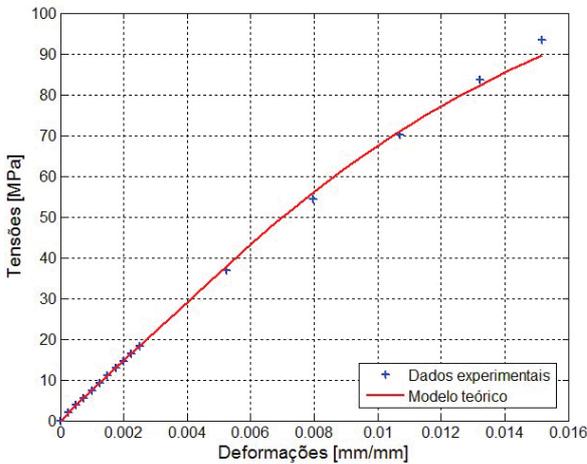
FIGURA 43: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE -35°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO FMT – MATERIAL STAMAX 40YM240.



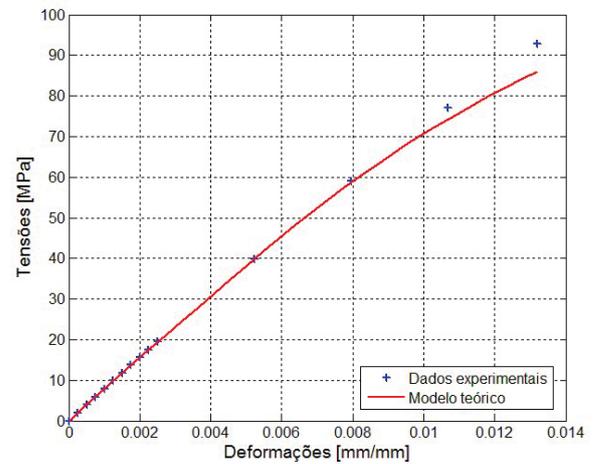
a) $\dot{\epsilon}_A = 0,0001 \text{ mm/mm/s}$



b) $\dot{\epsilon}_B = 0,01 \text{ mm/mm/s}$

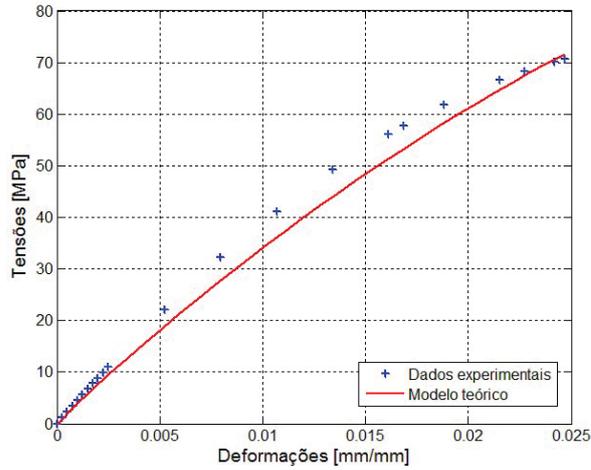


c) $\dot{\epsilon}_C = 0,10 \text{ mm/mm/s}$

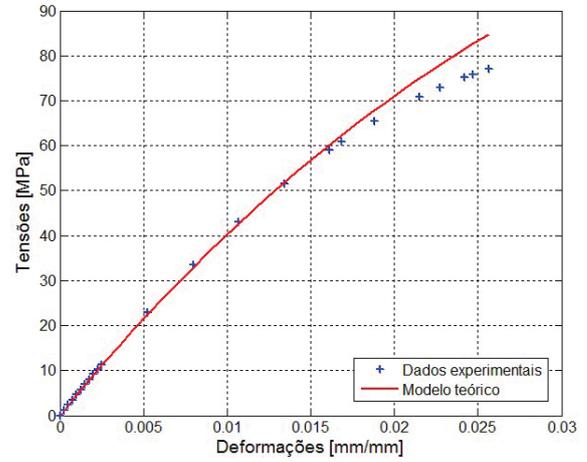


d) $\dot{\epsilon}_D = 1,00 \text{ mm/mm/s}$

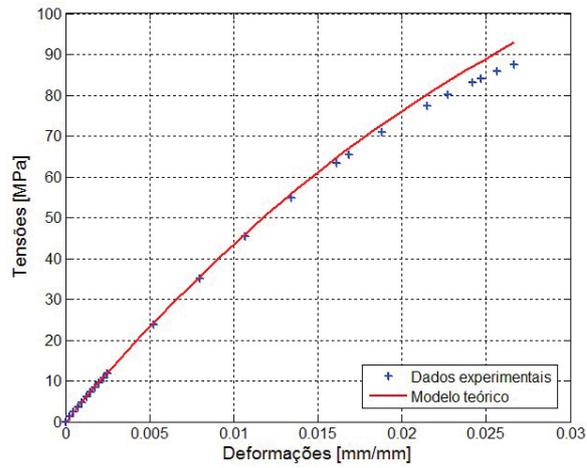
FIGURA 44: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE 23°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO FMT – MATERIAL STAMAX 40YM240.



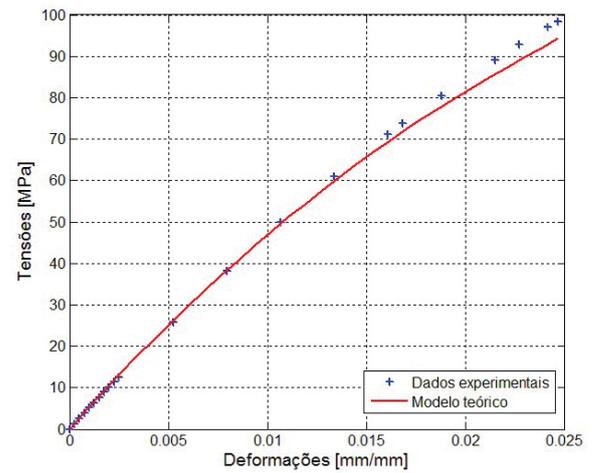
a) $\dot{\epsilon}_A = 0,0001$ mm/mm/s



b) $\dot{\epsilon}_B = 0,01$ mm/mm/s

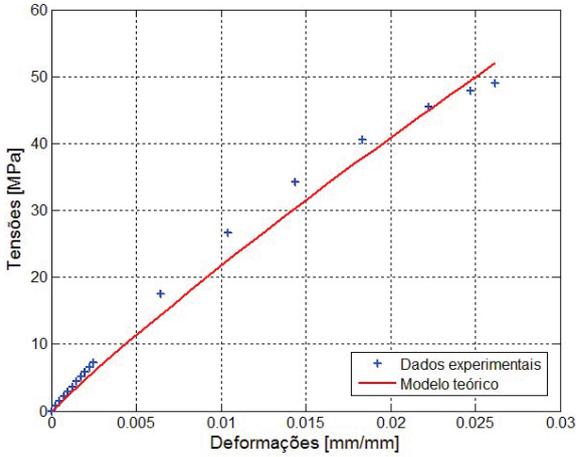


c) $\dot{\epsilon}_C = 0,10$ mm/mm/s

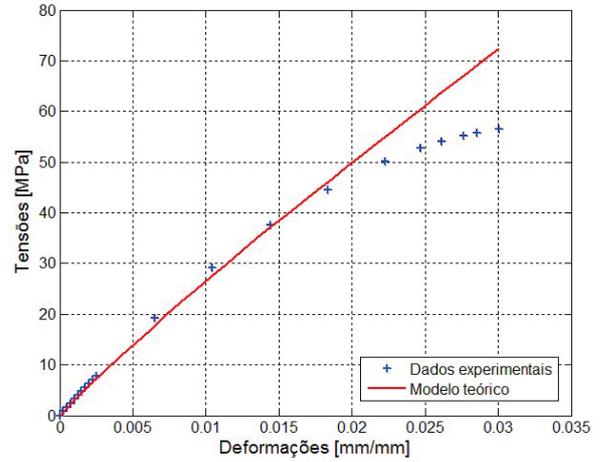


d) $\dot{\epsilon}_D = 1,00$ mm/mm/s

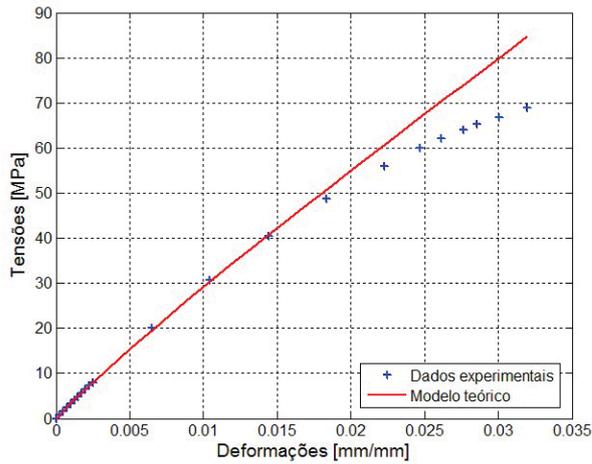
FIGURA 45: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE 80°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO FMT – MATERIAL STAMAX 40YM240.



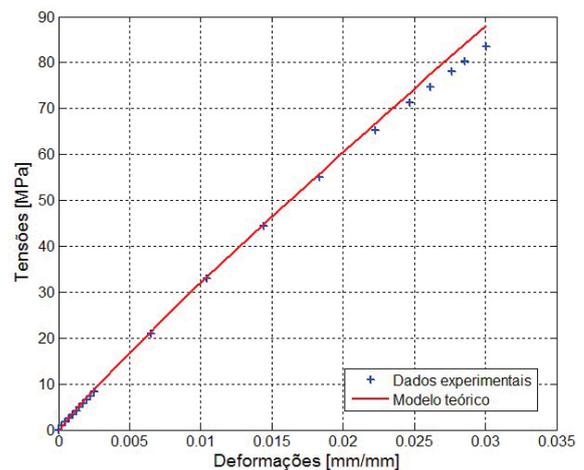
a) $\dot{\epsilon}_A = 0,0001 \text{ mm/mm/s}$



b) $\dot{\epsilon}_B = 0,01 \text{ mm/mm/s}$



c) $\dot{\epsilon}_C = 0,10 \text{ mm/mm/s}$



d) $\dot{\epsilon}_D = 1,00 \text{ mm/mm/s}$

4.2.3 Identificação considerando a influência da temperatura e pressão via modelo UFPR

Assim como na seção anterior, o processo de identificação é aplicado considerando a relação tensão-deformação segundo o modelo de ZF e a influência simultânea da temperatura e pressão (Eq. 3.14). Porém, o modelo considerado é o UFPR (Eq. 2.142). Os limites dos parâmetros utilizados no processo de otimização são aqueles mostrados nas TABELAS 14 e 17.

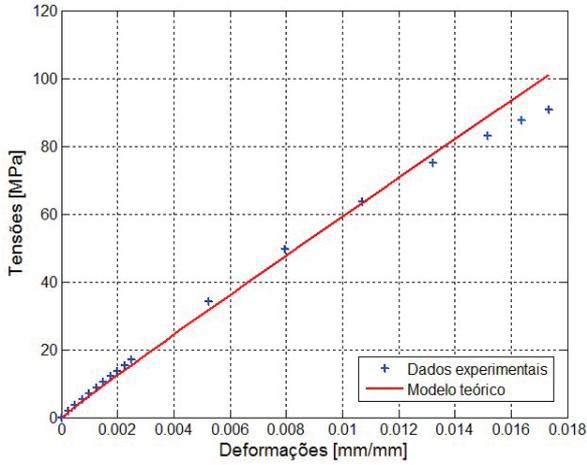
Na TABELA 21 são apresentados os resultados obtidos no ensaio simultâneo de todas as curvas considerando a temperatura referência de 23°C e pressão de referência de 0,0 MPa.

TABELA 21: RESULTADOS NUMÉRICOS DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO UFPR - MATERIAL STAMAX 40YM240.

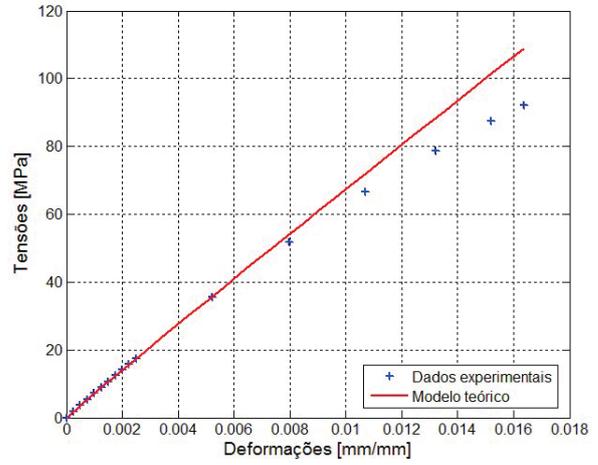
Taxa	$\dot{\epsilon}_A, \dot{\epsilon}_B, \dot{\epsilon}_C$ e $\dot{\epsilon}_D$
Temperatura	T_1, T_2 e T_3
ν [-]	0,059
E_∞ [MPa]	159,041
r_μ [-]	76,566
τ_a [s]	$1,057e^{-5}$
C_1^{TP} [°C ⁻¹]	$9,979e^{-2}$
C_2^{TP} [MPa ⁻¹]	0,150
C_3^{TP} [°C ⁻¹]	$4,287e^{-3}$
C_4^{TP} [MPa ⁻¹]	0,000
E_0 [MPa]	12336,174
D_{AG}^2 [-]	$7,799e^{-3}$
D_{PNL}^2 [-]	$5,188e^{-3}$
Tempo [s]	7743

Nas FIGURAS 46, 47 e 48, são ilustrados os dados experimentais (+) e as respectivas curvas tensão-deformação considerando o modelo constitutivo de ZF (Eq. 3.14). O material em questão possui em sua composição fibras de vidro, o que o torna um polímero composto, fato esse que pode influenciar na convergência do modelo teórico em relação aos dados experimentais. Isso fica evidenciado nas FIGURAS 46, 47 e 48.

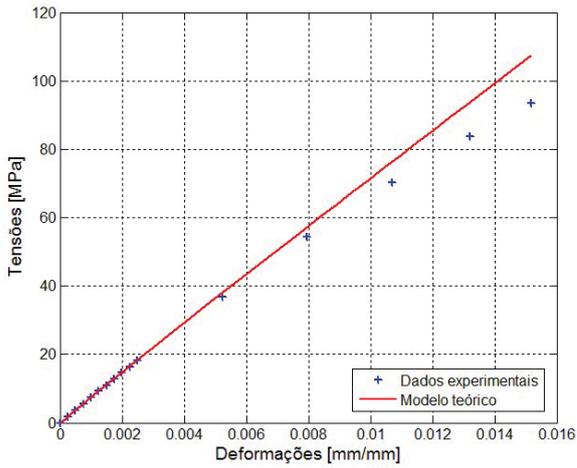
FIGURA 46: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE -35°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO UFPR – MATERIAL STAMAX 40YM240.



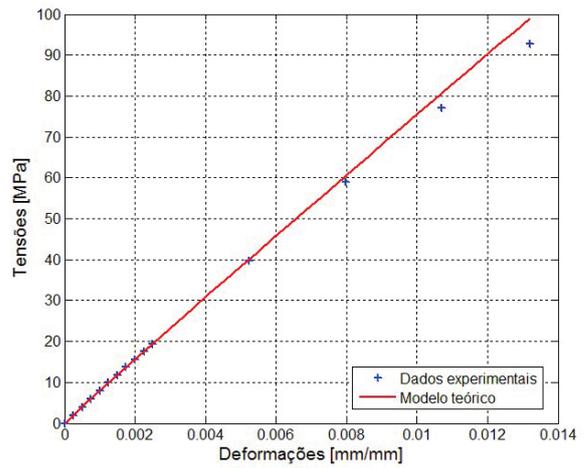
a) $\dot{\epsilon}_A = 0,0001 \text{ mm/mm/s}$



b) $\dot{\epsilon}_B = 0,01 \text{ mm/mm/s}$

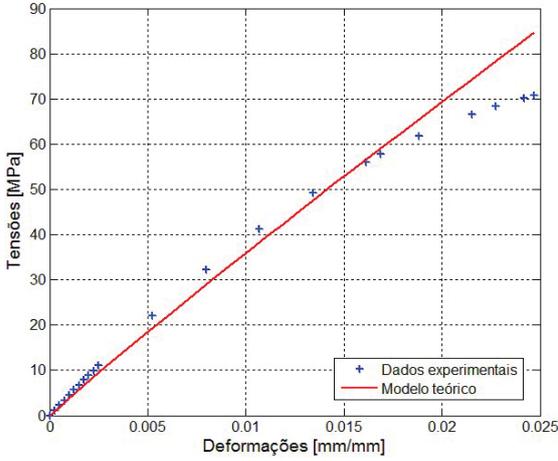


c) $\dot{\epsilon}_C = 0,10 \text{ mm/mm/s}$

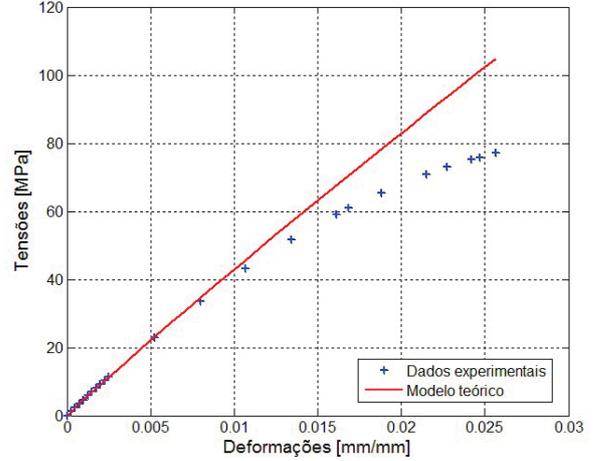


d) $\dot{\epsilon}_D = 1,00 \text{ mm/mm/s}$

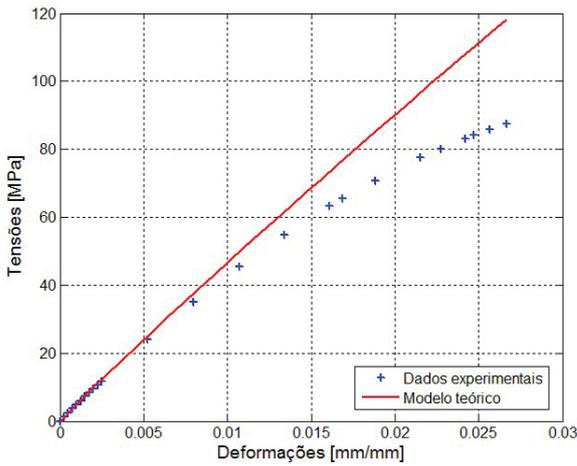
FIGURA 47: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE 23°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO UFPR – MATERIAL STAMAX 40YM240.



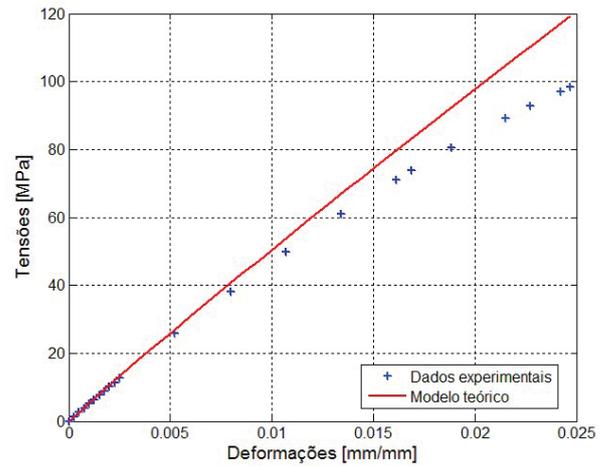
a) $\dot{\epsilon}_A = 0,0001 \text{ mm/mm/s}$



b) $\dot{\epsilon}_B = 0,01 \text{ mm/mm/s}$

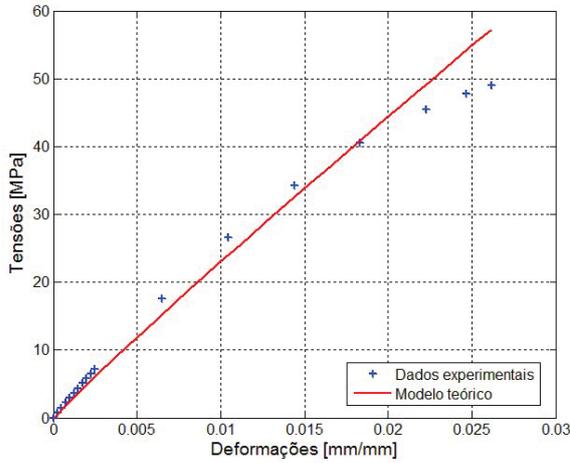


c) $\dot{\epsilon}_C = 0,10 \text{ mm/mm/s}$

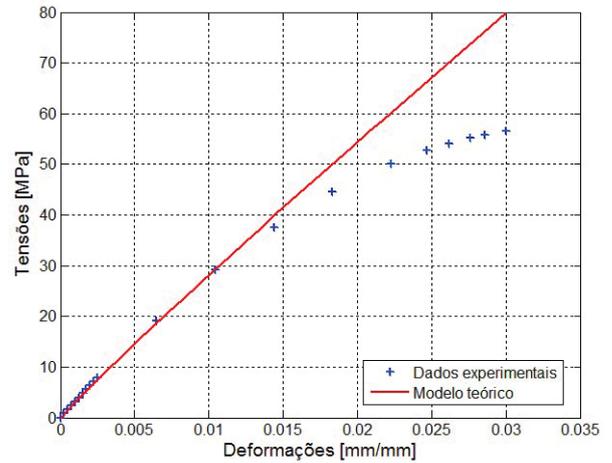


d) $\dot{\epsilon}_D = 1,00 \text{ mm/mm/s}$

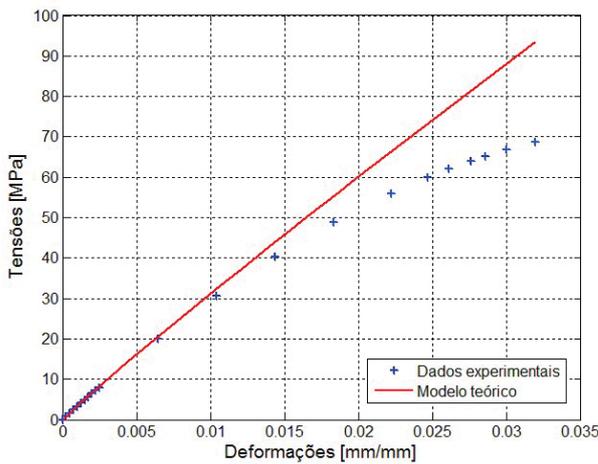
FIGURA 48: AJUSTE (SIMULTÂNEO DAS CURVAS) DO MODELO TEÓRICO DE ZF (-) COM OS DADOS EXPERIMENTAIS (+) NA TEMPERATURA DE 80°C COM DIFERENTES TAXAS DE DEFORMAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELO UFPR – MATERIAL STAMAX 40YM240.



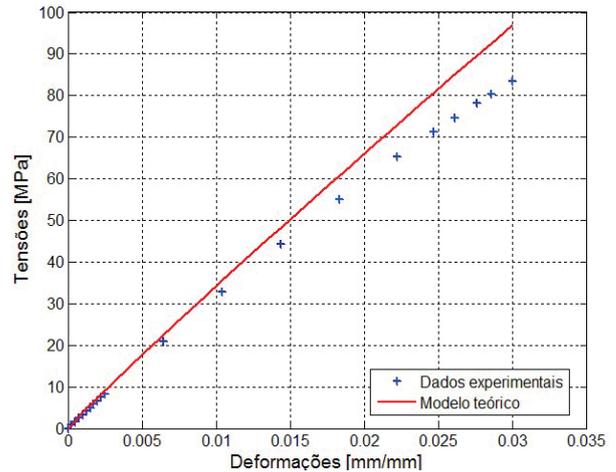
a) $\epsilon_A = 0,0001 \text{ mm/mm/s}$



b) $\epsilon_B = 0,01 \text{ mm/mm/s}$



c) $\epsilon_C = 0,10 \text{ mm/mm/s}$



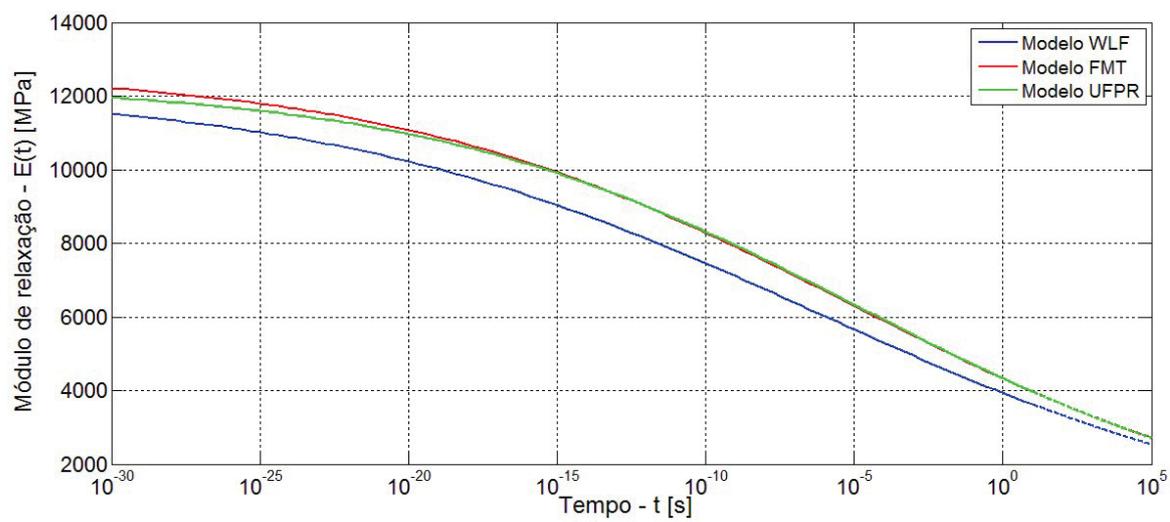
d) $\epsilon_D = 1,00 \text{ mm/mm/s}$

Na TABELA 22 estão reescritos os resultados obtidos nos ensaios simultâneos do material STAMAX 40YM240, apresentados nas TABELAS 19, 20 e 21. Considerando que esses ensaios fossem realizados na temperatura e pressão de referência, isto é, $\alpha = \alpha_T = \alpha_{TP} = 1$, obtém-se as respectivas funções módulo de relaxação, que são apresentadas na FIGURA 49. Observa-se, na FIGURA 49, a convergência do parâmetro E_0 entre os modelos WLF e UFPR e, a convergência do parâmetro E_∞ entre os modelos WLF e FMT, da mesma forma como foi visto com o material CYCOLAC BDT5510.

TABELA 22: COMPARAÇÃO DOS RESULTADOS NUMÉRICOS DO AJUSTE SIMULTÂNEO DAS CURVAS, DECORRENTES DO PROCESSO DE IDENTIFICAÇÃO CONSIDERANDO A INFLUÊNCIA DA TEMPERATURA VIA MODELO WLF E TEMPERATURA E PRESSÃO VIA MODELOS FMT E UFPR - MATERIAL STAMAX 40YM240.

Parâmetros	Modelo Considerado		
	WLF	FMT	UFPR
ν [-]	0,052	0,056	0,059
E_{∞} [MPa]	5,404	9,663	159,041
r_{μ} [-]	2252,255	1314,308	76,566
τ_a [s]	$4,289e^{-7}$	$4,769e^{-6}$	$1,057e^{-5}$
C_1^T [-]	34,411	---	---
C_2^T [°C]	343,121	---	---
$C_1^{TP(FMT)}$ [-]	---	20,267	---
$C_2^{TP(FMT)}$ [°C]	---	176,269	---
$C_3^{TP(FMT)}$ [°C]	---	235,725	---
$C_4^{TP(FMT)}$ [MPa ⁻¹]	---	0,021	---
$C_5^{TP(FMT)}$ [°C]	---	422,870	---
$C_6^{TP(FMT)}$ [MPa ⁻¹]	---	$1,009 \cdot 10^{-2}$	---
$C_1^{TP(UFPR)}$ [°C ⁻¹]	---	---	$9,979e^{-2}$
$C_2^{TP(UFPR)}$ [MPa ⁻¹]	---	---	0,150
$C_3^{TP(UFPR)}$ [°C ⁻¹]	---	---	$4,287e^{-3}$
$C_4^{TP(UFPR)}$ [MPa ⁻¹]	---	---	0,000
E_0 [MPa]	12176,590	12709,821	12336,174
D_{AGL}^2 [MPa ²]	$1,043e^{-2}$	$6,286e^{-3}$	$7,799e^{-3}$
D_{PNL}^2 [MPa ²]	$8,986e^{-3}$	$5,169e^{-3}$	$5,188e^{-3}$
Tempo [s]	9371	12106	7743

FIGURA 49: COMPARAÇÃO ENTRE AS FUNÇÕES MÓDULOS DE RELAXAÇÃO DO MATERIAL STAMAX 40YM240 OBTIDAS VIA MODELOS WLF, FMT E UFPR.



5 CONCLUSÕES

5.1 INTRODUÇÃO

O presente estudo propõe uma metodologia para caracterização do módulo de relaxação de MVEs no domínio do tempo, tendo por base o modelo de ZF e considerando a influência da temperatura (via modelo WLF), da pressão (via modelo OR) e temperatura e pressão simultaneamente (via modelos FMT e o proposto neste trabalho chamado UFPR). A metodologia desenvolvida permite caracterizar materiais viscoelásticos com um comportamento termorreologicamente simples e/ou piezorreologicamente simples. Com esse fim, os dados experimentais extraídos de curvas de tensão X deformação, em diferentes taxas de deformação e temperaturas foram utilizados como ponto de partida. De posse dessas curvas, um problema inverso de identificação foi proposto com a finalidade de reduzir a distância quadrática entre as curvas tensão-deformação experimentais e aquelas correspondentes e dadas pelo modelo teórico. A formulação foi implementada no software Matlab® e fez uso de uma técnica de otimização híbrida (AG e PNL). A validação do modelo utilizando um MVE real (C-2003), mas com pseudo-ensaios experimentais, apresenta uma boa convergência. Isso fica evidente na representação gráfica das funções módulo de relaxação, quando ocorre a sobreposição das curvas dos resultados obtidos via metodologia proposta, e das curvas obtidas pela interconversão entre os domínios da frequência e do tempo. Ainda, para esse mesmo material, foi possível observar que o ensaio realizado com uma taxa de deformação lenta e uma temperatura alta fornece uma boa convergência do parâmetro E_{∞} e, o caso contrário, a convergência de dá para o parâmetro E_0 . Isso mostra, ou dá uma orientação de como os ensaios devem ser realizados ou que ensaios são necessários para se obter uma boa identificação.

O modelo aqui desenvolvido e apresentado como UFPR, o qual considera a influência da temperatura e pressão simultaneamente, apresenta resultados satisfatórios e observa-se a convergência dos parâmetros tanto com o modelo WLF quanto com o modelo FMT. Isso ficou evidenciado na caracterização do material CYCOLAC BDT5510.

5.1.1 Sobre a metodologia proposta

Observou-se que para obter uma boa convergência do módulo de relaxação instantâneo, E_0 , necessita-se de curvas experimentais com rápida taxa de deformação e baixas temperaturas. Matematicamente, baixas temperaturas reduzem ainda mais o tempo, simulando o carregamento com o tempo tendendo a zero.

Já para o módulo de relaxação de equilíbrio, E_∞ , necessita-se de curvas com taxa de deformação lenta e temperaturas altas. Matematicamente, a temperatura alta aumenta o tempo, com o fator de deslocamento, simulando carregamento com o tempo tendendo ao infinito.

Para valores intermediários de temperaturas e taxas de deformação, a princípio, fornecem boas informações para caracterizar o tempo de relaxação τ_a (região de inflexão da função módulo de relaxação).

Nos dados materiais disponíveis para a tese, haviam poucas curvas o que prejudicou a análise final da metodologia.

5.1.2 Análise considerando a influência da temperatura

Na análise que considera apenas o efeito da temperatura é utilizado o modelo WLF. Nessa análise, pode-se afirmar que este modelo descreve com uma precisão aceitável o comportamento mecânico do polímero CYCOLAC BDT5510, visto que as curvas ajustadas obtiveram distâncias quadráticas de baixo valor. Quando comparados os módulos de relaxação obtidos utilizando o modelo de Zener fracionário e o modelo de Wiechert, fica claro a não convergência dos resultados. Isso pode ter ocorrido pelo fato de se ter disponível poucas curvas para análise.

Já para os resultados obtidos no processo de caracterização do material STAMAX 40YM240, observam-se que as distâncias quadráticas apresentam valores relativamente altos, e graficamente não ocorre um bom ajuste do modelo teórico com os dados experimentais, comprovando que o modelo apresentado não se aplica a materiais que não sejam um compósito puro.

Os resultados demonstram que a metodologia se mostra adequada para ser utilizada na caracterização de materiais no domínio do tempo, desde que se trate de materiais termorreologicamente simples.

5.1.3 Análise considerando a influência da pressão

Do mesmo modo, avalia-se o efeito da pressão instantânea no material CYCOLAC BDT5510. Para tanto, o modelo OR para o fator de deslocamento é utilizado para representar a relação tensão-deformação. Fazendo uma observação detalhada das curvas experimentais e teóricas do material, conclui-se que houve um bom ajuste, demonstrando que o modelo é adequado para caracterizar o comportamento mecânico de polímeros piezorreologicamente simples.

5.1.4 Análise considerando as influências da temperatura e da pressão

No último caso, teve-se a avaliação dos efeitos da temperatura e pressão simultaneamente no MVEs, via modelos FMT e UFPR. Para os casos estudados, os resultados observados nas curvas tensão-deformação demonstram a não linearidade dos materiais sob essas influências. Isso significa que o modelo apresentado sob as influências da temperatura e pressão, precisa ser modificado, tratando esses materiais como materiais viscoelásticos quase-lineares ou não-lineares.

5.2 SUGESTÕES DE TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho não teve como objetivo principal diminuir o tempo computacional despendido com o processo de caracterização do MVE. As informações referentes ao tempo gasto para a execução do programa poderão ser usadas como incentivo a pesquisas futuras que visem minimizar esse tempo.

Algumas sugestões propostas para trabalhos futuros:

- I. Combinar outros modelos de influência da temperatura, por exemplo, Modelo de Arrhenius e o Modelo WLF, a fim de respeitar a temperatura de transição vítrea do material;
- II. Ajustar a distância quadrática entre os dados experimentais e o modelo teórico com a finalidade de se obter um fator de ponderação, principalmente para os dados do final da curva;

- III. Melhorar a estrutura computacional e a metodologia com a finalidade de reduzir o tempo computacional dispendido principalmente com a avaliação da função ML;
- IV. Reestruturar o modelo que considera a influência da temperatura e pressão simultaneamente, considerando, por exemplo, o modelo de superposição não-linear, ou o modelo de superposição não-linear modificado ou o modelo quase-linear;
- V. Combinar mais materiais com um número adequado de curvas tensão por deformação para melhor avaliar a metodologia,
- VI. Comparar com outras metodologias e outros modelos constitutivos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAGLEY, R.L. **Applications of Generalized Derivatives to Viscoelasticity**. Ph. D. Dissertation, Air Force Institute of Technology, 1979.

BAGLEY, R.L.; TORVIK, P.J. A generalized derivative model for an elastomer damper. **Shock and Vibration. Bulletin**, v. 49, p. 135-143, 1979.

BAGLEY, R.L.; TORVIK, P.J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity. **Journal of Rheology**, v. 27, p. 201-210, 1983a.

BAGLEY, R.L.; TORVIK, P.J. Fractional calculus – A different approach to the finite element analysis of viscoelastically damped structures. **AIAA Journal**, v. 21, n. 5, p. 741-748, 1983b.

BAGLEY, R.L.; TORVIK, P.J. On the fractional calculus model of viscoelastic behavior. **Journal of Rheology**, v. 30, p. 133-155, 1986.

BARRET, J.H. Differential equations of non-interger order. **Canadian Journal Mathematics**, v. 6, p. 529-541, 1954.

BRINSON, H.L.; BRINSON, L.C. **Polymer Engineering Science and Viscoelasticity**. New York: Springer Science, 2008.

CAMARGO, R.F. **Cálculo Fracionário e Aplicações**. Tese (Doutorado em Matemática). Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2009.

CAPUTO, M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. **Annals of Geophysics**, v. 19, p. 383-393, 1966.

CAPUTO, M. Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent, Part II, **Geophysical Journal International**, v. 13, p. 529-539, 1967. [Reprinted in *Fractional Calculus Applied Analysis*, v. 11, p. 4-14, 2008].

CAPUTO, M. **Elasticità e Dissipazione**. Zanichelli, Bologna, 1969.

CAPUTO, M.; MAINARDI, F. A new dissipation model based on memory mechanism. **Pure and Applied Geophysics (PAGEOPH)**, v. 91, p. 134-147, 1971. [Reprinted in *Fractional Calculus Applied Analysis*, v. 10, p. 309-324, 2007].

CAPUTO, M.; MAINARDI, F. Linear models of dissipation in anelastic solids. **La Rivista del Nuovo Cimento (Ser. II)**, v.1, p. 161-198, 1971.

CHAE, S.H.; ZHAO, J.H.; EDWARDS, D.R.; HO, P.S. Characterization of the viscoelasticity of molding compounds in the time domain. **Journal of Electronic Materials**, v. 39, n. 4, p. 419-425, 2010.

CHANDA, M.; ROY, S.K.; **Plastics Technology Handbook**. 4nd ed. London: Editora CRC Press, 2006.

CHRISTENSEN, R.M. **Theory of Viscoelasticity**. 2nd ed. London: Editora Academic Press, 1982.

CREMA, F.L. **Análise Viscoelástica Não Linear de Componentes Poliméricos com Elementos Finitos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2007.

CRUZ, G.A.M. **Projeto Ótimo de Neutralizadores Viscoelásticos baseado no Modelo de Derivadas Fracionárias**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2004.

DOOLITTLE, A.K.; DOOLITTLE, D.B. Studies in Newtonian flow. v. further verification of the free-space viscosity equation. **Journal of Applied Physics**, v. 28, n. 6, p. 901-905, 1957.

FERRY, J.D. **Viscoelastic Properties of Polymers**. 2nd ed. New York: John Wiley, 1980.

FILLERS, R.W.; TSCHOEGL, N.W. The effect of pressure on the mechanical properties of polymers. **Transactions of the Society of Rheology**, vol. 21, n. 1, p. 51-100, 1977.

FINDLEY, W.N.; LAI, J.S.; ONARAN, K. **Creep and Relaxation of Nonlinear Viscoelastic Materials, with an Introduction to Linear Viscoelasticity**. New York: Elsevier-North Holland, 1976.

FUNG, Y.C. Structure and stress-strain relationship of soft tissues. **American Zoologist**, vol. 24, n. 1, p. 13-22, 1984.

GARCÍA-BARRUETABEÑA, J.G.; CORTÉS, F.; ABETE, J.M.; FERNÁNDEZ, P.; LAMELA, M.J.; CANTELI, A.F. Experimental characterization and modelization of the relaxation and complex moduli of a flexible adhesive. **Journal Materials and Design**, v. 32, p. 2783-2796, 2011.

GEMANT, A. A method of analyzing experimental results obtained from elastiviscous bodies. **Journal of Applied Physics**, v. 7, p. 311-317, 1936.

GEMANT, A. On fractional differentials. **Philosophical Magazine (Series 7)**, v. 25, p. 540-549, 1938.

GORENFLO, R.; LOUTCHKO, J.; LUCHKO, Y. Computation of the Mittag-Leffler function $E_{\alpha,\beta}(z)$ and its derivative. **Fractional Calculus & Applied Analysis**, n. 5, p.491-518, 2002.

HAUBOLD, H.J.; MATHAI, A.M.; SAXENA, R.K. Mittag-Leffler functions and their applications. **Journal of Applied Mathematics**, v. 2011, 2009

HILFER, R. **Applications of Fractional Calculus in Physics**. Germany: Universitat Mainz & Universitat Stuttgart, 2000.

HILLE, E.; TAMARKIN, J.D. On the theory of linear integral equations. **Annals of Mathematics**, v. 31, p. 479-528, 1930.

HOUSIADAS, K.D. Internal viscoelastic flows for fluids with exponential type pressure-dependent viscosity and relaxation time. **Journal of Rheology**, v. 59, p. 769-791, 2015.

HOUSIADAS, K.D., GEORGIU, G.C. New analytical solutions for weakly compressible Newtonian Poiseuille flows with pressure-dependent viscosity. **International Journal of Engineering Science**, v. 107, p. 13-27, 2016.

HU, G.; TAY, A.A.O.; ZHANG, Y.; ZHU, W.; CHEW, S. Characterization of viscoelastic behaviour of a molding compound with application to delamination analysis in IC packages. **Electronics Packaging Technology Conference**, p. 53-59, 2006.

JIMÉNEZ, A.H.; SANTIAGO, J.H.; GARCÍA, A.M.; GONZÁLEZ J.S. Relaxation modulus in PMMA and PTFE fitting by fractional Maxwell model. **Journal Polymer Testing**, v. 21, p. 325-331, 2002.

KALIAPPAN, S. K.. **Characterization of Physical Properties of Polymers Using AFM Force-Distance Curves**. 127 f. Doctoral Thesis, University of Siegen, Siegen 2006.

KOELLER, R.C.; RAJ, R. Diffusing relaxation of stress concentration at second phase particles. **Acta Metallurgic**, v.26, p.1551-1558, 1978.

KOELLER, R.C. Applications of fractional calculus to the theory of viscoelasticity. **Journal of Applied Mechanics**, v. 51, p. 299-307, 1984.

LAKES, R. S. **Viscoelastic Solids**. CRC Press LLC, Boca Raton, 1999.

LAKES, R.S. Isothermal viscoelastic properties of PMMA and LDPE over 11 decades of frequency and time: a test of time-temperature superposition. **Journal Rheologica Acta**, v. 47, p. 777-786, 2008.

LI, C., ZENG, F. **Numerical Methods for Fractional Calculus**. Boca Raton: CRC Press, 2015.

LIU, Q.; SUBHASH, G. Characterization of viscoelastic properties of polymer bar using iterative deconvolution in the time domain. **Journal Mechanics of Materials**, v. 38, p. 1105-1117, 2006.

LOPES, E.M.O. **On the Experimental Response Reanalysis of Structures with Elastomeric Materials**. PhD Thesis. University of Wales Cardiff, UK, 1998.

LOPES, E.M.O.; BAVASTRI, C.A.; SILVA NETO, J.M.; ESPINDOLA, J.J. Caracterização dinâmica integrada de elastômeros por derivadas generalizadas. In **Anais III – Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (CONEM/2004)**, Anais do congresso em CD-Rom, 2004.

LORENZO, C. E.; HARTLEY, T.T. Generalized functions for the fractional calculus. NASA Technical Memorandum - 209424/REV1- 1999.

MACHADO, J.A.T. A probabilistic interpretation of the fractional-order differentiation. **Fractional Calculus & Applied Analysis**, v. 6, p.73-79, 2003.

MAINARDI, F.; GORENFLO, R. On Mittag-Leffler – type functions in fractional evolution process. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 118, p. 283-299, 2000.

MAINARDI, F., SCALAS, E.; GORENFLO, R. Uncoupled continuous-time random walks: Solution and limiting behavior of the master equation. **Physical Review E**, v. 69, p. 1-19, 2004.

MAINARDI, F., **Fractional Calculus and Waves in Linear Viscoelasticity – An Introduction to Mathematical Models**. Imperial College Press, London, 2010.

MAINARDI, F.; SPADA, G. Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology. **The European Physical Journal Special Topics**, v. 193, p. 133-160, 2011.

MAINARDI, F. An historical perspective on fractional calculus in linear viscoelasticity. Short Survey in **Fractional Calculus Applied Analysis**, v. 15, n. 4, p. 712-717, 2012.

MANO, E.B. **Introdução a Polímeros**. Ed. Edgard Blucher LTDA, 1985.

MCCRUM, N.G.; BUCKLEY, C.P.; BUCKNALL, C.B. **Principles of Polymer Engineering**. 2nd ed. Oxford University Press, Oxford UK, 1997.

MARTINEZ-AGIRRE, M.; ELEJABARRIETA, M.J. Characterisation and modeling of viscoelastically damped sandwich structures. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 54, p. 1225–1233, 2010.

MILLER, K.S.; ROSS, B. **An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations**. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1993.

MOONAN, W.K.; TSCHOEGL, N.W. The effect of pressure on the mechanical properties of polymers. 2. Expansively and compressibility measurements. **Macromolecules**, v. 16, p. 55–59, 1983.

MOREIRA, R.A.S.; MELO F.J.Q.; DIAS RODRIGUES, J.F. Static and Dynamic Characterization of Composition Cork for Sandwich Beam Cores. **Journal of Materials Science**, v. 45, p. 3350-3366, 2010.

MOSCHEN, I.C. **Sobre as Funções Mittag-Leffler e o Modelo Fracionário de Materiais Viscoelásticos**. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica). Florianópolis: Universidade Federal de Santa Catarina, 2006.

NIELSEN, L.E.; LANDEL, R.F., **Mechanical Properties of Polymers and Composites**. 2nd ed. Marcel Dekker, New York, 1994.

NUTTING, P.G. A new general law of deformations. **Journal of the Franklin Institute**, v. 191, p 679-684, 1921.

NUTTING, P.G. A general stress-strain time formula. **Journal of the Franklin Institute**, v. 235, p 513-524, 1943.

NUTTING, P.G. Deformation in relation to time, pressure and temperature. **Journal of the Franklin Institute**, v. 242, p 449-458, 1946.

O'REILLY, J.M. The effect of pressure on glass temperature and dielectric relaxation time of polyvinyl acetate. **Journal of Polymer Science**, v. 57, p. 429-444, 1962.

PACHECO, J.E.L. **Caracterização de Materiais Viscoelásticos com Aplicação de Séries de Prony e Análise por Elementos Finitos**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2013.

PACHECO, J.E.L.; PEREIRA, J.T.; BAVASTRI, C.A. Viscoelastic relaxation modulus characterization using Prony series. **Latin American Journal of Solids and Structures**, v. 12, p. 420-445, 2015.

PARK, S.W.; SCHAPERY, R.A. Methods of interconversion between linear viscoelastic material functions. Part I – a numerical method based on Prony Series. **International Journal of Solids and Structures**, v. 36, p. 1653-1675, 1999.

PLASEIED, A.; FATEMI, A. Deformation response and constitutive modeling of vinyl ester polymer including strain rate and temperature effects. **Journal of Materials Science**, v. 43, p. 1191-1199, 2008.

PODLUBNY, I. **Fractional Differential Equations**. New York, Ed. Academic Press, 1999.

POYIADJI, S. HOUSIADAS, K.D., KAOURI, K., GEORGIU, G.C. Asymptotic solutions of weakly compressible Newtonian Poiseuille flows pressure-dependent viscosity. **European Journal of Mechanics B/Fluids**, v. 49, p. 217-225, 2015.

PRITZ, T. Analysis of Four-Parameter Fractional Derivative Model of Real Solid Materials. **Journal of Sound and Vibration**, v. 195, p. 103-115, 1996.

PRITZ, T. Five-parameter fractional derivative model for polymeric damping materials. **Journal of Sound and Vibration**, v. 265, p. 935-952, 2003.

REKTORYS, K. **Variational Methods in Mathematics**. Science and Engineering, D. Reidel Publishing Company, Boston, 1980.

RUDIN, A.; **The Elements of Polymer Science and Engineering**. 2nd ed. Ed. Academic Press, Orlando, 1982.

SCOTT BLAIR, G.W. Analytical and integrative aspects of the stress-strain-time problem. **Journal Scientific Instruments**, v. 21, p. 80-84, 1944.

SCOTT BLAIR, G.W. The role of psychophysics in rheology. **Journal of Colloid Science**, v. 2, p. 21-32, 1947.

SCOTT BLAIR, G.W. **A Survey of General and Applied Rheology**. Pitman, London, 1949.

SCHWARZL, F.; STAVERMAN, A.J. Time temperature dependence of linear viscoelastic behavior. **Journal of Applied Physics**, v. 23, p. 838, 1952.

SHARPE Jr. W.N.; **Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics**. 1nd ed. Ed. Springer, 2008.

SHUKLA, A.K.; PRAJAPATI, J.C. On a generalization of Mittag-Leffler function and its properties. **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, v. 336, p 797-811, 2007.

SOUSA, T.L. **Identificação de Propriedades Mecânicas de Materiais Viscoelásticos no Domínio do Tempo Considerando Influências da Temperatura e Pressão**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica). Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2015.

SORVARI, J.; HAMALAINEN, J. Time integration in linear viscoelasticity – a comparative study. **Mechanics of Time Dependent Materials**, v. 14, n. 3, p. 307-328, 2010.

SURGULADZE, T. A. On certain applications of fractional calculus to viscoelasticity. **Journal of Mathematical Sciences**, v. 112, n. 5, p. 4517-4557, 2002.

TORVIK, P.J.; BAGLEY, R.L. On the appearance of the fractional derivative in the behaviour of the real materials. **American Society of Mechanical Engineers Journal of Applied Mechanics**, v. 51, p. 294-298, 1984.

TSCHOEGL, N.W. **The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior**. 2nd ed. Berlin Heidelberg: Editor Springer-Verlag, 1989.

TSCHOEGL, N.W.; KNAUSS, W.; EMRI, I. The effect of temperature and pressure on the mechanical properties of thermo – and/or piezorheologically simple polymeric materials in thermodynamic equilibrium – A critical review. **Journal Mechanics of Time-Dependent Materials**, v. 6, p. 53-99, 2002.

WELCH, S.W.J.; RORRER, .A.L.; DUREN, R.G.Jr. Application of time basead fractional calculus methods to viscoelastic creep and stress relation of materials. **Mechanics of time – Dependent Materials**, v. 3, p. 279-303, 1999.

VALÉRIO, D.; MACHADO, J.T.; KIRYAKOVA, V. Historical survey some pioneers of the applications of fractional calculus, **Fractional Calculus & Applied Analysis**, v. 17, p. 552-578, 2014.

WENBO, L.; TING-QING, Y.; QUNLI, A. Time-temperature-stress equivalence and its application to nonlinear viscoelastic materials. **Acta Mechanica Solida Sinica**, v. 14, n. 3, p.195-199, 2001.

WILLIAMS, M.L.; LANDEL, R.F.; FERRY, J.D. The temperature dependence of relaxation mechanisms in amorphous polymers and other glass-forming liquids. **Journal of the American Chemical Society**, v. 77, n. 14, p.3701-3706, 1955.

XIAO, Z.; HAITIAN, Y.; YIQIAN, H. Identification of constitutive parameters for fractional viscoelasticity. **Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation**, v. 19, p. 311-322, 2014.

ZENER, C. **Elasticity and Anelasticity of Metals**. University of Chicago Press, Chicago, 1948.

APÊNDICES

APÊNDICE 1 – DADOS DE TESTES EXPERIMENTAIS DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510.

Neste apêndice, estão apresentados resultados de testes experimentais, referentes ao material CYCOLAC BDT5510. Os experimentos foram realizados nas temperaturas de -40°C, 23°C, 43°C e 66°C. Para cada temperatura, o material é submetido a ensaio de tração com taxa de deformação 0,0833 mm/mm/s. Os ensaios foram realizados pela empresa SABIC®, conforme a norma ASTM D638.

TABELA A.1.1 – MATERIAL CYCOLAC BDT5510: DADOS EXPERIMENTAIS PARA TEMPERATURAS DE -40°C, 23°C, 43°C E 66°C, E TAXA FIXA DE DEFORMAÇÃO DE 0,0833 MM/MM/S.

-40°C		23°C		43°C		66°C	
Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)						
0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
0,00018	0,06199	0,00001	0,05700	0,00016	0,04199	0,00018	0,04699
0,00035	0,11599	0,00018	0,11100	0,00037	0,08299	0,00036	0,07999
0,00051	0,16699	0,00037	0,16100	0,00054	0,12499	0,00053	0,11599
0,00066	0,21499	0,00057	0,21200	0,00071	0,16299	0,00072	0,15199
0,00086	0,26499	0,00076	0,26300	0,00090	0,20499	0,00094	0,19399
0,00101	0,31299	0,00096	0,31100	0,00109	0,24599	0,00114	0,23599
0,00117	0,35799	0,00115	0,36100	0,00127	0,28699	0,00133	0,27399
0,00133	0,40899	0,00134	0,40900	0,00145	0,32599	0,00151	0,31299
0,00149	0,45299	0,00153	0,46000	0,00163	0,36399	0,00174	0,35199
0,00168	0,50099	0,00173	0,50800	0,00181	0,40299	0,00192	0,39099
0,00183	0,54599	0,00192	0,55800	0,00198	0,44099	0,00212	0,42699
0,00201	0,59099	0,00210	0,60600	0,00216	0,47999	0,00228	0,46499
0,00216	0,63599	0,00229	0,65100	0,00234	0,52099	0,00248	0,50099
0,00231	0,67999	0,00248	0,69900	0,00250	0,55699	0,00268	0,53999
0,00247	0,72499	0,00267	0,74700	0,00268	0,59499	0,00287	0,57899
0,00263	0,76999	0,00287	0,79400	0,00286	0,63099	0,00306	0,61499
0,00279	0,81499	0,00306	0,84200	0,00302	0,66899	0,00323	0,65299
0,00294	0,85699	0,00324	0,88700	0,00320	0,70799	0,00341	0,68599
0,00309	0,90099	0,00346	0,93500	0,00337	0,74299	0,00361	0,72499
0,00323	0,94599	0,00365	0,98200	0,00355	0,78199	0,00380	0,76099
0,00340	0,99099	0,00385	1,02700	0,00371	0,81799	0,00400	0,79699
0,00358	1,03299	0,00404	1,07500	0,00390	0,85599	0,00417	0,83299
0,00374	1,07399	0,00424	1,12000	0,00406	0,89199	0,00436	0,86799
0,00388	1,11899	0,00443	1,16500	0,00422	0,92699	0,00453	0,90399
0,00405	1,16099	0,00461	1,20900	0,00439	0,96599	0,00472	0,93999
0,00420	1,20599	0,00480	1,25700	0,00457	0,99799	0,00488	0,97599
0,00434	1,24799	0,00499	1,30200	0,00473	1,03699	0,00508	1,01199

continua

continuação

-40°C		23°C		43°C		66°C	
Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)						
0,00450	1,28899	0,00518	1,34400	0,00489	1,06899	0,00526	1,04499
0,00464	1,33399	0,00537	1,38800	0,00506	1,10499	0,00545	1,07999
0,00481	1,37599	0,00554	1,43300	0,00524	1,13999	0,00562	1,11299
0,00494	1,41799	0,00573	1,47800	0,00539	1,17599	0,00581	1,14899
0,00510	1,45699	0,00592	1,52000	0,00557	1,21099	0,00600	1,18499
0,00526	1,50099	0,00609	1,56500	0,00573	1,24399	0,00619	1,21199
0,00541	1,54299	0,00628	1,60900	0,00590	1,27999	0,00635	1,24799
0,00557	1,58499	0,00647	1,65100	0,00606	1,31499	0,00653	1,28299
0,00569	1,62699	0,00664	1,69300	0,00625	1,34799	0,00669	1,31599
0,00585	1,66899	0,00683	1,73800	0,00639	1,38299	0,00690	1,35199
0,0060	1,70999	0,00703	1,78000	0,00655	1,41599	0,00707	1,38499
0,00615	1,74899	0,00720	1,82400	0,00673	1,44799	0,00724	1,41799
0,00629	1,79099	0,00739	1,86600	0,00690	1,48099	0,00742	1,44799
0,00646	1,83299	0,00758	1,90500	0,00705	1,51599	0,00762	1,48299
0,00662	1,87199	0,00776	1,94999	0,00721	1,54899	0,00777	1,50699
0,00675	1,91299	0,00794	1,98899	0,00739	1,58499	0,00796	1,54299
0,00691	1,95499	0,00812	2,02999	0,00756	1,61699	0,00815	1,57599
0,00705	1,96399	0,00831	2,07199	0,00772	1,64999	0,00832	1,60899
0,00720	2,01199	0,00849	2,11399	0,00788	1,68199	0,00849	1,63899
0,00733	2,05999	0,00868	2,15599	0,00804	1,71499	0,00870	1,67099
0,00749	2,10099	0,00886	2,19799	0,00821	1,74699	0,00886	1,70099
0,00762	2,13099	0,00904	2,23899	0,00837	1,76499	0,00903	1,73399
0,00777	2,17899	0,00923	2,27799	0,00854	1,80099	0,00920	1,76399
0,00793	2,21799	0,00941	2,31999	0,00867	1,83299	0,00939	1,79399
0,00808	2,25699	0,00959	2,36199	0,00884	1,86599	0,00957	1,82399
0,00820	2,29199	0,00978	2,40099	0,00900	1,89499	0,00976	1,85399
0,00836	2,33099	0,01003	2,44199	0,00917	1,92799	0,00993	1,88299
0,00851	2,37299	0,01013	2,48099	0,00933	1,96099	0,01010	1,91299
0,00864	2,40899	0,01033	2,51699	0,00949	1,99299	0,01028	1,94299
0,00881	2,44799	0,01051	2,55899	0,00967	2,02599	0,01047	1,97299
0,00894	2,48699	0,01069	2,59799	0,00983	2,05499	0,01063	2,00299
0,00910	2,52499	0,01088	2,63599	0,00999	2,08799	0,01082	2,03299
0,00922	2,56099	0,01106	2,67499	0,01015	2,11799	0,01102	2,06299
0,00938	2,59999	0,01124	2,71399	0,01032	2,14699	0,01119	2,08899
0,00953	2,63899	0,01143	2,75299	0,01047	2,17999	0,01138	2,11899
0,00965	2,67499	0,01162	2,78899	0,01063	2,20899	0,01157	2,14899
0,00981	2,71099	0,01180	2,82699	0,01081	2,23899	0,01173	2,17599
0,00996	2,74899	0,01198	2,86299	0,01097	2,26899	0,01190	2,20299
0,01006	2,78499	0,01217	2,90199	0,01114	2,29799	0,01210	2,22999
n. d.	n. d.	0,01236	2,94099	0,01129	2,32799	0,01231	2,25999
n. d.	n. d.	0,01253	2,97699	0,01145	2,35499	0,01247	2,28699

continuação

-40°C		23°C		43°C		66°C	
Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)						
n. d.	n. d.	0,01272	3,01299	0,01161	2,38399	0,01265	2,31299
n. d.	n. d.	0,01291	3,05099	0,01177	2,41399	0,01286	2,33699
n. d.	n. d.	0,01308	3,08699	0,01194	2,44299	0,01304	2,36399
n. d.	n. d.	0,01327	3,12299	0,01211	2,46999	0,01325	2,39099
n. d.	n. d.	0,01345	3,15899	0,01227	2,49999	0,01345	2,41799
n. d.	n. d.	0,01365	3,19499	0,01245	2,52599	0,01362	2,44499
n. d.	n. d.	0,01384	3,22999	0,01259	2,55299	0,01382	2,46899
n. d.	n. d.	0,01400	3,26599	0,01275	2,57999	0,01401	2,49299
n. d.	n. d.	0,01420	3,30199	0,01292	2,60599	0,01420	2,51899
n. d.	n. d.	0,01439	3,33499	0,01309	2,63299	0,01439	2,54299
n. d.	n. d.	0,01456	3,37099	0,01326	2,65999	0,01460	2,56699
n. d.	n. d.	0,01476	3,40699	0,01344	2,68899	0,01479	2,58799
n. d.	n. d.	0,01494	3,44199	0,01360	2,71299	0,01499	2,61199
n. d.	n. d.	0,01512	3,47499	0,01376	2,73999	0,01519	2,63599
n. d.	n. d.	0,01533	3,50799	0,01394	2,76599	0,01539	2,65999
n. d.	n. d.	0,01551	3,54399	0,01410	2,78999	0,01558	2,68099
n. d.	n. d.	0,01570	3,57699	0,01427	2,81699	0,01578	2,70099
n. d.	n. d.	0,01589	3,60999	0,01445	2,84299	0,01600	2,72199
n. d.	n. d.	0,01609	3,64299	0,01462	2,86999	0,01620	2,74599
n. d.	n. d.	0,01628	3,67499	0,01478	2,89399	0,01640	2,76399
n. d.	n. d.	0,01647	3,70499	0,01496	2,91699	0,01661	2,78499
n. d.	n. d.	0,01666	3,73799	0,01512	2,94399	0,01682	2,80599
n. d.	n. d.	0,01686	3,77099	0,01529	2,96799	0,01703	2,82399
n. d.	n. d.	0,01704	3,80099	0,01547	2,98799	0,01726	2,84499
n. d.	n. d.	0,01724	3,83399	0,01564	3,01499	0,01747	2,86299
n. d.	n. d.	0,01745	3,86399	0,01582	3,03899	0,01767	2,88099
n. d.	n. d.	0,01763	3,89299	0,01599	3,05899	0,01792	2,89899
n. d.	n. d.	0,01784	3,92599	0,01616	3,08299	0,01813	2,91299
n. d.	n. d.	0,01822	3,98299	0,01651	3,12799	n. d.	n. d.
n. d.	n. d.	0,01841	4,01299	0,01670	3,15099	n. d.	n. d.
n. d.	n. d.	0,01863	4,04299	0,01688	3,17199	n. d.	n. d.
n. d.	n. d.	0,01883	4,07199	0,01706	3,19599	n. d.	n. d.
n. d.	n. d.	0,01903	4,09899	0,01724	3,21599	n. d.	n. d.
n. d.	n. d.	0,01923	4,12599	0,01741	3,23699	n. d.	n. d.
n. d.	n. d.	0,01945	4,15599	0,01760	3,25799	n. d.	n. d.
n. d.	n. d.	0,01965	4,17999	0,01779	3,27899	n. d.	n. d.
n. d.	n. d.	0,01986	4,20699	0,01798	3,29599	n. d.	n. d.
n. d.	n. d.	0,02006	4,23699	0,01816	3,31699	n. d.	n. d.
n. d.	n. d.	0,02029	4,26099	0,01837	3,33499	n. d.	n. d.

conclusão

-40°C		23°C		43°C		66°C	
Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)						
n. d.	n. d.	0,02051	4,28699	0,01855	3,35599	n. d.	n. d.
n. d.	n. d.	0,02072	4,31099	0,01873	3,37599	n. d.	n. d.
n. d.	n. d.	0,02094	4,33499	0,01893	3,39399	n. d.	n. d.
n. d.	n. d.	0,02115	4,35599	0,01912	3,41199	n. d.	n. d.
n. d.	n. d.	0,02137	4,37999	0,01932	3,42999	n. d.	n. d.
n. d.	n. d.	0,02159	4,40399	0,01952	3,44699	n. d.	n. d.
n. d.	n. d.	0,02182	4,42499	0,01972	3,46499	n. d.	n. d.

*n. d. = Não disponível.

APÊNDICE 2 – DADOS DE TESTES EXPERIMENTAIS DO MATERIAL STAMAX 40YM240.

Neste apêndice, estão apresentados os dados de testes experimentais, do material STAMAX 40YM240, realizados nas temperaturas de -35°C, 23°C e 80°C. Para cada temperatura, são realizados ensaios nas taxas de deformação de 0,0001, 0,01, 0,1 e 1 ((mm/mm)/s). Estes dados experimentais são disponibilizados pela empresa SABIC® e os experimentos realizados de acordo com a norma ISO 527/1B.

TABELA A.2.1 – MATERIAL STAMAX 40YM240: DADOS EXPERIMENTAIS PARA TEMPERATURA DE -35°C.

Taxas de deformação.							
0,0001 ((mm/mm)/s)		0,001 ((mm/mm)/s)		0,1 ((mm/mm)/s)		1 ((mm/mm)/s)	
Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)	Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)	Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)	Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,000250	1,757970	0,000299	1,814182	0,000249	1,870857	0,000249	1,987723
0,000500	3,502835	0,000495	3,615712	0,000499	3,730443	0,000499	3,966242
0,000750	5,234583	0,000749	5,404579	0,000749	5,578748	0,000749	5,935549
0,001000	6,953206	0,000999	7,180774	0,000999	7,415763	0,000999	7,895635
0,001249	8,658691	0,001249	8,944285	0,001249	9,241478	0,001249	9,846494
0,001499	10,351029	0,001498	10,695104	0,001498	11,055884	0,001498	11,788118
0,001748	12,030210	0,001748	12,433220	0,001748	12,858973	0,001748	13,720498
0,001998	13,696222	0,001998	14,158622	0,001998	14,650735	0,001998	15,643628
0,002247	15,349055	0,002247	15,871301	0,002247	16,431161	0,002247	17,557500
0,002497	16,988700	0,002496	17,571246	0,002496	18,200242	0,002496	19,462105
0,005236	34,151298	0,005236	35,427315	0,005236	36,908734	0,005236	39,799030
0,007968	49,702776	0,007968	51,727851	0,007968	54,231174	0,007968	59,003676
0,010693	63,629183	0,010692	66,459328	0,010692	70,155382	0,010692	77,065870
0,013212	75,078506	0,013212	78,705590	0,013212	83,661452	0,013212	92,784735
0,015184	83,065019	0,015184	87,351326	0,015184	93,399564	n. d.	n. d.
0,016365	87,435287	0,016365	92,131624	n. d.	n. d.	n. d.	n. d.
0,017349	90,834579	n. d.	n. d.	n. d.	n. d.	n. d.	n. d.

*n. d. = Não disponível.

TABELA A.2.2 – MATERIAL STAMAX 40YM240: DADOS EXPERIMENTAIS PARA TEMPERATURA DE 23°C.

Taxas de deformação.							
0,0001 ((mm/mm)/s)		0,001 ((mm/mm)/s)		0,1 ((mm/mm)/s)		1 ((mm/mm)/s)	
Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)	Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)	Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)	Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)
0,000000	0,000000	0,0000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,000250	1,138259	0,000249	1,174656	0,000249	1,211352	0,000249	1,287021
0,000500	2,268033	0,000499	2,341119	0,000499	2,415407	0,000499	2,568083
0,000750	3,389315	0,000749	3,499385	0,000749	3,612157	0,000749	3,843180
0,001000	4,502098	0,000999	4,649444	0,000999	4,801596	0,000999	5,112307
0,001249	5,606374	0,001249	5,791292	0,001249	5,983720	0,001249	6,375459
0,001499	6,702138	0,001498	6,924921	0,001498	7,158521	0,001498	7,632631
0,001748	7,789383	0,001748	8,050325	0,001748	8,325995	0,001748	8,883819
0,001998	8,868101	0,001998	9,167498	0,001998	9,486134	0,001998	10,129017
0,002247	9,938286	0,002247	10,276432	0,002247	10,638933	0,002247	11,368221
0,002497	10,999931	0,002496	11,377121	0,002496	11,784387	0,002496	12,601425
0,005236	22,112459	0,005236	22,938661	0,005236	23,897858	0,005236	25,769282
0,007968	32,181811	0,007968	33,493017	0,007968	35,113881	0,007968	38,204006
0,010693	41,198953	0,010692	43,031430	0,010692	45,424570	0,010692	49,899009
0,013410	49,154851	0,013409	51,545140	0,013409	54,822039	0,013409	60,847702
0,016119	56,040471	0,016119	59,025387	0,016119	63,298401	0,016119	71,043496
0,016857	57,731429	0,016857	60,884942	0,016857	65,449238	0,016857	73,692633
0,018822	61,846778	0,018821	65,463413	0,018821	70,845771	0,018821	80,479804
0,021517	66,564739	0,021516	70,850456	0,021516	77,456262	0,021516	89,150037
0,022739	68,347039	0,022739	72,949311	0,022739	80,149185	0,022739	92,836022
0,024205	70,185319	0,024204	75,177758	0,024204	83,121987	0,024204	97,047606
0,024693	70,725000	0,024692	75,850000	0,024692	84,050000	0,024692	98,400000
n. d.	n. d.	0,025667	77,088304	0,025667	85,811356	n. d.	n. d.
n. d.	n. d.	n. d.	n. d.	0,026641	87,446174	n. d.	n. d.

*n. d. = Não disponível.

TABELA A.2.3 – MATERIAL STAMAX 40YM240: DADOS EXPERIMENTAIS PARA TEMPERATURA DE 80°C.

Taxas de deformação.							
0,0001 ((mm/mm)/s)		0,001 ((mm/mm)/s)		0,1 ((mm/mm)/s)		1 ((mm/mm)/s)	
Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)	Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)	Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)	Deformação (mm/mm)	Tensão (MPa)
0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,000250	0,740421	0,000249	0,807246	0,000249	0,822800	0,000249	0,833061
0,000500	1,475680	0,000499	1,608983	0,000499	1,641201	0,000499	1,663745
0,000750	2,205773	0,000749	2,405205	0,000749	2,455197	0,000749	2,492048
0,001000	2,930697	0,000999	3,195908	0,000999	3,264785	0,000999	3,317970
0,001249	3,650447	0,001249	3,981088	0,001249	4,069962	0,001249	4,141507
0,001499	4,365019	0,001498	4,760741	0,001498	4,870724	0,001498	4,962657
0,001748	5,074409	0,001748	5,534861	0,001748	5,667068	0,001748	5,781419
0,001998	5,778612	0,001998	6,303445	0,001998	6,458989	0,001998	6,597791
0,002247	6,477625	0,002247	7,066488	0,002247	7,246484	0,002247	7,411770
0,002497	7,171444	0,002496	7,823985	0,002496	8,029550	0,002496	8,223354
0,006479	17,562684	0,006478	19,186152	0,006478	19,953261	0,006478	20,881299
0,010445	26,606053	0,010445	29,109403	0,010445	30,727342	0,010445	32,917062
0,014396	34,284568	0,014395	37,575580	0,014395	40,337018	0,014395	44,322064
0,018331	40,581244	0,018330	44,566528	0,018330	48,767514	0,018330	55,087725
0,022251	45,479096	0,022250	50,064089	0,022250	56,004057	0,022250	65,205464
0,024693	47,822366	0,024692	52,733636	0,024692	59,914026	0,024692	71,196215
0,026155	48,961139	0,026154	54,050106	0,026154	62,031871	0,026154	74,666700
n. d.	n. d.	0,027615	55,151461	0,027615	63,977660	0,027615	78,043658
n. d.	n. d.	0,028587	55,765718	0,028587	65,178882	0,028587	80,242780
n. d.	n. d.	0,030044	56,506421	0,030044	66,836181	0,030044	83,462854
n. d.	n. d.	n. d.	n. d.	0,031983	68,774905	n. d.	n. d.

*N. D. = NÃO DISPONÍVEL.

ANEXOS

ANEXO 1 - COMPOSIÇÃO DO MATERIAL CYCOLAC BDT5510

Este anexo tem como objetivo apresentar as informações sobre a composição do material CYCOLAC BDT5510 e algumas de suas propriedades mecânicas, como fornecidas pela empresa SABIC®.



CYCOLAC™ Resin BDT5510

Americas: COMMERCIAL

Automotive. High heat resistance, low gloss, color concentratable for interior applications. Natural only.

TYPICAL PROPERTIES'	TYPICAL VALUE	Unit	Standard
MECHANICAL			
Tensile Stress, yld, Type I, 5 mm/min	540	kgf/cm ²	ASTM D 638
Tensile Modulus, 5 mm/min	23100	kgf/cm ²	ASTM D 638
Flexural Stress, yld, 1.3 mm/min, 50 mm span	820	kgf/cm ²	ASTM D 790
Flexural Modulus, 1.3 mm/min, 50 mm span	25000	kgf/cm ²	ASTM D 790
Tensile Stress, yield, 50 mm/min	43	MPa	ISO 527
Tensile Modulus, 1 mm/min	2930	MPa	ISO 527
Flexural Stress, yield, 2 mm/min	67	MPa	ISO 178
Flexural Modulus, 2 mm/min	2030	MPa	ISO 178
IMPACT			
Izod Impact, notched, 23°C	29	cm-kgf/cm	ASTM D 256
Falling Dart Impact (D 3029), 23°C	356	cm-kgf	ASTM D 3029
Izod Impact, notched 80°10'4 +23°C	12	kJ/m ²	ISO 180/1A
Izod Impact, notched 80°10'4 -30°C	7	kJ/m ²	ISO 180/1A
Charpy 23°C, V-notch Edgew 80°10'4 sp=62mm	13	kJ/m ²	ISO 179/1eA
Charpy -30°C, V-notch Edgew 80°10'4 sp=62mm	7	kJ/m ²	ISO 179/1eA
THERMAL			
HDT, 0.45 MPa, 3.2 mm, unannealed	92	°C	ASTM D 648
HDT, 1.82 MPa, 3.2mm, unannealed	81	°C	ASTM D 648
CTE, -40°C to 60°C, flow	1.35E-04	1/°C	ASTM E 831
Vicat Softening Temp, Rate B/50	98	°C	ISO 308
HDT/Bf, 0.45 MPa Flatw 80°10'4 sp=64mm	95	°C	ISO 75/Bf
HDT/ Af, 1.8 MPa Flatw 80°10'4 sp=64mm	83	°C	ISO 75/ Af
PHYSICAL			
Specific Gravity	1.05	-	ASTM D 792
Mold Shrinkage, flow, 3.2 mm (5)	0.5 - 0.8	%	SABIC Method
Melt Flow Rate, 230°C/3.8 kgf	6	g/10 min	ASTM D 1238
Melt Viscosity, 260°C, 1000 sec-1	1630	poise	ASTM D 3825
Spiral Flow, 260°C, 10 ips, 3.175 X 1524 mm	736.6	mm	-
Melt Flow Rate, 220°C/10.0 kg	14	g/10 min	ISO 1133
OPTICAL			
Gloss, untextured, 60 degrees	25	-	ASTM D 523
FLAME CHARACTERISTICS			
UL Recognized, 94HB Flame Class Rating (3)	1.52	mm	UL 94
Injection Molding			
Drying Temperature		90 - 95	°C
Drying Time		2 - 4	hrs
Drying Time (Cumulative)		8	hrs
Maximum Moisture Content		0.01	%
Melt Temperature		230 - 275	°C
Nozzle Temperature		230 - 275	°C
Front - Zone 3 Temperature		220 - 255	°C
Middle - Zone 2 Temperature		210 - 250	°C
Rear - Zone 1 Temperature		195 - 240	°C
Mold Temperature		50 - 80	°C
Back Pressure		0.3 - 0.7	MPa
Screw Speed		30 - 60	rpm
Shot to Cylinder Size		50 - 70	%
Vent Depth		0.038 - 0.051	mm

ANEXO 2- COMPOSIÇÃO DO MATERIAL STAMAX 40YM240

Este anexo tem como objetivo apresentar as informações sobre a composição do material STAMAX 40YM240 e algumas de suas propriedades mecânicas, como fornecidas pela empresa SABIC®.

			
General Information			
Product Description			
SABIC® STAMAX 40YM240 is a 40% long glass fiber reinforced polypropylene. The glass fibers are chemically coupled to the PP matrix, resulting in high stiffness and strength. The IMDS is 16497161.			
General			
Material Status	• Commercial: Active		
Availability	• North America		
Filler / Reinforcement	• Long Glass Fiber, 40% Filler by Weight		
Features	• Chemically Coupled	• High Stiffness	• High Strength
Automotive Specifications	• GM GMP.PP.112	• GM QK 003872 Color: 10012	• IMDS ID 16497161 Black
Processing Method	• Injection Molding		
ASTM & ISO Properties ¹			
Physical	Nominal Value	Unit	Test Method
Specific Gravity	1.21	g/cm ³	ASTM D792
Density	1.22	g/cm ³	ISO 1183
Mechanical	Nominal Value	Unit	Test Method
Tensile Modulus ²	8470	MPa	ASTM D638
Tensile Modulus			ISO 527-2/1
--	8300	MPa	
80°C	5700	MPa	
120°C	4500	MPa	
Tensile Strength ³ (Break)	108	MPa	ASTM D638
Tensile Stress			ISO 527-2/1A/50
Break	121	MPa	
Break, 80°C	75.0	MPa	
Break, 120°C	54.0	MPa	
Tensile Elongation ³ (Break)	1.8	%	ASTM D638
Tensile Strain (Break)	2.1	%	ISO 527-2/50
Flexural Modulus			
50.0 mm Span ⁴	7680	MPa	ASTM D790
64.0 mm Span ⁵	7850	MPa	ISO 178
80°C, 64.0 mm Span ⁵	5550	MPa	ISO 178
Thermal	Nominal Value	Unit	Test Method
Deflection Temperature Under Load (1.8 MPa, Unannealed, 3.20 mm)	158	°C	ASTM D648
Heat Deflection Temperature ⁶ (1.8 MPa, Unannealed)	157	°C	ISO 75-2/A
Additional Information	Nominal Value	Unit	Test Method
Glass Fiber Content	40	%	ISO 3451
Processing Information			
Injection	Nominal Value	Unit	
Drying Temperature	80.0 to 100	°C	
Drying Time	2.0	hr	
Rear Temperature	230 to 290	°C	
Middle Temperature	225 to 285	°C	
Front Temperature	220 to 280	°C	
Nozzle Temperature	220 to 280	°C	
Processing (Melt) Temp	220 to 280	°C	
Mold Temperature	20.0 to 80.0	°C	
Back Pressure	0.00 to 0.500	MPa	