

ALDA LUIZA PEDRON DE OLIVEIRA

TRIÂNGULOS

FRANCISCO BELTRÃO

1998

TRIÂNGULOS

Monografia apresentada para obtenção do título de Especialista no curso de Pós-Graduação de Educação de Jovens e Adultos, Faculdade de Ciências Humanas de Francisco Beltrão, Universidade Federal do Paraná.

Profª. Orientadora Ana Maria Petraitis Liblik.

FRANCISCO BELTRÃO

1998

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, primeiramente por me conceder a força e a inspiração para transpor todos os empecilhos que se puseram diante de meu caminho, a fé que me conduz a crer que nada é impossível quando se deseja vencer; é Ele, fonte inesgotável de luz, que me orientou, auxiliou e continuará me impulsionando para alcançar os objetivos com dignidade e honestidade.

Ao meu esposo Osvaldo, meus filhos André e Mariana que souberam compreender e me auxiliar nos momentos difíceis em que vivemos.

Aos meus colegas de trabalho com seus incentivos.

Aos queridos mestres e doutores que tanto contribuíram para que eu continuasse e chegasse ao final de mais essa etapa.

À FACIBEL que me proporcionou essa oportunidade de imensa valia para minha vida.

E à razão primordial de tudo, meus pais Adolfo e Angelina, minha vida, minha família e meus alunos.

“A sólida ciência não consiste em conhecer somente os fatos, os eventos e os fenômenos destacados e solitários, mas em saber encadeá-los com seus antecedentes, e descortinar os princípios e leis da natureza que os determinam e os fazem operar como partes e elementos de uma harmonia universal”.

Marquês de Maricá

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO.....	06
CAPÍTULO I - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	08
1.1 - A ORIGEM DA GEOMETRIA.....	09
1.2 - PROBLEMAS GEOMÉTRICOS.....	11
CAPÍTULO II - PLANO DE ENSINO.....	14
2.1 - PROPOSTA DE CONTEÚDO.....	14
2.2 - Estudo dos Triângulos.....	16
2.2.1 - Definição.....	16
2.2.2 - Elementos.....	16
2.3 - Pontos notáveis do triângulo.....	17
2.3.1 - Mediana.....	17
2.3.2 - Bissetriz.....	17
2.3.3 - Altura.....	18
2.3.4 - Mediatriz.....	18
2.4 - Classificação dos triângulos.....	20
2.4.1 - Classificação quanto aos lados.....	20
2.4.1.1 - Triângulo Equilátero.....	20
2.4.1.2 - Triângulo Isósceles.....	20
2.4.1.3 - Triângulo Escaleno.....	20
2.5 - Classificação quanto aos ângulos.....	21
2.5.1 - Triângulo retângulo.....	21
2.5.2 - Triângulo acutângulo.....	21

2.5.3 - Triângulo obtusângulo.....	22
2.5.4 - Condições de existência do triângulo.....	22
2.6 - Soma dos ângulos internos de um triângulo.....	25
2.7 - Ângulos externos de um triângulo.....	27
2.8 - Congruência de triângulos.....	29
2.8.1 - 1º caso LAL (lado, ângulo, lado).....	29
2.8.2 - Teorema do triângulo isósceles.....	30
2.8.3 - 2º caso ALA (ângulo, lado, ângulo).....	30
2.8.4 - 3º caso LLL (lado, lado, lado).....	31
2.8.5 - 4º caso LAAo (lado, ângulo, ângulo oposto).....	32
2.8.6 - Caso especial de congruência de triângulos retângulos.....	32
2.9 - Homotetia.....	34
2.10 - Tales e a pirâmide.....	37
2.10.1 - Tales e a Matemática.....	38
2.11 - Semelhança de triângulos.....	39
2.11.1 - Teorema fundamental.....	40
2.11.2 - Casos ou critérios de semelhança.....	40
2.12 - A geometria é uma ciência muito antiga.....	43
2.12.1 - Pitágoras e o triângulo retângulo.....	44
2.12.2 - Aplicação do Teorema de Pitágoras.....	45
2.13 - Outras propriedades do triângulo retângulo.....	49
2.13.1 - Relações métricas.....	51
2.14 - Área do triângulo.....	55
2.14.1 - Outra fórmula para calcular a área.....	55
RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS NAS AULAS.....	59
CONCLUSÃO.....	69
BIBLIOGRAFIA.....	70

INTRODUÇÃO

“ A Matemática é igualmente considerada com uma ciência a parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra do gabinete fechado, onde não entram os ruídos do mundo exterior, nem o sol nem os clamores dos homens. Isto, só em parte é verdadeiro. Sem dúvida, a Matemática possui problemas próprios, que não tem ligação imediata com os outros problemas da vida social. Mas há dúvidas também que os seus fundamentos mergulham tanto como os de outro qualquer ramo da ciência, na vida real; uns e outros entroncam na mesma madre”. (CARAÇA, 1984)

Há uma certa mitificação quanto a Matemática, que leva a crer que somente portadores de grande “inteligência” são capazes de aprender. É preciso superar essa visão distorcida da Matemática para compreender que ela realmente faz parte de nosso cotidiano e não temos que ser “gênios” para apossarmos desses conhecimentos quando, de uma forma empírica, já os possuímos.

O nosso trabalho será dirigido a jovens e adultos, pois eles são antes de tudo membros atuantes da sociedade, e a ação do educador tem de consistir em encaminhá-los a criarem por si mesmos sua consciência crítica, passando de cada grau ao seguinte, até equiparar-se à consciência da sistematização do conhecimento.

É com esse intento que não podemos descartar a geometria, considerando-a de grande importância para a compreensão e o despertar do gosto pela Matemática, já que para gostarmos de algo é preciso conhecer, experimentar e ter a chance de sentirmos algum prazer neste contato com o objeto.

Devemos proporcionar ao educando jovem e adulto, um conhecimento elaborado da geometria, visando seu maior entrosamento no meio em que vive, abrindo horizontes para que possam ter uma leitura de um mundo mais próxima do real.

Os polígonos e em especial os triângulos serão o tema desse trabalho.

Os educandos jovens e adultos deverão ser capazes de identificar, reconhecer e resolver problemas geométricos que envolvam figuras planas, com ênfase aos triângulos.

CAPÍTULO I

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os relatos sobre as origens da Matemática se concentram nas chamadas escolas jônica e pitagórica... Praticamente não existem documentos matemáticos ou científicos até os dias de Platão no quarto século a.C.

No entanto, durante a segunda metade do quinto século circulam relatos persistentes e consistentes sobre um punhado de matemáticos que evidentemente estavam intensamente preocupados com problemas que formaram a base da maior parte dos desenvolvimentos posteriores, na geometria. Por isso, chamaremos esse período de “Idade Heróica da Matemática”, pois raramente, antes ou depois, homens com tão poucos recursos atacaram problemas de tal significado matemático.

Platão é importante na história da Matemática principalmente por seu papel como inspirador e guia de outros, e talvez a ele se deva a distinção clara que se fez na Grécia entre aritmética (no sentido de teoria dos números) e logística (aritmética aplicada). Platão considerava a logística adequada para negociantes e guerreiros que “precisam aprender as artes dos números, ou não saberão dispor suas tropas”. (BOYER, 1996, p.43)

Segundo Piaget, as soluções clássicas do problema da relação matemática com a realidade se encerravam no dilema: ou a Matemática se impõe, a priori, à realidade empírica, ou a Matemática é constituída a partir de construções abstratas que emergem desta realidade; (...) a originalidade da posição de Piaget consiste na situação da interação sujeito-objeto no interior do sujeito. Por esta via, elege, naturalmente, a psicologia como seu fundamental

instrumento para as explicitações desta interação (...) a Psicologia genética, experimental, para a qual pretende que:

“um problema de percepção haverá de ter soluções iguais em Moscou, Louvaine ou Chicago, independentemente das filosofias muito diferentes dos investigadores que aplicam métodos análogos de laboratórios.” (PIAGET, in MACHADO, 1991:43)

(...) Para concluir, ele questiona com a própria questão da relação com a realidade, dizendo que.

“Se faz cada vez mais difícil conhecer a realidade física fora de sua estrutura Matemática: se produz uma assimilação tão completa do real aos esquemas operatórios que a realidade física é transformada, pouco a pouco, em relações espaciais e métricas, e que, no limite do poder da ação, a operação do sujeito se converte em solidária ao objeto”. (PIAGET, in MACHADO, 1991: 45)

“... a escola não é o único local onde se aprende. A aprendizagem também ocorre no cotidiano da família, nos agrupamentos sociais, por meio de televisão e dos meios de comunicação de modo geral. Porém a escola transmite o conhecimento sistematizado, que lhe dá melhores condições de decodificar, de analisar o que os meios de comunicação e as demais instâncias ensinam. Nesse sentido, sua função é fundamental para que o cidadão possa participar do pleno exercício da cidadania... É preciso entender também que o conhecimento que a escola transmite não pode ser mecânico - tem que ser um conhecimento vivo, que viabilize a compreensão da sociedade na qual vivemos”. (PIMENTA, 1986, p.7-8).

1.1 - A ORIGEM DA GEOMETRIA

...Heródoto e Aristóteles não quiseram se arriscar a propor origens mais antigas que a civilização egípcia, mas é claro que a geometria que tinham em mente possuía raízes mais antigas. Heródoto mantinha que a geometria se originara no Egito, pois acreditava que tinha surgido da necessidade prática de fazer novas medidas de terras após cada inundação anual no vale do rio. Aristóteles achava que a existência no Egito de uma classe sacerdotal com lazeres é que tinha conduzido ao estudo da geometria (...) O fato dos geômetras egípcios serem, às vezes chamados “estiradores de corda”(ou agrimensores) pode ser tomado como

apoio de qualquer das duas teorias, pois cordas eram indubitavelmente usadas tanto para traçar as bases de templos como para realinhar demarcações apagadas de terras.

... A preocupação do homem pré-histórico com configurações e relações pode ter origem no seu sentimento estético e no prazer que lhe dava a beleza das formas, motivos que muitas vezes propõem a Matemática de hoje... Os mais antigos resultados geométricos encontrados na Índia formam o que se chamou os Sulvasultras, ou “regras da corda”... sugerindo-se que tanto a geometria da Índia como a egípcia podem provir de uma fonte comum - uma protogeometria relacionada com ritos primitivos - mais ou menos do modo como a ciência se desenvolveu a partir da mitologia e a filosofia da teologia. (BOYER, 1996, p. 4-5)

O sistema formal elaborado por Euclides para a Geometria, durante mais de dois mil anos permaneceu soberano como descritivo da estrutura perceptual do espaço (...), Euclides enuncia os cinco postulados que caracterizam o seu sistema.

P₁ - É possível traçar uma linha reta de qualquer ponto a qualquer ponto.

P₂ - Qualquer segmento de reta finito pode ser prolongado indefinidamente para constituir uma linha reta.

P₃ - dados um ponto qualquer e uma distância qualquer, pode-se traçar um círculo de centro naquele ponto e raio igual à distância dada.

P₄ - Todos os ângulos retos são iguais entre si.

P₅ - Se uma reta cortar duas outras de modo que os dois ângulos interiores de um mesmo lado tenham soma menor que dois ângulos retos, então as duas outras retas se cruzarão, se prolongadas indefinidamente, do lado da primeira reta em que se encontram os dois ângulos citados.

(...) Euclides assumiu cinco outros princípios (...) que seriam utilizados em todas as matérias e não somente na Geometria. A estes chamou axiomas.

A₁ - Duas coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.

A₂ - Se parcelas iguais forem somadas a quantias iguais os resultados obtidos serão iguais.

A₃ - Se quantias iguais forem subtraídas de quantias iguais, os restos obtidos serão iguais.

A₄ - Coisas que coincidem umas com as outras são iguais entre si.

A₅ - O todo é maior que cada uma das partes. (MACHADO, 1991, p.31-32)

1.2 - PROBLEMAS GEOMÉTRICOS

Diz-se freqüentemente que os egípcios antigos conheciam o Teorema de Pitágoras, mas não há traço disto nos papiros que chegaram até nós. Há no entanto alguns problemas geométricos no Papiro Ahmes. O problema 51 mostra que a área de um triângulo isósceles era achada tomando a metade do que chamaríamos base e multiplicando isso pela altura. Ahmes justifica seu método para achar a área sugerindo que o triângulo isósceles pode ser pensado como dois triângulos retângulos, um dos quais pode ser deslocado de modo que os dois juntos formam um retângulo.

O trapézio isósceles é tratado de modo semelhante no problema 52, em que a base maior é 6 a menor é 4 e a distância entre elas é 20. Tomando a metade da soma das bases, “de modo a fazer um retângulo”, Ahmes multiplica isso por 20 para achar a área. Em transformações como essa, em que triângulos e trapézios isósceles são transformados em retângulos, vemos o início de uma teoria de congruências e da idéia de prova em geometria, mas os egípcios não foram além. Uma deficiência séria em geometria era a falta de uma distinção claramente estabelecida entre relações que são exatas e as que são apenas aproximações. Um documento de Edfu que se preservou, datando de cerca de 1500 anos depois de Ahmes, dá exemplo de triângulos, trapézios, retângulos e quadriláteros mais gerais; a regra para se achar a área do quadrilátero geral é fazer o produto das medidas aritméticas de lados opostos. Imprecisa como é a regra, o autor do documento deduziu dela um corolário - que a área do triângulo é a metade da soma de dois lados multiplicada pela metade do terceiro lado. Este é um notável exemplo de busca de relações entre figuras geométricas... (BOYER, 1996, p.12)

Incomensurabilidade

Era um artigo de fé fundamental do pitagorismo que a essência de tudo, na geometria como nas questões práticas e teóricas da vida do homem, pode ser explicada em termos de arithmos, ou das propriedades intrínsecas dos inteiros e suas razões. Os diálogos de Platão mostram, no entanto, que a comunidade matemática grega fora assombrada por uma descoberta que praticamente demolia a base da fé pitagórica nos inteiros. Tratava-se da

descoberta que na própria geometria os inteiros e suas razões eram insuficientes para descrever mesmo simples propriedades básicas.(...) (BOYER, 1996, p.49-50)

Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar.

Quase todos os trabalhos sobre a geometria decorrem de dois problemas principais: o fraco desempenho dos alunos e um currículo ultrapassado. Esses problemas nos acompanham há algum tempo. Em 1969, Carl Allendoerfer escreveu:

“O currículo de Matemática nas nossas escolas elementar e secundária enfrenta um sério dilema no que se refere à geometria. É fácil encontrar falhas no curso tradicional de geometria, mas é muito difícil encontrar um caminho correto para superar essas falhas (...) grupos de reforma curricular aqui e em outros lugares atacaram o problema, mas com singular insucesso ou inadequação (...) Vêmo-nos pressionados, portanto, a fazer algo pela geometria; mas o quê?” (p.165). Citado em: (LINDQUIST, 1994, p.21)

(...) Melhor do que o estudo do espaço, a geometria é a investigação do “espaço intelectual” já que, embora comece com a visão, ela caminha em direção ao pensamento, vai além do que pode ser percebido para o que pode ser concebido”. (D. WHEELER, 1981:352 citado em: MACHADO, 1993: 137)

A transformação da Geometria de uma ciência empírica numa ciência matemática foi extremamente lenta e sob condições e necessidades sociais e de intervenção na natureza.

Embora seja notável a variedade de formas geométricas que os organismos vivos nos apresentam nos alvéolos das abelhas, nas asas da borboleta, na estrela do mar, para perceber estas e outras formas geométricas que são produzidas pela natureza é necessário um longo desenvolvimento de experiências humanas. Ao construir suas moradias, fabricar instrumentos necessários à sua sobrevivência, ao inventar jogos e produzir objetos artísticos, os homens comparam as formas das coisas, observam as semelhanças e diferenças e estabelecem critérios de comparação e de classificação. Os homens, em sua história, foram reconhecendo a forma em si dos objetos, o que foi permitindo-lhes aprimorar a confecção de seus produtos e, de novo, elaborar de forma mais precisa o conceito abstrato de forma.

Em nossa sociedade podemos observar o uso de noções geométricas em atividades desenvolvidas por engenheiros e arquitetos ao planejar e desenhar plantas e construir maquetes

de casas, edifícios, pontes; por operários ao concretizam o plano dos engenheiros e arquitetos; pelas costureiras no corte e confecção de modelos.

Nessas atividades é possível identificar a relação ativa que se estabelece entre o conhecimento anterior que permite a execução de uma determinada atividade e a modificação e compreensão mais profunda que as sucessivas realizações e reflexão sobre as tarefas desenvolvidas podem possibilitar no desenvolvimento de novos acontecimentos.

Nós professores temos que ter a clareza e a sensibilidade para trabalharmos com nossos jovens e adultos que retornam aos bancos escolares, necessitam de estímulos, de valorização; que em momento algum seja seu raciocínio ou sua experiência de vida deixada de lado, com isso incentivando-os a buscar cada vez mais explicação para tudo quanto acontece e os rodeia, tornando-os mais críticos e convencidos de que fazem parte e são indispensáveis ao atual momento histórico em que vivemos.

CAPÍTULO II

PLANO DE ENSINO

Esta unidade foi elaborada para servir de apoio aos alunos jovens e adultos do CES de Francisco Beltrão, com o objetivo de proporcionar-lhes, um conhecimento elaborado da Geometria, sob a orientação do professor e a partir do conhecimento empírico ou de sua prática, levá-los a fazer a ligação entre a prática e a teoria.

Em nosso dia-a-dia, estamos rodeados de figuras com formas geométricas como edifícios, pontes, casas, objetos, elementos da natureza, etc.

Inicialmente, a geometria preocupa-se com os problemas da agricultura; no antigo Egito, os agrimensores usaram-na para medir terrenos.

Hoje, a geometria vai muito além, preocupando-se com os problemas relacionados ao espaço que nos cerca.

2.1 - PROPOSTA DE CONTEÚDO

As dez aulas apresentadas nessa unidade tem por objetivo aprofundar o conhecimento de nossos educandos em Geometria, visando uma compreensão mais abrangente sobre triângulos.

O conteúdo será distribuído da seguinte maneira:

Aula 01

- Definição de Triângulo.
- Elementos do triângulo.

Aula 02

- Pontos notáveis do triângulo.

Aula 03

- Classificação dos triângulos. Quanto aos lados e ângulos.
- Condição de existência do triângulo.

Aula 04

- Soma dos ângulos internos do triângulo.
- Ângulos externos do triângulo.

Aula 05

- Congruência de triângulos.

Aula 06

- Homotetia.

Aula 07

- Semelhança de triângulos.

Aula 08

- Teorema de Pitágoras.

Aula 09

- Outra propriedade do triângulo retângulo.
- Relações métricas.

Aula 10

- Área do triângulo.

1ª AULA

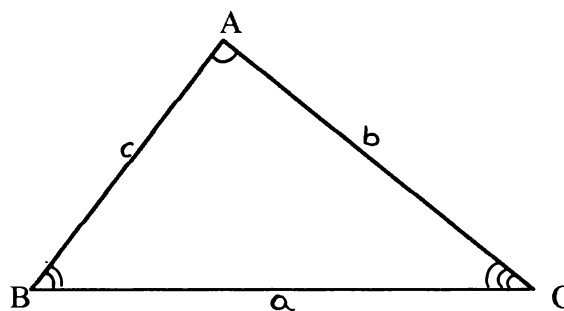
Situação Problema

De que forma podemos dispor três pés em uma mesa, cujo tampo tem forma circular, para que se obtenha o equilíbrio desejado?

2.2 - Estudo dos Triângulos

2.2.1 - Definição: Da-se o nome de TRILÁTERO, ou TRIÂNGULO, ao polígono de três lados.

Dados três pontos A, B e C não colineares a reunião dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ e $\overline{BC}$ chama-se Triângulo ABC.



Indicação: Triângulo ABC = Δ ABC

$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{AC} \cup \overline{BC}$$

2.2.2 - Elementos

Os pontos A, B e C são os **vértices** do Δ ABC.

Os segmentos $\overline{AB}$ (de medida c), $\overline{AC}$ (de medida b) e $\overline{BC}$ (de medida a) são os **lados** do triângulo.

Os ângulos $\angle B \hat{A} C$ ou $\hat{A}$, $\angle A \hat{B} C$ ou $\hat{B}$ e $\angle A \hat{C} B$ ou $\hat{C}$ são os **ângulos** do Δ ABC (ou ângulos internos do ΔABC).

Diz-se que os lados $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$ e os ângulos $\hat{A}$, $\hat{B}$, e $\hat{C}$ são respectivamente opostos.

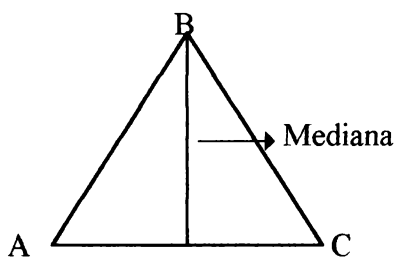
2ª AULA

2.3 - Pontos notáveis do triângulo

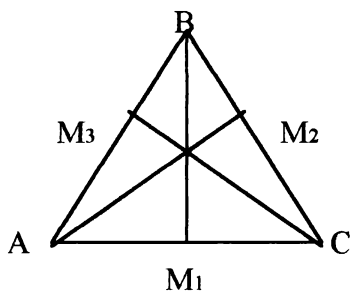
2.3.1 - Mediana

Mediana é o segmento que vai de um vértice ao ponto médio do lado oposto a esse vértice.

Todo triângulo tem três vértices.



Todo triângulo tem três medianas.

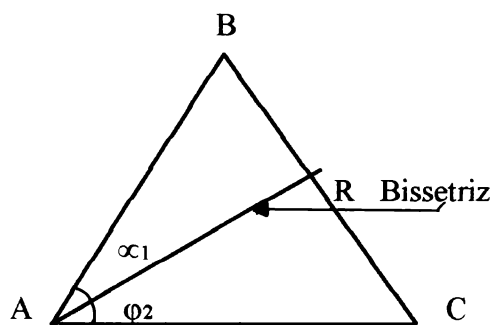


As três medianas encontram-se num único ponto denominado **baricentro**.

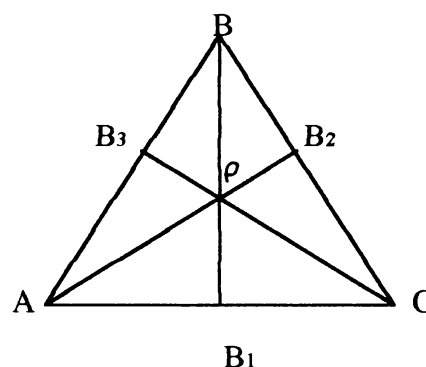
2.3.2 - Bissetriz

É o segmento de reta que une o vértice ao lado oposto, dividindo o ângulo em dois ângulos congruentes (de mesma medida).

Todo triângulo possui três bissetrizes.



$$\alpha_1 = \varphi_2$$

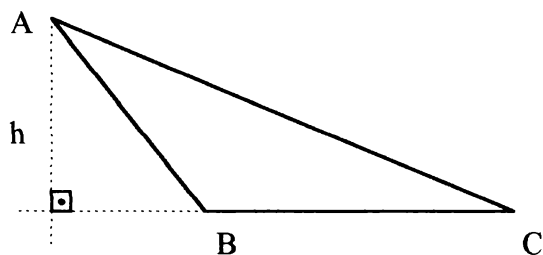


As três bissetrizes encontram-se num único ponto denominado de **incentro**.

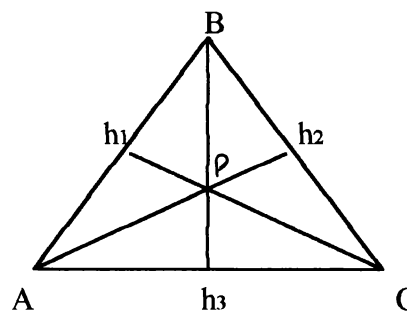
2.3.3 - Altura

Altura é o segmento de reta que vai de um vértice ao lado oposto, sendo perpendicular a esse lado.

Dependendo do lado que se considere como base do triângulo, haverá uma altura.



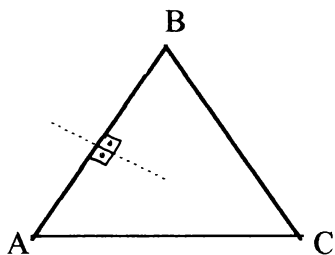
Assim, todo triângulo têm três alturas, cada uma relativa a um lado.



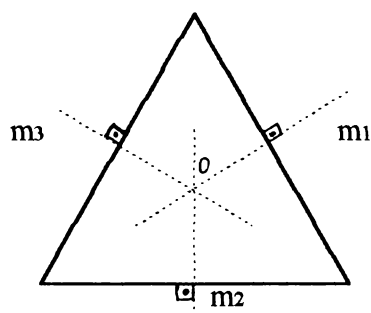
Os pontos de encontro das três alturas denomina-se **ortocentro**.

2.3.4 - Mediatriz

Mediatriz é o segmento de reta perpendicular (90°) ao lado do triângulo passando pelo ponto médio desse lado.



Todo triângulo tem três mediatrizes.



As três mediatrizes encontram-se num único o ponto denominado **circuncentro**.

Os segmentos de reta que une os vértices do triângulo ao circuncentro são congruentes (de mesma medida).

Nota: O triângulo não possui diagonal, pois os vértices são consecutivos entre si.
(Ver Δ isósceles e equilátero).

3ª AULA

2.4 - Classificação dos triângulos

Os triângulos são polígonos de três lados classificados de acordo com a medida de seus lados e de acordo com os seus ângulos internos.

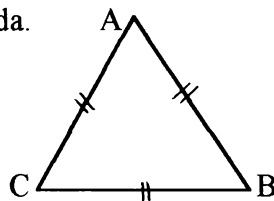
Os triângulos podem ser classificados quanto aos lados ou quanto aos ângulos.

2.4.1 - Classificação quanto aos lados

2.4.1.1 - Triângulo Equilátero

Possui os três lados com a mesma medida.

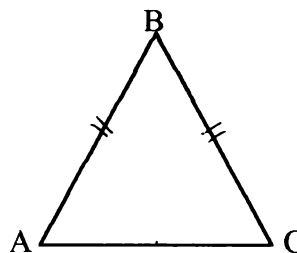
$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$$



2.4.1.2 - Triângulo Isósceles

Possui dois lados com a mesma medida.

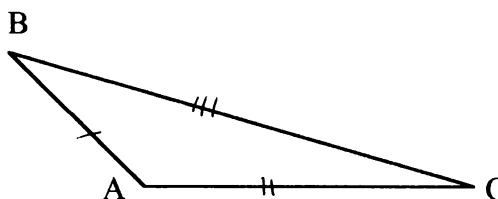
$$\overline{AB} = \overline{BC}$$



2.4.1.3 - Triângulo Escaleno

Possui os três lados com medidas diferentes.

$$\overline{AB} \neq \overline{BC} \neq \overline{CA}$$

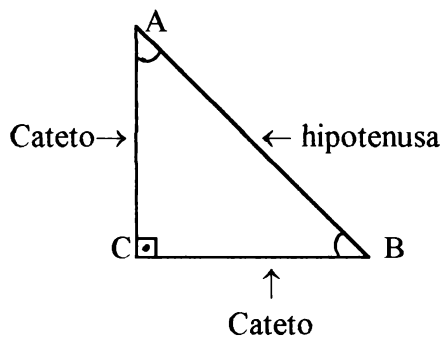


2.5 - Classificação quanto aos ângulos.

2.5.1 - Triângulo Retângulo

É o triângulo em que um dos seus ângulos é **reto** (90°).

$$\hat{C} = 90^\circ, \hat{B} < 90^\circ \text{ e } \hat{A} < 90^\circ$$

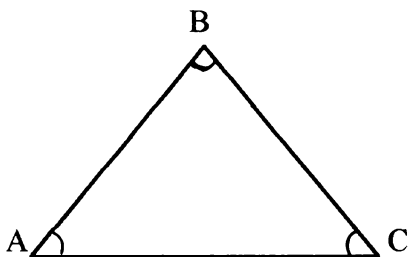


O lado oposto ao ângulo reto é sua hipotenusa e os outros dois são os catetos do triângulo.

2.5.2 - Triângulo Acutângulo

É o triângulo que possui os **três ângulos agudos**.

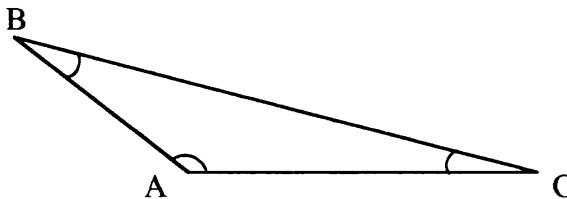
$\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ são ângulos agudos (menores que 90°).



2.5.3 - Triângulos obtusângulo

É o triângulo que tem um ângulo obtuso (maior que 90°).

$$90^\circ < \hat{A} < 180^\circ$$



2.5.4 - Condições de existência do triângulo

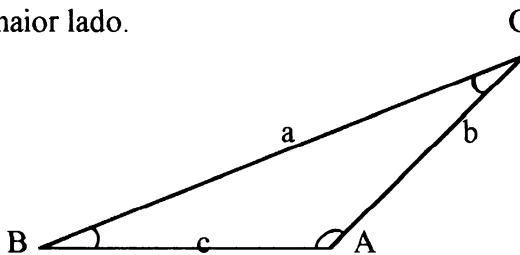
Ao maior lado opõe-se o maior ângulo.

Ao maior ângulo opõe-se o maior lado.

$$a > b \text{ e } a > c$$

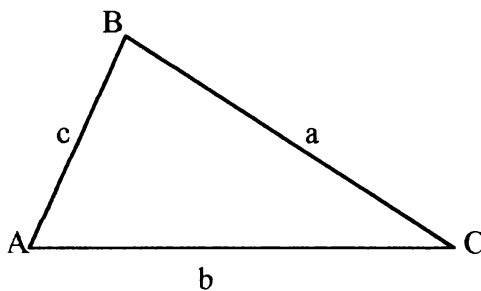
$$\hat{A} > \hat{B}$$

$$\hat{A} > \hat{C}$$



Em todo triângulo cada lado é menor que a soma dos outros dois.

$$b < a + c$$



Atividades:

1 - Cite os três elementos básicos de um triângulo.

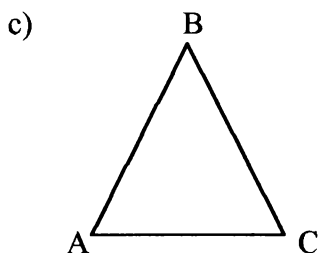
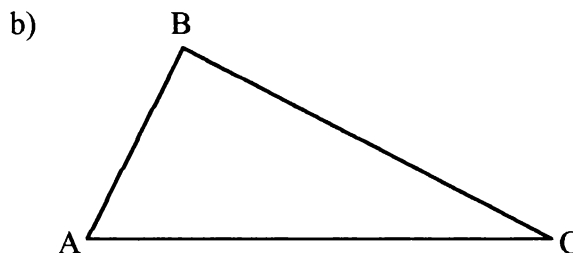
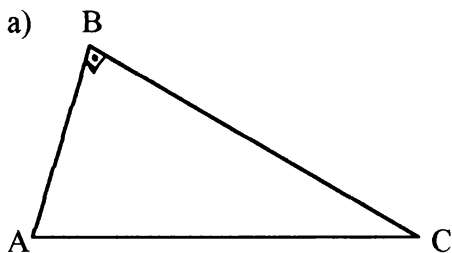
2 - De posse das medidas dos lados dos triângulos abaixo relacionados, classifique-os como equilátero, isósceles e escaleno justificando sua resposta.

- a) 4 cm, 4 cm e 4 cm
- b) 3 cm, 4 cm e 5 cm
- c) 5 cm, 5 cm e 3 cm.

3 - Dadas as medidas dos ângulos internos dos triângulos relacionados, classifique-os como retângulo, acutângulo e obtusângulo. Justifique sua resposta.

- a) 60° , 60° e 60°
- b) 90° , 45° e 45°
- c) 130° , 20° e 30°

4 - Com o auxílio de um transferidor (ou um ângulo reto qualquer) meça os ângulos e classifique os triângulos quanto aos ângulos.



5 - Dadas as medidas dos lados, tente construir os triângulos e justifique sua resposta.

- a) 8cm, 4cm e 4 cm
- b) 7cm, 2cm e 4cm
- c) 9cm, 4cm e 3cm
- d) 3cm, 7cm e 10cm

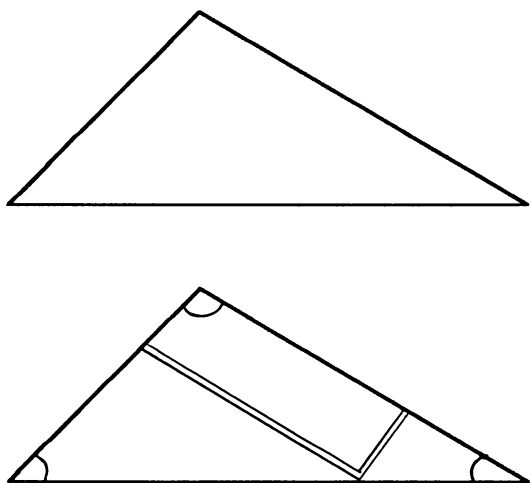
6 - Num triângulo, dar o nome do ponto de encontro das:

- a) três medianas
- b) três alturas
- c) três bissetrizes
- d) três mediatrizes.

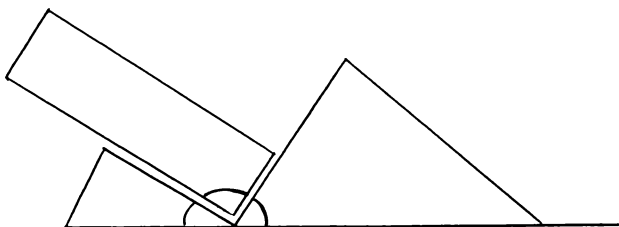
4ª AULA

2.6 - Soma dos ângulos internos de um triângulo

Desenhe um triângulo qualquer em uma folha de papel. Recorte o triângulo destacando seus ângulos, como mostra a figura seguinte:



Agora, junte os três vértices num único ponto, como mostra a figura abaixo:



Nessa experiência qual foi a soma dos três ângulos internos do triângulo?

Faça essa experiência com triângulos de lados e ângulos diferentes do exemplo dado e compare com o resultado da experiência acima.

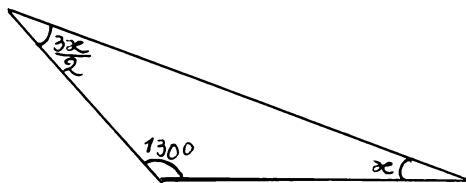
Podemos então dizer que:

“A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre 180° ”.

Como já conhecemos esta propriedade dos triângulos, podemos calcular a medida desconhecida de qualquer ângulo interno de um triângulo.

Observando o exemplo a seguir.

Calcular o valor de x do triângulo abaixo.



Solução.

Somamos os ângulos internos.

$$130^\circ + \frac{3x}{2} + x = 180$$

Resolvendo a equação, temos:

$$\frac{260}{2} + \frac{2x}{2} + \frac{3x}{2} = \frac{360}{2}$$

$$260 + 2x + 3x + 360 \rightarrow 2x + 3x + 360 - 260 \rightarrow 5x = 100 \rightarrow x = \frac{100}{5} \rightarrow x = 20^\circ$$

Como $x = 20^\circ$, os ângulos serão:

$$D = 20^\circ \quad E = 30 \quad e \quad C = 130^\circ$$

Atividades:

1 - Qual o valor da soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo?

2 - Determine a medida dos ângulos do triângulo:

a) 75° , x e $2x$

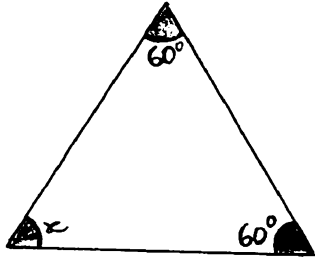
b) 60° , x e $\frac{x}{2}$

c) 28° , x e 25°

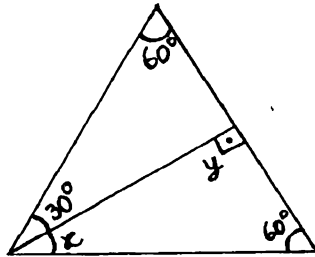
d) 90° , 50° e x

3 - Determine os valores dos ângulos x nas figuras a seguir, sem usar o transferidor

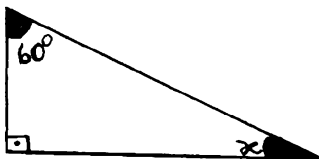
a)



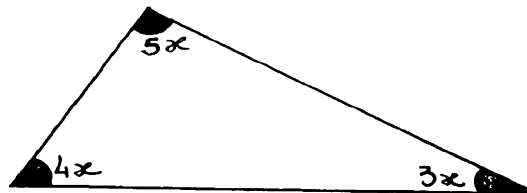
b)



c)



d)



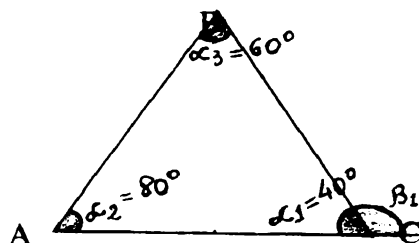
2.7 - Ângulos externos de um triângulo

No triângulo a baixo, vamos considerar que:

$\beta_1 \rightarrow$ é o ângulo externo do triângulo ABC

$\alpha_1 \rightarrow$ é o ângulo adjacente ao ângulo externo β_1 .

$\alpha_2 \alpha_3 \rightarrow$ são ângulos internos não adjacentes ao ângulo externo β_1 .



No triângulo considerado, α_1 e β_1 são ângulos suplementares, logo: $\alpha_1 + \beta_1 = 180^\circ$

Como $\alpha_1 = 40^\circ$, então $40 + \beta_1 = 180^\circ \rightarrow \beta_1 = 180 - 40 = 140^\circ \therefore \beta_1 = 140^\circ$

Somando os ângulos internos não adjacentes a β_1 , temos:

$\alpha_2 + \alpha_3 = 140^\circ$ como $\beta_1 = 140^\circ$ então: $\alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1$

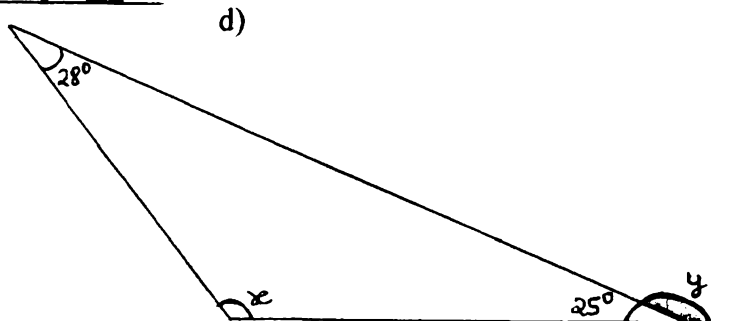
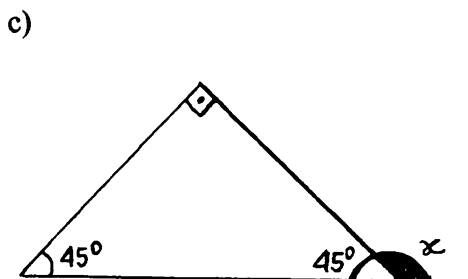
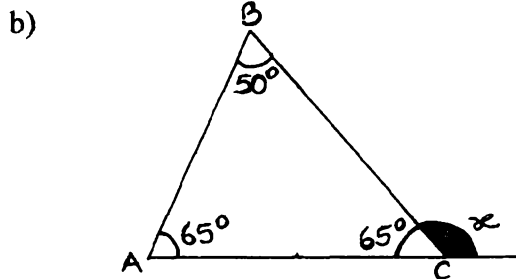
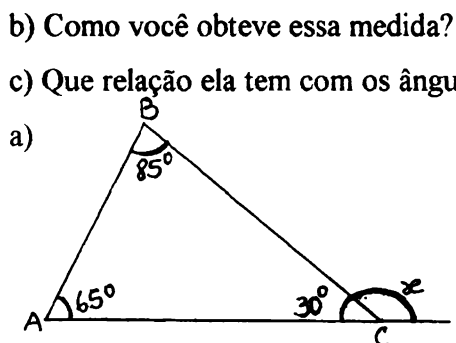
Conclusão:

Em todo triângulo, qualquer ângulo externo é igual à soma dos dois ângulos internos não adjacentes a ele.

Atividade

4 - Observe as figuras abaixo e responda as questões para cada figura relacionada.

a) Quanto mede x ?

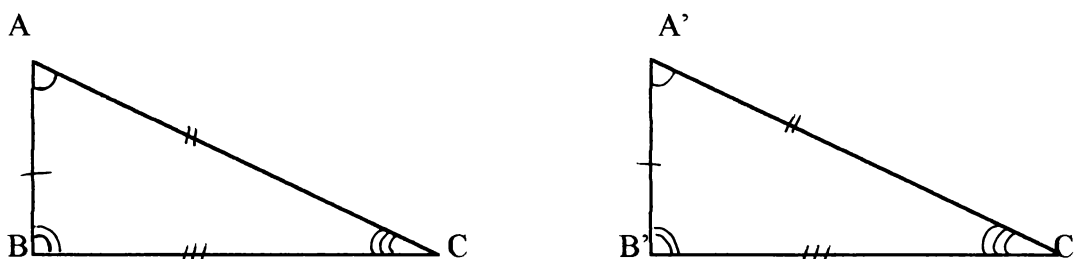


5ª AULA

2.8 - Congruência de triângulos

Um triângulo é congruente (símbolo $\equiv$) a outro se, e somente se é possível estabelecer uma correspondência entre seus vértices de modo que:

Seus lados são ordenadamente congruentes (de mesma medida) aos lados do outro e seus ângulos são ordenadamente congruentes aos ângulos do outro.



O triângulo ABC é congruente ao triângulo A'B'C' ($\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$).

Analisando e considerando:

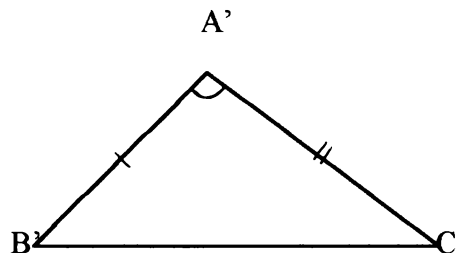
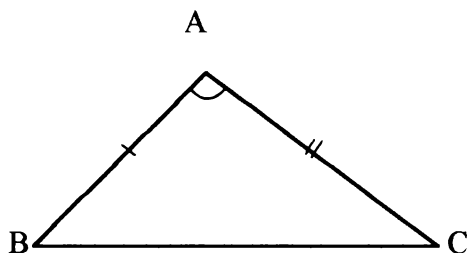
$$\begin{array}{l} \text{Lados} \left[\begin{array}{l} AB \equiv A'B' \\ BC \equiv B'C' \\ CA \equiv C'A' \end{array} \right. \quad \text{Ângulos} \left[\begin{array}{l} \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{array} \right. \end{array}$$

Porém, para verificar se dois triângulos são congruentes, não é necessário testar os três lados e os três ângulos. Existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes. Estas são os chamados casos ou critérios de congruência.

2.8.1 - 1º Caso - LAL (lado, ângulo, lado)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então eles são congruentes.

Esta proposição é postulado e indica que se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido, então o lado restante e os dois ângulos restantes também são ordenadamente congruentes.



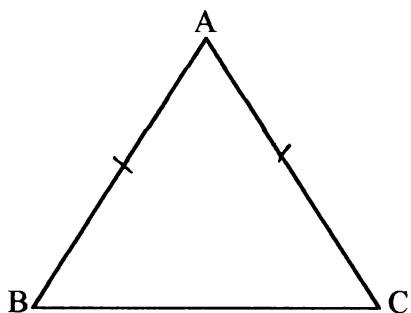
$$\begin{array}{lcl} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} & & \hat{B} \equiv \hat{B'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A'} & \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \Rightarrow & \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} & & \hat{C} \equiv \hat{C'} \end{array}$$

2.8.2 - Teorema do triângulo isósceles

“Se um triângulo tem dois lados congruentes, então os ângulos opostos a estes lados são congruentes”.

ou

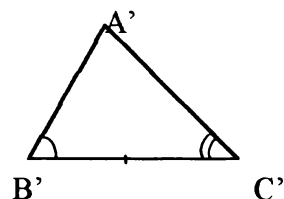
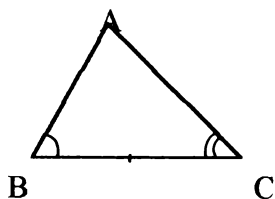
“Se um triângulo é isósceles os ângulos da base são congruentes”.



$$\overline{AB} \equiv \overline{AC} \Rightarrow \hat{B} \equiv \hat{C}$$

2.8.3 - 2º Caso - ALA (ângulo, lado, ângulo)

“Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado e os dois ângulos a ele adjacentes, então estes triângulos são congruentes”.



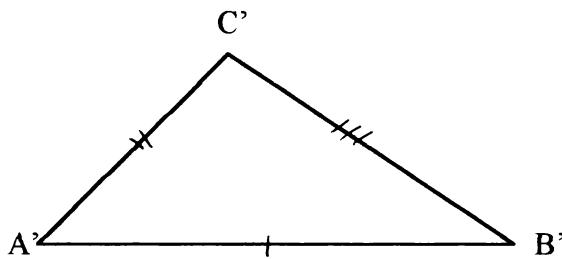
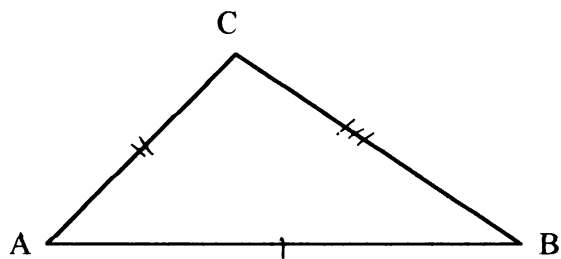
$$\left. \begin{array}{l} \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \\ \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{ALA}} \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C' \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} \\ \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} \end{array} \right.$$

Com base no 2º caso (ALA) pode-se provar a recíproca do teorema do triângulo isósceles.

“Se um triângulo possui dois ângulos congruentes, então esse triângulo é isósceles”.

2.8.4 - 3º Caso - LLL (lado, lado, lado)

Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então estes triângulos são congruentes.

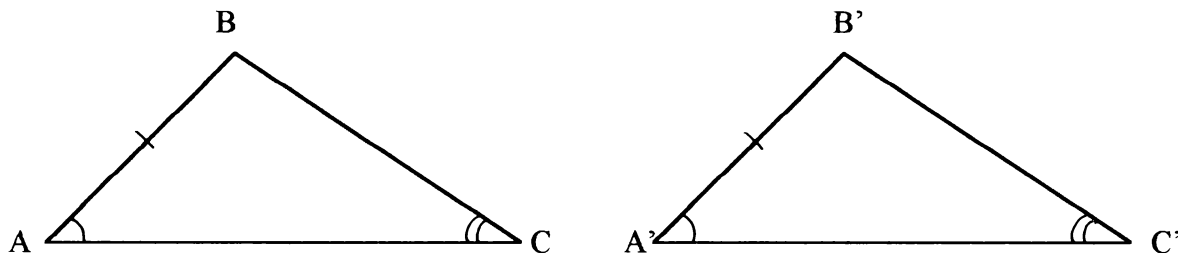


$$\begin{array}{ll} \overline{AC} \equiv \overline{A'C'} & \hat{A} \equiv \hat{A}' \\ \overline{AB} \equiv \overline{A'B'} & \hat{B} \equiv \hat{B}' \\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} & \hat{C} \equiv \hat{C}' \end{array}$$

$$\Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

2.8.5 - 4º Caso LAAo (lado, ângulo, ângulo oposto)

Dois triângulos que apresentam um lado, um ângulo adjacente a esse lado e um ângulo oposto a esse lado congruente, são triângulos congruentes.



$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$$

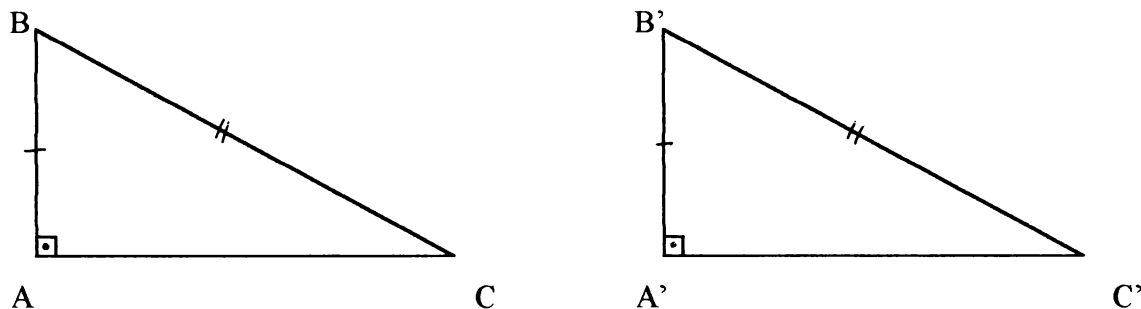
$$\hat{A} \equiv \hat{A'}$$

$$\hat{C} \equiv \hat{C'}$$

$$\Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

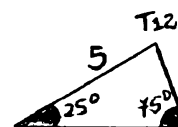
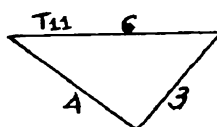
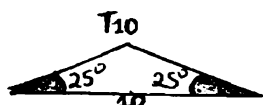
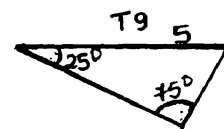
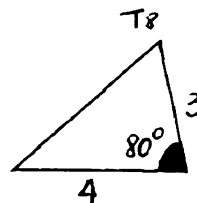
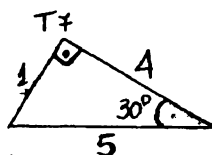
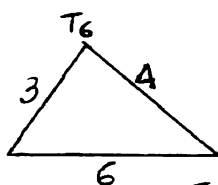
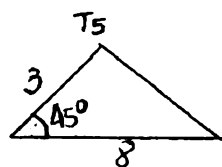
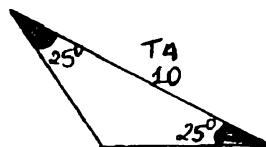
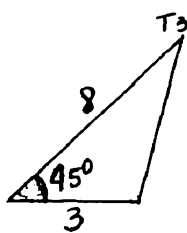
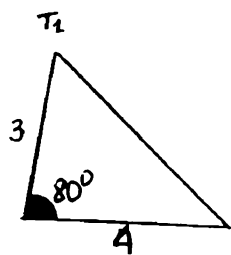
2.8.6 - Caso especial de congruência de triângulos retângulos

Se dois triângulos retângulos têm, ordenadamente congruentes um cateto e a hipotenusa, então estes triângulos são congruentes.



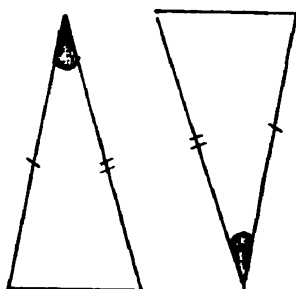
$$\hat{A} \equiv \hat{A'} \text{ (retos) }, \overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'$$

1 - Nos casos a seguir selecione os triângulos congruentes e indique o caso de congruência.

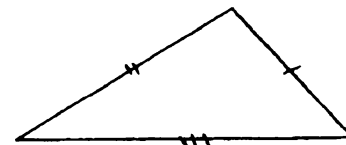
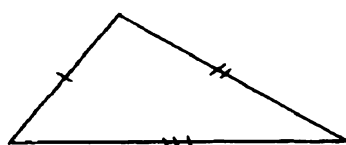


2 - Os pares de triângulos abaixo são congruentes. indique o caso de congruência.

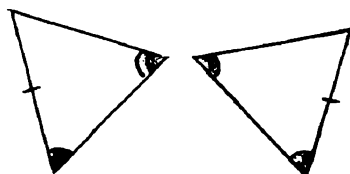
a)



b)



c)



d)



e)



6ª AULA

2.9 - Homotetia

Comumente, você ouve falar assim “traga o negativo de sua fotografia e obtenha um poster”.

O **poster** é uma **ampliação** da fotografia que você deseja. Essa ampliação foi obtida por uma **transformação**, que se chama **homotetia**.

Você poderia desejar não uma ampliação, mas uma **redução**. Isto se faz também pela **homotetia**.

Suponhamos que você queira ampliar o triângulo ABC de três vezes, obtendo o triângulo A'B'C'. Para isto é necessário ter:

1) Um ponto **O** chamado **centro de homotetia**. A ampliação será feita em relação a esse ponto.

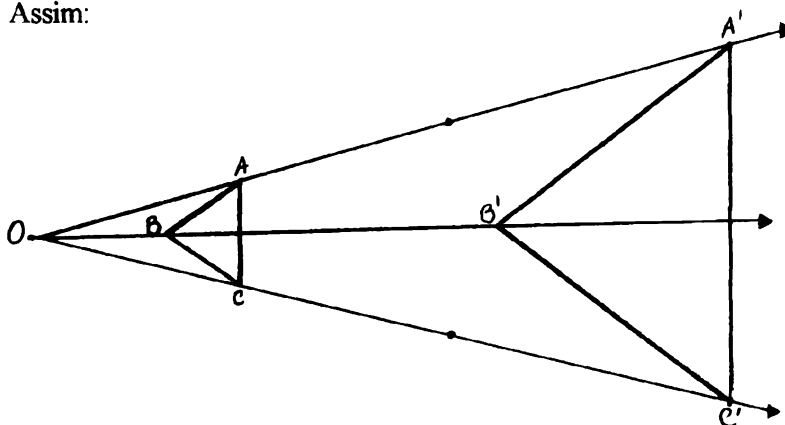
2) Um número real **K** (nesse caso 3) tal que:

$$\overrightarrow{OA'} = 3 \overrightarrow{OA}$$

$$\overrightarrow{OB'} = 3 \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OC'} = 3 \overrightarrow{OC}$$

Assim:



Trace as semi-retas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OC}$.

Sendo $K = 3$, toma-se três vezes $\overline{OA}$ na semi-reta $\overrightarrow{OA}$, partindo de O , obtendo A' . Em $\overrightarrow{OB}$, tome três vezes $\overline{OB}$, partindo de O , obtendo B' . Em $\overrightarrow{OC}$, tome três vezes $\overline{OC}$, partindo de O , obtendo C' . O triângulo $A'B'C'$ é a ampliação pedida.

Dizemos que o $\Delta A'B'C'$ é o **transformado homotético** do ΔABC em relação ao centro O e ao número real 3.

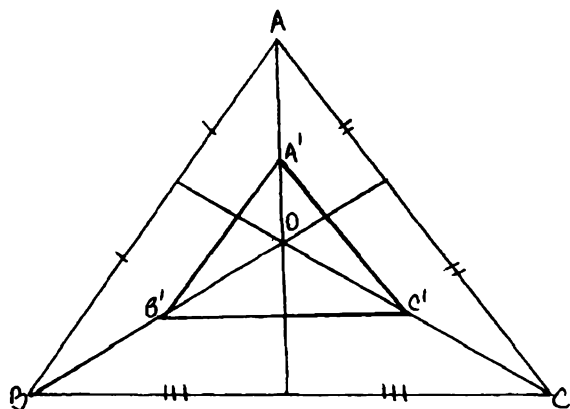
Você poderá observar que o triângulo ABC é semelhante ao triângulo $A'B'C'$.

Pois:

$$\begin{aligned}\hat{A} &\equiv \hat{A}' \\ \hat{B} &\equiv \hat{B}' \\ \hat{C} &\equiv \hat{C}' \\ \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} &= \frac{\overline{B'C'}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{C'A'}}{\overline{CA}} = 3\end{aligned}$$

Exemplo:

Reduza o triângulo à metade, considerando o centro de homotetia como o ponto de intersecção das medianas.



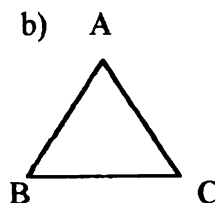
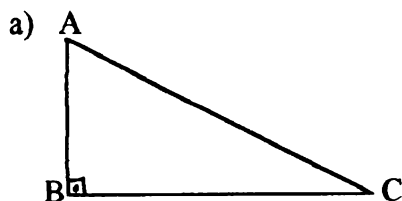
$$\overline{OA'} = \frac{1}{2} \overline{OA}$$

$$\overline{OB'} = \frac{1}{2} \overline{OB}$$

$$\overline{OC'} = \frac{1}{2} \overline{OC}$$

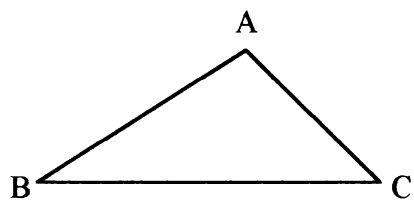
Atividades:

1) Amplie as figuras dadas, optando pelo valor de K .

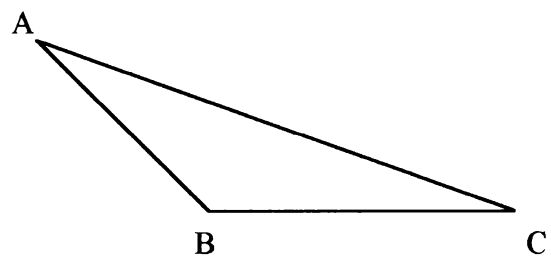


2) Reduza as figuras dadas, considerando $K = \frac{1}{2}$

a)



b)



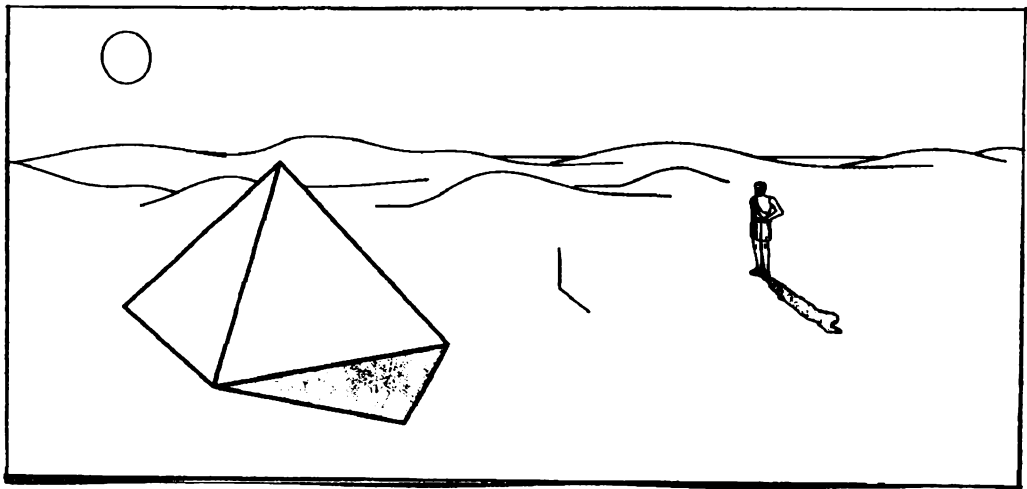
7ª AULA

2.10 - Tales e a pirâmide

O filósofo e matemático Tales nasceu na cidade de Mileto, na Grécia antiga, por volta do ano 585 a.C.

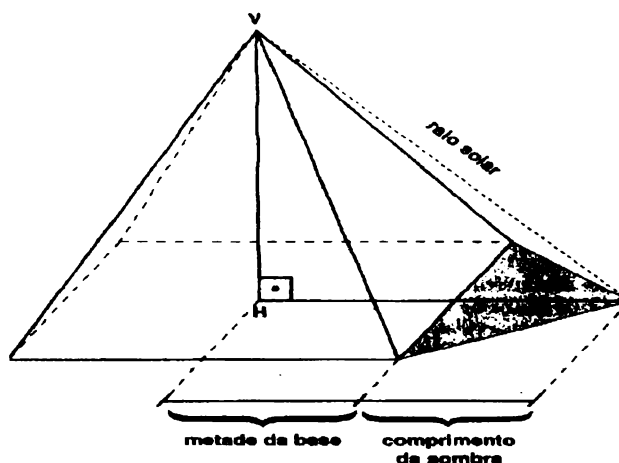
Há muitas lendas e histórias sobre ele. Diz-se que, ao ser interrogado sobre o que era difícil, Tales respondeu: “Conhecer a si mesmo”. O que era fácil: “Ser dirigido por outro”. Agradável: “Seguir a própria vontade”. Divino: “Aquilo que não tem começo nem fim”.

Tales passava grande parte do tempo viajando, como era comum aos sábios daquela época. Em uma de suas viagens ao Egito, passou a ser prestigiado pelo faraó Amásis por ter medido a altura de uma pirâmide sem precisar escalá-la.



Para isso, Tales fincou uma estaca verticalmente no chão. Concluiu que, no momento em que comprimento da sombra da estaca fosse igual ao comprimento da estaca, a altura da pirâmide seria igual ao comprimento da sombra da pirâmide mais metade da medida da base.

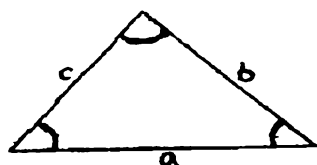
A altura da pirâmide é a distância do vértice V à base. Observe a figura abaixo: a altura é a medida do segmento VH .



2.10.1 -Tales e a Matemática

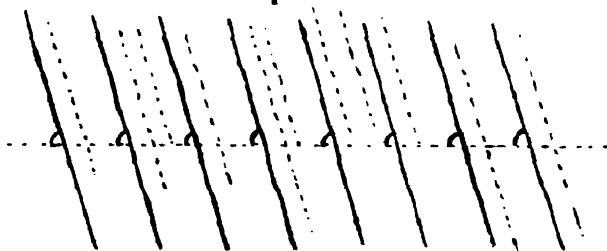
Para medir a altura da pirâmide, Tales baseou-se em alguns fatos:

1- Quando dois triângulos têm os ângulos iguais, então seus lados correspondentes formam uma proporção.

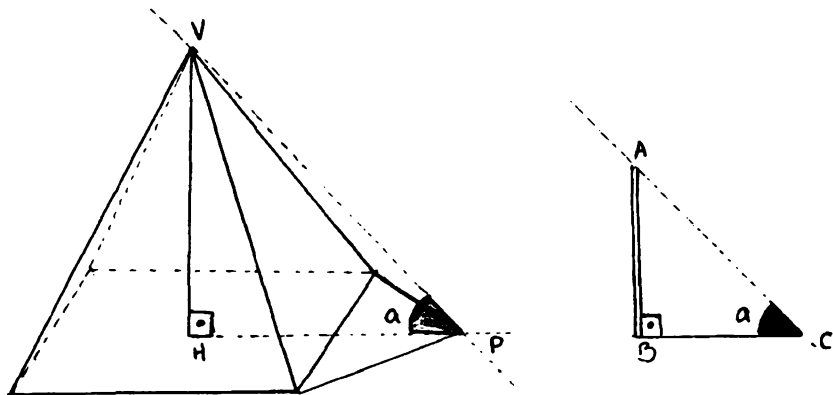


$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

2 - Os raios solares são paralelos.



E nesse caso, Tales também sabia que os ângulos de incidência dos raios solares num mesmo instante tinham todos a mesma medida.



Tales imaginou um triângulo formado pela altura da pirâmide, a metade da base mais o comprimento da sombra da pirâmide e um raio solar ligando o vértice da pirâmide ao final da sombra, como mostra a figura acima. Imaginou também um outro triângulo formado pela estaca, sua sombra e um raio solar.

Esse dois triângulos imaginários tinham, cada um deles, um ângulo reto e um ângulo de mesma medida (a). Nesse caso, Tales sabia que as medidas dos lados desses triângulos eram proporcionais. Então:

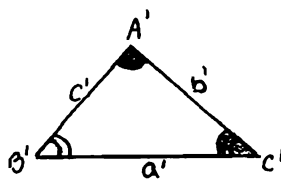
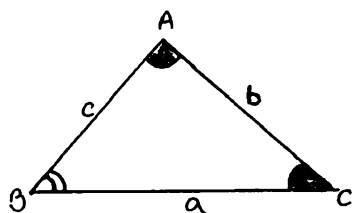
$$\frac{VH}{HP} = \frac{AB}{BC}$$

Com esse método, Tales inaugurou o processo de medida indireta, muito utilizado ainda hoje na astronomia e na medição de distâncias que aparentemente não podemos alcançar, como a altura de montanhas, árvore e monumentos ou a largura de grandes rios e lagos.

2.11 - Semelhança de triângulos

Dois triângulos são semelhantes, se e somente se, possuem os três ângulos ordenadamente congruentes e os lados homólogo proporcionais.

Dois lados homólogo (homo = mesmo, logos = lugar) são tais que cada um deles está em um dos triângulos e ambos são opostos a ângulos congruentes (mesma medida).

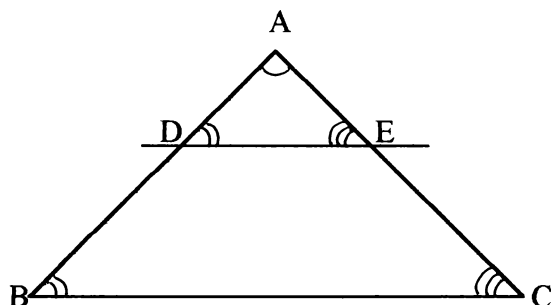


$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{aligned} \hat{A} &\equiv \hat{A}' \\ \hat{B} &\equiv \hat{B}' \text{ e } \frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \\ \hat{C} &\equiv \hat{C}' \end{aligned}$$

($\sim$: semelhante)

2.11.1 - Teorema Fundamental

Se uma reta é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois em pontos distintos, então o triângulo que ela determina é semelhante ao primeiro.



1º Ângulos congruentes

$\overleftrightarrow{DE} \parallel \overleftrightarrow{BC} \Rightarrow (\hat{D} \equiv \hat{B} \text{ e } \hat{E} \equiv \hat{C})$ (ângulos correspondentes) ($\parallel$: paralelo) temos:

$\hat{D} \equiv \hat{B} \text{ e } \hat{E} \equiv \hat{C} \text{ e } \hat{A} \text{ comum.}$

2º Lados proporcionais

Pelo teorema de Tales temos:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AE}}{\overline{AC}}$$

Conclusão: $\Delta ABC \sim \Delta ADE$.

2.11.2 - Casos ou critérios de semelhança.

1º Caso

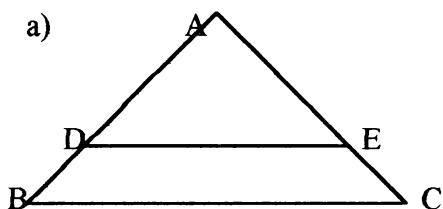
“Se dois triângulos possuem dois ângulos ordenadamente congruentes, então eles são semelhantes”.

2º Caso

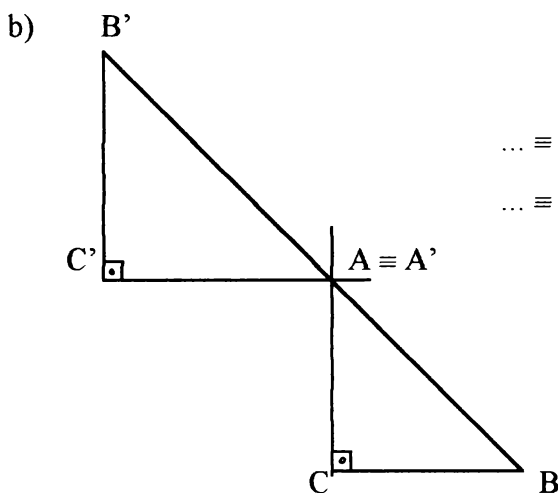
“Se dois lados de um triângulo são proporcionais aos homólogo de outro triângulo e os ângulos compreendidos são congruentes, então os triângulos são semelhantes”.

Atividades:

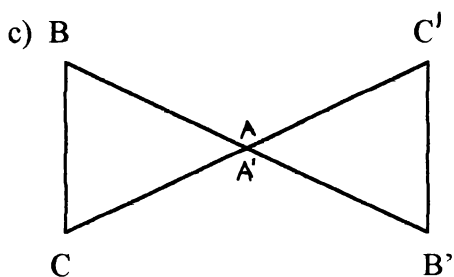
1) Justifique porque os triângulos seguintes são semelhantes, bastando para isso encontrar os ângulos congruentes.



... é ângulo comum
 ... $\equiv$... pois são correspondentes
 ... $\equiv$... pois são correspondentes.

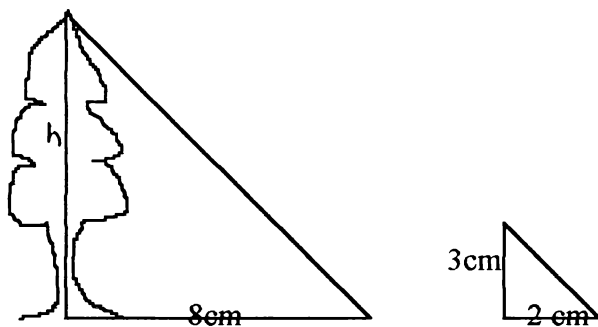


... $\equiv$... pois são retos
 ... $\equiv$... pois são opostos pelo vértice.

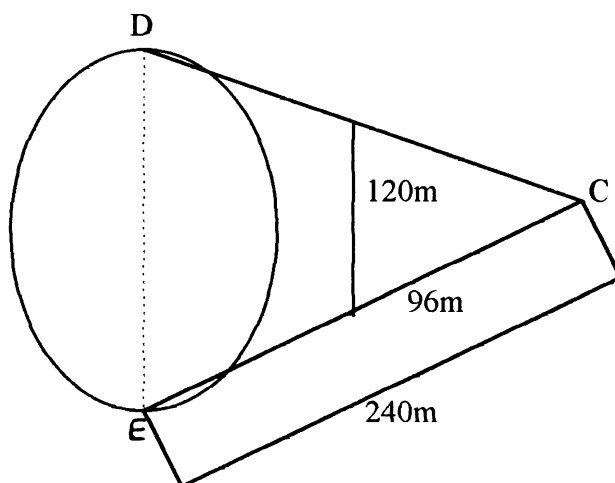


... $\equiv$... pois são opostos pelo vértice
 ... $\equiv$... pois são alternos internos
 ... $\equiv$... pois são correspondentes.

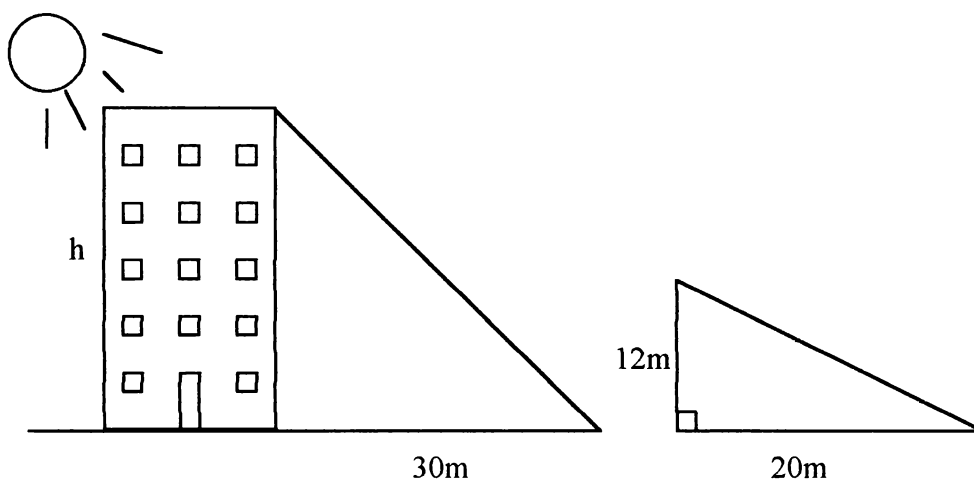
2 - Usando as propriedades de semelhança determine a altura da árvore, utilizando a estaca com as medidas da altura e da sombra na figura a seguir.



3 - Calcule a largura do lago observando o desenho abaixo.



4 - Calcule a altura do edifício, observando as medidas dadas na figura.



8ª AULA

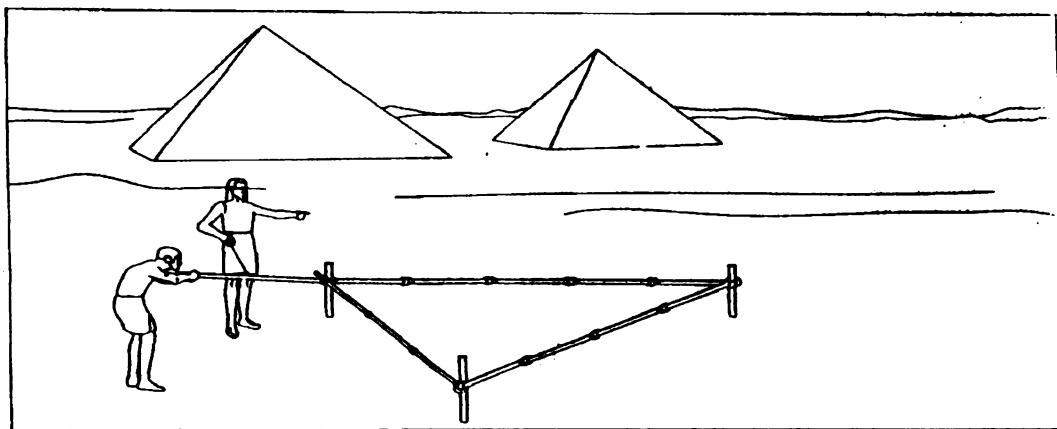
Desde épocas muito remotas, quando começou a erguer casas para se abrigar, o homem sentiu a necessidade de “construir” ângulos retos para verificar se as paredes estavam “no esquadro”, isto é, perpendiculares ao chão. Atualmente há instrumentos apropriados para isso, mas não foi sempre assim. Veremos o que a geometria tem a ver com tudo isso.

2.12 - A geometria é uma ciência muito antiga

O triângulo de lado 3, 4 e 5 é utilizado há muitos séculos pelos construtores. Talvez você já tenha ouvido falar das famosas pirâmides egípcias: são enormes monumentos de pedra construídos há muitos séculos.

A maior dessas pirâmides, conhecida como Grande Pirâmide ou Pirâmide de Quéops, foi construída há cerca de 4.500 anos. Sua base é um enorme quadrado, cujo lado mede aproximadamente 230m, dentro do qual caberiam quatro quarteirões. Sua altura é de 146m, equivale à altura de um prédio de 50 andares.

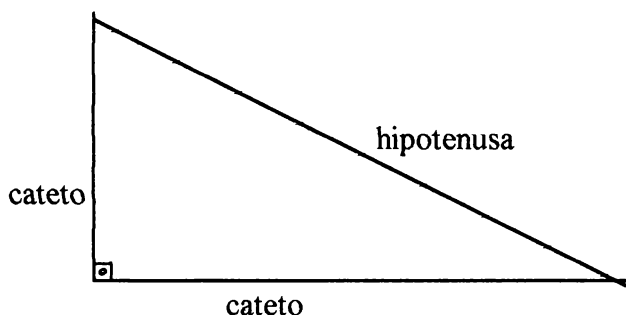
Os pesquisadores impressionaram-se com o alto grau de precisão dessas construções. A base da Grande Pirâmide é quase um quadrado perfeito, as diferenças entre as medidas de seus lados são muito pequenas e seus ângulos são todos praticamente iguais a 90° . Tais fatos nos levam a crer que os egípcios desenvolveram grandes conhecimentos de geometria. Os diversos documentos escritos naquela época revelam que, por exemplo, o triângulo de lado 3, 4 e 5 já era conhecido dos arquitetos e construtores egípcios. Diz a história que os construtores usavam uma corda, na qual davam nós a intervalos de igual distância, formando com ela esse tipo de triângulo.



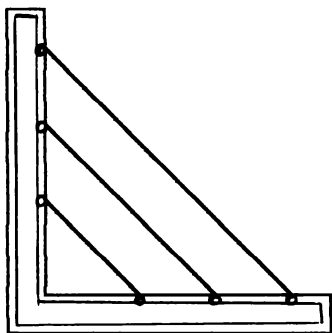
Os arquitetos do Egito Antigo construíram ângulos retos usando uma simples corda com nós. (Texto extraído do **Jornal do Telecurso 1º Grau**. Fundação Roberto Marinho, Ministério da Educação e Cultura, Fundação da Universidade de Brasília, 1989).

O triângulo retângulo

Um triângulo que tem um ângulo de 90° (ângulo reto) é chamado de triângulo retângulo. Nele, os lados recebem os seguintes nomes:



A hipotenusa é o maior dos lados e é o lado oposto ao ângulo reto.



Curiosidade

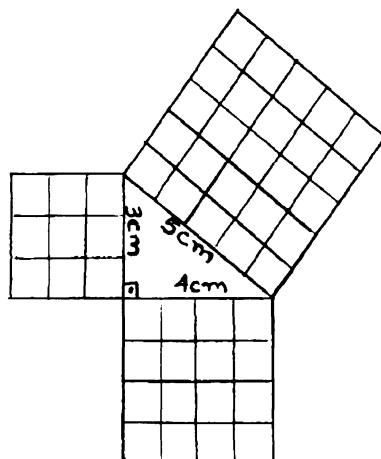
Hipotenusa era o nome dado às cordas do instrumento musical chamado lira. Essas cordas formavam triângulos retângulos com os lados do instrumento.

A lira, assim como a harpa, são os mais antigos instrumentos de corda. Na Grécia, a invenção da lira era atribuída a Apolo, deus da mitologia grega.

2.12.1 - Pitágoras e o triângulo retângulo

Quando falamos em triângulo retângulo, lembramos imediatamente de Pitágoras, o grande matemático que nasceu na Grécia Antiga, por volta do ano 550 a. C. Acredita-se que

ele tenha obtido conhecimentos geométricos com agrimensores egípcios, que usavam o triângulo de lado 3, 4 e 5.



Pitágoras percebeu que, construindo um quadrado sobre cada um dos lados de um triângulo de lados $3u$, $4u$ e $5u$ (sendo u uma unidade qualquer), como mostra a figura acima, apareceria a seguinte relação:

A área do quadrado formado sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas dos quadrados formados sobre os catetos.

No exemplo acima, você poderá observar que: $25 = 9 + 16$.

2.12.2 - Aplicação do Teorema de Pitágoras

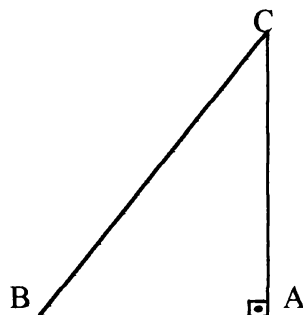
Situação Problema

Uma escada de 5 m de comprimento está apoiada num muro. O pé da escada está afastado 3 m da base do muro. Qual é a altura, no muro, que a escada alcança?

Para resolver esse problema, usaremos uma propriedade muito importante dos triângulos retângulos. Ela é conhecida como Teorema de Pitágoras e diz o seguinte:

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos.

Observe o seguinte triângulo retângulo:



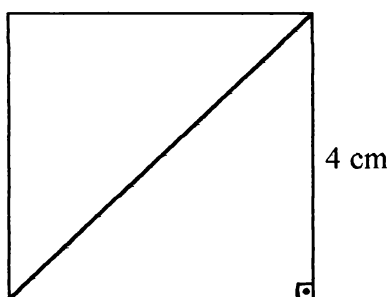
A **hipotenusa** é o lado maior do triângulo, BC. A hipotenusa pode ser identificada também como o lado oposto ao ângulo reto do triângulo. Os outros lados, AB e AC, são chamados de **catetos**.

Esses nomes, hipotenusa e cateto, são usados apenas para indicar os lados do triângulo retângulo.

O Teorema de Pitágoras se aplica a todos os triângulos retângulos. Portanto, uma maneira rápida e simples de saber se determinado triângulo é retângulo quando conhecemos apenas as medidas de seus lados é aplicar o Teorema de Pitágoras.

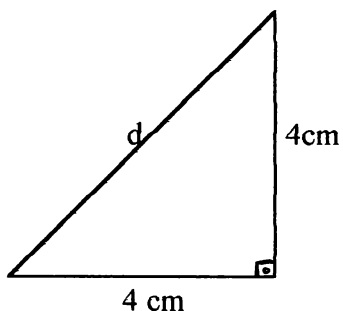
Exemplo:

O lado de um quadrado mede 4 cm. Quanto mede a diagonal desse quadrado.



Recordando:

O quadrado tem os quatro lados iguais e os quatro ângulos retos. A diagonal do quadrado é o segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos. Ao traçar a diagonal o quadrado fica dividido em dois triângulos retângulos iguais. A diagonal é a hipotenusa e os lados são os catetos.



Na figura ao lado, destacamos um dos triângulos. Assinalamos a diagonal com a letra **d**. Determinaremos o valor de **d** (medida da diagonal) aplicando o Teorema de Pitágoras.

$$d^2 = 4^2 + 4^2$$

$$d^2 = 16 + 16$$

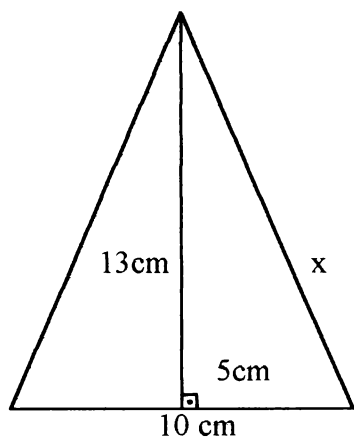
$$d^2 = 32$$

$$d = \sqrt{32}$$

Não existe nem um número natural que elevado ao quadrado seja igual a 32. De posse de uma máquina de calcular, obtemos um resultado aproximado com duas casas decimais. A diagonal do quadrado de lado 4 cm é igual a $\sqrt{32}$ ou 5,65 cm aproximadamente.

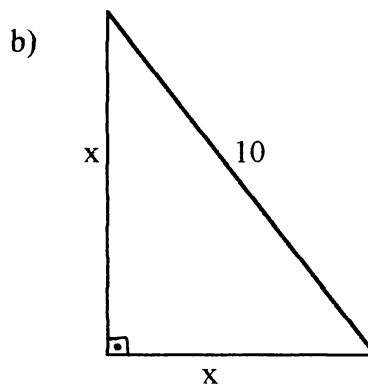
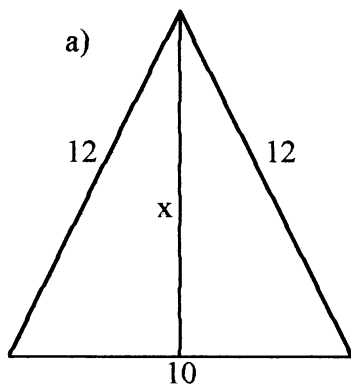
Atividades:

1) Um triângulo isósceles temcm de altura ecm de base. Determine a medida dos outros dois lados.



2) Determine a altura do triângulo equilátero, cujo lado mede 6 cm.

3) Aplicando o Teorema de Pitágoras, determine as medidas indicadas.

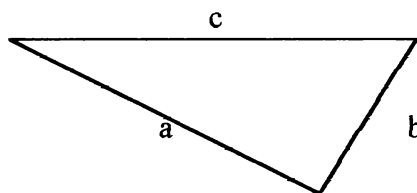


4) Abaixo estão as razões entre lados de três triângulos diferentes. Somente um deles tem um ângulo reto (90°). Qual deles? Use o Teorema de Pitágoras para descobrir.

a) 6: 12: 13

b) 7: 08: 10

c) 9: 12 : 15



9ª AULA

2.13 - Outra propriedade do triângulo retângulo

Atividades:

Desenhe em seu caderno dois triângulos iguais. Você pode escolher as medidas que quiser, mas um dos ângulos deve ser reto (90°).

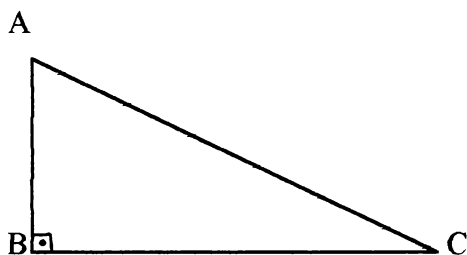


Fig. I

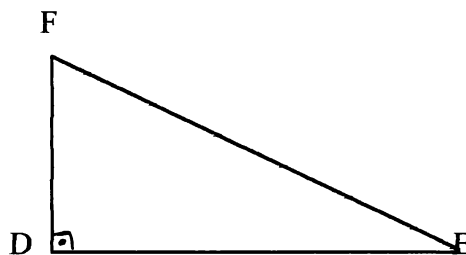


Fig. II

Pinte ou hachure o $\triangle ABC$ e coloque o $\triangle DEF$, mantendo-o em branco, na posição indicada a seguir.

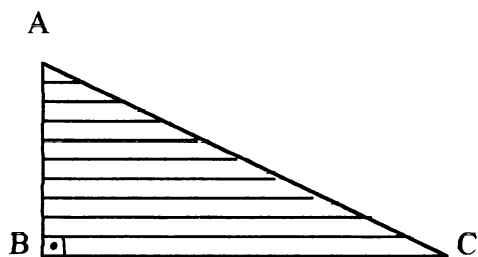


Fig. III

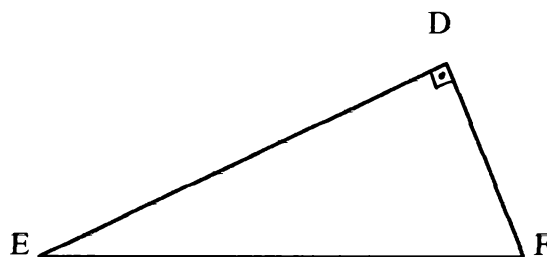


Fig. IV

Desenhe no $\triangle DEF$ a perpendicular ao lado EF, passando pelo ponto D como indica a figura V.

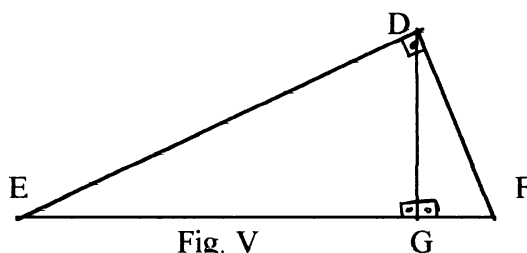


Fig. V

Cortando este triângulo, pela sua altura DG, obtemos dois novos triângulos. Ficamos, então, com três triângulos retângulos, como indica a figura a seguir

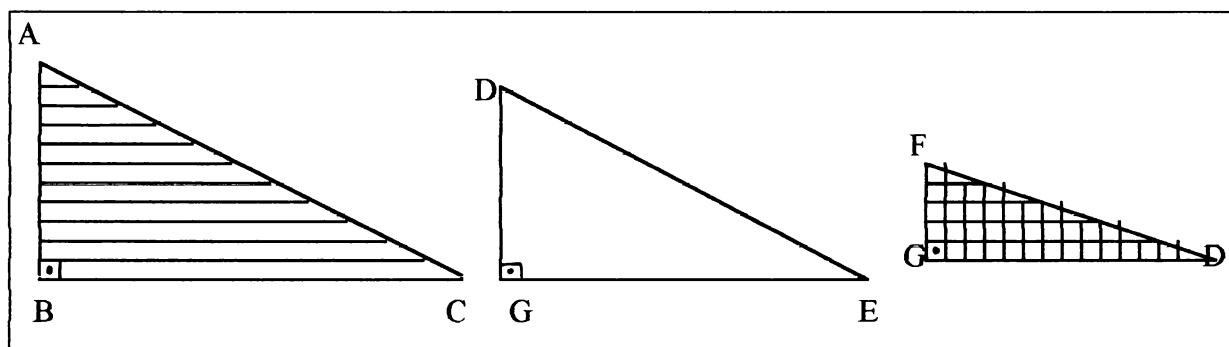


Fig. VI

Depois de hachurar ou pintar o triângulo menor ($\triangle FDG$) (veja a figura VI). Coloque um triângulo sobre o outro, de modo que os ângulos retos (90°) coincidam, como indica a figura a seguir.

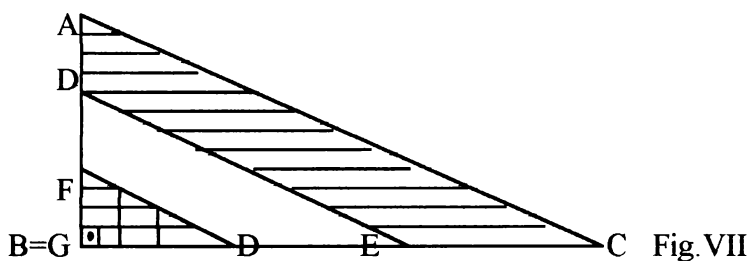


Fig. VII

Conclusão: os triângulos ABC, FGD e DGE são semelhantes. Essa semelhança existente entre esses três triângulos será utilizada para se obter elementos desconhecidos de um triângulo retângulo, como a seguir:

Denominado alguns elementos do triângulo retângulo na figura:

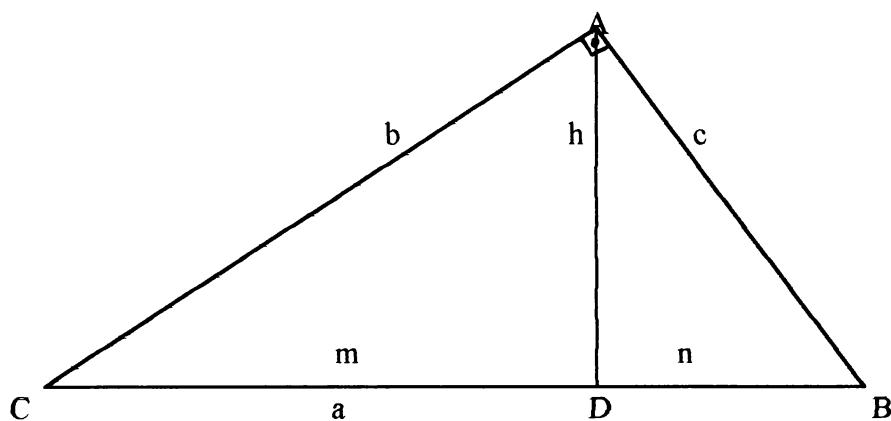


Fig. VIII

$\overline{BC}$ é a hipotenusa; sua medida é indicada por **a**.

$\overline{AC}$ é um cateto; sua medida é indicada por **b**.

$\overline{AB}$ é um cateto; sua medida é indicada por **c**.

$\overline{AD}$ é a altura relativa à hipotenusa; sua medida é indicada por **h**.

$\overline{BD}$ é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AB}$ sobre a hipotenusa; sua medida é indicada por **n**.

$\overline{CD}$ é a projeção ortogonal do cateto $\overline{AC}$ sobre a hipotenusa; sua medida é indicada por **m**.

2.13.1 - Relações métricas

Chamaremos as medidas dos lados do triângulo retângulo ABC de **a**, **b** e **c** a medida da altura de **h** e a medida dos catetos sobre a hipotenusa de **m** e **n**. Assim.

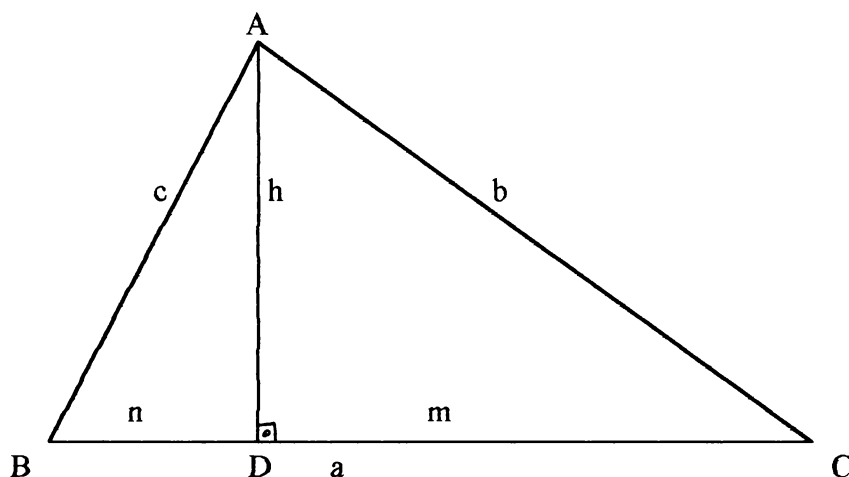


Fig. IX

Teorema:

Em todo triângulo, a altura relativa à hipotenusa determina dois outros triângulos retângulos, ambos semelhantes ao primeiro e, portanto, semelhantes entre si.

ΔABC é retângulo $\hat{A}$ e reto (90°)

$\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ($\perp$ perpendicular)

$\Delta ABC \sim \Delta ABD$ ($\sim$ semelhante)

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$

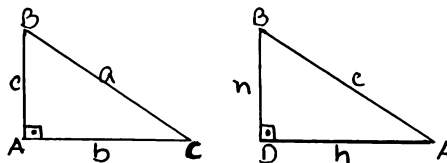
$\Delta ABD \sim \Delta ACD$

Podemos concluir algumas relações métricas muito importantes e que envolvem as medidas dos lados desses três triângulos semelhantes (ΔABC , ΔABD e ΔACD).

Nos triângulos ABC e ABD

Sendo $\Delta ABC \sim \Delta ABD$

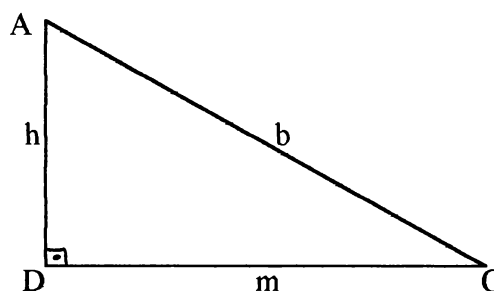
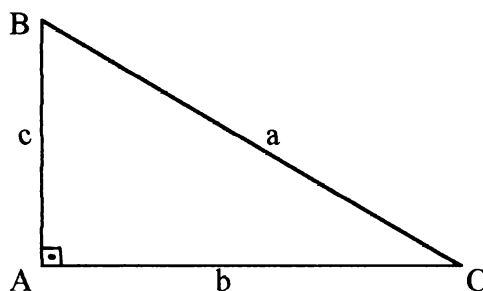
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{c}{n} = \frac{a}{c} \Rightarrow \boxed{c^2 = a \cdot n}$$



$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \Rightarrow \frac{b}{h} = \frac{a}{c} \Rightarrow \boxed{b \cdot c = a \cdot h}$$

Nos triângulos ABC e ACD.

$\Delta ABC \sim \Delta ACD$

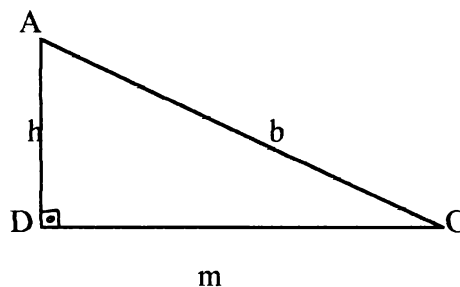
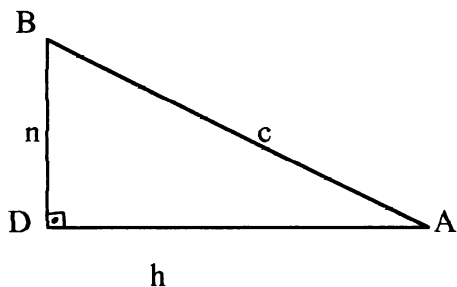


$$\frac{\overline{AC}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Rightarrow \frac{b}{m} = \frac{a}{b} \Rightarrow (b^2 = a \cdot m)$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{c}{h} = \frac{a}{b} \Rightarrow \boxed{b \cdot c = a \cdot h}$$

Nos triângulos ABD e ACD.

$\Delta ABD \sim \Delta ACD$



$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AD}} = \frac{h}{m} = \frac{n}{h} \Rightarrow \boxed{h^2 = m \cdot n}$$

A soma das medidas das projeções ortogonais dos catetos sobre a hipotenusa é igual a medida da hipotenusa.

$$a = m + n$$

Relação de Pitágoras

Já vimos que:

$$+ \begin{cases} b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{cases}$$

$$b^2 + c^2 = a(n + m) \quad (m + n = a)$$

$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$

$$b^2 + c^2 = a^2$$

Observações importantes:

Num triângulo retângulo, a medida de cada cateto é a medida proporcional entre as medidas da hipotenusa e de sua projeção ortogonal sobre ela ($c^2 = a \cdot n$ e $b^2 = a \cdot m$).

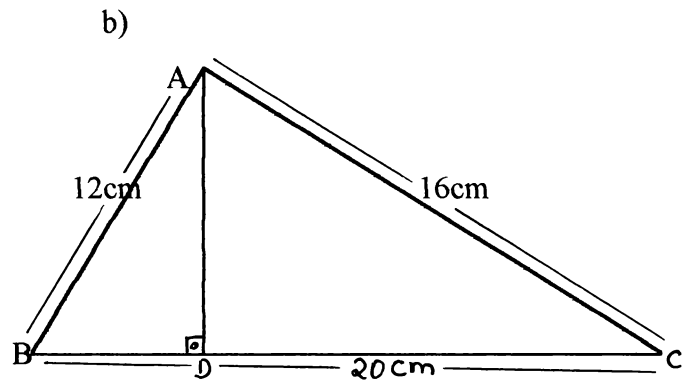
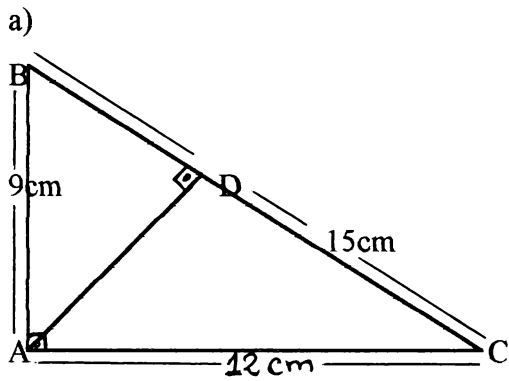
Num triângulo, o produto das medidas dos catetos é igual ao produto da medida da hipotenusa pela medida da altura a ela relativa ($b \cdot c = a \cdot h$).

Num triângulo retângulo, a medida da altura é a média proporcional entre as medidas dos segmentos que ela determina sobre a hipotenusa. ($h^2 = m \cdot n$).

Recíproca do Teorema de Pitágoras. Se o quadrado da medida de um lado de um triângulo é igual à soma dos quadrados das medidas dos outros lados então o triângulo é retângulo.

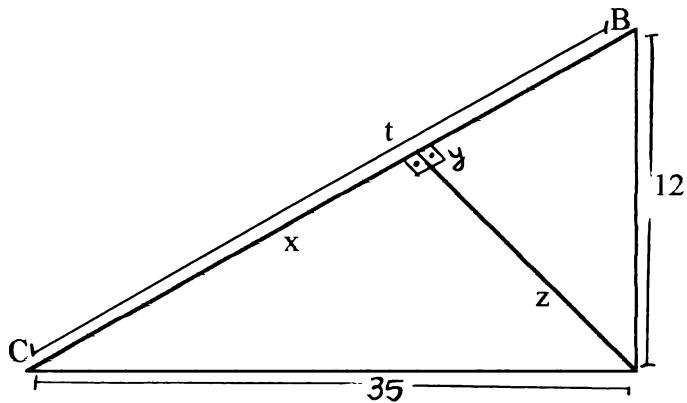
Atividades:

1) Observe as figuras a seguir, onde estão indicadas algumas medidas. Com base nessa indicação, calcule as medidas de $\overline{AD}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DB}$.

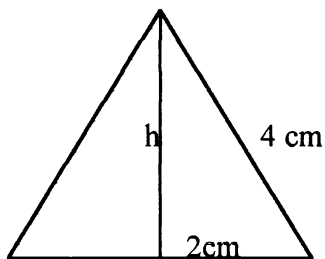


2) Calcular a hipotenusa, a altura relativa à hipotenusa, e as projeções dos catetos sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 24 e 7.

3) Na figura, determinar os elementos x , y e t .



4) Dado um triângulo equilátero de lado 4 cm . Calcule sua altura.

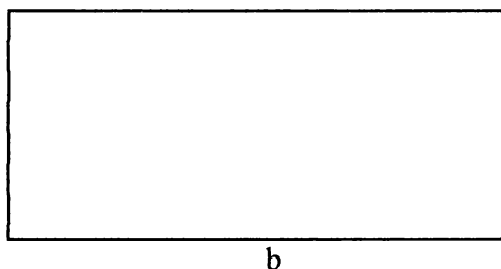


10ª AULA

2.14 - Área do triângulo

A área de um retângulo é produto da medida da base (b) pela medida de sua altura

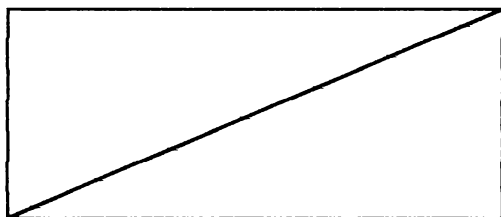
(h).



$$A = b \cdot h$$

Se dividirmos ao meio o retângulo traçando uma diagonal, teremos dois triângulos.

Se dividirmos a área do triângulo por dois (2) teremos então a área do triângulo.

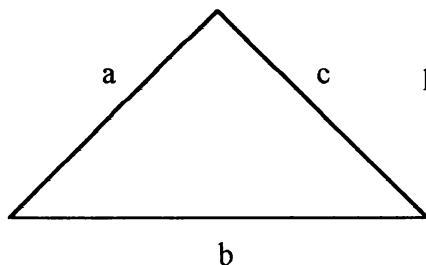


$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

2.14.1 - Outra fórmula para calcular a área

Fórmula para o cálculo da área de uma região triangular, em função dos lados do triângulo;

Dadas as medidas a, b e c, lembrando que perímetro é a soma das medidas dos lados, chamemos de **p** o semi-perímetro do triângulo, isto é:



$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

A área da região triangular (figura anterior) pode ser calculada pela FÓRMULA DE HERÃO.

$$A = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$$

Exemplo 1:

Calcular a área da região limitada pelo triângulo cujos lados medem:

$$a = 10 \text{ cm}, b = 8 \text{ cm} \text{ e } c = 6 \text{ cm}$$

Calculando o semi-perímetro temos

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{10 + 8 + 6}{2} = 12$$

Então:

$$A = \sqrt{12 \cdot (12 - 10) \cdot (12 - 8) \cdot (12 - 6)}$$

$$A = \sqrt{12 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6}$$

$$A = \sqrt{576}$$

$$A = 24 \text{ cm}^2$$

Exemplo 2:

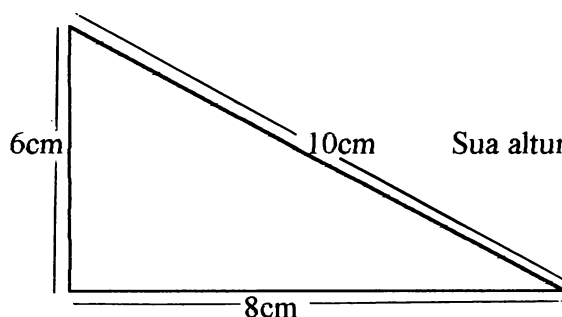
Tomando as medidas do triângulo do exemplo 1, verifique se é retângulo e calcule sua altura e sua área.

$$a^2 = c^2 + b^2$$

$$10^2 = 8^2 + 6^2$$

$$100 = 64 + 36$$

$$100 = 100, \text{ portanto o triângulo é retângulo.}$$

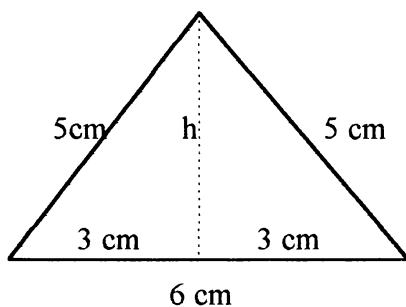


Sua altura pode ser um dos catetos, então:

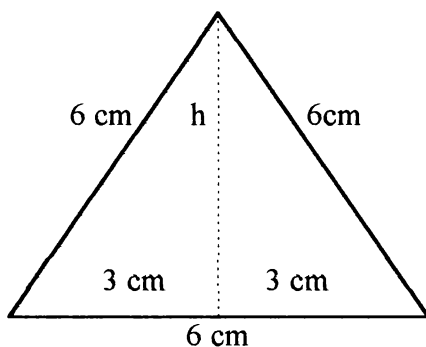
$$A = \frac{b \cdot h}{2} = A = \frac{8 \cdot 6}{2} = A = \frac{48}{2} = 24 \text{ cm}^2$$

Atividades:

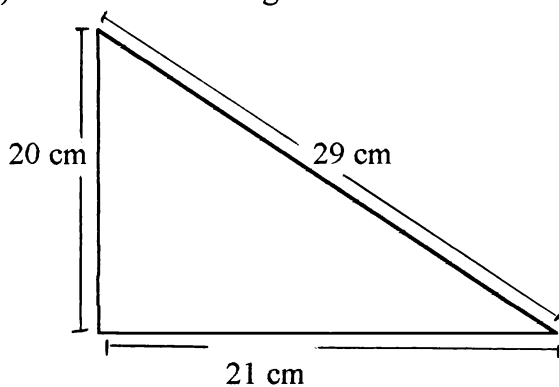
1) Determine a área de um triângulo isósceles cujas medidas estão na figura abaixo:



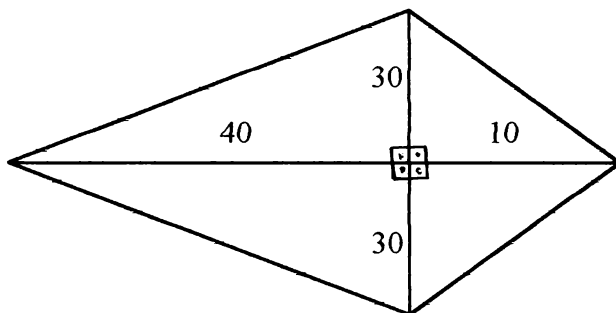
2) Calcule a área de um triângulo equilátero cujas medidas estão na figura abaixo:



3) Calcule a área da figura abaixo utilizando as duas fórmulas vistas anteriormente.



4) Uma folha de papel foi recortada conforme a figura abaixo. Qual a área dessa figura sendo que as medidas estão em cm.



RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS PROPOSTOS NAS AULAS

AULAS 1, 2 e 3

Atividade 1

R.: Lado, vértice e ângulo

Atividade 2

- a) equilátero, pois possui todos os lados com mesma medida.
- b) escaleno, pois possui todos os lados com medidas diferentes.
- c) isósceles, pois possui somente dois lados com mesma medida.

Atividade 3

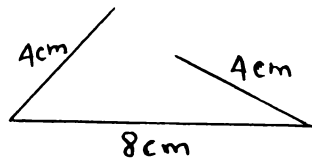
- a) acutângulo, pois possui todos os ângulos agudos (menores que 90°).
- c) obtusângulo, pois possui um ângulo maior que 90° .

Atividade 4

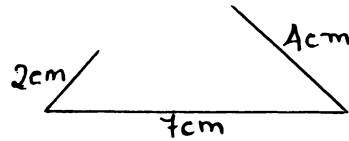
- a) retângulo
- b) obtusângulo
- c) acutângulo

Atividade 5

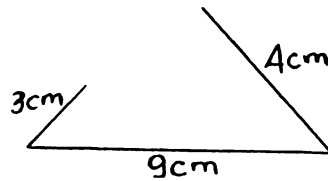
- a) não é possível pois em todo triângulo cada lado é maior que a soma dos outros dois, então não satisfaz a condição de existência.



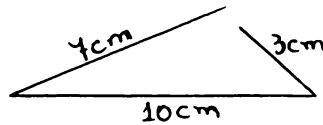
b) não, pois não se verifica a condição de existência.



c) não, pois não satisfaz a condição de existência.



d) não satisfaz a condição de existência.



Atividade 6

- | | |
|---------------|-----------------|
| a) baricentro | c) incentro |
| b) ortocentro | d) circuncentro |

AULA 4

Atividade 1

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180° .

Atividade 2

$$a) 75^\circ + x + 2x = 180^\circ$$

$$75^\circ + 3x = 180$$

$$3x = 180 - 75^\circ$$

$$x = \frac{105^\circ}{3}$$

$$3$$

$$x = 35^\circ$$

R.: Os ângulos são 75° , 70° e 35°

$$b) 60^\circ + x + \frac{x}{2} = 180^\circ$$

$$2$$

$$\frac{120^\circ + 2x + x}{2} = \frac{360^\circ}{2}$$

$$3x = 360^\circ - 120^\circ$$

$$x = \frac{240^\circ}{3}$$

$$3$$

$$x = 80^\circ$$

R.: Os ângulos são 80° , 60° e 40°

$$c) 28^\circ + x + 25^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 53^\circ$$

$$x = 127^\circ$$

R.: Os ângulos são 127° , 28° e 25°

$$d) 90^\circ + 50^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 140^\circ$$

$$x = 40^\circ$$

R.: Os ângulos medem 90° , 50° e 40°

Atividade 3

$$a) 60^\circ + 60^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 120^\circ$$

$$x = 60^\circ$$

R.: Os ângulos medem 60° , 60° e 60°

$$30^\circ + 60^\circ + y = 180^\circ$$

$$y = 180^\circ - 90^\circ$$

$$y = 90^\circ$$

R.: O ângulo y mede 90°

$$c) 60^\circ + 90^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 150^\circ$$

$$x = 30^\circ$$

R.: O ângulo x mede 30°

$$d) 5x + 4x + 3x = 180^\circ$$

$$12x = 180^\circ$$

$$x = \frac{180}{12}$$

$$12$$

$$x = 15^\circ$$

R.: Os ângulos medem 75° , 60° e 45°

Atividade 4

$$a) 30^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 30^\circ \quad \text{ou} \quad x = 65^\circ + 85^\circ$$

$$x = 150^\circ \quad x = 150^\circ$$

R.: O ângulo externo x mede 150°

$$b) 65^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 65^\circ$$

$$x = 115^\circ$$

R.: O ângulo externo x mede 115°

$$c) 45^\circ + x = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 45^\circ$$

$$x = 135^\circ$$

R.: O ângulo externo x mede 135°

$$d) 28^\circ + x + 25^\circ = 180^\circ$$

$$x = 180^\circ - 53^\circ$$

$$x = 127^\circ$$

R.: O ângulo interno x mede 127°

$$25^\circ + y = 180^\circ$$

$$y = 180^\circ - 25^\circ \quad \text{ou}$$

$$y = 155^\circ$$

$$y = 127^\circ + 28^\circ$$

$$y = 155^\circ$$

R.: O ângulo externo y mede 155°

AULA 5

Atividade 1

$$T_1 \text{ e } T_8 \Rightarrow \text{LAL}$$

$$T_2 \text{ e } T_7 \Rightarrow \text{LAL}$$

$$T_3 \text{ e } T_5 \Rightarrow \text{LAL}$$

$$T_4 \text{ e } T_{10} \Rightarrow \text{ALA}$$

$$T_6 \text{ e } T_{11} \Rightarrow \text{LLL}$$

$$T_9 \text{ e } T_{12} \Rightarrow \text{LAAo}$$

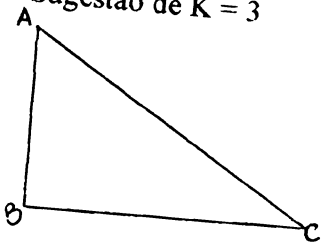
Atividade 2

- a) LAL
- b) LLL
- c) LALo
- d) ALA
- e) LAL

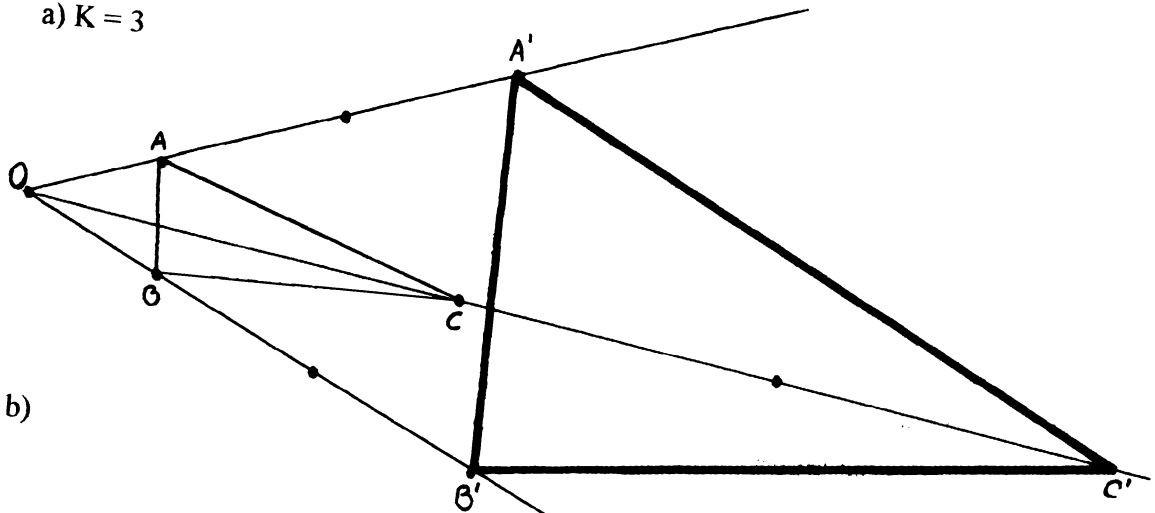
AULA 6

Atividade 1

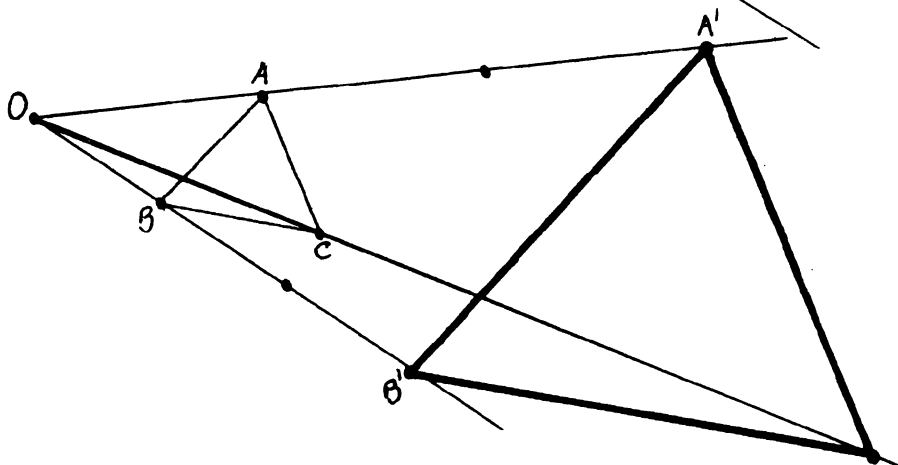
Sugestão de $K = 3$



a) $K = 3$



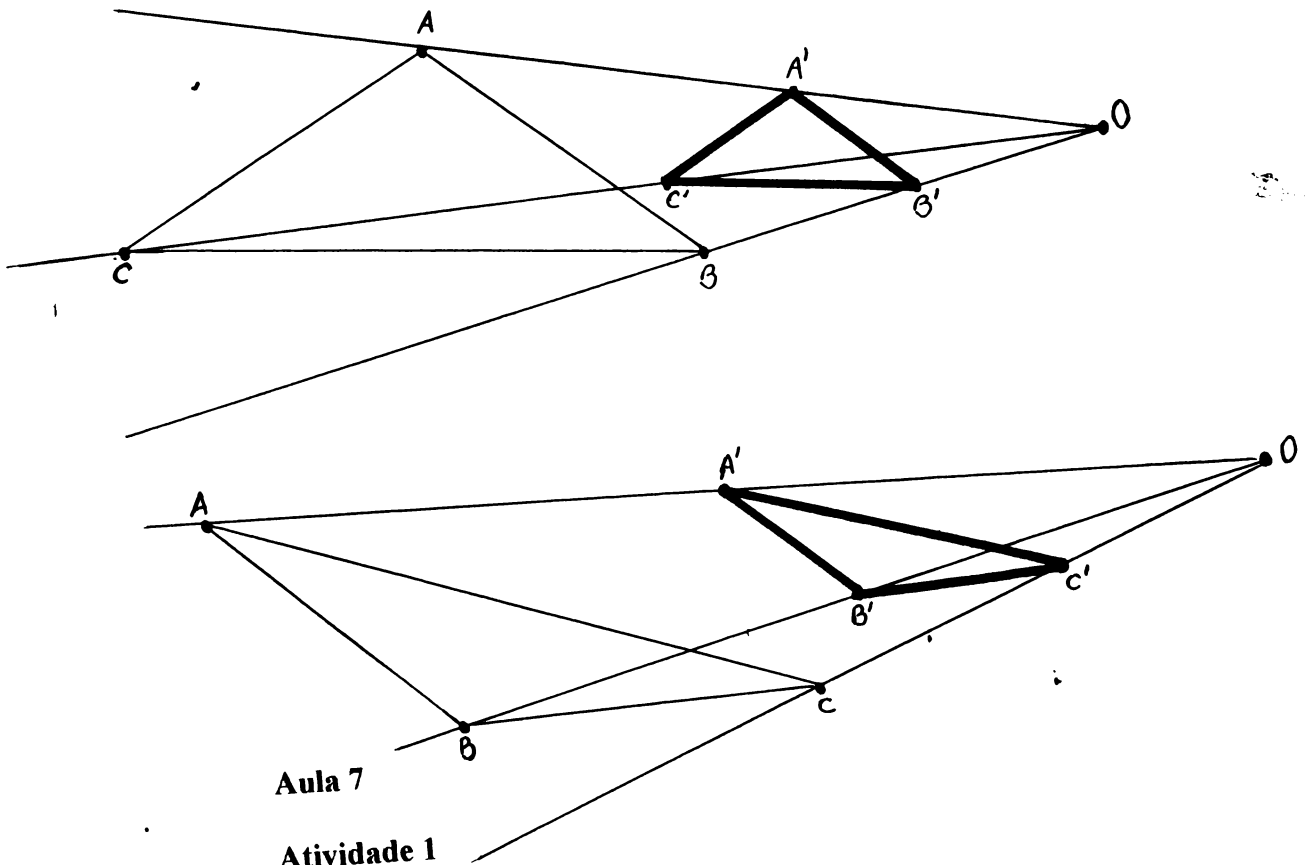
b)



Atividade 2

$$K = \frac{1}{2}$$

c)



Aula 7

Atividade 1

- a) $\hat{A}$ e $\hat{C}$ são comuns
 $\hat{D}$ e $\hat{B}$ são correspondentes
 $\hat{E}$ e $\hat{C}$ são correspondentes
- b) $\hat{C}$ e $\hat{C}'$ são retos
 $\hat{A}$ e $\hat{A}'$ são opostos pelo vértice (O.P.V.)
- c) $\hat{A} \equiv \hat{A}'$
 $\hat{C} \equiv \hat{C}'$
 $\hat{B} \equiv \hat{B}'$

Atividade 2

$$\frac{h}{3} = \frac{8}{2} \Rightarrow \frac{h}{3} = 4 \Rightarrow h = 12\text{m}$$

R.: A altura da árvore é 12m.

Atividade 3

$$a) \frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EC}}{\overline{BC}}$$

$$\frac{\ell}{120} = \frac{240}{96} \Rightarrow \ell = \frac{240 \cdot 120}{96} \Rightarrow \frac{28800}{96} = 300\text{m}$$

R.: A largura do lago é de 300m.

Atividade 4

$$\frac{h}{30} = \frac{12}{20} \Rightarrow h = \frac{30 \cdot 12}{20} \Rightarrow h = 18\text{m}$$

R.: A altura do prédio é 18m

AULA 8**Atividade 1**

$$x^2 = 5^2 + 12^2$$

$$x^2 = 25 + 169$$

$$x^2 = 194$$

$$x = \sqrt{194} \text{ ou } x \cong 13,92\text{m}$$

Atividade 2

$$6^2 = h^2 + 3^2$$

$$36 - 9 = h^2$$

$$27 = h^2$$

$$h = 3\sqrt{3} \text{ ou } h \cong 5,19\text{cm}$$

Atividade 3

$$a) 12^2 = x^2 + 5^2$$

$$144 - 25 = x^2$$

$$x = \sqrt{119} \text{ ou } x \cong 10,9$$

$$b) 10^2 = x^2 + x^2$$

$$100 = 2x^2$$

$$x^2 = 50$$

$$x = \sqrt{50} \Rightarrow x = 5\sqrt{2} \text{ ou } x \cong 7,07$$

Atividade 4

$$a) 13^2 = 12^2 + 6^2$$

$$169 = 144 + 36$$

$$169 \neq 180$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 10^2 &= 8^2 + 7^2 \\ 100 &= 64 + 49 \\ 100 &\neq 113 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } 15^2 &= 12^2 + 9^2 \\ 225 &= 144 + 81 \\ 225 &= 225 \end{aligned}$$

AULA 9

Atividade 1

$$\text{a) } \begin{cases} \overline{AD} = h \\ \overline{CD} = n \\ \overline{DB} = m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 15 \\ b = 12 \\ c = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b \cdot c = a \cdot h \\ b^2 = a \cdot m \\ c^2 = a \cdot n \end{cases}$$

$$\begin{aligned} b \cdot c &= a \cdot h \\ 12 \cdot 9 &= 15 \cdot h \\ h &= \frac{108}{15} \\ h &= 7,2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= a \cdot m \\ 12^2 &= 15 \cdot m \\ \frac{144}{15} &= m \\ m &= 9,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a \cdot n \\ 9^2 &= 15 \cdot n \\ n &= \frac{81}{15} \\ n &= 5,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } a &= 20 \\ b &= 16 \\ c &= 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} bc &= a \cdot h \\ \frac{16 \cdot 12}{20} &= h \\ h &= 9,6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= a \cdot m \\ \frac{16^2}{20} &= m \\ \frac{256}{20} &= m \\ m &= 12,8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c^2 &= a \cdot n \\ 12^2 &= 20 \cdot n \\ \frac{144}{20} &= n \\ n &= 7,2 \end{aligned}$$

Atividade 2

$$\begin{aligned} a &= & a^2 &= b^2 + c^2 \\ b &= 24 & a^2 &= 24^2 + 7^2 \\ c &= 7 & a &= \frac{576 + 49}{1} \\ & & a &= 625 \\ & & a &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} bc &= a \cdot h \\ 24 \cdot 7 &= 25 \cdot h \\ \frac{168}{25} &= h \\ h &= 6,72 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 &= a \cdot m \\ 24^2 &= 25 \cdot m \\ m &= \frac{576}{25} \\ m &= 23,04 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 n + a - m & & c^2 &= a \cdot n \\
 n = 25 - 23,04 & \text{ ou } & 7^2 &= 25 \cdot n \\
 n = 1,96 & & \frac{49}{25} &= n \\
 & & n &= 1,96
 \end{aligned}$$

Atividade 3

$$\begin{aligned}
 c &= 12 \\
 b &= 35
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t^2 &= 35^2 + 12^2 \\
 t &= 1225 + 144 \\
 t &= 1369 \\
 t &= 37
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c^2 &= t \cdot y \\
 12^2 &= 37 \cdot y \\
 144 &= 37 \cdot y \\
 y &= \frac{144}{37} \\
 y &\cong 3.89
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b^2 &= t \cdot x \\
 35^2 &= 37 \cdot x \\
 \frac{1225}{37} &= x \\
 x &\cong 33,10
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 z^2 &= y \cdot x \\
 z^2 &= 3,89 \cdot 33,1 \\
 z &= 128,759 \\
 z &\cong 11,35
 \end{aligned}$$

Atividade 4

$$\begin{aligned}
 4^2 &= h^2 + 2^2 \\
 16 - 4 &= h^2 \\
 h &= \sqrt{12} \\
 h &= 2\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 \hline
 & 2^2 \cdot 3
 \end{array}$$

AULA 10

Atividade 1

$$\begin{aligned}
 5^2 &= h^2 + 3^2 \\
 25 - 9 &= h^2 \\
 h &= \sqrt{16} \\
 h &= 4 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{b \cdot h}{2} \\
 A &= \frac{6 \cdot 4}{2} \\
 \boxed{A} &= 12 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Atividade 2

$$\begin{aligned}
 6^2 &= 3^2 + h^2 \\
 36 - 9 &= h^2 \\
 h &= \sqrt{27} \\
 h &= 3\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{b \cdot h}{2} \\
 A &= \frac{6 \cdot 3\sqrt{3}}{2} \\
 A &= 9\sqrt{3} \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Atividade 3

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

$$A = \frac{21 \cdot 20}{2}$$

$$A = 210 \text{ cm}^2 \quad \text{our}$$

$$p = \frac{20 + 21 + 29}{2} \Rightarrow p = \frac{70}{2} \Rightarrow p = 35$$

$$A = \sqrt{35(35 - 29) \cdot (35 - 21) \cdot (35 - 20)}$$

$$A = \sqrt{35 \cdot 6 \cdot 14 \cdot 15}$$

$$A = \sqrt{44100} \Rightarrow A = 210 \text{ cm}^2$$

Atividade 4

$$A = \frac{240 \cdot 30}{3} = \frac{2400}{2} = 1200 \text{ cm}^2$$

$$A = 2 \cdot \frac{30 \cdot 10}{2} = \frac{600}{2} = 300 \text{ cm}^2$$

$$A = 1200 + 300$$

$$\boxed{A = 1500 \text{ cm}^2}$$

CONCLUSÃO

Ao longo desse estudo sobre triângulos, pude raciocinar e ao mesmo tempo me tornar mais ansiosa, confirmar a razão de muita angústia e a insatisfação sentida quanto ao sistema que nos leva por muitas vezes a lugares que nem percebemos e rumo aos quais estamos a caminho.

Consegui me apoiar em muitos pontos essenciais com grande significância que clarearam minha postura como cidadã e educadora.

Essa unidade não representa o resultado do que aprendi, é uma pequena parcela do que pretendo ao longo de minha vida dar em contribuição aos queridos alunos jovens e adultos que por várias razões vêm até nós em busca do saber elaborado, às vezes, impulsionados pelo desespero, pela insegurança do amanhã, mesmo na sua escassez do saber sistematizado, sofrem na pele os sintomas da exclusão do atual momento histórico pelo qual estamos passando.

O saber se constrói a partir do momento em que percebemos os movimentos dos que nos rodeiam, depois partimos para o elaborado, levando-nos sempre a muitas surpresas com respeito ao que já pensávamos “saber”.

Espero poder contribuir para uma pequena mudança de “visão do mundo” e, ao menos, amenizar o trabalho e auxiliar na busca de novos caminhos, despertando nos alunos a reflexão e a coragem para que possam, descortinar novos caminhos para sobreviverem.

“É necessário que nos habilitemos, para ser felizes: a felicidade sensual exige poucas habilitações; mas a moral, intelectual e religiosa reclamam um prolongado tirocínio de saber, experiência e virtudes”.

Marquês de Maricá

BIBLIOGRAFIA

- . BOYER, Carl B. História da Matemática. São Paulo: Editora Edygar Blücher Ltda, 1996.
- . CARAÇA, Bento de Jesus. Conceitos Fundamentos da Matemática. Lisboa: Manoel A Pacheco, 1978
- . CARBONI NETO, Antônio; RIBEIRO, Flávio Evaristo; GABRIEL, Luiz Roberto Almeida. Elementos da Matemática. 8ª Série. São Paulo: Editora do Brasil, 1981
- . DOLCE, Osvaldo; POMPEO, Nicolau. Fundamentos da Matemática Elementar. v.9. 6ª ed. São Paulo: Atual, 1985
- . LINDQUIST, Mary Montgomery e SCHULTE, Albert P. Aprendendo e ensinando Geometria. São Paulo: Atual, 1994
- . MACHADO, Nilson José. Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua. 3.ed. São Paulo: Cortez, 1993
- . _____. Matemática e Realidade. 3.ed. São Paulo: Cortez, 1994
- . PIMENTA, Selma G. O 2º Grau, a Democratização. Bimestre, n.1, out/1986
- . ZAMBUZZI, Orlando A. Matemática. 8ª Série. São Paulo: Ática, 1979
- . Jornal do Telecurso 1º Grau. Matemática. 15.ed. São Paulo: Editora Globo, 1989
- . Matemática Telecurso 2000 1º Grau. Fundação Roberto Marinho, FRM. v.3. São Paulo: Editora Globo, 1994