

RODRIGO GARCIA EUSTÁQUIO

CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE E DE QUALIFICAÇÃO PARA
PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setores de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Paraná.

Orientadora:

Prof^a. Dr^a. Elizabeth Wegner Karas.

Co-orientador:

Prof. Dr. Ademir Alves Ribeiro.

Curitiba

2007

Termo de Aprovação

RODRIGO GARCIA EUSTÁQUIO

CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE E DE QUALIFICAÇÃO PARA
PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

Dissertação aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, pelo Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setores de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Prof^a. Dr^a. Elizabeth Wegner Karas
Departamento de Matemática - UFPR

Prof. Dr. Ademir Alves Ribeiro
Departamento de Matemática - UFPR

Prof. Dr. Roberto Andreani
Departamento de Matemática Aplicada - UNICAMP

Prof^a. Dr^a. Lucelina Batista dos Santos
Departamento de Matemática - UFPR

Curitiba, 23 de fevereiro de 2007.

Parece paradoxal que a pesquisa científica, em vários sentidos uma das mais questionadoras e céticas atividades humanas, dependam da confiança pessoal. Mas o fato é que, sem a confiança, a empreitada da pesquisa não funcionaria.

Arnold S. Relman.
New England Journal Medicines. 1983.

Para
Maria Helena e Priscilla.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer algumas pessoas e instituições que fizeram com que este trabalho fosse concluído.

Aos professores Elizabeth Wegner Karas e Ademir Alves Ribeiro, pela orientação deste trabalho. Obrigado pela paciência, dedicação, confiança, amizade e disponibilidade que tiveram comigo durante os seminários semanais e sempre quando necessário, por suprirem minhas deficiências oriundas da graduação e pela oportunidade de poder participar do Foz2006 Congresso de Matemática e Suas Aplicações e do XXIX CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional.

Ao programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia da Universidade Federal do Paraná e ao CNPQ pelo financiamento para participar do VI ERMAC - Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional realizado na cidade de João Pessoa - PB, em novembro de 2006. Aos professores e à Maristela.

Aos meus colegas de mestrado, pela amizade e pelos estudos, em especial ao Cassius, Luís e Pavanelli. Aos estimáveis amigos Serginho e Júlio.

Ao Colégio Militar de Curitiba, pela dispensa concedida nos dias de aula. Em especial ao Cel Palma pela amizade, leitura e correção dos erros gramaticais. Ao Cap Amarílio, pelo apoio na época do Prevest. Aos amigos Daniel, Daniele, Betinha e Ana Maria por me ajudarem no estudo da língua Inglesa. Aos amigos da Seção B, em especial à grande amiga Márcia Zanutto que sempre me incentivou a cursar o mestrado e ao TC Dequech, pela confiança e pelas dispensas concedidas para estudar quando precisei.

Aos professores Roberto Andreani e Lucelina Batista dos Santos por terem aceitado participar da banca examinadora, pela leitura cuidadosa do texto e sugestões que com certeza melhoraram bastante este trabalho. Em especial, gostaria de agradecer ao professor Andreani, pela discussão realizada na defesa desta dissertação que contribuiu significativamente na melhoria deste trabalho.

À María Laura Schuverdt, pela amizade, apoio e presteza em me ajudar, enviando artigos e livros e por esclarecer algumas dúvidas.

Aos meus pais, Antônio e Maria Helena, por terem aceitado com amor minha decisão de não desistir de um sonho. Por terem me ensinado a viver com honestidade e sinceridade. A meu pai, por mostrar que o mundo não vive sem trabalho e a minha mãe, pela riquíssima humildade e sensibilidade.

A meu amado irmão, Fernando, por ser meu irmão e meu melhor amigo. Aprendi com você a ver o mundo com outros olhos, os olhos do coração. Minha admiração é imensa. Nos momentos difíceis de nossas vidas, soube cuidar do irmão caçula. Obrigado mano, por tudo.

Ao meu amor, Priscilla, pela paciência e carinho, por ter me estimulado a não desistir quando deparei com dificuldades e principalmente por acreditar em mim. Juntos, vencemos barreiras que a vida nos preparou e aprendemos a ser fortes. Obrigado pelo apoio incondicional e por desistir de seus compromissos para me ajudar. Sem você, este trabalho não seria possível.

Agradeço também à família da Priscilla, pela amizade e carinho com que me receberam em sua casa.

E a Deus, por tornar tudo isso possível.

Resumo

Estudamos, nesta dissertação, condições de otimalidade e de qualificação para problemas de programação não linear. Demonstramos as condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) usando uma abordagem de cones. Neste contexto, o Lema de Farkas é fundamental. As condições de otimalidade de Fritz-John são demonstradas usando a idéia de função penalidade.

As condições de KKT são válidas numa solução do problema desde que uma condição de qualificação seja satisfeita. O teorema de KKT é demonstrado supondo a igualdade do polar do cone tangente e do polar do cone viável linearizado. Essa condição é bastante fraca mas difícil de ser verificada. Estudamos, então, outras condições de qualificação mais simples de serem verificadas, tais como condição de Slater, Mangasarian-Fromovitz, independência linear dos gradientes, posto constante, dependência linear positiva constante, quase-normalidade e a quase-regularidade. Discutimos as relações entre elas, demonstrando as implicações válidas e exibindo contra-exemplos para as respectivas recíprocas.

Abstract

This research deals with optimality conditions to solve nonlinear programming problems. Karush-Kuhn-Tucker (KKT) optimality conditions were demonstrated through a cone approach. At this context, Farkas' Lemma was essential. Fritz-John's optimality conditions were shown through the idea of penalty function.

KKT conditions are valid to solve a problem if a constraint qualification is satisfied. KKT theorem was demonstrated supposing the equality between the polar tangent cone and the polar cone of first order feasible variations. Although this condition is very weak, it is extremely difficult to be verified. Therefore, other constraints qualifications, which are easier to be verified, were studied. They were: Slater's, Mangasarian-Fromovitz's, linear independence of gradients, constant rank, constant positive linear dependence, quasinormality and quasiregularity . The relations among them were discussed, and the valid implications and the counterexamples to the respective reciprocals were demonstrated.

Sumário

Introdução	1
1 Conceitos Preliminares	4
1.1 Resultados de análise	4
1.1.1 Supremo e ínfimo	4
1.1.2 Seqüências	5
1.1.3 Noções de Topologia	9
1.1.4 Aplicações contínuas	11
1.2 Resultados de álgebra linear	20
1.2.1 Subespaços ortogonais	24
1.2.2 Normas de matrizes	26
1.3 Resultados de análise convexa	29
2 Cones	36
2.1 Cone e cone polar	36
2.2 Teoremas de alternativa	39
3 Problema de Programação Não Linear	48
3.1 Abordagem cônica	48
3.1.1 Solução	48
3.1.2 Direções viáveis e de descida	50
3.1.3 O cone viável linearizado	53
3.1.4 O cone tangente	57
3.1.5 Relações entre o cone viável linearizado e o cone tangente	63
3.2 Condições de otimalidade	65
3.2.1 Problema irrestrito	66
3.2.2 Ponto de vista geométrico	66
3.2.3 Condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker	68
3.2.4 Condições de otimalidade de Fritz-John	74

4	Condições de Qualificação	78
4.1	Diferentes condições de qualificação	80
4.2	Relações entre as condições de qualificação	94
4.2.1	Implicações	94
4.2.2	Contra-exemplos	109
4.2.3	Outras relações	116
	Conclusão	121
	Referências Bibliográficas	123

Introdução

Otimização consiste em encontrar os mínimos ou máximos de uma função de várias variáveis com valores dentro de uma determinada região do espaço multi-dimensional [31, pág. 1].

Consideramos, nesta dissertação, um problema de otimização que consiste em minimizar uma função objetivo f em um conjunto viável $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definido por restrições de igualdade e desigualdade, ou seja, concentramos nossa atenção no problema da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) \\ \text{sujeito a} \quad & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

onde $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ são funções continuamente diferenciáveis. O conjunto viável neste caso é dado por

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0, \quad g(x) \leq 0\}.$$

É conhecido na literatura que, quando o conjunto viável Ω é formado apenas por restrições de igualdade, Lagrange mostrou que se $x^* \in \Omega$ é solução, então existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$, conhecido como *multiplicador de Lagrange*, tal que

$$\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) = 0.$$

Esta condição é conhecida como *condição de Lagrange*. Este resultado é central na teoria de otimização.

Contudo, um pouco antes de 1950, foi observado que existiam aplicações importantes nos problemas em que eram envolvidas restrições representadas por desigualdades. Por esta razão, alguns matemáticos têm desenvolvido métodos para tratar de problemas com este tipo de restrições. As primeiras condições de otimalidade neste sentido foram estabelecidas por Fritz-John [22] em 1948 e depois por Kuhn e

Tucker [23] em 1951. Mais tarde foi descoberto que as condições de Kuhn-Tucker já teriam sido estabelecidas por W. Karush em 1939 em sua dissertação de mestrado, porém essa dissertação nunca foi publicada, mas partes essenciais foram reproduzidas por Kuhn [24] em 1976. Assim as condições de Kuhn-Tucker passaram a ser chamadas de condições de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Um breve histórico pode ser encontrado em [35].

Para desenvolver as condições KKT, precisamos estudar não só o comportamento da função objetivo, mas também a estrutura do conjunto viável numa vizinhança de uma solução do problema.

Nosso objetivo é apresentar uma prova para as condições KKT baseada em uma abordagem de cones.

Estudamos dois cones que representam uma aproximação de um conjunto em torno de um ponto dado, o cone viável linearizado e o cone tangente. Diferentes definições de direções tangentes têm sido abordadas através dos anos, ver [35]. O cone tangente que nos interessa foi primeiro considerado por Bouligand [7], que o chamou de *contigent cone*.

Cabe ressaltar que as condições KKT são verdadeiras se o minimizador satisfaz uma condição de qualificação. Demonstraremos KKT com uma condição de qualificação fraca mas difícil de ser verificada. Como ferramenta, utilizamos o cone polar, proposto por Voronoi [41] e Steinitz [38, 39, 40] e o Lema de Farkas, originalmente demonstrado por Julius Farkas em 1901 [9].

Não podemos garantir que as condições KKT sejam verificadas sem exigir uma condição de qualificação. Estabeleceremos condições de otimalidade sem exigir qualquer condição de qualificação. Introduzimos um multiplicador auxiliar não-negativo associado ao gradiente da função objetivo. Condições necessárias que envolvem esse multiplicador são conhecidas como condições de Fritz-John [22], propostas em 1948, ver [5] e conhecidas como Regra estendida do Multiplicador de Lagrange, ver [15]. As condições de Fritz-John além de analisarem os gradientes da função objetivo e das restrições, observam o valor numérico das restrições na vizinhança do minimizador.

Vários autores têm obtido diferentes condições de qualificação, ver [1, 3, 6, 15, 21, 29, 33]. Tem sido de interesse determinar condições de qualificação fracas e fáceis de serem verificadas.

Estudamos nesta dissertação as seguintes condições de qualificação: Condição de Slater, Mangasarian-Fromovitz, independência linear dos gradientes, posto constante, dependência linear positiva constante, quase-normalidade, quase-regularidade e Guignard.

Entre as condições de qualificação estudadas nesta dissertação, a mais recente é a dependência linear positiva constante, do inglês CPLD-*Constant Positive Linear Dependence*. Esta condição foi introduzida por Qi e Wei [33] em 2000, e utilizada para analisar convergência de métodos de programação quadrática seqüencial (PQS). Mas os autores não provaram que a CPLD era de fato uma condição de qualificação. Esta questão foi apresentada como um problema aberto na Seção 2 de [33]. Andreani, Martínez e Schuverdt provam em [2] que de fato a CPLD é uma condição de qualificação.

Do ponto de vista prático, é interessante analisar qual é o *status* de uma condição de qualificação em relação às outras condições conhecidas na literatura.

Finalizamos nossa dissertação, mostrando as relações existentes entre as condições de qualificação citadas.

Estrutura dos Capítulos.

No Capítulo 1 fazemos um estudo preliminar de alguns resultados relevantes sobre análise, álgebra linear e análise convexa. No Capítulo 2 estudamos os cones. Fazemos uma interpretação geométrica e algébrica do Lema de Farkas. No Capítulo 3, estudamos problemas de programação não linear. Estudamos direções viáveis e de descida e assim interpretamos o cone tangente e o cone viável linearizado, mostrando as relações entre eles. Além disso fazemos um estudo voltado para as condições de otimalidade, com interpretações geométricas envolvendo o cone tangente, as direções de descida e o cone viável linearizado. As interpretações algébricas são estabelecidas pelas condições de otimalidade de KKT e de Fritz-John. Além disso, fazemos uma interpretação geométrica das condições KKT. No Capítulo 4, definimos vetores PLD e PLI, não muito conhecidos na literatura, mas que são similares aos vetores linearmente dependentes e independentes, respectivamente. Fazemos um estudo detalhado das condições de qualificação já citadas nesta introdução, apresentando caracterizações equivalentes de algumas delas. Provamos as implicações válidas entre as condições de qualificação e apresentamos contra-exemplos para as respectivas recíprocas. Ao final, apresentamos algumas conclusões.

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo, apresentamos algumas definições básicas e alguns resultados de análise, álgebra linear e análise convexa, relevantes nesta dissertação.

1.1 Resultados de análise

As principais referências desta seção são [26, 27, 42].

1.1.1 Supremo e ínfimo

Definição 1.1 *Diz-se que um conjunto C de números reais é limitado à esquerda ou limitado inferiormente se existe um número a tal que $a \leq c$ para todo $c \in C$. Do mesmo modo, C é limitado à direita ou limitado superiormente se existe um número b tal que $c \leq b$ para todo $c \in C$. Os números a e b são chamados cotas do conjunto C , inferior e superior, respectivamente. Quando C é limitado à esquerda e à direita, dizemos simplesmente que C é limitado, ou seja, quando existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $C \subset [a, b]$.*

Definição 1.2 *Definimos supremo de um conjunto C , limitado superiormente, como a menor de suas cotas superiores, ou seja, s é supremo se satisfaz as seguintes propriedades:*

- (a) $c \leq s$ para todo $c \in C$;
- (b) dado qualquer número $\varepsilon > 0$, existe um elemento $c \in C$ tal que $s - \varepsilon < c$.

Denotaremos o supremo de C por $\sup C$.

Proposição 1.3 *Todo conjunto não vazio de números reais, que seja limitado superiormente, possui supremo.*

Definição 1.4 *Definimos ínfimo de um conjunto C , limitado inferiormente, como a maior de suas cotas inferiores, ou seja, l é ínfimo se satisfaz as seguintes propriedades:*

- (a) $l \leq c$ para todo $c \in C$;
- (b) dado qualquer número $\varepsilon > 0$, existe um elemento $c \in C$ tal que $c < l + \varepsilon$.

Denotaremos o ínfimo de C por $\inf C$.

1.1.2 Seqüências

Definição 1.5 *Uma seqüência em \mathbb{R}^n é uma aplicação $k \in \mathbb{N} \mapsto x^k \in \mathbb{R}^n$, definida no conjunto \mathbb{N} dos números naturais.*

Denotaremos uma seqüência por $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente por (x^k) .

Definição 1.6 *Diz-se que o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é o limite da seqüência de pontos $x^k \in \mathbb{R}^n$ quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, é possível obter $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$k \geq k_0 \Rightarrow \|x^k - a\| < \varepsilon.$$

Vemos da definição anterior que o ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é o limite da seqüência (x^k) se para algum $\varepsilon > 0$, o conjunto $\mathbb{N}_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid \|x^k - a\| \geq \varepsilon\}$ é finito, ou seja, fora da bola $B(a, \varepsilon)$ só poderão estar, no máximo, alguns dos termos x^1, \dots, x^{k_0} .

Definição 1.7 *Uma subseqüência de (x^k) é a restrição desta seqüência a um subconjunto infinito $\mathbb{N}' = \{k_1 < k_2 < \dots < k_i < \dots\} \subset \mathbb{N}$.*

Equivalentemente, uma subseqüência de (x^k) é uma seqüência do tipo $(x^k)_{k \in \mathbb{N}'}$ ou $(x^{k_i})_{i \in \mathbb{N}}$, onde (k_i) é uma seqüência crescente de inteiros positivos. Note que $k_i \geq i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Teorema 1.8 *Se uma seqüência (x^k) converge para um limite a , então toda subseqüência (x^{k_i}) também converge para a .*

Prova. Dado $\varepsilon > 0$ existe um k_0 tal que para todo $k > k_0$ tem-se $\|x^k - a\| < \varepsilon$. Como os índices da subseqüência formam um subconjunto infinito, existe entre eles um $k_{i_0} \geq k_0$. Então para $k_i \geq k_{i_0}$ temos $k_i \geq k_0$. Logo $\|x^{k_i} - a\| < \varepsilon$. \square

Teorema 1.9 *A fim de que $a \in \mathbb{R}^n$ seja limite de uma subseqüência de (x^k) é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$, exista uma infinidade de índices k tais que $\|x^k - a\| < \varepsilon$.*

Prova. [27] □

O limite de uma subseqüência $(x^k)_{k \in \mathbb{N}'}$ é chamado valor de aderência da seqüência (x^k) .

Proposição 1.10 *Considere uma seqüência $(x^k) \subset \mathbb{R}$. Se $x^k \rightarrow a > 0$ então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $k \geq k_0$ tem-se $x^k \geq \frac{a}{2}$.*

Prova. Para $\varepsilon = \frac{a}{2}$, existe k_0 tal que, $k \geq k_0$ temos $|x^k - a| < \frac{a}{2}$.

Desta forma

$$a - \frac{a}{2} < x^k < a + \frac{a}{2}.$$

Portanto $x^k \geq \frac{a}{2}$. □

Definição 1.11 *Uma seqüência $(x^k) \subset \mathbb{R}^n$ é limitada, quando o conjunto formado pelos seus elementos é limitado, ou seja, quando existe um número real $M > 0$ tal que $\|x^k\| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Teorema 1.12 *Toda seqüência convergente é limitada.*

Prova. Digamos que $x^k \rightarrow a$. Para $\varepsilon = 1$, existe um k_0 tal que

$$k \geq k_0 \implies \|x^k - a\| \leq 1.$$

Veja que

$$\|x^k\| \leq \|x^k - a\| + \|a\| \leq 1 + \|a\|.$$

Desta forma, a partir do índice k_0 , a seqüência é certamente limitada por $1 + \|a\|$.

Para englobarmos todos os termos da seqüência, basta considerar

$$M = \max\{\|x^1\|, \|x^2\|, \dots, \|x^{k_0}\|, 1 + \|a\|\}.$$

Assim, $\|x^k\| \leq M$ para todo $k \in \mathbb{N}$. □

Definição 1.13 *Sejam $(v^k) \subset \mathbb{R}^n$ e $(\lambda_k) \subset \mathbb{R} - \{0\}$ seqüências com $\lambda_k \rightarrow 0$. Dizemos que $v^k = o(\lambda_k)$ quando $\frac{v^k}{\lambda_k} \rightarrow 0$. Mais geralmente, considere $g : J \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$ com 0 sendo um ponto de acumulação de J . Dizemos que $g(\lambda) = o(\lambda)$ quando $g(\lambda_k) = o(\lambda_k)$ para toda seqüência $(\lambda_k) \subset J$ com $\lambda_k \rightarrow 0$.*

Teorema 1.14 *Toda seqüência monótona limitada é convergente.*

Prova. Seja $(x^1 \leq x^2 \leq x^3 \leq \dots \leq x^k \leq \dots)$ uma seqüência não decrescente limitada. Os outros casos são análogos. Como (x^k) é limitada, o conjunto $X = \{x^1, x^2, \dots, x^k, \dots\}$ possui supremo. Digamos $\sup X = a$. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, temos $a - \varepsilon < a$. Pela propriedade do supremo, existe algum $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a - \varepsilon < x^{k_0}$. Como a seqüência é monótona, temos que se $k \geq k_0$ então $x^{k_0} \leq x^k$. Conseqüentemente, $a - \varepsilon < x^k$. Como $x^k \leq a$ para todo $k \in \mathbb{N}$, vemos que

$$k \geq k_0 \Rightarrow a - \varepsilon < x^k < a + \varepsilon.$$

□

Proposição 1.15 *Considere (x^k) uma seqüência limitada, digamos $\alpha \leq x^k \leq \beta$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Considere os conjuntos $X_1 = \{x^1, x^2, \dots\}$, $X_2 = \{x^2, x^3, \dots\}$, ..., $X_k = \{x^k, x^{k+1}, \dots\}$ e denotemos o ínfimo de X_k por l_k . Então a seqüência (l_k) é não-decrescente e satisfaz $\alpha \leq l_k \leq \beta$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Prova. A seqüência (l_k) é não-decrescente, pois $X_{k+1} \subset X_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja,

$$l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_k \leq \dots \tag{1.1}$$

Como $l_1 = \inf X_1$ e α é cota inferior de X_1 , temos $l_1 \geq \alpha$. De fato, suponha por contradição que $l_1 < \alpha$. Pela definição de ínfimo, para $\varepsilon = \alpha - l_1$, existe k_1 tal que $x^{k_1} < l_1 + \varepsilon = \alpha$ o que contradiz a hipótese de que $x^k \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Isto prova que $l_1 \geq \alpha$, que conjuntamente com (1.1) prova que $l_k \geq \alpha$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, $l_k = \inf X_k \leq x^k \leq \beta$ para todo $k \in \mathbb{N}$, completando a demonstração. □

Pela proposição acima, vemos que a seqüência (l_k) é monótona e limitada. Logo pelo Teorema 1.14, (l_k) é convergente. Digamos que $l_k \rightarrow l$. O número l é chamado limite inferior da seqüência (x^k) denotado por $l = \liminf x^k$. Analogamente, podemos definir o limite superior da seqüência (x^k) como o limite da seqüência dos supremos de X_k denotado por $L = \limsup x^k$.

Teorema 1.16 *Seja (x^k) uma seqüência limitada. Então $\liminf x^k$ é o menor valor de aderência e $\limsup x^k$ é o maior valor de aderência de (x^k) .*

Prova. Provaremos inicialmente que $l = \liminf x^k$ é valor de aderência de (x^k) .

Considere $\varepsilon > 0$ e $k_0 \in \mathbb{N}$. Como $l_k \rightarrow l$, existe $k_1 > k_0$ tal que

$$k \geq k_1 \Rightarrow l - \varepsilon < l_k < l + \varepsilon.$$

Em particular

$$l - \varepsilon < l_{k_1} < l + \varepsilon. \tag{1.2}$$

Como $l_{k_1} = \inf X_{k_1}$, temos que $l + \varepsilon$ não é cota inferior de X_{k_1} . Logo, pela definição de ínfimo, existe $k \geq k_1 > k_0$ tal que

$$l_{k_1} \leq x^k < l + \varepsilon.$$

Portanto, por (1.2) obtemos

$$l - \varepsilon < x^k < l + \varepsilon,$$

o que mostra que l é valor de aderência de (x^k) .

Provaremos agora que l é o menor valor de aderência.

Considere $c < l$. Como $l_k \rightarrow l$, para $\varepsilon = \frac{l - c}{2}$, existe k_0 tal que

$$k > k_0 \Rightarrow l - \varepsilon < l_k < l + \varepsilon.$$

Sabemos que $l_k = \inf X_k$, em particular $l_k \leq x^k$. Desta forma,

$$k > k_0 \Rightarrow c + \varepsilon = l - \varepsilon < l_k \leq x^k.$$

Com isso $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ contém no máximo um número finito de termos de (x^k) , logo c não pode ser valor de aderência, então l é o menor valor de aderência. Analogamente, mostra-se que $L = \limsup x^k$ é o maior valor de aderência de (x^k) . \square

Teorema 1.17 (Bolzano-Weierstrass) *Toda seqüência limitada de números reais possui uma subseqüência convergente.*

Prova. Se (x^k) é limitada, pelo Teorema 1.16, $\liminf x^k$ é valor de aderência, assim (x^k) possui subseqüência convergente. \square

Teorema 1.18 *Uma seqüência (x^k) em \mathbb{R}^n converge para o ponto $a = (a_1 \dots a_n)^T$ se, e somente se, para cada $i = 1, \dots, n$, tem-se $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^k = a_i$, ou seja, cada coordenada de x^k converge para a coordenada correspondente de a .*

Prova. [27] \square

Teorema 1.19 *Uma seqüência limitada em \mathbb{R}^n é convergente se, e somente se, possui um único valor de aderência.*

Prova. Se $x^k \rightarrow a$, pelo Teorema 1.8, $x^k \xrightarrow{\mathbb{N}'} a$ para todo $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, ou seja, a é o único valor de aderência.

Para provar a recíproca, suponha que (x^k) possui um único valor de aderência e é limitada. Queremos mostrar que (x^k) é convergente. Seja a o único valor de aderência de (x^k) . Vamos provar que $x^k \rightarrow a$. Suponha por absurdo que não, isto é, que para algum $\varepsilon > 0$ o conjunto

$$\mathbb{N}_1 = \{k \in \mathbb{N} \mid \|x^k - a\| \geq \varepsilon\}$$

seja infinito. Como $(x^k)_{k \in \mathbb{N}_1}$ é limitada, existe uma subseqüência convergente $(x^k)_{k \in \mathbb{N}_2}$, com $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$. Digamos $x^k \xrightarrow{\mathbb{N}_2} b$ que é ponto de aderência e $\|x^k - a\| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}_2$, já que $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$.

Falta mostrar que b é diferente de a .

Ora,

$$x^k \xrightarrow{\mathbb{N}_2} b \Rightarrow \|x^k - a\| \xrightarrow{\mathbb{N}_2} \|b - a\| \Rightarrow \|b - a\| \geq \varepsilon \Rightarrow b \neq a.$$

O que é um absurdo, já que por hipótese a é o único valor de aderência. □

Teorema 1.20 (Bolzano-Weierstrass) *Toda seqüência limitada em \mathbb{R}^n possui uma subseqüência convergente.*

Prova. Já sabemos do Teorema 1.17 que toda seqüência limitada de números reais possui uma subseqüência convergente. Dada a seqüência limitada (x^k) em \mathbb{R}^n , as primeiras coordenadas dos seus termos formam uma seqüência limitada $(x_1^k)_{k \in \mathbb{N}}$ de números reais, a qual possui uma subseqüência convergente. Digamos $x_1^k \xrightarrow{\mathbb{N}_1} a_1$. Por sua vez $(x_2^k)_{k \in \mathbb{N}_1}$ é uma seqüência limitada, com $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$, logo possui uma subseqüência convergente. Digamos $x_2^k \xrightarrow{\mathbb{N}_2} a_2$, com $\mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1$. Desta forma, teremos $(x_i^k)_{k \in \mathbb{N}_{i-1}}$ com $\mathbb{N}_{i-1} \subset \dots \subset \mathbb{N}_2 \subset \mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$, uma seqüência limitada a qual possui subseqüência convergente. Digamos $x_i^k \xrightarrow{\mathbb{N}_i} a_i$, com $\mathbb{N}_i \subset \mathbb{N}_{i-1}$. Assim pelo Teorema 1.18, $x^k \xrightarrow{\mathbb{N}_n} a$ □

1.1.3 Noções de Topologia

Definição 1.21 *Um ponto $a \in \mathbb{R}^n$ é dito aderente a um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ quando é limite de uma seqüência de pontos desse conjunto, isto é, se qualquer vizinhança de a contém algum elemento de A . O conjunto dos pontos aderentes a A é chamado de fecho de A .*

Denotaremos o fecho de um conjunto A por $cl(A)$.

Definição 1.22 *Um conjunto A é fechado quando $cl(A) = A$.*

Equivalentemente, um conjunto A é fechado se $x^k \in A$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $x^k \rightarrow x$, implicar $x \in A$, ou seja, se todo ponto x tal que $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, para todo $\varepsilon > 0$, pertencer ao conjunto A .

Lema 1.23 *Seja $A \subset F$. Se F é um conjunto fechado, então $cl(A) \subset F$.*

Prova. Seja $b \in cl(A)$. Então existe uma seqüência $(x^k) \subset A$ tal que $x^k \rightarrow b$. Como $A \subset F$, então $(x^k) \subset F$, logo $b \in cl(F)$. Como F é fechado, temos $b \in F$. \square

Definição 1.24 *Um ponto $a \in A \subset \mathbb{R}^n$ é chamado um ponto interior a A quando é centro de alguma bola aberta contida em A , ou seja, quando existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset A$.*

O interior de um conjunto A é formado pelos pontos interiores a A e o denotaremos por $int(A)$. Quando $x \in int(V)$, dizemos que o conjunto V é uma vizinhança do ponto x .

Definição 1.25 *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, quando para todo $a \in A$ existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \subset A$, ou seja, quando $int(A) = A$*

Proposição 1.26 *Considere $A \subset \mathbb{R}^n$. Então $int(A)$ é um conjunto aberto.*

Prova. Considere $a \in int(A)$. Por definição, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset A$. Considere agora $x \in B(a, r)$. Fazendo $\delta = r - \|x - a\|$, vemos que $B(x, \delta) \subset B(a, r)$ (ilustrado na Figura 1.1), onde $B(x, \delta) \subset A$ e portanto $x \in int(A)$. Assim, todo ponto $a \in int(A)$ é centro de bola $B(a, r)$ contida em $int(A)$, o que prova que $int(A)$ é aberto. \square

Definição 1.27 *Um subconjunto $A \subset X$ é aberto em X quando, dado $a \in A$, existe $\delta > 0$ tal que $B(a, \delta) \cap X \subset A$, onde $B(a, \delta)$ denota a bola de centro a e raio δ .*

A definição acima diz que para cada $a \in A$ existe $\delta > 0$ tal que os pontos $x \in X$, que cumprem a condição $\|x - a\| < \delta$ estão em A . Por exemplo, $A = (0, 1]$ é aberto em $X = [0, 1]$.

Mais geralmente, um conjunto $A \subset X$ é aberto em X se, e somente se, existe um aberto $B \subset \mathbb{R}^n$ tal que $A = X \cap B$.

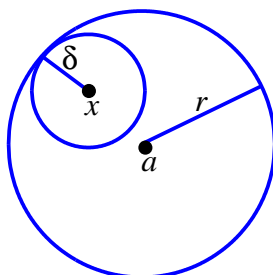


Figura 1.1: $B(x, \delta) \subset B(a, r)$.

Definição 1.28 *Uma cisão de um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é uma decomposição $X = A \cup B$, onde $A \cap B = \emptyset$ e os conjuntos A, B são abertos em X . Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ admite pelo menos a cisão trivial $X = X \cup \emptyset$.*

Definição 1.29 *Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se conexo quando não admite outra cisão além da trivial. Assim, se X é conexo, $X = A \cup B$ com A, B disjuntos e abertos em X , então $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$.*

O conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ o qual é fechado e limitado possui propriedades interessantes. De fato, tais conjuntos constituem uma importante classe de conjuntos chamados de *conjuntos compactos*.

Definição 1.30 *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto quando ele for limitado e fechado.*

De forma equivalente, podemos dizer que um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, toda seqüência de elementos de A tem uma subsequência que converge para um elemento de A .

1.1.4 Aplicações contínuas

Definição 1.31 *Seja $g : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação definida no conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$. Diz-se que g é contínua no ponto $a \in \mathbb{R}^n$ quando, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, se pode obter $\delta > 0$ tal que para cada $x \in X$ tem-se*

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|g(x) - g(a)\| < \varepsilon.$$

A definição anterior diz que g é contínua se todo ponto $x \in X$ cuja distância ao ponto a seja menor do que δ é transformado por g num ponto $g(x)$ que dista de $g(a)$ menos que ε .

Em termos de bolas, a continuidade de g no ponto a se exprime assim: para toda bola aberta B' de centro $g(a)$ em \mathbb{R}^n existe uma bola aberta B de centro a em \mathbb{R}^n tal que $g(B \cap X) \subset B'$.

Teorema 1.32 *Uma aplicação $g : X \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida no subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, é contínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, para toda seqüência de pontos $(x^k) \in X$ com $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = a$, tem-se $\lim_{k \rightarrow \infty} g(x^k) = g(a)$.*

Prova. Seja g contínua no ponto $a \in X$ e $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = a$. Pela continuidade temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - a\| < \delta \Rightarrow \|g(x) - g(a)\| < \varepsilon.$$

Como $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = a$, para este $\delta > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \|x^k - a\| < \delta \Rightarrow \|g(x^k) - g(a)\| < \varepsilon.$$

Logo $\lim_{k \rightarrow \infty} g(x^k) = g(a)$.

Para provar a recíproca, suponhamos que g não seja contínua no ponto a . Queremos mostrar que existe $x^k \rightarrow a$ tal que $g(x^k)$ não converge para $g(a)$. Como g não é contínua em a , existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$, existe $x \in B(a, \delta) \cap X$ com $\|g(x) - g(a)\| \geq \varepsilon$. Em particular, para $\delta_k = \frac{1}{k}$, existe $x^k \in B(a, \delta_k) \cap X$ com $\|g(x^k) - g(a)\| \geq \varepsilon$, isto é, $\|x^k - a\| < \frac{1}{k}$ e $\|g(x^k) - g(a)\| \geq \varepsilon$. Deste modo, $x^k \rightarrow a$ mas $g(x^k)$ não converge para $g(a)$. \square

Proposição 1.33 *Considere $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$t(x) = \max\{u(x), v(x)\}.$$

Se u e v são funções contínuas, então t é contínua.

Prova. Considere $a \in \mathbb{R}^n$ e suponha inicialmente que $u(a) < v(a)$. Pela continuidade de u e v , existe uma vizinhança $V(a)$ tal que $u(x) < v(x)$ para todo $x \in V(a)$. Assim $t(x) = v(x)$ para todo $x \in V(a)$. Como v é contínua, t também é.

O caso onde $u(a) > v(a)$ é análogo ao anterior. Resta apenas analisar o caso em que $u(a) = v(a)$. Para isso, considere

$$A = \{x \neq a \mid u(x) < v(x)\} \quad \text{e}$$

$$B = \{x \neq a \mid v(x) < u(x)\}.$$

Se $x \in A$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} t(x) = \lim_{x \rightarrow a} v(x) = v(a) = t(a).$$

Se $x \in B$, então

$$\lim_{x \rightarrow a} t(x) = \lim_{x \rightarrow a} u(x) = u(a) = t(a),$$

completando a demonstração. □

Proposição 1.34 *Considere $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável. Defina $t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ por*

$$t(x) = \max\{0, v(x)\}.$$

A função $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = [t(x)]^2$ é continuamente diferenciável com gradiente $\nabla\varphi(x) = 2t(x)\nabla v(x)$.

Prova. Considere $a \in \mathbb{R}^n$ arbitrário. Observe pela Proposição 1.33, que t é contínua. Vamos considerar três casos.

1. Se $v(a) < 0$, existe uma vizinhança $V(a)$ tal que $v(x) < 0$ para todo $x \in V(a)$. Com isso,

$$t(x) = 0 \quad \forall x \in V(a).$$

Assim $\varphi(x) = 0$ para todo $x \in V(a)$. Em particular, para $x = a$ tem-se $t(a) = 0$ e $\nabla\varphi(a) = 0$. Em razão disso, $\nabla\varphi(a) = 2t(a)\nabla v(a)$.

2. Se $v(a) > 0$, pela continuidade de v existe uma vizinhança $V(a)$ tal que $v(x) > 0$ para todo $x \in V(a)$. Com isso,

$$t(x) = v(x) \quad \forall x \in V(a).$$

Então $\varphi(x) = [v(x)]^2$ para todo $x \in V(a)$. Segue que

$$\nabla\varphi(a) = 2v(a)\nabla v(a) = 2t(a)\nabla v(a).$$

3. Se $v(a) = 0$ então $t(a) = 0$. Neste caso, basta provar que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Como $\varphi(a) = 0$, temos que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varphi(a + he_i) - \varphi(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} t(a + he_i) \frac{t(a + he_i)}{h}. \quad (1.3)$$

Observe que, pela continuidade de t ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} t(a + he_i) = t(a) = 0. \quad (1.4)$$

Considere

$$A = \{h \neq 0 \mid v(a + he_i) < 0\},$$

$$B = \{h \neq 0 \mid v(a + he_i) \geq 0\}.$$

Se $h \in A$ então

$$\frac{t(a + he_i)}{h} = 0.$$

Se $h \in B$ então

$$t(a + he_i) = v(a + he_i).$$

Como $v(a) = 0$ temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{t(a + he_i)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(a + he_i) - v(a)}{h} = \frac{\partial v}{\partial x_i}(a).$$

Portanto, temos por (1.3) e (1.4) que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(a) = 0$. □

Teorema 1.35 (Teorema de Weierstrass) *Considere $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com domínio compacto $D \subset \mathbb{R}^n$. Então f assume valores máximo e mínimo em D , isto é, existem pontos a e b em D tais que $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ para todo $x \in D$.*

Prova. [27] □

Proposição 1.36 *Seja $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ contínua e $\xi(\bar{x}) = 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma vizinhança V de \bar{x} tal que $\xi(x) < \varepsilon$ para todo $x \in V$.*

Prova. Sendo ξ contínua em $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x - \bar{x}\| < \delta \Rightarrow |\xi(x) - \xi(\bar{x})| < \varepsilon.$$

Mas $\xi(\bar{x}) = 0$, logo $|\xi(x)| < \varepsilon$ e conseqüentemente $\xi(x) < \varepsilon$. □

Definição 1.37 Considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Dizemos que f é coerciva quando

$$\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Isto significa que para qualquer constante M deve haver um número positivo R_M tal que $f(x) \geq M$ quando $\|x\| \geq R_M$. Em particular, valores de $f(x)$ não podem ser limitados num conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ que não seja limitado.

Como exemplo de função coerciva, considere $f(x) = x_1^2 + x_2^2 = \|x\|^2$. Dessa forma, vemos facilmente que $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. Assim f é coerciva.

Teorema 1.38 Considere $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f é coerciva, então existe $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Prova. Temos que $\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$. Isto significa que se $\|x\|$ é grande, então $f(x)$ também é. Portanto, existe um número $r > 0$ tal que se $\|x\| \geq r$, então

$$f(x) > f(0).$$

Considere $B = \{x \mid \|x\| < r\}$. A função f é contínua em cada ponto do conjunto B e o conjunto B é compacto. Pelo Teorema de Weierstrass 1.35, segue que f possui um valor mínimo em B num ponto $x^* \in B$. Em outras palavras, $x \in B$ implica $f(x^*) \leq f(x)$. Em particular, já que $0 \in B$, vemos que

$$f(x^*) \leq f(0).$$

Por outro lado, se $x \notin B$ então

$$f(x) > f(0) \geq f(x^*).$$

Resumidamente, vemos que $x \in B$ implica $f(x) \geq f(x^*)$ e $x \notin B$ implica $f(x) > f(x^*)$, completando a demonstração. □

Lema 1.39 Se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então os conjuntos

$$A = \{x \in X \mid f(x) < d\}$$

e

$$B = \{x \in X \mid d < f(x)\}$$

são conjuntos abertos em X .

Prova. Considere $a \in A$, assim $f(a) < d$. Como f é contínua, para $\varepsilon = d - f(a)$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in B(a, \delta) \cap X$, então

$$f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon = d,$$

assim $x \in A$. Isto significa que, para todo x pertencente a $B(a, \delta) \cap X$ teremos x pertencente a A . Com isso $B(a, \delta) \cap X \subset A$. De forma análoga, prova-se que o conjunto B é aberto em X . \square

Teorema 1.40 *Seja uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) < d < f(b)$ então existe um $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Prova. Considere

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) < d\}$$

e tome $c = \sup A$. Com isso temos $c = \lim_{k \rightarrow \infty} x^k$, com $(x^k) \subset A$. Assim $c \in [a, b]$. Já que $f(x^k) < d$, temos

$$f(c) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x^k) \leq d.$$

Vamos mostrar que não vale $f(c) < d$. Suponha por absurdo que $f(c) < d$. Como f é contínua, para $\varepsilon = d - f(c)$, existe $\delta > 0$ tal que

$$c - \delta < x < c + \delta \Rightarrow f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon = d.$$

Como $f(c) \leq d < f(b)$, temos $c \neq b$. Logo podemos escolher $\bar{x} \in [a, b]$, com $c < \bar{x} < c + \delta$. Portanto, $f(\bar{x}) < d$ e assim c não é $\sup A$, o que é um absurdo. Logo devemos ter $f(c) = d$, completando a demonstração. \square

Este resultado pode ser estendido para o caso onde o domínio da função é um subconjunto conexo de \mathbb{R}^n .

Teorema 1.41 (Teorema do Valor Intermediário) *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, definida num conexo $X \subset \mathbb{R}^n$. Se existem $a, b \in X$ e $d \in \mathbb{R}$ tais que $f(a) < d < f(b)$ então existe $c \in X$ tal que $f(c) = d$.*

Prova. Considere

$$A = \{x \in X \mid f(x) < d\}$$

e

$$B = \{x \in X \mid d < f(x)\}.$$

Pelo Lema 1.39, A e B são abertos em X . Observe que $A \neq \emptyset$ e $B \neq \emptyset$ pois $a \in A$ e $b \in B$. Suponha por absurdo que não existe $c \in X$ tal que $f(c) = d$, ou seja, para todo $x \in X$ temos $f(x) < d$ ou $d < f(x)$. Assim, $X = A \cup B$ é uma cisão não trivial, contradizendo o fato de X ser conexo. \square

Teorema 1.42 (Teorema da Preservação de Sinal) *Considere $\gamma : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $x_0 \in U$, tal que $\gamma(x_0) > 0$. Então existe um $r > 0$ tal que $\gamma(x) > 0$ para todo $x \in B(x_0, r)$.*

Prova. Temos por hipótese que γ é contínua em x_0 e $\gamma(x_0) > 0$. Para $\varepsilon = \gamma(x_0)$, existe $\delta = r > 0$ tal que

$$\|x - x_0\| < r \Rightarrow \|\gamma(x) - \gamma(x_0)\| < \gamma(x_0).$$

Segue que

$$0 < \gamma(x) < 2\gamma(x_0).$$

Portanto $\gamma(x) > 0$ para todo $x \in B(x_0, r)$. \square

Teorema 1.43 (Teorema da Função Inversa) *Considere $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$. Se o determinante jacobiano $\det J_\psi(a)$ é diferente de zero, então existem vizinhanças V de a e W de $\psi(a)$ tais que $\psi : V \rightarrow W$ é inversível com inversa $\psi^{-1} : W \rightarrow V$ diferenciável.*

Prova. [27] \square

Teorema 1.44 (Teorema da Função Implícita) *Considere $\varphi_1, \dots, \varphi_n : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ e $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por*

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \\ \vdots \\ \varphi_n \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$. Considere o sistema de n equações e $n + 1$ variáveis

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = 0 \tag{1.5}$$

e suponha que o ponto $\tilde{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ é uma solução de (1.5), na qual a jacobiana de φ em relação a x tem posto n . Então existe uma vizinhança $J \subset \mathbb{R}$ de 0 e uma função diferenciável $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para todo $t \in J$,

$$\varphi \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix} = 0.$$

Além disso, denotando por $J_{\varphi,x}$ e $J_{\varphi,t}$ as jacobianas de φ em relação a x e t , respectivamente, temos

$$x'(t) = - \left[J_{\varphi,x} \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix} \right]^{-1} J_{\varphi,t} \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix},$$

para todo $t \in J$. Mais ainda, a função $t \in J \mapsto x(t)$ é única.

Obs.: este lema nos diz que podemos isolar x , como função de t , na equação (1.5), isto é, o sistema (1.5) define implicitamente x como função de t .

Prova. Seja $F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$F \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \\ t \end{pmatrix}.$$

Temos $F \in \mathcal{C}^1$ e

$$J_F(\tilde{a})^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(\tilde{a}) & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(\tilde{a}) & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(\tilde{a}) & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(\tilde{a}) & 0 \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t}(\tilde{a}) & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t}(\tilde{a}) & 1 \end{pmatrix}.$$

A submatriz $n \times n$ do bloco esquerdo superior é inversível, pois ela é a transposta da jacobiana de φ em relação a x , que tem posto n . Portanto, $J_F(\tilde{a})$ também é inversível. Pelo Teorema da Função Inversa 1.43, existem vizinhanças V de \tilde{a} e W de $F(\tilde{a}) = 0$ tais que $F : V \rightarrow W$ é inversível com inversa $G : W \rightarrow V$ diferenciável.

Considere $(u, s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Note que se $G = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{n+1} \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} \in W$, então

$$\begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} = F \left(G \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \varphi \left(G \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} \right) \\ g_{n+1} \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \text{ Donde segue que}$$

$$\varphi \left(G \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} \right) = u \quad \text{e} \quad g_{n+1} \begin{pmatrix} u \\ s \end{pmatrix} = s. \quad (1.6)$$

Defina $J = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \in W \right\}$ (ilustrado na Figura 1.2) e a função $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $x(t) = g_{\mathcal{I}} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$, onde $\mathcal{I} = \{1, \dots, n\}$. Deste modo temos que J é uma vizinhança de 0 e, usando (1.6),

$$\varphi \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix} = \varphi \left(g_{\mathcal{I}} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \right) = \varphi \left(G \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Isto prova a existência afirmada no lema. Para obter $x'(t)$, note que

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt} \varphi \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix} = J_{\varphi} \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix} = \\ &= \left(J_{\varphi, x} \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix} \quad J_{\varphi, t} \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x'(t) \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Como $J_{\varphi, x} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$ é inversível, podemos supor sem perda de generalidade, usando a continuidade de $J_{\varphi, x}$, que $J_{\varphi, x} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}$ é inversível para todo $\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} \in V$. Além disso, se $t \in J$, então $\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \in W$ e portanto,

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \in V.$$

Assim, $J_{\varphi,x} \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix}$ é inversível para todo $t \in J$, o que permite isolar $x'(t)$ em (1.7), obtendo

$$x'(t) = - \left[J_{\varphi,x} \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix} \right]^{-1} J_{\varphi,t} \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix}.$$

Finalmente, para provar a unicidade, suponha que $\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$ satisfaz (1.5). Assim

$$F \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}$$

e portanto,

$$\begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} = G \left(F \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix} \right) = G \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix},$$

donde segue que $y = x(t)$. □

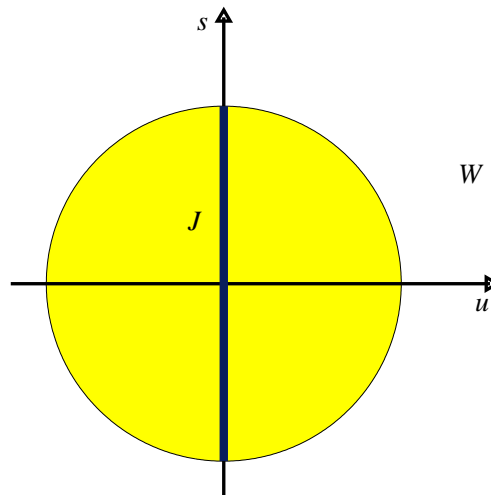


Figura 1.2: O intervalo J.

1.2 Resultados de álgebra linear

As principais referências desta seção são [19, 25].

Definição 1.45 Considere $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. O subespaço de \mathbb{R}^n gerado pelos vetores-

linha de A é chamado espaço-linha de A e o subespaço de \mathbb{R}^m gerado pelos vetores-coluna de A é chamado espaço-coluna de A .

Denotaremos a matriz transposta de A por A^T .

Pela definição anterior, podemos notar que o espaço-linha de A é igual ao espaço-coluna de A^T .

Definição 1.46 *O núcleo de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, denotado por $\mathcal{N}(A)$, é um subconjunto de \mathbb{R}^n formado por todas as soluções do sistema homogêneo $Ax = 0$, ou seja,*

$$\mathcal{N}(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}.$$

Podemos observar que o núcleo de uma matriz não pode ser vazio, pois $0 \in \mathcal{N}(A)$.

Proposição 1.47 *Considere $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Então $\mathcal{N}(A^T A) = \mathcal{N}(A)$.*

Prova. Seja $x \in \mathcal{N}(A^T A)$, isto é, $A^T A x = 0$. Multiplicando essa expressão por x , temos

$$0 = x^T A^T A x = (Ax)^T A x = \|Ax\|^2.$$

Assim, $Ax = 0$, logo $x \in \mathcal{N}(A)$. Tome agora $x \in \mathcal{N}(A)$, isto é, $Ax = 0$. Multiplicando essa expressão por A^T , temos

$$A^T A x = A^T 0 = 0.$$

Assim $x \in \mathcal{N}(A^T A)$, completando a prova. □

Definição 1.48 *A nulidade de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a dimensão do núcleo de A . Denotaremos a nulidade de uma matriz A por $\dim(\mathcal{N}(A))$.*

Definição 1.49 *A imagem de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é um subconjunto de \mathbb{R}^m formado pelos vetores da forma $b = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$. Denotaremos a imagem de uma matriz A por $Im(A)$. Em outras palavras, a imagem de uma matriz A é:*

$$Im(A) = \{b \in \mathbb{R}^m \mid b = Ax \text{ para algum } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

A definição anterior nos diz que a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ pode ser interpretada como um operador de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^m . Já que $b = Ax$ para algum $x \in \mathbb{R}^n$, b está no espaço-coluna de A , assim a imagem de A é o espaço coluna de A e a imagem de A^T é o espaço-coluna de A^T , ou seja,

$$Im(A^T) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = A^T y \text{ para algum } y \in \mathbb{R}^m\}. \quad (1.8)$$

Definição 1.50 *O posto de uma matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, denotado por $\text{posto}(A)$, é a dimensão comum do espaço-linha e do espaço-coluna.*

Tendo em vista que a imagem de A é o espaço-coluna de A , concluímos que

$$\text{posto}(A) = \dim(\text{Im}(A)). \quad (1.9)$$

Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então os vetores-linha estão no \mathbb{R}^n e os vetores coluna estão no \mathbb{R}^m . Isto implica que o espaço-linha tem no máximo dimensão n e que o espaço-coluna tem no máximo dimensão m . Como o espaço-linha e o espaço-coluna têm a mesma dimensão (o posto de A), devemos concluir que se m é diferente de n , então o posto de A é, no máximo, o menor dos valores de m e n . Assim,

$$\text{posto}(A) \leq \min(m, n). \quad (1.10)$$

Quando ocorre a igualdade em (1.10), dizemos que a matriz A tem *posto cheio* ou *posto completo* e em conseqüência disto, ou as colunas ou as linhas de A são linearmente independentes.

É conhecido na literatura, ver [25], que dimensão do núcleo de A somado com a dimensão da imagem de A é o número de colunas de A , ou seja,

$$\dim \mathcal{N}(A) + \dim(\text{Im}(A)) = n.$$

Esta equação nos diz que

$$\dim \mathcal{N}(A) + \text{posto}(A) = n. \quad (1.11)$$

Lema 1.51 *Seja $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $\xi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma função linear da forma $\xi(x) = Bx$. Suponha que B tem posto cheio. Se $m \geq n$, então ξ é injetiva. Se $m \leq n$, ξ é sobrejetiva. Em particular, se $m = n$, ξ é isomorfismo.*

Prova. (i) Considere o caso onde $m \geq n$. Deste modo, temos que as colunas de B são linearmente independentes. Tome x, y vetores em \mathbb{R}^n . Temos que provar que, se $Bx = By$ então $x = y$.

Seja x_i a i -ésima coordenada de x , y_i a i -ésima coordenada de y e b_i a i -ésima coluna da matriz B . De $Bx = By$ temos que

$$B(x - y) = 0.$$

Segue que

$$\sum_i (x_i - y_i) b_i = 0. \quad (1.12)$$

Ora, como as colunas de B são linearmente independentes, concluímos que $x_i = y_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Com isso, $x = y$, o que prova que ξ é injetiva.

(ii) Suponha agora que $m \leq n$. Temos que $\text{Im}(\xi) \subset \mathbb{R}^m$ é um espaço vetorial com $\dim(\text{Im}(\xi)) = \text{posto}(B) = m$. Assim, $\text{Im}(\xi) = \mathbb{R}^m$, portanto ξ é sobrejetiva. \square

Lema 1.52 (Lema de Caratheodory) *Sejam $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p$ vetores em \mathbb{R}^n . Sejam $x \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq 0$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_m, \mu_1, \dots, \mu_p$ escalares tais que $\mu_j \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, p$ e*

$$x = \sum_{i=1}^m \lambda_i u_i + \sum_{j=1}^p \mu_j v_j. \quad (1.13)$$

Então existem subconjuntos $I \subset \{1, \dots, m\}$, $J \subset \{1, \dots, p\}$ e escalares λ'_i com $i \in I$ e $\mu'_j \geq 0$ para todo $j \in J$, tais que

$$x = \sum_{i \in I} \lambda'_i u_i + \sum_{j \in J} \mu'_j v_j$$

e os vetores $\{u_i\}_{i \in I} \cup \{v_j\}_{j \in J}$ são linearmente independentes.

Prova. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\lambda_i \neq 0$ para todo $i = 1, \dots, m$ e que $\mu_j > 0$ para todo $j = 1, \dots, p$. Se os vetores $\{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p\}$ são linearmente independentes não há o que provar. Suponhamos então que os vetores $\{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_p\}$ sejam linearmente dependentes. Portanto, existem escalares α_i com $i = 1, \dots, m$ e β_j com $j = 1, \dots, p$ não todos nulos, tais que

$$0 = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i + \sum_{j=1}^p \beta_j v_j. \quad (1.14)$$

Multiplicando a igualdade (1.14) por um número real t e subtraindo de (1.13) temos

$$x = \sum_{i=1}^m (\lambda_i - t\alpha_i) u_i + \sum_{j=1}^p (\mu_j - t\beta_j) v_j.$$

Para $t = 0$, nenhum dos coeficientes na igualdade acima se anula. Seja \bar{t} o t de menor módulo que anula pelo menos um dos coeficientes $\lambda_i - t\alpha_i$ ou $\mu_j - t\beta_j$. Então

$$x = \sum_{i=1}^m (\lambda_i - \bar{t}\alpha_i) u_i + \sum_{j=1}^p (\mu_j - \bar{t}\beta_j) v_j.$$

Claramente $\mu_j - \bar{t}\beta_j \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, p$. Com isso conseguimos escrever x como combinação linear de, no máximo $m + p - 1$ vetores. Este processo pode ser repetido até que todos os vetores da combinação linear sejam linearmente independentes. \square

1.2.1 Subespaços ortogonais

Considere $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $x \in \mathcal{N}(A)$. Como $Ax = 0$, temos:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n = 0, \text{ para cada } i = 1, \dots, m.$$

Esta equação mostra que x é ortogonal a i -ésima coluna de A^T . Como x é ortogonal a cada coluna de A^T , ele é ortogonal a qualquer combinação linear dos vetores colunas de A^T . De fato, seja y um vetor em \mathbb{R}^n escrito como combinação linear desses vetores denotado por a_j , com $j = 1, \dots, m$ e α_i escalares para $i = 1, \dots, m$, isto é

$$y = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_m a_m.$$

Vemos que

$$x^T y = \alpha_1 x^T a_1 + \alpha_2 x^T a_2 + \dots + \alpha_m x^T a_m.$$

Como $x^T a_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, m$, concluímos que $x^T y = 0$. Isto prova a seguinte proposição:

Proposição 1.53 *Cada vetor em $\mathcal{N}(A)$ é ortogonal a todos os vetores no espaço-coluna de A^T , ou seja, os vetores em $Im(A^T)$.*

Definição 1.54 *Dois subespaços X e Y de \mathbb{R}^n são chamados de ortogonais se para todo $x \in X$ e $y \in Y$ temos $x^T y = 0$.*

Denotaremos dois subespaços ortogonais X e Y por $X \perp Y$.

Com esta definição juntamente com a Proposição 1.53, podemos notar que

$$\mathcal{N}(A) \perp Im(A^T).$$

Definição 1.55 *Seja Y um subespaço de \mathbb{R}^n . Dizemos que o complemento ortogonal de Y é o conjunto de todos os vetores de \mathbb{R}^n que são ortogonais a todos os vetores em Y e denotaremos por Y^\perp , ou seja,*

$$Y^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T y = 0 \text{ para todo } y \in Y\}.$$

Lema 1.56 *Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então $\mathcal{N}(A) = \text{Im}(A^T)^\perp$.*

Prova. Seja $x \in \text{Im}(A^T)^\perp$. Pela Definição 1.55 e visto que $A^T y$ é um elemento da $\text{Im}(A^T)$ para algum $y \in \mathbb{R}^m$, temos que $x^T A^T y = 0$. Tome y como o j -ésimo vetor canônico em \mathbb{R}^m , assim $(Ax)^T e_j = 0$, isto é, $Ax = 0$. Isto nos mostra que $x \in \mathcal{N}(A)$. Reciprocamente, se $x \in \mathcal{N}(A)$, então $Ax = 0$. Logo $x^T (A^T y) = (Ax)^T y = 0$, para todo $y \in \mathbb{R}^m$, isto é, $x \in \text{Im}(A^T)^\perp$. Portanto $\mathcal{N}(A) = \text{Im}(A^T)^\perp$. \square

Teorema 1.57 *Se V é um subespaço de \mathbb{R}^n , então $\dim V + \dim V^\perp = n$.*

Prova. [25] \square

Teorema 1.58 *Se V é um subespaço de \mathbb{R}^n , então $\mathbb{R}^n = V \oplus V^\perp$.*

Prova. [25] \square

Uma consequência deste teorema é que

$$\text{Im}(A^T) \oplus \mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^n.$$

De fato, temos que $\text{Im}(A^T) \oplus \text{Im}(A^T)^\perp = \mathbb{R}^n$ que juntamente com o Lema 1.56 resulta em

$$\text{Im}(A^T) \oplus \mathcal{N}(A) = \mathbb{R}^n. \quad (1.15)$$

Proposição 1.59 *Considere $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Então $\text{posto}(A) = \text{posto}(A^T)$.*

Prova. Sabemos do Teorema 1.57 que

$$\dim \text{Im}(A^T) + \dim \text{Im}(A^T)^\perp = n.$$

Pela Definição 1.50 e do Lema 1.56 segue que

$$\text{posto}(A^T) + \dim \mathcal{N}(A) = n,$$

conjuntamente com (1.11) resulta em

$$\text{posto}(A) = \text{posto}(A^T) \quad (1.16)$$

\square

Com este lema, é fácil ver que

$$\text{posto}(A) = \text{posto}(AA^T) = \text{posto}(A^T A). \quad (1.17)$$

De fato, observe que $\text{posto}(A) = \text{posto}(A^T A)$ decorre diretamente da Equação (1.11) e da Proposição 1.47 e utilizando o resultado do Lema 1.59 segue que $\text{posto}(AA^T) = \text{posto}(A)$.

1.2.2 Normas de matrizes

Definição 1.60 Considere $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Definimos norma da matriz A como

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|, x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}.$$

Mais geralmente, definimos a norma-p da matriz A como

$$\|A\|_p = \sup\{\|Ax\|_p, x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_p = 1\} \quad \text{com } p \geq 1.$$

As mais usuais são obtidas com p igual a 1, 2 ou ∞ denominadas norma da soma, euclidiana e infinito, respectivamente.

Neste texto, concentraremos nossa atenção nos resultados com a norma euclidiana, e a menos de uma indicação explícita. Usaremos simplesmente $\|\cdot\|$ para indicar a norma euclidiana $\|\cdot\|_2$.

Lema 1.61 Considere $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Então $\|A\| = \max_{\|x\|=\|y\|=1} \{|x^T Ay|\}$.

Prova. Dados x e y unitários, temos

$$|x^T Ay| \leq \|x\| \|A\| \|y\| = \|A\|.$$

Portanto

$$\max_{\|x\|=\|y\|=1} |x^T Ay| \leq \|A\|. \quad (1.18)$$

Por outro lado, para y_0 unitário qualquer e $x_0 = \frac{Ay_0}{\|Ay_0\|}$, temos

$$\max_{\|x\|=\|y\|=1} |x^T Ay| \geq |x_0^T Ay_0| \geq x_0^T Ay_0 = \frac{(Ay_0)^T Ay_0}{\|Ay_0\|} = \frac{\|Ay_0\|^2}{\|Ay_0\|} = \|Ay_0\|.$$

Portanto, dado y_0 unitário, temos

$$\max_{\|x\|=\|y\|=1} |x^T Ay| \geq \|Ay_0\|.$$

Observando que $\max_{\|x\|=\|y\|=1} |x^T Ay|$ é cota superior de $\|Ay_0\|$, concluímos que

$$\max_{\|x\|=\|y\|=1} |x^T Ay| \geq \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \|A\|. \quad (1.19)$$

Por (1.18) e (1.19), concluímos que

$$\|A\| = \max_{\|x\|=\|y\|=1} \{|x^T Ay|\}.$$

□

O resultado do lema acima, não vale para uma norma qualquer. Tome por exemplo, $A = I$. Assim, pela Definição 1.60.

$$\|A\|_\infty = \sup_{\|x\|_\infty=1} \{\|Ax\|\} = \sup_{\|x\|_\infty=1} \{\|Ix\|\} = 1.$$

Por outro lado,

$$\max_{\|x\|_\infty=\|y\|_\infty=1} |x^T Ay| \geq \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} I \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2.$$

Corolário 1.62 *Considere $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Então $\|A\| = \|A^T\|$.*

Prova. Inicialmente, note que $x^T Ay = (x^T Ay)^T$, já que $x^T Ay \in \mathbb{R}$. Desta forma,

$$\|A\| = \max_{\|x\|=\|y\|=1} \{|x^T Ay|\} = \max_{\|x\|=\|y\|=1} |{(x^T Ay)}^T| = \max_{\|x\|=\|y\|=1} \{|y^T A^T x|\} = \|A^T\|$$

□

Lema 1.63 *Considere $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e x um autovetor unitário associado ao autovalor λ da matriz B . Então $x^T Bx = \lambda$.*

Prova. Por definição de autovalor, temos $Bx = \lambda x$, o que implica em

$$x^T Bx = x^T \lambda x = \lambda x^T x = \lambda.$$

□

Lema 1.64 *Seja $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então $\|A\| = \sqrt{\bar{\lambda}}$, onde $\bar{\lambda}$ é o maior autovalor de $A^T A$.*

Prova. Considere $B = A^T A$ e $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ um autovetor unitário associado ao autovalor $\bar{\lambda}$. Pelo Lema 1.63, temos

$$\max_{\|x\|=1} \{x^T Bx\} \geq \bar{x}^T B\bar{x} = \bar{\lambda} \quad (1.20)$$

Como B é simétrica, B é diagonalizável. Isto significa que existem $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonal e $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ortogonal, tal que $B = PDP^T$.

Assim,

$$x^T Bx = x^T PDP^T x = (P^T x)^T D(P^T x) = y^T Dy, \text{ onde } y = P^T x. \quad (1.21)$$

Mas,

$$\|y\|^2 = \|P^T x\|^2 = (P^T x)^T P^T x = x^T P P^T x$$

e como P é uma matriz ortogonal, $P P^T = I$, logo

$$\|y\|^2 = x^T x = \|x\|^2 = 1.$$

Considere agora, λ_i como os autovalores de B e $x \in \mathbb{R}^n$ unitário. Sabendo que $\bar{\lambda}$ é o maior autovalor de B e por (1.21), obtemos

$$x^T Bx = y^T Dy = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2 \leq \sum_{i=1}^n \bar{\lambda} y_i^2 = \bar{\lambda} \sum_{i=1}^n y_i^2 = \bar{\lambda} \|y\|^2 = \bar{\lambda}.$$

Concluimos que

$$\max_{\|x\|=1} \{x^T Bx\} \leq \bar{\lambda}$$

que junto com (1.20), resulta em

$$\max_{\|x\|=1} \{\|Ax\|^2\} = \max_{\|x\|=1} \{x^T A^T A x\} = \max_{\|x\|=1} \{x^T Bx\} = \bar{\lambda},$$

donde segue que $\|A\| = \max_{\|x\|=1} \{\|Ax\|\} = \sqrt{\bar{\lambda}}$. □

Teorema 1.65 *Se a matriz $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ tem linha ortonormais, então $\|A\| = 1$.*

Prova. Fazendo $B = A^T$ e usando o Corolário 1.62 e o Lema 1.64 temos $\|A\| = \|B\| = \sqrt{\bar{\lambda}}$, onde $\bar{\lambda}$ é o maior autovalor de $B^T B = A A^T$. Como A tem linhas ortonormais, $A A^T = I$ e $\bar{\lambda} = 1$, completando a demonstração. □

1.3 Resultados de análise convexa

Convexidade é um assunto muito importante na teoria de otimização. Com hipóteses de convexidade sobre a função objetivo, minimizadores locais passam a ser minimizadores globais, ou seja, todo ponto estacionário (KKT) é uma solução do problema, ver [32].

As principais referências desta seção são [6, 16, 17, 20, 34].

Definição 1.66 *Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo se para todo $x, y \in A$, o segmento de reta com extremidades em x e y está inteiramente contido em A . Em outras palavras,*

$$x, y \in A \Rightarrow \alpha x + (1 - \alpha)y \in A \quad \text{para todo } \alpha \in [0, 1].$$

O conjunto vazio, o espaço \mathbb{R}^n e um conjunto que contém apenas um elemento, são trivialmente convexos.

Teorema 1.67 *Sejam $C_i, i = 1, \dots, m$ conjuntos convexos. Então o conjunto $C = \bigcap_{i=1}^m C_i$ é também convexo.*

Prova. Se $x, y \in C$, então $x, y \in C_i, i = 1, \dots, m$. Como cada um dos C_i é convexo, então para $0 \leq \alpha \leq 1$,

$$z = \alpha x + (1 - \alpha)y \in C_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Logo, pela definição de interseção, $z \in C$. □

Definição 1.68 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo. A função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é convexa em Ω quando para quaisquer $x, y \in \Omega$ e $\alpha \in [0, 1]$ tem-se*

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Veja a ilustração dessa definição na Figura 1.3.

Quando uma função é diferenciável a convexidade admite várias caracterizações que são úteis para determinar se uma função é convexa ou não. Apresentamos no próximo teorema uma dessas caracterizações.

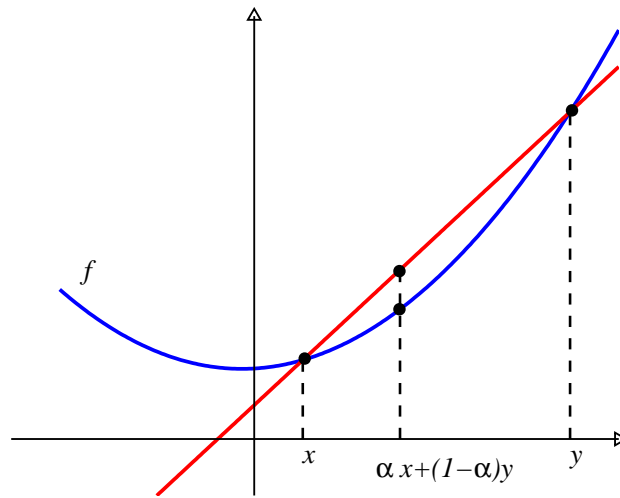


Figura 1.3: Ilustração da Definição 1.68.

Teorema 1.69 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo aberto e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em Ω . A função f é convexa se, e somente se,*

$$f(y) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(y - x)$$

para todo $x \in \Omega$ e todo $y \in \Omega$.

Prova. Seja f convexa. Para $x \in \Omega$, $y \in \Omega$ e $\alpha \in (0, 1]$ quaisquer, definindo $d = y - x$ temos $x + \alpha d \in \Omega$ e

$$f(x + \alpha d) = f(\alpha y + (1 - \alpha)x) \leq \alpha f(y) + (1 - \alpha)f(x).$$

Assim

$$\alpha(f(y) - f(x)) \geq f(x + \alpha d) - f(x).$$

Dividindo os dois lados da desigualdade acima por $\alpha > 0$ e passando o limite quando $\alpha \rightarrow 0^+$, obtemos

$$f(y) - f(x) \geq \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \alpha d) - f(x)}{\alpha} = \nabla f(x)^T d = \nabla f(x)^T(y - x).$$

Para provar a recíproca, observe que

$$f(x) \geq f(x + \alpha d) - \alpha \nabla f(x + \alpha d)^T d, \tag{1.22}$$

$$f(y) \geq f(x + \alpha d) + (1 - \alpha) \nabla f(x + \alpha d)^T d. \tag{1.23}$$

Multiplicando (1.22) por $(1 - \alpha)$ e (1.23) por α e somando obtemos

$$(1 - \alpha)f(x) + \alpha f(y) \geq f((1 - \alpha)x + \alpha y),$$

completando a demonstração. \square

Este teorema afirma que em todo ponto, a aproximação linear de uma função convexa sempre está abaixo do gráfico da função, veja Figura 1.4.

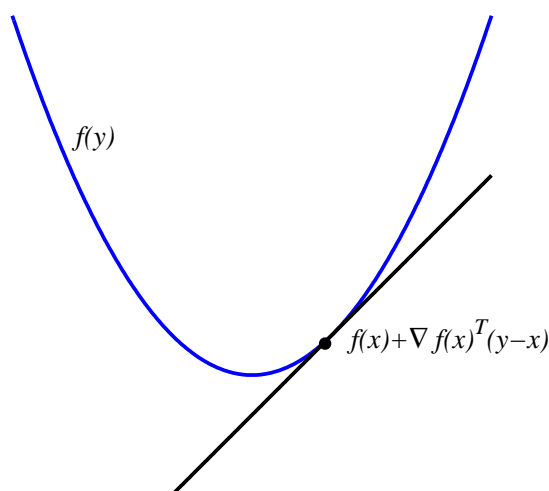


Figura 1.4: Ilustração do Teorema 1.69.

Como consequência deste teorema, temos que se $\nabla f(x) = 0$, então $f(y) \geq f(x)$ para todo $y \in \Omega$. Definimos abaixo uma outra classe de funções que também possuem esta propriedade.

Definição 1.70 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto não vazio e $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em Ω . A função f é pseudo-convexa se para cada $x, y \in \Omega$ com $\nabla f(x)^T (y - x) \geq 0$, temos $f(y) \geq f(x)$.*

Lema 1.71 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto não vazio. Se $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função convexa diferenciável em Ω , então f é pseudo-convexa.*

Prova. Considere $x, y \in \Omega$. Pelo Teorema 1.69 temos

$$f(y) - f(x) \geq \nabla f(x)^T (y - x).$$

Por hipótese $\nabla f(x)^T (y - x) \geq 0$. Assim $f(y) \geq f(x)$. Portanto, f é pseudo-convexa. \square

Note que a recíproca não é necessariamente verdadeira. Mostraremos um contra-exemplo baseado em Mangasarian [28]. Considere uma função diferenciável $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + x$. Esta função é trivialmente não convexa. Contudo, f é pseudoconvexa, pois $\nabla f(x) = 1 + 3x^2 > 0$ e

$$\nabla f(x)^T(y - x) \geq 0 \Rightarrow y \geq x.$$

Assim $y^3 \geq x^3$. Desta forma, $f(y) - f(x) = y^3 + y - x^3 - x \geq 0$, completando a demonstração.

Lema 1.72 *Sejam $u, v \in \mathbb{R}^n$ com $u \neq v$. Se $\|u\|_2 = \|v\|_2 = \alpha$, então para todo $t \in (0, 1)$, tem-se $\|(1 - t)u + tv\|_2 < \alpha$.*

Prova. Pela desigualdade triangular, temos que

$$\|(1 - t)u + tv\|_2 \leq \alpha.$$

Suponha que

$$\|(1 - t)u + tv\|_2 = \alpha.$$

Desenvolvendo o quadrado de ambos os lados, temos

$$\|(1 - t)u + tv\|_2^2 = (1 - t)^2 u^T u + 2t(1 - t)u^T v + t^2 v^T v = \alpha^2. \quad (1.24)$$

Por hipótese temos $u^T u = v^T v = \alpha^2$, que substituindo em (1.24), fornece

$$u^T v = \alpha^2.$$

Portanto,

$$\|u - v\|^2 = u^T u - 2u^T v + v^T v = 0.$$

Logo $u = v$, o que é absurdo. Portanto,

$$\|(1 - t)u + tv\|_2 < \alpha.$$

□

Considere agora um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$, um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ e o problema

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & \|s - x\| \\ \text{sujeito a} & s \in S \end{array}$$

Veja que este problema pode não ter solução. Como exemplo, considere $\varepsilon > 0$ e S uma bola aberta $B(a, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$ e $x \notin S$. Deste modo, nenhum elemento $s \in S$ minimiza $\|s - x\|$, como ilustrado na Figura 1.5. O caso mais interessante é quando S é um conjunto fechado. Neste caso, a solução sempre existe e pode não ser única. Cada solução será chamada de projeção de x sobre S , e será denotada por $proj_S(x)$. Assim, uma projeção de x sobre S é um dos pontos de S que está mais próximo de x . Veremos mais adiante que, a unicidade da projeção de x sobre S é garantida caso S seja um conjunto convexo fechado.

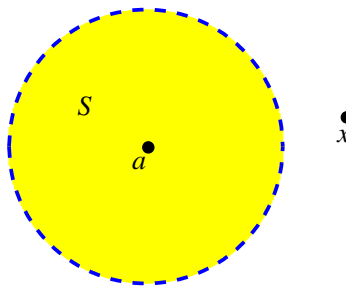


Figura 1.5: Nenhum elemento $s \in S$ minimiza $\|s - x\|$.

Lema 1.73 *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado não vazio. Dado $z \in \mathbb{R}^n$, existe $\hat{z} \in S$ tal que*

$$\|z - \hat{z}\| \leq \|x - z\|, \quad \text{para todo } x \in S.$$

Prova. Considere

$$\alpha = \inf\{\|x - z\| \mid x \in S\}.$$

Existe o ínfimo, pois o conjunto é limitado inferiormente por zero. Pela definição de ínfimo, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $x^k \in S$ tal que

$$\alpha \leq \|x^k - z\| \leq \alpha + \frac{1}{k}.$$

Pelo Teorema do Confronto

$$\|x^k - z\| \rightarrow \alpha.$$

Vemos que

$$\|x^k - z\| \leq \alpha + \frac{1}{k} \leq \alpha + 1.$$

Com isso, (x^k) é limitada, ou seja, $x^k \in B(z, \alpha + 1)$. Como (x^k) é limitada, pelo Teorema de Bolzano-Weirstrass 1.20, ela possui uma subsequência convergente. Di-

gamos que

$$x^k \xrightarrow{\mathbb{N}'} \hat{z}$$

para $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$. Sendo S fechado, temos que $\hat{z} \in S$. Com isso,

$$\|x^k - z\| \xrightarrow{\mathbb{N}'} \|\hat{z} - z\|.$$

Pela unicidade do limite, $\alpha = \|\hat{z} - z\|$, completando a prova. \square

Observe que $\hat{z} = \text{proj}_S(z)$.

Lema 1.74 *Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo fechado e $z \in \mathbb{R}^n$. Então existe um único $\hat{z} = \text{proj}_S(z) \in S$ tal que*

$$\|\hat{z} - z\|_2 \leq \|x - z\|_2, \quad \text{para todo } x \in S.$$

Prova. A existência é garantida pelo Lema 1.73. Vejamos a unicidade. Suponha que existam $\hat{z} \neq \tilde{z}$ em S tais que, para todo $x \in S$,

$$\|z - \hat{z}\|_2 \leq \|x - z\|_2, \tag{1.25}$$

$$\|z - \tilde{z}\|_2 \leq \|x - z\|_2. \tag{1.26}$$

Tome $x = \tilde{z}$ em (1.25) e $x = \hat{z}$ em (1.26), vemos que

$$\|z - \hat{z}\|_2 \leq \|\tilde{z} - z\|_2$$

e

$$\|z - \tilde{z}\|_2 \leq \|\hat{z} - z\|_2.$$

Com isso,

$$\|z - \hat{z}\|_2 = \|z - \tilde{z}\|_2 = \alpha.$$

Já que $z - \hat{z} \neq z - \tilde{z}$, pelo Lema 1.72 temos, para $t \in (0, 1)$,

$$\|(1-t)(z - \hat{z}) + t(z - \tilde{z})\|_2 < \alpha.$$

Tome $t = \frac{1}{2}$ e $\bar{z} = \frac{1}{2}(\hat{z} + \tilde{z})$. Como S é convexo, temos $\bar{z} \in S$ e

$$\|z - \bar{z}\|_2 = \left\| z - \frac{1}{2}(\hat{z} + \tilde{z}) \right\|_2 = \left\| \frac{1}{2}(z - \hat{z}) + \frac{1}{2}(z - \tilde{z}) \right\|_2 < \alpha,$$

contradizendo assim (1.25) e (1.26). \square

Teorema 1.75 (Teorema da Projeção) *Considere $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto convexo fechado, $z \in \mathbb{R}^n$ e $\hat{z} = \text{proj}_S(z)$, então*

$$(x - \hat{z})^T(z - \hat{z}) \leq 0, \quad \text{para todo } x \in S.$$

Prova. Seja $t \in (0, 1]$ arbitrário e $\hat{z} + t(x - \hat{z})$ um ponto de S . Logo, pela definição de \hat{z} , temos que

$$\|z - \hat{z}\| \leq \|\hat{z} + t(x - \hat{z}) - z\|.$$

Com isso

$$\|z - \hat{z}\|^2 \leq \|(\hat{z} - z) + t(x - \hat{z})\|^2.$$

Observe que

$$\|(\hat{z} - z) + t(x - \hat{z})\|^2 = \|z - \hat{z}\|^2 + 2t(\hat{z} - z)^T(x - \hat{z}) + t^2\|x - \hat{z}\|^2.$$

Logo

$$\|z - \hat{z}\|^2 \leq \|z - \hat{z}\|^2 + 2t(\hat{z} - z)^T(x - \hat{z}) + t^2\|x - \hat{z}\|^2.$$

Como $t > 0$, temos que

$$(x - \hat{z})^T(z - \hat{z}) \leq t\|x - \hat{z}\|^2.$$

Como t é arbitrário no intervalo $(0, 1]$, podemos fazer o limite quando t tende a zero, obtendo assim $(x - \hat{z})^T(z - \hat{z}) \leq 0$. □

Veja a ilustração deste teorema na Figura 1.6.

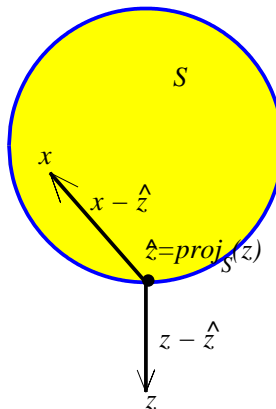


Figura 1.6: Ilustração do Teorema da Projeção.

Capítulo 2

Cones

Neste capítulo, concentraremos nossa análise na teoria de cones. A utilização de cones nesta dissertação é fundamental na obtenção das condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker. Utilizamos o Lema de Farkas para obter tais condições e o relacionamos com cone gerado por um número finito de elementos. As principais referências deste capítulo são [4, 6, 8, 16, 20, 34].

2.1 Cone e cone polar

Definição 2.1 *Um subconjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ é um cone quando, para todo $t \geq 0$ e $d \in C$ tem-se $td \in C$.*

Alguns exemplos de cone são: o espaço \mathbb{R}^n , qualquer subespaço de \mathbb{R}^n . Informalmente, um cone é um conjunto de direções. A Figura 2.1 ilustra um exemplo de cone convexo e outro não convexo.

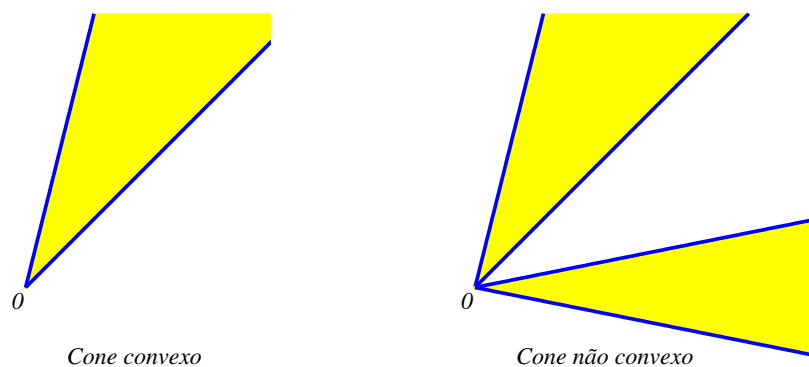


Figura 2.1: Exemplos de cone.

A teoria de cones polares, que apresentamos abaixo, é atribuída a Voronoi [41] e Steinitz [38, 39, 40].

Definição 2.2 Dado um conjunto $S \in \mathbb{R}^n$, definimos o polar de S por

$$P(S) = \{p \in \mathbb{R}^n \mid p^T x \leq 0 \text{ para todo } x \in S\}.$$

Veja que o polar de um conjunto S é um cone formado por todos os vetores que formam ângulo reto ou obtuso com qualquer elemento de S . Note também que o polar de S não é vazio, pois $0 \in P(S)$. A Figura 2.2 ilustra bem a definição de cone polar.

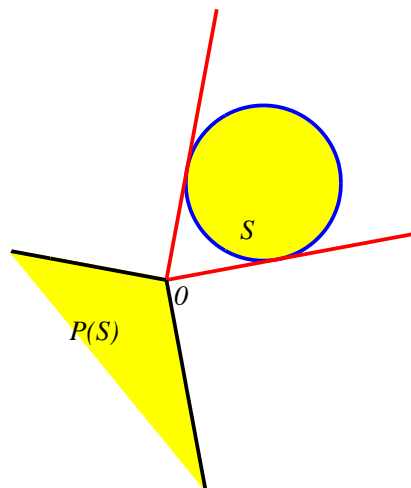


Figura 2.2: Polar de um conjunto S .

Lema 2.3 Sejam A e B subconjuntos não vazios de \mathbb{R}^n . Se $A \subseteq B$, então $P(B) \subseteq P(A)$.

Prova. Considere $y \in P(B)$ arbitrário. Com isso, temos $y^T x \leq 0$ para todo $x \in B$. Como $A \subseteq B$, segue que $y^T z \leq 0$ para todo $z \in A$. Assim, $y \in P(A)$, completando a demonstração. \square

Lema 2.4 Se $S \subset \mathbb{R}^n$ e $0 \in \text{int}(S)$, então $P(S) = \{0\}$.

Prova. Suponha por absurdo que exista $u \in P(S)$ não-nulo. Como $0 \in \text{int}(S)$, existe $\delta > 0$ tal que $B(0, \delta) \subset S$. Tome $v = \frac{\delta u}{2\|u\|} \in B(0, \delta)$. Como $u \in P(S)$, v também pertence, pois $P(S)$ é um cone. Por outro lado, $v \in S$, logo $v^T v \leq 0$ o que implica $v = 0$, o que é uma contradição. \square

Proposição 2.5 Considere $C \subset \mathbb{R}^n$ um cone não vazio. O polar de C é convexo e fechado.

Prova. Sejam $x \in P(C)$ e $y \in P(C)$, isto é, $x^T d \leq 0$ e $y^T d \leq 0$ para todo $d \in C$. Seja $\alpha \in [0, 1]$. Para qualquer $d \in C$, temos que

$$(\alpha x + (1 - \alpha)y)^T d = \alpha x^T d + (1 - \alpha)y^T d \leq 0,$$

isto é,

$$\alpha x + (1 - \alpha)y \in P(C).$$

Portanto $P(C)$ é convexo. Para mostrar que $P(C)$ é fechado, considere uma seqüência $(y^k) \subset P(C)$ com $y^k \rightarrow y$ e $d \in C$ arbitrário. Devemos mostrar que $y \in P(C)$. Como $y^k \in P(C)$, temos

$$y^{kT} d \leq 0.$$

Passando o limite, obtemos

$$y^T d \leq 0.$$

Logo $y \in P(C)$, completando a demonstração. □

Lema 2.6 Se $S \subset \mathbb{R}^n$, então $S \subset P(P(S))$.

Prova. Considere $u \in S$ e $\tilde{S} = P(S)$. Queremos mostrar que $u \in P(P(S)) = P(\tilde{S})$. Dado $p \in \tilde{S}$ temos $u^T p \leq 0$. Logo $u \in P(\tilde{S})$. □

Sabemos então que $S \subset P(P(S))$. Em geral, $P(P(S)) \not\subset S$, veja Figura 2.3.

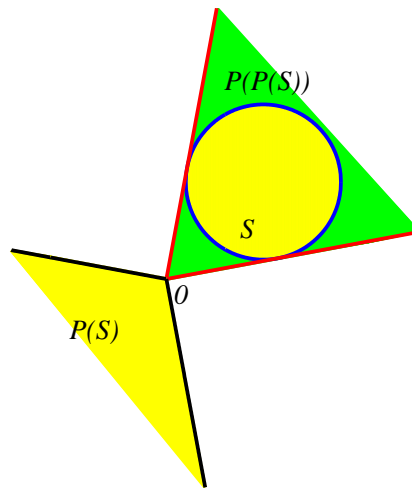


Figura 2.3: Polar do polar de S .

Veremos na seção seguinte que, com algumas hipóteses adicionais sobre o conjunto S , o Lema de Farkas garante a igualdade $P(P(S)) = S$.

Fechamos esta seção com uma discussão sobre cones gerados por um número finito de elementos.

Definição 2.7 Dizemos que um cone $C \subset \mathbb{R}^n$ tem um número finito de geradores ou é finitamente gerado, quando existem $p \in \mathbb{N}$ e $a_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, p$, tais que

$$C = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^p \mu_i a_i, \quad \mu_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, p \right\}.$$

Veja na Figura 2.4 que o cone C é gerado por a_1 , a_2 e a_3 .

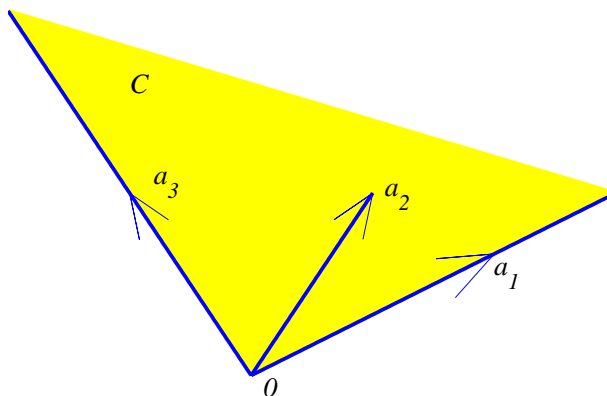


Figura 2.4: Ilustração da Definição 2.7.

2.2 Teoremas de alternativa

Consideramos sistemas de equações e inequações lineares, relacionados no sentido de que existem duas alternativas: se um deles não possui soluções então o outro possui soluções, e ambos os sistemas não admitem soluções simultaneamente. Esses teoremas são chamados de *Teoremas de alternativa*. Podemos citar o Teorema da Alternativa de: Motzkin, Farkas, Key, Tucker, Gale I, Gale II, Gordan e de Stiemke. Para maiores detalhes, ver [6, 20]. Nesta seção, concentraremos nossa atenção no Lema de Farkas e no Lema de Key.

Como vimos, estamos interessados em estabelecer condições para que a igualdade $P(P(S)) = S$ seja satisfeita. Para isso mostraremos duas versões do Lema de Farkas,

que garante essa igualdade. O lema foi originalmente demonstrado por Julius Farkas em 1901 [9].

Lema 2.8 (Versão Geométrica do Lema de Farkas) *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$ um cone convexo fechado. Então $P(P(C)) = C$.*

Prova. Já sabemos pelo Lema 2.6 que $C \subset P(P(C))$. Resta mostrar que $P(P(C)) \subset C$. Para isso, tome $z \in P(P(C))$ e $\hat{z} = \text{proj}_C(z) \in C$. Vamos provar que $z = \hat{z}$.

Pelo Teorema da Projeção 1.75,

$$(z - \hat{z})^T(x - \hat{z}) \leq 0$$

para todo $x \in C$. Como C é um cone e é fechado, $x = 0$ e $x = 2\hat{z}$ são elementos de C . Assim

$$-\hat{z}^T(z - \hat{z}) \leq 0 \quad \text{e} \quad \hat{z}^T(z - \hat{z}) \leq 0,$$

ou seja,

$$\hat{z}^T(z - \hat{z}) = 0. \tag{2.1}$$

Por outro lado,

$$(z - \hat{z})^T x - (z - \hat{z})^T \hat{z} = (z - \hat{z})^T(x - \hat{z}) \leq 0 \tag{2.2}$$

Comparando (2.1) e (2.2), concluímos que

$$(z - \hat{z})^T x \leq 0$$

para todo $x \in C$. Pela definição de cone polar, $(z - \hat{z}) \in P(C)$.

Como $z \in P(P(C))$, temos que

$$(z - \hat{z})^T z \leq 0. \tag{2.3}$$

Mas

$$\|z - \hat{z}\|^2 = (z - \hat{z})^T z - (z - \hat{z})^T \hat{z}. \tag{2.4}$$

De (2.1) juntamente com (2.3) e (2.4), concluímos que

$$\|z - \hat{z}\| \leq 0.$$

Logo, $\|z - \hat{z}\| = 0$ e com isso $z = \hat{z}$. Portanto $z \in C$. □

Veja na Figura 2.5 uma ilustração da versão geométrica do Lema de Farkas.

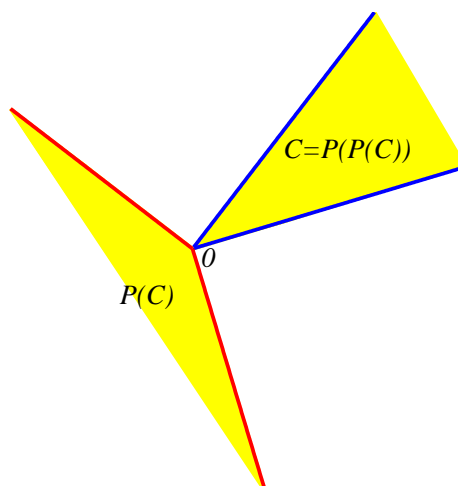


Figura 2.5: Ilustração da versão geométrica do Lema de Farkas.

Para estudar a versão algébrica do Lema de Farkas, façamos um estudo preliminar de dois lemas que serão ferramentas na análise neste contexto.

Lema 2.9 Dado $m \in \mathbb{N}$, se $n \in \mathbb{N}$ e $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$, então $C = \{By \mid y \geq 0\}$ é fechado.

Prova. Faremos por indução em m .

Vamos verificar o lema para $m = 1$.

Denote $B = b \in \mathbb{R}^n$, com $b \neq 0$ (se $b = 0$, então $C = \{0\}$ é fechado). Considere $(z^k) \subset C$ convergente, ou seja,

$$z^k = by^k \quad \text{tal que} \quad y^k \geq 0 \quad \text{e} \quad z^k \rightarrow \bar{z}.$$

Queremos mostrar que $\bar{z} \in C$. Temos que

$$b^T by^k = b^T z^k \rightarrow b^T \bar{z}.$$

Com isso,

$$y^k \rightarrow \frac{b^T \bar{z}}{\|b\|^2} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{y} \geq 0, \quad \text{pois } y^k \geq 0.$$

Logo,

$$z^k = by^k \rightarrow b\bar{y}.$$

Pela unicidade do limite, $\bar{z} = b\bar{y}$. Portanto, $\bar{z} \in C$.

Suponha que o lema seja verdadeiro para $m - 1$. Vamos provar que vale para m . Para isso, vejamos dois casos.

1. Suponha que $\text{posto}(B) = m$. Temos que

$$z^k = By^k, \quad y^k \geq 0, \quad \text{com } z^k \rightarrow \bar{z},$$

assim

$$B^T By^k = B^T z^k \rightarrow B^T \bar{z}.$$

Segue que,

$$y^k \rightarrow (B^T B)^{-1} B^T \bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{y} \geq 0, \quad \text{pois } y^k \geq 0.$$

Logo

$$z^k = By^k \rightarrow B\bar{y}.$$

Pela unicidade do limite, $\bar{z} = B\bar{y}$. Portanto, $\bar{z} \in C$.

2. Suponha agora, que $\text{posto}(B) < m$. Com isso as colunas de B são linearmente dependentes, logo existe $\gamma \in \mathbb{R}^m$ tal que

$$B\gamma = 0 \tag{2.5}$$

com $\gamma_i > 0$ para algum $i = 1, \dots, m$.

Considere, para $j = 1, \dots, m$ arbitrário que

$$C_j = \left\{ \sum_{i \neq j} y_i b_i, \quad y_i \geq 0 \right\}$$

Observamos que C_j assim definido, representa o cone gerado pelas colunas de B (exceto a coluna j) com $m - 1$ colunas. Assim, podemos escrever C_j da seguinte forma

$$C_j = \{By, \quad y \geq 0, \quad y_j = 0\}$$

Para ser mais didático, considere $\tilde{y} \in \mathbb{R}^{n-1}$ como sendo

$$\tilde{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_m)^T$$

e $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{n \times m-1}$ como sendo

$$\tilde{B} = (b_1, b_2, \dots, b_{j-1}, b_{j+1}, \dots, b_m).$$

Daí teremos

$$C_j = \left\{ \tilde{B}\tilde{y}, \quad \tilde{y} \geq 0 \right\}.$$

Já que C_j possui $m - 1$ colunas, pela hipótese de indução, C_j é fechado para todo $j = 1, \dots, m$. Mas $\bigcup_j C_j$ é fechado, pois a união finita de fechados é um conjunto fechado. Com isso falta mostrar que $C = \bigcup_j C_j$.

Para isso, tome inicialmente $z \in C$. Então $z = By$ para algum $y \geq 0$. Considere

$$\bar{t} = \max \left\{ -\frac{y_i}{\gamma_i} \mid \gamma_i > 0 \right\},$$

onde γ é dado por (2.5). Assim, para todo i tal que $\gamma_i > 0$, temos

$$\bar{t} \geq -\frac{y_i}{\gamma_i}. \quad (2.6)$$

Como $y_i \geq 0$ para todo i , vemos por (2.6) que $\bar{t} \leq 0$.

Considere agora, $\hat{y} = y + \bar{t}\gamma$. Se $\gamma_i > 0$, podemos observar de (2.6) que

$$\hat{y}_i = y_i + \bar{t}\gamma_i \geq 0.$$

Ora, para $\gamma_i \leq 0$, é fácil ver que

$$\hat{y}_i = y_i + \bar{t}\gamma_i \geq 0.$$

Assim, $\hat{y}_i \geq 0$ para todo i . Mas para um j tal que $\bar{t} = -\frac{y_j}{\gamma_j}$ com $\gamma_j > 0$, temos

$$\hat{y}_j = y_j + \bar{t}\gamma_j = 0.$$

Como $B\gamma = 0$, temos que

$$z = By = By + \bar{t}B\gamma = B(y + \bar{t}\gamma) = B\hat{y}.$$

Como $\hat{y} \geq 0$ concluímos que $z \in C_j$.

A prova de que $\bigcup_j C_j \subset C$ é imediata, completando a prova. □

Lema 2.10 *Se $C = \{A^T y; y \geq 0\}$ com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então C é um cone convexo fechado.*

Prova. Para mostrar que é cone, tome $c \in C$ e $\alpha \geq 0$. Temos que

$$\alpha c = \alpha A^T y = A^T \alpha y.$$

Mas $\alpha y \geq 0$, logo $\alpha c \in C$. Portanto, C é cone.

Tome agora $c^1 = A^T y^1$ com $y^1 \geq 0$, $c^2 = A^T y^2$ com $y^2 \geq 0$ e $t \in (0, 1)$. Temos que

$$tc^1 + (1-t)c^2 = tA^T y^1 + (1-t)A^T y^2 = A^T (ty^1 + (1-t)y^2)$$

Como $ty^1 + (1-t)y^2 \geq 0$, temos que $tc^1 + (1-t)c^2 \in C$. Portanto C é convexo.

Para mostrar que C é fechado, basta substituir A^T em B no Lema 2.9 \square

Observe pela Definição 2.7 que o cone $C = \{A^T y; y \geq 0\}$ com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é um cone finitamente gerado.

Lema 2.11 (Versão Algébrica do Lema de Farkas) *Considere $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ e $c \in \mathbb{R}^n$. Então, exatamente um dos dois sistemas tem solução:*

$$(S1) \quad Ax \leq 0 \quad e \quad c^T x > 0$$

ou

$$(S2) \quad A^T y = c \quad e \quad y \geq 0.$$

Prova. Considere $C = \{A^T y; y \geq 0\}$ e suponha que $c \in C$, isto é, que (S2) tem solução. Assim $c = A^T y$ com $y \geq 0$. Considere $x \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$Ax \leq 0.$$

Temos que

$$c^T x = y^T Ax \leq 0.$$

Logo (S1) não tem solução.

Agora, suponha $c \notin C$, ou seja, que (S2) não tem solução. Mas pelo Lema 2.10 juntamente com o Lema 2.8, temos que $C = P(P(C))$, com isso existe um $\bar{x} \in P(C)$ tal que $c^T \bar{x} > 0$. Assim, para todo $y \geq 0$, temos

$$\bar{x}^T A^T y \leq 0,$$

ou seja,

$$A\bar{x} \leq 0.$$

Logo (S1) tem solução. □

Veja na Figura 2.6 uma ilustração da versão algébrica do Lema de Farkas, sendo a_i as linhas da matriz A definida no Lema 2.11 com $i = 1, \dots, m$.

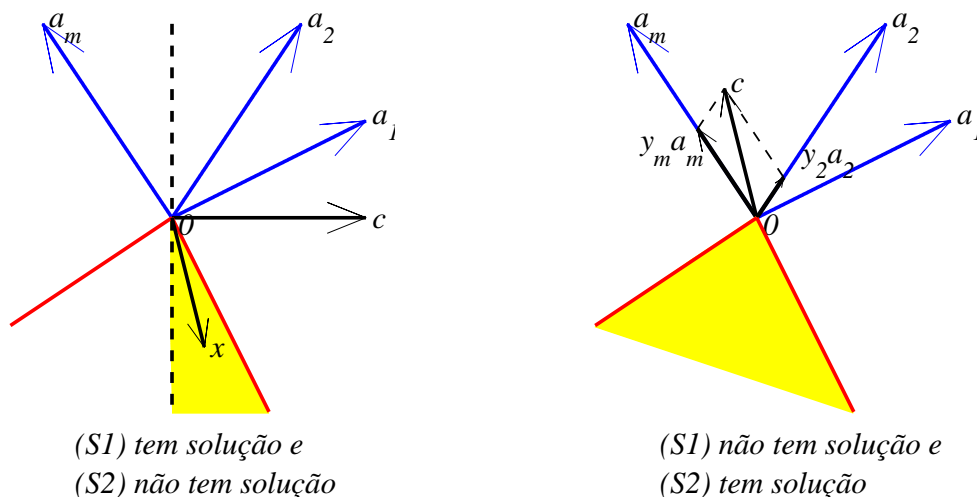


Figura 2.6: Ilustração da versão algébrica do Lema de Farkas.

Podemos observar nesta demonstração, que utilizamos a versão geométrica do Lema de Farkas. Assim, para $C = \{A^T y; y \geq 0\}$ com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, mostramos que a versão geométrica implica na versão algébrica. Mostraremos agora para esse C que a versão algébrica implica na versão geométrica, concluindo assim que as duas versões são equivalentes.

Corolário 2.12 *Considere que a versão algébrica do Lema de Farkas seja válida e $C = \{A^T y; y \geq 0\}$ com $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, então $P(P(C)) = C$.*

Prova. Já mostramos que $C \subset P(P(C))$, resta mostrar que $P(P(C)) \subset C$. Para isso, considere $c \in P(P(C))$ e x tal que

$$Ax \leq 0. \tag{2.7}$$

Assim, para todo $y \geq 0$ temos

$$x^T(A^T y) = (Ax)^T y \leq 0.$$

Pela definição de cone polar temos que $x \in P(C)$.

Como $x \in P(C)$ e $c \in P(P(C))$, temos que

$$c^T x \leq 0$$

juntamente com (2.7) mostra que (S1) não tem solução. Como vale o Lema 2.11, (S2) tem solução, o que significa que $c \in C$. \square

Observe que as duas versões do Lema de Farkas são equivalentes, somente para o caso onde o cone em questão é um cone finitamente gerado.

Lema 2.13 (Lema de Key) *Considere as matrizes $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times n}$ e $H \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Denote $e = (1 \cdots 1)^T \in \mathbb{R}^m$. Então exatamente um dos seguintes sistemas tem solução*

$$(S1) \quad Ax < 0, \quad Bx \leq 0 \quad e \quad Hx = 0$$

ou

$$(S2) \quad A^T u + B^T v + H^T w = 0 \quad \text{com} \quad u \geq 0, \quad v \geq 0 \quad e \quad e^T u = 1.$$

Prova. Suponha que (S1) e (S2) tenham solução. Então existe x tal que

$$Ax < 0 \quad Bx \leq 0 \quad e \quad Hx = 0$$

e existe $(u, v) \geq 0$ e w tal que

$$A^T u + B^T v + H^T w = 0 \quad e \quad e^T u = 1.$$

Temos que

$$u^T Ax < 0, \quad v^T Bx \leq 0, \quad w^T Hx = 0.$$

Com isso

$$u^T Ax + v^T Bx + w^T Hx < 0.$$

Desse modo

$$x^T (A^T u + B^T v + H^T w) < 0,$$

que é absurdo pois $A^T u + B^T v + H^T w = 0$. Logo (S1) ou (S2) tem solução ou nenhum deles tem solução. Mas esta última afirmação é falsa, pois provaremos que se (S1) não tem solução, então (S2) tem solução.

Suponha que (S1) não tenha solução. Então o sistema, nas variáveis (x, θ) ,

$$\begin{cases} Ax + e\theta \leq 0, & \theta > 0 \\ Bx \leq 0 \\ Hx \leq 0 \\ -Hx \leq 0 \end{cases}$$

não tem solução. Este sistema pode ser reescrito na forma

$$\begin{bmatrix} A & e \\ B & 0 \\ H & 0 \\ -H & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} \leq 0, \quad \left(0, \dots, 0, 1 \right) \cdot \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} > 0 \quad (2.8)$$

Fazendo $\bar{A} = \begin{bmatrix} A & e \\ B & 0 \\ H & 0 \\ -H & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix}$ e $c^T = \left(0, \dots, 0, 1 \right)$ teremos

que o sistema

$$\bar{A}\bar{x} \leq 0 \quad \text{e} \quad c^T\bar{x} > 0$$

não tem solução. Logo, pelo Lema de Farkas 2.11, o sistema

$$\bar{A}^T y = c, \quad \text{com} \quad y \geq 0$$

tem solução $y = (u, v, a, b)^T$.

Então temos

$$\begin{pmatrix} A^T & B^T & H^T & -H^T \\ e^T & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Este sistema pode ser reescrito como

$$A^T u + B^T v + H(a - b) = 0 \quad e^T u = 1.$$

Fazendo $w = a - b$, vemos que (S2) tem solução. □

Observe que este lema é uma generalização do Lema de Farkas. Para tanto, basta substituir A, B e H por $-c^T, A$ e 0 , respectivamente.

Capítulo 3

Problema de Programação Não Linear

Nosso objetivo neste capítulo é discutir condições de otimalidade para o problema de otimização que consiste em minimizar uma função objetivo $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ em um conjunto viável $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, definido por restrições de igualdade e desigualdade, ou seja, concentramos nossa atenção no problema da seguinte forma:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & h(x) = 0 \\ & g(x) \leq 0 \end{array} \quad (3.1)$$

O conjunto

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0, \quad g(x) \leq 0\},$$

com $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ é o conjunto ou região viável. Supomos que as funções f , h e g são continuamente diferenciáveis.

3.1 Abordagem cônica

Nesta seção estudamos direções viáveis e direções de descida. Discutiremos as principais aproximações do conjunto viável, o cone viável linearizado e o cone tangente, bem como suas relações.

3.1.1 Solução

A estrutura do conjunto viável tem um papel importante na existência de uma solução. O primeiro passo é ter um conjunto viável não vazio. Dado um conjunto

não vazio definido por restrições de igualdade ou desigualdade, precisamos fornecer condições específicas para descrever algumas aproximações desse conjunto. Para este propósito precisamos de algumas definições.

Definição 3.1 *Uma restrição de desigualdade $g_i(x) \leq 0$ é dita ativa num ponto \bar{x} , se $g_i(\bar{x}) = 0$, e inativa em \bar{x} , se $g_i(\bar{x}) < 0$.*

Visto que restrições inativas de um dado ponto viável \bar{x} não tem influência numa vizinhança de \bar{x} , o conjunto das restrições ativas tornam-se mais restritivas definindo algumas aproximações do conjunto viável em torno de \bar{x} . Embora a informação de que as restrições são ativas não é conhecida a priori, a geometria das restrições ativas funciona como um modelo essencial em otimização. Denote $A(\bar{x})$ como o conjunto de índices das restrições de desigualdade ativas num ponto viável \bar{x} , isto é,

$$A(\bar{x}) = \{i \mid g_i(\bar{x}) = 0\}.$$

Denotaremos a cardinalidade de $A(\bar{x})$ por q .

Em problemas de otimização, o objetivo é descobrir quais pontos $x \in \Omega$ minimizam a função objetivo f . Tais pontos serão chamados de minimizadores. Existem na literatura dois tipos de minimizadores, o qual definimos abaixo.

Definição 3.2 *Um ponto $x^* \in \Omega$ é minimizador global de f se, e somente se, $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in \Omega$.*

Uma função pode admitir vários minimizadores globais, mas o valor ótimo (global) de problema é sempre o mesmo.

Definição 3.3 *Um ponto $x^* \in \Omega$ é minimizador local de f se, e somente se, existe uma vizinhança V de x^* tal que $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in \Omega \cap V$.*

De forma equivalente, $x^* \in \Omega$ é minimizador local de f , se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f(x^*) \leq f(x)$ para todo $x \in \Omega$ com $\|x - x^*\| \leq \varepsilon$.

É fácil ver que minimizador global implica em minimizador local, mas não reciprocamente. Concentraremos nossa atenção nos minimizadores locais.

Estudaremos algumas condições que devem ser satisfeitas quando um ponto $x^* \in \Omega$ dado é um minimizador local de f do Problema 3.1. Essas condições são chamadas de condições necessárias de otimalidade estudadas com mais detalhes na Seção 3.2 deste capítulo.

Uma condição necessária de otimalidade clássica e importantíssima em otimização, que permite relacionar a função objetivo com as restrições, é dada pelo teorema abaixo. Tal condição é conhecida como *Condição de Karush-Kuhn-Tucker (KKT)*.

Este teorema exige como hipótese uma condição de qualificação que não definiremos agora. Deixamos para o Capítulo 4 um estudo detalhado deste assunto.

Teorema 3.4 *Se um ponto $x^* \in \Omega$ é um minimizador local do Problema (3.1) e satisfaz uma condição de qualificação então existem $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ e $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tal que:*

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla g_j(x^*),$$

$$\mu_j^* \geq 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

$$\mu_j^* g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, \dots, p.$$

Os vetores λ^* e μ^* são os multiplicadores de Lagrange associados aos gradientes das restrições de igualdade e de desigualdade no ponto x^* , respectivamente. A terceira condição é chamada de complementaridade.

Para desenvolver essas condições, precisamos estudar não só o comportamento da função objetivo numa vizinhança de uma solução, mas também a estrutura do conjunto viável nessa vizinhança. Iniciaremos estudando linearizações de um conjunto em torno de um ponto dado. Isto pode ser estudado em termos do cone tangente e do cone viável linearizado.

3.1.2 Direções viáveis e de descida

Definição 3.5 *Dados $\bar{x} \in \Omega$ e $d \in \mathbb{R}^n$, dizemos que d é uma direção viável em relação ao conjunto Ω no ponto \bar{x} , quando existe $\delta > 0$ tal que*

$$\bar{x} + td \in \Omega, \quad \forall t \in [0, \delta].$$

O conjunto de todas as direções viáveis em relação ao conjunto Ω no ponto \bar{x} será denotado por $V(\bar{x})$. É fácil ver que $V(\bar{x})$ é um cone não vazio (pelo menos, $0 \in V(\bar{x})$). Fica evidente que pequenos passos a partir de \bar{x} ao longo de um vetor $d \in V(\bar{x})$ geram pontos ainda viáveis. No entanto, podem existir situações no qual a única direção viável é o vetor nulo, isto é, $V(\bar{x}) = \{0\}$ para todo $\bar{x} \in \Omega$. Para isso, considere o exemplo em que

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\},$$

ou seja, Ω é uma esfera unitária. Quando $\bar{x} \in \Omega$ e $\bar{x} + \delta d \in \Omega$, onde $\delta > 0$ e $d \neq 0$, tem-se que $\bar{x} + td \notin \Omega$ para todo $t \in (0, \delta)$. Logo, $d = 0$ é a única direção viável (veja Figura 3.1).

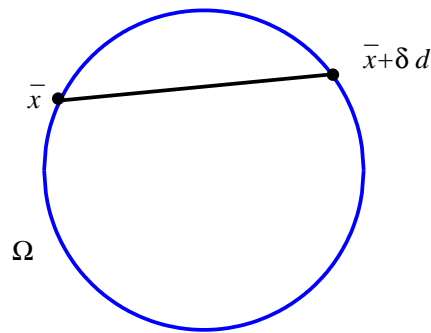


Figura 3.1: A única direção viável é a direção nula.

Alguns algoritmos procuram diminuir o valor da função objetivo ao longo de uma certa direção. Essas direções são chamadas de *direções de descida*, que definimos abaixo.

Definição 3.6 Uma direção $d \in \mathbb{R}^n$ é uma direção de descida da função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ no ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, se existe $\delta > 0$ tal que

$$f(\bar{x} + td) < f(\bar{x}) \quad \text{para todo } t \in (0, \delta].$$

O conjunto das direções de descida de f no ponto \bar{x} será denotado por $F(\bar{x})$. Fica evidente que $F(\bar{x})$ pode ser vazio no caso em que \bar{x} seja um minimizador global de um problema sem restrições. Quando $F(\bar{x})$ é não-vazio, ele não é cone, pois $0 \notin F(\bar{x})$. No entanto, o conjunto $F(\bar{x}) \cup \{0\}$ é um cone não-vazio. Da mesma forma que direções viáveis, pequenos passos a partir de \bar{x} ao longo de $d \in F(\bar{x})$ fornecem pontos que possuem menor valor na função objetivo f .

Em alguns casos é um pouco difícil provar por esta definição que uma dada direção $d \in \mathbb{R}^n$ é uma direção de descida. Consideramos uma linha de análise em que baseada em aproximações poderemos fornecer uma melhor descrição algébrica dessas direções.

Lema 3.7 (Direções de descida) *Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável no ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Então:*

1. *Para todo $d \in F(\bar{x})$, tem-se $\nabla f(\bar{x})^T d \leq 0$.*
2. *Se $d \in \mathbb{R}^n$ satisfaz $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$, então $d \in F(\bar{x})$.*

Prova. Para provar o primeiro item, tome $d \in F(\bar{x})$. Logo, para todo $t \in (0, \delta]$ tem-se:

$$f(\bar{x} + td) - f(\bar{x}) < 0.$$

Pela série de Taylor temos

$$f(\bar{x}) + t\nabla f(\bar{x})^T d + o(t) - f(\bar{x}) < 0.$$

Já que $t \neq 0$, dividindo esta expressão por t , obtemos

$$\nabla f(\bar{x})^T d + \frac{o(t)}{t} < 0.$$

Passando o limite quando $t \rightarrow 0$ temos $\nabla f(\bar{x})^T d \leq 0$.

No segundo item, aplicamos a série de Taylor em $f(\bar{x} + td) - f(\bar{x})$ obtendo

$$f(\bar{x} + td) - f(\bar{x}) = t\nabla f(\bar{x})^T d + o(t).$$

Como $t \neq 0$ temos que

$$f(\bar{x} + td) - f(\bar{x}) = t \left(\nabla f(\bar{x})^T d + \frac{o(t)}{t} \right). \quad (3.2)$$

Por hipótese $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$. Com isso,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\nabla f(\bar{x})^T d + \frac{o(t)}{t} \right) = \nabla f(\bar{x})^T d < 0.$$

Pelo Teorema da Preservação do Sinal 1.42, existe $\delta > 0$ tal que

$$\nabla f(\bar{x})^T d + \frac{o(t)}{t} < 0, \quad \text{no intervalo } (0, \delta].$$

Logo temos

$$t \left(\nabla f(\bar{x})^T d + \frac{o(t)}{t} \right) < 0$$

Conseqüentemente, pela Equação (3.2), temos $f(\bar{x} + td) < f(\bar{x})$ para todo $t \in (0, \delta]$, completando a demonstração. \square

A Figura 3.2 ilustra uma situação em que d é uma direção de descida. Podemos notar na figura que d forma ângulo obtuso com $\nabla f(x)$, isto é, $\nabla f(x)^T d < 0$.

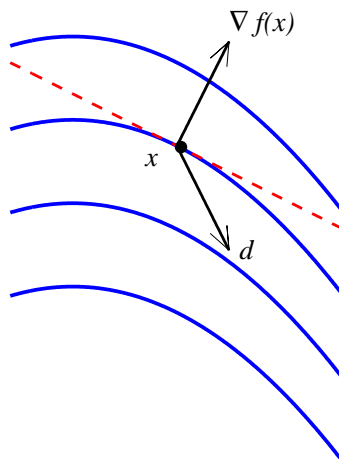


Figura 3.2: d é uma direção de descida.

O fato mais importante deste lema é que se $\nabla f(\bar{x})^T d < 0$ para uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, então d é uma direção de descida e o conjunto contendo as direções com esta propriedade é definido por

$$F_0(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla f(\bar{x})^T d < 0\}. \quad (3.3)$$

Note que, quando $\nabla f(\bar{x})^T d = 0$, não temos certeza sobre o comportamento de f quando avançamos \bar{x} ao longo da direção d .

Pelo Lema 3.7, vemos facilmente que $F_0(\bar{x}) \subseteq F(\bar{x})$. No entanto a igualdade vale somente se a função f é pseudo-convexa, ver [4].

3.1.3 O cone viável linearizado

Da mesma forma que apresentamos uma melhor descrição algébrica para o conjunto das direções de descida, faremos o mesmo para o conjunto viável em torno de um ponto dado. Essa caracterização será em função da linearização desse conjunto. No que segue, indicaremos por $\nabla h(\bar{x})$ a transposta da jacobiana de h no ponto \bar{x} .

Definição 3.8 Dado um ponto $\bar{x} \in \Omega$ e o conjunto $A(\bar{x})$, definimos o cone viável linearizado de Ω a partir de \bar{x} , denotado por $D(\bar{x})$, como

$$D(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla h(\bar{x})^T d = 0 \quad e \quad \nabla g_j(\bar{x})^T d \leq 0, \forall j \in A(\bar{x})\}. \quad (3.4)$$

Segue da definição que $d \in D(\bar{x})$, se e somente se, d é tangente às restrições de igualdade (ângulo reto com os gradientes) e d faz ângulo reto ou obtuso com os gradientes das restrições de desigualdade ativas.

Claramente $D(\bar{x})$ é um cone não vazio, pois $0 \in D(\bar{x})$. Além disso, é fácil ver que $D(\bar{x})$ é trivialmente convexo e fechado. Podemos também referir a ele como cone de direções viáveis de 1ª ordem ou cone determinado pela linearização das restrições.

Para exemplificar, veja na Figura 3.3 a representação geométrica do conjunto viável

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^2 - 2x - y \leq 0, \quad e^x - 1 - y \leq 0\}$$

e do cone viável linearizado.

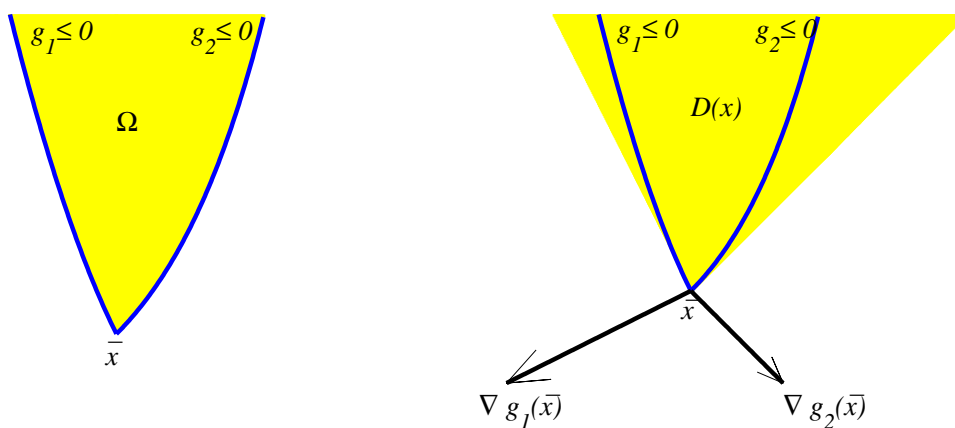


Figura 3.3: O conjunto viável e o cone viável linearizado transladado.

Agora, considere $\bar{x} \in \Omega$ e o conjunto definido por

$$G(\bar{x}) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) \mid \mu_j \geq 0, \forall j \in A(\bar{x}) \right\}. \quad (3.5)$$

Veremos mais adiante que existe uma relação entre $D(\bar{x})$ e o conjunto $G(\bar{x})$. Inicialmente, estudaremos algumas propriedades desse conjunto.

Lema 3.9 *Seja $G(\bar{x})$ definido pela Equação (3.5). Então $G(\bar{x})$ é um cone convexo fechado.*

Prova. Vamos provar inicialmente que $G(\bar{x})$ é um cone.

Considere $s \in G(\bar{x})$ e $t \geq 0$ então temos:

$$ts = \sum_{i=1}^m t\lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j \in A(\bar{x})} t\mu_j \nabla g_j(\bar{x}).$$

Como $t\mu_j \geq 0$ temos $ts \in G(\bar{x})$.

Mostremos agora que $G(\bar{x})$ é convexo.

Considere

$$s_1 = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) \quad \text{com } \mu_j \geq 0,$$

$$s_2 = \sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j \in A(\bar{x})} \beta_j \nabla g_j(\bar{x}) \quad \text{com } \beta_j \geq 0$$

e $t \in [0, 1]$. Observe que s_1 e $s_2 \in G(\bar{x})$.

Temos

$$ts_1 + (1-t)s_2 = \sum_{i=1}^m (t\lambda_i + (1-t)\alpha_i) \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j \in A(\bar{x})} (t\mu_j + (1-t)\beta_j) \nabla g_j(\bar{x}).$$

Como $t\mu_j + (1-t)\beta_j \geq 0$, concluímos que $ts_1 + (1-t)s_2 \in G(\bar{x})$.

E finalmente vamos mostrar que $G(\bar{x})$ é fechado. Para isso basta mostrar que, se $(s^k) \subset G(\bar{x})$ é uma seqüência de vetores satisfazendo $s^k \rightarrow s^*$, então $s^* \in G(\bar{x})$.

Considere sem perda de generalidade $A(\bar{x}) = \{1, \dots, q\}$ e

$$\phi_i(x) = \begin{cases} h_i(x), & i = 1, \dots, m \\ g_{i-m}(x), & i = m+1, \dots, m+q \end{cases}. \quad (3.6)$$

Com isso podemos reescrever $G(\bar{x})$ como

$$G(\bar{x}) = \left\{ \sum_{i=1}^{m+q} \gamma_i \nabla \phi_i(\bar{x}) \mid \gamma_i \geq 0, \forall i = m+1, \dots, m+q \right\}.$$

Assim, para matrizes B e C definidas apropriadamente, temos

$$G(\bar{x}) = \{B\gamma, C\gamma \geq 0\}.$$

Em virtude do Lema de Caratheodory 1.52, podemos considerar as colunas de B linearmente independentes, isto é, B tem posto cheio.

Pelo Lema 1.51, a função $\gamma \mapsto B\gamma$ é injetiva, ou seja, para todo s^k existe um único γ_k tal que

$$s^k = B\gamma_k. \quad (3.7)$$

Desta forma temos que

$$\gamma_k = (B^T B)^{-1} B^T s^k.$$

Já que $s^k \in G(\bar{x})$, devemos ter $C\gamma_k \geq 0$. Tendo em vista que $s^k \rightarrow s^*$, obtemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (B^T B)^{-1} B^T s^k = (B^T B)^{-1} B^T s^* \stackrel{\text{def}}{=} \gamma^*$$

Como $C\gamma_k \geq 0$ temos que $C\gamma^* \geq 0$.

Passando o limite em (3.7) obtemos

$$s^* = B\gamma^* \in G(\bar{x}).$$

Portanto $G(\bar{x})$ é fechado. □

Sendo $G(\bar{x})$ um cone convexo fechado, temos pelo Lema de Farkas 2.8 que $P(P(G(\bar{x}))) = G(\bar{x})$. Com isso podemos estabelecer uma relação entre os cones $D(\bar{x})$ e $G(\bar{x})$.

Lema 3.10 *Dado $\bar{x} \in \Omega$, temos que $D(\bar{x}) = P(G(\bar{x}))$.*

Prova. Considere $d \in D(\bar{x})$ e $s \in G(\bar{x})$. Temos que

$$d^T s = \sum_{i=1}^m \lambda_i d^T \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j d^T \nabla g_j(\bar{x}). \quad (3.8)$$

Como $d \in D(\bar{x})$, temos $d^T \nabla h_i(\bar{x}) = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$ e $d^T \nabla g_j(\bar{x}) \leq 0$ para todo $j \in A(\bar{x})$. Como $\mu_j \geq 0$ temos de (3.8) que $d^T s \leq 0$ para todo $s \in G(\bar{x})$.

Pela definição de cone polar, $d \in P(G(\bar{x}))$.

Agora, considere $d \in P(G(\bar{x}))$, isto é,

$$d^T s \leq 0 \quad \forall s \in G(\bar{x}).$$

Em particular, como $\nabla h_i(\bar{x})$ e $-\nabla h_i(\bar{x})$ são elementos de $G(\bar{x})$, para todo $i = 1, \dots, m$, temos $d^T \nabla h_i(\bar{x}) \leq 0$ e $d^T (-\nabla h_i(\bar{x})) \leq 0$. Portanto, $d^T \nabla h_i(\bar{x}) = 0$, para todo $i = 1, \dots, m$. Além disso, como $\nabla g_j(\bar{x}) \in G(\bar{x})$, para todo $j \in A(\bar{x})$, temos $d^T \nabla g_j(\bar{x}) \leq 0$, completando a demonstração. □

Veja na Figura 3.4 uma ilustração da igualdade $D(\bar{x}) = P(G(\bar{x}))$. Note que, quando não há restrições de igualdade, o cone $G(\bar{x})$ é o conjunto de todas as combinações cônicas dos gradientes das restrições de desigualdade ativas. Além disso, $G(\bar{x}) = P(D(\bar{x}))$. De fato, como visto no Lema 3.9, $G(\bar{x})$ é um cone convexo fechado. Assim, basta aplicar o Lema de Farkas 2.8 para encontrar o resultado desejado.

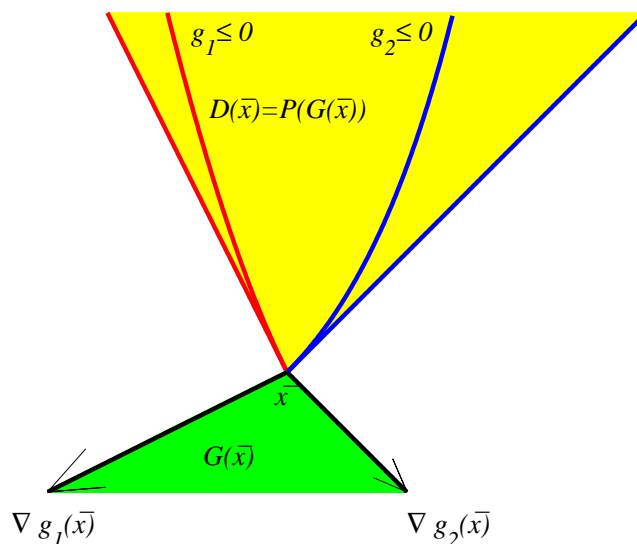


Figura 3.4: $D(\bar{x}) = P(G(\bar{x}))$.

3.1.4 O cone tangente

Nesta seção, concentraremos nossa atenção em um cone muito importante que caracteriza uma melhor aproximação do conjunto viável em torno de um ponto dado. Utilizaremos este cone a fim de se obter uma conexão entre condições de otimalidade e condições de qualificação. Vimos que $V(\bar{x})$, em alguns casos, como na Figura 3.1, não fornece informações interessantes sobre a estrutura local do conjunto Ω próximo de \bar{x} . Introduzimos o cone tangente que fornece informações sobre esta estrutura, mesmo quando não existem direções viáveis diferentes do vetor nulo, ou seja, estudaremos a geometria local de Ω num ponto em termos de direções tangentes.

Definição 3.11 Uma direção $d \in \mathbb{R}^n$ é tangente a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a partir de $\bar{x} \in \Omega$, se e somente se, existe uma seqüência de pontos viáveis $(x^k) \in \Omega$ tal que $x^k \rightarrow \bar{x}$ e

$$\frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} \rightarrow \frac{d}{\|d\|}. \tag{3.9}$$

Podemos ver que d é um vetor tangente a Ω em \bar{x} , se existe uma seqüência (x^k) de pontos de Ω convergindo para \bar{x} tal que $x^k - \bar{x}$ normalizado converge para d normalizado. Note que se d satisfaz (3.9), então αd também satisfaz, para todo $\alpha > 0$. Segue que o conjunto formado pelos vetores tangentes a Ω em \bar{x} e pela origem é um cone, chamado de cone tangente de Ω no ponto \bar{x} e denotado por $T(\bar{x})$. Diferentes definições de direções tangentes têm sido abordadas através dos anos, [35]. O cone tangente que nos interessa foi primeiro considerado por Bouligand [7], que o chamou de *contigent cone*. Apresentaremos três versões equivalentes desse cone.

Pela definição de direção tangente, podemos escrever o cone tangente como

$$T(\bar{x}) = \{0\} \cup \left\{ d \in \mathbb{R}^n \text{ com } d \neq 0 \mid \exists (x^k) \subset \Omega, x^k \rightarrow \bar{x} \text{ tal que } \frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} \rightarrow \frac{d}{\|d\|} \right\}. \quad (3.10)$$

Ao contrário do cone viável linearizado, o cone tangente não é necessariamente convexo. A Figura 3.5 ilustra como as direções tangentes se comportam no ponto \bar{x} . No sentido intuitivo, dizemos que d “penetra” em Ω ou o “tangencia”.

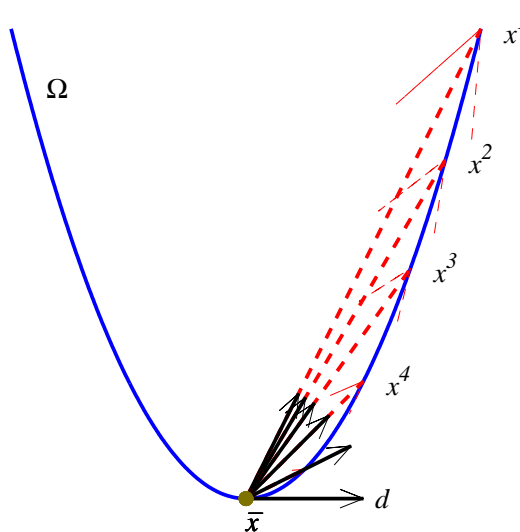


Figura 3.5: Comportamento das direções tangentes.

Teorema 3.12 *Uma direção d é tangente a $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a partir de \bar{x} se, e somente se, existem uma seqüência (x^k) em Ω e uma seqüência $\lambda_k > 0$ com $\lambda_k \rightarrow 0$ tais que $\|x^k - (\bar{x} + \lambda_k d)\| = o(\lambda_k)$.*

Prova. Suponha d uma direção tangente. Sem perda de generalidade tome $\|d\| = 1$. Logo, existe uma seqüência viável (x^k) com

$$\frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} \rightarrow d.$$

Tome agora $\lambda_k = \|x^k - \bar{x}\|$. Com isso $\lambda_k > 0$ e como (x^k) é uma seqüência viável, $x^k \rightarrow \bar{x}$, então $\lambda_k \rightarrow 0$. Logo temos

$$\frac{x^k - \bar{x}}{\lambda_k} - d \rightarrow 0.$$

Segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^k - (\bar{x} + \lambda_k d)}{\lambda_k} = 0,$$

ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^k - (\bar{x} + \lambda_k d)\|}{\lambda_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^k - (\bar{x} + \lambda_k d)\|}{|\lambda_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\| \frac{x^k - (\bar{x} + \lambda_k d)}{\lambda_k} \right\| = 0.$$

Portanto $x^k - (\bar{x} + \lambda_k d)$ tende a zero mais rápido que λ_k , isto é:

$$\|x^k - (\bar{x} + \lambda_k d)\| = o(\lambda_k).$$

Para provar a recíproca, devemos mostrar que d é direção tangente.

Por hipótese $(x^k) \subset \Omega$, com isso x^k é viável para k suficientemente grande.

Para provar que $x^k \rightarrow \bar{x}$, temos que

$$0 \leq \|x^k - \bar{x}\| \leq \|x^k - \bar{x} - \lambda_k d + \lambda_k d\| \leq \|x^k - (\bar{x} + \lambda_k d)\| + \|\lambda_k d\|. \quad (3.11)$$

Vemos facilmente pela hipótese que $\|x^k - (\bar{x} + \lambda_k d)\| \rightarrow 0$ e $\|\lambda_k d\| \rightarrow 0$. Com isso, por (3.11)

$$\|x^k - \bar{x}\| \rightarrow 0$$

e portanto $x^k \rightarrow \bar{x}$.

Para provar que $x^k \neq \bar{x}$ temos por hipótese que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^k - (\bar{x} + \lambda_k d)}{\lambda_k} = 0.$$

Segue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^k - \bar{x}}{\lambda_k} = d, \quad (3.12)$$

com isso

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^k - \bar{x}\|}{\lambda_k} = \|d\| = 1 \quad (3.13)$$

Agora, suponha por absurdo que existe $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, infinito tal que $x^k = \bar{x}$ para todo $k \in \mathbb{N}'$. Para $k \in \mathbb{N}'$ temos

$$\alpha_k = \frac{\|x^k - \bar{x}\|}{\lambda_k} = \frac{0}{\lambda_k} = 0.$$

Mas por (3.13) temos

$$\alpha_k \xrightarrow{\mathbb{N}} 1 \Rightarrow \alpha_k \xrightarrow{\mathbb{N}'} 1,$$

o que é um absurdo, pois $\alpha_k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}'$. Com isso, não existe \mathbb{N}' infinito satisfazendo $x^k = \bar{x}$ e portanto, existe $k_0 > 0$, tal que $x^k \neq \bar{x}$ para todo $k > k_0$.

Já que $x^k \neq \bar{x}$ e $\lambda_k \neq 0$, podemos dividir a Equação (3.12) pela (3.13), obtendo

$$\frac{x^k - \bar{x}}{\lambda_k} \frac{\lambda_k}{\|x^k - \bar{x}\|} \rightarrow \frac{d}{\|d\|}.$$

Logo $\frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} \rightarrow d$, completando a demonstração. □

Essa equivalência que acabamos de mostrar pode ser vista claramente na Figura 3.6. Na figura, $\|d\| = 1$ e, portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$ a distância entre os pontos \bar{x} e $\bar{x} + \lambda_k d$ é igual a λ_k . Observe que d é tangente a Ω em \bar{x} , se existe uma seqüência

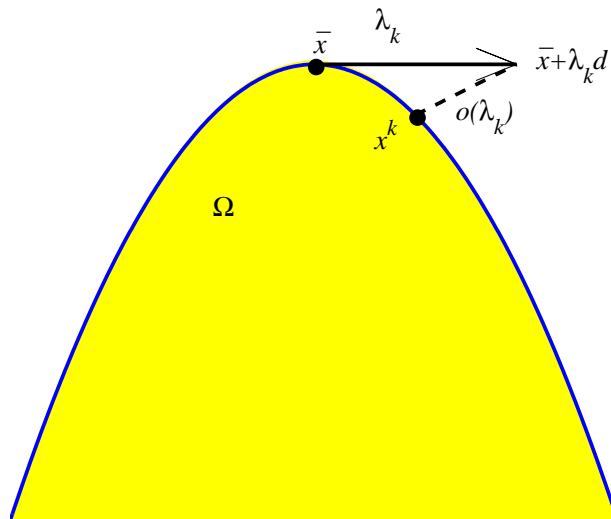


Figura 3.6: Ilustração do Teorema 3.12

$(\lambda_k) \subset \mathbb{R}^+$ com $\lambda_k \rightarrow 0_+$ tal que

$$\text{dist}(\bar{x} + \lambda_k d, \Omega) = \inf_{y \in \Omega} \|y - (\bar{x} + \lambda_k d)\| = o(\lambda_k),$$

isto é, quando $\lambda_k \rightarrow 0$ temos $\text{dist}(\bar{x} + \lambda_k d, \Omega)$ é de ordem menor que λ_k , o comprimento do passo na direção d a partir de \bar{x} .

Teorema 3.13 *Considere*

$$A = \left\{ d \in \mathbb{R}^n \left| \begin{array}{l} \exists (t_k) \subset \mathbb{R}_+, (t_k) \rightarrow 0_+, \\ \exists (d^k) \subset \mathbb{R}^n, (d^k) \rightarrow d, \text{ tais que} \\ \bar{x} + t_k d^k \in \Omega \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \end{array} \right. \right\}. \quad (3.14)$$

Então $A = T(\bar{x})$, onde $T(\bar{x})$ foi definido em (3.10).

Prova. Considere $d \neq 0 \in A$. Fazendo

$$x^k = \bar{x} + t_k d^k \in \Omega,$$

visto que $t_k d^k \rightarrow 0$, temos $x^k \rightarrow \bar{x}$, ou seja, existe $(x^k) \subset \Omega$ com $x^k \rightarrow \bar{x}$ que juntamente com $x^k \neq \bar{x}$, vemos que x^k é viável.

Segue que

$$\frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} = \frac{t_k d^k}{\|t_k d^k\|} = \frac{d^k}{\|d^k\|}.$$

Mas por hipótese $d^k \rightarrow d$, isto nos diz que

$$\frac{d^k}{\|d^k\|} \rightarrow \frac{d}{\|d\|}.$$

Portanto

$$\frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} \rightarrow \frac{d}{\|d\|}.$$

Logo $d \in T(\bar{x})$.

Por outro lado, considere $d \in T(\bar{x})$ e tome

$$t_k = \frac{\|x^k - \bar{x}\|}{\|d\|}.$$

Vemos facilmente que $t_k > 0$ e $t_k \rightarrow 0$.

Temos que

$$\bar{x} + t_k \frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} \|d\| = x^k$$

pertencente a Ω . Logo tomando

$$d^k = \frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} \|d\|$$

e por hipótese

$$\frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} \rightarrow \frac{d}{\|d\|}$$

concluimos que $d^k \rightarrow d$.

Para o caso em que $d = 0$, basta tomar $t_k = \frac{1}{k}$ e $d^k = 0$. Assim

$$\bar{x} + t_k d^k = \bar{x} + \frac{1}{k} 0 = \bar{x} \quad \text{pertencente a } \Omega.$$

Com isso $d \in A$.

Portanto $T(\bar{x}) = A$, completando a prova. \square

Lema 3.14 *Considere $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\bar{x} \in \Omega$. Então $T(\bar{x})$ é um conjunto fechado.*

Prova. Considere $(d^k) \subset T(\bar{x})$, com $d^k \rightarrow d$. Temos que verificar que $d \in T(\bar{x})$. Caso $d = 0$, temos imediatamente $d \in T(\bar{x})$. Suponha então $d \neq 0$. Neste caso podemos supor sem perda de generalidade que, $d^k \neq 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pois $d^k \rightarrow d$. Fixado $k \in \mathbb{N}$, temos $d^k \in T(\bar{x})$. Portanto, existe $(x^{k,j})_{j \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ tal que

$$x^{k,j} \xrightarrow{j} \bar{x} \quad \text{e} \quad q^{k,j} = \frac{x^{k,j} - \bar{x}}{\|x^{k,j} - \bar{x}\|} \xrightarrow{j} \frac{d^k}{\|d^k\|}.$$

Assim, para $\varepsilon = \frac{1}{k}$, existe $j_k \in \mathbb{N}$ tal que se $j \geq j_k$, então

$$\|x^{k,j} - \bar{x}\| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \left| q^{k,j} - \frac{d^k}{\|d^k\|} \right| < \frac{1}{k}.$$

Em particular, para $j = j_k$, temos

$$\|x^k - \bar{x}\| < \frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \left| q^k - \frac{d^k}{\|d^k\|} \right| < \frac{1}{k},$$

onde $x^k = x^{k,j_k}$ e $q^k = q^{k,j_k}$. Tomando o limite quando $k \rightarrow \infty$, obtemos $x^k \rightarrow \bar{x}$ e

$$\left| q^k - \frac{d}{\|d\|} \right| \leq \left| q^k - \frac{d^k}{\|d^k\|} \right| + \left| \frac{d^k}{\|d^k\|} - \frac{d}{\|d\|} \right| \rightarrow 0.$$

Logo $\frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} = q^k \rightarrow \frac{d}{\|d\|}$, o implica $d \in T(\bar{x})$. \square

Na Seção 3.2 deste capítulo mostraremos uma condição necessária de otimalidade envolvendo o cone tangente.

3.1.5 Relações entre o cone viável linearizado e o cone tangente

Até agora, estudamos algumas definições e resultados referentes a cone tangente e cone viável linearizado, cada um com suas características. Obviamente existem diferenças entre eles, mesmo sendo aproximações do conjunto viável. Mostraremos que qualquer direção d pertencente ao cone tangente, também pertence ao cone viável linearizado.

Lema 3.15 *Considere $\bar{x} \in \Omega$. Então $T(\bar{x}) \subset D(\bar{x})$.*

Prova. Considere $d \in T(\bar{x})$, $d \neq 0$. Logo pela Definição 3.11 existe uma seqüência viável (x^k) tal que $x^k \neq \bar{x}$, $x^k \rightarrow \bar{x}$ e $\frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} \rightarrow \frac{d}{\|d\|}$.

A expansão de Taylor em torno de \bar{x} fornece

$$0 = h(x^k) = h(\bar{x}) + \nabla h(\bar{x})^T(x^k - \bar{x}) + o(\|x^k - \bar{x}\|).$$

Já que $x^k \neq \bar{x}$, podemos dividir esta expressão por $\|x^k - \bar{x}\|$ e sabendo que $h(\bar{x}) = 0$ temos:

$$\nabla h(\bar{x})^T \frac{(x^k - \bar{x})}{\|x^k - \bar{x}\|} + \frac{o(\|x^k - \bar{x}\|)}{\|x^k - \bar{x}\|} = 0.$$

Passando o limite quando $k \rightarrow \infty$, obtém-se

$$\nabla h(\bar{x})^T \frac{d}{\|d\|} = 0. \tag{3.15}$$

Novamente usando Taylor em torno de \bar{x} temos para $i \in A(\bar{x})$,

$$g_i(\bar{x}) + \nabla g_i(\bar{x})^T(x^k - \bar{x}) + o(\|x^k - \bar{x}\|) \leq 0.$$

Dividindo por $\|x^k - \bar{x}\|$ e sabendo que $g_i(\bar{x}) = 0$ (restrição ativa) temos:

$$\nabla g_i(\bar{x})^T \frac{(x^k - \bar{x})}{\|x^k - \bar{x}\|} + \frac{o(\|x^k - \bar{x}\|)}{\|x^k - \bar{x}\|} \leq 0.$$

Passando o limite com $k \rightarrow \infty$, obtém-se

$$\nabla g_i(\bar{x})^T \frac{d}{\|d\|} \leq 0,$$

que junto com (3.15) fornece $d \in D(\bar{x})$. □

Podemos ver na Figura 3.7 que $T(\bar{x}) = \{(d_1, 0) \mid d_1 \geq 0\}$ e $D(\bar{x}) = \{(d_1, 0) \mid d_1 \in \mathbb{R}\}$. Assim, $T(\bar{x}) \subset D(\bar{x})$. No entanto $T(\bar{x}) \neq D(\bar{x})$.

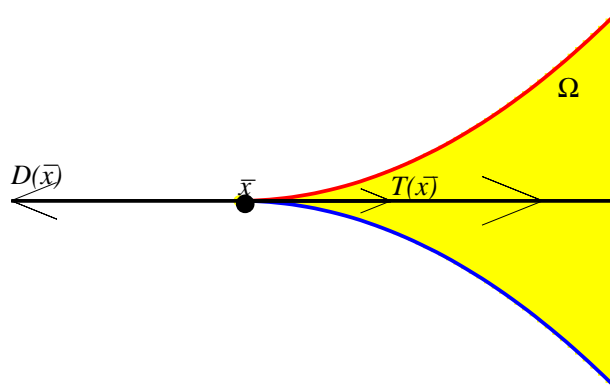


Figura 3.7: Ilustração do Lema 3.15

Pelos Lemas 2.3 e 3.15, temos que $P(D(\bar{x})) \subset P(T(\bar{x}))$. No próximo exemplo mostramos que a igualdade $P(T(\bar{x})) = P(D(\bar{x}))$ pode não ocorrer. Quando $P(T(\bar{x})) = P(D(\bar{x}))$ e $T(\bar{x})$ é convexo, o Lema de Farkas 2.8 garante que $T(\bar{x}) = D(\bar{x})$.

Exemplo 1 Considere as funções $h_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$\begin{aligned} h_1(x) &= x_1 x_2 \\ g_1(x) &= -x_1 - x_2, \end{aligned}$$

o conjunto $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h_1(x) = 0, g_1(x) \leq 0\}$ e o ponto $\bar{x} = (0, 0)^T$.

Note que

$$\nabla h_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla g_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Temos que $P(T(\bar{x})) \neq P(D(\bar{x}))$, pois

$$T(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^2 \mid d_1 \geq 0, d_2 \geq 0, d_1 d_2 = 0\},$$

$$D(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^2 \mid -d_1 - d_2 \leq 0\},$$

$$P(T(\bar{x})) = \{d \in \mathbb{R}^2 \mid d_1 \leq 0, d_2 \leq 0\}$$

e

$$P(D(\bar{x})) = \{d \in \mathbb{R}^2 \mid d_1 \leq 0, d_2 \leq 0, d_1 = d_2\}.$$

Este exemplo é ilustrado na Figura 3.8.

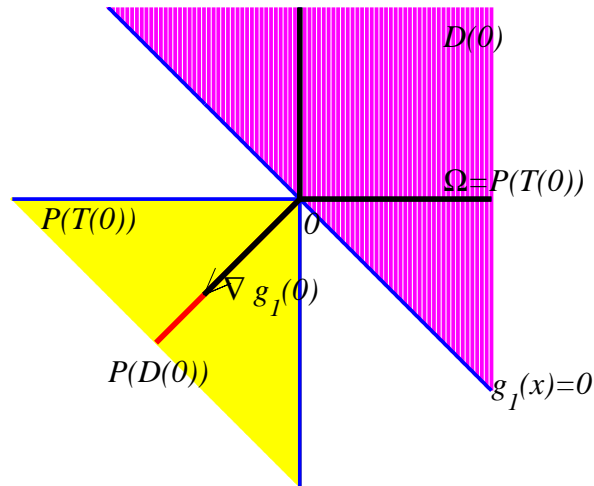


Figura 3.8: $P(T(\bar{x})) \neq P(D(\bar{x}))$.

Queremos obter condições para que $P(T(x^*)) = P(D(x^*))$ e relacionar esses cones com condições necessárias de otimalidade e condições de qualificação. Na próxima seção, iremos supor que num minimizador x^* do Problema 3.1, $P(T(x^*)) = P(D(x^*))$ e desenvolver as condições de otimalidade de KKT.

3.2 Condições de otimalidade

Nesta seção, estudamos as condições que devem ser satisfeitas quando um $x^* \in \mathbb{R}^n$ dado é minimizador local do Problema

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) \\ &\text{sujeito a} && h(x) = 0 \\ &&& g(x) \leq 0 \end{aligned}$$

Essas condições são chamadas condições necessárias de otimalidade.

Recorde que $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$, com $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

3.2.1 Problema irrestrito

Inicialmente, veremos uma condição necessária de otimalidade para um problema irrestrito, isto é, quando $\Omega = \mathbb{R}^n$.

Teorema 3.16 *Se x^* é um minimizador local de um problema irrestrito, então*

$$\nabla f(x^*) = 0.$$

Prova. Considere $d \in \mathbb{R}^n$ arbitrário. Pela definição de minimizador local, existe uma bola $B(x^*, \varepsilon)$ tal que

$$f(x^*) \leq f(x^* + \lambda d) \quad \forall \lambda \in [0, \varepsilon]. \quad (3.16)$$

Como f é diferenciável, pela expansão de Taylor,

$$f(x^* + \lambda d) = f(x^*) + \lambda \nabla f(x^*)^T d + o(\lambda).$$

Dividindo a expressão por $\lambda > 0$, e usando 3.16, temos

$$0 \leq \nabla f(x^*)^T d + \frac{o(\lambda)}{\lambda}.$$

Passando o limite quando $\lambda \rightarrow 0$, obtemos $\nabla f(x^*)^T d \geq 0$. Como d é tomado arbitrário, podemos escolher $d = -\nabla f(x^*)$, assim $\nabla f(x^*)^T d = -\|\nabla f(x^*)\| \geq 0$. Logo $\nabla f(x^*) = 0$. \square

Perceba que necessitamos apenas do cálculo das derivadas de f para verificar esta condição de otimalidade.

Nas seções seguintes, veremos condições de otimalidade para o problema geral do ponto de vista geométrico e condições que também necessitam do cálculo das derivadas de f e das derivadas das restrições.

3.2.2 Ponto de vista geométrico

Nesta seção, nossa linha de análise será baseada em direções viáveis, de descida e tangentes.

O próximo teorema diz que não podemos dar um passo numa direção de descida a partir de um minimizador local e permanecer no conjunto viável.

Recorde que o conjunto $F_0(\bar{x})$ foi definido em (3.3) e o conjunto de todas as direções viáveis em relação ao conjunto Ω no ponto \bar{x} foi denotado por $V(\bar{x})$.

Teorema 3.17 *Se x^* é um minimizador local de f no Problema (3.1), então $F_0(x^*) \cap V(x^*) = \emptyset$.*

Prova. Por contradição, suponha que exista um vetor $d \in F_0(x^*) \cap V(x^*)$. Então, pelo segundo item do Lema 3.7, existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$f(x^* + td) < f(x^*), \quad \forall t \in (0, \delta_1]. \quad (3.17)$$

Além disso, pela Definição 3.5, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$x^* + td \in \Omega, \quad \forall t \in [0, \delta_2]. \quad (3.18)$$

Ora, se d satisfaz (3.17), significa que pontos próximos de x^* ao longo de d , ou seja, $x^* + td$, devem ter o valor da função objetivo diminuída, e já que x^* é minimizador local, estes pontos devem ser inviáveis, portanto não satisfazem (3.18). Logo não existe $d \in F_0(x^*) \cap V(x^*)$. Portanto $F_0(x^*) \cap V(x^*) = \emptyset$. \square

Note que todo $d \in V(x^*)$ é uma direção de subida. No entanto já vimos que $V(x^*)$ pode não fornecer informações interessantes sobre a estrutura local do conjunto Ω próximo de x^* . O próximo teorema afirma que num minimizador local x^* , toda direção tangente é uma direção de subida, isto é, $F_0(x^*) \cap T(x^*) = \emptyset$.

Teorema 3.18 *Se x^* é um minimizador local do Problema (3.1), então*

$$\nabla f(x^*)^T d \geq 0, \quad \forall d \in T(x^*). \quad (3.19)$$

Prova. Sem perda de generalidade tome $\|d\| = 1$. Temos que se x^* é um minimizador local de f em Ω e d é direção tangente, então existe $(x^k) \subset \Omega$, tal que $x^k \rightarrow x^*$ e

$$\frac{x^k - x^*}{\|x^k - x^*\|} \rightarrow d.$$

Para k suficientemente grande, temos

$$f(x^k) \geq f(x^*).$$

Aplicando a série de Taylor, temos:

$$f(x^*) + \nabla f(x^*)^T (x^k - x^*) + o(\|x^k - x^*\|) - f(x^*) \geq 0,$$

obtendo assim,

$$\nabla f(x^*)^T \frac{x^k - x^*}{\|x^k - x^*\|} + \frac{o(\|x^k - x^*\|)}{\|x^k - x^*\|} \geq 0. \quad (3.20)$$

Como

$$\frac{x^k - x^*}{\|x^k - x^*\|} \rightarrow d \quad \text{e} \quad x^k \rightarrow x^*,$$

basta aplicar o limite quando $k \rightarrow \infty$ em (3.20) para obter $\nabla f(x^*)^T d \geq 0$. \square

Veja na Figura 3.9 que $-\nabla f(x^*)$ forma ângulo obtuso ou reto com qualquer direção $d \in T(x^*)$.

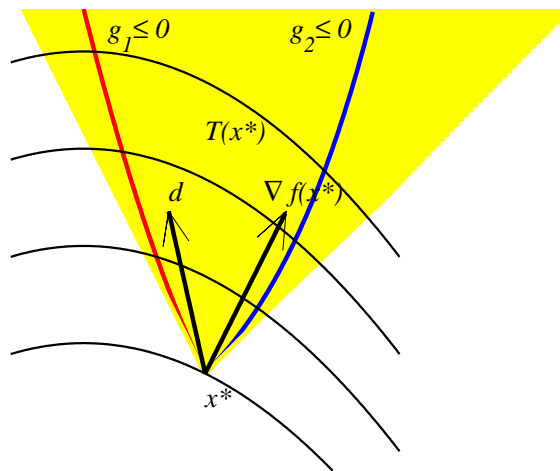


Figura 3.9: d é uma direção de subida.

3.2.3 Condições de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker

Em última análise, gostaríamos de condições necessárias de otimalidade que não se limitassem à estrutura geométrica. O exemplo mais clássico é o da minimização irrestrita como apresentado no Teorema 3.16.

Nesta seção veremos uma condição de otimalidade clássica e importantíssima em otimização, que permite relacionar a função objetivo com as restrições, conhecida por condição de Karush-Kuhn-Tucker (KKT). Enunciaremos o teorema com uma hipótese fraca mas difícil de ser verificada. Tal hipótese, dita condição de qualificação, será discutida em detalhes no capítulo seguinte.

Teorema 3.19 (Condições de KKT) *Considere $x^* \in \Omega$ um minimizador local do Problema (3.1). Se $P(T(x^*)) = P(D(x^*))$, então existem $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ e $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ tais que:*

$$\begin{aligned} -\nabla f(x^*) &= \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla g_j(x^*), \\ \mu_j^* &\geq 0, \quad j = 1, \dots, p, \\ \mu_j^* g_j(x^*) &= 0, \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned}$$

Prova. Considere x^* um minimizador local do Problema (3.1). Pelo Teorema 3.18

$$-\nabla f(x^*)^T d \leq 0$$

para todo $d \in T(x^*)$. Pela definição de cone polar e pela hipótese, temos

$$-\nabla f(x^*) \in P(T(x^*)) = P(D(x^*)).$$

Sabemos do Lema 3.10 que $D(x^*) = P(G(x^*))$, assim

$$-\nabla f(x^*) \in P(P(G(x^*))).$$

Pelo Lema 3.9 sabemos que $G(x^*)$ é um cone convexo fechado. Então pelo Lema de Farkas 2.8 obtemos

$$-\nabla f(x^*) \in G(x^*),$$

ou seja, existe λ_i com $i = 1, \dots, m$ e μ_j com $j \in A(x^*)$, tal que

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(x^*) + \sum_{j \in A(x^*)} \mu_j \nabla g_j(x^*)$$

com $\mu_j \geq 0$ para todo $j \in A(x^*)$. Como $\text{card}(A(x^*)) \leq p$, para encontrar λ^* e μ^* basta completar o vetor μ^* com zeros tanto quantos forem necessários, isto é, basta definir $\lambda_i^* = \lambda_i$ para todo $i = 1, \dots, m$ e

$$\mu_j^* = \begin{cases} \mu_j & \forall i \in A(x^*) \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, completamos a prova. □

Uma interpretação geométrica das condições KKT consiste em dizer que o oposto do gradiente da função objetivo é representado como uma combinação linear dos

gradientes das restrições de igualdade somada com uma combinação linear com coeficientes não-negativos dos gradientes das restrições de desigualdade ativas no ponto x^* .

Observe que o teorema tem por hipótese $P(T(x^*)) = P(D(x^*))$. Esta hipótese é na realidade uma condição de qualificação, introduzida em 1969 por Monique Guignard [14] para dimensão infinita e reformulada para dimensão finita por Gould e Tolle [13]. No próximo capítulo estudaremos outras condições de qualificação que implicam $P(T(x^*)) = P(D(x^*))$.

O Teorema 3.19 havia sido enunciado com a hipótese de que $T(x^*) = D(x^*)$, que foi enfraquecida para $P(T(x^*)) = P(D(x^*))$ por sugestão do Professor Roberto Andreani, um dos membros da banca desta dissertação. Cabe ressaltar que a condição de Guignard, $P(T(x^*)) = P(D(x^*))$, é a condição de qualificação mais fraca possível, como provado por Gould e Tolle em 1971, ver [13]. A condição de qualificação $T(x^*) = D(x^*)$ é conhecida na literatura por quase-regularidade ou condição de Abadie, ver [1, 4, 5, 6, 10, 18, 20].

Vimos no Teorema 3.18 que

$$F_0(x^*) \cap T(x^*) = \emptyset \tag{3.21}$$

é uma condição de otimalidade. Se utilizarmos a condição de qualificação $T(x^*) = D(x^*)$ em (3.21) obtemos

$$F_0(x^*) \cap D(x^*) = \emptyset$$

como uma outra condição de otimalidade que é equivalente as condições de otimalidade de KKT, como será visto no próximo teorema.

Teorema 3.20 *Seja x^* um minimizador local do Problema 3.1. Então existem multiplicadores de Lagrange $\lambda^* \in \mathbb{R}^m$ e $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ satisfazendo*

$$-\nabla f(x^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla g_j(x^*),$$

$$\mu_j^* \geq 0, \quad j = 1, \dots, p,$$

$$\mu_j^* = 0, \quad j \notin A(x^*)$$

se e somente se $F_0(x^*) \cap D(x^*) = \emptyset$.

Prova. Como ferramenta, lembremos que o cone $G(\bar{x})$ é definido como

$$G(\bar{x}) = \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) \mid \mu_j \geq 0 \forall j \in A(\bar{x}) \right\}.$$

Inicialmente, vamos mostrar que se $-\nabla f(x^*) \notin G(x^*)$, então existe $d \in D(x^*)$ para o qual $\nabla f(x^*)^T d < 0$. Como $G(x^*)$ é convexo e fechado, o Lema 1.73 garante que existe $\hat{s} \in G(x^*)$ que é mais próximo de $-\nabla f(x^*)$. Assim, \hat{s} resolve o problema

$$\min_{s \in G(x^*)} \|s + \nabla f(x^*)\|^2 \quad (3.22)$$

Visto que $\hat{s} \in G(x^*)$, temos $t\hat{s} \in G(x^*)$ para todo $t \geq 0$. Logo $t = 1$ é solução do problema

$$\min_{t \geq 0} \|t\hat{s} + \nabla f(x^*)\|^2,$$

isto é

$$\left. \frac{d}{dt} \|t\hat{s} + \nabla f(x^*)\|^2 \right|_{t=1} = 0.$$

Com isso

$$2t\hat{s}^T \hat{s} + 2\hat{s}^T \nabla f(x^*) \Big|_{t=1} = 0.$$

Desta forma

$$\hat{s}^T (\hat{s} + \nabla f(x^*)) = 0 \quad (3.23)$$

Agora, seja s qualquer outro vetor em $G(x^*)$. Como $G(x^*)$ é convexo, temos:

$$\theta s + (1 - \theta)\hat{s} \in G(x^*) \quad \text{para todo } \theta \in [0, 1].$$

Já que \hat{s} é um minimizador de (3.22), temos

$$\|\theta s + (1 - \theta)\hat{s} + \nabla f(x^*)\|^2 \geq \|\hat{s} + \nabla f(x^*)\|^2.$$

Assim,

$$\|\hat{s} + \theta(s - \hat{s}) + \nabla f(x^*)\|^2 - \|\hat{s} + \nabla f(x^*)\|^2 \geq 0.$$

Desta forma

$$2(s - \hat{s})^T (\hat{s} + \nabla f(x^*)) + \theta \|s - \hat{s}\|^2 \geq 0.$$

Passando o limite quando $\theta \rightarrow 0^+$, temos

$$(s - \hat{s})^T (\hat{s} + \nabla f(x^*)) \geq 0.$$

Assim

$$s^T(\hat{s} + \nabla f(x^*)) - \hat{s}^T(\hat{s} + \nabla f(x^*)) \geq 0 \quad (3.24)$$

e pela Equação (3.23), vemos que

$$s^T(\hat{s} + \nabla f(x^*)) \geq 0 \quad \text{para todo } s \in G(x^*). \quad (3.25)$$

Tome

$$d = -(\hat{s} + \nabla f(x^*)). \quad (3.26)$$

Observe que $d^T s \leq 0$ para todo $s \in G(x^*)$. Logo pela definição de cone polar e pelo Lema 3.10, $d \in D(x^*)$.

Temos

$$\nabla f(x^*)^T d = (-\hat{s} - d)^T d = -\hat{s}^T d - d^T d = \hat{s}^T(\hat{s} + \nabla f(x^*)) - d^T d. \quad (3.27)$$

Mas por (3.23), $\hat{s}^T(\hat{s} + \nabla f(x^*)) = 0$. Assim

$$\nabla f(x^*)^T d = -d^T d = -\|d\|^2 \leq 0.$$

Como $-\nabla f(x^*) \notin G(x^*)$ e $\hat{s} \in G(x^*)$ temos que $d \neq 0$. Desta forma $\nabla f(x^*)^T d < 0$.

Para mostrar a recíproca, tome $d \in D(x^*)$. Assim,

$$\nabla f(x^*)^T d = \left(-\sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*)^T d - \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla g_j(x^*)^T d \right)$$

com $\mu_j^* \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, p$ e $\mu_j^* = 0$ para $j \notin A(x^*)$. Pela definição de $D(x^*)$ concluímos que $\nabla f(x^*)^T d \geq 0$. Desta forma, $F_0(x^*) \cap D(x^*) = \emptyset$. \square

Não podemos garantir que as condições de otimalidade de KKT sejam verificadas sem exigir uma condição de qualificação. Veremos no exemplo seguinte que nem todo minimizador local é um ponto estacionário (KKT).

Exemplo 2 Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas no problema abaixo e $x^* = (1, 0)^T$ um minimizador local.

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && f(x) = -x_1 \\ &\text{sujeito a} && g_1(x) = x_2 - (1 - x_1)^3 \leq 0 \\ &&& g_2(x) = -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

A região viável é ilustrada na Figura 3.10. Note que

$$\nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla g_2(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Assim a condição

$$\nabla f(x^*) + \mu_1 \nabla g_1(x^*) + \mu_2 \nabla g_2(x^*) = 0$$

não é verdadeira. Portanto as condições KKT não se verificam.

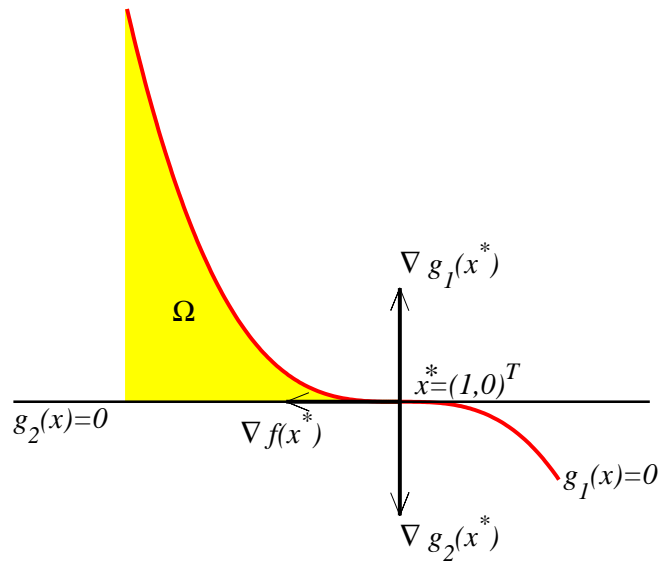
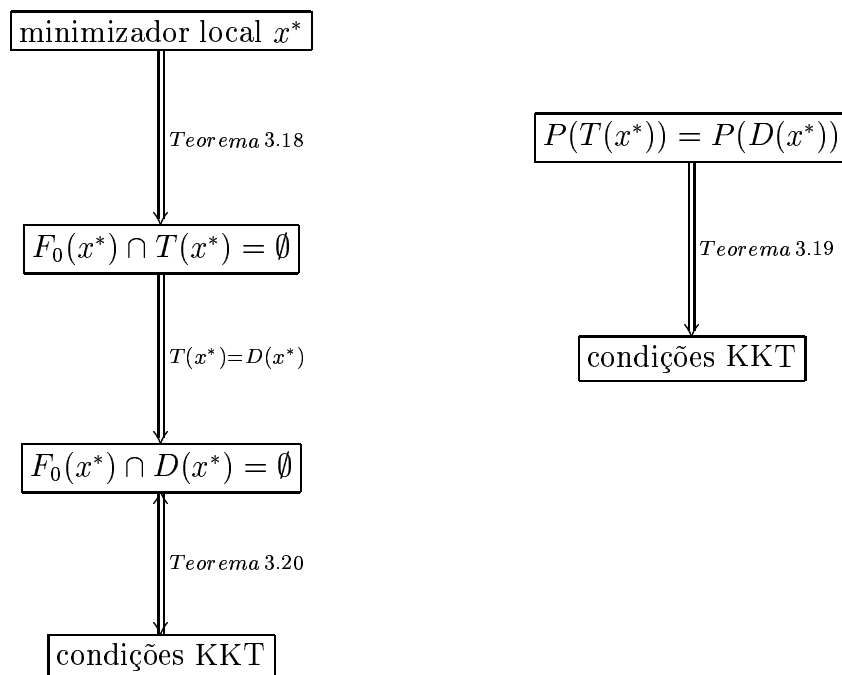


Figura 3.10: Ilustração do Exemplo 2.

A discussão feita até aqui nesta seção, pode ser resumida nos diagramas abaixo.



3.2.4 Condições de otimalidade de Fritz-John

Para concluir, podemos estabelecer condições de otimalidade sem exigir qualquer condição de qualificação. Introduzimos um multiplicador auxiliar não-negativo μ_0^* associado ao gradiente da função objetivo. Condições necessárias que envolvem esse multiplicador são conhecidas como condições de Fritz-John [22], propostas em 1948 e conhecidas como Regra estendida do Multiplicador de Lagrange [5, 15]. Esta condição, além de analisar os gradientes da função objetivo e das restrições, observa o valor numérico das restrições na vizinhança de um minimizador.

Teorema 3.21 (Condições Necessárias de Otimalidade de Fritz-John) *Se x^* é um minimizador do Problema 3.1, então existe escalar μ_0^* e multiplicadores $\lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*$ e μ_1^*, \dots, μ_p^* tais que*

$$(i) \quad \mu_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0. \quad (3.28)$$

$$(ii) \quad \mu_j^* \geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, p.$$

(iii) $\mu_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*, \mu_1^*, \dots, \mu_p^*$ são não todos nulos.

(iv) Em toda vizinhança V de x^* existe um $x \in V$ tal que $\lambda_i^* h_i(x) > 0$ para todo i com $\lambda_i^* \neq 0$ e $\mu_j^* g_j(x) > 0$ para todo j com $\mu_j^* \neq 0$.

Prova. Para esta prova, consideremos a função

$$g_j^+(x) = \max\{0, g_j(x)\}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Pela Proposição 1.34, $(g_j^+(x))^2$ é continuamente diferenciável com gradiente $2g_j^+(x)\nabla g_j(x)$.

Considere também para cada $k \in \mathbb{N}$ o problema penalizado

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & F^k(x) = f(x) + \frac{k}{2} \sum_{i=1}^m (h_i(x))^2 + \frac{k}{2} \sum_{j=1}^p (g_j^+(x))^2 + \frac{1}{2} \|x - x^*\|^2 \\ \text{sujeito a} \quad & x \in S \end{aligned}$$

onde

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x^*\| \leq \varepsilon\}$$

e $\varepsilon > 0$ é tal que $f(x^*) \leq f(x)$ para todo x viável com $x \in S$.

Como F^k é contínua e S é compacto, pelo Teorema de Weierstrass 1.35, F^k possui um minimizador $x^k \in S$. Observe que (x^k) é limitada, pois $(x^k) \subset S$.

Vamos provar que $x^k \rightarrow x^*$.

Temos

$$F^k(x^k) \leq F^k(x), \quad \forall x \in S,$$

e em particular

$$F^k(x^k) \leq F^k(x^*) = f(x^*), \quad \text{pois } x^* \text{ é viável.}$$

Segue que

$$f(x^k) + \frac{k}{2} \left(\sum_{i=1}^m (h_i(x^k))^2 + \sum_{j=1}^p (g_j^+(x^k))^2 \right) + \frac{1}{2} \|x^k - x^*\|^2 \leq f(x^*) \quad (3.29)$$

logo

$$0 \leq \frac{k}{2} (\|h(x^k)\|^2 + \|g^+(x^k)\|^2) \leq f(x^*) - f(x^k) - \frac{1}{2} \|x^k - x^*\|^2. \quad (3.30)$$

Mas $(f(x^k))$ e $(\|x^k - x^*\|^2)$ são limitadas, pois (x^k) está no compacto S . Assim,

$$\|h(x^k)\|^2 + \|g^+(x^k)\|^2 \rightarrow 0.$$

Com isso $h(x^k) \rightarrow 0$ e $g^+(x^k) \rightarrow 0$.

Seja \tilde{x} um valor de aderência de (x^k) e $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, tal que

$$x^k \xrightarrow{\mathbb{N}'} \tilde{x}.$$

Como S é fechado, tem-se $\tilde{x} \in S$. Então

$$h(x^k) \xrightarrow{\mathbb{N}'} h(\tilde{x})$$

e como $h(x^k) \rightarrow 0$ tem-se $h(\tilde{x}) = 0$. De maneira análoga tem-se $g^+(\tilde{x}) = 0$. Portanto \tilde{x} é viável. Vejamos que $\tilde{x} = x^*$. De (3.30) obtemos

$$f(x^k) + \frac{1}{2} \|x^k - x^*\|^2 \leq f(x^*),$$

que aplicando o limite em \mathbb{N}' fornece

$$f(\tilde{x}) + \frac{1}{2} \|\tilde{x} - x^*\|^2 \leq f(x^*).$$

Como x^* é um minimizador, $f(x^*) \leq f(\tilde{x})$. Assim $\|\tilde{x} - x^*\| \leq 0$, logo $\tilde{x} = x^*$ e daí $x^k \xrightarrow{\mathbb{N}'} x^*$. Renomeando a seqüência (x^k) se necessário, podemos supor sem perda de generalidade que $x^k \rightarrow x^*$ e $\|x^k - x^*\| < \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$, isto é, $x^k \in \text{int}(S)$. Portanto

$$\nabla F^k(x^k) = 0.$$

Reescrevendo, temos

$$\nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^m kh_i(x^k)\nabla h_i(x^k) + \sum_{j=1}^p kg_j^+(x^k)\nabla g_j(x^k) + x^k - x^* = 0. \quad (3.31)$$

Defina

$$\xi_i^k = kh_i(x^k) \quad , \quad \zeta_j^k = kg_j^+(x^k) \quad \text{e} \quad \delta^k = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^m (\xi_i^k)^2 + \sum_{j=1}^p (\zeta_j^k)^2}.$$

Dividindo a Equação (3.31) por δ^k , obtemos

$$\mu_0^k \nabla f(x^k) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla h_i(x^k) + \sum_{j=1}^p \mu_j^k \nabla g_j(x^k) + \frac{1}{\delta^k} (x^k - x^*) = 0, \quad (3.32)$$

onde

$$\mu_0^k = \frac{1}{\delta^k}, \quad \lambda_i^k = \frac{\xi_i^k}{\delta^k}, \quad i = 1, \dots, m, \quad \mu_j^k = \frac{\zeta_j^k}{\delta^k}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Pela construção de μ_0^k , λ_i^k e μ_j^k temos

$$(\mu_0^k)^2 + \sum_{i=1}^m (\lambda_i^k)^2 + \sum_{j=1}^p (\mu_j^k)^2 = 1, \quad (3.33)$$

donde segue que a seqüência $(\mu_0^k, \lambda^k, \mu^k)$ é limitada, com isso possui uma subseqüência convergente, digamos

$$(\mu_0^k, \lambda^k, \mu^k) \xrightarrow{\mathbb{N}_1} (\mu_0^*, \lambda^*, \mu^*).$$

Aplicando o limite em (3.32) e (3.33), tem-se

$$\mu_0^* \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla h_i(x^*) + \sum_{j=1}^p \mu_j^* \nabla g_j(x^*) = 0,$$

$$(\mu_0^*)^2 + \sum_{i=1}^m (\lambda_i^*)^2 + \sum_{j=1}^p (\mu_j^*)^2 = 1,$$

isto é, $\mu_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*, \mu_1^*, \dots, \mu_p^*$ são não todos nulos e como $\mu^k \geq 0$ temos $\mu^* \geq 0$.

Finalmente, para mostrar que a condição (iv) é satisfeita, considere

$$I = \{i \mid \lambda_i^* \neq 0\}, \quad J = \{j \mid \mu_j^* > 0\}.$$

Para $i \in I$, se $\lambda_i^* > 0$ então $\lambda_i^k > 0$ para k suficientemente grande, pois $\lambda_i^k \rightarrow \lambda_i^*$ e caso $\lambda_i^* < 0$, temos $\lambda_i^k < 0$ para k suficientemente grande. Portanto de qualquer modo, $\lambda_i^k \lambda_i^* > 0$ para todo $i \in I$. Da mesma forma, para $j \in J$, tem-se $\mu_j^k \mu_j^* > 0$. Com isso

$$\frac{\lambda_i^* k h_i(x^k)}{\delta^k} = \lambda_i^* \lambda_i^k > 0$$

e portanto $\lambda_i^* h_i(x^k) > 0$, pois $\delta^k > 0$ para todo k e também

$$\frac{\mu_j^* k g_j^+(x^k)}{\delta^k} = \mu_j^* \mu_j^k > 0$$

logo $\mu_j^* g_j^+(x^k) > 0$. Como $\mu_j^* > 0$ temos $g_j^+(x^k) > 0$ e conseqüentemente $g_j(x^k) > 0$. Com isso $\mu_j^* g_j(x^k) > 0$. \square

A condição (iv) é um tanto não usual. Ela afirma que as restrições com multiplicador não nulo podem ser violadas arbitrariamente na vizinhança de x^* de maneira que o sinal da violação coincida com o sinal do correspondente multiplicador. Além disso, essa condição implica a condição de complementaridade. De fato, se $g_j(y) \leq 0$ para todo y numa vizinhança de x^* , então $\mu_j = 0$. Em particular no x^* , se $g_j(x^*) < 0$ então $\mu_j = 0$.

Observe em (3.28), que se $\mu_0^* > 0$ o conjunto dos multiplicadores de Lagrange podem ser obtidos pela divisão de cada multiplicador por μ_0^* , sendo assim um novo conjunto com $\mu_0^* = 1$, isto é, obtemos as condições KKT. Em geral, qualquer condição que garante $\mu_0^* > 0$ pode ser pensada como uma condição de qualificação.

Observe que podemos sempre normalizar os multiplicadores tais que $\mu_0^* = 0$ ou $\mu_0^* = 1$. Obviamente, podemos usar qualquer normalização, tal como

$$(\mu_0^*)^2 + \sum_{i=1}^m (\delta_i^*)^2 + \sum_{j=1}^p (\mu_j^*)^2 = 1.$$

Capítulo 4

Condições de Qualificação

Reunimos neste capítulo, diferentes condições de qualificação e resultados que aparecem de forma dispersa na literatura, procurando apresentar demonstrações mais detalhadas e contra-exemplos diferenciados. Várias referências foram consultadas, tais como [1, 2, 3, 4, 5, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 20, 21, 29, 33, 36, 37].

Condições de qualificação são ferramentas úteis na análise de convergência de métodos de otimização. A grosso modo, uma condição de qualificação pode ser entendida como uma propriedade que garante que as condições de KKT sejam válidas num minimizador local.

Vimos no Exemplo 2 do Capítulo 3 que podemos ter um minimizador local sem que sejam válidas as condições necessárias de otimalidade de KKT, em outras palavras, se x^* é um minimizador local do Problema (3.1) então, ou ele é um ponto KKT ou as restrições não cumprem uma condição de qualificação. Assim, se CQ é uma condição de qualificação, a proposição *KKT ou Não-CQ* é uma condição de otimalidade, isto é:

$$\text{Minimizador local} \Rightarrow (\text{KKT ou Não-CQ})$$

qualquer que seja a função objetivo f , ver [30]. Portanto, assim como boas condições de otimalidade devem ser fortes, boas condições de qualificação devem ser fracas.

Iniciaremos nossa discussão, estudando algumas definições e resultados similares de conjuntos de vetores linearmente independentes (LI) e linearmente dependentes (LD), não muito conhecidos na literatura, mas que caracterizam algumas condições de qualificação, ver [33].

Definição 4.1 *Considere $A = \{a_1, \dots, a_l\}$ e $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ dois subconjuntos finitos em \mathbb{R}^n tais que $A \cup B \neq \emptyset$. Dizemos que (A, B) é positivo-linearmente*

dependente (PLD) se existem $\alpha \in \mathbb{R}^l$ e $\beta \in \mathbb{R}^r$ tais que $\beta \geq 0$, $(\alpha, \beta) \neq 0$, e

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^r \beta_j b_j = 0.$$

Se $A = \emptyset$, dizemos que B é positivo-linearmente dependente ou independente. Se (A, B) não é PLD, dizemos então que é positivo-linearmente independente (PLI).

Como veremos na Seção 4.1 deste capítulo, algumas condições de qualificação dependem da definição de conjuntos PLD e PLI. Então há necessidade de reconhecer a classificação destes conjuntos de vetores quanto a essas definições. Para isso, façamos uma definição mais detalhada de conjunto de vetores PLI.

Definição 4.2 Considere $A = \{a_1, \dots, a_l\}$ e $B = \{b_1, \dots, b_r\}$ dois subconjuntos finitos em \mathbb{R}^n tais que $A \cup B \neq \emptyset$. Dizemos que (A, B) é positivo-linearmente independente se o sistema nas variáveis $\alpha \in \mathbb{R}^l$ e $\beta \in \mathbb{R}^r$ com $\beta \geq 0$

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i a_i + \sum_{j=1}^r \beta_j b_j = 0$$

tem unicamente a solução nula.

Assim como na dependência linear e independência linear de vetores, qualquer subconjunto de um conjunto PLI é sempre PLI e um conjunto que contém um subconjunto PLD é sempre PLD.

Lema 4.3 Sejam $H_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, l$, $G_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, r$ funções contínuas. Considere \bar{x} um ponto arbitrário em \mathbb{R}^n .

Se $(\{H_1(\bar{x}), \dots, H_l(\bar{x})\}, \{G_1(\bar{x}), \dots, G_r(\bar{x})\})$ é PLI, então existe uma vizinhança V de \bar{x} tal que $(\{H_1(y), \dots, H_l(y)\}, \{G_1(y), \dots, G_r(y)\})$ é PLI para todo $y \in V$.

Prova. Suponha por absurdo que para toda vizinhança V de \bar{x} ,

$$(\{H_1(y), \dots, H_l(y)\}, \{G_1(y), \dots, G_r(y)\}) \text{ é PLD}$$

para algum $y \in V$, ou seja, existe uma seqüência $(y^k) \subset \mathbb{R}^n$, $\bar{\alpha}_i^k, \bar{\beta}_j^k$ não todos nulos com $\bar{\beta}_j^k \geq 0$, tal que $y^k \rightarrow \bar{x}$ e

$$\sum_{i=1}^l \bar{\alpha}_i^k H_i(y^k) + \sum_{j=1}^r \bar{\beta}_j^k G_j(y^k) = 0. \quad (4.1)$$

Defina

$$\alpha_i^k = \frac{\overline{\alpha_i^k}}{\|(\overline{\alpha^k}, \overline{\beta^k})\|}, \quad \beta_j^k = \frac{\overline{\beta_j^k}}{\|(\overline{\alpha^k}, \overline{\beta^k})\|}.$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^l (\alpha_i^k)^2 + \sum_{j=1}^r (\beta_j^k)^2 = 1, \quad \forall k. \quad (4.2)$$

Dividindo a Equação (4.1) por $\|(\overline{\alpha^k}, \overline{\beta^k})\|$ temos

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i^k H_i(y^k) + \sum_{j=1}^r \beta_j^k G_j(y^k). \quad (4.3)$$

Vemos que (α^k, β^k) é limitada. Portanto, pelo Teorema 1.20 possui uma subsequência convergente. Digamos que

$$(\alpha^k, \beta^k) \xrightarrow{\mathbb{N}_1} (\alpha^*, \beta^*),$$

para $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$.

Passando o limite em \mathbb{N}_1 nas Equações (4.2) e (4.3) obtém-se

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i^* H_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^r \beta_j^* G_j(\bar{x}) = 0.$$

e

$$\sum_{i=1}^l (\alpha_i^*)^2 + \sum_{j=1}^r (\beta_j^*)^2 = 1.$$

Portanto $(\alpha^*, \beta^*) \neq 0$. Como $\beta^k \geq 0$ temos $\beta^* \geq 0$, contradizendo a hipótese que $(\{H_1(\bar{x}), \dots, H_l(\bar{x})\}, \{G_1(\bar{x}), \dots, G_r(\bar{x})\})$ é PLI. \square

Corolário 4.4 *Sejam $H_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, l$ funções contínuas e \bar{x} um ponto arbitrário em \mathbb{R}^n . Se $\{H_1(\bar{x}), \dots, H_l(\bar{x})\}$ é LI então existe uma vizinhança V de \bar{x} tal que $\{H_1(y), \dots, H_l(y)\}$ é LI para todo $y \in V$.*

Prova. Análoga à demonstração do lema anterior. \square

4.1 Diferentes condições de qualificação

Discutimos nesta seção diferentes condições de qualificação. Para tanto, apresentamos, inicialmente, uma definição precisa de condição de qualificação.

Considere h e g funções continuamente diferenciáveis em \mathbb{R}^n e

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid h(x) = 0, \quad g(x) \leq 0\}.$$

Definição 4.5 Dizemos que as restrições $h(x) = 0$ e $g(x) \leq 0$ cumprem uma condição de qualificação em $x^* \in \Omega$ quando, dada qualquer função diferenciável que tenha mínimo em x^* , relativamente a Ω , sejam satisfeitas as condições de otimalidade de KKT.

Demonstramos no capítulo anterior que vale KKT em um minimizador x^* , quando $P(T(x^*)) = P(D(x^*))$. Pela definição acima, esta condição é de qualificação. Além disso, Gould e Tolle provam em [13] que esta é a condição de qualificação mais fraca possível. Por outro lado, é difícil de ser verificada na prática. Veremos então outras condições, tais como Slater, Mangasarian-Fromovitz, independência linear dos gradientes, posto constante, dependência linear positiva constante, quase-normalidade e quase-regularidade que implicam $P(T(x^*)) = P(D(x^*))$. Na seção seguinte discutimos as relações entre essas condições.

Primeiramente, estudamos uma situação particular em que as restrições do problema são lineares. Neste caso as condições de KKT são válidas em qualquer minimizador do problema.

Problemas com Restrições Lineares.

Em programação linear o objetivo é minimizar uma função f na qual as restrições são formadas por equações e inequações lineares, isto é, o problema pode ser formulado da seguinte forma:

$$(P) \quad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeito a} & Mx = c \\ & Ax \leq b \end{array}$$

onde $A \in \mathbb{R}^{t \times n}$, $M \in \mathbb{R}^{u \times n}$, $b \in \mathbb{R}^t$ e $c \in \mathbb{R}^n$.

Veremos no próximo teorema que, se o conjunto viável é formado apenas por restrições lineares, as condições de otimalidade de KKT se verificam num minimizador.

Teorema 4.6 *Se todas as restrições são lineares, as condições de otimalidade de KKT são necessárias para caracterizar uma solução ótima.*

Prova. Suponha x^* um minimizador local do Problema (P). Sem perda de genera-

lidade, podemos escrever o sistema $Ax \leq b$ como

$$\begin{pmatrix} A_I \\ A_{\bar{I}} \end{pmatrix} x \leq \begin{pmatrix} b_I \\ b_{\bar{I}} \end{pmatrix}$$

onde $A_I x^* = b_I$ e $A_{\bar{I}} x^* < b_{\bar{I}}$ e $A_I \in \mathbb{R}^{q \times n}$. Então em x^* , o conjunto

$$B = \{d \mid A_I d \leq 0, M d = 0\}$$

é precisamente o conjunto das direções viáveis $V(x^*)$ (observe que $B = D(x^*)$). Em particular, para cada $d \in B$,

$$\nabla f(x^*)^T d \geq 0,$$

caso contrário d seria uma direção viável de descida em x^* , violando a otimalidade local, conforme Teorema 3.17. Desta forma o sistema linear

$$\nabla f(x^*)^T d < 0, \quad A_I d \leq 0, \quad M d = 0$$

não tem solução. Pelo Lema de Key 2.13, existe (u, v, w) com $u \geq 0$, $v \geq 0$ com $u = e^T u = 1$ e

$$\nabla f(x^*)^T u + A_I^T v + M^T w = 0,$$

isto é,

$$-\nabla f(x^*) = A_I^T v + M^T w.$$

Considere

$$\mu_i = \begin{cases} v_i, & \forall i \in I \\ 0, & \forall i \in \bar{I} \end{cases}$$

e $\lambda = w$.

Assim obtemos

$$-\nabla f(x^*) = M^T \lambda + A^T \mu,$$

$$\mu \geq 0$$

e

$$\mu^T (Ax^* - b) = \begin{pmatrix} \mu_I^T & \mu_{\bar{I}}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_I x^* - b_I \\ A_{\bar{I}} x^* - b_{\bar{I}} \end{pmatrix} = 0$$

completando a prova. □

Vamos considerar um ponto $\bar{x} \in \Omega$ fixo em todo este capítulo.

Condição de Qualificação de Slater.

Em vários problemas de otimização, o conjunto viável é um conjunto convexo. É conhecido na literatura que minimizadores locais passam a ser minimizadores globais, ou seja, as condições KKT são necessárias e suficientes. Definiremos abaixo uma generalização da condição de qualificação de Slater [37].

Definição 4.7 Dizemos que a condição de qualificação de Slater vale se h é afim, g é convexa e existe $\tilde{x} \in \Omega$ tal que

$$h(\tilde{x}) = 0 \quad e \quad g(\tilde{x}) < 0.$$

Como veremos ao longo deste trabalho, a condição de Slater é uma condição de qualificação em qualquer ponto $\bar{x} \in \Omega$.

Condição de Qualificação de Independência Linear - LICQ.

Uma condição de qualificação clássica muito conhecida na literatura é a independência linear dos gradientes das restrições de igualdade juntamente com os gradientes das restrições de desigualdade ativas.

Definição 4.8 Dizemos que a condição de qualificação de independência linear (LICQ) é satisfeita em \bar{x} quando o conjunto dos gradientes das restrições de desigualdade ativas e das restrições de igualdade são linearmente independentes, isto é,

$$\{\nabla h_i(\bar{x})\}_{i \in \{1, \dots, m\}} \cup \{\nabla g_j(\bar{x})\}_{j \in A(\bar{x})} \text{ é LI.} \quad (4.4)$$

Porém, esta condição exige muito das restrições, no sentido de que um minimizador pode satisfazer as condições KKT sem que satisfaça LICQ. Por exemplo, considere o seguinte problema

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x) = x_2 \\ \text{sujeito a} \quad & g_1(x) = -x_1^2 + x_2 \leq 0 \\ & g_2(x) = -x_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Resolvendo KKT para este problema vemos que um minimizador é $x^* = (0, 0)^T$, com

$$\nabla f(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \nabla g_2(x^*) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Assim, $\nabla g_1(x^*) = -\nabla g_2(x^*)$. Portanto x^* não satisfaz LICQ, mas satisfaz KKT. Veja Figura 4.1.

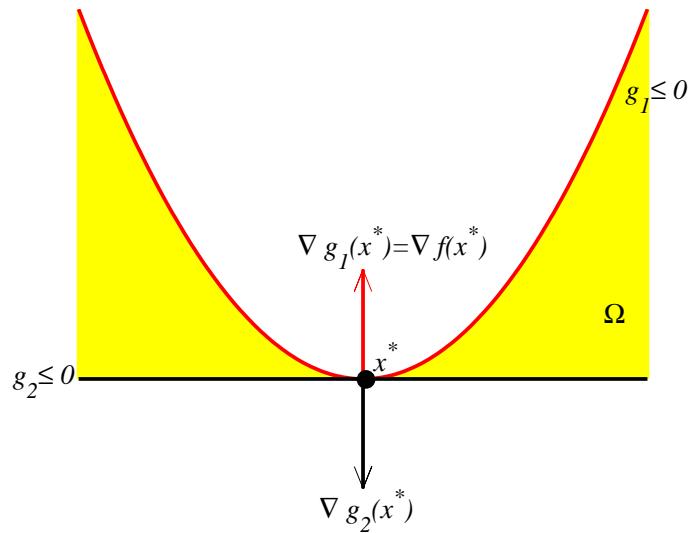


Figura 4.1: Um minimizador x^* não satisfaz LICQ, mas satisfaz KKT.

Condição de Qualificação de Mangasarian-Fromovitz - MFCQ.

Para o caso em que as restrições são apenas de desigualdade, uma outra condição de qualificação foi introduzida por Arrow-Hurwitz-Uzawa [3]. Esta condição foi generalizada por Mangasarian-Fromovitz [29], para o caso em que o conjunto viável também possui restrições de igualdade.

Definição 4.9 Dizemos que a condição de qualificação de Mangasarian-Fromovitz (MFCQ) é satisfeita em \bar{x} quando os gradientes das restrições de igualdade são linearmente independentes e existir um vetor $d \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$\begin{aligned} \nabla h(\bar{x})^T d &= 0 \quad e \\ \nabla g_j(\bar{x})^T d &< 0, \text{ para todo } j \in A(\bar{x}). \end{aligned}$$

Observe pela definição acima, que o vetor d deve formar ângulo reto com os gradientes das restrições de igualdade e ângulo obtuso com os gradientes das restrições de desigualdade ativas.

Introduzimos na proposição abaixo uma caracterização dual equivalente à condição de Mangasarian-Fromovitz.

Proposição 4.10 (Condição Dual de Mangasarian-Fromovitz) O ponto \bar{x} satisfaz MFCQ se, e somente se, o conjunto

$$\left(\{\nabla h_i(\bar{x})\}_{i \in \{1, \dots, m\}}, \{\nabla g_j(\bar{x})\}_{j \in A(\bar{x})} \right) \text{ é PLI.}$$

Prova. Suponha que $\bar{x} \in \Omega$ satisfaz a condição de qualificação MFCQ da Definição 4.9. Considere λ_i com $i \in \{1, \dots, m\}$, $\mu_j \geq 0$ com $j \in A(\bar{x})$ tais que

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0. \quad (4.5)$$

Multiplicando pela direção d da Definição 4.9 temos

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\bar{x})^T d + \sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j \nabla g_j(\bar{x})^T d = 0,$$

obtendo assim

$$\mu_j = 0, \quad \forall j \in A(\bar{x}). \quad (4.6)$$

Mas $\{\nabla h_i(\bar{x})\}$ é LI e de (4.5) e (4.6) temos que $\lambda_i = 0$. Assim

$$\left(\{\nabla h_i(\bar{x})\}_{i \in \{1, \dots, m\}}, \{\nabla g_j(\bar{x})\}_{j \in A(\bar{x})} \right) \text{ é PLI.}$$

Reciprocamente, considere a combinação linear

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0.$$

Devemos mostrar que $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Para isso, faça

$$\sum_{i=1}^m \alpha_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j \in A(\bar{x})} 0 \nabla g_j(\bar{x}) = 0.$$

Por hipótese de PLI temos $\alpha_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$.

Considere agora o seguinte problema de programação linear nas variáveis (d, z) :

$$(PL) \quad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & \psi(d, z) = z \\ \text{sujeito a} & \nabla h_i(\bar{x})^T d = 0 \\ & \nabla g_j(\bar{x})^T d \leq z \end{array}$$

Suponha que exista solução. Pelo Teorema 4.6, são satisfeitas as condições de otimalidade de KKT para o Problema (PL), ou seja, existem λ_i, μ_j com $\mu_j \geq 0$ e

$$0 + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0, \quad (4.7)$$

$$1 + \sum_{i=1}^m \lambda_i 0 - \sum_{j \in A(x)} \mu_j = 0.$$

Desta última, temos

$$\sum_{j \in A(x)} \mu_j = 1$$

e portanto existem λ_i com $i \in \{1, \dots, m\}$, $\mu_j \geq 0$, $j \in A(x)$ não todos nulos tais que a Equação (4.7) se verifica, implicando assim que

$$\left(\{\nabla h_i(x)\}_{i \in \{1, \dots, m\}}, \{\nabla g_j(x)\}_{j \in A(\bar{x})} \right) \text{ é PLD}$$

contradizendo a hipótese. Portanto o problema é ilimitado. Com isso existe (\bar{d}, \bar{z}) viável tal que $\psi(\bar{d}, \bar{z}) = -1$ com

$$\nabla h_i(\bar{x})^T \bar{d} = 0,$$

$$\nabla g_j(\bar{x})^T \bar{d} \leq -1 < 0.$$

Logo \bar{d} satisfaz MFCQ. □

Em otimização é comum em alguns problemas substituir uma restrição de igualdade $h_i(x) = 0$ por duas restrições de desigualdade ($h_i(x) \leq 0$ e $h_i(x) \geq 0$). Neste caso, não encontramos uma direção d que forma ângulo obtuso com seus gradientes, portanto MFCQ não se verifica. Uma condição de qualificação introduzida por Janin [21] em 1984, se verifica quando este tipo de situação acontece. Essa condição é chamada CRCQ, do inglês *Constant Rank Constraint Qualification*.

Condição de Qualificação Posto Constante - CRCQ.

Definição 4.11 Dizemos que a condição de qualificação de posto constante (CRCQ) é satisfeita em \bar{x} se existe uma vizinhança V de \bar{x} tal que para todo $I \subset \{1, \dots, m\}$, $J \subset A(\bar{x})$, o conjunto de vetores gradientes

$$\{\nabla h_i(y)\}_{i \in I} \cup \{\nabla g_j(y)\}_{j \in J}$$

tem posto constante para todo $y \in V$.

O teorema abaixo fornece uma melhor caracterização da condição de posto constante.

Teorema 4.12 *Um ponto $\bar{x} \in \Omega$ satisfaz CRCQ se, e somente se, para qualquer $I \subset \{1, \dots, m\}$, $J \subset A(\bar{x})$, quando*

$$\{\nabla h_I(\bar{x})\} \cup \{\nabla g_J(\bar{x})\} \quad \text{é LD,}$$

existe uma vizinhança V de \bar{x} tal que

$$\{\nabla h_I(y)\} \cup \{\nabla g_J(y)\} \quad \text{é LD}$$

para todo $y \in V(\bar{x})$.

Prova. Sejam I, J conjuntos de índices tais que

$$\{\nabla h_I(\bar{x})\} \cup \{\nabla g_J(\bar{x})\} \quad \text{é LD.}$$

Seja $V(\bar{x})$ uma vizinhança dada pela definição de CRCQ.

Para simplificar a notação, defina

$$\nabla(x) = \{\nabla h_I(x)\} \cup \{\nabla g_J(x)\}.$$

Temos

$$\text{posto}(\nabla(\bar{x})) < \text{card}(\nabla(\bar{x})),$$

pois $\nabla(\bar{x})$ é LD. Pela hipótese de CRCQ, temos

$$\text{posto}(\nabla(y)) = \text{posto}(\nabla(\bar{x})) < \text{card}(\nabla(\bar{x})) = \text{card}(\nabla(y)),$$

para todo $y \in V(\bar{x})$. Portanto, $\nabla(y)$ é LD.

Para provar a recíproca, observe que o número de partições de índices é finito. Com isso podemos enumerá-los do seguinte modo

$$\{(I_1, J_1), \dots, (I_p, J_p), (I_{p+1}, J_{p+1}), \dots, (I_q, J_q)\}$$

onde

$$\{\nabla h_{I_i}(x)\} \cup \{\nabla g_{J_i}(x)\}$$

é LD para $i \leq p$ e LI para $i > p$. Para simplificar a notação, denote

$$\nabla_i(x) = \{\nabla h_{I_i}(x)\} \cup \{\nabla g_{J_i}(x)\}.$$

Para $i \leq p$, por hipótese garantimos que existe uma vizinhança $V_i(\bar{x})$ tal que

$\nabla_i(y)$ é LD para todo $y \in V_i(\bar{x})$.

Para $i > p$, pelo Corolário 4.4 existe uma vizinhança $V_i(\bar{x})$ tal que $\nabla_i(y)$ é LI para todo $y \in V_i(\bar{x})$.

Tome

$$V = \bigcap_{i=1}^q V_i(\bar{x}).$$

Considere (I_i, J_i) uma partição arbitrária.

Se $i > p$, então $\text{posto}(\nabla_i(y)) = \text{card}(I_i \cup J_i)$ que é constante para todo $y \in V$.

Se $i \leq p$, então $\nabla_i(\bar{x})$ é LD. Considere

$$c_i = \text{card}(I_i \cup J_i) \quad \text{e} \quad p_i = \text{posto}(\nabla_i(\bar{x})).$$

Observe que $p_i < c_i$ pois $\nabla_i(\bar{x})$ é LD.

Existem $\bar{I}_i \subset I_i$, $\bar{J}_i \subset J_i$ tais que

$$\text{card}(\bar{I}_i \cup \bar{J}_i) = p_i \quad \text{e} \quad \bar{\nabla}_i(\bar{x}) \quad \text{é LI.}$$

Com isso, pelo Corolário 4.4, $\bar{\nabla}_i(y)$ é LI em V . Logo $\text{posto}(\nabla_i(y)) \geq p_i$, para todo $y \in V$.

Suponha por absurdo que $\text{posto}(\nabla_i(y)) > p_i$, para algum $y \in V$. Então existe $l \in (I_i \cup J_i)$, $l \notin (\bar{I}_i \cup \bar{J}_i)$ com $\{\bar{\nabla}_i(y)\} \cup \{\nabla_l(y)\}$ LI. Por outro lado, $\{\bar{\nabla}_i(\bar{x})\} \cup \{\bar{\nabla}_l(\bar{x})\}$ é LD, pois $\text{posto}(\nabla_i(\bar{x})) = p_i$. Então $\{\bar{\nabla}_i(y)\} \cup \{\nabla_l(y)\}$ também é LD, já que $y \in V$. Esta contradição implica que $\text{posto}(\nabla_i(y)) = p_i$, para todo $y \in V$. \square

Condição de Qualificação CPLD.

Uma outra condição de qualificação conhecida como Dependência Linear Positiva Constante foi introduzida por Qi e Wei em [33] e utilizada para analisar convergência de métodos de programação quadrática seqüencial (PQS). Mas os autores não provaram que a CPLD era de fato uma condição de qualificação. Esta questão foi apresentada como um problema aberto na Seção 2 de [33]. Andreani, Martínez e Schuverdt provam em [2] que a CPLD é uma condição de qualificação e, além disso, mais fraca que LICQ, MFCQ e CRCQ.

A CPLD foi originalmente definida da seguinte forma em [33]:

Definição 4.13 (CPLD-original) Dizemos a condição de qualificação CPLD-original é satisfeita em \bar{x} se para todo $I_0 \subset \{1, \dots, m\}$, $J_0 \subset A(\bar{x})$ com os gradientes

$$(\{\nabla h_i(\bar{x})\}_{i \in I_0}, \{\nabla g_j(\bar{x})\}_{j \in J_0})$$

positivo-linearmente dependentes, existir uma vizinhança V de \bar{x} tal que os gradientes

$$\{\nabla h_i(y)\}_{i \in I_0} \cup \{\nabla g_j(y)\}_{j \in J_0}$$

sejam linearmente dependentes para todo $y \in V$.

Observe que na CPLD-original, os autores necessitam apenas a dependência linear na vizinhança de \bar{x} . Em princípio, como observam Qi e Wei em [33] esta condição é mais forte que a necessidade da dependência linear positiva na vizinhança de \bar{x} .

Definição 4.14 Dizemos a condição de qualificação CPLD é satisfeita em \bar{x} se para todo $I_0 \subset \{1, \dots, m\}$, $J_0 \subset A(\bar{x})$ com os gradientes

$$(\{\nabla h_i(\bar{x})\}_{i \in I_0}, \{\nabla g_j(\bar{x})\}_{j \in J_0})$$

positivo-linearmente dependentes, existir uma vizinhança V de \bar{x} tal que os gradientes

$$(\{\nabla h_i(y)\}_{i \in I_0}, \{\nabla g_j(y)\}_{j \in J_0})$$

sejam positivo-linearmente dependentes para todo $y \in V$.

Uma propriedade importante da CPLD é que esta condição se cumpre sempre que as restrições são lineares.

Assim como PLD implica LD, CPLD implica CPLD-original. No próximo teorema, mostraremos que na realidade as duas versões são equivalentes.

Teorema 4.15 Se \bar{x} satisfaz CPLD-original, então \bar{x} satisfaz CPLD.

Prova. Para simplificar a notação, denote

$$\nabla_{I_0, J_0}(\bar{x}) = (\nabla h_{I_0}(\bar{x}), \nabla g_{J_0}(\bar{x})).$$

Suponha por absurdo que \bar{x} satisfaz CPLD-original e não satisfaz CPLD, então existem $I_0 \subseteq \{1, \dots, m\}$, $J_0 \subseteq A(\bar{x})$ tal que $\nabla_{I_0, J_0}(\bar{x})$ é PLD mas $\nabla_{I_0, J_0}(y^k)$ é PLI, com $y^k \rightarrow \bar{x}$.

Como $\nabla_{I_0, J_0}(\bar{x})$ é PLD, existe λ_{I_0} , μ_{J_0} não todos nulos tais que $\mu_j \geq 0$ e

$$\sum_{I_0} \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{J_0} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0.$$

Suponha que algum $\lambda_{i_0} \neq 0$, para algum $i_0 \in I_0$ (a demonstração para o caso em que algum $\mu_{j_0} \neq 0$ é inteiramente análoga). Então

$$-\lambda_{i_0} \nabla h_{i_0}(\bar{x}) = \sum_{I_0 - \{i_0\}} \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{J_0} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}).$$

Observe que $\nabla h_{i_0}(\bar{x}) \neq 0$, pois do contrário a CPLD-original implicaria $\nabla h_{i_0}(y^k) = 0$ para todo k suficientemente grande, contradizendo a hipótese que $\nabla_{I_0, J_0}(y^k)$ é PLI. Portanto, pelo Lema de Caratheodory 1.52, existem $I_1 \subset I_0 - \{i_0\}$, $J_1 \subset J_0$ tais que $\nabla_{I_1, J_1}(\bar{x})$ é LI e existem escalares $\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_j$ com $\bar{\mu}_j \geq 0$ tais que

$$-\lambda_{i_0} \nabla h_{i_0}(\bar{x}) = \sum_{I_1} \bar{\lambda}_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{J_1} \bar{\mu}_j \nabla g_j(\bar{x}). \quad (4.8)$$

Sem perda de generalidade, assuma que $\bar{\lambda}_i \neq 0$ para todo $i \in I_1$ e $\bar{\mu}_j > 0$ para todo $j \in J_1$. Pelo Corolário 4.4, $\nabla_{I_1, J_1}(y)$ é LI para todo y numa vizinhança de \bar{x} . Por (4.8) temos que

$$(\nabla h_{I_1 \cup \{i_0\}}(\bar{x}), \nabla g_{J_1}(\bar{x})) \quad \text{é PLD.}$$

Assim a CPLD-original garante que

$$\{\nabla h_{I_1 \cup \{i_0\}}(y)\} \cup \{\nabla g_{J_1}(y)\} \quad \text{é LD}$$

para todo y numa vizinhança de \bar{x} . Isto implica que

$$\{\nabla h_{I_1 \cup \{i_0\}}(y^k)\} \cup \{\nabla g_{J_1}(y^k)\} \quad \text{é LD}$$

para todo k suficientemente grande. Mas $\nabla_{I_1, J_1}(y^k)$ é LI para todo k suficientemente grande. Portanto existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$, existe (α^k, β^k) tal que

$$-\lambda_{i_0} \nabla h_{i_0}(y^k) = \sum_{I_1} \alpha_i^k \nabla h_i(y^k) + \sum_{J_1} \beta_j^k \nabla g_j(y^k). \quad (4.9)$$

Além disso, $(\alpha^k, \beta^k) \neq (0, 0)$, pois como $\nabla_{I_0, J_0}(y^k)$ é PLI, temos $\lambda_{i_0} \nabla h_{i_0}(y^k) \neq 0$.

Defina

$$\xi_i^k = \frac{\alpha_i^k}{\|(\alpha^k, \beta^k)\|} \quad \text{e} \quad \zeta_j^k = \frac{\beta_j^k}{\|(\alpha^k, \beta^k)\|}.$$

Observe que (α^k, β^k) é limitada, pois caso contrário, isto é, se

$$\|(\alpha^k, \beta^k)\| \xrightarrow{\mathbb{N}'} \infty,$$

dividindo a Equação (4.9) por $\|(\alpha^k, \beta^k)\|$ e passando o limite em \mathbb{N}' teríamos

$$0 = \sum_{I_1} \bar{\xi}_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{J_1} \bar{\zeta}_j \nabla g_j(\bar{x}),$$

com $\|(\bar{\xi}, \bar{\zeta})\| = 1$, contradizendo o fato que $\nabla_{I_1, J_1}(\bar{x})$ é LI.

Sem perda de generalidade, suponha que $\alpha^k \rightarrow \alpha$, $\beta^k \rightarrow \beta$. Assim, passando novamente o limite em (4.9), obtemos

$$-\lambda_{i_0} \nabla h_{i_0}(\bar{x}) = \sum_{I_1} \alpha_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{J_1} \beta_j \nabla g_j(\bar{x}).$$

Sabemos que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$, pois $\lambda_{i_0} \nabla h_{i_0}(\bar{x}) \neq 0$. Junto com (4.8) e o fato de $\nabla_{I_1, J_1}(\bar{x})$ ser LI temos $\bar{\lambda}_i = \alpha_i$ e $\bar{\mu}_j = \beta_j$. Como $\bar{\lambda}_i \neq 0$ para todo $i \in I_1$, $\bar{\mu}_j > 0$ para todo $j \in J_1$, $\alpha_i^k \rightarrow \alpha_i = \bar{\lambda}_i$ e $\beta_j^k \rightarrow \beta_j = \bar{\mu}_j$ temos $\alpha_i^k \neq 0$ e $\beta_j^k > 0$ para todo k suficientemente grande. Assim (4.9) significa que

$$(\nabla_{I_1 \cup \{i_0\}} h(y^k), \nabla_{J_1} g(y^k))$$

é PLD, contradição. □

Condição de Qualificação Quase-Normalidade.

Recorde que os multiplicadores $\mu_0^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^*, \mu_1^*, \dots, \mu_p^*$ definidos em (3.28), podem ser escolhidos tais que $\mu_0^* = 1$ se as condições (i)-(iv) do Teorema 3.21 não se verificam quando $\mu_0^* = 0$, isto é, a condição de qualificação quase-normalidade definida abaixo é satisfeita em \bar{x} .

Definição 4.16 Dizemos que a condição de qualificação quase-normalidade é satisfeita em \bar{x} se não existem escalares λ_i com $i \in \{1, \dots, m\}$ e μ_j com $j \in A(\bar{x})$ tais que:

(i)

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0.$$

(ii) $\mu_j \geq 0$.

(iii) λ_i e μ_j são não todos nulos.

(iv) Em toda vizinhança V de \bar{x} existe um ponto $x \in V$ tal que $\lambda_i h_i(x) > 0$ para todo i com $\lambda_i \neq 0$ e $\mu_j g_j(x) > 0$ para todo j com $\mu_j \neq 0$.

Um ponto que satisfaz a condição quase-normalidade é chamado de ponto quase-normal.

Recorde que mostramos no capítulo anterior que o item (iv) implica a condição de complementaridade.

Se x^* é um minimizador local satisfazendo a condição de qualificação quase-normalidade, as condições de otimalidade de Fritz-John 3.21 são satisfeitas apenas se $\mu_0^* \neq 0$. Portanto x^* satisfaz as condições KKT, ver [5].

Ao contrário da condição de Mangasarian-Fromovitz, a condição de quase-normalidade não deixa de ser satisfeita quando se substitui uma restrição de igualdade por duas de desigualdade.

Lema 4.17 *Um ponto \bar{x} é quase-normal para o conjunto $\{h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$ se, e somente se, é quase-normal para o conjunto $\{h(x) \leq 0, -h(x) \leq 0, g(x) \leq 0\}$.*

Prova. Primeiramente suponha que \bar{x} não é quase-normal para o conjunto $\{h(x) \leq 0, -h(x) \leq 0, g(x) \leq 0\}$. Logo existem $\gamma, \delta, \mu \geq 0$ não todos nulos tais que

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \delta_i \nabla (-h_i(\bar{x})) + \sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0 \quad (4.10)$$

e para toda vizinhança V de \bar{x} , existe $x \in V$ tal que $\gamma_i h_i(x) > 0$ para todo i com $\gamma_i \neq 0$, $\delta_i (-h_i(x)) > 0$ para todo i com $\delta_i \neq 0$ e $\mu_j g_j(x) > 0$ para todo j com $\mu_j \neq 0$.

Defina $\lambda_i = \gamma_i - \delta_i$. Assim da Equação (4.10), tem-se

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0.$$

Portanto existem λ, μ satisfendo os itens (i) e (ii) da Definição 4.16.

Temos que $\lambda_i h_i(x) = \gamma_i h_i(x) - \delta_i h_i(x) > 0$ sempre que $\lambda_i \neq 0$.

Vamos mostrar que λ_j, μ_j são não todos nulos. Mas por hipótese, $\gamma, \delta, \mu \geq 0$ e não todos nulos. Se existe $\mu_j > 0$, não há nada a provar. Suponha então, que $\mu_j = 0$ para todo j . Temos que provar que existe $\lambda_i \neq 0$. Por contradição, suponha que $\lambda_i = 0$ para todo i , isto é, $\gamma_i = \delta_i$ para todo i . Mas como $\mu = 0$ e $\gamma, \delta \geq 0$ são não todos nulos, existe algum $\gamma_i = \delta_i \neq 0$. Sabendo que $\gamma_i h_i(x) > 0$, temos que $\delta_i h_i(x) > 0$, absurdo. Portanto $\lambda_i \neq 0$ para algum i . Assim, \bar{x} não é quase-normal para o conjunto $\{h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$.

Para provar a recíproca, suponha que \bar{x} não é quase-normal em relação ao conjunto $\{h(x) = 0, g(x) \leq 0\}$. Então existem escalares λ_i com $i = 1, \dots, m$ e μ_j com

$j \in A(\bar{x})$, não todos nulos, com $\mu_j \geq 0$ para todo $j \in A(\bar{x})$,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0 \quad (4.11)$$

e tal que para toda vizinhança V de \bar{x} existe $\hat{x} \in V$ tal que $\lambda_i h_i(\hat{x}) > 0$ para todo i com $\lambda_i \neq 0$ e $\mu_j g_j(\hat{x}) > 0$ para todo j com $\mu_j \neq 0$.

Defina $\gamma_i = \lambda_i^+$ e $\delta_i = \lambda_i^-$, onde

$$\lambda_i^+ = \begin{cases} \lambda_i, & \text{se } \lambda_i \geq 0 \\ 0 & \text{se } \lambda_i < 0 \end{cases}, \quad \lambda_i^- = \begin{cases} 0, & \text{se } \lambda_i \geq 0 \\ -\lambda_i & \text{se } \lambda_i < 0 \end{cases}.$$

Assim $\lambda_i = \gamma_i - \delta_i$ e $\gamma \geq 0$, $\delta \geq 0$. Substituindo em (4.11) obtemos

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i \nabla h_i(\bar{x}) - \sum_{i=1}^m \delta_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0,$$

isto é,

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{i=1}^m \delta_i \nabla(-h_i(\bar{x})) + \sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0.$$

Assim sendo, pela definição de γ_i , δ_i e μ_j , os itens (i), (ii) e (iii) da Definição 4.16 são satisfeitos para o conjunto $\{h(x) \leq 0, -h(x) \leq 0, g(x) \leq 0\}$. Vamos mostrar que o item (iv) também vale. Seja V uma vizinhança de \bar{x} . Como vimos acima, existe $\hat{x} \in V$ tal que $\lambda_i h_i(\hat{x}) > 0$, para todo i com $\lambda_i \neq 0$ e $\mu_j g_j(\hat{x}) > 0$ para todo j com $\mu_j \neq 0$. Caso $\gamma_i \neq 0$, temos $\delta_i = 0$. Assim $\lambda_i = \gamma_i$ e portanto,

$$\gamma_i h_i(\hat{x}) = \lambda_i h_i(\hat{x}) > 0.$$

Se $\delta_i \neq 0$, temos $\gamma_i = 0$. Logo

$$\delta_i(-h_i(\hat{x})) = -\delta_i h_i(\hat{x}) = \lambda_i h_i(\hat{x}) > 0.$$

Portanto, \bar{x} não é quase-normal em relação ao conjunto $\{h(x) \leq 0, -h(x) \leq 0, g(x) \leq 0\}$, completando a prova. \square

Condição de Qualificação Quase-Regularidade.

No capítulo anterior, apresentamos uma prova para as condições KKT utilizando a condição de qualificação $P(T(x^*)) = P(D(x^*))$, introduzida por Guignard [14] em 1969, e vimos que esta condição é a mais fraca possível como provado por Gould

e Tolle [13] em 1971. Uma outra condição de qualificação, bastante fraca e que implica na condição de Guignard é a condição quase-regularidade. Esta condição foi introduzida em 1967 por Abadie [1] para o caso em que as restrições são apenas de desigualdade. A quase-regularidade é no entanto uma generalização dessa condição, para o caso em que o conjunto viável também possui restrições de igualdade. Porém, na literatura observamos que a condição de qualificação quase-regularidade também é chamada condição de qualificação de Abadie, ver [4, 5, 6, 10, 18, 20].

Definição 4.18 Dizemos que a condição de qualificação quase-regularidade é satisfeita em \bar{x} quando ocorre a igualdade $T(\bar{x}) = D(\bar{x})$.

Na seção seguinte, mostraremos a relação entre as condições de qualificação apresentadas nesta dissertação.

4.2 Relações entre as condições de qualificação

Do ponto de vista prático, é interessante analisar qual é o *status* de uma condição de qualificação em relação às outras condições conhecidas na literatura. Esta seção será dedicada a estabelecer as relações existentes entre as condições de qualificação discutidas na seção anterior. Provaremos as implicações válidas e apresentaremos contra-exemplos para as respectivas recíprocas.

4.2.1 Implicações

Teorema 4.19 Se vale a condição de Slater, então todo ponto viável \bar{x} satisfaz *MFCQ*.

Prova. Como vale a condição de Slater, as restrições de igualdade são lineares, ou seja, cada restrição h_i pode ser escrita como $h_i(x) = a_i^T x + b_i$ e cada restrição g_i é convexa. Além disso, existe $\tilde{x} \in \Omega$ com $g(\tilde{x}) < 0$.

Pelo Teorema 1.69 tem-se

$$0 > g_j(\tilde{x}) \geq g_j(\bar{x}) + \nabla g_j(\bar{x})^T (\tilde{x} - \bar{x}).$$

Seja $d = \tilde{x} - \bar{x}$. Para $j \in A(\bar{x})$ tem-se $g_j(\bar{x}) = 0$, logo

$$\nabla g_j(\bar{x})^T d < 0.$$

Para $i \in \{1, \dots, m\}$ tem-se $h_i(\tilde{x}) = h_i(\bar{x}) = 0$. Dessa forma

$$\nabla h_i(\bar{x})^T d = a_i^T (\tilde{x} - \bar{x}) = (a_i^T \tilde{x} + b_i) - (a_i^T \bar{x} + b_i) = 0.$$

Para concluir a demonstração, suponha sem perda de generalidade que o conjunto de vetores $\{\nabla h_i(\bar{x})\}_{i \in \{1, \dots, m\}}$ é LI, pois equações lineares redundantes podem ser eliminadas sem alterar Ω . \square

É interessante notar que se as restrições de desigualdade são convexas e as de igualdade são funções afins, então a recíproca do teorema acima é verdadeira conforme o teorema abaixo.

Teorema 4.20 *Se g é convexa e h é afim e \bar{x} satisfaz MFCQ, então vale a condição de Slater.*

Prova. Seja $d \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla h(\bar{x})^T d = 0$ e $\nabla g_j(\bar{x})^T d < 0$ para todo $j \in A(\bar{x})$. Como $g_j(\bar{x}) = 0$ e por Taylor, temos

$$\frac{g_j(\bar{x} + \alpha d)}{\alpha} = \nabla g_j(\bar{x})^T d + \frac{o(\alpha)}{\alpha}.$$

Segue que para $\alpha > 0$ suficientemente pequeno, $g_j(\bar{x} + \alpha d) < 0$. Sem perda de generalidade, para $j \notin A(\bar{x})$, $g_j(\bar{x} + \alpha d) < 0$. Assim, $g(\tilde{x}) < 0$, onde $\tilde{x} = \bar{x} + \alpha d$.

Para $i \in \{1, \dots, m\}$, temos pela linearidade de h_i que

$$h_i(\bar{x} + \alpha d) = h_i(\bar{x}) + \alpha h_i(d).$$

Como $h_i(\bar{x}) = 0$ e $\nabla h_i(\bar{x})^T d = 0$ obtemos, usando Taylor,

$$h_i(d) = \frac{h_i(\bar{x} + \alpha d)}{\alpha} = \frac{o(\alpha)}{\alpha}.$$

Passando o limite quando $\alpha \rightarrow 0$, obtemos $h_i(d) = 0$. Assim, $h_i(\tilde{x}) = 0$, onde $\tilde{x} = \bar{x} + \alpha d$. \square

Teorema 4.21 *Se \bar{x} satisfaz LICQ, então \bar{x} satisfaz MFCQ.*

Prova. Suponha sem perda de generalidade que $A(\bar{x}) = \{1, \dots, q\}$. Considere a matriz A cujas linhas são formadas pelos gradientes das restrições de igualdade e

pelos gradientes das restrições de desigualdade ativas, ou seja,

$$A = \begin{bmatrix} \nabla h_1(\bar{x})^T \\ \vdots \\ \nabla h_m(\bar{x})^T \\ \nabla g_1(\bar{x})^T \\ \vdots \\ \nabla g_q(\bar{x})^T \end{bmatrix}.$$

Considere $b \in \mathbb{R}^{m+q}$ dado por $b_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, m$ e $b_j = -1$ para todo $j \in \{m+1, \dots, m+q\}$.

Como as linhas de A são linearmente independentes, o sistema

$$Ad = b$$

tem solução. Seja \bar{d} uma solução. Então

$$\nabla h(\bar{x})^T \bar{d} = 0,$$

$$\nabla g_i(\bar{x})^T \bar{d} = -1 < 0, \quad \text{para todo } i \in A(\bar{x}).$$

Sabemos que um subconjunto de um conjunto linearmente independente é linearmente independente, logo $\{\nabla h_i(\bar{x})\}_{i \in \{1, \dots, m\}}$ é linearmente independente, completando a demonstração. \square

Uma forma alternativa para demonstrar o lema anterior, seria usar a condição dual de Mangasarian-Fromovitz 4.10. Para isto, basta observar que a condição LICQ implica que o sistema

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0, \quad \mu_j \geq 0, \forall j \in A(\bar{x}) \quad (4.12)$$

nas variáveis λ e μ só tem a solução nula. Logo, a condição (4.12) é menos restritiva do que a condição (4.4).

Assim como a condição de Mangasarian-Fromovitz é implicada por LICQ, o mesmo acontece com a condição de Posto Constante.

Teorema 4.22 *Se \bar{x} satisfaz LICQ, então \bar{x} satisfaz CRCQ.*

Prova. Considere $I = \{1, \dots, m\}$. Assim

$$\{\nabla h_I(\bar{x})\} \cup \{\nabla g_{A(\bar{x})}(\bar{x})\} \text{ é LI.}$$

Então existem $2^{m+q} = r$ partições de índices $\{(I_0^1, J_0^1), \dots, (I_0^r, J_0^r)\}$. Para cada (I_0^i, J_0^i) ,

$$\{\nabla h_{I_0^i}(\bar{x})\} \cup \{\nabla g_{J_0^i}(\bar{x})\} \text{ é LI,}$$

logo pela continuidade dos gradientes e do Corolário 4.4 existe $V_i(\bar{x})$ tal que

$$\{\nabla h_{I_0^i}(y)\} \cup \{\nabla g_{J_0^i}(y)\} \text{ é LI} \quad (4.13)$$

para todo $y \in V_i(\bar{x})$.

Considere

$$V = \bigcap_{i=1}^r V_i,$$

(I_0^i, J_0^i) uma partição arbitrária e q^i a cardinalidade de $I_0^i \cup J_0^i$. Por (4.13), concluímos que

$$\text{posto}\{\nabla h_{I_0^i}(y) \cup \nabla g_{J_0^i}(y)\} = q^i$$

para todo $y \in V(\bar{x})$, completando a demonstração. \square

Teorema 4.23 *Se \bar{x} satisfaz MFCQ, então \bar{x} satisfaz CPLD.*

Prova. Sabemos da Proposição 4.10, que

$$\left(\{\nabla h_i(\bar{x})\}_{i \in \{1, \dots, m\}}, \{\nabla g_j(\bar{x})\}_{j \in A(\bar{x})}\right) \text{ é PLI.}$$

Assim por vacuidade a CPLD é satisfeita. \square

Teorema 4.24 *Se \bar{x} satisfaz CRCQ, então \bar{x} satisfaz CPLD.*

Prova. Trivial, devido ao fato de que PLD implica LD e pelos Teoremas 4.12 e 4.15. \square

O lema seguinte é uma preparação para mostrar que a CPLD implica a condição quase-normalidade.

Lema 4.25 *Sejam $f, f_1, \dots, f_q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \in \mathcal{C}^1$ tais que $\{\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_q(a)\}$ é LI e*

$$\nabla f(x) \in [\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_q(x)]$$

(subespaço gerado) para todo x em uma vizinhança V_1 de a . Então existem vizinhanças V de a , U de $f_I(a)$ e uma função $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \varphi(f_I(x))$ para todo $x \in V$. Além disso, se $\nabla f(a) = \sum_{i=1}^q \lambda_i \nabla f_i(a)$, então $\lambda_i = \frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(f_I(a))$. Obs.:

usamos f_I para indicar $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_q \end{pmatrix}$.

Prova. Suponhamos sem perda de generalidade que as primeiras q linhas da matriz

$$(\nabla f_1(a) \dots \nabla f_q(a)) \in \mathbb{R}^{n \times q}$$

formam uma matriz inversível em $\mathbb{R}^{q \times q}$. Seja $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $F(x) =$

$$\begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_q(x) \\ x_{q+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \text{ Temos } F \in \mathcal{C}^1 \text{ e } J_F(a)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_q}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_q}(a) & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_{q+1}}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_{q+1}}(a) & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial f_q}{\partial x_n}(a) & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Como a submatriz $q \times q$ do bloco esquerdo superior é inversível, $J_F(a)$ também é inversível. Pelo Teorema da Função Inversa 1.43, existem vizinhanças $V \subset V_1$ de a e W de $F(a)$ tais que $F : V \rightarrow W$ é inversível com inversa $G : W \rightarrow V$ diferenciável.

Note que se

$$G = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix},$$

então

$$u = F(G(u)) = \begin{pmatrix} f_1(G(u)) \\ \vdots \\ f_q(G(u)) \\ g_{q+1}(u) \\ \vdots \\ g_n(u) \end{pmatrix}.$$

Donde segue que $f_i(G(u)) = u_i$, $i = 1, \dots, q$ e $g_j(u) = u_j$, $j = q + 1, \dots, n$. Derivando as q primeiras equações, obtemos

$$\nabla f_i(G(u))^T J_G(u) = (0 \cdots 1 \cdots 0) = e_i^T.$$

Defina $\Theta : W \rightarrow \mathbb{R}$ por $\Theta(u) = f(G(u))$. Assim

$$J_\Theta(u) = \nabla f(G(u))^T J_G(u).$$

Por hipótese, temos

$$\nabla f(G(u)) \in [\nabla f_1(G(u)), \dots, \nabla f_q(G(u))],$$

para todo $u \in W$. Portanto,

$$\nabla f(G(u)) = \sum_{i=1}^q \lambda_i(u) \nabla f_i(G(u))$$

e conseqüentemente,

$$J_\Theta(u) = \sum_{i=1}^q \lambda_i(u) \nabla f_i(G(u))^T J_G(u) = \sum_{i=1}^q \lambda_i(u) e_i^T = (\lambda_1(u) \ \dots \ \lambda_q(u) \ 0 \ \dots \ 0). \quad (4.14)$$

Em particular, para todo $u \in W$,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial u_j}(u) = 0, \quad j = q + 1, \dots, n.$$

Isto significa que Θ não depende das variáveis u_J , $J = \{q + 1, \dots, n\}$. Tomando por exemplo

$$b = F(a) = \begin{pmatrix} f_I(a) \\ a_J \end{pmatrix},$$

temos $\Theta \begin{pmatrix} u_I \\ u_J \end{pmatrix} = \Theta \begin{pmatrix} u_I \\ a_J \end{pmatrix}$, para todo $u = \begin{pmatrix} u_I \\ u_J \end{pmatrix} \in W$. Definindo

$$U = \text{proj}_I W = \left\{ u_I \mid \begin{pmatrix} u_I \\ u_J \end{pmatrix} \in W \right\},$$

temos que U é uma vizinhança de $f_I(a)$. Além disso,

$$x \in V \Rightarrow \begin{pmatrix} f_I(x) \\ x_J \end{pmatrix} \in W \Rightarrow \begin{pmatrix} f_I(x) \\ a_J \end{pmatrix} \in W \text{ e } f_I(x) \in U.$$

Defina então $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$\varphi(u_I) = \Theta \begin{pmatrix} u_I \\ a_J \end{pmatrix}.$$

Deste modo,

$$f(x) = f(G(F(x))) = \Theta(F(x)) = \Theta \begin{pmatrix} f_I(x) \\ x_J \end{pmatrix} = \Theta \begin{pmatrix} f_I(x) \\ a_J \end{pmatrix} = \varphi(f_I(x)).$$

Para completar a demonstração basta aplicar a definição de derivada parcial, obtendo imediatamente

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u_I) = \frac{\partial \Theta}{\partial u_i} \begin{pmatrix} u_I \\ a_J \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, q,$$

que junto com (4.14) fornece o resultado desejado. \square

A demonstração do teorema seguinte foi inspirada no trabalho de Schuverdt [36], porém com algumas modificações.

Teorema 4.26 *Se \bar{x} satisfaz CPLD, então \bar{x} satisfaz a condição quase-normalidade.*

Prova. Suponha por absurdo que \bar{x} não é quase-normal. Então existem λ_i, μ_j , não todos nulos, tais que $\mu \geq 0$,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0 \quad (4.15)$$

e para toda vizinhança V de \bar{x} existe $x \in V$ tal que $\lambda_i h_i(x) > 0$, se $\lambda_i \neq 0$ e $\mu_j g_j(x) > 0$, se $\mu_j > 0$. Esta última condição significa que existe uma sequência

$x^k \rightarrow \bar{x}$ tal que $h_i(x^k) > 0$, se $\lambda_i > 0$; $h_i(x^k) < 0$, se $\lambda_i < 0$ e $g_j(x^k) > 0$, se $\mu_j > 0$.
Sejam

$$I_0^+ = \{i \mid \lambda_i > 0\},$$

$$I_0^- = \{i \mid \lambda_i < 0\}$$

e

$$J_0 = \{j \mid \mu_j > 0\}.$$

Sabemos que $I_0^+ \cup I_0^- \cup J_0 \neq \emptyset$. Vamos supor que $I_0^+ \neq \emptyset$. Os casos em que $I_0^- \neq \emptyset$ ou $J_0 \neq \emptyset$ são inteiramente análogos. Considere $l \in I_0^+$. De (4.15) obtemos

$$-\lambda_l \nabla h_l(\bar{x}) = \sum_{I_0^+ - \{l\}} \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{I_0^-} \lambda_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{J_0} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}).$$

Temos $\nabla h_l(\bar{x}) \neq 0$, pois do contrário a CPLD implicaria $\nabla h_l(y) = 0$ para todo y em uma vizinhança de \bar{x} . Daí h_l seria constante nesta vizinhança. Em particular, $h_l(x^k) = h_l(\bar{x}) = 0$, uma contradição. Pelo Lema de Caratheodory 1.52, existem $I_+ \subset I_0^+ - \{l\}$, $I_- \subset I_0^-$, $J \subset J_0$ e escalares $\bar{\lambda}_i$, $\bar{\mu}_j$, tais que $\bar{\lambda}_i > 0$, se $i \in I_+$; $\bar{\lambda}_i < 0$, se $i \in I_-$; $\bar{\mu}_j > 0$, se $j \in J$;

$$-\lambda_l \nabla h_l(\bar{x}) = \sum_{I_+} \bar{\lambda}_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_{I_-} \bar{\lambda}_i \nabla h_i(\bar{x}) + \sum_J \bar{\mu}_j \nabla g_j(\bar{x}) \quad (4.16)$$

e $\{\nabla h_{I_+}(\bar{x}), \nabla h_{I_-}(\bar{x}), \nabla g_J(\bar{x})\}$ é LI. Pelo Corolário 4.4,

$$\{\nabla h_{I_+}(y), \nabla h_{I_-}(y), \nabla g_J(y)\} \text{ é LI} \quad (4.17)$$

para todo y em uma vizinhança V_1 de \bar{x} . A relação (4.16) diz que

$$(\{\nabla h_l(\bar{x}), \nabla h_{I_+}(\bar{x}), \nabla h_{I_-}(\bar{x})\}, \{\nabla g_J(\bar{x})\}) \text{ é PLD.}$$

Assim a CPLD garante que

$$(\{\nabla h_l(y), \nabla h_{I_+}(y), \nabla h_{I_-}(y)\}, \{\nabla g_J(y)\}) \text{ é PLD}$$

para todo y em uma vizinhança $V_2 \subset V_1$ de \bar{x} . Portanto, usando (4.17), concluimos que

$$\nabla h_l(y) \in [\nabla h_{I_+}(y), \nabla h_{I_-}(y), \nabla g_J(y)]$$

(subespaço gerado), para todo $y \in V_2$, o mesmo ocorrendo com $\nabla(-\lambda_l h_l)(y)$. O Lema 4.25 pode então ser aplicado para fornecer uma função $\varphi \in \mathcal{C}^1$, definida em uma vizinhança U de $(h_{I_+}(\bar{x}), h_{I_-}(\bar{x}), g_J(\bar{x})) = 0$ e uma vizinhança $V \subset V_2$ de \bar{x} , tal que

$$-\lambda_l h_l(y) = \varphi(h_{I_+}(y), h_{I_-}(y), g_J(y))$$

para todo $y \in V$;

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(0) = \bar{\lambda}_i, \quad i \in I_+ \cup I_-$$

e

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u_j}(0) = \bar{\mu}_j, \quad j \in J.$$

Note que

$$\varphi(0) = \varphi(h_{I_+}(\bar{x}), h_{I_-}(\bar{x}), g_J(\bar{x})) = -\lambda_l h_l(\bar{x}) = 0 \quad \text{e}$$

$$\nabla \varphi(v)^T = (\nabla_{I_+} \varphi(v)^T \quad \nabla_{I_-} \varphi(v)^T \quad \nabla_J \varphi(v)^T).$$

Como $\nabla_{I_+} \varphi(0) = \bar{\lambda}_{I_+} > 0$, $\nabla_{I_-} \varphi(0) = \bar{\lambda}_{I_-} < 0$ e $\nabla_J \varphi(0) = \bar{\mu}_J > 0$, a continuidade de $\nabla \varphi$ assegura que existe uma vizinhança $U_1 \subset U$ de 0 tal que $\nabla_{I_+} \varphi(v) > 0$, $\nabla_{I_-} \varphi(v) < 0$ e $\nabla_J \varphi(v) > 0$ para todo $v \in U_1$. Pelo teorema do valor médio, temos

$$\varphi(u) = \varphi(u) - \varphi(0) = \nabla \varphi(\xi u)^T (u - 0) = \nabla \varphi(\xi u)^T u,$$

onde $\xi \in (0, 1)$. Em particular, para $u^k = (h_{I_+}(x^k), h_{I_-}(x^k), g_J(x^k))$, temos

$$-\lambda_l h_l(x^k) = \varphi(u^k) = \nabla \varphi(\xi u^k)^T u^k. \quad (4.18)$$

Como $l \in I_0^+$, temos

$$\lambda_l > 0 \quad \text{e} \quad h_l(x^k) > 0. \quad (4.19)$$

Por outro lado, $u^k \in U_1$ e portanto $\xi u^k \in U_1$, para todo k suficientemente grande, donde segue que $\nabla_{I_+} \varphi(\xi u^k) > 0$, $\nabla_{I_-} \varphi(\xi u^k) < 0$ e $\nabla_J \varphi(\xi u^k) > 0$. Além disso, $h_{I_+}(x^k) > 0$, $h_{I_-}(x^k) < 0$ e $g_J(x^k) > 0$. Assim,

$$\nabla \varphi(\xi u^k)^T u^k = \nabla_{I_+} \varphi(\xi u^k)^T h_{I_+}(x^k) + \nabla_{I_-} \varphi(\xi u^k)^T h_{I_-}(x^k) + \nabla_J \varphi(\xi u^k)^T g_J(x^k) > 0,$$

que junto com (4.18) e (4.19) nos leva a uma contradição. \square

Mostraremos agora a relação entre a condição de qualificação quase-normalidade e quase-regularidade. Iniciamos com algumas considerações e apresentando alguns lemas preparatórios. Primeiramente, em virtude do Lema 4.17, vamos assumir que $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}$.

Considere

$$\bar{J} = \{j \in A(\bar{x}) \mid \nabla g_j(\bar{x})^T d = 0 \quad \forall d \in D(\bar{x})\},$$

$$\tilde{D}(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_j(\bar{x})^T d = 0, j \in \bar{J}, \nabla g_j(\bar{x})^T d < 0, j \in A(\bar{x}) \setminus \bar{J}\}.$$

Definimos o conjunto $\tilde{\Omega}$ como

$$\tilde{\Omega} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0, j \in \bar{J}\}$$

e denotamos o cone tangente de $\tilde{\Omega}$ a partir de \bar{x} , por $T_{\tilde{\Omega}}(\bar{x})$.

O caso onde o conjunto \bar{J} é vazio, dizemos por convenção que $\tilde{\Omega} = \mathbb{R}^n$, neste caso, todo vetor $\bar{x} \in \tilde{\Omega}$ é quase-normal e $T_{\tilde{\Omega}}(\bar{x}) = D_{\tilde{\Omega}}(\bar{x})$.

É fácil ver que o cone viável linearizado de $\tilde{\Omega}$ a partir de \bar{x} é

$$D_{\tilde{\Omega}}(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_j(\bar{x})^T d \leq 0, j \in \bar{J}\},$$

e que o conjunto das restrições ativas de $\tilde{\Omega}$ é \bar{J} , isto é, $A_{\tilde{\Omega}}(x) = \bar{J}$.

Lema 4.27 Dado $d \in D_{\tilde{\Omega}}(\bar{x})$, temos $\nabla g_j(\bar{x})^T d = 0$ para todo $j \in \bar{J}$.

Prova. Suponha por contradição que existe $l \in \bar{J}$ tal que

$$\nabla g_l(\bar{x})^T d < 0. \tag{4.20}$$

Para simplificar a notação, denote $I = A(\bar{x}) \setminus \bar{J}$ e $r = \text{card}(I)$. Pela definição de \bar{J} , dado $i \in I$, existe $d^i \in D(\bar{x})$ tal que

$$\nabla g_i(\bar{x})^T d^i < 0.$$

Defina $\hat{d} = \frac{1}{r} \sum_{i \in I} d^i$. Pela convexidade de $D(\bar{x})$, $\hat{d} \in D(\bar{x})$. Conseqüentemente

$$\nabla g_j(\bar{x})^T \hat{d} = 0 \quad \forall j \in \bar{J}.$$

Além disso,

$$\nabla g_i(\bar{x})^T \hat{d} < 0 \quad \forall i \in I.$$

Defina a função $t \mapsto \varphi(t) = \nabla g_I(\bar{x})^T \left((1-t)\hat{d} + t\bar{d} \right)$. Note que $\varphi(0) = \nabla g_I(\bar{x})^T \hat{d} < 0$. Por continuidade, existe $\bar{t} > 0$ tal que $\varphi(\bar{t}) < 0$. Considere $\bar{d} = (1-\bar{t})\hat{d} + \bar{t}\bar{d}$. Assim $\nabla g_I(\bar{x})^T \bar{d} < 0$. Como $\bar{d} \in D_{\tilde{\Omega}}(\bar{x})$, pois $D_{\tilde{\Omega}}(\bar{x})$ é convexo, temos

$$\nabla g_{\bar{J}}(\bar{x})^T \bar{d} \leq 0.$$

Portanto $\bar{d} \in D(\bar{x})$. Como $l \in \bar{J}$

$$\nabla g_l(\bar{x})^T \bar{d} = 0.$$

Mas, por outro lado, usando o fato que $\hat{d} \in D(\bar{x})$ e (4.20), temos

$$\nabla g_l(\bar{x})^T \bar{d} = (1 - \bar{t}) \nabla g_l(\bar{x})^T \hat{d} + \bar{t} \nabla g_l(\bar{x})^T d < 0,$$

o que resulta em uma contradição. \square

Usando o lema anterior, podemos reescrever o cone viável linearizado de $\tilde{\Omega}$ a partir de \bar{x} como

$$D_{\tilde{\Omega}} = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_j(\bar{x})^T d = 0, \forall j \in \bar{J}\}.$$

Veremos no próximo lema que o fecho de $\tilde{D}(\bar{x})$ é $D(\bar{x})$, onde agora

$$D(\bar{x}) = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \nabla g_j(\bar{x})^T d \leq 0, j \in A(\bar{x})\}.$$

Lema 4.28 $D(\bar{x}) = cl(\tilde{D}(\bar{x}))$.

Prova. Seja $\bar{d} \in D(\bar{x})$. Devemos mostrar que existe $(d^k) \subset \tilde{D}(\bar{x})$ tal que $d^k \rightarrow \bar{d}$. Caso $\bar{J} = A(\bar{x})$, temos $\bar{d} \in \tilde{D}(\bar{x})$ e assim podemos escolher $d^k = \bar{d}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Se $\bar{J} \neq A(\bar{x})$, note que para todo $j \in A(\bar{x}) \setminus \bar{J}$, existe $\hat{d}_j \in D(\bar{x})$ tal que $\nabla g_j(\bar{x})^T \hat{d}_j < 0$. Seja $r = \text{card}(A(\bar{x}) \setminus \bar{J})$. Defina

$$d^k = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \bar{d} + \frac{1}{rk} \sum_{i \in A(\bar{x}) \setminus \bar{J}} \hat{d}_i.$$

Como $D(\bar{x})$ é convexo, $d^k \in D(\bar{x})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim, se $j \in \bar{J}$, então $\nabla g_j(\bar{x})^T d^k = 0$. Caso $j \in A(\bar{x}) \setminus \bar{J}$, temos

$$\nabla g_j(\bar{x})^T d^k = \left(1 - \frac{1}{k}\right) \nabla g_j(\bar{x})^T \bar{d} + \frac{1}{rk} \sum_{\substack{i \in A(\bar{x}) \setminus \bar{J} \\ i \neq j}} \nabla g_j(\bar{x})^T \hat{d}_i + \nabla g_j(\bar{x})^T \hat{d}_j < 0.$$

Portanto $d^k \in \tilde{D}(\bar{x})$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, vemos claramente que $d^k \rightarrow \bar{d}$, ou seja, $\bar{d} \in cl(\tilde{D}(\bar{x}))$.

Reciprocamente, se $\bar{d} \in \tilde{D}(\bar{x})$, então $\nabla g_j(\bar{x})^T \bar{d} \leq 0$, para todo $j \in A(\bar{x})$. Logo, $\bar{d} \in D(\bar{x})$. Portanto, $\tilde{D}(\bar{x}) \subset D(\bar{x})$. Como $D(\bar{x})$ é fechado, o Lema 1.23 garante que $cl(\tilde{D}(\bar{x})) \subset D(\bar{x})$. Isto completa a prova. \square

Lema 4.29 *Um ponto $\bar{x} \in \Omega$ é quase-normal em Ω se, e somente se, é quase-normal em $\tilde{\Omega}$.*

Prova.

Observe que $\Omega \subset \tilde{\Omega}$. Assim, se \bar{x} é quase-normal em Ω , então é quase-normal em $\tilde{\Omega}$, pois $\bar{J} \subset A(\bar{x})$.

Para provar a recíproca, suponha por contradição que \bar{x} é quase-normal em $\tilde{\Omega}$, mas não é quase-normal em Ω .

Como \bar{x} não é quase-normal em Ω , existe $\mu_j \geq 0$ não todos nulos com $j \in A(\bar{x})$ satisfazendo

$$\sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) = 0 \quad (4.21)$$

e tal que para toda vizinhança V de \bar{x} , existe $x \in V$ com $\mu_j g_j(x) > 0$ para todo j com $\mu_j > 0$.

Como \bar{x} é quase-normal em $\tilde{\Omega}$ e $A_{\tilde{\Omega}}(\bar{x}) = \bar{J}$, existe $i \in A(\bar{x}) \setminus \bar{J}$ tal que $\mu_i > 0$, pois caso contrário \bar{x} não seria quase-normal em $\tilde{\Omega}$, e existe $d \in D(\bar{x})$ tal que para $i \in A(\bar{x}) \setminus \bar{J}$ temos

$$\nabla g_i(\bar{x})^T d < 0. \quad (4.22)$$

Multiplicando a Equação (4.21) por d , temos

$$\sum_{j \in A(\bar{x})} \mu_j \nabla g_j(\bar{x})^T d = 0. \quad (4.23)$$

Como $A(\bar{x}) = \bar{J} \cup \{A(\bar{x}) \setminus \bar{J}\}$, podemos reescrever a Equação (4.23) como

$$\sum_{j \in \bar{J}} \mu_j \nabla g_j(\bar{x})^T d + \sum_{\substack{j \in A(\bar{x}) \setminus \bar{J} \\ j \neq i}} \mu_j \nabla g_j(\bar{x})^T d + \mu_i \nabla g_i(\bar{x})^T d = 0.$$

Pela definição de $D(\bar{x})$, do conjunto \bar{J} e pela Equação (4.22), temos que a expressão acima não pode ser nula, chegando a uma contradição. Portanto \bar{x} é quase-normal em Ω . \square

Lema 4.30 *Se $T_{\tilde{\Omega}}(\bar{x}) = D_{\tilde{\Omega}}(\bar{x})$ então $T(\bar{x}) = D(\bar{x})$, onde $D_{\tilde{\Omega}}(\bar{x})$ é o cone viável linearizado de $\tilde{\Omega}$ a partir de \bar{x} .*

Prova. Vemos facilmente que $\tilde{D}(\bar{x}) \subset D_{\tilde{\Omega}}(\bar{x})$. Logo $\tilde{D}(\bar{x}) \subset T_{\tilde{\Omega}}(\bar{x})$.

Seja $d \in \tilde{D}(\bar{x})$ com $d \neq 0$. Pela definição de $T_{\tilde{\Omega}}(\bar{x})$, existe uma seqüência $(x^k) \subset \tilde{\Omega}$ com $x^k \rightarrow \bar{x}$ tal que

$$\frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} \rightarrow \frac{d}{\|d\|}.$$

Devemos mostrar que $(x^k) \subset \Omega$.

Temos para todo j ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{g_j(x^k) - g_j(\bar{x})}{\|x^k - \bar{x}\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\nabla g_j(\bar{x})^T (x^k - \bar{x})}{\|x^k - \bar{x}\|} = \nabla g_j(\bar{x})^T \frac{d}{\|d\|}.$$

Para $j \in A(\bar{x}) \setminus \bar{J}$ temos $\nabla g_j(\bar{x})^T \frac{d}{\|d\|} < 0$. Com isso, tomando $j \in A(\bar{x}) \setminus \bar{J}$, temos $g_j(\bar{x}) = 0$ e pelo Teorema da Preservação do Sinal 1.42, temos $g_j(x^k) < 0$ para k suficientemente grande. E para $j \in \bar{J}$, decorre da definição de $\tilde{\Omega}$ que $g_j(x^k) \leq 0$. Para $j \notin A(\bar{x})$ temos $g_j(\bar{x}) < 0$. Portanto $g_j(x^k) < 0$ para k suficientemente grande. Assim $(x^k) \subset \Omega$ e portanto $d \in T(\bar{x})$. Provamos assim que $\tilde{D}(\bar{x}) \subset T(\bar{x})$. Pelo Lema 3.14, $T(\bar{x})$ é fechado, logo podemos aplicar os Lemas 4.28 e 1.23 para concluir que $D(\bar{x}) = cl(\tilde{D}(\bar{x})) \subset T(\bar{x})$. \square

Lema 4.31 *Se todo ponto \bar{x} quase-normal em $\tilde{\Omega}$ satisfaz $T_{\tilde{\Omega}}(\bar{x}) = D_{\tilde{\Omega}}(\bar{x})$, então todo ponto \bar{x} quase-normal em Ω satisfaz $T(\bar{x}) = D(\bar{x})$.*

Prova. Considere um ponto \bar{x} quase-normal em Ω . Pelo Lema 4.29, \bar{x} é quase-normal em $\tilde{\Omega}$. Como por hipótese $T_{\tilde{\Omega}}(\bar{x}) = D_{\tilde{\Omega}}(\bar{x})$, concluímos pelo Lema 4.30 que $T(\bar{x}) = D(\bar{x})$. \square

Em virtude dos Lemas 4.28 até 4.31 podemos assumir sem perda de generalidade que todas as restrições são ativas em \bar{x} .

Teorema 4.32 *Se \bar{x} satisfaz a condição de quase-normalidade, então \bar{x} satisfaz a condição quase-regularidade.*

Prova. Se $\bar{J} = \emptyset$, então $T_{\tilde{\Omega}}(\bar{x}) = D_{\tilde{\Omega}}(\bar{x}) = \mathbb{R}^n$ e assim o Lema 4.30 implica $T(\bar{x}) = D(\bar{x})$. Considere então $\bar{J} \neq \emptyset$. Vamos mostrar que se $\bar{x} \in \Omega$ é quase-normal em $\tilde{\Omega}$ então $T_{\tilde{\Omega}}(\bar{x}) = D_{\tilde{\Omega}}(\bar{x})$, e utilizar o resultado do Lema 4.31.

Sabendo do Lema 3.15 que $T_{\tilde{\Omega}}(\bar{x}) \subset D_{\tilde{\Omega}}(\bar{x})$, resta mostrar que $D_{\tilde{\Omega}}(\bar{x}) \subset T_{\tilde{\Omega}}(\bar{x})$. Para isso, seja d um vetor não nulo em $D_{\tilde{\Omega}}(\bar{x})$. Pelo Lema 4.27

$$\nabla g_j(\bar{x})^T d = 0, \quad j \in \bar{J}. \quad (4.24)$$

Para cada $t > 0$, escolhemos um $x(t)$ que é solução do problema

$$(PQ) \quad \begin{array}{ll} \text{minimizar} & \frac{1}{2t} \|x - \bar{x} - td\|^2 \\ \text{sujeito a} & g_j(x) \leq 0, \quad j \in \bar{J} \end{array}$$

(Tal escolha é possível, pois a função objetivo é coerciva e o conjunto viável é fechado, Teorema 1.38). Pelas condições de otimalidade de Fritz-John 3.21 aplicadas no Problema (PQ), existem multiplicadores $\mu_0(t), \mu_j(t) \in \bar{J}$ tais que

$$(\mu_0(t))^2 + \sum_{j \in \bar{J}} (\mu_j(t))^2 = 1, \quad \mu_j(t) \geq 0, \quad \forall j. \quad (4.25)$$

$$\mu_0(t) \left(\frac{x(t) - \bar{x}}{t} - d \right) + \sum_{j \in \bar{J}} \mu_j(t) \nabla g_j(x(t)) = 0 \quad (4.26)$$

e para toda vizinhança V de $x(t)$ existe um $x \in V$ tal que se $\mu_j(t) > 0$ então $\mu_j(t)g_j(x) > 0$. Mostraremos que para alguma seqüência t_k convergindo para 0, temos $\frac{x(t_k) - \bar{x}}{t_k} \rightarrow d$, caracterizando pelo Teorema 3.12 que $d \in T_{\bar{\Omega}}(\bar{x})$.

De fato, como $x(t)$ é solução do Problema (PQ) temos

$$\|x(t) - \bar{x} - td\|^2 \leq \|\bar{x} - \bar{x} - td\|^2 = \|td\|^2.$$

Segue que

$$\|x(t) - \bar{x}\| - \|td\| \leq \|x(t) - \bar{x} - td\| = \|td\|,$$

no qual obtemos $\|x(t) - \bar{x}\| \leq 2\|td\|$, e então

$$\frac{\|x(t) - \bar{x}\|}{t} \leq 2\|d\|, \quad \forall t > 0.$$

Em particular

$$\frac{\|x\left(\frac{1}{k}\right) - \bar{x}\|}{\frac{1}{k}} \leq 2\|d\|, \quad \forall k > 0.$$

Como esta seqüência é limitada, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass 1.20, ela possui uma subseqüência convergente. Seja t_k uma subseqüência de $\frac{1}{k}$ tal que $\frac{x(t_k) - \bar{x}}{t_k}$ e $\mu_j(t_k)$ convergem. Digamos,

$$\begin{aligned} \frac{x(t_k) - \bar{x}}{t_k} &\rightarrow \bar{d} \\ \mu_j(t_k) &\rightarrow \mu_j. \end{aligned}$$

Com isso

$$\frac{x(t_k) - \bar{x} - t_k \bar{d}}{t_k} \rightarrow 0,$$

isto é,

$$\|x(t_k) - \bar{x} - t_k \bar{d}\| = o(t_k),$$

e pelo Teorema 3.12, $\bar{d} \in T_{\bar{\Omega}}(\bar{x})$ e com isso $\bar{d} \in D_{\bar{\Omega}}(\bar{x})$. Pelo Lema 4.27 temos que

$$\nabla g_j(\bar{x})^T \bar{d} = 0, \quad j \in \bar{J}. \quad (4.27)$$

Como $\mu_j(t_k) \rightarrow \mu_j$, pelas Equações (4.25) e (4.26), temos

$$\begin{aligned} (\mu_0)^2 + \sum_{j=1}^p (\mu_j)^2 &= 1, \quad \mu_j \geq 0, \quad j = 0, 1, \dots, p, \\ \mu_0(\bar{d} - d) + \sum_{j=1}^p \mu_j \nabla g_j(\bar{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Se $\mu_j = 0$ para todo $j = 1, \dots, p$, não há o que provar. Desta forma, considere

$$J_u = \{j \in \{1, \dots, p\} \mid \mu_j > 0\}.$$

Existe k_0 tal que $\mu_j(t_k) > 0$ para todo $j \in J_u$ e para todo $k \geq k_0$. Dada uma vizinhança $V(\bar{x})$ tome $\bar{k} \geq k_0$ tal que $x(t_{\bar{k}}) \in V(\bar{x})$. Então existe $x \in V(\bar{x})$ tal que $\mu_j(t_{\bar{k}}) > 0$. Portanto $\mu_j(t_{\bar{k}})g_j(x) > 0$. Assim, para $j \in J_u$, temos $\mu_j g_j(x) > 0$.

Pela condição quase-normalidade, $\mu_0 > 0$. Multiplicando (4.28) por d e usando (4.24), vemos que

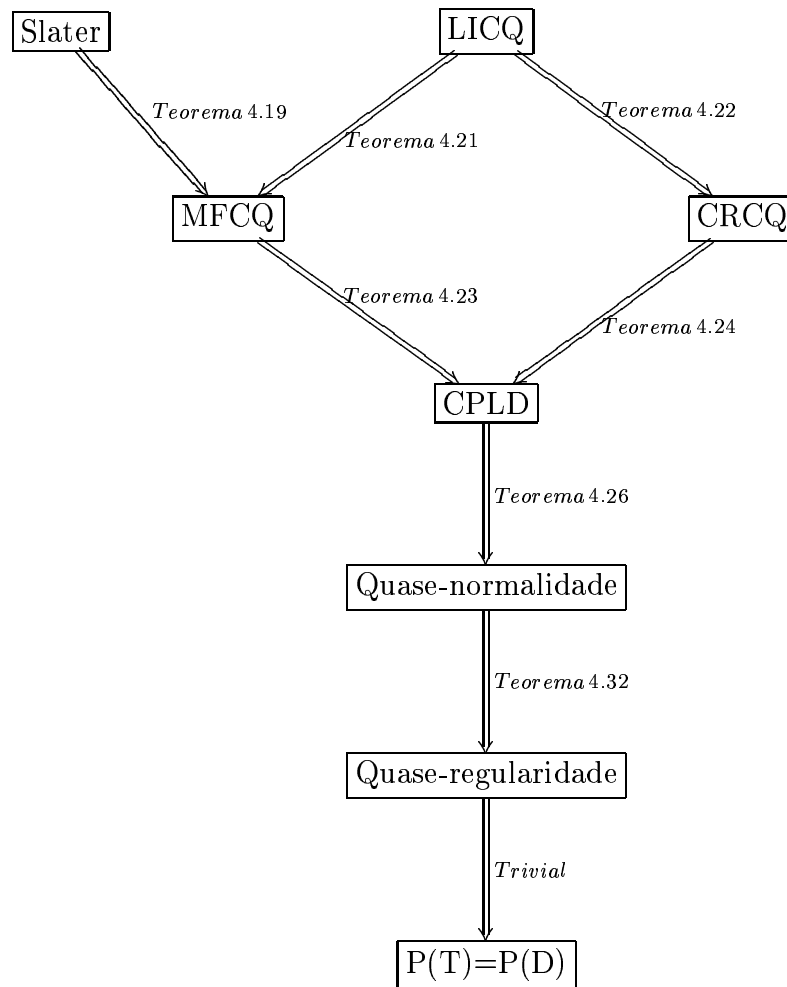
$$d^T(\bar{d} - d) = 0.$$

Da mesma forma, multiplicando (4.28) por \bar{d} e usando (4.27), vemos que

$$\bar{d}^T(\bar{d} - d) = 0.$$

Assim, $d = \bar{d}$. Logo $T_{\bar{\Omega}}(\bar{x}) = D_{\bar{\Omega}}(\bar{x})$, completando a demonstração. \square

A condição de qualificação quase-regularidade implica trivialmente na condição $P(T(\bar{x})) = P(D(\bar{x}))$. As relações entre as condições de qualificação demonstradas nesta dissertação são ilustradas no diagrama abaixo.



4.2.2 Contra-exemplos

Na seção anterior demonstramos as implicações válidas entre as diferentes condições de qualificação discutidas nesta dissertação. Nesta seção apresentamos contra-exemplos para aquelas implicações, mostrando que as condições de qualificação não são semelhantes.

O Teorema 4.21 garante que a condição LICQ implica na condição MFCQ, mas não verificamos a possibilidade de existirem pontos que satisfaçam MFCQ mas que não satisfaçam LICQ. O próximo contra-exemplo mostra que esta situação acontece, concluindo assim que MFCQ é estritamente mais fraca que LICQ.

Contra-exemplo 1 *A condição MFCQ não implica condição LICQ.*

Considere as funções $g_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, 2, 3$) definidas por

$$\begin{aligned}
 g_1(x) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 - 2 \\
 g_2(x) &= (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 - 2 \\
 g_3(x) &= -x_1,
 \end{aligned}$$

o conjunto $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, 3\}$ e o ponto viável $\bar{x} = (0, 0)^T$.

Temos que

$$\nabla g_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla g_3(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como esses vetores são linearmente dependentes, \bar{x} não satisfaz LICQ. Mas \bar{x} satisfaz MFCQ, ou seja, existe $d \in \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla g_j(\bar{x})^T d < 0$ para $j = 1, 2, 3$. Basta tomar $d = \begin{pmatrix} 1.6 \\ 0.7 \end{pmatrix}$ como ilustrado na Figura 4.2. \square

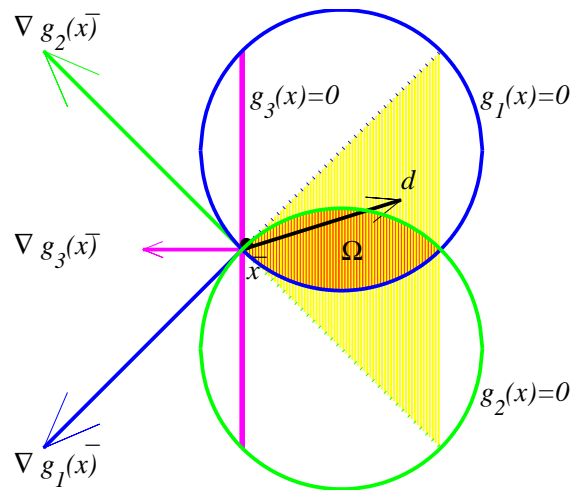


Figura 4.2: Contra-exemplo 1.

Observe que a condição LICQ implica nas condições MFCQ e CRCQ. Mas como veremos adiante, essas condições não se implicam mutuamente.

Contra-exemplo 2 A condição CRCQ não implica na condição MFCQ e nem LICQ.

Considere as funções $g_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, 2$) definidas por

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x \\ g_2(x) &= -x, \end{aligned}$$

o conjunto viável $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g_j(x) \leq 0, j = 1, 2\}$ e o ponto viável $\bar{x} = (0, 0)^T$.

Temos que

$$\nabla g_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como esses vetores são linearmente dependentes, temos que

$$\text{posto}(\{\nabla g_1(\bar{x}), \nabla g_2(\bar{x})\}) = 1, \quad (4.29)$$

e não vale LICQ. Por outro lado, observe que, para todo $y \in B(\bar{x}, 1)$,

$$\nabla g_1(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(y) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, existe uma vizinhança de \bar{x} , $V = B(\bar{x}, 1)$, em que

$$\text{posto}(\{\nabla g_1(y), \nabla g_2(y)\}) = 1.$$

Logo \bar{x} satisfaz CRCQ.

É fácil ver que não existe $d \in \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla g_j(\bar{x})^T d < 0$ para $j = 1, 2$. Portanto \bar{x} não satisfaz MFCQ. \square

Contra-exemplo 3 *A condição MFCQ não implica na condição CRCQ.*

Considere as funções $g_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, 2$) definidas por

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x_1 + x_2^2 \\ g_2(x) &= x_1, \end{aligned}$$

o conjunto viável $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2\}$ e o ponto viável $\bar{x} = (0, 0)^T$.

Temos que

$$\nabla g_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tome $d = (d_1, d_2)$ com $d_1 < 0$. Desta forma $\nabla g_j(\bar{x})^T d < 0$ para $j = 1, 2$. Logo \bar{x} satisfaz MFCQ.

Observe que $\text{posto}(\{\nabla g_1(\bar{x}), \nabla g_2(\bar{x})\}) = 1$. Considere $\varepsilon > 0$, uma vizinhança $V = B(\bar{x}, \varepsilon)$ e $y = \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)^T \in V$. Temos que

$$\nabla g_1(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Neste caso $\text{posto}(\{\nabla g_1(y), \nabla g_2(y)\}) = 2$ em toda vizinhança $V = B(\bar{x}, \varepsilon)$. Portanto a condição CRCQ não é satisfeita em \bar{x} . \square

Os Teoremas 4.23 e 4.24 garantem, respectivamente, que MFCQ e CRCQ implicam CPLD. O próximo contra-exemplo, apresentado em [2], mostra que não valem as recíprocas.

Contra-exemplo 4 *A condição CPLD não implica na condição MFCQ e nem CRCQ.*

Considere as funções $g_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, \dots, 4$) definidas por

$$\begin{aligned} g_1(x) &= x_1 \\ g_2(x) &= x_1 + x_2^2 \\ g_3(x) &= x_1 + x_2 \\ g_4(x) &= -x_1 - x_2, \end{aligned}$$

o conjunto viável $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, \dots, 4\}$ e o ponto viável $\bar{x} = (0, 0)^T$.

Temos que

$$\nabla g_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_3(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla g_4(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para verificar que \bar{x} satisfaz CPLD, assumamos μ_j não todos nulos tais que $\mu_j \geq 0$ para todo $j = 1, \dots, 4$.

Considere $J_0 \subset A(\bar{x})$ e denote $\nabla J_0 = \{\nabla g_j(\bar{x})\}_{j \in J_0}$.

Tome inicialmente, $J_0 = \{3, 4\}$. Observe que, se $\mu_3 \nabla g_3(\bar{x}) + \mu_4 \nabla g_4(\bar{x}) = 0$, então $\mu_3 = \mu_4$. Como g_3 e g_4 são lineares, temos que $\{\nabla g_3(y), \nabla g_4(y)\}$ é LD para todo $y \in \mathbb{R}^2$. Assim, para este J_0 , \bar{x} satisfaz a CPLD-original e portando, \bar{x} satisfaz a CPLD.

Como subconjuntos de $A(\bar{x})$ que contêm $J_0 = \{3, 4\}$ são PLD, a CPLD-original se verifica em \bar{x} considerando tais subconjuntos. Os casos onde subconjuntos J_1 de $A(\bar{x})$ que não contêm $J_0 = \{3, 4\}$, os multiplicadores associados são todos nulos, ou ∇J_1 são LI. Desta forma, para esses subconjuntos não há o que provar.

Para verificar que \bar{x} não satisfaz CRCQ, considere agora $J_0 = \{2, 3, 4\}$, $\varepsilon > 0$, uma vizinhança $V = B(\bar{x}, \varepsilon)$ e $y = \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)^T \in V$. Assim,

$$\nabla g_2(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \nabla g_3(y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla g_4(y) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Observe que ∇J_0 é LD e que $\{\nabla g_2(y), \nabla g_3(y), \nabla g_4(y)\}$ é LI. Logo pelo Teorema 4.12, \bar{x} não satisfaz CRCQ.

Observe que não existe $d \in \mathbb{R}^2$, tal que $\nabla g_3(\bar{x})^T d < 0$ e $\nabla g_4(\bar{x})^T d < 0$, portanto \bar{x} não satisfaz MFCQ. \square

O Teorema 4.26 garante que CPLD implica quase-normalidade. Veremos a seguir, um contra-exemplo, apresentado em [2], que mostra que a recíproca não é verdadeira.

Contra-exemplo 5 *A condição quase-normalidade não implica na condição CPLD.*

Considere as funções $h_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) definidas por

$$\begin{aligned} h_1(x) &= x_2 e^{x_1} \\ h_2(x) &= x_2, \end{aligned}$$

o conjunto viável $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid h_i(x) = 0, \quad i = 1, 2\}$ e o ponto viável $\bar{x} = (0, 0)^T$.

Temos que

$$\nabla h_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla h_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Fazendo $\lambda_1 \nabla h_1(\bar{x}) + \lambda_2 \nabla h_2(\bar{x}) = 0$ vemos que $\lambda_1 = -\lambda_2$. Desta forma, se $\lambda_1 h_1(y) > 0$, então $\lambda_2 h_2(y) < 0$, pois $h_1(y)$ tem o mesmo sinal que $h_2(y)$ para todo $y \in \mathbb{R}^2$. Assim, não existe λ_1, λ_2 satisfazendo (i)-(iv) da Definição 4.16. Portanto, \bar{x} satisfaz a condição quase-normalidade.

Para mostrar que \bar{x} não satisfaz CPLD, considere $\varepsilon > 0$, uma vizinhança $V = B(\bar{x}, \varepsilon)$ e $y = \left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right)^T \in V$. Assim, $\{\nabla h_1(y), \nabla h_2(y)\}$ é LI para todo $y \in V$. \square

Veremos a seguir um contra-exemplo, apresentado como um exercício em [5, pág. 355], para a recíproca do Teorema 4.32.

Contra-exemplo 6 *A condição quase-regularidade não implica na condição quase-normalidade.*

Considere as funções $h_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) definidas por

$$\begin{aligned} h_1(x) &= x_2 \\ h_2(x) &= \begin{cases} x_1^4 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_1}\right) - x_2, & \text{se } x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}, \end{aligned}$$

e o conjunto viável $\Omega = \{x \mid h_1(x) = 0, h_2(x) = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ e o ponto viável $\bar{x} = (0, 0)^T$.

Temos que

$$\nabla h_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla h_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos facilmente que, $D(\bar{x}) = \{(d_1, 0) \mid d_1 \in \mathbb{R}\}$. Sabemos do Lema 3.15, que $T(\bar{x}) \subset D(\bar{x})$. Assim, se $d = (d_1, d_2) \in T(\bar{x})$, então $d_2 = 0$. Para obter $T(\bar{x})$, considere inicialmente a seqüência viável $x^k = (x_1^k, 0)$, que converge para \bar{x} , dada por $x_1^k = \frac{1}{k\pi}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Desta forma, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(x_1^k, 0)}{\sqrt{(x_1^k)^2}} = (1, 0).$$

Assim, $d = (1, 0) \in T(\bar{x})$.

Considere agora, a seqüência viável $x^k = (x_1^k, 0)$, que converge para \bar{x} , dada por $x_1^k = \frac{-1}{k\pi}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Desta forma, temos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(x_1^k, 0)}{\sqrt{(x_1^k)^2}} = (-1, 0).$$

Assim, $d = (-1, 0) \in T(\bar{x})$.

Como $T(\bar{x})$ é cone, temos para ambos os casos que, $\alpha d \in T(\bar{x})$ para todo $\alpha \geq 0$. Portanto $T(\bar{x}) = \{(d_1, 0) \mid d_1 \in \mathbb{R}\} = D(\bar{x})$.

Para verificar que \bar{x} não satisfaz a condição quase-normalidade, tome $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Assim, $\lambda_1 \nabla h_1(\bar{x}) + \lambda_2 \nabla h_2(\bar{x}) = 0$. Resta mostrar que para toda vizinhança $V(\bar{x})$ existe $\hat{x} \in V(\bar{x})$ tal que $h_2(\hat{x}) > 0$. Tome $\hat{x} = (\hat{x}_1, 0)^T$ com $\hat{x}_1 = \frac{1}{\pi/2 + 2k\pi}$. Para k suficientemente grande, temos $\hat{x} \in V(\bar{x})$. Além disso, $\lambda_2 h_2(\hat{x}) = h_2(\hat{x}) > 0$, verificando assim que \bar{x} não satisfaz a condição quase-normalidade. Veja Figura 4.3. \square

Contra-exemplo 7 A condição $P(T(\bar{x})) = P(D(\bar{x}))$ não implica na condição quase-regularidade.

Considere as funções $h_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $g_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) definidas por

$$\begin{aligned} h_1(x) &= x_1 x_2 \\ g_1(x) &= -x_1 \\ g_2(x) &= -x_2, \end{aligned}$$

o conjunto viável $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid h_1(x) = 0, g_i(x) \leq 0 \quad i = 1, 2\}$ e o ponto viável $\bar{x} = (0, 0)^T$.

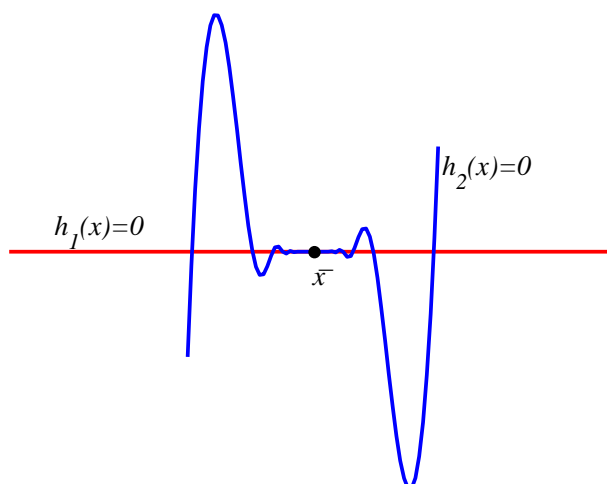


Figura 4.3: Contra-exemplo 6.

Temos que

$$\nabla h_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla g_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla g_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Vemos facilmente que $D(\bar{x}) = \{(d_1, d_2) \mid d_1 \geq 0, d_2 \geq 0\}$. Para obter $T(\bar{x})$, note inicialmente que $(1, 0)^T$ e $(0, 1)^T$ pertencem a $T(\bar{x})$. Considere agora $d = (d_1, d_2)$ uma direção tangente não nula arbitrária. Temos $d_1 \geq 0$ e $d_2 \geq 0$, pois pelo Lema 3.15, sabemos que $T(\bar{x}) \subset D(\bar{x})$. Seja $x^k = (x_1^k, x_2^k)$ uma seqüência viável convergindo para \bar{x} , tal que $\frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} \rightarrow \frac{d}{\|d\|}$. Desse modo temos

$$\frac{x_1^k}{\|x^k\|} \rightarrow \frac{d_1}{\|d\|} \quad \text{e} \quad \frac{x_2^k}{\|x^k\|} \rightarrow \frac{d_2}{\|d\|}. \quad (4.30)$$

Observe que $d_1 = 0$ ou $d_2 = 0$, pois do contrário, isto é, se fosse $d_1 > 0$ e $d_2 > 0$, a relação (4.30) implicaria $x_1^k > 0$ e $x_2^k > 0$ para k suficientemente grande, contradizendo o fato de que $x_1^k x_2^k = 0$. Desta forma, segue que $T(\bar{x}) = \{(d_1, d_2) \mid d_1 \geq 0, d_2 \geq 0, d_1 d_2 = 0\}$, concluindo assim que $T(\bar{x}) \neq D(\bar{x})$.

Para verificar a igualdade entre o polar de $T(\bar{x})$ e o polar de $D(\bar{x})$, basta utilizar a definição de polar, obtendo assim $P(T(\bar{x})) = P(D(\bar{x})) = \{(d_1, d_2) \mid d_1 \leq 0, d_2 \leq 0\}$. Veja Figura 4.4.

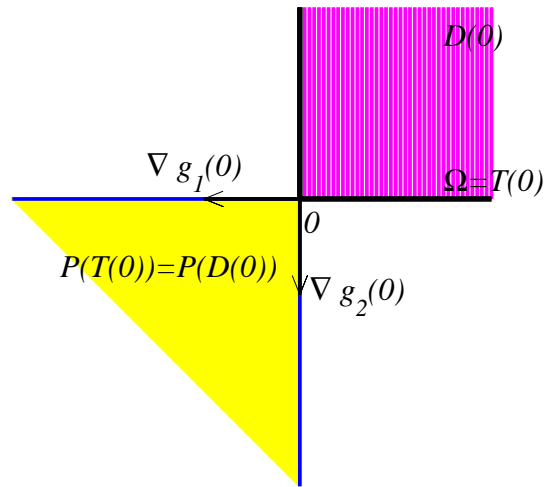


Figura 4.4: Contra-exemplo 7.

4.2.3 Outras relações

Já sabemos que se \bar{x} satisfaz LICQ ou MFCQ, então \bar{x} satisfaz a condição quase-regularidade, isto é, $T(\bar{x}) = D(\bar{x})$. Porém, como LICQ e MFCQ são condições clássicas na literatura, é comum fazer uma demonstração direta dessas implicações. Fazemos isto utilizando o Teorema da Função Implícita 1.44.

Teorema 4.33 *Se \bar{x} satisfaz LICQ, então \bar{x} satisfaz a condição quase-regularidade.*

Prova. Vimos no Lema 3.15 que $T(\bar{x}) \subset D(\bar{x})$. Resta mostrar que $D(\bar{x}) \subset T(\bar{x})$. Considere

$$\phi = \begin{pmatrix} h \\ g_a \end{pmatrix} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m+q},$$

onde $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ representa as restrições de igualdade em \bar{x} e $g_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ representa as restrições de desigualdade ativas em \bar{x} . Sejam

$$A = \begin{pmatrix} \nabla h(\bar{x})^T \\ \nabla g_a(\bar{x})^T \end{pmatrix} = J_\phi(\bar{x})$$

e $r = m + q$. Por hipótese, $\text{posto}(A) = r$. Logo, por (1.17), $\text{posto}(AA^T) = r$, isto é, $AA^T \in \mathbb{R}^{r \times r}$ é inversível. Considere a matriz $Z = (v^1 \dots v^{n-r}) \in \mathbb{R}^{n \times (n-r)}$, cujas colunas formam uma base ortonormal para $\mathcal{N}(A)$. Note que $AZ = 0$ e $Z^T Z = I_{n-r} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$, donde segue que

$$\begin{pmatrix} A \\ Z^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^T(AA^T)^{-1} & Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{pmatrix} = I_n. \tag{4.31}$$

Tome $d \in D(\bar{x})$ e defina $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi(x) - tAd \\ Z^T(x - \bar{x} - td) \end{pmatrix}.$$

Assim $\varphi \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ e, por (4.31),

$$J_{\varphi, x} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ Z^T \end{pmatrix}$$

é inversível. Pelo Teorema da Função Implícita 1.44, existe uma função diferenciável $x : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi \begin{pmatrix} x(t) \\ t \end{pmatrix} = 0$, para todo $t \in J$. Em particular, $\phi(x(t)) = tAd$, ou seja,

$$h(x(t)) = t\nabla h(x)^T d \quad \text{e} \quad g_a(x(t)) = t\nabla g_a(x)^T d, \quad (4.32)$$

para todo $t \in J$. Pela unicidade, $x(0) = \bar{x}$. Usando novamente o Teorema da Função Implícita 1.44 e a relação (4.31), obtemos

$$\begin{aligned} x'(0) &= - \left[J_{\varphi, x} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} J_{\varphi, t} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= - \begin{pmatrix} A^T(AA^T)^{-1} & Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Ad \\ -Z^T d \end{pmatrix} = \\ &= A^T(AA^T)^{-1}Ad + ZZ^T d. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{pmatrix} A \\ Z^T \end{pmatrix} x'(0) = \begin{pmatrix} Ad \\ Z^T d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ Z^T \end{pmatrix} d.$$

Como $\begin{pmatrix} A \\ Z^T \end{pmatrix}$ é inversível, temos $x'(0) = d$. Desta forma,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t) - \bar{x}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(0)}{t} = x'(0) = d.$$

Caso $d = 0$, não há o que provar. Suponha então $d \neq 0$. Assim,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{x(t) - \bar{x}}{t} \right\| = \|d\| > 0,$$

donde segue que $x(t) - \bar{x} \neq 0$, para todo $t \neq 0$ suficientemente próximo de 0. Definindo $t_k = \frac{1}{k}$ e $x^k = x(t_k)$, temos $x^k - \bar{x} \neq 0$ para k suficientemente grande. Logo,

$$\frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} = \frac{x^k - \bar{x}}{t_k} \frac{t_k}{\|x^k - \bar{x}\|} \rightarrow \frac{d}{\|d\|}.$$

Para concluir a demonstração, basta mostrar que x^k é viável para k suficientemente grande. Por (4.32) e pelo fato de $d \in D(\bar{x})$, temos

$$h(x^k) = \frac{1}{k} \nabla h(x)^T d = 0 \quad \text{e} \quad g_a(x^k) = \frac{1}{k} \nabla g_a(x)^T d \leq 0. \quad (4.33)$$

Como $g_j(x^k) \rightarrow g_j(\bar{x}) < 0$, para todo j inativo, temos $g_j(x^k) < 0$, para todo j inativo e k suficientemente grande, o que prova que $d \in T(\bar{x})$. \square

Teorema 4.34 *Se \bar{x} satisfaz MFCQ, então \bar{x} satisfaz a condição quase-regularidade.*

Prova. Considere $d \in D(\bar{x})$ arbitrário e \bar{d} dado pela condição de Mangasarian-Fromovitz. Por definição $\bar{d} \in D(\bar{x})$. Como $T(\bar{x})$ é um conjunto fechado, basta mostrar que d é aderente a $T(\bar{x})$.

Considere $\varepsilon > 0$, $\lambda \in (0, 1]$ satisfazendo

$$\lambda \|\bar{d} - d\| < \varepsilon$$

e

$$\hat{d} = (1 - \lambda)d + \lambda\bar{d} \in B(d, \varepsilon).$$

Vamos mostrar que $\hat{d} \in T(\bar{x})$.

Note que $\hat{d} \in D_\varepsilon(\bar{x})$ onde

$$D_\varepsilon(\bar{x}) = \{d \mid \nabla h(\bar{x})^T d = 0\},$$

pois

$$\nabla h(\bar{x})^T \hat{d} = (1 - \lambda) \nabla h(\bar{x})^T d + \lambda \nabla h(\bar{x})^T \bar{d} = 0.$$

Por hipótese $\nabla h(\bar{x})$ tem posto completo. Basta trocar a função ϕ da demonstração anterior por h para termos $D_\varepsilon(\bar{x}) = T_\varepsilon(\bar{x})$ onde

$$T_\varepsilon(\bar{x}) = \{0\} \cup \left\{ d \in \mathbb{R}^n \text{ com } d \neq 0 \left| \begin{array}{l} \exists (x^k) \neq \bar{x}, \text{ com } h(x^k) = 0, x^k \rightarrow \bar{x} \text{ e,} \\ \frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} \rightarrow \frac{d}{\|d\|} \end{array} \right. \right\}.$$

Para concluir que $\hat{d} \in T(\bar{x})$ basta mostrar que $g(x^k) \leq 0$ para todo k suficientemente grande.

Se $i \notin A(\bar{x})$, então $g_i(\bar{x}) < 0$. Como $x^k \rightarrow \bar{x}$, por continuidade $g_i(x^k) \leq 0$.

Se $i \in A(\bar{x})$, temos $\nabla g_i(\bar{x})^T d \leq 0$ e $\nabla g_i(\bar{x})^T \bar{d} < 0$ e portanto $\nabla g_i(\bar{x})^T \hat{d} < 0$.

Por Taylor, temos que

$$g_i(x^k) = g_i(\bar{x}) + \nabla g_i(\bar{x})^T (x^k - \bar{x}) + o(\|x^k - \bar{x}\|).$$

Como $i \in A(\bar{x})$, dividindo a expressão por $\|x^k - \bar{x}\|$, temos

$$\frac{g_i(x^k)}{\|x^k - \bar{x}\|} = \nabla g_i(\bar{x})^T \frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} + \frac{o(\|x^k - \bar{x}\|)}{\|x^k - \bar{x}\|}.$$

Como

$$\nabla g_i(\bar{x})^T \frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} \rightarrow \nabla g_i(\bar{x})^T \frac{\hat{d}}{\|\hat{d}\|} < 0,$$

temos

$$\frac{g_i(x^k)}{\|x^k - \bar{x}\|} < 0,$$

para todo k suficientemente grande. Logo $\hat{d} \in T(\bar{x})$, completando a demonstração. \square

Contra-exemplo 8 A condição quase-regularidade não implica na condição MFCQ e nem LICQ.

Considere as funções $g_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ($j = 1, 2$) definidas por

$$\begin{aligned} g_1(x) &= -x_1^2 + x_2 \\ g_2(x) &= -x_1^2 - x_2, \end{aligned}$$

o conjunto viável $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2\}$ e o ponto viável $\bar{x} = (0, 0)^T$.

Temos que

$$\nabla g_1(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \nabla g_2(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, $D(\bar{x}) = \{(d_1, 0) \mid d_1 \in \mathbb{R}\}$. Sabemos do Lema 3.15, que $T(\bar{x}) \subset D(\bar{x})$.

Assim, se $d = (d_1, d_2) \in T(\bar{x})$, então $d_2 = 0$.

Para obter $T(\bar{x})$, considere a seqüência $x^k = (y^k, (y^k)^2)$ com $y^k \rightarrow 0$, assim $x^k \rightarrow \bar{x}$. Para $y^k > 0$, temos

$$\lim_{y^k \rightarrow 0} \frac{x^k - \bar{x}}{\|x^k - \bar{x}\|} = \lim_{y^k \rightarrow 0} \frac{(y^k, (y^k)^2)}{\sqrt{(y^k)^2 + (y^k)^4}} = \lim_{y^k \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + (y^k)^2}} (1, y^k) = (1, 0).$$

Assim $d = (1, 0)$ é uma direção tangente.

Para o caso em que $y^k < 0$, de forma análoga tem-se que, $d = (-1, 0)$ é uma direção tangente. Como $T(\bar{x})$ é cone, para ambos os casos, tem-se $\alpha d \in T(\bar{x})$ para todo $\alpha \geq 0$. Assim, $T(\bar{x}) = \{(d_1, 0) \mid d_1 \in \mathbb{R}\}$ e portanto, $T(\bar{x}) = D(\bar{x})$.

Note que, não existe $d \in \mathbb{R}^2$ tal que $\nabla g_1(\bar{x})^T d < 0$ e $\nabla g_2(\bar{x})^T d < 0$. Além disso, $\{\nabla g_1(\bar{x}), \nabla g_2(\bar{x})\}$ é LD. Portanto, \bar{x} não satisfaz a condição MFCQ e nem LICQ. \square

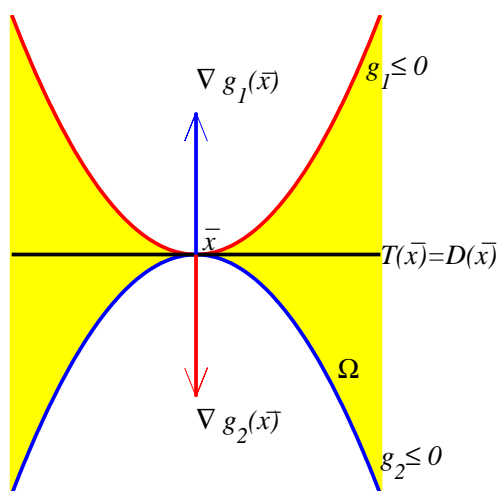


Figura 4.5: Contra-exemplo 8

Conclusão

Nesta dissertação, apresentamos uma demonstração das condições necessárias de otimalidade de Karush-Kuhn-Tucker(KKT) baseada em uma abordagem de cones.

Para analisar tal demonstração, foi necessário fazer um estudo detalhado de cones e suas propriedades. A demonstração de KKT usa fortemente o famoso lema de Farkas. Analisamos o lema de Farkas sob duas versões: a versão geométrica, via cones, e a versão algébrica e mostramos a equivalência entre elas quando o cone em questão é um cone finitamente gerado. Vimos que o cone tangente fornece informações mais interessantes sobre a estrutura local do conjunto viável do que o conjunto das direções viáveis. Mostramos três versões equivalentes do cone tangente. Além disso, mostramos as relações existentes entre o cone viável linearizado e o cone tangente, bem como algumas de suas propriedades.

Vimos que, as condições KKT são satisfeitas em um minimizador quando alguma propriedade é válida. Essa propriedade é a condição de qualificação. Relacionamos o cone tangente e o cone viável linearizado a fim de se obter uma condição de qualificação. Vimos que, quando a igualdade entre o polar desses cones ocorre num minimizador, as condições KKT se verificam. Apesar dessa condição ser fraca, ela é difícil de ser verificada. A fim de se obter condições fracas e fáceis de serem verificadas, obtemos outras condições de qualificação que a implicam. Esse fato nos motivou a fazer um estudo rigoroso das condições de qualificação. Inicialmente definimos as condições mais clássicas da literatura.

Ao longo da discussão sobre as condições de qualificação, surgiu um conceito de vetores positivo-linearmente dependentes (PLD) e vetores positivo-linearmente independentes (PLI) e também uma nova condição de qualificação, conhecida como dependência linear positiva constante (CPLD). Tal condição foi introduzida por Qi e Wei [33] em 2000, e ficou em aberto se ela era de fato uma condição de qualificação. Andreani, Martínez e Schuverdt provaram em [2] que de fato a CPLD é uma condição de qualificação.

Do ponto de vista prático, é interessante analisar qual é o *status* de uma condição de qualificação em relação às outras. Para isso fizemos um estudo detalhado relacio-

nando, através de demonstrações e contra-exemplos, as condições de Slater, Mangasarian-Fromovitz, independência linear dos gradientes, posto constante, dependência linear positiva constante, quase-normalidade, quase-regularidade e Guignard. Reunimos resultados que aparecem de forma dispersa na literatura, procurando apresentar demonstrações mais detalhadas e contra-exemplos diferenciados. Demonstramos uma caracterização equivalente da definição de posto constante, fundamental para o desenvolvimento do conteúdo dessa dissertação. Provamos, com enfoque um pouco diferente do que foi apresentado em [2], que a CPLD implica a quase-normalidade.

Referências Bibliográficas

- [1] J. Abadie. On the Kuhn-Tucker Theorem. In J. Abadie, editor, *Nonlinear Programming*, pages 19–36. North Holland, Amsterdam, 1967.
- [2] R. Andreani, J. M. Martínez, and M. L. Schuverdt. On the relation between constant positive linear dependence condition and quasinormality constraint qualification. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 125(2):473–485, 2005.
- [3] K. J. Arrow, L. Hurwicz, and H. Uzawa. Constraint qualifications in maximization problems. *Naval Research Logistics Quarterly*, 8:175–191, 1961.
- [4] M. S. Bazaraa, H. D. Sherali, and C. M. Shetty. *Nonlinear Programming Theory and Algorithms*. John Wiley, New York, 2nd edition, 1993.
- [5] D. P. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1995.
- [6] D. P. Bertsekas, A. Nedić, and A. E. Ozdaglar. *Convex Analysis and Optimization*. Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 2003.
- [7] G. Bouligand. *Introduction à la Géométrie Infinitésimale Directe*. Gauthier-Villars, Paris, 1932.
- [8] F. H. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. John Wiley, New York, 1983.
- [9] J. Farkas. Über die Theorie der einfachen Ungleichungen. *Journal für die Reine und Angewandte Mathematik*, 124:1–27, 1901.
- [10] M. L. Flegel. *Constraint Qualification and Stationarity Concepts for Mathematical Programs with Equilibrium Constraints*. PhD thesis, Institute of Applied Mathematics and Statistics, University of Würzburg, Alemanha, 2005.

- [11] A. Friedlander. *Elementos de Programação Não Linear*. Editora da Unicamp, Campinas, 1994.
- [12] C. C. Gonzaga. Um curso de programação não linear. Brasil, 2004. Notas de aula não publicadas.
- [13] F. J. Gould and J. W. Tolle. A necessary and sufficient qualification for constrained optimization. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 20:164–172, 1971.
- [14] M. Guignard. Generalized Kuhn-Tucker conditions for mathematical programming problems in a Banach space. *SIAM Journal on Control*, 7:232–241, 1969.
- [15] M. R. Hestenes. *Optimization Theory: The finite dimensional case*. John Wiley, New York, 1975.
- [16] J-B. Hiriart-Urruty and C. Lemarechal. *Convex Analysis and Minimization Algorithms I*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [17] J-B. Hiriart-Urruty and C. Lemarechal. *Convex Analysis and Minimization Algorithms II*. Springer-Verlag, New York, 1993.
- [18] T. Hoheisel and C. Kanzow. On the Abadie and Guignard constraint qualification for mathematical programs with constraints. Preprint 272, Institute of Mathematics, University of Würzburg, Würzburg, September 2006.
- [19] A. Howard and C. Rorres. *Álgebra Linear com Aplicações*. Bookman, Porto Alegre, 8nd edition, 2001.
- [20] A. Izmailov and M. Solodov. *Condições de otimalidade, elementos de análise convexa e de dualidade*, volume 1. IMPA, 2005.
- [21] R. Janin. Direction derivative of the marginal function in nonlinear programming. *Mathematical Programming Study*, pages 127–138, 1984.
- [22] F. John. Extremum Problems with Inequalities as Subsidiary Conditions. In O. E. Neugebauer K. O. Friedrichs and J. J. Stoker, editors, *Studies and Essays: Courant Anniversary Volume*, pages 187–204. Wiley-Interscience, New York, 1948.
- [23] H. W. Kuhn and A. W. Tucker. Nonlinear programming. In J. Neyman, editor, *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, pages 481–492. University of California Press, Berkeley, CA, 1951.

- [24] Harold W. Kuhn. Nonlinear programming: a historical view. In R. W. Cottle and C. E. Lemke, editors, *Nonlinear Programming*, volume IX, pages 1–26. SIAM-AMS Proceedings, American Mathematical Society, Providence, RI, New York, 1976.
- [25] Steven J. Leon. *Álgebra Linear com Aplicações*. LTC, Rio de Janeiro, 1999.
- [26] E. L. Lima. *Curso de Análise*, volume 1. IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1981.
- [27] E. L. Lima. *Curso de Análise*, volume 2. IMPA, Rio de Janeiro, Brasil, 1981.
- [28] O. L. Mangasarian. *Nonlinear Programming*, volume 10. Classics in Applied Mathematics, SIAM, 1994.
- [29] O. L. Mangasarian and S. Fromovitz. The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints. *J. Math. Anal. and Appl*, 17:37–47, 1967.
- [30] J. M. Martínez. Otimização prática usando o langrangiano aumentado. Congresso de Matemática e suas Aplicações, Foz do Iguaçu, Brasil, Julho 2006. <http://www.ime.unicamp/~martinez>.
- [31] J. M. Martínez and S. A. Santos. Métodos computacionais de otimização. 20.^o Colóquio Brasileiro de Matemática - IMPA, 1995.
- [32] A. L. Peressini, F. E. Sullivan, and Jr J. J. Uhl. *The Mathematics of Nonlinear Programming*. Springer-Verlag, New York, 1nd edition, 1988.
- [33] L. Qi and Z. Wei. On the constant positive linear dependence condition and its application to sqp methods. *SIAM J. on Optimization*, 10(4):963–981, 2000.
- [34] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, New Jersey, 1970.
- [35] R. Tyrrell Rockafellar. Lagrange multipliers and optimality. *SIAM Review*, 35(2):183–238, 1993.
- [36] M. L. Schuverdt. *Métodos de Langrangiano aumentado com convergência utilizando a condição de dependência linear positiva constante*. PhD thesis, Instituto de Matemática Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2006.

- [37] M. Slater. Lagrange multiplier revisited: A contribution to non-linear programming. *Cowles Commission Discussion Paper, Math*, 403, 1950.
- [38] H. Steinitz. Bendingt Konvergente Reihen und Konvexe System, I. *J. of Math*, 143:128–175, 1913.
- [39] H. Steinitz. Bendingt Konvergente Reihen und Konvexe System, II. *J. of Math*, 144:1–40, 1914.
- [40] H. Steinitz. Bendingt Konvergente Reihen und Konvexe System, III. *J. of Math*, 146:1–52, 1916.
- [41] G. Voronoi. Nouvelles Application des Parametres Continus a la Theorie des Formes Quadratiques - Premier Memoire. Sur Quelques Proprietes des Formes Quadratiques Positives Parfaites. *Journal fur die Reine und Angewandte Mathematik*, 133:97–179, 1908.
- [42] G. Ávila. *Introdução a Análise Matemática*. Edgard Blücher, São Paulo, 1995.