UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ANA PAULA WILLMS CAPRA

# AULA INÉDITA FUNDAMENTADA SOBRE FUNÇÃO AFIM A PARTIR DA MODELAGEM DE UM EXPERIMENTO DE FÍSICA

CURITIBA

2023

ANA PAULA WILLMS CAPRA

# AULA INÉDITA FUNDAMENTADA SOBRE FUNÇÃO AFIM A PARTIR DA MODELAGEM DE UM EXPERIMENTO DE FÍSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Especialista, Curso de Pós-Graduação Lato Sensu de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio, ora denominado Matemática na Prática, na modalidade a distância, Programa da Universidade Aberta do Brasil (UAB), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Rolkouski
Orientadora: Profa. Dra. Laura Leal Moreira

CURITIBA

2023

## RESUMO

O presente trabalho apresenta uma proposta de aula de Matemática para professores do Ensino Médio sobre o conteúdo de função afim a partir da modelagem de um experimento de Física. Nesse sentido, busca-se interpretar, modelar e resolver uma situação real de outra área do conhecimento utilizando conceitos e cálculos de função para explicar e concluir resultados que explicam o experimento; construir o conceito de função afim a partir de um experimento físico de pressão hidrostática na perspectiva da Modelagem Matemática; escolher/definir um modelo matemático que relacione a pressão de um fluido e a altura do recipiente; explorar a relação e a interdisciplinaridade entre a Matemática (função afim) e a Física (pressão hidrostática). Esse experimento está indicado em um quadro do livro de Dante (2005) e é abordado rapidamente como uma curiosidade. Ao realizar uma pesquisa teórica para analisar a abordagem didática utilizada, a autora decide então explorar essa curiosidade e organizá-la em atividades montando então essa proposta de aula. Para alcançar esses objetivos e a proposta então ser desenvolvida com êxito, é importante que os estudantes tenham domínio de alguns conceitos prévios: grandeza; relação entre grandezas; função; domínio, contradomínio e imagem; pressão e volume. A duração das atividades planejadas é de 4 horas/aula, podendo sofrer alterações de acordo com a necessidade. O conteúdo de função foi escolhido para essa proposta devido à grande diversidade de aplicações práticas e exemplos do cotidiano que o envolve, isto é, à sua riqueza nas formas de exploração. O experimento prático é útil para ratificar a ludicidade do conceito e fomentar a investigação e a construção do conceito de função afim a partir das análises dos estudantes. Nessa perspectiva, utiliza-se a Modelagem Matemática como metodologia de ensino e aprendizagem. Criar-se-á um modelo matemático que represente os resultados obtidos, isto é, uma função que associa a altura do furo da garrafa e a pressão hidrostática nele e, analisando as características dessa função, definir o conceito de função afim.



**Palavras-chave:** Física. Função Afim. Modelagem Matemática.

## ABSTRACT

The present work presents a proposal for a Mathematics class for High School teachers on the content of affine function based on the modeling of a Physics experiment. In this sense, we seek to interpret, model and solve a real situation from another area of knowledge using concepts and function calculations to explain and conclude results that explain the experiment; build the concept of affine function from a physical experiment of hydrostatic pressure in the perspective of Mathematical Modeling; choose/define a mathematical model that relates the pressure of a fluid and the height of the container; explore the relationship and interdisciplinarity between Mathematics (affine function) and Physics (hydrostatic pressure). This experiment is indicated in a box in Dante's book (2005) and is quickly approached as a curiosity. When carrying out a theoretical research to analyze the didactic approach used, the author then decides to explore this curiosity and organize it into activities, setting up this class proposal. In order to achieve these objectives and for the proposal to be successfully developed, it is important that students have mastery of some previous concepts: greatness; relationship between magnitudes; function; domain, range and image; pressure and volume. The duration of the planned activities is 4 hours/class, which may change according to need. The function content was chosen for this proposal due to the great diversity of practical applications and everyday examples that surround it, that is, to its richness in the forms of exploration. The practical experiment is useful to ratify the ludicity of the concept and to encourage the investigation and construction of the concept of affine function based on the students' analyses. From this perspective, Mathematical Modeling is used as a teaching and learning methodology. A mathematical model will be created that represents the results obtained, that is, a function that associates the height of the bottle hole and the hydrostatic pressure in it and, analyzing the characteristics of this function, define the concept of affine function.



**Keywords**: Physics. Affine Function. Mathematical Modeling.

**Tipo 2: Aula Fundamentada**

**Ana Paula Willms Capra**

## 1. Introdução

O presente trabalho apresenta uma proposta de aula de Matemática para professores do Ensino Médio sobre o conteúdo de função afim a partir da modelagem de um experimento de Física. Nesse sentido, busca-se interpretar, modelar e resolver uma situação real de outra área do conhecimento utilizando conceitos e cálculos de função para explicar e concluir resultados que explicam o experimento; construir o conceito de função afim a partir de um experimento físico de pressão hidrostática na perspectiva da Modelagem Matemática; escolher/definir um modelo matemático que relacione a pressão de um fluido e a altura do recipiente; explorar a relação e a interdisciplinaridade entre a Matemática (função afim) e a Física (pressão hidrostática).

Esse experimento está indicado em um quadro do livro de Dante (2005) e é abordado rapidamente como uma curiosidade. Ao realizar uma pesquisa teórica para analisar a abordagem didática utilizada, a autora decide então explorar essa curiosidade e organizá-la em atividades montando então essa proposta de aula.

Para alcançar esses objetivos e a proposta então ser desenvolvida com êxito, é importante que os estudantes tenham domínio de alguns conceitos prévios: grandeza; relação entre grandezas; função; domínio, contradomínio e imagem; pressão e volume. A duração das atividades planejadas é de 4 horas/aula, podendo sofrer alterações de acordo com a necessidade.

O conteúdo de função foi escolhido para essa proposta devido à grande diversidade de aplicações práticas e exemplos do cotidiano que o envolve, isto é, à sua riqueza nas formas de exploração. O experimento prático é útil para ratificar a ludicidade do conceito e fomentar a investigação e a construção do conceito de função afim a partir das análises dos estudantes.

Nessa perspectiva, utiliza-se a Modelagem Matemática como metodologia de ensino e aprendizagem. Criar-se-á um modelo matemático que represente os resultados obtidos, isto é, uma função que associa a altura do furo da garrafa e a pressão hidrostática nele e, analisando as características dessa função, definir o conceito de função afim.

O capítulo seguinte apresentará a fundamentação teórica que embasa esse trabalho. A proposta de aula está indicada no capítulo 3. As considerações finais e referências desse trabalho estão indicadas nos capítulos 4 e 5, respectivamente.

## 2. Fundamentação teórica

As reflexões acerca do conceito de função, na maioria das vezes, são apresentadas de forma intuitiva e a partir de situações-problema do cotidiano. Inicia-se explorando, por exemplo, quantidades de pacotes produzidos em uma fábrica e tempo, quantidade de litros de combustível e gasto, ingressos vendidos do cinema e arrecadação, etc. Feito isso, apresenta-se então definições, propriedades e gráficos, finalizando com exercícios.

Nesse contexto, Meneghetti e Redling (2012) afirmam que a Matemática do Ensino Médio, na maioria das vezes, é trabalhada de forma tecnicista, reduzindo-se a um conjunto de técnicas e regras (p.194). O formalismo, rigor matemático, a memorização, repetição dos conteúdos e fórmulas são destacadas nessa fase de ensino, o que acaba dificultando a aprendizagem dos alunos (p.199).

Diante disso, é fundamental que o professor busque utilizar estratégias de ensino e aprendizagem diferenciadas, rompendo com as práticas educacionais exclusivamente tradicionais. É necessário que elas possibilitem a contextualização dos conhecimentos ensinados em sala de aula, em situações cotidianas, na busca pela melhoria da qualidade do ensino de Matemática (PEREIRA, JÚNIOR, 2013, p.535).

Nesse sentido, uma metodologia muito interessante para o ensino e aprendizagem de Matemática e que vai de encontro ao ensino tradicional é a Modelagem Matemática. Nela, se analisa relações presentes numa dada situação e, diante de um problema real e relevante, busca-se soluções tendo como base a Matemática. Os estudantes são ativos responsáveis pelo desenvolvimento das análises e discussões na busca de um modelo matemático que solucione ou represente a situação investigada. O professor se caracteriza como um mediador na condução das atividades.

Para Pereira e Júnior (2013), a Modelagem Matemática busca solucionar um problema real com o auxílio da Matemática e de outras ciências, sem se restringir à apenas uma. Esse fato caracteriza a Modelagem como uma metodologia que integra diversas áreas do conhecimento (p.533).

Atividades desenvolvidas dentro dessa perspectiva permitem desenvolver o diálogo, o levantamento e teste de hipóteses, a transferência da situação problema para a linguagem matemática, a aplicação de conceitos matemáticos num contexto no qual os alunos são convidados a utilizar essa metodologia. Nesse contexto, à medida que os alunos investigam a situação-problema, identificam-se alguns aspectos que permitem emergir facilidades e dificuldades (PEREIRA, JÚNIOR, 2013, p.544-545).

Contudo, essa integração entre os diferentes componentes curriculares deve acontecer sob o aspecto do contexto em que o aluno vive, ocorrendo uma ligação entre disciplinas, realidade, conhecimento, alunos e professores. As atividades propostas devem estimular a participação e interação entre os envolvidos.

Uma integração de grande potencial de exploração é entre a Matemática e a Física. Duas áreas muito próximas e que se desenvolvem juntas. Para Pastana e Neide (2018), professores dessas duas grandes áreas do conhecimento necessitam considerar as possibilidades de colaboração em atividades integradoras, baseadas nos conhecimentos que são próprios, articulados a contextos autênticos e que sejam consideráveis para a formação integral dos educandos. Segundo os autores, é muito importante considerar a abrangente conexão da Matemática com a Física em diferentes contextos sociais e culturais.

## 3. Apresentação da aula:

A proposta de aula se destina a professores que ministram aulas de Matemática no Ensino Médio na abordagem do conteúdo de função afim. As atividades foram organizadas e dispostas em 4 horas/aula, podendo sofrer alterações. Cada uma delas foi elaborada a fim de fomentar discussões, investigações e a construção dos conceitos pelos estudantes, sendo o professor o mediador desse processo.

No primeiro encontro (aula) é desenvolvido um experimento para verificar a relação entre pressão e profundidade. Os materiais utilizados são: 1 garrafa PET, 1 prego quente e um alicate para realizar os furos, régua e água. No primeiro momento da atividade, o professor questiona os alunos sobre os possíveis resultados alcançados: ao realizarmos 4 furos verticais de mesmo tamanho, mas de alturas diferentes em relação à base de um garrafão cheio de água, a distância alcançada pela água será a mesma em cada furo? Qual a relação que existe entre essa distância e a altura do furo?

Imagem 1: ilustração dos furos na garrafa.


Fonte da autora.

Na sequência das discussões, dá-se início ao experimento concomitantemente com as anotações na folha a ser entregue pelo professor. A atividade prática consiste em posicionar uma garrafa de plástico na horizontal, perfurá-la com 4 furos espaçados em 5 cm, enchê-la de água tapando os furos realizados e, por fim, posicioná-la na vertical, verificando a vazão de água em cada furo. A ficha de anotações está indicada na tabela abaixo.

Tabela 1 – folha a ser entregue aos alunos

| Furo | Altura do furo em relação à base da garrafa | Distância alcançada pela vazão de água | O que você pode concluir desse experimento a |
|---|---|---|---|

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | partir do que foi observado? |
| 4 | | | |
| 3 | | | |
| 2 | | | |
| 1 | | | |
| Agora, reescreva, em ordem crescente, as distâncias alcançadas pela água.<br><br>R.: ________________________________________. | | | |

Fonte da autora.

A tabela a seguir apresenta a resposta esperada dos alunos diante da atividade realizada.

Tabela 1.1 - resposta esperada dos alunos:

| Furo | Altura do furo em relação à base da garrafa | Distância alcançada pela vazão de água | O que você pode concluir desse experimento a partir do que foi observado? |
|---|---|---|---|
| 4 | 5 cm | X | Resposta pessoal, mas o aluno precisa observar que quanto menor a altura do furo em relação à base da garrafa, ou seja, quanto maior a profundidade, maior a distância alcançada pela água e logo maior a pressão. |
| 3 | 10 cm | Y | |
| 2 | 15 cm | Z | |
| 1 | 20 cm | W | |
| Agora, reescreva, em ordem crescente, as distâncias alcançadas pela água.<br><br>R.: W, Z, Y, X. | | | |

Fonte da autora.

O experimento aborda alguns conceitos de Física, como pressão e fluidos. A segunda aula é um momento de pesquisa teórica, onde em grupos, os alunos investigam as definições sobre esses conceitos e, posteriormente, a apresentam os resultados para a turma. Nesse momento, é fundamental relacionar os conceitos pesquisados com os objetos utilizados no experimento: a pressão que investigamos está dentro ou fora da garrafa? Qual foi o fluido utilizado?

A terceira aula é desenvolvida a fim de escolher/definir um modelo matemático que relacione a pressão de um fluido em relação à altura do recipiente (para corroborar na discussão, os alunos podem fazer pesquisas na internet via celular. O professor fomenta e guia os alunos nas discussões). O objetivo da aula é concluir que a pressão em um fluido é calculada pelo produto entre a altura do furo, a densidade do fluido e a aceleração da gravidade.

O diálogo apresentado a seguir explana a discussão a ser fomentada pelo professor até a criação do modelo matemático. A fala do professor está representada abaixo por (*) e a do(s) aluno(s) por (@) para facilitar a identificação.

*(*) - Já vimos na pesquisa que pressão é uma força aplicada, assim como o peso de objetos e fluidos. Como podemos calcular o peso de um fluido? Por exemplo, o nosso corpo exerce uma força, chamada de peso, devido a gravidade aqui na Terra. Você sabe qual é o seu peso?*

*(@) Resposta pessoal, por exemplo: eu "peso" 60 kg, pois fui hoje na balança da farmácia.*

*(*) - Você sabia que esse valor é referente a sua massa e não ao seu peso? O seu peso é uma força que calculamos multiplicando essa massa pelo valor da aceleração da gravidade. Portanto o seu peso é de, aproximadamente, 60x10 = 600 Newtons. Newtons é a unidade de medida de força. Sendo assim, como calculamos o peso de um corpo/fluido?*

*(@) Multiplicando o valor da massa (m) do corpo pela aceleração da gravidade (g), onde surge a famosa fórmula* $F = P_e = m.g$*. (Nesse momento o aluno poderá fazer uma pesquisa rápida na internet sobre a relação entre massa e força, caso seja necessário).*

*(*) - Você sabe a massa do seu corpo subindo em uma balança. Mas será que existe uma fórmula matemática para calcular a massa, especialmente a massa de um fluido para o nosso experimento?*

*(@) - A massa é resultado do produto do volume (V) e da densidade da substância (p). Aí temos outra importante relação: m = V. ρ. (A pesquisa pode ocorrer novamente, caso seja necessário.)*

*(*) - E quanto ao volume? Sabemos, intuitivamente, que volume é o espaço que o corpo/fluido ocupa. Mas existem fórmulas matemáticas para calculá-lo?*

*(@) A nossa garrafa tem formato cilíndrico, então o volume pode ser obtido multiplicando-se a área da base (A) pela altura (h) do recipiente (profundidade). Obtemos, assim, V = A.h. (O conceito de volume e o cálculo dele fazem parte dos conhecimentos prévios dos alunos, visto que já foram por eles estudados em anos anteriores.)*

*(*) - Portanto, conseguimos uma relação que associe o peso de um fluido (1ª equação) e a profundidade do recipiente (última equação)?*

*(@)* $P_e = m.g$ *(1)*

$m = V.\ \rho$ *(2)*

$V = A.h$ *(3)*

*Substituindo a equação (2) em (1), obtemos:*

$P_e = V.\ p.g$ *(4)*

*Substituindo a equação (3) em (4), obtemos:*

$P_e = A.h.\ p.g$ *(5)*

*(*) - E agora, qual a relação entre peso de um fluido e pressão? A pressão é criada pelo peso de um fluido. Por exemplo, quando uma pessoa mergulha para o fundo do mar, quanto maior a profundidade, mais fluido terá sobre ela, e consequentemente, maior a pressão. Como podemos, portanto, calcular a pressão em função do peso do fluido?*

*(@) - Na pesquisa vimos que os fluidos exercem pressão igual em todas as direções. Então, para calcular a pressão exercida em um certo ponto, basta dividirmos o peso* $P_e$ *pela área que o contém. Isto é,*

$P = P_e / A$ *(6)*

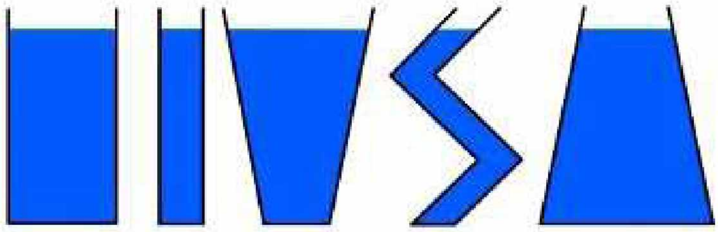
*Substituindo a equação (5) na (6), obtemos:*

*P = (A.h. ρ.g)/A = h. ρ.g*

*Portanto, P = h. ρ.g*

Para finalizar, a formalização do conceito de função afim, exercícios e construção do gráfico no Geogebra são feitos no quarto e último encontro/aula. No primeiro momento, são apresentados dois exercícios: um deles, para calcular a pressão com alturas distintas do recipiente; e o outro, para analisar se a pressão é a mesma em recipientes de mesma altura, mas de formatos diferentes, conforme mostra a imagem a seguir.

Imagem 2: recipientes da atividade 2.



Fonte: https://www.todamateria.com.br/pressao-hidrostatica/

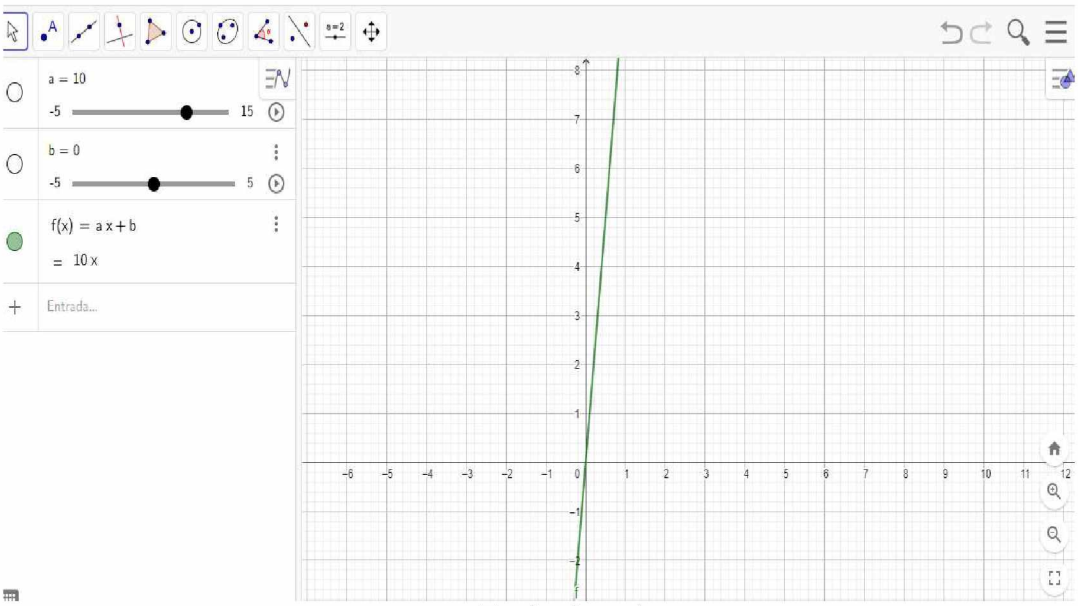
No segundo momento dessa aula, é discutido sobre uma curiosidade envolvendo a não necessidade de bomba para abastecer caixas de água de residências. Na sequência, é relembrado o conceito de função (conhecimento prévio) e definido função afim.

No experimento realizado, verifica-se que o conjunto A é formado pelos possíveis valores para a altura dos furos na garrafa (variável independente) enquanto que B é formado pelos possíveis valores da pressão (variável dependente). Nesse sentido, A é o domínio da função de modo que A = ℝ+ (A é formado por números reais positivos, pois a altura da garrafa é expressa por valores positivos). Já B é o contradomínio, podendo ser B = ℝ (B é formado por números reais).

A densidade é um valor variável, pois depende do tipo de fluido considerado. Dessa maneira, teríamos uma função afim distinta para cada fluido. O mesmo acontece com a aceleração da gravidade, pois depende do planeta/astro em que se está sendo realizado o experimento. Portanto, fixa-se o fluido como água, cuja densidade é de 1 g/cm$^3$ e a aceleração da gravidade como 10 m/s$^2$ (Terra). Logo, a pressão dentro da garrafa pode ser calculada como $P_e$ = 10.h (*). Nessa última igualdade, são feitas duas mudanças de variáveis: $P_e$ por f(x) e h por x. Note que, nesse caso, a = 10 e b = 0. Obtemos assim a função f(x) = 10x.

Para analisar o comportamento desse tipo de função, constrói-se o gráfico de uma função afim genérica, utilizando o comando “controles deslizantes” para verificar diversos exemplos de funções que são definidas como do tipo afim, dando maior ênfase àquela envolvida no experimento.

Imagem 3 – construção do gráfico da função no Geogebra.




Fonte da autora.

Nessa última atividade, conclui-se que mesmo alterando os coeficientes *a* e *b* da função *f(x)=ax+b* a partir do comando “controles deslizantes” do Geogebra, o gráfico de uma função afim será sempre uma reta. Além disso, a função resultante do experimento *f(x) = 10x* é uma função linear, visto que o coeficiente *b* é igual a 0. E como *y* = 0 é onde a reta intercepta o eixo *y*, logo, o coeficiente *b* da função *f(x) = ax+b* determina o valor que a reta intercepta esse eixo.

O gráfico do Geogebra exibido acima, tanto o domínio quanto o contradomínio da função estudada são representados pelo conjunto dos números reais, isto é, apresenta uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Já no experimento, o gráfico da pressão em função da altura é uma função de um determinado intervalo de $R^+$ em R, pelo fato de que a altura da garrafa são valores positivos e de termos representado apenas alguns valores dessa função.

A avaliação das atividades trabalhadas nas quatro aulas é desenvolvida de forma contínua durante o desenvolvimento de todas as atividades propostas. Utiliza-se 5 critérios: desenvolvimento prático do experimento, registro das observações na Tabela 1, pesquisa e registro no caderno – Aula 2, participação e contribuição nas discussões fomentadas na Aula 3, resposta dos problemas propostos, construção do gráfico no Geogebra e resolução das duas atividades propostas na Aula 4.

## 4. Considerações finais

As atividades sugeridas nesse trabalho abordaram a construção da definição de função afim a partir de um experimento prático de Física. Nelas, os alunos levantam hipóteses e as testam, constroem conjecturas e propriedades, analisam o comportamento gráfico de uma função, para só depois formalizar o conceito. Esse caminho vai de encontro a abordagens metodológicas tecnicistas, como vimos na seção 2.

O professor se configura como o mediador e guia os alunos em suas discussões a fim de se alcançar o objetivo. Isso desenvolve a autonomia do estudante e a vontade de investigar. A proposta de aula, portanto, proporciona um grande desenvolvimento de todos os envolvidos: o professor, na forma de planejar e desenvolver sua aula, diferentemente do ensino tradicional e saindo de uma zona de conforto; e o estudante, na sua investigação, discussão, criação de argumentos, reflexão, autonomia, criatividade e trabalho em equipe.

Nesse sentido, o leitor desse trabalho tem agora a possibilidade de elaborar mais propostas de aula, integrando a Matemática com mais áreas do conhecimento ou outros conteúdos. Pode-se também adaptar a proposta aqui apresentada, de forma que as atividades sejam ainda mais exploradas ou que se aborde mais conteúdos nessa perspectiva, promovendo a interdisciplinaridade entre outros componentes curriculares.

**5. Referências Bibliográficas**

GAY, Maria Regina Garcia. SILVA, Wilian Raphael. **Araribá: mais matemática**. 1ª edição. Editora Moderna. São Paulo, 2018. p.202-211.
Disponível em:
https://pt.calameo.com/read/002899327e8eb42ba8bc0?authid=MGrCO1P3FjRj

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática.** Volume único. 1ª edição. Ed. Ática. São Paulo, 2005.

GOUVEIA, Rosimar. **Pressão hidrostática.** Disponível em: https://www.todamateria.com.br/pressao-hidrostatica/. Acesso em 15/02/2023 às 18h19min.

MENEGHETTI, Renata. REDLING, Julyette Priscila. **Tarefas Alternativas para o Ensino e a Aprendizagem de Funções: análise de uma intervenção no Ensino Médio.** V. 26, n. 42ª, 2012. Disponível em https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/5803. Acesso em 19/02/2023 às 17h35min.

PASTANA, Claudionor de Oliveira. NEIDE, Italo Gabriel. **A integração do ensino de funções trigonométricas e movimento harmônico simples por meio do software *Modellus*.** Pesquisa em Ensino de Física • Rev. Bras. Ensino Fís. 40. 2018. Disponível em https://www.scielo.br/j/rbef/a/cWKXTdJS7wzJptcSNvJNt5r/?lang=pt. Acesso em 20/02/2023 às 10h26min.

PEREIRA, Rudolph dos S. G. JUNIOR, Guataçara S. **Modelagem Matemática e o Ensino de Ajuste de Funções: um caderno pedagógico.** V. 27, nº 46. 2013. Disponível em https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/6109. Acesso em 19/02/2023 às 20h01min.