UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

BENTO LOURENÇO AMADEU ANDRADE

AULA INÉDITA FUNDAMENTADA SOBRE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU USANDO GEOMETRIA

CURITIBA

2023

BENTO LOURENÇO AMADEU ANDRADE

AULA INÉDITA FUNDAMENTADA SOBRE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU USANDO GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de Especialista, Curso de Pós-Graduação Lato Sensu de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio, ora denominado Matemática na Prática, na modalidade a distância, Programa da Universidade Aberta do Brasil (UAB), Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Rolkouski
Orientadora: Profa. Dra. Laura Leal Moreira

CURITIBA

2023

RESUMO

Considerando a dificuldade dos alunos na compreensão das equações do segundo grau e o interesse por uma formulação simplificadora das ações, que os levem ao resultado instantâneo, essa aula veio trazer uma alternativa para a construção desse conhecimento junto aos/às estudantes do nono ano do Ensino Fundamental. Desde que surgiu a educação formal sempre foi uma dificuldade ensinar Matemática nas escolas, pois o ensino da Matemática antiga trabalhava com material abstrato, geralmente preocupando-se em ensinar métodos elaborados por pessoas que dedicavam todo seu tempo para resolver problemas e acabavam descobrindo fórmulas que na realidade funcionavam muito bem (Vicente, 2011). Por estas questões que a resolução de uma equação do segundo grau, se transformou basicamente, na aplicação da “Fórmula de Bhaskara” e isso está concomitantemente inserido no subconsciente dos alunos, que automaticamente pedem e sugerem a sua utilização, sem nem mesmo saber do que se trata e o que essa formulação significa. Não questionando aqui a sua eficiência e importância algébrica, mas trazendo um ar renovado que a experiência do concreto proporciona, visualizar em formas geométricas bem conhecidas, quadrados e retângulos, termos algébricos, que muitas vezes ficam perdidos dentro da composição da resolução, sem sentido, o que torna o momento desagradável e tedioso. Após a reflexão sobre esta e outras soluções históricas vislumbrou-se uma metodologia que reúna essas características, a saber, o Algeplan, que possibilita estudar as operações algébricas a partir da concepção de área de figuras planas. Com isso, nossa aula se baseou na utilização desse material para encontrar soluções de equações do segundo grau, valendo-se de critérios como o recurso visual da geometria e o conhecimento prévio dos alunos, chegando à compreensão, que seja possível através destes, tornar visível a fatoração das equações e dessa forma, encontrar os valores numéricos que a satisfazem.

Palavras-chave: Algeplan. Equação do 2º grau. Geometria.

ABSTRACT

Considering the difficulty students have in understanding quadratic equations and their interest in a simplified approach that leads to instant results, this lesson offers an alternative method for building this knowledge among ninth-grade students in Elementary School. Since the emergence of formal education, teaching mathematics in schools has always been challenging because traditional mathematics education often relies on abstract materials and methods developed by experts who dedicated their time to solving problems and discovering formulas that worked well (Vicente, 2011). As a result, solving a quadratic equation has become primarily associated with the "Bhaskara's Formula," which has become ingrained in students' subconscious. They automatically request and suggest using it without fully understanding its meaning or significance. This lesson does not question the efficiency and algebraic importance of the formula, but rather brings a fresh perspective by using concrete experiences. By visualizing familiar geometric shapes, such as squares and rectangles, students can better grasp the algebraic terms that often feel disconnected and meaningless within the resolution process, making it an unpleasant and tedious experience. After reflecting on historical solutions and considering their limitations, a methodology was developed that combines these characteristics. It is called Algeplan, which allows students to study algebraic operations by considering the concept of area in planar figures. Based on this approach, the lesson utilizes Algeplan materials to find solutions to quadratic equations, leveraging visual geometry and students' prior knowledge. The aim is to help students understand the process of factoring equations and, consequently, find the numerical values that satisfy them.

Keywords: Algeplan. Equation of the 2nd degree. Geometry.

BENTO LOURENÇO AMADEU ANDRADE

AULA INÉDITA: RESOLUÇÃO DE EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU USANDO GEOMETRIA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial o título de especialista no curso de Pós-Graduação Lato Sensu de Especialização em Ensino de Matemática para o Ensino Médio, ora denominado Matemática na Prática, na modalidade a distância, do Programa da Universidade Aberta do Brasil (UAB).

CURITIBA
2023

Resolução de Equação do Segundo Grau Usando Geometria

Introdução:

Considerando a dificuldade dos alunos na compreensão das equações do segundo grau e o interesse por uma formulação simplificadora das ações, que os levem ao resultado instantâneo, essa aula veio trazer uma alternativa para a construção desse conhecimento.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (BRASIL, 1998, P. 115), já apontavam que o “estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas”. No ensino fundamental regular após o término das concepções aritméticas, a álgebra é introduzida como campo matemático que lida com manipulação e cálculo literal, o que verifica, sua importância no cenário caracterizado pela sociedade atual (Silva, 2014).

O aprendizado desta, é um passo enorme no desenvolvimento do intelecto do aluno e será amplamente usado no decorrer do ensino médio, logo, a apropriação destes conceitos é fundamental nesta fase do desenvolvimento. Porém a mecanização da álgebra, vinda de fases, ao longo dos anos, do ensino da matemática, permanece intensa no pensamento escolar e causa o distanciamento da referência de realidade, que a álgebra deve alcançar. O raciocínio matemático pode ser identificado com a inferência dedutiva clássica. Dois aspectos caracterizam este tipo de raciocínio: a sua certeza e a sua monotonicidade. A primeira delas é exemplificada pelo fato de que a relação entre premissas e conclusão é necessária; uma conclusão tirada de um conjunto de premissas, necessariamente decorre delas. O segundo aspecto afirma que as conclusões alcançadas por meio de raciocínio dedutivo são irrefutáveis (Campos e Ponte, 2022), isso confirma a intenção de promover o aspecto dedutivo do raciocínio dos interlocutores partindo de expressões mais básicas e ampliar as dificuldades ao longo da aplicação, relacionando-se cada fase do conteúdo sugerido com o apelo visual das figuras geométricas.

> Para aprender matemática em qualquer nível, é preciso entender as questões relevantes antes que você possa esperar que as respostas façam sentido. Entender uma questão, muitas vezes, depende de saber a história da ideia. De onde veio? Por que é ou era importante? Quem queria a resposta e por que a queria? Cada etapa no desenvolvimento da matemática é construída com base naquilo que veio antes. [...] Para ensinar matemática em qualquer nível é necessário ajudar os estudantes a entenderem as questões e formas de pensamentos que ligam os detalhes. A atenção dada a tais questões é o que marca os melhores currículos [...]. (BERLINGHOFF e GOUVÊA, 2010, p. 1)

Desde que surgiu a educação formal sempre foi uma dificuldade ensinar Matemática nas escolas, pois o ensino da Matemática antiga trabalhava com material abstrato, geralmente preocupando-se em ensinar métodos elaborados por pessoas que dedicavam todo seu tempo para resolver problemas e acabavam descobrindo fórmulas que na realidade funcionavam muito bem (Vicente, 2011). Por estas questões que a resolução de uma equação do segundo grau, se transformou basicamente, na aplicação da "Fórmula de Bhaskara" e isso está concomitantemente inserido no subconsciente dos alunos, que automaticamente pedem e sugerem a sua utilização, sem nem mesmo saber do que se trata e o que essa formulação significa. Não questionando aqui a sua eficiência e importância algébrica, mas trazendo um ar renovado que a experiência do concreto proporciona, visualizar em formas geométricas bem conhecidas, quadrados e retângulos, termos algébricos, que muitas vezes ficam perdidos dentro da composição da resolução, sem sentido, o que torna o momento desagradável e tedioso.

Sob o aspecto histórico, a Álgebra Babilônica pressupõe uma possível forma de superar obstáculos na aprendizagem e manipulação de cálculos algébricos, que seria associar estes ao ensino da Geometria, fazendo uso da sua analogia visual, possibilitando assim o significado da linguagem algébrica e, por fim, a compreensão dos processos em Álgebra (Silva, 2014). Após a reflexão sobre esta e outras soluções históricas vislumbrou-se uma metodologia que reúna essas características.

Como esse trabalho é direcionado aos anos finais do ensino fundamental, mais precisamente ao nono ano, etapa em que o aluno já detém o conhecimento de área de figuras planas e já usa a forma literal das expressões algébricas, lançou-se mão de materiais concretos, manipuláveis e de fácil acesso, que contribuam para o desenvolvimento das habilidades propostas pela BNCC.

> EF09MA09 - Compreender os processos de fatoração de expressões algébricas, com base em suas relações com os produtos notáveis, para resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais do 2º grau (BNCC BRASIL,2018).

Veio então, a ideia da utilização do Algeplan, como o caminho escolhido para promover o desafio de mudança na percepção de resolução de tais equações, "embora se reconheça que há fragilidades em todas as abordagens que forem propostas ou em todo material que se escolha, o uso ainda é valioso, ao introduzir os conceitos e apresentar uma alternativa viável à mera utilização da fórmula, sem nenhuma discussão a respeito das outras formas possíveis de resolução construídas pela humanidade" (Vicente, 2011).

> A utilização desses recursos possibilita ao aluno conferir um tipo de significado às expressões. No entanto, a interpretação geométrica dos cálculos algébricos é limitada, pois nem sempre se consegue um modelo geométrico simples para explicá-lo. Além disso, é preciso que ele perceba que é possível atribuir outros significados às expressões. Assim, as visualizações desse tipo podem ser interessantes em alguns momentos, dependendo do contexto da situação problema, mas o trabalho não pode apoiar-se exclusivamente nelas. (BRASIL, 1998, p. 121).

Assim, depois inúmeras pesquisas relacionadas, tanto às dificuldades apresentadas com a álgebra em si, quanto com as possíveis benesses da utilização do material acima citado, a decisão foi utilizá-lo, para afirmar que os aspectos favoráveis são superiores as limitações do mesmo.

O material utilizado denomina-se Algeplan. É formado por quadrados e retângulos, com medidas pré-estabelecidas, de tal forma que se consiga com eles, montar novos quadrados e retângulos, uma espécie de quebra-cabeças geométrico.

Sua composição é:

- Cinco quadrados (cor amarela) de lados com medidas x (com $x > 0$), representado pelo termo algébrico que corresponde a sua área: x^2;
- Trinta quadrados (cor rosa) de lado unitário;
- Quinze retângulos (cor azul) de lados x e 1, representado pelo termo algébrico que corresponde à sua área: x;

Nesse caso, o material foi construído em EVA, com as cores acima citadas. Esse material também possui outras versões de tamanho, cores e composição de peças. Devido a utilidade ser para fatoração e posterior resolução das equações do segundo grau, esse número reduzido de peças foi suficiente para suprir a necessidade a que se propunha.

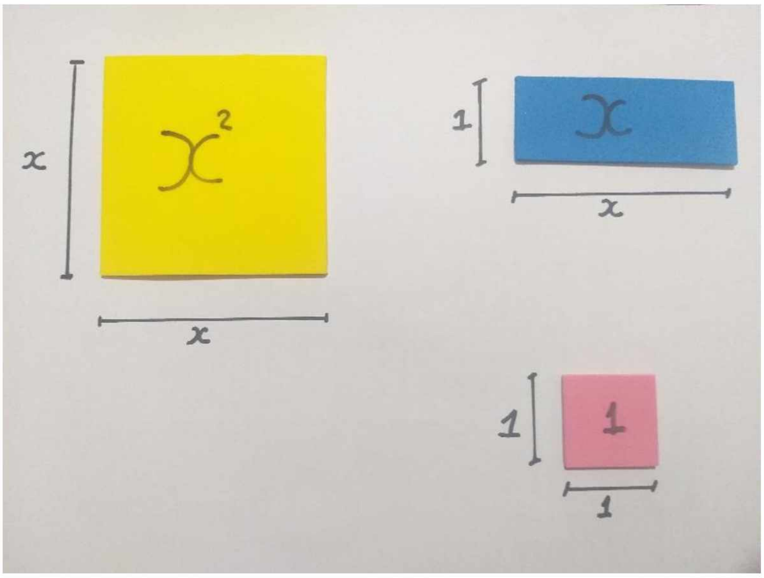


Figura 1 – Peças do Algeplan – acervo do autor

O objetivo principal do Algeplan é estudar as operações algébricas a partir da concepção de área de figuras planas. Cada peça do material representa um termo algébrico, considerando o valor das áreas a serem encontradas com as medidas propostas.

Para sua utilização, convém adotar algumas regras, como: utilizar o verso da peça para expressar os termos algébricos com sinais negativos, ou, em geometria, seus simétricos/opostos. Vale ressaltar que, apesar da convenção adotada, cada peça do Algeplan é denominada de acordo com sua área, e que, não existe área de regiões negativas (Silva, 2014).

Pesquisas apontam que a utilização do Algeplan em sala de aula se direciona a resultados bastante significativos quanto à compreensão das operações com expressões algébricas, o que possibilita ao aluno a construção de modelos mentais, levando-o a realizar generalizações e formalizações do conteúdo em questão (Rêgo, 2010).

Com isso, nossa aula se baseou na utilização desse material para encontrar soluções de equações do segundo grau, valendo-se de critérios como o recurso visual da geometria e o conhecimento prévio dos alunos, chegando à compreensão, que seja possível através destes, tornar visível a fatoração das equações e dessa forma, encontrar os valores numéricos que a satisfazem.

O Desenvolvimento da Aula

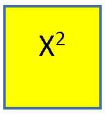
A proposta foi pensada para uma turma do nono ano de uma escola integral estadual da cidade de Curitiba, composta por vinte e sete alunos, uma classe que, como a maioria, tem ressalvas quanto ao estudo dos conteúdos de matemática, o que desafia sempre o professor a trazer novos argumentos e enredos que justifiquem a aprendizagem, promova o interesse e desenvolva o pensamento dedutivo sem causar desânimo e aversão.

O uso do material acima citado foi em um momento após a introdução do conteúdo de equações do segundo grau. O livro didático de referência, cita breves comentários sobre a parte histórica, fala dos textos babilônicos e de matemáticos árabes e hindus, que contribuíram consideravelmente para os estudos desse conteúdo (Giovanni Junior, José Rui, 2018 p.86). Depois da breve introdução, mostra alguns detalhes da relação das equações com a geometria, parte em seguida para o trabalho algébrico, estritamente. Nesse momento do desenvolvimento do assunto, a todo instante os alunos já questionavam sobre uma tal fórmula que resolve tudo. Diante disso veio a ideia de mostrar que podemos sair do lugar comum e desmistificar que só existe uma maneira de construir o pensamento sobre o que é uma equação do segundo grau.

Essa interferência veio depois dos alunos já conhecerem os polinômios, os produtos notáveis, o trinômio quadrado perfeito e suas fatorações.

O processo de utilização do Algeplan consiste em associar cada termo da equação a uma figura geométrica e a partir dessa associação construir um retângulo com as peças selecionadas, após a figura construída, calcula-se a sua área. Igualando-se a área a zero, constrói-se uma equação, possível de ser resolvida.

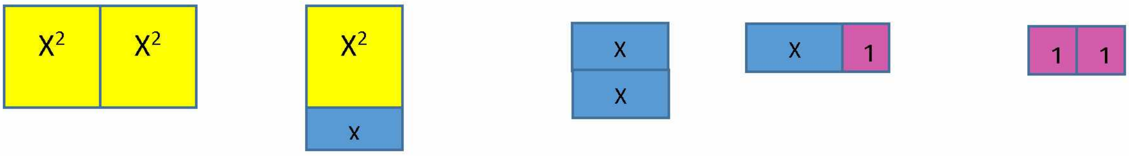
O primeiro passo é associar o termo elevado ao quadrado da equação com a área do quadrado amarelo do Algeplan.



Em seguida, o segundo termo, a área do retângulo azul.

Por último, o terceiro termo, ao quadrado rosa.

As regras para a execução são: somente podem ser emparelhados, as figuras com mesma medida (ao lado do quadrado amarelo, somente pode ser colocado outro quadrado amarelo ou a base do retângulo azul, ao lado da base do retângulo azul, pode ser colocado outro retângulo azul, ao lado da altura do retângulo azul, somente pode ser colocado o quadrado rosa e ao lado do quadrado rosa, somente outro quadrado rosa).



Figuras 2,3,4,5,6,7,8,9 – acervo do autor

Com esses emparelhamentos formar novos quadrados e retângulos, os lados dessas novas figuras, serão a equação do segundo grau fatorada. Outro detalhe importante, que já foi citado acima, é a convenção dos termos negativos, que não são áreas negativas.

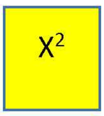
A estruturação da aula aconteceu em quatro etapas, iniciou-se com equações básicas, de simples resolução, até equações mais elaboradas e com grau de dificuldade que exige a abstração dos conteúdos para concretizar a solução.

A turma foi dividida em grupos de três elementos escolhidos aleatoriamente, cada grupo recebeu um pacote contendo um “kit Algeplan” e um material descritivo com as equações a serem solucionadas.

O tempo para o trabalho foi o de uma aula, cinquenta minutos, para cada etapa. Esse período será, tanto para leitura e interpretação da atividade, quanto para o uso do Algeplan, para resolução e a transcrição do relatório da execução da atividade.

O que se espera dos alunos durante a atividade é que com essa introdução, consigam construir a solução das equações, através da geometria das figuras planas citadas, da seguinte maneira:

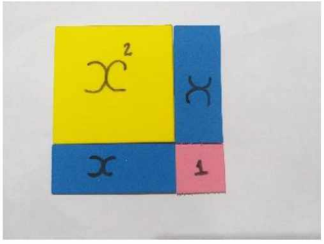
Dada a equação $x^2 + 2x + 1 = 0$ por exemplo, seja efetivado:

$x^2 \rightarrow$ 

$2x \rightarrow$ 

$1 \rightarrow$ 

E a construção da nova figura seja:



Figuras 10,11,12,13,14 - acervo do autor

Formando, então, um novo quadrado, cujos lados são x + 1;

Dessa maneira ao calcular a área e igualar a zero, obtêm-se:

(x + 1).(x + 1) = 0 e para que essa área se anule, um dos termos deve ser nulo, logo, vem que, x = -1. Que é o valor que satisfaz a equação. Portanto, chega-se ao resultado sem precisar recorrer a nenhuma fórmula previamente decorada.

As atividades da primeira etapa foram:

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$
b) $x^2 + 4x + 4 = 0$
c) $x^2 + 3x + 2 = 0$
d) $x^2 + 4x + 3 = 0$
e) $x^2 + 5x + 6 = 0$
f) $x^2 + 10x + 25 = 0$

Sob o mesmo aspecto intuitivo, porém com a dificuldade aumentada, vem a segunda etapa, onde foi introduzido termos negativos nas equações da seguinte maneira:

Dada a equação $x^2 – 5x + 6 = 0$ seja construído:

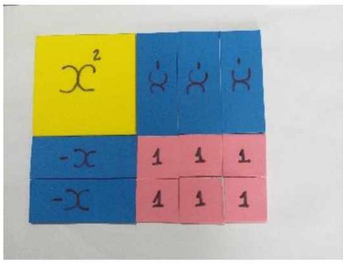


Figura 15 – acervo do autor

Formando, então, um novo retângulo, cujos lados são (x – 2) e (x – 3);

Dessa maneira ao calcular a área e igualar a zero, obtêm-se:

(x – 2).(x – 3) = 0 e para que essa área se anule, um dos termos deve ser nulo, logo, vem que, x = 2 ou x = 3 . Que são os valores que satisfazem a equação.

As atividades da segunda etapa foram:

a) $x^2 - 8x + 16 = 0$
b) $x^2 - 5x + 6 = 0$
c) $2x^2 - 3x + 1 =0$
d) $x^2 - 7x + 12 = 0$
e) $x^2 - 6x + 9 = 0$
f) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

Nesta terceira etapa, espera-se uma maior abstração do conteúdo, então a equação tem um grau de dificuldade maior e consequentemente as montagens das novas figuras não são diretas, que se faz necessário uma maior atenção dos alunos. Veja o exemplo abaixo:

Dada a equação $x^2 - 3x - 4 = 0$, espera-se que, com a expertise adquirida anteriormente, durante a construção da figura, perceba-se que não é possível encontrar um retângulo, como abaixo:

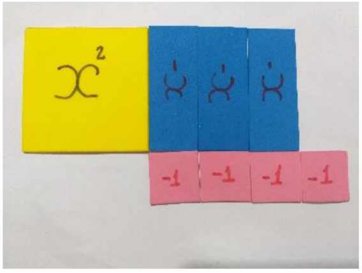


Figura 16 – acervo do autor

Mas, que, quando chegar à configuração acima, deve-se perceber que falta um retângulo azul em cima e outro embaixo, para que se tenha o novo retângulo procurado. Pode ser utilizado um artificio matemático muito simples, adicionar e subtrair o mesmo elemento à equação, não alterando sua estrutura, assim se tem:

$x^2 - 3x + x - x - 4 = 0$ e espera-se que a nova construção seja:

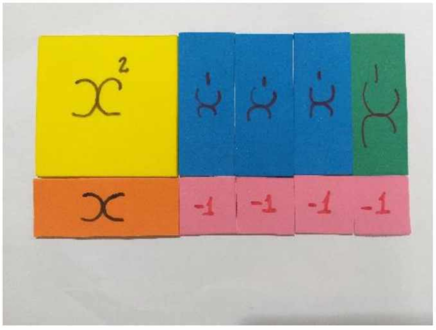


Figura 17 – acervo do autor

Formando, então, o novo retângulo com lados (x + 1) e (x – 4);

Dessa maneira ao calcular a área e igualar a zero obtêm-se:

(x + 1).(x – 4) = 0 e para que essa área se anule, um dos termos deve ser nulo, logo vem que, x = - 1 ou x = 4.

Entre a etapa três e a etapa quatro, introduziu-se o processo geométrico de al-Khwarizmi de completar quadrados, que serviu como direcionamento para a próxima construção do processo geométrico com a utilização do “Algeplan”. O método combina álgebra com geometria para comprovar geometricamente quando um número é raiz de uma equação do 2° grau.

Esse processo consiste em separar o terceiro termo da equação e em seguida geometricamente formar um quadrado com o primeiro e segundo termos e um novo termo, da seguinte maneira:

Dada a equação $x^2 + 6x + 8 = 0$; separa-se o terceiro termo, $x^2 + 6x = - 8$ (princípio aditivo). A partir daqui, com os conhecimentos adquiridos nas fases anteriores, espera-se a construção de uma figura quadrada com os termos do lado esquerdo da equação, “faltando um pedaço”, que será o termo que completará o quadrado.

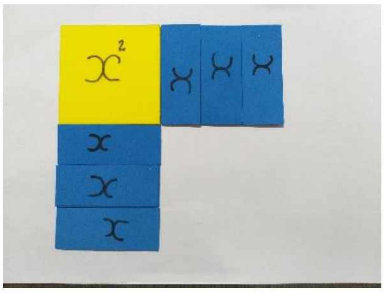


Figura 18 – acervo do autor

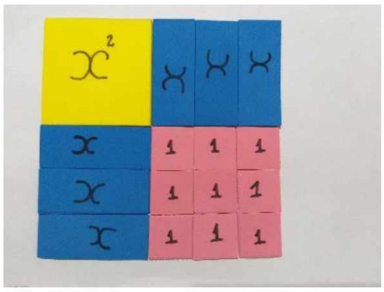


Figura 19 – Acervo do autor

Assim, o termo que completará o quadrado, será 9 ou 3^2 (nove quadrados unitários, Figura 19), logo a equação dada ficará $x^2 + 6x + 3^2 = - 8 + 3^2$, ao continuar, sabendo que pode-se expressar essa equação por (x + 3).(x + 3) = 1, o primeiro membro dessa equação sai da interpretação geométrica obtida com o Algeplan (Figura 19), ou ainda $(x + 3)^2 = 1$ e daí $x + 3 = \pm 1$, com isso, encontra-se a solução esperada, x = - 2 ou x = - 4.

As atividades da quarta etapa foram:

a) $x^2 + 2x – 15 = 0$
b) $x^2 + 4x – 12 = 0$
c) $x^2 + 6x – 7 = 0$
d) $x^2 + 2x – 3 = 0$
e) $x^2 + 10 + 25 = 0$
f) $x^2 – 10x + 21 = 0$
g) $x^2 – 10x + 16 = 0$

Dessas quatro etapas a, mais elucidativa foi, sem dúvida nenhuma, a primeira etapa, talvez pela novidade da utilização do material concreto, ou simplesmente pela propaganda utilizada pelo professor, “resolução de equação do segundo grau montando um quebra-cabeça geométrico", sem usar formulação, o que de fato aguça a curiosidade e promove um certo "querer fazer", que muitas vezes nos conteúdos de matemática não acontece.

Percebeu-se um claro interesse da maioria dos alunos e depois de superado os primeiros minutos de euforia e dúvidas, a construção das soluções apareceu e a utilização do material se tornou intuitivo.

Alguns erros comuns apareceram primeiro no conceito de uso do material, respeitar as regras de construção, como nas figuras abaixo:

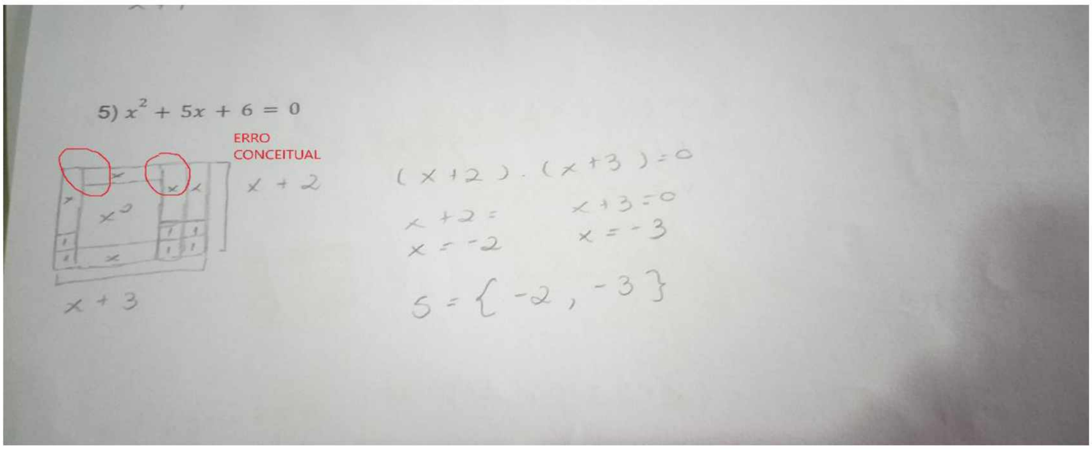


Figura 20 – acervo do autor

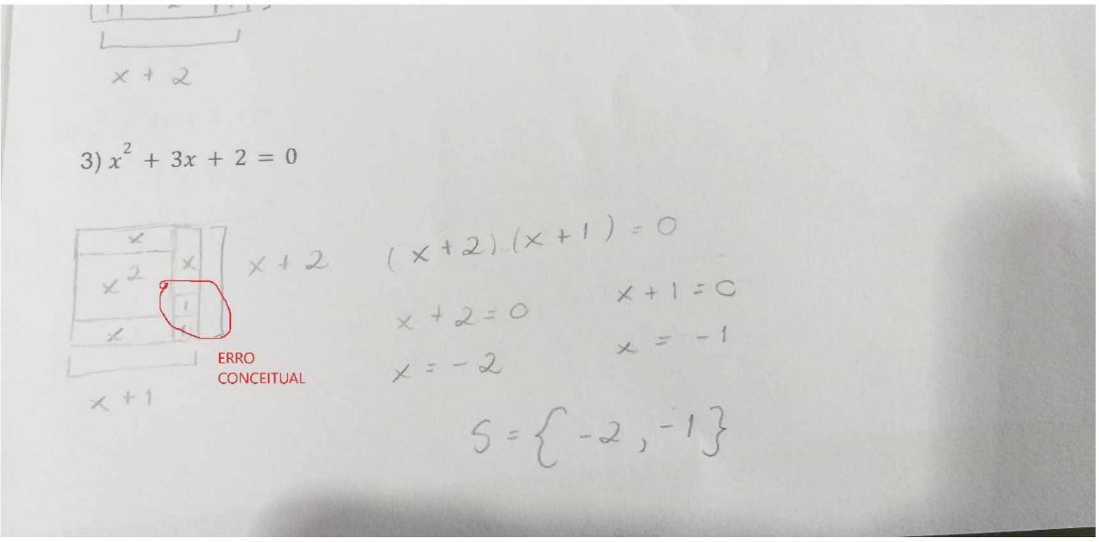


Figura 21 – acervo do autor

Outros erros comuns, do próprio uso da álgebra e do conhecimento das áreas das figuras planas.

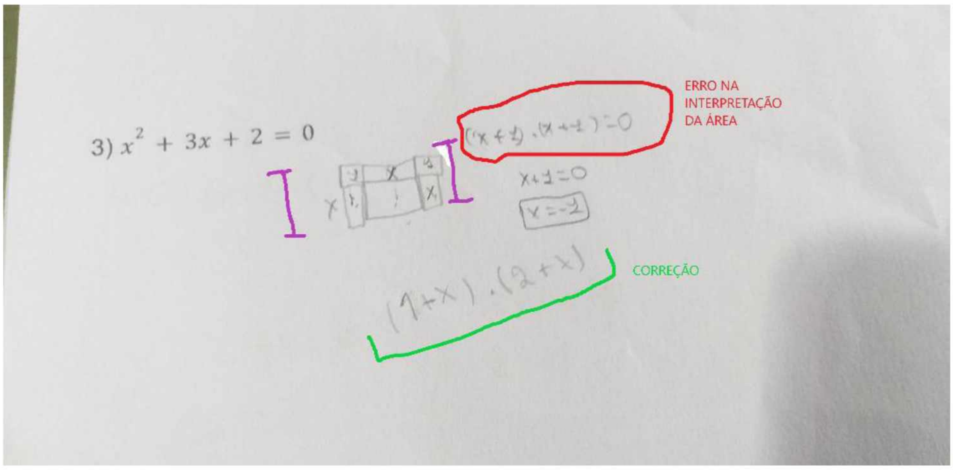


Figura 22 – acervo do autor

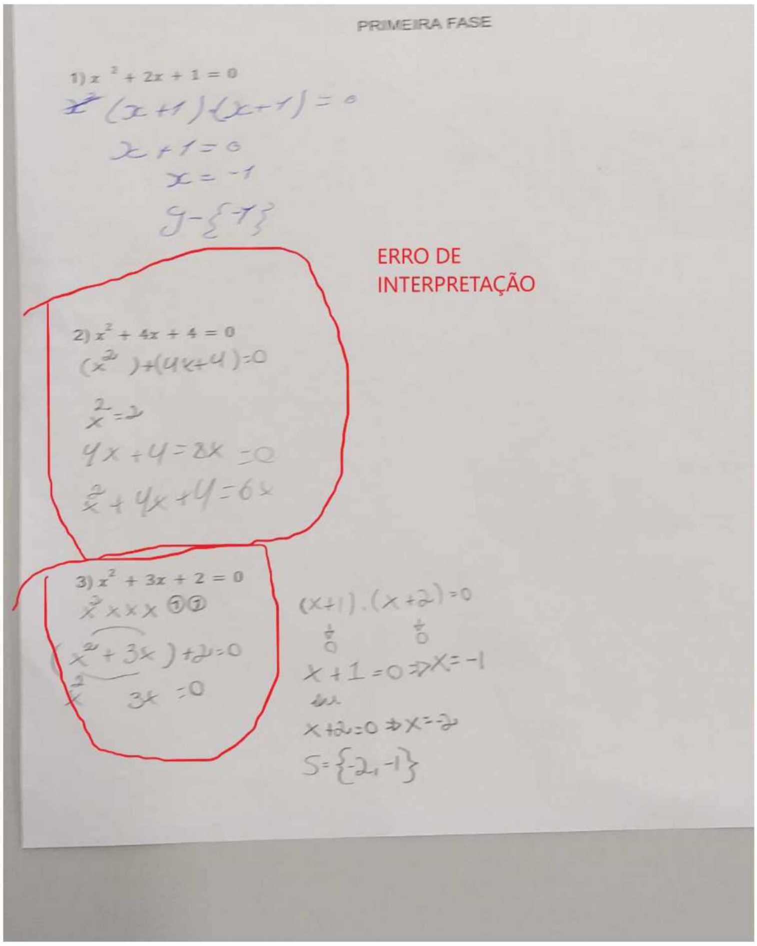


Figura 23 – acervo do autor

A relação com a atividade se tornou agradável e trouxe aquilo que se esperava, construções variadas, com a intuição e o conceito de formação de áreas geométricas próprias de cada grupo, tomou-se caminhos inusitados e diferentes, porém chegando-se ao mesmo e satisfatório resultado.

Abaixo, alguns exemplos de montagens formuladas durante o processo, a primeira é a montagem da quarta equação da primeira etapa citada acima (Figura – 24), a segunda e a terceira figuras mostram uma montagem correta e uma equivocada da sexta equação, também da primeira etapa citada acima (Figuras - 25 e 26).

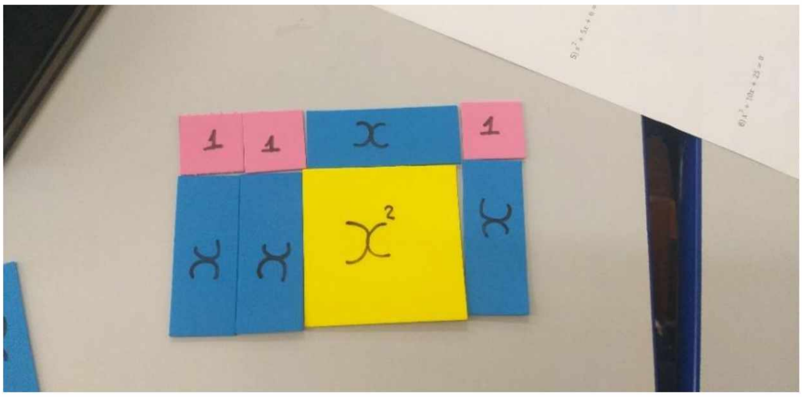
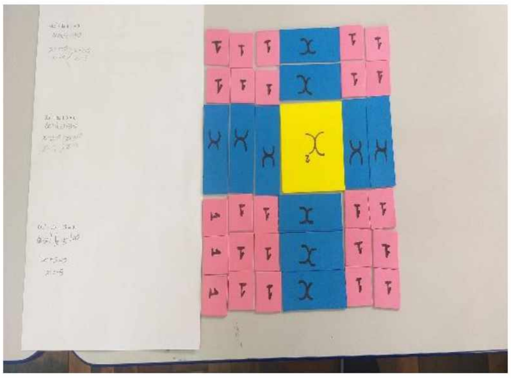


Figura 24 – Montagem correta – acervo do autor



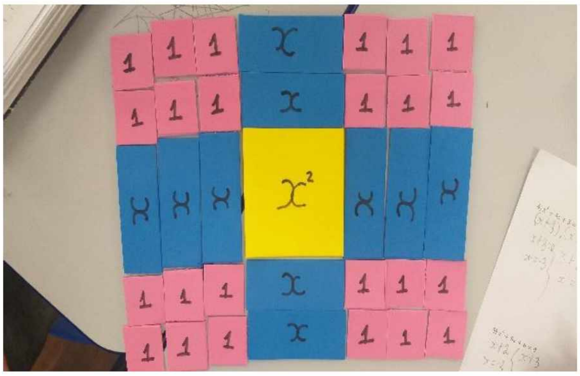


Figura 25 – Montagem correta

Figura 26 – Montagem equivocada

Conclusão

Durante as etapas da aula, a evolução do entendimento do assunto foi observada com satisfação, percebeu-se que o caminho tomado foi acertado e que a validade das ações superou as limitações do processo, podendo ser aplicado, com a devida mediação, sem prejuízo de conceituação, o que o torna, uma ferramenta significativa na construção do conhecimento buscado sobre o assunto.

Apesar das limitações didáticas e conceituais em determinados aspectos, a experiência foi muito agradável, com grande parte dos estudantes, obtendo resultados relevantes ao avanço da concepção dos conceitos de fatoração de polinômios e resolução de equações do segundo grau, sem estar estritamente relacionado com a aplicação da “fórmula de Bhaskara”.

Creio que inserir esse material em outra etapa da aprendizagem pode trazer resultados ainda melhores, por exemplo, nas operações com polinômios, na prévia do ensino da fatoração de polinômios, pois a visualização do que se está propondo traz segurança ao aluno e alivia a pressão de desenvolver as expressões somente com álgebra propriamente dita, de modo a libertar os conceitos matemáticos das amarras históricas de serem aterrorizantes e enfadonhos.

Referências bibliográficas

BERLINGHOFF, W. P.; GOUVÊA, F. **A matemática através dos tempos**. Tradução: GOMIDE, E. F. e CASTRO, Helena. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2010.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares Nacionais: Matemática**/Secretaria de Ensino Fundamental – Brasília: MEC/SEF, 1998.

RÊGO, R. G. Tópicos Especiais em Matemática: Introdução à Linguagem Algébrica //.In: ASSIS et al. **Licenciatura em Matemática a Distância,** volume 5. João Pessoa: UFPB, 2010.

Silva, Regina Coelly Mendes da. **Utilizando o Algeplan como recurso didático para compreensão de expressões algébricas**. / Regina Coelly Mendes da Silva. – Rio Tinto: [s.n.], 2014.

Vicente, Carlos Alberto de. Equações do Segundo Grau, sua História e Metodologias Aplicadas: **Metodologias para o Ensino de Equações do Segundo grau Matemática.** In: PARANÁ. Secretaria de estado da educação. Superintendência de Educação. Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE, 2011. Cascavel: SEED/PR.

Campos, Adilson de. ; Ponte, João Pedro da. **Raciocínio Matemático em Contextos Algébricos e Geométricos: uma análise com alunos medalhistas de 9º ano**. BOLEMA 36 (73). May-Aug 2022, Rio Claro – SP – Brasil.

BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.

Giovane Júnior, José Ruy. **A Conquista da Matemática:** 9º ano: ensino fundamental: anos finais / José Ruy Giovanni Junior, Benedicto Castruce. – 4ª Edição – São Paulo: FTD, 2018.