

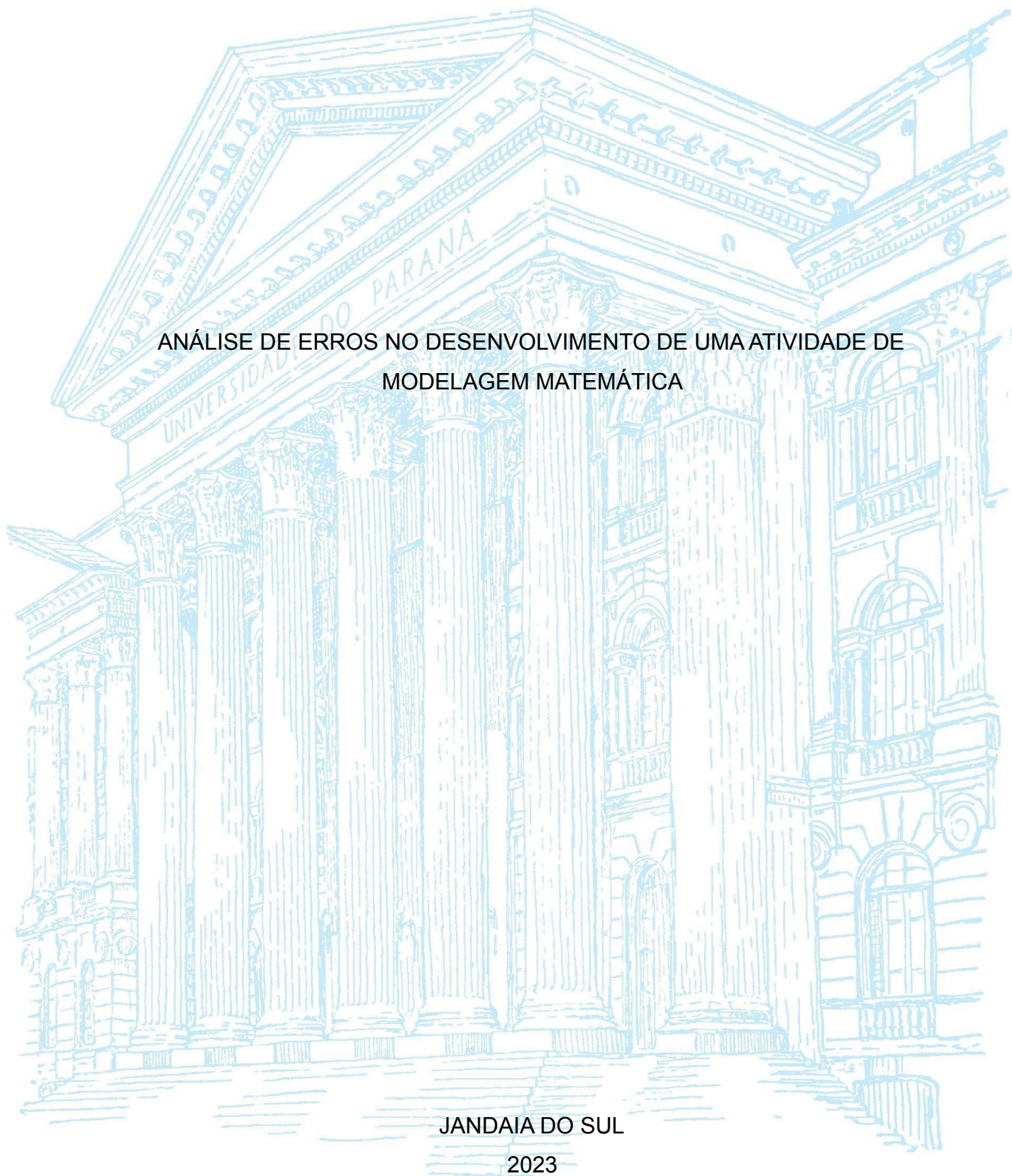
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MARIA GABRIELI ROSA JOFRE

ANÁLISE DE ERROS NO DESENVOLVIMENTO DE UMA ATIVIDADE DE
MODELAGEM MATEMÁTICA

JANDAIA DO SUL

2023



MARIA GABRIELI ROSA JOFRE

ANÁLISE DE ERROS NO DESENVOLVIMENTO DE UMA ATIVIDADE DE
MODELAGEM MATEMÁTICA

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Graduação de Licenciatura em Ciências Exatas - campus avançado de Jandaia do Sul, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de licenciada em Ciências Exatas - Matemática.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Bárbara Cândido Braz

JANDAIA DO SUL

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA JANDAIA DO SUL

Jofre, Maria Gabrieli Rosa

Análise de erros no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. / Maria Gabrieli Rosa Jofre. – Jandaia do Sul, 2023.

1 recurso on-line : PDF.

Monografia (Graduação) – Universidade Federal do Paraná, Campus Jandaia do Sul, Licenciatura em Ciências Exatas - Matemática. Orientadora: Profa. Dra. Bárbara Cândido Braz.

1. Análise de erros. 2. Educação matemática. 3. Ambiente de aprendizagem. 4. Ensino Fundamental. I. Braz, Bárbara Cândido. II. Universidade Federal do Paraná. III. Título.

CDD 370.1

Bibliotecário: César A. Galvão F. Conde - CRB-9/1747



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PARECER Nº 4/2023/UFPR/R/JA
PROCESSO Nº 23075.075090/2022-38
INTERESSADO: JAIR DA SILVA
ASSUNTO: Termo de aprovação de Trabalho de Conclusão de curso

Título: Análise de erros no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática

Autora: Maria Gabrieli Rosa Jofre

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a obtenção do grau no curso de Licenciatura em Ciência Exatas, aprovado pela seguinte banca examinadora.

- Bárbara Cândido Braz (orientadora)
- Thayná Felix dos Santos (membro)
- Janete de Paula Ferrareze Silva (membro)

Jandaia do Sul, 16 de fevereiro de 2023.



Documento assinado eletronicamente por **BARBARA CANDIDO BRAZ, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 16/02/2023, às 22:12, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **JANETE DE PAULA FERRAREZE SILVA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 16/02/2023, às 22:17, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **Thayná civilmente Thayná Felix dos Santos, Usuário Externo**, em 17/02/2023, às 22:30, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



A autenticidade do documento pode ser conferida [aqui](#) informando o código verificador **5304062** e o código CRC **7B706524**.

A Deus, aos meus pais e irmãos, por todo o esforço e paciência que tiveram comigo durante a realização desse curso, que me deram todo o apoio necessário para que pudesse chegar até aqui.

“Para isso existem as escolas: não para ensinar as respostas, mas para ensinar as perguntas. As respostas nos permitem andar sobre a terra firme. Mas somente as perguntas nos permitem entrar pelo mar desconhecido.”

Rubem Alves

RESUMO

Fora da vida escolar o erro é concebido como algo intrínseco ao ser humano e suas ações. Dentro da escola, e mais particularmente nas aulas de Matemática, no entanto, ele é historicamente concebido como algo que precisa ser evitado e sujeito a punição. Em contraposição a esta postura, alguns autores na Educação Matemática têm sugerido o uso de análise de erros como uma alternativa para se ensinar Matemática nos diferentes níveis de ensino. Para estes autores, analisar os erros cometidos pelos estudantes é um caminho para o processo de ensino de Matemática. Neste sentido, vem a teoria denominada de Análise de erros, na Educação Matemática. Nesta investigação utilizamos esta teoria para olhar para erros cometidos pelos estudantes em uma atividade de Modelagem Matemática. Nosso interesse pela Modelagem se deu no sentido de ser essa uma possibilidade para ensinar Matemática partindo de situações abertas, com referência na realidade e com problemas que podem ser investigados por meio de ferramentas matemáticas. Sendo assim, neste trabalho temos como objetivo investigar resposta(s) para a seguinte problemática: Que tipos de erros são cometidos por estudantes do Ensino Fundamental ao desenvolver uma atividade de Modelagem Matemática? Nosso interesse por pesquisar esta temática também se deu pelo fato de encontrarmos na literatura apenas uma pesquisa que trata da Análise de erros em situações embasadas na Modelagem Matemática. Este trabalho, entretanto, foi desenvolvido no Ensino Superior. Sendo assim, desenvolvemos uma atividade de Modelagem Matemática em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental em uma escola da rede pública de ensino e analisamos os registros gerados por esta prática por meio da Análise de erros. Os resultados da investigação apontam que os erros cometidos por estudantes em uma atividade de Modelagem Matemática se diferem de erros que são cometidos em problemas em que os alunos já possuem dados suficientes para resolver a situação proposta e nas quais esta situação já está matematizada.

Palavras-chave: Análise de erros. Educação Matemática. Ambiente de Aprendizagem. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

Outside school life, error is conceived as something intrinsic to the human being and his actions. Within school, and more particularly in mathematics classes, however, it is historically conceived as something that needs to be avoided and subject to punishment. In contrast to this position, some authors in Mathematics Education have suggested the use of error analysis as an alternative to teach mathematics at different levels of education. For these authors, analyzing the mistakes made by students is a way to the process of teaching mathematics. In this sense, comes the theory called error analysis in mathematics education. In this research we use this theory to look at mistakes made by students in a mathematical modeling activity. Our interest in Modeling was in the sense that this is a possibility to teach Mathematics starting from open situations, with reference in reality and with problems that can be investigated through mathematical tools. Thus, in this work we aim to investigate answer(s) to the following problem: What types of errors are made by elementary school students when developing a mathematical modeling activity? Our interest in researching this theme was also due to the fact that we find in the literature only a research that deals with the Error Analysis in situations based on Mathematical Modeling. This work, however, was developed in Higher Education. Thus, we developed an activity of Mathematical Modeling in a class of 8th grade of elementary school in a public school and analyzed the records generated by this practice through error analysis. The research results indicate that the mistakes made by students in a mathematical modeling activity differ from errors that are made in problems in which students already have enough data to solve the proposed situation and in which this situation is already mathematized.

Keywords: Error Analysis. Mathematics Education. Learning Environment. Elementary School

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – PROBLEMAS MATEMÁTICOS FECHADOS (a) E SITUAÇÃO DE MODELAGEM MATEMÁTICA (b)	28
FIGURA 2 – PARTE DO ÁLBUM DA COPA 2022	29
FIGURA 3 – ÁLBUM DE FIGURINHAS DA COPA DO MUNDO	30
FIGURA 4 – RANKING DA FIFA ANTES DA COPA DO MUNDO 2022	36
FIGURA 5 – RESOLUÇÃO MATEMÁTICA ESPERADA PARA O PROBLEMA 1	37
FIGURA 6 – RESOLUÇÃO A8	38
FIGURA 7 – RESOLUÇÃO A10	39
FIGURA 8 – RESOLUÇÃO A27	40
FIGURA 9 – RESOLUÇÃO MATEMÁTICA ESPERADA PARA O PROBLEMA 1	42
FIGURA 10 – RESOLUÇÃO A30	43
FIGURA 11 – RESOLUÇÃO (a) A15 e (b) A18	43
FIGURA 12 – RESOLUÇÃO A1	44
FIGURA 13 – RESOLUÇÃO A16	45
FIGURA 14 – RESOLUÇÃO A28	45
FIGURA 15 – COMPRA DE PACOTES DE FIGURINHAS	48
FIGURA 16 – COLETA DE DADOS	49
FIGURA 17 – MOMENTO DA TROCA DE FIGURINHAS	50
FIGURA 18 – ÁLBUM DE FIGURINHAS COMPLETO	50
FIGURA 19 – RESOLUÇÃO GRUPO 1	53
FIGURA 20 – RESOLUÇÃO GRUPO 2	54
FIGURA 21 – RESOLUÇÃO GRUPO 3	55
FIGURA 22 – RESOLUÇÃO GRUPO 4	56
FIGURA 23 – RESOLUÇÃO GRUPO 6	57
FIGURA 24 – RESOLUÇÃO GRUPO 8	58

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – AMBIENTES DE APRENDIZAGEM.....	15
QUADRO 2 – CASOS DE MODELAGEM	18
QUADRO 3 – ORGANIZAÇÃO DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS	31
QUADRO 4 – ERROS COMETIDOS PARA O PROBLEMA 1	41
QUADRO 5 – ERROS COMETIDOS PARA O PROBLEMA 2	46
QUADRO 6 – ERROS COMETIDOS PARA O PROBLEMA DE MODELAGEM MATEMÁTICA	61

LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

- CNMEM – Conferência Nacional de Modelagem na Educação Matemática
- BDTD - Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações
- MMC - Mínimo Múltiplo Comum (MMC)
- UFPR - Universidade Federal do Paraná
- FIFA - Federação Internacional de Futebol Associado

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	10
2 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	13
3 ANÁLISE DE ERROS	20
3.1 A CATEGORIZAÇÃO DE ERROS	23
4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	26
4.1 CONTEXTO DO PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES	26
4.2 AS TAREFAS PLANEJADAS	27
4.3 A ORGANIZAÇÃO DAS ATIVIDADES	30
4.4 COLETA E ANÁLISE DOS DADOS	31
4.5 CARÁTER DA PESQUISA	33
5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS	33
5.1 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO PROBLEMA 1	37
5.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO PROBLEMA 2	41
5.3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA SITUAÇÃO DE MODELAGEM MATEMÁTICA	46
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	60
REFERÊNCIAS	63
APÊNDICE 1 – LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO	65
APÊNDICE 2 - FORMULÁRIO - JOGADORES DA COPA	73
APÊNDICE 3 - RELATÓRIO DA ATIVIDADE	74

1 INTRODUÇÃO

Errar é humano! Esse ditado tão popularizado e utilizado no dia a dia das pessoas em diferentes contextos, parece não assumir a mesma relevância e significado nas aulas de Matemática. Se fora da escola o erro é visto como algo intrínseco ao ser humano, nas aulas de Matemática parece ser algo passível de punição; algo a ser evitado e que deve ser, de imediato, corrigido. Essa compreensão, muitas vezes oculta, nas aulas de Matemática pode levar os estudantes dos diferentes níveis de ensino a desenvolver um sentimento de aversão a essa área do conhecimento. Conseqüentemente, o desenvolvimento do pensamento matemático destes alunos fica comprometido.

Neste sentido, no âmbito da Educação Matemática, já há algumas décadas, em contraposição à ideia indicada no parágrafo anterior, diversos autores têm defendido o erro como uma possibilidade para a aprendizagem CURY (2007), PINTO (1999), BORASI (1985). Para Borasi (1985), por exemplo, o erro pode ser utilizado como um “trampolim para a aprendizagem”.

Na maioria das vezes, os estudantes costumam ver o erro como frustrações, incapacidade e falta de dom; já para os professores ele passa a ser algo que não é valorizado e deve ser combatido, pois acabam mostrando para o sistema que seu trabalho não está tendo êxito, o que atrasa o desenvolvimento de seus alunos. Em suma, podemos dizer que o erro na Matemática é visto como um “fracasso”. No entanto, a análise de erros vê o erro como uma forma do aluno aprender com ele. Cury (2007) defende a ideia de que a análise de erros é uma abordagem de ensino e pode ser empregada em sala de aula com o objetivo de fazer com que os alunos questionem suas soluções.

Ao mesmo tempo, na Educação Matemática, algumas tendências metodológicas têm sido indicadas como possibilidades para abordar o erro como uma possibilidade de aprendizagem e não como um equívoco ou algo a ser evitado. Nesse sentido, a pesquisa de Barbieri (2019), por exemplo, indica o uso da Modelagem Matemática como um caminho para abordar os erros e analisá-los nas aulas de Matemática. Nela seu enfoque se dá no ensino superior, cujo objetivo de pesquisa é investigar o potencial da Modelagem Matemática para explorar os erros dos estudantes de modo que pudesse problematizá-los.

Considerando a pesquisa de Barbieri (2019), desenvolvemos um levantamento bibliográfico nos anais de todas as edições da Conferência Nacional de Modelagem na Educação Matemática (CNMEM) na busca de trabalhos que tratassem de Análise de erros e Modelagem Matemática no ensino. A busca foi realizada nos anais da CNMEM, por ser esta a conferência mais significativa na área de Modelagem na Educação Matemática, no Brasil. Ao fazer esse levantamento nos anais não encontramos nenhum trabalho que tratasse de Análise de Erros e Modelagem Matemática na Educação Básica, apenas o trabalho de Barbieri (2019), porém se referia ao Ensino Superior.

Partindo desse pressuposto, fizemos um levantamento de dados no Google Acadêmico e na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), com as seguintes palavras-chave: “análise de erros”, “Modelagem Matemática”, “Educação Matemática” e “Ensino Fundamental”; nesta busca encontramos 10 trabalhos. Dentre esses trabalhos, apenas 7 deles foram desenvolvidos nos anos finais do Ensino Fundamental. Os trabalhos encontrados analisam os erros dos alunos e citam a Modelagem; ao mesmo tempo, os problemas apresentados são fechados e aproximam-se mais da tendência metodológica de Resolução de Problemas do que da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática.

Neste sentido, considerando o contexto descrito anteriormente e os resultados dos levantamentos realizados, nesta pesquisa nos propusemos a investigar: Que tipos de erros são cometidos por estudantes do Ensino Fundamental ao desenvolver uma atividade de modelagem matemática? Para tanto, desenvolvemos uma atividade de modelagem matemática com estudantes de um oitavo ano de uma escola pública situada na região norte do Paraná. Neste texto, apresentamos os caminhos percorridos ao longo da investigação e os resultados obtidos, com indicações de estudos ainda necessários para a área.

Na seção denominada Modelagem Matemática na Educação Matemática, são apresentadas algumas concepções de Modelagem Matemática, como a de Meyer, Caldeira, Malheiros (2011), Almeida, Silva e Vertuan (2012), e de Barbosa (2001). Colocamos foco nesta última concepção, pois esta foi a que embasou nossa prática.

Na seção intitulada Análise de Erros, discutimos sobre a Análise de Erros na percepção de Cury (2007) e outros autores e sobre como podemos utilizá-la para

analisar os erros dos alunos e como categorizar os tipos de erros encontrados em atividades matemáticas.

Na seção sobre procedimentos metodológicos, apresentamos as ferramentas e procedimentos utilizados para produção, coleta de dados e análise desses dados.

Na seção de descrição e análise dos dados, descrevemos como foram realizadas nossas aulas, além de discutirmos e analisarmos as atividades desenvolvidas com os estudantes além de descrever os resultados alcançados com esta investigação.

E por fim, na seção de Considerações Finais, indicamos alguns resultados obtidos por meio das análises dos dados e indicamos possibilidades de novos trabalhos sobre as temáticas deste texto.

2 MODELAGEM MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Os usos da Matemática não devem/deveriam se restringir ao contexto das aulas de Matemática, mas contribuir com a formação de pessoas que sejam capazes de conviver em sociedade, respeitando as diferenças e que consigam resolver situações, não Matemáticas, envolvidas no seu cotidiano. No entanto, muitas vezes a Matemática é abordada de modo tradicional, por meio de resolução de exercícios, apenas como meio de ilustrar como a Matemática pode aparecer em situações Matemáticas e, às vezes, não Matemáticas.

Nessa perspectiva tradicional de ensino, no qual a Matemática é abordada de modo bastante descontextualizado de outras situações, o enfoque principal está no conteúdo que está sendo estudado e no professor, a qualidade do ensino depende de que ele deve ser um bom transmissor, e “um professor bom era aquele que fazia com que seus alunos “vissem” os conceitos matemáticos e os aceitassem” (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011, p. 24).

Devido a dificuldades quanto aos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática, professores vêm buscando novas possibilidades metodológicas, que podem ser inseridas em sala de aula. Uma delas é a *Modelagem Matemática*. Nela o fato das pessoas não conseguirem relacionar a Matemática com outras coisas ao seu redor, deve ser mudada, pois “não devemos assistir os objetos matemáticos, mas sim, manipulá-los, e com isso rompemos com a ideia de que o professor ensina e acreditamos que o conhecimento não está apenas no sujeito e no objeto, mas na interação com os mesmo” (MEYER; CALDEIRA; MALHEIROS, 2011, p. 24).

A utilização da Modelagem Matemática não é muito recente, ela vem sendo utilizada desde a antiguidade, como meio de entender, solucionar e explicar fenômenos. A Modelagem Matemática surge a partir da Matemática Aplicada, assim podemos entender que ela foi “um dos berços de inspiração para o movimento de Modelagem na Educação Matemática.”(BARBOSA, 2001, p.11). Mas foi no final do século XX, que a Modelagem foi vista como o ato de modelar, formular e resolver determinada situação problema. De acordo com Biembengut (2009), nas últimas décadas a Modelagem vem recebendo espaço em vários países tendo concepções diversas quanto ao seu uso no ensino.

Nesta perspectiva, Barbosa (2001), nos diz que a Modelagem, até o início dos anos 2000, tinha fortes parâmetros trazidos da Matemática aplicada, logo, as

atividades apresentadas aos alunos partiam do processo de construção de modelos matemáticos. Para Almeida, Silva e Vertuan (2012, p.13), um modelo matemático pode ser uma representação da realidade sobre o olhar de quem a investiga, ou seja, é ele que dá forma à solução do problema. Ainda, Barbosa (2007), conceitua um modelo, como sendo qualquer representação matemática da situação que está sendo estudada. Estas são concepções de modelo matemático que se diferenciam, no entanto, da compreensão de modelo matemático na Matemática Aplicada. Neste campo de conhecimento, os modelos precisam ser capazes de fazer previsões acerca de fenômenos, para além de representá-los. É neste sentido, também, que muitos receios podem surgir quanto ao uso da Modelagem nos diferentes níveis de ensino: a compreensão de que modelos precisam ser rebuscados e capazes de fazer previsões. Esta é uma concepção, como dissemos, com raízes na Matemática Aplicada, mas que se distanciam das compreensões sobre modelo matemático, na Educação Matemática, como bem explicaram Barbosa (2001), Almeida, Silva e Vertuan (2012), dentre outros.

Há várias concepções de Modelagem na Educação Matemática. Cada concepção apresenta objetivos diferentes, delineando procedimentos didáticos que também se distinguem. Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 07), por exemplo, definem a *Modelagem Matemática* como: “uma abordagem pedagógica em que se aborda, por meio da Matemática, um problema não essencialmente matemático.”

Os autores ainda ressaltam que para desenvolver atividades de Matemática nessa abordagem pedagógica, tanto os professores quanto os alunos precisam ser seres ativos, desde a definição do tema até a parte de resolução de problemas. Ainda, Meyer, Caldeira e Malheiros (2011, p.33), trazem a ideia de que a “Modelagem se enquadra em uma concepção de *educar matematicamente*“. Ou seja, num sentido de considerar a Modelagem como uma concepção de ensino e aprendizagem e não apenas como um método para ensinar Matemática.

Nesse contexto de concepções, adotamos a concepção de Modelagem de Barbosa. Para Barbosa (2001, p.31), a Modelagem Matemática “é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade”. Barbosa nos diz, que esse *ambiente* é construído por meio de um convite feito aos alunos e devido a isso, caso os estudantes não aceitem o convite, pode fazer com que os alunos não se

envolvam com as atividades, e para tanto, os interesses dos alunos devem vir ao encontro às propostas feitas pelo professor.

A ideia de ambiente de aprendizagem a qual Barbosa se baseia é a de Skovsmose (2000). Segundo o autor, as práticas de atividades em Matemática na sala de aula podem ser pautadas em 3 tipos diferentes de referência e em dois paradigmas. Esta combinação leva à seis diferentes tipos de ambientes de aprendizagem, como mostra o Quadro 1:

QUADRO 1: AMBIENTES DE APRENDIZAGEM

	Paradigma do Exercício	Cenários para Investigação
Referência a matemática pura	(1)	(2)
Referência na semirrealidade	(3)	(4)
Referência na realidade	(5)	(6)

FONTE: Skovsmose (2000, p. 08).

O ambiente do tipo (1), é um ambiente pautado no paradigma do exercício e com relação à Matemática pura. Neste ambiente, o aluno é convidado a resolver, normalmente, exercícios, para os quais já possui repertório matemático para resolver. Em outras palavras, o estudante passa a reproduzir o que foi ensinado a eles. Podemos citar como exemplos desses tipos de questões:

- Calcule:

a) $35 - (10 + 2) + 2$

b) $37 + [-20 - (-12 + 19 - 4)]$

Neste caso, para sairmos de um paradigma do exercício e passarmos para um cenário de investigação, poderíamos perguntar aos alunos se ao tirarmos os parênteses e colchetes da expressão o resultado ainda seria o mesmo, pois nesse momento o aluno iria investigar a situação que o professor propôs.

O ambiente do tipo (2), assim como o ambiente (1), também tem referência na Matemática pura, porém, ele se desdobra a partir de um cenário de investigação, um ambiente deste tipo passa a envolver algumas explorações de números e figuras. Como exemplo, os autores Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 25-53), propuseram uma atividade referente a exploração com números, no qual os alunos teriam que estabelecer as relações com os números que se encontram em uma tabela e a partir

da manipulação e investigação que fazem, eles chegam em uma generalização para aquelas relações aritméticas determinadas.

O ambiente do tipo (3), é pautado na semirrealidade e baseado em exercícios, estes englobam, portanto, situações fictícias. Este ambiente pode ser ilustrado pelo seguinte exemplo: João foi à feira e comprou 6 kg de banana, se o preço do quilo da banana era R\$4,50. Quanto João pagou em sua compra? Por mais que isso possa retratar uma situação real, pois se trata de assuntos que utilizamos no cotidiano, não sabemos se a situação realmente aconteceu, por isso, ele se insere no ambiente do tipo (3) (semirrealidade). Neste caso, basta o aluno saber as operações elementares para que consigam resolver o problema, e nele o aluno não faz nenhuma investigação para resolvê-lo.

Já o ambiente (4), é pautado na semirrealidade e em um cenário de investigação. Neste cenário os alunos fazem explorações e explicações do conteúdo/problema que está sendo trabalhado e é livre para fazer questionamentos, investigações, tomar decisões e a partir disso fazer considerações para a problemática que envolva a Matemática. Um exemplo deste tipo de ambiente seria aquele desenvolvido a partir de uma atividade matemática que se baseia em dados fictícios sobre a variação de temperatura em determinada cidade ao longo de um dia ou de um período mais longo. A partir destes dados fictícios, os estudantes e docente podem investigar, por exemplo, como descrever estes dados de modo a fazer previsões.

O ambiente (5) se trata de um ambiente com referência na realidade porém trabalhado no paradigma do exercício, nele se pode trabalhar com problemas que envolvam uma situação real. Um exemplo disso são as questões apresentadas em vestibulares, que utilizam dados resultantes de pesquisas feitas pelo censo do IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística). Como os candidatos já devem conhecer os conceitos necessários para resolver aqueles problemas, isso pode fazer com que a situação se caracterize como um exercício.

Por fim temos o ambiente (6), que é um ambiente que se encontra no cenário de investigação com referência na realidade, nele os alunos precisam investigar soluções para a problemática apresentada.

Visto isso, a concepção de Barbosa se encaixa no ambiente de tipo (6), pois tem referência na realidade e é um cenário para investigação. Partindo dessa premissa Barbosa afirma que o ambiente de aprendizagem em Modelagem, é

aquele em que faz com que os alunos façam investigações sobre situações que não partem necessariamente da Matemática, mas também de outras áreas de conhecimento, e a partir disso os alunos resolvem essas situações-problema por meio da Matemática, formando assim, sujeitos ativos na sociedade. Esse contato dos alunos com a Modelagem desperta a autonomia e interesse, sendo responsabilidade tanto do professor como dos alunos de se envolver com a atividade.

Portanto, a concepção de Modelagem Matemática de Barbosa está pautada em três ideias importantes: a investigação, a problematização e o convite. Para discutir sobre os conceitos de investigação e problematização o autor se ancora no que ele chama de indagação, que foi utilizada por Paulo Freire (1998), como o caminho para educação, enfatizando que a premissa do conhecimento é indagar, ou seja, fazer perguntas. A indagação não se limita apenas ao esclarecimento de um problema, mas também a instigar os alunos a pensar e formular seus próprios questionamentos.

O conceito de problematização também é discutido por Mendonça (1993). Para ele, esta é a forma de elaboração de um problema, no qual também faz parte da indagação. Assim, podemos dizer que esse ambiente de aprendizagem, é posto em forma de convite, ou seja, o professor faz um convite aos alunos para participar da atividade, podendo ele ser aceito ou não pelos alunos. Quando esse convite é negado pelos alunos, pode acarretar em dificuldades no decorrer da atividade, isso não vai impedir com que uma tarefa Matemática seja realizada, mas essa atividade de modelagem matemática pode se transformar em uma atividade em que sua característica vai estar em uma aula de Matemática tradicional (BRAZ; KATO, 2014).

De acordo com Barbosa (2001), podemos desenvolver atividades de Modelagem na sala de aula, de diferentes formas, às quais ele denomina de casos. Esses casos são diferentes e variam de acordo com o papel que o professor e aluno assumem no desenvolvimento da atividade, conforme indica o Quadro 2:

QUADRO 2: CASOS DE MODELAGEM

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Formulação do problema	professor	professor	professor/aluno
Simplificação	professor	professor/aluno	professor/aluno
Coleta de dados	professor	professor/aluno	professor/aluno
Resolução	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

FONTE: Barbosa (2004, p. 5).

No caso 1, o professor apresenta um problema e dados para a sua resolução e cabe aos alunos investigar o problema e por intermédio do professor resolvê-lo. Por mais que o professor tenha formulado o problema e disponibilizado os dados dele, não inibe que os alunos tenham suas indagações. Podemos considerar como exemplo, a atividade da cerca elétrica apresentada por Almeida, Silva e Vertuan (2012, p. 75–82), na qual o aluno a partir dos dados expostos sobre os valores de kits e equipamentos avulsos para utilizar na instalação de uma cerca elétrica, precisa responder a seguinte problemática: *Qual a opção mais vantajosa para um cliente que deseja instalar esse equipamento de segurança?*

No caso 2, o professor leva o tema que será estudado para sala de aula, mas o aluno precisará buscar os dados para descrever a situação. Nesse caso, cabe ao professor apenas a formulação do problema. Temos como exemplo a atividade apresentada em Tortola (2016, p. 96) sobre o crescimento das unhas, em que a formulação do problema é proposto pelo professor e cabe aos alunos e professor a coleta de dados e resolução do problema. Nesta situação os estudantes são convidados a resolver a situação que se pauta na questão: *Quanto crescem suas unhas ao longo dos meses, caso você não as corte? De quanto em quanto tempo você deve cortar suas unhas para evitar problemas de saúde?*

Por fim, no caso 3, cabe ao aluno formular a situação problema, partindo de temas não matemáticos. Fica a cargo dele todo o processo de resolução, sendo o professor apenas o orientador nesse processo. Para esse caso, Senes (2021), desenvolveu uma atividade cujo o tema era - *Vacinação contra Covid-19*, nessa atividade os alunos precisavam responder a seguinte pergunta: “Quanto tempo levará para que toda população paranaense seja vacinada?”, nela todo o processo

foi desenvolvido por professora e alunos desde a definição do tema, coleta de dados e resolução do problema.

O papel do professor é acompanhar e orientar os alunos durante todo o processo ao desenvolver a atividade independente do tipo de caso que o professor desenvolva em sala de aula.

3 ANÁLISE DE ERROS

Para que consigamos definir o que é análise de erros, primeiramente precisamos definir o que é o erro. Segundo o dicionário Michaelis (2022), o erro significa, “ato ou efeito de errar”. Neste trabalho, não vamos tratar o erro como um equívoco, assim, assumimos a concepção de que “o erro se constitui como um conhecimento, é um saber que o aluno possui, construído de alguma forma, logo é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre as suas respostas.” (CURY, 2007, p. 82), assim, vamos nos referir ao erro como uma possibilidade de investigação e de aprendizagem.

Um dos maiores desafios dos professores e também dos alunos, é tratar o erro como uma possibilidade para a aprendizagem em Matemática. Historicamente, nas aulas de Matemática, temos tratado e classificado o erro como algo que deve ser evitado.

Brum (2013), argumenta que, “a forma de se tratar o erro pode se diferenciar variando de professor para professor. Alguns reforçam para que o erro não se repita novamente, e outros trabalham em cima dele como forma de fazer com que restaurem um conceito”. Ainda:

Cada estudante apresenta um tempo de raciocínio e um ritmo diferente para entender cada situação estudada, assim é preciso uma reflexão sobre a forma de ensinar, além de aproveitar momentos de aula para rever os erros, desenvolvendo, então, uma aprendizagem reflexiva. (BRUM. 2013, p. 23).

É partindo das respostas dos alunos que podemos identificar onde se encontram suas dificuldades, permitindo que os alunos encarem seus erros como parte do processo de aprendizagem e como uma possibilidade de conhecimento, pois é por meio dele que eles levantam questionamentos se o que estão fazendo está coerente com o que se quer mostrar. Segundo Alvarenga:

O erro pode ser utilizado como fonte de virtude na aprendizagem escolar. O fato de não encontrar a solução desejada indica que o caminho escolhido pelo estudante foi inadequado para determinada necessidade e o resultado encontrado e analisado deve ser usado na busca da solução apropriada. (ALVARENGA, 2009, p. 3).

Neste sentido o erro se torna necessário para a aprendizagem do aluno, fazendo com que o mesmo supere suas dificuldades e auxilie o processo de construção do pensamento matemático. Sendo assim, é preciso que a figura docente tenha clareza sobre esse processo, com o objetivo tanto de perceber o erro como uma possibilidade para a aprendizagem, quanto organizar mecanismos para direcionar este processo. Não é possível que o erro seja tratado como uma possibilidade de aprendizagem se professor e estudante não tiverem ciência disto.

É neste caminho que Cury (2007) defende a ideia de que “a análise de erros é uma abordagem de pesquisa e também uma metodologia de ensino, se for empregada com um objetivo de levar os alunos a questionar suas próprias soluções”. Logo, a análise de erros se destaca na observação dos problemas que foram propostos, tendo o cuidado de questionar a respeito das respostas dos alunos e verificar como se dá seu pensamento a respeito da resolução da atividade.

Podemos assumir assim, que a análise de erros busca a compreensão sobre as dificuldades que os alunos encontram ao resolver problemas de Matemática, aproveitando esses erros como um ferramenta de aprendizagem, pois Brum (2013), nos afirma que com essa ferramenta “é possível auxiliar os estudantes nas dúvidas e inquietações, abrindo espaço para a dinamização com aulas expositivas, desafiadoras e problematizadoras.”

Borasi (1996, apud CURY, 2007), propõe que ambientes nos quais os erros dos alunos podem ser aproveitados e investigados. A ideia é usar o erro para questionar o resultado obtido e analisá-lo ao invés de eliminá-lo. Para ilustrar esta indicação, a autora aborda um erro comum nas aulas de Matemática: a soma de frações com denominadores diferentes, como por exemplo: $\frac{3}{4} + \frac{6}{7} = \frac{3+6}{4+7} = \frac{9}{11}$.

Muitos professores se deparam com este tipo de erro após a abordagem das operações com frações, com seus estudantes. Cury (2007) se refere a esse erro como sendo um erro de *sobregeneralização*. Erro no qual os alunos fazem distorções sobre teoremas. Neste caso, ao invés de no exemplo anterior os alunos resolverem a soma de frações utilizando o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) entre os denominadores, eles utilizam a regra da multiplicação entre frações, na qual apenas multiplicamos numerador por numerador e denominador pelo denominador, no caso somaram cada uma das partes de uma fração pela outra.

Neste caso, a autora propõe que ao invés de tentarmos eliminar esse erro, apenas indicando o que deve ser feito, podemos explicar novamente sobre as propriedades de soma de frações e questionar os estudantes se a regra que eles utilizaram acontece/ é possível em alguma outra soma de fração. Neste processo, a autora indica que se pode explorar as possibilidades até que os estudantes percebam seus equívocos, por meio dos questionamentos postos pelo docente, com base nas regras matemáticas exploradas por eles.

Para trabalhar com esses erros Borasi (1996, apud CURY, 2007, p. 37), sugere as seguintes linhas de investigações:

- Há outras operações com frações onde numeradores e denominadores são combinados separadamente?
- Há algumas frações para as quais os resultados da adição com a regra-padrão e com a regra alternativa são iguais ou, pelo menos, "suficientemente próximas"? (p. 8).

Na primeira investigação os alunos têm a oportunidade de contestar e revisar aquilo que eles já sabem sobre os conceitos de frações, e começam a perceber o uso de "sobregeneralização" como sendo um equívoco devido ao uso das regras de multiplicação de frações. Ainda, no segundo caso, por mais que o professor explique como é a regra-padrão, ela não vai estar decorada, podendo ser mais interessante para os alunos, fazendo com que os mesmos possam levantar suas hipóteses e buscar formas de diferentes estratégias para a solução do problema. Cury (2007) propõe que:

Partindo da regra incorreta e elaborando situações didáticas motivadoras, é possível fazer uso do erro como "trampolim para a aprendizagem", expressão usada por Borasi (1985), ao introduzir uma coletânea de artigos sobre erros (CURY, 2007, p. 37).

Devido a isso é relevante utilizar a Análise de Erros como instrumento de investigação na Educação Matemática, pois partindo das respostas dos alunos podemos rever como eles pensaram e validaram as hipóteses, verificando se aquilo vai ao encontro do que está sendo requerido pela situação de estudo.

3.1 A CATEGORIZAÇÃO DE ERROS

Como vimos, Cury (2007) alega a ideia de que a análise de erros é uma metodologia de ensino e um caminho para analisá-los. Com base em Bardin (1979, apud CURY, 2007), a autora retoma as três etapas básicas para a análise de conteúdo: a pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados. A pesquisadora faz essa retomada de tais etapas, devido ao fato de que se embasa na Análise de conteúdo para tratar e sistematizar a análise de erros matemáticos. A autora se refere ao termo análise de conteúdos como sendo:

Um conjunto de técnicas de análise das comunicações visando obter, por procedimentos, sistemáticos e objectivos de descrição do conteúdo das mensagens, indicadores (quantitativos ou não) que permitam a inferência de conhecimentos relativos às condições de produção/recepção (variáveis inferidas) destas mensagens (BARDIN, 1979, p. 42).

Na fase de pré análise, o material que será utilizado é organizado, partindo das escolhas das perguntas, formulação de hipóteses e dos objetivos da análise, delimitando o corpus que é entendido como o conjunto de produções textuais no qual o pesquisador vai se debruçar. Em seguida, temos a fase de exploração do material, que consiste em um estudo aprofundado do corpus, com procedimentos de unitarização e categorização. A unitarização, consiste na releitura do material, e estabelece as unidades de análise dos erros, nas quais podem ser representadas por palavras, frases e termos. O pesquisador pode então, construir relações entre as unidades formando associações entre as questões e compreendendo o que têm em comum, agrupando-as para com isso formar as categorias dos erros. Por fim, temos o tratamento dos resultados, em que são descritas as categorias dos erros, podendo ser apresentadas por meio de quadros ou tabelas. Nessa fase, o pesquisador deve procurar compreender os conteúdos das mensagens mediante as interferências e interpretação (CURY, 2007).

Vários autores têm proposto modelos de classificação de erros matemáticos cometidos pelos estudantes, como: Astolfi (1999), Guy Brousseau (1986), Borasi (1996). Com o propósito de classificar os erros cometidos pelos estudantes, adotaremos o modelo empírico de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987, p.

9-12, tradução nossa)¹, por serem estes mais pertinentes ao nível de ensino e caráter da investigação ora realizada. Os autores classificam seis tipos de categorias de erros cometidos pelos alunos e características desses erros, descritos a seguir:

- I. **Dados mal utilizados:** esta categoria inclui os erros que estão discrepantes entre os dados fornecidos, podendo ocorrer no início ou durante o processo de resolução. Nesse caso, o aluno passa a denominar como dado uma informação que não está no problema. Dentro dessa categoria de erros encontram-se casos como: quando o aluno acrescenta dados estranhos que não do problema, despreza os dados que são fornecidos no enunciado e que são necessários para a resolução do problema e com isso compensa a falta de informação com dados que não são relevantes.
- II. **Linguagem mal interpretada:** este tipo de erro inclui uma tradução incorreta de dados matemáticos descritos de uma linguagem, possivelmente, simbólica para outra linguagem, possivelmente, simbólica. Como exemplo, podemos nos referir, quando temos o seguinte problema: *O triplo de um número menos 15 é igual a 15. Qual é esse número?* Nesse problema o aluno pode cometer erro, ao traduzir a linguagem matemática para a linguagem simbólica, não conseguindo traduzir o que significa o triplo de um número., não conseguindo resolver o exercício de uma forma correta.
- III. **Inferência logicamente inválida:** nela podemos incluir erros que tratam de raciocínios enganosos que acabam gerando erros na resolução do problema. Um exemplo para essa categoria de erros é quando o aluno afirma que $4 = -4$, o que sabemos que não acontece e nesse caso, ele tem um raciocínio enganoso.
- IV. **Teorema ou Definição distorcida:** esta categoria inclui erros que podem ocorrer de acordo com uma distorção de um princípio, regra, teorema e ou definição específica. Como exemplo podemos citar, quando o enunciado do problema pede para se calcular a média de uma determinada situação e o aluno acaba por utilizar o conceito de mediana para solucionar o problema.

¹ MOVSHOVITZ-HADAR, N., ZASLAVSKY, O., INBAR, S. An empirical classification model for errors in High School Mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 18, n. 1, p. 3-14. 1987.

- V. **Solução não verificada:** sua principal característica é que cada passo desenvolvido pelo aluno está correto, porém a resolução final do problema não é a certa.
- VI. **Erros técnicos:** por fim, nesta categoria, entram os erros computacionais, ou seja, erros nas extrações dos dados, nas manipulações algébricas e outros erros na execução de algoritmos que estudamos na Matemática. Para esse erro, podemos citar a expressão: $35 - (10 + 2) + 2$, nesse caso, o aluno pode cometer um erro quando não começa resolvendo a expressão pela operação que se encontra entre os parênteses.

Desta forma, utilizamos este modelo empírico de classificação de erros, para investigar os tipos de erros cometidos por estudantes de um oitavo ano do Ensino Fundamental no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

4.1 CONTEXTO DO PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES

Historicamente legitimada como uma disciplina de difícil compreensão, é comum a ocorrência de erros nas aulas de Matemática, pelos estudantes, por diferentes motivos; sejam eles associados a incompreensões conceituais, a aspectos afetivos, dentre outros. Nesta pesquisa consideramos que o erro é uma possibilidade para investigação e para a aprendizagem de conceitos matemáticos. Neste sentido, nos propusemos a investigar os tipos de erros cometidos por estudantes de um oitavo ano do Ensino Fundamental no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática.

Para que pudéssemos atingir o objetivo proposto, desenvolvemos atividades Matemáticas em uma turma de oitavo ano de uma escola pública situada no norte do Paraná, composta por 37 estudantes. As atividades foram configuradas como situações problema fechadas², compondo um total de três horas-aula e uma situação de Modelagem Matemática, com carga horária de três horas-aula; totalizando uma carga horária de seis horas-aula.

As atividades foram organizadas e planejadas no âmbito do projeto intitulado ÁGORA/UFPR - Jandaia do Sul³, do qual a autora deste texto fazia parte e a orientadora da investigação era coordenadora, no ano de 2022. Este projeto está vinculado ao curso de Licenciatura em Ciências Exatas da UFPR - campus avançado de Jandaia do Sul e, de modo geral, tem como objetivo formar um coletivo de (futuros) professores que ensinam Matemática e de professores formadores para discutir sobre o ensino de Matemática nos diferentes níveis de ensino.

No ano de 2022 o projeto, que já tinha duração de dois anos, contava com a participação de quatro futuras professoras de Matemática, duas professoras formadoras, um estudante do curso de Engenharia de Alimentos, dois estudantes do curso de mestrado em Educação para a Ciência, a Matemática e Tecnologias e três professoras da Educação Básica. Dentre estas professoras da Educação Básica, todas eram egressas do curso ao qual o projeto estava vinculado e duas delas são mestras em Educação Matemática, sendo uma delas a professora regente -

² São problemas nos quais incluem todos os dados necessários para resolução do problema.

³ Mais informações sobre o projeto, acesse: <https://jandaiadosul.ufpr.br/agoraufpr/>

doravante professora regente - da turma no qual estas atividades foram desenvolvidas.

Uma das ações do projeto ÁGORA, no ano de 2022, foi o desenvolvimento de um grupo de estudos que reunia todos os seus membros. Este grupo funcionava semanalmente, com duração de, aproximadamente, noventa minutos. Sendo assim, em dois destes encontros, nos quais tanto a autora deste texto, quanto a professora regente estavam presentes, as atividades que compõem os dados desta investigação foram planejadas.

4.2 AS TAREFAS PLANEJADAS

Para o planejamento das atividades, inicialmente apresentamos ao grupo do projeto ÁGORA o objetivo da pesquisa e como pretendíamos desenvolvê-la. A partir das indicações da professora regente, quanto a aspectos que relacionavam as características da turma, o repertório matemático dos alunos, a carga horária disponível para o desenvolvimento destas atividades e conceitos matemáticos que deveriam ser retomados e/ou abordados com os estudantes, as tarefas foram planejadas pelo grupo. Inicialmente, o coletivo concordou que a atividade proposta deveria ter como referência o conteúdo matemático que seria abordado nas próximas semanas pela professora regente, sendo o conteúdo de: probabilidade. Desta forma, o grupo optou por situações problema mais fechadas que poderiam ser propostas para que os estudantes pudessem retomar alguns conceitos matemáticos que já faziam parte do seu repertório e, a partir disso, explorar uma situação mais aberta que envolvessem a metodologia da Modelagem Matemática.

A partir destas indicações, as tarefas matemáticas foram planejadas. Para tanto, a temática escolhida foi a Copa do Mundo de futebol masculino de 2022, pois a atividade seria desenvolvida na época que estava ocorrendo a Copa do Mundo. Mais particularmente, nos debruçamos em planejar uma atividade que envolvesse a construção do álbum de figurinhas da Copa do Mundo. Esta já era uma temática escolhida previamente pela autora desta investigação, considerando o engajamento de adolescentes desta faixa etária para completar álbuns de figurinhas. Sendo assim, julgamos pertinente aproveitar a oportunidade de interesse destes sujeitos pela temática para abordar conceitos matemáticos.

Dentre as atividades planejadas, como relatamos anteriormente, foram propostos problemas matemáticos e uma situação de Modelagem. Neste texto, optamos por apresentar e analisar as resoluções dos estudantes sobre dois problemas matemáticos (Figura 1.a) mais fechados e sobre a situação de Modelagem Matemática (Figura 1. b), foco de nosso interesse.

FIGURA 1: PROBLEMAS MATEMÁTICOS FECHADOS (a) E SITUAÇÃO DE MODELAGEM MATEMÁTICA (b)

<p>1) Dentre os favoritos indicados pela FIFA, quais as chances do Brasil vencer a copa do mundo FIFA 2022? Explique.</p> <p>2) As seleções dos países da América do Sul disputaram as quatro vagas disponíveis para chegar à Copa do Mundo 2022. Nessa disputa, os seguintes países conquistaram suas vagas: Equador, Argentina, Brasil e Uruguai. Dentre esses países, qual a probabilidade de a turma do oitavo ano A ter escolhido uma destas seleções para compor o álbum de figurinhas da turma? Explique.</p>	<p>Quantos pacotinhos precisamos comprar para que possamos completar nosso álbum?</p>
(a)	(b)

Fonte: Autora (2023).

Considerando o momento em que se desenvolveu essa pesquisa, com um calendário letivo apertado e com menos de dois meses para o término do ano letivo da Educação Básica, optamos por desenvolver apenas uma atividade de modelagem matemática pautada no caso 2 proposto por Barbosa (2001) em que o aluno apenas se depara com o problema que será investigado, conforme apresentado no Quadro 2.

Levando-se em conta os encaminhamentos sugeridos por Barbosa (2001) ao tratar das possibilidades de desenvolvimento de atividades de Modelagem na sala de aula, embora já tivéssemos definido o tema da atividade: álbum de figurinhas da Copa do Mundo, elaboramos um questionário (APÊNDICE 2) para ser aplicado com a turma, com o objetivo de coletar algumas informações sobre os seus interesses para que pudéssemos restringir informações e elaborar nosso próprio álbum de figurinhas.

Originalmente, o primeiro álbum de figurinhas da Copa do Mundo surgiu em 1950 por uma fábrica de balas. O álbum trazia as seleções que participariam do mundial e suas figurinhas eram fabricadas em menor quantidade, tornando assim

mais difícil de ser encontradas. Mas, na Copa do Mundo da FIFA de 1970, a editora Panini, lançou o seu primeiro álbum de figurinhas. A partir disso, as fotos dos jogadores foram impressas em cards que precisavam ser colados no álbum. De início o álbum contava com aproximadamente 40 figurinhas referentes a bandeiras das seleções, pôsteres e fotos da equipe, contendo um total de 288 cards e figurinhas para serem colecionadas.

O álbum de figurinhas da Copa do Mundo de 2022, conta com um total de 670 figurinhas, sendo elas das 32 seleções participantes da Copa de 2022. Cada seleção possuía cerca de 20 figurinhas por página, sendo 18 jogadores, 1 foto da equipe e o brasão da seleção. Este ano em especial, tivemos uma novidade que foram as figurinhas extras no álbum, essas são divididas em quatro níveis de figurinhas raras (Bordô, Bronze, Prata e Ouro), em que continha cerca de 20 jogadores extras, totalizando 80 figurinhas. A Figura 2 mostra parte do álbum de 2022.

FIGURA 2: PARTE DO ÁLBUM DA COPA 2022



FONTE: AUTORA (2023)

Para que as atividades matemáticas, pautadas nesta temática pudessem ser desenvolvidas, usamos as informações coletadas por meio do questionário e elaboramos um álbum menor, com informações reais, contendo as seguintes informações: quatro figurinhas lendárias - cujos jogadores foram indicados pela turma no questionário; onze jogadores titulares da seleção brasileira; três estádios que sediaram jogos da Copa de 2022; o mascote oficial da copa e o brasão da

Confederação Brasileira de Futebol. A seleção brasileira foi a escolhida pela turma e os jogadores que compuseram o álbum são os onze jogadores titulares escalados para a Copa do Mundo no Catar: Neymar, Richarlison, Alisson, Danilo, Marquinhos, Thiago Silva, Alex Sandro, Casemiro, Fred, Raphinha e Paquetá. A Figura 3 mostra parte do álbum, cujo layout⁴ foi elaborado pela pesquisadora, com base nas informações e indicações da turma de oitavo ano.

FIGURA 3: ÁLBUM DE FIGURINHAS DA COPA DO MUNDO



FONTE: AUTORA (2023).

4.3 A ORGANIZAÇÃO DAS ATIVIDADES

Como descrevemos anteriormente, as atividades cujos dados compõem esta investigação foram desenvolvidas no decorrer de seis horas-aula. A atividade de Modelagem foi desenvolvida em 3 horas/ aula, cada aula tendo 50 minutos com um total de 37 alunos e para o desenvolvimento dessa atividade, tivemos a participação da professora regente e de membros do projeto ÁGORA/UFPR Jandaia do Sul. No Quadro 3 apresentamos informações sobre como estas aulas foram organizadas em relação à tarefa proposta, carga horária, organização da turma e orientação das atividades.

⁴ O layout do álbum elaborado pela autora foi feito utilizando a ferramenta do Canva: https://www.canva.com/pt_br/

QUADRO 3 - ORGANIZAÇÃO DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Data da aula	Carga horária (h/a)	Tarefa(s) proposta(s)	Organização da turma	
Aula 1 21/11	2	Problema 1 (Figura 1a)	Individual/coletivo	
Aula2 22/11	1	Problema 2 (Figura 1a)	Individual/coletivo	
Aula 3 25/11	2	Problema de Modelagem	Grupos (G) Alunos (A)	G1: A1, A2, A3 G2: A4, A5, A6, A7 G3: A8, A9, A10 G4: A11, A12, A13 G5: A14, A15, A16, A17 G6: A18, A19, A20 G7: A21, A22, A23 G8: A24, A25, A26 G9: A27, A28, A29
Aula 4 28/11	1	Problema de Modelagem		

FONTE: Autora (2023)

As atividades foram orientadas pela autora deste texto e pela professora regente. Nas aulas 1 e 2, contamos com a participação de uma futura professora, vinculada ao projeto ÁGORA, para a coleta de dados para a pesquisa. A futura professora ficou responsável por registrar as aulas em imagens e áudio e orientar a turma no desenvolvimento das tarefas. Nas aulas 3 e 4, contamos com a participação de dois outros integrantes do mesmo projeto, que também auxiliaram na gravação em áudio e imagens das aulas desenvolvidas.

4.4 COLETA E ANÁLISE DOS DADOS

Para que nossos objetivos fossem alcançados e para que pudéssemos acompanhar a forma com que os alunos investigaram os problemas propostos os dados foram coletados por meio de: i) registros escritos dos alunos; ii) gravações em áudio; iii) relatórios das atividades (APÊNDICE 3) e iv) diário de campo.

No decorrer dos nossos encontros buscamos registrar as falas dos alunos por meio de registros escritos. Esses registros puderam contribuir para que nós enquanto pesquisadoras pudéssemos compreender a forma com que os alunos pensaram em relação a resolução dos problemas propostos; outra forma que encontramos foi a utilização de gravações de áudios, pois nos proporcionou que a partir dele conseguíssemos transcrever diálogos entre alunos e professoras que fossem interessantes, a partir de suas percepções garantindo uma compreensão

daquilo que o aluno havia escrito em seus registros e até mesmo sobre suas conclusões durante a atividade.

Utilizamos também, o relatório para que ali os alunos pudessem anotar suas percepções, conclusões e hipóteses que estavam sendo levantadas, isso facilita a entender como os alunos pensaram para solucionar determinada situação. Por fim, fizemos uso do diário de campo, pois nele conseguimos anotar nossas percepções sobre o andamento das aulas, e além de fazer uso apenas dos relatórios pudemos anotar com mais precisão a forma com que o aluno pensou em determinada situação. Os dados citados acima seguiram os pressupostos teóricos apresentados nos capítulos anteriores.

Iniciamos a primeira aula entregando um roteiro de relatório e a folha de atividade referente ao problema 1 para os alunos. Esse roteiro de relatório, está baseado nas ideias de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) e foi pensado para que consistisse num material de apoio ao raciocínio dos estudantes, na medida em que para sistematizar o que poderiam escrever, deveriam argumentar e sintetizar seus argumentos matemáticos e não matemáticos.

Ao entregar esse relatório aos alunos, eles foram convidados a descrever os procedimentos que foram seguidos no decorrer das atividades.

A partir disso, esses dados foram analisados por meio da metodologia de análise de erros. Para tanto, inicialmente analisamos todas as respostas obtidas no desenvolvimento dos problemas que foram propostos. Desta análise global, separamos os registros das respostas que apresentaram algum tipo de erro. Por fim, procuramos agrupar essas respostas, na busca por categorizar os erros cometidos, com base no modelo empírico de Movshovitz-Hadar et al (1987). Para esta análise, os registros escritos dos estudantes, tanto nas folhas de atividades, quanto nos relatórios (Apêndice 3) elaborados por eles, foi fundamental. Por fim, organizamos os dados em quadros para termos uma visão mais ampla dos erros cometidos pelos alunos.

4.5 CARÁTER DA PESQUISA

Considerando o objetivo que norteia essa pesquisa - investigar os tipos de erros cometidos por estudantes de um oitavo ano do Ensino Fundamental no desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática - bem como as suas características, indicadas nas seções anteriores, essa investigação assume um caráter qualitativo.

De acordo com Borba (2004, p. 02), a pesquisa qualitativa “prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida”, logo o que importa não são os números, mas sim, entender o motivo de determinados comportamentos. No caso desta investigação, nos importa mais compreender sobre a natureza dos erros cometidos pelos estudantes nas atividades propostas do que contabilizá-los.

Rodrigues, Oliveira e Santos (2022, p. 6), enfatizam que embora o pesquisador interprete os dados do problema, é preciso destacar que “o valor científico deste tipo de pesquisa depende fundamentalmente da descrição do que ele observa”, pois ele vivenciando a pesquisa faz com que o pesquisador consiga explicar com domínio os dados por ele obtidos.

Ainda, Rodrigues, Oliveira e Santos (2022, p. 9) argumentam que “é importante enfatizar que a pesquisa qualitativa deriva de uma investigação, de uma situação-problema social e histórica, de uma coleta e análise de dados reais e concretos não estabelecidos em uma pesquisa rígida.”

De acordo com o que foi dito anteriormente, a pesquisa ora apresentada é caracterizada como qualitativa, pois os dados foram coletados de forma escrita, em que envolviam problemas fechados – incluem, em frases curtas ou em pequenos parágrafos, todos os dados necessários para a sua única solução- e problemas abertos “apresentam frases ou parágrafos mais longos, contêm por vezes dados suplementares, permitem vários modos de resolução e até diferentes soluções” (SOARES, 2013, p. 01). No entanto essa pesquisa também foi interpretativa, pois os dados foram analisados e interpretados pela autora para que pudéssemos fazer nossa interpretação e classificação dos erros.

5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo descrevemos e analisamos as atividades desenvolvidas no decorrer desta investigação, com fundamentos nos pressupostos teóricos apresentados nos capítulos 1 e 2. Optamos por descrever e analisar as situações propostas (problemas e situações de Modelagem) individualmente. Sendo assim, na seção 5.1 e na seção 5.2 descrevemos e analisamos os dados referentes aos problemas 1 e 2, respectivamente e na seção 5.3 descrevemos e analisamos o desenvolvimento da atividade de modelagem matemática.

Embora o desenvolvimento de tarefas não caracterizadas como situações de Modelagem não sejam nosso foco, optamos por apresentá-las e discuti-las considerando que elas influenciaram o desenvolvimento da atividade de Modelagem e funcionaram como uma forma de introdução da temática da atividade de Modelagem. Por meio destas tarefas, os estudantes mostraram-se engajados no tema da investigação.

Para que pudéssemos iniciar o conjunto de aulas pautado na temática do álbum de figurinhas da Copa do Mundo, na primeira aula com a turma de oitavo ano, questionamos sobre que acontecimentos ocorreriam/ocorreram no fim do ano de 2022. Logo de início eles falaram sobre a Copa do Mundo que teria início no dia 20 de novembro. Dito isso, questionamos se os alunos sabiam como eram definidas as seleções para a participação na Copa do Mundo.

A partir dessa pergunta, discutimos como eram definidas essas seleções e quantos times de cada continente são classificados, levando em conta que o país sede é classificado automaticamente. Em meio à esta conversa, questionamos o que os estudantes conheciam sobre o Catar, país que sediou a Copa daquele ano. Alguns alunos nada conheciam sobre este país. Outros citaram o estádio de 974, que recebeu esse nome porque a sua construção foi feita utilizando 974 containers e que após os jogos poderá ser desmontado. Outra informação trazida ao debate foi sobre as tragédias que ocorreram para a construção desses estádios.

Essa discussão inicial sobre a temática geral que nortearia as atividades nesta turma pode ser reconhecida como um momento de interação entre estudantes e entre estudantes e professoras; de inteiração sobre a temática das atividades e, em especial, como um convite para o ambiente de aprendizagem, como nos indica

Skovsmose (2000) sobre a aceitação do convite depender da sua natureza, do professor e do aluno, para que esse ambiente de aprendizagem possa ser estabelecido.

Além disso, de acordo com Barbosa (2001, 2004, 2007) o ambiente de aprendizagem para a Modelagem Matemática é estabelecido após o aceite dos estudantes para este ambiente. Nesta aula, e também nas próximas, vários convites para o ambiente da Modelagem foram propostos. A partir do interesse que os alunos demonstraram pelo tema no decorrer da nossa discussão inicial pudemos notar que os alunos aceitaram o convite, pois eles ficaram interessados pelas curiosidades trazidas, nesse momento eles expuseram suas opiniões, compartilharam as experiências que tinham sobre o tema e comentaram sobre as informações que foram trazidas para a resolução dos problemas matemáticos propostos.

A partir do aceite inicial para o ambiente de Modelagem passamos, junto aos alunos, para o processo de problematização de situações. Neste momento, em especial, problematizamos a situação de modo a propor um problema mais fechado. Para tanto, apresentamos algumas outras curiosidades e perguntamos se a turma tinha uma seleção favorita para vencer a Copa. Através dessa pergunta, os alunos citaram várias seleções para as quais eles estavam torcendo. Com isso perguntamos se os alunos sabiam qual a seleção favorita para ganhar a Copa naquele ano, de acordo com a Federação Internacional de Futebol Associado (FIFA). Como a maioria dos alunos falou que não sabia, pedimos para que pesquisassem nos seus celulares, usando a rede móvel de internet, com a autorização da professora regente, e após eles pesquisarem, mostramos uma informação que eles já haviam encontrado: um ranking da Fifa com os 10 times favoritos para vencer a Copa do Mundo, como mostra a Figura 4.

FIGURA 4: RANKING DA FIFA ANTES DA COPA DO MUNDO



FONTE: CNN (2022).

O ranking da Figura 4 foi definido de acordo com o desempenho de cada time a partir dos resultados das eliminatórias, dos amistosos e torneios que estavam em andamento. Ainda que seja um problema fechado, este momento é reconhecido como uma etapa de pesquisa sobre dados necessários para a resolução de um problema matemático.

Após essa discussão propusemos o seguinte problema:

Dentre os favoritos indicados pela FIFA, quais as chances do Brasil vencer a copa do mundo FIFA 2022? Explique.

Este foi o primeiro problema proposto à turma. Após o desenvolvimento desta situação, na aula seguinte, o segundo problema foi proposto:

As seleções dos países da América do Sul disputaram as quatro vagas disponíveis para chegar à Copa do Mundo 2022. Nessa disputa, os seguintes países conquistaram suas vagas: Equador, Argentina, Brasil e Uruguai. Dentre esses países, qual a probabilidade de a turma do oitavo ano A ter escolhido uma destas seleções para compor o álbum de figurinhas da turma? Explique.

A partir das discussões ocasionadas pelos problemas 1 e 2, propusemos o problema de Modelagem, mais aberto, no qual os estudantes trabalharam em grupos e precisaram dispor de estratégias, discutidas coletivamente, para apresentar respostas à situação. Nas seções seguintes descrevemos e analisamos as respostas apresentadas pelos estudantes.

5.1 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO PROBLEMA 1

Nas aulas do dia 21 de novembro de 2022, contamos com a presença de 34 alunos e tivemos uma carga horária de duas horas/aula. Após nossa discussão inicial, aproveitamos a pergunta que fizemos aos alunos sobre se eles sabiam qual a seleção favorita para ganhar a Copa desse ano, de acordo com a FIFA, e a partir disso propusemos o primeiro problema fechado - *Dentre os favoritos indicados pela FIFA, quais as chances do Brasil vencer a copa do mundo FIFA 2022? Explique.*

Para que os alunos pudessem resolver o problema proposto, inicialmente orientamos que trabalhassem individualmente, para que tivéssemos uma noção de como cada aluno resolveria o problema que foi proposto. Feito isso, entregamos o problema em uma folha impressa para cada um dos alunos e explicamos que o problema estava relacionado com o ranking que foi apresentado anteriormente (Figura 4).

Após nossa orientação, os alunos começaram a resolver o problema proposto. Inicialmente acreditávamos que os alunos utilizariam o cálculo de probabilidade como mostra a Figura 5, para responder o problema, pois este era um conteúdo que havia sido abordado pela professora regente nas aulas anteriores, de modo recente para eles.

FIGURA 5: RESOLUÇÃO MATEMÁTICA ESPERADA PARA O PROBLEMA 1

número de casos favoráveis : 1
número de casos possíveis : 10
$P = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{1}{10} = 0,1 \times 100 = 10\%$
Dentre os favoritos indicados pela FIFA, as chances de Brasil vencer a Copa do Mundo FIFA 2022 é de 10%.

FONTE: AUTORA (2023).

No entanto, muitos alunos utilizaram regra de três para solucionar o problema. Este fato parece indicar que o uso da operação é algo que faz parte do repertório que os estudantes conhecem e se sentem mais à vontade para utilizar; em outras palavras, usam o conhecimento que já sabem como ferramenta na resolução de situações problema. Usando esta ferramenta, em geral os alunos resolveram o primeiro problema sem muitas dificuldades.

Ao mesmo tempo, mesmo usando conceitos já conhecidos pelos estudantes, identificamos erros que se aproximam de uma má interpretação dos dados, ainda que as respostas numéricas estejam adequadas. Um exemplo está apresentado na Figura 6.

FIGURA 6: RESOLUÇÃO A8

1) Dentre os favoritos indicados pela FIFA, quais as chances do Brasil vencer a copa do mundo FIFA 2022? Explique.

Ele tem 100% de chance, mais como temos 10 times, dividindo por eles cada time tem 10% de chance de ganhar.

$$\begin{array}{r} 10000 \\ - 1000 \\ \hline 000 \end{array}$$

Ele tem 100% de chance, mais (sic) como temos 10 times, dividindo por eles cada time tem 10% de chance de ganhar.

FONTE: AUTORA (2023).

Podemos perceber que o aluno A8 interpretou que as possibilidades de o Brasil ser vencedor são de 100% de chances. Isto porque ele afirma: “Ele ((Brasil))⁵ tem 100% de chance”. Assumindo isso, o estudante continua: “mais (sic) como temos 10 times, dividindo por eles cada time tem 10% de chance (sic) de ganhar”. Ou seja, o estudante assumiu que o Brasil tem 100% de chances de vencer a copa e dividiu esse número pela quantidade de times que poderiam ser vencedores, de acordo com o ranking. Embora a resposta numérica, 10%, esteja adequada, o significado atribuído aos 100% parece se aproximar de erro de interpretação. Isto porque, estes 100% representam as possibilidades de um evento ocorrer - neste caso, haver um time campeão da Copa do Mundo - e não as possibilidades de o Brasil ser o vencedor, como o aluno afirmou.

Na figura 7, podemos observar que o aluno resolveu de duas formas distintas: na primeira forma, de modo análogo ao aluno A10 – Figura 6, porém ele parece

⁵ Usaremos parênteses duplos para denotar uma inserção nossa, na transcrição de textos e falas dos sujeitos da pesquisa.

entender o uso dos conceitos; na segunda resolução o aluno A10 resolveu como a outra metade da turma fez: utilizando a regra de três.

FIGURA 7: RESOLUÇÃO A10

1) Dentre os favoritos indicados pela FIFA, quais as chances do Brasil vencer a copa do mundo FIFA 2022? Explique.

1- 10% de chance, pois temos 10 países e a chance máxima é 100%

2- países x

10	100%	10x = 100
1	x	x = 100 / 10
		x = 10%

2ª situação:

países	%	
.10	100	10x = 100
1	x	x = 100 / 10
		x = 10%

Vertical calculation: $\frac{100}{10} = 10$

FONTE: AUTORA (2023).

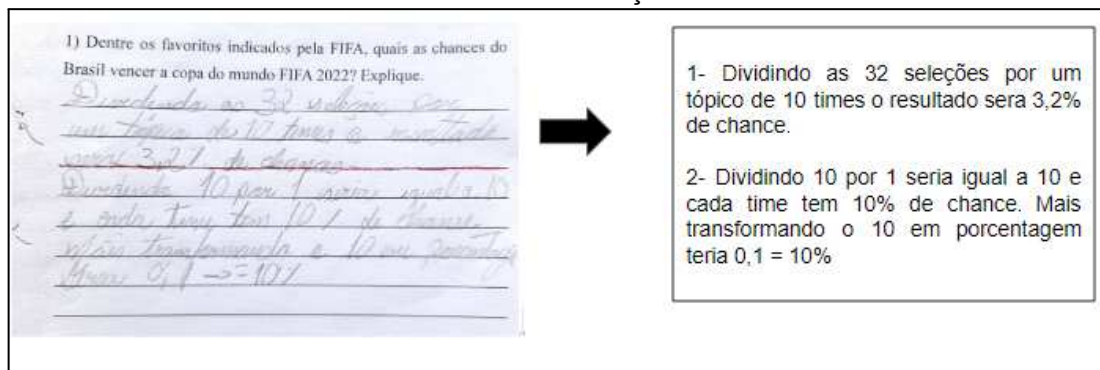
As resoluções dos estudantes A8 e A10 nos mostram algo interessante e que permeia nossas aulas: embora ambos os estudantes desenvolvam cálculos matemáticos semelhantes, que levam às mesmas respostas numéricas para o problema, os estudantes desenvolvem argumentos diferentes sobre o mesmo problema. Enquanto A8 afirma que 100% representa as chances de um determinado país – dentre os 10 do ranking – vencer a copa e que essas chances são diminuídas na medida em que mais times entram no ranking; A10 afirma que os 100% representam “a chance máxima”. Ou seja, para os dois alunos, o mesmo número representa coisas distintas.

Em termos de erro matemático, não podemos afirmar que A8 cometeu um erro dentre aqueles classificados por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), no entanto, a sua justificativa revela uma incompreensão matemática. Isso aconteceu, também, com outros alunos da turma. Esta é uma discussão que merece ser retomada com essa turma e cujos dados só tivemos acesso após as aulas, em posse dos registros escritos dos alunos. Este fato também nos mostra que os erros cometidos pelos alunos podem ser identificados, de certo modo, antecipadamente. Neste caso, a justificativa do aluno mostra sua incompreensão. Certamente, o conduzirá a alguns erros matemáticos futuros.

Mesmo auxiliando os alunos de modo individual e fazendo uma abordagem coletiva com a turma, encontramos, nos registros dos estudantes, alguns erros que

foram cometidos durante a resolução desse problema. A Figura 8 apresenta um destes tipos de erros:

FIGURA 8: RESOLUÇÃO A27



FONTE: AUTORA (2023).

O aluno nesta questão cometeu erros do tipo II e do tipo III, no qual chamamos de linguagem mal interpretada e Inferência logicamente inválida, respectivamente. Na primeira situação, por termos 32 seleções participando da Copa, o aluno se confunde e divide o número equivalente à quantidade de seleções que disputam a copa pelos 10 favoritos, determinando o resultado de 3,2% de chances. Este é um erro caracterizado como uma inferência logicamente inválida. O aluno tem um raciocínio enganoso, no qual acabou resultando erro na resolução do problema. Embora possa parecer, não se trata de um erro sobre dados mal utilizados, na medida em que o estudante utilizava dados que eram propícios à situação.

Na segunda situação, o aluno faz inferências que conduzem-nos a classificar as suas justificativas para a resposta apresentada, 10%, como linguagem mal interpretada. O estudante parece saber que, considerando o ranking, cada time tem 10% de chances de ficar em primeiro lugar. Na sua resolução apresenta a divisão de 10:1, no entanto, não explica qual o significado deste 1. Em posse do resultado da divisão (10), manipula os dados para obter a resposta que espera (10%). Caso diferente teria sido se o estudante tivesse dividido 1:10, obtendo a resposta de 0,1, ou 10%, neste caso. A divisão 1:10, poderia ter sido realizada considerando que apenas um país, dentre os 10 do ranking, ocuparia o primeiro lugar.

Nesta turma, 5 dos 34 alunos, ou seja, aproximadamente 14,7% da turma cometeram este mesmo erro.

Para que pudéssemos identificar esses erros, olhamos questão por questão e por fim os categorizamos conforme o modelo empírico de Movshovitz-Hadar et al (1987), como indicamos no Quadro 4.

QUADRO 4: ERROS COMETIDOS PARA O PROBLEMA 1

Respostas inadequadas	Quantidade de respostas	Classificação do erro
Extrações errada dos dados: $32:10 = 3,2\%$	2	Inferência logicamente inválida
Assumir $10:1 = 10\%$	5	linguagem mal interpretada

FONTE: AUTORA (2023).

Sobre este tipo de erro cometido, é importante ressaltar que trata-se de algo bastante comum quando trabalhamos com resoluções de problemas, é o fato de os estudantes procurarem utilizar todos os dados numéricos que têm acesso para determinar uma resposta para a situação. Isso pode ser decorrência de um processo escolar no qual os problemas apresentados são sempre padrão, nos quais todos os dados numéricos devem ser usados; não há excesso ou falta de informações e apenas uma resposta é adequada para a situação problema. Neste caso, mesmo sendo um problema fechado, os estudantes poderiam percorrer diferentes caminhos para resolvê-lo.

5.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO PROBLEMA 2

Tendo em vista o problema de Modelagem que queríamos propor para a turma posteriormente, optamos por desenvolver o segundo problema fechado: *As seleções dos países da América do Sul disputaram as quatro vagas disponíveis para chegar à Copa do Mundo 2022. Nessa disputa, os seguintes países conquistaram suas vagas: Equador, Argentina, Brasil e Uruguai. Dentre esses países, qual a probabilidade de a turma do oitavo ano A ter escolhido uma destas seleções para compor o álbum de figurinhas da turma? Explique.*

O problema foi proposto como descrito no parágrafo anterior, mas a discussão oral se deu no sentido da seguinte interpretação: *Qual a probabilidade de que o país sul-americano escolhido para compor o álbum de figurinhas do oitavo ano tenha participado da Copa do Mundo de 2022?*

A atividade, desenvolvida no dia 22 de novembro de 2022, tinha o intuito de abordar os times selecionados para a Copa do Mundo. Para isso, o problema proposto foi baseado no questionário (Apêndice 2), que foi aplicado aos alunos no nosso primeiro contato. Esta aula teve uma carga horária de uma hora/aula e a participação de 23 alunos. Optamos por organizar os alunos em grupos.

Para resolver este problema, esperávamos que os estudantes seguissem um caminho análogo ao apresentado na Figura 9.

FIGURA 9: RESOLUÇÃO ESPERADA PARA O PROBLEMA 2

Handwritten student solution for Problem 2:

número de casos favoráveis: 4

número de casos possíveis: 32

$$P = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = 0,125 \times 100 = 12,5\%$$

A probabilidade é de 12,5%.

FONTE: AUTORA (2023).

Para resolver o problema, cerca de 11 alunos utilizaram a fórmula de probabilidade: $P(A) = \frac{n(e)}{\Omega} = \frac{\text{Número de casos favoráveis}}{\text{Número total de casos possíveis}}$, que eles haviam estudado em aulas anteriores, ministradas pela professora regente e 8 dos estudantes utilizaram regra de três.

Em todos os problemas propostos para os alunos pedimos para que os mesmos explicassem de forma discursiva a maneira como pensaram para resolver a situação. Em seguida, a partir das resoluções dos alunos discutimos com a turma se as formas de resolução e interpretação estavam ou não coerentes.

Dentre as soluções apresentadas pelos grupos, apenas dois tipos de respostas apareceram. A resposta a) utiliza o conceito de probabilidade ou b) utiliza o conceito de regra de três. Na figura 10, o aluno A30, utilizou o conceito de probabilidade para solucionar o problema, e obteve a seguinte resposta:

FIGURA 10: RESOLUÇÃO A30

Dividimos o tanto de seleções que conquistaram suas vagas para o total de seleções da Copa, e depois transformamos em porcentagem.

$P = \frac{\text{caso favo.}}{\Omega}$

32 seleções 4 seleções AS

$P = \frac{4}{32}$

12,5%

$\frac{40 \overline{) 320,125}}{\underline{080} } \\ \underline{64} \\ \underline{160} \\ \underline{000}$

FONTE: AUTORA (2023).

Como pudemos observar a aluna A30, conseguiu utilizar o conceito que esperávamos para solucionar o problema e com isso chegou a solução correta para o problema.

Nas Figuras 11.a) e Figura 11.b), podemos observar que os alunos, mesmo tendo estudado o conceito de probabilidade, optaram por resolver o problema por meio de regra de três.

FIGURA 11: RESOLUÇÃO (a) A15 e (b) A18

a) Resolução A15

Primeiro eu fiz $100\% \times 4$ que é igual a 400% , aí com isso eu descobri o valor de x que é 400% , depois fiz $400\% \div 32$ que fica $12,5\%$.

$100\% \text{ — } 32$
 $x \text{ — } 4$
 $100 \cdot 4 = 400\%$
 $32 \cdot x$
 $400 \div 32 =$
 $12,5\%$

Primeiro eu fiz $100\% \times 4$ que é igual a 400% , aí com isso eu descobri o valor de x que é 400% , depois fiz $400\% \div 32$ que fica $12,5\%$.

$100\% \text{ — } 32$
 $x \text{ — } 4$
 $100 \cdot 4 = 400\%$
 $32 \cdot x$
 $400 \div 32 =$
 $12,5\%$

b) Resolução A18

Para o tanto de países então 100% está para 32 e nós queremos saber quantos por cento está para 4 times, então fazendo a regra de três descobrimos que dá $12,5\%$.

Porc. País
 $100 \text{ — } 32$
 $x \text{ — } 4$
 $32x = 400$
 $x = \frac{400}{32}$
 $x = 12,5\%$

Como temos 32 países, então 100% está para 32 e nós queremos saber quantos por cento está para 4 times, então fazendo a regra de três descobrimos que dá $12,5\%$.

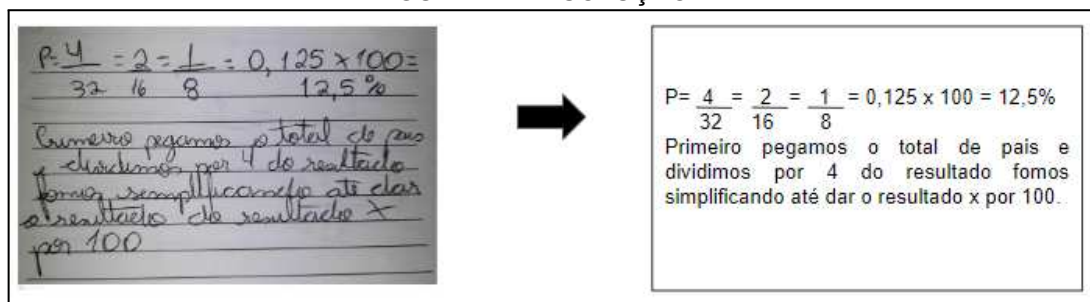
FONTE: AUTORA (2023).

Embora as Figuras (11.a) e (11.b) nos mostrem resultados numéricos idênticos, as justificativas apresentadas pelos estudantes são bastante diferentes. Enquanto A15 apenas busca explicar como se resolve o cálculo matemático que utilizou, sem apresentar uma justificativa sobre o motivo de assim ter resolvido aquela situação; A18 apresenta uma interpretação da situação e explica porque usou este cálculo e os sentidos de cada valor numérico utilizado.

No caso de A15, não temos clareza sobre o que pensa a respeito da situação problema e se os dados numéricos foram utilizados de modo coerente – estando, ou não, o resultado final adequado.

Já na Figura 12, podemos observar que a aluna determinou a razão $\frac{4}{32}$, após simplificar essa fração e transformou o resultado em porcentagem, multiplicando o resultado por 100, obtendo o resultado para o problema, 12,5%. Entretanto, ao justificar por escrito esses cálculos, a aluna comete um erro afirmando que dividiram o total de países (32) por 4. Sendo que a razão descrita é 4:32. Ao explicar os procedimentos seguidos por ela, na lousa para a turma toda, a estudante explica seus procedimentos de modo adequado.

FIGURA 12: RESOLUÇÃO A1



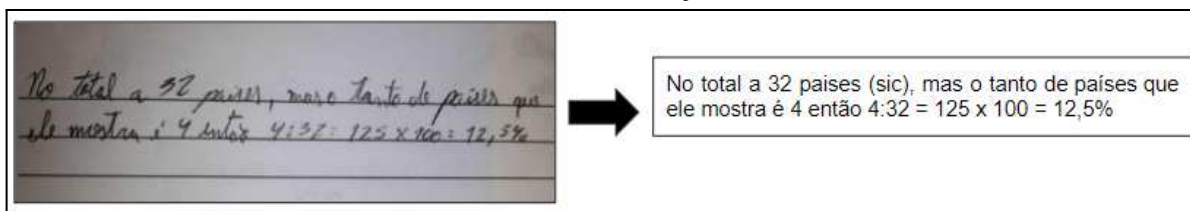
FONTE: AUTORA (2023).

Quanto às resoluções para este problema, quatro estudantes apresentaram erros. Estes foram classificados pela pesquisadora, com base no modelo empírico de Movshovitz-Hadar et al (1987). Classificamos esses como erro do tipo IV, erros técnicos.

Os erros cometidos pelos quatro estudantes estão apresentados nas figuras a seguir. Na figura 13 – que apresenta o tipo de erro cometido por um estudante - por mais que o aluno soubesse que para resolver o problema teria que conhecer o resultado da divisão de $\frac{4}{32}$, o resultado da divisão que ele obtém é 125. Logo ele

não solucionou o problema, porque quando ele faz a multiplicação de 125×100 a resposta é diferente de 12,5%. Neste caso o aluno comete erros técnicos para a solucionar o problema.

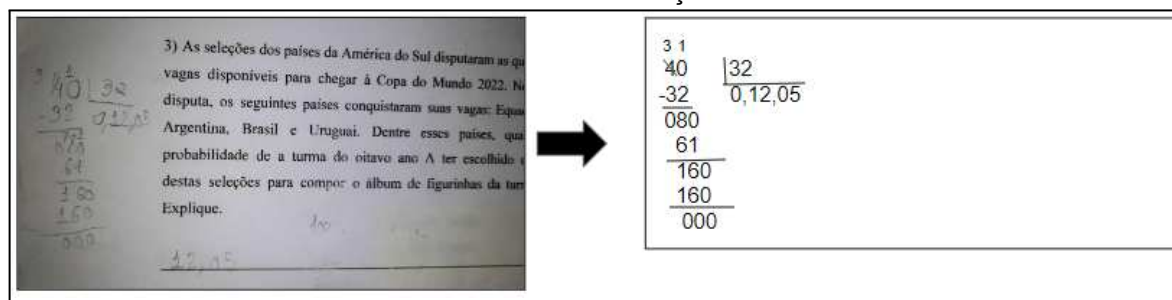
FIGURA 13: RESOLUÇÃO A16



FONTE: AUTORA (2023).

Os outros 3 alunos, que cometeram erro ao resolver este problema, mesmo entendendo que a probabilidade era de $\frac{4}{32}$ erraram no momento de fazer a divisão de um número menor pelo maior.

FIGURA 14: RESOLUÇÃO A28



FONTE: AUTORA (2023).

A Figura 14 mostra um erro técnico, que suscita algumas reflexões. Embora seja este um erro técnico, segundo o modelo de categorização aqui utilizado, o erro cometido revela uma incompreensão conceitual mais profunda, no que diz respeito à divisão. Ao mesmo tempo, temos a impressão que, conhecendo o resultado final esperado, este estudante manipula seus dados para atingi-lo.

Para que pudéssemos obter as respostas desses alunos desde a primeira resolução, pedimos para que eles deixassem anotado nas folhas dos problemas tudo o que eles pensaram, logo levamos em consideração o primeiro erro cometido pelos estudantes.

QUADRO 5: ERROS COMETIDOS PARA O PROBLEMA 2

Respostas Inadequadas	Quantidade De Respostas	Classificação Do Erro
Cálculo errado da divisão 4:32 O aluno assume que o resultado da divisão é 12,05%	3	Erro técnico
Cálculo errado da divisão 4:32 O aluno assume que o resultado da divisão é 125 e ao multiplicar por 100 resulta em 12,5%	1	

FONTE: AUTORA (2023).

Salientamos que, mesmo sendo 4 erros técnicos, os erros identificados divergem entre si, quanto às formas de resolução da divisão 4:32, como discutimos anteriormente.

5.3 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DA SITUAÇÃO DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Para desenvolvermos uma atividade de modelagem matemática, pensamos em trabalhar com alguma temática que os adolescentes estavam tendo contato nos últimos tempos. Escolhemos trabalhar com o álbum de figurinhas da Copa do Mundo (Figura 3). Essa atividade, caracterizada como uma atividade de modelagem matemática, se enquadra no caso 2, discutido por Barbosa (2001), pois a escolha do tema e formulação do problema foram feitos pela professora pesquisadora, com participação da professora regente, e coube aos alunos investigar, simplificar, coletar os dados e resolver a situação com o auxílio das professoras.

Para que a atividade fizesse sentido para os alunos, começamos lembrando o primeiro contato que tivemos com a turma deles. Explicamos que a partir do questionário, havíamos feito um levantamento do que eles haviam respondido e com base nas respostas deles, confeccionamos um álbum da seleção brasileira de futebol masculino, que foi a seleção mais assinalada pela turma.

A partir dessa primeira conversa percebemos o engajamento, entusiasmo dos alunos e relações estabelecidas com as outras atividades que foram propostas anteriormente, que se tratava do mesmo tema, para chegar a essa atividade de modelagem matemática. Percebemos então que o convite, mencionado por Barbosa (2004), posto aos alunos, havia sido aceito.

Apoiando-se na nossa conversa inicial, explicamos então como o álbum de figurinhas construído por nós estava organizado e que informações continha. Explicamos que nosso álbum era diferente do original, e que ele continha 4 figurinhas lendárias dos jogadores mais citados pelos alunos no questionário, os 11 jogadores titulares da seleção brasileira, 3 dos principais estádios onde seriam realizados os jogos durante a Copa de 2022, o mascote da Copa de 2022, o brasão da seleção e uma tabela com todos os jogos da Copa.

O álbum foi confeccionado com papel fotográfico e as figurinhas no papel adesivo. Escolhemos este material para que ficasse mais atrativo aos alunos e no caso das figurinhas, escolhemos o papel adesivo para que os alunos tivessem uma experiência como se estivessem realmente trabalhando com os mesmos materiais do álbum original (Figura 3). Explicamos à turma que eles poderiam escolher pacotes com figurinhas para completar seus álbuns. Não seria necessário pagar por estes pacotes. Cada grupo poderia escolher 4 pacotes, sendo que cada pacote continha 5 figurinhas.

Neste dia de aula contamos com a presença de 29 alunos, que foram organizados em 9 grupos, sendo 7 grupos com 3 pessoas e 2 grupos com 4 pessoas, como indica o Quadro 3, e com isso os alunos de cada grupo se dividiram entre as seguintes funções: um representante para a compra dos pacotes de figurinhas, um representante para trocar as figurinhas, um representante para colar as figurinhas no álbum e por fim, um representante para ser o relator do grupo.

Após os alunos se dividirem em grupos, posicionamos na frente do quadro uma mesa com 36 pacotinhos de figurinhas. Cada um deles contendo 5 figurinhas. Solicitamos que o representante pela compra de figurinhas de cada grupo cumprisse seu papel. Cada um dos nove alunos poderia comprar apenas quatro desses pacotinhos. A Figura 15 mostra esse momento

FIGURA 15: COMPRA DE PACOTES DE FIGURINHAS



FONTE: AUTORA (2023).

Após a etapa de compra de pacotinhos de figurinhas, pedimos aos alunos que anotassem as seguintes informações: quantidade de figurinhas que vieram em cada pacote, a quantidade de figurinhas repetida nos pacotes escolhidos e quantas figurinhas eles conseguiram utilizar para que pudessem completar o álbum nessa primeira etapa. Feito isso, reforçamos que os alunos não trocassem as figurinhas entre si, para que não houvesse interferência na próxima etapa da atividade. Nessa compra de figurinhas já iniciamos a coleta de dados para a resolução da atividade, pois nela mesmo os alunos ainda não sabendo qual seria o problema de Modelagem, começaram a coletar os dados sobre as trocas e sobre o álbum juntamente com as professoras. Estes tratam-se de dados numéricos e dados sobre a temática da atividade. Isso porque os alunos contabilizaram as figurinhas “compradas”, repetidas, a quantidade necessária para preencher o álbum, dentre outras informações que julgaram pertinentes. Ao mesmo tempo em que se inteiravam sobre o tema da atividade, conheciam o álbum, retomavam informações que já haviam sido discutidas.

O envolvimento da turma com o tema da atividade, neste caso, pareceu maior que aquele registrado nas aulas anteriores. Isto pode se dever ao fato de ser um tema real, do qual estavam familiarizados e engajados e, ao mesmo tempo, conter informações novas (um álbum com informações escolhidas pela turma), das quais precisavam se inteirar mais. Estes momentos podem ser reconhecidos como as fases de inteiração sobre o tema e dados da situação que estava sendo estruturada e de coleta dos dados necessários para resolvê-la; procedimentos da Modelagem Matemática.

FIGURA 16: COLETA DE DADOS



FONTE: AUTORA (2023).

Na aula seguinte, como os alunos ainda não haviam terminado de colar as figurinhas e anotar as informações que precisávamos, disponibilizamos um tempo a mais para que eles pudessem concluir essa tarefa. Em seguida, ao verificarmos que os alunos haviam terminado, fizemos algumas perguntas:

Professora pesquisadora: Todos vocês conseguiram completar o álbum?

Turma: Não

Professora pesquisadora: Quantas figurinhas faltam para vocês completarem esse álbum?

Grupo 1: 5 figurinhas.

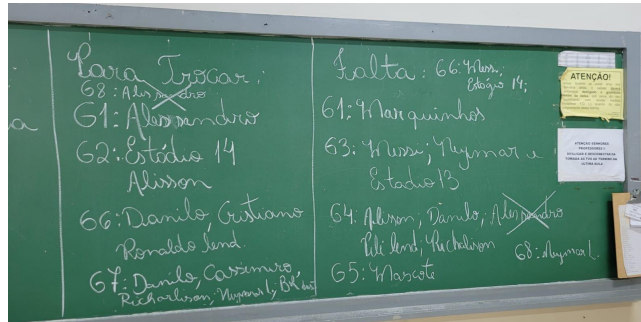
Professora pesquisadora: O que podemos fazer agora para que nós possamos completar esse álbum?

A15: Podemos trocar.

Partindo da ideia do aluno, estabelecemos uma ordem para que essa primeira troca de figurinhas ocorresse. Pensamos em um rodízio no qual um integrante de cada grupo passava por todos os outros grupos, e fazia a troca. Por exemplo, o primeiro grupo trocava com o grupo dois, o grupo dois com o três e assim por diante, até que todos conseguissem passar por todos os grupos. Antes disso ocorrer, a turma nos alertou que um dos alunos de um dos grupos havia ido embora com as figurinhas que haviam sobrado do álbum deles. Como alguns dos integrantes do grupo haviam ido embora com as figurinhas que deveriam ser trocadas no segundo momento, optamos por realizarmos uma segunda troca de figurinhas, nela os alunos iriam trocar suas figurinhas a partir das figurinhas que precisavam para completar seus álbuns.

Para organizar a segunda troca de figurinhas, indicamos na lousa as figurinhas repetidas em cada grupo, como mostra a Figura 17. Com esta organização, pretendíamos que os estudantes tivessem acesso a dados escritos e que pudessem desenvolver uma análise coletiva das trocas possíveis.

FIGURA 17: MOMENTO DA TROCA DE FIGURINHAS



FONTE: AUTORA (2023).

Feita essa troca de figurinhas ao passar de mesa em mesa, foi possível notar que apenas um grupo havia conseguido completar o álbum de figurinhas, como mostra a Figura 18, e os grupos que não conseguiram precisaram esperar a aula seguinte para fazerem a troca de figurinhas com o grupo de alunos que havia ido embora.

FIGURA 18: ÁLBUM DE FIGURINHAS COMPLETO



FONTE: AUTORA (2023).

Na aula do dia 28 de novembro de 2022, após todos completarem os álbuns, questionamos:

Professora pesquisadora: Todos vocês completaram o álbum de figurinhas, mas vocês conseguiram completar só com aqueles quatro pacotinhos que compraram no começo?

Turma: Não

Professora pesquisadora: Então pensando nisso, será que conseguimos saber: ***Quantos pacotinhos precisamos comprar para que possamos completar nosso álbum?***

Aluno 23: Depende se não vier repetidas, porque se vier a gente ainda vai precisar continuar comprando as figurinhas até conseguir completar.

O problema, destacado no diálogo anterior, diferente dos demais propostas à turma, caracteriza-se como um problema aberto. Isto porque cada grupo poderia chegar a respostas diferentes à ele, a depender dos dados obtidos anteriormente, quanto às trocas de figurinhas desenvolvidas pelo seu grupo. Sendo assim, hipóteses simplificadoras devem ser estabelecidas. Neste mesmo diálogo, por exemplo, a fala do aluno 23 já indica a hipótese de que a resposta para este problema dependeria da quantidade de figurinhas repetidas obtidas pelo grupo.

Neste sentido, cada grupo iniciou o processo chamado por Barbosa (2004) de simplificação dos dados. Para tanto, analisaram que seria necessário pensar sobre, quantas figurinhas estavam disponíveis em cada pacotinho e quantas delas eram repetidas e precisariam ser trocadas..

Enquanto os grupos interpretavam o problema e procuravam uma forma de solucioná-lo, os orientamos individualmente, com a finalidade de compreender como estavam resolvendo o problema e até mesmo compartilhar com toda turma os caminhos percorridos por cada grupo. Neste momento, percebemos uma demanda dos grupos para que conseguissem matematizar a situação-problema. Neste sentido, procuramos fazer algumas perguntas para que os grupos pudessem lembrar alguns dados numéricos e conseguissem organizá-los de modo a responder o problema.

Professora pesquisadora: Vamos pensar. Quantas figurinhas tem o álbum?

Aluno 13: 20 figurinhas

Professora pesquisadora: Quantos pacotes vocês compraram?

Grupo 3: 4 pacotes

Professora pesquisadora: Vamos lembrar então, desses quatro pacotes... quantas figurinhas tinham?

Grupo 3: 5 figurinhas em cada pacote.

Professora pesquisadora: E quantas figurinhas vieram repetidas?

Aluno 11: Tá anotado aqui deixa eu ver... vieram 4 repetidas.

Professora pesquisadora: Então a partir desses dados, quantas figurinhas vocês precisam para completar o álbum?

Após este momento de orientação coletiva, cada grupo se organizou para apresentar uma solução e justificativa para esta solução, etapas do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, para o problema. Isto, com base nos dados do seu grupo e nas informações sobre as trocas, compartilhadas na/pela turma, de modo também coletivo.

Nas próximas páginas, apresentamos e discutimos as resoluções de cada um dos seis grupos que entregou os registros das suas atividades: G1, G2, G3, G4, G6 e G8. Os grupos G5 e G7 não entregaram os registros escritos desta atividade, o que inviabiliza a análise sobre estes grupos.

• Resolução do G1

Inicialmente os integrantes do grupo 1 estavam apenas preocupados com a quantidade de figurinhas que poderiam vir repetidas em cada novo pacote que poderia ser adquirido para que pudessem completar seu álbum, então orientamos que o grupo focasse nos dados que eles haviam coletado anteriormente.

O grupo 1 precisava apenas de uma figurinha para completar o álbum. Para responder ao problema de Modelagem “*Quantos pacotinhos precisamos comprar para que possamos completar nosso álbum?*”, o grupo retomou algumas informações. Por exemplo, que o álbum contém 20 figurinhas das quais eles já haviam completado com 19 delas. O grupo lembrou, também, que cada pacote que comprou, inicialmente, continha 5 figurinhas. As informações, comuns a todos os grupos, a saber: i) o álbum contém 20 figurinhas e ii) cada pacote tem 5 figurinhas, foram assumidas pelo G1, que considerou que se não tivessem figurinhas repetidas, seriam necessários 4 pacotes para completar o álbum, como mostra a Figura 19. No entanto, considerando que haviam figuras repetidas no pacote e que lhes faltava apenas uma para completar o álbum, o grupo não apresentou um raciocínio e uma resposta adequada; apenas afirmou que seriam necessários mais 4 pacotes, sem justificar essa quantidade.

FIGURA 19: RESOLUÇÃO GRUPO 1

20 figurinhas se não fosse com nenhuma figurinha repetida seria 4 pacotinhos se vier repetida mais 4 pacotinhos.

4
x5
—
20

se não vier repetida

FONTE: AUTORA (2023)

Em relação à resposta apresentada por G1, podemos afirmar que ela não apresenta erros de cálculos, ao mesmo tempo se caracteriza como inadequada. O grupo justifica que seriam necessários mais 4 pacotes porque, inicialmente, compraram 4 pacotes de figurinhas. Sendo assim, justificam que não encontrando as figuras necessárias, sempre precisariam comprar mais um conjunto de 4 pacotes. Este pode ser considerado um erro associado ao levantamento de hipóteses para a resolução desta nova situação problema: completar o álbum com as figurinhas que ainda faltam. Para responder a situação o grupo afirma que são necessários 4 pacotes por ser este o número de pacotes comprados no início do processo de Modelagem, na coleta de dados.

Podemos dizer que embora o grupo utilize mal os dados que têm, este não é um erro associado à categoria I (dados mal utilizados), pois não se tratam de dados estranhos utilizados ou ao desprezo de dados do problema.

Diferente do que ocorreu nas situações anteriores (nas resoluções dos problemas 1 e 2), aqui nos deparamos com uma situação em que a resposta apresentada pelo grupo é inadequada – pois não apresenta argumentos e justificativa para tanto – entretanto não é possível classificá-la como errada e categorizá-la no modelo assumido na pesquisa.

• Resolução do G2

No primeiro momento orientamos os alunos do grupo 2 afirmando que para que eles pudessem resolver o problema proposto deveriam utilizar os dados que eles coletaram ao colar as figurinhas em seus álbuns. Partindo dos dados que eles tinham, o grupo considerou alguns valores: a quantidade de figurinhas obtida pelo grupo após a compras de pacotes (20); a quantidade total de pacotes que foram distribuídos na sala (36) e a quantidade de figurinhas do grupo, sem repetição (15).

Ou seja, este grupo tinha 5 figurinhas repetidas. O cálculo feito por estes estudantes está na Figura 20.

FIGURA 20: RESOLUÇÃO GRUPO 2

Quantos pacotinhos precisamos comprar para que possamos completar nosso álbum?

$$\begin{array}{r} 20 \\ 15 \end{array} \begin{array}{r} P \\ 36 \\ x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \times 15 \\ \hline 180 \\ 360 \\ \hline 540 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 540 \\ \div 20 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20x = 540 \\ x = 540/20 \\ x = 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 36 \\ \times 15 \\ \hline 180 \\ 360 \\ \hline 540 \end{array} \begin{array}{r} 20 \\ 15 \end{array} \begin{array}{r} P \\ 36 \\ x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20x = 540 \\ x = 540/20 \\ x = 27 \end{array}$$

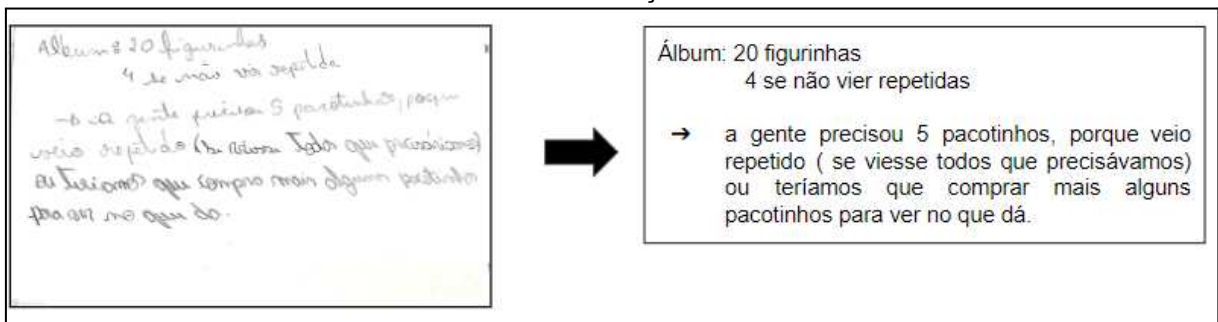
FONTE: AUTORA (2023).

Mesmo não tendo erro de cálculo encontramos erros do tipo II, nesta forma de resolução do problema por este grupo, que se trata de uma linguagem mal interpretada, pois os alunos possuem dados para resolução do problema, mas fazem uma tradução da linguagem natural para a linguagem matemática inadequada. Ou seja, procuram usar todos os dados numéricos que têm, sem atribuir sentidos para eles. Neste caso, o erro aparece na fase de matematização da nova situação proposta.

- **Resolução do G3**

O grupo 3, não utilizou cálculos para resolver a situação. Os estudantes analisaram as variáveis e conseguiram dar uma resposta satisfatória. Eles afirmaram que precisariam apenas de uma figurinha para completar o álbum e que inicialmente, compraram 4 pacotes, então concluíram que para completar o álbum faltava apenas uma figurinha. Pensando nisso, deduziram que precisariam apenas de 5 pacotes para completar o álbum: os quatro que eles compraram e mais um que eles precisariam para completar, como mostra a Figura 21.

FIGURA 21: RESOLUÇÃO GRUPO 3



FONTE: AUTORA (2023).

Esse grupo conseguiu completar o álbum na primeira rodada de troca de figurinhas, pois precisavam de apenas uma delas. Analisando a situação, o grupo concluiu que para o seu caso, era preciso apenas mais um pacote de figurinhas, no entanto também analisou que caso a figurinha repetida não viesse neste pacote, eles comprariam mais pacotes até encontrar essa figura repetida.

Mesmo o G3 não tendo apresentado cálculos matemáticos para responder o problema a partir das suas hipóteses, chegaram a uma conclusão válida para ele, pois o grupo justificou que eles precisariam de apenas 5 pacotes, caso viessem todas as figurinhas necessárias para que eles pudessem completá-lo, no entanto também justificaram que se caso viessem figuras repetidas precisariam comprar mais pacotes para ver no que daria - isto se deve ao início do processo de Modelagem, quando os alunos comparam apenas 4 pacotes de figurinhas e precisavam apenas de uma para completar o álbum.

Podemos dizer então, que este grupo não cometeu nenhum erro no processo de resolução do problema, apresentando uma resposta adequada à situação, de acordo com os seus dados.

● Resolução do G4

O grupo 4, contava com a participação de 3 alunos. Inicialmente o grupo não soube como resolver o problema. Após um tempo, concluíram que iriam precisar apenas de 4 pacotes para completar o álbum. Levando em consideração essa hipótese levantada pelo grupo e observando os dados que os alunos coletaram, fizemos algumas considerações com o grupo.

Professora pesquisadora: Vamos pensar

Professora pesquisadora: Quantas figurinhas tem o álbum?

Aluno 13: 20 figurinhas

Professora pesquisadora: Quantos pacotes vocês compraram?

Grupo 3: 4 pacotes

Professora pesquisadora: Vamos lembrar então, desses quatro pacotes, quantas figurinhas tinham?

Grupo 3: 5 figurinhas em cada pacote.

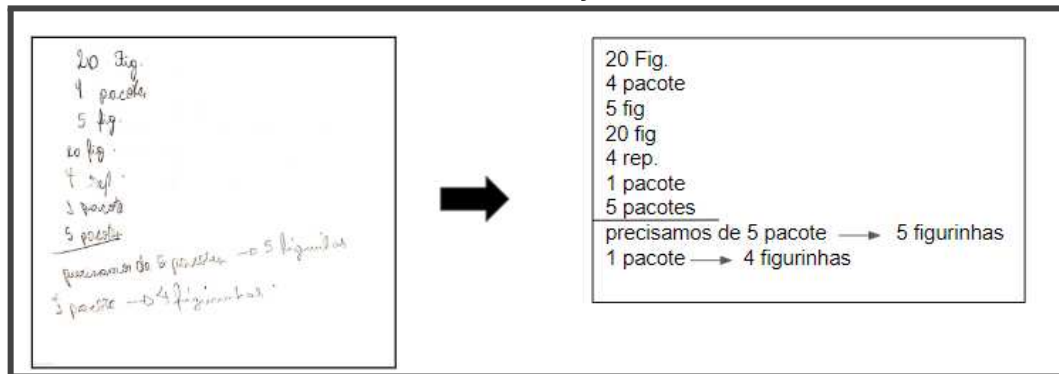
Professora pesquisadora: E quantas figurinhas vieram repetidas?

Aluno 11: Tá anotado aqui deixa eu ver... vieram 4 repetidas.

Professora pesquisadora: Então a partir desses dados, quantas figurinhas vocês precisam para completar o álbum?

Partindo desse levantamento de dados com os alunos eles perceberam que precisariam de mais um pacote para que pudessem completar o álbum sem ter utilizado a troca de figurinhas (Figura 22).

FIGURA 22: RESOLUÇÃO GRUPO 4



FONTE: AUTORA (2023).

Nesse grupo, mesmo os alunos não utilizando cálculos para solucionar o problema e nem justificando sua resposta de forma escrita, conseguiram chegar em uma solução, pois a partir do diálogo feito com eles anteriormente, os alunos fizeram uma simplificação dos dados para chegar em uma conclusão para o problema, que nesse caso precisariam de 5 pacotes para completar seu álbum. Esse processo se deu devido a coleta de dados realizada para compra de figurinhas. Visto que eles compraram apenas 4 pacotes cada um contendo 5 figurinhas e faltavam apenas 4 figurinhas para completar o álbum, então o grupo concluiu que precisaria de mais um pacote para completar.

Este grupo não apresentou nenhum erro relacionado ao processo de Modelagem ou ao desenvolvimento dos cálculos, de modo mais particular. Ao mesmo tempo, não apresentaram uma justificativa de como chegaram à uma resposta.

• Resolução do G6

Ao propormos o problema, as integrantes do G6 começaram a pensar em que conceitos matemáticos poderiam utilizar para resolver o problema. Esse grupo em especial, comprou apenas 3 pacotes, pois um dos grupos haviam comprado pacotes a mais do que o sugerido, e em um desses pacotes haviam 4 figurinhas, enquanto nos pacotes comprados pelos outros grupos tinham 5 figurinhas, então elas compraram um total de 14 figurinhas para tentar completar o álbum. Assim como os outros grupos, elas levaram em consideração a quantidade de figuras do álbum e a quantidade de figurinhas que faltavam para completá-lo, como mostra a Figura 23.

FIGURA 23: RESOLUÇÃO GRUPO 6

The image shows handwritten mathematical work by Group 6. On the left, there is a table with columns 'fig' and 'pac', and rows with values 20, 5, and equations $5x = 20$. Below the table, there are calculations: $5x = 20$, $x = \frac{20}{5}$, and $x = 4$ pacotinhos. A note says 'O nosso grupo pegou só 3 pac. 2 pac - 5 } 14 figurinhas 1 pac - 4 }'. Below that, there is a paragraph explaining that they need 5 packages because one package only had 4 stickers. On the right, there is a similar table and calculation, leading to the conclusion: 'R: Não vai ser 4 pacotinhos, porque iria faltar carta, pois um dos 3 pacotinhos veio com 4 figurinhas então será 5 pacotes.'

FONTE: AUTORA (2023).

Podemos perceber que as integrantes do grupo 6 utilizaram, os dados que correspondem a coleta de dados do grupo, para que pudessem resolver o problema. Considerando que o grupo comprou apenas 3 pacotes de figurinhas e em um desses pacotes continha apenas 4 figurinhas, as estudantes puderam concluir em seus cálculos matemáticos que precisariam de 4 pacotes, no entanto levando em consideração que nesse grupo em um dos pacotes vieram apenas quatro, o grupo concluiu que precisariam de 5 pacotes para completar o álbum. Sendo assim, o grupo fez uma análise que os permitiu encontrar uma resposta que fosse viável para o problema, o que também faz parte do processo da Modelagem Matemática, considerando os seus dados.

- **Resolução do G8**

O grupo G8 apresentou uma resposta bastante parecida com a do G6. Porém, um dos integrantes desse grupo estava tendo dificuldades para entender e resolver o problema, pois não estava presente na aula da coleta de dados. Sendo assim contextualizamos o problema e explicamos o que tinha ocorrido na aula anterior para que pudesse entender a situação. Ao explicarmos ao grupo, inicialmente os alunos estavam fazendo algumas conjecturas nas quais afirmavam que precisávamos levar em consideração a quantidade de figurinhas do álbum e quantas figurinhas já haviam sido completadas.

Após observar o que os alunos estavam pensando, fizemos alguns questionamentos para entender os dados que eles obtiveram no decorrer da coleta de dados, para tentarmos resolver aquele problema.

Professora pesquisadora: Quantas figurinhas repetidas vieram no álbum de vocês?

Aluno 24: 7 figurinhas repetidas.

Professora pesquisadora: Quantas figurinhas tem no álbum de vocês no total?


Aluno 25: 20 figurinhas e vem 5 em cada pacote.

Professora pesquisadora: Então pensando nesses dados que vocês têm, como que a gente poderia responder essa pergunta?

Aluno 25: Professora, temos 20 figurinhas no álbum e em cada pacote vem 4 figurinhas e temos 7 figurinhas que vieram repetidas...

Com base nessa exploração que fizemos com o grupo pedimos para que eles tentassem representar matematicamente como eles resolveriam aquele problema, para isso, eles apresentaram a seguinte resolução:

FIGURA 24: RESOLUÇÃO GRUPO 8

$ \begin{array}{l} \text{figurinhas} \quad \text{pacotes} \\ 20 \quad \text{---} \quad 4 \\ 7 \quad \text{---} \quad x = 1,4 = 2 \\ 20 - x = 4 \cdot 7 \\ 20 - x = 28 \\ x = \frac{28}{20} \\ x = 1,4 \\ 4 + 2 = 6 \text{ pacotinhos} \end{array} $		$ \begin{array}{l} \text{figurinhas} \quad \text{pacotes} \\ 20 \quad \text{---} \quad 4 \\ 7 \quad \text{---} \quad x = 1,4 = 2 \\ 20 \cdot x = 4 \cdot 7 \\ 20x = 28 \\ x = \frac{28}{20} \\ x = 1,4 \\ 4 + 2 = 6 \text{ pacotinhos} \end{array} $
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

FONTE: AUTORA (2023).

Na resolução desse grupo, os alunos optaram por responder utilizando regra de três. Neste grupo, os alunos levaram em consideração os mesmos dados base dos grupos anteriores sendo quantidade de figurinhas totais do álbum (20), quantidade de pacotes comprados (4) no primeiro momento da atividade, e quantidade de figurinhas que precisavam para completar o álbum. No caso desse grupo 7 figurinhas.

O grupo 6 concluiu, por meio dos cálculos realizados, que seria preciso 1,4 pacotes de figurinhas para completar o álbum, caso não houvesse repetição de figuras nestes pacotes. Sendo assim, arredondaram o valor para 2, pois não é possível comprar 1,4 pacote de figurinhas e 1 pacote não seria suficiente. A partir da interpretação do valor de 1,4 o grupo somou esta quantia aos 4 pacotes já adquiridos, justificando a necessidade de 6 pacotes para completar seu álbum.

Em geral, podemos observar que dentre os grupos cujas respostas foram analisadas na última sessão do texto, os grupos G3, G4, G6 e G8 apresentaram respostas coerentes para a situação de estudo e apenas os grupos G1 e G2, cometeram algum erro na resolução do problema de Modelagem Matemática.

Os erros cometidos pelos grupos G1 e G2 são interessantes e se diferem dos erros cometidos na resolução dos problemas 1 e 2. No caso das resoluções do problema de Modelagem o G1 cometeu erro no processo de levantamento de hipóteses para a resolução da situação. Ou seja, um momento que antecede o desenvolvimento de cálculos matemáticos. O erro cometido não pôde ser classificado de acordo com a categoria de erro, utilizada como base dessa pesquisa. Mesmo tendo utilizado mal os dados que tinham acesso, não se tratam de dados desconhecidos ou discrepantes da situação. Já O G2, cometeu erro no processo de matematização do problema. Neste caso, os alunos utilizaram todos os dados numéricos que tinham disponíveis. Nem todos estes dados eram necessários para apresentar uma resposta para aquela situação. Isso pode ser compreendido como um erro associado a uma interpretação equivocada da situação.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa teve como objetivo investigar os tipos de erros cometidos por estudantes de um oitavo ano do Ensino Fundamental no desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Sendo assim, a seguinte questão norteadora foi: *Que tipos de erros são cometidos por estudantes do Ensino Fundamental ao desenvolver uma atividade de Modelagem Matemática?*

Para que pudéssemos responder a pergunta indicada no parágrafo anterior, utilizamos a teoria de Análise de erros como um suporte de análises para os dados produzidos. Consideramos que esta é uma teoria que permite que o professor realize uma observação mais detalhada e cuidadosa sobre as formas de resolução dos problemas que são propostos aos alunos, tendo o cuidado de questionar as respostas e analisar como seus alunos pensam ao solucionar o problema. A partir desta análise é possível planejar próximos passos para o ensino de Matemática, antever determinadas situações e identificar problemas nos processos de ensino e de aprendizagem.

No decorrer desta pesquisa utilizamos este aporte teórico para olhar para a resolução de um problema de Modelagem Matemática. Antes disso, o tema da atividade foi introduzido, com estudantes de um oitavo ano de uma escola pública, por meio de dois problemas fechados.

Foi possível identificar que os erros cometidos pelos estudantes nos casos dos problemas fechados puderam ser classificados, exatamente, de acordo com a indicação de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987). Os erros cometidos naquelas situações estiveram diretamente relacionados aos usos dos dados numéricos e à interpretação sobre como utilizar estes dados. Nesse caso, identificamos, por exemplo, erros de cálculos, linguagem mal interpretada, etc.

Estes erros não apareceram de modo tão evidente quando os estudantes trabalharam numa atividade de Modelagem Matemática, na qual o problema proposto à eles não apresentava dados quantitativos, mas exigia uma análise de situações específicas a cada grupo de estudantes e os dados relacionados ao desenvolvimento da atividade por estes estudantes.

Com essa atividade de Modelagem Matemática, analisamos as respostas de todos os grupos e encontramos alguns erros que foram cometidos pelos alunos. A

síntese sobre os erros cometidos por dois grupos, indicados e discutidos no capítulo anterior, estão apresentados no Quadro 6.

QUADRO 6: ERROS COMETIDOS PARA O PROBLEMA DE MODELAGEM MATEMÁTICA

Etapa na qual aparecem respostas inadequadas	Quantidade de grupos	Classificação do erro
Levantamento de Hipóteses	1	-
Utilização dos dados - Matematização	1	-

Fonte: AUTORA, (2023).

Diferente dos erros dos problemas fechados, não foi possível classificá-los de acordo com o modelo adotado nesta pesquisa, pois os erros dos alunos não se encontram nesse caso, nas resoluções das operações. Tratam-se de erros ou obstáculos que ocorreram, em especial i) no levantamento de hipóteses pelos grupos e ii) na matematização do problema. Estes são erros que estão relacionados com a interpretação da situação problema, que está apresentada numa linguagem natural e deve ser matematizada e às dificuldades para justificar, matematicamente, as respostas dadas para a situação de estudo. Estas são todas situações que, no caso da nossa pesquisa, antecederam o desenvolvimento de operações matemáticas. No caso do desenvolvimento das contas matemáticas, não identificamos dificuldades ou erros dos estudantes. Eles recorreram ao uso de conceitos matemáticos que já conheciam bem, como as operações elementares. Um dos motivos pelos quais o caráter das respostas dadas pelos estudantes para os problemas 1 e 2 e para o problema de Modelagem sejam divergentes, de repente seja o fato de que os problemas fechados apresentavam valores numéricos, enquanto que o problema de Modelagem não apresenta.

Além disso, numa situação de Modelagem Matemática como a proposta nesta pesquisa, os alunos não têm os seus dados prontos, e isso pode passar a dificultar a forma com que o aluno interpreta e resolve o problema. Visto isso, em um problema aberto, sem dados numéricos evidentes, várias respostas diferentes podem aparecer durante o processo de resolução. Isso é o que ocorreu com a situação de Modelagem Matemática.

Notamos assim, que mesmo em uma atividade de Modelagem Matemática, os alunos cometeram erros, e nesse caso os alunos não cometeram os mesmos erros

que quando desenvolvemos uma aula com problemas fechados. Os motivos para a diferença entre os tipos de erros cometidos pelos alunos nos problemas fechados e na situação de Modelagem, como indicamos anteriormente, podem estar relacionados com o caráter aberto da situação de Modelagem. Neste caso, os obstáculos ocorrem nos processos de interpretação da situação problema, levantamento de hipóteses e sua matematização. Não identificamos erros dos estudantes após a situação já ter sido matematizada. Além disso, outros fatores podem contribuir para que erros ocorram, como a falta de interesse do aluno ou falta de atenção que o professor teve, devido a muitos motivos, no processo de ensino, sem encaminhar uma orientação satisfatória.

REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. P. da; VERTUAN, R. E. **Modelagem Matemática na Educação Básica**. 1. ed. São Paulo: Contexto, 2012. p. 160.
- ALVARENGA, K. B.(2009). O discurso Pedagógico sobre os erros em Matemática: algumas análises. In: **Anais IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Brasília, 25 a 28 de Outubro de 2009.
- ALVES, Rubem. **A alegria de ensinar**. 3 ed. São Paulo: ARS Poética Editora, 1994
- ASTOLFI, J. P. **El “error”, um medio para enseñar**. Sevilla: Diada Editora S.L., 1999.
- BARBOSA, J. C. Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. **Anais...** Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.
- BARBOSA, Jonei C. A prática dos alunos no ambiente da Modelagem Matemática: o esboço de um framework. In: BARBOSA, Jonei C.; CALDEIRA, Ademir D; ARAÚJO, Jussara de L. (Org.) **Modelagem Matemática na educação matemática: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: SBEM. 2007. p. 161-173.
- BIEMBENGUT, M. S. **30 Anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais**. Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009
- BORASI, R. **Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors**. Norwood, New Jersey: Ablex Publishing Corporation, 1996.
- BORASI, R. Using errors as springboards for the learning of mathematics: an introduction. **Focus on Learning Problems in Mathematics**, v. 7, n. 3-4, p. 1-14, 1985
- BORBA, M. C. A PESQUISA QUALITATIVA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2004, Caxambu. **Anais...** Rio Janeiro: ANPED, 2004. CD-ROM.
- BRASIL, B. C. KATO, L. A.. O SUCESSO DE UMA ATIVIDADE DE MODELAGEM MATEMÁTICA, SEGUNDO AS DIFERENTES FORMAS DE PARTICIPAÇÃO DOS ALUNOS. **REMATEC**, [S. l.], v. 9, n. 17, 2014. Disponível em: <http://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/300>. Acesso em: 19 dez. 2022.
- BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. **Recherches em Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 7, n. 2, p. 33-116, 1986.
- BRUM, Lauren Darold, CURY, Helena Noronha. Análise de erros em soluções de questões de álgebra: uma pesquisa com estudantes do ensino fundamental. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**. v. 2, n. 1, p. 45-62, 2013;
- CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS, A. P. D. S.; AZEVEDO, J. F. D. C J. **Modelagem em Educação Matemática**. Autêntica, 2011.
- CURY, H. N. **Análise dos Erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos**. Belo Horizonte: Autêntica, 2007
- FREIRE, P.; FAUNDEZ, A. **Por uma pedagogia da pergunta**. 4. Ed. Rio de Janeiro: Paz e

Terra, 1998. 158 p.

MENDONÇA, M. do C. D. **Problematização: um caminho a ser percorrido em educação matemática**. Campinas: FE/UNICAMP, 1993. 306p. (Tese, Doutorado).

MOVSHOVITZ-HADAR, N., ZASLAVSKY, O., INBAR, S. An empirical classification model for errors in High School Mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 18, n. 1, p. 3-14. 1987.

PONTE, J. P. da; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PINTO, Neuza Bertoni. **O erro como estratégia didática no ensino da matemática elementar**. Orientador: Marli Eliza Dalmazo Afonso de Andre. 1998. 174 p. Tese (Doutorado) - Universidade de São Paulo, São Paulo, 1998, 1998. Disponível em: <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/48/48133/tde-12022015-151819/pt-br.php>. Acesso em: 3 fev. 2023.

SENES, Gabrielly Geovana Pereira. **Modelagem Matemática como Ambiente De Aprendizagem no Ensino Remoto Emergencial**: Um olhar para as rotas de modelagem. Orientadora: Profª. Drª. Bárbara Cândido Braz. 2021. 112 p. Trabalho de conclusão de curso (Licenciada) - Universidade Federal Do Paraná, Jandaia do Sul, 2021.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema**, v. 13, n. 14, p. 66-91, 2000.

SOARES, J. **Problemas fechados, problemas abertos e situações problemáticas**. 2013. Disponível em: <https://espacoseducativos.files.wordpress.com/2013/04/problemasfechados.pdf> Acesso em: 5 fev. 2023.

TORTOLA, E. **Configurações de Modelagem Matemática nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental**. 2016. 304 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2016.

VALENCIA, Sebastián Jiménez. **Confira quem são os favoritos para vencer a Copa do Catar, com base no ranking da Fifa**. Disponível em: <https://www.cnnbrasil.com.br/esporte/confira-quem-sao-os-favoritos-para-vencer-a-copa-do-mundo-do-catar/#:~:text=No%20papel%2C%20o%20Brasil%20%C3%A9,14%20vit%C3%B3rias%20e%20tr%C3%AAs%20empates> Acesso em: 1 mar. 2023

VIDOTTI, Daniela Barbieri. **Potencialidades da Modelagem Matemática e da Análise de Erros para o Ensino e a Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral em Várias Variáveis**. Orientadora: Profª. Drª. Lilian Akemi Kato. 2019. 212 f. Tese (Doutorado em Educação para a Ciência e a Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2019.

APÊNDICE 1 – LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO FEITO NOS ANAIS DA CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (CNMEM) , GOOGLE ACADÊMICO E BTDT

Título	Edição	Autores	Ano Escolar	Palavras - Chaves	Problema De Pesquisa	Referencial Teórico	Programa De Pós - Graduação - Local	Informação do tipo de trabalho	Onde o trabalho foi encontrado
A Modelagem Matemática Na Introdução Do Conceito De Equação Para Alunos De Sétimo Ano Do Ensino Fundamental	2011	Salandini, Everton Jonathan De Andrade	7º ° Ano	Equação Modelagem Matemática Ensino E Aprendizagem Ensino Fundamental	Quais As Reais Possibilidades De Se Introduzir O Conceito De Equação Do Primeiro Grau Utilizando Como Estratégia De Ensino A Modelagem Matemática Para Alunos De Sétimo Ano Do Ensino Fundamental ?	Modelagem Matemática, Segundo Os Enfoques Propostos Por Bassanezi (2006) E Barbosa (2001)	Programa De Estudos Pós-Graduados Em Educação Matemática - Pontifícia Universidade Católica De São Paulo	Dissertação de Mestrado	Google Acadêmico e BTDT
Considerações Sobre Os Erros Na Resolução De Equação Do 1º Grau	2021	André Luis Andrejew Ferreira	8º Ano	Tipos De Erros Nas Equações De 1ª Grau Com Uma Incógnita.	O Que A Análise Dos Erros Cometidos Pelos Sujeitos	Cury Vygotsky Piaget Ferreiro E Teberosky Coelho E	Universidade Federal De Pelotas Programa De	Dissertação de Mestrado	Google Acadêmico

Com Uma Incógnita				Desenvolvimento do Pensamento Algébrico. Ensino De Álgebra No Ensino Fundamental .	Revela Sobre O Conhecimento Que Estes Possuem Sobre A Equação Do 1º Grau?	Aguiar (2015), Almeida (2016), Almeida E Santos (2017), Fiorentini E Miorin (1993)	Pós-Graduação Em Ensino De Ciências E Matemática Mestrado Profissional		
O Estudo De Erros E Obstáculos Nas Operações Fundamentais De Matemática Cometidos Por Alunos De 6º Ano Em Salas De Apoio	2018	Joselba Liliane De Oliveira Carneiro Da Silva	6º Ano Em Salas De Apoio	Matemática – Estudo e Ensino. Erros. Avaliação	Como O Professor Pode, A Partir Dos Erros E Obstáculos De Seus Alunos Do 6º Ano, Reconstruir O Conceito Matemático Sobre As Operações Fundamentais Da Matemática?	Nunes, Carraher E Schliemann (2011); Burak (2004); D'ambrosio (1986 E 1889); Pais (2001); Fiorentini E Miorim (1990); Ponte (1994); Pisa (2015); Ramos (2003); Nunes, Campos, Magina E Bryant (2005). Pais (2001); Freitas (2010); Brousseau (2008)	Universidade Tecnológica Federal Do Paraná Campus Ponta Grossa Programa De Pós-Graduação Em Ensino De Ciência E Tecnologia	Dissertação de Mestrado	Google Acadêmico

						Cury (2015); Moreira (2015); Brousseau (2008).			
Análise De Erros Cometidos Pelos Discentes Do Sétimo Ano Do Ensino Fundamental E Primeiro Ano Do Ensino Médio No Estudo Dos Números Racionais Na Sua Forma Fracionária	2017	Luís Carlos Góis De Oliveira	7º Ano Do Fundamental E 1º Ano Do Ensino Médio	Frações; Análise De Erros: Fundamental E Médio; Comparação Dos Resultados.	Os Alunos Do Sétimo Ano Do Ensino Fundamental E Os Do Primeiro Ano Do Ensino Médio Da Escola Escolhida, Possuem Domínio Do Conteúdo Frações? • Os Erros Cometidos Pelos Discentes Do Sétimo Ano Do Ensino Fundamental E Os Do Primeiro Ano Do Ensino Médio São Os Mesmos?	Fiorentini E Lorenzato	Universidade Federal De Sergipe Programa De Pós-Graduação Em Matemática Da Universidade Federal De Sergipe,	Dissertação de Mestrado	Google Acadêmico
Análise De	2022	Lucineia	1ª, 2ª E 3ª	Análise De	Quais Erros		Programa	Dissertação	Google

Erros Cometidos Na Resolução De Problemas Envolvendo Equações Quadráticas		Regina Tochetto	Série Do Ensino Médio	Erros, Equações Quadráticas, Ensino De Matemática	Cometidos Pelos Estudantes Podem Ser Identificados No Processo De Resolução De Equações Do Segundo Em Uma Incógnita?		De Mestrado Profissional Em Matemática Em Rede Nacional – Profmat, Na Universidade Tecnológica Federal Do Paraná - Pato Branco	de Mestrado	Acadêmico
Análise De Erros No Ensino Fundamental : Uma Transição Do 5º Para O 6º Ano	2015	Simone Braga Castanho	6º Ano	Análise De Erros, Ensino E Aprendizagem, Estratégias De Ensino, Ensino Fundamental	A) Quais Os Principais Erros Cometidos Por Esses Alunos Na Análise Das Provas Do 6º Ano Em Matemática? B) O Que Professores, Pesquisadores, E Colaboradores No Processo De Ensino-Aprendizagem Podem Contribuir A Fim De Superar Esses Erros,	Cury, Borassi, Muniz ...	Universidade Federal De Santa Maria -	Dissertação de Mestrado	Google Acadêmico

					Que Estratégias De Ensino Podem Usar? C) De Que Forma A Análise De Erros Pode Colaborar Para O Processo De Ensino E Aprendizagem Em Matemática, No 6º Ano Do Ensino Fundamental De Um A Escola Pública De Santa Maria?				
Análise De Erros Em Resolução De Equação E Inequação Exponencial: Revelando As Dificuldades Dos Alunos	2015	Maria Luisa Perdigão Diz Ramos, Edda Curi	1º Ano Do Ensino Médio	Erros; Equação E Inequação Exponencial; Ensino Médio	-	Cury, Thorndike Krutetskii	-	Artigo	Google Acadêmico
A Modelagem	2017	Marcio Alle Wanous	6º Ano	Modelagem Matemática.	Apresentar A Modelagem		Universidade Do Estado	Dissertação de Mestrado	Google Acadêmico

Matemática No Processo De Aprendizagem No Ensino Fundamental Na Rede Pública				Resolução De Problemas. Aprendizagem. Motivação	Matemática Como Uma Alternativa Para Facilitar O Processo De Ensino E Aprendizagem Da Matemática.		Do Rio De Janeiro		
Análise De Erros E Superação De Dificuldades Matemáticas Por Meio Da Modelagem Matemática No Ensino Fundamental	2011	Renata Brito Pereira	6º Ano	Análise De Erro, Modelação Matemática E Superação De Dificuldades	Como A Análise De Erro Pode Auxiliar Na Superação Das Dificuldades Encontradas Pelos Estudantes De Uma Turma De 6º Ano, Com O Auxílio Do Método De Ensino De Modelação Matemática Nos Conteúdos Que Envolvam As Operações De Multiplicação E Divisão?	Allevato Cury Moraes E Galiazzi	Pontifícia Universidade Católica Do Rio Grande Do Sul Programa De Pós-Graduação Em Educação Ciências E Matemática	Dissertação de Mestrado	Google Acadêmico
Potencialid	2019	Daniela	Ensino	Análise de	Que	(ESTELEY	Programa	Doutorado	-

ades Da Modelagem Matemática E Da Análise De Erros Para O Ensino E A Aprendizagem De Cálculo Diferencial E Integral Em Várias Variáveis		Barbieri Vidotti	Superior	erros. Função de várias variáveis reais. Fator de conflito potencial.	dificuldades de aprendizagem em são apresentadas por estudantes de CDI II e que potenciais a Modelagem Matemática oferece para explorar os erros que os estudantes cometem a fim de problematizá-los?	E VILLARREAL, 1990; CURY, 2003; CURY; CASSOL, 2004; OLIVEIRA, 2006; CAVASOTTO, 2010; PEREIRA FILHO, 2012; NOUROOZ et al., 2014; MORU, 2009; MÜLLER, 2015) (CURY, 2003; CURY; CASSOL, 2004; ALLEVATO, 2005; CAVASOTTO, 2010; MÜLLER; 2015).	de Pós Graduação em Educação para a Ciência e a Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidad e Estadual de Maringá,		
Modelagem Matemática	2015	Daniela Barbieri	Ensino Superior	Análise de erros.	Quais são os erros		-	Artigo	CNMEM

E Análise De Erros No Processo De Aprendizagem De Cálculo Diferencial Integral De Funções De Várias Variáveis		Vidotti Daniela Barbieri Vidotti		Modelagem Matemática . Cálculo a várias variáveis.	cometidos por estudantes de uma turma de Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis na produção escrita e na apresentação de uma atividade de Modelagem Matemática ?				
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	-------------------------------------	--	----------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--	--	--	--

APÊNDICE 2 - FORMULÁRIO - JOGADORES DA COPA

Aluna (o): _____ 8º ano A
11/11/2022

Formulário - Jogadores da Copa 🏆😊

1) Quais jogadores você classificaria como lendários ou raros para o álbum da Copa?

2) Dentre as seleções classificadas para a Copa do Mundo 2022, qual você escolhe?

GRUPO A

- () CATAR
- () EQUADOR
- () SENEGAL
- () HOLANDA

GRUPO B

- () INGLATERRA
- () IRÃ
- () ESTADOS UNIDOS
- () PAÍS DE GALES

GRUPO C

- () ARGENTINA
- () ARÁBIA SAUDITA
- () MÉXICO
- () POLÔNIA

GRUPO D

- () FRANÇA
- () AUSTRÁLIA
- () DINAMARCA
- () TUNÍSIA

GRUPO E

- () ESPANHA
- () COSTA RICA
- () ALEMANHA
- () JAPÃO

GRUPO F

- () BÉLGICA
- () CANADÁ
- () MARROCOS
- () CROÁCIA

GRUPO G

- () BRASIL
- () SÉRVIA
- () SUÍÇA
- () CAMARÕES

GRUPO H

- () PORTUGAL
- () GANA
- () URUGUAI
- () CORÉIA DO SUL

APÊNDICE 3 - RELATÓRIO DA ATIVIDADE : ÁLBUM DE FIGURINHAS DA COPA

Alunos (as): _____ 8º ano A

Professora Estagiária: Maria Gabrieli Rosa Jofre

Relatório da atividade : **ÁLBUM DE FIGURINHAS DA COPA**

Seu relatório deverá ser criativo e conter:

- Objetivos do trabalho que foi proposto.
- Descrição do processo da tarefa:
 - ◆ como pensaram para realizar o problema;
 - ◆ organização dos dados matemáticos;
 - ◆ tentativas realizadas e dificuldades encontradas.
- Conclusão de como chegou nas respostas aos problemas.
- Cálculos e procedimentos matemáticos desenvolvidos.
- Conclusões matemáticas e considerações do grupo sobre o trabalho.