

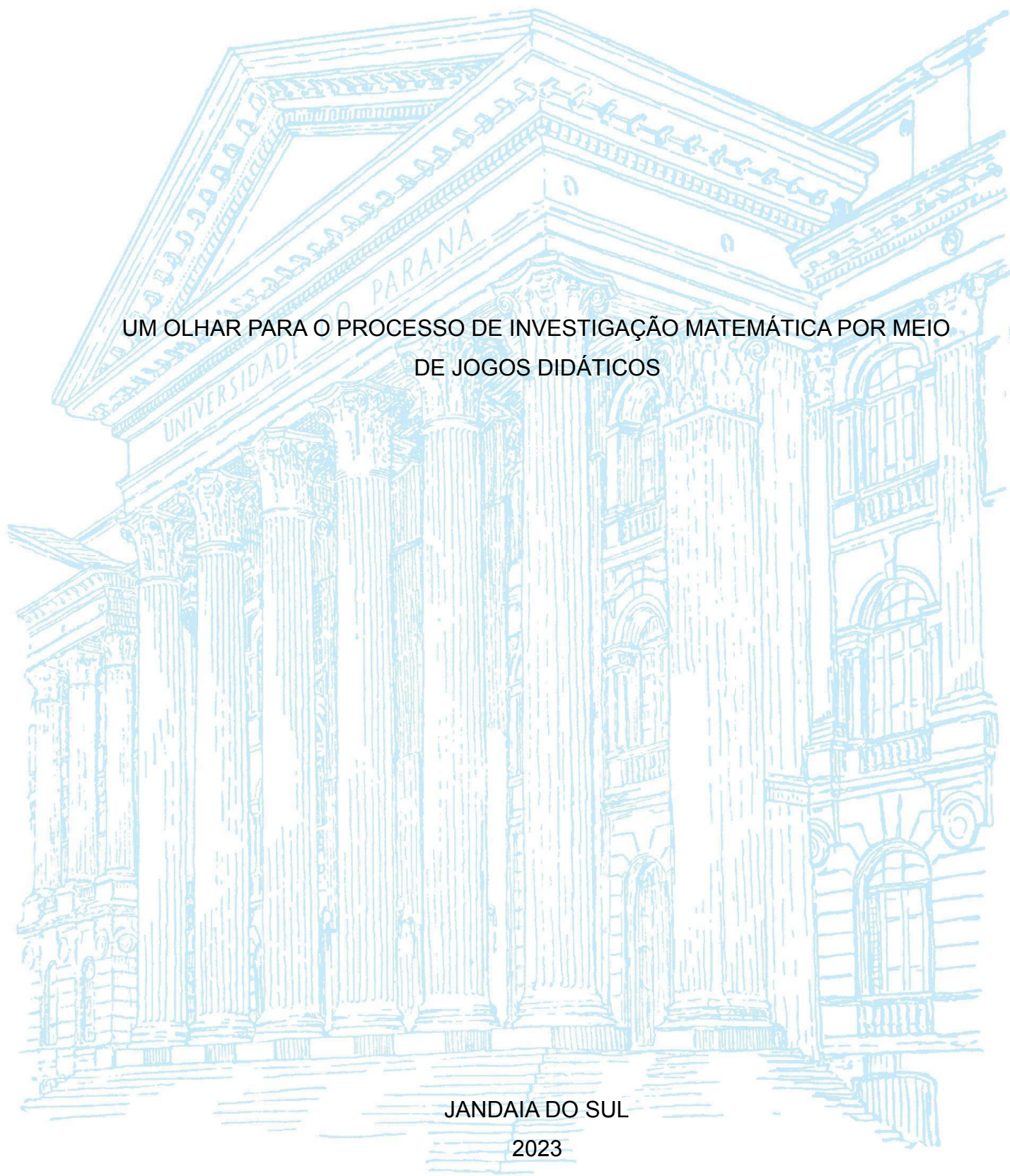
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JULIANA CAROLINE BONINI ROMAGNOLI

UM OLHAR PARA O PROCESSO DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA POR MEIO
DE JOGOS DIDÁTICOS

JANDAIA DO SUL

2023



JULIANA CAROLINE BONINI ROMAGNOLI

UM OLHAR PARA O PROCESSO DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA POR MEIO
DE JOGOS DIDÁTICOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado ao curso de Licenciatura em Ciências Exatas, campus avançado de Jandaia do Sul, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de licenciada em Ciências Exatas - Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Bárbara Cândido Braz

JANDAIA DO SUL

2023

R757o Romagnoli, Juliana Caroline Bonini
Um olhar para o processo de investigação matemática por meio de jogos didáticos/ Juliana Caroline Bonini Romagnoli. Jandaia do Sul: 2023. 66 fls.: il.

Orientadora: Profª. Drª. Bárbara Cândido Braz
Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) - Universidade Federal do Paraná. Campus Jandaia do Sul. Curso de Graduação em Licenciatura em Ciências Exatas - Matemática.

1. Matemática - Ensino. 2. Jogos educativos. I. Braz, Bárbara Cândido. orient. II. Título. III. Universidade Federal do Paraná.

CDD: 510.71



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PARECER Nº 3/2023/UFPR/R/JA
PROCESSO Nº 23075.075090/2022-38
INTERESSADO: JAIR DA SILVA
ASSUNTO: Termo de aprovação de trabalho de conclusão de curso

Título: Um Olhar para o processo de investigação matemática por meio de jogos didáticos

Autora: Juliana Caroline Bonini Romagnoli

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a obtenção do grau no curso de Licenciatura em Ciência Exatas, aprovado pela seguinte banca examinadora.

- Bárbara Cândido Braz (orientadora)
- Thayná Felix dos Santos (membro)
- Leticia Saragiotto Colpini (membro)

Jandaia do Sul, 16 de fevereiro de 2023.



Documento assinado eletronicamente por **BARBARA CANDIDO BRAZ, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 16/02/2023, às 20:10, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **LETICIA SARAGIOTTO COLPINI, PROFESSOR ENS BASICO TECN TECNOLOGICO**, em 16/02/2023, às 20:12, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **Thayná civilmente Thayná Felix dos Santos, Usuário Externo**, em 17/02/2023, às 22:31, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



A autenticidade do documento pode ser conferida [aqui](#) informando o código verificador **5303923** e o código CRC **979A6887**.

A Deus e aos meus pais, Luiz e Sueli, que me apoiaram e me deram sustento para permanecer e chegar até aqui.

RESUMO

A natureza abstrata do conhecimento matemático demandou/demanda o desenvolvimento de estratégias metodológicas na busca por tornar os processos de ensino e de aprendizagem, nos diferentes níveis de ensino, pertinentes ao desenvolvimento do repertório matemático dos alunos. Neste sentido, o uso de jogos matemáticos no Ensino Fundamental tem sido disseminado como uma alternativa para abordar conceitos matemáticos. Um levantamento realizado nos anais do Encontro Nacional de Educação Matemática, no entanto, evidenciou que poucas são as investigações que tratam do uso de jogos matemáticos associados à investigação matemática. Este fato desperta interesse, na medida em que esta parece ser uma relação natural ao desenvolvermos jogos de estratégia neste nível de ensino. Sendo assim, nesta pesquisa buscamos responder: "Que elementos associados a um jogo matemático de estratégia, no Ensino Fundamental, se associam ao desenvolvimento de investigações matemáticas?". Para tanto, desenvolvemos em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental ao longo de quatro horas/aula, dois jogos de estratégia, intitulados *Quadrado Mágico* e *Jogo do 15*. Por meio destes, buscamos, através de intervenções verbais, fazer com que os alunos desenvolvessem investigações matemáticas acerca dos jogos desenvolvidos. Procuramos com isso, auxiliar e incentivar os alunos a construir hipóteses e elaborar estratégias para vencer o jogo proposto. Com isso, pudemos observar e constatar no decorrer das aulas que muitas das etapas de um jogo se relacionam com as etapas da investigação matemática. As conclusões obtidas nesta pesquisa, nos levaram a outros questionamentos que podem ser focos de futuros estudos, como: será que o desenvolvimento de jogos de treinamento também permite o desenvolvimento de investigações matemáticas?. Contudo, isso é algo que ainda pode ser investigado.

Palavras-chave: Educação Matemática. Ensino Fundamental. Jogos de estratégia. Cenário para investigação.

ABSTRACT

The abstract nature of mathematical knowledge has demanded the development of methodological strategies in order to make the teaching and learning processes, at different levels of education, relevant to the development of the students' mathematical repertoire. In this sense, the use of mathematical games in Elementary School has been disseminated as an alternative to approach mathematical concepts. A survey conducted in the annals of the National Meeting on Mathematics Education, however, showed that there are few investigations on the use of mathematical games associated with mathematical investigation. This fact arouses interest, as this seems to be a natural relationship when developing strategy games at this level of education. Therefore, in this research we aimed to answer the following questions: "What elements associated with a strategy mathematical game, in elementary school, are associated with the development of mathematical investigations? To this end, we developed in an 8th grade class of elementary school, during four hours/class, two strategy games, called Magic Square and Game of 15. Through these games, we tried, through verbal interventions, to make the students develop mathematical investigations about the developed games. We tried to help and encourage students to build hypotheses and develop strategies to win the proposed game. With this, we were able to observe and verify during the classes that many of the stages of a game are related to the stages of mathematical investigation. The conclusions obtained in this research led us to other questions that can be the focus of future studies, such as: does the development of training games also allow the development of mathematical investigations? However, this is something that can still be investigated.

Keywords: Mathematics Education. Elementary School. Strategy games. Scenario for investigation.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – TABULEIRO DO JOGO DA CORRENTE	15
FIGURA 2 – POSSIBILIDADES PARA AS JOGADAS	16
FIGURA 3 – CÁLCULO PARA ENCONTRAR ESTRATÉGIA VENCEDORA	17
FIGURA 4 – TABULEIRO DO JOGO DO TOBOGÃ.....	18
FIGURA 5 – UMA DAS POSSÍVEIS RESOLUÇÕES PARA O <i>QUADRADO MÁGICO</i> - SOMA 15.....	28
FIGURA 6 – <i>QUADRADO MÁGICO</i>	29
FIGURA 7 – PEÇAS DO JOGO DO 15.....	29
FIGURA 8 – <i>QUADRADO MÁGICO</i> MAIOR.....	33
FIGURA 9 – POSSÍVEIS SOMAS DE 15 COM TRÊS DÍGITOS.....	35
FIGURA 10 – ALUNA TESTANDO A HIPÓTESE FORMULADA	36
FIGURA 11 – ESTRATÉGIA FORMULADA PELA ALUNA PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA.....	36
FIGURA 12 – ESTRATÉGIAS FORMULADAS PELOS GRUPOS.....	37
FIGURA 13 – QUANTIDADE DE VEZES QUE OS NÚMEROS SE REPETEM EM CADA SOMA.....	38
FIGURA 14 – DIFERENTES RESOLUÇÕES DO <i>QUADRADO MÁGICO</i> DAS DUPLAS.....	41
FIGURA 15 – DUPLA (D10) JOGANDO O JOGO DO 15.....	43
FIGURA 16 – POSSIBILIDADES DE SOMAS COM QUATRO DÍGITOS.....	47
FIGURA 17 – POSSIBILIDADES DE SOMAS COM DOIS DÍGITOS E SUAS DECOMPOSIÇÕES.....	47

LISTA DE QUADROS

QUADRO 1 – ETAPAS DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA.....	21
QUADRO 2 – AMBIENTES DE APRENDIZAGEM.....	23
QUADRO 3 – ORGANIZAÇÃO DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS.....	32
QUADRO 4 – RELAÇÃO ENTRE AS ETAPAS DO JOGO E DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA.....	50

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	11
2 O USO DE JOGOS NAS AULAS DE MATEMÁTICA.....	14
3 INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO.....	21
4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	27
5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS.....	32
5.1 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO JOGO DO QUADRADO MÁGICO.....	33
5.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO JOGO DO 15.....	43
6 JOGOS DE ESTRATÉGIA E INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS: QUE RELAÇÕES PODEMOS ESTABELECEER A PARTIR DAS EXPERIÊNCIAS VIVIDAS?.....	49
REFERÊNCIAS.....	52
APÊNDICE 1 – LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO FEITO NOS ANAIS DO ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM).....	53
APÊNDICE 2 – ROTEIRO DA AULA.....	62
APÊNDICE 3 – MODELO DE RELATÓRIO DA ATIVIDADE.....	64
APÊNDICE 4 – FOLHA DE RASCUNHO.....	65
ANEXO 1 – PEÇAS DO JOGO DOMINÓ DOS RACIONAIS.....	66

1 INTRODUÇÃO

Historicamente legitimada como uma disciplina de difícil compreensão por seu caráter abstrato, a matemática parece ser compreendida como uma ciência restrita a um pequeno conjunto de pessoas que parecem compreendê-la com destreza. Ao mesmo tempo, no âmbito dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, esse caráter abstrato da matemática não parece ser um obstáculo para que professores a ensinem e abordem-na de modo que evidenciem aos alunos como essa área de conhecimento permeia suas vidas. Neste contexto de ensino, é natural presenciarmos aulas de matemática nas quais os professores dispõem de materiais didático manipuláveis e jogos como alternativas para o ensino de matemática.

No decorrer dos anos, na medida em que se avançam pelos anos escolares, os usos de materiais como jogos didáticos nas aulas de matemática já não parecem uma prática tão usual quanto nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Parece-nos que os usos destes recursos estão muito mais associados à busca por representar, de algum modo, os objetos matemáticos abstratos de modo “palpável” às crianças, do que às suas potencialidades didáticas. Ainda no contexto dos Anos Finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, argumentos como o tempo didático “gasto” com os jogos nas aulas de matemática, como indica Grandó (2000) parecem indicar uma incompreensão sobre os objetivos didáticos desta tendência em Educação matemática nas aulas.

Este contexto relatado nos suscitou a hipótese de que os usos dos jogos nas aulas de matemática estivessem mais associados a um caráter técnico, de treinamento, do que efetivamente associado ao ensino de conceitos matemáticos. Esta hipótese conduziu-nos ao desenvolvimento de um levantamento bibliográfico, feito nas treze primeiras edições (I ENEM a XIII ENEM) dos Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM) – por ser este um evento de relevância e abrangência da área de Educação Matemática no Brasil – e neste levantamento procuramos, através da ferramenta de busca, títulos de comunicações científicas e relatos de experiência que envolvessem as palavras “jogos” e/ou “investigação matemática”. Todos os trabalhos encontrados foram organizados em um quadro (Apêndice 1) contendo: título, edição/ano do evento, autores, instituição, ano de ensino e uma última coluna com palavras-chave. É importante ressaltar aqui, que

consideramos apenas os trabalhos completos e desconsideramos aqueles que envolviam jogos digitais, pelo fato de não ser nosso objeto de estudo.

Após a organização deste quadro e a partir da leitura e análise dos resumos dos trabalhos, identificamos que em sua maioria os jogos trabalhados e desenvolvidos são jogos de treinamento que buscam apenas a fixação de determinados conteúdos estudados. Foi possível verificar também, que muitos trabalhos associam o uso de jogos à resolução de problemas.

Após analisarmos todos os trabalhos encontrados, verificamos que apenas dois dos sessenta e três trabalhos, tratam do uso de jogos ligados à investigação matemática. Estes resultados nos conduziram ao questionamento: “Que elementos associados a um jogo matemático de estratégia, no Ensino Fundamental, se associam ao desenvolvimento de investigações matemáticas?”, que norteia o desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso. O objetivo deste estudo é investigar como os alunos de uma turma de oitavo ano do Ensino Fundamental lidam com jogos matemáticos de estratégia por meio de investigações matemáticas. Para tanto, conduziremos os alunos a investigar possíveis estratégias para jogar com competência.

Em linhas gerais, podemos compreender uma investigação matemática como um processo que busca investigar matematicamente uma situação e para isso ocorre a formulação de hipóteses e posteriormente as mesmas são testadas para verificarmos se as hipóteses formuladas são válidas ou não para aquela situação investigada. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p.10) “as investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração”.

Neste sentido, o uso de jogos didáticos, ou seja, aqueles jogos que buscam ensinar conceitos matemáticos novos ou abordá-los por meio do desenvolvimento de estratégias - sem o uso do elemento sorte - parece ser uma boa alternativa para suscitar investigações¹ nas aulas de matemática. Para que tais investigações ocorram, no entanto, é preciso que os jogos desafiem e instiguem os alunos; é importante que estes jogos possibilitem que os alunos reflitam sobre suas jogadas e pensem em estratégias possíveis para vencer o jogo.

¹ Ao usarmos o termo investigação(ões) estamos nos referindo às investigações matemáticas.

Desta forma, neste trabalho desenvolvemos em uma turma de oitavo ano do Ensino Fundamental os jogos de estratégia: *Quadrado Mágico* e *Jogo do 15*, buscando levar os alunos, por meio desses jogos a desenvolverem investigações matemáticas. Os dados foram coletados por meio de registros em áudio e de um relatório da atividade elaborado pelos alunos. E esses dados, foram analisados de forma qualitativa.

Por fim, como forma de organização, este texto está dividido em cinco capítulos. No primeiro capítulo, falamos sobre os jogos didáticos, o que é, quais os tipos e quais as etapas de um jogo matemático de estratégia. No capítulo dois, apresentamos os pressupostos teóricos sobre investigações matemáticas. Já no capítulo três, descrevemos os procedimentos metodológicos e o capítulo quatro abrange a descrição e análise dos dados. Por último, apresentamos as conclusões acerca da pesquisa desenvolvida e algumas questões que podem ser foco de pesquisas futuras.

2 O USO DE JOGOS NAS AULAS DE MATEMÁTICA

Os jogos didáticos são preparados com o propósito de apresentar e discutir conceitos específicos no contexto escolar, ou seja, possuem o intuito de ensinar algo novo; seja um conceito matemático ou uma estratégia vencedora, por meio de construções matemáticas. Eles são importantes auxiliares do processo de ensino e aprendizagem. De acordo com Cunha (1988 apud CAMPOS; BORTOLOTO; FELÍCIO, 2002, p. 48) “o jogo pedagógico ou didático é aquele fabricado com o objetivo de proporcionar determinadas aprendizagens, diferenciando-se do material pedagógico, por conter o aspecto lúdico”.

Essa metodologia de ensino geralmente desperta interesse e animação nos alunos, assim como nos diz Grandó (2000, p. 35) “a utilização dos jogos é um fator de motivação para os alunos”. Os jogos os desafiam e isso normalmente faz com que os alunos participem mais ativamente das aulas. Contribuem para o desenvolvimento de competências relativas ao raciocínio como organização, concentração, linguagem e raciocínio dedutivo (BORIN, 1995).

Borin (1995) argumenta que os jogos são classificados em jogos de estratégia e jogos de treinamento. Os jogos de estratégia buscam auxiliar na introdução de um novo conceito. Nesse tipo de jogo, o aluno precisa pensar e refletir sobre suas jogadas e é comum a formulação de hipóteses nesse momento para que seja possível encontrar uma estratégia vencedora para o jogo.

Assim sendo, Borin (1995) sintetiza algumas características referentes a esse tipo de jogo:

- Contribuição para o desenvolvimento do raciocínio lógico.
- Possui uma estratégia vencedora e os jogadores devem descobri-la.
- Formulação de hipóteses.
- Argumentação.

Neste sentido, Oliveira (2012, p. 22) discorre que “a aplicação de jogos de estratégia nas aulas de matemática constitui-se muito mais do que um simples material instrucional e lúdico, ele permite o desenvolvimento da criatividade, da iniciativa e da intuição.”

FIGURA 2 – POSSIBILIDADES PARA AS JOGADAS

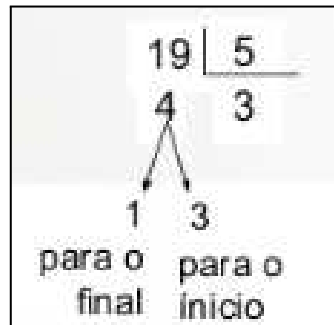
JOGADOR B	JOGADOR A	TOTAL DE ELOS (B + A)
	1 elo	2
1 elo	2 elos	3
	3 elos	4
	4 elos	5
	1 elo	3
2 elos	2 elos	4
	3 elos	5
	4 elos	6
	1 elo	4
3 elos	2 elos	5
	3 elos	6
	4 elos	7
	1 elo	5
4 elos	2 elos	6
	3 elos	7
	4 elos	8

FONTE: Coqueiro (28 jan. 2023) (Não publicado).

Se observarmos a Figura 2, vemos na última coluna, que o cinco é o único número que se repete em todas as possibilidades, ou seja, isso nos mostra que o cinco é sempre um total possível, então sempre conseguiremos formar grupos de cinco elos.

Como dito anteriormente, para vencermos é preciso começarmos o jogo marcando os três primeiros elos, caso sejamos o jogador que inicia a partida. Vamos analisar a situação: sabemos que temos um total de dezenove elos e sempre podemos formar grupos de cinco elos. Fazendo então a divisão de dezenove por cinco, encontramos um quociente igual a três e um resto igual a quatro. Isto quer dizer que, conseguimos fazer três grupos de cinco elos e nos restam quatro elos, mas não queremos marcar o último elo, logo, sobram três para serem marcados. Assim chegamos à estratégia vencedora. A Figura a seguir, apresenta o cálculo feito para chegarmos a essa conclusão:

FIGURA 3 – CÁLCULO PARA ENCONTRAR ESTRATÉGIA VENCEDORA



FONTE: Coqueiro (28 jan. 2023) (Não publicado).

Sendo assim, conhecendo a estratégia vencedora, se o jogador não inicia a partida, ainda assim pode vencer. Caso o oponente marque 1 ou 2 elos, basta completar com elo(s) até que chegue ao terceiro elo. Caso o oponente marque 4 elos, pode-se desconsiderar os 3 primeiros elos e completar os grupos de 5 elos (marcando, portanto, 4 elos na sua jogada). Caso o oponente inicie a partida e marque 3 elos, você precisará pensar as jogadas a partir de então, com base na jogada do oponente. Além disso, o jogo permite que modifiquemos as estratégias, na medida em que podemos alterar a quantidade de elos da corrente (tabuleiro) ou mesmo de elos a serem marcados. Isto exigirá novas estratégias.

Dando sequência, o outro tipo de jogo retratado por Borin (1995) é o jogo de treinamento. De acordo com a autora, estes são jogos que auxiliam na memorização ou fixação de conceitos, que por sua vez, são muito utilizados pelo professor para substituir listas de exercícios extensas. A sorte, diferente dos jogos de estratégia, interfere de forma significativa no resultado do jogo. Assim, os jogos de treinamento são usados para reforçar um conteúdo já estudado. Dificilmente um jogo de treinamento será usado para introduzir e ensinar um novo conceito matemático, embora isso possa ocorrer.

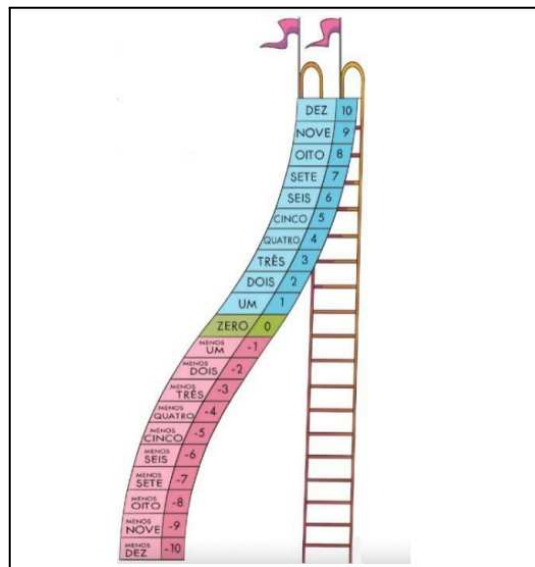
Um exemplo de jogo de treinamento é o *Dominó dos racionais*. O jogo é composto por cinquenta peças (Anexo 1), essas peças possuem os números representados de forma racional, decimal, em porcentagem e também em figuras. Para jogar é necessário dispor das peças do jogo e organizar os alunos em dois grupos, de modo que cada grupo tenha de dois a três alunos. As regras deste jogo são as seguintes (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p. 36):

1. As peças são colocadas sobre a mesa, viradas para baixo e misturadas.
2. Cada jogador pega cinco peças, enquanto as demais continuam viradas sobre a mesa.

3. Decide-se quem começa o jogo.
4. O primeiro jogador coloca uma peça virada para cima, sobre a mesa.
5. O segundo jogador tenta colocar uma peça, em que uma das extremidades represente o mesmo número que está representado em uma das extremidades da peça que está sobre a mesa.
6. Só pode ser jogada uma peça de cada vez.
7. Na sua vez, o jogador que não tiver uma peça que possa ser encaixada, deve “comprar” outra peça no monte que está sobre a mesa. O jogador deverá ir comprando até encontrar uma peça que encaixe. Se depois de comprar cinco peças ainda assim não conseguir uma peça adequada, o jogador deverá passar a sua vez.
8. O vencedor é o primeiro jogador que ficar sem peças. (SMOLE; DINIZ; MILANI, 2007, p. 36)

No entanto, ao analisarmos essas duas categorias propostas por Borin (1995), nos parece que alguns jogos não se adequam nem a uma e nem a outra categoria. Um desses jogos é o *Jogo do Tobogã*. Isto porque, neste jogo os jogadores dependem do fator sorte, porém, ainda é possível utilizá-lo para a introdução dos conceitos de soma e subtração de números inteiros. Os materiais utilizados no *Jogo do Tobogã* são compostos por um tabuleiro (Figura 4), dois dados e dois peões, que irão representar cada participante do jogo.

FIGURA 4 – TABULEIRO DO JOGO DO TOBOGÃ



FONTE: Porcher; Benck; Rosa (15 jan. 2023).

Os dados utilizados representam números negativos e números positivos, podendo assim serem caracterizados por cores diferentes, o professor pode utilizar um dado vermelho para representar os números negativos e um dado branco para representar os números positivos. O jogo é iniciado com o posicionamento de dois

peões, que representam seus jogadores, e posicionados na marcação “zero” do tabuleiro.

Cada jogador, um de cada vez, lança os dois dados e movem-se de acordo com a quantidade de casas positivas e negativas apontadas pelos números dos dados. Por exemplo, considerando que um jogador está na casa zero e lança os dois dados, de modo que, no dado negativo o número 6 tenha caído e no dado positivo o número 3, o jogador deverá mover seu peão até a casa do (-3), pois $+3 - 6 = (-3)$. Ganhará o jogo quem chegar no topo do tobogã primeiro. Ou, perde o jogo quem chegar no valor (-10) primeiro.

Para o desenvolvimento de jogos em sala de aula, é aconselhável que sigamos algumas etapas. Grandó (2000) propõe e explica sobre cada uma dessas etapas:

- **Familiarização com o material do jogo.** Este é o momento do primeiro contato do aluno com o jogo. É normal nessa primeira etapa que os alunos experimentem e façam possíveis jogadas.
- **Reconhecimento das regras.** Neste momento os alunos tomam conhecimento das regras a partir da explicação do professor ou ainda através de jogadas iniciais.
- **Jogo pelo jogo.** Momento em que os alunos jogam de forma espontânea. Aqui os alunos exploram o jogo e também é momento do professor verificar se os alunos compreenderam as regras do jogo.
- **Intervenção pedagógica verbal.** Neste momento o professor faz questionamentos aos alunos acerca de suas jogadas para que eles pensem, reflitam e analisem sobre como estão jogando.
- **Registro do jogo.** Nesta etapa, os alunos registram os procedimentos utilizados ao decorrer do jogo e também os cálculos, caso tenham feito algum.
- **Intervenção escrita.** Este momento propõe que os alunos resolvam situações problema produzidas por eles mesmos e/ou os professores. Isso possibilita uma análise mais atenta ao jogo e faz com que os alunos definam e aperfeiçoem suas estratégias e jogadas para vencer o jogo.

- **Jogar com “competência”.** Momento final, em que os alunos voltam ao jogo e utilizam das estratégias construídas nas etapas passadas para vencer o jogo.

Estas etapas, por sua vez, não precisam ocorrer de forma linear. É muito comum ir e voltar pelas etapas durante o desenvolvimento do jogo. Conforme Grandó (2004, p. 25-26) ao utilizarmos os jogos nas aulas de matemática devemos nos atentar para que “os objetivos com o jogo estejam claros, a metodologia a ser utilizada seja adequada ao nível em que se está trabalhando e, principalmente, que represente uma atividade desafiadora ao aluno para o desencadeamento do processo.”

Com isso, o jogo pode ser uma ferramenta auxiliadora do processo de ensino e aprendizagem trazendo muitas vantagens, dentre elas, o jogo propicia uma participação mais ativa dos alunos, contribuindo assim na construção do seu conhecimento. Já em relação ao trabalho docente, dentre outras possibilidades, o professor pode se utilizar destes momentos para identificar erros e situações em que os alunos possuem mais dificuldades (GRANDO, 2004).

3 INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS COMO METODOLOGIA DE ENSINO

Investigação de um modo geral, é o estudo e a busca de soluções para os problemas. Mas e a investigação matemática? É diferente disso? A investigação matemática também se baseia na busca de soluções para os problemas. Para isso, buscamos, por meios matemáticos, possíveis soluções para o problema proposto. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 10) “investigar em matemática assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas² que se procuram testar e provar, se for o caso”. Isto é, a essência da investigação é a formulação de hipóteses e o teste dessas hipóteses para que saibamos se elas são coerentes para a resolução do problema ou se teremos que reformulá-las.

A realização de investigação matemática, envolve algumas etapas, as quais, apresentamos no quadro a seguir:

QUADRO 1 – ETAPAS DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Exploração e formulação de questões	<ul style="list-style-type: none"> - Reconhecer uma situação problemática - Explorar a situação problemática - Formular questões
Conjecturas	<ul style="list-style-type: none"> - Organizar dados - Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre uma conjectura)
Testes e reformulações	<ul style="list-style-type: none"> - Realizar testes - Refinar uma conjectura
Justificação e avaliação	<ul style="list-style-type: none"> - Justificar uma conjectura - Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio

FONTE: Ponte; Brocardo; Oliveira (2006, p. 21).

A primeira etapa é o momento no qual os alunos identificam e tomam contato com a situação problema a ser investigada, depois ocorre a organização dos dados e a etapa de formulação de hipóteses. Posteriormente, na terceira etapa as hipóteses são testadas e reformuladas e/ou aprimoradas caso seja necessário. Por fim, a quarta etapa é a justificação dos processos desenvolvidos ao longo da investigação e a avaliação deste. Embora essas etapas estejam organizadas em uma sequência no Quadro 1, é importante frisar que elas não precisam ocorrer

² Assumimos conjecturas e hipóteses como sinônimos.

necessariamente de forma linear, é comum transitar entre as etapas ao longo da investigação e também que elas ocorram simultaneamente.

Nesse processo de investigação, ao contrário do ensino comumente tradicional, os alunos precisam participar de forma ativa. Eles quem irão, com o auxílio e orientação do professor, percorrer as etapas citadas anteriormente, ou seja, explorar o problema, elaborar hipóteses, realizar testes e, por fim, apresentar suas conclusões e o caminho percorrido até elas. Neste sentido, Polya (1981 apud PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2006) comenta sobre a importância de incentivarmos os jovens a se interessarem pela investigação matemática. Para ele, na investigação, os alunos são parte do processo de construção do conhecimento matemático, processo este em que eles observam, argumentam e constroem uma ideia matemática a partir de situações concretas.

A partir da investigação, os alunos constroem as suas respostas, um processo que auxilia no seu desenvolvimento cognitivo. Eles precisam pensar e refletir acerca do problema e construir uma solução. Na investigação matemática não há uma resposta pronta e única, isso permite que os alunos tentem sem medo de errar. É isso que diferencia os problemas dos exercícios.

Os problemas que utilizamos nas investigações são definidos por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p. 22-23) como “uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata [...]”. Já os exercícios são aquelas situações que possuem uma resposta única e exata sem margens para erro. Nos exercícios, ou a sua resposta está correta ou está errada, não existe meio termo. Por esse motivo as investigações ocorrem por meio da proposição de problemas, estes são a base para o início de uma investigação. Estes problemas propostos para o início de uma investigação matemática, normalmente possuem referência na matemática pura. Sobre esta referência, que mencionamos, nos pautamos em Ole Skovsmose (2000). No artigo “*Cenários para Investigação*” o autor diferencia ambientes de aprendizagem considerando dois paradigmas: do exercício e de investigações e três referências: matemática pura, semirrealidade e realidade. De acordo com o autor, o cenário para investigação é “um ambiente que pode dar suporte a um trabalho de investigação” (SKOVSMOSE, 2000, p. 3) em que os alunos têm a oportunidade de formular hipóteses, argumentar e buscar respostas para um determinado problema. Já o paradigma do exercício é o ambiente que está

focado apenas em cálculos e que possui uma única resposta. Esta é a premissa do paradigma do exercício.

Além disso, Skovsmose (2000) apresenta e discute sobre os tipos de referências. A primeira, é a referência na matemática pura, que contempla cálculos com operações matemáticas. A segunda referência, é a semirrealidade, ou seja, os exercícios ou problemas desta referência são formulados com base em uma “falsa realidade”. Logo as situações parecem reais, porém os dados envolvidos são fictícios. Por fim, a terceira referência é a realidade. Em outras palavras, são situações reais com dados verídicos.

A seguir, apresentamos um quadro no qual Skovsmose (2000) sistematiza os seis ambientes de aprendizagem resultantes da combinação entre os dois paradigmas e as três referências.

QUADRO 2 – AMBIENTES DE APRENDIZAGEM

	Exercícios	Cenário para investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semirrealidade	(3)	(4)
Referências a realidade	(5)	(6)

FONTE: Skovsmose (2000, p. 8).

De maneira concisa, o ambiente (1) é marcado por exercícios baseados na matemática pura. Ou seja, esse ambiente envolve apenas cálculos matemáticos que por sua vez, possuem apenas uma resposta correta.

Já o ambiente (2) tem referência na matemática pura mas compreende um cenário para investigação. Desta forma, aqui, frequentemente temos problemas matemáticos que levam os alunos a investigar e resolver problemas baseados na matemática pura.

Os ambientes (3) e (4) têm referência na semirrealidade. Contudo o ambiente do tipo (3) é pautado em exercícios. Um exemplo bem claro desse ambiente, são os exercícios presentes em muitos livros didáticos em que criam uma situação com referência na semirrealidade; ou seja, uma situação na qual os dados são fictícios, mas de algum modo poderiam ser reais. Tratam-se de situações criadas propositalmente para a abordagem de determinados conceitos que se queira

tratar. O ambiente do tipo (4) também tem referências à semirrealidade, mas permite com que o aluno faça explorações e aplicações em um cenário para investigação.

Por fim, os ambientes (5) e (6) dispõem da realidade como referência. Todavia, sendo o ambiente (5) marcado pelo paradigma do exercício, geralmente ele apresenta exercícios com situações e dados reais. E o último ambiente, (6), se encontra dentro de um cenário de investigação. Logo, ele tem como intuito direcionar os alunos para uma investigação matemática com referência em um tema real.

Desta forma, considerando os apontamentos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) ao abordar o trabalho de investigação e os de Skovsmose (2000) ao abordar os diferentes ambientes de aprendizagem, argumentamos que a proposição de tarefas de investigação matemática fundamenta o desenvolvimento de ambientes de aprendizagem do tipo (2).

Neste contexto, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), uma aula de investigação matemática decorre da seguinte maneira:

- **Introdução da tarefa.** Este é o momento em que o professor apresenta a problemática aos alunos, é o momento do convite e da proposta à turma.
- **Realização da investigação.** Aqui após o contato com o problema, ocorre de fato a investigação desta situação proposta. Este momento geralmente ocorre em pequenos grupos de alunos.
- **Discussão dos resultados.** Em outras palavras, nesse momento final os grupos apresentam para a turma a solução encontrada para o problema e os caminhos seguidos para se chegar até ela.

Mas e qual o papel do professor nas aulas de investigação? O professor nas atividades de investigação atua como um orientador e auxiliar do processo. No momento inicial da atividade, o professor deve garantir que todos tenham entendido com clareza o problema proposto. Como dito anteriormente, o problema é a base do processo investigado. É importante também que o professor crie um ambiente de sala de aula em que os alunos se sintam confortáveis para se expressar e expor suas ideias (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2006).

Ainda conforme Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) o professor também tem o papel de: desafiar e avaliar o progresso dos alunos, incentivar os alunos a pensar matematicamente e apoiar o trabalho dos alunos. Assim eles se sentem mais motivados a participar do processo investigativo.

Dessa maneira, mesmo o aluno sendo o protagonista do processo, a investigação não ocorreria sem a orientação e os encaminhamentos de um professor. Esses encaminhamentos são peças chave para levar os alunos a refletir, questionar e formular hipóteses. Logo, é importante que o professor saiba conduzir a atividade de forma que os alunos realmente investiguem a situação nas mais diferentes dimensões. Em outras palavras, é de suma importância que o professor consiga desempenhar em aula os papéis citados por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) para que seja possível criar um ambiente de aprendizagem e não somente uma aula puramente mecânica e tradicional.

Por fim, agora que sabemos um pouco sobre todo o processo das investigações matemáticas, vamos entender como podemos avaliar as atividades desenvolvidas pelos alunos. Uma das formas mais comuns e usadas para avaliarmos uma atividade de investigação matemática é a realização de relatórios. Porém, este relatório deve ser bem estruturado, contemplando alguns pontos importantes para que possamos avaliar o desenvolvimento dos procedimentos seguidos pelo aluno ao longo da atividade. Os autores Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p.117) discutem a esse respeito e indicam alguns critérios para serem levados em consideração no momento da elaboração do relatório. São os seguintes:

- Identificação do aluno ou grupo de alunos.
- Título.
- Objetivo do trabalho incluindo as questões iniciais.
- Descrição do processo de investigação (incluindo tabelas,...).
- Conclusões.
- Sua apreciação crítica da tarefa.
- Apreciação autocrítica da sua intervenção no trabalho.
- Bibliografia e outros materiais consultados. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2006, p. 117).

O relatório deve conter a descrição de todo o processo percorrido ao longo da investigação matemática, desde o início da problemática até a conclusão. É importante conter um comentário geral sobre o que o aluno aprendeu e como ele avalia a atividade.

Tão importante quanto elaborar um bom relatório, é sabermos avaliar as informações que os alunos irão descrever no mesmo. Neste sentido, os autores Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p.117) também apontam aspectos que nos orientam neste processo, indicando alguns critérios de avaliação:

- Organização do trabalho.
- Descrição e justificação dos procedimentos utilizados.
- Correção e clareza dos raciocínios.
- Correção dos conceitos matemáticos envolvidos.
- Correção e clareza da linguagem utilizada.
- Criatividade. (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2006, p. 117).

Por fim, é valoroso frisar que ambos os aspectos para construção e avaliação de relatórios citados, foram levados em consideração nesta pesquisa.

4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Com o objetivo de investigar se existem e o que dizem as pesquisas que utilizam jogos didáticos nas aulas de matemática no Ensino Fundamental, na perspectiva da investigação matemática, desenvolvemos um levantamento bibliográfico nos Anais do ENEM, em suas treze primeiras edições. Nesse levantamento encontramos apenas dois trabalhos que associam o uso de jogos didáticos à investigação matemática. Nesse sentido, buscamos responder “Que elementos associados ao desenvolvimento de um jogo matemático de estratégia, no Ensino Fundamental, se associam ao desenvolvimento de investigações matemáticas?”. Esse questionamento norteia o desenvolvimento deste trabalho de conclusão de curso.

Logo, o objetivo desse estudo é investigar como os alunos de uma turma de oitavo ano do Ensino Fundamental lidam com jogos matemáticos de estratégia por meio de investigações matemáticas. Para tanto, conduzimos os alunos a investigar possíveis estratégias para jogar com competência.

Com esse intuito, esta pesquisa se caracteriza como qualitativa, isto porque, uma pesquisa qualitativa de acordo com Merriam (1998 apud RODRIGUES; OLIVEIRA; SANTOS, 2021)

envolve a obtenção de dados descritivos na perspectiva da investigação crítica ou interpretativa e estuda as relações humanas nos mais diversos ambientes, assim como a complexidade de um determinado fenômeno, a fim de decodificar e traduzir o sentido dos fatos e acontecimentos. (MERRIAM, 1998 apud RODRIGUES; OLIVEIRA; SANTOS, 2021, p. 157).

Sendo assim, pesquisar qualitativamente envolve a observação, o estudo e a realização de práticas interpretativas acerca de um fenômeno, de forma a compreender como tal fenômeno ocorre. (RODRIGUES; OLIVEIRA; SANTOS, 2021).

Ao mesmo tempo, Bogdan e Biklen (1994 apud BORBA; ARAÚJO, 2012, p. 25) também apresentam alguns pontos que caracterizam as pesquisas qualitativas:

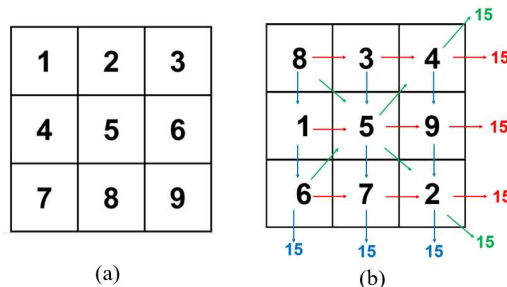
1. Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal.
2. A investigação qualitativa é descritiva.
3. Os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos.

4. Os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva.
5. O significado é de importância vital na abordagem qualitativa. (BOGDAN; BIKLEN, 1994 apud BORBA; ARAÚJO, 2012, p. 25).

Dito isso, os dados para análise foram produzidos por meio do desenvolvimento de dois jogos de estratégia em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, localizada no norte do Paraná. Essas atividades foram vinculadas ao projeto de extensão ÁGORA/UFPR – Jandaia do Sul³, na qual a autora deste trabalho era integrante no ano de 2022.

O primeiro jogo desenvolvido foi o jogo do *Quadrado Mágico de soma 15* (Figura 6). Outros *Quadrados Mágicos* com outras somas existem. Neste texto chamaremos o jogo apenas de *Quadrado Mágico*, nos referindo a este, de soma 15. Esse jogo consiste em formar somas de 15 com três algarismos de 1 a 9, sendo que as somas de 15 precisam aparecer em todas as horizontais, verticais e diagonais do *Quadrado Mágico* simultaneamente, como ilustrado na Figura 5

FIGURA 5 – UMA DAS POSSÍVEIS RESOLUÇÕES PARA O QUADRADO MÁGICO - SOMA 15

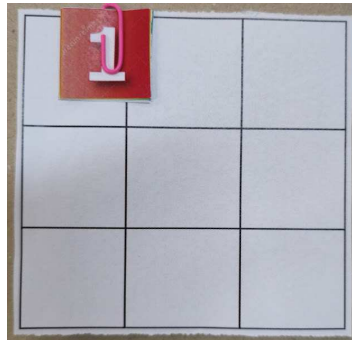


FONTE: Autora (2023).

Começamos propondo que os alunos tentassem resolver o *Quadrado Mágico* e a partir disso, desenvolvemos uma investigação a partir das hipóteses delineadas pelos alunos. Para o desenvolvimento desta atividade, foi produzido um tabuleiro de *Quadrado Mágico* (Figura 6) para cada aluno, em que foi confeccionado em folha sulfite, bem como as representações dos algarismos de 1 a 9. Pensamos em produzir este material desta forma para que os alunos tivessem possibilidades de manusear as representações dos números e também conseguissem visualizar, no tabuleiro, as estratégias que formulavam em cada etapa do jogo.

³ Acesse <https://jandaiadosul.ufpr.br/agoraufpr/> para saber mais sobre esse projeto.

FIGURA 6 – QUADRADO MÁGICO



FONTE: Autora (2023).

Após esse momento, os alunos foram convidados a jogar o *Jogo do 15* (Figura 7). Este, também consiste em formar somas de 15 com três algarismos de 1 a 9, a diferença é que este deve ser jogado por duas pessoas ou mais. Cada jogador, por vez, escolhe um número dentre os possíveis (1 a 9) e assim vão indo cada um na sua vez, para tentar formar as somas de 15 com três números. Ambos os jogos possuem estratégias matemáticas semelhantes e neste jogo também possibilitamos aos alunos que criassem novas regras para o jogo. Este jogo, bem como a aula na qual ele foi desenvolvido serão mais detalhados no próximo capítulo e o roteiro desta aula pode ser consultado no Apêndice 2.

Para este jogo, a turma foi organizada em duplas. Cada dupla recebeu peças do jogo – representações de números de 1 a 9, confeccionadas em madeira, como mostra a Figura 7:

FIGURA 7 – PEÇAS DO JOGO DO 15



FONTE: Autora (2023).

Os dados produzidos ao longo da atividade foram coletados por meio de gravações em áudio e um relatório, elaborado por cada grupo de alunos. O modelo do relatório proposto aos alunos está no Apêndice 3. Neste, levamos em consideração, os pontos citados no Capítulo 3, indicados por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) para elaboração de um relatório, ou seja, apresentação do grupo, questões de investigação, metodologia, resultados da investigação e conclusão. Por fim, com os dados obtidos, fizemos uma análise qualitativa dos mesmos.

Considerando a descrição do processo de coleta dos dados que fundamentam esta investigação e as características de uma pesquisa qualitativa, conforme assumido no início deste capítulo, reafirmamos que se trata de uma investigação qualitativa. Isto porque, a fonte direta dos dados foi o ambiente natural, no qual os alunos, sujeitos desta investigação, estavam habituados e a investigadora constituiu o principal meio para i) produção e ii) coleta dos dados. Para a produção (i), porque foi a investigadora, juntamente com os membros do Projeto ÁGORA, que definiram os jogos didáticos a serem utilizados na pesquisa, de acordo com os referenciais teóricos assumidos, e como seriam abordados. Referente a coleta de dados (ii), a investigadora também foi o principal meio, visto que foi ela quem definiu como os dados poderiam ser registrados para posterior análises.

A pesquisa qualitativa, também é descritiva pois como dito anteriormente, nesse tipo de pesquisa nós não estamos interessados em dados numéricos – por si só – mas sim, em todo o processo percorrido pelos alunos, suas hipóteses, suas conclusões e assim por diante. Então, após coletarmos esses dados, precisamos descrevê-los muito bem, para que você leitor compreenda como produzimos, coletamos e analisamos os mesmos.

Com os dados produzidos, os analisamos de forma indutiva e nesse sentido o significado é de importância vital, pois como já dito, estamos interessadas em vislumbrar o processo e não apenas os resultados obtidos.

Quanto à escolha dos jogos, os mesmos foram escolhidos porque o nosso intuito aqui é desenvolver investigações matemáticas por meio desses materiais, sendo assim, escolhemos o jogo do *Quadrado Mágico* e o *Jogo do 15* por se caracterizarem como jogos de estratégia e poderem ser jogados por alunos com diferentes repertórios matemáticos. Para conseguir vencer, o jogador precisa pensar e refletir sobre as suas jogadas, não é algo que nós jogamos de forma automática.

Logo, esses jogos nos trazem mais possibilidades de desenvolver uma investigação matemática, porque nós temos que pensar matematicamente, formular hipóteses e testar isso no decorrer do jogo e todo esse processo, se bem orientado, pode gerar investigações matemáticas.

Quanto à forma de registros dos dados, optamos por utilizar gravações em áudio e em relatórios. Isso porque, as gravações em áudio nos ajudam a não perder discussões que ocorrem durante a aula quando não estamos ouvindo alguns alunos. Muito acontece, dos alunos falarem muitas coisas pertinentes no momento em que estão jogando, no decorrer das intervenções verbais e como são vários alunos, nós poderíamos nos esquecer dessas falas algum tempo depois. Então, com o áudio gravado, nós podemos retornar a isso a qualquer momento e ouvir o que os alunos disseram. O áudio também é interessante, pois por ele nós podemos transcrever alguns diálogos que são importantes entre os alunos e professores, propiciando uma maior compreensão e clareza sobre os caminhos percorridos pelos sujeitos.

Em relação ao relatório, nós o escolhemos porque com ele, os alunos conseguem descrever todas as suas percepções e conclusões dos jogos, ou seja, todo o processo em que eles percorreram no decorrer das aulas. Isso nos ajuda a identificar como ocorreu o desenvolvimento do aluno ao longo do processo e se ele conseguiu desenvolver investigações matemáticas.

Em posse destes dados, as análises procederam de acordo com os pressupostos teóricos assumidos e apresentados nos primeiros capítulos deste texto. Nesse sentido, o processo de descrição dos dados é fundamental para que possamos atingir os objetivos delineados anteriormente. Ao mesmo tempo, considerando a pergunta que fundamenta a pesquisa, fica evidente que nos interessamos mais pelo processo – pois estamos interessadas em compreender relações estabelecidas durante o desenvolvimento de práticas embasadas em jogos e investigações – do que pelo resultado final.

5 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Conforme dito no capítulo anterior, dois jogos de estratégia foram desenvolvidos no decorrer de quatro horas-aula, com alunos de um 8º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública, situada na região norte do Paraná. Para auxiliar no desenvolvimento das aulas, estiveram presentes, além da autora deste texto, que atuou como professora, a professora regente da turma e uma professora auxiliar⁴.

Nas duas primeiras aulas haviam em torno de 22 alunos e nas duas últimas aulas, em média 20 alunos. Os mesmos foram organizados em duplas para que pensassem juntos e discutissem entre si, sobre as possíveis estratégias e formas de resolução dos jogos.

A seguir, no Quadro 3, apresentamos algumas informações sobre como as atividades desenvolvidas foram organizadas:

QUADRO 3 – ORGANIZAÇÃO DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Data da aula	Carga horária (h/a)	Temática	Organização dos alunos (A) em duplas (D)
Aula 1 21/11	1	Jogo Quadrado Mágico	D1: A1 e A2 D2: A3 e A4 D3: A5 e A6 D4: A7 e A8 D5: A9 e A10 D6: A11 e A12 D7: A13 e A14 D8: A15 e A16 D9: A17 e A18 D10: A19 e A20 D11: A21 e A22
Aula 1 21/11	1	Jogo Quadrado Mágico e início do Jogo do 15	
Aula 2 22/11	1	Jogo do 15	
Aula 2 22/11	1	Jogo do 15	

FONTE: Elaborado pela autora (2023).

De forma a preservar a identidade dos alunos participantes da pesquisa e também facilitar a leitura, no decorrer do texto quando apresentar algum trecho de fala, irei me referir aos alunos como indica o Quadro 3, ou seja, A1 – para o aluno 1 da dupla 1, A2 – para o aluno 2 da dupla 1, A3 – aluno 3 da dupla 2, e assim por diante.

⁴ A professora auxiliar, assim como a professora regente, é integrante do projeto de extensão ÁGORA - UFPR/Jandaia do Sul, do qual eu também faço parte.

5.1 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO JOGO DO QUADRADO MÁGICO

O primeiro jogo desenvolvido com os alunos foi o jogo do *Quadrado Mágico*. O objetivo do jogo é formar somas de 15 com três números de 1 a 9. As somas precisam aparecer simultaneamente em todas as diagonais, verticais e horizontais do quadrado e os números de 1 a 9 não se repetem, como indica a Figura 5. O interessante do jogo, é que não há apenas uma resolução, mas sim, várias.

Assim sendo, a aula se iniciou com a professora pesquisadora explicando aos alunos qual seria o jogo desenvolvido e também suas regras e objetivos. Isto foi feito com o auxílio de um *Quadrado Mágico* maior (Figura 8), que foi elaborado no projeto de extensão por seus membros.

FIGURA 8 – QUADRADO MÁGICO MAIOR



FONTE: Autora (2023).

Depois desse momento, a turma foi organizada em duplas e foi entregue a eles um tabuleiro do *Quadrado Mágico*, que nós confeccionamos previamente. Também foi entregue aos alunos, uma folha de rascunho (Apêndice 4) e um modelo de relatório, com o objetivo tanto de auxiliá-los nos registros das suas estratégias – e refinamento delas – quanto para constituir os dados para esta investigação.

Nesse primeiro momento os alunos percorreram as primeiras etapas do desenvolvimento de um jogo, indicadas por Grandó (2000) que são, a familiarização com o material, o reconhecimento das regras e o jogo pelo jogo. Foi o momento então, em que os alunos tomaram contato com o tabuleiro do jogo *Quadrado Mágico*, reconheceram suas regras e jogaram pela primeira vez, entendendo, assim, como o jogo funcionava.

Aqui também ocorreu a primeira etapa da investigação matemática, apontada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), que é o momento em que os alunos reconheceram e exploraram a situação problema. Estas etapas não se cumpriram de modo espontâneo. Foi necessário que a professora pesquisadora propusesse questões e instigasse os alunos a explorar o jogo e reconhecessem a situação problema que o permeava. Para tanto, a professora pesquisadora orientou a turma sobre como jogar (explicando sobre regras e procedimentos) e propôs questões. A primeira, e mais abrangente delas, foi: *Como podemos resolver o Quadrado Mágico?* Em seguida, com a finalidade de impulsionar a elaboração de hipóteses, a professora pesquisadora questionou sobre que somas poderiam ser formadas em cada linha, coluna ou diagonal do quadrado. Estas questões, postas aos alunos, tinham como objetivo orientar o processo de investigação matemática para além da busca de resolução pelo método da tentativa e erro.

Após mais ou menos vinte minutos, nenhuma das duplas havia conseguido montar o *Quadrado Mágico*. Então, fizemos uma intervenção verbal com toda a turma, pedindo para que eles nos ajudassem a pensar nas possibilidades de somas que temos com três números, de 1 a 9, que resultam em 15, para que assim, eles refletissem e tentassem construir possíveis estratégias para a resolução do problema. Essa intervenção foi feita de modo coletivo, visto que as duplas se encontravam no mesmo ponto de resolução daquela situação. Diante disso, os alunos compartilharam as possíveis somas e anotamos tudo isso no quadro, para que eles pudessem visualizar as possibilidades que já conheciam até aquele momento e recorrer a essas somas a todo momento para pensar em possíveis estratégias. Essas possibilidades estão apresentadas na Figura 9:

FIGURA 9 - POSSÍVEIS SOMAS DE 15 COM TRÊS DÍGITOS

$3+12=15$	$8+4+3=15$	$8+5+2=15$
$4+11=15$	$9+2+4=15$	$7+2+6=15$
$5+10=15$	$5+3+7=15$	

FONTE: Autora (2023).

É importante notar que nesse processo coletivo, todas as possibilidades de somas de 15, com três algarismos de 1 a 9, foram consideradas e apontadas pela turma. Isso evidencia que, embora eles não tivessem ainda se dado conta de como usar estes resultados, as duplas já haviam, de algum modo, investigado as possíveis somas com tais critérios. Nesse sentido, a intervenção oral e coletiva, feita pela professora pesquisadora foi essencial para que as duplas pudessem iniciar o processo de sistematização de uma estratégia de resolução do *Quadrado Mágico*. Essa intervenção não é algo tão trivial. Se feita muito antes do necessário, a professora poderia cercear o processo investigativo e acabar com o desafio do jogo matemático. Se feita muito após o necessário, os alunos poderiam perder o interesse pela tarefa. Sendo assim, foi preciso que a professora estivesse atenta a todas as duplas e aos referenciais teóricos que a embasavam a todo o momento, de modo a orientar as ações.

Em seguida, os alunos anotaram essas somas nas folhas de rascunho e propusemos mais um tempo para que eles tentassem novamente completar o *Quadrado Mágico*. Nosso objetivo era que eles conseguissem sistematizar hipóteses matemáticas, a partir da intervenção anterior.

Nesse instante, ocorreu, então, o quarto e o quinto momentos do jogo, apontados por Grando (2000) que são as etapas da intervenção verbal feita pela professora pesquisadora e a etapa do registro escrito, momento em que os alunos registraram as possíveis somas e resolveram o *Quadrado Mágico*.

Também é possível relacionarmos as etapas de formulação de hipóteses e testes e reformulações, sintetizadas por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) acerca do processo investigativo. Isso porque a partir do processo ocorrido na Figura 9, os alunos começam a observar e investigar matematicamente a situação e tentam buscar respostas para o problema. Na Figura 10, podemos perceber esse processo,

em que uma aluna formula uma hipótese e a testa. Nesse caso, a hipótese seria colocar o número cinco no centro do *Quadrado Mágico* para assim conseguir resolvê-lo.

FIGURA 10 – ALUNA TESTANDO A HIPÓTESE FORMULADA



FONTE: Autora (2023).

Essa aluna, chegou a essa hipótese, a partir da sistematização das possíveis somas (Figura 9) que fizemos, para isso, ela verificou qual número mais se repetia nas somas e o colocou no centro do quadrado. A Figura 11, nos mostra a escrita da aluna a esse respeito:

FIGURA 11 – ESTRATÉGIA FORMULADA PELA ALUNA PARA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA

De início tentei organizar de forma aleatória depois de algumas tentativas vi que não conseguiria dessa forma. Então eu passei todas as somas no quadro que abriu um pouco. Copiei e contei qual número se repetiu mais (lógico no centro ficou). Só consegui completar pelo janelo que eles abriram na minha cabeça.

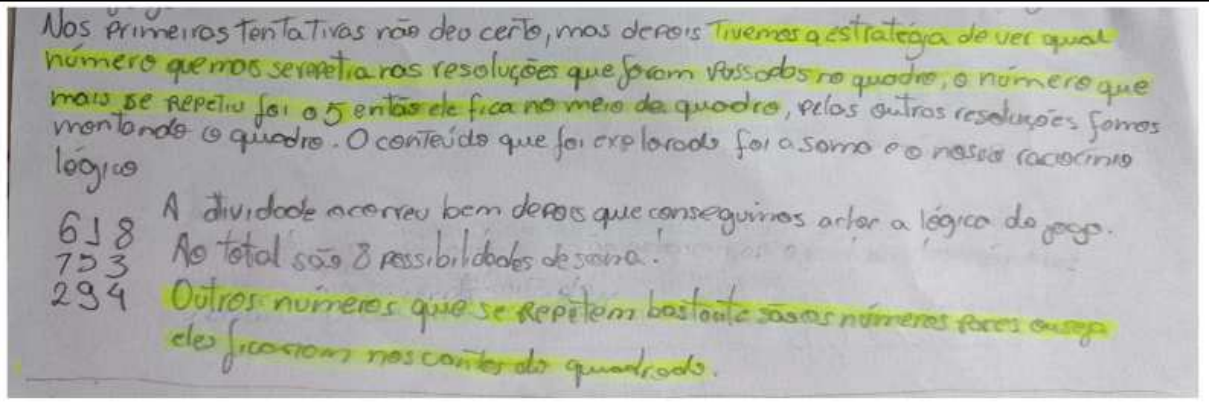
FONTE: Autora (2023).

Foi possível perceber que, após sintetizarmos as possíveis somas de 15 – como mostra a Figura 9 – os alunos se atentaram para o fato de que precisariam formular uma estratégia matemática para resolver a situação e que para isso precisariam se atentar àquelas possíveis somas de 15. Ou seja, percebendo ou não, eles conseguiram elaborar estratégias a partir dessas somas para completar o

Quadrado Mágico. A estratégia mais evidente foi colocar o número cinco no centro do *Quadrado Mágico*.

Identificamos que alguns alunos também elaboraram a estratégia de colocar os números pares nos cantos por eles se repetirem mais vezes nas somas depois do número cinco. Sintetizamos na Figura 12 apenas a estratégia de dois grupos (pois todos os outros grupos de alunos elaboraram as mesmas estratégias) para indicar como eles pensaram:

FIGURA 12 – ESTRATÉGIAS FORMULADAS PELOS GRUPOS



Nos primeiros tentativas não deu certo, mas depois tivemos a estratégia de ver qual número que mais se repetia nas resoluções que foram passadas no quadro, o número que mais se repetiu foi o 5 então ele fica no meio do quadro, pelas outras resoluções fomos montando o quadro. O conteúdo que foi explorado foi a soma e o nosso raciocínio lógico.

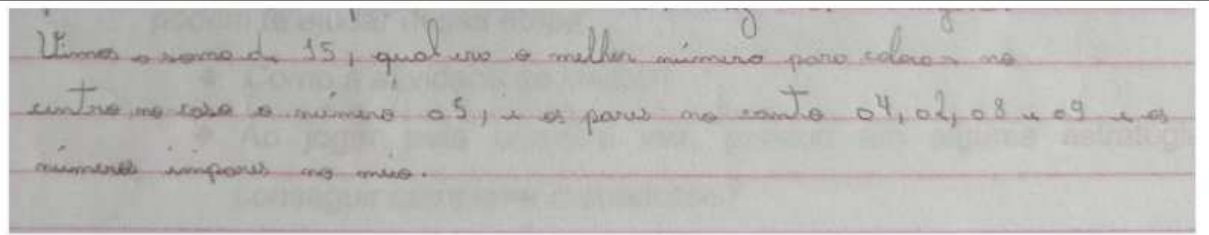
618
753
294

A divisão ocorreu bem depois que conseguimos achar a lógica do jogo. No total são 8 possibilidades de soma.

Outros números que se repetem bastante são os números pares ou seja eles ficam nos cantos do quadrado.

[...] tivemos a estratégia de ver qual número que mais se repetia nas resoluções que foram passadas no quadro, o número que mais se repetiu foi o 5 então ele fica no meio do quadrado [...].

Outros números que se repetem bastante são os números pares ou seja eles ficam nos cantos do quadrado.



Uma soma de 15, qual era o melhor número para colocar no centro no caso o número 05, e os pares no canto 04, 02, 08 e 06 e os números ímpares no meio.

Vimos a soma de 15, qual era o melhor número para colocar no centro no caso o número 05, e os pares no canto 04, 02, 08 e o 06 e os números ímpares no meio.

FONTE: Elaborado pela autora (2023).

Por meio das nossas intervenções, os alunos conseguiram investigar matematicamente o problema proposto para tentar resolvê-lo. Podemos notar a partir da Figura 11, que uma das intervenções que mais auxiliou os alunos na construção de estratégias foi sintetizarmos as possíveis somas e analisarmos a quantidade de vezes que cada número se repetia nas somas - representado na Figura 13. Isto porque, na escrita que os alunos fizeram (Figura 12) podemos perceber que eles citam que viram as somas de 15 e também a quantidade de vezes

que os números se repetiam. Relacionar a quantidade de repetições com a posição de cada número no *Quadrado Mágico* é condição importante para analisar e determinar soluções.

Na segunda aula, visto que a maioria das duplas já havia resolvido o *Quadrado Mágico* até o fim da aula anterior, decidimos então fazer uma outra intervenção verbal coletiva para auxiliar àqueles que ainda não haviam conseguido jogar e resolver a situação. Nessa intervenção pedimos que os alunos analisassem as somas que havíamos sintetizado na aula anterior (Figura 9). Para tanto, questionamos a turma: *vocês conseguem analisar quantas vezes cada número se repete nestas somas que indicaram?* Nosso objetivo com esta pergunta era que os alunos analisassem e, com nossa orientação, percebessem que os números se repetem nas somas e que este padrão de repetição nos indica como posicioná-los no *Quadrado Mágico*, de acordo com o número de vezes em que se repete.

A partir da pergunta feita, os alunos analisaram a situação e sistematizamos suas falas no quadro de giz, de modo a explorar a situação coletivamente. A Figura 13 mostra essa sistematização.

FIGURA 13 – QUANTIDADE DE VEZES QUE OS NÚMEROS SE REPETEM EM CADA SOMA

$3+2+4=15$	1 -> 2 vezes	5 -> 4 vezes
$0+3+7=15$	2 -> 3 vezes	6 -> 3 vezes
$8+6+2=15$	3 -> 2 vezes	7 -> 2 vezes
$7+2+6=15$	4 -> 3 vezes	8 -> 3 vezes
		9 -> 2 vezes

FONTE: Autora (2023).

A partir dessas informações, fizemos alguns questionamentos aos alunos para auxiliá-los nesse processo de elaboração de estratégias, como apresenta o trecho a seguir:

Professora pesquisadora: O que vocês acham que isso quer dizer pra gente? O que a gente pode interpretar disso?

A1⁵: A gente pode ver qual número apareceu mais pra colocar no centro.

Professora pesquisadora: Isso! E qual número foi?

⁵ Aluno 1, como está representado no Quadro 3.

A1: O 5, que apareceu quatro vezes.

Diante disso, reforcei a fala de A1, e expliquei à toda turma, mencionando no *Quadrado Mágico* maior que havia levado, que o número que estava no centro do quadrado aparece em quatro somas, em uma horizontal (2° linha), uma vertical (2° coluna) e nas duas diagonais, assim o número 5 é o único que aparece em quatro somas, logo, podemos concluir que ele é o número que deve ficar no centro do quadrado; não havendo outra possibilidade para esta posição.

Podemos analisar aqui também, com base na fala de A1, o desenvolvimento de outras etapas do jogo e da investigação matemática. Referente ao jogo, identificamos a etapa de intervenção escrita, sintetizada por Grandó (2000), momento em que os alunos resolveram problemas; neste caso, proposto pela professora pesquisadora, no momento em que questionou sobre o que eles poderiam interpretar a partir das informações que havíamos sintetizado na Figura 13.

Sobre a investigação matemática, é possível vislumbrarmos a etapa de justificação e avaliação, que foi o momento em que A1 justificou o que pensou, esse momento de socialização das idéias com a professora pesquisadora e os outros grupos, permite que A1, sem perceber, transforme sua conjectura em uma conclusão. Nessa perspectiva, continuamos o processo de questionar a turma sobre a relação que poderíamos estabelecer entre o fato de os números serem par ou ímpar e suas posições no *Quadrado Mágico*. Para tanto, procuramos não explicitar essa relação, mas questionar as duplas sobre características das somas indicadas no quadro, para que eles mesmos pudessem analisar e concluir sobre as relações numéricas estabelecidas. De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) os questionamentos realizados pelo professor naturalmente, faz com que os alunos consigam justificar suas estratégias e analisar seu raciocínio. Desta forma, algumas questões que induziram os alunos a isso estão indicadas no diálogo a seguir:

Professora pesquisadora: E o restante, quais são os outros números que aparecem mais vezes, além do 5?

A1: O 6, o 8, o 2 e o 4 que aparecem três vezes

Professora pesquisadora: E esses são números o quê?

A3: Pares

Professora pesquisadora: E aí onde será que a gente pode colocar esses números?

A4: Cantos

A1: A gente pode ver quais contas tem com eles o 5, pra colocar nas diagonais.

Professora pesquisadora: Nas diagonais, também! E se a gente olhar aqui os números no canto, eles participam de quantas somas?

A5: Três

Professora pesquisadora: Isso, três somas! E são os números pares aqui que participam de três somas. Então, uma estratégia também seria colocar os números pares nos cantos do quadrado.

E aí o restante, que são o 1, o 3, o 7 e o 9 aparecem duas vezes, certo?

A1: Certo.

Professora pesquisadora: E esses são números...que números são esses?

A1 e A3: Ímpares.

Durante essa discussão, os alunos puderam explorar a situação problemática a partir das hipóteses e observações realizadas por todos como um único grupo. Após essa conversa, os alunos conseguiram definir a estratégia do jogo

A partir desta discussão e sistematização nosso objetivo era que os alunos conseguissem jogar com competência aquele jogo de estratégia. Diante disso solicitamos que as duplas jogassem novamente; agora com base nas estratégias, e tentassem resolver o problema. Aqui, é possível identificar o desenvolvimento da última etapa do jogo, intitulada por Grandó (2000) como jogar com competência. É quando o aluno volta para o jogo após todas as estratégias construídas nas etapas anteriores, para assim, vencer o jogo e resolver o problema.

Em seguida, como praticamente todas as duplas haviam resolvido o *Quadrado Mágico*, propusemos que os alunos compartilhassem suas resoluções com a turma. Este momento foi planejado para que pudéssemos compartilhar possíveis diferentes caminhos e formas de pensar entre os alunos, a fim de evidenciar que muitas eram as possibilidades para aquela situação proposta. Pedimos para que um aluno de cada vez, compartilhasse com a turma a sua resolução no *Quadrado Mágico maior* que havíamos levado e, a partir disso a professora pesquisadora anotou essas resoluções no quadro. Escrevemos no quadro apenas as resoluções diferentes uma da outra. Tivemos ao todo 5 resoluções diferentes, das quais, apresento os registros das duplas na Figura a seguir:

FIGURA 14 – DIFERENTES RESOLUÇÕES DO QUADRADO MÁGICO DAS DUPLAS

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	1	8
7	5	3
2	9	4

4	9	2
3	5	7
8	1	6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

2	7	6
9	5	1
4	3	8

FONTE: Elaborado pela autora (2023).

Diante da sistematização descrita, discutimos com a turma que existem várias formas de resolver o *Quadrado Mágico*, no entanto, todas elas partem das hipóteses assumidas pela turma, nas quais evidenciaram que a posição dos números pares e ímpares – incluindo o número 5 – no *Quadrado Mágico*, dependem da quantidade de vezes nas quais estes números se repetem nas somas possíveis de 15, com 3 algarismos, de 1 a 9. Um trecho desta discussão está transcrito a seguir:

Professora pesquisadora: Aqui, o que a gente pode observar em comum nessas resoluções?

A1: Todos no meio são 5.

Professora pesquisadora: Todos no meio são 5. E por quê?

A1: Porque o 5 ele precisa fazer quatro contas, ele precisa completar quatro contas.

Professora pesquisadora: Exatamente! E tem mais alguma coisa que tá em comum no quadrado?

A4: Sim, a sequência ali tá igual mas os números estão invertidos (O aluno A4 tentou explicar que a sequência dos números 4, 9 e 2 estava igual em algumas resoluções mas apenas localizados em lugares diferentes no *Quadrado Mágico*. Na Figura 14, por exemplo, a sequência 4, 9 e 2

aparece na vertical na primeira resolução e na terceira resolução, essa mesma sequência aparece na horizontal).

Professora pesquisadora: Certo! E tem mais alguma outra coisa? Será que não tem mais nada em comum?

Os alunos estavam com dificuldades para identificar as coisas em comum, isso também se deve ao fato de que alguns alunos não estavam prestando atenção, mesmo que chamasse a atenção deles em alguns momentos. Então, tentamos fazer outras perguntas para que eles observassem outras coisas.

Professora pesquisadora: Se a gente olhar nos cantos, tem alguma coisa em comum nos cantos de todos esses que estão aqui no quadro?

Vários alunos simultaneamente: Todos os números são pares.

Professora pesquisadora: E por quê? O que a gente viu ali, na quantidade de vezes que eles aparecem?

Aluno não identificado: Eles aparecem quatro vezes.

Professora pesquisadora: Isso mesmo, então por isso que em todos os quadrados que a gente fez, eles (números pares) aparecem nos cantos.

Nesse momento estava um pouco difícil lidar com os alunos, a conversa estava alta, indicando a perda de interesse por aquela situação. Isso pode se dever ao fato de que todos já haviam jogado e compreendido a situação de estudo. Esta é uma observação relevante quando trabalhamos com um jogo matemático, em especial, considerando que o fator da ludicidade também é relevante. Diante da conclusão da tarefa, sua sistematização e eventual perda de interesse da turma por este jogo, optamos por propor, a partir de então, o *Jogo do 15* – uma nova situação. Esta opção se deu, também, porque julgamos que os objetivos didáticos quanto ao desenvolvimento do jogo do *Quadrado Mágico* já haviam sido atingidos.

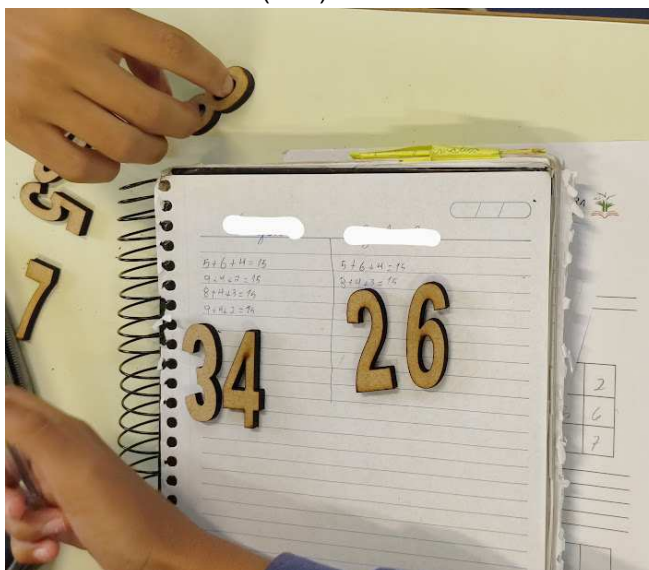
5.2 DESCRIÇÃO E ANÁLISE DO JOGO DO 15

O segundo jogo proposto, o *Jogo do 15*, embora apresente características diferentes do jogo do *Quadrado Mágico* no que diz respeito às suas regras e quantidade de jogadores, pode ser jogado dispondo de estratégias muito semelhantes aos do primeiro jogo proposto. Este foi, inclusive, o motivo de maior preponderância para a escolha de desenvolvimento deste jogo com esta turma. Um dos objetivos, delineados anteriormente ao desenvolvimento dos jogos, era que a turma pudesse adaptar, criar e/ou recriar o jogo, com base na experiência do jogo anterior. Ambos são reconhecidos como jogos de estratégia. As estratégias no segundo jogo, entretanto, poderiam ser repensadas, adaptadas, previstas.

O *Jogo do 15* é composto por peças de 1 a 9 e o objetivo também é formar somas de 15 com três algarismos. A diferença é que no *Jogo do 15*, precisamos de no mínimo dois jogadores. Aqui, eles serão adversários um do outro.

Para começar a jogar, esses dois oponentes podem jogar “par ou ímpar” para decidir quem começa. A partir disso, os jogadores vão alternadamente escolhendo um dos nove números para eles e tentando formar somas de 15 com os números escolhidos. É importante ressaltar aqui, que se um jogador já conseguiu formar uma soma de 15, o jogo não termina. Eles podem continuar escolhendo os números que restaram na mesa e tentar reordenar esses números com o que eles já têm, para tentar formar novas somas de 15. A Figura 15 apresenta uma dupla de alunos jogando:

FIGURA 15 – DUPLA (D10) JOGANDO O JOGO DO 15



FONTE: Autora (2023).

Apresentado o jogo, começamos a desenvolvê-lo já no fim da segunda aula, pois os alunos já haviam concluído o *Quadrado Mágico*. Mantivemos as mesmas duplas e entregamos as peças para cada dupla e explicamos os objetivos e as regras para os alunos.

No primeiro momento, os alunos jogaram sem pensar muito nas jogadas do seu oponente. Aqui, se desenvolveram as primeiras etapas do jogo, citadas por Grando (2000), que são as etapas da familiarização com o material, o reconhecimento das regras e o jogo pelo jogo. Deixamos esses momentos acontecerem para que os alunos realmente entendessem como jogar o jogo em questão.

Verifica-se aqui também, a primeira etapa da investigação matemática proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), isto é, exploração e formulação de questões. Momento em que os alunos reconheceram a situação problema, exploraram e formularam questões acerca disso. Nesse ponto, as questões formuladas se davam em torno de “*que número eu tenho que escolher para formar a soma de 15?*”.

Na terceira aula demos continuidade a esse processo de investigação. Porém, antes de começarmos o jogo, explicamos novamente como era para ser feito o relatório da atividade, pois percebemos que muitos alunos estavam com dúvidas. Então lemos todo o relatório com eles e fomos explicando como eles podiam responder às perguntas. Esse processo era importante porque a sistematização das ideias no texto poderia auxiliá-los a pensar nos procedimentos matemáticos e não matemáticos no jogo. Além disso, este é um dos elementos utilizados na coleta de dados da nossa pesquisa. Após essa explicação, dividimos a turma nas mesmas duplas formadas nas aulas anteriores e solicitamos que as duplas escrevessem o que já haviam feito até aquele momento, em relação ao jogo, no relatório, para que todo o processo percorrido por eles não se perdesse, caso eles se esquecessem do que haviam feito.

Neste tempo, fomos auxiliando as duplas que ainda tinham dúvidas sobre como fazer e sempre pedíamos para que os alunos anotassem suas jogadas e estratégias pensadas. Aqui desenvolveu-se então, a quinta etapa do jogo, proposta

por Grandó (2000), que é a etapa do registro escrito, que é justamente quando os alunos registram as suas jogadas e os procedimentos percorridos ao longo do jogo.

Também foi possível observarmos a partir dessas ações, o desenvolvimento da segunda etapa da investigação matemática, delineada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), que é a etapa de levantamento de hipóteses. Nesta também ocorre o processo de organização de dados, que era basicamente o que os alunos estavam fazendo nesse momento em que anotavam suas jogadas. Ao anotarem isso, também já percorriam o processo de formulação de hipóteses.

Logo após esse tempo de explicação sobre o relatório, retomamos o *Jogo do 15*. Entregamos então as peças do jogo às duplas, explicamos novamente as regras do jogo à turma toda e deixamos os alunos jogando por mais um tempo.

Percebendo que os alunos já tinham entendido como funcionava o jogo, partimos então para alguns questionamentos, para que eles começassem a pensar e refletir um pouco sobre suas jogadas:

Professora pesquisadora: Vi que vocês já estão jogando há algum tempo, e eu queria perguntar se vocês já pensaram em alguma estratégia pra vencer o oponente.

A1: Começar com 5 né, porque dá mais chance de fazer conta.

A1: Pegar a peça que o oponente precisa.

A8: Geralmente os números pares dá mais (mais somas).

Foi possível perceber que os alunos já elaboraram, rapidamente, estratégias para vencer seu oponente. Possivelmente, e como prevíamos, por conta do jogo desenvolvido anteriormente. Essas perguntas feitas aos alunos, exprimem a quarta etapa do jogo, designado por Grandó (2000) como intervenção pedagógica verbal. É o momento em que a professora pesquisadora faz questionamentos aos alunos para eles analisarem suas jogadas. Também se desenvolve novamente o momento de formulação de hipóteses, proposto por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006), que é o momento da investigação em que os alunos formulam hipóteses para vencer o jogo.

Em seguida, para que os alunos analisassem o jogo da perspectiva matemática, propusemos um outro problema/questionamento à eles, como mostra o excerto a seguir:

Professora pesquisadora: Vocês conseguem pensar em alguma nova regra para o jogo, para a gente ter mais possibilidades?

A1: Por exemplo, aqui tem três peças pra fazer né? Pode ser com quatro ou só com duas. Mas com duas são menos possibilidades.

Professora auxiliar: Menos possibilidades de somar 15, você fala?

A1: É

Professora auxiliar: Será que é menos?

A1: É

Professora auxiliar: E com quatro (números) são mais ou menos possibilidades de dar 15?

A1: Com quatro é mais, eu acho.

Nesse momento, A1 e A8 começaram a se questionar e argumentar a respeito das possibilidades de somas com dois números e com quatro números:

A1: Sabe porque com coiso (quatro) têm mais possibilidades? Porque eu acho que pra dar 15.. ó pra dar 15 vai ser 6...

A8: Mas miga, uma conta que você fizer de quatro vai ser uma conta que fizer de dois, vai dar na mesma.

Professora auxiliar: É olha...tem que pegar quatro algarismos pra dar 15.

A8: É mano, olha os tantinhos de número que vão ficar aí.

A1: Não, mas eu tô falando de mais possibilidades de dar mais conta, por exemplo, 1 com 5 com 6.

A8: Mas então, se você pegar quatro números vai dar menos conta porque sobra menos números pra você repetir.

Diante dessas argumentações, percebemos que os alunos estavam curiosos para responder a questão: *fazer somas de 15 com quatro números, de 1 a 9, tem mais possibilidades do que as somas de 15 com dois números, de 1 a 9?*

Então pedimos para a turma colocar essas novas regras em prática. Portanto, pedimos para primeiro eles jogarem um tempo com quatro peças, ou seja, formar somas de 15 com quatro números e depois, jogar fazendo somas de 15 com apenas dois números. Diante de todo esse diálogo entre os alunos e as professoras podemos perceber o desenvolvimento da etapa de intervenção escrita, sintetizada por Grandó (2000), que é a etapa em que os alunos vão resolver problemas propostos por eles mesmos ou pelo professor.

Ocorre também a etapa da investigação matemática, denominada por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) como testes e reformulações, momento então que os alunos vão testar as hipóteses levantadas por eles, como mostra o diálogo anterior.

Ao jogarem com essas novas regras propostas por eles, percebemos que alguns alunos estavam já anotando primeiramente todas as possibilidades de somas de 15 com quatro e com dois números, de 1 a 9. Como essa aula já estava no final, deixamos os alunos jogando para explorarmos isso na aula seguinte.

Na quarta e última aula, começamos então a explorar essas possibilidades de somas. Retomamos, portanto, as regras que A1 e o A8 haviam sugerido e pedi para que os alunos me ajudassem a pensar nas possibilidades de somas que tínhamos. Primeiro, vimos as possíveis somas de 15 com quatro números e posteriormente vimos as possibilidades com dois números. Tudo isso foi registrado no quadro (Figura 16 e Figura 17) . Logo ao anotarmos as possibilidades os alunos perceberam que com quatro números teríamos mais possibilidades de somas que resultem em 15.

Além disso, ao analisarem as possíveis somas com dois números, os alunos começaram a perceber que seria possível decompor esses algarismos em somas com três números, por exemplo ao pensarem na soma de 7 com o número 8 resultando em 15, seria possível decompor o número 7 em outros dois números: 5 e 2, assim a somatória de 5 mais 2 mais 8 resultaria também em 15. Na Figura 17 trazemos algumas possibilidades de somas com dois dígitos e suas decomposições a partir do compartilhamento de sugestões das duplas com a professora no quadro.

FIGURA 16 - POSSIBILIDADES DE SOMAS COM QUATRO DÍGITOS

4 Dígitos

$$9+3+2+1=15$$

$$9+8+2+1=15$$

$$7+4+3+1=15$$

$$6+5+3+1=15$$

$$6+2+9+3=15$$

$$7+2+1+5=15$$

FONTE: Autora (2023).

FIGURA 17 - POSSIBILIDADES DE SOMAS COM DOIS DÍGITOS E SUAS DECOMPOSIÇÕES

2 Dígitos

→ $9+6=15$
 $5+4+6=15$
 $9+4+2=15$
 $9+5+1=15$
 $8+1+6=15$

→ $8+7=15$
 $5+3+7=15$
 $8+5+2=15$
 $8+3+4=15$
 $6+2+7=15$

FONTE: Autora (2023).

Em vista disso, questionamos se os alunos conseguiam observar alguma relação entre os dois jogos estudados, o *Quadrado Mágico* e o *Jogo do 15*. Todos os alunos que responderam disseram que perceberam que em ambos os jogos, eles utilizaram as mesmas contas e os mesmos resultados, com isso, eles tentaram expressar que tanto no *Quadrado Mágico* como no *Jogo do 15*, eles utilizaram as possíveis somas de 15 com três dígitos, que está sintetizado na Figura 9, para jogar os jogos propostos. E como ambos os jogos tinham o objetivo de formar somas de 15, é nesse sentido que se dá a última fala deles, que eles utilizaram os “mesmos resultados”.

Para concluir, pedimos para os alunos jogarem novamente agora com as estratégias elaboradas e assim, desenvolvemos a última etapa do jogo, que é o jogar com competência, descrita por Grandó (2000). É o momento em que os alunos jogam mais focados em colocar as estratégias construídas em prática e vencer o jogo.

6 JOGOS DE ESTRATÉGIA E INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS: QUE RELAÇÕES PODEMOS ESTABELEECER A PARTIR DAS EXPERIÊNCIAS VIVIDAS?

Com base em nosso problema de pesquisa: *Que elementos associados a um jogo matemático de estratégia, no Ensino Fundamental, se associam ao desenvolvimento de investigações matemáticas?*, buscamos neste capítulo estabelecer relações entre os jogos de estratégia e a investigação matemática, a partir da experiência vivida e relatada aqui.

Na medida em que os alunos desenvolveram a etapa do jogo pelo jogo e reconhecimento de regras, com auxílio das perguntas feitas pela professora pesquisadora, um ambiente de aprendizagem pautado num cenário para investigação pôde ser estabelecido. Nesta pesquisa, isso foi caracterizado pelo convite feito pela professora aos alunos, na forma de um convite para jogar um jogo didático - nos dois jogos propostos - e nas perguntas feitas por ela, e pelos alunos, nas quais o principal elemento que norteia um processo investigativo, como indica Skovsmose (2000) aparece: as perguntas do tipo "e o que acontece se?".

Percebemos que, na medida em que se sentiram instigados pelo desafio do jogo, a turma se engajou para estruturar suas tentativas em linguagem matemática. Isso foi impulsionado pela professora pesquisadora, que ofereceu caminhos para que essa sistematização ocorresse de forma escrita, por meio do relatório e oralmente, quando discutiam entre si.. Essas são etapas de um processo de investigação matemática. É importante salientar que o trabalho de orientação docente foi fundamental, pois em determinados momentos, ao determinar uma solução para situações, os alunos não se questionavam ou refletiam sobre justificativas para aquelas respostas. Essas reflexões, ocasionados pelos testes e justificativas, ocorreram por intermédio da orientação docente.

Após esses caminhos percorridos, ao passo em que os alunos já haviam tomado contato e experimentado o primeiro jogo proposto, a professora pesquisadora propôs uma reflexão aos alunos quando questionou sobre as possíveis somas de 15 com três dígitos, tentando assim, desenvolver um ambiente de investigação. Estes foram momentos de intervenção pedagógica verbal e registro do jogo. Essas etapas levaram os alunos a permear por etapas de uma investigação

matemática, que foram os momentos em que eles elaboraram e testaram hipóteses para resolver o problema proposto.

Ao mesmo tempo em que os alunos passaram pela etapa da intervenção escrita, quando resolveram outros problemas referentes à situação proposta, eles perpassaram por etapas do processo de investigação matemática; no caso, a etapa de testes e reformulações, porque esse momento de intervenção escrita permitiu com que eles refletissem acerca da situação estudada e isso propiciou com que eles pensassem em novas hipóteses ou melhorassem uma hipótese já construída anteriormente.

Esse momento de intervenção escrita também permitiu nesta experiência, o desenvolvimento da etapa de justificação e avaliação do processo investigativo, pois a partir dessa intervenção os alunos conseguiram justificar algumas coisas que eles haviam pensado ou proposto.

Podemos perceber então, após a experiência desenvolvida, que as etapas de um jogo de estratégia, se relacionaram com algumas etapas da investigação matemática. Apresentamos no Quadro 4, algumas das relações que puderam ser estabelecidas no decorrer desta investigação.

QUADRO 4 – RELAÇÃO ENTRE AS ETAPAS DO JOGO E DA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Etapas do Jogo	Etapas da Investigação Matemática
- Familiarização com o material do jogo - Reconhecimento das regras - Jogo pelo jogo	Exploração e formulação de questões Conjecturas
- Intervenção pedagógica verbal - Registro do jogo	Conjecturas Testes e reformulações Justificação e avaliação
Intervenção escrita	Justificação e avaliação

FONTE: Elaborado pela autora (2023).

Estas relações não são delimitadas e auto excludentes. Na etapa de desenvolvimento do jogo pelo jogo, por exemplo, alguns alunos testaram hipóteses. No entanto esta ação, normalmente, não se deu de modo tão consciente quanto nas etapas posteriores. Sendo assim, no Quadro 4, estabelecemos relações que foram mais evidentes e repetidas pelos grupos de alunos no desenvolvimento das suas ações. Como as etapas, tanto do desenvolvimento de um jogo matemático quanto de uma investigação matemática, não são lineares, mas caracterizam-se por um

movimento de ir e vir de acordo com as demandas que são estabelecidas pelo jogo, pelos alunos, pela professora ou em acordo entre eles (professor e alunos), estas relações também não são lineares; ao mesmo tempo, a síntese é feita no sentido de permitir um olhar sobre as atividades aqui desenvolvidas, de modo a relacioná-las aos pressupostos teóricos que as fundamentam.

Portanto, finalizamos essa pesquisa com a visão de que as etapas dos jogos de estratégias se relacionam com as etapas da investigação matemática, porém, algo que fica como foco de investigações futuras, é analisar se as mesmas relações que identificamos ao desenvolver o jogo do *Quadrado Mágico* e o *Jogo do 15*, aparecem no desenvolvimento de outros jogos de estratégia que temos à disposição, como por exemplo, o Jogo da Corrente (Figura 1), citado aqui neste trabalho. Outra questão que surge a partir dessa pesquisa é: *será que o desenvolvimento de jogos de treinamento também permite o desenvolvimento de investigações matemáticas?*. De acordo com o levantamento bibliográfico feito nos anais do ENEM, vimos muitos trabalhos com jogos de treinamento, contudo, nenhum relacionava isso à investigação matemática. Logo, também vejo necessidade de estudos futuros a esse respeito.

REFERÊNCIAS

- BORBA, M. de C.; ARAÚJO, J. de L. Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática: notas introdutórias. In: BORBA, M. de C. et al. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2012. p. 23-29.
- BORIN, J. **Jogos e resoluções de problemas**: uma estratégia para as aulas de Matemática. Série CAEM, vol. 6. São Paulo: CAEM/USP, 1995.
- CAMPOS, L. M. L.; BORTOLOTO, T. M.; FELÍCIO, A. K. C. **A produção de jogos didáticos para o ensino de Ciências e Biologia**: uma proposta para favorecer a aprendizagem. Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 2002. Disponível em: <<http://www.unesp.br/prograd/PDFNE2002/aproducaodejogos.pdf>>. Acesso em: 15 jan. 2023.
- COQUEIRO, V. (28 jan. 2023). **Jogo da Corrente**. [PowerPoint]. Não publicado.
- GRANDO, R. C. **O Conhecimento Matemático e o uso de Jogos na sala de aula**. Campinas, 2000.
- GRANDO, R. C. **O Jogo e a Matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.
- JANUARIO, G.; TINTI, D. da S. (Inter)ação em sala de aula: trabalhando a Matemática por meio de jogos. In: SEMINÁRIO DE HISTÓRIA E INVESTIGAÇÕES DE/EM AULAS DE MATEMÁTICA, 2, 2008, Campinas. **Anais**: II SHIAM. Campinas: GdS/FE-Unicamp, 2008. v. único. p. 1-12.
- OLIVEIRA, R. R. L. **Jogos de Estratégia**: Contribuições para a Interpretação e Resolução de Problemas Matemáticos. Trabalho de Graduação (Pós graduação Lato Sensu em Docência na Educação Básica). Belo Horizonte, 2012.
- PONTE, J. P. da; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- PORCHER, G.; BENCK, N.; ROSA, V. **Plano de aula**: Matemática no cotidiano. Universidade Federal do Rio Grande, Santo Antônio da Patrulha, [s.d.]. Disponível em: <https://leace.furg.br/images/plano_de_aula_-_Matemtica_no_cotidiano.pdf>. Acesso em: 15 jan. 2023.
- RODRIGUES, T. D. de F. F.; OLIVEIRA, G. S. de.; SANTOS, J. A. dos. As Pesquisas Qualitativas e Quantitativas na Educação. **Revista Prisma**, Rio de Janeiro, v. 2, n. 1, p. 154-174, 2021.
- SKOVSMOSE, O. Cenários para investigação. **Bolema**, 2000.
- SMOLE, K. S.; DINIZ, M. I.; MILANI, E. **Cadernos do Mathema**: Jogos de matemática. Porto Alegre: Artmed, 2007.

**APÊNDICE 1 – LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO FEITO NOS ANAIS DO ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA (ENEM)**

TÍTULO	EDIÇÃO/ANO	AUTORES	INSTITUIÇÃO	ANO ESCOLAR	PALAVRAS CHAVE
USO DE MATERIAL DIDÁTICO E JOGOS NA APRENDIZAGEM DO TEOREMA DE PITÁGORAS: UMA INVESTIGAÇÃO A PARTIR DA ANÁLISE DE ERROS	XIII ENEM/2019	Lucas Benjamin Barbosa Souza; Marlon Wilson Batista Andrade	Universidade do Estado do Pará	9º ano	Teorema de Pitágoras; Materiais Didáticos; Jogos; Análise de Erro
O USO DO JOGO ADIVINHO INDISCRETO COMO RECURSO PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA EM TURMAS DE 9º ANO	XIII ENEM/2019	Sabrine Costa Oliveira	UNESC	9º ano	Jogos; Ensino de Matemática; Adivinho Indiscreto;
O TRABALHO COM OS NÚMEROS INTEIROS POR MEIO DE JOGOS	XIII ENEM/2019	Luzybel Turski Bida; Celia Finck Brandt	UEPG	7º ano	Jogos; números inteiros; matix; círculo zero
JOGOS MATEMÁTICOS: ESTRATÉGIAS MEDIADORAS DE APRENDIZAGEM PARA DISCENTES DO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL POR MEIO DA LUDICIDADE	XIII ENEM/2019	Loise Tarouquela Medeiros; Daisy Lucidi Gomes de Farias; Marcelo Diego Sena de Lima; Peterson da Silva dos Santos	Instituto Federal do Rio de Janeiro	6º ano	Jogos Matemáticos; Lúdico. Formação de Professores
O JOGO TORRE DE HANÓI NO ENSINO DE FUNÇÕES: INVESTIGANDO SUAS POTENCIALIDADES A PARTIR DE UMA ATIVIDADE DE ESTÁGIO	XIII ENEM/2019	Pedro Henrique Bernardes da Silva; Leonardo Donizette de Deus Menezes	Universidade Federal de Uberlândia	9º ano	Educação Básica; Ensino de Funções; Jogo; Torre de Hanói
APRENDENDO SOBRE GRANDEZAS E UNIDADES DE MEDIDAS COM O USO DE JOGOS: EXPERIÊNCIAS DO PROGRAMA RESIDÊNCIA PEDAGÓGICA MATEMÁTICA EM UM 7º ANO	XIII ENEM/2019	Josenaide Apolonia de Oliveira Silva; Claudineia Maria Marcelino da Silva	UPE - Universidade de Pernambuco	7º ano	Ensino Fundamental; Unidades de Medida Padrão; Jogos; Atividades de Ensino.

ALUNOS DO 8º ANO ATRIBUINDO SENTIDO A POLINÔMIOS NA AULA DE MATEMÁTICA	XIII ENEM/2019	Marcos Vinícius dos Santos Amorim; Luciano Feliciano de Lima	Universidade Federal de Goiás	8º ano	Educação Matemática; Abordagem Dialógica e Investigativa; Álgebra; Geometria.
TRABALHANDO ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO COM JOGOS DE BOLINHAS DE GUDE (BOLITAS) NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	XIII ENEM/2019	Edre Almeida Corrêa; Emerson da Silva Ribeiro	Universidade Federal de Rondônia (UNIR)	6º ano	Ensino Fundamental; Operações Básicas da Matemática; Bolinhas de Gude.
ATIVIDADE INVESTIGATIVA: RESOLVENDO UM PROBLEMA ENVOLVENDO SISTEMA DE EQUAÇÕES DO 1.º GRAU	XIII ENEM/2019	Flaviano Gomes do Nascimento; Taiane de Santana Carvalho; Grace Dórea Santos Baqueiro	Universidade do Estado da Bahia – UNEB	8º ano	Ensino de Matemática; Investigação Matemática; Sistema de Equações do 1.º grau; Ensino Fundamental
UMA SINOPSE DE OBRAS SIGNIFICATIVAS EM INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA	XIII ENEM/2019	Paulo Wichnoski; Tânia Stella Bassoi	Universidade Estadual do Oeste do Paraná - UNIOESTE	Não específica	Investigação Matemática; Pesquisa Qualitativa; Obras Significativas.
JOGOS MATEMÁTICOS: recursos pedagógicos para ensinar-aprender as operações fundamentais	XIII ENEM/2019	Diogo Luz Corecha; Janaina Batista dos Prazeres; Kátia Liége Nunes Gonçalves	Universidade Federal do Pará – UFPA	8º ano	Jogos Matemáticos, Conteúdos Matemáticos, Ensinar-Aprender, Recursos Pedagógicos.
A UTILIZAÇÃO DE JOGOS EM UMA ESCOLA DE TEMPO INTEGRAL DO AMAZONAS	XIII ENEM/2019	Thainá de Nazaré Silva de Lima; Lucas Moraes do Nascimento	Secretaria de Estado de Educação do Amazonas; Universidade do Minho	9º ano	Jogos; Ensino e aprendizagem; Escola de tempo integral.
ABORDAGENS INVESTIGATIVAS NAS AULAS DE MATEMÁTICA: UMA REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	XIII ENEM/2019	Fabio Bernardo da Silva	Não específica	Não específica	Investigação Matemática, Geometria Dinâmica, Práticas Investigativas.
A CONTRIBUIÇÃO DO JOGO NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA	XII ENEM/2016	Fernanda Souza dos Santos da Silva; Beatriz do Vale Pereira	Universidade Federal do Recôncavo da Bahia	6º ano	Ensino e aprendizagem de matemática; jogo pedagógico; operações de frações; metodologia de ensino.

ABORDAGEM DIALÓGICA E INVESTIGATIVA: UMA POSSIBILIDADE DE TRABALHO COM POLINÔMIOS	XII ENEM/2016	Marcos Vinícius dos Santos Amorim; Luciano Feliciano de Lima	Universidade Estadual de Goiás	8º ano	Dialogicidade; Abordagem Investigativa; Negociação de significados; Polinômios.
ENSINO DE RAZÕES TRIGONOMÉTRICAS NO LABORATÓRIO DE MATEMÁTICA: UMA EXPERIÊNCIA COM UTILIZAÇÃO DE GEOPLANOS NUMA PERSPECTIVA INVESTIGATIVA	XII ENEM/2016	Sandra Aparecida Fraga da Silva; Lauro Chagas e Sá; Sabrina Costa Oliveira	Instituto Federal do Espírito Santo	9º ano	Razões Trigonométricas; Geoplano; Investigação Matemática; Laboratório de Matemática.
EXPLORANDO O JOGO LABIRINTO DOS DECIMAIS: O RECORTE DE UMA EXPERIÊNCIA	XII ENEM/2016	Anielle Glória Vaz Coelho; Fabiana Fiorezi de Marco	Universidade Federal de Uberlândia	6º ano	Jogo; Número Decimal; Ensino Fundamental; Ensino de Matemática.
O CLÁSSICO... A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA... E O PIBID – IFC	XII ENEM/2016	Patrícia de Souza Fiamoncini; Taise Kock; Marizoli Regueira Schneider; Ruy Piehowiak	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Catarinense – Campus Rio do Sul	8º ano	Investigação Matemática; Fração; Tangram.
INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: ATIVIDADES ENVOLVENDO CONCEPÇÕES ALGÉBRICAS	XII ENEM/2016	Marli Teresinha Quartieri; Ludmila Maccali; Ieda Maria Giongo	Centro Universitário UNIVATES	7º ano e 9º ano	Investigação Matemática; concepções da álgebra; Ensino Fundamental
JOGO MISSÃO MATEMÁTICA: UMA METODOLOGIA DE ENSINO PARA TURMAS DE SEXTO ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	XII ENEM/2016	Vítor Martins do Carmo	Universidade Federal de Uberlândia	6º ano	Jogos; Ensino de Matemática; Alunos
JOGOS MATEMÁTICOS: UMA FERRAMENTA EDUCACIONAL NO ENSINO FUNDAMENTAL	XII ENEM/2016	Ana Chiummo; Emilio Celso de Oliveira	Universidade Paulista	6º ano	Educação Matemática; Ensino e Aprendizagem; Lógica Matemática; Jogos.
O ENSINO APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA POR MEIO DO JOGO BANCO IMOBILIÁRIO EM UM CONTEXTO	XII ENEM/2016	Luan Martins de Oliveira; Edmilson Minoru Torisu	Universidade Federal de Ouro Preto	6º ano e 7º ano	Jogo do Banco imobiliário; Educação Integral; Educação Matemática; Oficinas

DE EDUCAÇÃO INTEGRAL: RELATO DE EXPERIÊNCIA COM TURMAS DE 6º E 7º ANOS					
O JOGO DE DOMINÓ COMO METODOLOGIA PARA A ABORDAGEM DOS CONTEÚDOS DE POTENCIAÇÃO E RADICIAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL	XII ENEM/2016	Rayara Barroca Silva; Marcela Santana Santos; Ariel Wesley Soares; Sheila Mara Silva dos Santos	Instituto Federal do Espírito Santo (Ifes)	8º ano	Jogo de dominó; Radiciação; Potenciação; Pibid.
O USO DO JOGO NIM COMO RECURSO DIDÁTICO À CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE MÚLTIPLOS NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL	XII ENEM/2016	Maria Sônia Leitão Melo Vieira; Alexandre Luís de Souza Barros; Almir Pereira de Moura; André Pereira da Costa; Ronald de Santana da Silva	EDUMATEC – UFPE; Secretaria de Educação de Limoeiro – PE; Secretaria de Educação de Recife - PE	6º ano	Múltiplos e divisores; Jogo do Nim; Jogos na Educação Matemática.
RÉGUA E COMPASSO: O AUXÍLIO DOS JOGOS LÓGICOS NAS CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS	XII ENEM/2016	Leandro Viana da Rosa; Marilaine de Fraga Sant’Ana	UFRGS	9º ano	Jogos lógicos; régua e compasso; geometria.
TEOREMA DE TALES: UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES INVESTIGATIVAS	XII ENEM/2016	Renata Arruda Barros; Karen de Melo Freitas Procópio; Rafael Vassallo Neto	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro	9º ano	Atividade Investigativa; Informática educativa; Teorema de Tales.
UMA DESCRIÇÃO SOBRE APLICAÇÕES DE JOGOS/RECURSOS APLICADOS POR BOLSISTAS DO PIBID EM TURMAS DO ENSINO FUNDAMENTAL	XII ENEM/2016	Thayane Andressa Santos; Fernanda Viana dos Santos; Laurinda Graciele Alves Feitosa	Universidade Federal de Sergipe	7º ano	PIBID. Atividades didáticas. Jogos/recursos.
USO DE JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES NA APRENDIZAGEM DOS ALUNOS DO COLÉGIO ESTADUAL GIRASSOL DE TEMPO INTEGRAL SANTA MARIA	XII ENEM/2016	Gino Carneiro Moreira Filho; Alexandre Oliveira da Silva	Universidade Federal do Tocantins - UFT	9º ano	Jogos Matemáticos; aprendizagem; ensino; educação matemática Introdução
A UTILIZAÇÃO DE JOGOS COMO	XII	Felipe Dos Santos Belon; Cássio	Universidade do	Não	Matemática; Ludicidade;

ESTRATÉGIA DE ENSINO DE MATEMÁTICA	ENEM/2016	Lopes Carneiro; Daniela Batista Santos; Joalisson Bahia Santana; Felipe Henrique Santana Da Silva; Antonia Natanayana Lima Mesquita	Estado da Bahia – Campus II	especifica	Raciocínio lógico; Ensino; Aprendizagem.
ENSINO INVESTIGATIVO E INOVAÇÕES CURRICULARES	XII ENEM/2016	Denise Knorst da Silva; David Antonio da Costa	UFSC – Universidade Federal de Santa Catarina	Não especifica	Ensino investigativo; Inovações Curriculares; Políticas Públicas
JOGOS MATEMÁTICOS: UMA TENDÊNCIA METODOLÓGICA PARA ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA	XII ENEM/2016	Isabelle Alves Trobia; José Trobia	Universidade Estadual de Ponta Grossa	Não especifica	Jogos Matemáticos; Educação Matemática; Ambiente Virtual de Aprendizagem; Lúdico
LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO SOBRE PESQUISAS COM JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA ENTRE OS ANOS DE 2006 A 2016	XII ENEM/2016	Marcelo dos Santos Gomes	PUC – SP	Não especifica	Jogos; jogos educativos; ensino de matemática.
MATERIAIS MANIPULÁVEIS NO ENSINO DA TRIGONOMETRIA: INVESTIGAÇÃO A PARTIR DA RÉGUA TRIGONOMÉTRICA	XII ENEM/2016	Luana Oliveira Moreira de Jesus; Lizandra Monteiro de Souza	Universidade Federal do Recôncavo da Bahia	9º ano	Trigonometria; Material Manipulável; Investigação
A FÓRMULA DE PICK EM UMA EXPERIÊNCIA PEDAGÓGICA COM ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA	XI ENEM/2013	Raquel Gomes de Oliveira	Faculdade de Ciências e Tecnologia-FCT-Unesp	8º ano	Ensino e Aprendizagem de Conceitos Matemáticos; Teorema de Pick; Atividade de Investigação Matemática
CONSTRUINDO CONJECTURAS: UM OLHAR SOBRE O ENSINO COM A INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA	XI ENEM/2013	Vanessa Priscila Gomes; Cristina Giroto; Marisa do Carmo Pacoff da Silva; Lucilaine Goin Abitante	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Santa Rosa	8º ano	Investigação Matemática; Metodologia; Ensino-aprendizagem; Ângulos.
CONSTRUINDO O JOGO PERFIL MATEMÁTICO PARA O ENSINO DE	XI ENEM/2013	Raquel Nogueira Silva; Mariana Gigante Barandier dos Santos;	UFF – INFES – PIBID	7º ano	Educação Matemática; Ensino da Matemática; Operações com

MATEMÁTICA		Profª. Msc. Leiliane Coutinho da Silva Ramos			Números Inteiros; PIBID
EXPLORANDO O CONCEITO DE QUADRILÁTEROS POR MEIO DE UMA TAREFA INVESTIGATIVA	XI ENEM/2013	Vanildo dos Santos Silva; Wagner Ribeiro Aguiar; Ana Luiza Sampaio Garcia	Colégio Estadual Monteiro Lobato; Universidade Federal da Bahia	7º ano	Ensino de Geometria; Quadriláteros; Tarefas
INSERSÃO DE JOGOS NO PROCESSO DE ENSINO-APRENDIZAGEM DE GEOMETRIA	XI ENEM/2013	Maiane Bernardi; André Luiz Moterle; Alessanda Nitschke; Clisman Bach; Darlan Jessé Burnier; Mariana Zolet Rigo	Instituto Federal Catarinense – Câmpus Concórdia	8º ano	Jogos; Geometria; Interação
INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA: UMA METODOLOGIA PARA ENSINAR O TEOREMA DE PITÁGORAS	XI ENEM/2013	Juliane Marques; Gilvan Soares de Oliveira; Roberto Preussler	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Santa Rosa	9º ano	Investigação Matemática; Aprendizagem de Matemática; Teorema de Pitágoras.
INVESTIGANDO O NÚMERO DE DIAGONAIS DE UM POLÍGONO UTILIZANDO O GEOGEBRA: UM RELATO DE TAREFA	XI ENEM/2013	Cecília Caramés; Jamille Vilas Boas	Universidade Federal da Bahia; Instituto Federal da Bahia	9º ano	Investigação; Geogebra; Número de diagonais
JOGANDO BARALHO E DESCOBRINDO O DISCRIMINANTE	XI ENEM/2013	Claudimara da Silva Pfiffer; Iasmini Voltorini; Tânia Baier	Universidade Regional de Blumenau; Universidade Regional de Blumenau- bolsista PIBIB/CAPES	9º ano	Discriminante; Jogo; Ensino Fundamental.
PIBID OPORTUNIDADE ÚNICA PARA A FORMAÇÃO DO FUTURO EDUCADOR: JOGOS EM SALA DE AULA	XI ENEM/2013	Cristine Coelho Sussman; Débora de Jesus Bezerra; Maria de Fátima Rufino Froeschlin; Patrícia Batalha Campos Machado; Silvana Pucetti; Tainã Nogueira Chaves	Universidade Metodista de São Paulo	Não especifica	PIBID; ensino de matemática; jogos matemáticos.
JOGOS NO ENSINO DA MATEMÁTICA	XI	Rafaele de Souza; Laysa Adriely	Universidade Estadual	7º e 8º ano	Jogos Matemáticos; Formação

	ENEM/2013	Ferreira de Lima; Joseli Almeida Camargo	de Ponta Grossa - UEPG		docente; Ensino e Aprendizagem da Matemática
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COM JOGOS: UMA ESTRATÉGIA PARA FACILITAR A APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA	XI ENEM/2013	Silvânia Pereira Rodrigues; Adriano Alves do Nascimento; Lucas Menezes Gois; Rafael Neves Almeida; Ricardo Nicasso Benito	Universidade Federal de Sergipe	6º ano	Material metodológico; Resolução de problemas; Operações com frações
O USO DE JOGOS PARA O ENSINO DA MATEMÁTICA	XI ENEM/2013	Rosalina Maria de Lima Leite do Nascimento; Lorrana Thalita Silva Rodrigues	Universidade Estadual de Goiás	6º ao 9º ano	Matemática, Jogos, Ensino Fundamental.
O USO DE JOGOS NO ENSINO DE FRAÇÃO	XI ENEM/2013	Adriane Trindade Lopes; Rafael Silva Patricio	Universidade do Estado do Pará; Unifra	Não específica	Frações; Jogos
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E O JOGO DIVISORES EM LINHA: PRÁTICAS EM SALA DE AULA	XI ENEM/2013	Bruna Guimarães; Rita de Cássia Pavani Lamas	Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", IBILCE	6º ano	Resolução de Problemas; Jogo; Divisores; Situações-Problema
VAMOS BRINCAR? AS CONTRIBUIÇÕES TEÓRICAS DE PIAGET, VYGOTSKY E WALLON PARA O USO DE JOGOS NO ENSINO DE MATEMÁTICA	XI ENEM/2013	Flávia Roldan Viana; Francisco Edisom Eugenio de Sousa	Secretaria de Educação do Estado do Ceará - SEDUC; Universidade Federal do Ceará - UFC	Não específica	Teorias da Aprendizagem; Jogos; Ensino de Matemática
EQUAÇÃO DO 2º GRAU: INVESTIGANDO COM ALUNOS DE UMA 8ª SÉRIE	X ENEM/2010	Renata Andressa Costa; Magna Natalia Marin Pires	Escola Pública Estadual Paranaense; Universidade Estadual de Londrina	9º ano	Investigação Matemática; Equação do 2º grau; Educação Matemática.
JOGOS DE TABULEIRO NO ENSINO DA MATEMÁTICA: RELACIONANDO A MATEMÁTICA COM OUTROS CONHECIMENTOS	X ENEM/2010	Jeanine Alves de Oliveira; Nilcéia Aparecida Maciel Pinheiro; Sani Carvalho Rutz da Silva	Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR	Diferentes séries do Ensino Fundamenta I II	Jogos; Resolução de problemas; Ensino-aprendizagem de matemática.

O JOGO FANTAN: EXPLORAÇÕES DIDÁTICAS	X ENEM/2010	Maria Lucia Panossian; Manoel Oriosvaldo de Moura	Universidade de São Paulo - USP	7º ano	Álgebra; Jogo; Atividade Orientadora de Ensino.
JOGO DO MICO: FUNÇÃO QUADRÁTICA	X ENEM/2010	Valdir Bezerra dos Santos Júnior; Josinalva Estacio Menezes	Universidade Federal Rural de Pernambuco	9º ano	Jogos matemáticos; Zona de desenvolvimento proximal; Ensino Aprendizagem; Ensino fundamental.
O JOGO COMO FERRAMENTA DE APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA PARA OS ALUNOS DO 7º. ANO: UM ESTUDO DE CASO NA REDE PÚBLICA DE ENSINO DE MANAUS-AM	X ENEM/2010	Gerson Ribeiro Bacury; Arminda Rachel Botelho Mourão; Domingos Anselmo Moura da Silva	Universidade Federal do Amazonas – UFAM	7º ano	Ensino da Matemática; Aprendizagem; Jogos
JOGO DOS RETÂNGULOS PARA A CONSTRUÇÃO DOS CONCEITOS DE NÚMERO PRIMO E COMPOSTO	IX ENEM/2007	Gabriela dos Santos Barbosa; Tânia Campos	UERJ-FEUC; UNIBAN	6º ano	Não tem palavras chave
NARRATIVAS NO ENSINO DE FUNÇÕES POR MEIO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICA	IX ENEM/2007	Ms. Márcio Urel Rodrigues; Dr ^a . Rosana Giaretta Sguerra Miskulin	Universidade do Estado de Mato Grosso - Barra do Bugres/MT; Universidade Estadual Paulista - Rio Claro SP	9º ano	Não tem palavras chave
O JOGO XADREZ NO ENSINO DA MATEMÁTICA	IX ENEM/2007	Rafael de Souza Duarte; Maria Teresa Menezes Freitas	UFU	6º e 9º ano	Não tem palavras chave
MINHA PRIMEIRA EXPERIÊNCIA EM AULA INVESTIGATIVA DE MATEMÁTICA	IX ENEM/2007	Mônica Juliani	FE - UNICAMP	6º ano	Não tem palavras chave
UMA PROPOSTA DE UTILIZAÇÃO DE JOGOS COM INTERDISCIPLINARIDADE NA PERSPECTIVA DOS TEMAS TRANSVERSAIS: INTERDISCIPLINAR PARA O ENSINO DE MATEMÁTICA: PUZZLES COM FÓSFOROS	IX ENEM/2007	Josinalva Estácio Menezes; Josivaldo de Souza Brito; Valdir Bezerra dos Santos Júnior; Marco Aurélio Tomaz Mialret Júnior	DED/UFRPE/PPGEC/LACAPE; UFRPE/PIC/CNPq/LACAPE	Não especifica	Não tem palavras chave

JOGOS LÚDICOS, CONSTRUÇÃO E SABER/FAZER MATEMÁTICO	IX ENEM/2007	Antonio Luiz Sampaio; Sandra Maria Chaves	Escola de Formação permanente do magistério- ESFAPEM	6º ano	Não tem palavras chave
O LÚDICO NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: UM JOGO DA MEMÓRIA PARA ENSINO DOS NÚMEROS RACIONAIS	IX ENEM/2007	Claudio Roberto Brandalise; Ms. Marcos Lübeck	Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE.	7º ano	Não tem palavras chave
FRACTAIS EM SALA DE AULA: UMA EXPERIÊNCIA DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA EM CLASSES DE 6ª SÉRIE DO ENSINO FUNDAMENTAL	IX ENEM/2007	Fernando Luís Pereira Fernandes	Unicamp	7º ano	Não tem palavras chave
O JOGO COMO ALTERNATIVA PARA AS AULAS DE MATEMÁTICA NAS SÉRIES FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL	VIII ENEM/2004	Monica Baeta Marques	Instituto Superior de Educação do Rio de Janeiro	6º ano	Não tem palavras chave
CRIANDO JOGOS NA SALA DE AULA	VIII ENEM/2004	Adriana M. M. Bulos	Não especifica	7º ano	Não tem palavras chave

APÊNDICE 2 – ROTEIRO DA AULA

Quadrado Mágico

- 1) Dividir a turma em duplas.
- 2) Apresentar o *Quadrado Mágico* e explicar as regras.
- 3) Entregar os tabuleiros e as folhas de rascunho (Apêndice 4) para os alunos
- 4) Neste momento também entregarei um relatório (Apêndice 3), em que será usado para avaliação e os alunos irão ir construindo-o ao longo da atividade .
- 5) Propor como um “desafio” aos alunos (Resolver o *Quadrado Mágico*).
- 6) Momento de familiarização do jogo e regras (Jogo pelo jogo).
- 7) Momentos das intervenções verbais, questionar aos alunos, grupos ou a turma toda:
“Para fazer as somas de 15 que precisamos, é possível que em uma mesma linha ou coluna tenhamos três números pares? Por quê?”
“E números ímpares, seria possível? Por quê?”
“É possível que tenhamos 2 pares e 1 ímpar? Ou ao contrário, 2 ímpares e 1 par?”.
- 8) Vamos pensar: “Quais as somas com dois números resultam em 15?”.
- 9) A partir disso ir decompondo os números. Isso facilitará para que eles consigam ver as somas com três dígitos.
- 10) Após resolverem o quadrado, pedir para os alunos escreverem isso no quadro.
- 11) A partir disso, anotar no quadro todas as somas de 15 possíveis. (Aqui talvez seja momento também de explorar mais a questão vista no item 7, sobre as somas de números pares e ímpares).
- 12) Questionar como eles pensaram para resolver o quadrado.
- 13) Explorar: “Considerando essas somas, qual número ficará no centro do quadrado e por quê (aqui explorar a quantidade de vezes que o número aparece nas somas)?”.
- 14) Anotar as estratégias no quadro.

Jogo do 15

- 1) Agora, com as estratégias que nós vimos no *Quadrado Mágico*, vamos jogar um jogo parecido em que vocês possam colocar em prática as regras que construíram.
- 2) Os alunos com as mesmas duplas que estavam no *Quadrado Mágico*, vão agora competir com outra dupla no *Jogo do 15*.
- 3) Enquanto eles jogam, podemos perguntar se alguém pensou em alguma estratégia para vencer o oponente. Qual foi ela?.
- 4) Anotar as estratégias no quadro.

- 5) Por fim, “Alguém pensa em alguma nova regra para tornarmos o jogo mais interessante e com mais possibilidades?”
- anotar as novas regras no quadro.
 - analisar, com a turma, as novas regras sugeridas e testá-las com a turma (cada dupla joga seguindo as novas regras).
 - Questionar: o que muda no jogo quando mudamos as regras?.
 - Qual a relação entre o *Jogo do 15* e o *Quadrado Mágico* de soma 15?.

APÊNDICE 3 – MODELO DE RELATÓRIO DA ATIVIDADE

Colégio Estadual Cívico Militar - Jandaia do Sul

Alunos(as): _____

Seu relatório deverá conter:

- Objetivos do trabalho.
- Descrição de todo o processo da atividade. Vão aí algumas questões que podem te ajudar nessa etapa:
 - ◆ Como a atividade se iniciou?
 - ◆ Ao jogar pela primeira vez, pensou em alguma estratégia para conseguir completar o quadrado?
 - ◆ Quais perguntas foram feitas pelos professores? Quais estratégias foram elaboradas? Que conteúdos foram explorados no quadro?
 - ◆ Depois de completar o *Quadrado Mágico*, qual outro jogo foi desenvolvido? Como isso foi feito?
 - ◆ O que você pôde perceber de comum entre o *Quadrado Mágico* e o *Jogo do 15*?
 - ◆ Não se esqueça de colocar a sua resolução do *Quadrado Mágico* também!!
 - ◆ E tudo mais que achar importante, esse é o momento de você descrever realmente como ocorreu a atividade!!
- Conclusões da atividade e do que você pôde aprender com ela.

No seu relatório, use e abuse de:

- imagens das suas resoluções matemáticas;
- rascunhos das estratégias que elaborou com seu grupo;
- conclusões do grupo.

APÊNDICE 4 – FOLHA DE RASCUNHO

Colégio Estadual Cívico Militar - Jandaia do Sul

























Alunos(as): _____

Chute aqui não tem vez!
Você consegue solucionar? 🤔

→ Caso as linhas não sejam suficientes, utilizem o verso da folha! ;)

ANEXO 1 – PEÇAS DO JOGO DOMINÓ DOS RACIONAIS

PEÇAS DO JOGO DOMINÓ DOS RACIONAIS

50 %	$\frac{1}{3}$			0,2	12,5 %
25 %	$\frac{1}{5}$	12,5 %	$\frac{1}{4}$	0,5	33,3 %
20 %	1	0,25	0,5	0,5	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$	33,3 %	$\frac{1}{1}$	50 %	$\frac{1}{5}$	10 %
10 %	0,333	33,3 %	0,25	$\frac{1}{4}$	20 %
$\frac{1}{8}$	0,1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{2}$	0,1	12,5 %
$\frac{1}{10}$	20 %	$\frac{1}{4}$	0,125	12,5 %	$\frac{1}{10}$
	25 %	$\frac{1}{2}$			
	0,125	$\frac{1}{2}$		10 %	
	50 %	20 %			1
	0,333	$\frac{1}{8}$		0,333	10 %
	0,2	$\frac{1}{3}$		0,333	$\frac{1}{4}$
	0,2	33,3 %		0,1	0,1
	$\frac{1}{3}$	0,125		50 %	0,25
	$\frac{1}{8}$	0,125		100 %	0,25
	0,5	0,25		25 %	$\frac{1}{2}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$		0,2	25 %