

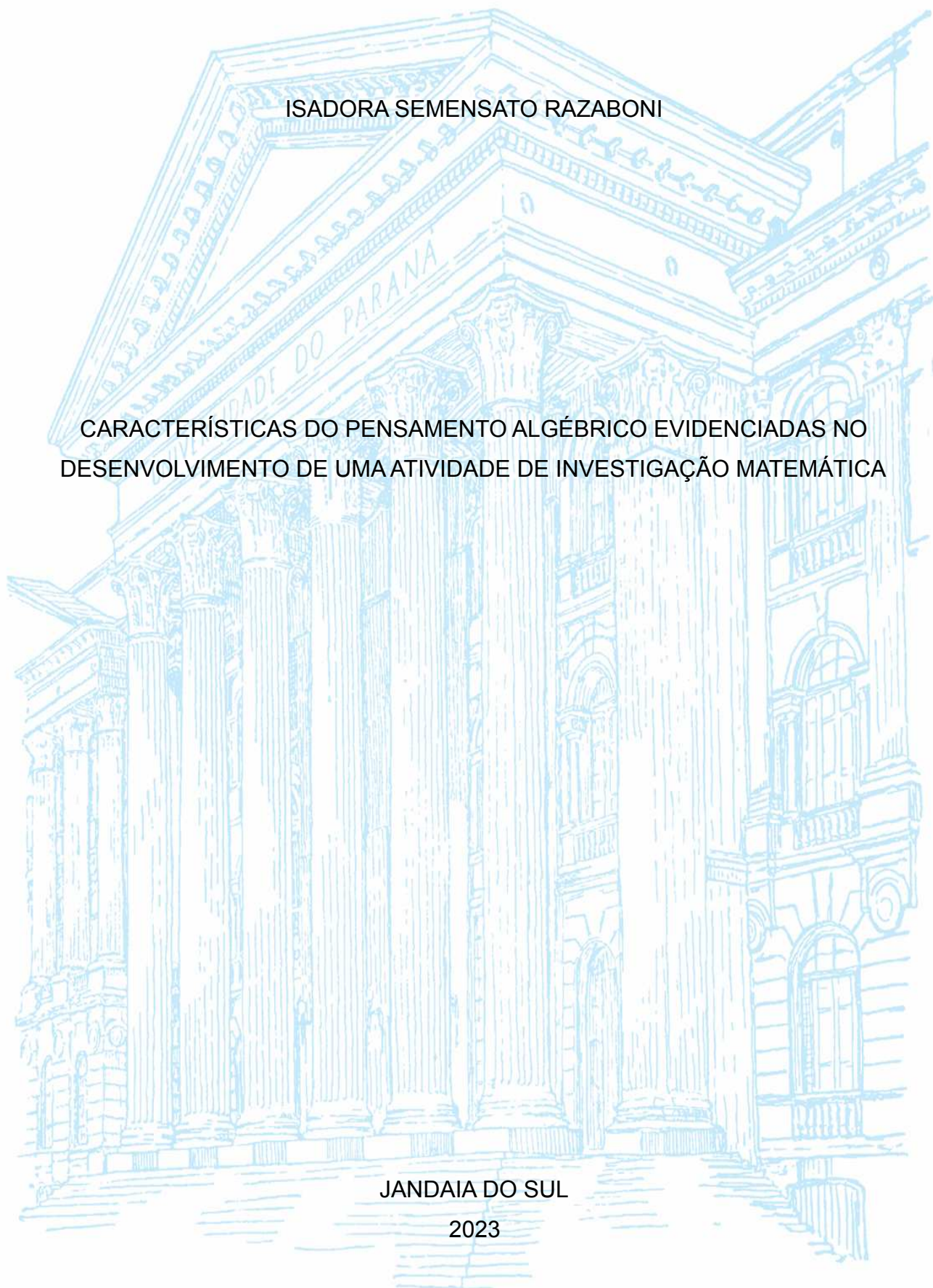
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ISADORA SEMENSATO RAZABONI

CARACTERÍSTICAS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO EVIDENCIADAS NO
DESENVOLVIMENTO DE UMA ATIVIDADE DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

JANDAIA DO SUL

2023



ISADORA SEMENSATO RAZABONI

CARACTERÍSTICAS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO EVIDENCIADAS NO
DESENVOLVIMENTO DE UMA ATIVIDADE DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Monografia apresentada como exigência para a
conclusão do Curso de Licenciatura em Ciências
Exatas - Matemática, na Universidade Federal do
Paraná - Campus avançado de Jandaia do Sul.

Orientadora: Dra. Janete de Paula Ferrareze Silva.

JANDAIA DO SUL/PR

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA JANDAIA DO SUL

Razaboni, Isadora Semensato

Características do pensamento algébrico evidenciadas no desenvolvimento de uma atividade de investigação matemática. / Isadora Semensato Razaboni. – Jandaia do Sul, 2023.
1 recurso on-line : PDF.

Monografia (Graduação) – Universidade Federal do Paraná, Campus Jandaia do Sul, Licenciatura em Ciências Exatas - Matemática.
Orientadora: Profa. Dra. Janete de Paula Ferrareze Silva.

1. Ensino Fundamental. 2. Educação matemática. 3. Álgebra.
I. Silva, Janete de Paula Ferrareze. II. Universidade Federal do Paraná. III. Título.

CDD 370.1

Bibliotecário: César A. Galvão F. Conde - CRB-9/1747



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PARECER Nº 2/2023/UFPR/R/JA
PROCESSO Nº 23075.075090/2022-38
INTERESSADO: JAIR DA SILVA
ASSUNTO: **TERMO DE APROVAÇÃO DE TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO**

Título: CARACTERÍSTICAS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO EVIDENCIADAS NO DESENVOLVIMENTO DE UMA ATIVIDADE DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Autor: ISADORA SEMENSATO RAZABONI

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para a obtenção do grau no curso de Licenciatura em Ciência Exatas, aprovado pela seguinte banca examinadora.

- Janete de Paula Ferrareze Silva (orientadora)
- Bárbara Cândido Braz (membro)
- Camila Bonini de Araújo Cassoli (membro)

Jandaia do Sul, 15 de fevereiro de 2023.



Documento assinado eletronicamente por **JANETE DE PAULA FERRAREZE SILVA, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 15/02/2023, às 19:58, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **BARBARA CANDIDO BRAZ, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 15/02/2023, às 19:59, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **Camila Bonini Araújo Cassoli civilmente Camila Bonini de Araújo Cassoli, Usuário Externo**, em 28/02/2023, às 10:40, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



A autenticidade do documento pode ser conferida [aqui](#) informando o código verificador **5300670** e o código CRC **F163859B**.

Dedico

A minha família e a minha orientadora Janete, por terem me apoiado e acreditado em mim e na minha capacidade desde o começo

AGRADECIMENTOS

Quero primeiramente agradecer a Deus, por me permitir chegar até aqui, e enfim realizar um sonho de ter um diploma de uma das melhores Universidades do Brasil.

À minha família, em especial a minha mãe Tânia, meu pai Silvio e meu irmão Leonardo que participaram de todo esse processo, dos momentos de riso e de lágrimas. Agradeço também a minha tia Lucélia, hoje professora aposentada da rede estadual de ensino e minha prima Letícia por todo incentivo a esta profissão.

As minhas avós Izabel e Maria que mesmo com pouca instrução buscaram formas de me fazerem valorizar a minha profissão escolhida. Aos meus avôs, já falecidos, Nercilio e Delsio, infelizmente não poderão me ver realizar meu sonho, agradeço por cada ensinamento repassado, a ser uma mulher íntegra e de bons valores. Aos demais familiares e amigos, agradeço por toda atenção e incentivo.

À minha orientadora Janete pelas conversas e orientações esplêndidas, pela paciência com que sempre me instruiu, pela confiança depositada em mim e por ser um grande exemplo de pessoa e de profissional, na qual com certeza me espelharei. Sou muito grata pelo seu apoio, dedicação, competência e por suas palavras sempre sábias e aconchegantes para meus momentos de desespero.

Ao projeto de extensão ÁGORA, a professora coordenadora Bárbara C. Braz, por me permitir realizar o desenvolvimento da atividade aos demais membros do projeto anterior ao desenvolvimento nas turmas escolhidas. Obrigada aos demais membros do projeto, por terem participado e contribuído com melhorias na atividade proposta.

Agradeço a professora Camila Cassoli e a Escola Santa Maria por me receberem nas turmas de 8º e 9º ano para desenvolvimento da atividade, para fins de coleta de dados da pesquisa.

Ao professor Jair da Silva, por ter me acompanhado nas turmas na qual a atividade foi desenvolvida, por todo apoio, incentivo e conhecimentos ensinados durante toda a graduação.

Às professoras Dra. Bárbara C. Braz e a Me. Camila Cassoli por terem aceitado o convite para participar da banca examinadora deste trabalho, pela dedicação e contribuições.

Gostaria de agradecer aos demais professores da graduação, Ana Cláudia, Carlos Danilo, Carlos Galvão, Douglas de Oliveira, Leda Colpini, Letícia Colpini, Marcelo Valério, Simão Nicolau e William Nascimento, por todos os conhecimentos obtidos por meio de suas aulas durante todo período de graduação.

Aos colegas e amigos que fiz durante a graduação, Maria Gabrieli, Juliana, Ana Carolina, Ana Paula, Isabela, Valquíria, Kauana, Patrícia, Nicolas, companheiros de jornada que tenho orgulho de compartilhar minha rotina e saberes. Agradeço a todos, que direta ou indiretamente participaram da realização deste sonho.

Não fui eu que ordenei a você? Seja forte e corajoso! Não se apavore nem desanime, pois o Senhor, o seu Deus, estará com você por onde você andar".

Josué 1:9

RESUMO

Quando somos indagados sobre o que é álgebra, em geral, nos vem à mente manipulações matemáticas carregadas de símbolos, ou até mesmo operações complexas envolvendo números e letras, sem significado real. Não distante dessa visão, alguns autores que serão tratados neste trabalho, relatam que a álgebra escolar muitas vezes aparece apenas associada a essa manipulação de símbolos e à reprodução mecânica de regras, parecendo que tais elementos são os principais objetivos no estudo de Matemática. No entanto, veremos nesta pesquisa que a base do pensamento algébrico segundo esses autores, está nos significados desses elementos representados por letras ou símbolos. Nesse sentido, a finalidade do presente trabalho foi estudar e analisar características do pensamento algébrico evidenciadas em uma atividade de Investigação Matemática desenvolvida no 8º Ano do Ensino Fundamental. A presente pesquisa é predominantemente qualitativa e se deu por meio de um levantamento bibliográfico, estudos de referenciais teóricos, planejamento e aplicação de uma atividade de Investigação Matemática numa turma de 8º ano do Ensino Fundamental e análises dos dados coletados nesta aplicação por meio de referenciais que apresentam características do desenvolvimento do pensamento algébrico. A Investigação Matemática foi escolhida devido ao fato de suas etapas se relacionarem com as etapas do desenvolvimento do pensamento algébrico, conforme pode ser visto neste trabalho. Além disso, no levantamento bibliográfico realizado foram encontrados poucos trabalhos que tratassem do desenvolvimento do pensamento algébrico em conjunto com atividades de Investigação Matemática. Este trabalho apresenta também concepções de alguns autores sobre o pensamento algébrico e ferramentas que foram utilizadas para analisar a manifestação de características do pensamento algébrico durante o desenvolvimento da atividade com os alunos. Partindo disso, foi analisado como se deu o desempenho dos alunos durante a atividade, por meio do qual observou-se que houve a manifestação de algumas características do pensamento algébrico, como: estabelecimento de relações de equivalência, identificação de padrões, formulação de conjecturas e generalizações. Dessa forma, podemos concluir que essa atividade de Investigação Matemática favoreceu o desenvolvimento do pensamento algébrico, e assim percebemos que existem outras formas de se trabalhar álgebra nas séries finais do Ensino Fundamental além do método tradicional, o que justifica mais uma vez a importância deste trabalho nesta área de pesquisa.

Palavras-chave: Ensino Fundamental. Educação Matemática. Álgebra.

ABSTRACT

When we are asked about what algebra is, in general, mathematical manipulations loaded with symbols, or even complex operations involving numbers and letters without real meaning, come to mind. Not far from this vision, some authors who will be treated in this work, report that school algebra often appears only associated with this manipulation of symbols and the mechanical reproduction of rules, seeming that such elements are the main objectives in the study of Mathematics. However, we will see in this research that the basis of algebraic thinking, according to these authors, is in the meanings of these elements represented by letters or symbols. In this sense, the purpose of this work was to study and analyze characteristics of algebraic thinking evidenced in a Mathematical Investigation activity developed in the 8th grade of Elementary School. The present research is predominantly qualitative and was carried out through a bibliographical survey, studies of theoretical references, planning and application of a Mathematical Investigation activity in an 8th grade class of Elementary School and analysis of the data collected in this application through references that present characteristics of the development of algebraic thinking. Mathematical Investigation was chosen due to the fact that its stages are related to the stages of development of algebraic thinking, as can be seen in this work. In addition, in the bibliographic survey carried out, few works were found that dealt with the development of algebraic thinking in conjunction with Mathematical Investigation activities. This work also presents conceptions of some authors about algebraic thinking and tools that were used to analyze the manifestation of characteristics of algebraic thinking during the development of the activity with the students. From this, it was analyzed how the students' performance was during the activity, through which it was observed that there was the manifestation of some characteristics of algebraic thinking, such as: establishment of equivalence relations, identification of patterns, formulation of conjectures and generalizations. In this way, we can conclude that this Mathematical Investigation activity favored the development of algebraic thinking, and thus we realize that there are other ways of working algebra in the final grades of Elementary School in addition to the traditional method, which once again justifies the importance of this work in this search area.

Keywords: Elementary Education. Mathematics Education. Algebra.

LISTA DE QUADROS

Quadro 01 - Caracterização do pensamento algébrico, segundo alguns autores.....	34
Quadro 02: Características do pensamento algébrico analisadas.....	36
Quadro 03- Fases que compreendem o desenvolvimento do Pensamento Algébrico.....	37
Quadro 04: Ambientes de Aprendizagem.....	40
Quadro 05 - Etapas da Investigação Matemática.....	41
Quadro 06: Exemplo Etapa 01 - Sem resolução.....	47
Quadro 07: Exemplo Etapa 02 - Sem resolução.....	47
Quadro 08: Exemplo Etapa 03 - Sem resolução.....	48
Quadro 09: Organização das Atividades Desenvolvidas.....	50

LISTA DE FIGURAS

Figura 01: Álgebra no Ensino Fundamental.....	31
Figura 02: Fase 1 do Desenvolvimento do Pensamento Algébrico.....	38
Figura 03: Fase 2 do Desenvolvimento do Pensamento Algébrico.....	38
Figura 04: Fase 3 do Desenvolvimento do Pensamento Algébrico.....	39
Figura 05: Exemplo da Atividade de Investigação.....	45
Figura 06: Vídeo Introdutório.....	46
Figura 07: Exemplo da Generalização Final	49
Figura 08: Exemplo Etapa 01 - Com resolução.....	54
Figura 09: Registro da 1° Etapa (G1,A2).....	55
Figura 10: Registro da 1° Etapa (G3, A3).....	56
Figura 11: Exemplo Etapa 02 - Com resolução.....	57
Figura 12: Registro da 2° Etapa (G1,A2).....	58
Figura 13: Registro da Etapa 02.....	59
Figura 14: Registro Etapa 02.....	60
Figura 15: Representação Nomeando as Linhas.....	62
Figura 16: Exemplo Etapa 03- Com resolução.....	63
Figura 17: Registro Etapa 3.....	64
Figura 18: Soma dos termos.....	65
Figura 19: Generalização Final.....	66

LISTA DE SIGLAS

BDTD - Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós- Graduação em Educação Matemática

EJA - Educação de Jovens e Adultos

ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática

EPREM - Encontro Paranaense de Educação Matemática

MEC - Ministério da Educação

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

PECEM - Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática

PNLD – Programa Nacional do Livro Didático

PROFMAT - Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

IF - Instituto Federal

UEL - Universidade Estadual de Londrina

UFPR - Universidade Federal do Paraná

UESB - Universidade Estadual Do Sudoeste Da Bahia

UFMG - Universidade Federal de Minas Gerais

UFSCAR - Universidade Federal de São Carlos - SP

UNEMAT - Universidade do Estado do Mato Grosso

UNIOESTE - Universidade Estadual do Oeste do Paraná

UNESP - Universidade Estadual Paulista

UNIVATES - Universidade do Vale do Taquari - RS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO.....	15
2 LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO.....	20
3 REFERENCIAL TEÓRICO.....	28
3.1 PENSAMENTO ALGÉBRICO: CONCEPÇÕES E CONTEXTO ESCOLAR.....	28
3.1.1 DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: HABILIDADES PROPOSTAS PELOS PCN e a BNCC NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL.....	29
3.2 CARACTERIZAÇÃO DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO.....	33
3.3 INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA.....	40
4 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS.....	43
4.1 CONTEXTO DO PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES.....	43
4.2 AS TAREFAS PLANEJADAS.....	45
4.3 ORGANIZAÇÃO DA TURMA PARA O DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE.....	49
4.4 COLETA E ANÁLISE DOS DADOS.....	50
4.5 CARÁTER DA PESQUISA.....	51
5 ANALISANDO A ATIVIDADE DESENVOLVIDA EM RELAÇÃO À MANIFESTAÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO.....	53
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	69
REFERÊNCIAS.....	72
APÊNDICE A - LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO.....	74
APÊNDICE B - RELATÓRIO DA ATIVIDADE.....	77

1.INTRODUÇÃO

O estudo da Matemática se tornou um dos fatores primordiais ao ser humano, este que é praticado desde as séries iniciais e percorre todos os anos escolares do estudante, se mostra também fundamental no dia a dia das pessoas no decorrer de sua vida adulta. Diretamente ligado ao estudo da Matemática está o pensamento algébrico, o qual se deve iniciar logo nos primeiros anos escolares, por meio de atividades que favoreçam seu desenvolvimento, conceito esse que será estudado neste trabalho. Indicamos que o desenvolvimento do pensamento algébrico pode facilitar o estudo e a compreensão da Matemática, tanto no contexto escolar, como em situações cotidianas que exigem este conhecimento, percepção essa que pudemos ver também nos textos estudados (FERNANDES, 2014; KIERAN, 2004; BLANTON; KAPUT, 2005; KAPUT, 1999).

O interesse sobre o tema de como acontece o desenvolvimento do pensamento algébrico surgiu a partir da experiência vivenciada pela acadêmica no primeiro semestre de 2022, ao lecionar em uma turma do primeiro ano do Ensino Médio da Educação de Jovens e Adultos (EJA). Os alunos desta classe, estavam fora da escola há algum tempo e por isso revisar a matemática básica foi primordial. Ao adentrar conteúdos que envolviam álgebra, como encontrar o valor de x em uma equação de primeiro grau, era notável a dificuldade deles em identificar o símbolo x como sendo um número cujo valor precisaria ser determinado. Nesse sentido, no momento em que se iniciou a elaboração do projeto referente ao trabalho de conclusão de curso, a autora relatou à orientadora o fato ocorrido em sala de aula há algum tempo e a partir daí, decidiram estudar esse tema para pesquisar se haveria trabalhos e autores que também tivessem essa percepção que surgiu na experiência vivenciada pela autora em sala de aula.

Tempos depois, durante a leitura de alguns textos que foram utilizados na fundamentação teórica, notou-se que essa percepção não era apenas da acadêmica. De acordo com Booth (1989), estudantes de nono ano do Ensino Fundamental até o segundo ano do Ensino Médio tendem a particularizar suas respostas, mesmo que sejam questões de caráter mais geral, tendem também a não aceitar expressões algébricas como procedimento e resposta ao mesmo tempo, além de apresentarem dificuldades em dar significado às letras, procurando atribuir valores específicos para elas, mesmo quando estão apresentadas como variáveis.

Sendo assim, por evidenciar estas dificuldades encontradas e perceber que estávamos tratando de conceitos estudados nos anos finais do Ensino Fundamental, mais especificamente 8º e 9º ano, a pesquisa foi direcionada a esse nível de ensino. Quanto à escolha do tema, essa se deu nos momentos em que nos questionamos se haveria teorias ou metodologias que poderiam contribuir com o ensino de álgebra, por meio de atividades menos mecânicas do que aquelas tarefas que demandam do estudante apenas “encontrar o valor de x ”. Metodologias essas que permitissem um melhor entendimento da visão do aluno em relação aos entes algébricos, de forma que se possa olhar para as aulas de álgebra não somente como um momento no qual se estuda expressões matemáticas sem significado, mas sim como um conceito que está intimamente ligado ao pensar matemático e ao processo de construção e compreensão da Matemática. Diante destes questionamentos, fomos em busca de teorias que tratavam sobre o pensamento algébrico.

Um dos primeiros documentos estudados a respeito do tema pensamento algébrico foi a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Implantada em 2017, a BNCC é um documento que serve como base para o sistema educacional, e nela considera-se que o ensino de álgebra deve ocorrer desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, mesmo que seja sem a utilização de letras ou expressões algébricas, podendo trabalhar com o auxílio de ilustrações e figuras representando o que chamamos de incógnitas, favorecendo que o desenvolvimento do pensamento algébrico nas séries mais avançadas, como nos anos finais do Ensino Fundamental, não seja tratado com tanta estranheza e dificuldade por parte dos alunos.

Após estudos e pesquisas, percebeu-se que este é um assunto muito amplo e de grande importância no ensino de matemática. Encontramos muitos trabalhos que afirmam que a álgebra não se limita apenas à utilização de símbolos algébricos e resolução de equações. A partir de algumas experiências pessoais e em consonância com a concepção desses autores, concluímos que o pensamento algébrico deve vir primeiro e a simbologia tem função de contribuir com a representação e aprimoramento desse pensamento. Muitos dos trabalhos estudados confirmam essa concepção e atribuem o nome de pensamento algébrico a esse tipo de pensamento.

Blanton e Kaput (2005) afirmam que o pensamento algébrico é o processo pelo qual generalizamos ideias matemáticas, podendo para isso utilizar a aritmética

para expressar e formalizar tais generalizações. Afirmam ainda que o pensamento algébrico é marcado por discussões e argumentações matemáticas, estabelecimento de padrões e sequências, dentre outros, todos adequados à idade do estudante. Além disso, enfatizam que o intuito deste desenvolvimento é compreender os significados resultantes do raciocínio e compreensão individual de cada sujeito.

Lins e Gimenez (1997) afirmam que para que ocorra o desenvolvimento do pensamento algébrico, é necessária a utilização de atividades em que os estudantes possam investigar regularidades, sistematizar propriedades observadas, resolver e discutir problemas algébricos, modelar situações e estabelecer padrões. Nesse sentido, para o bom desenvolvimento desse processo é fundamental proporcionar aos alunos atividades que estimulem discussões, argumentações e escrita por meio de linguagem natural, percepções e estabelecimento de padrões, a realização de comparações, o levantamento de conjecturas e justificativas. Desta forma, os estudos iniciais sobre a temática desta proposta sugerem que existem aproximações entre o desenvolvimento do pensamento algébrico e atividades de Investigação Matemática. Nesta perspectiva, nos propomos a investigar sobre tais relações, no âmbito do Ensino Fundamental.

A Investigação Matemática se dá por meio de um processo de resolução de problemas. Segundo Ponte et.al (2016) investigar é procurar conhecer o que não se sabe, tendo significado semelhante ao termo pesquisa. Sendo assim, apresentamos primeiramente um problema para que os alunos interajam com este, e durante a resolução se dará o processo de investigação. Neste processo os alunos percorrem caminhos de forma não linear, denominados etapas da Investigação Matemática, os quais consistem em compreender, representar, analisar, testar e validar suas hipóteses devendo chegar a alguma conclusão ou resultado.

Diante dos questionamentos iniciais, das concepções sobre pensamento algébrico e das características encontradas nas atividades de Investigação Matemática, levantamos a seguinte problemática: Quais características do pensamento algébrico são evidenciadas no desenvolvimento de uma atividade de Investigação Matemática? A partir dessa pergunta de pesquisa, o presente trabalho se destina a estudar/analisar características do pensamento algébrico que são evidenciadas em uma atividade de Investigação Matemática desenvolvida com estudantes de uma turma de oitavo ano do Ensino Fundamental.

Para o desenvolvimento da pesquisa, primeiramente realizamos um estudo sobre concepções de pensamento algébrico segundo os principais autores da área e buscamos ferramentas que pudessem ser utilizadas para analisar os resultados da atividade de Investigação Matemática desenvolvida. Então o próximo passo foi pesquisar e desenvolver uma atividade de Investigação Matemática que pudesse ser encaminhada de acordo com características do pensamento algébrico. Por fim, nos dedicamos a analisar, por meio de ferramentas adequadas, às características do pensamento algébrico que foram evidenciadas pelos estudantes na atividade de Investigação Matemática desenvolvida.

Para discorrer sobre a questão de pesquisa, o texto foi organizado a partir desta introdução, seguida de quatro capítulos, considerações finais e referências, com o intuito de possibilitar uma melhor apresentação dos resultados obtidos com esse trabalho. Desse modo, na Introdução consta a pergunta de pesquisa, juntamente com os objetivos do trabalho e a justificativa para desenvolvimento do mesmo. No segundo capítulo apresentamos o levantamento bibliográfico, contendo fontes e materiais de pesquisas que serviram para a escrita da fundamentação teórica deste trabalho, além do método utilizado para a busca e seleção destes trabalhos.

No terceiro capítulo apresentamos o referencial teórico, dividido em subseções, tratando primeiramente das concepções do pensamento algébrico e o contexto escolar, mediante documentos que são base da educação nacional, como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e a Base Nacional Comum Curricular. Contextualizamos também as características do pensamento algébrico, nosso principal foco de pesquisa, qual a sua importância referente ao contexto escolar e como as atividades de investigação podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Como a ideia principal de atividade a ser desenvolvida será por meio do processo de Investigação Matemática, dedicamos uma subseção para esse tema, na qual elencamos como ocorre o processo de Investigação Matemática por meio de alguns autores precursores sobre esta metodologia.

O quarto capítulo trata sobre os procedimentos metodológicos. De modo a praticar um olhar mais crítico, durante a descrição da atividade apresentamos algumas observações, com o intuito de destacar pontos que favoreceram a manifestação de características do pensamento algébrico no decorrer desta.

No quinto capítulo estão as análises, nas quais descrevemos as características do pensamento algébrico que foram evidenciadas na atividade desenvolvida pelos alunos. Tais características foram categorizadas de acordo com autores que em seus trabalhos as apresentam como foco de pesquisa, enfatizando quais características mais se destacaram, e quais não foram evidenciadas e qual motivo desta segregação acontecer.

Por fim apresentamos algumas considerações sobre a pesquisa realizada. Além disso, buscamos justificar novamente, a importância deste trabalho nesta área de pesquisa, pois quando observamos o levantamento bibliográfico, podemos afirmar que não há uma grande quantidade de trabalhos que tratam sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos finais do Ensino Fundamental com metodologias pautadas em vertentes da Educação Matemática como a Investigação Matemática.

2. LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO

Ao observarmos a trajetória da educação, percebemos que os educadores estão em constante busca pelo aperfeiçoamento da mesma, seja lutando por maior igualdade entre os beneficiários da educação, por melhores condições de trabalho e também por melhorias nas metodologias utilizadas no processo de ensino e aprendizagem. Na Matemática não tem sido diferente, pois no decorrer dos últimos anos, muito se tem estudado no intuito de promover melhorias no ensino dessa ciência. Em particular, o desenvolvimento do pensamento algébrico tem sido estudado por diversos autores como uma forma de olhar para o processo que o indivíduo percorre enquanto se constrói suas percepções matemáticas, em particular as algébricas. Essa maneira de olhar para o aprendizado de Matemática surge em detrimento aos métodos tradicionais, os quais muitas vezes ocorrem de forma mecânica e técnica.

Dentre os principais problemas no ensino de álgebra, Kaput (1999) destaca que tal ensino tem tomado como base a manipulação de expressões algébricas, a resolução de equações, a utilização de regras e símbolos dissociados de seus significados e que não têm relação com a realidade dos estudantes. Além disso, muitas vezes são propostos problemas com aplicações forçadas, os quais não proporcionam aos estudantes oportunidades de refletir sobre os conceitos que estão sendo estudados. Em contraponto a esses problemas, este e outros autores apresentam o conceito de pensamento algébrico, no intuito de olhar como os alunos desenvolvem esse pensamento, o qual dá base para uma melhor compreensão da Álgebra em si, e assim tornar menos mecânico o ensino dessa disciplina nas escolas. Segundo Ponte (2009), o pensamento algébrico pode ser caracterizado pela capacidade de representar e interpretar situações problemas, traduzir informações, estabelecer relações, compreender expressões algébricas, raciocinar e analisar propriedades, resolver equações, inequações e funções, compreendendo seus significados, compreender regras, fazer generalizações, além de ser capaz de lidar com outras relações e áreas da Matemática.

Essa maneira de pensar vai ao encontro com os fundamentos da Educação Matemática, uma área que surge para desenvolver um conjunto importante de novas concepções sobre o ensino e aprendizagem da Matemática. Dentre essas novas concepções podemos citar: o ensino da Matemática por meio da história da

Matemática, a etnomatemática e o ensino da Matemática voltado para resolução de problemas, a Investigação Matemática, dentre outros. A Investigação Matemática, se caracteriza por um processo em que se apresenta uma situação problema ao aluno, na qual ele não tem contato com uma forma direta para a resolução, e precisa necessariamente, com o auxílio do professor, investigar, questionar, testar e validar as hipóteses que surgem durante o processo de investigação e assim chegar a um resultado ou conclusão.

Com relação à Investigação Matemática, podemos afirmar que um de seus objetivos é fornecer uma alternativa ao ensino tradicional, pois durante o processo os investigadores são instigados a procurarem as razões pelas quais as coisas acontecem. Essa metodologia enfatiza a importância do caminho percorrido e não apenas a resposta final, processo no qual o aluno tem a responsabilidade de descobrir e justificar suas descobertas. Por esse motivo, a investigação pode colaborar para que os alunos tenham um maior engajamento nas aulas de matemática. Além disso, essa tendência é caracterizada de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) em quatro etapas: exploração e formulação de questões que consistem em reconhecer a problemática, explorar e formular questões, na segunda etapa nomeada de conjecturas, ocorre a organização dos dados e formulação de hipóteses, na terceira etapa ocorrem os testes e reformulações em relação às hipóteses levantadas anteriormente e quarta e última etapa se caracteriza como justificação e avaliação, na qual se avalia o raciocínio utilizado para resolução e a própria resolução. Tendo em vista essas características, percebemos que elas se relacionam com as características destacadas anteriormente sobre o pensamento algébrico, por isso, atividades dessa natureza podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Diante dessas colocações, com o intuito de responder a problemática apresentada neste trabalho, se faz necessário assumir uma concepção sobre pensamento algébrico, bem como investigar os trabalhos que estudam esse tema a partir de atividades de Investigação Matemática. Para auxiliar na busca por essa resposta, algumas etapas se fizeram necessárias, sendo uma delas o levantamento bibliográfico apresentado neste capítulo.

Para a realização desta etapa da pesquisa, sendo essa qualitativa, foram analisados documentos como a BNCC e diversos trabalhos da área de Educação Matemática, com o intuito de verificar se havia materiais como sequências didáticas,

relatos de experiência e dissertações que continham algo sobre nossa temática de pesquisa.

O primeiro documento a ser estudado, tendo como foco o pensamento algébrico, foi a BNCC. Nela encontramos algumas habilidades e competências ao que se diz respeito ao pensamento algébrico, enfatizando que o ensino da álgebra seja voltado para este propósito, o desenvolvimento do pensamento algébrico:

Para esse desenvolvimento, é necessário que os alunos identifiquem regularidades e padrões de sequências numéricas e não numéricas, estabeleçam leis matemáticas que expressem a relação de interdependência entre grandezas em diferentes contextos. (BRASIL, 2017, p. 270).

Alinhado com os apontamentos da BNCC, encontramos também diversos autores que tratam desse tema. Suas concepções e apontamentos estão presentes no Capítulo 3, no qual trazemos o referencial teórico utilizado neste trabalho.

Para investigar sobre o tema abordado, por meio de trabalhos publicados em eventos científicos, revistas e programas voltados para área educacional, se adotou um mecanismo de pesquisa para selecionar os materiais que seriam base para nossa fundamentação teórica, posteriormente aqui referenciados. Desta forma, definimos como tópico principal para fins de pesquisa o pensamento algébrico e Investigação Matemática, com o objetivo de encontrar trabalhos que tratassem a Investigação Matemática como metodologia usada no desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos finais do Ensino Fundamental.

Para iniciar as pesquisas recorreremos a sites confiáveis e renomados que armazenam teses e dissertações, mais especificamente, as buscas foram realizadas na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), no Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, nas bases do Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática (PECEM - UEL) e no banco de dissertações do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT). Na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações foram encontrados 36 resultados, dos quais foram selecionados 08 somente pelo título, após a leitura do resumo, restou apenas 01 trabalho com o foco da pesquisa. No Catálogo de Teses e Dissertações da Capes, apenas 02 dissertações foram encontradas e após a leitura do resumo apenas 01 foi selecionada. Nas bases do PECEM - UEL, 4 trabalhos foram encontrados e apenas 01 selecionado. No banco

de dissertações do PROFMAT, foram um total de 14 trabalhos encontrados e apenas 04 selecionados, mediante a leitura do resumo.

O fato de tantos trabalhos não terem sido considerados, se justifica por meio do nosso objetivo que foi estudar e verificar as características do pensamento algébrico que possam ser evidenciadas em uma atividade de Investigação Matemática aplicada aos anos finais do Ensino Fundamental, pois muitos destes tratavam sobre esses temas de forma isolada, ou seja, tratavam sobre o pensamento algébrico, mas não por meio da Investigação Matemática, ou tratavam sobre Investigação Matemática, mas não sobre desenvolvimento do pensamento algébrico. Além disso, alguns dos trabalhos encontrados se voltavam para o estudo do pensamento algébrico nos anos iniciais do Ensino Fundamental, não estando de acordo com o nível de ensino para o qual essa pesquisa está voltada. Dentre esses, um foi selecionado, sendo que optamos pela leitura devido à sua fundamentação teórica.

Além de procurar por teses e dissertações, foram realizadas buscas em alguns anais de eventos dedicados à divulgação de pesquisas na área de Educação Matemática. Os eventos escolhidos foram o XII EPREM - Encontro Paranaense de Educação Matemática, o XIII ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, e o XXI EBRAPEM - Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós- Graduação em Educação Matemática. No XII EPREM foram encontrados 05 trabalhos por meio do título, sendo considerados apenas 02 após ler os resumos. No XIII ENEM, com 14 trabalhos encontrados e 03 selecionados para estudo após leitura do resumo. Com relação ao XXI EBRAPEM, 04 resultados encontrados e 01 selecionado por meio do resumo. Nas pesquisas realizadas em publicações de trabalhos em revistas obtivemos apenas 01 arquivo selecionado do site da revista Destaques Acadêmicos. Vale ressaltar que a seleção destes trabalhos foi feita de forma similar à seleção dos trabalhos encontrados no banco de teses e dissertações.

Seguindo a descrição apresentada nos parágrafos anteriores, foram selecionados um total de 14 textos para serem lidos, os quais contribuíram na elaboração desta pesquisa. Para melhor compreensão, estes dados foram organizados em forma de quadro, o qual pode ser visto no Apêndice A deste trabalho. Nele estão destacados: título, autor, instituição em que foi realizada a pesquisa e categoria, ou seja, dissertações e relatos de experiência. A seguir apresentamos uma breve descrição desses trabalhos, lembrando que estes 14

resultados foram obtidos através de palavras chave “pensamento algébrico”, “Investigação Matemática” e “anos finais do Ensino Fundamental”.

Na dissertação "A Investigação Matemática e o estudo das funções reais: uma experiência com alunos do 1º ano do Ensino Médio", o autor apresenta considerações sobre o desenvolvimento de quatro atividades investigativas com o objetivo geral de avaliar a contribuição das investigações matemáticas para o estudo das funções, analisando o desenvolvimento dos alunos do 1º ano do Ensino Médio.

Na dissertação intitulada “Introdução da álgebra: desenvolvimento do pensamento algébrico no 6º ano do ensino fundamental", este trabalho apresenta um estudo do pensamento algébrico apresentado por alunos da 6ª série do ensino fundamental. O objetivo deste estudo foi investigar o efeito de uma sequência didática baseada na resolução de problemas, para a introdução de conceitos algébricos iniciais para alunos do 6º ano do ensino fundamental.

Na dissertação “Pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental: um olhar para as pesquisas científicas que contribuam para o aprendizado do que é proposto pela BNCC”, a autora tem por objetivo, por meio dos estudos teóricos realizados por ela, destacar que o trabalho proposto para a álgebra neste nível de ensino necessita de um novo olhar para a metodologia que enfatiza a resolução de problemas com foco em padrões e relações, o uso de estratégias, o compartilhamento e a sistematização de generalizações, para que o ensino ocorra de forma significativa.

Em sua dissertação: "O ensino de funções no 9º ano: construindo significados para Função a partir de generalizações", Ana Marques, ressalta a importância de sua pesquisa, por meio de suas experiências em sala de aula nos anos finais do ensino fundamental, no qual percebeu que o ensino da álgebra ganha destaque nos anos finais do ensino fundamental, autores como Kaput (1999) e Kieran (2004) afirmam que, tradicionalmente, o conteúdo algébrico tem sido trabalhado como um conjunto de regras e procedimentos, muitas vezes distantes de outros conteúdos matemáticos ou situações do mundo real. Por sua vez, Ponte (2009) defende a ideia de que o principal objetivo de trabalhar com este conteúdo deve ser o desenvolvimento do pensamento algébrico, que pode ser alcançado por meio do estudo de sequências e padrões visando à construção de generalizações, desde os anos iniciais de ensino. Nessa perspectiva, desenvolveu sua pesquisa cujo principal

objetivo de pesquisa é identificar se é possível construir um conceito de função em turmas do 9º ano do ensino fundamental a partir do estudo sequências com foco na generalização de padrões.

A dissertação intitulada “Introdução à álgebra no ensino fundamental - o “x” da questão”, a autora apresenta dados referentes ao Sistema de Avaliação da Educação Básica, na qual percebeu que nos conteúdos algébricos os alunos apresentam maior dificuldade. Neste sentido, o objetivo de sua pesquisa é colaborar com professores da rede que lecionam nos anos finais do ensino fundamental, com intuito de identificar os principais problemas em relação ao ensino da álgebra, para torná-la significativa para o aluno, por meio de estudos de padrões e sequências. Sendo assim, a pesquisa tem como objetivo promover o desenvolvimento do pensamento algébrico, a capacidade de generalização e a compreensão da linguagem algébrica, por meio de uma sequência didática elaborada com os conteúdos anteriormente citados.

Outra dissertação encontrada, traz como tema “Pensamento algébrico em tarefas com padrões: uma investigação nos anos finais do ensino fundamental”, no qual tem por objetivo identificar as formas de pensamento algébrico mobilizadas por estudantes dos anos finais do ensino fundamental ao responderem uma tarefa de generalização de padrões.

Na dissertação "Manifestação de pensamento algébrico em registros escritos de estudantes do ensino fundamental I", a autora realiza um estudo em relação à escrita dos alunos do 5º ano do ensino fundamental na prova Brasil. Busca por meio de fundamentação teórica em alguns autores, evidenciar as características do pensamento algébrico que possam ser manifestadas por esses alunos ao responder essas questões retiradas da Prova Brasil. Ao final desta pesquisa, a autora conclui que mesmo sem algum contato anterior com a simbologia e conceitos algébricos os alunos manifestam algumas características do pensamento em suas resoluções e registros.

No relato de experiência intitulado “A construção do pensamento algébrico utilizando atividades de investigação em sala de aula: o ensino de sequências”, Nesta pesquisa, os autores analisaram o desenvolvimento da álgebra de alunos do 7º ano, e elementos que caracterizam o pensamento algébrico, quando participam de atividades de pesquisa matemática envolvendo o conceito de sequências.

No relato de experiência “Desenvolvimento do pensamento algébrico: construindo o significado para conteúdos de álgebra nos anos finais do ensino fundamental”, a autora tem como foco o ensino de álgebra nas turmas finais do ensino fundamental. Tem como objetivo desenvolver uma sequência didática de ensino algébrico, de forma a contribuir para o desenvolvimento do pensamento e, com isso, oferecer subsídios para a construção do conhecimento matemático que faça sentido para os alunos.

No relato de experiência que tem como tema “Proposta de atividade investigativa com alunos no ensino fundamental, enfatizando os conceitos de álgebra”, os autores destacam atividades investigativas resultantes do objetivo de analisar as estratégias desenvolvidas por alunos do 7º e 9º anos durante a resolução das atividades em grupo. Como suporte teórico foram utilizados estudos sobre pesquisas matemáticas envolvendo metodologias como a investigação matemática. As atividades foram desenvolvidas com alunos do 7º e 9º ano do ensino fundamental.

Em seu relato de experiência “O pensamento algébrico e a tarefa de padrões: relato de uma experiência nos anos iniciais do ensino fundamental”, os autores trazem como foco de pesquisa o estudo realizado sobre o que os alunos do 5º ano do ensino fundamental se manifestam em uma tarefa que envolve padrões e regularidades, partindo da hipótese de que o pensamento algébrico seja estimulado mais cedo, já nos primeiros anos escolares, e que tarefas envolvendo regularidades podem ser frutíferas para esse fim, pois, pela percepção e diferenças entre termos de uma sequência, eleva sua capacidade de generalização.

No relato de experiência “Explorando o pensamento algébrico por meio da resolução de problemas”, os autores procuram descrever como as aulas foram aplicadas aos alunos do 8º e 9º anos. As aulas foram planejadas e desenvolvidas em duas etapas, a primeira utilizando o jogo “pega varetas” e a segunda um experimento envolvendo perímetro, área e volume. O objetivo foi explorar o pensamento algébrico e, por meio da abordagem metodológica de resolução de problemas.

No relato de experiência “O pensamento geométrico através de atividades lúdicas”, a autora destaca como as atividades lúdicas podem auxiliar no desenvolvimento do pensamento geométrico nos anos iniciais do ensino fundamental.

No relato de experiência intitulado “Concepções algébricas trabalhadas em turmas de 7° e 9° ano do ensino fundamental por meio de atividades investigativas,” os autores, tem por objetivo destacar certas estratégias por parte dos alunos das turmas mencionadas, na exploração de questões de investigação, abordando concepções algébricas e relacionadas com a área e com o perímetro.

Ao observar o levantamento bibliográfico e destacar o objetivo de pesquisa de cada um dos 14 textos encontrados, podemos perceber que 07 destes textos são dissertações e que os outros 07 são relatos de experiência. Das 07 dissertações nenhuma delas traz como foco de pesquisa o estudo do ensino da álgebra nos anos finais do ensino fundamental ou o desenvolvimento do pensamento algébrico com auxílio da investigação matemática. Em sua maioria, destacam o ensino da álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental, ou abordam outras metodologias como a resolução de problemas para atingir seus objetivos de pesquisa.

Dos 07 relatos de experiência destacados, apenas dois tratam do ensino da álgebra e o do desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos finais do ensino fundamental com auxílio de atividades investigativas. Os demais, trazem ricas contribuições, mas, tratam de atividades voltadas para determinados conteúdos como padrões e sequências com auxílio de outras metodologias, sequências didáticas, resolução de problemas e atividades lúdicas.

Deste modo, conseguimos observar por meio do levantamento bibliográfico que há poucos trabalhos publicados sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos finais do ensino fundamental, mais especificamente 8° e 9° anos, por meio de atividades de investigação matemática, o que justifica o interesse do desenvolvimento dessa pesquisa, visando contemplar o seu principal objetivo a finalidade do trabalho é estudar e analisar características do pensamento algébrico que são evidenciadas no desenvolvimento de uma atividade de investigação matemática desenvolvida no 8° ano do ensino fundamental.

3. REFERENCIAL TEÓRICO

De modo a contemplar a nossa problemática de pesquisa, este capítulo é dedicado a estudos teóricos sobre os assuntos que a compõem, desta forma, buscamos por autores que tratam sobre o pensamento algébrico, e também por autores que apresentam ferramentas necessárias para responder a problemática apresentada.

3.1 PENSAMENTO ALGÉBRICO: CONCEPÇÕES E CONTEXTO ESCOLAR

Apesar da evolução da Álgebra, hoje há quem a defina como uma ciência das soluções de equações Kieran (2004), de modo que ainda há dificuldade em entender a amplitude dos conceitos referentes a ela, limitando-se a pensá-la como expressões com incógnitas e variáveis indicadas por letras. No entanto, ao voltarmos no início dos estudos referentes à História da Matemática podemos notar que o desenvolvimento da Álgebra está diretamente ligado ao desenvolvimento do pensamento algébrico, na busca por padrões e regularidades a fim de ser possível traçar generalizações, dentre outras características. Nesse sentido, nos propusemos a estudar neste trabalho o pensamento algébrico e suas características.

A partir de suas características, percebemos que o pensamento algébrico está presente nas mais diversas áreas da Matemática, pois é por meio dele que sistematizamos as ideias ao resolvermos os mais variados problemas, seja na Geometria, na Aritmética ou na própria Álgebra. Sendo assim, para direcionar nossos estudos, uma pergunta nos instigou: Qual seria o objetivo de se estudar sobre o pensamento algébrico no âmbito escolar? Para nos ajudar a responder tal pergunta, primeiramente buscamos conhecer um pouco mais sobre o que é o pensamento algébrico, e para isso, apresentamos a seguir alguns autores que trazem suas concepções sobre ele e como podemos identificá-lo.

De acordo com Kaput (1999), o pensamento algébrico pode ser considerado como uma ferramenta intelectual de grande relevância na vida do indivíduo, pois o autor entende que o pensamento algébrico surge quando são estabelecidas generalizações sobre dados, mediante a processos de proposições e argumentos que ao serem estudados com frequência, favorecem um raciocínio mais complexo.

A partir da concepção das autoras Canavarro (2007), Brizuela (2006) e Kieran (2007), podemos afirmar que o pensamento algébrico se refere à construção das ideias envolvidas para se chegar à síntese para expressar alguma regra ou padrão, às respostas de alguma situação problema, logo a observação de regularidades e relações que podem ser estabelecidas, a fim de se chegar a um ponto mais geral por meio das expressões algébricas (uso de simbologia).

Sendo assim, após entendermos as concepções de pensamento algébrico por parte de alguns autores, vamos estudar e tratar sobre o desenvolvimento do pensamento algébrico no contexto educacional. Para isto, buscaremos essas informações por meio dos documentos como a BNCC e os PCN.

3.1.1) DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO: HABILIDADES PROPOSTAS PELOS PCN e a BNCC NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Ao olharmos para as aulas de Matemática, não é difícil nos depararmos com um ensino de álgebra focado nas expressões algébricas, no qual a linguagem simbólica é tratada como principal objeto de estudo, comprometendo assim o desenvolvimento do pensamento algébrico por parte dos alunos. No entanto, por meio de tendências metodológicas na Educação Matemática, essa prática tem mudado e o pensamento algébrico passa a ser olhado como um elemento fundamental no estudo de Álgebra e conseqüentemente da Matemática. Essa mudança tem ganhado espaço nos documentos oficiais que regem a Educação Básica, e nessa seção abordaremos o papel que o pensamento algébrico deve assumir nas aulas de Matemática, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais e a Base Nacional Comum Curricular.

Por volta do ano de 1995, o Ministério da Educação e Cultura (MEC) juntamente ao Governo Federal, criaram os PCN, que foram implementados em 1998, para estabelecer diretrizes curriculares para o Ensino Fundamental, anos iniciais e finais, e no ano de 2017 foi instituída a BNCC, cujo principal objetivo era garantir que os estudantes pudessem usufruir dos conhecimentos que se julga necessário para exercer o seu papel de cidadão.

Nos PCN, em relação ao ensino da Matemática, foram propostas três importantes competências para este nível de ensino, anos finais do Ensino Fundamental:

1. Representação e comunicação, que envolvem a leitura, a interpretação e a produção de textos nas diversas linguagens e formas textuais características dessa área do conhecimento;
2. Investigação e compreensão, competência marcada pela capacidade de enfrentamento e resolução de situações-problema, utilização dos conceitos e procedimentos peculiares do fazer e pensar das ciências;
3. Contextualização das ciências no âmbito sócio-cultural, na forma de análise crítica das idéias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico. (BRASIL, 1998, p. 113).

Para o ensino da álgebra, os PCN para o 3° ciclo (6° e 7° anos), recomenda que seja abordado “as noções algébricas que sejam exploradas através de materiais didáticos, como jogos, representações e generalizações matemáticas, por meio de gráficos e outros modelos que se diferenciem dos métodos mecânicos, para se ensinar equações e expressões algébricas” (BRASIL, 1998, p.84). Este ciclo, de acordo com o documento, pode ser determinado como uma pré- álgebra, que tem por objetivo preparar o aluno para a construção da noção de que a letra pode aparecer como uma variável dependente (funções), o que acontecerá no 4° ciclo (8° e 9° anos). Por sua vez, estes conceitos devem ser abordados através de situações problemas, que tragam essa relação de variações de grandezas, de modo que estas situações fornecem contextos interessantes para o desenvolvimento da noção deste conteúdo, (BRASIL, 1998, p.118).

Para o conteúdo de função, que é estudado no 9° ano, os PCN defendem que seja abordado de uma forma intuitiva. Desta forma, é preciso apresentar situações, sejam elas reais ou não, que façam com que os alunos apresentem suas resoluções por meio deste conceito. Assim temos um novo método de interpretação do conceito de função e onde podemos aplicá-lo, desfazendo a ideia de que função venha a ser um conjunto de letras e regras utilizadas apenas para memorização de soluções, desprovida de algum significado.

Sendo assim, para que o aluno tenha um aprendizado significativo e desenvolva a capacidade de abstração e generalização, os professores devem trabalhar desde o Ensino Fundamental alguns conceitos algébricos que são estudados de forma mais aprofundada no Ensino Médio, não com a mesma

complexidade, mas para se familiarizar com as diversas situações em que a álgebra está presente. Há um entendimento, que para compreender os conteúdos algébricos, os alunos precisam estar interessados e engajados com as diferentes atividades propostas que interrelacionam as diferentes concepções da álgebra. Na figura a seguir é possível identificar quais processos no ensino da álgebra estão previstos para este nível de ensino.

Figura 01: Álgebra no Ensino Fundamental

Dimensões da Álgebra	Aritmética Generalizada	Funcional	Equações	Estrutural
Uso das letras	Letras como generalizações do modelo aritmético	Letras como variáveis para expressar relações e funções	Letras como incógnitas	Letras como símbolo abstrato
Conteúdos (conceitos e procedimentos)	Propriedades das operações generalizações de padrões aritméticos	Variação de grandezas	Resolução de equações	Cálculo algébrico Obtenção de expressões equivalentes

Fonte: BRASIL (1998, pg.116)

De fato, muitas vezes estes processos ficam restritos ao desenvolvimento de cálculos e usos de expressões, em detrimento do desenvolvimento de atividades que propiciem processos de pensamento algébrico. Tal comportamento, além de não ir de encontro com as orientações apresentadas no Figura 1, pode prejudicar o entendimento dos significados desses conceitos e conseqüentemente do desenvolvimento do pensamento algébrico.

A partir do ano de 2017 a BNCC é o documento utilizado como referência para a Educação Básica. Em relação a Matemática, a BNCC, separa seus conteúdos em cinco vertentes obrigatórias no Ensino Fundamental, sendo elas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e Estatística. Mais especificamente sobre a Álgebra, a qual é tema de estudo deste trabalho, o documento sugere que o trabalho com a Álgebra tenha como principal objetivo desenvolver o pensamento algébrico, que é essencial para utilizar modelos ou generalizações matemáticas na compreensão, representação e análise de situações

e estruturas matemáticas, fazendo o uso da simbologia, seja através de números ou letras.

As ideias matemáticas fundamentais vinculadas a essa unidade são: equivalência, variação, interdependência e proporcionalidade. Em síntese, essa unidade temática deve enfatizar o desenvolvimento de uma linguagem, o estabelecimento de generalizações, a análise da interdependência de grandezas e a resolução de problemas por meio de equações ou inequações. (BRASIL, 2017, p.270).

Deste modo, os estudos de Álgebra devem começar nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Nesta fase de ensino, não se propõe a simbologia através das letras, mas sim atividades menos complexas como relacionar a igualdade de duas equações ou como se pode reescrever um número, como $2+3=5$ assim como $4+1=5$, sendo assim $2+3 = 4+1=5$ pois ambas possuem o mesmo resultado final.

Já nos anos finais do Ensino Fundamental os estudos da Álgebra devem ser mais aprofundados, ampliando assim o que foi estudado anteriormente. Nesta nova fase, os alunos devem compreender os diversos significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas. É necessário, portanto, que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função e entre incógnita e equação. As técnicas de resolução de equações e inequações, inclusive no plano cartesiano, devem ser desenvolvidas como uma maneira de representar e resolver determinados tipos de problema, e não como objetos de estudo em si mesmos. (BRASIL, 2017, p. 271).

Conforme comentado anteriormente, para uma melhor compreensão dos conteúdos elencados, é fundamental que se desenvolva o pensamento algébrico, pois podemos dizer que é ele que orienta o caminho a ser percorrido na resolução de problemas matemáticos. Tendo isso em vista, na próxima seção apresentamos de que forma o desenvolvimento do pensamento algébrico pode ser caracterizado, segundo alguns autores.

3.2) CARACTERIZAÇÃO DO DESENVOLVIMENTO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

De acordo com Blanton e Kaput (2005), pensamento algébrico se baseia na identificação, descrição, justificação e formalização por linguagem natural ou algébrica das relações entre quantidades variáveis. Esses autores consideram o pensamento algébrico como um processo que permite aos alunos generalizar, discursar, argumentar e formalizar ideias matemáticas, dependendo do trabalho realizado e da idade do aluno. Para estes autores, o processo de desenvolvimento do pensamento algébrico provém de alguns fatores, nem sempre relacionados de modo integral ao ensino da álgebra como componente curricular, pois o pensamento algébrico está presente em diversas áreas da Matemática, podendo ser caracterizado em quatro tipos da seguinte forma:

1. O uso da aritmética como campo de expressão e generalizações de formalização.(generalização aritmética).
2. Generalização de modelos numéricos para descrever relações funcionais; (pensamento funcional).
3. Modelagem como campo de expressão e formalização.
4. Generalização sobre sistemas matemáticos abstratos a partir de relações. (BLANTON e KAPUT, 2005, p. 413).

A ideia de modelagem se destaca como campo de expressão e formalização. Nesse sentido, as expressões e equações algébricas não são mais o foco principal do estudo da álgebra, mas sim ferramentas que ajudam no processo de resolução de alguns problemas. O termo generalização aritmético, citada como tipo 1, é também uma das habilidades do pensamento algébrico, Kaput (1999) se refere à generalização como a capacidade de perceber o que há em comum em determinadas situações, que podem ocorrer por meio de atividades que identifiquem padrões e sequências ou relações entre os termos ou objetos, é a habilidade de raciocinar e identificar características comuns em determinadas circunstâncias. Nesse sentido, a expressão de generalização pode ser usando linguagem natural ou usando a forma simbólica. Em relação ao pensamento funcional, segundo Kieran (2004):

A abordagem funcional para o surgimento do pensamento algébrico sugere o estudo da álgebra que se concentra no desenvolvimento com funções e conjunto de funções para situações da vida real, incluindo relações

quantitativas que podem ser representadas por esses modelos. (KIERAN, 2004, p. 143).

As relações funcionais podem, segundo a autora, oferecer situações em que o uso de símbolos e de letras é necessário. Assim, o desenvolvimento do pensamento funcional está diretamente ligado ao desenvolvimento do pensamento algébrico.

Quando se trata de pensamento algébrico, autores como Blanton e Kaput (2005) assumem por desenvolvimento do pensamento algébrico o processo de toda atividade considerada algébrica, desde as primeiras características desse pensamento, seja ele cálculos presentes em atividades menos complexas ou raciocínio sobre operações e propriedades associadas aos números, até que cheguem então a utilização de uma linguagem simbólica para estabelecer generalizações que possam por sua vez fazer previsões e resolver problemas. Deste modo, consideramos que o aluno assimila e expressa suas ideias matemáticas através deste processo de desenvolvimento.

Além dos textos citados anteriormente, utilizamos também para essa fundamentação teórica a pesquisa feita por Fernandes (2014). A autora, após estudar diversos textos que tratam sobre o tema, apresentou uma síntese a respeito do que alguns autores afirmam serem características do pensamento algébrico, autores estes que também foram estudados para compor a fundamentação teórica desta pesquisa. Sendo assim, a seguir exibimos um quadro adaptado do trabalho de Fernandes (2014), no qual a autora expõe características do pensamento algébrico apresentada por esses autores.

Quadro 01 - Caracterização do pensamento algébrico, segundo alguns autores

Kieran (1992, 2004, 2007)	<p>Consiste no modo de pensar e na atividade de generalizar, analisar e representar relações matemáticas e relações entre quantidades e grandezas, resolver problemas, modelar, justificar, realizar previsões, estabelecer padrões e regras.</p> <p>Ocorrem manifestações de indícios de pensamento algébrico ao revelar e argumentar a respeito de ideias algébricas, mesmo que em linguagem natural, ou com elementos como diagramas, tabelas, expressões numéricas e gráficos, ou, ainda, pela transição entre estes elementos e notações.</p>
Blanton e Kaput (2005)	<p>É um tipo de pensamento em que os estudantes generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de casos particulares e tem como principais características o uso da aritmética como campo para expressar e formalizar generalizações (aritmética</p>

	<p>generalizada), generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais, em que ocorre a exploração entre correspondência de quantidades, relações recursivas e desenvolvimento de regras para descrever relações (pensamento funcional), a modelação de situações e a generalização a respeito de sistemas matemáticos abstratos de cálculos e relações.</p>
Kaput (1999)	<p>É a capacidade de utilizar diferentes sistemas de representação, raciocinar dedutiva e indutivamente, relacionar, generalizar, modelar, realizar conjecturas e argumentar a respeito dessas conjecturas.</p> <p>Este pensamento tem como principais aspectos a generalização e formalização de padrões e restrições, manipulação de formalismos, estudo de estruturas abstratas a partir de cálculos e relações, estudo de funções, relações e variação de variáveis, utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controle de fenômenos.</p>
Ponte, Branco e Matos (2009)	<p>Este pensamento inclui a capacidade de lidar com expressões algébricas, equações, inequações, sistemas de equações e funções, assim como a percepção de relações e estruturas matemáticas, análise de propriedades matemáticas e interpretação de símbolos matemáticos.</p> <p>Além disso, o pensamento algébrico se relaciona à representação de forma simbólica, raciocínio dedutivo e indutivo e utilização de representações diversas de objetos algébricos para resolver problemas de diferentes domínios.</p>
Lins e Gimenez (1997)	<p>Relaciona-se com a aritmética e é um dos modos de produzir significado para a álgebra. Tem como principais características o aritmetismo (produção de significados apenas em relação a números e operações aritméticas), internalismo (considerar números e operações apenas segundo suas propriedades) e a analiticidade (ao operar com números desconhecidos como se fossem conhecidos). Além disso, manifesta-se por meio da investigação de regularidades, sistematização de propriedades observadas, resolução e discussão de problemas algébricos, modelação de situações e estabelecimento de padrões.</p>

Fonte: Fernandes (2014, p. 34, adaptado)

A partir de seus estudos sobre o pensamento algébrico e utilizando procedimentos baseados na Análise de Conteúdo, Fernandes (2014) elenca em sua pesquisa diversas características do desenvolvimento do pensamento algébrico, as quais podem surgir quando os alunos resolvem algumas atividades propostas a eles. No Quadro 2 a seguir, elencamos as características apresentadas por ela.

Quadro 02 - Características do pensamento algébrico analisadas

Unidade de Contexto	Unidade de Registro
Estabelecimento de relações	Relação funcional
	Relação de equivalência
	Relações envolvendo regularidades
	Relação envolvendo a percepção de aspectos invariantes
	Relação envolvendo comparação entre grandezas
Formulação de Conjecturas	Validação de ideias
Transição entre notações	Interpretação de dados representados em figuras, tabelas ou gráficos
	Utilização de diferentes notações para representar o mesmo elemento
Generalização	Generalização de padrões
	Generalização de relações funcionais
	Generalização por meio da utilização da aritmética

Fonte: Fernandes (2014, p. 62)

Em seus estudos Fernandes (2014), abarca autores que também serviram como embasamento teórico para esta pesquisa, desta forma as características do pensamento algébrico destacadas por ela no Quadro 02, vão de encontro com as características propostas por Blanton e Kaput (2005) e Ponte (2009). Sendo assim, para posteriormente analisar a atividade desenvolvida, para que nesta podemos evidenciar as características do pensamento algébrico que possam ser manifestadas, utilizaremos deste quadro para analisar se, ao final da pesquisa, contemplamos o nosso objetivo principal em relação a manifestação do pensamento algébrico.

Blanton e Kaput (2005, apud FERNANDES, 2014), vêem como modo de fomentar o desenvolvimento do pensamento algébrico a promoção de momentos em que os estudantes possam generalizar ideias matemáticas a partir de exemplos particulares, por meio de discursos argumentativos, se expressando com linguagens cada vez mais formais, apropriadas às suas idades. Não distante dessa visão está a concepção de Ponte (2009), o qual relata algumas etapas para esse

desenvolvimento e apresenta um quadro destacando características do mesmo em cada uma dessas etapas.

Quadro 03- Fases que compreendem o desenvolvimento do Pensamento Algébrico

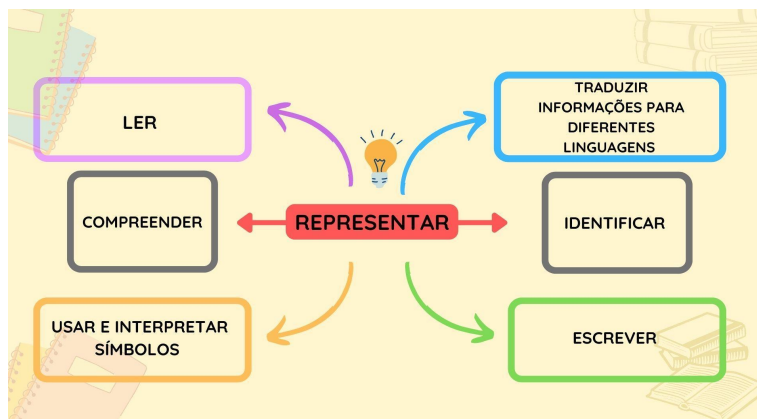
Representar	<ul style="list-style-type: none"> ● Ler, compreender, escrever e operar com os símbolos usando as convenções algébricas usuais. ● Traduzir informação representada simbolicamente para outras formas de representação (por objetos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa. ● Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos do mesmo símbolo em diferentes contextos.
Raciocinar	<ul style="list-style-type: none"> ● Relacionar (em particular, analisar propriedades). ● Generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão de regras. ● Deduzir.
Resolver problemas e modelar situações	<ul style="list-style-type: none"> ● Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e inequações). ● Funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios;

Fonte: Ponte, Branco e Matos (2009, p. 11, adaptado)

Conforme pode-se observar no Quadro 3, para Ponte (2009), o pensamento algébrico pode ocorrer em três fases, sendo elas: representar, raciocinar e resolver problemas. O autor ainda destaca que o pensamento algébrico caracteriza-se como a capacidade de compreender expressões algébricas, equações, inequações e funções, além de ser capaz de lidar com outras relações e áreas da Matemática.

Para que pudéssemos observar de forma mais clara as características contempladas nas três fases do desenvolvimento do pensamento algébrico descritas no Quadro 3, apresentamos as mesmas nas figuras 02, 03 e 04 a seguir, sendo uma figura para cada uma dessas etapas.

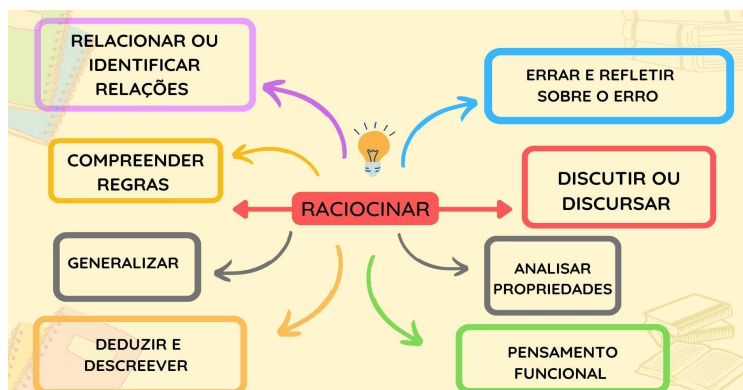
Figura 02: Fase 1 do Desenvolvimento do Pensamento Algébrico



Fonte: Adaptado de Ponte, Branco e Matos (2009, p.11)

Na figura 02 podemos observar as habilidades que estão presentes e podem ser evidenciadas na primeira fase de desenvolvimento do pensamento algébrico escrita como representar. A ideia de representação permite diversas formas para que estas ocorram, dependendo da situação apresentada. Nesse sentido, é importante que as atividades apresentadas sejam diversificadas e cada vez mais complexas, possibilitando aos alunos construir e desenvolver suas ideias de forma significativa.

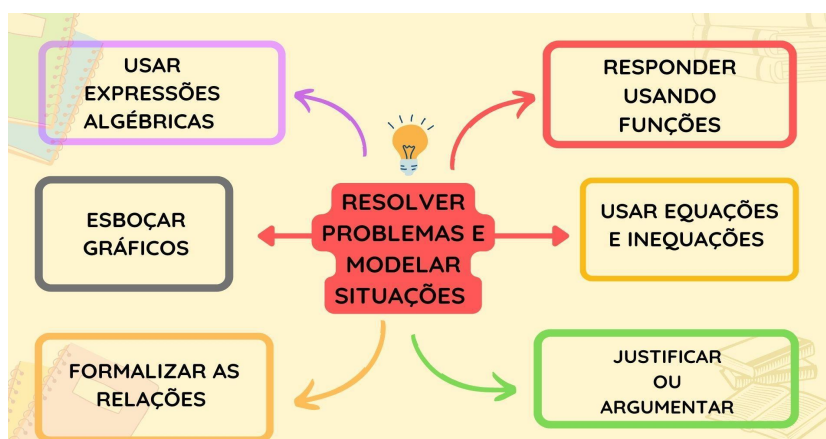
Figura 03: Fase 2 do Desenvolvimento do Pensamento Algébrico



Fonte: Adaptado de Ponte, Branco e Matos (2009, p.11)

Na figura 03, abordamos as habilidades do ato de raciocinar, quando o aluno desenvolve essas habilidades destacadas, está desenvolvendo as características da segunda fase do pensamento algébrico. O ato de raciocinar demanda determinado tempo, pois requer analisar, discutir, errar e refletir sobre o erro. Enfim, todas as atividades são fundamentais para a construção do pensamento algébrico. Além disso, ao oferecer apenas o que chamamos de fórmulas prontas, e as formas de resolução, não permitimos que os alunos desenvolvam suas ideias. Ainda referente a etapa raciocinar, tem-se que a generalização acontece nesse processo e pode ser o resultado final de todo esse trabalho.

Figura 04: Fase 3 do Desenvolvimento do Pensamento Algébrico



Fonte: Adaptado de Ponte, Branco e Matos (2009, p.11)

Na terceira e última etapa do desenvolvimento do pensamento algébrico, é possível identificar as habilidades decorrentes da resolução de problemas e modelagem de situações assim como representado na figura 04.

As habilidades de cada fase do desenvolvimento do pensamento algébrico, elencadas nas figuras 02, 03 e 04, também nos auxiliaram no processo de identificação, se houve ou não manifestação do pensamento algébrico no decorrer da atividade aplicada. Olhando ainda para as características presentes nesses diagramas, percebemos que as etapas do desenvolvimento do pensamento algébrico se relacionam com as etapas da Investigação Matemática, o que nos levou a escolher uma atividade dentro dessa perspectiva. Deste modo, estudaremos na próxima seção como ocorre o ensino por meio desta metodologia de ensino.

3.3) INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

A implementação de atividades investigativas nas aulas de matemática tem sido objeto de análise de muitos pesquisadores ao longo dos últimos anos. Muitos autores defendem que o desenvolvimento de tais tarefas poderia permitir que os alunos assumissem um papel mais ativo nas aulas de matemática. Nas atividades de investigação, percorremos por alguns aspectos que podem favorecer ao aluno um melhor desempenho em relação aos conceitos matemáticos.

As aulas de matemática, de certo modo são planejadas e desenvolvidas de modo tradicional, na qual se realizam somente exercícios pautados em cálculos, é algo mecânico que os alunos apenas reproduzem uma forma de resolução apresentada, de modo expositivo, pelo professor. Skovsmose (2000), caracteriza estes ambientes de aprendizagem como paradigma do exercício, e defende a ideia de que tarefas com referência no paradigma do exercício podem gerar aulas tradicionais. Sendo assim, o autor discorre sobre aulas pautadas em um cenário para investigação. O cenário de investigação, segundo ele, “seria um ambiente que pode dar base para um trabalho de investigação.” (SKOVSMOSE, 2000, p. 03). Ou seja, é o que leva os alunos a investigarem determinadas situações, pensarem a respeito, levantar hipóteses, para explicar e resolver a situação problema. No Quadro 04 podemos identificar possibilidades para ambientes de aprendizagem definidos pelo autor.

Quadro 04: Ambientes de Aprendizagem

	Exercícios	Cenário para Investigação
Referências à matemática pura	(1)	(2)
Referências à semi-realidade	(3)	(4)
Referências a realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2000, p.8)

No ambiente (1), encontramos atividades pautadas no paradigma do exercício com referência a matemática pura, são exemplos, deste ambiente, atividades como

arme e efetue. No caso (2), as atividades ainda são com referência a matemática pura, mas desenvolvidas em um ambiente de investigação, no qual os alunos não têm contato com a forma de resolução a priori, se caracterizando então como problemas e não atividades técnicas. Atividades dos ambientes (3) e (4), contém referências na semirrealidade, o que se difere entre eles é que o (3) está relacionado a exercícios e o (4) com problemas, podendo ser resolvidos em um cenário de investigação. Os ambientes (5) e (6), contém referência na realidade, porém o ambiente (5) é desenvolvido no paradigma do exercício, sendo assim, as atividades trazem exercícios com dados ou situações reais, mas que se desenvolvem de forma tradicional. O ambiente (6), contém referências na realidade e gira em torno de um cenário para investigação. Nesse caso, situações problema que podem ser geradas para este ambiente podem ser relacionados ao cotidiano, por exemplo: Observando as torneiras do Campus da Universidade Federal do Paraná (UFPR), qual é mais vantajosa em relação ao consumo de água, qual é mais econômica?.

Partindo deste pressuposto, para Ponte, Brocardo e Oliveira (2006) “Um problema é uma questão para a qual o aluno não dispõe de um método que permita a sua resolução imediata”. Sendo assim, o aluno pode e deve investigar para encontrar a ou as possíveis resoluções para este problema que lhe foi proposto.

O processo de Investigação Matemática tem por objetivo, resolver um problema com referência na matemática pura. Este processo ocorre em algumas etapas que são apresentadas no Quadro 05.

Quadro 05 - Etapas da Investigação Matemática

Exploração e formulação de questões	<ul style="list-style-type: none"> - Reconhecer uma situação problemática - Explorar a situação problemática - Formular questões
Conjecturas	<ul style="list-style-type: none"> - Organizar dados - Formular conjecturas (e fazer afirmações sobre cada uma delas - hipóteses)
Testes e reformulações	<ul style="list-style-type: none"> - Realizar testes - Refinar uma conjectura

Justificação e avaliação	<ul style="list-style-type: none"> - Justificar uma conjectura - Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio
--------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p.21)

Estas etapas nem sempre acontecem de forma linear, pois antes de justificar e avaliar podemos voltar aos testes e reformulações ou antes de validar as hipóteses retornar a interpretação da situação problema, e assim por diante.

Considerando o Quadro 05, consideramos que aliar o ensino de matemática com atividades de investigação, podem fazer com que o aluno tenha uma maior autonomia, além de possibilitar uma maior interação entre os colegas de turma, podendo discutir sobre o problema e sobre todas as etapas descritas para o processo de investigação. Pode-se começar com atividades relacionadas ao básico da álgebra, previstos dos documentos que baseiam a Educação Básica como a BNCC, como padrões e sequências, que são eventos que ocorrem com uma determinada frequência, obedecendo uma ordem, por exemplo: $\{1,3,5,7...\}$, ao observar a sequência de números, podemos concluir que sua frequência e padrão ocorrem de dois em dois números, dentre outros. Trabalhando estas questões na forma numérica, para que posteriormente seja possível a generalização de forma algébrica.

Para concluir o objetivo da problemática levantada, é previsto desenvolver atividades de caráter investigativo com turmas dos anos finais do Ensino Fundamental, tendo como conteúdos a serem abordados, padrões e sequências (6° e 7° anos), generalizações algébricas e funções (8° e 9° anos). Em relação à atividade a ser desenvolvida, tratamos de observar quais as habilidades e competências previstas na BNCC para a série em que escolhemos realizar o desenvolvimento, 8° ano. Destas competências e habilidades estão o ensino de padrões, sequências e possíveis generalizações, deste modo buscamos por uma atividade que contemple estes conteúdos, de maneira que estejam interligados. Por serem conteúdos abstratos tratados na matemática pura, porém, a atividade será pautada em um cenário de investigação, podemos caracterizá-la no ambiente de aprendizagem (2) de acordo com Skovsmose (2000).

4. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

4.1 CONTEXTO DO PLANEJAMENTO DAS ATIVIDADES

O pensamento algébrico é considerado por Blanton e Kaput (2005) como um processo que se inicia desde as suas primeiras características, sendo que a maioria delas não trata da álgebra em si, mas sim de cálculos aritméticos introdutórios, ou seja, o desenvolvimento do pensamento algébrico pode se iniciar desde o momento que se trabalha as quatro operações básicas e as propriedades associadas aos números, podendo até ser utilizado o uso de símbolos, para que posteriormente possa se fazer o uso de generalizações, a partir da necessidade de resolver problemas.

Diante disto, Kaput (1999) se refere à generalização como a capacidade de identificar o que há em comum em determinadas situações, que podem ocorrer por meio de atividades que identifiquem padrões e sequências, relações entre os termos expostos, é a habilidade de raciocinar e identificar características comuns em determinadas circunstâncias.

A partir desta referência teórica e do que está previsto na BNCC, verificou-se que o estudo de padrões, sequências e generalizações ocorre nos anos finais do Ensino Fundamental 8º e 9º anos. Dessa forma, para que pudéssemos atingir o objetivo proposto por esse trabalho, ou seja, estudar e analisar características do pensamento algébrico evidenciadas em uma atividade de Investigação Matemática aplicada aos anos finais do Ensino Fundamental, buscamos por uma atividade que começa trabalhando com algumas propriedades envolvendo números naturais em um quadro, até chegar a uma situação problema envolvendo esses números, a qual deveria ser generalizada posteriormente.

A atividade foi aplicada em duas turmas, um 8º e um 9º ano, de uma escola particular do norte do Paraná, instituição que nos cedeu duas aulas de um mesmo dia, em cada uma das turmas já citadas, nas quais foi possível desenvolver toda a atividade planejada. Estavam presentes no dia da aplicação, 12 alunos na turma do 8º ano e 6 alunos na turma do 9º ano.

Para o planejamento da atividade, desenvolvemos primeiramente com os membros do Projeto Ágora, projeto de extensão vinculado ao curso de Licenciatura em Ciências Exatas da UFPR - Campus Avançado de Jandaia do Sul, do qual a

autora e a orientadora deste trabalho também eram participantes. O Projeto Ágora tem como um de seus objetivos, estabelecer um diálogo entre seus participantes sobre o ensino de matemática nos diferentes níveis de ensino. Nesse sentido, são estudadas, planejadas e desenvolvidas atividades nas escolas parceiras, sendo essas pautadas em tendências da Educação Matemática.

Dentre as ações do projeto, estão o desenvolvimento das atividades de Trabalho de Conclusão de Curso, sendo que este trabalho foi um deles. Para o cumprimento desse objetivo, são promovidos encontros contando com a presença de professores formadores da UFPR, professores em formação e professores de algumas escolas de Jandaia do Sul que atuam como nossos parceiros. No ano de 2022, participavam do projeto quatro futuras professoras de Matemática, duas professoras formadoras, um estudante do curso de Engenharia de Alimentos, dois estudantes de mestrado na área de Educação Matemática e três professoras da Educação Básica.

Em relação às professoras da Educação Básica, destacamos que suas participações foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, pois foi durante uma das reuniões do projeto que conversamos com a professora regente das turmas, tendo em vista que a mesma atuava como professora colaboradora do projeto, a qual gentilmente disponibilizou suas aulas para que pudéssemos fazer as aplicações. Além disso, essas professoras participaram das discussões sobre o conteúdo a ser explorado, do planejamento das atividades e também da aplicação da mesma. Nesse sentido, a participação no projeto Ágora contribuiu muito com esse trabalho.

A atividade foi desenvolvida também em uma turma de alunos do Ensino Superior, na disciplina de Teoria dos Números do Curso de Licenciatura em Ciências Exatas da UFPR – campus avançado de Jandaia do Sul. Realizamos o desenvolvimento nesta turma também, para identificar características do pensamento algébrico também em adultos, que têm um contato com o estudo da álgebra de modo mais aprofundado. O desenvolvimento nas três turmas foi realizado no mesmo dia 28/11/2022. Para fins de descrição e análise, vamos considerar os dados obtidos na turma do 8º ano, pois foi a turma que apresentou uma maior obtenção de dados, estando eles mais detalhados, os registros dos alunos estão completos, com as informações necessárias para realização da análise.

4.2 AS TAREFAS PLANEJADAS

A atividade selecionada para ser aplicada foi desenvolvida primeiramente com os membros participantes do projeto *Ágora*, em uma das reuniões semanais, com o intuito de buscar diferentes opiniões e melhorias para a atividade. A partir dessa aplicação pudemos, por exemplo, ajustar a configuração dos quadros de registros, levantar quais possíveis questionamentos poderiam ser feitos em cada etapa da atividade proposta, estabelecer como seria realizada a coleta de dados, dentre outros. Deste modo, com as contribuições do grupo e melhorias propostas, foi possível realizar o desenvolvimento na escola com as turmas já mencionadas.

Conforme relatado, a professora regente das turmas nas quais a atividade foi aplicada era participante do projeto, e a mesma estava presente na reunião no dia da aplicação da atividade junto aos membros do projeto. Dessa forma, após a reunião a professora regente demonstrou interesse em relação a atividade e disponibilizou suas aulas para aplicação. A partir daí, a professora regente nos informou os dados necessários para o planejamento da aplicação da atividade, como quantidade de alunos de cada turma, repertório matemático dos alunos e carga horária disponível para o desenvolvimento da atividade.

Após estes estudos, selecionamos e adaptamos uma atividade presente no livro “Investigações Matemáticas em Sala de Aula” de Ponte, Brocardo e Oliveira(2006, p. 27). A atividade original se denomina, “Explorando os Números”, cujo a ideia central é estabelecer relações entre os números colocados em um quadro, assim como na ilustração a seguir:

Figura 05: Exemplo da Atividade de Investigação

QUADRO 2 - Explorações com números

Procure descobrir relações entre os números:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
...

Como sempre, registre as conclusões que for obtendo.

Fonte: Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p.27)

Para o desenvolvimento alteramos o título da atividade para “O mistério dos números”, para que a partir dele, pudesse despertar uma maior curiosidade dos alunos. Para introdução fizemos uso de um vídeo, que narra a história por trás dos números naturais e a sua importância, fazendo ênfase à necessidade humana no seu cotidiano, justificando a existência dos números. Enfatizamos que além dos materiais impressos e do vídeo, se usou também outros recursos digitais como slides.

Figura 06: Vídeo Introdutório



Fonte: EDUCAR SEMPRE. História dos Números Disponível em <<https://www.youtube.com/watch?v=IQtxvgto-Y&t=5s>>

A configuração do quadro também foi alterada e diferente da versão original, dividimos a atividade em três etapas, cada uma destas tinha um quadro referente a cada etapa do processo de investigação destes números. As etapas mencionadas estão demonstradas nos quadros 06, 07 e 08 e os registros dos dados serão referentes a cada uma destas etapas. Os quadros apresentados foram retirados da folha de registro que levamos para os alunos no dia da atividade.

Quadro 06: Exemplo Etapa 01 - Sem resolução

1) Observe o quadro abaixo e estabeleça relações entre os números que o compõem.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

ESCREVA AQUI TODAS AS PISTAS QUE VOCÊ ACHE IMPORTANTE PARA DESVENDAR ESTE MISTÉRIO. 😊 👁️

Fonte: Autora (2023)

Nesta primeira etapa, retratada no quadro anterior, apresentamos aos alunos o quadro inicial com números de 0 a 15, para que pudessem estabelecer as primeiras relações entre os números do quadro, ou seja, características que eles continham em comum.

Quadro 07: Exemplo Etapa 02 - Sem resolução.

Realizando a soma dos elementos de todas as linhas:

				SOMA
0	1	2	3	
4	5	6	7	
8	9	10	11	
12	13	14	15	
16	17	18	19	
20	21	22	23	
24	25	26	27	
28	29	30	31	
32	33	34	35	
36	37	38	39	
40	41	42	43	

Quais foram as pistas encontradas neste novo quadro ? 😊 👁️

Fonte: Autora (2023)

Na segunda etapa acrescentamos uma outra coluna denominada SOMA. Além disso, completamos também o quadro com números de 0 a 43, fazendo uma referência a primeira coluna que corresponde a tabuada do 4, conforme pode ser visto no quadro anterior.

Quadro 08: Exemplo Etapa 03 - Sem resolução

Nomeando as linhas e colunas através das relações anteriormente estabelecidas:

Nome das linhas					SOMA
	0	1	2	3	
	4	5	6	7	
	8	9	10	11	
	12	13	14	15	
	16	17	18	19	
	20	21	22	23	
	24	25	26	27	
	28	29	30	31	
	32	33	34	35	
	36	37	38	39	
	40	41	42	43	
N					

Fonte: Autora (2023)

Na terceira etapa, além da última coluna da soma, acrescentamos uma coluna denominada Nome das linhas, a qual serviria para ajudar na generalização da propriedade apresentada por cada coluna, e uma última linha que posteriormente serviria para realizar a soma da generalização das colunas, após encontradas suas características mediante as relações evidenciadas nas etapas anteriores da atividade.

Ao final das três etapas, os alunos responderam um questionário para concluir e analisar a atividade através do ponto de vista deles, com perguntas que nos permitissem avaliar a atividade possibilitando identificar os pontos positivos e negativos durante seu desenvolvimento, ver APÊNDICE B. Apesar de não encontrar respostas que se relacionam com o objetivo da pesquisa, esse relatório poderia contribuir para implementar melhorias na atividade para eventuais futuras aplicações.

Nesse sentido, destacamos que um dos alunos demonstrou ter um pouco de dificuldade em relação ao desenvolvimento da atividade, tratando-a como complicada e confusa. Essa impressão pode ter ocorrido nos momentos finais da atividade, por ser um momento onde ocorre uma abstração, mais precisamente, na última etapa na qual ocorreu a generalização final, foi o processo em que se identificou a maior dificuldade, pois os alunos não conseguiam evidenciar que o termo presente na expressão geral, era equivalente ao termo multiplicativo referente a expressão final que buscamos encontrar, a qual está destacada na figura 07. Vale lembrar que, devido a complexidade dessa manipulação final, essa parte da atividade foi toda conduzida pela professora, autora deste trabalho.

Figura 07: Exemplo da Generalização Final

$$\begin{aligned}
 &16x + 6 \\
 &4 \cdot 4x + 6 \\
 &4 \cdot 4x + (4 + 2) \\
 &4(4x + 1) + 2 \\
 &4x + 2
 \end{aligned}$$

Fonte: Autora (2023)

Quanto ao desenvolvimento da atividade, apresentamos no Capítulo 5 sua descrição e todo o processo de investigação. Devido ao tempo restante para terminar o ano letivo nas escolas e ao prazo para finalizar as atividades do TCC, essa foi a única atividade aplicada para atingir os objetivos desta pesquisa.

4.3 A ORGANIZAÇÃO DA TURMA PARA O DESENVOLVIMENTO DA ATIVIDADE

Iniciamos a aula com um vídeo trazendo a história e a importância dos números naturais desde seus primórdios. Após isso, separamos a turma composta por 12 alunos em três grupos de quatro pessoas. Deste modo separamos por grupos a coleta e seleção dos dados, os grupos denominaremos por (G1, G2, G3), pois são três grupos contendo quatro alunos cada um, e os alunos denominaremos

para exemplificar, (A1, ... , A12), assim iremos tratar estes de forma individual trazendo exemplos de cada etapa da atividade que demonstre que houve a manifestação do pensamento algébrico. Essa organização está descrita no quadro a seguir.

QUADRO 09: ORGANIZAÇÃO DAS ATIVIDADES DESENVOLVIDAS

Data da aula	Carga horária (h/a)	Tarefa(s) proposta(s)	Organização da turma
28/11/2022	2h/a	(Quadro 06) (Quadro 07) (Quadro 08)	Grupos (G) de Alunos (A): G1: A1, A2, A3, A4 G2: A5, A6, A7, A8 G3: A9, A10, A11, A12

Fonte: Autora (2023)

Conforme pode ser observado no quadro, os dados que compõem essa pesquisa foram coletados no decorrer de duas horas-aulas, nas quais estavam presentes os 12 alunos também descritos neste quadro, a autora deste trabalho, a professora regente da turma e um professor da UFPR. As tarefas foram orientadas principalmente pela autora deste texto e pela professora regente. O professor ficou responsável por registrar as aulas em imagens e também por orientar a turma no desenvolvimento das tarefas. Já as gravações em áudio e o diário de campo ficaram sob a responsabilidade da pesquisadora.

Após a separação dos grupos, entregamos em material impresso o primeiro quadro, no qual já apresentava a primeira etapa da atividade. Ao final da primeira etapa passamos para a segunda e por último a terceira etapa. A forma de como se deu o desenvolvimento dessas etapas estão descritas no Capítulo 5, no qual trazemos juntamente com a descrição da atividade, as análises referentes às características do pensamento algébrico evidenciadas na mesma.

4.4 COLETA E ANÁLISE DOS DADOS

Para que posteriormente, fosse possível analisar se nosso objetivo principal foi alcançado por meio da atividade e também para avaliar como foi o desempenho dos alunos em relação a esta, para obtenção dos dados, utilizamos registros escritos dos alunos, gravações em áudio e relatório da atividade.

As etapas da atividade foram realizadas em materiais impressos, os quais foram disponibilizados ao início da atividade e recolhidos ao final, justamente para que pudéssemos utilizar esses dados em forma de registros escritos pelos alunos. Por meio desses registros foi possível identificar como os alunos responderam as tarefas propostas e dessa forma, fazer um levantamento das características do pensamento algébrico que foram evidenciadas por eles.

Durante a condução da atividade, para que não se perdesse nenhuma hipótese ou ideia que fosse levantada pelos alunos, utilizamos também gravação em áudio, os quais foram analisados posteriormente e alguns desses diálogos foram elencados neste texto, juntamente com as análises dos registros escritos.

Para verificar o desempenho dos alunos e fazer uma avaliação da aula, entregamos aos alunos ao final da atividade um relatório com perguntas norteadoras, as quais auxiliaram a turma a avaliar a atividade do ponto de vista deles, com o intuito de identificarmos os pontos positivos e negativos durante o desenvolvimento da atividade e assim utilizá-los para implementar melhorias para aplicações futuras.

Após coletar os dados, passamos para a análise dos mesmos em relação à manifestação do pensamento algébrico. Para isso, utilizamos como fundamentação teórica, as características elencadas por Fernandes (2014), as quais apresentamos no referencial teórico deste trabalho por meio do Quadro 02. Primeiramente agrupamos cada etapa da atividade desenvolvida pelos grupos de alunos, e em seguida, diante das características elencadas por ela, analisamos se houve manifestação do pensamento algébrico nessas etapas. A partir daí, representamos por meio de imagens a interpretação e relações estabelecidas pelos alunos, bem como os processos de resoluções que estes utilizaram para chegar a solução do problema inicial proposto. Essas imagens foram utilizadas no Capítulo 5 para justificarmos e elencarmos quais características do pensamento algébrico foram evidenciadas nessa atividade.

4.5 CARÁTER DA PESQUISA

Neste capítulo abordamos os procedimentos metodológicos seguidos nesta investigação cujo objetivo consistiu em estudar e analisar características do pensamento algébrico que são evidenciadas em uma atividade de Investigação

Matemática desenvolvida nos anos finais do Ensino Fundamental. Como método de realização da pesquisa, para se obter o resultado esperado percorremos por diversos caminhos como a realização de estudos sobre as características do pensamento algébrico, buscamos ainda por teorias que pudessem ser utilizadas para analisar os resultados da atividade de investigação desenvolvida. A partir disso, a pesquisa se voltou para a busca de uma atividade de Investigação Matemática que favorecesse a manifestação das características do pensamento algébrico. Por fim, nos dedicamos por meio de referenciais adequados, analisar as características do pensamento algébrico que foram evidenciadas na atividade de Investigação Matemática desenvolvida, a qual será descrita e analisada posteriormente.

Tendo em vista tais características, essa pesquisa se classifica como uma pesquisa predominantemente qualitativa, pois de acordo com Borba (2004, p. 02), a pesquisa qualitativa “prioriza procedimentos descritivos à medida em que sua visão de conhecimento explicitamente admite a interferência subjetiva, o conhecimento como compreensão que é sempre contingente, negociada e não é verdade rígida”,

Destacamos ainda que de acordo com os autores Bogdan e Biklen (1982), uma pesquisa de caráter qualitativo tem como fonte direta um ambiente natural, no caso em questão a escola em que se desenvolveu as atividades que subsidiaram os dados para a pesquisa, no qual o pesquisador é responsável por todo processo de sua pesquisa. Este tipo de pesquisa é descritiva, necessitando de grande atenção para as informações em relação a ela, sejam referentes a pessoas que participaram da pesquisa, locais e contextos.

Na pesquisa qualitativa o foco principal é o processo de pesquisar e analisar os dados obtidos e a mesma acontece de forma indutiva. O que nos faz perceber que a pesquisa de caráter qualitativo busca um significado para a pesquisa realizada e não apenas com valores quantitativos, números, valores reais, o que caracteriza nosso formato de pesquisa.

5. ANALISANDO A ATIVIDADE DESENVOLVIDA EM RELAÇÃO À MANIFESTAÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

A partir de agora analisar a atividade desenvolvida, procurando identificar em cada etapa percorrida, manifestações de características relacionadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico e avaliar se realmente houve essa manifestação mediante ao processo de Investigação Matemática na atividade proposta. Para isto, vamos utilizar como características do pensamento algébrico aquelas elencadas por Fernandes (2014), as quais foram apresentadas nos referenciais teóricos deste trabalho. Além disso, neste capítulo buscamos relacionar a atividade desenvolvida e as etapas que a mesma foi dividida, com as fases do desenvolvimento do pensamento algébrico propostos por Ponte (2009) e com as etapas que percorremos mediante a uma atividade de Investigação Matemática propostas por Ponte, Brocardo e Oliveira, (2006).

A aula se iniciou com uma breve introdução, um diálogo para passar a fazer o convite para a atividade de investigação. Para despertar a curiosidade sobre o assunto que posteriormente seria abordado, o possível “Mistério dos Números”, primeiramente foi exibido um vídeo que tratava sobre a história dos números naturais e algumas curiosidades sobre esses números. Essa foi uma estratégia usada para que se iniciasse o processo de investigação em sua primeira etapa, sendo que a partir daqui os alunos passariam a conhecer a situação problema.

Ao apresentar a primeira etapa aos alunos, para que pudéssemos obter alguns dados e orientar os estudantes neste processo de investigação fizemos algumas perguntas, pois, durante o processo de investigação, questionar e instigar o aluno, faz com que ele passe a pensar e relacionar os conceitos conhecidos por ele com o problema proposto.

Uma das perguntas levantadas foi: Como os números se comportam nas linhas e nas colunas? A partir desta pergunta alguns alunos já conseguiram identificar várias relações, como indica a Figura 08, a qual representa o registro da primeira etapa.

Figura 08: Exemplo Etapa 01 - Com resolução

1) Observe o quadro abaixo e estabeleça relações entre os números que o compõem.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

ESCREVA AQUI TODAS AS PISTAS QUE VOCÊ ACHE IMPORTANTE PARA DESVENDAR ESTE MISTÉRIO. 🕵️ **

1. OS NÚMEROS DAS COLUNAS AVANÇAM DE 4 EM 4,
2. A DIAGONAL PRINCIPAL SÃO MÚLTIPLOS DE 5, E A SECUNDÁRIA MÚLTIPLOS DE 3.
3. AS LINHAS AVANÇAM DE FORMA CRESCENTE;
4. AS COLUNAS PARES CONTÊM N^{OS} IMPARES.
5. A SOMA DAS COLUNAS AUMENTAM DE 4 EM 4.

Fonte: Autora (2023)

Desta primeira etapa surgiram as seguintes relações:

1. Os números das colunas somam de 4 em 4.
2. As linhas aumentam de um em um de forma crescente.
3. A 1^o coluna e a 3^o coluna contém números pares.
4. A 2^o e a 4^o coluna contém números ímpares.
5. A diagonal principal são múltiplos de 5 e a diagonal secundária são múltiplos de 3.
6. Os números da primeira coluna são referentes à tabuada do 4.

A imagem a seguir mostra o registro do aluno G1,A2 referente à primeira etapa da atividade que foi desenvolvida.

Figura 09: Registro da 1ª Etapa (G1,A2)

1) Observe o quadro abaixo e estabeleça relações entre os números que o compõem.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

CREVA AQUI TODAS AS PISTAS QUE VOCÊ ACHE IMPORTANTE PARA
SOLUCIONAR ESTE MISTÉRIO. 🕵️ **

as colunas de números vão aumentando de 4 em 4
as duas primeiras são milhares de 4 e 8
os números são organizados de 4 em 4
as colunas vão aumentando de 4 em 4
a 1ª coluna é a tabuada de 4

Fonte: Autora (2023)

Conforme já foi dito, nesta etapa os alunos precisavam, primeiramente, estabelecer algumas relações entre os números presentes no quadro. Essas relações estão descritas na Figura 09, logo abaixo do quadro. Sendo assim, vamos agora analisar se houve nessa etapa a manifestação de alguma característica do pensamento algébrico.

Tomando como base os estudos realizados por Fernandes (2014), podemos associar esta primeira etapa com a unidade de contexto prévio denominada por ela como estabelecimento de relações, que é quando os estudantes conseguem estabelecer relações entre os números, e isso pode ser usado como um tipo de preparação para uma transição entre a aritmética e a álgebra. Diante disto, podemos categorizá-la em relação envolvendo regularidades, pois o objetivo principal era fazer com que os alunos conseguissem estabelecer relações em comum entre os números presentes no quadro, os quais seguiam um determinado padrão.

Mediante essas colocações, podemos afirmar que o estudante G1, A2 manifestou característica do pensamento algébrico correspondente às relações envolvendo regularidades. Isso se percebe observando as relações descritas pelo aluno, por exemplo: as colunas no sentido vertical avançam de 4 em 4, e que a primeira coluna é a tabuada de 4.

Podemos observar que essas características também foram apresentadas pelo estudante G3, A3, conforme registro na Figura 10. De modo geral os grupos tiveram algumas percepções em comum e outras não, então elencamos cada uma delas na lousa, para que a turma toda pudesse perceber e reconhecê-las além das evidenciadas pelo seu grupo.

Figura 10: Registro da 1ª Etapa (G3, A3)

1) Observe o quadro abaixo e estabeleça relações entre os números que o compõem.

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15

ESCREVA AQUI TODAS AS PISTAS QUE VOCÊ ACHE IMPORTANTE PARA DESVENDAR ESTE MISTÉRIO. 🕵️ 🗨️

1. Os nº das colunas avançam de 4 em 4.
 2. a diagonal são múltiplos de 4, e a secundária múltiplos de 3.
 3. as linhas avançam de forma crescente;
 4. as colunas pares contêm mp.
 5. a soma das colunas aumenta de 4 em 4.
 6. a 1ª coluna é a quadrada do 4.

Fonte: Autora (2023)

Nesta primeira etapa, os alunos tiveram o contato inicial com a atividade e se inteiraram de quais seriam os primeiros passos a serem realizados, para que em seguida pudessemos prosseguir para o segundo quadro de relações.

Além disso, a partir dos diagramas das figuras 02, 03 e 04 adaptados de Ponte (2009) e do Quadro 05 (Ponte, Brocardo e Oliveira, 2006), podemos evidenciar características no pensamento algébrico e do processo de investigação. Ao observar as relações estabelecidas pelos estudantes, podemos afirmar que esta etapa inicial pode se relacionar com a primeira fase das características do pensamento algébrico, que consiste em representar, ler, compreender e traduzir informações apresentadas. Assim como as primeiras fases que podemos evidenciar no desenvolvimento do pensamento algébrico, o processo de investigação também se inicia nesta etapa da atividade, em reconhecer a situação problema explorar os

dados elencados pela situação problema e formular algumas questões. Ficou evidente que os alunos conseguiram compreender o que a situação problema estava propondo, conseguiram estabelecer algumas relações importantes entre os números do quadro que vão posteriormente nos ajudar a evoluir no decorrer da atividade de investigação.

Seguindo então com a nossa análise, analisaremos agora o que denominamos de segunda etapa. É nesta etapa que vamos identificar qual o principal objetivo da atividade e isso será feito usando o segundo quadro entregue aos alunos (Quadro 07), a partir do qual os alunos tinham que realizar novas constatações, agora referente à soma dos elementos das linhas. Essas novas constatações os ajudariam a encontrar a situação problema principal, ou seja, perceber que essa soma poderia ser localizada no quadro de números e que sempre estaria na terceira coluna. Uma das relações mais importantes para seguirmos com a próxima etapa e para o próximo quadro da folha de registro, é a número 6, ou seja, “que os números da primeira coluna é a tabuada do número 4.”

Nesse segundo quadro já estava preenchida a primeira coluna com a tabuada do 4, do 0 ao 40, conforme pode ser visto na Figura 11. O quadro, continha uma quinta coluna denominada SOMA, e a tarefa principal era completar tal coluna realizando a soma dos elementos das linhas e localizar o resultado destas somas no quadro de números. Por meio dessa tarefa, também obtivemos novas relações e pudemos observar diferentes modos de realizar a soma.

Figura 11: Exemplo Etapa 02 - Com resolução

Realizando a soma dos elementos de todas as linhas:

				SOMA
0	1	2	3	6
4	5	6	7	32
8	9	10	11	38
12	13	14	15	54
16	17	18	19	70
20	21	22	23	86
24	25	26	27	102
28	29	30	31	118
32	33	34	35	134
36	37	38	39	150
40	41	42	43	166

Quais foram as pistas encontradas neste novo quadro ? 🧐

1. A SOMA DOS NÚMEROS AUMENTAM DE 16 EM 16
2. A SOMA É O RESULTADO E PAR
3. OS RESULTADOS DAS SOMAS ESTÃO NA 3ª COLUNA.

Fonte: Autora (2023)

Após realizarem a soma, constataram novas relações, como:

1. Todos os resultados são pares.
2. As somas acontecem de 16 em 16.
3. Os primeiros três resultados estão na terceira coluna.

A Figura a seguir mostra o registro do aluno G1,A2 referente à segunda etapa da atividade.

Figura 12: Registro da 2ª Etapa (G1,A2)

Realizando a soma dos elementos de todas as linhas:

				SOMA
0	1	2	3	6
4	5	6	7	22
8	9	10	11	38
12	13	14	15	54
16	17	18	19	70
20	21	22	23	86
24	25	26	27	102
28	29	30	31	118
32	33	34	35	134
36	37	38	39	150
40	41	42	43	166

Quais foram as pistas encontradas neste novo quadro ?

1- A soma aumenta de 16 em 16

2- Os primeiros sempre estão na 3ª coluna

Fonte: Autora (2023)

Na imagem, é possível perceber algumas relações que o aluno conseguiu identificar mediante as características encontradas anteriormente. Uma das principais características do quadro, a qual era de suma importância que os alunos identificassem, é que a primeira coluna era correspondente a tabuada do 4 e isso girava em torno de outras questões como a configuração do quadro, a soma das linhas que é realizada nessa etapa, na qual observaram que aumenta de 16 em 16 e conseqüentemente diminui de 16 em 16, sendo 16 um número múltiplo de 4.

Diante disso, conseguimos identificar nesta etapa algumas características do pensamento algébrico que estão dentro da unidade de contexto prévio denominada por Fernandes (2014), como formulação de conjecturas, a qual segundo ela acontece por meio da manifestação de uma ideia ou opinião, baseadas em hipóteses ou experiências vividas. Neste caso, podemos observar que o estudante G1, A2 manifestou novas ideias que poderiam ser usadas na resolução do

problema, sendo estas favorecidas pelas experiências vivenciadas na etapa anterior da atividade. A formulação dessas conjecturas posteriormente deve ser validada utilizando-se das ideias e hipóteses anteriormente levantadas e de argumentos ou operações matemáticas.

Mediante a imagem apresentada na Figura 13, é possível perceber essa validação, a qual faz parte da formulação de conjecturas, pois é possível perceber que o aluno utilizou além dos argumentos, operações matemáticas para realizar a soma e encontrar e validar a hipótese levantada.

Figura 13: Registro da Etapa 02

Realizando a soma dos elementos de todas as linhas:

				SOMA
0	1	2	3	6
4	5	6	7	22
8	9	10	11	38
12	13	14	15	54
16	17	18	19	70
20	21	22	23	86
24	25	26	27	102
28	29	30	31	118
32	33	34	35	134
36	37	38	39	150
40	41	42	43	166

Quais foram as pistas encontradas neste novo quadro ? **

- * As somas aumentam sempre em 16
- * As somas aumentam sempre em 16
- * As somas aumentam sempre em 16

Fonte: Autora (2023)

De maneira geral os alunos conseguiram, fundamentados nas hipóteses e relações estabelecidas na primeira etapa, encontrar as novas relações estabelecidas na segunda etapa, o que foi de grande importância para chegarmos ao problema principal da atividade, ou seja, provar que a soma dos elementos das linhas vai estar sempre localizados na terceira coluna.

Outro registro interessante para se descrever ainda nessa etapa, seria a diferente forma que um dos alunos utilizou para realizar a soma.

Figura 14: Registro Etapa 02

Realizando a soma dos elementos de todas as linhas:

				SOMA
0	1	2	3	6
4	5	(6)	7	22
8	9	10	11	38
12	13	14	15	54
16	17	18	19	70
20	21	(22)	23	86
24	25	26	27	102
28	29	30	31	118
32	33	34	35	134
36	37	(38)	39	150
40	41	42	43	166

Quais foram as pistas encontradas neste novo quadro ? 🧐 **

- A diferença de 16 entre as somas de cada linha.

- A soma total é 166.

- A soma de cada linha é 16 maior que a soma da linha anterior.

Fonte: Autora (2023)

Ao realizar a soma o aluno começou das dezenas maiores para as menores, de forma decrescente e então tivemos o seguinte diálogo:

Professora: por que está somando desta forma ?

A2,G2: Porque achei mais fácil encontrar o valor total e o subtraindo do que somando dezena por dezena.

Professora: É uma boa estratégia.

A2,G2: A partir da terceira soma, percebi que diminui de 16 em 16, assim não precisei realizar todas as somas, só tirei 16 de cada valor encontrado.

Pelo método utilizado pelo aluno podemos identificar mais características do pensamento algébrico que se manifestou no decorrer da atividade. No momento em que o aluno percebe que a soma diminui de 16 em 16, ele está estabelecendo relações envolvendo regularidades, além disso ao utilizar essa relação para efetuar a soma o aluno demonstra perceber que as duas formas de realizar a soma são equivalentes. Essa última característica destacada, segundo Fernandes (2014), se

denomina relação de equivalência, ou seja, é quando existe a exploração entre a igualdade dos termos de uma expressão.

Assim como na etapa anterior da atividade podemos também relacionar com as características do pensamento algébrico e com as etapas do processo de Investigação Matemática. Essa afirmação está baseada no fato de que, após realizarem a soma, os alunos conseguiram encontrar mais algumas relações existentes no segundo quadro. Esse processo dentro das fases do desenvolvimento pensamento algébrico se caracteriza como raciocinar que consiste em analisar as propriedades anteriormente encontradas e buscaram alguma forma de deduzir ou generalizar e compreender as novas regras que surgiram. Em relação ao processo de Investigação Matemática, se diz respeito à segunda e terceira etapas, que são organizar os dados anteriormente encontrados e formular conjecturas a partir deles, para que com ajuda destes consigam avançar para as novas relações e assim chegarem ao objetivo final que foi denominado nesta etapa. É possível também formular novas hipóteses após observar o comportamento da soma dos elementos de cada linha que consistem do quadro.

A partir das relações encontradas nesta etapa, para que pudéssemos avançar, questionamos os alunos sobre a terceira relação encontrada, ou seja, provar que o resultado da soma dos elementos das linhas, se encontrava sempre na terceira coluna.

- Será que isso é válido para todas as linhas?
- Mas nós vamos conseguir fazer isso infinitamente?
- Vamos tentar encontrar uma forma de comprovar sem ter que somar todas as linhas?

Posteriormente, a este novo questionamento, iniciamos a terceira e última etapa da atividade, com o objetivo principal exposto, provar que o resultado das somas dos elementos das linhas está sempre na terceira coluna. Realizando o estudo das hipóteses, para que posteriormente conseguissem provar que estas poderiam ser verdadeiras e que esse problema poderia ser resolvido, ocorreu o seguinte diálogo:

Professora: Será que conseguimos provar esta hipótese por meio da soma?

A2,G3: É possível, mas seria difícil somar mais linhas.

Professora: Mas por quê?

A2,G3: A soma do quadro não tem fim.

Professora: Podemos somar infinitamente então?

A2.G3: Eu acho que sim.

Professora: Será que conseguimos encontrar uma forma de resolver o problema sem utilizar infinitas somas?

A2,G3: Não sei...

Após a soma dos elementos das linhas, pudemos iniciar a análise da terceira e última etapa da atividade, com o auxílio das conjecturas encontradas nas etapas anteriores. Neste momento adotamos algumas estratégias que foram expostas pelo professor, para que os alunos conseguissem compreender e acompanhar todo o processo algébrico da resolução, ou seja, o processo de generalização da soma. A principal delas foi partir da configuração da primeira coluna, que se configura como a tabuada do 4, e nomear as linhas, de modo natural, com os números que deveriam ser multiplicados por 4 para que obtivéssemos essa tabuada, ou seja, (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10). A Figura 15 destaca como um dos alunos registrou essa estratégia.

Figura 15: Representação Nomeando as Linhas

Nomeando as linhas e colunas através das relações anteriormente estabelecidas:

Nome das linhas	$4x$	$4x+1$	$4x+2$	$4x+3$	SOMA
0	0	1	2	3	6
1	4	5	6	7	23
2	8	9	10	11	40
3	12	13	14	15	57
4	16	17	18	19	74
5	20	21	22	23	91
6	24	25	26	27	108
7	28	29	30	31	125
8	32	33	34	35	142
9	36	37	38	39	159
10	40	41	42	43	176
N	$4x$	$4x+1$	$4x+2$	$4x+3$	

Fonte: Autora (2023)

Após nomear as linhas, os alunos perceberam que a primeira coluna do quadro inicial se caracterizava como números da forma $4x$ (múltiplos de 4), sendo que x estava representando os números usados para nomear as linhas. Tendo isto como base, novos questionamentos foram feitos.

- Qual será a configuração da segunda coluna?
- E das demais? Será que conseguimos provar o que queremos desta forma?

Sendo assim, passaram a observar que se a base era a primeira coluna, formada pelos números (0, 1, 2, 3, 4 ... 10) usados para formar a tabuada do quatro, e se a segunda coluna era formada pela multiplicação de 4 por tais números ($4x$), então as próximas colunas seriam o resultado da multiplicação de 4 pelos números da coluna Nome das linhas, somado a um valor que resultasse no elemento da respectiva coluna. A partir dessa percepção, eles conseguiram nomear as colunas conforme pode ser observado na primeira linha da Figura 16.

Figura 16: Exemplo Etapa 03 - Com resolução

Nomeando as linhas e colunas através das relações anteriormente estabelecidas:

Nome das linhas	$4x$	$4x+1$	$4x+2$	$4x+3$	SOMA
0	0	1	2	3	6
1	4	5	6	7	23
2	8	9	10	11	40
3	12	13	14	15	57
4	16	17	18	19	74
5	20	21	22	23	91
6	24	25	26	27	108
7	28	29	30	31	125
8	32	33	34	35	142
9	36	37	38	39	159
10	40	41	42	43	176
N	$4x$	$4x+1$	$4x+2$	$4x+3$	

Relate quais foram as pistas utilizadas para desvendar o mistério dos números. 🧐 ✎

Fonte: Autora (2023)

Essa nomeação se deu utilizando as características de cada coluna, nas quais podemos perceber uma das características do pensamento algébrico que é a generalização. Um segundo registro dessa generalização pode ser observado na Figura 17 a seguir.

Figura 17: Registro Etapa 3.

Nomeando as linhas e colunas através das relações anteriormente estabelecidas:

Nome das linhas	$4x$	$3x+1$	$2x+2$	$x+3$	SOMA
0	0	1	2	3	6
1	4	5	6	7	22
2	8	9	10	11	37
3	12	13	14	15	51
4	16	17	18	19	70
5	20	21	22	23	92
6	24	25	26	27	116
7	28	29	30	31	142
8	32	33	34	35	170
9	36	37	38	39	200
10	40	41	42	43	232
N	$4x$	$3x+1$	$2x+2$	$x+3$	$10x+6$

Relate quais foram as peças utilizadas para desenvolver o mistério dos números. **

$30x+6$

$4x+6$

$4(4x+6)$

$4(4x+6)+2$

$12+42$

Fonte: Autora (2023)

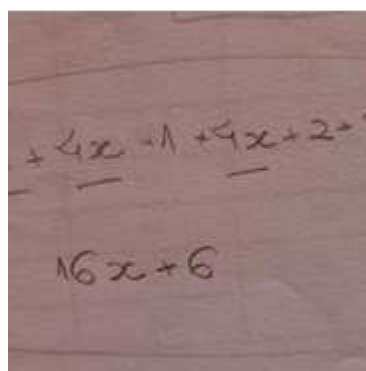
Vemos a partir dessa figura que o aluno tomou como exemplo o formato da primeira coluna ($4x$), e ao observar os números das colunas seguintes, ele conseguiu estabelecer as configurações de cada coluna.

Segundo Fernandes (2014), esta etapa se denomina Generalização, o que torna relativa a possibilidade de modificar de modo geral uma característica que de início era uma situação específica. Segundo ela, as generalizações se classificam em: generalização de padrões, generalizações de relações funcionais e generalização por meio da utilização da aritmética. Nesse caso, podemos classificar a nomeação das colunas como generalização de padrões e generalizações de relações funcionais. A generalização de padrões, se justifica, pois foi obtida a partir do padrão que puderam perceber no quadro de números, enquanto que as generalizações de relações funcionais, ocorrem quando os alunos utilizam a relação existente entre a primeira e as demais colunas para estabelecerem as expressões algébricas correspondentes a cada uma delas. De acordo com Fernandes (2014)

essa característica é percebida quando o estudante é capaz de entender e usar correspondências, sejam elas entre grandezas e quantidades ou por meio de relações recursivas.

Posteriormente, usando a generalização estabelecida, também se somou os elementos das colunas, como exemplificado na figura 18, pois o que queríamos provar era que a soma dos elementos das linhas estava sempre na terceira coluna.

Figura 18: Soma dos termos


$$\begin{array}{r} + 4x + 1 \\ + 4x + 2 \\ \hline 8x + 3 \end{array}$$
$$16x + 6$$

Fonte: Autora (2023)

Aqui percebemos mais uma característica do pensamento algébrico: a generalização por meio da aritmética, que segundo Blanton e Kaput (2005) é quando se faz uso da aritmética para resolver expressões e formular generalizações.

Podemos observar ainda na Figura 18, que ao indicarem a soma das expressões que descreviam as colunas, perceberam que algumas parcelas dessa soma estavam em função de incógnitas, porém, era a mesma incógnita em questão, sendo possível realizar a soma desses termos semelhantes. Resolvendo a soma, chegamos a uma generalização que validaria nossa hipótese inicial, o próximo passo seria transformar esta expressão na configuração dos elementos da terceira coluna, ou seja, em algo com a forma $4x+2$. Para tal feito, inicialmente reescrevemos a expressão de modo que pudéssemos deixar evidente um termo em comum com a expressão algébrica desejada, o que pode ser visto na Figura 19.

Figura 19: Generalização Final

$$\begin{aligned}
 &16x+6 \\
 &4 \cdot 4x+6 \\
 &4 \cdot 4x+(4+2) \\
 &4(4x+1)+2 \\
 &\boxed{4x+2}
 \end{aligned}$$

Fonte: Autora (2023)

Fatoramos o 16 como o produto de 4 por 4, no intuito de deixar o 4 em evidência, reescrevemos o número 6 como soma de 4 com 2, para que pudesse aparecer o 2 da expressão final, a qual caracterizaria que este número estaria na terceira coluna. Ao final obtivemos $4(4x+1)+2$, nomeamos a expressão dos parênteses como sendo X, encontramos a expressão que configura os elementos da terceira coluna, concluindo e provando a hipótese e situação problema levantada da etapa 2.

Ainda na Figura 19 podemos observar uma maneira utilizada para simplificar a generalização da soma, de modo a se obter a configuração da terceira coluna ($4x+2$), conseguindo assim validar a hipótese inicial, ou seja, a hipótese de que a soma dos números da linha sempre estaria na terceira coluna.

Para finalizar a análise em relação às características do pensamento algébrico, nesta parte final da terceira etapa da atividade, também podemos perceber outra característica do pensamento algébrico que (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413) denomina como generalização aritmética, ou seja, o uso da aritmética como ferramenta para descrever expressões e generalizações. Essa afirmação tem como base o fato de que utilizamos da aritmética para entender e compreender as novas relações presentes no quadro, mais especificamente durante a segunda e a terceira etapa, as quais revelaram o objetivo principal da tarefa. Essa classificação também está de acordo com Fernandes (2014), a qual destaca como característica do pensamento algébrico a generalização por meio da utilização da aritmética.

Das características destacadas por Fernandes (2014) nas unidades de registros prévios, que foram nomeadas como: estabelecimento de relações, formulação de conjecturas, transição entre notações e generalizações, ao analisar a atividade desenvolvida, foi possível perceber que não houve registros em relação a característica de transição entre notações, pois, pela natureza da atividade não se fez necessário a utilização de transições, não havia a necessidade de transcrever dados matemáticos.

Em relação às características, de acordo com Fernandes (2014), foram evidenciadas as seguintes unidades de registros: generalização de modelos numéricos para descrever as relações, estabelecidas de pensamento funcional e modelagem como método de para formalização e generalizações sobre situações de caso gerais, sobre operações matemáticas, abstratas obtidas a partir de relações. Nas etapas finais da atividade podemos observar através dos registros que houve o entendimento e compreensão do processo, da passagem do uso da aritmética simples até o resultado final de uma expressão específica correspondente a expressão geral.

Para finalizar a descrição e análise da atividade, destacamos que esta última etapa pode ser relacionada com as duas últimas fases do desenvolvimento do pensamento algébrico, as quais consistem em raciocinar, ou seja, relacionar e analisar as propriedades anteriormente obtidas, generalizar e deduzir uma solução com o auxílio das hipóteses e relações levantadas durante todo o processo até então. Há também evidências da última fase do processo de investigação, o qual compreende a resolução de problemas e modelagem de situações, que consiste em utilizar expressões algébricas, inequações, sistemas e funções, para que se possa generalizar e trazer o modelo para resolução do problema. Foi exatamente isso que conseguimos fazer ao final de todo processo, realizar a soma de forma geral, simplificar através da manipulação de expressões algébricas de primeiro grau, modulando então a equação da forma que se caracteriza como os números presentes na terceira coluna.

De modo geral, no decorrer da atividade podemos identificar a presença de características do desenvolvimento do pensamento algébrico elencadas por Fernandes (2014). Uma das mais importantes para se chegar ao resultado da atividade proposta é a generalização, pois os números do quadro se apresentavam em uma sequência onde poderia se observado um certo padrão, ou seja, uma

regularidade. Além disso, temos também generalização de relações funcionais e além destas duas anteriormente citadas, é possível identificar a generalização por meio da utilização da aritmética, por utilizarmos da soma, tanto na etapa anterior quanto nesta para se chegar à expressão algébrica final.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho descrito teve como objetivo estudar e analisar características do pensamento algébrico que são evidenciadas em uma atividade de Investigação Matemática desenvolvida nos anos finais do Ensino Fundamental, .

Para atingir esse objetivo, foram realizados estudos teóricos sobre as concepções do pensamento algébrico, segundo os principais autores da área, foi planejada uma atividade de Investigação Matemática, a qual foi aplicada em uma turma de 8º ano, e após a coleta dos dados, eles foram analisados a partir da classificação apresentada por Fernandes (2014).

Com relação à concepção do pensamento algébrico, a partir dos autores estudados, percebeu-se que ele percorre todo o processo de pensar matematicamente, levando-se em conta não apenas as manipulações algébricas, mas também o ato de ler e compreender uma situação problema, representar suas ideias por meio de alguma linguagem, relacionar ou identificar relações existentes entre diferentes objetos de estudo, levantar hipóteses e discuti-las, estabelecer generalizações, resolver problemas e modelar situações.

Ao estudar estas características e as fases do processo de uma atividade de Investigação Matemática, percebeu-se que ambas podem ser trabalhadas em conjunto. Além disso, devido ao fato delas apresentarem elementos que se relacionam foi possível obter neste trabalho um resultado satisfatório em relação ao desenvolvimento do pensamento algébrico. As atividades de investigação trazem a proposta de fazer com que os alunos tenham um maior interesse, pois vão estar em busca de uma resolução, através do que lhe é apresentado, e uma maior interação com os colegas para buscar juntos resolver a questão.

Além das concepções fornecidas pelos principais autores, procuramos observar o que está previsto na BNCC referente ao tema Álgebra, e neste documento, consta que para o 8º ano deve se abordar, dentre outras coisas, atividades que envolvam padrões, sequências e generalizações. Sendo assim, mediante os conteúdos atribuídos à essa série, buscamos por uma atividade que trouxesse estes conteúdos e que poderiam ser estudados por meio de uma atividade de Investigação Matemática.

A atividade escolhida foi uma investigação proposta por Ponte, Brocardo e Oliveira (2006, p.27), na qual a partir de um quadro numérico, os alunos deveriam destacar todas as propriedades que lhes eram perceptíveis ao olhar para esses números. Durante o planejamento da atividade, com o intuito de tornar o tema mais atrativo e também favorecer a aplicação, fizemos algumas adaptações na versão original, como a apresentação de um vídeo no início da atividade e elaboração de quadros para cada etapa da atividade. Vale ressaltar que esse planejamento foi realizado no âmbito do Projeto Ágora, para que os membros do projeto de extensão pudessem contribuir com melhorias, antes do desenvolvimento da mesma com as turmas que nos foram cedidas.

A atividade foi desenvolvida em uma turma de 8º ano e uma de 9º ano de uma escola particular da região norte do Paraná, na qual uma das professoras colaboradoras do projeto atuava. Mediante os registros dos alunos, em conjunto com os estudos da fundamentação teórica, se pode afirmar que estes apresentaram um bom desempenho em relação a atividade e foi possível identificar em suas resoluções características do pensamento algébrico.

Durante a aplicação da atividade, foram coletados dados por meio de registros escritos dos alunos e gravações em áudio. Posteriormente, esses dados foram analisados à luz da pergunta de pesquisa levantada pela autora: Quais características do pensamento algébrico são evidenciadas em uma atividade de Investigação Matemática desenvolvida com estudantes de uma turma de oitavo ano do Ensino Fundamental? Para essas análises, utilizamos o referencial teórico fornecido por Fernandes (2014), no qual ela realiza um levantamento de possíveis características do pensamento algébrico que podem surgir no desenvolvimento de uma atividade. Dessa forma, percebemos que durante a atividade desenvolvida as características foram evidenciadas: relações envolvendo regularidades, igualdade e equivalência, formulação de conjecturas, generalizações e generalizações por meio da aritmética.

A partir da pesquisa realizada, passou-se a ter novas perspectivas em relação ao pensamento algébrico, olhando para ele como uma alternativa de se trabalhar com a álgebra na sala de aula, em detrimento ao ensino isolado da mesma, cercado de processos mecânicos sem significado. Além disso, percebemos que trabalhar com Investigação Matemática pode contribuir para o desenvolvimento desse pensamento, o qual faz parte do processo de aprendizagem de Matemática.

Além das considerações já elencadas, percebeu-se por meio do levantamento bibliográfico que não há uma grande quantidade de trabalhos que tenham como base teórica o pensamento algébrico e a Investigação Matemática, principalmente voltada para os anos finais do Ensino Fundamental, o que faz com que a pesquisa seja relevante.

Sendo assim, para próximos encaminhamentos, seria pertinente buscar por atividades de caráter investigativo que tivessem por objetivo contemplar todas as características do pensamento algébrico destacadas no decorrer deste trabalho, fazendo ênfase às relações funcionais, as generalizações destas relações, favorecendo assim o desenvolvimento do pensamento funcional.

REFERÊNCIAS

BLANTON, M; KAPUT, J. **Caracterizando uma prática de sala de aula que raciocínio algébrico**. Revista de Pesquisa em Educação Matemática: 2005. Vol. 36. Nº 5, p. 412–446.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Pesquisa Qualitativa para a Educação: uma introdução para teoria e métodos**. Boston: Allyn e Bacon, 1982.

BOOTH, L. **Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra**. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Org). As ideias da álgebra. São Paulo: Atual, 1995. p. 23-37.) via dissertação de EDILAINÉ PEREIRA DA SILVA.

BORBA, M. C. **A Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2004, Caxambu. Anais... Rio Janeiro: ANPED, 2004. CD-ROM.

BRASIL. Ministério da Educação. PDE: PCN, **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Terceiro e quarto ciclo do Ensino Fundamental: Matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC/SEF.1998, p.116.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental**. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2011) **Guia de Livros Didáticos PNLD 2017 Matemática**. Brasília: MEC. 2017

BRIZUELA, B. M. **Desenvolvimento matemático na criança: Explorando notações**. Trad. de Veronese, M. A. V. Porto Alegre: Artmed, 2006.

CANAVARRO, A. P. **O Pensamento Algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos**. Quadrante, v. 8, n. 2, p. 81-118, 2007.

FERNANDES, Renata Karoline. **Manifestação de pensamento algébrico em registros escritos de estudantes do Ensino Fundamental I**. 2014. 134 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina. 2014.

KAPUT, James. J. **Ensinar e aprender uma nova álgebra**. Salas de aula de matemática que promovem a compreensão. Routledge, p. 145-168, 1999.

KIERAN, Carolyn. **Pensamento algébrico nas séries iniciais: o que é. O Educador Matemático**, 2004.

KIERAN, C. **Desenvolvendo o raciocínio algébrico: O papel das tarefas sequenciadas e do professor questão desde o ensino fundamental até os primeiros anos do ensino médio**. Quadrante, [S.l.], v. 16, n. 1,pág. 5-26, jun. 2007.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI**. Campinas: Papyrus, 1997.

Pedro da Ponte, J; Brocardo, J; Oliveira, H. **Investigações Matemáticas na sala de aula**. Autêntica, Belo Horizonte, MG, 2006.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. Álgebra no ensino básico. Lisboa: **Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular (DGIDC)** do Ministério da Educação de Portugal, 2009.

PONTE, João Pedro da; BROCARD, Joana; OLIVEIRA, Hélia. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica Editora – 2016.

SKOVSMOSE, Ole. **Cenários para investigação**. Bolema, 2000.

APÊNDICE A:
LEVANTAMENTO BIBLIOGRÁFICO FEITO NA BDTD, NO CATÁLOGO DE TESES E DISSERTAÇÕES DA CAPES, NO PECEM-UEL, NO BANCO DE DISSERTAÇÕES DO PROFMAT E NOS ANAIS DO XII EPREM, DO XIII ENEM E DO XXI EBRAPEM

N°	Título	Autor (es)	Instituição	Categoria	Ano de Publicação
1	A investigação matemática e o estudo das funções reais: uma experiência com alunos do 1° ano do ensino médio.	Guilhermino Pereira Teixeira	UESB	Dissertação	
2	Introdução da álgebra: desenvolvimento do pensamento algébrico no 6° ano do ensino fundamental	Lindinalva da Silva Dias	UFSCAR	Dissertação	
	Pensamento algébrico nos anos iniciais do ensino fundamental: um olhar para pesquisas científicas que contribuam para o aprendizado do que é proposto pela BNCC.	Raquel Guimarães de Medeiros	IF	Dissertação	
4	O ensino de funções no 9° ano: construindo significados para Função a partir de generalizações.	Ana Paula Marques	UFMG	Dissertação	2019
5	Introdução a	Cristiane Barcella	UNESP	Dissertação	2016

	álgebra no ensino fundamental - o "x" da questão.	Silva			
6	Pensamento algébrico em tarefas com padrões: uma investigação nos anos finais do ensino fundamental.	Rayssa de Moraes da Silva	UFP	Dissertação	2021
7	Manifestação de pensamento algébrico em registros escritos de estudantes do ensino fundamental I.	Renata Caroline Fernandes	UEL	Dissertação	
8	A construção do pensamento algébrico utilizando atividades de investigação em sala de aula: o ensino de sequências.	Flávia Maria de Almeida Marcos Francisco Borges	UNEMAT	Relato de Experiência	
9	Desenvolvimento do pensamento algébrico: construindo o significado para conteúdos de álgebra nos anos finais do ensino fundamental.	Ana Paula Marques	UFMG	Relato de Experiência XXI EBRAPEM	

10	Proposta de atividade investigativa com alunos no ensino fundamental, enfatizando os conceitos de álgebra.	Ludmila Maccali Marli Teresinha Quartieri Ieda Maria Giongo	UNIVATES	Relato de Experiência	
11	O pensamento algébrico e a tarefa de padrões: relato de uma experiência nos anos iniciais do ensino fundamental.	Heloisa de Jesus de Paula Keila Tatiana Boni Magna Natalia Marin Pires	UEL	Relato de Experiência	
12	Explorando o pensamento algébrico por meio da resolução de problemas.	Bruna Paula Pereira Gomes Chaves Francieli Cristina Agostinetto Antunes	UNIOESTE	Relato de Experiência	
13	O pensamento geométrico através de atividades lúdicas.	Anna Carolina Galhart	UFPR	Relato de Experiência	
14	Concepções algébricas trabalhadas em turmas de 7° e 9° ano do ensino fundamental por meio de atividades investigativas.	Karina Tais Krein Ludmila Maccali Marli Teresinha Quartieri Ieda Maria Giongo	UNIVATES	Relato de Experiência	

**APÊNDICE B:
RELATÓRIO RESPONDIDO PELOS ALUNOS**



**MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
Campus de Jandaia do Sul
Curso de Licenciatura em Ciências Exatas**



RELATÓRIO

Alunos(as): _____

Seu relatório deve conter as seguintes informações:

- Qual o objetivo principal da atividade ?
- Qual situação problema foi proposta ?

Descreva os processos realizados para resolver a situação problema apresentada.

- Para isto, o roteiro abaixo irá lhe ajudar:
- 1. Como a atividade se iniciou?
- 2. Ao olhar para o primeiro quadro de números, como ele era? O que você precisava fazer com ele?
- 3. O que você percebeu?
- 4. Quais perguntas foram feitas pelos professores? Elas te ajudaram de alguma forma?
- 5. Quais as propriedades que foram escritas no quadro? Elas coincidem com as relações que você encontrou?
- 6. Depois do levantamento das percepções da classe, você recebeu outra tabela. O que tinha de diferente nessa nova tabela em relação à primeira?
- 7. Você percebeu mais alguma característica que não tinha percebido antes?
- 8. Qual era o mistério a ser desvendado (sobre a soma)?
- 9. Esse mistério realmente se confirmou? Quais "pistas" foram utilizadas para resolver o mistério?
- 10. Você compreendeu a solução apresentada pela professora?
- 11. O que você achou da atividade?