

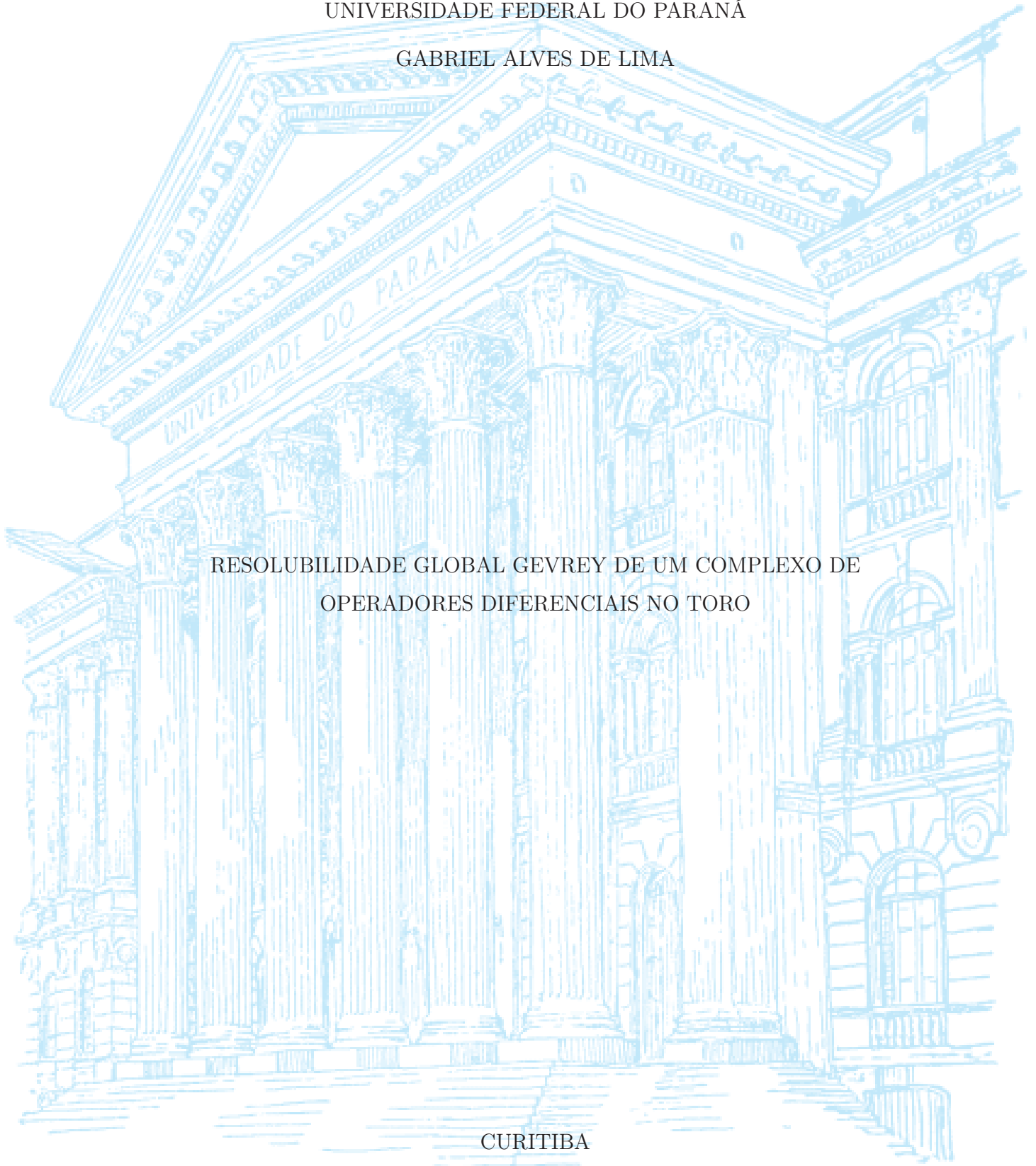
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

GABRIEL ALVES DE LIMA

RESOLUBILIDADE GLOBAL GEVREY DE UM COMPLEXO DE
OPERADORES DIFERENCIAIS NO TORO

CURITIBA

2023



GABRIEL ALVES DE LIMA

RESOLUBILIDADE GLOBAL GEVREY DE UM COMPLEXO DE
OPERADORES DIFERENCIAIS NO TORO

Dissertação apresentada como requisito parcial
à obtenção do grau de Mestre em Matemática,
no Curso de Pós-Graduação em Matemática,
Setor de Ciências Exatas, da Universidade
Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Cleber de Medeira.

CURITIBA

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Lima, Gabriel Alves de
Resolubilidade global Gevrey de um complexo de operadores diferenciais
no toro / Gabriel Alves de Lima. – Curitiba, 2023.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de
Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Orientador: Cleber de Medeira

1. Operadores diferenciais. 2. Formas diferenciais. 3. Sturm-Liouville,
Equação de. 4. Espaços topológicos. 5. Resolubilidade global Gevrey. I.
Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em
Matemática. III. Medeira, Cleber de. IV. Título.



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA -
40001016041P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **GABRIEL ALVES DE LIMA** intitulada: **RESOLUBILIDADE GLOBAL GEVREY DE UM COMPLEXO DE OPERADORES DIFERENCIAIS NO TORO**, sob orientação do Prof. Dr. CLÉBER DE MEDEIRA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 04 de Agosto de 2023.

Assinatura Eletrônica
07/08/2023 10:18:03.0
CLÉBER DE MEDEIRA
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
07/08/2023 10:06:36.0
ALEXANDRE KIRILOV
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
07/08/2023 11:10:01.0
PAULO LEANDRO DATTORI DA SILVA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

Assinatura Eletrônica
08/08/2023 00:35:23.0
ADALBERTO PANOBIANCO BERGAMASCO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

Coordenação PPGMA, Centro Politécnico, UFPR - CURITIBA - Paraná - Brasil
CEP 81531990 - Tel: (41) 3361-3026 - E-mail: pgsmat@ufpr.br

Documento assinado eletronicamente de acordo com o disposto na legislação federal Decreto 8539 de 08 de outubro de 2015.
Gerado e autenticado pelo SIGA-UFPR, com a seguinte identificação única: 304411

Para autenticar este documento/assinatura, acesse <https://siga.ufpr.br/siga/visitante/autenticacaoassinaturas.jsp> e insira o código 304411

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a Deus pela vida que me foi concedida, por me guiar nas situações mais difíceis e pelo conforto que tem me dado nos últimos anos.

À minha família, que me apoia de todas as formas possíveis. Em especial, aos meus pais, Janaina e Ozeias, avós, Juraci e Noel, e Jacira e Laercio e ao meu irmão Felipe.

Aos meus amigos, por compartilharem bons momentos durante a minha jornada. Em particular ao Marcel e ao Matheus, que tornaram o dia a dia mais divertido.

Agradeço aos professores e funcionários do PPGM, por me proporcionarem uma boa formação matemática e um bom convívio. Em especial, agradeço ao meu orientador, Professor Cleber, por me acolher na graduação e ter me guiado até o mestrado, sempre com bons conselhos.

À banca examinadora, por ter aceitado fazer parte do meu trabalho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

RESUMO

Neste trabalho consideramos uma classe de sistemas involutivos, sobre o toro de dimensão $n + 1$, gerados por campos vetoriais reais com coeficientes Gevrey de ordem $s \geq 1$. Mostramos que a resolubilidade global Gevrey do complexo de operadores diferenciais associado a esse sistema está diretamente relacionada a uma condição Diofantina envolvendo vetor exponencial Liouville de ordem s .

Palavras-chave: Resolubilidade global Gevrey; Sistemas involutivos; Complexo de operadores diferenciais; Formas diferenciais; Vetor exponencial Liouville de ordem s .

ABSTRACT

In this work we consider a class of involutive systems on the $(n + 1)$ -dimensional torus which are generated by real vector fields with Gevrey coefficients of order $s \geq 1$. We show that the global Gevrey solvability to the associated complex of differential operators is directly related to a Diophantine condition involving exponential Liouville vectors of order s .

Keywords: Global Gevrey solvability; Involutive systems; Complex of differential operators; Differential forms; Exponential Liouville vector of order s .

Conteúdo

INTRODUÇÃO	10
1 Funções e ultradistribuições Gevrey periódicas	13
1.1 Multi-índices e alguns resultados preliminares	13
1.2 Funções no toro e funções periódicas	15
1.3 Transformada de Fourier e distribuições no toro	17
1.4 Funções e ultradistribuições Gevrey periódicas	19
1.4.1 Funções Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$	20
1.4.2 Ultradistribuições Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$	21
1.4.3 Séries de Fourier	23
1.4.4 Séries parciais de Fourier	25
1.5 Formas diferenciais e correntes em \mathbb{T}^N	29
2 Resolubilidade global Gevrey	31
2.1 O sistema de campos vetoriais	31
2.2 Condições de compatibilidade	34
2.2.1 Enunciado do teorema principal	37
2.3 Redução a forma normal	39
2.3.1 Lemas auxiliares	39
2.3.2 Redução do problema a coeficientes constantes	46
2.4 Resolubilidade global do operador com coeficientes constantes	49
2.4.1 Suficiência do teorema principal	52
2.4.2 Necessidade do teorema principal	57
2.5 Exemplos	64

INTRODUÇÃO

Nesta dissertação consideramos uma classe de sistemas involutivos gerados por campos vetoriais reais, definidos sobre o toro $\mathbb{T}^{n+1} \doteq \mathbb{R}^{n+1}/2\pi\mathbb{Z}^{n+1}$. Nosso objetivo é estudar a resolubilidade global Gevrey desse sistema, no nível de p -formas, com $p = 0, \dots, n-1$. Mais especificamente, denotando as coordenadas em \mathbb{T}^{n+1} por $(t, x) = (t_1, \dots, t_n, x)$, consideramos funções $a_j(t) \in G^s(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$, com $s \geq 1$, para $j = 1, \dots, n$. Assim, definimos os campos vetoriais reais

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + a_j(t) \frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Vamos supor que a 1-forma diferencial real associada a esse sistema, dada por

$$a(t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) dt_j,$$

é uma 1-forma fechada, ou seja, a derivada exterior de $a(t)$ em \mathbb{T}^n é nula. Equivalentemente,

$$\frac{\partial a_k}{\partial t_j} = \frac{\partial a_j}{\partial t_k},$$

para todos $j, k \in \{1, \dots, n\}$.

De forma natural, podemos também associar esse sistema de campos vetoriais com um complexo de operadores diferenciais. Mais precisamente, considerando o espaço $G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ das p -formas:

$$u = \sum_{|J|=p} u_J dt_J, \quad u_J \in G^s(\mathbb{T}^{n+1}),$$

e também o espaço $D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ das p -correntes:

$$u = \sum_{|J|=p} u_J dt_J, \quad u_J \in D'_s(\mathbb{T}^{n+1}),$$

definimos, para cada $p \in \{0, \dots, n-1\}$, o operador $\mathbb{L}^p : G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0}) \longrightarrow G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p+1,0})$ por

$$\mathbb{L}^p u = \sum_{|J|=p} \sum_{j=1}^n L_j u_J dt_j \wedge dt_J.$$

Considere também o operador $\mathbb{L}^p : D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0}) \rightarrow D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p+1,0})$ definido pela mesma expressão acima.

Como a 1-forma $a(t)$ é fechada, temos que $\mathbb{L}^{p+1} \circ \mathbb{L}^p = 0$; logo esse operador define um complexo de cocadeia, dado por

$$D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{0,0}) \xrightarrow{\mathbb{L}^0} D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{1,0}) \xrightarrow{\mathbb{L}^1} D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{2,0}) \xrightarrow{\mathbb{L}^2} \dots \xrightarrow{\mathbb{L}^{n-1}} D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{n,0}),$$

o qual denominaremos por complexo de operadores diferenciais associado ao sistema descrito anteriormente.

Para definir precisamente, para $s \geq 1$, o significado de resolubilidade global Gevrey do operador \mathbb{L}^p , abreviadamente s -resolubilidade global, precisamos considerar um conjunto de condições de compatibilidades, para cada nível do complexo diferencial, ou seja, um subconjunto de $(p+1)$ -formas f em $G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p+1,0})$, onde faça sentido se questionar sobre a existência de soluções u em $D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$, para a equação $\mathbb{L}^p u = f$.

A principal referência desse trabalho é o artigo [4]. Nele, os autores trabalham com a resolubilidade global, desse mesmo tipo de sistema, no sentido suave, isto é, os coeficientes a_j estão em $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ e dada uma $(p+1)$ -forma f suave, busca-se saber se existe solução u no sentido clássico de distribuições para a equação $\mathbb{L}^p u = f$. Para enunciar o resultado principal, os autores utilizam o conceito de vetor de Liouville: $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ tal que existem sequências $p_l \in \mathbb{Z}^n$, $q_l \in \mathbb{N}$, $q_l \geq 2$ e $C > 0$ que satisfazem, para todo $l \in \mathbb{N}$, a seguinte desigualdade:

$$\max_{j=1, \dots, n} \left| \alpha_j - \frac{p_l^{(j)}}{q_l} \right| \leq \frac{1}{(q_l)^l}.$$

Desta forma, denotando por $\alpha_0 = (a_{j0}, \dots, a_{n0})$ o vetor associado as médias das funções a_j , o teorema principal de [4] pode ser enunciado assim: \mathbb{L}^p é globalmente resolúvel se, e somente se, α_0 é um vetor racional ou irracional não Liouville.

Em nosso resultado central, utilizamos o conceito de vetor exponencial Liouville de ordem s , o qual será definido e discutido com mais detalhes no Capítulo 2. Assim, o resultado principal deste trabalho é o seguinte: \mathbb{L}^p é globalmente s -resolúvel se, e somente se, α_0 é um vetor racional ou irracional não exponencial Liouville de ordem s .

O trabalho está organizado da seguinte forma: no Capítulo 1 discutimos brevemente alguns conceitos preliminares que são importantes para o desenvolvimento e demonstração do resultado principal. Iremos definir funções e ultradistribuições Gevrey no toro, bem como apresentaremos suas representações em séries de Fourier e séries parciais de Fourier. Ao final do primeiro capítulo, apresentamos algumas propriedades sobre formas diferenciais e p -correntes no toro.

No Capítulo 2, é feita a demonstração do teorema principal. Ela é dividida em várias etapas que estão separadas em seções. Antes, na primeira seção, definimos a classe de campos vetoriais reais de nosso interesse e o operador diferencial associado. Na próxima seção discutimos as condições de compatibilidade para o problema e logo após apresentamos uma seção dedicada a lemas técnicos que serão úteis ao decorrer do trabalho. O próximo passo tem por objetivo reduzir o operador a coeficientes constantes. Desta forma, na penúltima seção, mostramos as condições necessárias e suficientes para a s -resolubilidade global do operador com coeficientes constantes, concluindo a demonstração do principal resultado do trabalho.

Por fim, como consequência do resultado principal, finalizamos o trabalho apresentando alguns exemplos de sistemas de campos vetoriais globalmente s -resolúveis.

Capítulo 1

Funções e ultradistribuições Gevrey periódicas

O objetivo deste capítulo é estabelecer as notações e apresentar os principais resultados que são necessários para compreender o teorema proposto.

Iniciamos a primeira seção definindo multi-índices e algumas relações numéricas úteis. Em seguida, discutimos brevemente a relação entre funções no toro e funções periódicas, bem como apresentamos alguns resultados. Na próxima seção falamos sobre séries de Fourier para funções suaves, definimos distribuições periódicas e discutimos sua representação em séries de Fourier.

As duas últimas seções têm como propósito providenciar uma base sobre espaços de funções Gevrey e ultradistribuições, como também formas diferenciais e correntes. Assim, generalizamos, sempre que possível, os resultados do caso suave.

Os resultados que vamos apresentar até a penúltima seção podem ser encontrados na apostila [12] e no livro [14].

1.1 Multi-índices e alguns resultados preliminares

Nesta seção iremos apresentar algumas definições preliminares e relações úteis que serão usadas no decorrer do trabalho.

Definição 1.1. Dizemos que um vetor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{Z}_+^N$, $N \in \mathbb{N}$, é um multi-índice.

Dado $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$, denotamos $|\alpha| \doteq \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ o comprimento do multi-índice α .

Escreveremos

$$\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_N}^{\alpha_N}.$$

Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$ e $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_N)$ são dois multi-índices, usaremos a relação de ordem:

$$\beta \leq \alpha \iff \beta_j \leq \alpha_j, \forall j = 1, \dots, N.$$

Desta forma, podemos escrever $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_N!$ e segue que

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha - \beta)!} = \prod_{j=1}^N \binom{\alpha_j}{\beta_j}.$$

Além disso, vale a Fórmula de Leibniz em $C^\infty(\mathbb{R}^N)$:

$$\partial^\alpha(\varphi \cdot \psi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^{\alpha - \beta} \varphi \cdot \partial^\beta \psi,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}^N$.

A seguir apresentaremos uma série de expressões e desigualdades relacionadas aos multi-índices.

Dado $t = (t_1, \dots, t_N) \in \mathbb{R}^N$, escrevemos $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdots t_N^{\alpha_N}$. Para cada $m \geq 1$ inteiro podemos considerar o teorema multinomial

$$(t_1 + \cdots + t_N)^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} t^\alpha,$$

para provar alguns resultados.

Quando $t_1 = \dots = t_N = 1$ temos, em particular,

$$N^m = \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!},$$

o que implica em

$$|\alpha|! \leq N^{|\alpha|} \alpha!.$$

Das duas últimas expressões aplicadas a índices $\alpha = (j, k)$ de comprimento m , segue que

$$2^m = \sum_{j+k=m} \frac{m!}{j!k!} \text{ e}$$

$$(j+k)! \leq 2^{j+k} j!k!, \forall j, k \in \mathbb{Z}_+.$$

A igualdade anterior implica em

$$\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} = 2^{|\alpha|}.$$

Por fim, considerando a expansão em série de Taylor, em torno de 0, da função exponencial

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!},$$

podemos provar mais alguns resultados:

$$t^k \leq k!e^t \leq k^k e^t, \quad \forall t > 0, \forall k = 1, 2, \dots,$$

$$t^d \leq d^d e^{t-d}, \quad \forall t > 0, \forall d > 0.$$

Além disso, também serão úteis resultados envolvendo multi-índices:

$$\alpha! \leq |\alpha|!, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N,$$

$$|\alpha|! \leq |\alpha|^{|\alpha|}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N,$$

$$|\alpha|^{|\alpha|} \leq e^{|\alpha|} |\alpha|!, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N,$$

$$(\alpha - \beta)! \leq \alpha! \beta!^{-1}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^N, \beta \leq \alpha.$$

1.2 Funções no toro e funções periódicas

Começamos definindo uma relação de equivalência em \mathbb{R}^N , $N \in \mathbb{N}$. Dados $x, y \in \mathbb{R}^N$, escrevemos $x \sim y$ se $(x - y) \in 2\pi\mathbb{Z}^N$. Temos que \sim define uma relação de equivalência em \mathbb{R}^N . Desta forma, denotamos por

$$[x] = \{y \in \mathbb{R}^N : x - y \in 2\pi\mathbb{Z}^N\} \doteq x + 2\pi\mathbb{Z}^N$$

a classe de equivalência de um vetor $x \in \mathbb{R}^N$.

Consideramos o toro N -dimensional como sendo o espaço quociente $\mathbb{T}^N \doteq \mathbb{R}^N / 2\pi\mathbb{Z}^N$.

Observação 1.2. A aplicação $\Phi : \mathbb{T}^N \rightarrow S^1 \times \dots \times S^1$ dada por $\Phi([x]) = (e^{ix_1}, \dots, e^{ix_N})$ é um homeomorfismo, logo \mathbb{T}^N é compacto.

Iniciamos o trabalho estabelecendo algumas propriedades sobre \mathbb{T}^N e veremos a relação das funções no toro com as funções periódicas definidas em \mathbb{R}^N .

Considere

$$\Pi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$$

dada por

$$\Pi(x) = x + 2\pi\mathbb{Z}^N.$$

Da projeção Π obtém-se a topologia quociente para o toro; além disso, sendo \mathbb{T}^N uma variedade suave, temos que $\Pi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{T}^N$ é recobrimento universal suave.

Diremos que $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função 2π -periódica quando

$$f(x) = f(x + 2k\pi),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}^N$ e $x \in \mathbb{R}^N$.

Denotaremos o espaço das funções $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ por $\mathcal{F}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. De modo semelhante, consideramos $\mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ o espaço das funções $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{C}$ que são 2π -periódicas e $\mathcal{F}(\mathbb{T}^N, \mathbb{C})$ o espaço das funções no toro.

Considere o pullback $\Pi^* : \mathcal{F}(\mathbb{T}^N, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$, dado por $\Pi^*\varphi = \varphi \circ \Pi$. Temos que, dado $x \in \mathbb{R}^N$, $\Pi^*\varphi(x + 2k\pi) = \varphi \circ \Pi(x + 2k\pi) = \varphi(x + 2k\pi + 2\pi\mathbb{Z}^N) = \varphi(x + 2\pi\mathbb{Z}^N) = \varphi(x)$, para todo $k \in \mathbb{Z}^N$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Ou seja, $\Pi^*(\mathcal{F}(\mathbb{T}^N, \mathbb{C})) \subset \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$.

Proposição 1.3. *A aplicação $\Pi^* : \mathcal{F}(\mathbb{T}^N, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ é isomorfismo linear.*

Demonstração. Por construção $\Pi^* : \mathcal{F}(\mathbb{T}^N, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ é linear.

Vejamos que é injetiva. Seja $\varphi \in \ker \Pi^*$, ou seja, $\Pi^*\varphi = 0$. Desta forma, temos que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $0 = \Pi^*\varphi(x) = \varphi \circ \Pi(x) = \varphi(x + 2\pi\mathbb{Z}^N)$. Logo $\varphi = 0$.

Seja $f \in \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$. Defina $\varphi(x + 2\pi\mathbb{Z}^N) = f(x)$. Veja que φ está bem definida, pois se $x + 2\pi\mathbb{Z}^N = y + 2\pi\mathbb{Z}^N$, então $(x - y) \in 2\pi\mathbb{Z}^N$. Portanto, dado $x \in \mathbb{R}^N$, temos que $\Pi^*\varphi(x) = \varphi \circ \Pi(x) = f(x)$. Logo, $\Pi^* : \mathcal{F}(\mathbb{T}^N, \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{F}_{2\pi}(\mathbb{R}^N, \mathbb{C})$ é sobrejetiva. \square

Iremos denotar por $C_{2\pi}(\mathbb{R}^N)$ o espaço das funções periódicas contínuas em \mathbb{R}^N e $C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^N)$ o espaço das funções suaves em \mathbb{R}^N . Analogamente, consideramos os espaços $C(\mathbb{T}^N)$ e $C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

A aplicação Π^* nos fornece os isomorfismos $C_{2\pi}(\mathbb{R}^N) \cong C(\mathbb{T}^N)$ e $C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^N) \cong C^\infty(\mathbb{T}^N)$. Podemos também definir $\partial^\alpha \varphi = (\Pi^*)^{-1} \circ \partial^\alpha \circ \Pi^* \varphi$, para $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

A topologia de $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ é dada pela família de seminormas $p_k : C^\infty(\mathbb{T}^N) \rightarrow [0, +\infty)$, $k \in \mathbb{N}$, sendo $p_k(\varphi)$ dada por

$$p_k(\varphi) = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \mathbb{T}^N} |\partial^\alpha \varphi(x)|.$$

Assim, temos a seguinte noção de convergência: uma sequência $\varphi_j \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ converge para uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ se, e somente se, $p_k(\varphi_j) \rightarrow p_k(\varphi)$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Da caracterização anterior segue o próximo teorema.

Teorema 1.4. *Uma sequência $(\varphi_j) \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ converge para uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ se, e somente se, $\|\partial^\alpha \varphi_j - \partial^\alpha \varphi\|_\infty \rightarrow 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$. Usamos a notação $\|\partial^\alpha \varphi\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{T}^N} |\partial^\alpha \varphi(x)|$.*

Observação 1.5. *Munido com a topologia acima descrita, $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ é um espaço de Fréchet (mais detalhes sobre espaços de Fréchet podem ser encontrados em [13]).*

Utilizando a σ -álgebra de Borel em \mathbb{R}^N e a aplicação Π definida anteriormente, obtemos naturalmente uma σ -álgebra de Borel em \mathbb{T}^N e uma medida μ , de forma que vale a expressão

$$\int_{\mathbb{T}^N} f(x) d\mu(x) = \int_{[0, 2\pi]^N} f \circ \Pi(x) dx,$$

para funções Borel mensuráveis $f : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{R}$ não negativas ou integráveis. Desta forma, motivados pelos argumentos anteriores, usaremos a notação

$$\int_{\mathbb{T}^N} f(x) dx$$

e, daqui em diante, não faremos distinção entre funções definidas em \mathbb{T}^N para as funções 2π -periódicas definidas em \mathbb{R}^N .

Mais propriedades sobre as funções definidas no toro N -dimensional podem ser provadas, veja o Capítulo 3 de [14] para mais detalhes.

1.3 Transformada de Fourier e distribuições no toro

Definição 1.6. *Dizemos que uma sequência de números complexos $\{a_k\}$ é rapidamente decrescente se, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe $C = C(m) > 0$ tal que*

$$|a_k| \leq C|k|^{-m}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\}.$$

Teorema 1.7. *Seja $a_k \in \mathbb{C}$ uma sequência rapidamente decrescente. Então*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^N} a_k e^{ik \cdot x}$$

converge em $C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e se

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} a_k e^{ik \cdot x},$$

então

$$a_k(f) \doteq \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ik \cdot x} f(x) dx = a_k.$$

Chamamos $a_k(f)$ de k -ésimo coeficiente de Fourier de f e usamos a notação $a_k(f) \doteq \widehat{f}(k)$.

Teorema 1.8. *Seja $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$. Então a expressão*

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ik \cdot x} f(x) dx, \text{ com } k \in \mathbb{Z}^N,$$

forma uma sequência rapidamente decrescente e

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^N} \widehat{f}(k) e^{ik \cdot x}, \text{ para todo } x \in \mathbb{T}^N,$$

com a convergência no espaço $C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

Definição 1.9. *Definimos por*

$$D'(\mathbb{T}^N) \doteq \{u : C^\infty(\mathbb{T}^N) \rightarrow \mathbb{C} : u \text{ é funcional linear contínuo em } C^\infty(\mathbb{T}^N)\}$$

o espaço das distribuições no toro.

Observação 1.10. *Um funcional linear $u : C^\infty(\mathbb{T}^N) \rightarrow \mathbb{C}$ é contínuo se, e somente se, para qualquer sequência $\{\varphi_j\}$ que convirja para 0 em $C^\infty(\mathbb{T}^N)$, então $\{u(\varphi_j)\}$ converge para 0 em \mathbb{C} .*

Teorema 1.11. *Seja $u : C^\infty(\mathbb{T}^N) \rightarrow \mathbb{C}$ funcional linear. São equivalentes:*

- *u é contínuo;*
- *Existem $C > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que*

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \mathbb{T}^N} \{|\partial^\alpha \varphi(x)|\}, \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N).$$

Um resultado clássico de Teoria de Distribuições diz que toda função contínua define uma distribuição. Para distribuições no toro não é diferente.

Observação 1.12. *Seja $f \in C(\mathbb{T}^N)$, então $u_f : C^\infty(\mathbb{T}^N) \rightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$\langle u_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{T}^N} f(x) \varphi(x) dx,$$

é uma distribuição no toro.

Definição 1.13. *Uma sequência de elementos $u_j \in D'(\mathbb{T}^N)$ é convergente em $D'(\mathbb{T}^N)$ se existe $u \in D'(\mathbb{T}^N)$ tal que, para toda $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$, a sequência $\{\langle u_j, \varphi \rangle\}$ converge para $\langle u, \varphi \rangle$ em \mathbb{C} .*

Observação 1.14. Sejam $u \in D'(\mathbb{T}^N)$, $f \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ e $\alpha \in \mathbb{Z}_+^N$. Então, estão bem definidas as distribuições $\partial^\alpha u$ e fu , as quais são dadas por:

$$\begin{aligned}\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N); \\ \langle fu, \varphi \rangle &= \langle u, f\varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N).\end{aligned}$$

Dada uma sequência u_m em $D'(\mathbb{T}^N)$, dizemos que a série $\sum_{m \in \mathbb{Z}^N} u_m$ converge em $D'(\mathbb{T}^N)$ se a sequência de reduzidas $S_l = \sum_{|m| \leq l} u_m$ for convergente em $D'(\mathbb{T}^N)$.

Teorema 1.15. Se $\sum_{m \in \mathbb{Z}^N} u_m \in D'(\mathbb{T}^N)$ então $\partial^\alpha u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} \partial^\alpha u_m$.

Teorema 1.16. Seja $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}^N}$ uma sequência em \mathbb{C}^N de crescimento lento, ou seja, existem $C > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ tais que

$$|a_m| \leq C|m|^k, \quad \forall m \in \mathbb{Z}^N \setminus \{0\},$$

então a série

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}^N} a_m e^{ix \cdot m}$$

converge em $D'(\mathbb{T}^N)$. Além disso, se

$$u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} a_m e^{ix \cdot m},$$

então

$$a_m = \frac{1}{(2\pi)^N} \langle u, e^{-ix \cdot m} \rangle.$$

Também, se $u \in D'(\mathbb{T}^N)$, temos que

$$u = \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} a_m e^{ix \cdot m} = \sum_{m \in \mathbb{Z}^N} \frac{1}{(2\pi)^N} \langle u, e^{-ix \cdot m} \rangle e^{ix \cdot m},$$

com a convergência em $D'(\mathbb{T}^N)$ e a_m sequência em \mathbb{C}^N de crescimento lento.

1.4 Funções e ultradistribuições Gevrey periódicas

Os resultados dessa seção podem ser encontrados, em detalhes, na apostila [12].

Dada uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N) \cong C_{2\pi}^\infty(\mathbb{R}^N)$, diremos que $\varphi : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{C}$ é uma *função Gevrey de ordem $s \geq 1$ e amplitude $h > 0$* , quando existir uma constante $C > 0$ tal que

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq Ch^\alpha (\alpha!)^s, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, \forall x \in \mathbb{T}^N. \quad (1.1)$$

Denotamos o espaço destas funções por $G^{s,h}(\mathbb{T}^N)$ e chamamos de *classe das funções Gevrey no toro* de ordem s e amplitude h .

Observação 1.17. Temos a validade da seguinte inclusão $G^{s,h}(\mathbb{T}^N) \subset G^{s',h}(\mathbb{T}^N)$, sempre que $s < s'$, e também $G^{s,h}(\mathbb{T}^N) \subset G^{s,h'}(\mathbb{T}^N)$, sempre que $h < h'$.

Exemplo 1.18. Dada uma função $f : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{C}$ analítica real, existe $h > 0$ tal que $f \in G^{1,h}(\mathbb{T}^N)$. Em particular, se $f \in C^\omega(\mathbb{T}^N)$, então existe $h > 0$ tal que $f \in G^{s,h}(\mathbb{T}^N)$, para todo $s \geq 1$.

Temos que $G^{s,h}(\mathbb{T}^N)$ é um subespaço vetorial de $C^\infty(\mathbb{T}^N)$, sobre \mathbb{C} . Além disso, a expressão abaixo

$$\|\varphi\|_{s,h} \doteq \sup \left\{ |\partial^\alpha \varphi(x)| \cdot h^{-|\alpha|} (\alpha!)^{-s} : \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, x \in \mathbb{T}^N \right\},$$

define uma norma em $G^{s,h}(\mathbb{T}^N)$. Pode-se provar que

$$\|\varphi\|_{s,h} = \inf \left\{ C : |\partial^\alpha \varphi(x)| \cdot h^{-|\alpha|} (\alpha!)^{-s} \leq C : \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, x \in \mathbb{T}^N \right\}.$$

Teorema 1.19. A classe $G^{s,h}(\mathbb{T}^N)$ das funções Gevrey de ordem $s \geq 1$ e amplitude $h > 0$ no toro é um espaço de Banach com relação à norma $\|\varphi\|_{s,h}$.

Teorema 1.20. Para todos $h < h'$ a inclusão $\iota : G^{s,h}(\mathbb{T}^N) \rightarrow G^{s,h'}(\mathbb{T}^N)$ é compacta.

1.4.1 Funções Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$

Dizemos que $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ é uma função Gevrey de ordem $s \geq 1$ no toro quando φ é uma função Gevrey de ordem $s \geq 1$ para alguma amplitude $h > 0$, ou seja, existem $h > 0$ e $C > 0$ tais que

$$|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq Ch^\alpha (\alpha!)^s, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^N, \forall x \in \mathbb{T}^N. \quad (1.2)$$

Denotamos por $G^s(\mathbb{T}^N)$ a classe das funções Gevrey de ordem $s \geq 1$ no toro.

Exemplo 1.21. Segue do Exemplo 1.18 que se $f \in C^\omega(\mathbb{T}^N)$, então existe $h > 0$ de modo que $f \in G^{s,h}(\mathbb{T}^N)$, para todo $s \geq 1$. Portanto, $f \in G^s(\mathbb{T}^N)$, para todo $s \geq 1$.

Exemplo 1.22. Dado $s > 1$ defina $g_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_s(t) = \begin{cases} e^{-1/t^{\frac{1}{s-1}}}, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Note que, fixado $s > 1$, temos que $g_s \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, além disso g_s não é analítica em nenhuma vizinhança da origem. Pode-se provar que existe $C > 0$ tal que

$$|g_s^{(k)}(t)| \leq C^k (k!)^s, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{N}_0.$$

Assim, definindo

$$h_s(t) = g_s(2-t)g_s(t-1), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$h_s(t+2\pi) = h_s(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

segue que $h_s \in G_{2\pi}^s(\mathbb{R}) \cong G^s(\mathbb{T})$ e h_s não é analítica.

Observação 1.23. É válida a seguinte inclusão própria $\bigcup_{s \geq 1} G^s(\mathbb{T}^N) \subsetneq C^\infty(\mathbb{T}^N)$.

Teorema 1.24. O conjunto $G^s(\mathbb{T}^N)$ é um espaço vetorial e um anel com relação ao produto usual de funções, além disso é fechado em relação a diferenciação.

Com base nos resultados anteriores, podemos definir uma topologia para o espaço $G^s(\mathbb{T}^N)$. Consideremos uma sequência numérica $(h_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tal que $h_{j+1} > h_j > 0$ e $h_j \rightarrow \infty$, quando $j \rightarrow \infty$. Então podemos escrever

$$G^s(\mathbb{T}^N) = \bigcup_{j=1}^{\infty} G^{s, h_j}(\mathbb{T}^N).$$

Pelo Teorema 1.20 temos que as inclusões $G^{s, h_j}(\mathbb{T}^N) \hookrightarrow G^{s, h_k}(\mathbb{T}^N)$ são contínuas e compactas para todo $j < k$. Desta forma, munimos $G^s(\mathbb{T}^N)$ com a *topologia limite indutivo*, a qual independe da escolha da sequência (h_j) . Portanto, o critério de convergência em $G^{s, h_j}(\mathbb{T}^N)$ pode ser descrito da seguinte forma:

Uma sequência $\varphi_j \in G^s(\mathbb{T}^N)$ converge para $\varphi \in G^s(\mathbb{T}^N)$ se, e somente se, existe algum h_p tal que $\varphi_j, \varphi \in G^{s, h_p}(\mathbb{T}^N)$ e $\|\varphi_j - \varphi\|_{s, h_p} \rightarrow 0$.

1.4.2 Ultradistribuições Gevrey periódicas de ordem $s \geq 1$

Seja $u : G^s(\mathbb{T}^N) \rightarrow \mathbb{C}$ um funcional linear. Dizemos que u é uma *ultradistribuição Gevrey de ordem $s \geq 1$ no toro \mathbb{T}^N* , quando u é contínuo. O conjunto de todas as ultradistribuições Gevrey de ordem $s \geq 1$ no toro será denotado por $D'_s(\mathbb{T}^N)$ e chamado de classe das ultradistribuições Gevrey de ordem $s \geq 1$ em \mathbb{T}^N .

Em particular, $D'_s(\mathbb{T}^N)$ quando $s = 1$ é conhecido como *espaço das hiperfunções em \mathbb{T}^N* . O tratamento dos elementos nesse espaço é mais delicado que nos demais casos para $s > 1$. Isso se deve ao fato de elementos em $D'_1(\mathbb{T}^N)$ não serem localizáveis. Porém, as definições e resultados obtidos nesse trabalho lidam apenas com objetos globais em \mathbb{T}^N e são coerentes com a teoria descrita nesse capítulo, mesmo para o caso $s = 1$.

Teorema 1.25. Seja $u : G^s(\mathbb{T}^N) \rightarrow \mathbb{C}$ funcional linear. Então, as afirmações são equivalentes:

i. $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$;

ii. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq C_\varepsilon \sup_{x \in \mathbb{T}^N} \sup_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} |\partial^\alpha \varphi(x)| \varepsilon^{|\alpha|} (\alpha!)^{-s},$$

para toda $\varphi \in G^s(\mathbb{T}^N)$;

iii. Se $\varphi_j \in G^s(\mathbb{T}^N)$, $j = 1, 2, \dots$, converge para 0 em $G^s(\mathbb{T}^N)$, então a sequência $\langle u, \varphi_j \rangle$ converge para 0 em \mathbb{C} .

Lema 1.26. Seja $u \in D'(\mathbb{T}^N)$ uma distribuição no toro. Então, a restrição de u ao espaço $G^s(\mathbb{T}^N)$ define um elemento em $D'_s(\mathbb{T}^N)$.

Lema 1.27. O espaço $G^s(\mathbb{T}^N)$ é denso em $C^\infty(\mathbb{T}^N)$, para todo $s \geq 1$.

Observação 1.28. Como já vimos anteriormente, se u é um elemento de $D'(\mathbb{T}^N)$ então a restrição a $G^s(\mathbb{T}^N)$ é uma ultradistribuição Gevrey. Portanto, do lema anterior, se a restrição for nula em $D'_s(\mathbb{T}^N)$, então $u \equiv 0$ em $D'_s(\mathbb{T}^N)$. Desta forma, podemos identificar $D'(\mathbb{T}^N)$ como um subespaço de $D'_s(\mathbb{T}^N)$.

Exemplo 1.29. Seja $u = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} a_\alpha \delta^{(\alpha)}$, onde $a_\alpha \in \mathbb{C}$, definida por

$$\langle u, \varphi \rangle = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^N} (-1)^{|\alpha|} a_\alpha \partial^\alpha \varphi(0), \quad \forall \varphi \in G^s(\mathbb{T}^N).$$

Se tivermos:

$$\text{para cada } \varepsilon > 0 \text{ existe um } C_\varepsilon > 0 \text{ tal que } |a_\alpha| \leq C_\varepsilon \varepsilon^{|\alpha|} (\alpha!)^{-s}, \quad (1.3)$$

segue que $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$.

Uma sequência que satisfaz (1.3) é $a_k = (k!)^{s-1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, $s \geq 1$.

Definição 1.30. Se $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$ e $f \in G^s(\mathbb{T}^N)$ definimos $\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle$, para todo $\varphi \in G^s(\mathbb{T}^N)$. Também definimos $\langle fu, \varphi \rangle = \langle u, f\varphi \rangle$, para toda $\varphi \in G^s(\mathbb{T}^N)$.

Lema 1.31. Se $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$ e $f \in G^s(\mathbb{T}^N)$, então $\partial^\alpha u$ e fu pertencem a $D'_s(\mathbb{T}^N)$.

1.4.3 Séries de Fourier

Nesta seção iremos discutir sobre séries de Fourier para funções e ultradistribuições Gevrey.

Definição 1.32. *Seja $\varphi \in G^s(\mathbb{T}^N)$. Para cada $\xi \in \mathbb{Z}^N$ definimos o ξ -ésimo coeficiente de Fourier por*

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \int_{\mathbb{T}^N} e^{-ix \cdot \xi} \varphi(x) dx, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Teorema 1.33. *Se $\varphi \in G^s(\mathbb{T}^N)$, então*

$$\varphi(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \widehat{\varphi}(\xi) e^{ix \cdot \xi},$$

com a convergência em $G^s(\mathbb{T}^N)$. Além disso, existem constantes $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq C e^{-\varepsilon |\xi|^{1/s}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Lema 1.34. *Seja $\{C_\xi\}_{\xi \in \mathbb{Z}^N}$ uma sequência de números complexos e suponhamos que existem $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que*

$$|C_\xi| \leq C e^{-\varepsilon |\xi|^{1/s}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Então, existe $\psi(x) \in G^s(\mathbb{T}^N)$ tal que

$$\psi(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} C_\xi e^{ix \cdot \xi},$$

com a convergência em $G^s(\mathbb{T}^N)$. Além disso, $\widehat{\psi}(\xi) = C_\xi$.

Exemplo 1.35. *Dado $s > 0$, a função $f(x) = \sum_{n \geq 0} e^{-n^{1/s} + inx}$ pertence a $G^s(\mathbb{T})$, mas não pertence a $G^t(\mathbb{T})$, se $t < s$. Portanto, o exemplo mostra que*

$$G^s(\mathbb{T}) \subsetneq G^{s'}(\mathbb{T}), \quad s < s'.$$

Exemplo 1.36. *Vejamos que*

$$C^\omega(\mathbb{T}) \subsetneq \bigcap_{s>1} G^s(\mathbb{T}).$$

Consideremos uma sequência $\tau_n > 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) tal que $\tau_n \rightarrow 0$. Considere também a função $f(x) = \sum_{n \geq 0} e^{-n^{1-\tau_n}} e^{inx}$.

Dado $s > 1$ temos que $f \in G^s(\mathbb{T})$. De fato, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$, então $\tau_n < 1 - \frac{1}{s}$. Portanto $n^{1/s} \leq n^{1-\tau_n}$, o que implica em $e^{-n^{1-\tau_n}} \leq e^{-n^{1/s}}$.

Podemos determinar τ_n de modo que $f \notin G^1(\mathbb{T})$. De fato, suponha que $f \in G^1(\mathbb{T})$, então existem $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tal que

$$e^{-n^{1-\tau_n}} \leq Ce^{-\varepsilon n} \Rightarrow \exists K \text{ tal que } \varepsilon n \leq K + n^{1-\tau_n} \Rightarrow \varepsilon \leq Kn^{-1} + n^{-\tau_n}.$$

Assim basta escolher τ_n de forma que $n^{-\tau_n} \rightarrow 0$ para chegar em uma contradição. Como $n^{-\tau_n} = e^{-\tau_n \log n}$. Basta escolher τ_n de modo que $\tau_n \log n \rightarrow \infty$. Um exemplo para $n \geq 2$ é

$$\tau_n = \frac{1}{\log(\log n)}.$$

Agora veremos como representar ultradistribuições periódicas a partir de suas séries de Fourier.

Definição 1.37. Seja $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$ uma ultradistribuição no toro. Definimos o coeficiente de Fourier $\hat{u}(\xi)$ de u por

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N} \langle u, e^{-ix \cdot \xi} \rangle, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Teorema 1.38. Seja $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$ uma ultradistribuição no toro, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que $|\hat{u}(\xi)| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}}$, $\forall \xi \in \mathbb{Z}^N$.

Definição 1.39. Seja u_j uma sequência em $D'_s(\mathbb{T}^N)$ e $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$. Dizemos que u_j converge para u em $D'_s(\mathbb{T}^N)$ se $\langle u_j, \varphi \rangle$ converge para $\langle u, \varphi \rangle$ em \mathbb{C} , para toda $\varphi \in G^s(\mathbb{T}^N)$.

Teorema 1.40. Seja u_j sequência em $D'_s(\mathbb{T}^N)$ tal que para toda $\varphi \in G^s(\mathbb{T}^N)$ a sequência $\langle u_j, \varphi \rangle$ é de Cauchy em \mathbb{C} . Então, existe $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$ tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle u_j, \varphi \rangle = \langle u, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in G^s(\mathbb{T}^N).$$

Teorema 1.41. Seja $\{C_\xi\}_{\xi \in \mathbb{Z}^N}$ uma sequência de números complexos tal que para cada $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|C_\xi| \leq C_\varepsilon e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}^N.$$

Então, existe $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$ tal que $u = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} C_\xi e^{ix \cdot \xi}$, ou seja,

$$\langle u, \varphi \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \langle S_j, \varphi \rangle \doteq \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^N} S_j(x) \varphi(x) dx, \quad (1.4)$$

sendo $S_j(x) = \sum_{|\xi| \leq j} C_\xi e^{ix \cdot \xi}$. Além disso, $\hat{u}(\xi) = C_\xi$.

Teorema 1.42. Seja $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$. Então

$$u(x) = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \hat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi},$$

com a convergência em $D'_s(\mathbb{T}^N)$.

Seja $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$. Sabemos que $\sum_{|\xi_j| \leq j} \hat{u}(\xi) e^{ix \cdot \xi}$ converge para u em $D'_s(\mathbb{T}^N)$, portanto para toda $\varphi \in G^s(\mathbb{T}^N)$ temos que

$$\begin{aligned} \langle u, \varphi \rangle &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{|\xi| \leq j} \hat{u}(\xi) \langle e^{ix \cdot \xi}, \varphi \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{|\xi| \leq j} \hat{u}(\xi) \int_{\mathbb{T}^N} e^{ix \cdot \xi} \varphi(x) dx \\ &= (2\pi)^N \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{|\xi| \leq j} \hat{u}(\xi) \hat{\varphi}(-\xi) = (2\pi)^N \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \hat{u}(\xi) \hat{\varphi}(-\xi). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\langle u, \varphi \rangle = (2\pi)^N \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^N} \hat{u}(\xi) \hat{\varphi}(-\xi). \quad (1.5)$$

Observação 1.43. Para todo $s \geq 1$ temos $D'(\mathbb{T}^N) \subsetneq D'_s(\mathbb{T}^N)$.

1.4.4 Séries parciais de Fourier

Consideremos $p, q, N \in \mathbb{Z}_+$, $N \geq 2$, $p, q \geq 1$ tais que $p + q = N$. Escrevemos $(x, y) \in \mathbb{T}^N$, sendo $x \in \mathbb{T}^p$ e $y \in \mathbb{T}^q$.

Séries Parciais de Fourier para funções Gevrey no toro

Seja $\varphi \in G^s(\mathbb{T}^N)$. Vamos definir, para cada $x \in \mathbb{T}^p$, a função

$$\begin{aligned} \varphi_x : \mathbb{T}^q &\rightarrow \mathbb{C} \\ y &\mapsto \varphi(x, y). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Segue de forma imediata que $\varphi_x \in G^s(\mathbb{T}^q)$, para cada $x \in \mathbb{T}^p$ fixado. Deste modo, podemos escrever

$$\varphi(x, y) = \varphi_x(y) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} \hat{\varphi}(x, \eta) e^{iy \cdot \eta},$$

sendo

$$\hat{\varphi}(x, \eta) \doteq \hat{\varphi}_x(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{\mathbb{T}^q} e^{-iy \cdot \eta} \varphi_x(y) dy = \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{\mathbb{T}^q} e^{-iy \cdot \eta} \varphi(x, y) dy.$$

Como $\varphi \in C^\infty(\mathbb{T}^N)$ segue que, para cada $\eta \in \mathbb{Z}^q$ fixado, temos que $\hat{\varphi}(\cdot, \eta) \in C^\infty(\mathbb{T}^p)$.

Seja $\alpha \in \mathbb{Z}_+^p$ e $\eta \in \mathbb{Z}^q$ fixado. Como $\varphi \in G^s(\mathbb{T}^N)$, existem $C > 0$ e $h_{j_0} > 0$ tais que

$$|\partial_x^\alpha \hat{\varphi}(x, \eta)| \leq \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{\mathbb{T}^q} |\partial_x^\alpha \varphi(x, y)| dy \leq \frac{1}{(2\pi)^q} \int_{\mathbb{T}^q} C h_{j_0}^{|\alpha|} (\alpha!)^s dy \leq C h_{j_0}^{|\alpha|} (\alpha!)^s,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^p$ e para todo $x \in \mathbb{T}^p$. Logo, $\hat{\varphi}(\cdot, \eta) \in G^s(\mathbb{T}^p)$.

Teorema 1.44. Seja $\varphi \in G^s(\mathbb{T}^N)$. Então, existem constantes $h_p = h_p(\varphi)$, $C > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$|\partial_x^\alpha \hat{\varphi}(x, \eta)| \leq C h_p^{|\alpha|} (\alpha!)^s e^{-\varepsilon |\eta|^{1/s}}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^p, \forall \eta \in \mathbb{Z}^q, \forall x \in \mathbb{T}^p.$$

Teorema 1.45. *Seja $\varphi_\eta, \eta \in \mathbb{Z}^q$, uma sequência de funções em $G^s(\mathbb{T}^p)$, tal que existem $C > 0, h_p > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que*

$$|\partial_x^\alpha \varphi_\eta(x)| \leq Ch_p^{|\alpha|} (\alpha!)^s e^{-\varepsilon|\eta|^{1/s}}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^p, \forall \eta \in \mathbb{Z}^q, \forall x \in \mathbb{T}^p. \quad (1.7)$$

Então, a função $\varphi : \mathbb{T}^N \rightarrow \mathbb{C}$, dada por,

$$\varphi(x, y) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} \varphi_\eta(x) e^{iy \cdot \eta}, \quad (1.8)$$

está bem definida e $\varphi \in G^s(\mathbb{T}^N)$.

Séries Parciais de Fourier para ultradistribuições Gevrey no toro

Considere $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$. Para cada $\psi \in G^s(\mathbb{T}^p)$, definimos

$$u_\psi : G^s(\mathbb{T}^q) \rightarrow \mathbb{C}$$

por

$$\langle u_\psi, \varphi \rangle = \langle u, \psi(x) \otimes \varphi(y) \rangle, \quad \forall \varphi \in G^s(\mathbb{T}^q),$$

com $\psi \otimes \varphi : \mathbb{T}^p \oplus \mathbb{T}^q \rightarrow \mathbb{C}$, definida por

$$(\psi \otimes \varphi)(x, y) = \psi(x)\varphi(y).$$

Lema 1.46. *Temos que $u_\psi \in D'_s(\mathbb{T}^q)$.*

Segue, do Lema 1.42, que podemos escrever

$$u_\psi(y) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} \widehat{u_\psi}(\eta) e^{iy \cdot \eta}, \quad (1.9)$$

sendo

$$\widehat{u_\psi}(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^q} \langle u_\psi, e^{-iy \cdot \eta} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^q} \langle u, \psi(x) e^{-iy \cdot \eta} \rangle.$$

Para cada $\eta \in \mathbb{Z}^q$ fixado, definimos o funcional linear

$$u_\eta : G^s(\mathbb{T}^p) \rightarrow \mathbb{C}$$

por

$$\langle u_\eta, \psi \rangle = \widehat{u_\psi}(\eta) = \frac{1}{(2\pi)^q} \langle u, \psi(x) e^{-iy \cdot \eta} \rangle. \quad (1.10)$$

Lema 1.47. *Temos que $u_\eta \in D'_s(\mathbb{T}^p)$, para todo $\eta \in \mathbb{Z}^q$.*

Segue de (1.9) e (1.10) que

$$u_\psi(y) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} \langle u_\eta, \psi \rangle e^{iy \cdot \eta}.$$

Também temos que,

$$\langle u, \psi(x) \otimes \varphi(y) \rangle = \langle u_\psi(y), \varphi(y) \rangle = (2\pi)^q \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} \widehat{u_\psi}(\eta) \widehat{\varphi}(-\eta) = (2\pi)^q \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} \langle u_\eta, \psi \rangle \widehat{\varphi}(-\eta).$$

Seja $\theta(x, y) \in G^s(\mathbb{T}^N)$. Sabemos que $\theta(x, y) = \sum_{\delta \in \mathbb{Z}^q} \widehat{\theta}(x, y) e^{iy \cdot \delta}$, com a convergência em $G^s(\mathbb{T}^N)$. Definimos assim

$$\begin{aligned} \psi_\delta(x) &= \widehat{\theta}(x, y), \\ \varphi_\delta(y) &= e^{iy \cdot \delta}. \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \langle u, \theta \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\delta| \leq k} \langle u, \widehat{\theta}(x, \delta) e^{iy \cdot \delta} \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{|\delta| \leq k} (2\pi)^q \left[\sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} \langle u_\eta, \psi_\delta(x) \rangle \widehat{\varphi}_\delta(-\eta) \right] \right\} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{|\delta| \leq k} (2\pi)^q \langle u_{-\delta}, \psi_\delta(x) \rangle \right\} = (2\pi)^q \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\delta| \leq k} \langle u_{-\delta}, \widehat{\theta}(x, \delta) \rangle \\ &= (2\pi)^q \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\eta| \leq k} \langle u_\eta, \widehat{\theta}(x, -\eta) \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\eta| \leq k} \langle u_\eta, \int_{\mathbb{T}^q} e^{iy \cdot \eta} \theta(x, y) dy \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{|\eta| \leq k} \langle u_\eta e^{iy \cdot \eta}, \theta \rangle, \end{aligned}$$

ou seja, fica provado que

$$u = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} u_\eta e^{iy \cdot \eta},$$

com a convergência em $D'_s(\mathbb{T}^p)$.

Agora, vejamos como ocorre o crescimento da sequência $(u_\eta)_{\eta \in \mathbb{Z}^q}$. Como $u \in D'_s(\mathbb{T}^p)$, segue do

Teorema 1.25 que para cada $\varepsilon_1 > 0$, existe C_{ε_1} tal que para toda $\psi \in G^{s, h_\ell}(\mathbb{T}^p)$ temos

$$\begin{aligned}
|\langle u_\eta, \psi(x) \rangle| &= |\widehat{u_\psi}(\eta)| \\
&= \frac{1}{(2\pi)^q} |\langle u_\psi, e^{-iy\eta} \rangle| \\
&= \frac{1}{(2\pi)^q} |\langle u, \psi(x) e^{-iy\eta} \rangle| \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^q} C_{\varepsilon_1} \sup_{(x,y) \in \mathbb{T}^N} \sup_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^{p+q}} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta \psi(x) e^{-iy\eta}| \varepsilon_1^{|\alpha|+|\beta|} (\alpha!)^{-s} (\beta!)^{-s} \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^q} C_{\varepsilon_1} \sup_{(x,y) \in \mathbb{T}^N} \sup_{(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^{p+q}} |\partial_x^\alpha \psi(x)| |\eta^\beta| \varepsilon_1^{|\alpha|} \varepsilon_1^{|\beta|} (\alpha!)^{-s} (\beta!)^{-s}.
\end{aligned}$$

Como $\psi \in G^{s, h_\ell}(\mathbb{T}^p)$, segue que

$$|\langle u_\eta, \psi(x) \rangle| \leq \frac{1}{(2\pi)^q} C_{\varepsilon_1} \|\psi\|_{s, h_\ell} \sup_{(\alpha, \beta)} h_\ell^{|\alpha|} (\alpha!)^s |\eta|^{|\beta|} \varepsilon_1^{|\alpha|} \varepsilon_1^{|\beta|} (\alpha!)^{-s} (\beta!)^{-s}.$$

Segue da última desigualdade e do Lema 2.13 (o qual será apresentado na próxima seção) que para cada $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
|\langle u_\eta, \psi(x) \rangle| &\leq \frac{1}{(2\pi)^q} C_{\varepsilon_1} \|\psi\|_{s, h_\ell} \sup_{(\alpha, \beta)} h_\ell^{|\alpha|} |\eta|^{|\beta|} \varepsilon_1^{|\alpha|} \varepsilon_1^{|\beta|} (\beta!)^{-s} \\
&\leq \frac{1}{(2\pi)^q} C_{\varepsilon_1} \|\psi\|_{s, h_\ell} e^{\varepsilon |\eta|^{1/s}} \sup_{(\alpha, \beta)} (h_\ell \varepsilon_1)^{|\alpha|} (C_\varepsilon \varepsilon_1)^{|\beta|}.
\end{aligned}$$

Agora, se escolhermos ε_1 de modo que $h_\ell \varepsilon_1 < 1$ e $C_\varepsilon \varepsilon_1 < 1$ teremos

$$|\langle u_\eta, \psi(x) \rangle| \leq \frac{1}{(2\pi)^q} C_{\varepsilon_1} \|\psi\|_{s, h_\ell} e^{\varepsilon |\eta|^{1/s}}, \quad \forall \eta \in \mathbb{Z}^q, \quad \forall \psi \in G^{s, h_\ell}(\mathbb{T}^p),$$

com C_{ε_1} dependendo de ε e h_ℓ .

Com as observações anteriores, podemos concluir o seguinte teorema:

Teorema 1.48. *Se $u \in D'_s(\mathbb{T}^N)$, então*

$$u = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} u_\eta(x) e^{iy \cdot \eta}, \quad (1.11)$$

sendo $u_\eta \in D'_s(\mathbb{T}^p)$ dada por

$$\langle u_\eta(x), \psi(x) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^q} \langle u, \psi(x) e^{-iy \cdot \eta} \rangle, \quad \forall \psi \in G^{s, h_\ell}(\mathbb{T}^p). \quad (1.12)$$

Além disso, dados $\varepsilon > 0$ e $h_\ell > 0$ existe uma constante $C_{\varepsilon, h_\ell} > 0$ tal que

$$|\langle u_\eta(x), \psi(x) \rangle| \leq C_{\varepsilon, h_\ell} \|\psi\|_{s, h_\ell} e^{\varepsilon |\eta|^{1/s}}, \quad \forall \eta \in \mathbb{Z}^q, \quad \forall \psi \in G^{s, h_\ell}(\mathbb{T}^p). \quad (1.13)$$

Vale também uma recíproca do resultado anterior, mais especificamente:

Teorema 1.49. *Seja $u_\eta, \eta \in \mathbb{Z}^q$, uma sequência em $D'_s(\mathbb{T}^p)$ que satisfaz a condição: dados $\varepsilon > 0$ e $h_\ell > 0$, existe uma constante C_{ε, h_ℓ} tal que*

$$|\langle u_\eta(x), \psi(x) \rangle| \leq C_{\varepsilon, h_\ell} \|\psi\|_{s, h_\ell} e^{\varepsilon|\eta|^{1/s}}, \quad \forall \eta \in \mathbb{Z}^q, \forall \psi \in G^{s, h_\ell}(\mathbb{T}^p).$$

Então,

$$u = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^q} u_\eta(x) e^{iy \cdot \eta} \in D'_s(\mathbb{T}^N).$$

1.5 Formas diferenciais e correntes em \mathbb{T}^N

Nesta seção iremos introduzir brevemente a linguagem básica sobre p -formas diferenciais e p -correntes definidas no toro \mathbb{T}^N . Nosso interesse nessa seção é estabelecer as notações e resultados essenciais, ainda no contexto Gevrey de ordem $s \geq 1$, para esses objetos que serão usados no decorrer do texto. Um tratamento mais completo sobre esse assunto pode ser encontrado no primeiro capítulo do livro [8].

Definição 1.50. *Considere o toro \mathbb{T}^N . Dado $p \in \{1, \dots, N\}$, dizemos que uma lista de números inteiros positivos $J = (j_1, \dots, j_p)$ é uma p -lista ordenada se*

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq N.$$

Usaremos a notação $|J| = p$ para indicar que J é uma p -lista ordenada.

Vamos denotar por $G^s(\mathbb{T}^N, \Lambda^p)$ o espaço das p -formas diferenciais (ou simplesmente p -formas) em \mathbb{T}^N dadas por

$$u = \sum_{|J|=p} u_J dt_J, \quad u_J \in G^s(\mathbb{T}^N). \quad (1.14)$$

sendo $J = (j_1, \dots, j_p)$ uma p -lista ordenada e $dt_J = dt_{j_1} \wedge \dots \wedge dt_{j_p}$. Por muitas vezes, vamos nos referir por 0-formas os elementos do espaço das funções Gevrey, isto é, $G^s(\mathbb{T}^N, \Lambda^0) = G^s(\mathbb{T}^N)$.

De forma análoga, consideramos o espaço $D'_s(\mathbb{T}^N, \Lambda^p)$ das p -correntes em \mathbb{T}^N , ou seja, dada $u \in D'_s(\mathbb{T}^N, \Lambda^p)$, temos que

$$u = \sum_{|J|=p} u_J dt_J, \quad u_J \in D'_s(\mathbb{T}^N), \quad (1.15)$$

sendo $J = (j_1, \dots, j_p)$ uma p -lista ordenada e $dt_J = dt_{j_1} \wedge \dots \wedge dt_{j_p}$.

Definição 1.51. O produto exterior de uma p -forma $u = \sum_{|J|=p} u_J dt_J$ por uma q -forma $v = \sum_{|I|=q} v_I dt_I$ é uma $(p+q)$ -forma dada por

$$(u \wedge v)(t) = \sum_{|J|=p} \sum_{|I|=q} u_J(t) v_I(t) dt_J \wedge dt_I. \quad (1.16)$$

Em particular, se v é uma função em $G^s(\mathbb{T}^N)$, ou seja, uma 0-forma, então

$$(u \wedge v)(t) = \sum_{|J|=p} u_J(t) v(t) dt_J. \quad (1.17)$$

Definição 1.52. A derivada exterior de uma p -forma $u = \sum_{|J|=p} u_J dt_J$ é a $(p+1)$ -forma dada por

$$du = \sum_{|J|=p} \sum_{k=1}^N \frac{\partial u_J}{\partial t_k} dt_k \wedge dt_J. \quad (1.18)$$

No caso particular de uma função u em $G^s(\mathbb{T}^N)$ temos

$$du = \sum_{k=1}^N \frac{\partial u}{\partial t_k} dt_k.$$

Uma p -forma u é fechada quando $du = 0$ e é exata quando pode ser escrita como $u = dv$ para alguma v .

Dadas uma p -forma u e uma q -forma v , pode ser provado que valem as igualdades seguir

$$d(u \wedge v) = du \wedge v + (-1)^p u \wedge dv;$$

$$d^2 u \doteq d(du) = 0.$$

Por fim, escrevendo $N = n + 1$ e denotando por $(t, x) = (t_1, \dots, t_n, x)$ as coordenadas em \mathbb{T}^{n+1} , vamos considerar o espaço $G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ das p -formas em \mathbb{T}^{n+1} geradas por $d_J = dt_{j_1} \wedge \dots \wedge dt_{j_p}$, com $|J| = p$, e com coeficientes em $G^s(\mathbb{T}^{n+1})$. Desse modo, um elemento u em $G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ pode ser escrito como

$$u(t, x) = \sum_{|J|=p} u_J(t, x) dt_J, \quad (1.19)$$

sendo $u_J \in G^s(\mathbb{T}^{n+1})$.

De forma semelhante, podemos considerar também o espaço das p -correntes $D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$, sendo nesse caso $u_J \in D'_s(\mathbb{T}^{n+1})$.

Capítulo 2

Resolubilidade global Gevrey

Neste capítulo, semelhantemente ao artigo [4], iremos considerar uma classe de campos vetoriais reais sobre o toro de dimensão $n + 1$. Porém, consideramos as classes Gevrey para as funções envolvidas no problema. Iniciamos o capítulo definindo o sistema de campos vetoriais reais e o operador diferencial associado que estamos interessados em investigar a s -resolubilidade global. Depois, apresentamos condições naturais de compatibilidade que uma função (ou forma diferencial) precisa satisfazer para que faça sentido buscar soluções globais para o problema, e dessa forma podemos definir precisamente a s -resolubilidade global em nosso contexto. A próxima seção é dedicada a reduzir o problema original para um sistema com coeficientes constantes. Posteriormente, estudamos a s -resolubilidade global desse sistema. Por fim, na última seção, como consequência do teorema principal demonstrado durante o capítulo, apresentamos exemplos de sistemas de campos vetoriais globalmente s -resolúveis.

2.1 O sistema de campos vetoriais

O objetivo central deste trabalho é o estudo da resolubilidade global nas classes Gevrey do seguinte sistema de campos vetoriais definidos sobre $\mathbb{T}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}/2\pi\mathbb{Z}^{n+1}$,

$$L_j = \frac{\partial}{\partial t_j} + a_j(t) \frac{\partial}{\partial x}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

sendo $a_j \in G^s(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$, com $s \geq 1$. Estamos denotando as coordenadas em \mathbb{T}^{n+1} por $(t, x) = (t_1, \dots, t_n, x) \in \mathbb{T}^{n+1}$.

Considere a 1-forma associada ao sistema, definida por

$$a(t) = \sum_{j=1}^n a_j(t) dt_j. \quad (2.2)$$

Vamos supor que $a(t)$ é uma 1-forma fechada, ou seja, $d_t a = 0$.

Proposição 2.1. *A 1-forma $a(t)$ é fechada se, e somente se, $\frac{\partial}{\partial t_j} a_k = \frac{\partial}{\partial t_k} a_j$, para todos $j, k \in \{1, \dots, n\}$.*

Demonstração. Temos, por (1.18), que

$$\begin{aligned}
d_t a(t) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial t_j} a_k dt_j \wedge dt_k \\
&= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\partial}{\partial t_j} a_k dt_j \wedge dt_k + \sum_{1 \leq k < j \leq n} \frac{\partial}{\partial t_j} a_k dt_j \wedge dt_k \\
&= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\partial}{\partial t_j} a_k dt_j \wedge dt_k + \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\partial}{\partial t_k} a_j dt_k \wedge dt_j \\
&= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\partial}{\partial t_j} a_k dt_j \wedge dt_k - \sum_{1 \leq j < k \leq n} \frac{\partial}{\partial t_k} a_j dt_j \wedge dt_k \\
&= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left(\frac{\partial}{\partial t_j} a_k - \frac{\partial}{\partial t_k} a_j \right) dt_j \wedge dt_k.
\end{aligned}$$

Da igualdade acima segue o resultado. \square

O resultado a seguir mostra que o sistema (2.1) dá origem a uma estrutura involutiva (formalmente integrável). Como cada uma das funções a_j depende apenas das coordenadas $t = (t_1, \dots, t_n)$, temos ainda que o sistema é do tipo tubo. Para mais detalhes sobre a teoria de estruturas involutivas, consulte o livro [5].

Proposição 2.2. *Os campos vetoriais definidos em (2.1) geram uma estrutura involutiva.*

Demonstração. Devemos mostrar que dadas duas seções L, M sobre a estrutura teremos que $[L, M]$ ainda é uma seção. Como os L_j são geradores globais, basta mostrar que $[L_j, L_k]$ são seções, para $j, k = 1, \dots, n$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
[L_j, L_k]f &= L_j(L_k f) - L_k(L_j f) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t_j} + a_j(t) \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial}{\partial t_k} f + a_k(t) \frac{\partial}{\partial x} f \right) - \left[\frac{\partial}{\partial t_k} + a_k(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t_j} f + a_j(t) \frac{\partial}{\partial x} f \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t_j} \frac{\partial}{\partial t_k} f + \frac{\partial}{\partial t_j} \left(a_k(t) \frac{\partial}{\partial x} f \right) + a_j(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t_k} f \right) + a_j(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(a_k(t) \frac{\partial}{\partial x} f \right) \\
&\quad - \left[\frac{\partial}{\partial t_k} \frac{\partial}{\partial t_j} f + \frac{\partial}{\partial t_k} \left(a_j(t) \frac{\partial}{\partial x} f \right) + a_k(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t_j} f \right) + a_k(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(a_j(t) \frac{\partial}{\partial x} f \right) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial t_j} \left(a_k(t) \frac{\partial}{\partial x} f \right) + a_j(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t_k} f \right) - \left[\frac{\partial}{\partial t_k} \left(a_j(t) \frac{\partial}{\partial x} f \right) + a_k(t) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial t_j} f \right) \right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Segue o resultado desejado. \square

Definição 2.3. *Sejam L_1, \dots, L_n os campos vetoriais dados em (2.1). Definimos, para cada $p \in \{0, \dots, n-1\}$, o operador*

$$\mathbb{L}^p : G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0}) \longrightarrow G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p+1,0})$$

por

$$\mathbb{L}^p u = \sum_{|J|=p} \sum_{j=1}^n L_j u_J dt_j \wedge dt_J. \quad (2.3)$$

Proposição 2.4. *Temos que $\mathbb{L}^p = d_t + a(t) \wedge \frac{\partial}{\partial x}$, para cada $p \in \{0, \dots, n-1\}$, sendo d_t a derivada exterior em \mathbb{T}_t^n .*

Demonstração. Seja $u = \sum_{|J|=p} u_J dt_J$ uma p -forma. Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^p u &= \sum_{|J|=p} \sum_{j=1}^n L_j u_J dt_j \wedge dt_J \\ &= \sum_{|J|=p} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial t_j} u_J dt_j \wedge dt_J + \sum_{|J|=p} \sum_{j=1}^n a_j(t) \frac{\partial}{\partial x} u_J dt_j \wedge dt_J \\ &= d_t \left(\sum_{|J|=p} u_J dt_J \right) + \sum_{|J|=p} \sum_{j=1}^n a_j(t) \frac{\partial}{\partial x} u_J dt_j \wedge dt_J \\ &= d_t u + a(t) \wedge \left(\frac{\partial}{\partial x} u \right) = \left(d_t + a(t) \wedge \frac{\partial}{\partial x} \right) u. \end{aligned}$$

\square

Observação 2.5. *Seja $f \in G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{1,0})$, dada por $f(x) = \sum_{j=1}^n f_j(t, x) dt_j$. Temos que, existe $u \in G^s(\mathbb{T}^{n+1})$ tal que $\mathbb{L}^0 u = f$ se, e somente se, $\sum_{j=1}^n L_j u dt_j = \sum_{j=1}^n f_j(t, x) dt_j$ se, e somente se, $L_j u = f_j$, para todo $j = 1, \dots, n$.*

Relembrando que se

$$u(t, x) = \sum_{|J|=p} u_J(t, x) dt_J, \quad u_J \in D'_s(\mathbb{T}^{n+1}),$$

então podemos reescrever $u(t, x)$ usando série de Fourier (veja (1.49)), ou seja,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \sum_{|J|=p} u_J(t, x) dt_J = \sum_{|J|=p} \left[\sum_{(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^{n+1}} \widehat{u}_J(\eta, \xi) e^{i(\eta \cdot t + \xi x)} \right] dt_J \\ &= \sum_{(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^{n+1}} \left(\sum_{|J|=p} \widehat{u}_J(\eta, \xi) dt_J \right) \wedge e^{i(\eta \cdot t + \xi x)} \doteq \sum_{(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^{n+1}} \widehat{u}(\eta, \xi) \wedge e^{i(\eta \cdot t + \xi x)}. \end{aligned}$$

Estamos denotando

$$\widehat{u}(\eta, \xi) = \sum_{|J|=p} \widehat{u}_J(\eta, \xi) dt_J,$$

além disso, iremos omitir o símbolo “ \wedge ” acima. Desta forma, segue que

$$u(t, x) = \sum_{(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^{n+1}} \widehat{u}(\eta, \xi) e^{i(\eta \cdot t + \xi x)}. \quad (2.4)$$

Também podemos considerar a série parcial de Fourier em relação a variável x , dada por:

$$u = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(t, \xi) e^{i\xi x} \quad (u \in G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0}) \text{ ou } u \in D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})), \quad (2.5)$$

com $\widehat{u}(t, \xi) = \sum_{|J|=p} \widehat{u}_J(t, \xi) dt_J$.

2.2 Condições de compatibilidade

Investigaremos agora certas condições de compatibilidade para que faça sentido indagar sobre a existência de soluções para a equação $\mathbb{L}^p u = f$. Em outras palavras, suponha que a $(p+1)$ -forma $f \in G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p+1,0})$ é tal que existe solução $u \in D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ para a equação $\mathbb{L}^p u = f$. Então:

1. Primeiro, observe que $\mathbb{L}^{p+1} \circ \mathbb{L}^p = 0$. De fato,

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^{p+1}(\mathbb{L}^p u) &= \sum_{|J|=p} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n L_j L_k u_J dt_j \wedge dt_k \wedge dt_J \\ &= \sum_{|J|=p} \sum_{1 \leq j < k \leq n} L_j L_k u_J dt_j \wedge dt_k \wedge dt_J + \sum_{|J|=p} \sum_{1 \leq k < j \leq n} L_j L_k u_J dt_j \wedge dt_k \wedge dt_J \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} (L_j L_k - L_k L_j) u_J dt_j \wedge dt_k \wedge dt_J \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} [L_j, L_k] u_J dt_j \wedge dt_k \wedge dt_J = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbb{L}^{p+1} f = \mathbb{L}^{p+1}(\mathbb{L}^p u) = 0. \quad (2.6)$$

2. Tomando série parcial de Fourier em relação à variável x na equação $\mathbb{L}^p u = f$, temos que

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}} d_t \widehat{u}(t, \xi) e^{i\xi x} + \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} i\xi a(t) \wedge \widehat{u}(t, \xi) e^{i\xi x} = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(t, \xi) e^{i\xi x}. \quad (2.7)$$

Logo,

$$d_t \widehat{u}(t, \xi) + i\xi a(t) \wedge \widehat{u}(t, \xi) = \widehat{f}(t, \xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}. \quad (2.8)$$

De fato, veja que

$$\begin{aligned}
d_t u &= \sum_{|J|=p} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial t_k} u_J dt_k \wedge dt_J \\
&= \sum_{|J|=p} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial t_k} \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \widehat{u}_J(t, \xi) e^{ix\xi} \right) dt_k \wedge dt_J \\
&= \sum_{|J|=p} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \frac{\partial}{\partial t_k} \widehat{u}_J(t, \xi) e^{ix\xi} \right) dt_k \wedge dt_J \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \sum_{|J|=p} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial t_k} \widehat{u}_J(t, \xi) e^{ix\xi} dt_k \wedge dt_J.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$d_t \widehat{u}(t, \xi) = \sum_{|J|=p} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial t_k} \widehat{u}_J(t, \xi) dt_k \wedge dt_J.$$

Portanto, segue que

$$d_t u = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} d_t \widehat{u}(t, \xi) e^{i\xi x}. \quad (2.9)$$

Além disso, sendo $u = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(t, \xi) e^{i\xi x}$ e $a(t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) dt_k$ temos que

$$\begin{aligned}
a(t) \wedge \frac{\partial}{\partial x} u &= \sum_{k=1}^n a_k dt_k \wedge \sum_{|J|=p} \frac{\partial}{\partial x} u_J(t, x) dt_J \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{|J|=p} a_k(t) \frac{\partial}{\partial x} u_J(t, x) dt_k \wedge dt_J \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{|J|=p} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} i\xi a_k(t) \widehat{u}_J(t, \xi) e^{i\xi x} dt_k \wedge dt_J \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} i\xi \sum_{k=1}^n \sum_{|J|=p} a_k(t) \widehat{u}_J(t, \xi) e^{i\xi x} dt_k \wedge dt_J \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} i\xi a(t) \wedge \left(\sum_{|J|=p} \widehat{u}_J(t, \xi) dt_J \right) e^{i\xi x} \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} i\xi a(t) \wedge \widehat{u}(t, \xi) e^{i\xi x}.
\end{aligned}$$

Logo vale a expressão (2.7) o que implica a igualdade (2.8).

3. É possível decompor a 1-forma fechada $a(t)$ como a soma de uma 1-forma constante e uma 1-forma exata (ver [4]). Mais especificamente $a(t) = a_0 + d_t A$, sendo

$$a_0 = \sum_{j=1}^n a_{j0} dt_j \quad (2.10)$$

uma 1-forma com coeficientes constantes a_{j0} , dados por

$$a_{j0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_j(0, \dots, t_j, \dots, 0) dt_j \quad (2.11)$$

e $A \in G^s(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$. As constantes a_{j0} são as médias das funções a_j .

Vamos considerar o vetor $\alpha_0 = (a_{10}, \dots, a_{n0})$ e por vezes usaremos a identificação $a_0 \approx \alpha_0$.

Suponha que $\xi \alpha_0 \in \mathbb{Z}^n$. Multiplique a equação (2.8) por $e^{i\xi A(t)} \in G^s(\mathbb{T}^n)$ (ver Lema 2.14).

Assim obtemos

$$e^{i\xi A(t)} d_t \widehat{u}(t, \xi) + i\xi a(t) \wedge (e^{i\xi A(t)} \widehat{u}(t, \xi)) = e^{i\xi A(t)} \widehat{f}(t, \xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}. \quad (2.12)$$

Note que

$$\begin{aligned} d_t(e^{i\xi A(t)} \widehat{u}(t, \xi)) &= d_t \sum_{|J|=p} \widehat{u}_J(t, \xi) e^{i\xi A(t)} dt_J = \sum_{|J|=p} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial t_k} (\widehat{u}_J(t, \xi) e^{i\xi A(t)}) dt_k \wedge dt_J \\ &= \sum_{|J|=p} \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial t_k} \widehat{u}_J(t, \xi) e^{i\xi A(t)} + \widehat{u}_J(t, \xi) \frac{\partial}{\partial t_k} e^{i\xi A(t)} \right] dt_k \wedge dt_J \\ &= \sum_{|J|=p} \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial t_k} \widehat{u}_J(t, \xi) e^{i\xi A(t)} + i\xi \frac{\partial}{\partial t_k} A(t) \cdot \widehat{u}_J(t, \xi) e^{i\xi A(t)} \right] dt_k \wedge dt_J \\ &= e^{i\xi A(t)} \sum_{|J|=p} \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial t_k} \widehat{u}_J(t, \xi) dt_k \wedge dt_J \\ &\quad + i\xi \sum_{|J|=p} \sum_{k=1}^n \widehat{u}_J(t, \xi) \frac{\partial}{\partial t_k} A(t) \cdot e^{i\xi A(t)} dt_k \wedge dt_J \\ &= e^{i\xi A(t)} d_t \widehat{u}(t, \xi) + i\xi \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial t_k} A(t) dt_k \right) \wedge \left(\sum_{|J|=p} \widehat{u}_J(t, \xi) e^{i\xi A(t)} dt_J \right) \\ &= e^{i\xi A(t)} d_t \widehat{u}(t, \xi) + i\xi (d_t A(t)) \wedge (\widehat{u}(t, \xi) e^{i\xi A(t)}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} e^{i\xi A(t)} d_t \widehat{u}(t, \xi) + i\xi a(t) \wedge (e^{i\xi A(t)} \widehat{u}(t, \xi)) &= d_t(e^{i\xi A(t)} \widehat{u}(t, \xi)) + i\xi a_0(t) \wedge (e^{i\xi A(t)} \widehat{u}(t, \xi)) \\ &= (d_t + i\xi a_0 \wedge)(e^{i\xi A(t)} \widehat{u}(t, \xi)). \end{aligned}$$

Logo, segue de (2.8) que

$$(d_t + i\xi a_0 \wedge)(e^{i\xi A(t)} \widehat{u}(t, \xi)) = e^{i\xi A(t)} \widehat{f}(t, \xi), \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}. \quad (2.13)$$

Como $\xi \alpha_0 \in \mathbb{Z}^n$, a função $\psi_j(t) = e^{i\xi(\alpha_0 \cdot t)}$ é periódica e está em $G^s(\mathbb{T}^n)$. Assim, multiplicando ambos os lados de (2.13) por $\psi_j(t)$ segue que

$$(d_t + i\xi a_0 \wedge)(e^{i\xi(\alpha_0 \cdot t + A(t))} \widehat{u}(t, \xi)) = e^{i\xi(\alpha_0 \cdot t + A(t))} \widehat{f}(t, \xi).$$

Observando que $d_t(e^{i\xi(\alpha_0 \cdot t)}) = \sum_{k=1}^n i\xi a_{k0} e^{i\xi \alpha_0 \cdot t} dt_k = i\xi a_0 \wedge e^{i\xi \alpha_0 \cdot t}$, segue da igualdade anterior que

$$d_t \left(e^{i\xi(\alpha_0 \cdot t + A(t))} \widehat{u}(t, \xi) \right) = e^{i\xi(\alpha_0 \cdot t + A(t))} \widehat{f}(t, \xi),$$

ou seja, $e^{i\xi(\alpha_0 \cdot t + A(t))} \widehat{f}(t, \xi)$ é uma $(p+1)$ -forma exata (quando $\xi \alpha_0 \in \mathbb{Z}^n$).

4. Motivados pelas observações anteriores, considere o conjunto

$$\mathbb{E}^p = \{f \in G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p+1,0}) : \mathbb{L}^{p+1} f = 0 \text{ e } e^{i\xi(\alpha_0 \cdot t + A(t))} \widehat{f}(t, \xi) \text{ é exata quando } \xi \alpha_0 \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Chamaremos \mathbb{E}^p de *conjunto de compatibilidade relativo ao nível p do complexo de operadores diferenciais*.

Finalmente, temos o necessário para definir nossa noção de resolubilidade.

Definição 2.6. *Seja $s \geq 1$. Dizemos que o operador $\mathbb{L}^p = d_t + a(t) \wedge \frac{\partial}{\partial x}$ é globalmente s -resolúvel, quando para cada $f \in \mathbb{E}^p$ existe uma p -corrente $u \in D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ tal que $\mathbb{L}^p u = f$.*

2.2.1 Enunciado do teorema principal

Antes de enunciar o resultado principal, precisamos definir uma certa aproximação Diofantina para vetores irracionais.

Definição 2.7. *Dizemos que $\alpha \in \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{Q}^m$ é um vetor exponencial Liouville de ordem $s \geq 1$, se existe $\varepsilon > 0$ tal que a desigualdade*

$$|\xi \alpha - \eta| < e^{-\varepsilon |\xi|^{1/s}} \quad (2.14)$$

tem infinitas soluções $(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^1$.

No caso particular em que $s = 1$, usa-se apenas a denominação exponencial Liouville.

Portanto, $\alpha \in \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{Q}^m$ não é um vetor exponencial Liouville de ordem $s \geq 1$ se para todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|\xi\alpha - \eta| \geq C_\varepsilon e^{-\varepsilon|\xi|^{1/s}}, \quad (2.15)$$

para todo $(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^1$.

O próximo resultado é uma adaptação do Lema 2.4 de [3].

Lema 2.8. *Seja $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m \setminus \mathbb{Q}^m$ um vetor exponencial Liouville de ordem $s \geq 1$. Então existem $\nu \in \{1, \dots, m\}$, $\varepsilon > 0$ e uma sequência $(\eta_l, \xi_l) = (\eta_l^{(1)}, \dots, \eta_l^{(m)}, \xi_l) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}$ tais que*

$$|\eta_l^{(\nu)} - \xi_l \alpha_\nu| = |\eta_l - \xi_l \alpha| \leq e^{-\varepsilon|(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}}, \text{ para todo } l \in \mathbb{N}. \quad (2.16)$$

Demonstração. Por definição, existem $\varepsilon_0 > 0$ e uma sequência $\{(\eta_l, \xi_l)\}_{l \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}$ tais que

$$|\eta_l - \xi_l \alpha| \leq e^{-\varepsilon_0 \xi_l^{1/s}}.$$

Portanto, para cada $j = 1, \dots, m$ temos que

$$|\eta_l^{(j)}| \leq e^{-\varepsilon_0 \xi_l^{1/s}} + \xi_l |\alpha_j| \leq \xi_l + \xi_l |\alpha_j| \leq (1 + |\alpha|) \xi_l, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, existe $C > 0$ tal que $|(\eta_l, \xi_l)| \leq C \left(|\xi_l| + \sum_{j=1}^m |\eta_l^{(j)}| \right) \leq C(1 + m(1 + |\alpha|)) \xi_l$.

Tome $\varepsilon = \varepsilon_0 [C(1 + m(1 + |\alpha|))]^{-1/s}$, então temos que

$$\varepsilon |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s} \leq \varepsilon_0 \xi_l^{1/s}.$$

Logo,

$$|\eta_l - \xi_l \alpha| \leq e^{-\varepsilon_0 \xi_l^{1/s}} \leq e^{-\varepsilon |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}}.$$

Por fim, vejamos que existe $\nu \in \{1, \dots, m\}$ tal que $|\eta_l - \xi_l \alpha| = |\eta_l^{(\nu)} - \xi_l \alpha_\nu|$. De fato, dado $\nu \in \{1, \dots, m\}$ defina $I_\nu = \{l \in \mathbb{N} : |\eta_l - \xi_l \alpha| = |\eta_l^{(\nu)} - \xi_l \alpha_\nu|\}$. Basta tomar $\nu \in \{1, \dots, m\}$ tal que I_ν é infinito e substituir $\{(\eta_l, \xi_l)\}_{l \in \mathbb{N}}$ pela subsequência $\{(\eta_l, \xi_l)\}_{l \in I_\nu}$ que teremos a sequência com a propriedade que $|\eta_l^{(\nu)} - \xi_l \alpha_\nu| = |\eta_l - \xi_l \alpha| \leq e^{-\varepsilon |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}}$, para todo $l \in \mathbb{N}$. \square

Finalmente, podemos enunciar o resultado que garante a s -resolubilidade global do operador \mathbb{L}^p . O leitor notará que o próximo teorema é uma adaptação natural do Teorema 1.7 de [4].

Teorema 2.9. *Seja $s \geq 1$. Para cada $p = 0, \dots, n-1$ o operador $\mathbb{L}^p = d_t + a(t) \wedge \frac{\partial}{\partial x}$ é globalmente s -resolúvel se, e somente se, $\alpha_0 \in \mathbb{Q}^n$ ou $\alpha_0 \notin \mathbb{Q}^n$ não é um vetor exponencial Liouville de ordem s .*

2.3 Redução a forma normal

Como já vimos na seção anterior, podemos escrever $a = a_0 + d_t A$, sendo a_0 uma 1-forma com coeficientes constantes e $A \in G^s(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$, $s \geq 1$. Esta seção é dedicada a provar que \mathbb{L}^p é globalmente s -resolúvel se, e somente se, o operador

$$\mathbb{L}_0^p = d_t + a_0 \wedge \frac{\partial}{\partial x}$$

é globalmente s -resolúvel.

2.3.1 Lemas auxiliares

Vamos inicialmente demonstrar alguns lemas técnicos que vão nos auxiliar na demonstração do resultado principal, Teorema 2.9. Para isso, faremos uso da *Fórmula de Faà di Bruno* em várias variáveis descrita em [7] e [11] e de alguns lemas auxiliares, descritos em [2].

Começamos definindo uma ordem em \mathbb{Z}_+^m :

Se $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ e $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ estão em \mathbb{Z}_+^m , escrevemos $\mu \prec \nu$ sempre que uma das opções abaixo acontece:

1. $|\mu| < |\nu|$;
2. $|\mu| = |\nu|$ e $\mu_1 < \nu_1$ ou
3. $|\mu| = |\nu|$, $\mu_1 = \nu_1, \dots, \mu_j = \nu_j$ e $\mu_{j+1} < \nu_{j+1}$, para algum $1 \leq j \leq n$.

Para $\beta \in \mathbb{Z}_+^m$ e $k \in \mathbb{Z}_+$, $1 \leq k \leq |\beta|$, denotamos por $P(\beta, k)$ o conjunto dos elementos

$$(k_1, \dots, k_{|\beta|}; l_1, \dots, l_\beta) \in \mathbb{Z}_+^{|\beta|} \times (\mathbb{Z}_+^m)^{|\beta|},$$

tais que para algum $1 \leq \sigma \leq |\beta|$ vale

$$k_i = 0 \text{ e } l_i = 0 \text{ para } 1 \leq i \leq |\beta| - \sigma;$$

$$k_i > 0 \text{ para } |\beta| - \sigma + 1 \leq i \leq |\beta|; \text{ e}$$

$$0 \prec l_{|\beta|-\sigma+1} \prec \dots \prec l_{|\beta|} \text{ e}$$

$$\sum_{i=1}^{|\beta|} k_i = k \text{ e } \sum_{j=1}^{|\beta|} k_j l_j = \beta.$$

(2.17)

Denotando $l_i = (l_i^{(1)}, \dots, l_i^{(m)})$ e $\beta = (\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(m)})$, temos que

$$\sum_{i=1}^{|\beta|} k_i |l_i| = \sum_{i=1}^{|\beta|} k_i \left(\sum_{r=1}^m l_i^{(r)} \right) = \left| \sum_{i=1}^{|\beta|} k_i (l_i^{(1)}, \dots, l_i^{(m)}) \right| = \left| \sum_{i=1}^{\beta} k_i l_i \right| = |\beta|. \quad (2.18)$$

Além disso, por (2.17) temos que

$$\beta = (\beta^{(1)}, \dots, \beta^{(m)}) = \sum_{j=1}^{|\beta|} k_j (l_j^{(1)}, \dots, l_j^{(m)}), \quad (2.19)$$

então $\beta^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{|\beta|} k_j l_j^{(\nu)}$, para todo $\nu = 1, \dots, m$. Em resumo,

$$\sum_{i=1}^{|\beta|} k_i |l_i| = |\beta| \text{ e } \sum_{i=1}^{|\beta|} k_i l_i^{(\nu)} = \beta^{(\nu)}, \quad \nu = 1, \dots, m. \quad (2.20)$$

Sejam $F \in C^\infty(\mathbb{R})$, $G \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ e considere a composição $M = F \circ G$. Então, para $\beta \in \mathbb{Z}_+^m$, a *Fórmula de Faà di Bruno* para as derivadas $\partial^\beta M(t)$ é dada por:

$$\partial^\beta M(t) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq |\beta| \\ P(\beta, k)}} F^{(k)}(G(t)) \frac{\beta!}{k_1! \cdots k_{|\beta|}!} \prod_{j=1}^{|\beta|} \left(\frac{\partial^{l_j} G(t)}{l_j!} \right)^{k_j}. \quad (2.21)$$

Para $(k_1, \dots, k_{|\beta|}; l_1, \dots, l_{|\beta|}) \in P(\beta, k)$ e $\nu \in \{1, \dots, m\}$, considere o conjunto

$$E_k^\nu = \{j \in \{1, \dots, |\beta|\} : l_j^{(\nu)} \geq 1\}. \quad (2.22)$$

Seja

$$k^\nu = \sum_{j \in E_k^\nu} k_j \text{ se } E_k^\nu \neq \emptyset \text{ e } k^\nu = 0 \text{ se } E_k^\nu = \emptyset. \quad (2.23)$$

Note que, para $E_k^\nu \neq \emptyset$, segue de (2.20) que

$$\sum_{j \in E_k^\nu} k_j l_j^{(\nu)} = \beta^{(\nu)} \text{ e } k^\nu \leq \beta^{(\nu)}. \quad (2.24)$$

Lema 2.10. *Seja $(k_1, \dots, k_{|\beta|}; l_1, \dots, l_{|\beta|}) \in P(\beta, k)$ e para $\nu \in \{1, \dots, m\}$, considere $k_*^\nu \in \mathbb{Z}_+$ tal que $0 \leq k_*^\nu \leq k^\nu$, onde k^ν é dado por (2.23). Então, para $s \geq 1$, temos que*

$$\prod_{\nu=1}^m (k_*^\nu!)^s \prod_{j=1}^{|\beta|} (l_j!)^{(s-1)k_j} \leq \left(\prod_{\nu=1}^m k_*^\nu! \right) \beta^{(s-1)}. \quad (2.25)$$

Demonstração. Dados inteiros m, n com $0 < m \leq n$, usaremos que $m! \leq n!^{\frac{m-1}{n-1}}$.

Seja $\Lambda_k = \{\nu : E_k^\nu \neq \emptyset\}$. Usando (2.24) e a desigualdade anterior segue que

$$\prod_{j=1}^{|\beta|} (l_j!)^{k_j} = \prod_{\nu=1}^m \prod_{j=1}^{|\beta|} (l_j^{(\nu)})^{k_j} = \prod_{\nu \in \Lambda_k} \prod_{j \in E_k^\nu} (l_j^{(\nu)})^{k_j} \leq \prod_{\nu \in \Lambda_k} \prod_{j \in E_k^\nu} (\beta^{(\nu)})^{k_j \frac{l_j^{(\nu)} - 1}{\beta^{(\nu)} - 1}}.$$

Mas, fixado ν temos que

$$\prod_{j \in E_k^\nu} (\beta^{(\nu)})^{k_j \frac{l_j^{(\nu)} - 1}{\beta^{(\nu)} - 1}} = (\beta^{(\nu)})^{\sum_{j \in E_k^\nu} k_j \frac{l_j^{(\nu)} - 1}{\beta^{(\nu)} - 1}} = (\beta^{(\nu)})^{\frac{\beta^{(\nu)} - k^\nu}{\beta^{(\nu)} - 1}}.$$

Portanto, segue que

$$\prod_{j=1}^{|\beta|} (l_j!)^{k_j} \leq \prod_{\nu \in \Lambda_k} (\beta^{(\nu)})^{\frac{\beta^{(\nu)} - k^\nu}{\beta^{(\nu)} - 1}} = \prod_{\nu=1}^m (\beta^{(\nu)})^{\frac{\beta^{(\nu)} - k^\nu}{\beta^{(\nu)} - 1}}.$$

Desta forma,

$$\prod_{j=1}^{|\beta|} (l_j!)^{(s-1)k_j} \leq \prod_{\nu=1}^m (\beta^{(\nu)})^{\frac{\beta^{(\nu)} - k^\nu}{\beta^{(\nu)} - 1}}.$$

Também, como $k_*^\nu \leq k^\nu \leq \beta^{(\nu)}$ segue da desigualdade do início que

$$(k_*^\nu)^s = k_*^\nu! (k_*^\nu!)^{s-1} \leq k_*^\nu! (\beta^{(\nu)})^{(s-1) \frac{k_*^\nu - 1}{\beta^{(\nu)} - 1}} \text{ e}$$

$$\prod_{\nu=1}^m (k_*^\nu!)^s \leq \left(\prod_{\nu=1}^m k_*^\nu! \right) \prod_{\nu=1}^m (\beta^{(\nu)})^{(s-1) \frac{k_*^\nu - 1}{\beta^{(\nu)} - 1}}.$$

Logo, usando as desigualdades anteriores e o fato que $k^\nu - k_*^\nu \geq 0$, concluímos que

$$\begin{aligned} \prod_{\nu=1}^m (k_*^\nu!)^s \prod_{j=1}^{|\beta|} (l_j!)^{(s-1)k_j} &\leq \left(\prod_{\nu=1}^m (k_*^\nu!) \right) \prod_{\nu=1}^m (\beta^{(\nu)})^{(s-1) \left[\frac{\beta^{(\nu)} - k^\nu}{\beta^{(\nu)} - 1} + \frac{k_*^\nu - 1}{\beta^{(\nu)} - 1} \right]} \\ &\leq \left(\prod_{\nu=1}^m (k_*^\nu!) \right) \prod_{\nu=1}^m (\beta^{(\nu)})^{(s-1) \left[1 - \frac{k^\nu - k_*^\nu}{\beta^{(\nu)} - 1} \right]} \\ &\leq \left(\prod_{\nu=1}^m (k_*^\nu!) \right) \prod_{\nu=1}^m (\beta^{(\nu)})^{(s-1)} \\ &= \left(\prod_{\nu=1}^m (k_*^\nu!) \right) \beta^{(s-1)}. \end{aligned}$$

□

Os próximos dois lemas são encontrados em [2] (Lemas 2.1 e 2.2).

Lema 2.11. *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $s \geq 1$ um número real. Sejam k_1, \dots, k_n inteiros positivos tais que $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$. Para $k \doteq k_1 + \dots + k_n$ temos que*

$$k!^s \prod_{l=1}^n l!^{(s-1)k_l} \leq k!n!^{s-1}. \quad (2.26)$$

Demonstração. É fácil ver que $n!^{1/(n-1)} \leq (n+1)!^{1/n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $n \geq 2$. Em particular, se m e n são inteiros tais que $1 < m \leq n$, então $m!^{1/(m-1)} \leq n!^{1/(n-1)}$, o que implica

$$m!^{(s-1)(n-1)} \leq n!^{(s-1)(m-1)}.$$

Veja que $l!^{(s-1)(n-1)} \leq n!^{(s-1)(l-1)}$, assim $l!^{(s-1)k_l(n-1)} \leq n!^{(s-1)k_l(l-1)}$. Portanto,

$$\prod_{l=1}^n l!^{(s-1)k_l} \leq \prod_{l=1}^n n!^{(s-1)(l-1)k_l/(n-1)} = n!^{(s-1) \sum_{l=1}^n \frac{(l-1)k_l}{(n-1)}} = n!^{(s-1)(k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n)/(n-1)}$$

e $k!^s \leq k!n!^{(s-1)(k-1)/(n-1)}$. Segue das últimas estimativas que

$$k!^s \prod_{l=1}^n l!^{(s-1)k_l} \leq k!n!^{(s-1)(k_2+2k_3+\dots+(n-1)k_n+k-1)/(n-1)},$$

o que prova o resultado pois $k_2 + 2k_3 + \dots + (n-1)k_n + (k-1) = n-1$. \square

Lema 2.12. Para $n \in \mathbb{N}$ e $R > 0$ temos que

$$\sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n} \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} R^k = R(R+1)^{n-1},$$

sendo $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}_+$ e $k = k_1 + \dots + k_n$.

Demonstração. Provamos por indução matemática em n . Para $n = 1$ temos $(1!/1!)R^1 = R(R+1)^0$.

Para $n = 2$ temos que

$$\sum_{k_1+2k_2=2} \frac{k!}{k_1!k_2!} R^k = \frac{2!}{2!0!} R^2 + \frac{1!}{0!1!} R = R(R+1).$$

Agora, suponha a hipótese de indução, ou seja, que a expressão dada no enunciado do lema vale para valores entre $1, \dots, n$, então

$$\begin{aligned} & \sum_{k_1+2k_2+\dots+(n+1)k_{n+1}=n+1} \frac{k!}{k_1! \cdots k_{n+1}!} R^k \\ &= R + \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n+1} \frac{k!}{k_1! \cdots k_n!} R^k \\ &= R + \sum_{k_1+2k_2+\dots+nk_n=n+1} \left(\sum_{j=1}^n \frac{(k-1)!}{k_1! \cdots (k_{j-1}!) \cdots k_n!} \right) R^k \\ &= R + \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k_1+2k_2+\dots+j(k_{j-1})+\dots+nk_n=n+1-j} \frac{(k-1)!}{k_1! \cdots (k_{j-1}!) \cdots k_n!} R^k \right) \\ &\doteq R + \sum_{j=1}^n I_j. \end{aligned}$$

com $\frac{(k-1)!}{k_1! \cdots (k_{j-1}!) \cdots k_n!} = 0$ se $k_j = 0$.

Fazendo $m_i = k_i$ para $i \neq j$ e $m_j = k_j - 1$ temos que

$$\begin{aligned} I_j &= \sum_{m_1 + \cdots + nm_n = n+1-j} \frac{m!}{m_1! \cdots m_n!} R^{m+1} \\ &= \left(\sum_{m_1 + \cdots + (n+1-j)m_{n+1-j} = n+1-j} \frac{m!}{m_1! \cdots m_{(n+1-j)}!} R^m \right) R, \end{aligned}$$

pois $m_i = 0$ para $i > n+1-j$.

Portanto, por indução, $I_j = (R(R+1)^{n+1-j})R = R^2(R+1)^{n-j}$. Logo,

$$\begin{aligned} \sum_{k_1 + 2k_2 + \cdots + (n+1)k_{n+1} = n+1} \frac{k!}{k_1! \cdots k_{n+1}!} R^k &= R + R^2 \sum_{j=1}^n (R+1)^{n-j} \\ &= R + R^2 \left[\frac{(R+1)^n - 1}{R} \right] \\ &= R(R+1)^n. \end{aligned}$$

□

Os próximos dois lemas podem ser encontrados em [11] (Lemas 4.2 e 4.3).

Lema 2.13. *Seja $\varepsilon > 0$, $s \geq 1$ e $k \in \mathbb{Z}_+$. Então para $x \geq 0$ temos que*

$$x^k e^{-\varepsilon x^{1/s}} \leq (C_{\varepsilon,s})^k k!^s, \quad (2.27)$$

sendo $C_{\varepsilon,s} = \left(\frac{s}{\varepsilon}\right)^s$.

Demonstração. Temos que a função $x \in [0, +\infty) \mapsto x^k e^{-\varepsilon x^{1/s}}$ atinge o máximo para $x_0 = \left(\frac{sk}{\varepsilon}\right)^s$ em $[0, +\infty)$; portanto temos que

$$x^k e^{-\varepsilon x^{1/s}} \leq \left(\frac{sk}{\varepsilon}\right)^{sk} e^{-sk} = \left(\frac{s}{\varepsilon}\right)^{sk} k^{sk} e^{-sk} = \left(\frac{s}{\varepsilon}\right)^{sk} (k^k e^{-k})^s.$$

Pela estimativa de Stirling $k^k e^{-k} \leq k!$, logo

$$x^k e^{-\varepsilon x^{1/s}} \leq \left(\frac{s}{\varepsilon}\right)^{sk} k!^s = (C_{\varepsilon,s})^k k!^s.$$

□

Lema 2.14. *Sejam $\varepsilon > 0$, $s \geq 1$ e $A(t) \in G^s(\mathbb{T}^m; \mathbb{R})$. Então, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que*

$$e^{-\varepsilon|\xi|^{1/s}} |\partial_t^\beta e^{i\xi A(t)}| \leq C_\varepsilon^{|\beta|} (\beta!)^s, \quad (2.28)$$

para todo $(t, \xi) \in \mathbb{T}^m \times \mathbb{Z}$ e $\beta \in \mathbb{Z}_+^m$.

Demonstração. Seja $\beta \in \mathbb{Z}_+^m$. Aplicamos a Formula de Fa di Bruno (2.21), com $F(x) = e^x$ e $G(t) = i\xi A(t)$, obtendo

$$\partial^\beta e^{i\xi A(t)} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq |\beta| \\ P(\beta, k)}} \frac{\beta!}{k_1! \cdots k_{|\beta|}!} e^{i\xi A(t)} \prod_{j=1}^{|\beta|} \left(\frac{\partial^{l_j} (i\xi A(t))}{l_j!} \right)^{k_j}. \quad (2.29)$$

Como $A \in G^s(\mathbb{T}^m; \mathbb{R})$, existem constantes $C_A > 0$ e $R_A > 0$ tais que

$$|\partial^\alpha A(t)| \leq C_A R_A^{|\alpha|} (\alpha!)^s, \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{Z}_+^m, t \in \mathbb{T}^m. \quad (2.30)$$

Segue de (2.29) e (2.30) que para todo $t \in \mathbb{T}^m$ e $\xi \in \mathbb{Z}$ vale

$$\begin{aligned} |\partial^\beta e^{i\xi A(t)}| &\leq \sum_{\substack{1 \leq k \leq |\beta| \\ P(\beta, k)}} \frac{\beta!}{k_1! \cdots k_{|\beta|}!} \prod_{j=1}^{|\beta|} \left(\frac{|\xi| C_A R_A^{l_j} l_j!^s}{l_j!} \right)^{k_j} \\ &\leq \sum_{\substack{1 \leq k \leq |\beta| \\ P(\beta, k)}} \frac{\beta!}{k_1! \cdots k_{|\beta|}!} (C_A |\xi|)^k R_A^{|\beta|} \prod_{j=1}^{|\beta|} (l_j!)^{(s-1)k_j}, \end{aligned}$$

sendo que a última desigualdade segue de (2.17) e (2.20).

Para cada $1 \leq k \leq |\beta|$, sejam k_*^1, \dots, k_*^m inteiros não negativos tais que

$$k_*^1 + \cdots + k_*^m = k \text{ e } k_*^\nu \leq k^\nu, \nu = 1, \dots, m.$$

Usando o Lema 2.13 temos

$$\begin{aligned} e^{-\varepsilon|\xi|^{1/s}} |\xi|^k &= e^{-\varepsilon|\xi|^{1/s}} |\xi|^{k_*^1 + \cdots + k_*^m} = \underbrace{e^{-\frac{\varepsilon}{m}|\xi|^{1/s}} \cdots e^{-\frac{\varepsilon}{m}|\xi|^{1/s}}}_{m \text{ vezes}} \cdot |\xi|^{k_*^1 + \cdots + k_*^m} \\ &= \prod_{\nu=1}^m \left(e^{-\frac{\varepsilon}{m}|\xi|^{1/s}} |\xi|^{k_*^\nu} \right) \leq \prod_{\nu=1}^m (C_{\frac{\varepsilon}{m}, s})^{k_*^\nu} (k_*^\nu!)^s = (C_{\frac{\varepsilon}{m}, s})^k \prod_{\nu=1}^m (k_*^\nu!)^s. \end{aligned}$$

Segue que

$$\begin{aligned} e^{-\varepsilon|\xi|^{1/s}} |\partial_t^\beta e^{i\xi A(t)}| &\leq e^{-\varepsilon|\xi|^{1/s}} \sum_{\substack{1 \leq k \leq |\beta| \\ P(\beta, k)}} \frac{\beta!}{k_1! \cdots k_{|\beta|}!} (C_A |\xi|)^k R_A^{|\beta|} \prod_{j=1}^{|\beta|} (l_j!)^{(s-1)k_j} \\ &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq |\beta| \\ P(\beta, k)}} \frac{\beta!}{k_1! \cdots k_{|\beta|}!} \left[e^{-\varepsilon|\xi|^{1/s}} |\xi|^k \right] (C_A)^k R_A^{|\beta|} \prod_{j=1}^{|\beta|} (l_j!)^{(s-1)k_j} \\ &\leq R_A^{|\beta|} \sum_{\substack{1 \leq k \leq |\beta| \\ P(\beta, k)}} \frac{\beta! \overline{C}_\varepsilon^{-k}}{k_1! \cdots k_{|\beta|}!} \prod_{\nu=1}^m (k_*^\nu!)^s \prod_{j=1}^{|\beta|} (l_j!)^{(s-1)k_j}, \end{aligned}$$

com $\overline{C}_\varepsilon = C_A C_{\frac{\varepsilon}{m}, s}$.

Pelo Lema 2.10 temos que

$$e^{-\varepsilon|\xi|^{1/s}} |\partial_t^\beta e^{i\xi A(t)}| \leq R_A^{|\beta|} \beta!^s \sum_{\substack{1 \leq k \leq |\beta| \\ P(\beta, k)}} \frac{\prod_{\nu=1}^m (k_\nu^*)}{k_1! \cdots k_{|\beta|}!} \overline{C}_\varepsilon^k.$$

Usando o fato que $\prod_{\nu=1}^m k_\nu^* \leq k!$ obtemos

$$e^{-\varepsilon|\xi|^{1/s}} |\partial_t^\beta e^{i\xi A(t)}| \leq R_A^{|\beta|} \beta!^s \sum_{\substack{1 \leq k \leq |\beta| \\ P(\beta, k)}} \frac{k!}{k_1! \cdots k_{|\beta|}!} \overline{C}_\varepsilon^k. \quad (2.31)$$

Lembre-se que para cada escolha $k_1, \dots, k_{|\beta|}$ aparecendo em $\frac{k!}{k_1! \cdots k_{|\beta|}!} \overline{C}_\varepsilon^k$, existem $l_1, \dots, l_{|\beta|}$ tais que $(k_1, \dots, k_{|\beta|}; l_1, \dots, l_{|\beta|}) \in P(\beta, k)$, $\sum_{i=1}^{|\beta|} k_i l_i = \beta$, $\sum_{i=1}^{|\beta|} k_i = k$ e $k_i = 0$ se $l_i = 0$.

Vamos melhorar a estimativa (2.31). Para isso considere o conjunto

$$P(\beta) = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_{|\beta|}) : \sigma_1 + 2\sigma_2 + \cdots + |\beta|\sigma_{|\beta|} = |\beta|\},$$

e $\sigma = \sigma_1 + \cdots + \sigma_{|\beta|}$. Mostraremos que, para cada lista $k_1, \dots, k_{|\beta|}$ que aparece na soma (2.31), existe $(\sigma_1, \dots, \sigma_{|\beta|}) \in P(\beta)$ tal que

$$\frac{k!}{k_1! \cdots k_{|\beta|}!} \overline{C}_\varepsilon^k \leq 2^{|\beta|} \frac{\sigma! (\overline{C}_\varepsilon)^\sigma}{\sigma_1! \cdots \sigma_{|\beta|}!}.$$

Pela observação anterior, podemos escrever

$$|\beta| = \sum_{i \in \Lambda} k_i |l_i|, \quad \Lambda = \{i : l_i \neq 0\}. \quad (2.32)$$

Note que, para cada $i \in \Lambda$, temos que $1 \leq |l_i| \leq |\beta|$ e se $|l_i| = |l_{i'}$, então $k_i |l_i| + k_{i'} |l_{i'}| = (k_i + k_{i'}) |l_i|$. Portanto, podemos reescrever a soma (2.32) como

$$|\beta| = \sum_{j \in \Gamma} j \sigma_j,$$

sendo $\Gamma = \{j : j = |l_i|, \text{ para algum } i \in \Lambda\}$ e $\sigma_j = \sum_{i \in \Gamma_j} k_i$, com $\Gamma_j = \{i \in \Lambda : |l_i| = j\}$.

Note também que $\sigma \doteq \sum_{j \in \Gamma} \sigma_j = \sum_{i=1}^{|\beta|} k_i = k$.

Usando a desigualdade $(m+n)! \leq 2^{m+n} m! n!$ para todos $m, n \in \mathbb{Z}_+$, temos que

$$(k_j + k_i)! \leq 2^{k_j + k_i} k_j! k_i!.$$

Generalizando a desigualdade anterior para finitos termos segue que:

$$\sigma_j! = \left(\sum_{i \in \Gamma_j} k_i \right)! \leq 2^{\sigma_j} \prod_{i \in \Gamma_j} k_i!.$$

Logo

$$\prod_{j \in \Gamma} \sigma_j! \leq 2^\sigma \prod_{j \in \Gamma} \left(\prod_{i \in \Gamma_j} k_i! \right) \leq 2^\sigma k_1! \cdots k_{|\beta|}! = 2^k k_1! \cdots k_{|\beta|}! \leq 2^{|\beta|} k_1! \cdots k_{|\beta|}!,$$

ou seja,

$$\frac{k!}{k_1! \cdots k_{|\beta|}!} \overline{C}_\varepsilon^k \leq \frac{2^{|\beta|} \sigma! (\overline{C}_\varepsilon)^\sigma}{\prod_{j \in \Gamma} \sigma_j!}.$$

Definindo $\sigma_j = 0$ para $j \notin \Gamma$ temos a desigualdade desejada. Portanto,

$$\sum_{\substack{1 \leq k \leq |\beta| \\ P(\beta, k)}} \frac{k!}{k_1! \cdots k_{|\beta|}!} \overline{C}_\varepsilon^k \leq 2^{|\beta|} \sum_{P(\beta)} \frac{\sigma! (\overline{C}_\varepsilon)^\sigma}{\sigma_1! \cdots \sigma_{|\beta|}!} = 2^{|\beta|} \overline{C}_\varepsilon (\overline{C}_\varepsilon + 1)^{|\beta|-1} \leq 2^{|\beta|} (\overline{C}_\varepsilon + 1)^{|\beta|},$$

sendo a igualdade consequência do Lema 2.12.

Logo, segue de (2.31) e da última estimativa que

$$e^{-\varepsilon|\xi|^{1/s}} |\partial_t^\beta e^{i\xi A(t)}| \leq (2R_A)^{|\beta|} (\overline{C}_\varepsilon + 1)^{|\beta|} \beta!^s = C_\varepsilon^{|\beta|} \beta!^s,$$

com $C_\varepsilon = 2R_A(\overline{C}_\varepsilon + 1)$. □

2.3.2 Redução do problema a coeficientes constantes

Fazendo uso dos lemas vistos na subseção anterior, provaremos agora que o estudo da s -resolubilidade global do operador \mathbb{L}^p é equivalente ao estudo de um certo operador com coeficientes constantes.

Iniciamos definindo o operador

$$\begin{aligned} T : D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0}) &\rightarrow D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0}) \\ u = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(t, \xi) e^{i\xi x} &\mapsto Tu = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \widehat{v}(t, \xi) e^{i\xi x}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

sendo $\widehat{v}(t, \xi) = e^{i\xi A(t)} \widehat{u}(t, \xi)$, para todo $\xi \in \mathbb{Z}$, e $A \in G^s(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$.

Precisamos provar que T está bem definido. Para isso vamos utilizar o Lema 3.4 de [10].

Proposição 2.15. *O operador dado em (2.33) define um automorfismo em $D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$.*

Demonstração. Escrevendo $\widehat{u}(t, \xi) = \sum_{|J|=p} \widehat{u}_J(t, \xi) dt_J$, temos $\widehat{v}(t, \xi) = \sum_{|J|=p} e^{i\xi A(t)} \widehat{u}_J(t, \xi) dt_J$.

Assim, fixando $|J| = p$ e utilizando o Teorema 1.48, basta mostrar que, dados $\varepsilon > 0$ e $h > 0$, existe

$C = C_{\varepsilon, h} > 0$ tal que

$$|\langle \widehat{u}_J(t, \xi) e^{i\xi A(t)}, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{s, h} e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}}, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z}, \forall \varphi \in G^{s, h}(\mathbb{T}^n).$$

Segue do Lema (2.14) e da definição de função Gevrey que existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{1/s}} \partial_t^\alpha (e^{i\xi A(t)} \varphi(t))| &= \left| \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{1/s}} (\partial_t^\beta e^{i\xi A(t)}) (\partial_t^{\alpha-\beta} \varphi(t)) \right| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_\varepsilon^{|\beta|} (\beta!)^s \|\varphi\|_{s,h} ((\alpha - \beta)!)^s h^{|\alpha-\beta|} \\ &\leq \tilde{C}_{\varepsilon,h}^{|\alpha|} (\alpha!)^s \|\varphi\|_{s,h}, \end{aligned} \quad (2.34)$$

sendo $\tilde{C}_{\varepsilon,h} = 2(h+1)(C_\varepsilon + 1)$ e usamos $\sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} = 2^{|\alpha|}$.

Tomando $\overline{C}_\varepsilon = (2s/\varepsilon)^s$ segue, usando o Lema (2.13), que

$$|\xi|^k e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{1/s}} \leq \overline{C}_\varepsilon^k (k!)^s, \quad \forall \xi \in \mathbb{Z} \text{ e } k \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.35)$$

Fazendo $\gamma^{-1} \doteq \max\{\tilde{C}_{\varepsilon,h}, \overline{C}_\varepsilon\}$, pela continuidade de u_J segue do Teorema 1.25 que existe $C_\gamma > 0$ tal que

$$|\langle u_J, \psi \rangle| \leq C_\gamma \sup_{(t,x) \in \mathbb{T}^{n+1}} \sup_{(\alpha,k) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}} |\partial^{(\alpha,k)} \psi(t,x)| \gamma^{|\alpha|+k} (\alpha!k!)^{-s}, \quad \forall \psi \in G^s(\mathbb{T}^{n+1}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\langle \widehat{u}_J(t, \xi) e^{i\xi A(t)}, \varphi(t) \rangle| &= |\langle \widehat{u}_J(t, \xi), e^{i\xi A(t)} \varphi(t) \rangle| = \frac{1}{2\pi} |\langle u_J, e^{i\xi A(t)} \varphi(t) e^{-i\xi x} \rangle| \\ &\leq \frac{C_\gamma}{2\pi} \sup_{(t,x) \in \mathbb{T}^{n+1}} \sup_{(\alpha,k) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}} |\partial_t^\alpha (e^{i\xi A(t)} \varphi(t)) \partial_x^k e^{-i\xi x}| \gamma^{|\alpha|+k} (\alpha!k!)^{-s}. \end{aligned}$$

Por outro lado, segue de (2.34) e (2.35) que

$$\begin{aligned} |\partial_t^\alpha (e^{i\xi A(t)} \varphi(t))| |\partial_x^k e^{-i\xi x}| \gamma^{|\alpha|+k} (\alpha!k!)^{-s} &= |e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{1/s}} \partial_t^\alpha (e^{i\xi A(t)} \varphi(t))| |\xi|^k e^{-\frac{\varepsilon}{2}|\xi|^{1/s}} \gamma^{|\alpha|+k} (\alpha!k!)^{-s} e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}} \\ &\leq \tilde{C}_{\varepsilon,h}^{|\alpha|} (\alpha!)^s \|\varphi\|_{s,h} \overline{C}_\varepsilon^k (k!)^s \gamma^{|\alpha|+k} (\alpha!k!)^{-s} e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}} \\ &\leq \max\{\tilde{C}_{\varepsilon,h}, \overline{C}_\varepsilon\}^{|\alpha|+k} \gamma^{|\alpha|+k} \|\varphi\|_{s,h} e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}} \\ &= \|\varphi\|_{s,h} e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}}, \quad \forall (t,x) \in \mathbb{T}^{n+1} \text{ e } (\alpha,k) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}. \end{aligned}$$

As desigualdades anteriores implicam em

$$|\langle \widehat{u}_J(t, \xi) e^{i\xi A(t)}, \varphi(t) \rangle| \leq \frac{C_\gamma}{2\pi} \|\varphi\|_{s,h} e^{\varepsilon|\xi|^{1/s}},$$

logo, temos que $Tu \in D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$. Analogamente $T^{-1} : D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0}) \rightarrow D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ está bem definido e é dado por

$$u = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(t, \xi) e^{i\xi x} \mapsto T^{-1}u = \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} e^{-i\xi A(t)} \widehat{u}(t, \xi) e^{i\xi x}, \quad u \in D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0}).$$

□

Corolário 2.16. De forma análoga, o operador $T : G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0}) \rightarrow G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ pode ser definido e define um automorfismo em $G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$.

Demonstração. Basta provar que $G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ é T -invariante e T^{-1} -invariante.

Seja $u \in G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$. Para cada $|J| = p$, devemos mostrar que existem $C > 0$, $h > 0$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$|\partial_t^\alpha(\widehat{u}_J(t, \xi)e^{i\xi A(t)})| \leq Ch^{|\alpha|}(\alpha!)^s e^{-\varepsilon|\xi|^{1/s}}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{Z}_+^n \text{ e } (t, \xi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}.$$

Se $u_J \in G^s(\mathbb{T}^{n+1})$, então existem $C_0 > 0$, $h_0 > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que

$$|\partial^\beta \widehat{u}_J(t, \xi)| \leq C_0 h_0^{|\beta|} (\beta!)^s e^{-\varepsilon_0 |\xi|^{1/s}}, \quad \forall \beta \in \mathbb{Z}_+^n \text{ e } (t, \xi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} |\partial_t^\alpha(\widehat{u}_J(t, \xi)e^{i\xi A(t)})| &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} |\partial^\beta \widehat{u}_J(t, \xi)| |\partial^{\alpha-\beta} e^{i\xi A(t)}| \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_0 h_0^{|\beta|} (\beta!)^s e^{-(\varepsilon_0/2)|\xi|^{1/s}} |\partial^{\alpha-\beta} e^{i\xi A(t)}| e^{-(\varepsilon_0/2)|\xi|^{1/s}} \\ &\leq \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} C_0 h_0^{|\beta|} (\beta!)^s e^{-(\varepsilon_0/2)|\xi|^{1/s}} C_\varepsilon^{|\alpha-\beta|} ((\alpha-\beta)!)^s \\ &\leq C_0 (2h_0 C_\varepsilon)^{|\alpha|} (\alpha!)^s e^{-(\varepsilon_0/2)|\xi|^{1/s}}, \end{aligned}$$

para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_+^n$ e $(t, \xi) \in \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}$.

Analogamente $G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ é T^{-1} -invariante. \square

Relembrando que podemos escrever $a(t) = a_0 + d_t A(t)$, onde $A(t) \in G^s(\mathbb{T}^n; \mathbb{R})$, segue a próxima proposição.

Proposição 2.17. Considerando $\mathbb{L}_0^p = d_t + a_0 \wedge \frac{\partial}{\partial x}$, temos que vale a seguinte conjugação

$$T \circ \mathbb{L}^p \circ T^{-1} = \mathbb{L}_0^p.$$

Demonstração. Seja u em $D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ ou $G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$, assim

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}^p \circ T^{-1}(u) &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \left(d_t + a \wedge \frac{\partial}{\partial x} \right) \left[\widehat{u}(t, \xi) e^{-i\xi A(t)} e^{i\xi x} \right] \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} [d_t \widehat{u}(t, \xi) - i\xi d_t A(t) \wedge \widehat{u}(t, \xi) + i\xi a \wedge \widehat{u}(t, \xi)] e^{-i\xi A(t)} e^{i\xi x} \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}} [d_t \widehat{u}(t, \xi) + i\xi (a - d_t A(t)) \wedge \widehat{u}(t, \xi)] e^{-i\xi A(t)} e^{i\xi x} \\
&= T^{-1} \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}} [d_t \widehat{u}(t, \xi) + i\xi (a - d_t A(t)) \wedge \widehat{u}(t, \xi)] e^{i\xi x} \right) \\
&= T^{-1} \left(\sum_{\xi \in \mathbb{Z}} \left(d_t + a_0 \wedge \frac{\partial}{\partial x} \right) [\widehat{u}(t, \xi) e^{i\xi x}] \right) \\
&= T^{-1} \circ \mathbb{L}_0^p u.
\end{aligned}$$

□

Podemos definir, de modo semelhante, o conjunto:

$$\mathbb{E}_0^p = \{f \in G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p+1,0}) : \mathbb{L}_0^{p+1} f = 0 \text{ e } e^{i\xi \alpha_0 \cdot t} \widehat{f}(t, \xi) \text{ é exata quando } \xi \alpha_0 \in \mathbb{Z}^n\}.$$

Veamos que $T(\mathbb{E}^{p+1}) = \mathbb{E}_0^{p+1}$. Primeiramente, $T(\mathbb{E}^{p+1}) \subset \mathbb{E}_0^{p+1}$: seja $f \in \mathbb{E}^{p+1}$, temos que $e^{(i\xi \alpha_0 \cdot t + A(t))} \widehat{f}(t, \xi)$ é uma $(p+1)$ -forma exata para todo $\xi \in \mathbb{Z}$, tal que $\xi \alpha_0 \in \mathbb{Z}^n$. Como $\widehat{Tf}(t, \xi) = e^{i\xi A(t)} \widehat{f}(t, \xi)$, temos que $e^{i\xi \alpha_0 \cdot t} \widehat{Tf}(t, \xi)$ é uma $(p+1)$ -forma exata sempre que $\xi \alpha_0 \in \mathbb{Z}^n$. Além disso, $\mathbb{L}^{p+1} f = 0$, portanto $\mathbb{L}_0^{p+1} Tf = T\mathbb{L}^{p+1} f = 0$, ou seja, $Tf \in \mathbb{E}_0^{p+1}$. De modo análogo, é válida a outra inclusão.

Finalmente, vamos provar que \mathbb{L}^p é globalmente s -resolúvel se, e somente se, \mathbb{L}_0^p é globalmente s -resolúvel. Seja $f \in \mathbb{E}_0^{p+1}$, então $T^{-1}f \in \mathbb{E}^{p+1}$. Assim, existe $u \in D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ tal que $\mathbb{L}^p u = T^{-1}f$, ou seja, $\mathbb{L}_0^p T u = T\mathbb{L}^p u = T \circ T^{-1}f = f$. De modo semelhante, quando \mathbb{L}_0^p é globalmente s -resolúvel, então \mathbb{L}^p é globalmente s -resolúvel.

Motivados pelos resultados dessa seção, daqui em diante consideraremos o operador \mathbb{L}_0^p , a fim de caracterizar a s -resolubilidade global descrita no Teorema 2.9.

2.4 Resolubilidade global do operador com coeficientes constantes

Concluiremos o trabalho demonstrando o Teorema 2.9. Antes disso, precisamos do seguinte lema técnico, o qual está descrito em [4].

Lema 2.18. Para $p = 0, 1, \dots, n$ seja $\Lambda^p V$ o espaço das p -formas sobre um espaço real ou complexo de dimensão n . Denotaremos $\Lambda^{-1} V = \{0\}$.

Seja $\lambda \in \Lambda^1 V, \lambda \neq 0$. Então:

i. Dado $g \in \Lambda^{p+1} V, p = 0, 1, \dots, n-1$, a equação

$$\lambda \wedge v = g \quad (2.36)$$

tem solução $v \in \Lambda^p V$ se, e somente se, vale a condição

$$\lambda \wedge g = 0. \quad (2.37)$$

ii. Além disso, quando (2.37) é satisfeita, uma solução de (2.36) é dada por

$$v_0 = \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ r \in J}} \frac{1}{\lambda_r} \cdot (-1)^{\text{sign}(r, j_1, \dots, \hat{r}, \dots, j_{p+1})} \cdot g_J \cdot e_{J-\{r\}}, \quad (2.38)$$

sendo (e_1, \dots, e_n) base de $\Lambda^1 V$, $\lambda = \sum_{l=1}^n \lambda_l e_l$, $g = \sum_{|J|=p+1} g_J e_J$, $v = \sum_{|K|=p} v_K e_K$ e $r \in \{1, \dots, n\}$ é qualquer índice tal que $\lambda_r \neq 0$. Além disso, usamos a notação $J - \{r\} = (j_1, \dots, \hat{r}, \dots, j_{p+1})$, quando $r \in J$ (tiramos r da lista).

iii. A solução geral de (2.36) é

$$v = v_0 + \lambda \wedge w, \quad (2.39)$$

com $w \in \Lambda^{p-1} V$ arbitrário.

Demonstração. (ii.) Usando reordenação, basta mostrar o caso $r = 1$.

Como $\lambda = \sum_{l=1}^n \lambda_l e_l$ e $\lambda_1 \neq 0$, podemos isolar e_1 da seguinte forma:

$$e_1 = \frac{1}{\lambda_1} \lambda - \sum_{l=2}^n \frac{\lambda_l}{\lambda_1} e_l.$$

Podemos escrever $g = g_1 + g_2$, sendo

$$g_1 = \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ 1 \in J}} g_J e_1 \wedge e_{J-\{1\}}, \quad (2.40)$$

$$g_2 = \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ 1 \notin J}} g_J e_J. \quad (2.41)$$

Substituindo a expressão de e_1 em (2.40) segue que:

$$g_1 = \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ 1 \in J}} g_J \frac{1}{\lambda_1} \lambda \wedge e_{J-\{1\}} - \sum_{l=2}^n \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ 1 \in J}} g_J \frac{\lambda_l}{\lambda_1} e_l \wedge e_{J-\{1\}}.$$

Portanto, podemos reescrever g como $g = \tilde{g}_1 + \tilde{g}_2$, sendo

$$\begin{aligned} \tilde{g}_1 &= \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ 1 \in J}} g_J \frac{1}{\lambda_1} \lambda \wedge e_{J-\{1\}} \\ \tilde{g}_2 &= \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ 1 \notin J}} g_J e_J - \sum_{l=2}^n \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ 1 \in J}} g_J \frac{\lambda_l}{\lambda_1} e_l \wedge e_{J-\{1\}}. \end{aligned}$$

Pela condição de compatibilidade $\lambda \wedge g = 0$, temos que $\lambda \wedge \tilde{g}_1 + \lambda \wedge \tilde{g}_2 = 0$, portanto

$$\lambda \wedge \tilde{g}_1 = \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ 1 \in J}} g_J \frac{1}{\lambda_1} \lambda \wedge \lambda \wedge e_{J-\{1\}} = 0,$$

o que implica $\lambda \wedge \tilde{g}_2 = 0$.

Agora, como $(\lambda, e_2, \dots, e_n)$ é uma base de $\Lambda^1 V$ segue que $\tilde{g}_2 = 0$. Portanto,

$$g = \tilde{g}_1 = \lambda \wedge \left[\sum_{\substack{|J|=p+1 \\ 1 \in J}} \frac{1}{\lambda_1} g_J e_{J-\{1\}} \right]$$

e, assim,

$$v_0 = \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ 1 \in J}} \frac{1}{\lambda_1} g_J e_{J-\{1\}}$$

é uma solução de (2.36).

(i.) Note que se $\lambda \wedge v = g$ tem solução então $\lambda \wedge g = \lambda \wedge \lambda \wedge v = 0$. A outra implicação segue do item (ii).

(iii.) Seja v uma solução de $\lambda \wedge v = g$. Vamos mostrar que existe $w \in \Lambda^{p-1} V$. Se $p = 0$, então v e v_0 são escalares, portanto $\lambda \wedge (v - v_0) = \lambda(v - v_0) = 0$, logo $v = v_0$.

Neste caso, $v = v_0 + \lambda \wedge 0$.

Suponha agora que $p \geq 1$. Seja $u = v - v_0$. Considere uma base f_1, \dots, f_n para $\Lambda^1 V$, onde $f_1 = \lambda$. Escrevendo u nessa base:

$$u = \sum_{|J|=p} u_J f_J.$$

Além disso, $\lambda \wedge u = \lambda \wedge (v - v_0) = 0$. Portanto,

$$\sum_{\substack{|J|=p \\ 1 \notin J}} u_J \lambda \wedge f_J = \sum_{\substack{|J|=p \\ 1 \notin J}} u_J f_1 \wedge f_J = 0,$$

o que implica em $u_J = 0$, para todo J tal que $|J| = p$ e $1 \notin J$. Assim, podemos tomar

$$w = \sum_{\substack{|J|=p \\ 1 \in J}} u_J f_{J-\{1\}} \in \Lambda^{p-1} V,$$

e teremos o resultado desejado, ou seja,

$$\lambda \wedge w = \sum_{\substack{|J|=p \\ 1 \in J}} u_J \lambda \wedge f_{J-\{1\}} = u.$$

Reciprocamente, se $v = v_0 + \lambda \wedge w$, onde $w \in \Lambda^{p-1} V$ é arbitrário, temos que $\lambda \wedge v = \lambda \wedge v_0 = g$. \square

Vamos prosseguir com a demonstração do Teorema 2.9. Veja que, em decorrência do que provamos na seção anterior, basta mostrar que \mathbb{L}_0^p é globalmente s -resolúvel se, e somente se, α_0 é racional ou α_0 é irracional e não é exponencial Liouville de ordem s . Também, para simplificar a notação, passaremos a denotar \mathbb{L}_0^p simplesmente por \mathbb{L}^p e \mathbb{E}_0^p por \mathbb{E}^p .

2.4.1 Suficiência do teorema principal

Primeiro, suponha que $\alpha_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ não é exponencial Liouville de ordem s . Tome $f \in \mathbb{E}^p$ e consideremos a série de Fourier na equação $\mathbb{L}^p u = f$ para obter uma ultradistribuição u candidata à solução. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \widehat{(d_t u)}(\eta, \xi) &= \sum_{m=1}^n \sum_{|J|=p} \widehat{(\partial_m u_J)}(\eta, \xi) dt_m \wedge dt_J \\ &= \sum_{m=1}^n \sum_{|J|=p} i \eta_m \widehat{u_J}(\eta, \xi) dt_m \wedge dt_J \\ &= i \left(\sum_{m=1}^n \eta_m dt_m \right) \wedge \widehat{u}(\eta, \xi) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(a_0 \wedge \partial_x u)^\wedge(\eta, \xi) &= \sum_{m=1}^n \sum_{|J|=p} (\widehat{\partial_x u_J})(\eta, \xi) a_{m0} dt_m \wedge dt_J \\
&= \sum_{m=1}^n \sum_{|J|=p} i \xi \widehat{u_J}(\eta, \xi) a_{m0} dt_m \wedge dt_J \\
&= i \left(\sum_{m=1}^n \xi a_{m0} dt_m \right) \wedge \widehat{u}_j(\eta, \xi),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\widehat{(\mathbb{L}^p u)}(\eta, \xi) = i \left(\sum_{m=1}^n [\eta_m + \xi a_{m0}] dt_m \right) \wedge \widehat{u}(\eta, \xi). \quad (2.42)$$

Logo, devemos resolver

$$i \left(\sum_{m=1}^n [\eta_m + \xi a_{m0}] dt_m \right) \wedge \widehat{u}(\eta, \xi) = \widehat{f}(\eta, \xi), \quad \xi \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{Z}^n. \quad (2.43)$$

Observação 2.19. Vamos utilizar o fato que $\widehat{f}(\eta, \xi) = (\widehat{f}(t, \xi))^\wedge(\eta)$, para todo $(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ e $t \in \mathbb{T}^n$.

Como α_0 não é racional, $\xi \alpha_0 \in \mathbb{Z}^n$ se, e somente se, $\xi = 0$. Além disso,

$$\sum_{m=1}^n (\eta_m + \xi a_{m0}) dt_m = 0 \Leftrightarrow \xi = 0 \text{ e } \eta = 0.$$

Como $f \in \mathbb{E}^p$ temos que $\widehat{f}(t, 0)$ é exata, portanto existe uma p -forma diferencial h em \mathbb{T}^n tal que $d_t h = \widehat{f}(t, 0)$. Se $h = \sum_{|J|=p} h_J dt_J$, então

$$\begin{aligned}
\widehat{(d_t h)}(\eta) &= \sum_{m=1}^n \sum_{|J|=p} (\widehat{\partial_m h_J})(\eta) dt_m \wedge dt_J = \sum_{m=1}^n \sum_{|J|=p} i \eta_m \widehat{h_J}(\eta) dt_m \wedge dt_J \\
&= i \left(\sum_{m=1}^n \eta_m dt_m \right) \wedge \left(\sum_{|J|=p} \widehat{h_J}(\eta) dt_J \right) = i \left(\sum_{m=1}^n \eta_m dt_m \right) \wedge \widehat{h}(\eta).
\end{aligned}$$

Portanto $\widehat{f}(0, 0) = (\widehat{f}(t, 0))^\wedge(0) = \widehat{(d_t h)}(0) = 0$. Desta forma, podemos considerar que $\widehat{u}(0, 0) = 0$ e não contradiremos (2.43). Fixado $(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^{n+1} \setminus (0, 0)$, temos que

$$\sum_{m=1}^n (\eta_m + \xi a_{m0}) dt_m \neq 0. \quad (2.44)$$

Como $f \in \mathbb{E}^p$ devemos ter $\mathbb{L}^{p+1} f = 0$; portanto, usando o mesmo raciocínio para concluir (2.43) segue que

$$i \left(\sum_{m=1}^n [\eta_m + \xi a_{m0}] dt_m \right) \wedge \widehat{f}(\eta, \xi) = 0, \quad \xi \in \mathbb{Z}, \eta \in \mathbb{Z}^n. \quad (2.45)$$

Seja M inteiro, $1 \leq M \leq n$, tal que

$$|\eta_M + \xi a_{M0}| = \max\{|\eta_l + \xi a_{l0}| : 1 \leq l \leq n\} \neq 0.$$

Apliquemos agora o Lema 2.18 para obter uma solução de (2.43):

$$\widehat{u}(\eta, \xi) = \frac{1}{i} \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ M \in J}} (-1)^{\text{sign}(M, j_1, \dots, \widehat{M}, \dots, j_{p+1})} \cdot \frac{1}{\eta_M + \xi a_{M0}} \widehat{f}_J(\eta, \xi) dt_{J-\{M\}}.$$

Portanto, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$|\widehat{u}(\eta, \xi)| \leq C_1 \frac{1}{|\eta_M + \xi a_{M0}|} \left| \widehat{f}(\eta, \xi) \right|.$$

Como α_0 não é exponencial Liouville de ordem s , para todo $\varepsilon > 0$, existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\max\{|\xi a_{m0} - \eta_m| : 1 \leq m \leq n\} \geq C_\varepsilon e^{-\varepsilon |(\eta, \xi)|^{1/s}},$$

para todo $(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}$.

Assim, usando que $f \in G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p+1,0})$ e a desigualdade anterior, existem $\varepsilon_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que

$$|\widehat{u}(\eta, \xi)| \leq C_2 e^{-\varepsilon_1 |(\eta, \xi)|^{1/s}},$$

para todo $(\eta, \xi) \in (\mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}) \setminus (0, 0)$. Portanto,

$$u(t, x) = \sum_{(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^{n+1}} \widehat{u}(\eta, \xi) e^{i(\eta \cdot t + \xi x)} \in G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$$

e $\mathbb{L}^p u = f$ por construção, ou seja, \mathbb{L}^p é globalmente s -resolúvel neste caso.

Agora vejamos que \mathbb{L}^p é também globalmente s -resolúvel quando α_0 é racional. Tome o menor $q \in \mathbb{N}$, tal que $q\alpha_0 \in \mathbb{Z}^n$. Para provar este caso, dividimos a ação do operador \mathbb{L}^p em dois subespaços. Mais especificamente: seja $A \subset \mathbb{Z}$, definimos

$$D'_{s,A}(\mathbb{T}^{n+1}) = \left\{ u \in D'_s(\mathbb{T}^{n+1}) : u(t, x) = \sum_{j \in A} \widehat{u}(t, j) e^{ijx} \right\}. \quad (2.46)$$

Assim, $D'_{s,A}(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ é o espaço das p -correntes $u = \sum_{|J|=p} u_J dt_J$ tais que $u_J \in D'_{s,A}(\mathbb{T}^{n+1})$. Definições análogas são dadas para o espaço $G^s_A(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ e para o conjunto \mathbb{E}^p_A .

Sejam $A, B \subset \mathbb{Z}$, com $A \cap B = \emptyset$ e $A \cup B = \mathbb{Z}$. Temos que \mathbb{L}^p é globalmente s -resolúvel se, e somente se, $\mathbb{L}^p_A = \mathbb{L}^p|_{D'_{s,A}(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})}$ e $\mathbb{L}^p_B = \mathbb{L}^p|_{D'_{s,B}(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})}$ são globalmente s -resolúveis. De fato,

temos que $D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0}) = D'_{s,A}(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0}) \oplus D'_{s,B}(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ e também $\mathbb{L}^p = \mathbb{L}_A^p \oplus \mathbb{L}_B^p$, ou seja, $D'_{s,A}(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ é \mathbb{L}_A^p -invariante e $D'_{s,B}(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ é \mathbb{L}_B^p -invariante.

Escolhemos $A = q\mathbb{Z}$ e $B = \mathbb{Z} \setminus A$. Note que, se $\alpha_0 \in \mathbb{Z}^n$, então $q = 1$, $A = \mathbb{Z}$ e $B = \emptyset$.

Vamos provar inicialmente que \mathbb{L}_A^p é globalmente s -resolúvel. Definimos o seguinte operador:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} : \quad D'_{s,A}(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0}) &\rightarrow D'_{s,A}(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0}) \\ u = \sum_{N \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(t, qN) e^{iqNx} &\mapsto \sum_{N \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(t, qN) e^{-iqN\alpha_0 \cdot t} e^{iqNx}. \end{aligned}$$

Veja que \mathcal{T} está bem definido pelo Lema 2.14. Além disso, \mathcal{T} tem inversa dada por

$$\mathcal{T}^{-1}u = \sum_{N \in \mathbb{Z}} \widehat{u}(t, qN) e^{iqN\alpha_0 \cdot t} e^{iqNx}.$$

Logo, \mathcal{T} é um automorfismo em $D'_{s,A}(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$.

Vejamus que vale a identidade

$$\mathcal{T}^{-1} \circ \mathbb{L}_A^p \circ \mathcal{T} = d_t.$$

Seja $v \in D'_{s,A}(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$, então:

$$d_t(\widehat{v}(t, qN) e^{-iqN\alpha_0 \cdot t} e^{iqNx}) = d_t(\widehat{v}(t, qN)) e^{-iqN\alpha_0 \cdot t} e^{iqNx} - a_0 \wedge \widehat{v}(t, qN) e^{-iqN\alpha_0 \cdot t} \partial_x(e^{iqNx}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^p \circ \mathcal{T}(v) &= \sum_{N \in \mathbb{Z}} d_t(\widehat{v}(t, qN) e^{-iqN\alpha_0 \cdot t} e^{iqNx}) + \sum_{N \in \mathbb{Z}} a_0 \wedge \widehat{v}(t, qN) e^{-iqN\alpha_0 \cdot t} \partial_x(e^{iqNx}) \\ &= \sum_{N \in \mathbb{Z}} d_t(\widehat{v}(t, qN)) e^{-iqN\alpha_0 \cdot t} e^{iqNx} = \mathcal{T} \circ d_t v. \end{aligned}$$

Seja $f \in \mathbb{E}_A^p$, isto é, $f \in G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p+1,0})$,

$$f(t, x) = \sum_{N \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(t, qN) e^{iqNx},$$

$\mathbb{L}_A^p f = 0$ e $e^{iqN\alpha_0 \cdot t} \widehat{f}(t, qN)$ é exata para todo $N \in \mathbb{Z}$.

Seja $g = \mathcal{T}^{-1}f$. Então $g = \sum_{N \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(t, N) e^{iqN\alpha_0 \cdot t} e^{iqNx}$. Portanto,

$$\widehat{g}(t, \xi) = \begin{cases} \widehat{f}(t, N) e^{iqN\alpha_0 \cdot t}, & \text{se } \xi = qN \\ 0, & \text{se } \xi \neq qN. \end{cases}$$

Logo, $\widehat{g}(t, \xi)$ é exata para todo $\xi \in \mathbb{Z}$, o que implica $\widehat{g}(\eta, \xi) = 0$ quando $\eta = 0$, para todo $\xi \in \mathbb{Z}$.

Para resolver $\mathbb{L}_A^p u = f$, vamos resolver a equação $d_t v = g$. Fazendo uso da série de Fourier na equação anterior segue que

$$i \left(\sum_{m=1}^n \eta_m dt_m \right) \wedge \widehat{v}(\eta, \xi) = \widehat{g}(\eta, \xi).$$

Podemos definir $\widehat{v}(0, \xi) = 0$, para todo $\xi \in \mathbb{Z}$, pois $\widehat{g}(0, \xi) = 0$, para todo $\xi \in \mathbb{Z}$. Além disso, temos que $\mathbb{L}_A^{p+1} f = 0$, portanto $d_t g = \mathcal{T}^{-1} \circ \mathbb{L}_A^p \circ \mathcal{T}(g) = \mathcal{T}^{-1} \circ \mathbb{L}_A^p(f) = 0$, ou seja,

$$i \left(\sum_{m=1}^n \eta_m dt_m \right) \wedge \widehat{g}(\eta, \xi) = 0.$$

Fixando $\eta \neq 0$ e $M \in \{1, \dots, n\}$ satisfazendo $\eta_M \neq 0$, pelo Lema 2.18 podemos encontrar

$$\widehat{v}(\eta, \xi) = \sum_{\substack{|J|=p+1 \\ M \in J}} (-1)^{\text{sign}(M, j_1, \dots, \widehat{M}, \dots, j_{p+1})} (i\eta_M)^{-1} (\widehat{g}_J(\eta, \xi)) dt_{J-\{M\}}. \quad (2.47)$$

Para cada $(p+1)$ -lista ordenada, temos que

$$|(i\eta_M)^{-1} (\widehat{g}_J(\eta, \xi))| \leq |\widehat{g}_J(\eta, \xi)|.$$

Desta forma, podemos definir

$$v(t, x) = \sum_{(\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^n \times A} \widehat{v}(\eta, \xi) e^{i\eta \cdot t} e^{i\xi \cdot x},$$

o que, por construção, nos dá $d_t v_A = g$. Considere $u = \mathcal{T} v_A$, assim obtemos

$$\mathbb{L}_A^p u = \mathbb{L}_A^p \circ \mathcal{T} v_A = \mathcal{T} \circ d_t v_A = \mathcal{T} g = \mathcal{T} \mathcal{T}^{-1} f = f.$$

Logo, \mathbb{L}_A^p é globalmente s -resolúvel.

Observação 2.20. Podemos escrever $v = v_A + v_B$, onde \mathbb{L}_A^p é invariante em relação a componente v_A .

Se $q > 1$, vamos mostrar agora que \mathbb{L}_B^p é globalmente s -resolúvel.

Vejamus que para todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|j\alpha_0 - k| \geq C e^{-\varepsilon |j|^{1/s}}, \quad (2.48)$$

para todo $j \in B$ e $k \in \mathbb{Z}^n$. Basta mostrar que

$$\max_{m \in \{1, \dots, n\}} |j\alpha_{m0} - k_m| \geq C e^{-\varepsilon |j|^{1/s}}.$$

Iremos utilizar a ideia de [6] (Lema 4.35). Denote por $R = \{1, \dots, q-1\}$. Assim, dado $j \in B$, temos que existe $r \in R$ tal que $j = dq + r$, para algum $d \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \max_{m \in \{1, \dots, n\}} |j\alpha_{m0} - k_m| &= \max_{m \in \{1, \dots, n\}} |dq\alpha_{m0} + r\alpha_{m0} - k_m| \\ &= r \max_{m \in \{1, \dots, n\}} \left| \alpha_{m0} - \frac{k_m - dq\alpha_{m0}}{r} \right| \\ &\geq \max_{m \in \{1, \dots, n\}} \left| \alpha_{m0} - \frac{k_m - dq\alpha_{m0}}{r} \right|. \end{aligned}$$

Denote $D_r = \text{dist}(\alpha_0, \frac{1}{r}\mathbb{Z}^n) > 0$, para cada $r \in R$. Seja então $D = \min_{r \in R} D_r > 0$.

Como $\frac{k_m - dq\alpha_{m0}}{r} \in (\frac{1}{r}\mathbb{Z}^n)$ segue da desigualdade anterior que

$$\max_{m \in \{1, \dots, n\}} |j\alpha_{m0} - k_m| \geq D > De^{-\varepsilon|j|^{1/s}},$$

para todo $j \in B$, $k \in \mathbb{Z}^n$. Portanto, segue o resultado desejado.

Logo, por (2.48), a demonstração deste caso segue de forma análoga ao caso α_0 não exponencial Liouville de ordem s .

2.4.2 Necessidade do teorema principal

Vamos mostrar que se $\alpha_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ é exponencial Liouville de ordem $s \geq 1$, então \mathbb{L}^p não é globalmente s -resolúvel.

Primeiro, provaremos a não s -resolubilidade global para o caso $p = 0$.

Suponha que $\alpha_0 = (\alpha_{10}, \dots, \alpha_{n0}) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Q}^n$ é exponencial Liouville de ordem $s \geq 1$. Logo, pelo Lema 2.8 existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência $(\eta_l, \xi_l) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}$ tais que

$$|\eta_l - \xi_l \alpha_0| \leq e^{-\varepsilon|(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}}, \text{ para todo } l \in \mathbb{N}. \quad (2.49)$$

Para cada $l \in \mathbb{N}$ defina

$$u_l(t, x) = \alpha_l e^{i(\eta_l t - \xi_l x)}, \quad (2.50)$$

sendo

$$\alpha_l = e^{\frac{\varepsilon}{2}|(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}}. \quad (2.51)$$

Segue do Lema 2.14 que $u_l \in G^s(\mathbb{T}^{n+1})$.

Escrevendo $\eta_l = (\eta_l^{(1)}, \dots, \eta_l^{(n)}) \in \mathbb{Z}^n$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^0 u_l &= (d_t + a_0 \wedge \partial_x) u_l = d_t u_l + a_0 \wedge (\partial_x u_l) = d_t u_l + a_0 \wedge (\partial_x u_l) \\ &= i\alpha_l \left(\sum_{j=1}^n \eta_l^{(j)} dt_j \right) \wedge e^{i(\eta_l t - \xi_l x)} + \sum_{j=1}^n a_{j0} dt_j \wedge (-i\alpha_l \xi_l) e^{i(\eta_l t - \xi_l x)} \\ &= \sum_{j=1}^n i\alpha_l (\eta_l^{(j)} - a_{j0} \xi_l) e^{i(\eta_l t - \xi_l x)} dt_j. \end{aligned}$$

Para cada $j = 1, \dots, n$ defina

$$f_j(t, x) = \sum_{l=1}^{\infty} i\alpha_l (\eta_l^{(j)} - a_{j0} \xi_l) e^{i(\eta_l t - \xi_l x)}.$$

Note que

$$\widehat{f}_j(\eta_l, -\xi_l) = i\alpha_l (\eta_l^{(j)} - a_{j0} \xi_l) \text{ e } \widehat{f}_j(\eta, \xi) = 0, \text{ se } (\eta, \xi) \neq (\eta_l, \xi_l).$$

Por outro lado, por (2.49), $|\eta_l^{(j)} - a_{j0} \xi_l| \leq |\eta_l - \alpha_0 \xi_l| \leq e^{-\varepsilon |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}}$, logo

$$|\widehat{f}_j(\eta_l, -\xi_l)| = \alpha_l |\eta_l^{(j)} - a_{j0} \xi_l| \leq e^{-\frac{\varepsilon}{2} |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}},$$

para todo $l \in \mathbb{N}$. Portanto, $f_j \in G^s(\mathbb{T}^{n+1})$ pelo Lema 1.34.

Defina então $f(t, x) = \sum_{j=1}^n f_j dt_j \in G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{1,0})$. Por construção, $f = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{L}^0 u_l$, com convergência em $G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{1,0})$. Portanto, $\mathbb{L}^1 f = \sum_{l=1}^{\infty} \mathbb{L}^1(\mathbb{L}^0 u_l) = 0$.

Como $\alpha_0 \notin \mathbb{Q}^n$, $\xi_{\alpha_0} \in \mathbb{Z}^n$ somente quando $\xi = 0$. Vejamos que a 1-forma $\widehat{f}(t, 0)$ é exata. Lembre-se que $\widehat{f}(t, \xi) = \sum_{j=1}^n \widehat{f}_j(t, \xi) dt_j$ e que

$$\widehat{f}_j(t, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^1} f_j(t, x) e^{-i\xi x} dx, \xi \in \mathbb{Z}.$$

Logo, para cada j temos

$$\widehat{f}_j(t, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}^1} \sum_{l=1}^{\infty} i\alpha_l (\eta_l^{(j)} - a_{j0} \xi_l) e^{i(\eta_l t - \xi_l x)} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{\infty} i\alpha_l (\eta_l^{(j)} - a_{j0} \xi_l) e^{i\eta_l t} \int_{\mathbb{T}^1} e^{-i\xi_l x} dx = 0,$$

pois, como $\xi_l \neq 0$, temos que $\int_{\mathbb{T}^1} e^{-i\xi_l x} dx = 0$.

Segue que $\widehat{f}(t, 0)$ é exata. Concluimos que $f \in \mathbb{E}^0$.

Vejamos agora que não existe $v \in D'_s(\mathbb{T}^{n+1})$ tal que $\mathbb{L}^0 v = f$. Se existisse, então teríamos

$$\widehat{(\mathbb{L}^0 v)}(\eta, \xi) = \widehat{f}(\eta, \xi), \text{ para todo } (\eta, \xi) \in \mathbb{Z}^{n+1}.$$

Em particular, $\widehat{(\mathbb{L}^0 v)}(\eta_l, -\xi_l) = \widehat{f}(\eta_l, -\xi_l)$, para todo $l \in \mathbb{N}$. Logo,

$$i \sum_{j=1}^n (\eta_l^{(j)} - a_{j0} \xi_l) dt_j \wedge \widehat{v}(\eta_l, -\xi_l) = \widehat{f}(\eta_l, -\xi_l). \quad (2.52)$$

Como $\mathbb{L}^1 f = 0$, segue também que

$$i \sum_{j=1}^n (\eta_l^{(j)} - a_{j0} \xi_l) dt_j \wedge \widehat{f}(\eta_l, -\xi_l) = 0.$$

Por outro lado, vejamos que $\widehat{u}_l(\eta_l, -\xi_l) = \alpha_l$, obtido de (2.50), também resolve (2.52). De fato, veja que

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathbb{L}^0 u_l})(\eta_l, -\xi_l) &= i \sum_{j=1}^n (\eta_l^{(j)} - a_{j0} \xi_l) dt_j \wedge \widehat{u}_l(\eta_l, -\xi_l) \\ &= i \sum_{j=1}^n (\eta_l^{(j)} - a_{j0} \xi_l) \alpha_l dt_j = \sum_{j=1}^n \widehat{f}_j(\eta_l, -\xi_l) dt_j = \widehat{f}(\eta_l, -\xi_l). \end{aligned}$$

Assim, pelo Lema 2.18 vale a seguinte igualdade

$$\widehat{u}(\eta_l, -\xi_l) = \widehat{v}(\eta_l, -\xi_l) + \left[i \sum_{j=1}^n (\eta_l^{(j)} - a_{j0} \xi_l) dt_j \right] \wedge w_l, \quad (2.53)$$

para $w_l \in \Lambda^{-1} V$. Como $w_l \in \Lambda^{-1} V = \{0\}$, temos que $w_l = 0$ e da igualdade (2.53) segue que $\widehat{v}(\eta_l, -\xi_l) = \widehat{u}(\eta_l, -\xi_l) = \alpha_l$.

Dessa forma, $\widehat{v}(\eta_l, -\xi_l)$ não pode ser uma sequência de coeficientes de Fourier de nenhuma ultra-distribuição em $D'_s(\mathbb{T}^{n+1})$. Caso $v \in D'_s(\mathbb{T}^{n+1})$ teríamos que para todo $\gamma > 0$, existiria C_γ tal que para todo $l \in \mathbb{N}$ vale

$$|\widehat{v}(\eta_l, -\xi_l)| \leq C_\gamma e^{\gamma |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}}.$$

Considerando, em particular, $\gamma = \frac{\varepsilon}{4}$ teríamos

$$e^{\frac{\varepsilon}{2} |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}} = \alpha_l = |\widehat{v}(\eta_l, -\xi_l)| \leq C_\varepsilon e^{\frac{\varepsilon}{4} |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}}, \text{ para todo } l \in \mathbb{N}.$$

Logo $e^{\frac{\varepsilon}{4} |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}} \leq C_\varepsilon$, para todo $l \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo, pois a sequência $e^{\frac{\varepsilon}{4} |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}} \rightarrow \infty$, quando $l \rightarrow \infty$.

Vejamos agora o caso $p \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

Como $\alpha_0 = (a_{10}, \dots, a_{n0}) \notin \mathbb{Q}$ é exponencial Liouville de ordem $s \geq 1$, existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência $(\eta_l, \xi_l) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{N}$ tais que

$$|\eta_l - \xi_l \alpha_0| \leq e^{-\varepsilon |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}}, \text{ para todo } l \in \mathbb{N}.$$

Note que, pelo Lema 2.8, existe $\nu \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_{\nu 0} \notin \mathbb{Q}$ e

$$|\alpha_{\nu 0} \xi_l - \eta_l^{(\nu)}| = |\eta_l - \xi_l \alpha_0| \leq e^{-\varepsilon |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}}, \text{ para todo } l \in \mathbb{N}.$$

Vamos supor $\nu = 1$ para simplificar a notação.

Definimos assim, para cada $l \in \mathbb{N}$, a p -forma

$$u_l(t, x) = \alpha_l e^{i(\eta_l t - \xi_l x)} dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_{p+1}, \quad l \in \mathbb{N} \quad (2.54)$$

em $G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$, com α_l dada em (2.51).

Note que

$$\begin{aligned} \mathbb{L}^p u_l &= (d_t + a_0 \wedge \partial_x) u_l = d_t u_l + a_0 \wedge \partial_x u_l \\ &= \left[i \sum_{j=1}^n \alpha_l \eta_l^{(j)} dt_j \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_{p+1} \right] e^{i(\eta_l t - \xi_l x)} \\ &\quad + \left[i \sum_{j=1}^n \alpha_l a_{j0} (-\xi_l) dt_j \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_{p+1} \right] e^{i(\eta_l t - \xi_l x)} \\ &= i \sum_{j=1}^n \alpha_l (\eta_l^{(j)} - a_{j0} \xi_l) e^{i(\eta_l t - \xi_l x)} dt_j \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_{p+1} \\ &= i \alpha_l (\eta_l^{(1)} - a_{10} \xi_l) e^{i(\eta_l t - \xi_l x)} dt_1 \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_{p+1}. \end{aligned}$$

Observe que, para $j \in \{2, \dots, p+1\}$, temos $dt_j \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_{p+1} = 0$.

Lembre que $f_j(t, x) = \sum_{l=1}^{\infty} i \alpha_l (\eta_l^{(j)} - a_{j0} \xi_l) e^{i(\eta_l t - \xi_l x)}$ está em $G^s(\mathbb{T}^{n+1})$.

Defina

$$f(t, x) = \sum_{j=1}^n f_j(t, x) dt_j \wedge dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_{p+1} \in G^s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p+1,0}).$$

Seguindo argumentos análogos como no caso $p = 0$, temos que $f \in \mathbb{E}^p$. Além disso, se existisse $v \in D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$ tal que $\mathbb{L}^p v = f$ então teríamos, para cada $l \in \mathbb{N}$, a igualdade

$$\widehat{v}(\eta_l, -\xi_l) = \widehat{u}_l(\eta_l, -\xi_l) + \left[i \sum_{j=1}^n (\eta_l^{(j)} - a_{j0} \xi_l) dt_j \right] \wedge w_l, \quad (2.55)$$

com $w_l \in \Lambda^{p-1} V$.

Escreveremos a igualdade acima como

$$i \sum_{j=1}^n (\eta_l^{(j)} - a_{j0} \xi_l) dt_j \wedge w_l = \widehat{v}(\eta_l, -\xi_l) - \widehat{u}_l(\eta_l, -\xi_l).$$

Para simplificar a notação, escreveremos daqui em diante:

$$\begin{aligned}
A_j &= i(\eta_l^{(j)} - a_{j0}\xi_l), \\
A &= \sum_{j=1}^n A_j dt_j, \\
w_l \doteq w &= \sum_{|J|=p-1} w_J dt_J, \\
y &= \widehat{v}(\eta_l, -\xi_l) - \widehat{u}_l(\eta_l, -\xi_l) = \sum_{|K|=p} y_K dt_K.
\end{aligned}$$

Estamos omitindo que os elementos acima dependem de l para simplificar a notação. Logo, temos que $A \wedge w = y$.

Como $\widehat{u}_l(\eta_l, -\xi_l) = \alpha_l dt_2 \wedge \cdots \wedge dt_{p+1}$, o coeficiente de $dt_{\tilde{K}}$, quando $\tilde{K} = (2, 3, \dots, p+1)$ será $y_{\tilde{K}} = \widehat{v}(\eta_l, -\xi_l) - \alpha_l$.

A fim de obter uma contradição vamos considerar apenas os coeficientes envolvendo combinações de p elementos entre dt_1, \dots, dt_{p+1} na igualdade $A \wedge w = y$. Logo

$$\sum_{|K|=p} y_K dt_K = \sum_{j=1}^{p+1} A_j dt_j \wedge \sum_{|J|=p-1} w_J dt_J, \quad (2.56)$$

com $K = (k_1, \dots, k_p)$, $1 \leq k_1 < k_2 < \cdots < k_p \leq p+1$ e $J = (j_1, \dots, j_{p-1})$, $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_{p-1} \leq p+1$.

Introduziremos algumas notações adicionais:

$$\begin{aligned}
dt^{(j)} &= dt_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt}_j \wedge \cdots \wedge dt_{p+1}, \\
y^{(j)} &= y_K, \text{ com } K = (1, 2, \dots, \widehat{j}, \dots, p+1).
\end{aligned}$$

Por exemplo, $y^{(2)} = y_K$, sendo $K = (1, 3, 4, \dots, p+1)$ o coeficiente de $dt^{(2)} = dt_1 \wedge dt_3 \wedge dt_4 \wedge \cdots \wedge dt_{p+1}$. Se $j < k$ denotemos por

$$\begin{aligned}
dt^{(j,k)} &= dt_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt}_j \wedge \cdots \wedge \widehat{dt}_k \wedge \cdots \wedge dt_{p+1}, \\
w^{(j,k)} &= w_J, \text{ com } J = (1, \dots, \widehat{j}, \dots, \widehat{k}, \dots, p+1).
\end{aligned}$$

Logo, a igualdade (2.56) fica

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{p+1} y^{(j)} dt^{(j)} &= \sum_{k=1}^{p+1} A_k dt_k \wedge \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq p+1} w^{(\mu, \nu)} dt^{(\mu, \nu)} \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{1 \leq \mu < \nu \leq p+1} A_k w^{(\mu, \nu)} dt^{(\mu, \nu)} \\
&= \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{1 \leq \mu < k} A_k w^{(\mu, k)} dt_k \wedge dt^{(\mu, k)} + \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{k < \nu \leq p+1} A_k w^{(k, \nu)} dt_k \wedge dt^{(k, \nu)}.
\end{aligned}$$

Note agora que

$$\begin{aligned}
dt_k \wedge dt^{(\mu, k)} &= dt_k \wedge (dt_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt}_\mu \wedge \cdots \wedge \widehat{dt}_k \wedge \cdots \wedge dt_{p+1}) \\
&= (-1)^{k-2} (dt_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt}_\mu \wedge \cdots \wedge dt_k \wedge \cdots \wedge dt_{p+1}) \\
&= (-1)^k dt^{(\mu)}. \\
dt_k \wedge dt^{(k, \nu)} &= dt_k \wedge (dt_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dt}_k \wedge \cdots \wedge \widehat{dt}_\nu \wedge \cdots \wedge dt_{p+1}) \\
&= (-1)^{k-1} dt^{(\nu)}.
\end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$\sum_{j=1}^{p+1} y^{(j)} dt^{(j)} = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{1 \leq \mu < k} A_k w^{(\mu, k)} (-1)^k dt^{(\mu)} + \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{k < \nu \leq p+1} A_k w^{(k, \nu)} (-1)^{k-1} dt^{(\nu)}.$$

Trocando ν por μ na última soma:

$$\sum_{j=1}^{p+1} y^{(j)} dt^{(j)} = \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{1 \leq \mu < k} A_k w^{(\mu, k)} (-1)^k dt^{(\mu)} + \sum_{k=1}^{p+1} \sum_{k < \mu \leq p+1} A_k w^{(k, \mu)} (-1)^{k-1} dt^{(\mu)}.$$

Agora vamos encontrar uma expressão geral para o termo $y^{(j)}$. Para $j = 1$ temos que

$$y^{(1)} dt^{(1)} = \left[\sum_{2 \leq k \leq p+1} A_k w^{(1, k)} (-1)^k \right] dt^{(1)}.$$

Para $j = 2$ temos que

$$y^{(2)} dt^{(2)} = A_1 w^{(1, 2)} (-1)^0 dt^{(2)} + \sum_{3 \leq k \leq p+1} A_k w^{(2, k)} (-1)^k dt^{(2)}.$$

Ou seja,

$$y^{(2)} = A_1 w^{(1, 2)} (-1)^0 + \sum_{3 \leq k \leq p+1} A_k w^{(2, k)} (-1)^k = \sum_{1 \leq k < 2} A_k w^{(k, 2)} (-1)^{k-1} + \sum_{2 < k \leq p+1} A_k w^{(2, k)} (-1)^k.$$

De forma geral

$$y^{(j)} = \sum_{1 \leq k < j} A_k w^{(k,j)} (-1)^{k-1} + \sum_{j < k \leq p+1} A_k w^{(j,k)} (-1)^k.$$

Multiplicando a igualdade acima por $(-1)^{j+1} A_j$ e somando j de 1 até $p+1$, obtemos

$$\sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+1} A_j y^{(j)} = \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{1 \leq k < j} A_k A_j w^{(k,j)} (-1)^{k+j} + \sum_{j=1}^{p+1} \sum_{j < k \leq p+1} A_k A_j w^{(j,k)} (-1)^{k+j+1} = 0. \quad (2.57)$$

Relembre agora que $\widehat{v}(\eta_l, -\xi_l) = y + \widehat{u}_l(\eta_l, -\xi_l)$, para todo $l \in \mathbb{N}$. Como estamos supondo que $v \in D'_s(\mathbb{T}^{n+1}, \Lambda^{p,0})$, cada coeficiente $\widehat{v}_K(\eta_l, -\xi_l)$ satisfaz a condição:

Dado $\gamma > 0$, existe $C_\gamma^{(K)} > 0$ tal que

$$|\widehat{v}_K(\eta_l, -\xi_l)| \leq C_\gamma^{(K)} e^{\gamma |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}}.$$

Denotando $K_j = (1, 2, \dots, \widehat{j}, \dots, p+1)$, temos que $\widehat{v}_{K_1}(\eta_l, -\xi_l) = y^{(1)} + \alpha_l$ e $\widehat{v}_{K_j}(\eta_l, -\xi_l) = y^{(j)} + 0$, para todo $j \neq 1$.

Retomando o $\varepsilon > 0$ dado no início, considere $\delta > 0$ tal que $0 < 4\delta < \varepsilon$. Desta forma, existe $C_\delta^{(1)} > 0$ tal que

$$|y^{(1)} + \alpha_l| = |\widehat{v}_{K_1}(\eta_l, -\xi_l)| \leq C_\delta^{(1)} e^{\delta |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}}, \text{ para todo } l \in \mathbb{N}.$$

Analogamente, existem $C_\delta^{(j)} > 0$, $j = 2, \dots, p+1$, tais que

$$|y^{(j)}| \leq C_\delta^{(j)} e^{\delta |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}}, \text{ para todo } l \in \mathbb{N}.$$

Como $A_1 = i(\eta_l^{(j)} - a_{10}\xi_l) \neq 0$, para todo $l \in \mathbb{N}$, segue de (2.57) que $A_1 y^{(1)} = \sum_{j=2}^{p+1} (-1)^j A_j y^{(j)}$, portanto

$$y^{(1)} = \sum_{j=2}^{p+1} (-1)^j \frac{A_j}{A_1} y^{(j)}.$$

Lembre que $|A_j| \leq |A_1|$, para todo $j = 1, \dots, p+1$. Portanto,

$$\alpha_l = (\alpha_l + y^{(1)}) - y^{(1)} = (\alpha_l + y^{(1)}) + \sum_{j=2}^{p+1} (-1)^{j+1} \frac{A_j}{A_1} y^{(j)}.$$

O que implica

$$|\alpha_l| \leq |\alpha_l + y^{(1)}| + \sum_{j=2}^{p+1} |y^{(j)}| \leq C_\delta^{(1)} e^{\delta |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}} + \sum_{j=2}^{p+1} C_\delta^{(j)} e^{\delta |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}} \leq C_\delta (p+1) e^{\delta |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}},$$

sendo $C_\delta = \max_{1 \leq j \leq p+1} C_\delta^{(j)}$.

Como $\alpha_l = e^{\frac{\varepsilon}{2} |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}}$, a desigualdade anterior implica

$$e^{\delta |(\eta_l, \xi_l)|^{1/s}} \leq C_\delta (p+1), \text{ para todo } l \in \mathbb{N},$$

o que é uma contradição.

2.5 Exemplos

Nesta seção iremos apresentar exemplos de sistemas globalmente s -resolúveis. Será possível comparar algumas diferenças entre a resolubilidade global proposta em [4], com a s -resolubilidade global desenvolvida neste trabalho.

A próxima observação acerca dos vetores exponenciais Liouville será útil nos exemplos.

Observação 2.21. *Note que, se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \notin \mathbb{Q}^n$ é um vetor exponencial Liouville de ordem $s \geq 1$, então cada coordenada $\alpha_j \notin \mathbb{Q}$ de α é um número exponencial Liouville de ordem s . De fato, pela definição obtemos uma sequência estritamente crescente (em relação a norma) $(\eta_l, \xi_l) = (\eta_l^{(1)}, \dots, \eta_l^{(n)}, \xi_l) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}$ tal que*

$$|\xi_l \alpha - \eta_l| = \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \{|\xi_l \alpha_j - \eta_l^{(j)}|\} < e^{-\varepsilon |\xi_l|^{1/s}}.$$

Portanto, para cada $\alpha_j \notin \mathbb{Q}$ a desigualdade

$$|q\alpha_j - p| < e^{-\varepsilon |q|^{1/s}},$$

possui infinitas soluções $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$.

A recíproca desse resultado não é verdadeira, conforme veremos a seguir no Exemplo 2.24.

Exemplo 2.22. *Na Proposição 6.2 do artigo [10] foi provada, via frações contínuas, a existência de um número de Liouville α_1 que não é exponencial Liouville de ordem s , para qualquer $s \geq 1$.*

Assim, considere o vetor (α_1, α_2) , onde $\alpha_2 \in \mathbb{R}$. Temos pela Observação 2.21 que o vetor (α_1, α_2) não é um vetor exponencial Liouville de ordem $s \geq 1$.

Deste modo, definindo o sistema em \mathbb{T}^3 :

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ L_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x}, \end{cases}$$

segue que o operador \mathbb{L}^P associado a esse sistema é globalmente s -resolúvel.

Veja que L_1 é globalmente s -resolúvel em $\mathbb{T}_{t_1, x}^2$, mas L_2 não necessariamente é globalmente s -resolúvel em $\mathbb{T}_{t_2, x}^2$, basta tomar um número real α_2 exponencial Liouville de ordem s .

Exemplo 2.23. *Considere o mesmo número de Liouville α_1 do Exemplo 2.22 e escolha $\alpha_2 \in \mathbb{Q}$. Vejamos que (α_1, α_2) é um vetor de Liouville. De fato, temos que $\alpha_2 = a/b \in \mathbb{Q}$, onde a, b são inteiros. Por definição, existe uma sequência $(p_l^{(1)}, q_l) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ tal que*

$$\left| \alpha_1 - \frac{p_l^{(1)}}{q_l} \right| < \frac{1}{(q_l)^l}.$$

Podemos considerar $q_l \in b\mathbb{Z}$. De fato, podemos assumir que $q_l < q_{l+1}$, para todo $l \in \mathbb{N}$. Assim, observe que $b < q_b \leq q_{bl} \leq (q_{bl})^{b-1}$, para todo $l \in \mathbb{N}$. Considere a sequência $(\tilde{p}_l^{(1)}, \tilde{q}_l) = (bp_{(bl)}^{(1)}, bq_{(bl)})$, então

$$\left| \alpha_1 - \frac{\tilde{p}_l^{(1)}}{\tilde{q}_l} \right| = \left| \alpha_1 - \frac{bp_{(bl)}^{(1)}}{bq_{(bl)}} \right| \leq \frac{1}{(q_{(bl)})^{bl}} = \frac{b^l}{(q_{(bl)}^{(b-1)l})} \frac{1}{(bq_{(bl)})^l} \leq 1 \cdot \frac{1}{(bq_{(bl)})^l} = \frac{1}{(\tilde{q}_l)^l}.$$

Desta forma, $q_l = b\kappa_l$, onde $\kappa_l \in \mathbb{Z}$, para todo $l \in \mathbb{N}$.

Tome $p_l^{(2)} = a\kappa_l$. Logo, $p_l^{(2)}/q_l = a/b$, para todo $l \in \mathbb{N}$ e

$$\left| \frac{p_l^{(2)}}{q_l} - \frac{a}{b} \right| = 0, \quad \forall l \in \mathbb{N}.$$

Segue que

$$\max_{j=1,2} \left| \frac{p_l^{(j)}}{q_l} - \alpha_j \right| < \frac{1}{(q_l)^l}.$$

Logo, o sistema em \mathbb{T}^3 :

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ L_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

não é globalmente resolúvel no sentido suave do artigo [4], mas é globalmente s -resolúvel.

Exemplo 2.24. No Exemplo 4.9 do artigo [1] foi apresentada a existência de dois números exponenciais Liouville $\alpha_1, \alpha_2 \notin \mathbb{Q}$ de ordem $s = 1$, logo de ordem $s \geq 1$ qualquer, mas o vetor (α_1, α_2) não é um vetor exponencial Liouville de ordem $s \geq 1$. Assim, o sistema em \mathbb{T}^3 :

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ L_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

é globalmente s -resolúvel.

Note que, nesse caso, L_1 e L_2 não são globalmente s -resolúveis em $\mathbb{T}_{t_1, x}^2$ e $\mathbb{T}_{t_2, x}^2$, respectivamente.

Exemplo 2.25. Pelo Lema A de [9], dado $s \geq 1$, conseguimos encontrar um número irracional α_1 tal que para todo $0 < \varepsilon \ll 1$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|k - \alpha_1 \xi| \geq C_\varepsilon e^{-\varepsilon \xi^{1/s}},$$

para qualquer $k \in \mathbb{Z}$ e $\xi \in \mathbb{N}$. Porém, para s' tal que $1 \leq s < s'$ e qualquer $c > 0$, existem infinitos $k \in \mathbb{Z}$ e $\xi \in \mathbb{N}$ tais que k, ξ são relativamente primos e

$$|k - \alpha_1 \xi| \leq ce^{-\varepsilon \xi^{1/s}},$$

isto é, α_1 não é exponencial Liouville de ordem s , mas é exponencial Liouville de ordem s' . Logo, escolhendo $\alpha_2 \in \mathbb{Q}$ qualquer, o sistema (definido em \mathbb{T}^3):

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\partial}{\partial t_1} + \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x} \\ L_2 = \frac{\partial}{\partial t_2} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} \end{cases}$$

é globalmente s -resolúvel, mas não é globalmente s' -resolúvel.

REFERÊNCIAS

- [1] BERGAMASCO, A. P. Remarks about global analytic hypoellipticity. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 351, n. 10, p. 4113–4126, 1999.
- [2] BERGAMASCO, A. P.; GONZALEZ, R.; SILVA, P. D. da. Global solvability and global hypoellipticity in Gevrey classes for vector fields on the torus. *Journal of Differential Equations*, Elsevier, v. 264, n. 5, p. 3500–3526, 2018.
- [3] BERGAMASCO, A. P.; MEDEIRA, C. de; ZANI, S. L. Global Gevrey solvability for a class of involutive systems on the torus. *Revista Matemática Iberoamericana*, v. 37, n. 4, p. 1459–1488, 2020.
- [4] BERGAMASCO, A. P.; PETRONILHO, G. Global solvability of a class of involutive systems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Academic Press, v. 233, n. 1, p. 314–327, 1999.
- [5] BERHANU, S.; CORDARO, P. D.; HOUNIE, J. *An introduction to involutive structures*. [S.l.]: Cambridge Univ. Press, 2008.
- [6] BOTÓS, H. C. *Propriedades globais de uma classe de complexos diferenciais*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2018.
- [7] CONSTANTINE, G.; SAVITS, T. A multivariate Faà di Bruno formula with applications. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 348, n. 2, p. 503–520, 1996.
- [8] DEMAILLY, J.-P. *Complex analytic and differential geometry*. [S.l.]: Citeseer, 1997.
- [9] GRAMCHEV, T.; POPIVANOV, P.; YOSHINO, T. G.-P. P.-M. Global properties in spaces of generalized functions on the torus for second order differential operators with variable coefficients. *Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino*, v. 51, n. 2, p. 144–174, 1993.

- [10] JUNIOR, A. A.; KIRILOV, A.; MEDEIRA, C. de. Global Gevrey hypoellipticity on the torus for a class of systems of complex vector fields. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 474, n. 1, p. 712–732, 2019.
- [11] MEZIANI, A.; SILVA, P. D. da. A Gevrey differential complex on the torus. *Journal of Fourier Analysis and Applications*, Springer, v. 26, n. 1, p. 8, 2020.
- [12] PETRONILHO, G. *Ultradistribuições Gevrey periódicas em \mathbb{R}^n* . [S.l.]: Apostila do curso apresentado na I EBED - UNICAMP, 2003.
- [13] RUDIN, W. *Functional analysis*. [S.l.]: McGraw-Hill, Inc, 1973.
- [14] RUZHANSKY, M.; TURUNEN, V. *Pseudo-differential operators and symmetries: background analysis and advanced topics*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009. v. 2.