UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

NADIA STROBEL DE LUCA

A ARGUMENTAÇÃO LÓGICA NO ENSINO DA GEOMETRIA

CURITIBA

2023

NADIA STROBEL DE LUCA

A ARGUMENTAÇÃO LÓGICA NO ENSINO DA GEOMETRIA

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Setor de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Profa. Dra. Adriana Luiza do Prado

CURITIBA

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

De Luca, Nadia Strobel
A argumentação lógica no ensino da geometria. / Nadia Strobel De Luca. – Curitiba, 2023.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional.

Orientadora: Profa. Dra. Adriana Luiza do Prado.

1. Geometria – Estudo e ensino. 2. Sentenças. 3. Lógica Matemática. I. Prado, Adriana Luiza do. II. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - 31075010001P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **NADIA STROBEL DE LUCA** intitulada: **A ARGUMENTAÇÃO LÓGICA NO ENSINO DA GEOMETRIA** , sob orientação da Profa. Dra. ADRIANA LUIZA DO PRADO, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 14 de Abril de 2023.

ADRIANA LUIZA DO PRADO
Presidente da Banca Examinadora

ALDEMIR JOSÉ DA SILVA PINTO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

RODRIGO BLOOT
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DA INTEGRAÇÃO LATINO AMERICANA)

Dedico este trabalho,

Ao meu marido que sabia da importância e nunca me deixou desistir.

À minha filha mais velha que sempre esteve ao meu lado me apoiando e dando forças.

À minha filha caçula que ainda não compreende a importância deste trabalho mas me trouxe leveza nos momentos mais difíceis.

Aos amigos que estiveram ao meu lado cobrando e me ajudando, cada um de sua melhor forma.

E a todos aqueles que ainda acreditam na educação.

AGRADECIMENTOS

À Deus que guiou cada passo meu neste caminho.

"Desta passagem, a aprendizagem é a única bagagem levada."

(Vitor Isensee)

RESUMO

Neste trabalho, discutimos a inserção da Lógica Matemática nas séries da Educação Básica. Para tanto, propõe-se um tratamento inicial, por meio da argumentação baseada na linguagem corrente. Tal tratamento é gradualmente reconstruído com o apoio da linguagem da Lógica Matemática. Feito isso, são introduzidos axiomas da geometria euclidiana, possibilitando demonstrações do ponto de vista formal, por meio da linguagem desenvolvida. As construções são desenvolvidas, porém, sem perder de vista sua inserção no contexto da Educação Básica. Durante o desenvolvimento do trabalho, foram dados exemplos e propostas atividades para aprimorar o conteúdo.

Palavras-chaves: Lógica Matemática. Sentenças. Demonstrações. Ensino de Geometria.

ABSTRACT

In this work, we discuss the insertion of Mathematical Logic in the Basic Education series. To this end, an initial treatment is proposed, by means of the argumentation based on the current language. Such a treatment is gradually reconstructed with the support of the language of Mathematical Logic. Once this is done, axioms of Euclidean geometry are introduced, enabling demonstrations from a formal viewpoint, through the developed language. The constructions are developed, however, without losing sight of their insertion in the context of Basic Education. During the development of the work, examples were given and activities proposed to improve the content.

Key-words: *Mathematical Logic. Sentences. Proofs. The teaching of Geometry.*.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Muitas vezes você já deve ter ouvido a expressão “Isto é lógico!”, porém, o que quer dizer algo ser lógico?

Segundo Serra (1993, p. 563) pode-se entender lógica como a “capacidade de raciocínio ou usar a razão de forma ordenada”.

Assim, entende-se que o raciocínio dedutivo é o processo de demonstrar que determinadas sentenças são aceitas como verdadeiras ou utilizar processos para demonstrar sua veracidade. Esses processos, utilizando os raciocínios matemáticos, devem ser expressos com exatidão, não dando lugar para a ambiguidade, figuras de linguagem ou metáforas que são comuns e apreciadas na linguagem coloquial.

Por este motivo, as informações na Matemática devem ser expressas com a linguagem e com os cuidados específicos, às vezes, diferentes daqueles que estamos acostumados a usar e a interpretar na linguagem coloquial.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) dos anos inicias, a lógica não é constituída como um bloco de conteúdo Matemático, mas diz que deve ser tratada de forma integrada aos demais conteúdos podendo ajudar a compreender diversas situações-problema.

> “Assim, por exemplo, ao estudarem números, os alunos podem perceber e verbalizar relações de inclusão, como a de que todo número par é natural; mas observarão que a recíproca dessa afirmação não é verdadeira, pois nem todo número natural é par. No estudo das formas, mediante a observação de diferentes figuras triangulares, podem perceber que o fato de um triângulo ter ângulos com medidas idênticas às medidas dos ângulos de um outro triângulo é uma condição necessária, embora não suficiente, para que os dois triângulos sejam congruentes.” (BRASIL, 1997, p. 38)

Já nos PCN do terceiro e quarto ciclos BRASIL (1998) a lógica continua não sendo um conteúdo trabalhado explicitamente, mas sim integrada aos conteúdos visto e diz ainda que ela é essencial à Matemática. Ainda sobre a lógica o PCN descreve:

> “No contexto da construção do conhecimento matemático é ela que permite a compreensão dos processos; é ela que possibilita o desenvolvimento da capacidade de argumentar e de fazer conjecturas e generalizações, bem como o da capacidade de justificar por meio de uma demonstração formal.” (BRASIL, 1998, p. 49)

A prática da argumentação é considerada fundamental para as demonstrações matemáticas, porém na argumentação não existem exigências formais que a demonstração matemática exige. O refinamento destas argumentações ocorrem gradativamente pela assimilação de princípios da lógica formal, possibilitando então chegar as demonstrações.

Outra forma ainda descrita nos parâmetros matemáticos é utilizar a lógica quando um aluno comete um erro escolar e deste erro faz tentativas para construir uma lógica própria para encontrar a solução correta.

Desta forma, deve-se possibilitar o desenvolvimento dos pensamentos através de abstração, demonstração, raciocínio através de hipóteses, resolução e elaboração de problemas.

Segundo Groenwald e Nunes (2007):

> "Cantoral et al. (2000) também entendem que a Matemática escolar não se limita à parte do currículo que trata dos conteúdos e temas de estudo, mas trata, também, dos processos do pensamento que os alunos põem em funcionamento, como a abstração, demonstração, raciocínios através de hipóteses, resolução e planejamento de problemas.
>
> O pensamento matemático inclui, por um lado, reflexão sobre tópicos matemáticos e, por outro, processos avançados do pensamento, como abstração, justificação, visualização, estimação e raciocínios através da formulação de hipóteses. Deve operar sobre uma rede complexa de conceitos, uns avançados e outros mais elementares."

Os PCN deixam claro que a lógica auxilia nas demonstrações matemáticas visto que auxilia o processo de raciocínio e justificação de situações-problema.

Porém, segundo (MALTA, 2004), os estudantes estão chegando às universidades com a incapacidade de se expressar, a incapacidade de utilização da linguagem escrita, visível na dificuldade de construir frases completas e consistentes.

Como é possível, então, a compreensão de um conteúdo matemático se o estudante não consegue justificar a resposta correta de um problema e nem descrevê-la de forma organizada?

Nesta situação, pode-se ver claramente a utilidade da lógica para que o estudante possa desenvolver sua capacidade de leitura em Matemática e de expressar seu próprio raciocínio para a compreensão dos resultados matemáticos obtidos.

> "Em Matemática, a capacidade de expressar com clareza o raciocínio é equivalente à capacidade de entender os resultados matemáticos. Em particular,

> o desenvolvimento da capacidade de expressão do próprio raciocínio promove o desenvolvimento da capacidade de compreensão em matemática. O desenvolvimento da capacidade de expressão está acoplado ao desenvolvimento da capacidade de leitura, isto é, da capacidade de aquisição de conhecimento sem intermediários." (MALTA, 2004)

Portanto, as aulas de Matemática, no ensino fundamental e médio, devem auxiliar os estudantes a aprenderem a ler Matemática para que possa se concretizar o aprender Matemática.

Para que ocorra o desenvolvimento do pensamento matemático é necessário o desenvolvimento do domínio de linguagem necessária à compreensão de conceitos abstratos e é necessário também, a formalização da linguagem na construção do raciocínio matemático para que desta forma o estudante consiga fazer demonstrações e generalizações de resultados.

Esta forma de construção já está presente na linguagem corrente, e pode evoluir de forma natural à linguagem matemática que nada mais é que uma estruturação da argumentação produzida na linguagem corrente.

Nos próximos capítulos deste trabalho será trabalhado desde a linguagem escrita com a linguagem lógica até chegar ao desenvolvimento das demonstrações através do raciocínio lógico mais formal, para serem utilizadas nas aulas de Matemática por professores e estudantes. Para isso, sistematicamente será apresentado propostas de atividades a serem feitas em sala de aula para cada novo conceito e ideia descrita no texto.

Primeiramente, no capítulo 2, será trabalhado com sentenças diretas, sentenças condicinais, negação de sentenças e argumentação com suas definições e exemplos.

Dando continuidade, no capítulo 3, será apresentada as formas válidas de raciocínio(Modus Ponens, Modus Tollens ou contrapositiva e a lei do Silogismo) com suas devidas simbologias, exercícios resolvidos e sugestões de atividades a serem realizadas com os estudantes em sala de aula.

Posteriormente, no capítulo 4, através das formas válidas de raciocínio serão realizadas as provas diretas e indiretas para após, no capítulo 5, vir as demonstrações na geometria e para encerrar, no capítulo 6, sera apresentada as conclusões deste trabalho.

2 SENTENÇAS

Neste capítulo começaremos apresentando a definição de sentença na língua Portuguesa, a linguagem Matemática será apresentada nos próximos capítulos, dando foco nas sentenças diretas e negação destas sentenças.

Após será apresentado os argumentos com suas premissas e conclusões para verificar a vericidade do argumento através de formas aceitas de raciocínio.

Uma **Sentença** é uma frase que cumpre as seguintes condições:

- apresenta-se de forma estruturada como uma oração, com sujeito, verbo e predicado;
- é afirmativa declarativa;
- é falsa ou verdadeira, não havendo uma terceira alternativa;
- não pode ser falsa e verdadeira ao mesmo tempo.

A sentença é uma afirmação de significado preciso, não deixa margem para a ambiguidade.

Em Matemática, as ideias devem ser precisas e, por essa razão, os resultados formais são formulados utilizando-se sentenças.

Existem dois tipos de sentenças, as diretas e as condicionais.

2.1 SENTENÇAS DIRETAS OU CONDICIONAIS

As **sentenças diretas** são frases com sentido sucinto, tais como

- A camisa é verde.
- Joana tem cabelo cacheado.

As sentenças condicionais são formadas de duas sentenças ligadas pelo conectivo “Se... então” , como no exemplo a seguir

- **Se** fizer sol **então** irei ao parque.

2.2 NEGAÇÃO DE UMA SENTENÇA

A negação de uma sentença é o oposto do valor lógico da sentença e pode ser feita colocando adequadamente a palavra **não** na sentença ou pensando na frase **não é o caso** desta situação. Exemplo:

- Paula recebeu uma flor.

A negação pode ser feita de duas formas:

- Paula **não** recebeu uma flor ou;
- **Não é o caso** que Paula recebeu uma flor.

No caso de negar uma frase que já possui uma negação, que chamamos de dupla negação, basta retirarmos a palavra não ou colocar na frente da frase o termo não é o caso desta situação. Neste caso chamamos de dupla negação. Por exemplo:

- Não está chovendo.

A dupla negação desta frase pode ser:

- Está chovendo, ou;
- Não é o caso que não está chovendo.

2.3 ARGUMENTAÇÃO

Partindo de uma sentença para concluir outra, você usa afirmações advindas do raciocínio lógico. Essas afirmações são chamadas de **argumentos**. Numa afirmação da sentença P que tem como consequência a sentença Q, dizemos que P é a **premissa** e Q a **conclusão** desse argumento.

Exemplo:

$$\begin{array}{rl} \textit{Afirmação}: & \text{Se fizer sol irei ao parque.} \\ \textit{Premissa}: & \text{Fez sol.} \\ \hline \textit{Conclusão} & \text{Fui ao parque.} \end{array}$$

Um argumento é considerado **válido** se a conclusão que se chegou veio através de formas aceitas de raciocínios[1]. Se todas as premissas de um argumento são válidas e o argumento é válido, então podemos inferir que a conclusão também é verdadeira.

Exemplo:

Afirmação: Os números pares são divisíveis por 2.
Premissa: 250 é divisível por 2.

Conclusão: 250 é par.

De uma sentença verdadeira só é possível deduzir outra sentença também verdadeira. Na conclusão costuma-se usar expressões como: portanto, logo, concluímos, assim, consequentemente, entre outras. O exemplo acima poderia ser reescrito assim: Números pares são divisíveis por 2; 250 é divisível por 2; portanto, 250 é par.

Os argumentos são usados para fazer deduções, e assim, servem para executar os passos numa demonstração. As sentenças podem ser de natureza matemática como por exemplo,

- Se um triângulo é equilátero, então possui todos os lados de mesma medida.

Estas situações, envolvendo argumentações matemáticas serão vistas mais adiante. O objetivo aqui é, primeiramente, descrever o processo de argumentação com foco na linguagem corrente e como é construído o raciocínio lógico.

[1] Isso será melhor formalizado nas próximas seções

3 FORMAS VÁLIDAS DE RACIOCÍNIO

Nesta capítulo, iremos apresentar as formas válidas de raciocínio, Modus Ponens, Modus Tollens e Lei do Silogismo, assim como sugestões de exemplos e atividades à serem realizadas com os estudantes.

Um argumento lógico pode ser descrito de forma simbólica, utilizando-se letras maiúsculas (P, Q, :R, etc.) para representar afirmações simples, que são verdadeiras ou falsas.

Por exemplo

- P : O dia está ensolarado.
- Q: Ir ao Parque.

Quando escrevemos **Se** P **então** Q, estamos indicando uma **sentença condicional**. No caso do exemplo acima, Se P então Q, significa: Se o dia está ensolarado então irei ao parque. Para representar na forma lógica uma afirmação condicional, usaremos letras maiúsculas para indicar as sentenças e o símbolo "$\rightarrow$" que associará duas sentenças.

Todas as proposições matemáticas, mesmo que não esteja explícito, são sentenças chamadas condicionais do tipo:

$$\acute{}\text{Se P, então Q.}\acute{}$$

Trata-se de um processo de raciocínio lógico - dedutivo no qual, admitindo-se a sentença P, deduz-se a sentença Q por meio de uma sequência de argumentações válidas. Para representar na forma lógica uma afirmação condicional, usaremos letras maiúsculas para representar as sentenças e o símbolo "$\rightarrow$" que associará duas sentenças. Por exemplo:

- Se eu trabalhar então terei dinheiro.

Chamando de

- P : eu trabalhar;
- Q: terei dinheiro;

Dessa forma, podemos representar em linguagem lógica como:

$$P \rightarrow Q: \text{ Se eu trabalhar, então terei dinheiro}$$

Já a representação da negação de uma sentença P, que é a sentença ´não P´ é denotada por $\neg P$.

- P : Luana tem um celular;
- $\neg P$: Luana não tem um celular;

No que segue, analisaremos processos de raciocínio lógico-dedutivos que permitem, admitindo uma sentença P, a dedução de uma sentença Q por meio de processos de argumentações válidas. Em cada situação, apresentaremos atividades sugestivas, que podem ser utilizadas pelo professor.

3.1 MODUS PONENS

A primeira forma válida de raciocínio que veremos é o Modus Ponens. Ela pode ser descrita da seguinte maneira:

Modus Ponens Se aceitamos que "se P então Q" é verdadeira, e que P é também verdadeira, conclui-se, logicamente, que Q também é verdadeira.

Costuma-se indicar por $\therefore Q$ a conclusão que se obteve.

Exemplo

Se o tempo estiver bom, então irei andar de bicicleta.

Nesse caso, as sentenças são indicadas por :

- P : o tempo estar bom;
- Q: andar de bicicleta;

Premissas	
O tempo estava bom	P
Conclusão	
Andei de bicicleta	$\therefore Q$
Modus Ponens	
Se o tempo estiver bom, então irei andar de bicicleta	$P \rightarrow Q$

TABELA 1 – Fonte: própria autora.

Sugestões de Atividades:
Em cada situação identifique as premissas, representando-as em linguagem lógica, e deduza a conclusão que se obtém a partir delas. (Sugestões de resolução no anexo)

- **Atividade 01**
  - Se João está brincando, então ele está brincando com o André.
  - João está brincando.
  - **Conclusão:**
- **Atividade 02**
  - Se você estudar, você terá boas notas.
  - Você estudou.
  - **Conclusão:**
- **Atividade 03**
  - Se Pedro está com giz entre os dedos, então ele está jogando sinuca.
  - Pedro está com giz entre os dedos.
  - **Portanto:**
- **Atividade 04**
  - Se Sonia estiver gripada, então passará a gripe para sua filha.
  - Sonia está gripada.
  - **Portanto:**

3.2 MODUS TOLLENS OU CONTRAPOSITIVA

Toda afirmação condicional possui três outras condições associadas a ela, a recíproca, a inversa e a contrapositiva.

Para criar a recíproca da condicional troca-se as duas partes da condição. Para criar a inversa, nega-se as duas partes da condição e, para criar a contrapositiva, inverte-se e nega-se as duas sentenças. Veja:

$$\begin{aligned} \text{Condicional :} & P \to Q \\ \text{Recíproca :} & Q \to P \\ \text{Inversa :} & \neg P \to \neg Q \\ \text{Contrapositiva :} & \neg Q \to \neg P \end{aligned} \tag{3.1}$$

Em lógica, as condicionais são verdadeiras ou falsas. Se a afirmação for verdadeira, será que a recíproca, a inversa ou a contrapositiva são verdadeiras?

Através de um exemplo, vamos analisar a recíproca, a inversa e a contrapositiva de uma sentença verdadeira. Para isso, considere:

- P: dois ângulos são retos;
- Q: dois ângulos são congruentes.

Condicional	Se dois ângulos são retos, então são congruentes,	$P \to Q$	Afirmação verdadeira.
Recíproca	Se dois ângulos são congruentes então são retos. Entretanto, observa-se que dois ângulos de 30o, são congruentes porém não são retos.	$Q \to P$	A recíproca é falsa.
Inversa	Se dois ângulos não são retos então não são congruentes. Dois ângulos de 45o não são retos, porém congruentes.	$\neg P \to \neg Q$	A inversa é falsa.
Contrapositiva	Se dois Ângulos não são congruentes, então não são retos.	$\neg Q \to \neg P$	A contrapositiva é verdadeira.

TABELA 2 – Fonte: própria autora.

Portanto, a Lei da contrapositiva (Modus Tollens), que é a segunda forma válida de raciocínio apresentada aqui, pode ser descrita como:

Contrapositiva (Modus Tollens) Se aceitamos que "se P então Q" é verdadeira, e $\neg Q$ é também verdadeira, então devemos aceitar que $\neg P$ é verdadeira, isto é, a contrapositiva também é verdadeira.

Da mesma forma, se a contrapositiva é verdadeira, então a afirmação condicional original também é verdadeira. Isso também significa que se uma sentença condicional é falsa, sua contrapositiva também é.

Vejamos um exemplo da contrapositiva para a sentença: "Se tiver sol então irei à praia".

Premissa (P): Tem sol.

Conclusão (Q): Vou à praia.

$$\text{Se tiver sol, então irei à praia.} \Rightarrow P \rightarrow Q$$
$$\text{Não fui à praia, então não teve sol.} \Rightarrow \therefore \neg Q \rightarrow \neg P$$

Sugestões de Atividades:
Em cada situação identifique as premissas, representando-as em linguagem lógica, e deduza a conclusão que se obtém a partir delas. (Sugestões de resolução no anexo)

- **Atividade 01**
  - Se o objeto dentro da caixa é uma rosa, então ele é uma flor.
  - O objeto não é uma flor.
  - **Conclusão:**
- **Atividade 02**
  - Se João é confeiteiro, então sua roupa está suja de chocolate.
  - A roupa de João não está suja de chocolate.
  - **Conclusão:**
- **Atividade 03**
  - Se Júlia não está usando o computador, então Diana pode usar o computador.
  - Diana não pode usar o computador.
  - **Conclusão:**

- **Atividade 04**
  - Se Paula sair com Davi, então ela terá uma noite agradável.
  - Paula não teve uma noite agradável.
  - **Portanto:**
- **Atividade 05**
  - Se Linda pegar o ônibus, então ela chegará atrasada para a entrevista de emprego.
  - Linda não chegou atrasada para a entrevista de emprego.
  - **Portanto:**

3.3 LEI DO SILOGISMO

A lei do silogismo descreve a conclusão através de duas ou mais afirmações condicionais e, portanto, o argumento lógico pode conter vários passos sendo aplicada a mesma regra mais de uma vez ou mais de uma regra, contendo mais de um padrão lógico de raciocínio.

Um **silogismo** é formado por três elementos básicos:

1. $P \to Q$, que contém uma afirmação geral e é chamada de premissa maior;
2. $Q \to R$, que contém uma afirmação particular derivada, e é chamada de premissa menor ou termo médio;
3. $P \to R$, que deve ser coerente com as premissas anteriores e é chamado conclusão.

Portanto, para concluir se um argumento é válido pode-se fazê-lo em dois passos, usando as sentenças condicionais. Isso pode ser descrito como:

Lei do Silogismo Se aceitamos que $P \to Q$ é verdadeira, e que $Q \to R$ também é verdadeira, então devemos aceitar que $P \to R$ é verdadeira.

A seguir temos um argumento que utiliza a lei do silogismo:

Exemplo:

Se eu tiver trabalho, então eu ganharei dinheiro. Se eu ganhar dinheiro, então eu comprarei um computador. Portanto, se eu tiver trabalho então poderei comprar um computador. Podemos indicar as sentenças condicionais como:

- P: Ter trabalho
- Q: Ganhar dinheiro
- R: Comprar computador.

Dessa forma:

$$\begin{aligned}
\text{Se eu tiver trabalho, então eu ganharei dinheiro.} &\Rightarrow P \to Q \\
\text{Se eu ganhar dinheiro, então eu comprarei um computador.} &\Rightarrow Q \to R \\
\text{Portanto, se eu tenho trabalho então poderei comprar um computador.} &\Rightarrow \therefore P \to R
\end{aligned}$$

Podemos raciocinar de maneira semelhante, entretanto partindo da premissa de que “eu não pude comprar um computador”. Nesse caso, utilizando Modus Tollens, temos:

$$\begin{aligned}
\text{Se eu não pude comprar o computador, então não tenho dinheiro.} &\Rightarrow \neg P \to \neg Q \\
\text{Se não tenho dinheiro, então não tenho trabalho.} &\Rightarrow \neg Q \to \neg R \\
\text{Portanto, se não comprei um computador é porque não tenho trabalho.} &\Rightarrow \therefore P \to R
\end{aligned}$$

Sugestões de Atividades:
Em cada situação represente as premissas em linguagem lógica, utilizando a lei do silogismo para deduzir a conclusão que se obtém a partir delas. (Sugestões de resolução no anexo)

- **Atividade 01**
  - Se Joana estudar, terá boas notas.
  - Se obtiver boas notas, passará de ano.
  - Joana estudou.
  - **Conclusão:**
- **Atividade 02**
  - Se hoje é quarta-feira, então amanhã será quinta-feira.
  - Se amanhã é quinta-feira, então sexta-feira está próxima.
  - Hoje é quarta-feira.

- **Conclusão:**

- **Atividade 03**
  - Se eu comer pizza meia noite, então terei pesadelos.
  - Se eu tiver pesadelos, então dormirei pouco.
  - Eu comi pizza meia noite
  - **Conclusão:**

No que vimos antes, obtivemos a conclusão a partir de premissas aceitas como verdadeiras. Entretanto, no conjunto das sentenças, essas premissas podem não fazer sentido, não se aplicar a situações específicas, ou mesmo nunca acontecer. Por exemplo, considere o argumento a seguir:

Premissa: Os números pares são divisíveis por 2.

Premissa: 250 é divisível por 2.

Conclusão: 250 é par.

Esse exemplo mostra que, apesar de ser possível obter uma conclusão, é necessária coerência nas premissas, de modo que elas se assentem sobre o senso comum. Em especial, existe uma classe de formas de raciocínio que constituem o que se entende como “prova matemática”. É esse ponto que trataremos na próxima parte.

4 TIPOS DE PROVA

Segundo Bicudo e Vaz (2020), a Matemática recebeu características de ciência dedutiva com os matemáticos gregos.

Tales de Mileto, foi cumprimentado como “o primeiro Matemático verdadeiro – organizador da organização dedutiva da geometria” (BOYER; MERZBACH, 2010, p. 43). Foi o primeiro a enunciar e provar um teorema que ficou conhecido como Teorema de Tales.

Dessa forma, podemos dizer que iniciando com Tales, o grande ápice da geometria grega deu-se com as demonstrações coletadas por Euclides e publicada nos “Elementos”.

Esta obra foi organizada na forma de “livros” em que o autor explora demonstrações geométricas de caráter dedutivo, procurando estabelecer suas conclusões com o rigor da absoluta necessidade lógica.

Portanto, Euclides de Alexandria, foi o protagonista das demonstrações e a Grécia o palco do fato histórico.

Porém, deve-se lembrar que os “Elementos” não foi o primeiro texto a apresentar o sistema axiomático – dedutivo. Segundo historiadores, Hipócrates de Chios já havia escrito seu “Elemento”, um dos muitos trabalhos perdidos pelos gregos, sendo o primeiro a dar importância no uso da dedução no processo de demonstração.

Euclides foi um grande matemático e são méritos dele a escolha particular de axiomas, o arranjo de teoremas e o rigor das provas.

Os Elementos tiveram altíssimo valor e os textos de Euclides foram tidos como ideais até meados do séc. XIX. Os Elementos é uma fonte substancial do conhecimento matemático, usado por gerações posteriores, influenciando o desenvolvimento da matemática como nenhuma outra obra.

Euclides, nos Elementos, partiu de verdades evidentes por si próprias e procedeu por demonstrações rigorosas chegando a conhecimentos certos, objetivos e eternos. Nesse trabalho, tomaremos os termos prova e demonstração como sinônimos, do ponto de vista matemático.

Conforme a Enciclopédia de Termos Lógico-Filosóficos (BRANQUINHO; MURCHO; GOMES, 2006) uma demonstração pode ser definida como “uma sequência finita de uma ou mais ocorrências de fórmulas tais que cada fórmula da sequência é um axioma ou uma consequência imediata de fórmulas precedentes da sequência.” Já segundo citado por Almouloud (2007), as demonstrações são provas particulares com as seguintes características:

- São as únicas aceitas pelos matemáticos;
- Respeitam certas regras: alguns enunciados são considerados verdadeiros (axiomas), outros são deduzidos destes ou de outros anteriormente demonstrados a partir de regras de dedução tomadas num conjunto de regras lógicas;
- Trabalham sobre objetos matemáticos com estatuto teóricos, não pertencentes ao mundo sensível, embora a ele façam referência.

A prova requer alcançar uma verdade matemática através de procedimentos que busquem critérios de verdade e ampliem procedimentos que averiguem a afirmação ou a negação dada.

Existem duas abordagens básicas para provar argumentos lógicos: as provas diretas e as indiretas. No que segue, consideraremos cada uma delas.

4.1 PROVAS DIRETAS

Para demonstrar a veracidade de um argumento lógico através de provas diretas partimos das premissas e utilizamos Modus Ponens (MP), Modus Tollens (MT) e a Lei do Silogismo (LS) para deduzir a conclusão da situação de forma direta. A seguir temos um exemplo disso.

Exemplo: Consideremos a seguinte sequência de afirmações, formando um argumento lógico:

- Se Ivete é inocente, então Ana está falando a verdade.
- Se Romeu está falando a verdade, então Ana não está.
- Se Romeu não está falando a verdade, então ele tem algo à ganhar.
- Romeu não tem nada à ganhar.

Para verificar a validade desse argumento, primeiramente, usamos linguagem lógica simbólica para representar cada sentença. Considere que:

- P: Ivete é inocente;
- Q: Ana fala a verdade;
- R: Romeu fala a verdade;

- S: Romeu não tem nada à ganhar.

$$\begin{aligned}
\text{Se Ivete é inocente, então Ana está falando a verdade.} &\Rightarrow P \to Q \\
\text{Se Romeu está falando a verdade, então Ana não está.} &\Rightarrow R \to \neg Q \\
\text{Se Romeu não está falando a verdade, então ele tem algo à ganhar.} &\Rightarrow \neg R \to S
\end{aligned}$$

Por hipótese, se assumimos que Romeu não tem nada à ganhar, temos:

$$\begin{aligned}
\text{Se Romeu não tem algo à ganhar, então está falando a verdade. (MT)} &\Rightarrow \neg S \to R \\
\text{Se Romeu está falando a verdade, então Ana não está. (MP)} &\Rightarrow R \to \neg Q \\
\text{Se Ana não está falando a verdade, então Ivete não é inocente. (MT)} &\Rightarrow \neg Q \to \neg P \\
\textbf{Conclusão: } \text{Ivete não é inocente.} &\Rightarrow \neg S \to \neg P
\end{aligned}$$

As atividades a seguir exploram essa ideia, em que se utiliza MP, MT e LS para se deduzir logicamente uma conclusão a partir de uma sequência de argumentos:

Sugestões de Atividades:
Utilizando o que foi visto a respeito de provas diretas, utilize modus ponens, modus tollens e a lei do silogismo, para obter a conclusão dos argumentos a seguir. (Sugestões de resolução no anexo)

- **Atividade 01**
  - Se eu estudar a noite inteira, então esquecerei a discussão da noite passada.
  - Se Maria vier estudar junto, então eu estudarei a noite inteira.
  - Maria veio estudar junto.
  - **Conclusão:**
- **Atividade 02**
  - Se toda pessoa rica fosse feliz, então dinheiro compra felicidade.
  - Se dinheiro compra felicidade, então não existe amor.
  - Amor existe.
  - **Conclusão:**

4.2 PROVAS INDIRETAS

A prova indireta é uma forma “inteligente” de se obter uma conclusão, só que nesse caso descarta-se, com base no senso comum, as afirmações que de antemão se sabe serem falsas. Para isso, primeiramente é necessário conhecer as possibilidades que são verdadeiras. Em seguida, elimina-se todas as possibilidades que contradizem fatos e ideias aceitas como verdadeira. Portanto, por exclusão, aceita-se que uma possibilidade restante é a conclusão verdadeira.

A prova indireta pode ser bastante eficaz para obter a resposta a uma pergunta contendo várias escolhas, quando não se tem certeza daquela que é correta. O exemplo a seguir ilustra isso:

Exemplo:

1. Qual é a capital de Mali?
    a) Paris
    b) Brasília
    c) Londres
    d) Bamako

Neste exemplo percebe-se facilmente a resposta correta através da prova indireta pois, apesar de não saber qual é a capital de Mali, pode-se eliminar as opções com o conhecimento básico que se tem das capitais conhecidas. No exemplo, eliminando-se Paris, Brasília e Londres pode-se deduzir que a capital de Mali é Bamako, a única resposta restante. Vejamos mais um exemplo:

Sugestões de Atividades:

1. Qual desses personagens ganhou duas vezes o prêmio Nobel?
    a) Ringo Star
    b) Madame Curie
    c) Joana D´Arc
    d) Leonardo da Vinci

Até aqui foi apresentada as construções dos raciocínio e as formas válidas para serem utilizadas nas demonstrações Matemáticas.

A partir do próximo capítulo será utilizado todo este conhecimento nas aplicações geométricas para serem utilizadas em sala de aula com os estudantes.

5 APLICAÇÕES À GEOMETRIA

Nesta parte do trabalho, abordaremos geometria dedutiva que, pode se dizer, serviu de base para antigas civilizações observar formas geométricas e então fazer conjecturas sobre elas.

Segundo Eves (1995) os primeiros passos da Geometria dedutiva, trilhados pelos grego no século V a.C., foram tentativas de organizar logicamente a Geometria num sistema dedutivo, a partir de poucas noções básicas e definições iniciais.

Essas tentativas culminaram, no século III a.C., com Os Elementos, especialmente os livros I, III, IV, XI, XII e XIII onde ocorrem a sistematização da Geometria em provas geométricas.

5.1 A LINGUAGEM LÓGICA EM GEOMETRIA

No sistema de dedução demonstra-se que certas sentenças são consequências lógicas de demonstrações já provadas anteriormente. Inicialmente, para que se tenha consistência nesse sistema, começamos com algumas propriedades iniciais, que são aceitas sem prova.

Em geometria, estas propriedades que aceitamos sem demonstrações, são chamadas de **postulados**. Elas vêm da observação e do senso comum, por exemplo, nas construções geométricas com régua e compasso. Quando se descobre a forma básica de construção, aceita-se então facilmente que estas sentenças são verdadeiras.

Para nossa abordagem, listamos, a seguir, alguns postulados, contidos no livro traduzido por Irineu Bicudo (EUCLIDES, 2009) de Euclides, e que estão diretamente relacionados a pontos, retas, ângulos e triângulos:

- P1 – Somente uma linha pode ser traçada através de quaisquer dois pontos.
- P2 – A intersecção de duas retas é exatamente um ponto.
- P3 – Em um segmento de reta existe apenas um ponto médio.
- P4 – Cada ângulo possui apenas uma bissetriz.
- P5 – Por uma reta r e um ponto A fora dela, existirá somente uma reta paralela a r que passará por A.
- P6 – Por uma reta r e um ponto A fora dela, existirá somente uma reta perpendicular a reta r que passará por A.

- P7 – Se B é um ponto no segmento $\overline{AC}$ e está entre A e C, então $AB + BC = AC$.
- P8 – Se um ponto D está no interior do ângulo $A\hat{B}C$, então, $m(A\hat{B}C) + m(D\hat{B}C) = m(A\hat{B}D)$.
- P9 – Se dois Ângulos são lineares[1] então eles são suplementares.
- P10 – Se duas retas paralelas são cortadas por uma transversal, então seus ângulos alternos internos são congruentes. O inverso também é válido, se duas retas cortadas por uma transversal formam ângulos alternos internos congruentes, então estas retas são paralelas.
- P11 – Se dois lados de um triângulo e o ângulo formado por eles são congruentes à dois lados de outro triângulo e o ângulo formado por estes lados, então, estes dois triângulos são congruentes. Costuma-se indicar essa propriedade por Lado-Ângulo-Lado, e abreviá-la por LAL.

  Esse postulado (P11) é também conhecido como Postulado da Congruência.

  Além destes postulados também utilizaremos dois Teoremas abaixo enunciados:

- T1 – Se três lados de um triângulo são congruentes, respectivamente, à três lados de outro triângulo, então, estes dois triângulos são congruentes. Costuma-se indicar essa propriedade por Lado-Lado-Lado, e abreviá-la por LLL.
- T2 – Se dois ângulos e o lado entre eles formados em um triângulo forem congruentes à dois lados e o ângulo formado em outro triângulo, então, esses triângulos são congruentes. Costuma-se indicar essa propriedade por Ângulo-Lado-Ângulo, e abreviá-la por ALA.

Se aceitamos, de início, que a soma das medidas dos três ângulos internos $\hat{a}$, $\hat{b}$ e $\hat{c}$ de qualquer triângulo é $180°$, não é necessário que se meça os três ângulos de todos os triângulos para verificar a veracidade dessa afirmação.

Pelo Teorema da soma dos ângulos internos de um triângulo, teremos que para qualquer triângulo:

$$\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180° \tag{5.1}$$

Podemos utilizar a sentença lógica:

- Se uma figura é um triângulo, então $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180°$.

[1] são dois ângulos adjacentes (possuem um lado comum, um vértice comum e não se sobrepõem) formando uma linha reta.

Premissa (P): a figura é um triângulo.

Conclusão (Q): $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180°$.

$$\begin{aligned} \text{Se uma figura é um triângulo, então, } \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^o. &\Rightarrow P \to Q \\ \text{A figura é um triângulo.} &\Rightarrow P \\ \text{Conclusão: } \hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180° &\therefore Q \end{aligned}$$

Outro **exemplo** geométrico de Teorema utilizando dedução de um fato verdadeiro é:

- Se o triângulo é isóscele então dois ângulos são congruentes.

Premissa (P): o triângulo é isósceles.

Conclusão (Q): as bases são congruentes.

$$\begin{aligned} \text{Se o triângulo é isóscele então dois ângulos são congruentes.} &\Rightarrow P \to Q \\ \text{O triângulo é isósceles.} &\Rightarrow P \\ \text{Conclusão: dois ângulos são congruentes.} &\Rightarrow \therefore Q \end{aligned}$$

Na situação abaixo temos uma aplicação em geometria que utilizamos a lógica de forma direta.

Exemplo: Se $ABCD$ é um retângulo, então suas diagonais são congruentes.

- Premissa (P): $ABCD$ é um retângulo.
- Conclusão (Q): suas diagonais são congruentes.

Sugestões de Atividades:

Nas próximas situações, identifique a premissa e a conclusão em cada caso. (Sugestões de resolução nos anexos).

1. Se o triângulo ABC possui todos os lados iguais então ele é equilátero.
2. Se $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são retos, então eles são congruentes.
3. Se o sólido geométrico possui apenas faces planas, então é um poliedro.
4. Se um poliedro possui todas suas faces retangulares então é um paralelepípedo.

5. Se um paralelepípedo possui todas as faces formadas por quadrados, então esse paralelepípedo é um cubo.
6. Se duas retas são paralelas, então não possuem ponto em comum.
7. Se duas retas são concorrentes então possuem um único ponto em comum.
8. Se um polígono possui três lados, então o polígono é um triângulo.
9. Se a soma dos Ângulos internos de um polígono é $180°$, então é um triângulo.
10. Se um triângulo possui um ângulo reto, então é um triângulo retângulo.
11. Se a soma dos Ângulos internos de um polígono é $180°$, então é um triângulo.
12. Se um quadrilátero tem dois lados paralelos, então é um trapézio.
13. Se $\overline{ED}$ é o segmento médio do triângulo ABC, então $\overline{ED}$ é paralelo a um dos lados do triângulo ABC.
14. Se um ângulo é agudo, então é menor que $90°$.
15. Se um ângulo é reto, então é igual a $90°$.
16. Se o triângulo possui dois ângulos congruentes, então o triângulo possui dois lados congruentes.
17. Se dois lados do triângulo são congruentes, então o triângulo é isósceles.

Nos próximos exercícios, complete o raciocínio das sentenças utilizando a lógica de forma direta.

- **Atividade 01**
  - Se $\hat{A}$ é o maior ângulo de um triângulo, então a medida de $\hat{A}$ é maior que $60°$.
  - $\hat{A}$ é o maior ângulo do triângulo.
  - **Conclusão:**
- **Atividade 02**
  - Se o triângulo ABC é equilátero, então $\hat{A} = 60°$.
  - Em um certo um triângulo tem-se $\hat{A} \neq 60°$.
  - **Conclusão:**

- **Atividade 03**
  - Se $ABCD$ é um retângulo, então suas diagonais são congruentes.
  - As diagonais de $ABCD$ não são congruentes.
  - **Conclusão:**
- **Atividade 04**
  - Se um número é divisível por 6, então ele é divisível por 3.
  - Um número não é divisível por 3.
  - **Conclusão:**
- **Atividade 05**
  - Se $\overline{BC}$ é o lado maior do triângulo ABC, então $\hat{A}$ é o maior ângulo do triângulo ABC.
  - $\hat{A}$ não é o maior ângulo do triângulo ABC.
  - **Conclusão:**
- **Atividade 06**
  - Se os ângulos da base de um triângulo são congruentes, então o triângulo tem dois lados congruentes.
  - Se o triângulo tem dois lados congruentes então o triângulo é isósceles.
  - O triângulo não é isósceles.
  - **Conclusão:**
- **Atividade 07**
  - Se os lados consecutivos de um paralelogramo são congruentes, então o paralelogramo é um losango.
  - Se o paralelogramo é um losango, então as diagonais são perpendiculares entre si.
  - As diagonais não são perpendiculares.
  - **Conclusão:**

Na geometria, para demonstrar e expressar relações entre duas figuras geométricas utiliza-se a congruência, que aqui indicaremos por $\cong$.

A definição de segmentos e ângulos congruentes diz que "Se $AB = CD$, então $\overline{AB} = \overline{CD}$ e se $m(\hat{A}) = m(\hat{B})$ então $\hat{A} \cong \hat{B}$. Aqui usamos $m(\hat{A})$ e $m(\hat{B})$ para indicar a medida dos ângulos $\hat{A}$ e $\hat{B}$, respectivamente[2].

Uma vez que a ideia de congruência está ligada à de igualdade, ela satisfaz três propriedades frequentemente usadas nas demonstrações geométricas: a reflexiva, a transitiva e a simétrica.

A propriedade Reflexiva da congruência diz que qualquer figura geométrica é congruente a ela mesma. Isso pode ser indicado, por meio de uma representação em linguagem lógico-matemática como figura(A) $\cong$ figura(B).

Por exemplo, considere o triângulo isósceles ABC e sua bissetriz $\overline{AD}$ (Figura 1).

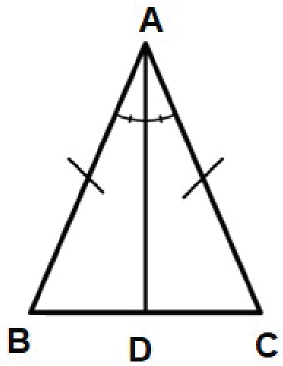


FIGURA 1 – Geogebra, própria autora.

Observe que o segmento $\overline{AD}$ no ΔABD é congruente ao segmento $\overline{AD}$ no ΔADC pela propriedade reflexiva de congruência que diz que $\overline{AD} \cong \overline{AD}$.

A propriedade transitiva da congruência diz que se figura(A) $\cong$ figura(B) e figura(B) $\cong$ figura(C), então, figura(A) $\cong$ figura(C).

[2] Observe que a medida de um ângulo pode ser dada em graus, radianos, ou outra unidade que se tomou inicialmente, como giros, por exemplo.

Exemplo: na Figura 2 temos $\overline{AC} \cong \overline{AB}$ e $\overline{AB} \cong \overline{AD}$.

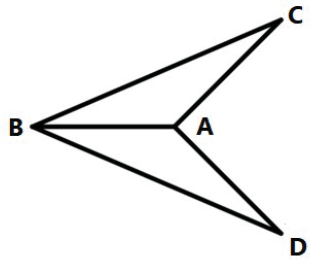


FIGURA 2 – Geogebra, própria autora.

Pela propriedade da transitividade concluímos que $\overline{AC} \cong \overline{AD}$. A propriedade simétrica da congruência diz que se figura(A) $\cong$ figura(B) então figura(B) $\cong$ figura(A).

Neste caso, pode-se utilizar como exemplo dois segmentos onde dizer que $\overline{AB} \cong \overline{AD}$ é o mesmo que dizer que $\overline{AD} \cong \overline{AB}$.

5.2 PROVAS EM GEOMETRIA

As provas em geometria consistem nas sequencias de afirmações, cada uma com sua premissa que conduz a uma conclusão válida. Cada sentença traz uma premissa que pode ser do tipo: definição, propriedade de álgebra, igualdade, congruência ou teoremas provados anteriormente.

As provas em geometria podem ser feitas da mesma maneira que a prova lógica, como será demonstrado a seguir.

Teorema: Em todo triângulo isósceles (Figura 3), a bissetriz relativa à base coincide com a mediana.

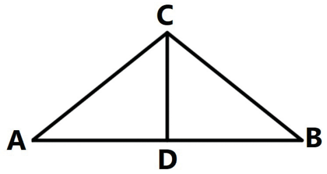


FIGURA 3 – Geogebra, própria autora.

Hipótese: triângulo isósceles ABC com $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ e $\overline{CD}$ é bissetriz do ângulo $\hat{C}$.

Conclusão: $\overline{CD}$ é a mediana relativa a base.

1. *Premissa:* $\overline{AC} \cong \overline{BC}$;
2. *Premissa:* $\overline{CD}$ é bissetriz do ângulo $\hat{C}$;
3. *Definição de bissetriz:* $A\hat{C}D \cong D\hat{C}B$;

4. *Propriedade reflexiva da congruência:* $\overline{CD} \cong \overline{CD}$;

5. *LAL postulado da congruência:* $\Delta ADC \cong \Delta BDC$

6. *Definição de congruência de triângulos:* $\overline{AD} \cong \overline{BD}$

7. *Definição de ponto médio:* D é ponto médio de $\overline{AB}$.

8. *Definição de ponto médio:* Então, $\overline{CD}$ é mediana.

Vamos escrever em texto matemático a demonstração que já foi descrita nos passos acima.

Por hipótese, temos que $\overline{AC}$ é congruente a $\overline{BC}$ e $\overline{CD}$ é bissetriz do ângulo é bissetriz do ângulo $\hat{C}$. Pela definição de bissetriz temos então que $A\hat{C}D$ é congruente a $D\hat{C}B$ e pela propriedade reflexiva da congruência temos que $\overline{CD}$ é congruente a ele mesmo. Portanto, temos por LAL que os triângulos ΔADC e ΔBDC são congruentes. Desta forma, $\overline{AD}$ é congruente a $\overline{BCD}$ e D é ponto médio de $\overline{AB}$.

Portanto, concluímos que $\overline{CD}$ é mediana relativa a base $\overline{AB}$ do triângulo ΔABC.

Exemplo: Se ΔABC é isósceles com $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ e ΔABD isósceles com $\overline{AD} \cong \overline{BD}$

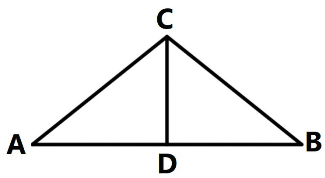


FIGURA 4 – Geogebra, própria autora.

Mostre que $\overline{CD}$ é bissetriz $A\hat{C}B$ (Figura 4).

Hipótese: ΔABC é isósceles $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ e ΔABD é isósceles $\overline{AD} \cong \overline{BD}$.

Conclusão: $\overline{CD}$ é bissetriz $A\hat{C}B$.

1. *Premissa:* $\overline{AC} \cong \overline{BC}$;

2. *Premissa:* $\overline{AD} \cong \overline{BD}$;

3. *Propriedade reflexiva da congruência.:* $\overline{CD} \cong \overline{CD}$;

4. *Congruência de triângulos (lado-lado-lado):* $\Delta ADC \cong \Delta BDC$

5. *Consequência da congruência :*$A\hat{D}C \cong B\hat{D}C$;

6. *Conclusão:* $\overline{CD}$ é bissetriz de $A\hat{C}B$

Pela hipótese de triângulo isósceles, $\overline{AC}$ é congruente a $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$ é congruente a $\overline{BD}$. Temos ainda, pela propriedade reflexiva da congruência, que $\overline{CD}$ é congruente a ele mesmo. Desta forma, por LLL temos que ΔADC é congruente a ΔBDC e por consequência,$A\hat{C}D$ é congruente a $B\hat{C}D$. Portanto, como queríamos demonstrar, $\overline{CD}$ é bissetriz de $A\hat{C}B$. A seguir, demonstre as situações através das lógicas de geometria conhecidas.

Sugestões de Atividades(Resoluções no anexo):

- Sendo o triângulo ABC (Figura 5), com $D \in \overline{CD}$, $C\hat{D}A \cong C\hat{D}B$ e $A\hat{C}D \cong B\hat{C}D$. Mostre que $\Delta ADC \cong \Delta BDC$

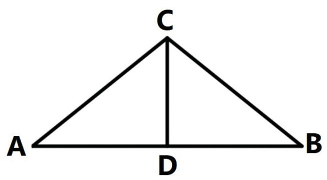


FIGURA 5 – Geogebra, própria autora.

- Seja o quadrilátero $KITE$ (Figura 6) onde, $\overline{KI} \cong \overline{KE}$ e $\overline{IT} \cong \overline{TE}$. Demonstre que a diagonal $\overline{KT}$ é bissetriz dos ângulos $E\hat{K}I$ e $I\hat{T}E$.

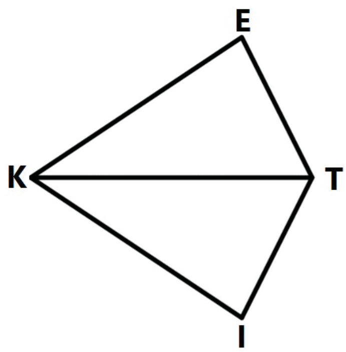


FIGURA 6 – Geogebra, própria autora.

- Seja o triângulo ΔABC com $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ e $\overline{CD}$ a mediana da base. Mostre que $\overline{CD}$ é bissetriz do a ângulo $A\hat{C}B$.

- Seja M o ponto médio e de intersecção do segmento $\overline{AB} \cong \overline{CD}$. Mostre que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ (Figura 7).

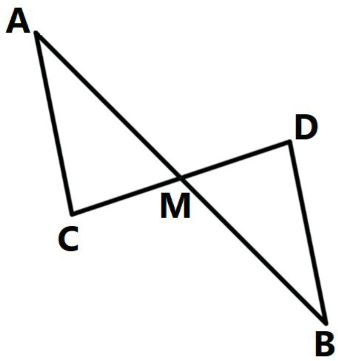


FIGURA 7 – Geogebra, própria autora.

Outra forma de realizar demonstrações é utilizar teoremas já provados para demonstrar teoremas.

Por exemplo, sabemos que a diagonal de um paralelogramo divide o paralelogramo em dois triângulos congruentes e é preciso demonstrar que os lados opostos de um paralelogramo são congruentes. (Figura 8)

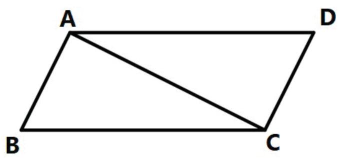


FIGURA 8 – Geogebra, própria autora.

Hipótese: paralelogramo $ABCD$ e sua diagonal $\overline{AC}$.

Conclusão: $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ e $\overline{AB} \cong \overline{CD}$.

Como sabemos que a diagonal de um paralelogramo divide-o em dois triângulos congruentes, temos que $\Delta ACM \cong \Delta BDM$, portanto, $\overline{BC} \cong \overline{AD}$ e $\overline{AB} \cong \overline{CD}$

Desta maneira é possível simplificar uma demonstração.

Algumas Conjecturas sobre retas paralelas que também podem ser demonstradas facilmente desta maneira são:

- Se duas retas paralelas são cortados por uma transversal então seus ângulos correspondentes são congruentes.
- Se duas retas são paralelas a uma terceira, então as retas são paralelas uma a uma.
- Se duas retas r e s no mesmo plano são perpendiculares a uma terceira reta, então r é paralela a s.

- Se duas retas paralelas estão cortadas por uma transversal, então os ângulos internos do mesmo lado da transversal são suplementares.
- Os ângulos consecutivos de um paralelogramo são suplementares.

Às vezes, nas demonstrações com figuras geométricas, pode-se simplificar a visualização da demonstração fazendo os desenhos de forma separadas.

Hipótese: Na Figura 9 $\hat{O} \cong \hat{A}$ e $\overline{RO} \cong \overline{RA}$.

Conclusão: $\Delta REO \cong \Delta RNA$.

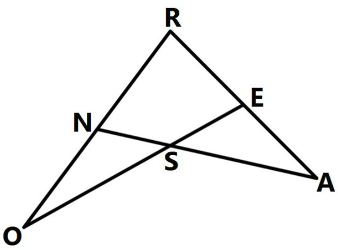


FIGURA 9 – Geogebra, própria autora.

Com as figuras separadas fica mais fácil de se observar os dois triângulos

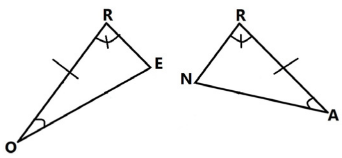


FIGURA 10 – Geogebra, própria autora.

onde por hipótese temos: $\hat{O} \cong \hat{A}$ e $\overline{RO} \cong \overline{RA}$

Tem-se também $\hat{R}$ comum aos dois triângulos.

Portanto, por ALA, temos que os $\Delta REO \cong \Delta RNA$ são congruentes.

Sugestões de Atividades(Sugestão de resoluções no anexo):

Demonstre a proposição abaixo separando os triângulos para que a demonstração fique mais fácil de ser observada.

Hipótese: Na Figura 11, temos um pentágono regular.

Conclusão: $\Delta PEA \cong \Delta EPN$.

Outros exemplos simples de serem demonstrados desta forma são:

- As diagonais do retângulo são congruentes.
- Se as diagonais do paralelogramo são congruentes, então, o paralelogramo é um retângulo.

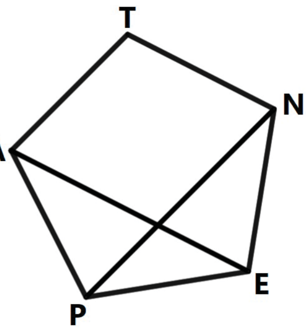


FIGURA 11 – Geogebra, própria autora.

- As diagonais do losango são perpendiculares e se interceptam no ponto médio.

Existem provas em geometria que são utilizadas linhas auxiliares para facilitar as demonstrações. O truque neste caso é saber onde desenhar essas retas de forma conveniente. Este conhecimento aparece depois de vários experimentos de demonstrações com figuras geométricas.

Para que estas retas auxiliares sejam construídas, necessita-se incluir mais um postulado, que denominamos o postulado das paralelas que diz: "por um ponto fora da reta dada, existe exatamente uma única reta paralela a esta reta dada."

Um exemplo de que a construção de linha auxilia uma demonstração é na prova de que a soma dos ângulos internos de um triângulo sempre será 180^o.

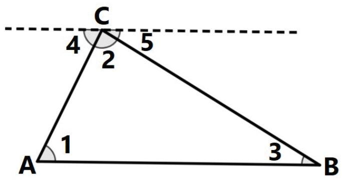


FIGURA 12 – Geogebra, própria autora.

Hipótese: Na Figura 12, ΔABC. **Conclusão**: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^o$.

Uma das formas de demonstrar esta situação é construir uma reta paralela à base passando pelo vértice.

1. *Ângulos lineares somam* 180^o: $\hat{2}+\hat{4}+\hat{5}=180^o$.
2. *Postulado de retas paralelas cortadas por uma transversal:* $\hat{4}=\hat{1}$ e $\hat{5}=\hat{3}$.
3. *Substituição de 2 em 1:* $\hat{2}+\hat{1}+\hat{3}=180^o$.

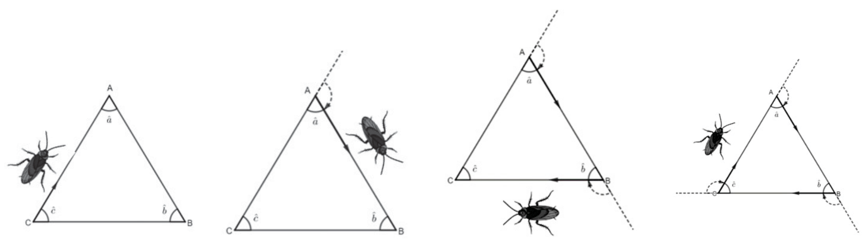
Por hipótese tem-se um triângulo. Construindo uma reta paralela a base $\overline{AB}$ e que passe por C, observa-se,$\hat{2}+\hat{4}+\hat{5}=180^o$, por serem ângulos lineares e pelo postulado de retas paralelas cortadas por uma transversal tem-se que $\hat{4}=\hat{1}$ e $\hat{5}=\hat{3}$(alternos internos).

Substituindo de forma conveniente na equação temos $\hat{2} + \hat{1} + \hat{3} = 180^o$.

Portanto, concluímos que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o.

Uma outra forma de demonstrar a soma e ângulos internos de polígonos de forma generalizada é através da prova construtiva, por meio de giros.

Começando pelo triângulo, vamos verificar pelo esquema a seguir que a soma dos ângulos internos totalizam 180^o.



(a) (b) (c) (d)

FIGURA 13 – Geogebra, própria autora.

Uma barata parte do vértice C e caminha ao longo dos lados do triângulo (Figura 13(a)). Ao chegar ao vértice A, ela gira um ângulo que corresponde ao suplemento de $\hat{a}$, isto é, $180^o - \hat{a}$ (Figura 13(b)). Ao alcançar o vértice B, ela gira um ângulo correspondente ao suplemento de $\hat{b}$, isto é, de $180^o - \hat{b}$ (Figura 13(c)). Finalmente, na Figura 13(d) quando a barata alcança o vértice C, ela gira $180^o - \hat{c}$, para ficar na direção de quando iniciou o trajeto.

Quando a barata chegou ao ponto de partida, ela deu uma volta completa, o que corresponde a 360^o, ou seja, ela girou o suplemento de cada um dos ângulos internos do triângulo, totalizando uma volta.

Utilizando esta ideia, chega-se a seguinte equação:

$$
\begin{aligned}
(180^o - \hat{a}) + (180^o - \hat{b}) + (180^o - \hat{c}) &= 360^o \\
540^o - \hat{a} - \hat{b} - \hat{c} &= 360^o \\
-\hat{a} - \hat{b} - \hat{c} &= 360^o - 540^o \\
\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} &= 180^o
\end{aligned}
$$

Portanto, esse resultado demonstra que para qualquer triângulo é válido que a soma de seus ângulos internos será sempre 180^o.

Da mesma forma, ao se generalizar o exempla acima, percebe-se que é válido para qualquer polígono de n vértices conforme demonstração a seguir.

Tomemos um polígono com n vértices, que denotaremos por P_1, P_2 ,...,P_n. Imagine que a barata parte do vértice P_1, seguindo ao longo dos lados do polígono conforme a Figura 14.

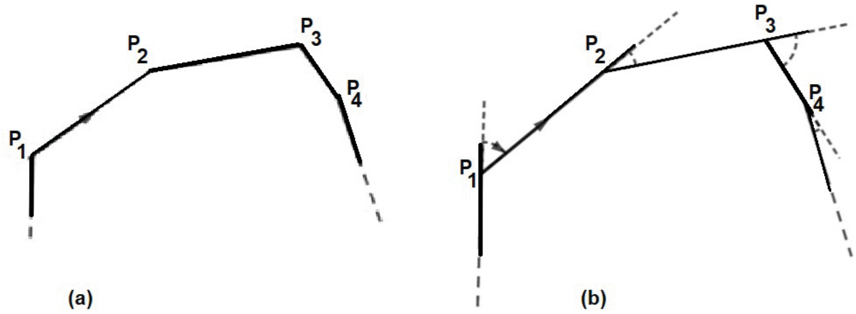


FIGURA 14 – Geogebra, própria autora

Chegando ao ponto P_2, a barata gira $180^o - \hat{P}_2$, ao alcançar P_3, gira $180^o - \hat{P}_3$, e assim por diante até retornar ao vértice P_1, o ponto de partida. A barata terá então completado uma volta, ou seja, 360^o que equivale a soma de todos os giros no trajeto. Pode-se então escrever:

$$(180^o - \hat{P}_1) + (180^o - \hat{P}_2) + (180^o - \hat{P}_3) + \ldots + (180^o - \hat{P}_n) = 360^o$$
$$n \cdot 180^o - (\hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_3 + \ldots + \hat{P}_n) = 2 \cdot 180^o$$
$$n \cdot 180^o - 2 \cdot 180^o = \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_3 + \ldots + \hat{P}_n$$
$$(n-2) \cdot 180^o = \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_3 + \ldots + \hat{P}_n$$

Assim, generalizamos a soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados e chegamos a fórmula

$$(n-2) \cdot 180^o = \hat{P}_1 + \hat{P}_2 + \hat{P}_3 + \ldots + \hat{P}_n$$

5.3 PROVAS INDIRETAS

O método indireto aparece na Matemática como uma das ferramentas de grande poder para o desenvolvimento e fortalecimento desta ciência e dentre as formas de comprovação, o método configura-se como uma das ferramentas mais poderosas da Matemática quando se trata de demonstração.

Uma maneira de perceber a importância de um método construtivo é vê-lo sendo utilizado nas mais importantes obras de Matemática da história. Os Elementos, livro já mencionado anteriormente, é um dos textos em que o método de redução ao absurdo, também conhecido como mecanismo indireto de demonstração ou negação é utilizado.

A obra de Euclides foi a primeira a utilizar minuciosamente o sistema dedutivo e axiomático, que teria sido idealizado por Aristóteles. Desde o primeiro volume que possui vinte e três definições, cinco postulados e nove noções comuns, Euclides utiliza o método de redução ao absurdo em nove proposições.

O método de redução ao absurdo consiste inicialmente em admitir como verdadeira a negação de determinada afirmação e continuando o processo de demonstração observa-se, como consequência, o surgimento de uma contradição, o que torna a negação da hipótese inicial um absurdo.

Por este motivo chamamos essa demonstração de demonstração por contradição ou redução ao absurdo. Para demonstrar, portanto, que $P \rightarrow Q$, utilizando o método do absurdo, terá que supor temporariamente que $P \rightarrow Q$ não ocorre e utilizar esse fato para deduzir uma contradição.

Encontrada a contradição, ela implica que a premissa inicial ($P \rightarrow Q$ não ocorre) é falsa, portanto, $P \rightarrow Q$ ocorre.

Portanto, o procedimento da prova indireta pode ser descrita em três passos.

1. Comece assumindo que o oposto do que você quer demonstrar é verdadeiro.
2. Use a lógica para encontrar uma contradição.
3. Encontrada a contradição, salientar que, como foi argumentado logicamente, a suposição deve ser responsável pela contradição e, portanto, a conclusão desejada é verdadeira.

Através da demonstração por absurdo, vamos provar que se $\hat{A} \neq \hat{B}$ no ΔABC, então $\overline{AC} \neq \overline{BC}$.

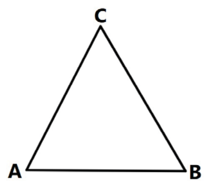


FIGURA 15 – Geogebra, própria autora.

Utilizando o método da contradição assume-se que $\overline{AC} = \overline{BC}$. Se $\overline{AC} = \overline{BC}$, então o triângulo é isósceles e, portanto $\hat{A} = \hat{B}$. Encontramos uma contradição, pois a hipótese diz que $\hat{A} \neq \hat{B}$. Então, ter assumido que $\overline{AC} = \overline{BC}$ é uma sentença falsa, portanto a conclusão verdadeira é $\overline{AC} \neq \overline{BC}$.

A história de como surgiu o método de demonstração ao absurdo, de acordo com Miguel (s.d., p. 27), "indica Hipasus de Metapontum, um pitagórico que dirigiu a escola pitagórica logo após a morte de Pitágoras, por volta de 500 a.C." como um dos possíveis nomes a ter utilizado o método para demonstrar a existência das grandezas incomensuráveis abalando os alicerces da escola pitagórica.

Hipasus teria notado que as medidas da diagonal e do lado de um quadrado são incomensuráveis e teria percebido isso através da consequência da aplicação do teorema de Pitágoras no triângulo retângulo isósceles.

Uma possível demonstração para incomensurabilidade da diagonal e do lado de um quadrado serem incomensuráveis é através das subtrações sucessivas

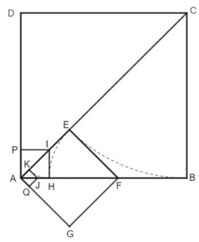


FIGURA 16 – Geogebra, própria autora.

Começa-se construindo um quadrado $ABCD$ (Figura 16) onde AC é sua diagonal. Continua-se construindo o quadrado $AEFG$ de tal modo que a medida de seu lado é igual a diferença entre as medidas da diagonal e do lado do quadrado $ABCD$. O quadrado $AHIP$ foi construído de tal modo que a medida de seu lado é igual a diferença entre as medidas da diagonal e do lado do quadrado $AEFG$. O lado do quadrado $AQJK$ é igual a diferença entre as medidas da diagonal e do lado do quadrado $AHIP$. Portanto temos:

$$m(\overline{AC}) - m(\overline{BC}) = m(\overline{AE})$$
$$m(\overline{AF}) - m(\overline{EF}) = m(\overline{AH})$$
$$m(\overline{AE}) - m(\overline{HI}) = m(\overline{AK})$$

Suponha que exista um segmento de medida x que caiba um número inteiro de vezes no lado e na diagonal do quadrado $ABCD$, então, x deverá caber um número inteiro de vezes nos lados e nas diagonais de todos os quadrados da figura e de todos os quadrados cada vez menores que puder imaginar.

Porém, esse segmento x não existe, isto é, sua medida é zero. Logo, o lado do quadrado e a diagonal do quadrado $ABCD$ são segmentos incomensuráveis.

Considere agora um quadrado de lado medindo 1μ. Qual será a medida de sua diagonal? Isto é o mesmo que considerarmos um triângulo retângulo isósceles cujos lados medem 1μ.

Este triângulo existe e é possível de ser construído com régua e compasso. Logo, também deve existir um número que represente a medida de sua hipotenusa.

Considere, então, o triângulo ABC, retângulo e isósceles sobre a reta numérica de catetos medindo 1μ e a hipotenusa medindo x. Utilizando um compasso, transporte a medida da hipotenusa AC para a reta numérica, assim como mostra a Figura 17.

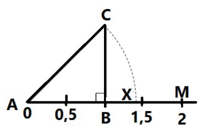


FIGURA 17 – Geogebra, própria autora.

Através da Figura 17 é possível perceber que a medida da hipotenusa expressa o número x na reta numérica e que seu valor está entre 1 e $1,5$ e não pode-se falar mais nada pois existem infinitos números racionais situados entre 1 e $1,5$.

Porém, podemos utilizar o Teorema de Pitágoras para calcular o valor de x visto que estamos falando de um triângulo retângulo. Portanto, temos que:

$$\begin{aligned} x^2 =& 1^2 + 1^2 \\ x^2 =& 1 + 1 \\ x^2 =& 2 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Logo, basta encontrar um valor que multiplicado por ele mesmo resulte em 2.

Porém, como demonstrado anteriormente, a diagonal e o lado de um quadrado são segmentos incomensuráveis o que equivale algebricamente dizer que não existe número racional algum que satisfaça a equação $x^2 = 2$.

E esta conclusão de Hipasus teve consequências filosóficas e políticas pois ela chocava com a crença pitagórica de que para tudo existia um número e a reta numérica era contínua. Isso significava para eles que era possível subdividir os intervalos entre os números inteiros em um número qualquer de partes iguais e sempre existia um número fracionário em correspondência com cada um desses pontos de subdivisão. Portanto, nenhum número fracionário poderia estar em correspondência com o ponto P da figura anterior. Havia, portanto, um “buraco” na reta e por consequência, a reta não seria mais contínua.

Outra forma de demonstrar que $\sqrt{2}$ é irracional de forma mais algébrica, seria utilizando a prova indireta, pois temos duas opções, $\sqrt{2}$ é irracional ou não irracional (racional). No caso de $\sqrt{2}$ ser racional poderemos então escrever em forma da fração $\frac{a}{b}$ e, caso isso não seja possível encontraremos um absurdo e, portanto $\sqrt{2}$ será irracional e não poderá ser escrito na forma de fração.

Demonstração: Supor que $\sqrt{2}$ é racional, portanto, podemos escrevê-lo como fração, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ com $\frac{a}{b}$ irredutível, ou seja, mdc(a,b)=1. Elevando ambos os lados da igualdade ao quadrado, teremos:

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \leftrightarrow a^2 = 2 \cdot b^2$$

Neste ponto, encontramos uma contradição pois como temos a e b elevados ao quadrado, significa que quando estes números fatorados, teremos pares de números primos e podemos perceber no segundo membro que o número 2 ficará em potência ímpar o que é algo impossível.

Portanto, a conclusão é que a nossa hipótese de $\sqrt{2}$ ser racional é falsa e não é possível escrever o número $\sqrt{2}$ como uma fração, sobrando somente a segunda opção de que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

Conclusão: $\sqrt{2}$ é um número irracional.

- **Exemplo:** Seja r, s e t retas no plano, demonstre que se $r \parallel s$ e $r \perp t \Rightarrow s \perp t$.

Por hipótese, temos que r é paralela a s e por hipótese assumida, s não é perpendicular a t. Logo, r não é perpendicular a t, o que contradiz a hipótese de que r é perpendicular a t.

Conclusão: temos que s é perpendicular a t.

- **Exemplo:** Se $a^2 < b^2 + c^2$, então o triângulo é acutângulo $(\hat{A} < 90^o)$.

Demonstração: Por absurdo, suponha que o triângulo não é acutângulo, portanto ele é retângulo ou obtusângulo.

Se o triângulo é retângulo, então pelo teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, o que contraria a hipótese. Caso o triângulo seja obtusângulo, então $a^2 > b^2 + c^2$ que também contraria a hipótese.

Conclusão: Portanto, o triângulo é acutângulo.

Sugestões de Atividades:(Sugestões de resolução no anexo)

Demonstre, por contradição, as situações abaixo:

1. Nenhum triângulo possui dois ângulos retos.
2. As bases de um trapézio têm medidas diferentes.

3. A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é 360^o.

Estas demonstrações no contexto de geometria podem ser muito úteis em sala de aula pois fazem com que os estudantes consigam pensar nas definições desenvolvendo seu raciocínio além de formalizar todo este processo.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O trabalho foi realizado pensando numa forma clara de desenvolver a lógica com os alunos de ensino fundamental e médio, de forma que a linguagem formal Matemática seja trabalhada durante os anos escolares.

A ideia principal é mostrar que, com a lógica trabalhada desde os anos iniciais nas aulas de Matemática, é possível fazer com que os alunos organizem as ideias e consigam fazer demonstrações mais complexas nos anos finais.

Ao apresentar os capítulos foram criando-se, passo a passo, deduções verdadeiras da lógica interligando-se até chegar às demonstrações lógicas mais complexas da geometria, além de exercícios para praticar em cada uma das consequências lógicas apresentadas.

Sendo assim, o trabalho pode servir como um material de apoio para que os professores do ensino fundamental e médio possam trabalhar com a lógica nas aulas de Matemática através de uma linguagem simples e formal da Matemática seguindo o raciocínio lógico e a construção do pensamento do estudante.

Portanto, este trabalho atingiu seu objetivo de ser um material de apoio para ser utilizado em sala de aula pelos professores de Matemática para auxiliá-los na construção do raciocínio lógico durante as aulas de Geometria do Ensino fundamental e Médio.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. [S.l.]: ANPED, GT: Educação Matemática n. 19., 2007. Acessado em 03 de jun de 2018. Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/home.php?id=30>.

BICUDO, I.; VAZ, D. A. de F. **MATEMÁTICA E FILOSOFIA: DOS GREGOS ATÉ DESCARTES. Revista Brasileira de História da Matemática, [S. l.]** [S.l.]: Springer, Boston, MA, 2020. v. 17, p. 1–18. 17 set. 2022. DOI: 10.47976/RBHM2017v17n341-18. Disponível em: <https://www.rbhm.org.br/index.php/RBHM/article/view/30>.

BOYER, C.; MERZBACH, U. 3rd. [S.l.]: ed. Hoboke: John Wiley & Sons, 2010.

BRANQUINHO, J.; MURCHO, D.; GOMES, N. Edição: WMF Martins Fontes. 1. ed. [S.l.]: São Paulo, 2006.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: primeiro e segundo ciclos do ensino fundamental: matemática**. Brasília, D.F.: [s.n.], 1997.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática**. Brasília, D.F.: [s.n.], 1998.

CANTORAL, R. et al. **Desarrollo del pensamiento matemático.** [S.l.]: México: Trillas., 2000.

EUCLIDES. **Os Elementos.** Tradução: Irineu Bicudo. [S.l.]: Editora Unesp., 2009.

EVES, H. [S.l.]: Editora da Unicamp. São Paulo, 1995.

GROENWALD, C.; NUNES, G. Currículo de matemática no ensino básico: a importância do desenvolvimento dos pensamentos de alto nível. **Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa**, v. 10, n. 1, 2007. Disponível em: <http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362007000100005>.

MALTA, Iaci. Linguagem, leitura e matemática. In: **Disciplinas matemáticas em cursos superiores:reflexões, relatos, propostas**. Edição: Helena Noronha Cury. Porto Alegre: Edpucrs, 2004.

MIGUEL, Antonio. Um estudo histórico-pedagógico sobre números irracionais. UNICAMP. Acesso em 14 de set de 2022. Disponível em: <http://sbempara.com.br/historia_matematica/atividades/historia/aritimetica/02.pdf>.

SERRA, M. [S.l.]: Berkeley: Key Curriculum Press, 1993.

ANEXOS

página 18

Atividade 1

Premissas	
João está brincando	P
Conclusão	
ele está brincando com o André	$\therefore Q$
Modus Ponens	
Se João está brincando, então ele está brincando com o André.	$P \rightarrow Q$

TABELA 3 – Fonte: própria autora.

Atividade 2

Premissas	
estudar	P
Conclusão	
terá boas notas	$\therefore Q$
Modus Ponens	
Se você estudar, você terá boas notas.	$P \rightarrow Q$

TABELA 4 – Fonte: própria autora.

Atividade 3

Premissas	
Pedro está com giz entre os dedos	P
Conclusão	
ele está jogando sinuca.	$\therefore Q$
Modus Ponens	
Se Pedro está com giz entre os dedos, então ele está jogando sinuca.	$P \rightarrow Q$

TABELA 5 – Fonte: própria autora.

Atividade 4

Premissas	
Sonia está gripada	P
Conclusão	
passará a gripe para sua filha.	$\therefore Q$
Modus Ponens	
Se Sonia estiver gripada, então passará a gripe para sua filha.	$P \rightarrow Q$

TABELA 6 – Fonte: própria autora.

Página 20

Atividade 01

$$\text{Se o objeto dentro da caixa é uma rosa, então ele é uma flor.} \Rightarrow P \rightarrow Q$$

O objeto não é uma flor, então o objeto dentro da caixa não é uma rosa. $\Rightarrow \therefore \neg Q \rightarrow \neg P$

Atividade 02

Se João é confeiteiro, então sua roupa está suja de chocolate. $\Rightarrow P \rightarrow Q$

A roupa de João não está suja de chocolate, então ele não é confeiteiro. $\Rightarrow \therefore \neg Q \rightarrow \neg P$

Atividade 03

Se Júlia não está usando o computador, então Diana pode usar o computador. $\Rightarrow \neg P \rightarrow Q$

Diana não pode usar o computador, então Júlia está usando o computador. $\Rightarrow \therefore \neg Q \rightarrow P$

Atividade 04

Se Paula sair com Davi, então ela terá uma noite agradável. $\Rightarrow P \rightarrow Q$

Paula não teve uma noite agradável, então Paula não saiu com Davi. $\Rightarrow \neg \therefore \neg Q \rightarrow \neg P$

Atividade 05

Se Linda pegar o ônibus, então ela chegará atrasada para a entrevista de emprego. $\Rightarrow P \rightarrow Q$

Linda não chegou atrasada para a entrevista de emprego, então não pegou ônibus. $\Rightarrow \neg \therefore \neg Q \rightarrow \neg P$

Página 22

Atividade 01

Se Joana estudar, terá boas notas. $\Rightarrow P \rightarrow Q$

Se obtiver boas notas, passará de ano. $\Rightarrow Q \rightarrow R$

Portanto, se Joana estudar passará de ano. $\Rightarrow \therefore P \rightarrow R$

Conclusão: Joana passou de ano

Atividade 02

Se hoje é quarta-feira, então amanhã será quinta-feira. $\Rightarrow P \rightarrow Q$

$$\text{Se amanhã é quinta-feira, então sexta-feira está próxima.} \Rightarrow Q \rightarrow R$$
$$\text{Portanto, se hoje é quarta-feira então sexta-feira está próxima.} \Rightarrow \therefore P \rightarrow R$$

Conclusão: sexta-feira está próxima.

Atividade 03

$$\text{Se eu comer pizza meia noite, então terei pesadelos.} \Rightarrow P \rightarrow Q$$
$$\text{Se eu tiver pesadelos, então dormirei pouco.} \Rightarrow Q \rightarrow R$$
$$\text{Eu comi pizza meia noite logo dormi pouco.} \Rightarrow \therefore P \rightarrow R$$

Conclusão: Dormi pouco.

Página 26

Atividade 01

$$\text{Se Maria vier estudar junto, então eu estudarei a noite inteira. (MP)} \Rightarrow R \rightarrow P$$
$$\text{Se eu estudar a noite inteira, então esquecerei a discussão da noite passada. (MP)} \Rightarrow P \rightarrow Q$$
$$\textbf{Conclusão:} \text{ Como Maria veio estudar junto eu esqueci a discussão da noite passada.} \Rightarrow R \rightarrow Q$$

Atividade 02

$$\text{Se existe amor, então dinheiro não compra felicidade (MT)} \Rightarrow R \rightarrow \neg Q$$
$$\text{Se dinheiro não compra felicidade, então nem toda pessoa rica é feliz. (MT)} \Rightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$$
$$\textbf{Conclusão:} \text{ Se amor existe então não é toda pessoa rica que é feliz.} \Rightarrow R \rightarrow \neg P$$

Página 27

Atividade 01

Por eliminação podemos rapidamente excluir Ringo Star e Joana D´Arc. Pensando que o prêmio Nobel surgiu em 1901 também pode-se excluir Leonardo da Vinci. Portanto, chegamos à conclusão que a personagem a ganhar duas vezes o prêmio é Madame Curie.

Página 30

Atividade

1. *Premissa (P)*: o triângulo ABC possui todos os lados iguais.

   Conclusão (Q): o triângulo é equilátero.

2. *Premissa (P)*: $\hat{A}$ e $\hat{B}$ são retos.

   Conclusão (Q): os ângulos são congruentes.

3. *Premissa (P)*: o sólido geométrico possui apenas faces planas.

   Conclusão (Q): é um poliedro.

4. *Premissa (P)*: um poliedro possui todas suas faces retangulares.

   Conclusão (Q): é um paralelepípedo.

5. *Premissa (P)*: um paralelepípedo possui todas as faces formadas por quadrados.

   Conclusão (Q): o paralelepípedo é um cubo.

6. *Premissa (P)*: duas retas são paralelas.

   Conclusão (Q): não possuem ponto em comum

7. *Premissa (P)*: duas retas são concorrentes.

   Conclusão (Q): possuem um único ponto em comum.

8. *Premissa (P)*: um polígono possui três lados.

   Conclusão (Q): o polígono é um triângulo.

9. *Premissa (P)*: a soma dos Ângulos internos de um polígono é $180°$.

   Conclusão (Q): é um triângulo.

10. *Premissa (P)*: um triângulo possui um ângulo reto.

    Conclusão (Q): é um triângulo retângulo.

11. *Premissa (P)*: a soma dos Ângulos internos de um polígono é $180°$.

    Conclusão (Q): é um triângulo.

12. *Premissa (P)*: um quadrilátero tem dois lados paralelos.

    Conclusão (Q): é um trapézio

13. *Premissa (P)*: $\overline{ED}$ é o segmento médio do triângulo ABC. Conclusão (Q): $\overline{ED}$ é paralelo a um dos lados do triângulo ABC.

14. *Premissa (P)*: um ângulo é agudo. Conclusão (Q): é menor que $90°$.

15. *Premissa (P)*: um ângulo é reto Conclusão (Q): é igual a $90°$.

16. *Premissa (P)*: o triângulo possui dois ângulos congruentes. Conclusão (Q): o triângulo possui dois lados congruentes.

17. *Premissa (P)*: dois lados do triângulo são congruentes. Conclusão (Q): o triângulo é isósceles.

Atividade 01

Conclusão: a medida de é maior que $60°$.

Atividade 02

Conclusão: o triângulo ABC não é equilátero.

Atividade 03

Conclusão: ABCD não é um retângulo

Atividade 04

Conclusão: o número não é divisível por 6

Atividade 05

Conclusão: não é o lado maior do triângulo ABC

Atividade 06

Conclusão: O triângulo não tem dois lados congruentes.

Atividade 07

Conclusão: Os lados consecutivos do paralelogramo não são congruentes.

Página 36

Atividade 01

1. *Premissa:* $D \in \overline{CD}$
2. *Premissa:* $C\hat{D}A \cong C\hat{D}B$
3. *Premissa:* $A\hat{C}D \cong B\hat{C}D$.
4. *Propriedade reflexiva da congruência:* $\overline{CD} \cong \overline{CD}$
5. *Conclusão:* Congruência de triângulos (ângulo-lado-ângulo): $\Delta ADC \cong \Delta BDC$.

Pelas hipóteses temos que $D \in \overline{CD}$, $C\hat{D}A \cong C\hat{D}B$ e $A\hat{C}D \cong B\hat{C}D$, observa-se também que $\overline{CD}$ é um segmento comum ao triângulo ΔADC e ΔBDC. Desta forma, por ALA, temos que $\Delta ADC \cong \Delta BDC$.

Atividade 02

1. *Premissa:* $\overline{KI} \cong \overline{KE}$

2. *Premissa:* $\overline{IT} \cong \overline{TE}$

3. *Propriedade reflexiva da congruência:*$\overline{KT} \cong \overline{KT}$

4. *Congruência de triângulos (lado-lado-lado):*$\Delta KET \cong \Delta KIT$

5. *Congruência de triângulos:* $I\hat{K}T \cong T\hat{K}E, I\hat{T}K \cong E\hat{T}K e \hat{I} \cong \hat{E}$

6. *Definição de bissetriz:*$\overline{KT}$ é bissetriz de $E\hat{K}I$ e $I\hat{T}E$

Pelas hipóteses temos que $\overline{KI} \cong \overline{KE}$ e $\overline{IT} \cong \overline{TE}$, observa-se também pela propriedade reflexiva da congruência que $\overline{KT}$ é o lado comum dos triângulos $\Delta KET \cong \Delta KIT$. Temos, portanto, por LLL que estes triângulos são congruentes.

Como os triângulos são congruentes seus ângulos também são, portanto, $I\hat{K}T \cong T\hat{K}E, I\hat{T}K \cong E\hat{T}K e \hat{I} \cong \hat{E}$.

Então, temos que $\overline{KT}$ é bissetriz dos ângulos $E\hat{K}I$ e $I\hat{T}E$.

Atividade 03

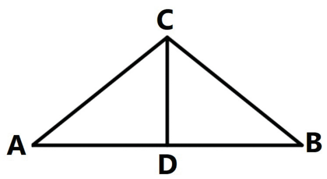


FIGURA 18 – Geogebra, própria autora.

1. *Premissa:* $\overline{AC} \cong \overline{BC}$

2. *Premissa:* $\overline{CD}$ mediana da base

3. *Definição de midiana:*$\overline{AD} \cong \overline{DB}$

4. *Propriedade reflexiva da congruência:*$\overline{CD} \cong \overline{CD}$

5. *Congruência de triângulos(lado-lado-lado):*$\Delta ACD \cong \Delta BCD$

6. *Congruência de triângulos:*$A\hat{C}D \cong B\hat{C}D, B\hat{D}C \cong A\hat{D}C e \hat{A} \cong \hat{B}$

7. *Definição de bissetriz:* $\overline{CD}$ é bissetriz de $A\hat{C}B$

Por hipótese temos que $\overline{AC} \cong \overline{BC}$ e $\overline{CD}$ a mediana da base logo $\overline{AD} \cong \overline{DB}$. Tem-se também $\overline{CD}$ o segmento comum dos triângulos ΔACD e ΔBCD. Portanto, por LLL que estes triângulos são congruentes. Como os triângulos são congruentes seus ângulos também são, portanto, $A\hat{C}D \cong B\hat{C}D, B\hat{D}C \cong A\hat{D}C$ e $\hat{A} \cong \hat{B}$. Então, temos que $\overline{CD}$ é bissetriz do ângulo $A\hat{C}B$.

Atividade 04

1. *Premissa:*M é o ponto médio de $\overline{AB}$
2. *Premissa:* M é o ponto médio de $\overline{CD}$
3. *Definição de ponto médio:*$\overline{AM} \cong \overline{MB}$
4. *Definição de ponto médio:*$\overline{CM} \cong \overline{MD}$
5. *Ângulos opostos pela vértice:*$A\hat{M}C \cong B\hat{M}D$
6. *Congruência de triângulos(lado-ângulo-lado):*$\Delta ACM \cong \Delta BDM$
7. $\overline{AC} \cong \overline{BD}$

Pela hipótese de que M é ponto médio de $\overline{AB}$ temos que $\overline{AM} \cong \overline{MB}$. Da mesma forma, temos que $\overline{CM} \cong \overline{MD}$. Observando-se a figura temos que $A\hat{M}C \cong B\hat{M}D$ por serem opostos pelo vértice. Desta forma, por LAL encontra-se a congruência dos triângulos $\Delta ACM \cong \Delta BDM$ e como são congruentes temos que $\overline{AC} \cong \overline{BD}$ conforme desejamos demonstrar.

Página 38

Separando os triângulos do pentágono temos,

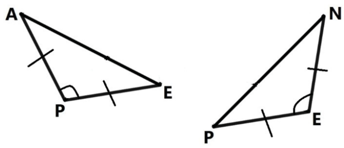


FIGURA 19 – Geogebra, própria autora.

Como o pentágono regular, temos $\overline{AP} \cong \overline{PE} \cong \overline{EN}$ e $\hat{P} \cong \hat{E}$. Desta forma temos por LAL que $\Delta PEA \cong \Delta EPN$.

Página 45

1) Suponha, por absurdo que dois ângulos de um triângulo são retos,

$\hat{A}$ = $\hat{B}$ = $90°$, sobrando o terceiro ângulo $\hat{C}$ que ainda é desconhecido.

Sabemos que a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo é $180°,$ logo,

$\hat{A}\ + \hat{B} + \hat{C} = 180°$

ou seja,

$90°$ + $90°$ + $\hat{C}$ =$180°$

Desta forma, temos:

$\hat{C}$ = $0°$

Chega-se na contradição pois para ser um triângulo é necessário que se tenha três ângulos. Portanto, nenhum triângulo possui dois ângulos retos.

2) Por absurdo, suponha que as medidas das bases de um trapézio têm mesma medida.

Sabemos também, que as bases de um trapézio são paralelas, portanto, que os outros dois lados também serão de mesma medida e paralelos e desta forma a figura será um paralelogramo e não um trapézio.

Portanto, as bases de um trapézio têm medidas diferentes.

3) A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é $360°$. Por absurdo vamos supor que a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é diferente de $360°$. Traçando a diagonal de um quadrilátero ficamos com dois triângulos e a soma dos ângulos internos de cada triângulo vale 180º. Logo, $180°$ + $180°$ = $360°$.

O que contraria a hipótese, portanto, a soma dos ângulos internos de um quadrilátero é $360°$.