

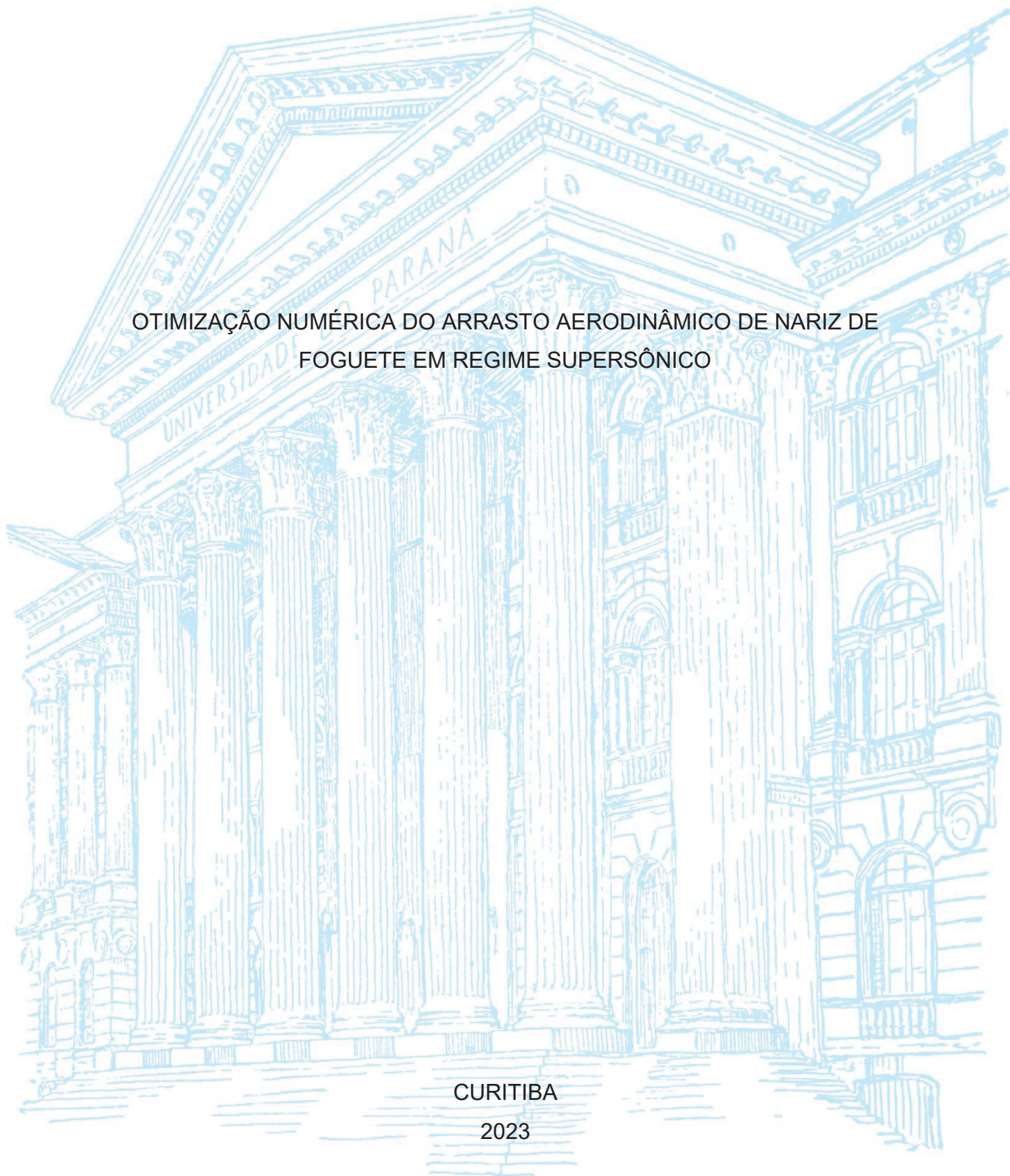
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PHILLIPE MENDES ROSA

OTIMIZAÇÃO NUMÉRICA DO ARRASTO AERODINÂMICO DE NARIZ DE
FOGUETE EM REGIME SUPERSÔNICO

CURITIBA

2023



Phillipe Mendes Rosa

OTIMIZAÇÃO NUMÉRICA DO ARRASTO AERODINÂMICO DE NARIZ DE
FOGUETE EM REGIME SUPERSÔNICO

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, área de concentração de Mecânica Computacional, Setor de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Henrique Marchi
PPGMNE / UFPR

Coorientador: Prof. Dr. Guilherme Bertoldo
DAFEM / UTFPR

CURITIBA

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ SISTEMA DE BIBLIOTECAS –
BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Rosa, Phillipe Mendes

Otimização numérica do arrasto aerodinâmico de nariz de foguete em regime supersônico / Phillipe Mendes Rosa. – Curitiba, 2023.

1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Carlos Henrique Marchi

Coorientador: Guilherme Bertoldo

1. Otimização matemática. 2. Aerodinâmica supersônica. 3. Arrasto (Aerodinâmica). 4. Foguetes (Aeronáutica). I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia. III. Marchi, Carlos Henrique. IV. Bertoldo, Guilherme. V. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **PHILLIPE MENDES ROSA** intitulada: **OTIMIZAÇÃO NUMÉRICA DO ARRASTO AERODINÂMICO DE NARIZ DE FOGUETE EM REGIME SUPERSÔNICO**, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua **APROVAÇÃO** no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 20 de Março de 2023.

Assinatura Eletrônica
21/03/2023 11:00:04.0
GUILHERME BERTOLDO
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
21/03/2023 20:56:00.0
DIOGO BERTA PITZ
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
21/03/2023 13:25:58.0
COSMO DAMIÃO SANTIAGO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO
PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
21/03/2023 16:06:01.0
ANA CRISTINA AVELAR
Avaliador Externo (INSTITUTO DE AERONÁUTICA E ESPAÇO)

AGRADECIMENTOS

Em primeiro lugar agradeço ao meu orientador, professor Carlos Henrique Marchi, por ter aceitado orientar esse trabalho e pela paciência, ajuda e apoio durante todo o processo. Sem ele esse trabalho não seria possível. Da mesma forma, agradeço também o meu coorientador, professor Guilherme Bertoldo, pela vasta ajuda na parte técnica, com dicas valiosas e suporte no uso dos programas adotados na Tese. Uma pessoa muito solícita e que atuou de forma essencial no desenvolvimento do projeto.

Agradeço aos colegas do LENA, em especial a amiga Izabel e os irmãos Dener e Giovanne Iorio. Ao pessoal de Stanford e demais pesquisadores que desenvolveram o programa SU2. Agradeço a CAPES pelo apoio financeiro, bem como o programa PPGMNE pelo suporte e a UFPR, mais uma vez, pela estadia.

RESUMO

O presente trabalho tem por fim otimizar perfis geométricos de nariz de foguete a fim de se reduzir o coeficiente de arrasto, considerando um escoamento em regimes supersônico e hipersônico, bidimensional, axissimétrico e invíscido. O fenômeno físico é modelado pelas equações de Euler. Esse sistema de equações, por sua vez, é discretizado com o Método de Volumes Finitos por meio do programa de código aberto SU2, utilizado para fins de otimizações aerodinâmicas e escoamentos externos. A otimização é feita através da biblioteca de código aberto Scipy, usando a linguagem de programação Python, que utiliza o algoritmo de programação quadrática sequencial em conjunto com o método adjunto discreto, implementado no SU2. Dentro dos regimes estipulados, os números de Mach avaliados são dados por {1,5; 2; 3; 4 e 6} e razões de aspecto 2, 3 e 4. Para traçar o perfil geométrico são utilizadas 7 e 10 variáveis de otimização. Para alcançar esse objetivo estuda-se a distribuição das variáveis de otimização e realiza-se um teste de malhas que permite verificar o funcionamento do programa e encontrar a densidade e distribuição adequada da malha, assim como a extensão do domínio computacional. Através dos perfis otimizados obtidos, são feitas análises do campo de escoamento, onde são avaliadas variáveis como massa específica, número de Mach, pressão, momento linear na direção do escoamento principal e temperatura. O comportamento da onda de choque e do perfil otimizado são avaliados com ao aumento do número de Mach e da razão de aspecto. Como resultado, os coeficientes de arrasto tiveram diferenças relativas entre 0,15% e 2,81% em relação à literatura, com redução do tempo computacional em até 98,2%. Além disso, constatou-se a presença da face plana frontal nas formas otimizadas, no início do perfil. Essa geometria surgiu naturalmente durante o processo de otimização.

Palavras-Chave: Otimização, Aerodinâmica, Nariz, Foguete, Coeficiente de Arrasto, Supersônico.

ABSTRACT

This work aims to optimize the geometric profile of a rocket nose cone to reduce its foredrag coefficient regarding a two-dimensional, axisymmetric, and inviscid flow in supersonic and hypersonic regimes. The Euler equations model the physical phenomenon. This system of equations is discretized using the Finite Volume Method and solved through the open-source software SU2, usually used in aerodynamic optimizations and external flows. The optimization is performed by an open-source library code Scipy, using Python, which utilizes the Sequential Quadratic Programming algorithm combined with the Discrete Adjoint Method implemented in SU2. The optimization was carried out for the Mach numbers {1.5; 2; 3; 4, and 6} and the aspect ratios 2, 3, and 4. The representation of the geometric profile uses 7 and 10 variables of optimization. A preliminary study was conducted to evaluate the effect of the distribution of optimization variables, the suitable mesh density and distribution of points, and the extension of the computational domain. After the optimization, some flow-field variables were evaluated, such as density, Mach number, momentum in the free-stream direction, pressure, and temperature. The behavior of the shock wave and the optimized profiles were evaluated as the Mach number and aspect ratio increased. The foredrag coefficients of the optimized geometries obtained in this work differ between 0.15% and 1.29% with respect to the literature, but with a computational time reduction of up to 98.2%. Furthermore, the frontal vertical wall in the optimized shape designs was confirmed. This geometric feature emerged naturally over the optimization process.

Keywords: Optimization, Aerodynamic, Nose, Rocket, Foredrag Coefficient, Supersonic.

LISTA DE SÍMBOLOS

	Descrição	Unidade
a	- Raio frontal	[m]
C_{Df}	- Coeficiente de arrasto frontal	[-]
C_{Df}^p	- Coeficiente de arrasto frontal devido a pressão	[-]
C_f	- Coeficiente de fricção	[-]
C_{f*}	- Coeficiente de fricção crítico	[-]
C^ϕ	- Coeficiente genérico da equação de transporte	[Várias]
c_p	- Calor específico à pressão constante	[J/kg.K]
f_r	- Razão de aspecto	[-]
g	- Nível de malha extrapolada	[-]
H	- Parâmetro de similaridade supersônico-hipersônico	[-]
h	- Razão de refino de malhas	[-]
h_1	- Comprimento do primeiro ponto de cálculo	[m]
K_f	- Parâmetro crítico	[-]
L	- Comprimento da progressão geométrica	[m]
l_r	- Comprimento do corpo de prova	[m]
M_∞	- Número de Mach de corrente livre	[-]
m	- Nível de extrapolação	[-]
N	- Fator de Nariz	[-]
n	- Expoente da lei de potência	[-]
\hat{n}	- Vetor normal unitário	[-]
P_U	- Ordens aparentes	[-]
P_V	- Ordens verdadeiras	[-]
P^ϕ	- Função genérica da equação de transporte	[Várias]
p	- Pressão	[Pa]
q	- Razão do refino de malhas	[-]
Q	- Momento linear	[kg m/s]
R_g	- Constante dos gases	[J/kg.K]
Re_∞	- Número de Reynolds de corrente livre	[-]

r_b	- Raio da base	[m]
r	- Razão da progressão geométrica	[-]
$S\phi$	- Função genérica da equação de transporte (termo fonte)	[Várias]
S	- Comprimento do arco do nariz	[m]
T	- Temperatura	[K]
\vec{u}	- Vetor velocidade	[m/s]
u_∞	- Velocidade da corrente livre	[m/s]
u	- Componente axial da velocidade	[m/s]
v	- Componente radial da velocidade	[m/s]
x_t	- Ponto de interseção de Powers	[m]

Símbolos gregos

	Descrição	Unidade
$\Gamma\phi$	- Coeficiente genérico da equação de transporte	[Várias]
γ_∞^*	- Razão de calores específicos	[-]
μ_o	- Parâmetro viscoso de Horstmann et al.	[-]
ν_c	- Variável de ordenada crítica	[-]
$\phi_{g,m}$	- Variável a ser multiextrapolada	[m]
∇	- Operador gradiente	[-]
θ	- Ângulo da inclinação local dos perfis geométricos	[m]
κ	- Condutividade térmica	[W/m.K]
μ	- Viscosidade dinâmica	[Pa.s]
ν	- Variável paramétrica de ordenada	[-]
ρ	- Massa específica	[kg/m ³]
ϕ	- Propriedade transportada	[Várias]
ϱ	- Variável paramétrica abscissa	[-]

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Escoamento sobre o nariz de um foguete.....	16
Figura 1.2 – Tipos de narizes de foguete Adaptado https://www.instructables.com/Design-a-Rocket-Nose-Cone-with-Software	17
Figura 1.3 – Coeficientes de arrasto de pressão para os perfis de nariz e números de Mach. Adaptado de Nelson & Stoney (1953), p 10.....	19
Figura 1.4 – Coeficientes de arrasto para os regimes subsônico e supersônico. Adaptado de Stine (1961).....	20
Figura 1.5 – Comparação qualitativa do arrasto para 9 perfis de nariz com razão de aspecto 3: 1 ótimo (menor arrasto), 2 bom, 3 médio, 4 regular. Adaptado de Chin (1961), p 27.....	20
Figura 2.1. – Esboço do perfil de Newton.....	24
Figura 2.2 – Formatos testados: (esquerda para direita) 3/4 de potência, AMNG, cone padrão, ogiva tangente e o novo formato de nariz. Schinetsky <i>et al.</i> (2015) p 1576.....	30
Figura 3.1 – Esboço do domínio.....	35
Figura 4.1 – Malha computacional M1 para um cone de razão de aspecto 3 e 200x100 elementos.....	48
Figura 4.2 – Campo de Mach para o escoamento sobre um cone com $f=3$, $M=2,73$ e $M4$	49
Figura 4.3 – Distribuição de pontos no perfil otimizado $M=1,5$, $f=2$ para 7 VO.....	51
Figura 4.4 – Distribuição de pontos no perfil otimizado $M=1,5$, $f=2$ para 20 VO.....	51
Figura 4.5 – Domínio computacional com o perfil de lei de potência $n=0,551$, $f=2$ e $M0$, com 200x50 elementos.....	53
Figura 4.6 – Perfil otimizado para o número de Mach 1,5, $f=2$, e $M0$, 200x50 elementos como malha inicial partindo da lei de potência com $n=0,551$	54
Figura 4.7 – Detalhe das malhas inicial e final o para $M=1,5$, $f=2$ e 7 VO na primeira otimização.....	55
Figura 4.8 – Detalhe das malhas inicial e final o para $M=1,5$, $f=2$ e 7 VO na segunda otimização.....	56
Figura 4.9 – Detalhes da malha no segundo nível de otimização para $M=2$, $f=2$	59
Figura 4.10 – Fluxograma do processo de otimização. Adaptado de Economon (2013).....	63
Figura 5.1 – Perfil ótimo para razão de aspecto $f=2$ e números de Mach simulados.....	68
Figura 5.2 – Campo do número de Mach para o perfil ótimo em $f=2$ e Mach 2.....	70

Figura 5.3 – Perfil ótimo para razão de aspecto $f=3$ e números de Mach simulados.....	72
Figura 5.4 – Campo de Mach para o perfil otimizado em $f=3$ e Mach 2.....	73
Figura 5.5 – Perfil ótimo para razão de aspecto, $f=4$, e números de Mach simulados.....	76
Figura 5.6 – Campos de Mach, pressão, momento linear em x e temperatura para os perfis ótimos nos números de Mach 2, 3, 4 e 6, respectivamente.....	78
Figura 5.7 – Gráfico dos perfis otimizados para $M=1,5$ e razões de aspecto 2, 3 e 4.....	79
Figura 5.8 – Gráfico dos perfis otimizados para $M=2$ e razões de aspecto 2, 3 e 4.....	80
Figura 5.9 – Gráfico dos perfis otimizados para $M=3$ e razões de aspecto 2, 3 e 4.....	81
Figura 5.10 – Gráfico dos perfis otimizados para $M=4$ e razões de aspecto 2, 3 e 4.....	82
Figura 5.11 – Gráfico dos perfis otimizados para $M=6$ e razões de aspecto 2, 3 e 4.....	82
Figura 5.12 – Gráfico da Pressão versus Área da seção transversal para os perfis ótimo e cônico para $f=2$ e Mach 3.....	83
Figura C.1 – Campo da massa específica para o perfil ótimo em $f=2$ e Mach 1,5.....	98
Figura C.2 – Campo de pressão para o perfil ótimo em $f=2$ e Mach 3.....	99
Figura C.3 – Campo de momento linear em x para o perfil ótimo em $f=2$ e Mach 4.....	99
Figura C.4 – Campo de temperaturas para o perfil ótimo em $f=2$ e Mach 6.....	99
Figura C.5 – Campos de massa específica, Mach, momento em x e pressão para $f=2$ e Mach 6.....	100
Figura C.6 – Campo de massa específica para o perfil otimizado em $f=3$ e Mach 1,5.....	101
Figura C.7 – Campo de pressão para o perfil ótimo de $f=3$ e Mach 3.....	101
Figura C.8 – Campo do momento linear em x para o perfil otimizado em $f=3$ e Mach 4.....	102
Figura C.9 – Campo de temperaturas para o perfil otimizado de $f=3$ e Mach 6.....	102
Figura C.10 – Campo de massa específica no perfil ótimo de razão de aspecto 3 e Mach 1,5.....	103

LISTA DE TABELAS

Tabela 1.1 – Fórmula dos perfis parabólicos, ogivas, séries de potência, elíptico e cônico.....	18
Tabela 3.1 – Propriedades termodinâmicas do fluido, variáveis do escoamento e geometria....	36
Tabela 4.1 – Coeficientes de arrasto para um cone de $f=3$ e $M=2,73$	50
Tabela 4.2 – Coeficientes de arrasto otimizados para as malhas M1, M2 e M3 com 7, 10 e 20 variáveis de otimização (VO).....	56
Tabela 4.3 – Comparativo entre distribuições de elementos para $M=1,5$ e $f=2$	58
Tabela 4.4 – Comparativo entre distribuições de elementos para $M=2$ e $f=2$	58
Tabela 4.5 – Configuração dos computadores utilizados no trabalho.....	63
Tabela 5.1 – Coeficientes de arrasto ótimos e informações sobre as simulações.....	65
Tabela 5.2 – Coeficientes de arrasto, incerteza e comparação com resultados da literatura.....	66
Tabela B.1 – Perfis ótimos para $f=2$ e números de Mach 1,5, 2, 3, 4 e 6.....	97
Tabela B.2 – Perfis ótimos para $f=3$ e números de Mach 1,5, 2, 3, 4 e 6.....	97
Tabela B.3 – Perfis ótimos para $f=4$ e números de Mach 1,5, 2, 3, 4 e 6.....	97

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CDS	<i>Central Differencing Scheme</i>
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i>
CFL	<i>Courant–Friedrichs–Lewy</i>
CTA	<i>Centro Técnico Aeroespacial</i>
DDS	<i>Downstream Differencing Scheme</i>
GCI	<i>Grid Convergence Index</i>
IAE	<i>Instituto de Aeronáutica e Espaço</i>
INPE	<i>Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais</i>
MER	<i>Multiextrapolação de Richardson</i>
MVF	<i>Método dos Volumes Finitos</i>
NACA	<i>National Advisory Committee for Aeronautics</i>
NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
PNL	<i>Programação não-Linear</i>
UDS	<i>Upstream Differencing Scheme</i>
UFPR	<i>Universidade Federal do Paraná</i>
SQP	<i>Sequential Quadratic Programming</i>
SLSQP	<i>Sequential Least-Square Quadratic Programming</i>
VO	<i>Variáveis de Otimização</i>
VS	<i>Veículo de Sondagem</i>
VLS	<i>Veículo Lançador de Satélite</i>

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Breve Histórico	15
1.2	Definição do Problema	16
1.3	Importância do Problema	17
1.4	Objetivos do Trabalho	22
1.5	Estrutura do Trabalho	23
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	24
2.1	Resultados Analíticos	24
2.2	Resultados Numéricos	27
2.3	Resultados Experimentais	32
2.4	Considerações Finais	33
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	35
3.1	Modelagem Matemática	35
3.2	Modelagem Numérica e Otimização	38
3.3	Multiextrapolação de Richardson	44
3.4	Estimador de Erro	44
4	METODOLOGIA	46
4.1	Domínio de cálculo	46
4.2	Teste do Cone	47
4.3	Variáveis de Otimização e Tamanho da Malha	50
4.4	Distribuição de elementos	57
4.5	Cálculo do CD e Incerteza	60
4.6	Considerações sobre o programa SU2 e as simulações	61
5	RESULTADOS	65
5.1	Coefficientes de arrasto ótimos	65
5.2	Perfis ótimos para a razão de aspecto 2	68
5.3	Perfis ótimos para a razão de aspecto 3	72

5.4	Perfis ótimos para a razão de aspecto 4	76
5.5	Razões de aspecto e razão do formato dos perfis ótimos	79
6	CONCLUSÃO	85
	REFERÊNCIAS	88
	Apêndice A.....	93
	Apêndice B.....	97
	Apêndice C.....	98

1 INTRODUÇÃO

1.1 Breve Histórico

O surgimento do primeiro foguete, bem como o começo do seu desenvolvimento, permanece incerto até os dias de hoje. Descrições de dispositivos semelhantes a foguetes apareceram em registros históricos de várias culturas. No primeiro século d.C., os chineses supostamente possuíam uma receita simples para produzir a pólvora, feita de salitre, enxofre e pó de carvão. Através desse recurso, os chineses enchiam tubos de bambu com pólvora e jogavam na fogueira para causar explosões, utilizados em festivais religiosos. É possível que alguns desses tubos não tenham explodido e apenas tenham sido ejetados da fogueira, impulsionados pelos gases e faíscas gerados pela pólvora. Sendo assim, os chineses começaram a testar esses tubos, amarrando-os em flechas, e lançando-os ao ar. Após esses testes, eles descobriram que os tubos poderiam ser lançados sozinhos, apenas com a energia produzida pelo escape do gás. Sendo assim, surgiria o primeiro foguete (ou protótipo de foguete), segundo Benson (2021). No livro *A História de Song* (da dinastia Song (960–1279)), atribui-se a criação do foguete a duas pessoas diferentes em tempos diferentes: Feng Zhisheng em 969 e Tang Fu em 1000. Todavia, Joseph Needham afirma que foguetes não podem ter existido antes do século XII, uma vez que as fórmulas de pólvora listadas por *Wujing Zongyao* não são adequadas para uso em propelentes de foguete (Lorge, 2005). Tempos depois, em 1232, o foguete viria a ser utilizado na batalha entre chineses e mongóis (Benson, 2021), além de outros cenários bélicos mundo afora.

A estrutura tradicional do foguete como conhecemos hoje foi desenvolvida pelo russo Konstantin Tsiolkovsky (1857-1935), que estudava a teoria cinética dos gases e construiu um túnel de vento para calcular o arrasto em formas geométricas simples. Tempos depois, o autor desenvolveu fórmulas como a da velocidade de escape da Terra e a equação básica para propulsão de foguetes (Kosmodemyansky, 2000). Por outro lado, nos Estados Unidos, Robert Goddard (1882-1945) lançou o primeiro foguete movido a gasolina e oxigênio líquido (Hunley, 1995). Seus estudos resultaram em contribuições para os alemães, que mais tarde acabaram por desenvolver o foguete V-2, utilizado para bombardear Londres na Segunda Guerra Mundial (Neufeld, 1996). Após esse período, o estudo sobre foguetes se intensificou ao redor do mundo, principalmente nos Estados Unidos e União Soviética, que protagonizaram a corrida armamentista e a busca pela conquista espacial em um período conhecido como Guerra Fria.

No Brasil, o estudo de foguetes se deu no início dos anos 60 com a abertura de diversos centros de pesquisas e órgãos competentes como Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE), Centro Técnico Aeroespacial (CTA), Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE), entre outros (Palmeiro, 2017). Dentre os projetos mais conhecidos estão os veículos de sondagem (VS) como o VSB-30, VS-40, com até dois estágios e que atingem apogeu de até 750 km, e o conhecido Veículo Lançador de Satélite (VLS) de quatro estágios que teve como objetivo colocar um satélite em órbita.

1.2 Definição do Problema

Dentro da construção e projeto de foguetes há particularidades que demandam atenção especial por parte dos desenvolvedores como, por exemplo, o estudo da trajetória, estabilidade, propulsão e aerodinâmica. Na propulsão de foguetes o motor-foguete possui uma carga propulsora cuja queima gera uma certa força de empuxo, que move o foguete. Por outro lado, a força que impulsiona o foguete é contraposta pelo arrasto causado pelo ar, presente na atmosfera. Sendo assim, a fim de se melhorar (ou otimizar) um projeto, um dos pontos a ser considerado é a redução do arrasto aerodinâmico, que leva a uma economia de combustível ou maior apogeu. A Figura 1.1 ilustra, o escoamento sobre o nariz de um foguete.

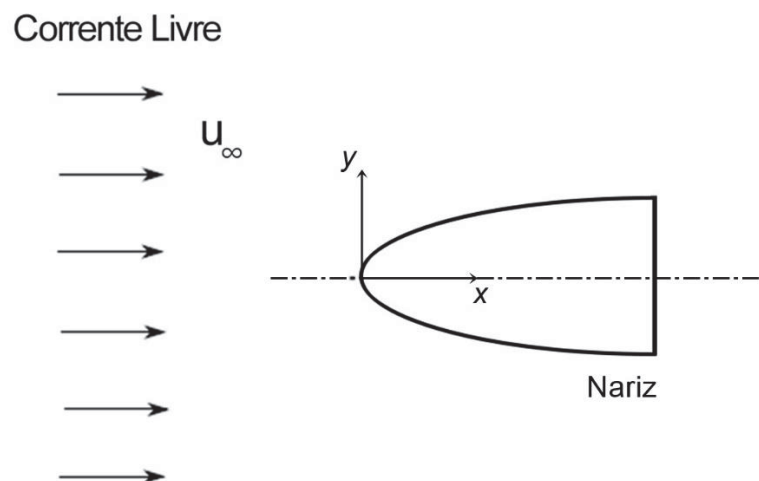


Figura 1.1 – Escoamento sobre o nariz de um foguete.

Na Figura 1.1, o coeficiente de arrasto frontal, C_{Df} , é avaliado levando em conta as forças resistentes oriundas da pressão e tensões viscosas que o fluido exerce sobre o corpo do

foguete. Para fins de melhoria de desempenho e redução de custos, é desejável que se tenha o menor coeficiente de arrasto dentre todos os formatos possíveis de nariz de foguete. Contudo, essa redução do C_{Df} não é uma tarefa simples, pois, além de depender do formato do nariz, evidentemente, também depende do regime de escoamento, dentre outras particularidades.

Sendo assim, é necessário utilizar uma ferramenta matemática que nos permita encontrar o perfil geométrico que forneça o menor coeficiente de arrasto possível, ou seja, uma função (perfil geométrico) que otimize (minimize, no caso) o C_{Df} , sujeito a algumas condições geométricas (como razão de aspecto) e de operação (como números de Mach e Reynolds), definidas *a priori*. Nesse sentido, o presente trabalho destina-se a realizar essa tarefa, dentre outros objetivos apresentados a seguir.

1.3 Importância do Problema

Como mencionado na seção anterior, uma característica que interfere diretamente no arrasto é o formato do nariz do foguete. A Figura 1.2 apresenta alguns tipos de perfis de narizes que são usualmente conhecidos na literatura.



Figura 1.2 – Tipos de narizes de foguete. Adaptado <https://www.instructables.com/Design-a-Rocket-Nose-Cone-with-Software>

O desempenho de um dado nariz de foguete, além do perfil do nariz, está atrelado ao seu regime de escoamento, ou seja, da faixa do número de Mach que o foguete vai percorrer. Nesse

sentido, esforços têm sido direcionados ao longo dos anos no intuito de mensurar através de experimentos, estudos teóricos e simulações numéricas uma base de dados que permita identificar o perfil mais adequado para cada necessidade prática. Isto é, para uma dada faixa de operação, busca-se encontrar o perfil geométrico que forneça o menor arrasto. Essa foi uma das tarefas desenvolvidas pela NACA (*National Advisory Committee for Aeronautics*), agência que precedeu a NASA (*National Aeronautics and Space Administration*).

A Tabela 1.1 apresenta as fórmulas para alguns dos perfis apresentados na Figura 1.2. O comprimento do nariz e o raio da base são representados por l_r e r_b , respectivamente.

Tabela 1.1 – Fórmula dos perfis parabólicos, ogivas, séries de potência, elíptico e cônico.

Perfil	Fórmula
Cone ($K=0$)	$y(x, K) = \left[\frac{2 \frac{x}{l_r} - K \left(\frac{x}{l_r} \right)^2}{2 - K} \right] r_b$
Parábola ($K=1$)	
Parábola 3/4 ($K=3/4$)	
Parábola 1/2 ($K=1/2$)	
Série de Potência 1/2 ($n=1/2$)	$y(x, n) = \left(\frac{x}{l_r} \right)^n r_b$
Série de Potência 3/4 ($n=3/4$)	
Ogiva LV Haack ($C = 1/3$)	$\theta(x) = \arccos \left[1 - 2 \frac{x}{l_r} \right]$ $y(\theta, C) = \frac{r_b}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\theta - \frac{\text{sen}(2\theta)}{2} + C \text{sen}^3(\theta)}$
Ogiva Von Kármán ($C = 0$)	
Ogiva Tangente ($C = 2/3$)	
Elíptico	$y(x) = r_b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{l_r} \right)^2}$

Perkins *et. al* (1952) realizaram um experimento em um túnel de vento a fim de medir o coeficiente de arrasto sobre vários perfis de narizes de foguete, variando o formato da ponta (composta por um semicírculo), e para as formas da Figura 1.2. A razão de aspecto (comprimento sobre o diâmetro da base) foi mantida como 3 em todos os casos e os números de Mach variaram de 1,24 a 7,4 com número de Reynolds variando de 1×10^6 a $7,5 \times 10^6$. Os

autores concluíram que não existe um perfil que possua o mínimo arrasto para toda faixa de números de Mach. Entre os modelos testados, o paraboloide de revolução apresenta o menor arrasto para números de Mach abaixo de 1,5. Acima desse valor, o formato hipersônico ótimo ($x^{3/4}$) é o mais apropriado. Os valores teóricos de perfil de mínimo arrasto por pressão deduzidos por Von Kármán (1935) e Haak (1946), para um dado comprimento (ou volume) e diâmetro, não possuem menor arrasto entre todas as formas testadas para os mesmos valores de parâmetros.

Nelson & Stoney (1953) utilizaram alguns dados de Perkins *et al.* (1952) para complementar a análise do arrasto por pressão sobre corpos em escoamentos com números de Mach 1,05, 1,24 e 2. A Figura 1.3 ilustra os resultados dos coeficientes de arrasto de pressão em forma de barras, para os perfis cônico, parabólico, L-V Haack, Von Kármán, hipersônico ótimo (ou $x^{3/4}$) e $x^{1/2}$, onde x representa a distância axial (ver Figura 3.1).

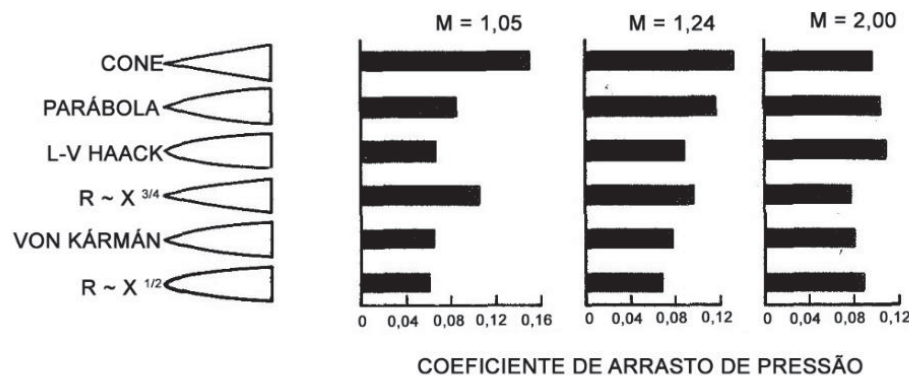


Figura 1.3 – Coeficientes arrasto de pressão para os perfis de nariz e números de Mach.

Adaptado de Nelson & Stoney (1953), p10.

Observa-se na Figura 1.3 que, em $M = 1,05$ (número de Mach), o menor valor do coeficiente de arrasto ocorre em $x^{1/2}$ (o qual tem uma ponta mais arredondada) seguido pelo perfil de Von Kármán. O mesmo padrão se verifica para $M = 1,24$. Já em $M = 2,0$, o menor valor é o hipersônico ótimo, $x^{3/4}$ (mais afastada da região transônica). Resultados semelhantes também podem ser observados em Stoney (1954) e de forma mais detalhada em Stoney (1958).

Outro exemplo de variação no coeficiente de arrasto pode ser observado na Figura 1.4, Stine (1961), que apresenta alguns perfis geométricos em regimes subsônicos e supersônicos. Nota-se que um coeficiente de arrasto próximo a 0,2 pode apresentar formatos totalmente

distintos como, por exemplo, no regime subsônico (0,2, formato retangular) e no regime supersônico (0,17, formato cônico).

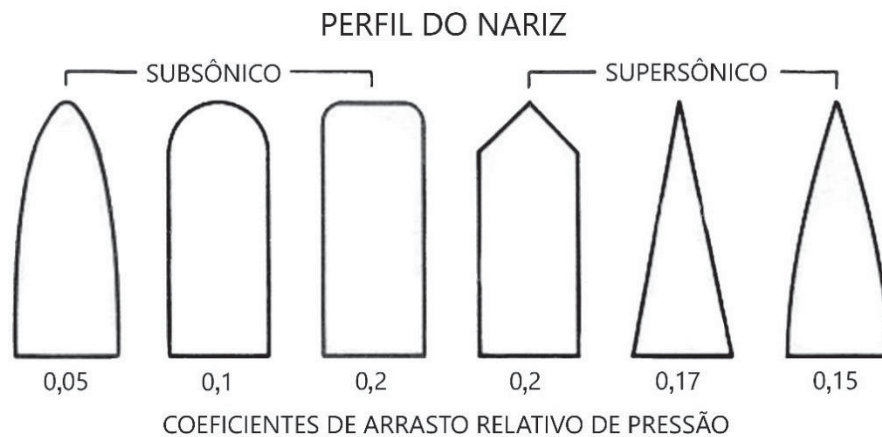


Figura 1.4 – Coeficientes de arrasto para os regimes subsônico e supersônico. Adaptado de Stine (1961).

Chin (1961) fez uma análise qualitativa dos resultados apresentados no relatório da NACA, realizado por Stoney (1958). O autor realizou uma compilação dos dados e colocou em forma de gráfico, no qual é avaliado o comportamento de nove perfis de nariz de foguete para razão de aspecto 3 e números de Mach entre 0,8 e 2. Chin classifica 1 como sendo ótimo (menor arrasto), 2 bom, 3 médio e 4 regular. O resultado é apresentado na Figura 1.5.

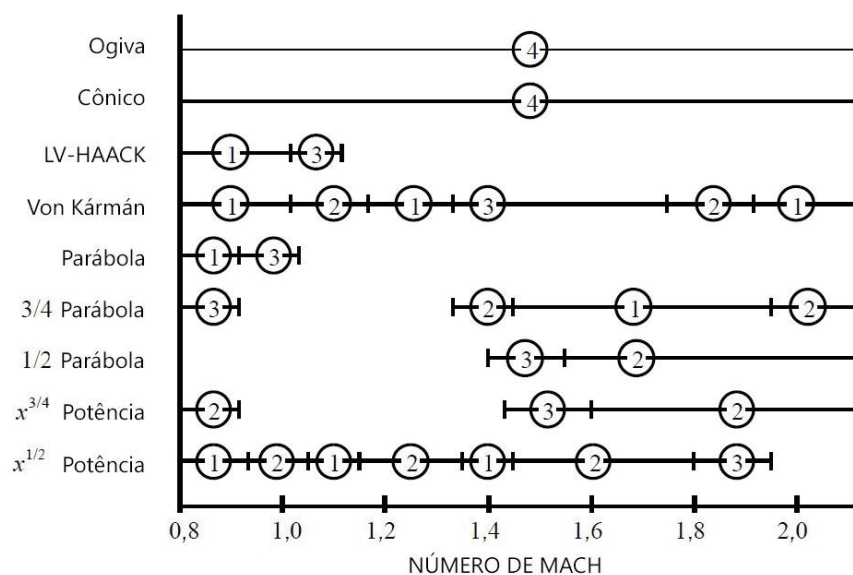


Figura 1.5 – Comparação qualitativa do arrasto para 9 perfis de nariz com razão de aspecto 3: 1 ótimo (menor arrasto), 2 bom, 3 médio, 4 regular. Adaptado de Chin (1961), p 27.

De acordo com a Figura 1.5, nota-se que o coeficiente de arrasto possui ampla variação entre as diversas geometrias e números de Mach. A geometria que melhor se destaca em toda a faixa de regime, de modo geral, é o perfil de Von Kármán. No entanto, para números de Mach próximos de 1,4; os formatos de $x^{1/2}$ e $x^{3/4}$ se sobressaem em relação aos demais. Os formatos cônico e de ogiva são os piores em toda faixa de regime.

Como pode-se perceber pelas Figuras 1.3 a 1.5, dado um determinado regime de escoamento, há uma certa dificuldade em apontar qual o perfil geométrico para o nariz de foguete que produz o menor arrasto. Em outras palavras: há um perfil ótimo? Ele se encaixa em algum dos perfis vistos anteriormente? Essas questões têm sido abordadas por diversos pesquisadores desde o século XVII, como Isaac Newton e sua Lei de Pressão, baseada em parâmetros geométricos, até os dias de hoje, com métodos modernos em dinâmica dos fluidos computacional, algoritmos avançados e a utilização de supercomputadores.

Trabalhos mais antigos, como os de Newton (1687), Von Kármán (1935), Eggers *et al.* (1956) e Zandberge (1964), resolvem de forma eficaz, através do cálculo variacional, o problema de otimização do perfil geométrico em relação ao arrasto. Contudo, esses trabalhos são baseados em modelos de escoamento mais simplificados, como é o caso da lei de pressão de Newton.

Por outro lado, trabalhos mais recentes como o de Bertoldo (2014) e Oliveira (2018), apesar de utilizarem modelos mais realistas (como é o caso das equações de Navier-Stokes e Euler, respectivamente) acabam por esbarrar em um alto custo computacional por parte do processo de otimização. Bertoldo utilizou o método de otimização baseado no algoritmo de evolução diferencial conjugado ao método das superfícies de resposta e duas variáveis de otimização para minimizar o arrasto. Oliveira, embora tenha utilizado o modelo de Euler, avançou com o processo de otimização, inserindo mais variáveis de otimização (oito, no caso) e obteve resultados próximos aos de Kraiko *et al.* (2003), ainda que com um certo custo computacional (chegando até a 380 horas).

Em termos de otimização, a redução de 1% no coeficiente de arrasto pode acarretar um acréscimo de 10% na capacidade de carga ou no apogeu, segundo Mahapatra *et al.* (2008). A redução do coeficiente de arrasto no processo de otimização do perfil geométrico do nariz de foguete pode ser feita através da inserção de mais variáveis de otimização. Contudo, ao realizar esse procedimento aumenta-se junto o custo computacional, o que pode vir a inviabilizar

determinados projetos que possuem recursos escassos ou prazos curtos. Sendo assim, nesses casos, há de se ponderar entre precisão e tempo de execução.

Nesse sentido, o presente trabalho procura oferecer uma alternativa na otimização numérica de perfis geométricos de nariz de foguete ao utilizar o programa SU2 (Economon *et al.*, 2016), que possui ferramentas que permitem, através de melhorias no processo de otimização (como, por exemplo, o método adjunto discreto e multigrid), fornecer resultados satisfatórios em tempo hábil. Em relação à parte física, o presente trabalho busca contribuir com uma melhor compreensão do comportamento geométrico dos perfis otimizados entre os casos analisados e avaliar o surgimento da face plana frontal de perfis otimizados, presentes em alguns estudos.

1.4 Objetivos do Trabalho

O objetivo do presente trabalho é utilizar técnicas de otimização para traçar o perfil ótimo do nariz de foguete a fim de se minimizar o coeficiente de arrasto. Para isso, considera-se um escoamento axissimétrico, bidimensional, invíscido, em regimes supersônico e hipersônico, com números de Mach 1,5, 2, 3, 4 e 6 e razões de aspecto (comprimento/raio da base) 2, 3 e 4. A simulação do escoamento será tratada através do programa SU2, que resolve as equações de Euler com o método de volumes finitos. O código utiliza a biblioteca Scipy, da linguagem de programação Python, Jones *et al.* (2001), para realizar o processo de otimização. Com isso, o presente trabalho pretende oferecer uma alternativa à proposta por Oliveira (2018), que utilizou 8 variáveis de otimização. Nesse projeto, pretende-se aumentar as variáveis de otimização (VO) e buscar um refinamento de malhas que possa fornecer um resultado adequado em um tempo satisfatório.

Como objetivos específicos, pretende-se:

- 1) Realizar um teste do programa SU2 através de um escoamento sobre um cone;
- 2) Desenvolver uma metodologia que permita realizar as otimizações de forma mais confiável;
- 3) Realizar testes com as variáveis de otimização para determinar quantidade e distribuição;
- 4) Executar testes de malha para determinar o refinamento adequado e a distribuição ideal de elementos;

- 5) Comparar os resultados com a solução de Oliveira (2018) e Kraiko *et al.* (2003).
- 6) Estudar o campo de escoamento para a massa específica, pressão, momento linear na direção axial, temperatura e número de Mach;
- 7) Analisar o comportamento do perfil ótimo e da onda de choque com a variação do número de Mach e da razão de aspecto;
- 8) Avaliar o surgimento da face plana frontal, apontada por alguns trabalhos;
- 9) Contribuir com a literatura através dos dados numéricos, perfis otimizados e análises sobre os perfis geométricos;

1.5 Estrutura do Trabalho

Este trabalho está dividido em seis capítulos e 3 apêndices, incluindo a Introdução. No próximo capítulo será apresentada a revisão bibliográfica com os principais trabalhos realizados no tema. Na sequência, em fundamentação, são apresentadas as modelagens matemática, numérica e de otimização, além de ferramentas como a multiextrapolação de Richardson e cálculo da incerteza numérica. No capítulo 4 é apresentada a metodologia do trabalho onde define-se os procedimentos preliminares ao processo de otimização. O capítulo 5 será destinado à apresentação e discussão dos resultados obtidos através das simulações numéricas. Por fim, no capítulo 6 são sintetizadas as conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A revisão bibliográfica dos principais trabalhos referentes à otimização do perfil geométrico do nariz do foguete está organizada em três seções de acordo com a abordagem utilizada no estudo. Trabalhos que desenvolveram soluções analíticas, são apresentados na seção 2.1. Os trabalhos referentes a resultados numéricos, determinados através de simulações computacionais, apresentados na seção 2.2. Por fim, na seção 2.3 são apresentados os trabalhos experimentais.

2.1 Resultados Analíticos

O primeiro trabalho referente à otimização do perfil geométrico foi realizado por Newton (1687). O autor resolveu o perfil geométrico de um corpo de comprimento l_r , inclinação local θ e raio de base r_b , que ao se mover em velocidade constante, gera a menor resistência devido à pressão. Embora nessa época ainda não tivessem sido desenvolvidas as equações que governam o escoamento e a dinâmica dos fluidos, o autor realizou um balanço de forças sobre um objeto para determinar o coeficiente de arrasto, conhecido como lei de pressão de Newton. Ela é dada pela relação

$$p = p_\infty + 2q_\infty \sin^2 \theta, \quad (2.1)$$

onde p_∞ e q_∞ são as pressões estática e dinâmica da corrente livre, respectivamente, e θ a inclinação do perfil geométrico. Através do cálculo variacional (técnica também desenvolvida pelo autor), Newton obteve o perfil de mínimo arrasto, o qual apresenta uma parte vertical reta de comprimento r_f , seguido por um perfil suave. A Figura 2.1 ilustra esse perfil. A lei de pressão de Newton fornece boas aproximações para escoamentos hipersônicos, no qual o número de Mach, M_∞ , é maior que 5.

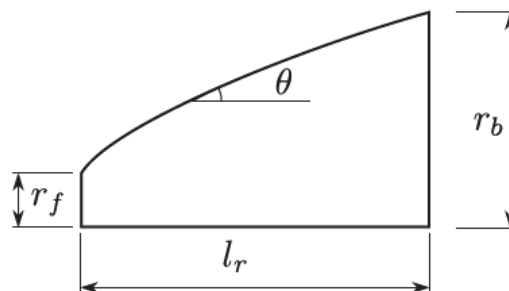


Figura 2.1 – Esboço do perfil de Newton.

Von Kármán (1935) *apud* Miele (1965) utilizou a teoria do escoamento supersônico linearizado para resolver o perfil geométrico ótimo, o qual, reduz o coeficiente de arrasto de pressão frontal, C_{Df}^p , de um corpo delgado de comprimento l_r , e raio de base, r_b , onde

$$\frac{2r_b\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{l_r} \ll 1. \quad (2.2)$$

O autor utilizou a regra de similaridade,

$$C_{Df}^p f_r^2 = C_{Df}^p f_r^2(H), \quad (2.3)$$

onde H é o parâmetro de similaridade supersônico-hipersônico, definido como sendo

$$H = \frac{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}{f_r} \quad (2.4)$$

e $f_r = l_r/2r_b$ é a razão de aspecto. Através do cálculo variacional, o autor obteve o perfil conhecido com forma da ogiva de Von Kármán, no qual o coeficiente $C_{Df}^p = f_r^{-2}$ independe do número de Mach.

Anos mais tarde, Parker (1956) resolveu o mesmo problema proposto por Von Kármán (1935), utilizando das mesmas técnicas para a solução de um escoamento supersônico. Porém, nesse caso, Parker obteve um resultado mais geral, uma vez que, desconsiderou o corpo como sendo delgado. Para obter o menor coeficiente de arrasto devido à pressão frontal, o autor considerou o perfil ótimo, $g(x)$, dependendo do raio da base e do comprimento, através da relação dada por

$$g(x) = r_b v(\varrho), \quad (2.5)$$

onde $\varrho = x/l_r$ e v é dada por uma relação implícita, obtida iterativamente. O autor constatou que o coeficiente de arrasto devido à pressão frontal, C_{Df}^p , depende do parâmetro de similaridade supersônico-hipersônico, H ,

$$C_{Df}^p = f_r^{-2}[(1 - 0,5H)(1 + 1,5H)]^{-1}, \quad (2.6)$$

ou seja, depende do número de Mach. Quando $H \rightarrow 0$, o perfil otimizado tende a ogiva de Von Kármán e o coeficiente de arrasto devido à pressão frontal tende a $C_{Df}^p = f_r^{-2}$.

No mesmo ano, Eggers *et al.* (1956) aplicaram a lei de pressão de Newton, para obter o menor arrasto. Através do método variacional, os autores chegaram aos mesmos resultados de Newton, com o perfil apresentando uma face plana na origem. No entanto, os autores

observaram que, para um corpo delgado, isto é, quando $f_r \rightarrow 0$, a forma utilizada se aproxima da lei de potência, $g(x) = r_b(x/l_r)^{3/4}$. De uma outra forma, porém ainda considerando o corpo delgado pela relação $(dg/dx)^2 \ll 1$, Miele (1965) também chegou na mesma relação da lei da potência. O coeficiente de pressão para esse caso é dado por $C_{Df}^p = 27/(64f_r^2)$.

Bryson Jr. (1965) *apud* Miele (1965) utilizou o conceito de distribuição de pressão de Newton para calcular o perfil de simetria axial que minimiza o coeficiente de arrasto frontal, C_{Df} , para uma dada razão de aspecto, f_r , considerando o coeficiente de fricção, C_f , constante. O autor constatou que os efeitos viscosos influenciam de forma qualitativa no perfil geométrico de acordo com a mudança de C_f . Para Bryson Jr.(1965) há um coeficiente de fricção crítico, dado por

$$C_{f*} = \frac{8f_r^{-3}}{(4 + f_r^{-2})^2}, \quad (2.7)$$

no qual existem três perfis: 1) Onde $0 \leq C_f < C_{f*}$ o perfil apresenta uma curva semelhante à série de potência; 2) quando $C_{f*} < C_f < 1$ o perfil apresenta uma ponta do tipo agulha, seguida por um cone e, por fim, 3) se $C_f > 1$ o perfil apresenta a forma de disco circular.

Miele e Hull (1965) *apud* Miele (1965) realizaram as mesmas aproximações de Bryson Jr. (1965). No entanto, os autores levaram em conta a hipótese do corpo delgado, $(dg/dx)^2 \ll 1$, uma vez que, para determinados casos práticos, os efeitos viscosos sobre o arrasto são da ordem do arrasto causado pela pressão. Como resultado, através de um parâmetro crítico definido como

$$K_f = f_r^3 \sqrt{2C_f}, \quad (2.8)$$

Miele e Hull constataram a existência de dois perfis geométricos distintos: 1) quando $0 < K_f < 1$, o perfil se assemelha à forma de série de potência e 2) onde $1 < K_f < \infty$, o perfil otimizado exibe um ponta de agulha seguida por um formato de cone.

Horstmann *et al.* (2002) utilizaram uma fórmula de integral de área envolvendo a lei de pressão de Newton e um parâmetro de peso μ_o , relativo às forças viscosas, para calcular a força de arrasto sobre um corpo. Este parâmetro está contido no intervalo de 0 a 1 e quando $\mu_o = 0$, recai no escoamento invíscido, com mesmos resultados de Newton. Através de um resultado feito por análise funcional, os autores encontraram um perfil geométrico otimizado que possui uma face frontal plana seguida por um arco suave. No entanto, Horstmann notou que à medida

que μ_o aumenta, ou seja, à medida em que os efeitos viscosos se intensificam, o perfil geométrico tende a ficar com uma área maior, o que difere dos resultados de Bryson Jr. (1965). Nos resultados de Bryson Jr. (1965), ao se aumentar o coeficiente de fricção, C_f , relativo aos efeitos viscosos, a área do perfil otimizado diminui.

Chernyi e Gonor (1957) consideraram a fórmula de Newton com a correção de Busemann (1933) para determinar o perfil otimizado que minimiza o arrasto devido à pressão frontal. A fim de evitar pressões negativas ao longo do perfil geométrico, os autores conjecturaram a existência de uma camada livre. Levando isso em conta, os autores perceberam que o perfil deveria ser formado por dois arcos: um arco regular no qual a pressão do fluido é positiva e um arco ao longo da camada livre, cuja pressão é nula. O perfil da camada livre é dado por $v(\varrho)$ no intervalo $v_c < v \leq 1$, onde v_c é a ordenada em que ocorre a transição do formato regular para a camada livre. Anos mais tarde, Miele (1965) utilizou a hipótese de corpo delgado, $(dg/dx)^2 \ll 1$, para provar a existência da camada livre.

2.2 Resultados Numéricos

Zandberge (1964) utilizou o método das características e o cálculo variacional para determinar o perfil ótimo de modo a minimizar o coeficiente de arrasto de pressão frontal. Para isso, o autor considerou como dados de entrada o comprimento e o raio da base, sendo que o perfil deveria assumir um formato de ponta cônica seguida de um arco suave, no qual, o ponto de intersecção fosse contínuo. Os números de Mach de corrente livre adotados pelo autor são 2, 3 e 4. Por outro lado, o autor adotou razões de aspecto distintas entre cada número de Mach, o que inviabiliza uma avaliação de C_{Df}^p sobre f_r . No entanto, para todos os números de Mach, os coeficientes de arrasto de pressão frontal diminuem com o aumento da razão de aspecto. Zandberge também analisou, para alguns casos, qual seria o comportamento do C_{Df}^p considerando um cone com as mesmas geometrias e condições. Em todas as análises, o arrasto de pressão frontal para o perfil cônico foi maior que quando considerado o caso com arco, sendo que a maior diferença foi observada para menores valores de M_∞ e f_r .

Powers (1964) realizou um estudo semelhante ao de Zandberge (1964), com a diferença que a ponta seria considerada esférica. Nesse caso, o corpo possuía uma razão de aspecto fixa, $f_r = 4$, dentro de um escoamento invíscido com $M_\infty = 7$. Da mesma forma, o autor admitiu uma continuidade no ponto de intersecção x_t . Nesse caso, tanto x_t quanto o arco deveriam ser

determinados de modo a minimizar o coeficiente de arrasto devido à pressão frontal. Para tal, Powers utilizou o método das características e um método numérico para corpos rombudos para traçar uma função multidimensional na qual o mínimo C_{Df}^p foi obtido. Como resultado, o perfil geométrico otimizado apresenta um aspecto proporcional a potência de $x^{3/4}$, aproximadamente, onde a intersecção ocorreu em $x_t = 0,00275l_r$, indicando que a esfera é pequena em relação ao corpo. O coeficiente de arrasto frontal obtido foi de $C_{Df}^p = 0,03136$.

Fink (1966) utilizou vinte e cinco pontos igualmente espaçados em x para calcular o perfil axissimétrico de modo a minimizar o coeficiente de arrasto de pressão frontal, C_{Df}^p . Utilizando uma aproximação de pequenas perturbações em um método de choque-expansão, o autor determinou C_{Df}^p em função dos valores do perfil discretizado, g_k . O mínimo foi obtido com a solução do sistema de equações $\partial C_{Df}^p / \partial g_k = 0$ para $1 \leq k \leq 25$. Assim, Fink constatou que as formas geométricas não mudam qualitativamente em relação ao número de Mach, M_∞ , nem com a razão dos calores específicos, γ^* .

Manson e Lee (1994) minimizaram o perfil geométrico baseado na lei de potência, dada por $g(x) = r_b(x/l_r)^n$, onde o n deveria ser determinado de modo a reduzir o coeficiente de arrasto devido à pressão frontal. Para isso, os autores discretizaram as equações de Euler e resolveram através do método dos volumes finitos com célula centrada e diversos valores de n entre $0,65 \leq n < 1$. Os autores notaram que o expoente n não varia muito dentro do intervalo de Mach $4 \leq M_\infty \leq 8$ e há uma variação de apenas 0,01 entre as razões de aspecto 3 e 5. Além disso, o efeito da viscosidade e do modelo termodinâmico do gás foram avaliados através das equações de Navier-Stokes parabolizadas, considerando um escoamento laminar. Embora a inserção desses modelos represente pouca influência sobre o arrasto, podem alterar o campo de temperatura com mudanças de até 600K ($M_\infty = 12$) na extremidade do nariz.

Kraiko *et al.* (2003) utilizaram o cálculo variacional para resolver as equações de Euler e otimizar o perfil geométrico de simetria axial de modo a minimizar o coeficiente de arrasto devido à pressão frontal para uma razão de aspecto prescrita e números de Mach de 1,5 a 10. Os perfis geométricos foram resolvidos de forma exata para as razões de aspecto pequenas e de modo aproximado para os demais casos. Os autores constataram um padrão no perfil geométrico já observado por Newton (1967), Eggers *et al.* (1956), Horstmann *et al.* (2002), entre outros, no qual há uma reta vertical na ponta seguida por um arco suave. Embora os resultados sejam apresentados em forma de tabela, contendo informações acerca do coeficiente de arrasto devido à pressão frontal, não há informações sobre o perfil geométrico propriamente

dito, apenas a inclinação do perfil geométrico com relação ao eixo de simetria nas extremidades, θ_f e θ_r .

Brahmachary *et al.* (2016) otimizaram o formato de um corpo de simetria axial em um escoamento invíscido, com números de Mach 2, 3, 4 e 5, utilizando um modelo híbrido de otimização aerodinâmica a fim de se reduzir o arrasto. O modelo incorpora estruturas de baixa e alta fidelidade que tem por finalidade reduzir o tempo computacional entre o chute inicial e a solução final ótima, garantindo uma função objetivo acurada. Os autores utilizaram a estrutura de baixa fidelidade para gerar a uma solução próxima à ideal como uma estimativa precisa para o coeficiente de arrasto. A solução quase ótima, por sua vez, serviu como chute inicial para a estrutura de alta fidelidade, acelerando a convergência para a solução global ótima. A estrutura de baixa fidelidade foi resolvida através da dinâmica modificada de Newton enquanto a estrutura de alta fidelidade foi resolvida através de código comercial FLUENT. A parte de otimização em ambas as estruturas foi realizada pelo método do gradiente descendente. Os autores obtiveram redução significativa no custo computacional entre o chute inicial e a solução ótima com uma redução de mais de 28% no coeficiente de arrasto. Além disso, foi verificado que o formato ótimo independe do número de Mach.

Schinetsky *et al.* (2015) utilizaram a teoria newtoniana e noções de penetração mecânica para criar um formato de nariz que gerasse o menor fator de nariz, N , onde $N = C_D/2$ e C_D representa a penetração mecânica do coeficiente de arrasto, apresentando uma relação íntegro-diferencial. Para tal, os autores criaram um método numérico para minimizar o fator N e, por conseguinte, diminuir o arrasto aerodinâmico. O formato otimizado foi comparado com quatro formatos de narizes comuns na literatura, testados em um túnel de vento em regime supersônico: 3/4 de potência, uma aproximação mínima de nariz (AMNG), ogiva tangente e cônico. Os resultados do túnel de vento mostraram que o novo formato de nariz possui a mínima penetração do coeficiente de arrasto e o menor coeficiente de arrasto aerodinâmico em toda a faixa de Mach avaliada (entre 1,85 e 3,1). Para razões de aspecto de 0,5 a 0,7, a geometria nova possui o mínimo N que, por sua vez, correspondente à mínima penetração de arrasto e possivelmente o menor arrasto aerodinâmico. A Figura 2.2 apresenta os diferentes perfis estudados, incluindo a nova geometria em questão, à direita.



Figura 2.2 – Formatos testados: (esquerda para direita) 3/4 de potência, AMNG, cone padrão, ogiva tangente e o novo formato de nariz. Schinetsky *et al.* (2015) p 1576.

Seager e Agarwal (2015) otimizaram o formato de um corpo com simetria axial de modo a minimizar o coeficiente de arrasto e o fluxo de calor máximo de um corpo em regime de escoamento hipersônico. A parte referente a otimização foi realizada através do algoritmo genético multiobjetivo. O programa comercial FLUENT foi utilizado para resolver o escoamento compressível, modelado pelas equações médias de Reynolds (RANS) em conjunto com o modelo de turbulência SST. Resultados individuais de 3 casos empregando diferentes pesos para o arrasto e o fluxo de calor como funções de ajuste foram analisados antes de combinar em uma frente ótima de Pareto. A frente ótima de Pareto demonstra que o raio da curvatura da borda dianteira da forma otimizada aumenta se o peso atribuído ao fluxo de calor aumenta. O algoritmo de otimização indica que é possível atingir tanto a redução do arrasto quanto a redução do fluxo de calor. Para favorecer a primeira opção, basta atribuir um peso maior a minimização do arrasto em relação ao fluxo de calor. Segundo os autores, esse foi o primeiro trabalho a minimizar simultaneamente o arrasto e fluxo de calor.

Bertoldo (2014) realizou um estudo numérico baseado nas equações de Navier-Stokes, para uma faixa de números de Reynolds de 1×10^3 a 1×10^7 , números de Mach 1,5; 3 e 6 e razões de aspecto 2 e 4. A intenção do autor foi investigar os efeitos viscosos sobre a forma do perfil otimizado do nariz do foguete, o qual resulta em um menor coeficiente de arrasto frontal. Para realizar tal investigação, Bertoldo utilizou o método dos volumes finitos para resolver o escoamento e calcular o arrasto. A parte de otimização se deu com base no método de otimização de forma, utilizando o algoritmo de evolução diferencial conjugado ao método das superfícies de resposta. Os perfis geométricos foram aproximados para três modelos, sendo

eles: lei de potência (1C), lei de potência com face plana (2C-S) e, por fim, lei de potência deslocada com face plana (2C-NS). Os resultados indicam que há uma redução na área superficial com o aumento dos efeitos viscosos, isto é, quando o número de Reynolds diminui para os modelos 2C-S e 2C-NS, que envolvem face plana, pode-se chegar em até 19% de redução. No entanto, há uma faixa de número de Mach no qual há pouca variação nos perfis otimizados e as equações de Euler se mostram uma boa aproximação (onde os efeitos inerciais se sobressaem aos efeitos viscosos). Em relação ao coeficiente de arrasto, há uma diferença relativa de 7,7% entre os modelos 1C e 2C-NS, e esse último, por sua vez, sofreu poucas alterações em relação ao modelo 2C-S. Os coeficientes de arrasto do modelo 2C-NS se apresentaram menores dos que os levantados por Von Kármán (1935) e Newton (1687), porém maiores (0,8% em média) que os resultados de Kraiko *et al.* (2003).

Oliveira (2018) otimizou o perfil do nariz de foguete a fim de minimizar o coeficiente de arrasto em um escoamento supersônico bidimensional com simetria axial, razões de aspecto prescritas (2, 3 e 4) e números de Mach 1,5, 3 e 6. As simulações numéricas resolveram as equações de Euler discretizadas utilizando o método dos volumes finitos. A parte referente à otimização foi realizada pelo algoritmo quase-Newton com região de confiança, valendo-se de 1, 2, 4 ou 8 variáveis de otimização ajustadas por um polinômio interpolador cúbico que possui a característica de ser monotonicamente suave e contínuo. Além disso, o autor utilizou a simulação em 3 níveis de malhas para cada geometria para usar a multiextrapolação de Richardson e, assim, reduzir a ordem do erro. Os resultados obtidos por Oliveira mostraram uma concordância no coeficiente de arrasto de até a terceira casa decimal (para 8 variáveis de otimização) com os resultados de Kraiko *et al.* (2003).

Bol'shiyanov *et al.* (2018) estudaram a influência no arrasto ao suavizar alguns perfis otimizados de narizes de simetria axial em regime supersônico através de métodos diretos de aproximação analítica. Alguns narizes apresentam “bicos” de junção entre as curvas que compõe o perfil e isso pode ser indesejável devido ao acúmulo de forças, propriedades térmicas e outras restrições. A variação no arrasto foi estudada em três casos. No primeiro, as extremidades e o meio da curva foram suavizados. No segundo caso, foi realizada uma aproximação analítica em um nariz sem restrição de forma. No terceiro, o arrasto adicional foi calculado em um nariz de perfil otimizado de lei de potência com e sem a face plana. Nos três casos, ao otimizar o contorno dessas curvas, em diferentes razões de aspecto, os autores observaram um aumento no arrasto. Além disso, a otimização do nariz na classe de funções analíticas pode levar a um arrasto adicional significativo se comparado com o perfil ótimo com

a face frontal plana. No entanto, uma suavização local nos contornos dos nós resultam em um pequeno aumento no arrasto e quanto menor for o raio de arredondamento, menor é o aumento no arrasto investigado.

Ölçmen *et al.* (2018) sugeriram uma nova geometria de nariz de projétil de calibre 0.3 que minimiza o arrasto e diminui a temperatura corporal. Os autores realizaram um estudo computacional e compararam vários escoamentos aerotérmicos supersônicos em torno da nova geometria de penetração. Essa por sua vez, foi obtida através da minimização do fator de nariz, N , com formas comuns na literatura como, por exemplo: cônica, ogiva tangente e série de potência de $3/4$. O fator de nariz depende apenas do formato geométrico do objeto e dá uma estimativa para o arrasto do nariz durante o voo ou penetração. Para um nariz de razão de aspecto $\alpha = 0,5$ (raio da base / comprimento), os autores encontraram um fator de nariz $N = 0,1607$ na nova geometria. Entre as razões de aspecto $0,5 \leq \alpha \leq 0,7$, a nova geometria possui o menor fator de forma entre as geometrias testadas. Para $\alpha = 0,5$, a nova geometria possui o menor arrasto, menor aquecimento e a menor distribuição de temperatura em todas as velocidades testadas (entre 500 e 1500 m/s). Isso garantiu uma maior penetração entre as geometrias testadas. O novo formato apresenta uma face plana pronunciada ao redor da ponta do nariz e isso leva a um rápido aumento na pressão, em torno da face. Com isso, o formato otimizado resulta em baixas pressões em torno da superfície do nariz, o que leva a uma maior capacidade de penetração.

2.3 Resultados Experimentais

Eggers *et al.* (1956) realizaram testes em túnel de vento operado com ar sobre corpos com perfil geométrico do tipo lei de potência, $g(x) = r_b(x/l_r)^n$ com o intuito de realizar uma otimização aerodinâmica. Os autores examinaram o coeficiente frontal de arrasto devido à pressão e às tensões viscosas sob números de Mach e Reynolds baseados na corrente livre de comprimento l_r . Os números de Reynolds variaram de $4,50 \times 10^5$ a $2,85 \times 10^6$ ao passo que os números de Mach variaram de 2,76 a 6,14 para a razão de aspecto 3. Para a razão de aspecto 5 a faixa de Reynolds foi um pouco maior, $7,50 \times 10^5$ a $4,75 \times 10^6$, enquanto o número de Mach se manteve semelhante. Para ambas as razões de aspecto e todos os perfis analisados (exceto para $f_r = 3$ e $n = 1/4$) o coeficiente de arrasto apresenta um decaimento seguido por um aumento à medida que o número de Mach cresce. Além disso, os coeficientes de arrasto se mostraram menores com o aumento da razão de aspecto, sendo que a maior diferença se dá para $n = 1/2$,

na ordem de 0,05 enquanto a incerteza da medida de C_{Df} é $\pm 0,005$.

Perkins *et al.* (1952) realizaram um teste para corpos com perfil geométrico seguindo a relação de lei de potência e para a ogiva de von Kármán. Para lei de potência, os autores avaliaram o expoente n com $1/4$, $1/2$, $3/4$ e 1 e razão de aspecto $f_r = 3$. A incerteza para o coeficiente de arrasto, nesse caso, foi de $\pm 0,03$. Apesar dos números de Mach (3,67 contra 3,51) e Reynolds ($3,45 \times 10^6$ contra $2,85 \times 10^6$) serem ligeiramente diferentes, os resultados de Perkin se aproximam dos resultados de Eggers *et al.* (1956) com uma diferença máxima no C_{Df} de 0,003, em $n = 3/4$. A ogiva de von Kármán apresentou menores coeficientes de arrasto em comparação com os perfis com lei de potência exceto para alguns casos como em $n = 1/2$ e $M_\infty = 1,2$ ou quando $n = 3/4$ e o número de Mach assume 3,06 ou 1,96, por exemplo. Contudo, as diferenças não ultrapassaram 11%.

Outros trabalhos encontrados na literatura em relação à otimização de narizes envolvem o artifício de acoplar um dispositivo em formato de prego na ponta do nariz a fim de tornar o campo de escoamento mais suave em torno do corpo e, assim, diminuir o arrasto. Pode-se citar Gnemmi *et al.* (2003), Ahmed e Qin (2012) e Xue *et al.* (2018), entre outros. Os três trabalhos citados contemplam tanto resultados numéricos como experimentais (embora o último autor utilize resultados experimentais de outro trabalho para realizar uma comparação). Contudo, essa abordagem pode ser eficaz em cenários onde não há preocupações quanto à estabilidade do objeto como, por exemplo, na aplicação de trens bala que correm fixos no trilho.

2.4 Considerações Finais

Em relação a otimização de nariz de foguete, os trabalhos teóricos mais antigos vistos nesse capítulo remetem às soluções obtidas através do cálculo variacional e são baseados em modelagens matemáticas simplificadas. Há uma certa dificuldade em aliar um método de otimização eficaz a uma modelagem mais realista. Nesse sentido, Bertoldo (2014) utilizou as equações de Navier-Stokes em seu trabalho, entretanto, adotou apenas duas variáveis de otimização. Oliveira (2018) conseguiu aliar um bom método de otimização, aumentando o número de variáveis de otimização (em até oito pontos) e resolvendo o escoamento através das equações de Euler. Com isso o autor obteve resultados próximos (até a terceira casa decimal do coeficiente de arrasto) aos de Kraiko *et al.* (2003), porém, em contrapartida, despendeu elevado tempo computacional (com geometrias que ultrapassaram 168 horas de simulação). O presente

trabalho busca obter os perfis geométricos ótimos em uma gama mais ampla de número de Mach e, também, aliar precisão dos resultados e tempo computacional de forma mais equilibrada.

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo é apresentada fundamentação teórica necessária para realização do presente trabalho. Inicia-se com a definição do problema, onde é introduzida uma visão geral do fenômeno físico envolvido e são apresentadas as condições de contorno e operação. A seguir é realizada uma formulação matemática onde o problema é traduzido em termos de equações. Para resolver o sistema de equações são apresentados o modelo numérico, que resolve o escoamento e calcula o coeficiente de arrasto a cada passo, e o método de otimização, que busca encontrar o perfil geométrico que entregue o menor coeficiente de arrasto, Cd . Por fim, são apresentadas as formulações necessárias para o cálculo final do coeficiente de arrasto e a computação da sua respectiva incerteza por meio de um estimador de erro.

3.1 Modelagem Matemática

A Figura 3.1 ilustra um corpo de perfil geométrico com simetria axial. Nesse caso, trata-se de um perfil de nariz de comprimento l_r , raio de base r_b .

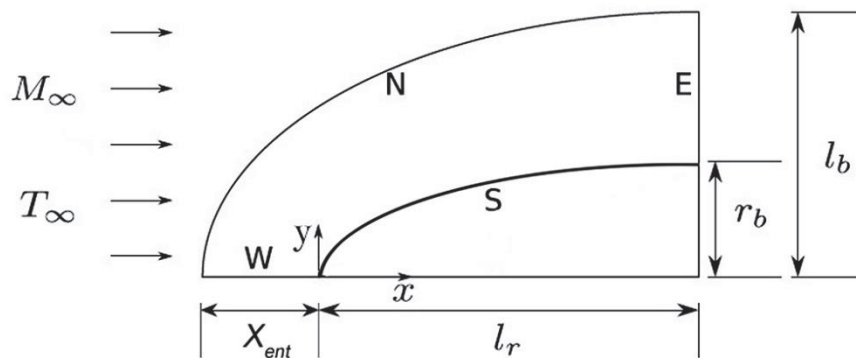


Figura 3.1 – Esboço do domínio.

O corpo da Figura 3.1 apresenta um perfil de lei de potência e é usado como aproximação inicial para o corpo a ser otimizado. Então, o objeto em questão é submetido a um escoamento bidimensional em regime permanente, axissimétrico no eixo $y = 0$, supersônico (e hipersônico para Mach 6), com parede adiabática e deslizamento na sua superfície. O domínio do problema, por onde o fluido escoar, é delimitado pelas linhas N, S, W, E, que representam os contornos norte, sul, oeste e leste, respectivamente. O corpo geométrico é representado pela curva S. O domínio e o perfil somados formam um quarto de elipse, onde a altura (semieixo) é dada por

l_b , e a largura (outro semieixo) é dada pela soma de $l_a = X_{ent} + l_r$, com X_{ent} representando a distância entre o início do domínio e a ponta do objeto. Todo o sistema está imerso em um escoamento supersônico (e hipersônico para Mach 6), determinado por um número de Mach de corrente livre, M_∞ , e temperatura de corrente livre, T_∞ .

As condições de contorno aplicadas no domínio são de temperatura, pressão e velocidade na corrente livre prescritas no contorno norte, N, simetria axial no contorno oeste, W, condição de deslizamento na superfície, no contorno sul, S, e condição de escoamento supersônico do tipo *outlet* na saída do contorno leste, E. O fluido é considerado o ar na forma padrão. Os dados de entrada referentes às propriedades termodinâmicas do fluido, geometria do domínio e variáveis de escoamento são apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Propriedades termodinâmicas do fluido, variáveis do escoamento e geometria.

Variável	Símbolo	Valor
Comprimento do perfil	l_r	2, 3 e 4 m
Raio da base do perfil	r_b	0,5 m
Número de Mach na corrente livre	M_∞	1,5, 2, 3, 4 e 6 [-]
Temperatura na corrente livre	T_∞	300 K
Razão de calores específicos na corrente livre	γ_∞	1,4
Constante do gás	R_G	$287,058 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Calor específico na corrente livre	$(c_p)_\infty$	$1004,703 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$
Pressão na corrente livre	p_∞	100000 Pa

As equações que governam a física do problema são as equações de Euler. O sistema de equações também é composto pelas equações de balanço de massa, momento linear e energia térmica. Para fechar o sistema de equações é adicionada a equação de estado dos gases perfeitos, para obtenção da temperatura, e outra equação para pressão. Sintetizando, para uma variável genérica ϕ , a equação de transporte em coordenadas cartesianas pode ser escrita na forma compacta desconsiderando a viscosidade e condutividade térmica na equação de Navier-Stokes. Embora o sistema seja apresentado em coordenadas cartesianas, o problema bidimensional axissimétrico é resolvido através de coordenadas cilíndricas por meio da inserção de componentes no termo fonte, Economon (2018). De maneira geral, a forma diferencial é dada por White (2009),

$$\mathcal{R}(\phi) = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{F}^c(\phi) - S = 0, \quad \phi \in \{\rho, \rho \bar{v}, \rho E\}^T \quad (3.1)$$

onde t representa o tempo, S é um termo fonte genérico e \bar{F}^c é o fluxo advectivo, dado por

$$\bar{F}^c = \begin{pmatrix} \rho \bar{v} \\ \rho \bar{v} \otimes \bar{v} + \bar{I} p \\ \rho E \bar{v} + p \bar{v} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Na Eq. (3.2) ρ é a massa específica do fluido, $\bar{v} = \{u, v\}^T$ é o vetor de velocidades no sistema cartesiano de coordenadas, E é a energia total por unidade de massa e p é a pressão estática. O primeiro termo representa a componente da equação da massa, seguidos pelos termos da quantidade de movimento e energia, respectivamente adaptadas para o caso do presente trabalho. O termo \otimes denota o produto externo das velocidades. Considerando que o fluido tem um comportamento de um gás perfeito, a temperatura, T , é calculada através da equação dos gases perfeitos,

$$T = \frac{p}{\rho R_G} \quad (3.3)$$

onde R_G é a constante particular dos gases perfeitos. Para fechar o sistema, a pressão é calculada através da expressão

$$p = (\gamma_\infty - 1)\rho[E - 0,5(\bar{v} \cdot \bar{v})] \quad (3.4)$$

O número de Mach da corrente livre, M_∞ , é calculado através de propriedades do fluido como, por exemplo, a razão de calores específicos, γ_∞ , e a velocidade e temperatura,

$$M_\infty = \frac{u_\infty}{\sqrt{\gamma_\infty R_g T_\infty}} \quad (3.5)$$

onde γ_∞ é dado por

$$\gamma_\infty = \frac{1}{1 - \frac{R_g}{c_{p\infty}}} \quad (3.6)$$

onde $c_{p\infty}$ é o calor específico a pressão constante na corrente livre. De acordo com a Figura 3.2, na fronteira norte, N, as condições de contorno sobre o gás são as mesmas da corrente livre, ou seja,

$$u = u_\infty; v = 0; p = p_\infty; T = T_\infty; \rho = \frac{p_\infty}{R_g T_\infty} \quad (3.7)$$

No contorno sul, S, as condições de contorno são de deslizamento com parede adiabática,

$$\hat{n} \cdot \bar{v} = 0; (\hat{n} \cdot \nabla)T = 0; (\hat{n} \cdot \nabla)p = 0 \quad (3.8)$$

onde \hat{n} é o vetor normal unitário.

A fronteira leste, E, representado pela reta vertical, a condição é a de saída (*outlet*), onde há um efeito de contrapressão, com valor prescrito. Embora a pressão possua um caráter escalar, o efeito seria equivalente ao de uma força que se opõe ao fluxo do escoamento, nesse caso

$$p = 100000 \text{ Pa} \quad (3.9)$$

A fronteira oeste, W, que está na horizontal ao longo do eixo da abcissa, é imposta a condição de simetria

$$(\hat{n} \cdot \nabla)u = 0; v = 0; (\hat{n} \cdot \nabla)T = 0; (\hat{n} \cdot \nabla)p = 0 \quad (3.10)$$

Quando o escoamento é considerado invíscido, ou seja, quando não há efeitos viscosos o objeto em questão está sujeito apenas à forças inerciais. Em outras palavras, no computo do coeficiente de arrasto, considera-se apenas os efeitos da pressão. Sendo assim, o coeficiente de arrasto frontal, C_{Df} (chamado doravante por apenas coeficiente de arrasto, C_D , por fins de simplificação), é dado por Landau e Lifshitz (1987),

$$C_D = \frac{2\pi}{q_\infty A_b} \int_0^{l_r} (p - p_\infty) y \frac{dy}{dx} dx, \quad y = g(x) \quad (3.11)$$

onde q_∞ é a pressão dinâmica e a A_b a área da base.

A próxima seção é destinada à metodologia empregada na modelagem numérica e o processo de otimização utilizado.

3.2 Modelagem Numérica e Otimização

As equações apresentadas na seção 3.1 serão discretizadas e resolvidas através do método dos volumes finitos desenvolvido por Patankar (1980), implementado no código computacional SU2, Economon *et al.* (2016). O programa possui código aberto e utiliza o MVF com uma estrutura de dados padrão baseado em arestas dentro de uma malha dupla com esquema baseado em vértices. Os fluxos viscosos e advectivos são avaliados no ponto médio das arestas no volume. O método utilizado para o cálculo do gradiente espacial é o método dos mínimos quadrados ponderado. O critério de Courant–Friedrichs–Lewy, CFL, (Courant *et al.*, 1967) é mantido como 5. Para a solução do sistema algébrico é empregado o suavizador LU_SGS e o solver FGMRES, com uma precisão de 10^{-4} .

Para a interpolação dos termos advectivos é utilizado o esquema JST e Jameson *et al.* (1981) e LAX-FRIEDRICH, desenvolvidos por Jameson *et al.* (1981) e Lax (1954), respectivamente. A discretização no tempo é dada pela formulação de Euler implícita, (Patankar, 1980). Para aceleração da convergência utiliza-se a ferramenta do multigrid com dois níveis de malha com ciclo em V (Brandt e Livne, 1984) em conjunto com o método adjunto discreto, que é capaz de fornecer informações acerca do gradiente e que podem ser utilizadas na otimização do objeto, quantificação da incerteza e a orientação no refinamento da malha adaptativa, melhorando assim o processo de otimização.

Como critério de parada, avalia-se quando o resíduo do coeficiente de arrasto atinge a ordem de 10^{-5} do valor inicial ou ocorre um resíduo mínimo total de 10^{-8} . Caso não se cumpra nenhum desses dois critérios anteriores, o programa se encerra com 5000 iterações. Para evitar problemas de oscilação na solução e parada precoce, o programa interrompe o processo a partir do momento em que a solução atinge o resíduo estipulado dentro dos últimos 100 passos. Vale salientar que esses critérios de parada são destinados à resolução do escoamento em si. Para o processo de otimização existem critérios de parada próprios. Esse assunto ficará mais bem esclarecido no próximo capítulo, quando for introduzida a metodologia do trabalho.

Embora a simulação numérica na resolução do campo de escoamento se encerre ao atingir um número máximo de iterações, esse recurso é indesejado, pois eventualmente pode ocorrer oscilações (e de fato houve alguns casos) que podem prejudicar o processo geral da otimização, levando a uma solução indesejada.

O método adjunto discreto, que auxilia no processo de otimização, é baseado em técnicas de diferenciação automática baseadas em Corliss *et al.* (2002) e Griewank e Walther (2008) e tem a sensibilidade do resíduo numérico, R , em relação a um parâmetro α , dada por Palacios *et al.* (2013),

$$\frac{dR}{d\alpha} = \frac{\partial R}{\partial U} \frac{dU}{d\alpha} + \frac{\partial R}{\partial \alpha} = 0 \quad (3.12)$$

onde α representa uma variável de otimização e é utilizada para controlar a escolha da função objetivo. U representa a solução do escoamento, dada pelas variáveis $U = (\rho, \rho u, \rho v, \rho E)^T$ com T representando o transposto. Rearranjando a Eq. (3.12),

$$\frac{dU}{d\alpha} = -\left(\frac{\partial R}{\partial U}\right)^{-1} \frac{\partial R}{\partial \alpha}. \quad (3.13)$$

De maneira similar a sensibilidade da função objetivo, J , em relação a um parâmetro α pode ser escrita como

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \frac{\partial J}{\partial U} \frac{dU}{d\alpha} + \frac{\partial J}{\partial \alpha} \quad (3.14)$$

Utilizando a relação da Eq. (3.13), a Eq. (3.14) torna-se

$$\frac{dJ}{d\alpha} = -\frac{\partial J}{\partial U} \left(\frac{\partial R}{\partial U}\right)^{-1} \frac{\partial R}{\partial \alpha} + \frac{\partial J}{\partial \alpha}. \quad (3.15)$$

Portanto, a equação adjunta é definida como,

$$\left(\frac{\partial R}{\partial U}\right)^T \psi = -\left(\frac{\partial J}{\partial U}\right)^T, \quad (3.16)$$

onde ψ são os multiplicadores de Lagrange e a variação da função objetivo pode ser escrita como

$$\frac{dJ}{d\alpha} = \psi^T \frac{\partial R}{\partial \alpha} + \frac{\partial J}{\partial \alpha}. \quad (3.17)$$

O método adjunto discreto constrói a matriz Jacobiana espelhando o método de solução do problema direto. O resíduo do escoamento é calculado primeiramente através de uma iteração em cada aresta para encontrar a contribuição *upwind* e então percorre todos os nós para adicionar as condições de contorno. Sendo assim, no esquema adjunto discreto, as contribuições dos fluxos sobre as arestas na matriz Jacobiana são primeiramente avaliadas e, em seguida, são adicionadas as contribuições dos nós de fronteira. As derivadas dos fluxos utilizados em ambas as contribuições são computadas através da diferenciação automática. Como a matriz Jacobiana possui um perfil simétrico, o sistema é resolvido de forma iterativa.

A parte referente à otimização é realizada no Python através da biblioteca Scipy, Jones *et al.* (2001). O pacote possui diversos algoritmos implementados com a finalidade de encontrar o mínimo de funções de várias variáveis. Nesse caso, o próprio programa SU2 chama essa biblioteca de otimização dentro de sua rotina, bastando apenas configurar o arquivo de entrada do programa. Um dos otimizadores presentes na biblioteca é o da programação quadrática sequencial (ou SQP, *Sequential Quadratic Programming*). A forma geral do problema a ser otimizado é dada por,

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}^n} \quad & f(x) \\ & h_j(x) = 0, j = 1, \dots, m_e \\ \text{sujeito a:} \quad & g_j(x) \geq 0, j = m_e + 1, \dots, m \\ & lb_i \leq x_i \leq ub_i, i = 1, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Na Eq. (3.18) os conjuntos contendo restrições de igualdade e desigualdade são representados pelas letras h_j e g_j , respectivamente. No caso do presente trabalho a função objetivo não linear, $f(x)$, é o coeficiente de arrasto frontal, C_D , e lb_i e ub_i representam os limites inferiores e superiores, respectivamente, no qual a solução x_i está inserida com suas N variáveis de otimização.

O método da programação quadrática sequencial resolve problemas não-lineares baseados em gradiente. A ideia do método é transformar o problema original dado pela Eq. (3.18) em um subproblema mais simples e, então, resolvê-lo com um processo iterativo. As condições de otimalidade necessárias são as mesmas utilizadas nos métodos de Newton para resolver sistema de equações não-lineares, Karush-Khun-Tucker (KKT). Nelas, o gradiente da função Lagrangeana é nulo para um ponto de solução global, $x = x^*$, e as condições sobre as restrições são dadas por,

$$\begin{aligned}
\nabla_x L(x, \lambda) &= \nabla f(x) - \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g_j(x) = 0, \\
h_j(x) &= 0, j = 1, \dots, m_e, \\
g_j(x) &\geq 0, j = m_e + 1, \dots, m, \\
\lambda_j(x) &\geq 0, j = m_e + 1, \dots, m, \\
\lambda_j(x) g_j(x) &= 0, j = m_e + 1, \dots, m.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Na Eq. (3.19), $L(x, \lambda)$ representa a função Lagrangeana e λ_j os multiplicadores de Lagrange. Para $j = 1, \dots, m_e$, $\lambda_j(x) = 0$. Nesse contexto, considerando as condições de KKT, é possível obter um subproblema quadrático (QP), aproximando a Hessiana, H , da função Lagrangeana, L , através de um método de atualização quase-Newton. A solução do subproblema QP serve para fornecer uma direção de busca unidimensional. Realizando uma aproximação quadrática da função Lagrangeana do problema da Eq. (3.18), tem-se que,

$$L(x, \mu, \lambda) = f(x) - \sum_{j=1}^{m_e} \mu_j h_j(x) - \sum_{j=1+m_e}^m \lambda_j g_j(x), \tag{3.20}$$

onde μ_j e λ_j representam os multiplicadores de Lagrange. O método SQP utiliza uma aproximação sequencial do problema de Programação Não-Linear (PNL) como um problema de programação quadrática. Em outras palavras, a função objetivo, torna-se consecutivas funções quadráticas e suas restrições ($h_j(x)$ e $g_j(x)$) em consecutivas funções lineares e, então, os problemas vão sendo resolvidos de forma iterativa (Kraft, 1988). A cada iteração o método SQP resolve o problema quadrático, QP, a seguir,

$$\begin{aligned}
\min_{d \in \mathbb{R}^n} \quad & \nabla^T f(x^k) d + \frac{1}{2} d^T H(x^k, \mu^k, \lambda^k) d \\
\text{sujeito a} \quad & h_j(x^k) + \nabla^T h_j(x^k) d = 0, j = 1, \dots, m_e \\
& g_j(x^k) + \nabla^T g_j(x^k) d \geq 0, j = m_e + 1, \dots, m
\end{aligned} \tag{3.21}$$

a fim de se determinar a melhor direção de busca, d^k , a partir de x^k e, com isso, caminhar para o próximo passo, $x^{k+1} = x^k + a_k d^k$, onde $a_k \in (0, 1]$. A função $H(x^k, \mu^k, \lambda^k)$ cumpre o papel de tentar aproximar a matriz Hessiana da função de Lagrange, e é definida por

$$H(x^k, \mu^k, \lambda^k) = \nabla_{xx}^2 L(x, \mu, \lambda). \tag{3.22}$$

A Eq. (3.22) tem por característica ser positiva definida e os termos μ^k e λ^k são os multiplicadores de Lagrange. A direção, d , do sistema QP da Eq. (3.21) é obtida através de uma limitação do problema quadrático por meio do algoritmo de otimização refletiva da região de confiança STIR proposto por Branch *et al.* (1999). O algoritmo resolve de forma iterativa os

subproblemas de região de confiança aumentados através de um termo quadrático diagonal específico e com a forma da região de confiança determinada pela distância dos limites e a direção do gradiente. Esses aprimoramentos ajudam a evitar que passos sejam direcionados aos limites e exploram com eficiência todo o espaço das variáveis. Para melhorar ainda mais a convergência, o algoritmo considera as direções de busca refletidas nos limites. Para cumprir as condições necessárias, o algoritmo mantém as iterações estritamente viáveis. Para matrizes Jacobianas densas, os subproblemas de região de confiança são resolvidos por um método exato, semelhante ao descrito em More (1977). A diferença é que essa implementação admite uma decomposição do valor singular de uma matriz Jacobiana feita uma vez por iteração ao invés de uma decomposição QR e uma série de eliminações de rotações de Givens. Para Matrizes Jacobianas grandes e esparsas, uma aproximação de subespaço 2-D é utilizada para resolver os subproblemas de região de confiança dados por Branch *et al.* (1999) e Byrd *et al.* (1988). O subespaço é estendido por um gradiente e uma solução aproximada de Gauss-Newton, implementada em uma rotina da biblioteca Scipy. Quando nenhuma restrição é imposta, o algoritmo é semelhante ao More (1977).

O tamanho do comprimento do passo, α , garante que a solução não caminhe demasiadamente rápido de modo a divergir ou atingir um valor mínimo local. Dessa forma, é imposta uma função penalidade dada por Han (1977),

$$\phi(x, \varrho) = f(x) + \sum_{j=1}^{m_e} \varrho_j h_j(x) + \sum_{j=1+m_e}^m \varrho_j |g_j(x)|_- \quad (3.23)$$

onde $|g_j(x)|_- = |\min 0, g_j(x)|$ e como função de mérito,

$$\varphi(\alpha) = \phi(x^k + \alpha d^k), \quad (3.24)$$

com x^k e d^k fixos. Isso garante que o comprimento de passo, α , assegure uma convergência global para valores de parâmetros de penalidade, ϱ_j , maiores que algum limite inferior.

Para reduzir o custo computacional, o método SQP não calcula a matriz Hessiana dada pela Eq. (3.22) a cada iteração, pois seu cálculo tem um custo computacional alto. Como alternativa, utiliza-se apenas as informações de primeira ordem para a aproximar a matriz H da função de Lagrange. A atualização é feita através do método BFGS. No caso de otimizações restritas a matriz Hessiana precisa ser positiva definida, sobretudo em uma estimativa inicial. Sendo assim, Powell (1978) sugeriu a seguinte atualização,

$$H^{k+1} = H^k + \frac{q^k (q^k)^T}{(q^k)^T s^k} - \frac{H^k s^k (s^k)^T H^k}{(s^k)^T H^k s^k}, \quad (3.25)$$

com

$$s^k = x^{k+1} - x^k = \alpha^k d^k, \quad (3.26)$$

e

$$q^k = \theta^k \eta^k + (1 - \theta^k) H^k s^k, \quad (3.27)$$

onde η^k é a diferença dos gradientes da função Lagrangeana de duas soluções consecutivas x^k e x^{k+1} ,

$$\eta^k = \nabla_x L(x^{k+1}, \mu^k, \lambda^k) - \nabla_x L(x^k, \mu^k, \lambda^k), \quad (3.28)$$

e θ^k é definido como

$$\theta^k = \begin{cases} 1, & \text{se } (s^k)^T \eta^k \geq 0, 2(s^k)^T H^k s^k, \\ \frac{0,8(s^k)^T H^k s^k}{(s^k)^T H^k s^k - (s^k)^T \eta^k}, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.29)$$

Portanto, de acordo com as equações (3.27) à (3.29), tem-se que

$$(s^k)^T q^k \geq 0, 2(s^k)^T H^k s^k, \quad (3.30)$$

e H^{K+1} é positiva definida dentro das combinações lineares definidas pelos planos tangentes das restrições ativas em x^{k+1} . Os multiplicadores μ^k e λ^k são aqueles obtidos através do subproblema quadrático, QP.

No caso do presente trabalho, é feita uma modificação proposta por Schittkowski (1981) no subproblema quadrático, QP, dado pela Eq. (3.22). O objetivo é substituir a aproximação da matriz Hessiana por uma fatoração LDL de modo a facilitar seu cálculo durante o processo de atualização, ou seja,

$$H^k = L^k D^k (L^k)^T. \quad (3.31)$$

Sendo assim, o algoritmo SQP torna-se SLSQP (*Sequential Least-Square Quadratic Programming*), e o novo subproblema quadrático é dado por

$$\begin{aligned} \min_{d \in \mathbb{R}^n} & \quad \|(D^k)^{1/2} (L^k)^T d + (D^k)^{-1/2} (L^k)^{-1} \nabla f(x^k)\| \\ \text{sujeito a} & \quad h_j(x^k) + \nabla^T h_j(x^k) d = 0, j = 1, \dots, m_e \\ & \quad g_j(x^k) + \nabla^T g_j(x^k) d \geq 0, j = m_e + 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (3.32)$$

e então é resolvido através do programa de solução de mínimos quadrados desenvolvido por Lawson e Hanson (1974). O algoritmo SLSQP, dentre os algoritmos de otimização testados na biblioteca Scipy, foi o que melhor conciliou precisão nos resultados e um baixo tempo computacional. Portanto, ele foi adotado no presente trabalho.

3.3 Multiextrapolação de Richardson

A multiextrapolação de Richardson (MER) tem por finalidade aumentar a acurácia da solução numérica através de um procedimento que utiliza soluções em diversos níveis de malha. Aplicada a uma variável genérica, ϕ , a solução extrapolada é dada por

$$\phi_{g,m} = \phi_{g,m-1} + \frac{\phi_{g,m-1} - \phi_{g-1,m-1}}{q^{P_{V_{m-1}}} - 1} \quad (3.33)$$

onde g representa o número da malha, m o número da extrapolação e q é a razão de refino. P_V são as ordens verdadeiras. No caso do presente trabalho, utilizam-se 3 malhas e dois níveis de extrapolação, onde $g = 3$, representa a malha mais fina (com mais elementos), $g = 1$, a malha mais grossa (com menos elementos) e $g = 2$, uma malha intermediária. Em relação a extrapolação, em primeiro lugar, utiliza-se a Eq. (3.33) para obter os resultados extrapolados $\phi_{3,2}$ (através das soluções nas malhas fina, $\phi_{3,1}$, e intermediária, $\phi_{2,1}$) e $\phi_{2,2}$ (solução nas malhas intermediária, $\phi_{2,1}$, e grossa, $\phi_{1,1}$). A seguir, repete-se o procedimento, utilizando as soluções $\phi_{3,2}$ e $\phi_{2,2}$ para gerar mais uma extrapolação, $\phi_{3,3}$. Nota-se que a solução $\phi_{3,3}$ é uma extrapolação da extrapolação, daí o nome de Multiextrapolação de Richardson. Esse procedimento é sucessivo e pode ser realizado de acordo com a disponibilidade de soluções obtidas em diferentes níveis de malha. As ordens aparentes, P_U , são calculadas através da fórmula

$$(P_U)_{g,m} = \frac{\log\left(\frac{\phi_{g-1,m} - \phi_{g-2,m}}{\phi_{g,m} - \phi_{g-1,m}}\right)}{\log(q)}, \quad (3.34)$$

e são utilizadas para verificar, após as simulações, se a ordem da incerteza da solução numérica tende a ordem assintótica, P_L , oriunda dos erros de truncamento, durante o processo de discretização (Marchi, 2001). O procedimento de cálculo da ordem aparente também é feita de forma sucessiva e é semelhante ao cálculo da MER. A seguir é apresentado o estimador de erro utilizado no trabalho.

3.4 Estimador de Erro

Assim como todo estudo experimental pode apresentar erros, que geralmente estão atrelados a precisão da ferramenta utilizada nas medições, as soluções numéricas também necessitam de um estimador de erro para informar a qualidade da solução numérica. Sendo assim, o presente trabalho adota o estimador de erro GCI (*Grid Convergence Index*), proposto

por Roache (1994), que é definido como:

$$U_{GCI}(\phi_1) = F_S \left| \frac{\phi_1 - \phi_2}{q^{P_L} - 1} \right| \quad (3.35)$$

onde ϕ_1 e ϕ_2 são as soluções numéricas nas malhas fina e grossa, respectivamente, e q é a razão de refino, dada por

$$q = \frac{h_2}{h_1}. \quad (3.36)$$

Na Eq. (3.36) h_2 e h_1 representam a tamanho do elemento das malhas grossa e fina, respectivamente, P_L é a ordem assintótica e F_S é um fator de segurança comumente utilizado (e adotado no presente trabalho) como sendo 3.

O próximo capítulo é destinado a metodologia do presente trabalho, onde são desenvolvidos procedimentos que têm por objetivo procurar deixar as soluções numéricas mais livre de erros. Além disso, é apresentado um procedimento para a otimização dos perfis geométricos e o cálculo do coeficiente de arrasto, juntamente com sua incerteza.

4 METODOLOGIA

Neste capítulo são apresentadas as etapas que antecedem o processo de otimização propriamente dito. Nessa etapa são realizados testes que ajudam a compreender as extensões do domínio de computação, que são necessários para que haja uma representação mais fidedigna do fenômeno físico. A seguir são apresentados alguns testes referentes a distribuição das variáveis de otimização (pontos de cálculo) e número de volumes na malha. Esse processo visa determinar, assim como a extensão do domínio, um número adequado de volumes que forneça um resultado satisfatório, sem que haja desperdício computacional ou, em outras palavras, excesso de volumes. Por fim, é apresentado o processo de otimização, seguido pelo procedimento de cálculo do coeficiente de arrasto, C_D . Nessa etapa são estabelecidos procedimentos que visam assegurar a convergência correta dos perfis ótimos e o método adotado para estimar o erro dos cálculos. A próxima seção é destinada aos procedimentos prévios ao processo de otimização, referentes ao domínio de cálculo.

4.1 Domínio de cálculo

Um domínio computacional adequado (ou desejável) é aquele que procura atender toda a extensão global do problema estudado, isto é, deve conter todas as informações pertinentes à dinâmica do escoamento sem que haja excessos no seu tamanho. Em outras palavras, qualquer problema de CFD necessita um domínio computacional no qual todos os fenômenos físicos estejam bem representados, sejam eles: recirculação, separação, ondas de choque, efeitos de camada limite, entre outros que, eventualmente, possam existir. Todavia, delimitar esses limites pode não ser uma tarefa intuitiva (ou até mesmo simples em alguns casos) principalmente em relação a “englobar tudo” e “não cometer excessos”.

Sendo assim, é desejável que o domínio contenha todas as informações do escoamento no menor espaço (ou volume, dependendo do problema) possível. Portanto, é necessário direcionar cuidados em relação ao domínio computacional para que, por um lado não haja obliteração de informações e, por outro não haja excessos. Todo desperdício implica em maior tempo computacional ou maior gasto de recursos, o que significa encarecimento nos custos do projeto. Por outro lado, a falta de informações também pode gerar resultados errados (isso se vier a chegar a algum!).

Por outro lado, não só o tamanho do domínio global em si é importante para realizar uma

boa simulação numérica. Além de todos os fenômenos físicos estarem contidos dentro do domínio computacional, eles devem estar bem descritos. Por exemplo, no estudo do escoamento viscoso sobre uma parede, o efeito de camada limite é importante em determinadas análises. Como ela costuma ser muito fina (sua espessura é pequena), há a necessidade de se ter muitos elementos nessa região para captar toda a variação de forma adequada, e isso significa mais pontos de cálculo. Mais pontos de cálculo, por sua vez, implicam em mais volumes (ou elementos) e, portanto, um maior custo computacional.

Embora pareça um trabalho metucioso e complicado, é possível determinar todos esses parâmetros geométricos (e número de elementos) de forma a conseguir viabilizar a execução das simulações de todos os casos a serem analisados. No presente trabalho, inicia-se o processo com um teste do SU2 para um caso específico de um escoamento sobre um cone, a fim de comparar o resultado com uma solução já existente na literatura. Esse é um procedimento que tem por finalidade checar se o programa está resolvendo o escoamento de forma adequada. Outro aspecto importante referente ao bom funcionamento do programa é a questão da verificação e validação. Nesse sentido, os desenvolvedores do programa utilizaram o método das soluções fabricadas para um escoamento sobre um quadrado unitário, proposto por Roy *et al.* (2004), para verificar o código para as equações de Navier-Stokes e Euler, utilizando Método dos Volumes Finitos e elementos finitos em diversos cenários, levando em consideração variados *solvers*. Detalhes podem ser vistos em Economon e Weide (2003).

4.2 Teste do Cone

Nesta seção é realizado um teste que consiste em simular um escoamento invíscido sobre um cone de razão de aspecto 3. Esse teste tem por fim comparar o resultado do coeficiente de arrasto simulado com o resultado de Taylor e Maccoll (1933). O objetivo é testar se o programa está resolvendo o escoamento de forma adequada. A Figura 4.1 apresenta um domínio computacional bidimensional e a distribuição de elementos uniforme, M1, com 200x100 elementos.

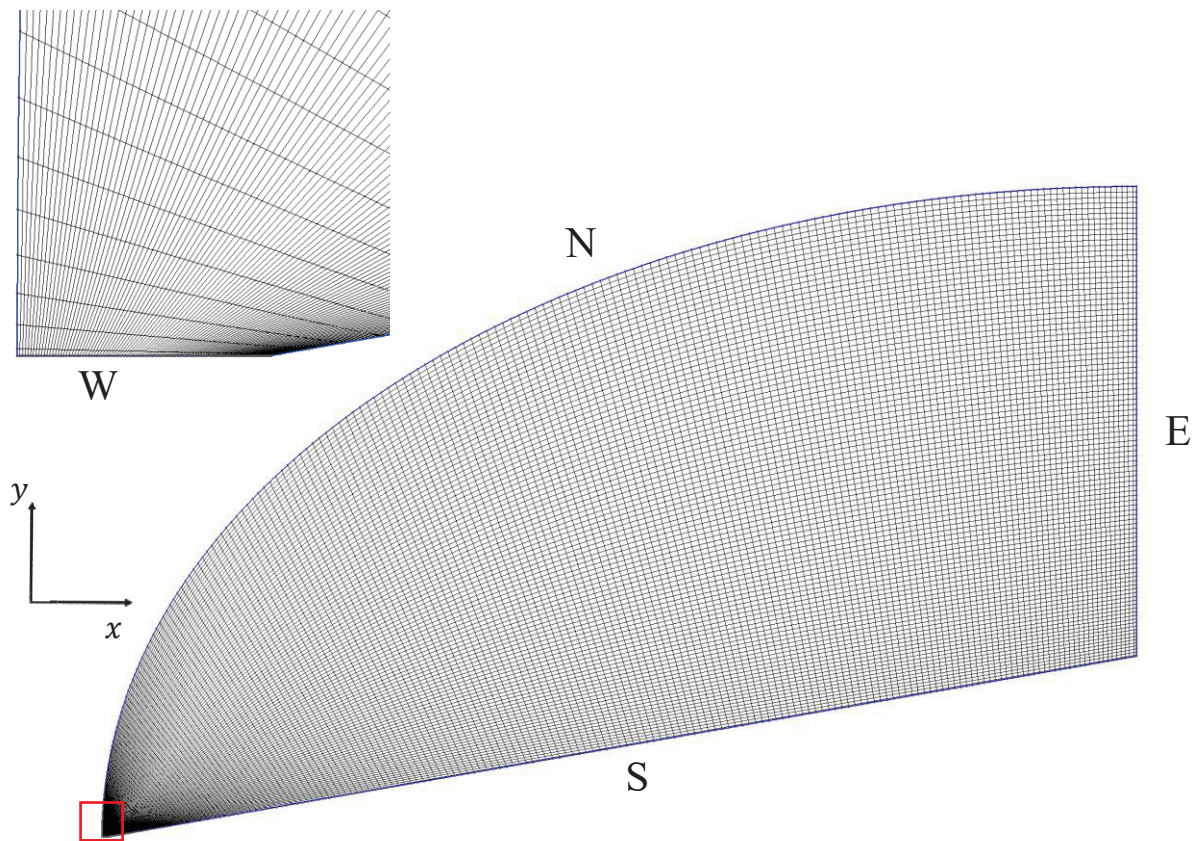


Figura 4.1 – Malha computacional M1 para um cone de razão de aspecto 3 e 200x100 elementos.

O domínio é delimitado por quatro contornos. Ao norte, a entrada representada por um quarto de elipse, indicada pela letra N. Ao sul, o cone representado pela reta S. Ao leste, a saída do domínio, denominada pela letra E. Por fim, no detalhe acima, a faixa oeste de simetria que compreende a linha horizontal demarcada pela letra W. Para esse teste foi considerado o modelo de Euler utilizando o MVF com o esquema advectivo dado pelo método JST com os esquemas de dissipação artificial de segunda e quarta ordem dado pelos coeficientes 0,4 e 0,03, respectivamente. O número de Mach testado foi $M=2,73$. Esse número de Mach é na corrente livre, M_∞ . Por motivos de simplificação, o infinito no subscrito será doravante omitido na notação. A partir da malha M1, mais três malhas foram obtidas através de sucessivos refinamentos uniformes: M2 com 400x200 elementos, M3, com 800x400 elementos e, por fim, M4 com 1600x800 elementos.

A Figura 4.2 apresenta o campo do número de Mach para esse teste, na malha M4. De acordo com Figura 4.2, o número de Mach próximo a 2,73 (que determina a condição de entrada, em corrente livre) está denotado pela faixa em azul. Essa faixa visualmente não sofre alterações (na prática, através de um programa de visualização do escoamento, esse fenômeno

também foi verificado), permanecendo com propriedades constantes. Logo abaixo, na transição entre as cores verde e azul se encontra a onda de choque. Abaixo dela, entre as cores verde e laranja, há mudança das propriedades do escoamento como velocidade, temperatura e pressão. Contudo, a onda de choque está completamente inserida no domínio de cálculo, o que indica que as informações estão sendo bem capturadas. Portanto, um domínio maior seria desnecessário e supérfluo. Por outro lado, ao reduzir o domínio não foram observadas melhoras nos resultados ou redução no tempo computacional.

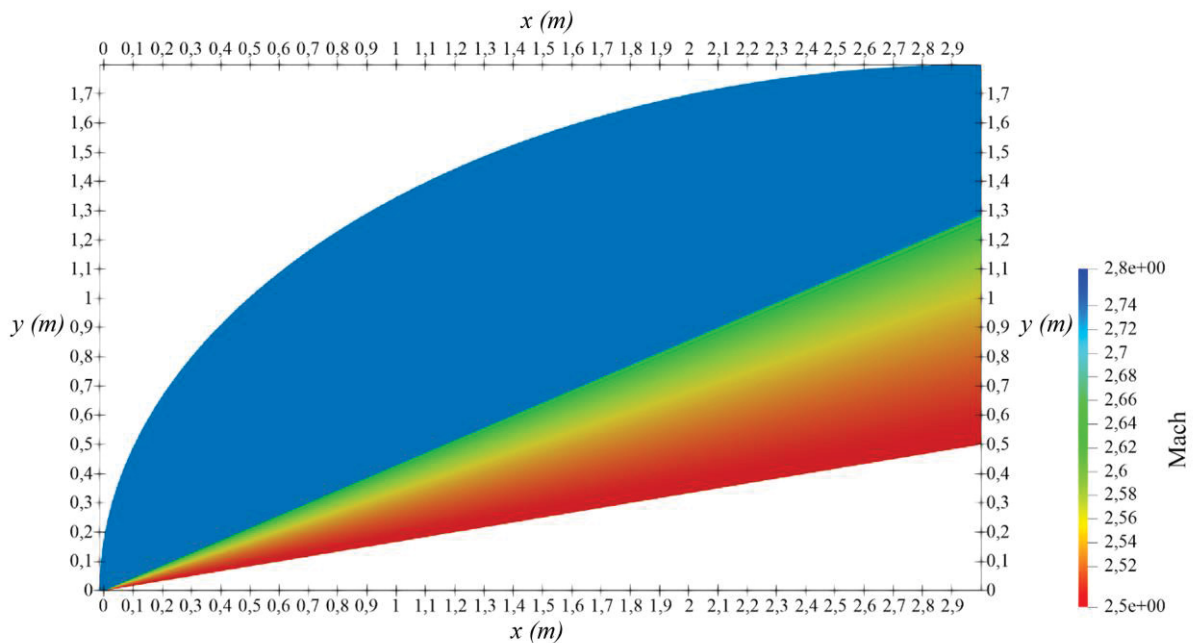


Figura 4.2 – Campo de Mach para o escoamento sobre um cone com $f=3$, $M=2,73$ e M4.

Os resultados para coeficiente de arrasto para $M=2,73$ e $f=3$ nas malhas M1, M2, M3 e M4 são apresentados na Tabela 4.1, juntamente com a diferença relativa para o coeficiente de arrasto obtido por Taylor e Maccoll (1933), $C_D=0,082881$. O estimador de erro adotado nessa análise (assim como nas análises futura) foi o estimador GCI. A escolha do estimador se deu porque a ordem assintótica, p_U , não se aproximou de 1, o que indica que a solução pode ainda estar fora do intervalo de convergência. Devido a limitação computacional (a próxima malha ultrapassa a casa dos 5 milhões de elementos), não foi possível estender a análise nesse aspecto.

Tabela 4.1 – Coeficientes de arrasto para um cone de $f=3$ e $M= 2,73$.

Malha	Elementos	C_D	Diferença Relativa (%)
M1	(200x100)	0,08286(3)	0,02
M2	(400x200)	0,08287(3)	0,007
M3	(800x400)	0,08288(1)	0,002
M4	(1600x800)	0,082880(4)	0,0002

Apesar da viabilidade computacional restringir uma análise mais profunda, percebe-se que a diferença relativa se torna pequena à medida que há o refino da malha. Ao observar a malha M4, por exemplo, nota-se que a diferença relativa percentual para a solução de referência é menor que 0,0002%. Sendo assim, pensa-se que, para o caso do presente trabalho onde pretende-se estudar o escoamento externo sobre perfis geométricos, o programa SU2 fornece resultados adequados, com estimativas de erro que chegam à ordem de $4,1 \times 10^{-6}$.

Ao realizar essa etapa, considera-se que o programa está resolvendo bem o escoamento sobre o cone. O próximo passo destina-se a determinar o número de variáveis de otimização e suas distribuições para um caso particular.

4.3 Variáveis de Otimização e Tamanho da Malha

Esta seção destina-se à análise da sensibilidade do número de variáveis de otimização, VO, e do número de elementos da malha no resultado do perfil otimizado e seu respectivo coeficiente de arrasto. Após o término dessa etapa será possível ponderar a distribuição de variáveis que forneça o melhor resultado e um tamanho de malha factível, dentro de um tempo computacional adequado à realidade.

Para essa análise foram utilizados três níveis de malhas, M1, M2 e M3 com respectivos 100x25, 200x50 e 400x100 elementos (direção axial (x) X direção radial (y)). Em relação às variáveis de otimização, testou-se também três conjuntos de variáveis: com 7, 10 e 20 VO. O número de Mach escolhido foi $M=1,5$ e a razão de aspecto, $f=2$.

Em testes prévios não foram constatadas mudanças significativas (sempre na ordem de 0,04%) nos resultados relativos à forma com que se distribui as variáveis de otimização, exceto pelo fato de ser necessário acumular mais pontos na ponta do nariz. Sendo assim, optou-se por fazer uma distribuição dos pontos em progressão geométrica tal que a distância do primeiro ponto em relação à origem, h_1 , permanecesse na ordem de 10^{-3} . Partindo desse princípio, obteve-se três progressões geométricas com razões $r=1,9$ para 7 variáveis, $r=1,75$ para 10 variáveis e $r=1,3$ para 20 variáveis.

A Figura 4.3 ilustra um perfil otimizado para $M=1,5$ e razão de aspecto, $f=2$, e a distribuição de variáveis denotadas pelos pontos em vermelho (as extremidades não contam, pois são fixas), com 7 variáveis de otimização. A Figura 4.4 apresenta o mesmo perfil, mas para 20 variáveis de otimização.

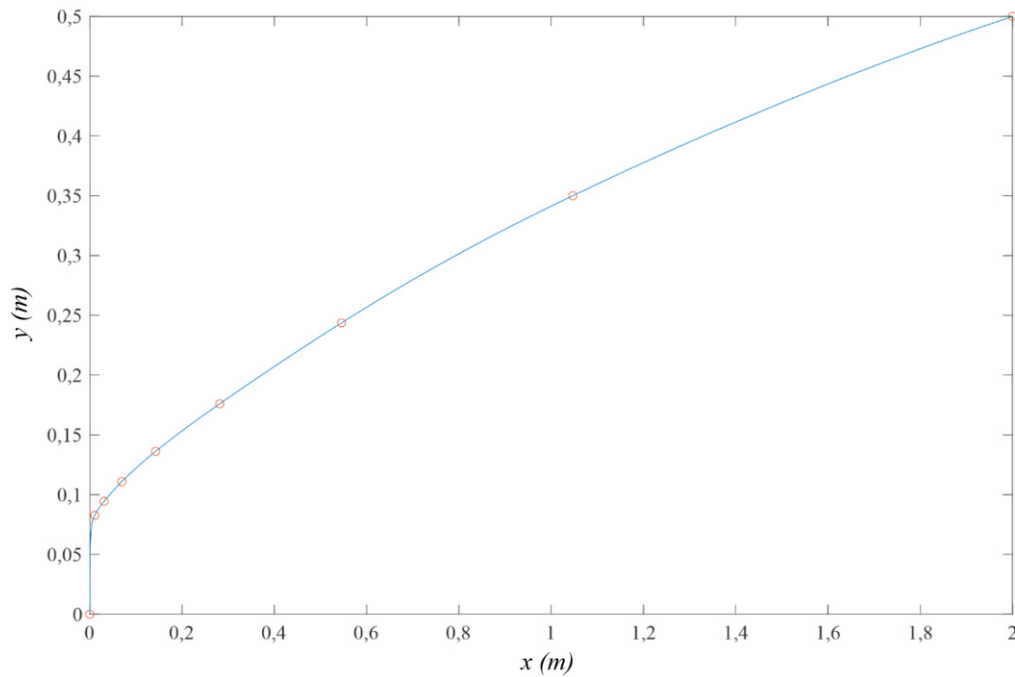


Figura 4.3 – Distribuição de pontos no perfil otimizado $M=1,5$, $f=2$ para 7 VO.

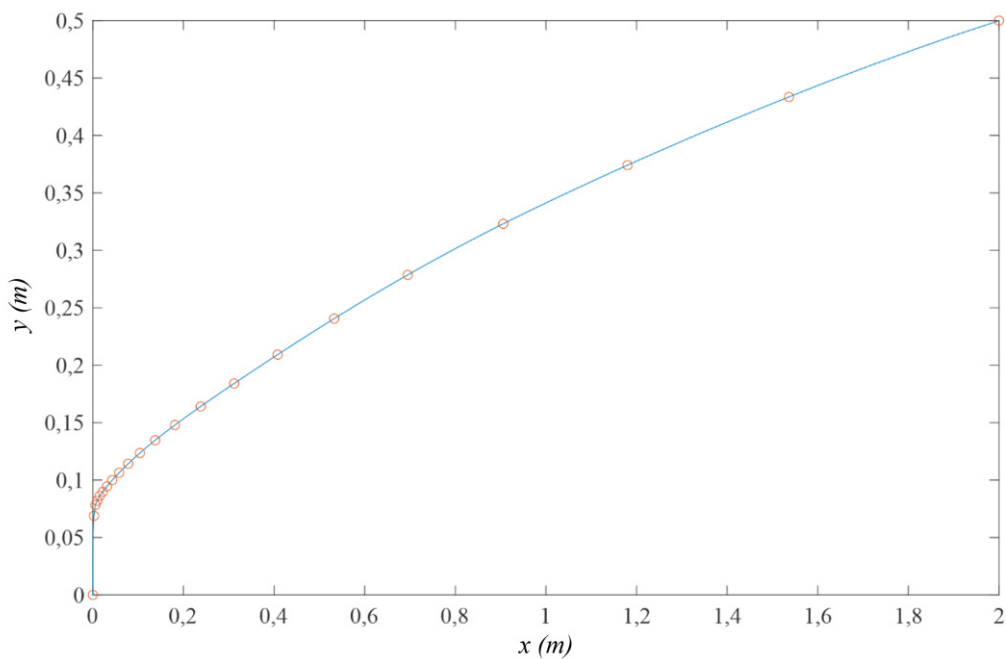


Figura 4.4 – Distribuição de pontos no perfil otimizado $M=1,5$, $f=2$ para 20 VO.

Nota-se que, devido ao perfil geométrico, em ambos os casos (Figuras 4.3 e 4.4), há um acúmulo de variáveis de otimização próximo a ponta do nariz (na origem), onde há maior necessidade de informações devido a variação abrupta do formato. Além disso, essa é uma região importante no processo de otimização pois, como é uma região de alta pressão, há uma grande influência da mesma no cômputo do coeficiente de arrasto e esse, por sua vez, depende apenas da pressão e não de efeitos viscosos (uma consequência do modelo de Euler). Essa observação ficará mais clara no próximo capítulo, onde serão apresentados os resultados com discussões mais aprofundadas.

Antes de iniciar os testes, parte-se de uma malha inicial M0 (200x50) com perfil de lei de potência com $n=0,551$ e 7 variáveis de otimização. A Figura 4.5 ilustra essa configuração. O coeficiente de arrasto para esse perfil inicial foi de $C_D=0,152759$. Após a otimização, o perfil obtido juntamente com o campo de Mach, é apresentado na Figura 4.6. Nota-se que, em comparação com o perfil inicial mostrado na Figura 4.5, o nariz já apresenta um perfil reto, com a face plana na ponta, que está de acordo com a característica dos perfis otimizados encontrados na literatura: Newton (1687) e Kraiko *et al.* (2003), por exemplo. O coeficiente de arrasto otimizado ficou em $C_D=0,146246$ (com uma diferença relativa à Kraiko *et al.* (2003) de 1,54%).

É inerente ao processo de otimizações ocorrer diversas deformações na malha, o que pode ocasionar certas distorções acentuadas em determinados elementos, levando a resultados imprecisos. A Figura 4.7 ilustra esse cenário. Acima há o detalhe da malha no perfil inicial e abaixo, a malha final, decorrente do processo de otimização. Nota-se que há uma distorção no primeiro elemento que cobre o nariz que parece “esticar” no processo. Isso gera pequenas e até grandes distorções, dependendo da distribuição de elementos na malha inicial, bem como seu respectivo tamanho. Em testes, verificou-se que quanto menor são os elementos próximos à ponta do nariz, mais acurado é o coeficiente de arrasto. Um acúmulo maior de elementos nessa região implica em uma melhor captação da dinâmica do escoamento, uma vez que nessa região há um maior gradiente de velocidades (o qual pode ser observado através do número de Mach em azul e verde na Figura 4.6) e, por consequência, maiores variações de propriedades do escoamento (como velocidade, pressão, temperatura etc.). Todavia, ao reduzir esses elementos indiscriminadamente, o primeiro eventualmente poderá “esticar” em demasia ao ponto de gerar os chamados elementos negativos ou causar oscilações que podem levar a divergência numérica. Esse é um problema que pode ocorrer (e, de fato, ocorreu com frequência nos processos de otimização).

Para ajudar a contornar esse problema (e melhorar o resultado da simulação), utiliza-se como base um perfil já previamente otimizado (aquele que começou com M0 e terminou com

o perfil otimizado final, na Figura 4.7) e confecciona-se, a partir dele, novas malhas para gerar novas otimizações. São elas: M1, M2 e M3 com respectivos 100x25, 200x50 e 400x100 elementos (direção axial (x) X direção radial (y)). Para cada malha testou-se 7, 10 e 20 variáveis de otimização, como mencionado anteriormente. A Figura 4.8 apresenta as malhas inicial e final para M2 e 7 variáveis de otimização. Em suma, o processo de otimização, é feito sempre tomando por base o resultado de uma otimização anterior. Esse procedimento de otimizações sucessivas visa corrigir os efeitos indesejados de distorções de elementos na ponta do nariz. Em certos casos, houve a necessidade de fazer até três otimizações consecutivas para chegar em um resultado satisfatório.

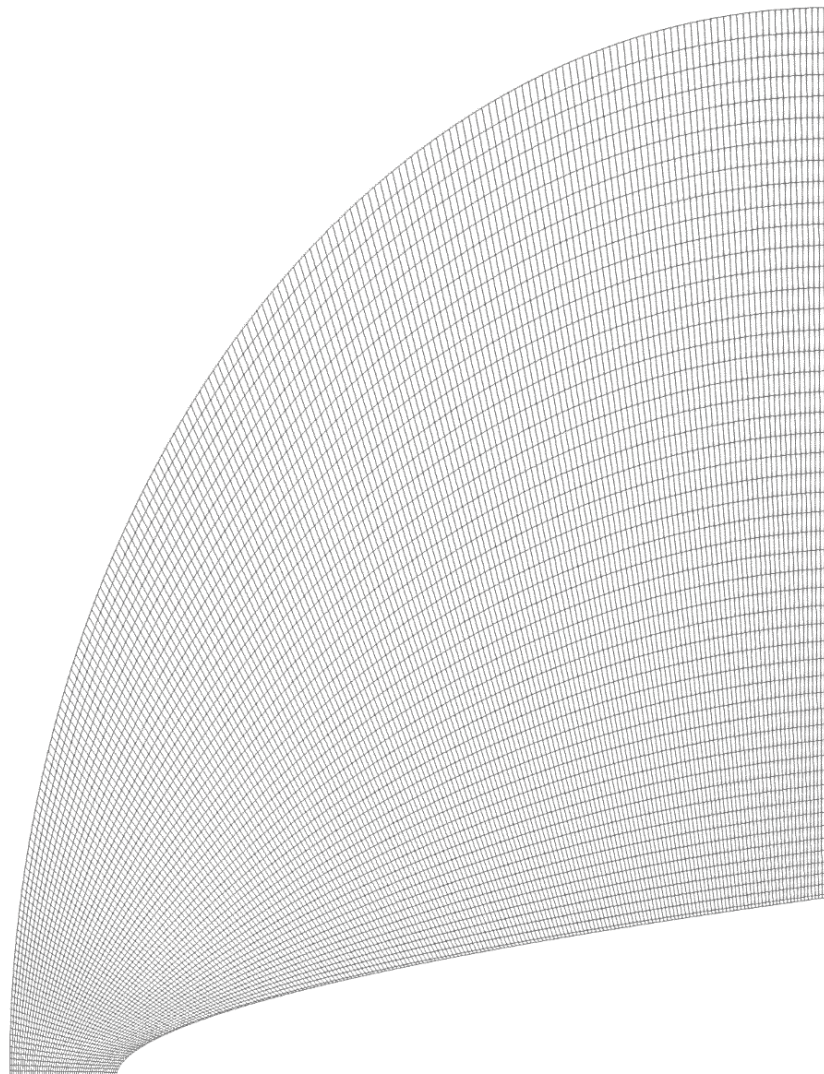


Figura 4.5 – Domínio computacional com o perfil de lei de potência $n=0,551$, $f=2$ e M0, com 200x50 elementos.

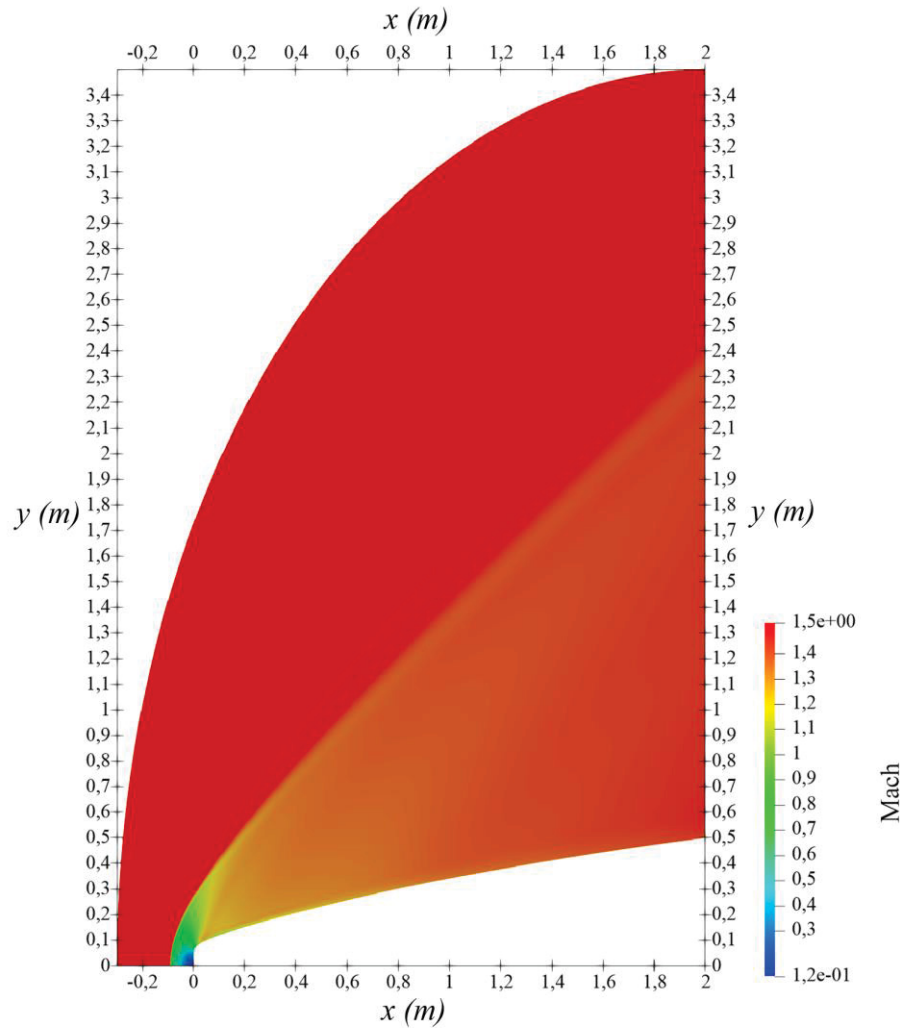


Figura 4.6 – Perfil otimizado para o número de Mach 1,5, $f=2$, e M_0 , 200x50 elementos como malha inicial partindo da lei de potência com $n=0,551$.

Pela Figura 4.8, nota-se que na malha final otimizada, abaixo, há menores distorções em relação a malha otimizada da Figura 4.7. Isso é devido ao processo de re-otimização (ou otimizações sucessivas, como mencionado anteriormente). O coeficiente de arrasto para essa configuração foi de $C_D = 0,145862$. Nota-se que a diferença para os resultados de Kraiko *et al.* (2003) cai de 1,54% (primeira otimização) para 1,27% (segunda otimização). A Tabela 4.2 apresenta os coeficientes de arrasto para as demais geometrias simuladas e informações sobre malha, elementos e tempo de computação, entre outros dados. Também é apresentada uma comparação de coeficiente de arrasto encontrado por Kraiko *et al.* (2003). A coluna da Função representa o número total de iterações no qual a função objetivo foi avaliada, ou seja, quantos escoamentos (geometrias) foram resolvidos durante o processo de otimização. A coluna do Gradiente representa o número de iteração onde houve redução do arrasto e foi necessário o

cálculo do gradiente da função objetivo.

Pela Tabela 4.2, nota-se que não há mudanças significativas quanto ao número de variáveis de otimização utilizados nas simulações. Por outro lado, é observado uma melhora no coeficiente de arrasto à medida que a malha é refinada. Malhas com mais elementos tendem a gerar coeficientes de arrasto menores, o que significa perfis geométricos melhores. A média entre todos os cenários de variáveis de otimização foi de 1,31% para malha M1 enquanto para malha M3 foi de 1,07%. Isso significa uma melhora de 18,3%, o que ressalta a importância da quantidade apropriada de elementos na malha.

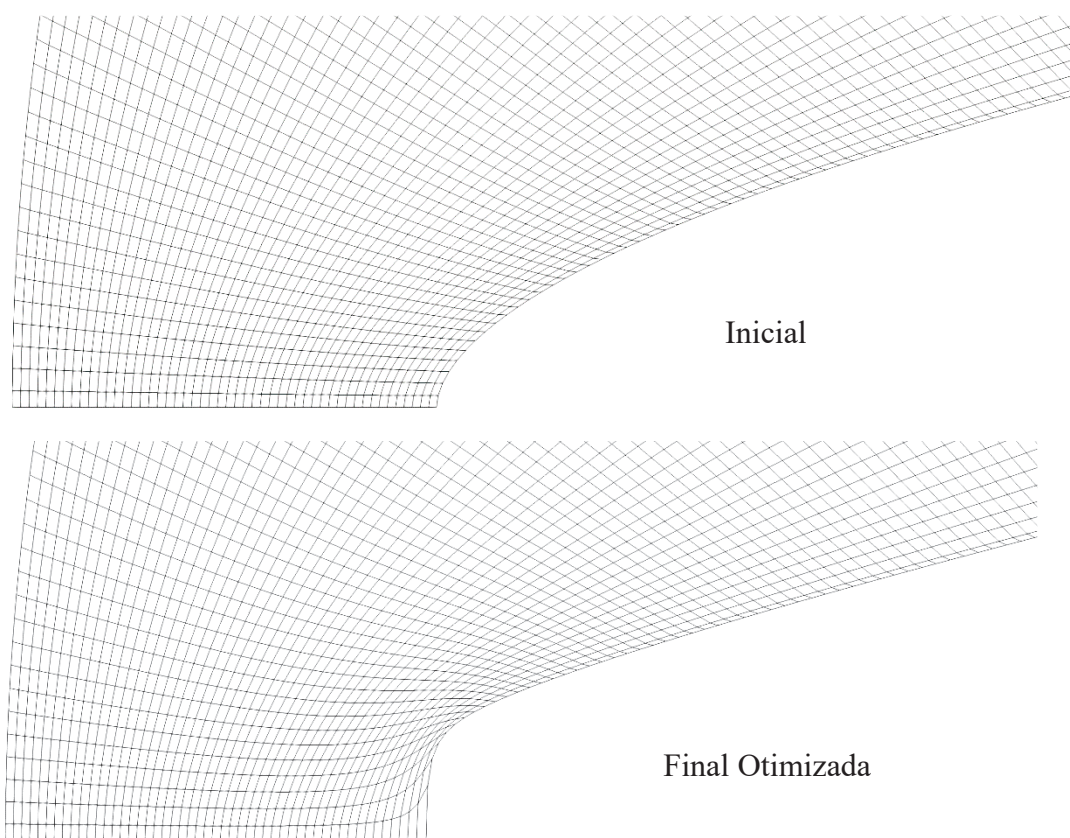


Figura 4.7 – Detalhe das malhas inicial e final o para $M=1,5$, $f=2$ e 7 VO na primeira otimização.

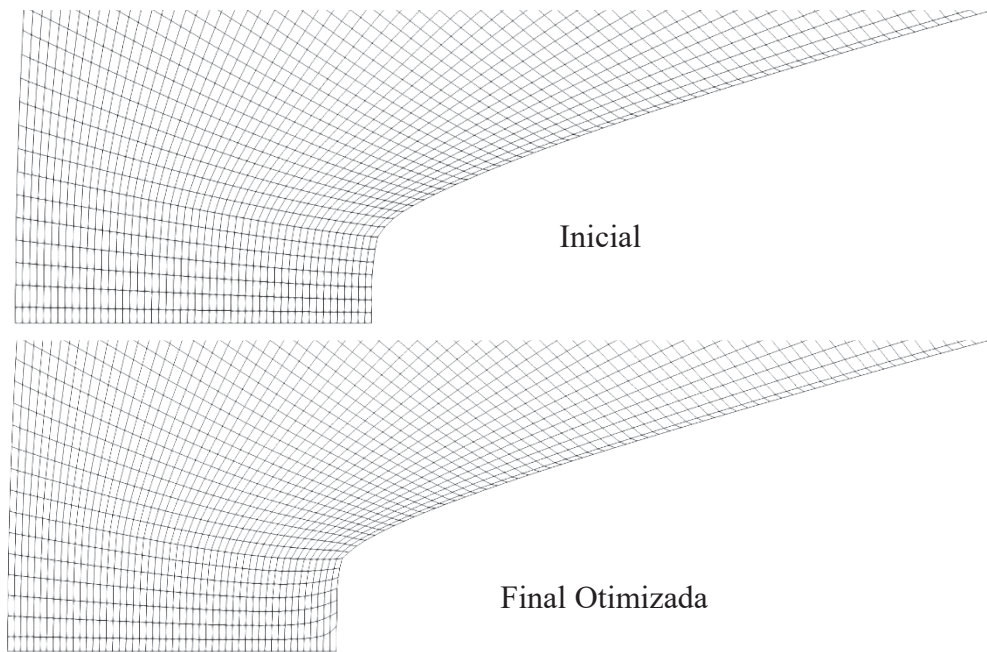


Figura 4.8 – Detalhe das malhas inicial e final para $M=1,5$, $f=2$ e 7 VO na segunda otimização.

Tabela 4.2 – Coeficientes de arrasto otimizados para as malhas M1, M2 e M3 com 7, 10 e 20 variáveis de otimização (VO).

VO	Malha	Elementos	Distribuição	Função	Gradiente	C_D	Tempo (hh:mm:ss)	Diferença Kraiko <i>et al.</i> (%)
7	M1	2500	100 x 25	75	33	0,14590636	00:13:54	1,31
	M2	10000	200 x 50	132	53	0,14586223	00:28:54	1,28
	M3	40000	400 x 100	73	53	0,14558524	01:58:34	1,09
10	M1	2500	100 x 25	32	15	0,14592876	00:04:48	1,32
	M2	10000	200 x 50	51	33	0,14583234	00:14:01	1,26
	M3	40000	400 x 100	48	35	0,14555507	01:19:59	1,07
20	M1	2500	100 x 25	101	45	0,14591040	00:26:15	1,31
	M2	10000	200 x 50	90	51	0,14581262	00:22:28	1,24
	M3	40000	400 x 100	60	43	0,14554400	01:30:21	1,06

Ainda em relação a Tabela 4.2, percebe-se que o tempo computacional aumenta à medida que aumentam os elementos da malha. Isso já era esperado pois, quanto mais elementos, mais cálculos são necessários tanto no processo de otimização quanto no processo de solução do escoamento (cálculo do C_D). Contudo, embora ocorra esse aumento, ainda assim, o pior cenário fica abaixo de 2 horas de otimização, observado até mesmo nas malhas M3. Mesmo tendo que realizar dois (ou em alguns casos, três) procedimentos de otimização para cada caso a ser analisado, ainda assim permanece como uma boa alternativa para obtenção de perfis otimizados. Resultados semelhantes, como os de Oliveira (2018) por exemplo, levaram em torno de 262 horas para serem concluídos (se levar em conta malhas de mesma ordem e 8 VO).

Nos demais casos, as malhas escolhidas para as otimizações variaram de 400x200 a 600x200 elementos e o tempo computacional para a otimização não ultrapassou 4 horas por etapa, ficando com média de 3 horas. Testes extras foram realizados para malhas da ordem de 800x400 elementos. Todavia, não foram observadas melhoras nos perfis geométricos. Em alguns casos houve até piora, divergência e problemas no processo de otimização. Sendo assim, o processo de otimização total médio (considerando o processo de re-otimização) adotado ficou na ordem de 7 a 8 horas desde o começo até o final do processo (incluindo o cálculo da incerteza que será discutido na próxima seção). Como não houve melhoras significativas em relação ao aumento das variáveis de otimização, optou-se por padrão utilizar 10 variáveis. Em alguns casos específicos, por motivos de convergência, utilizou-se 7 variáveis.

Nessa seção foram realizadas análises que possibilitaram escolher a distribuição de variáveis e o número de elementos da malha. Além disso, foi possível identificar, de forma prévia, regiões importantes do escoamento e aspectos que possibilitaram contemplar melhor a escolha dos parâmetros adotados do trabalho, equilibrando o tempo computacional e a economia de recursos. Na próxima seção será analisada a influência da distribuição de elementos no processo de otimização.

4.4 Distribuição de elementos.

Nessa seção será realizada uma análise sobre a distribuição de elementos na malha e a influência no cálculo do coeficiente de arrasto. Serão feitos dois testes comparativos, ambos para $f=2$. Um para Mach 1,5, onde será comparado uma distribuição uniforme nas duas direções (Uniforme 2-d) e outra com uma distribuição não uniforme nas duas direções (não uniforme 2-d). Outro caso analisado será para Mach 2, onde serão comparadas as soluções para uma distribuição uniforme nas duas direções contra uma solução uniforme em apenas uma direção (radial, no caso, denominada Uniforme 1-d).

O primeiro caso analisado é o de Mach 1,5 onde há uma distribuição de 400x200 elementos. O nível de otimização é referente ao primeiro processo (chamado “Primeira”) e ao segundo processo (chamado “Segunda”), que tem por base o perfil resultante da Primeira otimização. Uma otimização adicional, denominada “Terceira”, (que, por sua vez, tem como base o perfil otimizado gerado pela Segunda otimização) foi realizada para distribuição uniforme nas duas direções, com uma malha de 800x400 elementos. Os resultados são apresentados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Comparativo entre distribuições de elementos para $M=1,5$ e $f=2$.

Distribuição	Unifome 2-d			Não uniforme 2-d	
	400x200	400x200	800x400	400x200	400x200
Elementos	400x200	400x200	800x400	400x200	400x200
Otimização	Primeira	Segunda	Terceira	Primeira	Segunda
C_D	0,145395	0,145254	0,145258	0,145581	0,145316
Kraiko <i>et al.</i>	0,144	0,144	0,144	0,144	0,144
Diferença (%)	0,959463	0,863551	0,8660753	1,085809	0,905749

De acordo com a Tabela 4.3, há uma menor diferença relativa (em relação aos resultados de Kraiko *et al.* (2003)) por parte da distribuição uniforme de elementos nas duas direções, tanto na primeira quanto para segunda otimização se comparado com a distribuição não uniforme. Embora não apresente um ganho significativo, há uma diferença relativa de 4,66% a favor da distribuição Unifome 2-d se comparado com a não uniforme para a Segunda otimização. Nota-se que, ao realizar uma terceira otimização na distribuição Unifome 2-d (com 800x400 elementos) há um ligeiro aumento na diferença relativa. Isso corrobora com testes prévios onde malhas com muitos elementos levaram a resultados similares a malhas com menos elementos, como apontado na seção anterior.

Os resultados do próximo teste, referentes à distribuição Unifome 1-d (direção radial), realizados para $M=2$ e $f=2$, são apresentados na Tabela 4.4. Da mesma forma, os resultados são comparados com o $C_D=0,136$, obtido por Kraiko *et al.* (2003). Nesse teste os resultados diferem do teste anterior (Tabela 4.3). O refino uniforme em apenas uma direção (escolhida como sendo a radial), ou seja, com distribuição não uniforme na direção axial, reflete em um perfil com menor diferença relativa do coeficiente de arrasto se comparado com a distribuição uniforme nas duas direções, para ambos os níveis de otimização.

Tabela 4.4 – Comparativo entre distribuições de elementos para $M=2$ e $f=2$.

Distribuição	Unifome 2-d		Unifome 1-d (radial)	
	400x200	400x200	400x200	400x200
Elementos	400x200	400x200	400x200	400x200
Otimização	Primeira	Segunda	Primeira	Segunda
C_D	0,1375551	0,1371793	0,1374090	0,1371113
Kraiko <i>et al.</i>	0,136	0,136	0,136	0,136
Diferença (%)	1,1305388	0,8596540	1,0254059	0,8105094

A Figura 4.9 apresenta o detalhe da malha referente a segunda otimização do teste da Tabela 4.4. Acima, a distribuição Unifome 1-d, com elementos que quase não apresentam distorção. Nota-se que, devido ao fato de a malha possuir uma distribuição não uniforme na direção axial (que compreende a superfície do cone e inclui a parte vertical frontal), há um

maior acúmulo de elementos na ponta (base) do bico. Além disso, quase não há distorção dos elementos. Por outro lado, abaixo, na distribuição Uniforme 2-d (Figura 4.9) ocorrem distorções dos primeiros elementos localizados na ponta/base do bico. Isso sugere que, eventualmente, pode haver má descrição dos fenômenos nessa importante região (como já visto anteriormente). Em outras palavras, pode haver uma falta de informações (elementos) nessa região.

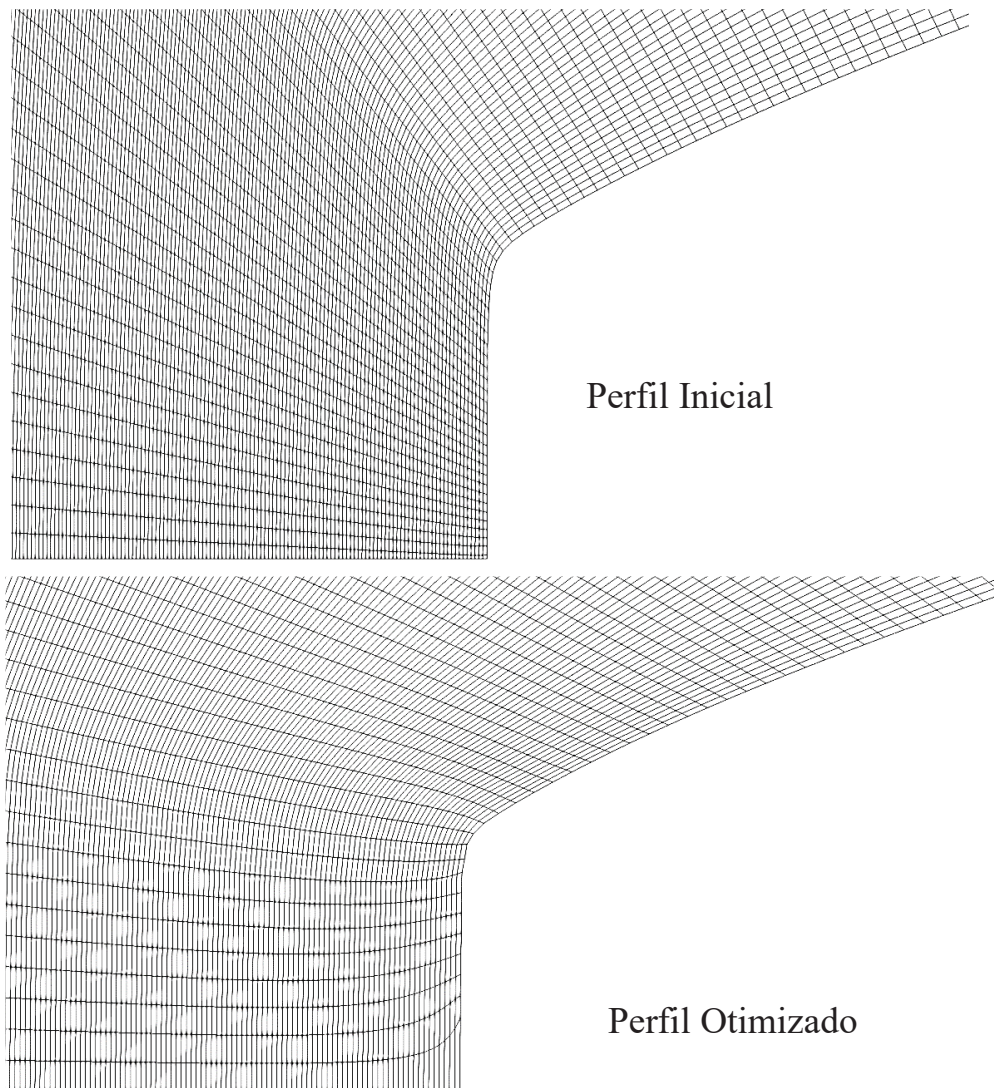


Figura 4.9 – Detalhes da malha no segundo nível de otimização para $M=2$, $f=2$.

Todavia, nesse caso específico, mesmo ao realizar uma terceira otimização, não houve melhoras significativas nos resultados, tampouco houve reduções perceptíveis na distorção da malha (oriundas do processo de otimização). Pode-se pensar que, então, a melhor estratégia seja realizar otimizações em malhas com distribuições uniformes 1-d e esse seja, por fim, o caminho ideal a trilhar. Porém, ao analisar com mais atenção os resultados da distribuição Uniforme 1-d,

foi verificado que não houve convergência por critério de parada referente ao resíduo mínimo nessa otimização (terminou por atingir o número máximo de iterações estipulado). Isso significa que o resultado pode estar comprometido, o que nos leva a acreditar que o melhor resultado é por refino uniforme nas duas direções (mesmo tendo um C_D maior).

Portanto, de acordo com ambos os testes, presume-se que o mais sensato seja adotar uma distribuição uniforme nas duas direções. Infelizmente, isso também não se aplicou em todos os casos (será visto no próximo capítulo). Na realidade, para razões de aspecto $f=3$ e $f=4$, a maioria dos casos com distribuição uniforme acabou por falhar de alguma maneira (seja por ficar longe do resultado esperado ou pela própria falha no processo de otimização), sendo assim, necessário adotar uma distribuição não uniforme nas duas direções (ou em uma apenas).

Em resumo, apesar dessa seção não nos trazer um caminho concreto (padronizado) em relação de procedimento, permitiu trazer informações de como contornar o problema e, também, contribuiu para um melhor entendimento dos resultados obtidos.

Nessa seção vimos exemplos que ajudaram na identificação de possíveis problemas que podem aparecer no processo das otimizações e como contorná-los. A próxima seção é destinada ao cálculo da estimativa de erro a partir do perfil ótimo.

4.5 Cálculo do C_D e Incerteza

Essa seção é destinada ao processo de pós otimização. De posse dos perfis otimizados, é realizado o cálculo final do coeficiente de arrasto, C_D , e sua respectiva incerteza numérica, GCI. O procedimento é apresentado a seguir.

Após o segundo processo de otimização (ou terceiro, em alguns dos casos) é fornecido como resposta um perfil otimizado. A partir desse perfil é feita uma malha m_1 , com o mesmo número de elementos da malha do perfil otimizado. A malha m_1 , então, servirá de base para mais dois refinamentos consecutivos, gerando a malha m_2 e m_3 . Se, por exemplo, o perfil otimizado original possuir uma malha 400×200 , é confeccionada uma malha m_1 com 400×200 baseada nesse perfil ótimo. Ao refinar de maneira uniforme a malha m_1 , obtém-se a malha m_2 com 800×400 elementos, com pontos e nós colocalizados. Com o mesmo procedimento, obtém-se a malha m_3 com 1600×800 elementos.

Através da Eq. (3.33) é efetuado um nível de multiextrapolação de Richardson para o coeficiente de arrasto e seu respectivo erro é calculado através do estimador GCI, através da Eq. (3.35). Esse procedimento é realizado para cada caso estudado.

4.6 Considerações sobre o programa SU2 e as simulações

Essa seção é destinada a discussões sobre os procedimentos adotados no processo de otimização e cálculo do coeficiente de arrasto. Ela engloba algumas observações pertinentes de nota, exploradas nas seções anteriores, e que acabaram por emergir durante o processo de simulação. Além disso, são discutidos aspectos relativos à configuração dos arquivos de entrada e métodos utilizados no programa SU2.

Como visto no capítulo 2, o presente trabalho busca encontrar perfis geométricos ótimos de nariz de foguete para escoamentos supersônicos (e um caso hipersônico, com $M=6$). A ferramenta utilizada é a simulação numérica, através do programa SU2, onde a otimização é realizada através do algoritmo de programação quadrática sequencial em conjunto com o método adjunto discreto e o modelo de Euler é resolvido através do Método dos Volumes Finitos.

No processo de otimização, optou-se por utilizar o algoritmo SLSQP (*Sequential Least-Squares Quadratic Programming*), implementado na biblioteca Scipy Python, e já adaptado para o uso interno no programa SU2. Dentre outros algoritmos presentes na biblioteca, esse se demonstrou mais eficaz em termos de tempo computacional, sendo adotado em todo trabalho. Em relação ao fluido, foi considerado o ar na forma padrão, com temperatura na corrente livre, $T_\infty = 300$ K, razão de calores específicos na corrente livre, $\gamma_\infty = 1,4$, constante do gás, $R_G = 287,058$ J kg⁻¹K⁻¹, calor específico na corrente livre, $(c_p)_\infty = 1004,703$ J kg⁻¹K⁻¹ e com pressão de corrente livre, $p_\infty = 100000$ Pa.

Para resolver o sistema linear resultante foi adotado o método resíduo mínimo generalizado flexível proposto por Saad (1993). Esse método é derivado dos métodos de subespaço de Krylov e tem demonstrado eficiência em solução de sistemas lineares esparsos e grandes, funcionando bem para o processamento paralelo (DeVries *et al.*, 2013). A discretização no tempo se deu pelo esquema de Euler implícito, que possui mais estabilidade na simulação, evitando assim problemas de divergência. Para interpolação dos métodos advectivos foram selecionados dois métodos que demonstram eficiência ao longo do projeto. O método JST proposto por Jameson *et al.* (1981) e o Lax-Friedrich desenvolvido por Lax (1954). Ambos os métodos utilizam de uma dissipação artificial em sua formulação (explicitamente no caso de JST enquanto implícita em Lax-Friedrich) e que tem por objetivo aumentar a estabilidade do método, tornando-os condicionalmente estáveis. O primeiro método se mostrou eficiente para os três primeiros casos de número de Mach para $f=2$ enquanto o segundo foi mais exitoso para os demais casos. Contudo, em particular, houve alguns percalços em relação ao

método JST. No processo de cálculo do coeficiente de arrasto mencionado na seção 4.5 (após o processo de otimização), foi necessário um pequeno ajuste nos coeficientes de dissipação (de segunda e quarta ordem) para cada nível de malha simulado. Ou seja, para as simulações nas malhas m_1 , m_2 e m_3 os coeficientes não foram os mesmos (geralmente 0,5 para segunda ordem e 0,02 para quarta ordem). Embora na teoria de extrapolação de Richardson e cálculo de incerteza necessite que o processo de simulação entre as malhas passe por um mesmo esquema de discretização, fez-se necessária a utilização desse recurso para eliminar as oscilações numéricas e obter a convergência. Para acelerar o processo da simulação foi adotado o uso do multigrid de dois níveis em ciclo V (Brandt e Livne, 1984). Ao testar mais ciclos ocorreram problemas de divergência na solução.

Após a confecção da malha computacional o programa SU2 necessita apenas de um arquivo de entrada, contendo a seleção dos parâmetros desejados para dar início ao processo da simulação. Uma vez iniciado o processo, o programa calcula o escoamento na geometria fornecida pela malha inicial (dada como entrada no programa) e seu respectivo coeficiente de arrasto. Em seguida, através do método adjunto discreto, é feita uma análise da sensibilidade do problema pela matriz Jacobiana, que contém o gradiente das propriedades estudadas. Nesse momento é verificado se atingiu a convergência. Em caso de sucesso, o programa fornece a resposta. Caso contrário, o otimizador sugere novos pontos, é feito um ajuste no perfil, em seguida, uma deformação na malha e o processo de cálculo se repete até convergir. Um fluxograma contendo o resumo dos passos principais (e posterior a esse processo) é exposto na Figura 4.10. Um exemplo de arquivo de configuração de entrada com todas as informações pode ser checado no Anexo A.

O processo de simulação foi realizado em quatro computadores domésticos, sendo dois notebooks (N1 e N2) e dois desktops (D1 e D2). A Tabela 4.5 apresenta a configuração de cada dispositivo. Todos utilizaram o SU2 na versão Falcon 6.2.0 para o sistema operacional livre Linux distribuição LMDE 4 rodando em máquina virtual com sistema operacional comercial Windows 10 (à medida que o trabalho foi desenvolvido o sistema operacional recebeu diversas atualizações em todas as máquinas). Em todas as máquinas utilizou-se o número máximo de núcleos em simulação paralela, com exceção da máquina D2, que utilizou 5 núcleos por simulação (pois a mesma não possui *threads* virtuais).

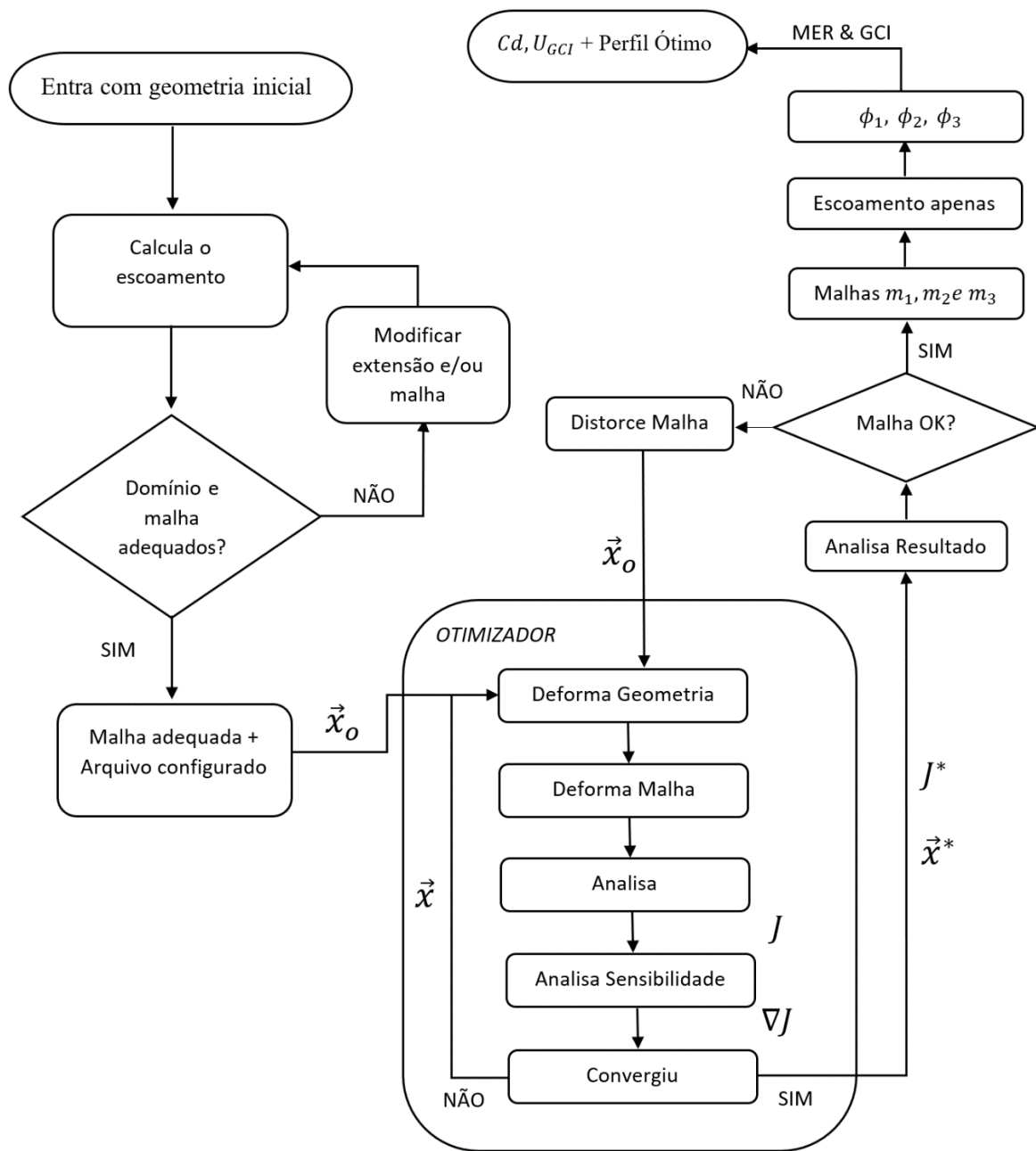


Figura 4.10 – Fluxograma do processo de otimização. Adaptado de Economon (2013).

Tabela 4.5 – Configuração dos computadores utilizados no trabalho.

Sigla	Modelo	CPU	RAM	DRIVE
D1	(sem nome)	Intel i5 11400 @ 2.6 GHz 6 Núcleos	32gb ddr4	SSD Nvme 1tb
D2	(sem nome)	AMD Phenon II 1075T @ 3 GHz 6 Núcleos	8gb ddr3	SSD 500gb Sata
N1	Acer Nitro 5	Intel i7 7700HQ @ 2.8 GHz @ 4 Núcleos	16gb ddr4	SSD Nvme 500gb
N2	Acer Nitro 5	AMD Ryzen 7 4800H @ 2.9 GHz 8 Núcleos	32gb ddr4	SSD Nvme 1tb

Essa seção foi direcionada ao funcionamento do programa SU2. Foram vistos método de discretização, solução de sistema linear, interpolação de termos advectivos, entre outros parâmetros referentes à dinâmica de fluidos computacional e otimização. Aparatos computacionais utilizados nas simulações foram descritos e um fluxograma contendo todo o procedimento realizado no trabalho (do começo ao fim) foi apresentado.

Nesse capítulo foram realizadas análises prévias que permitiram testar o bom funcionamento do programa SU2 (caso do cone). Cuidados pertinentes e pré simulações também foram explorados como: identificação da extensão do domínio computacional, distribuição das variáveis de otimização, tamanho da malha computacional e sua distribuição de elementos. Esses cuidados permitiram identificar problemas, compreendê-los e, assim, procurar evitá-los. Procedimentos no processo de obtenção do perfil ótimo, como a necessidade de repetição no processo de otimização foram observados. O posterior cálculo do coeficiente de arrasto e incerteza foram abordados.

O próximo capítulo é destinado a análise e discussão dos resultados oriundos de todo processo descrito nesse capítulo (que está resumido no fluxograma da Figura 4.10). O procedimento é realizado para todas as geometrias contendo números de Mach 1,5; 2; 3; 4 e 6 para razões de aspecto 2, 3 e 4.

5 RESULTADOS

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados das simulações numéricas realizadas a partir dos procedimentos descritos no capítulo anterior. Toda a metodologia vista (e que está resumida no fluxograma da Figura 4.10) serviu como base para a obtenção dos resultados aqui apresentados. Os resultados de Kraiko *et al.* (2003) e de Oliveira (2018) servirão como referências para comparações no presente trabalho. Nesse sentido, o primeiro tem como base fornecer o ponto de chegada enquanto os segundos servem para avaliar a eficácia dos métodos empregados.

Primeiro são apresentados os coeficientes de arrasto ótimos. A seguir, são apresentados os perfis otimizados para cada razão de aspecto e, por fim, é realizado um comparativo entre todas as situações.

5.1 Coeficientes de arrasto ótimos

A Tabela 5.1 apresenta o coeficiente de arrasto ótimo (decorrente do processo de otimização) para cada geometria avaliada e informações sobre o número de variáveis de otimização (VO), malha, máquina e esquema de interpolação de termos advectivo utilizados.

Tabela 5.1 – Coeficientes de arrasto ótimos e informações sobre as simulações.

f	M	C_D	VO	Método	Distribuição	Malha	Máquina
2	1,5	0,14525	10	JST	Uniforme 2d	400x200	D1
	2	0,13718	10	JST	Uniforme 2d	400x200	D1
	3	0,12121	7	JST	Uniforme 2d	400x200	D1
	4	0,11107	10	Lax-Friedrichs	Uniforme 2d	500x160	D1
	6	0,10069	10	Lax-Friedrichs	Uniforme 1d	500x160	N2
3	1,5	0,08032	7	Lax-Friedrichs	Uniforme 2d	500x200	D1
	2	0,07250	7	Lax-Friedrichs	Não Uniforme 2d	500x200	N2
	3	0,06361	10	Lax-Friedrichs	Não Uniforme 2d	500x200	D2
	4	0,05815	10	Lax-Friedrichs	Não Uniforme 2d	600x180	N2
	6	0,05184	10	Lax-Friedrichs	Não Uniforme 2d	500x200	N1
4	1,5	0,04886	10	Lax-Friedrichs	Não Uniforme 2d	600X200	N1
	2	0,04491	10	Lax-Friedrichs	Não Uniforme 2d	600x200	N1
	3	0,03957	10	Lax-Friedrichs	Não Uniforme 2d	600x200	N1
	4	0,03627	10	Lax-Friedrichs	Não Uniforme 2d	600x200	N2
	6	0,03222	10	Lax-Friedrichs	Não Uniforme 2d	600x200	N2

Em relação a Tabela 5.1, como explicado no capítulo 4 (seções 4.3 e 4.4), apesar de esforços direcionados na busca de uma metodologia que padronizasse o procedimento das simulações, cada caso demandou a utilização de um determinado conjunto de distribuição e número de elementos, VO e método de interpolação de termos advectivos. Para razão de aspecto 2, o método JTS mostrou-se mais eficiente para os números de Mach até 3. Já para os demais casos, o método Lax-Friedrichs atingiu maior efetividade ao passo que o JST apresentou falhas em vários casos, necessitando, portanto, a substituição. O mesmo ocorreu para o número de variáveis de otimização. Em alguns casos específicos houve a necessidade de baixar de 10 para 7 variáveis de otimização no processo de re-otimização. Sobre o número de elementos, necessitou-se de mais elementos na direção axial à medida que aumentou a razão de aspecto ou número de Mach, exceto pelo caso de $f=3$ e $M=6$. Em relação a direção radial, buscou-se utilizar 200 elementos, sendo que em alguns casos precisou baixar para 180 e até 160 elementos.

A Tabela 5.2 apresenta o cálculo do C_D com a incerteza GCI (procedimento descrito na seção 4.4) e um breve comparativo com os resultados de Kraiko *et al.* (2003) e Oliveira (2018) quando o mesmo utilizou 8 variáveis de otimização.

Tabela 5.2 – Coeficientes de arrasto, incerteza e comparação com resultados da literatura.

Razão	Mach	C_D (GCI)	Kraiko <i>et al.</i>	Dif (%)	Oliveira	Dif (%)
2	1,5	0,14549(5)	0,144	1,026	0,14448	0,696
	2	0,13771(2)	0,136	1,238	-	
	3	0,12149(4)	0,121	0,407	0,12093	0,465
	4	0,11217(2)	0,112	0,153	-	
	6	0,10231(5)	0,101	1,280	0,10107	1,211
3	1,5	0,08064(9)	-		0,078369	2,811
	2	0,0727(1)	-		-	
	3	0,06400(6)	-		0,063633	0,574
	4	0,05899(6)	-		-	
	6	0,0526(1)	-		0,05181	1,546
4	1,5	0,04883(6)	0,0482	1,286	0,048414	0,847
	2	0,04498(5)	0,0446	0,837	-	
	3	0,03983(6)	0,0396	0,580	0,039675	0,391
	4	0,03656(7)	0,0364	0,431	-	
	6	0,03246(4)	0,0322	0,797	0,032071	1,195

Em relação aos resultados da Tabela 5.2, nota-se que as incertezas dos resultados numéricos estão na ordem de 10^{-5} , com exceção dos casos Mach 2 e 6 para a razão de aspecto

3, que está na ordem de 10^{-4} . A título de comparação, nos resultados de Oliveira (2018) com 8 variáveis de otimização (maior número de variáveis e, conseqüentemente, melhor resultado), o autor conseguiu uma incerteza GCI de 0,002, 0,00006 e 0,0003 para razão de aspecto 2 e números de Mach 1,5, 3 e 6, respectivamente. Para $f=3$ as incertezas atingiram 0,0006, 0,00008 e 0,0006 nos mesmos números de Mach. Sendo assim, no presente trabalho, todas incertezas ficaram menores que as de Oliveira (2018) como, por exemplo, no caso de $f=2$ e $M=1,5$ onde a incerteza ficou 40 vezes menor. Embora os trabalhos possuam metodologias diferentes, ainda assim, entende-se que o presente trabalho atingiu resultados precisos.

Em relação aos resultados analíticos de Kraiko *et al.* (2003), os coeficientes de arrasto apresentaram diferenças relativas que não ultrapassaram 1,29%. Como os autores não possuem resultados para razão de aspecto 3, os perfis ótimos de razão de aspecto 4 obtiveram melhores resultados. Excetuando o número de Mach 1,5, todos perfis ficaram com uma diferença relativa menor que 0,9%. Já para a razão de aspecto 2, apesar de apresentar uma diferença relativa de 0,153% em Mach 4, a média ficou em 1,18%. Em particular, vale salientar que essa razão de aspecto apresentou mais problemas no processo de simulação e cálculo do C_D .

Em comparação aos resultados de Oliveira (2018), a maior discrepância se deu para $f=3$ e Mach=1,5, onde a diferença relativa atingiu 2,811%. Aliás, de modo geral, todas as simulações em $M=1,5$ (e nos demais casos, em menor escala) tiveram resultados mais distantes em relação aos autores supracitados. Por se tratar de um regime próximo a região de transição (transônico/supersônico), onde $M \approx 1,2$, acredita-se que isso possa ter influenciado de forma negativa os resultados nesses casos. Todavia, vale salientar que, para atingir os resultados da Tabela 5.2, Oliveira (2018) utilizou malhas 720×480 , que são de 2,88 a 4,32 maiores que as malhas utilizadas no presente trabalho. Outro aspecto importante a mencionar é em relação ao tempo de cálculo. Para $f=2$, por exemplo, a variação do tempo computacional desse autor foi de 91 a 383 horas por caso, enquanto no presente trabalho foi de aproximadamente 7 horas ou 1,8% a 7,6% do tempo. Por outro lado, ao tentar utilizar malhas equivalentes, o programa SU2 retornou diversos erros, o que levou a descartar essa abordagem.

De modo geral, o coeficiente de arrasto nos perfis otimizados diminui com o aumento do número de Mach ou com o aumento da razão de aspecto. As próximas seções são destinadas a apresentação dos perfis ótimos e informações sobre o escoamento. Nelas serão explorados os campos de pressão, Mach, massa específica, temperatura e momento linear em x .

5.2 Perfis ótimos para a razão de aspecto 2

Nesta seção são apresentados os perfis ótimos para razão de aspecto 2 e um comparativo entre os números de Mach estudados. A Figura 5.1 apresenta os perfis ótimos para os diferentes números de Mach. Os perfis também podem ser conferidos na Tabela B.1 do Apêndice B.

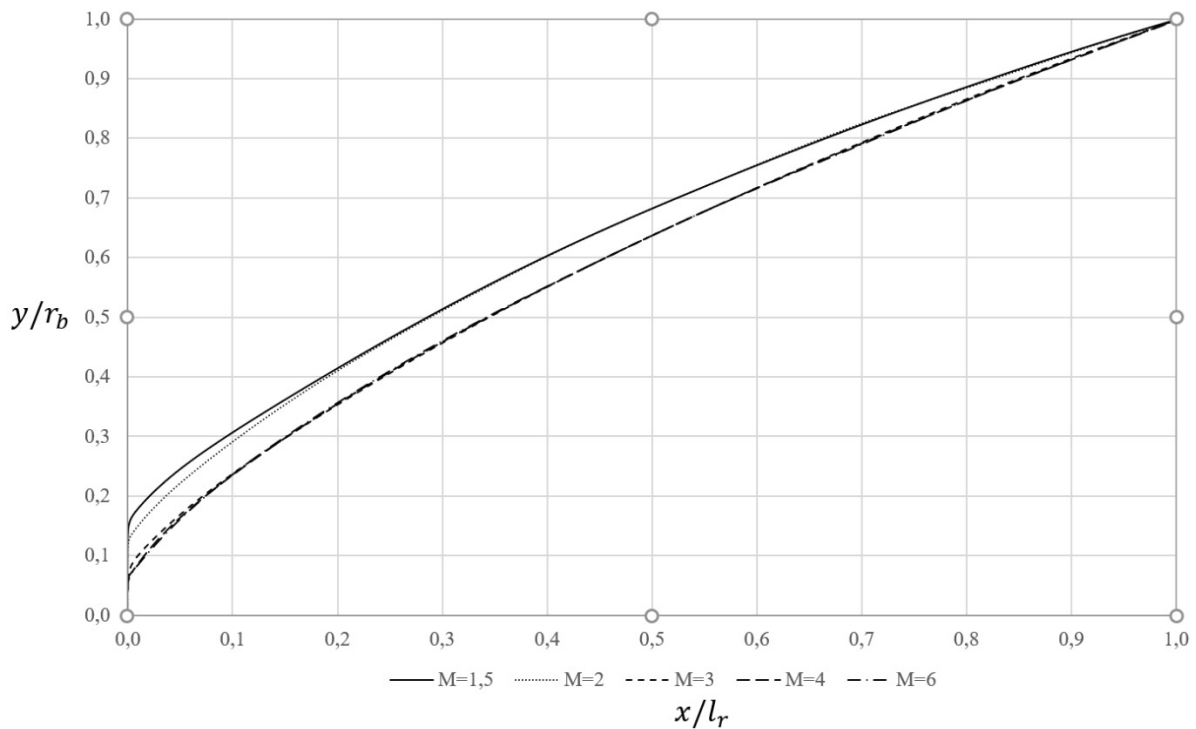


Figura 5.1 – Perfil ótimo para razão de aspecto $f=2$ e números de Mach simulados.

De acordo com a Figura 5.1 nota-se um perfil mais rombudo e com a face plana maior quando o número de Mach é mais baixo. Nesse caso, para Mach 1,5 o perfil admite maior área em relação aos demais números de Mach. Para Mach 2 e $x/l_r \gtrsim 0,25$ o perfil se assemelha ao de $M=1,5$ e quando $x/l_r \lesssim 0,25$ o perfil torna-se menos rombudo e com face plana menor. Para $M=3$ o perfil já muda de formato por inteiro, diferindo dos perfis anteriores, admitindo seções transversais menores que àquelas em toda e extensão axial. Sendo assim, esse perfil contém uma área ainda menor que os perfis anteriores. Em seguida e quase sem mudanças entre si, aparecem os perfis de Mach 4 e 6. Contudo, esses perfis estão abaixo do perfil de Mach 3, principalmente quando $x/l_r \lesssim 0,1$. Para $x/l_r \gtrsim 0,1$, os três últimos perfis possuem um aspecto bem semelhante. Em relação à face plana, os perfis de Mach 1,5 e 2 admitem alturas entre $0,1 \lesssim y/r_b \lesssim 0,2$ enquanto nos demais números de Mach as faces planas estão entre $0 \lesssim y/r_b \lesssim 0,1$.

A Figura C.1 (ver apêndice C) apresenta o campo da massa específica para o número de Mach 1,5 no perfil otimizado. De acordo com a Figura C.1, nota-se que há maior densidade de fluido próximo a face frontal (denotada pela cor azul), onde o escoamento atinge o perfil e há uma concentração maior de fluido na região. Nesse caso, a massa específica é aproximadamente $2,72 \text{ kg/m}^3$ enquanto na corrente livre é $1,16 \text{ kg/m}^3$. Acima da região da parede frontal a massa específica fica um pouco menor, em torno de $1,8 \text{ kg/m}^3$, na região em verde. Por fim, ao longo da extensão do perfil a massa específica vai admitindo valores menores denotados pelas colorações amarelo e laranja. Aliás, a onda de choque inicia em $x \approx -0,1m$ e cobre a ponta do nariz e todo o perfil até chegar em $y \approx 2,4m$ na base (ou $\approx 1,9m$ de altura), quando $x = 2m$.

A Figura 5.2 apresenta o campo de Mach para $f=2$ e Mach 2 na corrente livre. Em relação a Figura C.1, nota-se que a onda de choque apresenta um perfil ainda mais confinado e próximo ao perfil ótimo. À título de comparação, para Mach 1,5 a onda de choque se inicia em $x \approx -0,05m$, próximo à ponta do nariz (uma redução de 50%) enquanto atinge a marca de $y \approx 1,61m$ na base, em $x = 2m$ (uma redução de quase 42% na altura). Em relação ao campo de escoamento, na região próxima a parede frontal, em vermelho, o fluido admite baixas velocidades, uma vez que o número de Mach é menor que 0,4 nessa região. Sendo assim, o escoamento é subsônico. Logo acima, na região em verde, entre $0,8 \lesssim M \lesssim 1,2$, o escoamento entra no regime transônico até atingir valores maiores que 1,5, onde o regime passa a ser supersônico (quando as regiões se tornam mais azuladas, em $x > 0,3m$). Portanto, abaixo da onda de choque o escoamento admite os três tipos de regime de escoamento: subsônico, transônico e supersônico.

A Figura C.2 (ver apêndice C) apresenta o campo de pressão para o perfil otimizado para $f=2$ e Mach 3. Em relação ao perfil ilustrado na Figura 5.2, com Mach 2, o perfil de Mach 3 apresenta uma onda de choque ainda mais confinada. Nesse caso, parte frontal da onda inicia-se em $x \approx -0,02m$ enquanto atinge uma marca de $y \approx 1,075m$ na base. Isso significa uma redução de 60% e 48% nessas regiões, respectivamente, se comparado ao perfil ótimo em Mach 2 e 80% e 70%, respectivamente, em relação a Mach 1,5. Com respeito ao campo de escoamento, a face frontal apresenta uma região de alta pressão (demarcada em azul), atingindo valores 12 vezes maiores que a pressão na corrente livre. Logo acima dessa área, na região acima da curva do nariz, em verde, a pressão reduz à metade. Após a região verde, a onda de choque admite valores cada vez menores, denotados pela coloração laranja e avermelhada, até

atingir o contorno da saída onde $p \approx 1,5p_\infty$.

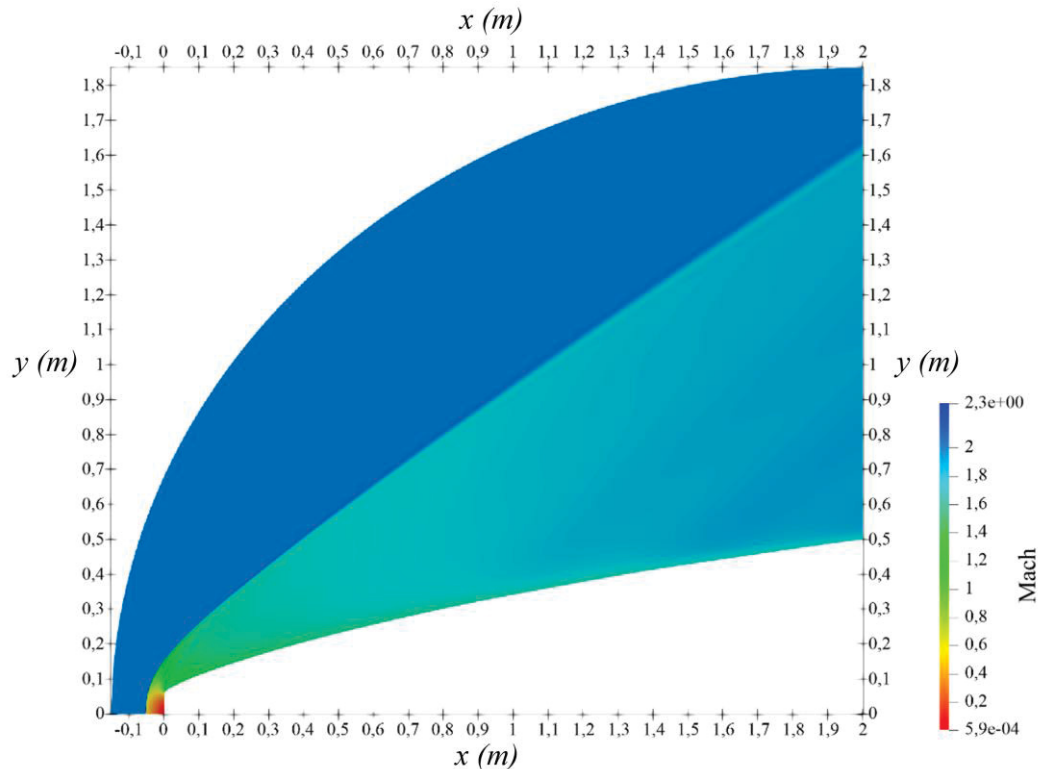


Figura 5.2 – Campo do número de Mach para o perfil ótimo em $f=2$ e Mach 2.

A Figura C.3 (ver apêndice C) apresenta o campo do momento linear na direção x para o perfil otimizado com $f=2$ e Mach 4. Em relação à onda de choque, o perfil possui uma área ainda mais confinada se comparado com os números de Mach menores. No início, próximo à parede vertical, a distância é de $x \approx -0,016m$ enquanto na saída atinge $y \approx 0,9m$. Em relação ao perfil otimizado de Mach 1,5 essas regiões apresentam uma redução de 84% e 79%. Sobre o momento linear em x , há valores muito baixos próximos à parede vertical, denotados pela fina camada em vermelho. Por exemplo, na origem, em $x = 0$ e $y = 0$, $Q = 6,32 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Como a massa específica nessa região é muito alta (veja Figura C.1), a velocidade do fluido torna-se muito baixa. Nessa região, o momento linear chega até $300 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Em uma fina camada, acima da parede plana e próximo ao contorno da onda de choque, há uma forte troca de quantidade de movimento (na ordem de $3600 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$) que se estende ao longo do contorno, chegando até a região da saída. Essa grandeza tende a diminuir de intensidade à medida que se aproxima da superfície do nariz. Já na região da superfície do nariz, excetuando a parede vertical, o momento linear segue com valores entre 1600 a $1800 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$.

A Figura C.4 (ver apêndice C) apresenta o campo de temperaturas para o perfil otimizado com razão de aspecto 2 e Mach 6. De acordo com a Figura C.4, nota-se que a onda de choque compreende o menor dos perfis já apresentados. O confinamento compreende uma área que se inicia em $x \approx -0,0137m$, na região próxima a parede plana e termina em $y \approx 0,76m$, na região do contorno da saída. Em relação ao perfil otimizado em Mach 1,5 essas regiões sofreram ambas uma redução de 86,3% cada. Além disso, o presente perfil otimizado também apresenta a menor das áreas se comparado com os perfis otimizados nos números de Mach menores. Um aspecto importante, nesse caso, é o fato da região próxima à parede vertical (representada pela cor azul) possuir altas temperaturas, podendo atingir até 2500 K. Por ser uma região de alta pressão e densidade, é natural que haja altas temperaturas.

A título de comparação, a região de corrente livre possui por volta de $27^{\circ}C$ enquanto na parede frontal a temperatura atinge mais de $2200^{\circ}C$. Mais adiante veremos que a temperatura pode atingir valores ainda maiores nos perfis com razão de aspecto maiores. Isso significa que atenções devem ser direcionadas nos projetos de construção de foguetes a fim de garantir que o material de construção do nariz resista à essas condições. É de vital importância que o mesmo possua um sistema de refrigeração adequado ou de escudo térmico.

Assim como na análise das outras propriedades, a temperatura também tende a cair ao longo da onda de choque. Logo acima da região frontal e próximo à região da parede, há uma área de tons em verde na qual a temperatura atinge por volta de 1300K e se estende até $x \approx 0,5m$. Acima dessa região, delimitada pela faixa em laranja, a temperatura cai ainda mais, seguindo esse padrão até atingir a região do contorno de saída, que está na ordem de 420K.

A Figura C.5 (ver apêndice C) ilustra os campos da massa específica, número de Mach, momento linear e pressão para o perfil ótimo no caso $f=2$ e Mach 6. De acordo com as Figuras C.4 e C.5, nota-se que os campos de escoamentos possuem perfis parecidos entre si, com onda de choque fixa. De fato, a onda de choque comporta-se de forma semelhante ao efeito da camada limite em escoamentos viscosos. Ela está situada em uma região que representa uma descontinuidade no escoamento, no qual há variações nas propriedades do fluido (e do escoamento) na região entre ela e a superfície do corpo e, fora dela, as propriedades são constantes (região de corrente livre). Sendo assim, essa foi a razão pela qual foram omitidos os demais resultados para os números de Mach anteriores e foi analisada apenas uma variável por caso de Mach, pois os campos de escoamento seriam qualitativamente semelhantes. Os demais resultados para as razões de aspecto 3 e 4 serão apresentados dentro desse contexto.

Nesta seção foram apresentados os perfis otimizados para a razão de aspecto 2 e

realizada uma análise do comportamento do campo de escoamento nos diversos perfis otimizados. As próximas seções são destinadas as razões de aspecto $f=3$ e $f=4$.

5.3 Perfis ótimos para a razão de aspecto 3

Nessa seção são apresentados os perfis otimizados para a razão de aspecto 3, seguido por análises do campo de escoamento e discussões pertinentes. A Figura 5.3 apresenta o perfil ótimo para razão de aspecto 3 e números de Mach 1,5; 2; 3; 4 e 6. Os perfis podem ser visualizados também na Tabela B.2 do Apêndice B.

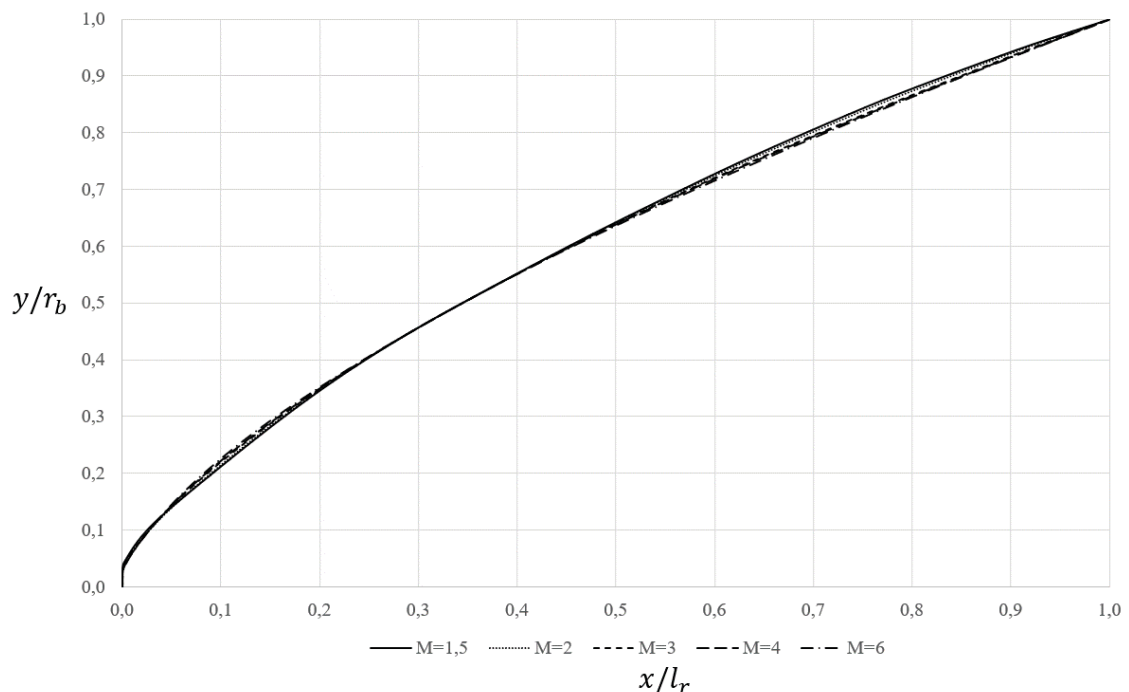


Figura 5.3 – Perfil ótimo para razão de aspecto $f=3$ e números de Mach simulados.

De acordo com a Figura 5.3, os perfis ótimos para razão de aspecto $f=3$ possuem geometrias próximas entre si para toda faixa de Mach estudada. Em $x/l_r \gtrsim 0,45$, o perfil de Mach 1,5 tende a ser mais arredondado, seguido por $M=2$ logo abaixo e, na sequência os perfis de Mach 3, 4 e 6 muito próximos entre si, embora cada vez menores. Entre $0,04 \lesssim x/l_r \lesssim 0,3$ o padrão se inverte, sendo o perfil com Mach 6 maior, seguidos pelos perfis 4, 3, 2 e 1,5. Para $x/l_r \lesssim 0,04$ o perfil de Mach 1,5 é o maior. Em relação a face plana na ponta, os perfis abrangem alturas que estão entre $0,02 \lesssim x/l_r \lesssim 0,05$. Esses formatos ótimos destoam dos perfis ótimos na razão de aspecto 2, onde os perfis de Mach menores possuem maiores áreas se

comparado com números Mach mais altos, principalmente em regiões próximas à face plana, no início do nariz.

A Figura C.6 (ver apêndice C) apresenta o campo de massa específica para o perfil otimizado para razão de aspecto 3 e Mach 1,5. Pela Figura C.6 nota-se que, assim como em $f=2$ (Figura C.1), há uma região de alta densidade de fluido na região próxima a parede vertical, em azul, no início do perfil. O início da variação se dá em $x \approx -0,023m$. Em comparação com o perfil do caso $f=2$ em que Mach é 1,5, o início da onda se dá em $x \approx -0,1m$, ou seja, uma redução de 77%. Já em relação a onda de choque, a altura ocorre por volta de $y \approx 3,8m$, apresentando um aumento de 42% em relação ao perfil de $f=2$. Esse aumento da altura está relacionado a própria extensão axial do perfil, que aumentou em 33,3% (de $l_r = 2m$ para $l_r = 3m$) e manteve o raio da base, $r_b = 0,5m$. Outra mudança ocorre na intensidade da massa específica, que fica maior na região da parede, $2,79 \text{ kg/m}^3$ (era $2,72 \text{ kg/m}^3$) enquanto na região da saída fica menor $1,22 \text{ kg/m}^3$ (era $1,8 \text{ kg/m}^3$).

A Figura 5.4 mostra o campo de Mach para o perfil otimizado em $f=3$ e Mach 2.

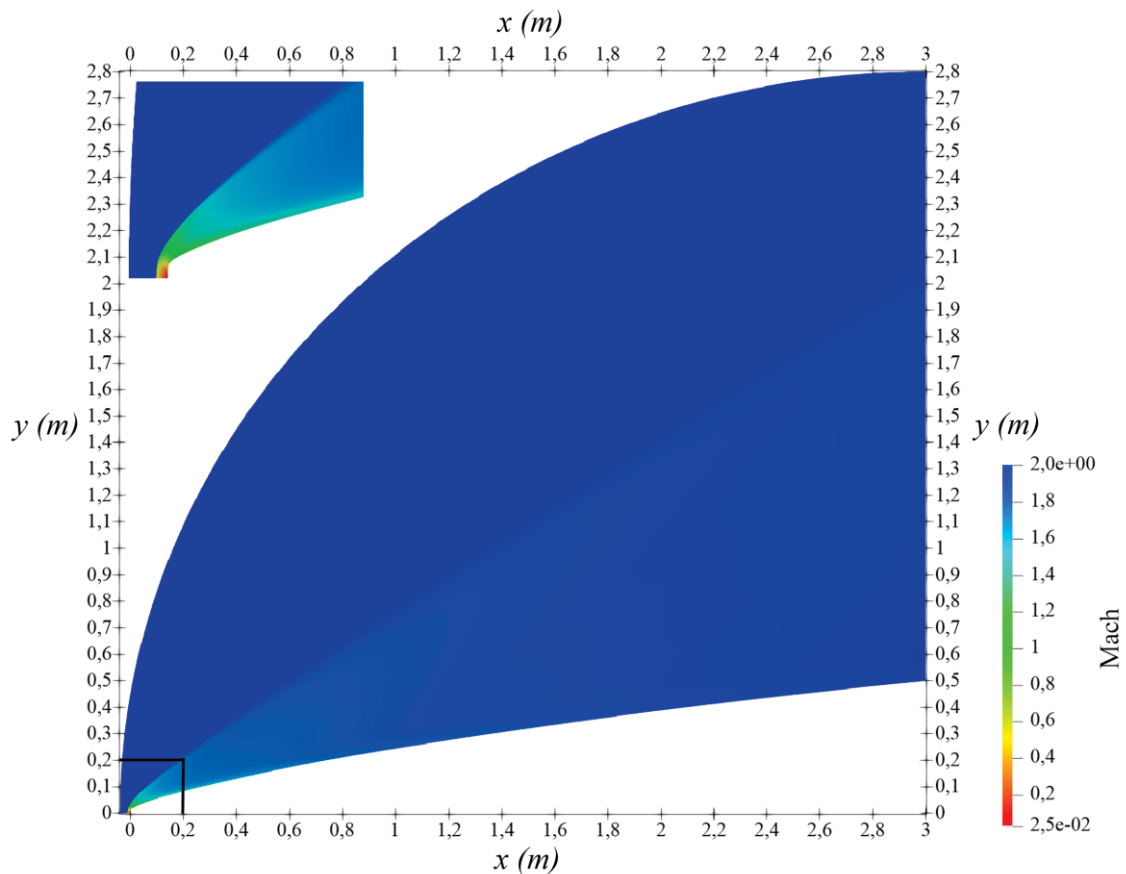


Figura 5.4 – Campo de Mach para o perfil otimizado em $f=3$ e Mach 2.

Nota-se que, pela Figura 5.4, o campo de Mach se assemelha ao campo da Figura C.6. Apesar da onda de choque estar bem delimitada no início do perfil ela vai ficando cada vez mais amena ao longo da direção horizontal, em contraste com o campo de Mach em $f=2$, no qual a onda está visualmente mais bem destacada (veja Figura 5.2). No destaque da ponta do nariz, nota-se uma região em vermelho que apresenta baixos números de Mach, por volta de $M \approx 0,2$ nas imediações da parede, configurando um regime subsônico. Logo acima, à jusante, há uma área em verde que compreende um intervalo de $0,8 \lesssim M \lesssim 1,2$ e que indica um regime transônico. Após essa região a velocidade do escoamento vai ficando cada vez maior, atingindo velocidades supersônicas, na região em tons de azul. Novamente estão observados os três regimes de escoamento. Em relação a onda de choque, o perfil admite um aspecto mais próximo à parede em relação ao perfil ótimo de $f=2$, iniciando em $x \approx -0,012m$. Já para a altura na saída, a onda de choque, embora não esteja visualmente clara na Figura 5.4, atinge o pico em $y \approx 2,4m$. Em relação ao perfil de $f=2$, a onda de choque apresenta uma queda de 75% na espessura da entrada e um aumento de 41,6% na altura da saída.

A Figura C.7 (ver apêndice C) apresenta o campo de pressão para o perfil otimizado de razão de aspecto 3 e Mach 3. O campo de pressão ilustrado na Figura C.7 apresenta um aspecto geral semelhante ao comportamento das Figuras C.6 e 5.4. No início há uma onda de choque bem delineada e a mesma vai ficando cada vez mais fraca ao longo do perfil. Assim como nas demais análises, há um pico de pressão na parede frontal, atingindo até 12 vezes a pressão na corrente livre. Todavia, a área frontal é ainda menor se comparada ao perfil ótimo em $f=2$. A onda de choque no início tem apenas $x \approx -0,0088m$ de distância da parede enquanto possui uma altura de $y \approx 1,53m$ na saída. O mesmo padrão se aplica nessa análise. Em relação ao perfil otimizado de $f=2$, há um decréscimo de 56% e um acréscimo de 44,2% nas regiões supracitadas. A pressão na saída também cai em relação a $f=2$, apresentando valores que atingem $p \approx 1,28p_\infty$ (era $p \approx 1,5p_\infty$ naquela configuração).

A Figura C.8 (ver apêndice C) apresenta o campo do momento linear em x para o perfil otimizado com razão de aspecto 3 e Mach 4. O campo apresentado na Figura C.8 apresenta, em aspectos gerais, um comportamento semelhante ao campo em que $f=2$ (Figura C.3). Observa-se uma região em vermelho em que há baixas velocidades próximo a parede frontal, com um momento linear chegando a $Q = 3,66 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ em $x = 0$ e $y = 0$ (era $Q = 6,32 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ em $f=2$). No entorno os valores atingem por volta de $200 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Da mesma forma, há uma região próxima ao contorno superior da onda de choque com alta quantidade de movimento,

demarcada pela cor azul. Ela estende-se de $x = 0$ até $x = 0,4m$ e pode chegar até quase $3600 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Assim como em $f=2$, a região com alta quantidade de momento linear tende a diminuir ao longo da direção axial, porém de forma mais rápida, atingindo valores próximos a $2000 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ no contorno da saída. O tamanho da onda de choque, também segue a mesma dinâmica dos resultados anteriores. Há uma diminuição da distância frontal, passando de $x \approx -0,016m$ para $x \approx -0,0068m$ (redução de 57,5%) e um aumento na altura da saída, subindo de $y \approx 0,9m$ para $y \approx 1,18m$ (acréscimo de 41,2%).

A Figura C.9 apresenta o campo de temperaturas para o perfil otimizado com razão de aspecto 3 e Mach 6. Assim como em $f=2$ e Mach 6, a temperatura apresenta um pico nas regiões próximas a parede plana, em azul, podendo chegar até a 2460 K. A distância da onda de choque à face plana no início e atinge $x \approx -0,0055m$. Na região do contorno da saída, a onda de choque atinge a marca de $y \approx 0,904m$. Isso significa um decréscimo de 69,8% e um acréscimo de 35,6% respectivamente, nessas regiões se comparado com o caso de $f=2$. Acima do pico de temperatura próximo a parede, há uma região em verde que compreende temperaturas entre 1100k e 1700k. Todavia, ela perpassa apenas o início do perfil, até $x \approx 0,3m$, se concentrando mais na parede do nariz. Acima e à jusante, a temperatura apresenta um gradiente representado pelos tons de cores laranja e vermelha, até atingir a região da saída, onde a temperatura chega a valores até 500K, próximo a superfície. Novamente, para fins de projetos de construção de foguetes, há de se considerar essas altas temperaturas na superfície do nariz.

Nessa seção foram analisados os perfis geométricos ótimos das simulações referentes a razão de aspecto 3. Comparações pertinentes com a razão de aspecto 2 foram realizadas. Buscou-se compreender o comportamento do escoamento entre essas duas razões. Verificou-se que o perfil geométrico entre os vários números de Mach estudados não apresenta mudanças significativas quando $f=3$ (apenas pontuais). Para todos os casos, ao aumentar a razão de aspecto notou-se que:

- A posição que a onda de choque toca o eixo de simetria tende a $x \rightarrow 0$.
- A região da onda de choque no contorno da saída aumenta de tamanho e isso tem a ver com o aumento do comprimento axial do perfil, resultado do próprio aumento na razão de aspecto.
- Todas as alturas das paredes frontais, no início do perfil, diminuiram de tamanho.
- O valor das variáveis no contorno da saída, de modo geral, tende a diminuir.

Além disso, ao analisar apenas a razão de aspecto 3 de forma isolada, os perfis otimizados admitem ondas de choque mais próximas ao nariz à medida que se aumenta o número de Mach.

Esse padrão também foi observado em $f=2$. A próxima seção é destinada a apresentação dos resultados para razão de aspecto 4.

5.4 Perfis ótimos para a razão de aspecto 4

Esta seção é destinada à análise dos perfis otimizados com razão de aspecto 4. A Figura 5.5 apresenta os perfis otimizados para os números de Mach 1,5; 2; 3; 4 e 6 e razão de aspecto 4. Os perfis também podem ser visualizados na Tabela B.3 do Apêndice B.

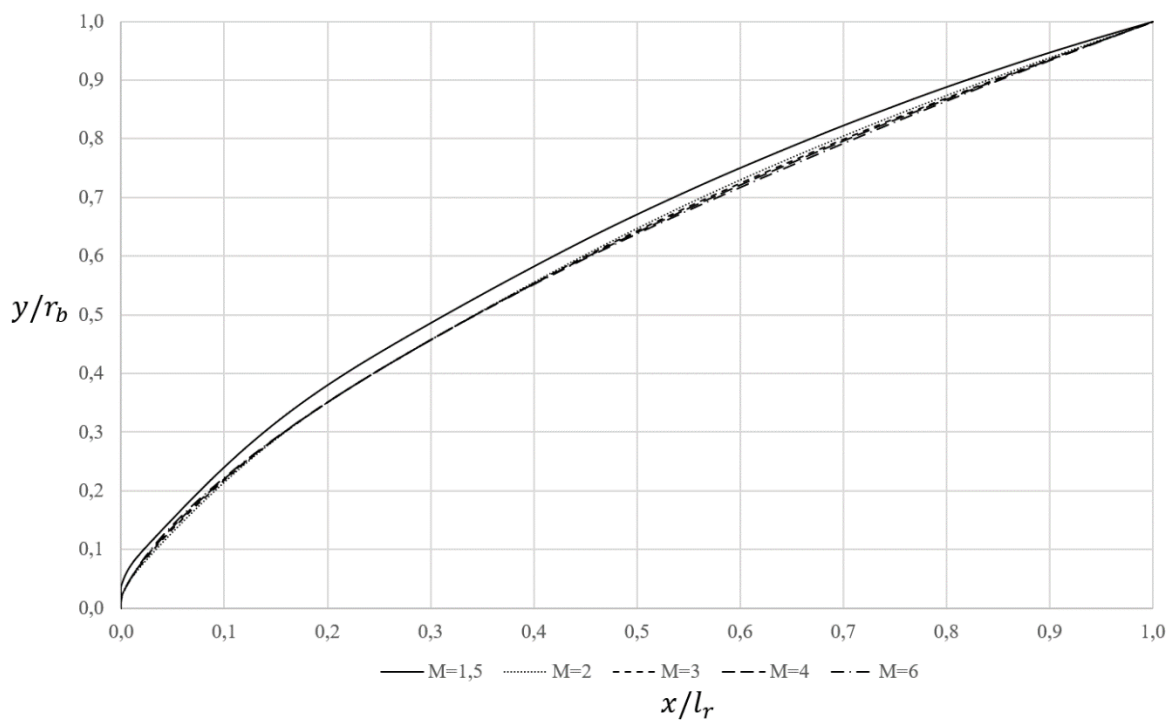


Figura 5.5 – Perfil ótimo para razão de aspecto, $f=4$, e números de Mach simulados.

Na Figura 5.5, os perfis ótimos para razão de aspecto $f=4$ possuem geometrias semelhantes, exceto para Mach 1,5. Essa geometria, assim como em $f=2$, apresenta um perfil maior que os demais números de Mach (logo, possui uma área maior). Do mesmo modo, a face plana também segue maior que nos demais casos. Já para os demais casos, há um comportamento semelhante ao ocorrido em $f=3$. Por volta de $x/l_r \gtrsim 0,35$, os perfis admitem um comportamento crescente relativos à área à medida em que o número de Mach diminui. Entre $0,04 \lesssim x/l_r \lesssim 0,3$ o padrão se inverte, ficando o perfil com Mach 6 acima, seguidos pelos perfis 4, 3, 2 e 1,5 abaixo, nessa ordem. Para toda faixa o perfil de Mach 1,5 é o maior que os

demais perfis. Em relação a face plana na ponta, os perfis abrangem alturas que estão entre $0,02 \lesssim x/l_r \lesssim 0,05$. Esses formatos ótimos destoam dos perfis ótimos na razão de aspecto 2. Enquanto os perfis apresentam comportamentos próximos entre si em $f=4$ (com exceção do caso em que $M=1,5$, no qual o perfil é ligeiramente maior que os demais), os perfis em $f=2$ apresentam maiores diferenças entre si, principalmente próximo à face plana, no início do nariz.

A Figura C.10 apresenta o campo de massa específica do perfil otimizado para razão de aspecto 4 e Mach 1,5. De acordo com a Figura C.10, observa-se que o campo de massa específica apresenta comportamento semelhante ao do caso $f=3$. Assim como naquele caso, a onda de choque frontal apresenta uma onda de choque com localização $x \approx -0,023m$ próximo a parede e com altura da região de saída delimitada por $y \approx 5,11m$. Se comparado com o caso de $f=3$, não houve alteração na primeira região enquanto na segunda houve um aumento de 28,4%. A região frontal também admite uma massa de fluido mais densa próxima a parede vertical, na cor azul, também na faixa de $2,79 \text{ kg/m}^3$. Já em relação ao contorno da saída, na região entre a onda de choque e o nariz, a massa específica possui valores entre 1,17 e $1,2 \text{ kg/m}^3$, que são ligeiramente menores que em $f=3$ (que giram em torno de $1,22 \text{ kg/m}^3$).

As demais propriedades possuem campos de escoamento que possuem aspectos qualitativos muito próximos aos perfis ótimos de $f=3$. Sendo assim, optou-se por fazer um resumo apenas do detalhe próximo à parede frontal. A Figura 5.6 apresenta os campos de Mach, pressão, momento linear em x e temperatura para os perfis otimizados para $f=4$ nos números de Mach 2, 3, 4 e 6, respectivamente.

Pela Figura 5.6, observa-se que os detalhes dos campos apresentados se assemelham bastante com os campos ótimos na razão de aspecto 3, apresentados nos detalhes do canto superior esquerdo das Figuras 5.4, C.7, C.8 e C.9.

Em relação ao campo de Mach para o caso $M=2$ e razão de aspecto 4, a onda de choque próximo a parede vertical ocorre em $x \approx -0,0066m$ enquanto na região do contorno da saída ocorre em $y \approx 2,98m$. Isso significa uma redução de 45% e um aumento de 23,4% se comparado com o perfil ótimo analisado em $f=3$. Assim como nos casos de razão de aspecto 2 e 3, no interior da onda de choque ocorrem os três regimes de escoamento: subsônico, transônico e supersônico.

No campo de pressão para $M=3$ e $f=4$ a onda de choque começa em $x \approx -0,0042m$ e termina em $y \approx 1,9m$, na região de saída. Em comparação com o caso de $f=3$, há uma redução e um aumento de 52,3% e 26,4%, respectivamente nessas regiões. O pico de pressão também é

da ordem de 12 vezes a pressão na corrente livre e a pressão na saída tem um pico de $p \approx 1,18p_\infty$, um decréscimo de $0,1p_\infty$ em relação ao perfil ótimo em $f=3$.

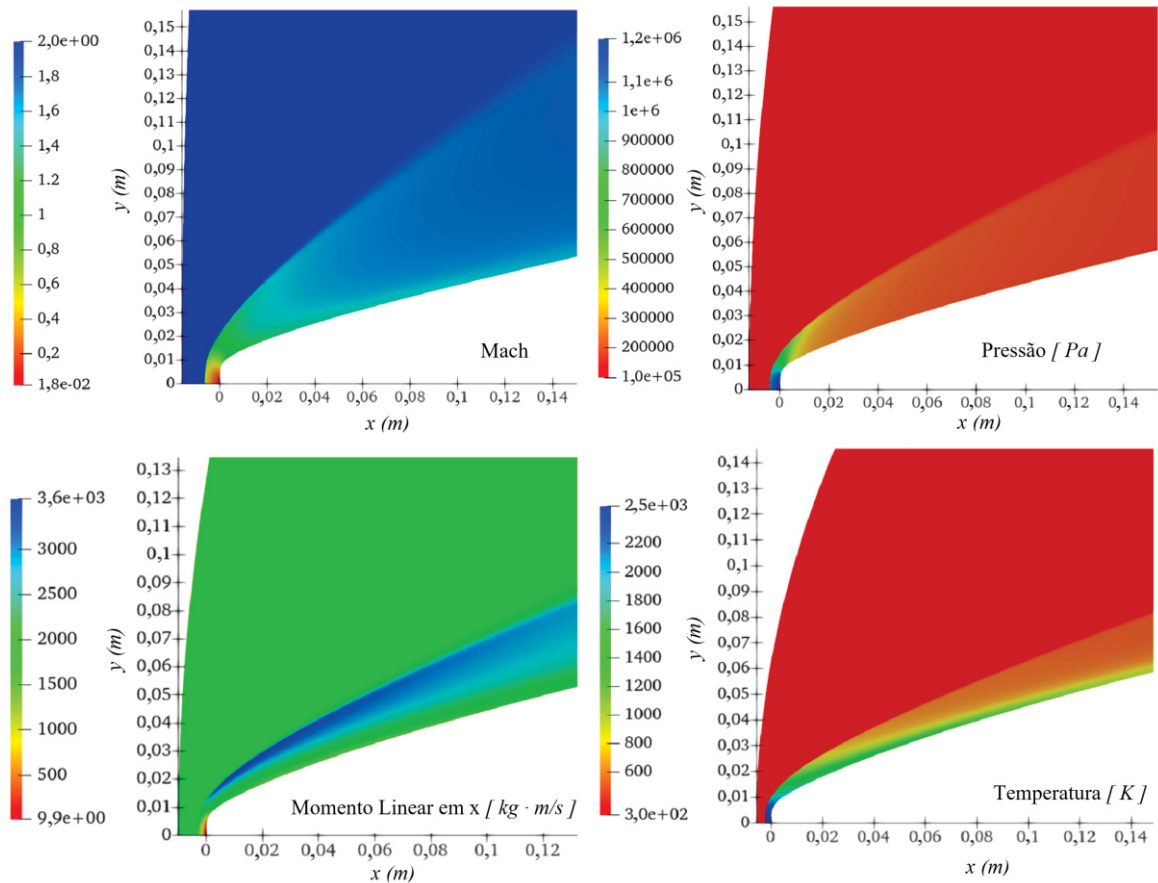


Figura 5.6 – Campos de Mach, pressão, momento linear em x e temperatura para os perfis ótimos nos números de Mach 2, 3, 4 e 6, respectivamente.

Para o momento linear em x com Mach 4 e $f=4$, as coordenadas analisadas da onda de choque são $x \approx -0,003m$ para a região frontal e $y \approx 1,44m$ na saída. Em comparação com o perfil ótimo de $f=3$ a redução é de 55,9% e o aumento é de 27,6% nessas regiões. Na região da saída o momento possui valores até $1900 \text{ kg} \cdot m/s$, uma redução de $100 \text{ kg} \cdot m/s$ se comparado com o perfil ótimo de $f=3$.

Por fim, sobre o campo de temperaturas para Mach 6 e razão de aspecto 4, a onda de choque inicia-se em $x \approx -0,0025m$, próximo a parede frontal e termina em $y \approx 1,06m$ quando $x = 0,5m$. Em comparação com o mesmo perfil otimizado em $f=3$ há uma redução de 54,4% e um acréscimo de 27,8%. A temperatura na saída atinge valores até 360 K, apresentando uma redução de 140 K quando se compara com o caso otimizado em $f=3$.

Como pode-se observar, as mesmas considerações feitas nos 4 pontos mencionadas no final da seção 5.3, também se aplicam para essa seção. Portanto, com exceção do caso Mach 1,5, em que não houve diminuição da espessura frontal da onda de choque (e somente esse aspecto não foi constatado), todas mudanças ocorridas dos perfis ótimos de $f=2$ para $f=3$ também foram verificadas de $f=3$ para $f=4$. Sendo assim pode se dizer que há uma tendência no comportamento qualitativo dos perfis otimizados quando a razão de aspecto se torna maior.

A próxima seção é destinada a uma análise comportamental dos perfis otimizados em relação as razões de aspecto estudadas nas seções 5.2, 5.3 e 5.4. Através dessa análise será possível compreender melhor a dinâmica da formação dos perfis.

5.5 Razões de aspecto e razão do formato dos perfis ótimos

Nessa seção realiza-se uma análise sobre os gráficos dos perfis otimizados e o comportamento em relação as razões de aspecto estudadas. Para complementar, uma análise sobre aspectos físicos permitirá uma compreensão melhor da relação entre área frontal, o coeficiente de arrasto e o perfil ótimo propriamente dito.

A Figura 5.7 apresenta um gráfico com o perfil otimizado para Mach 1,5 e razões de aspecto 2, 3 e 4.

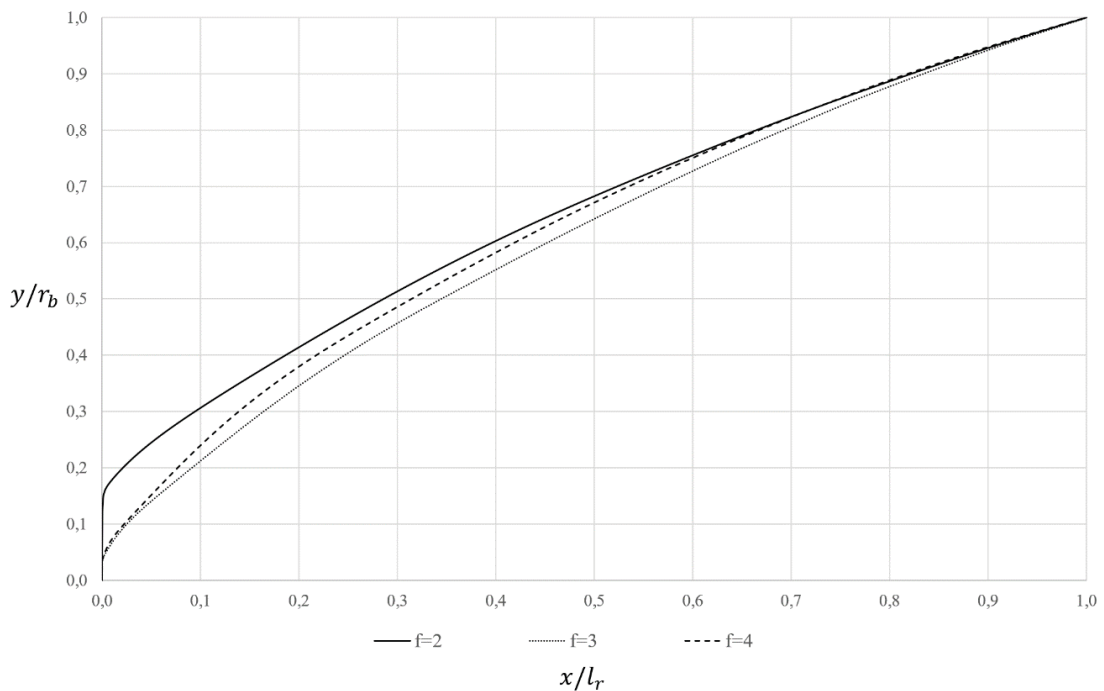


Figura 5.7 – Gráfico dos perfis otimizados para $M=1,5$ e razões de aspecto 2, 3 e 4.

De acordo com o gráfico apresentado na Figura 5.7, o maior perfil, incluindo maior área frontal se dá para a razão de aspecto 2. Logo abaixo, aparece o perfil de razão 4, seguido pelo menor perfil, de razão 3. Esse é um resultado curioso, pois destoa das tendências sugeridas na seção anterior, pois o perfil de $f=4$ fica entre os perfis de $f=2$ e $f=3$ para quase toda faixa. De fato, por se tratar de um escoamento próximo a região de transição transônica, houve maior dificuldade nas simulações. Essa dificuldade também reflete na maior diferença relativa dos coeficientes de arrasto na comparação da Tabela 5.2, com 1,28% para os resultados de Kraiko *et al* (2013) em $f=4$ e 2,81% nos resultados de Oliveira (2018) para $f=3$. As Figuras 5.8, 5.9, 5.10 e 5.11 apresentam gráficos dos perfis otimizados para os números de Mach 2, 3, 4 e 6, respectivamente.

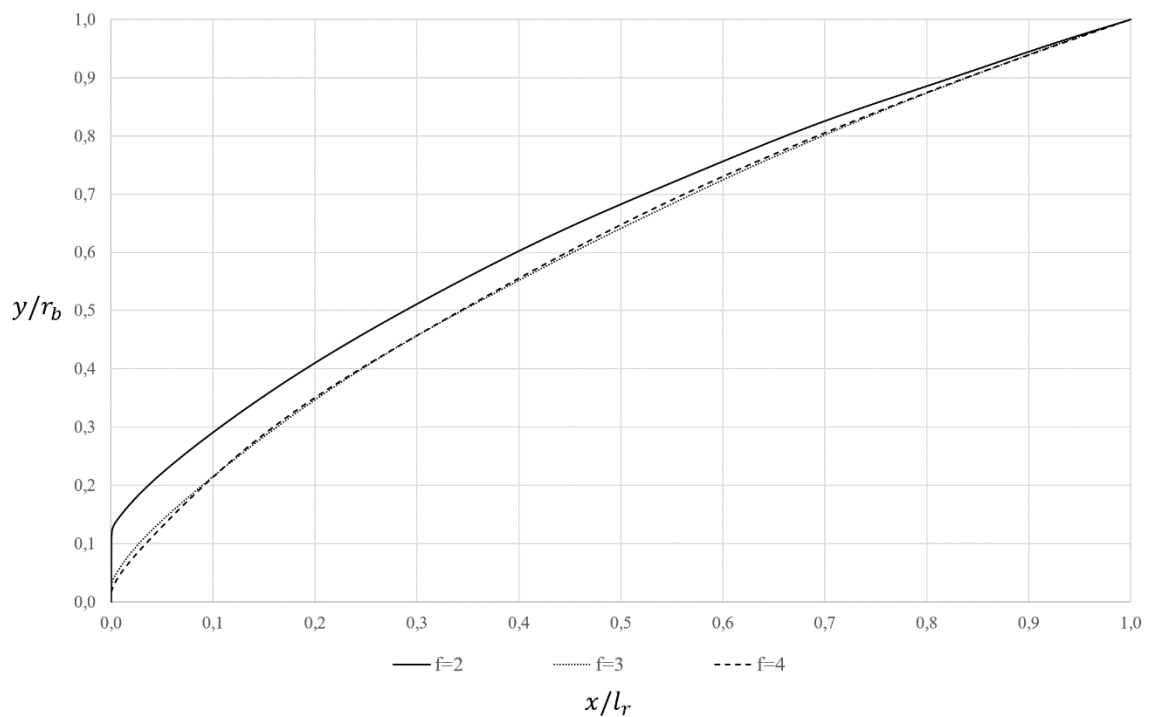


Figura 5.8 – Gráfico dos perfis otimizados para $M=2$ e razões de aspecto 2, 3 e 4.

Assim como no gráfico da Figura 5.7, o perfil de razão 2 também possui maior área na Figura 5.8, para Mach 2. Todavia, embora o perfil de razão 4 apresente maior altura para valores de $x/l_r \gtrsim 0,3$, o perfil de razão de aspecto 3 apresenta um aspecto mais arredondado para $x/l_r < 0,1$, e com maior área frontal se comparado a razão 4. Sendo assim, em regiões próximas a ponta do nariz, a área diminui com o aumento da razão de aspecto.

Na Figura 5.9 o perfil de $f=2$ já não é o maior em toda extensão. Nesse caso, para $x/l_r \gtrsim 0,3$ o perfil $f=4$ admite maior altura. Contudo, para valores de $x/l_r < 0,1$ a sequência novamente está bem estabelecida, com a redução da área à medida que se aumenta a razão de aspecto. Nota-se também que há maior proximidade entre os perfis de razões 3 e 4.

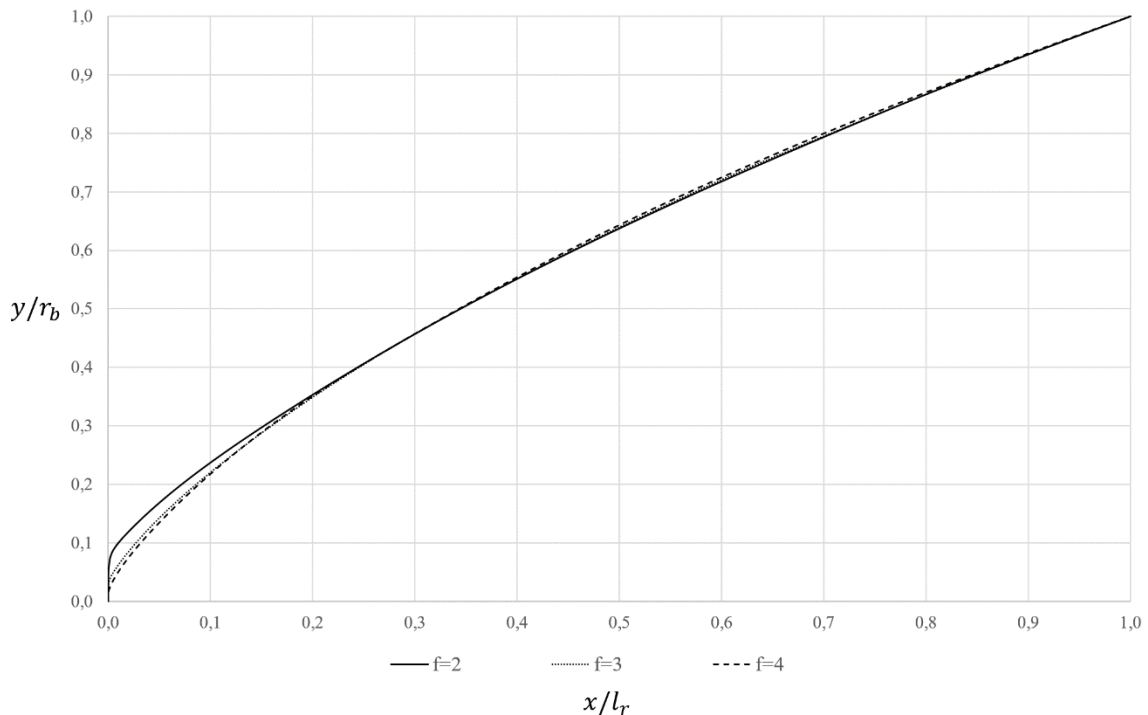


Figura 5.9 – Gráfico dos perfis otimizados para $M=3$ e razões de aspecto 2, 3 e 4.

Por fim, os perfis de maior número de Mach, 4 e 6 (Figuras 5.10 e 5.11, respectivamente) possuem comportamentos qualitativo parecidos. Embora o perfil de Mach 4 apresente um ligeiro aumento no tamanho para $f=4$, quando $x/l_r \gtrsim 0,4$, em relação as demais razões, o comportamento próximo ao início do perfil se verifica: A área (incluindo a face frontal) diminui com o aumento da razão de aspecto. As discrepâncias entre os perfis ótimos de razões 3 e 4 também tendem a diminuir com o aumento do número de Mach, como mostra a Figura 5.11.

Até o presente momento, foi possível verificar que quanto maior a razão de aspecto (ou número de Mach), menor o perfil geométrico ótimo, ao menos em regiões próximas à ponta do nariz, no início do perfil. Por outro lado, constatou-se também que, por consequência, um perfil menor na ponta implica em uma menor área frontal. Uma questão pertinente a essa altura é: Por que a face frontal é plana (ou aproximadamente plana, no caso do presente trabalho)? E mais... Por que ela fica cada vez menor com o aumento de f ou M ? A análise a seguir procura trazer

uma resposta à essas perguntas.

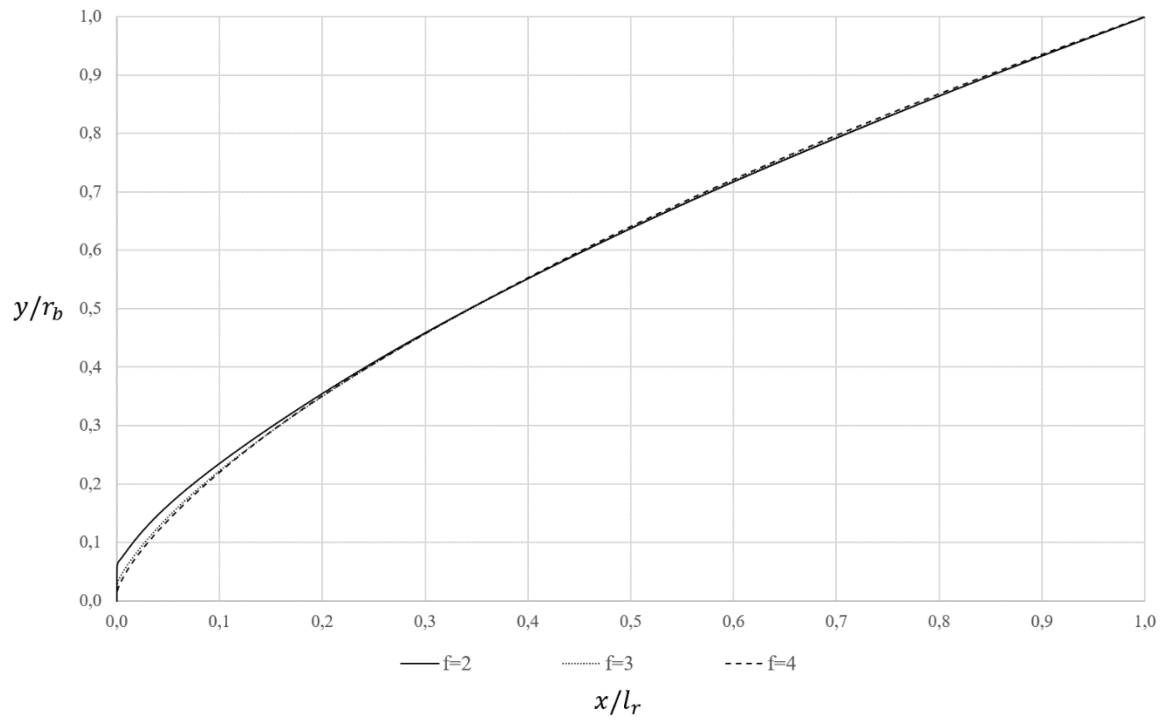


Figura 5.10 – Gráfico dos perfis otimizados para $M=4$ e razões de aspecto 2, 3 e 4.

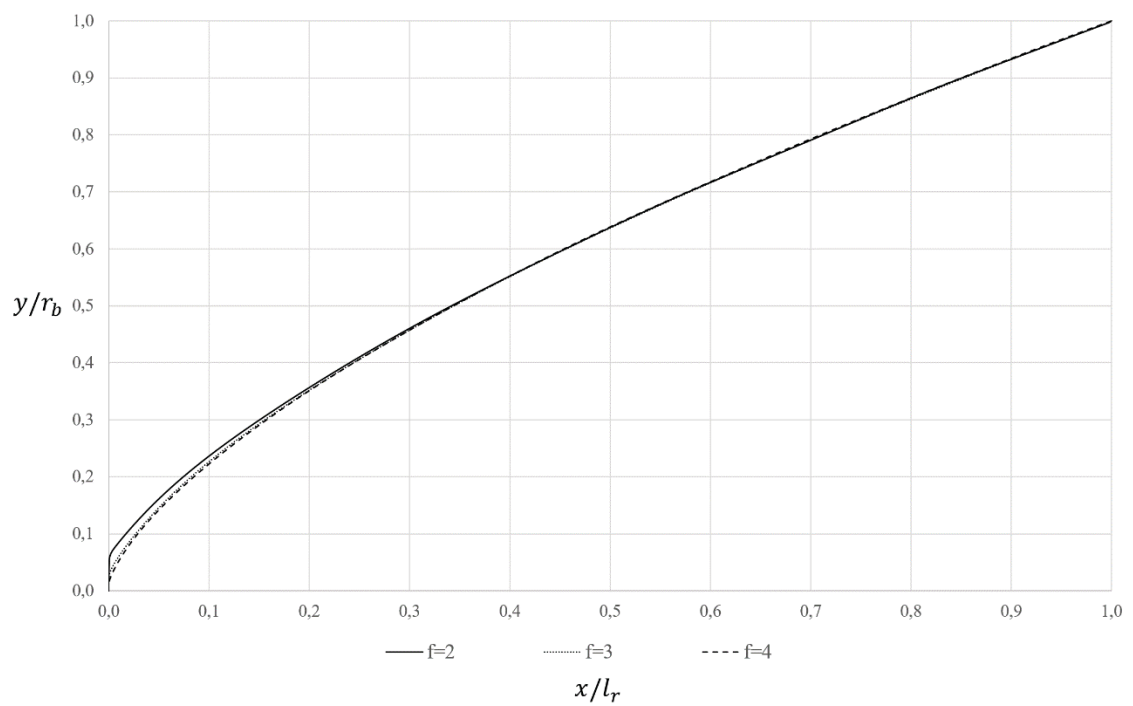


Figura 5.11 – Gráfico dos perfis otimizados para $M=6$ e razões de aspecto 2, 3 e 4.

Uma forma de compreender melhor a relação do coeficiente de arrasto nos perfis geométricos ótimos é analisar um gráfico da pressão em função da área da seção transversal do objeto estudado, dada por $A = \pi y^2$. A Figura 5.12 ilustra esse cenário para os perfis ótimo e cônico com razão de aspecto 2 e Mach 3.

Pela Figura 5.12 é possível observar que, para o perfil cônico, a pressão é constante em todo perfil geométrico enquanto no perfil ótimo há um pico de pressão logo no início, onde a área é menor. Esse pico fica mais bem compreendido ao observar novamente a Figura C.2, onde é apresentado campo de pressão. Ao fazer um exame do campo nota-se que há um pico de pressão em azul próximo a parede, na ponta do perfil, quando $x \rightarrow 0$. À medida que se caminha na direção da base (e, conseqüentemente, a área da seção transversal aumenta), rapidamente a pressão começa a cair, passando brevemente de verde-amarelo a um tom cada vez mais avermelhado e homogêneo até atingir a base, em $x = 2m$. O gráfico da Figura 5.12 transcreve quantitativamente essa análise qualitativa. Nele, após o pico de pressão descrito, a curva cai rapidamente até atingir menores valores de pressão próximos à base (excetuando uma pequena oscilação no fim).

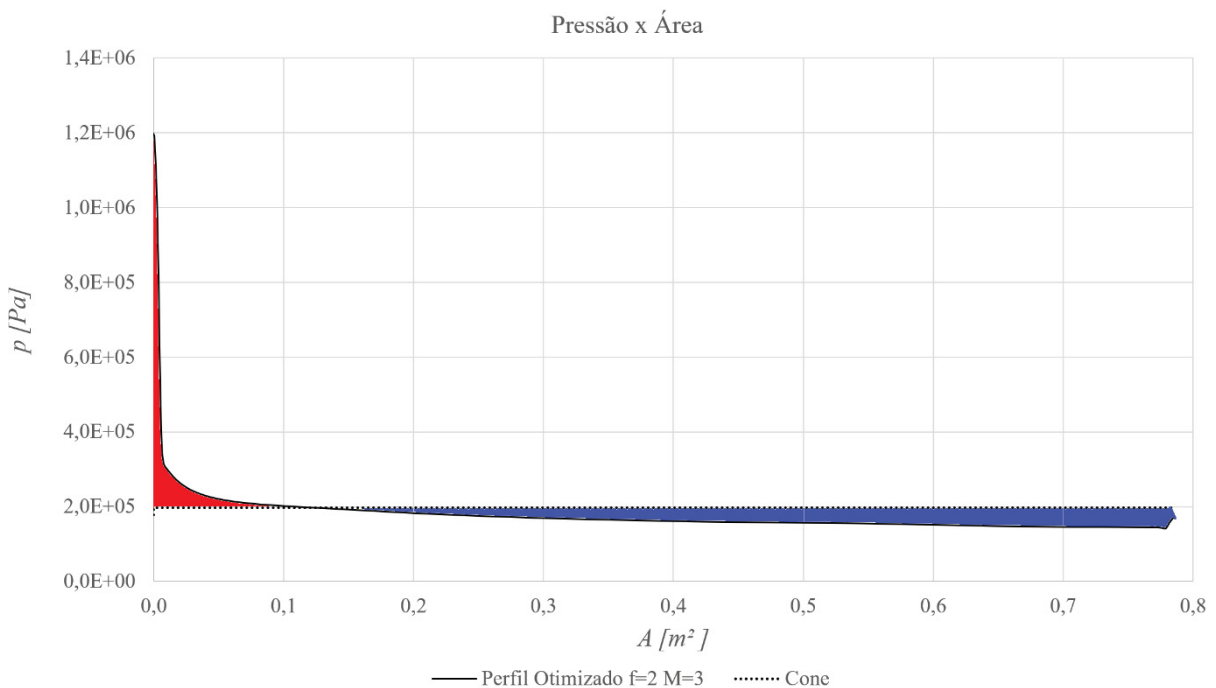


Figura 5.12 – Gráfico da Pressão versus Área da seção transversal para os perfis ótimo e cônico para $f=2$ e Mach 3.

Como o coeficiente de arrasto é proporcional a força aplicada ao objeto e essa, por sua

vez, é um produto da pressão e a área em questão, para minimizar o arrasto é necessário que haja uma pressão grande confinada a uma pequena área que, no caso do perfil ótimo, está localizada na ponta do nariz (representada pela parede vertical). Em contraste com o perfil cônico, onde a pressão do fluido atinge o cone de maneira uniforme, o perfil ótimo admite pressões cada vez menores à medida que a área vai aumentando de forma gradativa. Nesse caso, em outras palavras, há um melhor balanceamento de forças que acaba por gerar um coeficiente de arrasto menor se comparado com o perfil cônico, por exemplo (e todos outros também, por definição). De acordo com a Figura 5.12, nota-se que a área excedente do perfil otimizado, em vermelho, é menor que a diferença no perfil cônico, em azul. Nesse caso o perfil ótimo apresenta um $C_D = 0,12149$ ao passo que o perfil cônico possui um $C_D = 0,154552$. Essa análise elucida o fato de os perfis otimizados apresentarem uma pequena parede vertical no início, que implicam em uma pequena área de aplicação de força com alta pressão.

Nesse capítulo foram apresentados os resultados oriundos do processo de simulação, descritos no capítulo 4. Em primeiro lugar foi realizada uma apresentação dos coeficientes de arrasto ótimos com suas respectivas incertezas e comparações com resultados da literatura. Em seguida apresentou-se os perfis otimizados juntamente com os campos de escoamento para cinco variáveis: massa específica ($M=1,5$), número de Mach ($M=2$), pressão ($M=3$), momento linear em x ($M=4$) e temperatura ($M=6$), para as três razões de aspecto estudadas, $f=\{2,3 \text{ e } 4\}$. Logo após foram realizadas análises sobre os perfis ótimos e suas relações com a razão de aspecto e número de Mach. Por fim, através da análise do gráfico da pressão versus a área transversal foi possível elucidar questões pertinentes aos resultados obtidos e a forma dos perfis ótimos.

No próximo capítulo serão realizadas as conclusões do trabalho, no qual são sintetizados os principais pontos e descobertas. Na sequência serão sugeridos temas correlacionados com o presente projeto para execução de trabalhos futuros.

6 CONCLUSÃO

O presente trabalho buscou realizar um estudo numérico direcionado à otimização de perfis geométricos de nariz de foguete em regimes supersônico e hipersônico (um caso, $M=6$) com o objetivo de reduzir o coeficiente de arrasto, C_D . Para alcançar essa etapa as equações de Euler foram resolvidas numericamente através do método os volumes finitos com interpolações dos termos advectivos dado pelos métodos JST e Lax & Friedrichs, para resolver um escoamento invíscido, bidimensional e axissimétrico. O programa de código livre SU2 v.6.2.0 foi utilizado para a solução do escoamento, cálculo do coeficiente de arrasto e administração do otimizador. O processo de otimização, embora dentro do próprio programa SU2, utilizou a biblioteca SciPy (também de domínio livre, no Python) através do algoritmo de Programação Sequencial Quadrática, SLSQP. Com o auxílio do método adjunto discreto, implementado no próprio código SU2 e que teve por fim acelerar o processo de otimização, foram obtidos os perfis geométricos com 7 e 10 variáveis de otimização para cinco números de Mach: 1,5; 2; 3; 4 e 6 com razões de aspecto 2, 3 e 4, totalizando 15 perfis otimizados.

Para alcançar os perfis ótimos buscou-se tomar certas medidas que antecederam o processo de otimização e que tiveram por objetivo assegurar que a solução estivesse livre de problemas recorrentes na dinâmica de fluido computacional. Através de um estudo do escoamento sobre um perfil cônico, foi verificado que o programa SU2 forneceu um resultado que chegou até a 0,000189765% de diferença em relação aos resultados de Taylor e Maccoll (1933). Além disso, foram testados três tipos de distribuição de variáveis de otimização e verificou-se que não há grandes mudanças nos resultados, sendo apenas necessário acumular variáveis no início do perfil, próximo à parede frontal. Um teste de malhas também auxiliou a delimitar a extensão do domínio computacional, juntamente com a densidade de elementos e distribuição dos mesmos. Todavia, embora todos esses cuidados dispendidos na busca de um padrão de procedimento para todas as simulações, na prática, cada caso necessitou de determinado tratamento particular, fugindo assim de uma receita estabelecida *à priori*, restando apenas tomar cuidados relativos ao tamanho do domínio e a convergência das soluções em cada passo.

Em comparação com os resultados de Kraiko *et al.* (2003), os perfis ótimos apresentaram diferenças relativas nos coeficientes de arrasto de 0,15% a 1,28% para $f=2$ e 0,43% a 1,283% para $f=4$. Já para $f=3$, em comparação com os resultados numéricos de Oliveira (2018), as

diferenças no Cd ficaram em 0,57% a 2,81% sendo essa última em relação ao caso apresentado em Mach 1,5. Embora o presente trabalho tenha necessitado realizar de dois a três processos de otimizações em sequência para cada caso, ao total, o processo de simulação levou em média 7 horas. Em comparação com os resultados de Oliveira (2018), embora os trabalhos possuam metodologias distintas o presente trabalho levou de 1,8% a 7,6% do tempo computacional do autor em casos com $f=2$. Isso é um ótimo resultado, pois possibilitou o uso de computadores domésticos nas simulações, evitando o uso de clusters ou supercomputadores.

Nos resultados foi verificado que a estrutura do perfil ótimo compreende, assim como outros resultados da literatura, uma parede plana, seguida por um perfil côncavo que atinge o raio da base. Ao estudar os campos de massa específica, Mach, pressão, momento linear em x e temperatura, observou-se uma formação de onda de choque em cada perfil otimizado que compreende uma variação abrupta de propriedades como pressão, massa específica e temperatura no início da parede frontal e que se atenua ao longo da onda de choque. Para cada razão de aspecto estudada, a onda de choque tende a admitir uma distância cada vez menor na região próxima à parede frontal ao aumentar do número de Mach. Fixado o número de Mach, ao aumentar a razão de aspecto, observou-se novamente uma diminuição da distância da onda de choque à parede frontal, porém, na região da saída há um aumento a altura da onda e uma redução da intensidade das propriedades. Isso está relacionado ao próprio aumento da extensão do perfil.

Em relação à geometria dos perfis otimizados, observou-se uma diminuição da área em regiões próximas ao início do nariz (e, por consequência, a parede vertical) quando se aumenta o número de Mach ou a razão de aspecto, com exceção do caso em que $f=3$ e $M=1,5$. Para as demais regiões o comportamento dos perfis otimizados foi distinto. No caso de $f=3$, por exemplo, os perfis ficaram próximos uns dos outros enquanto para os casos $f=2$ e $f=4$ houve maiores diferenças principalmente em relação aos perfis de Mach menor. Através de uma análise entre o gráfico da pressão *versus* a área frontal de um perfil otimizado em comparação com um perfil cônico, pôde-se constatar que a existência da parede frontal serve como um atenuante da força sobre o nariz no sentido de confinar uma alta pressão em uma pequena área e, assim, reduzir a força ao longo da geometria. Esse é o motivo pelo qual a área frontal se torna cada vez menor à medida em que o número de Mach (e, por consequência, a pressão) aumenta.

Por fim, acredita-se que o presente trabalho tenha cumprido com seus objetivos e tenha contribuído com a literatura através dos seus resultados e que a metodologia empregada seja útil para ajudar em trabalhos futuros e projetos de CFD.

A seguir são apresentados temas relacionados para trabalhos futuros:

- Estudar o comportamento do perfil ótimo para razões de aspecto e números de Mach maiores.
- Estudar perfis otimizados para regimes de escoamento subsônico e transônico.
- Implementar o uso de modelos com viscosidade e comparar os resultados.
- Estudar o efeito de modelos de turbulência.
- Mudar as condições do ar e atmosfera.
- Estudar otimização no nariz de torpedos, utilizando água como fluido.

REFERÊNCIAS

- AHMED, M.Y.M.; QIN, N., **Surrogate-Based Multi-Objective Aerothermodynamic Design Optimization of Hypersonic Spiked Bodies**. AIAA Journal. Vol. 50, No. 4, 2012.
- ANDERSON JR., J. D. **Modern compressible flow: with historical perspective**. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2003.
- BENSON, T (2021), **Brief History of Rockets**. NASA Spacelink, https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/TRC/Rockets/history_of_rockets.html. Acesso em 30/01/2022.
- BERTOLDO, G., **Otimização aerodinâmica de Newton com base nas equações de Navier-Stokes**, 2014.
- BOL'SHIYANOV, P.; ZAKHAROV, N.N.; P'YANKOV, K.S.; TILLYAEVA, N.I.; **Optimal Axisymmetric Noses of Bodies in a Flow. Calculations and Experiments**. Fluid Dynamics, Vol. 53, No. 2, pp. 296–304, 2018.
- BRAHMACHARY,S.; NATARAJAN,G.; SAHOO,N. **A Hybrid Aerodynamic Shape Optimization Approach for Axisymmetric Body in Hypersonic Flow**, Fluid Mechanics and Fluid Power – Contemporary Research pp 301-311, 2016.
- BUSEMANN, A., **Flussigkeits- und Gasbewegung. Handwörterbuch der Naturwissenschaften**, Zweite Auflage (Gustav Fischer, Jena) 1933, pp. 257-277.
- BRANCH, M. A.; COLEMAN, T. F.; LI, Y., **A Subspace, Interior, and Conjugate Gradient Method for Large-Scale Bound-Constrained Minimization Problems**, SIAM Journal on Scientific Computing, Vol. 21, Number 1, pp 1-23, 1999.
- BRANDT, A.; LIVNE, O. E., **Multigrid Techniques 1984 Guide to Multigrid Development Applications to Computational Fluid Dynamics**, SIAM, 1984.
- BYRD, R.H.; SCHNABEL, R. B.; SHULTZ, G. A., **Approximate solution of the trust region problem by minimization over two-dimensional subspaces**, Math. Programming, 40, pp. 247-263, 1988.
- CHIN, S. S. **Missile Configuration Design**. McGraw-Hill Book Company, INC, Flórida, pp. 27-28. 1961.
- CONN, A.R.; GOULD, N.I.M.; TOINT, P.L., **Trust-Region Methods**. Siam. Pp. 169-200. 2006.
- CORLISS, G. F.; FAURE, C.;GRIEWANK, A.; HASCOET, L. **Automatic Differentiation of**

- Algorithms: From Simulation to Optimization.** Springer Verlag, New York, 2002.
- COURANT, R.; FRIEDRICHS, K.; LEWY, H., **On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics**, IBM Journal of Research and Development, Março, 1967.
- DEVRIES, B.; IANNELLI, J.; TREFFTZ, C.; O’HEARN, K. A.; WOLFFE, G. **Parallel Implementations of FGMRES for Solving Large, Sparse non-Symmetric Linear Systems.** Procedia Computer Science 18, pp. 491 – 500, 2013.
- ECONOMON, T.D.; PALACIOS, F.; COPELAND, S.R.; LUKACZYK, T.W.; ALONSO, J.J, **SU2 An Open-Source Suite for Multiphysics Simulation and Design**, AIAA JOURNAL, Vol. 54, No. 3, 2016.
- ECONOMON, T.D.; WEIDE, E. V. D., <https://github.com/su2code/VandV> [Acesso online 2021-10-09].
- ECONOMON, T.D., https://su2code.github.io/tutorials/Inviscid_2D_Unconstrained_NACA_0012/ [Acesso online 2021-10-09], 2013.
- ECONOMON, T.D., **Simulation and Adjoint-based Design for VariableDensity Incompressible Flows with Heat Transfer**, Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference AIAA, 2018.
- EGGERS JR., A. J.; RESNIKOFF, M. M.; DENNIS, D. H. **Bodies of revolution having minimum drag at hypersonic airspeeds.** NACA 1306, 1956.
- FINK, M. R. **Hypersonic minimum-drag slender bodies of revolution.** AIAA, v. 4, n. 10, p. 1717–1724, 1966.
- GNEMMI, P.; SRULIJES, J.; ROUSSEL, K.; RUNNE, K. **Flowfield Around Spike-Tipped Bodies for High Attack Angles at Mach 4.5.** Journal of Spacecraft and Rockets, vol. 40, No 5, 2003.
- GONOR, A. L.; CHERNYI, G. G. **On bodies of minimum drag at hypersonic speed.** Izvestiya Akademii Nauk SSSR, n. 7, 1957.
- GRIEWANK, A.; WALTHER, A. **Evaluating Derivatives: Principles and Techniques of Algorithmic Differentiation** (2nd ed.). Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2008.
- HAACK, W., **Projectile Forms of Minimum Wave Resitance** (Tradução) Douglas Aircraft Company, Inc., Rep. 288, 1946.
- HAN, S.P. **A globally convergent method for nonlinear programming** J. Opt. Theory Applic. 22, 297-309, 1977.
- HORSTMANN, D.; KAWOHL, B.; VILLAGGIO, P. **Newton’s aerodynamic problem in the**

- presence of friction.** *NODEA-Nonlinear Differential Equations And Applications*, 9, n. 3, p. 295–307, 2002. ISSN 1021-9722.
- HUNLEY, J.D., **The Enigma of Robert H. Goddard.** *Technology and Culture*. V. 36 n.2, p. 327–50, 1995.
- JAMESON, A.; SCHMIDT, W.; TURKEL, E., **Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes.** *AIAA Journal*, julho, 1981.
- JONES, E.; OLIPHANT, E.; PETERSON, P., **SciPy: Open Source Scientific Tools for Python**, -, <http://www.scipy.org/> [Acesso online 2019-04-07], 2001.
- KÁRMÁN, T. von. **The problem of resistance in compressible fluids.** In: **Convegno di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali sul tema: Le Alte Velocità in Aviazione.** Roma: Reale Accademia d'Italia, 1935.
- KRAIKO, A. et al. **Axisymmetric nose shapes of specified aspect ratio, optimum or close to optimum with respect to wave drag.** *PMM Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 67, n. 5, p. 703–730, 2003. ISSN 0021-8928.
- KRAFT, D., **A Software Package for Sequential Quadratic Programming.** Köln: Forschungsbericht, Vol. 88 ed. 28, Wiss. Berichtswesen d. DFVLR, 1988.
- KOSMODEMYANSKY, D., **Konstantin Tsiolkovsky His Life and Work.** University Press of the Pacific, 2000.
- LANDAU, L. D.; LIFSHITZ, E. M., **Fluid mechanics.** 2^a ed. Oxford: Pergamon Press, 1987.
- LAX, P., **Weak Solutions of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computaiton.** *Communications on Pure and Applied Mathematics*, Vol VII, pp 159-193, 1954.
- LAWSON, C. L.; HANSON, R.J., **Solving Least Squares Problems.** Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1974.
- LORGE, P, **War, Politics and Society in Early Modern China, 900–1795,** Routledge, Taylor & Francis Group, 2005.
- MAHAPATRA, D.; SRIRAM, R.; JAGADEESH, G. **Effect of counterflow argon plasma jet on aerodynamic drag of a blunt body at hypersonic Mach numbers.** *Aeronautical Journal*, 112, 1137, p. 683–687, NOV 2008. ISSN 0001-9240.
- MANSON, W. H.; LEE, J. **Minimum-drag axisymmetric bodies in the supersonic/hypersonic flow regimes.** *Journal of Spacecrafts and Rockets*, v. 31, n. 3, p. 406–413, 1994.
- MARCHI, C.H. **Verificação de Soluções Numéricas Unidimensionais em Dinâmica dos**

Fluidos, Florianópolis, 2001.

MARCHI, C. H.; ARAKI, L. K. **Relatório técnico do projeto CFD-10/UFPR: códigos Mach2D 6.1 e RHG2D 1.0**. Curitiba, 2009.

MIELE, A. (Ed.). **Theory of optimum aerodynamic shapes**. New York: Academic Press, 1965.

MORE, J. J., **The Levenberg-Marquardt Algorithm: Implementation and Theory, Numerical Analysis**, ed. G. A. Watson, Lecture Notes in Mathematics 630, Springer Verlag, pp. 105-116, 1977.

NELSON, R. L.; STONEY, W.E., **Pressure Drag of Bodies at Mach Numbers up to 2.0**. Research Memorandum L53I22C, NACA, Washington, 1953.

NEUFELD, M. J. **The Rocket and the Reich**. Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press. p. 52, 53, 274, 277, 1996.

NEWTON, I, **Philosophiae Naturalis Principia Mathematica**, 1687.

ÖLÇMEN, S.M.; CHENG, G.C.; BRANAM, R.; JONES, S.E.; **Minimum Drag and Heating 0.3-Caliber Projectile Nose Geometry**. Journal of Mechanical Engineering Science, 2018.

OLIVEIRA, A. A., **Otimização numérica de coeficiente de arrasto de nariz de foguete em escoamento supersônico**, 2018.

PALACIOS, F.; COLONNO, M. R.; ARANAKE, A. C.; CAMPOS, A.; COPELAND, S. R.; ECONOMON, T. D.; LONKAR; A. K.; LUKACZYK, T. W.; TAYLOR, T.W.R.; ALONSO, J. J. **Stanford University Unstructured (SU2): An open-source integrated computational environment for multi-physics simulation and design**, 51st AIAA Aerospace Sciences Meeting, pp. 30-31, 2013.

PALMEIRO, A. F, **Introdução à Tecnologia de Foguetes**. São José dos Campos, SP, SindCT, 2017.

PARKER, H. M., **Minimum-drag ducted and pointed bodies of revolution based on linearized supersonic theory**. NACA 1213, 1954.

PERKINS, E. W.; JORGENSEN, L. H.; SOMMER, S. C. **Investigation of the drag of various axially symmetric nose shapes of fineness ratio 3 for Mach numbers from 1.24 to 7.4**. NACA 1386, 1952.

PATANKAR, S. V., **Numerical Heat Transfer and Fluid Flow**, New York: McGraw-Hill, 1980.

POWELL, M.J.D., **A fast algorithm for nonlinearly constrained optimization calculations**. Numerical Analysis. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 630. Springer, Berlin, 1978.

- POWERS, S. A. **Drag minimization using exact methods.** AIAA, v. 2, n. 5, p. 941–943, 1964.
- ROY, C. J.; NELSON, C.C.; SMITH, T.M.; OBER, C. C., **Verication of Euler Navier–Stokes Codes Using the Method of Manufactured Solutions.** Int. J. Numer. Meth. Fluids 2004.
- SAAD, Y, **A Flexible Inner-Outer Preconditioned GMRES Algorithm.** SIAM J. Sci. Comput. Vol 14 No. 2 pp. 461-469, março, 1993
- SEAGER, C.; AGARWAL, R.K., **Shape Optimization of an Axisymmetric Blunt Body in Hypersonic Flow for Reducing Drag and Heat Transfer.** AIAA, 53rd Aerospace Sciences Meeting, Kissimmee, Florida, 2015.
- SCHINETSKY, P.A.; BROOKER, B.T; TREADWAY, A.; ÖLÇMEN, S.M.; JONES, S.E., **Numerical and Experimental Analysis of Projectile Nose Geometry.** Journal of Spacecraft and Rockets, vol 52, n. 5, 2015.
- SCHITTKOWSKI, K., **The nonlinear programming method of Wilson, Han, and Powell with an augmented Lagrangian type line search function. Part2: An efficient implementation with linear least squares subproblems.** Numer. Math. 38, pp 115-127, 1981.
- STINE, G.H., **Model Rocketry’s New Look.** American Modeler, New York, p. 36-47, MAY, 1961.
- STONEY, W.E., **Transonic Drag Measurements of Eight Body-Nose Shapes.** Research Memorandum, NACA, Washington, 1954.
- STONEY, W.E., **Collection of Zero-Lift Drag Data on Bodies of Revolution from Free-Flight Investigations.** Technical note, 4201, NACA, Washington, 1958.
- TAYLOR, G. I.; MACCOLL, J. W. **The Air Pressure on a Cone Moving at High Speeds.** Proceedings of the Royal Society of London A, v. 139, n. 838, p. 278-297, fev. 1933.
- WHITE, F. M., **Fluid Mechanics.** 7^a ed., McGraw-Hill, New York, NY, 2009.
- XUE, Y.; WANG, L.; FU, S., **Drag Reduction and Aerodynamic Shape Optimization for Spike-Tipped Supersonic Blunt Nose.** Journal of Spacecraft and Rockets, vol. 55, No 3, 2018.
- ZANDBERGE, P. J. **On the Determination of Optimum Shapes with Finite Nose Angles.** Amsterdam, The Netherlands, NLR-TR G.30, 1964.

APÊNDICE A

Exemplo de arquivo de entrada do programa SU2 para a otimização do caso $f=3$ e Mach 3.

```

PHYSICAL_PROBLEM= EULER
KIND_TURB_MODEL= NONE
MATH_PROBLEM= DIRECT
REGIME_TYPE= COMPRESSIBLE
AXISYMMETRIC= YES
RESTART_SOL= NO
DISCARD_INFILES= NO
SYSTEM_MEASUREMENTS= SI
MACH_NUMBER= 3.0
AOA= 0.0
SIDESLIP_ANGLE= 0.0
INIT_OPTION= TD_CONDITIONS
FREESTREAM_OPTION= TEMPERATURE_FS
FREESTREAM_PRESSURE= 100000.0
FREESTREAM_TEMPERATURE= 300.0
FREESTREAM_VELOCITY= ( 1.041671368522722e+03, 0.00, 0.00 )
REF_DIMENSIONALIZATION= DIMENSIONAL
REF_ORIGIN_MOMENT_X = 0.25
REF_ORIGIN_MOMENT_Y = 0.00
REF_ORIGIN_MOMENT_Z = 0.00
REF_LENGTH= 3.0
REF_AREA= 0.785398163397448
FLUID_MODEL= STANDARD_AIR
GAMMA_VALUE= 1.4
GAS_CONSTANT= 287.058
CRITICAL_TEMPERATURE= 131.00
CRITICAL_PRESSURE= 3588550.0
ACENTRIC_FACTOR= 0.035
SPECIFIC_HEAT_CP= 1004.703
THERMAL_EXPANSION_COEFF= 0.00347
MOLECULAR_WEIGHT= 28.96
CP_POLYCOEFFS= (0.0, 0.0, 0.0, 0.0, 0.0)
MARKER_EULER= ( ogive1, ogive2 )
MARKER_SYM= ( symmetry )
MARKER_SUPERSONIC_INLET= ( inlet, 300.0, 100000.0,
1.041671368522722e+03, 0.0, 0.0 )
MARKER_OUTLET= ( outlet , 100000.0)
MARKER_PLOTTING = ( ogive1, ogive2 )
MARKER_MONITORING = ( ogive1, ogive2 )
MARKER_DESIGNING = ( ogive1 )
NUM_METHOD_GRAD= GREEN_GAUSS
CFL_NUMBER= 5.0
CFL_ADAPT= NO

```

```

CFL_ADAPT_PARAM= ( 1.5, 0.5, 1.25, 50.0 )
MAX_DELTA_TIME= 1E6
RK_ALPHA_COEFF= ( 0.66667, 0.66667, 1.000000 )
OBJECTIVE_FUNCTION= DRAG
OBJECTIVE_WEIGHT = 1.0
MUSCL_FLOW= NO
MUSCL_TURB= NO
SLOPE_LIMITER_TURB= NONE
MUSCL_ADJFLOW= NO
SLOPE_LIMITER_ADJFLOW= NONE
MUSCL_ADJTURB= NO
SLOPE_LIMITER_ADJTURB= NONE
VENKAT_LIMITER_COEFF= 0.05
ADJ_SHARP_LIMITER_COEFF= 3.0
LIMITER_ITER= 999999
LAX_SENSOR_COEFF= 0.15
JST_SENSOR_COEFF= ( 0.6, 0.02 )
ADJ_LAX_SENSOR_COEFF= 0.15
ADJ_JST_SENSOR_COEFF= ( 0.6, 0.02 )
LINEAR_SOLVER= FGMRES
LINEAR_SOLVER_PREC= LU_SGS
LINEAR_SOLVER_ILU_FILL_IN= 0
LINEAR_SOLVER_ERROR= 1E-4
LINEAR_SOLVER_ITER= 2
MGLEVEL= 2
MGCYCLE= V_CYCLE
MG_PRE_SMOOTH= ( 1, 2, 3, 3 )
MG_POST_SMOOTH= ( 0, 0, 0, 0 )
MG_CORRECTION_SMOOTH= ( 0, 0, 0, 0 )
MG_DAMP_RESTRICTION= 1.0
MG_DAMP_PROLONGATION= 1.0
CONV_NUM_METHOD_FLOW= LAX-FRIEDRICH
ROE_LOW DISSIPATION= FD
LOW_MACH_CORR= NO
LOW_MACH_PREC= NO
ENTROPY_FIX_COEFF= 0.0
TIME_DISCRE_FLOW= EULER_IMPLICIT
RELAXATION_FACTOR_FLOW= 0.95
FROZEN_LIMITER_DISC= NO
FROZEN_VISC_DISC= NO
INCONSISTENT_DISC= NO
CONV_NUM_METHOD_ADJFLOW= LAX-FRIEDRICH
TIME_DISCRE_ADJFLOW= EULER_IMPLICIT
RELAXATION_FACTOR_ADJFLOW= 1.0
CFL_REDUCTION_ADJFLOW= 0.8
LIMIT_ADJFLOW= 1E6
MG_ADJFLOW= YES
DV_KIND= HICKS_HENNE
DV_MARKER= ( ogive1 )
DV_PARAM= ( 1, 0.5 )

```

```
DV_VALUE= 1.0
DV_FILENAME= surface_positions.dat
DV_SENS_FILENAME= surface_sensitivity.dat
DV_SENSITIVITY_FORMAT= SU2_NATIVE
DV_UNORDERED_SENS_FILENAME= unordered_sensitivity.dat
DEFORM_LINEAR_SOLVER= FGMRES
DEFORM_LINEAR_SOLVER_PREC= ILU
DEFORM_LINEAR_ITER= 1000
DEFORM_NONLINEAR_ITER= 1
DEFORM_LINEAR_SOLVER_ERROR= 1E-12
DEFORM_CONSOLE_OUTPUT= YES
DEFORM_COEFF = 1E6
DEFORM_STIFFNESS_TYPE= INVERSE_VOLUME
DEFORM_LIMIT = 1E6
VISUALIZE_SURFACE_DEF= YES
VISUALIZE_VOLUME_DEF= NO
EXT_ITER= 5000
CONV_CRITERIA= RESIDUAL
RESIDUAL_REDUCTION= 5
RESIDUAL_MINVAL= -8
STARTCONV_ITER= 10
CAUCHY_ELEMS= 100
CAUCHY_EPS= 1E-10
CAUCHY_FUNC_FLOW= DRAG
CAUCHY_FUNC_ADJFLOW= SENS_GEOMETRY
MESH_FILENAME= mesh2.su2)
MESH_FORMAT= SU2
MESH_OUT_FILENAME= mesh_out.su2
SOLUTION_FLOW_FILENAME= solution_flow.dat
SOLUTION_ADJ_FILENAME= solution_adj.dat
OUTPUT_FORMAT= PARAVIEW
CONV_FILENAME= history
BREAKDOWN_FILENAME= forces_breakdown.dat
RESTART_FLOW_FILENAME= restart_flow.dat
RESTART_ADJ_FILENAME= restart_adj.dat
VOLUME_FLOW_FILENAME= flow
VOLUME_ADJ_FILENAME= adjointn
VALUE_OBFUNC_FILENAME= of_eval.dat
GRAD_OBFUNC_FILENAME= of_grad.dat
SURFACE_FLOW_FILENAME= surface_flow
SURFACE_ADJ_FILENAME= surface_adjoint
WRT_SOL_FREQ= 5000
WRT_SOL_FREQ_DUALTIME= 1
WRT_CON_FREQ= 1
WRT_CON_FREQ_DUALTIME= 10
LOW_MEMORY_OUTPUT= NO
WRT_OUTPUT= YES
WRT_VOL_SOL= YES
WRT_SRF_SOL= YES
WRT_CSV_SOL= YES
```

```
WRT_RESIDUALS= NO
WRT_LIMITERS= NO
WRT_SHARPEDGES= NO
WRT_SURFACE= NO
CONSOLE_OUTPUT_VERBOSITY= HIGH
WRT_BINARY_RESTART= NO
READ_BINARY_RESTART= NO
REORIENT_ELEMENTS= YES
OPT_OBJECTIVE= DRAG
OPT_GRADIENT_FACTOR= 1E-3
OPT_RELAX_FACTOR= 1E0
OPT_ITERATIONS= 500
OPT_ACCURACY= 1E-10
OPT_LINE_SEARCH_BOUND= 1E3
OPT_BOUND_UPPER= 0.05
OPT_BOUND_LOWER= -0.05
DEFINITION_DV= ( 1, 1.0 | ogive1 | 1, 1.594281e-03 ) ; ( 1,
1.0 | ogive1 | 1, 4.384273e-03 ) ; ( 1, 1.0 | ogive1 | 1,
9.266760e-03 ) ; ( 1, 1.0 | ogive1 | 1, 1.781111e-02 ) ; (
1, 1.0 | ogive1 | 1, 3.276372e-02 ) ; ( 1, 1.0 | ogive1 | 1,
5.893080e-02 ) ; ( 1, 1.0 | ogive1 | 1, 1.047232e-01 ) ; (
1, 1.0 | ogive1 | 1, 1.848598e-01 ) ; ( 1, 1.0 | ogive1 | 1,
3.250990e-01 ) ; ( 1, 1.0 | ogive1 | 1, 5.705176e-01 ) ;
```

APÊNDICE B

As Tabelas B.1, B.2 e B.3 apresentam os perfis otimizados para as razões de aspecto 2, 3 e 4, respectivamente, e todos os números de Mach estudados (1,5; 2; 3; 4 e 6). Elas podem ser visualizadas através do link a seguir:

http://ftp.demec.ufpr.br/CFD/monografias/2023_Phillipe_Rosa_doutorado/

APÊNDICE C

Este apêndice contém as figuras dos campos de escoamento da massa específica, pressão, temperatura, número de Mach e momento linear em x para alguns casos estudados no presente trabalho.

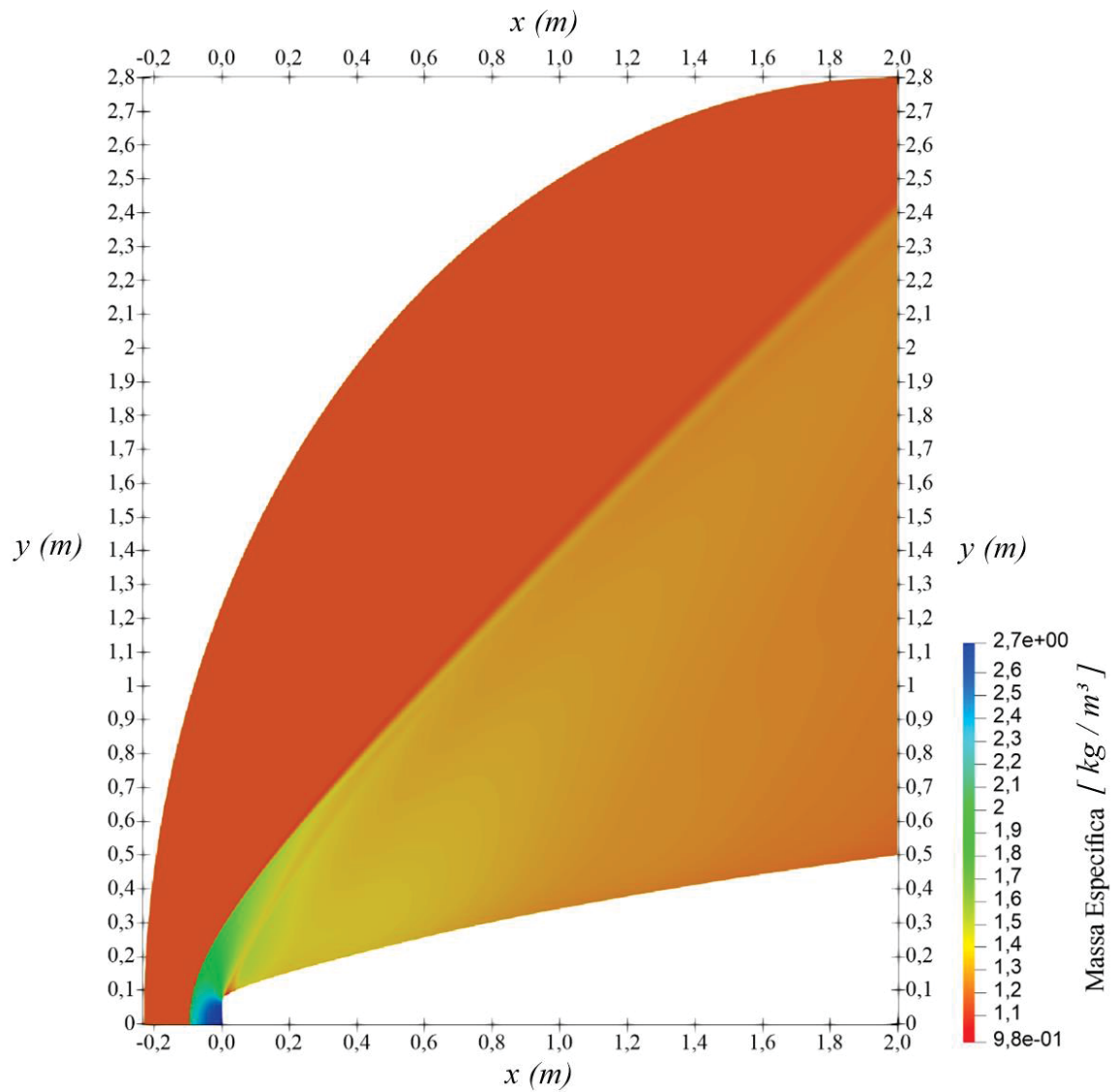


Figura C.1 – Campo da massa específica para o perfil ótimo em $f=2$ e Mach 1,5.

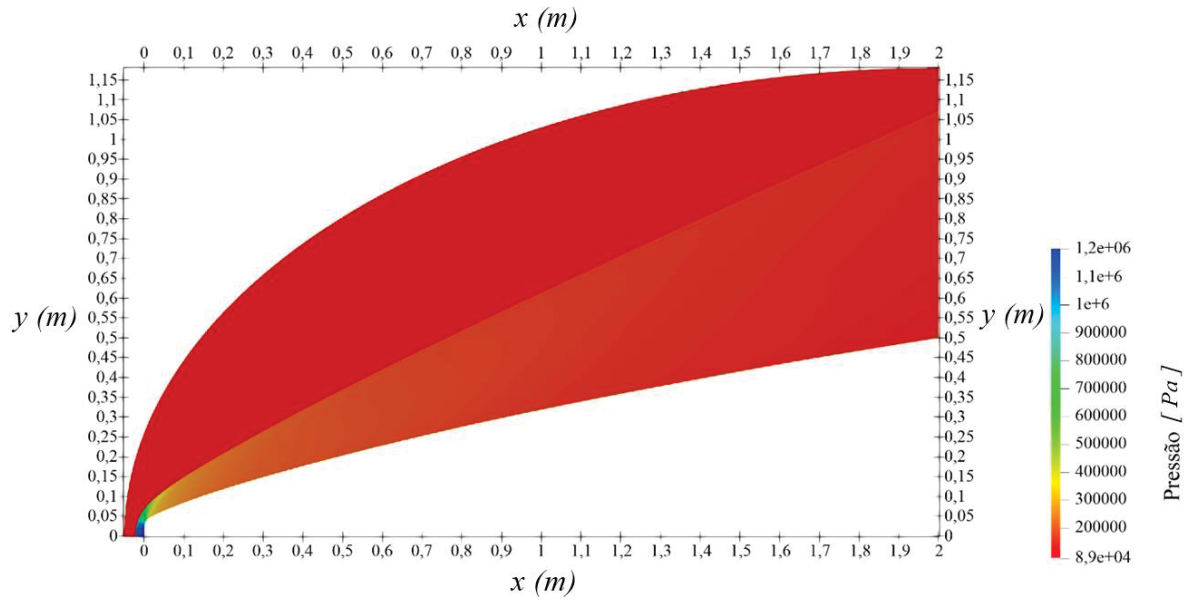


Figura C.2 – Campo de pressão para o perfil ótimo em $f=2$ e Mach 3.

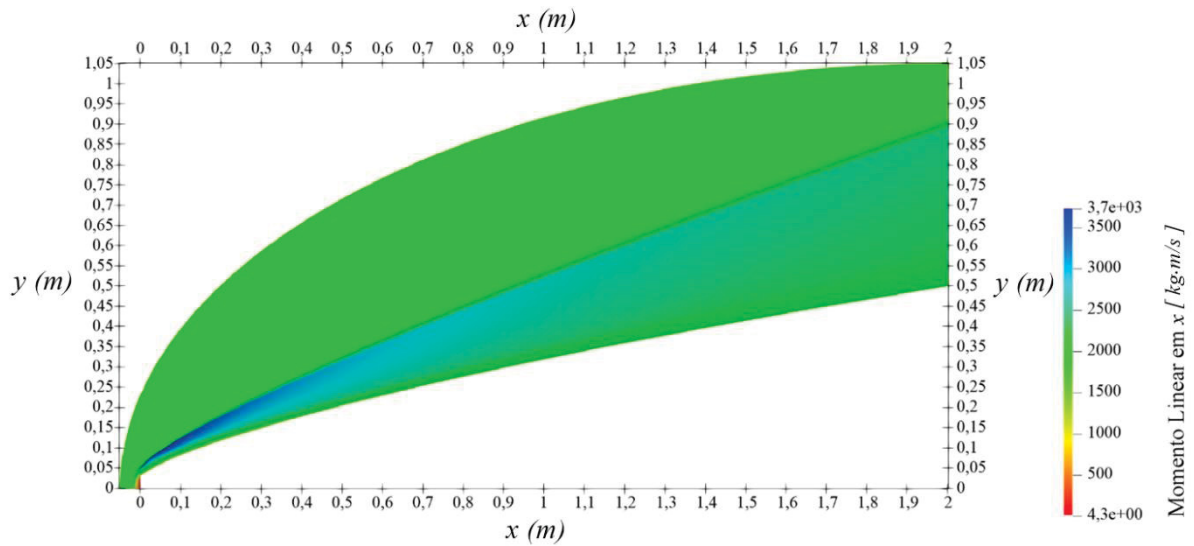


Figura C.3 – Campo de momento linear em x para o perfil ótimo em $f=2$ e Mach 4.

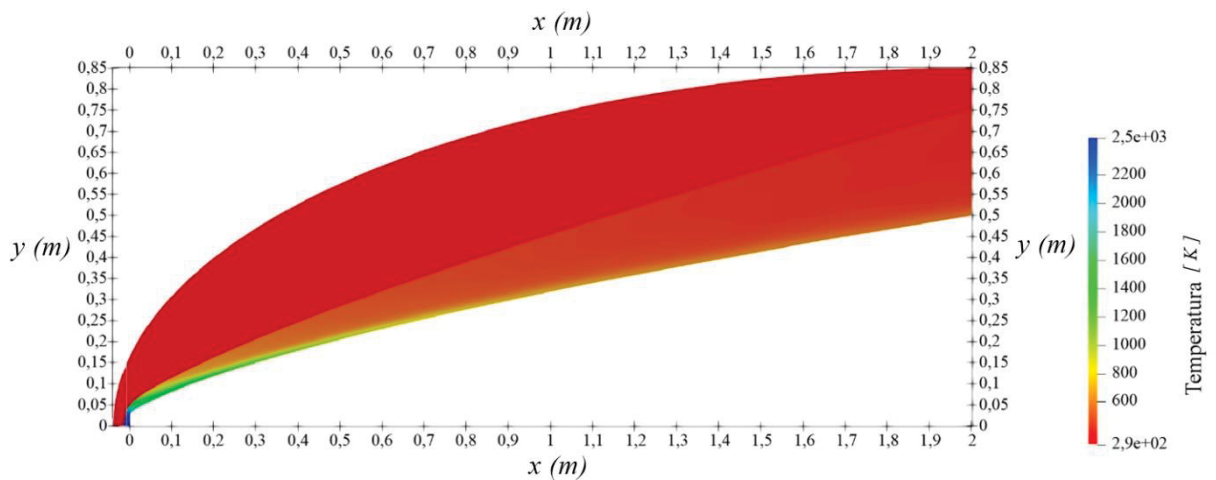


Figura C.4 – Campo de temperaturas para o perfil ótimo em $f=2$ e Mach 6.

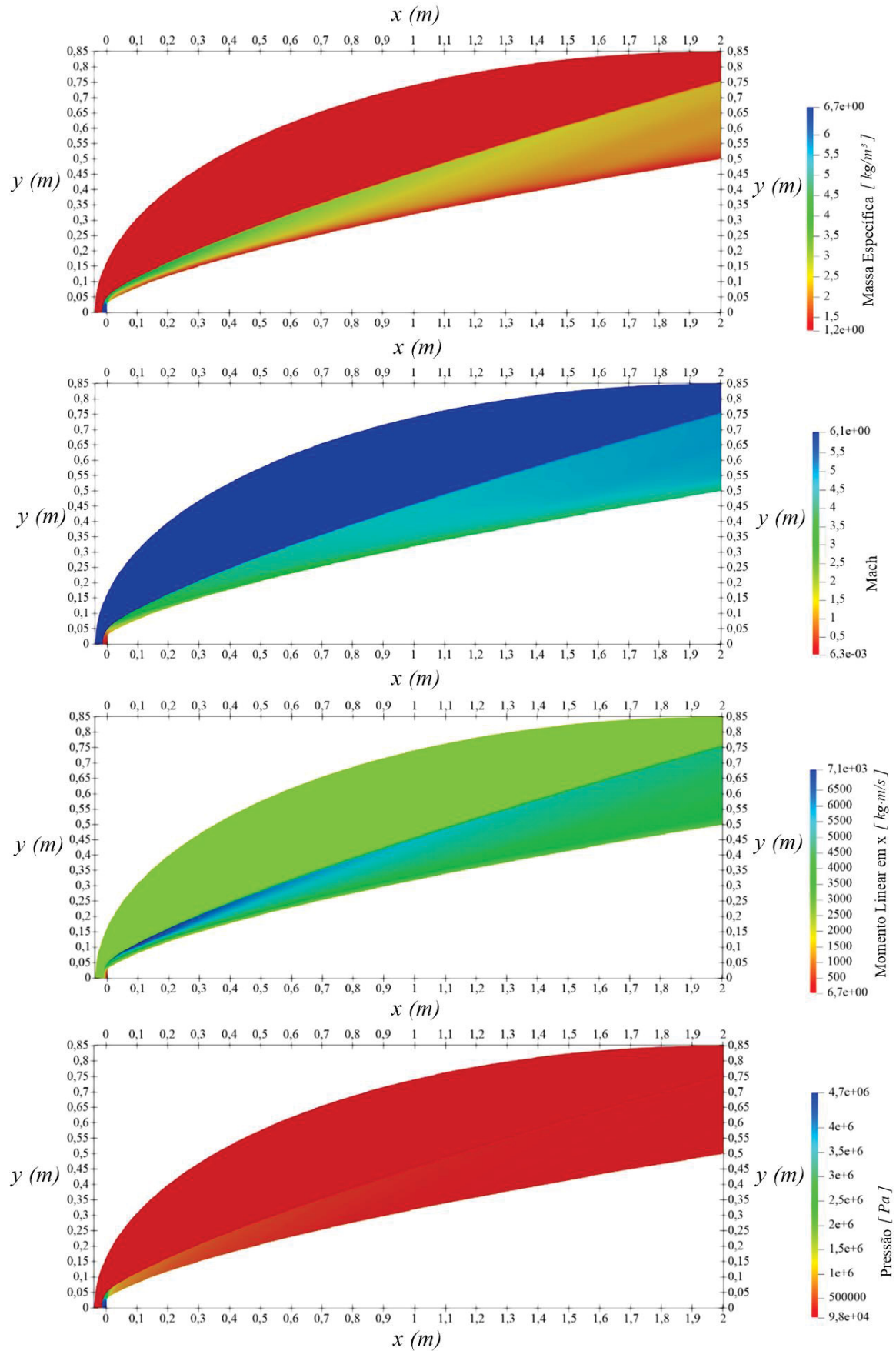


Figura C.5 – Campos de massa específica, Mach, momento em x e pressão para $f=2$ e Mach 6.

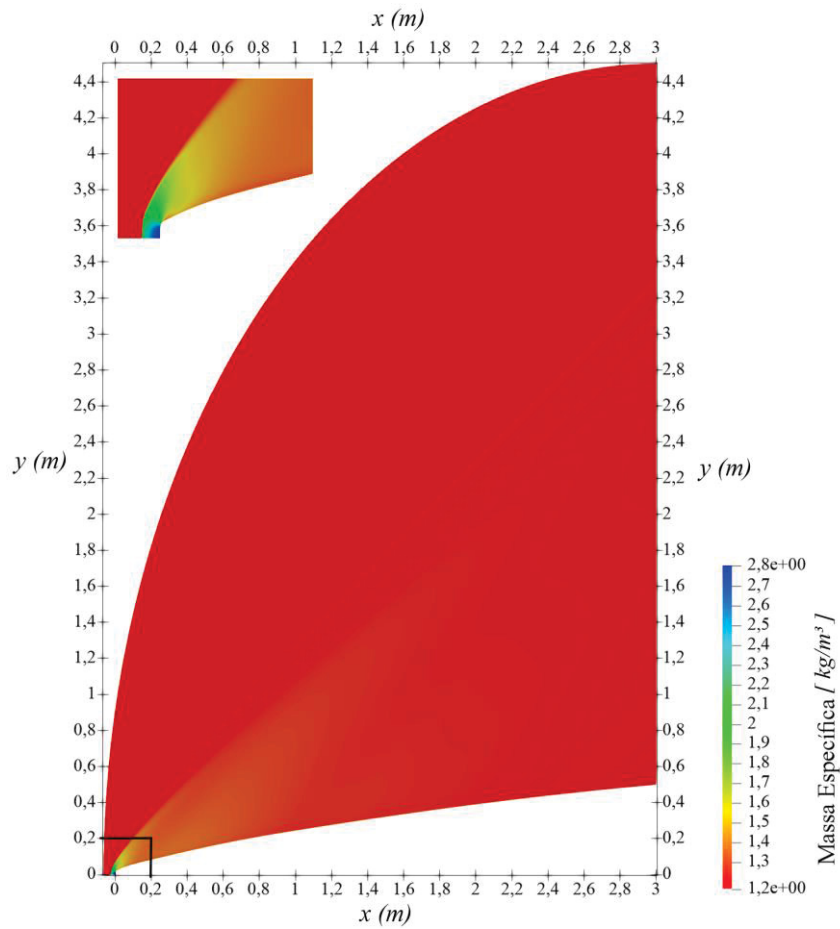


Figura C.6 – Campo de massa específica para o perfil otimizado em $f=3$ e Mach 1,5.

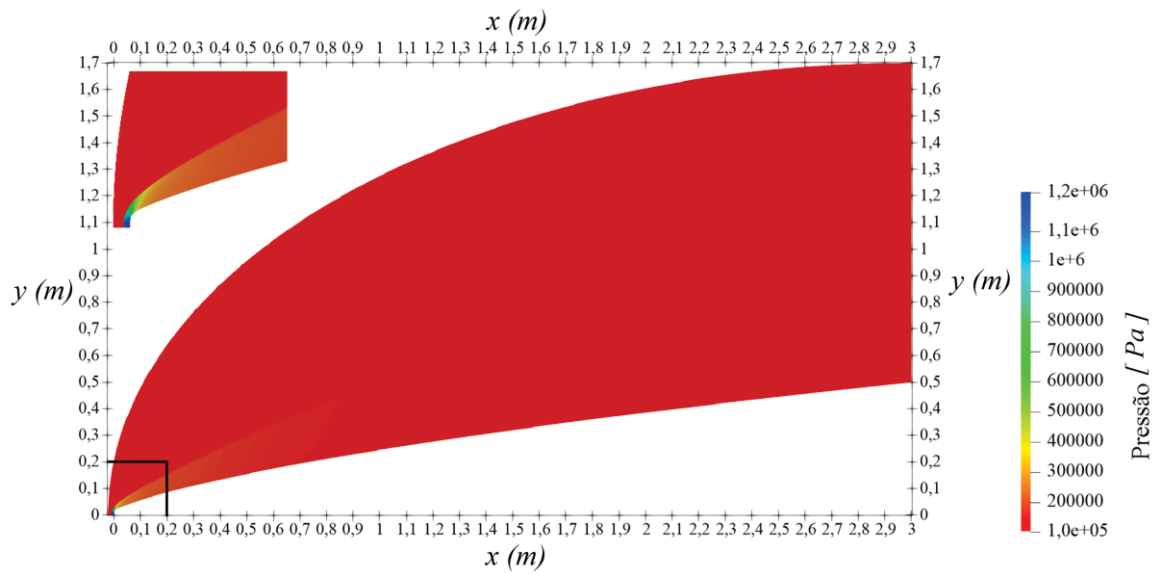


Figura C.7 – Campo de pressão para o perfil ótimo de $f=3$ e Mach 3.

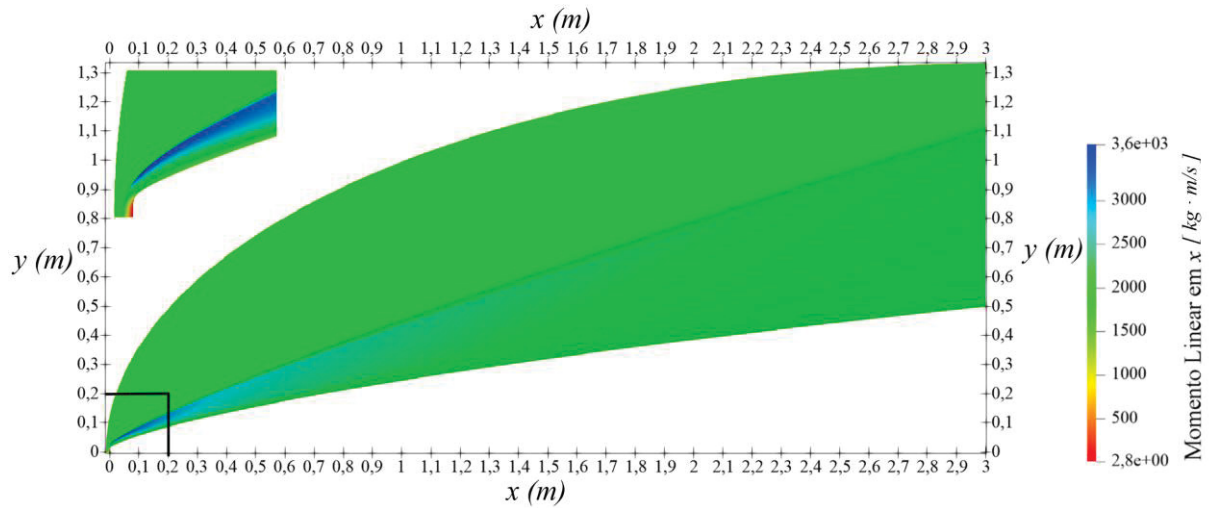


Figura C.8 – Campo do momento linear em x para o perfil otimizado em $f=3$ e Mach 4.

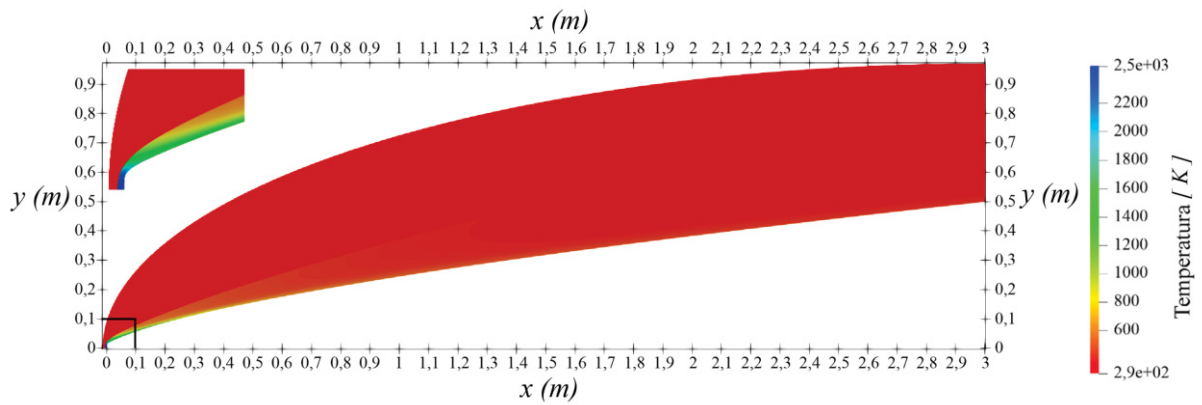


Figura C.9 – Campo de temperaturas para o perfil otimizado de $f=3$ e Mach 6.

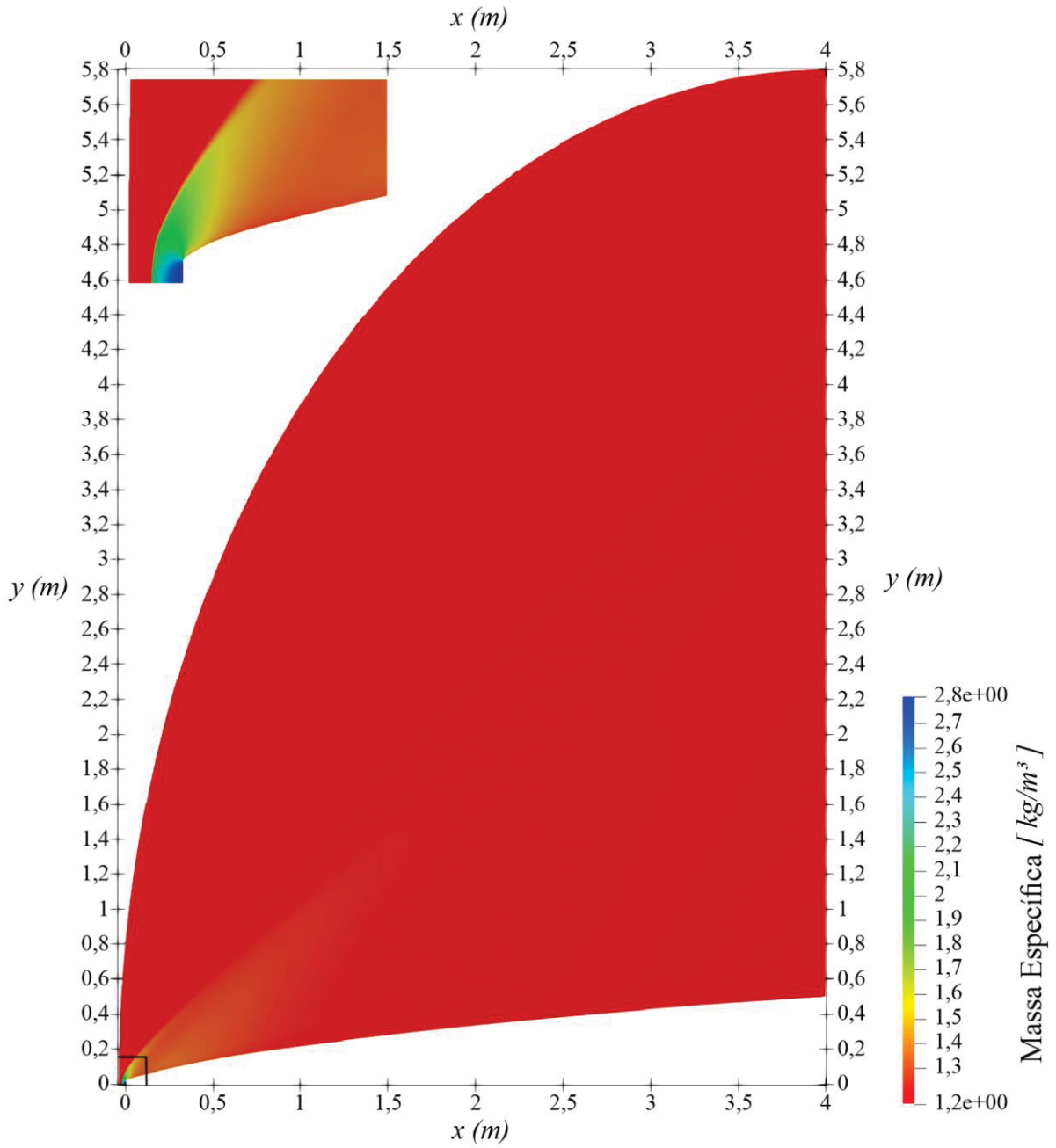


Figura C.10 – Campo de massa específica no perfil ótimo de razão de aspecto 3 e Mach 1,5.