

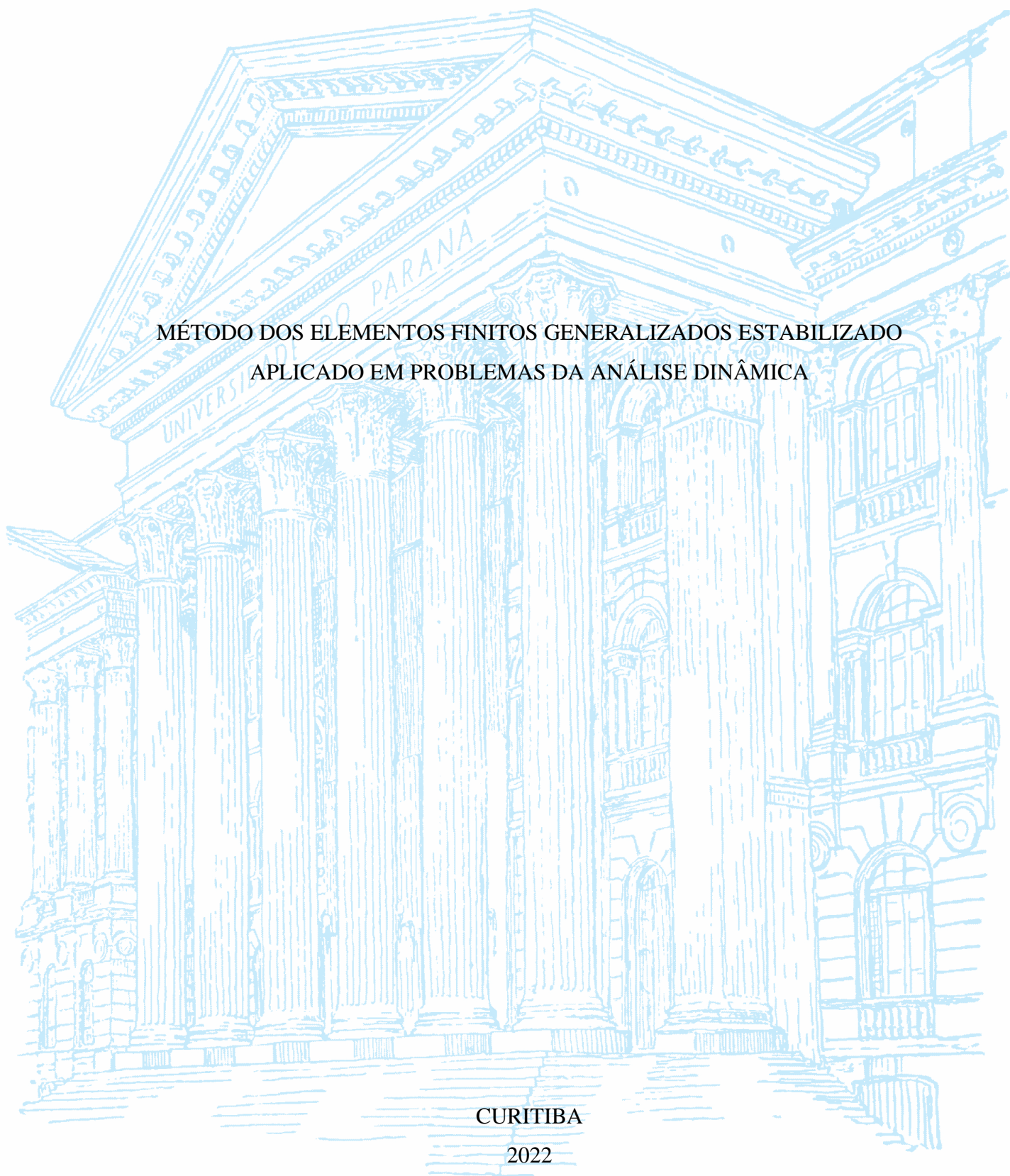
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

IVAN ASSING DA SILVA

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS ESTABILIZADO  
APLICADO EM PROBLEMAS DA ANÁLISE DINÂMICA

CURITIBA

2022



IVAN ASSING DA SILVA

MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS ESTABILIZADO  
APLICADO EM PROBLEMAS DA ANÁLISE DINÂMICA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado

CURITIBA

2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Silva, Ivan Assing da

Método dos elementos finitos generalizados estabilizado  
aplicado em problemas da análise dinâmica / Ivan Assing da Silva. –  
Curitiba, 2022.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de  
Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos  
em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado

1. Método dos Elementos Finitos. I. Machado, Roberto Dalledone.  
II. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-  
Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia. III. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **IVAN ASSING DA SILVA** intitulada: **MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS ESTABILIZADO APLICADO EM PROBLEMAS DA ANÁLISE DINÂMICA**, sob orientação do Prof. Dr. ROBERTO DALLEDONE MACHADO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 12 de Dezembro de 2022.

Assinatura Eletrônica

13/12/2022 16:50:04.0

ROBERTO DALLEDONE MACHADO  
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

13/12/2022 12:34:35.0

FELÍCIO BRUZZI BARROS  
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS  
GERAIS)

Assinatura Eletrônica

12/12/2022 16:11:46.0

MARCOS ARNDT  
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

19/12/2022 09:53:58.0

HSU YANG SHANG  
Avaliador Externo (PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA DO  
PARANÁ)

*À minha esposa, Sabrina, e às minhas  
filhas, Isabela e Mariana, que são os meus  
amores e as pessoas mais importantes da  
minha vida.*

## **AGRADECIMENTOS**

À Deus, pela vida e por tudo o que Ele tem me concedido.

À minha esposa Sabrina por todo apoio, paciência e incentivo fundamental durante todos estes anos. Às minhas filhas, Isabela e Mariana, por toda a compreensão nos momentos de ausência.

À minha família, em especial aos meus pais, Ivo e Inês, que mesmo com todas as dificuldades da vida, me apoiaram com o possível.

Ao professor Roberto Dalledone Machado, pela orientação, apoio, confiança, paciência e compreensão.

Ao professor Adriano Scremin, que me instigou aos caminhos da pesquisa, e que de certa forma me conduziu a este ponto.

A todos os professores que contribuíram com a minha formação.

*Porque todo o que é nascido de Deus vence o mundo; e esta é a vitória que vence o mundo: a nossa fé.*

*1 João 5:4*

## RESUMO

O desempenho do Método dos Elementos Finitos tradicional pode ser melhorado por meio de termos adicionais ao espaço de solução. Os métodos de enriquecidos baseados no Método da Partição da Unidade, como o Método dos Elementos Finitos Generalizados, são conhecidos devido à precisão e altas taxas de convergência. Os termos de expansão, mesmo que não-polinomiais, podem incluir conhecimento a priori sobre a solução do problema. Adotando funções hierárquicas, o processo de enriquecimento torna-se fácil, pois a cada novo nível de enriquecimento não é necessário reconstruir as matrizes anteriores. No entanto, as vantagens desses métodos enriquecidos são afetadas pelo número de níveis de enriquecimento, que podem produzir mau condicionamento para o sistema numérico, com o aumento do número de condição das matrizes de rigidez e massa. Técnicas de estabilização têm sido propostas para minimizar essas dificuldades. O Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado considera um procedimento de estabilização que apresenta bons resultados para problemas estáticos porém, mesmo assim, os números de condição são muito elevados. Métodos como a partição da unidade *flat-top* propõem contornar os problemas do Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado por meio de uma alteração simples, com o objetivo de evitar a dependência linear que o processo de enriquecimento produz no sistema numérico. No entanto, apesar do bom comportamento para problemas estáticos, nenhum deles apresentou o mesmo desempenho para problemas dinâmicos. Neste trabalho, a técnica de estabilização numérica baseada no modelo *flat-top* é investigada para problemas de vibração livre da análise dinâmica. Alguns parâmetros que afetam o mau condicionamento numérico são examinados e a influência de cada um deles é discutida, dentre eles, o parâmetro  $\alpha$ , que rege o tamanho da cobertura da *flat-top*. Observa-se que o número de condição para problemas dinâmicos depende desses parâmetros. Buscar a estabilidade numérica não é um desafio fácil, pois afeta, por outro lado, a precisão dos métodos. Algumas aplicações são apresentadas para problemas 1D e 2D, e os resultados são comparados com o Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado considerando a Partição da Unidade linear ou *flat-top*, a influência do parâmetro  $\alpha$  e o número de níveis de enriquecimento.

**Palavras-chave:** Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado; Métodos Enriquecidos; Partição da Unidade *flat-top*; Enriquecimento Não-polinomial.

## ABSTRACT

The performance of the standard Finite Element Method can be improved by adding extra terms in the solution space. Enriched methods based on the Partition Unity Method, such as the Generalized Finite Element Method, are well known due the accuracy and high convergency rates. The expansion terms, even if non-polynomials, may include a-priori knowledge about the solution of the problem. Adopting hierarchical functions, the enrichment process becomes easy since that, for each new level, it is not necessary to rebuild the previous matrices. However, the advantages of these methods are affected by the number of enrichment levels which can produce ill-conditioning for the numerical system and raising of the condition number of the stiffness and mass matrices. Stabilization techniques have been proposed to minimize these shortcomings. The Stable Generalized Finite Element Method is a stabilization procedure that brought good results for static problems but, even though, the condition numbers are very high. Recently, methods such as flat-top have tried to overpass the Stable Generalized Finite Element Method troubles by a simple modification, to avoid the linear dependence that the enrichment process produces on the numerical system. However, despite the good behaviour for static problems, none of them has shown the same performance for dynamic problems. In this work, the numerical stabilization techniques based on the flat-top model are investigated for free vibration problems. Some parameters that affect the numerical ill-conditioning are examined and the influence of each one is discussed, among them, the  $\alpha$ -parameter, which governs the size of the flat-top coverage. It is observed that the condition number for dynamic problems depends on these parameters. Searching numerical stability is not an easy challenge since it affects, on the other hand, the accuracy of the methods. Some applications are presented for 1D and 2D problems, and the results are compared with the Stable Generalized Finite Element Method considering linear or flat-top partitions of unity, the influence of  $\alpha$ -parameter and the number of enrichment levels.

**Keywords:** Stable Generalized Finite Element Method; Enriched Methods; Flat-top; Non-polynomial enrichment.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – Parâmetros de enriquecimento hierárquicos.....	37
FIGURA 2 – Processo de estabilização das funções para o 1º nível de enriquecimento.....	39
FIGURA 3 – Processo de construção das funções enriquecidas pelo MEFGE e MEFGE.....	41
FIGURA 4 – Partição da Unidade <i>flat-top</i> com $\alpha = 0.5$ , (a) $k = 1$ e (b) $k = 2$ .....	43
FIGURA 5 – Funções de forma enriquecidas com a PU <i>flat top</i> com $k = 1$ e $\beta_1 = 3\pi/2$ , (a) $\alpha = 1.0$ e (b) $\alpha = 0.5$ . .....	44
FIGURA 6 – As funções de <i>flat-top</i> para elemento 2D, $\alpha = 0.5$ e $k = 1$ .....	46
FIGURA 7 – Processo de construção das funções enriquecidas para o problema 2D com a PU <i>flat-top</i> . .....	47
FIGURA 8 – Funções do espaço de aproximação enriquecido.....	49
FIGURA 9 – Barra fixa.....	60
FIGURA 10 – Barra fixa: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro $\alpha$ , $n_l = 1$ e $k = 1, 2, 3$ utilizando a técnica <i>flat-top</i> .....	61
FIGURA 11 – Barra fixa: número de condição das matrizes de rigidez e massa, com $n_l = 5$ , $k = 1, 2, 3$ e $\beta_j$ padrão. ....	63
FIGURA 12 – Barra fixa: números de condição das matrizes de rigidez e massa com $n_l = 5$ , $k = 1, 2, 3$ e $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	63
FIGURA 13 – Barra fixa: números de condição da matriz de massa $\kappa(\mathbf{M})$ , com o enriquecimento $\beta_j$ padrão.....	64
FIGURA 14 – Barra fixa: números de condição da matriz de rigidez $\kappa(\mathbf{K})$ , com o enriquecimento $\beta_j$ padrão.....	65
FIGURA 15 – Barra fixa: números de condição da matriz de massa $\kappa(\mathbf{M})$ , com o enriquecimento utilizando $\bar{\beta}_j$ estabilizado.....	66
FIGURA 16 – Barra fixa: números de condição da matriz de rigidez $\kappa(\mathbf{K})$ , com o enriquecimento $\bar{\beta}_j$ estabilizado .....	66
FIGURA 17 – Barra fixa: números de condição das matrizes de rigidez (a) e massa (b) versus o parâmetro $\alpha$ , com $n_l = 1$ , $k = 1$ e diferentes valores de $\beta_1$ . ....	67
FIGURA 18 – Barra fixa: (a) espectro de frequências obtido com a PU <i>flat-top</i> , $n_l = 1$ e $k =$ 1, (b) ampliação da região entre 0 e 1/3. ....	69

FIGURA 19 – Barra fixa: (a) espectro de frequências para $\alpha = 0.5$ , $n_l = 1$ e $k = 1, 2, \dots, 5$ , e PU linear, (b) ampliação da região entre 0 e 1/3.....	70
FIGURA 20 – Barra fixa: (a) espectro de frequências obtido com a PU <i>flat-top</i> , $n_l = 2$ , $k = 1$ e $\beta_j$ padrão (b) ampliação da região entre 0 e 1/3.....	72
FIGURA 21 – Barra fixa: (a) espectro de frequências obtido com a PU <i>flat-top</i> , $n_l = 5$ , $k = 1$ e $\beta_j$ padrão (b) ampliação da região entre 0 e 1/3.....	73
FIGURA 22 – Barra fixa: (a) espectro de frequências obtido com a PU <i>flat-top</i> , $n_l = 5$ , $k = 1$ e $\bar{\beta}_j$ estabilizado, (b) ampliação da região entre 0 e 1/3.....	74
FIGURA 23 – Barra fixa: (a) espectro de frequências para $\alpha = 0.5$ , $n_l = 2$ , $k = 1, 2, \dots, 5$ e $\beta_j$ padrão e PU linear, (b) ampliação da região entre 0 e 1/3. ....	75
FIGURA 24– Barra fixa: espectros de frequências para diferentes valores de $\beta_1$ , (a) PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$ , (c) PU linear, (b) e (d) ampliação da região entre 0 e 1/3.....	76
FIGURA 25 – Barra fixa: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento $\beta_j$ padrão. ....	78
FIGURA 26 – Barra fixa: convergência para a 2ª frequência natural com enriquecimento $\beta_j$ padrão. ....	80
FIGURA 27 – Barra fixa: convergência para a 499ª frequência natural com enriquecimento $\beta_j$ padrão. ....	81
FIGURA 28 – Barra fixa: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	83
FIGURA 29 – Barra fixa: convergência para a 2ª frequência natural, com enriquecimento $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	83
FIGURA 30 – Barra fixa: convergência para a 499ª frequência natural com enriquecimento $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	84
FIGURA 31 – Barra fixa: convergência para a (a) 1ª e (b) 499ª frequências naturais com enriquecimento $\beta_j$ padrão, considerando a PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$ com $k = 1, 2, \dots, 5$ . ....	85
FIGURA 32 – Barra fixa: os seis primeiros modos de vibração obtidos com a PU <i>flat-top</i> , $\alpha = 0.5$ , $n_l = 1$ e $k = 1$ .....	86
FIGURA 33 – Treliça plana composta por 7 barras. ....	87
FIGURA 34 – Treliça plana: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro $\alpha$ , $n_l = 1$ e $k = 1, 2, 3$ utilizando a técnica <i>flat-top</i> .....	88

FIGURA 35 – Treliça plana: números de condição das matrizes de rigidez e massa, com $n_l = 5$ e $k = 1, 2, 3$ , para o enriquecimento: (a) $\beta_j$ padrão e (b) $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	89
FIGURA 36 – Treliça plana: números de condição da matriz de (a) rigidez e (b) massa com o enriquecimento $\beta_j$ padrão. ....	89
FIGURA 37 – Treliça plana: números de condição da matriz de (a) rigidez e (b) massa com o enriquecimento $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	90
FIGURA 38 – Treliça plana: número de condição das matrizes (a) de rigidez e (b) massa, com $n_l = 1$ , $k = 1$ e diferentes valores de $\beta_1$ . ....	91
FIGURA 39 – Treliça plana: (a) espectro de frequências obtido com a PU <i>flat-top</i> , $n_l = 1$ e $k = 1$ , (b) ampliação da região entre 0 e 1/3. ....	93
FIGURA 40 – Treliça plana: (a) espectro de frequências obtido com a PU <i>flat-top</i> , $n_l = 1$ e $k = 1$ , com refino $h = 1/10$ , (b) ampliação da região entre 0 e 1/3. ....	94
FIGURA 41 – Treliça plana: (a) espectro de frequências para $\alpha = 0.5$ , $n_l = 1$ e $k = 1, 2, \dots, 5$ , e PU linear, (b) ampliação da região entre 0 e 1/3. ....	95
FIGURA 42 – Treliça plana: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento $\beta_j$ padrão. ....	96
FIGURA 43 – Treliça plana: convergência para a 2ª frequência natural com enriquecimento $\beta_j$ padrão. ....	97
FIGURA 44 – Treliça plana: convergência para a 34ª frequência natural com enriquecimento $\beta_j$ padrão. ....	98
FIGURA 45 – Treliça plana: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	99
FIGURA 46 – Treliça plana: convergência para a 34ª frequência natural com enriquecimento $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	99
FIGURA 47 – Treliça plana: os seis primeiros modos de vibração obtidos com a PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$ , $n_l = 1$ e $k = 1$ . ....	101
FIGURA 48 – Torre de transmissão, treliça espacial composta por 294 barras. ....	102
FIGURA 49 – Treliça espacial: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro $\alpha$ , $n_l = 1$ e $k = 1, 2, 3$ utilizando a técnica <i>flat-top</i> . ....	103
FIGURA 50 – Treliça espacial: números de condição das matrizes de rigidez e massa, com $n_l = 5$ e $k = 1, 2, 3$ , para o enriquecimento: (a) $\beta_j$ padrão e (b) $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	104

FIGURA 51 – Treliça espacial: números de condição das matrizes (a) de rigidez e (b) massa, com o enriquecimento $\beta_j$ padrão. ....	104
FIGURA 52 – Treliça espacial: números de condição das matrizes (a) de rigidez e (b) massa, com o enriquecimento $\bar{\beta}_j$ estabilizado.....	105
FIGURA 53 – Treliça espacial: número de condição das matrizes de (a) rigidez e (b) massa, com $n_l = 1$ , $k = 1$ e diferentes valores de $\beta_1$ .....	106
FIGURA 54 – Treliça espacial: (a) espectro de frequências obtido com a PU <i>flat-top</i> , $n_l = 1$ e $k = 1$ , (b) ampliação da região entre 0 e 1/3. ....	107
FIGURA 55 – Treliça espacial: (a) espectro de frequências obtido com a PU <i>flat-top</i> , $n_l = 2$ e $k = 1$ , (b) ampliação da região entre 0 e 1/3, (c) ampliação da região entre 0 e 1/10.....	108
FIGURA 56 – Treliça espacial: (a) espectro de frequência para $\alpha = 0.5$ , $n_l = 1$ e $k = 1, 2, \dots, 5$ , e PU linear, (b) ampliação da região entre 0 e 1/3.....	109
FIGURA 57 – Treliça espacial: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento $\beta_j$ padrão.....	111
FIGURA 58 – Treliça espacial: convergência para a 237ª frequência natural com enriquecimento $\beta_j$ padrão.....	112
FIGURA 59 – Treliça espacial: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento $\bar{\beta}_j$ estabilizado.....	113
FIGURA 60 – Treliça espacial: convergência para a 237ª frequência natural, com enriquecimento $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	113
FIGURA 61 – Treliça espacial: os seis primeiros modos de vibração obtidos com a PU <i>flat-top</i> , $\alpha = 0.5$ , $n_l = 1$ e $k = 1$ .....	115
FIGURA 62 – Membrana quadrada engastada (CCCC).....	116
FIGURA 63 – Membrana engastada: número de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro $\alpha$ , $n_l = 1$ e $k = 1, 2, 3$ utilizando a técnica <i>flat-top</i> . ....	117
FIGURA 64 – Membrana engastada: número de condição das matrizes de rigidez e massa, com $n_l = 3$ , $k = 1, 2, 3$ e $\beta_j$ padrão.....	118
FIGURA 65 – Membrana engastada: número de condição das matrizes de rigidez e massa, com $n_l = 3$ , $k = 1, 2, 3$ e $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	118
FIGURA 66 – Membrana engastada: números de condição da matriz de massa $\kappa(\mathbf{M})$ com o enriquecimento $\beta_j$ padrão.....	119

FIGURA 67 – Membrana engastada: números de condição da matriz de rigidez $\kappa(\mathbf{K})$ com o enriquecimento $\beta_j$ padrão.....	119
FIGURA 68 – Membrana engastada: números de condição da matriz de massa $\kappa(\mathbf{M})$ com o enriquecimento utilizando $\bar{\beta}_j$ estabilizado.....	120
FIGURA 69 – Membrana engastada: números de condição da matriz de rigidez $\kappa(\mathbf{K})$ com o enriquecimento $\bar{\beta}_j$ estabilizado .....	120
FIGURA 70 – Membrana engastada: números de condição das matrizes de (a) rigidez e (b) massa versus o parâmetro $\alpha$ , com $n_l = 1$ e $k = 1$ , e diferentes valores de $\beta_1$ .	121
FIGURA 71 – Membrana engastada: (a) espectro de frequências obtido com a PU <i>flat-top</i> , $n_l = 1$ e $k = 1$ , (b) ampliação da região entre 0 e 1/3.....	122
FIGURA 72 – Membrana engastada: (a) espectro de frequências para $\alpha = 0.5$ , $n_l = 1$ e $k = 1, 2, \dots, 5$ , e PU linear, (b) ampliação da região entre 0 e 1/3.....	123
FIGURA 73 – Membrana engastada: (a) espectro de frequências obtido com a PU <i>flat-top</i> , $n_l = 2$ e $k = 1$ , (b) ampliação da região entre 0 e 1/3, (b) ampliação da região entre 0 e 1/10.....	124
FIGURA 74 – Membrana engastada: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento $\beta_j$ padrão.....	126
FIGURA 75 – Membrana engastada: convergência para a 2ª frequência natural com enriquecimento $\beta_j$ padrão.....	126
FIGURA 76 – Membrana engastada: convergência para a 81ª frequência natural com enriquecimento $\beta_j$ padrão.....	127
FIGURA 77 – Membrana engastada: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	128
FIGURA 78 – Membrana engastada: convergência para a 81ª frequência natural com enriquecimento $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	129
FIGURA 79 – Membrana engastada: os nove primeiros modos de vibração obtidos com a PU <i>flat-top</i> , $\alpha = 0.5$ , $n_l = 1$ e $k = 1$ .....	130
FIGURA 80 – Membrana engastada: malhas distorcidas.....	131
FIGURA 81 – Malhas distorcidas: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro $\alpha$ , com $n_l = 1$ e $k = 1$ .....	132

FIGURA 82 – Malhas distorcidas: espectro de frequências obtido com a PU <i>flat-top</i> , $n_l = 1$ e $k = 1$ .....	133
FIGURA 83 – Malhas distorcidas: espectro de frequências parcial (1/3), obtido com a PU <i>flat-top</i> , $n_l = 1$ e $k = 1$ , (a) malha distorcida e (b) malha muito distorcida. ....	134
FIGURA 84 – Malhas distorcidas: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento $\beta_j$ padrão.....	135
FIGURA 85 – Malhas distorcidas: convergência para a 81ª frequência natural com enriquecimento $\beta_j$ padrão.....	136
FIGURA 86 – Malhas distorcidas: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento o $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	137
FIGURA 87 – Malhas distorcidas: convergência para a 81ª frequência natural com enriquecimento o $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	137
FIGURA 88 – Membrana engastada: malhas refinadas.....	138
FIGURA 89 – Refino de malha: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro $\alpha$ , com $n_l = 1$ e $k = 1$ para diversos tamanho de malha. ....	139
FIGURA 90 – Refino de malha: (a) espectro de frequências obtido com a PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$ , $n_l = 1$ e $k = 1$ , (b) ampliação da região entre 0 e 1/3. ....	140
FIGURA 91 – Refino de malha: convergência para a (a) 1ª e (b) 81ª frequências naturais com enriquecimento $\beta_j$ padrão, em função do número de graus de liberdade.....	142
FIGURA 92 – Refino de malha: convergência para a (a) 1ª e (b) 81ª frequências naturais com enriquecimento $\beta_j$ padrão, em função do tamanho de malha. ....	142
FIGURA 93 – Membrana quadrada parcialmente engastada.....	143
FIGURA 94 – Membrana parcialmente engastada: número de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro $\alpha$ , $n_l = 1$ e $k = 1, 2, 3$ utilizando a técnica <i>flat-top</i> . ....	143
FIGURA 95 – Membrana parcialmente engastada: números de condição das matrizes de rigidez e massa, com $n_l = 3$ e $k = 1, 2, 3$ , para o enriquecimento: (a) $\beta_j$ padrão e (b) $\bar{\beta}_j$ estabilizado.....	144
FIGURA 96 – Membrana parcialmente engastada: (a) espectro de frequências obtido com a PU <i>flat-top</i> , $n_l = 1$ e $k = 1$ , (b) ampliação da região entre 0 e 1/3.....	145
FIGURA 97 – Membrana parcialmente engastada: convergência para a 1ª e 81ª frequências naturais com enriquecimento $\beta_j$ padrão. ....	147

FIGURA 98 – Membrana parcialmente engastada: os seis primeiros modos de vibração obtidos com a PU <i>flat-top</i> , $\alpha = 0.5$ , $n_l = 1$ e $k = 1$ .	147
FIGURA 99 – Chapa engastada submetida ao estado plano de tensões.	148
FIGURA 100 – Placa engastada: número de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro $\alpha$ , $n_l = 1$ e $k = 1, 2, 3$ utilizando a técnica <i>flat-top</i> .	149
FIGURA 101 – Chapa engastada: número de condição das matrizes de rigidez e massa, com $n_l = 3$ , $k = 1, 2, 3$ e $\beta_j$ padrão.	150
FIGURA 102 – Chapa engastada: número de condição das matrizes de rigidez e massa, com $n_l = 3$ , $k = 1, 2, 3$ e $\bar{\beta}_j$ estabilizado.	150
FIGURA 103 – Chapa engastada: números de condição da matriz de rigidez $\kappa(\mathbf{K})$ com o enriquecimento $\beta_j$ padrão.	151
FIGURA 104 – Chapa engastada: números de condição da matriz de massa $\kappa(\mathbf{M})$ com o enriquecimento $\beta_j$ padrão.	151
FIGURA 105 – Chapa engastada: números de condição da matriz de massa $\kappa(\mathbf{M})$ com o enriquecimento utilizando $\bar{\beta}_j$ estabilizado.	152
FIGURA 106 – Chapa engastada: números de condição da matriz de rigidez $\kappa(\mathbf{K})$ com o enriquecimento $\bar{\beta}_j$ estabilizado.	153
FIGURA 107 – Chapa engastada: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro $\alpha$ , com $n_l = 1$ e $k = 1$ , e diferentes valores de $\beta_1$ .	153
FIGURA 108 – Chapa engastada: (a) espectro de frequências obtido com a PU <i>flat-top</i> , $n_l = 1$ e $k = 1$ , (b) ampliação da região entre 0 e 1/3.	155
FIGURA 109 – Chapa engastada: (a) espectro de frequências para $\alpha = 0.5$ , $n_l = 1$ e $k = 1, 2, \dots, 5$ , e PU linear, (b) ampliação da região entre 0 e 1/3.	156
FIGURA 110 – Chapa engastada: convergência para a 1ª frequência natural, com enriquecimento $\beta_j$ padrão.	158
FIGURA 111 – Chapa engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 2ª frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão.	158
FIGURA 112 – Chapa engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 220ª frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão.	159
FIGURA 113 – Chapa engastada: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento o $\bar{\beta}_j$ estabilizado.	160

FIGURA 114 – Chapa engastada: convergência para a 220ª frequência natural com enriquecimento o $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	160
FIGURA 115 – Chapa engastada: os seis primeiros modos de vibração obtidos com a PU <i>flat-top</i> , $h = 1/8$ , $\alpha = 0.5$ , $n_l = 1$ e $k = 1$ . ....	161
FIGURA 116 – MEFG x MEFGE: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro $\alpha$ , $n_l = 1$ e $k = 1$ , para o problema da barra. ....	162
FIGURA 117 – MEFG x MEFGE: números de condição das matrizes de rigidez e massa, com $n_l = 5$ e $k = 1$ , para o enriquecimento: (a) $\beta_j$ padrão e (b) $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ...	163
FIGURA 118 – MEFG x MEFGE: números de condição da matriz de massa $\kappa(\mathbf{M})$ com o enriquecimento $\beta_j$ padrão. ....	164
FIGURA 119 – MEFG x MEFGE: números de condição da matriz de rigidez $\kappa(\mathbf{K})$ com o enriquecimento $\beta_j$ padrão. ....	164
FIGURA 120 – MEFG x MEFGE: números de condição da matriz de rigidez e massa com o enriquecimento $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	165
FIGURA 121 – MEFG x MEFGE: (a) espectro de frequências obtido com a PU linear e um nível de enriquecimento, (b) ampliação da região entre 0 e 1/3. ....	166
FIGURA 122 – MEFG x MEFGE: (a) espectro de frequências obtido com a PU linear e dois níveis de enriquecimento, (b) ampliação da região entre 0 e 1/3. ....	166
FIGURA 123 – MEFG x MEFGE: (a) espectro de frequências obtido com a PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$ , $k = 1$ e um nível de enriquecimento, (b) ampliação da região entre 0 e 1/3. ....	166
FIGURA 124 – MEFG x MEFGE: (a) espectro de frequências obtido com a PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$ , $k = 1$ e dois níveis de enriquecimento, (b) ampliação da região entre 0 e 1/3. ....	167
FIGURA 125 – MEFG x MEFGE: (a) espectro de frequências obtido com a PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$ , $k = 1$ e cinco níveis de enriquecimento, (b) ampliação da região entre 0 e 1/3. ....	167
FIGURA 126 – MEFG x MEFGE: convergência para a (a) 1ª e (b) 499ª frequências naturais com enriquecimento $\beta_j$ padrão. ....	168
FIGURA 127 – MEFG x MEFGE: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro $\alpha$ , $n_l = 1$ e $k = 1$ , para o problema da membrana engastada. ....	169

FIGURA 128 – MEFG x MEFGE: (a) espectro de frequências obtido com a PU linear e PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$ , com um nível de enriquecimento para o problema da membrana engastada, (b) ampliação da região entre 0 e 1/3.....	169
FIGURA 129 – Integração numérica: erros de aproximação em função do número de pontos e do número de divisões do intervalo de integração para 10 níveis de enriquecimento.....	184
FIGURA 130 – Integração numérica: erros de aproximação em função do número de pontos e do número de divisões do intervalo de integração para 1 e 5 níveis de enriquecimento.....	185
FIGURA 131 – Integração numérica: erros de aproximação em função do número de pontos e do número de divisões do intervalo de integração, com PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$ , $k = 2$ e 10 níveis de enriquecimento.....	186
FIGURA 132 – Integração numérica: erros de aproximação em função do número de pontos e do parâmetro $k$ , com PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$ e 5 níveis de enriquecimento. ....	187
FIGURA 133 – Integração numérica: erros absolutos para os elementos das matrizes de massa e rigidez, com 85 pontos de integração para 10 níveis de enriquecimento. ...	187
FIGURA 134 – Integração numérica: número de pontos de integração determinados em função do número de níveis de enriquecimento para o caso unidimensional.	190
FIGURA 135 – Integração numérica: número de pontos de integração determinados em função do número de níveis de enriquecimento para o caso bidimensional. .	190
FIGURA 136 – Integração numérica: número de pontos de integração e o condicionamento das matrizes com 1 nível de enriquecimento.....	191
FIGURA 137 – Integração numérica: número de pontos de integração e o condicionamento das matrizes com 10 níveis de enriquecimento.....	192
FIGURA 138 – Elemento de barra no espaço 3D. ....	193
FIGURA 139 – Mapeamento de coordenadas 2D.....	194
FIGURA 140 – Malha com 2 elementos e a relação entre os nós.....	196

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – Tipos de funções de forma para o problema 2D com um primeiro nível de enriquecimento.....	48
TABELA 2 – Barra fixa: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão.....	77
TABELA 3 – Barra fixa: soluções obtidas e respectivos números de condição para a 1ª frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão.....	79
TABELA 4 – Barra fixa: erros percentuais da solução aproximada para a 2ª frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão.....	79
TABELA 5 – Barra fixa: erros percentuais da solução aproximada para a 499ª frequência de vibração, com o $\beta_j$ padrão.....	80
TABELA 6 – Barra fixa: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o $\bar{\beta}_j$ estabilizado.....	82
TABELA 7 – Barra fixa: erros percentuais da solução aproximada para a 2ª frequência de vibração com o $\bar{\beta}_j$ estabilizado.....	82
TABELA 8 – Barra fixa: erros percentuais da solução aproximada para a 499ª frequência de vibração com o $\bar{\beta}_j$ estabilizado.....	82
TABELA 9 – Frequências naturais aproximadas para a treliça plana com 7 barras.....	91
TABELA 10 – Treliça plana: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão.....	96
TABELA 11 – Treliça plana: erros percentuais da solução aproximada para a 2ª frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão.....	97
TABELA 12 – Treliça plana: erros percentuais da solução aproximada para a 34ª frequência de vibração, com o $\beta_j$ padrão.....	98
TABELA 13 – Frequências naturais aproximadas para a treliça espacial com 294 barras. ..	110
TABELA 14 – Treliça espacial: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão.....	110
TABELA 15 – Treliça espacial: erros percentuais da solução aproximada para a 237ª frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão.....	111
TABELA 16 – Membrana engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão.....	125

TABELA 17 – Membrana engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 2ª frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão. ....	125
TABELA 18 – Membrana engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 81ª frequência de vibração, com o $\beta_j$ padrão. ....	127
TABELA 19 – Membrana engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	128
TABELA 20 – Membrana engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 81ª frequência de vibração com o $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	128
TABELA 21 – Malhas distorcidas: números de condição obtidos com malhas distintas com PU <i>flat-top</i> , $n_l = 1$ e $k = 1$ . ....	132
TABELA 22 – Malhas distorcidas: frequências aproximadas normalizadas para o início e fim do espectro. ....	133
TABELA 23 – Malhas distorcidas: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão. ....	135
TABELA 24 – Malhas distorcidas: erros percentuais da solução aproximada para a 81ª frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão. ....	135
TABELA 25 – Malhas distorcidas: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	136
TABELA 26 – Malhas distorcidas: erros percentuais da solução aproximada para a 81ª frequência de vibração com o $\bar{\beta}_j$ estabilizado. ....	137
TABELA 27 – Refino de malha: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão. ....	141
TABELA 28 – Refino de malha: erros percentuais da solução aproximada para a 81ª frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão. ....	141
TABELA 29 – Membrana parcialmente engastada: frequências naturais aproximadas. ....	146
TABELA 30 – Membrana parcialmente engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª e 81ª frequências de vibração com o $\beta_j$ padrão. ....	146
TABELA 31 – Chapa engastada: frequências naturais aproximadas. ....	154
TABELA 32 – Chapa engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão. ....	157
TABELA 33 – Chapa engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 2ª frequência de vibração, com o $\beta_j$ padrão. ....	159

TABELA 34 – Chapa engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 220 <sup>a</sup> frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão. ....	159
TABELA 35 – MEFG x MEFGE: erros percentuais da solução aproximada para a 1 <sup>a</sup> frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão. ....	168
TABELA 36 – MEFG x MEFGE: erros percentuais da solução aproximada para a 499 <sup>a</sup> frequência de vibração com o $\beta_j$ padrão. ....	168
TABELA 37 – Pontos e pesos calculados para quadratura de Gauss-Legendre, 20 pontos para $\xi = [-1,1]$ . ....	182
TABELA 38 – Integração numérica: número de pontos otimizado por número de subintervalos. ....	185
TABELA 39 – Integração numérica: processo iterativo para estimativa do número de pontos de integração para 10 níveis de enriquecimento. ....	189

## **LISTA DE SIGLAS**

1D – Unidimensional

2D – Bidimensional

3D – Tridimensional

AIG – Análise Isogeométrica

MC – Método Composto

MEF – Método dos Elementos Finitos

MEFE – Método dos Elementos Finitos Estendidos

MEFH – Método dos Elementos Finitos Hierárquicos

MEFG – Método dos Elementos Finitos Generalizados

MEFGE – Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado

MPU – Método da Partição de Unidade

PU – Partição de Unidade

PVC – Problema de Valor de Contorno

## LISTA DE SÍMBOLOS

- $a_{ij}, b_{ij}$  - graus de liberdade de campo
- $A$  - área da seção transversal
- $B$  - matriz das derivadas de primeira ordem
- $c$  - velocidade de propagação da onda
- $D$  - tensor de relações constitutivas
- $E$  - módulo de elasticidade do material
- $F$  - vetor de forças
- $h$  - tamanho do elemento finito, relação de refino de malha
- $H$  - matriz de funções de forma
- $I_\omega$  - interpolador linear da  $i$ -ésima função de enriquecimento relativo ao suporte  $\omega$
- $J$  - matriz jacobiana
- $k$  - parâmetro de suavização função *flat-top*
- $k^e$  - matriz de rigidez do elemento
- $K$  - matriz de rigidez global
- $L$  - comprimento da barra, comprimento do elemento
- $L$  - matriz triangular inferior
- $L_x, L_y$  - comprimento dos lados das membranas ou placas
- $m^e$  - matriz de massa do elemento
- $M$  - matriz de massa global
- $n$  - grau de liberdade ou número de funções
- $ngl, N$  - número total de graus de liberdade
- $n_l$  - número de níveis de enriquecimento
- $n_n$  - número de nós do elemento finito
- $n_p$  - número de pontos de integração
- $NN_i$  - partição da unidade linear
- $p$  - ordem do polinômio, norma da matriz
- $t$  - tempo ou espessura da placa
- $T$  - matriz de transformação de coordenadas
- $u$  - vetor de deslocamentos em coordenadas globais
- $u'$  - vetor de deslocamentos em coordenadas locais
- $\ddot{u}$  - vetor de acelerações

- $u_h^e$  - solução aproximada no elemento
- $u_i$  - graus de liberdade nodais
- $u_{ENR}^e$  - parcela de aproximação do enriquecimento
- $u_{MEF}^e$  - parcela de aproximação do MEF (não enriquecida)
- $v$  - função de teste
- $x$  - coordenada cartesiana
- $y$  - coordenada cartesiana
- $z$  - coordenada cartesiana
- $\alpha$  - parâmetro de construção da função *flat-top*
- $\beta_j$  - parâmetro de enriquecimento hierárquico padrão
- $\bar{\beta}_j$  - parâmetro de enriquecimento hierárquico estabilizado
- $\gamma_{ij}, \phi_{ij}$  - funções de enriquecimento
- $\tilde{\gamma}_{ij}, \tilde{\phi}_{ij}$  - funções de enriquecimento estabilizadas
- $\eta$  - coordenadas locais do elemento finito
- $\theta$  - ângulo entre os eixos local e global
- $\kappa(\bullet)$  - número de condição
- $\bar{\mu}$  - parâmetro de rigidez
- $\nu$  - coeficiente de Poisson
- $\xi$  - coordenadas locais do elemento finito
- $\rho$  - massa específica
- $\bar{\rho}$  - parâmetro de massa
- $\varphi$  - partição da unidade para as funções de enriquecimento, partição da unidade *flat-top*
- $\varphi_i$  -  $i$ -ésima função de enriquecimento não estabilizada
- $\tilde{\varphi}_i$  -  $i$ -ésima função de enriquecimento estabilizada
- $\boldsymbol{\phi}$  - vetor dos modos de vibração, autovetores
- $\boldsymbol{\Phi}$  - vetor de funções de forma
- $\omega, \omega_n$  - frequência natural exata ou de referência
- $\omega_h$  - frequência natural aproximada
- $\Omega$  - domínio
- $\Omega^e$  - domínio do elemento finito
- $\nabla(\bullet)$  - operador gradiente

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>27</b>
1.1	OBJETIVOS .....	28
1.1.1	Objetivo Geral .....	28
1.1.2	Objetivos Específicos .....	28
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	29
<b>2</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS .....</b>	<b>30</b>
2.1	MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS .....	30
2.2	PARTIÇÃO DA UNIDADE .....	31
2.3	MEFG APLICADO À ANÁLISE DINÂMICA .....	31
2.4	ENRIQUECIMENTO .....	33
2.5	FUNÇÕES DE FORMA PARA ELEMENTOS 1D .....	34
2.6	FUNÇÕES DE FORMA PARA ELEMENTOS 2D .....	35
2.7	FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO NÃO-POLINOMIAIS .....	35
<b>3</b>	<b>PROCESSO DE ESTABILIZAÇÃO DO MEFG .....</b>	<b>38</b>
3.1	MEFG ESTABILIZADO .....	38
3.2	FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO ESTABILIZADAS .....	39
3.3	PARTIÇÃO DA UNIDADE <i>FLAT-TOP</i> .....	42
<b>4</b>	<b>FUNÇÕES DE FORMA ENRIQUECIDAS .....</b>	<b>44</b>
4.1	PARA O ELEMENTO 1D .....	44
4.2	PARA O ELEMENTO QUADRILÁTERAL 2D .....	45
<b>5</b>	<b>PROBLEMAS DA ANÁLISE DINÂMICA .....</b>	<b>50</b>
5.1	PROBLEMA DE VIBRAÇÕES LIVRES .....	50
5.2	VIBRAÇÃO EM BARRA RETA .....	51
5.3	VIBRAÇÃO EM MEMBRANA .....	52
5.4	ESTADO PLANO DE TENSÕES .....	53
<b>6</b>	<b>METODOLOGIA ADOTADA .....</b>	<b>55</b>
6.1	ASPECTOS DE IMPLEMENTAÇÃO .....	56
6.2	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA .....	56

6.3	NÚMERO DE CONDIÇÃO .....	57
6.4	PROBLEMA DE AUTOVALORES GENERALIZADOS .....	58
<b>7</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS.....</b>	<b>59</b>
7.1	BARRA FIXA (1D) .....	60
7.1.1	Número de condição em função do parâmetro $\alpha$ .....	60
7.1.2	Número de condição e a influência do enriquecimento .....	64
7.1.3	Número de condição e a influência do parâmetro $\beta_1$ .....	66
7.1.4	Espectro de frequências .....	67
7.1.5	Taxa de convergência .....	76
7.1.6	Modos de vibração .....	86
7.2	TRELIÇA PLANA (2D) .....	86
7.2.1	Número de condição em função do parâmetro $\alpha$ .....	87
7.2.2	Número de condição e a influência do enriquecimento .....	89
7.2.3	Número de condição e a influência do parâmetro $\beta_1$ .....	90
7.2.4	Espectro de frequências .....	91
7.2.5	Taxa de convergência .....	96
7.2.6	Modos de vibração .....	100
7.3	TRELIÇA ESPACIAL (3D) .....	101
7.3.1	Número de condição em função do parâmetro $\alpha$ .....	102
7.3.2	Número de condição e a influência do enriquecimento .....	104
7.3.3	Número de condição e a influência do parâmetro $\beta_1$ .....	105
7.3.4	Espectro de frequências .....	106
7.3.5	Taxa de convergência .....	110
7.3.6	Modos de vibração .....	114
7.4	MEMBRANA ENGASTADA (2D) .....	115
7.4.1	Número de condição versus parâmetro $\alpha$ .....	116
7.4.2	Número de condição e a influência do enriquecimento .....	118
7.4.3	Número de condição e a influência do parâmetro $\beta_1$ .....	121
7.4.4	Espectro de frequências .....	121
7.4.5	Taxa de convergência .....	125
7.4.6	Modos de vibração .....	129
7.4.7	Malhas distorcidas .....	130
7.4.8	Refino de malha.....	138

7.4.9	Alteração na condição de contorno .....	142
7.5	ESTADO PLANO DE TENSÕES (2D).....	148
7.5.1	Número de condição em função do parâmetro $\alpha$ .....	148
7.5.2	Número de condição e a influência do enriquecimento .....	151
7.5.3	Número de condição e a influência do parâmetro $\beta_1$ .....	153
7.5.4	Espectro de frequências .....	154
7.5.5	Taxa de convergência .....	157
7.5.6	Modos de vibração .....	161
7.6	COMPARAÇÃO ENTRE MEFG E MEFGE .....	161
<b>8</b>	<b>CONCLUSÕES .....</b>	<b>171</b>
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>176</b>
	<b>APÊNDICE A – INTEGRAÇÃO NUMÉRICA .....</b>	<b>182</b>
A.1.	ALGORITMO PARA GERAÇÃO DOS PONTOS DA QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE ....	182
A.2.	DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO .....	183
A.2.	PONTOS DE INTEGRAÇÃO E NÚMEROS DE CONDIÇÃO .....	191
	<b>APÊNDICE B – MUDANÇA DE COORDENADAS.....</b>	<b>192</b>
B.1.	ESTRUTURAS TRELIÇADAS.....	192
B.2.	MAPEAMENTO DO ELEMENTO MESTRE 2D.....	194
	<b>APÊNDICE C – MONTAGEM DAS MATRIZES .....</b>	<b>195</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) e o Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFE), podem ser vistos como extensões do Método dos Elementos Finitos (MEF) tradicional, uma vez que foram desenvolvidos a partir do Método de Galerkin em conjunto com o Método da Partição de Unidade (MPU) (MELENK; BABUŠKA, 1996; BABUŠKA; MELENK, 1997; ODEN; DUARTE, 1997; BELYTSCHKO; BLACK, 1999; BABUŠKA *et al.*, 2004; BELYTSCHKO *et al.*, 2009). A principal proposta do MEFG é ampliar o espaço de aproximação do MEF tradicional (espaço de funções teste) introduzindo funções de enriquecimento, as mais adequadas possíveis, que expandam o espaço de solução. As escolhas das funções de enriquecimento podem incluir algum conhecimento em termos das respostas esperadas, trazendo uma melhor aproximação da solução do problema. Esta abordagem é possível devido ao Método da Partição de Unidade (MELENK, 1995; DUARTE; ODEN, 1996a,b; BABUŠKA; MELENK, 1997; BELYTSCHKO; BLACK, 1999; MOËS *et al.* 1999; BABUŠKA *et al.*, 2004).

O MEFG vem sendo aplicado em diversas áreas, como mecânica da fratura, escoamento de fluidos bifásicos, eletromagnetismo, problemas com gradientes elevados, entre outros. Para problemas estruturais dinâmicos, o MEFG tem apresentado bom desempenho utilizando funções trigonométricas como enriquecimento, uma vez que essas funções são encontradas na maioria das soluções analíticas de tais problemas, como demonstrado por Arndt *et al.* (2010, 2016), Torii e Machado (2012), Torii *et al.* (2016), Shang *et al.* (2016), Shang (2016), Piedade Neto e Proença (2016), Weinhardt *et al.* (2018). Apesar dos excelentes resultados, a instabilidade numérica associada ao processo de enriquecimento é um fator limitante quanto à sua aplicabilidade e eficiência. Diversos estudos recentes foram direcionados para o tratamento deste problema, principalmente no contexto da mecânica da fratura (BABUŠKA; BANERJEE, 2011, 2012; GUPTA *et al.*, 2013, 2015; SATO *et al.* 2018).

A fim de melhorar o condicionamento do método, Babuška e Banerjee (2011, 2012) apresentaram uma nova abordagem para a construção de funções de enriquecimento, visando criar um espaço de funções de enriquecimento quase ortogonal em relação ao espaço de aproximação do MEF. Esta modificação foi chamada de Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado (MEFGE). No entanto, Zhang *et al.* (2014) mostraram que, para enriquecimento polinomial de alta ordem ( $p > 1$ ), a modificação proposta pelo MEFGE não é condição suficiente para garantir o adequado condicionamento do problema.

Zhang *et al.* (2014) apresentaram uma nova proposta para a construção do espaço de funções de enriquecimento, substituindo a partição da unidade (PU) linear lagrangeana padrão (funções lineares por partes, conhecidas também por *hat-functions*) pela partição da unidade *flat-top*. Essa modificação foi denominada pelos autores como MEFGE de alta ordem. Esta nova versão está sendo aplicada em diversos campos, principalmente para elasticidade e mecânica da fratura, como pode ser visto nos trabalhos de Sato *et al.* (2018), Lins *et al.* (2019) e Cui e Zhang (2020). No entanto, Zhang *et al.* (2014) abordaram apenas a análise para enriquecimentos polinomiais de alta ordem, sem avaliar os casos com enriquecimentos não-polinomiais. Problemas de comportamento dinâmico são comumente representados por funções não-polinomiais, por exemplo, funções trigonométricas ou exponenciais, e agora essa aplicabilidade da PU *flat-top* em problemas dinâmicos é tratada no presente trabalho.

Portanto, este trabalho busca investigar o MEFGE com a PU *flat-top*, para a construção de aproximações de espaços enriquecidos com funções não-polinomiais aplicadas à análise dinâmica. Experimentos numéricos são realizados para verificar as influências no condicionamento das matrizes de rigidez e massa. Além disso, verifica-se a precisão e convergência do espectro de frequências comparando os resultados com os obtidos pela PU *flat-top* e pela PU linear.

Alguns resultados gerados durante o desenvolvimento deste trabalho foram publicados antecipadamente em Silva *et al.* (2022).

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo Geral

Investigar a aplicação da técnica de estabilização da PU *flat-top* no Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado aplicado a problemas da Análise Dinâmica.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Desenvolver e implementar a PU *flat-top* no Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado aplicado a problemas da Análise Dinâmica.

Aplicar a PU *flat-top* na análise modal de diversos problemas da Análise Dinâmica.

Avaliar o comportamento dos números de condição das matrizes de massa e rigidez sob a influência da PU *flat-top* e o processo de enriquecimento.

Avaliar a precisão das frequências de vibração aproximadas e as taxas de convergência.

Comparar os resultados obtidos com a PU *flat-top* e a PU linear.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em oito capítulos. O Capítulo 2 resume alguns aspectos sobre o Método dos Elementos Finitos, a Partição da Unidade e o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos Generalizados. Neste capítulo são apresentados os conceitos de enriquecimento e a formulação correspondente aplicada aos problemas da Análise Dinâmica.

O Capítulo 3 apresenta a estratégia adotada pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado para melhorar o condicionamento do método numérico. São apresentados os conceitos da PU *flat-top*, sua formulação e parâmetros de construção.

O Capítulo 4 mostra o processo de construção das funções enriquecidas a partir das partições da unidade e das funções de enriquecimento. São apresentados exemplos para os problemas unidimensional e bidimensional.

O Capítulo 5 aborda o problema de vibrações livres da Análise Dinâmica. São apresentadas formulações dos problemas de vibrações livres em barra reta, vibrações livres em membrana e vibrações livres sob estado plano de tensões.

O Capítulo 6 apresenta a metodologia adotada para a realização das análises numéricas deste trabalho. Os principais aspectos de implementação e ferramentas são referenciados. São apresentadas as considerações sobre a integração numérica, metodologia para determinação dos números de condição e resolução do problema de autovalores generalizados.

Os resultados numéricos para diversos problemas são apresentados no Capítulo 7, com a discussão sobre o condicionamento das matrizes de massa e rigidez em função dos parâmetros de construção da PU *flat-top*, a influência do processo de enriquecimento, os espectros de frequências e taxas de convergência.

O Capítulo 8 compila as principais conclusões obtidas com este trabalho e apresenta as considerações finais com sugestões para trabalhos futuros.

## 2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

Neste capítulo são apresentados alguns aspectos sobre o Método dos Elementos Finitos, a Partição da Unidade, o MEFG e a formulação aplicada aos problemas da Análise Dinâmica. São apresentados os conceitos de enriquecimento, as funções de forma do MEF e as funções de enriquecimento não-polinomiais.

### 2.1 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O Método dos Elementos Finitos é um método numérico de resolução de equações diferenciais parciais a partir da discretização do meio contínuo e com a aproximação da solução por funções polinomiais interpoladoras (BATHE, 1996; HUGHES, 1987; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; CAREY; ODEN, 1984). No MEF tradicional, o problema de valor de contorno é tratado em sua forma fraca a partir da aplicação do Método de Galerkin.

No MEF, os meios contínuos são representados como um acoplamento de subdivisões chamadas de elementos finitos, que são interconectados em determinados pontos ou nós, arestas e faces (SORIANO; LIMA, 2003), constituindo assim uma malha de elementos finitos. As aproximações do MEF podem ser melhoradas através de três processos principais (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; HUGHES, 1987; BATHE, 1996; REDDY, 2006): i) com a redução do tamanho dos elementos e fixando a ordem das funções polinomiais, processo denominado refino  $h$ ; ii) com o aumento da ordem das funções polinomiais interpoladoras e fixando o tamanho dos elementos, processo denominado refino  $p$ ; iii) com a aplicação de ambos os métodos i e ii, processo denominado refino  $hp$ .

Apesar destas possibilidades de refinamento para melhorar as aproximações, a aplicação do MEF em problemas mais complexos (soluções que possuem descontinuidades, gradientes elevados ou características específicas) pode requerer um elevado custo computacional, limitando a aplicação do método. Os métodos enriquecidos, como o Método da Partição da Unidade (MPU) e o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) surgiram como uma alternativa para tratamento mais eficiente destes problemas mais complexos.

## 2.2 PARTIÇÃO DA UNIDADE

O Método dos Elementos Finitos Generalizados pode ser visto como uma extensão do MEF ou interpretado como uma forma não convencional deste método. O MEFG é baseado no Método da Partição da Unidade (MPU), originalmente apresentado por Melenk e Babuška (1996a, 1996b), Oden e Duarte (1997) e Babuška e Melenk (1997) que apresentaram uma metodologia de geração de espaços de aproximação a partir de funções de forma quaisquer, através da multiplicação destas funções por uma Partição da Unidade (PU). O conceito de partição da unidade já era conhecido (ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000), mas Melenk e Babuška (1996a) mostraram que o espaço obtido pelo MPU era capaz de manter as propriedades de aproximação do espaço original e as propriedades de conformidade e regularidade da partição da unidade. Posteriormente, Strouboulis *et al.* (2000, 2001) e Babuška *et al.* (2004) apresentaram o MEFG, que pode ser visto como uma extensão do MPU assumindo que o espaço de aproximação é dado pela união do espaço de aproximação do MPU com o espaço de aproximação tradicional do MEF, como será apresentado a seguir.

A Partição da Unidade (PU) é um conjunto de funções onde a soma destas funções é igual a unidade em todo o suporte:

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1 \quad \forall x \in \Omega. \quad (1)$$

Seja ainda,  $\{\Omega_i\}$  uma cobertura do conjunto aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , satisfazendo a condição de sobreposição ponto a ponto definida por:

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \Omega \quad \text{card}\{i|x \in \Omega_i\} \leq M \quad (2)$$

onde o parâmetro  $M$  controla o número de subcoberturas  $\Omega_i$  que podem se sobrepor em um mesmo ponto dentro do domínio do problema  $\Omega$ . Além disso, a PU subordinada a subcobertura  $\Omega_i$  deve ser não nula somente dentro da subcobertura  $\Omega_i$ , deve ser limitada e possuir derivadas limitadas.

## 2.3 MEFG APLICADO À ANÁLISE DINÂMICA

A análise dinâmica de problemas estruturais reais, em geral muito complexos, requer a utilização de métodos computacionais aproximados, visto que somente problemas com

geometria muito simples e condições de contorno específicas possuem soluções analíticas conhecidas (ARNDT, 2009). O MEF é amplamente utilizado na análise destes problemas, porém a necessidade de determinação de frequências e modos de vibração mais precisos, principalmente os mais elevados, quase sempre requer a construção de modelos com grande refino de malha e com grande número de graus de liberdade, implicando assim em maiores custos computacionais. Como alternativa, os métodos enriquecidos vêm apresentando grande capacidade na resolução destes problemas com maior eficiência. Neste contexto, o MEFG vem sendo aplicado com sucesso em problemas dinâmicos como apresentado nos trabalhos a seguir.

Arndt (2009) estudou a aplicação do MEFG na análise modal de problemas dinâmicos de estruturas reticuladas, com a proposição de funções de enriquecimento trigonométricas, obtendo excelentes resultados quanto a eficácia e convergência em comparação com outros métodos, como o MEF e o Método Composto (MC) (ZENG, 1998). Arndt (2009) e Arndt, Machado e Scremin (2016) apresentaram um método iterativo que permite a determinação de frequências naturais com grande precisão, denominado MEFG Adaptativo.

Torii (2012) e Torii e Machado (2012) estenderam a aplicação do MEFG para a análise modal e transiente de barras, vigas de Euler-Bernoulli, pórticos, membranas e estado plano de tensões. Shang (2014) avaliou a aplicação do MEFG em problemas de propagação de ondas elastoplásticas. O MEFG Adaptativo foi aplicado na análise de respostas dinâmicas de estruturas reticuladas e vigas uniformes e não uniformes de Euler-Bernoulli, por Arndt, Machado e Scremin (2016).

Weinhardt (2016) propôs técnicas de estabilização do MEFG visando contornar o problema do mau condicionamento causado pelo processo de enriquecimento do espaço de aproximação e também analisou a aplicação de diferentes partições da unidade quanto a precisão das frequências naturais. Petroli (2016) investigou os aspectos de condicionamento e sensibilidade das matrizes de massa em problemas de vibrações livres de estruturas.

Debella (2018) aplicou o MEFG em análises transientes para barras, treliças e vigas de Euler-Bernoulli. Malacarne (2018) avaliou o uso do indicador de Friberg em análises dinâmicas realizadas pelo MEFG, como uma proposta para o enriquecimento seletivo de elementos específicos da malha, visando aumento de precisão com menor custo computacional.

Shang *et al.* (2016a) aplicaram o MEFG em problemas de vibração livre sob estado plano de tensões com malhas severamente distorcidas. Shang (2016b) e Freisleben (2019) aplicaram o MEFG na análise dinâmica de vigas de Timoshenko. Debella *et al.* (2019) apresentaram uma formulação para o MEFG adaptativo em problemas de análise dinâmica transiente de barras e treliças.

Corrêa (2019) aplicou o MEFG na análise dinâmica de arcos finos e espessos. Corrêa *et al.* (2021) compararam os resultados obtidos com o MEFG, MEF e o Método p-Fourier em problemas de vibrações livres de arcos. Kowalczyk (2019) aplicou o MEFG na análise dinâmica de placas de Kirchhoff-Love. Cittadin (2020) e Cittadin *et al.* (2022) investigaram o enriquecimento seletivo no MEFG em problemas de estado plano, com a aplicação do indicador de erro de Frieberg.

## 2.4 ENRIQUECIMENTO

O conceito principal do enriquecimento é ampliar os espaços de aproximações, combinado funções linearmente independentes quaisquer com as funções de uma Partição da Unidade. As formulações de enriquecimento são desenvolvidas a partir do Método dos Elementos Finitos (MEF), adicionando termos extras que podem incluir informações específicas sobre a natureza da solução. Nesse sentido, a solução aproximada  $u_h^e$  considerada no contexto do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) pode ser escrita como:

$$u_h^e = u_{MEF}^e + u_{ENR}^e \quad (3)$$

onde  $u_{MEF}^e$  e  $u_{ENR}^e$  são, respectivamente, os termos do MEF tradicional e os termos de enriquecimento em um elemento. Cada parcela pode ser desenvolvida multiplicando funções de forma apropriadas, funções da partição de unidade (PU) e funções de enriquecimento, pelos valores nodais ou variáveis de campo. A primeira parcela da equação (3), usualmente, está relacionada aos graus de liberdade nodais. O segundo termo está associado aos graus de liberdade do campo (não nodais), onde se espera que não alterem os valores nodais. Nesse sentido, as condições de contorno podem ser estabelecidas como no MEF. Uma vez que os termos de enriquecimento não nodais atuam apenas sobre as variáveis de campo, qualquer informação pode ser colocada sobre elas, tornando a aproximação a melhor possível. Para problemas dinâmicos, por exemplo, as variáveis de campo podem ser relacionadas aos modos de vibração de um elemento.

No contexto da Análise Dinâmica de Estruturas, a equação (3) pode ser reescrita conforme proposto por Arndt (2009) como:

$$u_h^e = \sum_{i=1}^{n_n} N_i u_i + \sum_{i=1}^{n_n} \varphi_i \left[ \sum_{j=1}^{n_l} \gamma_{ij} a_{ij} + \phi_{ij} b_{ij} \right] \quad (4)$$

onde:

$N_i$ : partição da unidade para a parcela do MEF;

$\varphi_i$ : partição da unidade para as funções de enriquecimento;

$\gamma_{ij}, \phi_{ij}$ : funções de enriquecimento;

$u_i$ : graus de liberdade nodais;

$a_{ij}, b_{ij}$ : graus de liberdade de campo, relacionados às funções de enriquecimento;

$n_l$ : número de níveis de enriquecimento;

$n_n$ : número de nós do elemento finito.

## 2.5 FUNÇÕES DE FORMA PARA ELEMENTOS 1D

As funções de forma lineares polinomiais são frequentemente utilizadas no MEF, que dentro de um domínio compacto, elas são conhecidas como funções chapéu ou *hat-functions*. O MEFG pode ser entendido como uma extensão do MEF, uma vez que a aproximação MEF clássica é um caso particular da equação (3), ou seja, quando não são considerados os termos de enriquecimento. Para um elemento padrão com domínio  $\xi \in [-1, +1]$ , as funções de forma lineares são escritas como:

$$N_1 = \frac{1 - \xi}{2} \quad (5)$$

e

$$N_2 = \frac{1 + \xi}{2}. \quad (6)$$

As funções lineares das equações (5) e (6) atendem a regra principal da PU, pois  $N_1 + N_2$  é uma unidade para qualquer  $\xi \in [-1, +1]$ . Essas funções consideram a interpolação local dentro do domínio de um único elemento. No entanto, as mesmas funções podem ser aplicadas no domínio de dois elementos finitos com um nó associado, com  $N_2$  à esquerda e  $N_1$  à direita formando uma função de interpolação global com suporte compacto, ou seja, valendo zero fora dos elementos.

Para a parcela  $u_{ENR}^e$  de enriquecimento da equação (4), normalmente se utiliza a mesma PU aplicada à parcela do componente  $u_{MEF}^e$ , ou seja,  $\varphi_i = N_i$ . No entanto, neste trabalho, adota-se uma PU distinta,  $\varphi_i \neq N_i$ , e assim considera-se a PU *flat-top*, como proposto por Zhang *et al.* (2014), que será apresentada adiante.

## 2.6 FUNÇÕES DE FORMA PARA ELEMENTOS 2D

A generalização desta formulação em duas direções pode ser entendida como uma sobreposição das funções de enriquecimento e das funções PU. Para um elemento linear padrão, a PU é de ordem polinomial 1 (função bilinear) com aproximação  $C^0$ . As funções de enriquecimento podem possuir uma função especial arbitrária. A combinação adequada destes dois conjuntos de funções, enriquecimento e PU, proporcionam as funções de forma enriquecidas no domínio 2D, que possuem características especiais como funções aproximadoras e, ao mesmo tempo, incorporam o suporte compacto da PU. Assim, a aproximação global é construída sem penalizar a continuidade entre os elementos  $C^0$ .

Como ponto de partida da análise, a escolha de elementos mais simples é recomendada, pois os resultados podem ser melhorados apenas aumentando os níveis de enriquecimento. As funções da PU para  $\mathbb{R}^2$  são desenvolvidas usando as equações (5) e (6) e considerando a multiplicação em duas direções do elemento mestre. Este procedimento é descrito em detalhes por Solín *et al.* (2004) e Becker *et al.* (1981). As funções de forma resultantes para o elemento finito quadrilateral são dadas por:

$$\Phi(\xi, \eta) = N_i(\xi)N_j(\eta) \quad i, j = 1, 2 \quad (7)$$

onde  $\xi \in [-1, +1]$  e  $\eta \in [-1, +1]$  definem o domínio do elemento mestre quadrilátero. Este mesmo procedimento pode ser aplicado para as funções de enriquecimento e detalhes sobre isso são discutidos adiante.

## 2.7 FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO NÃO-POLINOMIAIS

Os termos entre colchetes na equação (4) incluem as funções de enriquecimento  $\gamma_{ij}$  e  $\phi_{ij}$ , que podem trazer algum conhecimento sobre o problema. No caso de problemas dinâmicos, é interessante utilizar funções não-polinomiais, pois a maioria das soluções analíticas para dinâmica estrutural são representadas por funções trigonométricas e funções exponenciais. Assim, no contexto de problemas dinâmicos, o uso de funções harmônicas como enriquecimento mostra-se uma boa tentativa. O enriquecimento trigonométrico foi abordado por vários autores como: Arndt *et al.* (2010, 2016), Torii e Machado (2012), Torii *et al.* (2016), Shang *et al.* (2016), Shang (2016), Weinhardt (2016) e Weinhardt *et al.* (2018).

Neste trabalho, as funções seno e cosseno são usadas como enriquecimento de campo seguindo as propostas de Arndt (2009) e Torii (2012) e reescritas por Weinhardt (2016). Então, para o elemento mestre no caso 1D,  $\xi \in [-1, +1]$ , as funções de enriquecimento são adotadas como:

$$\gamma_{1j} = \sin\left(\beta_j \frac{1+\xi}{2}\right) \quad (8)$$

$$\gamma_{2j} = \sin\left(\beta_j \frac{\xi-1}{2}\right) \quad (9)$$

$$\phi_{1j} = \cos\left(\beta_j \frac{1+\xi}{2}\right) - 1 \quad (10)$$

$$\phi_{2j} = \cos\left(\beta_j \frac{\xi-1}{2}\right) - 1. \quad (11)$$

A escolha do parâmetro  $\beta_j$  pode afetar o desempenho numérico da solução. Originalmente Arndt (2009) e Torii (2012) sugeriram a variável  $\beta_j$  como:

$$\beta_j = j\beta_1 \quad j = 2,3,\dots,n_l \quad (12)$$

onde  $\beta_1$  é um parâmetro inicial definido na análise.

Como  $\beta_j$  depende do nível de enriquecimento  $j$ , este pode ser usado como parâmetro hierárquico, permitindo a construção de espaços de aproximação hierárquicos, conceito similar ao adotado no Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH) (SOLÍN *et al.*, 2004).

Neste trabalho, o parâmetro de enriquecimento hierárquico definido pela equação (12) é referenciado daqui em diante como  $\beta_j$  padrão. A influência numérica deste parâmetro foi investigada por Weinhardt (2016) e Weinhardt *et al.* (2018). Uma modificação heurística para o  $\beta_j$  padrão foi proposta trazendo vantagens para estabilidade numérica e condicionamento. O novo parâmetro de enriquecimento hierárquico estabilizado  $\bar{\beta}_j$  foi definido para um elemento mestre  $\xi \in [-1, +1]$  como:

$$\bar{\beta}_j = \left[4(j-1) + \frac{\beta_1}{\pi}\right] \pi \quad j = 2,3,\dots,n_l. \quad (13)$$

Pode-se notar que ambos os parâmetros,  $\beta_j$  e  $\bar{\beta}_j$ , são iguais quando  $j = 1$ , ou seja, para o primeiro nível de enriquecimento. A figura 1 apresenta esses dois parâmetros para os cinco primeiros níveis de enriquecimento, considerando  $\beta_1 = 3\pi/2$ . Neste trabalho, o parâmetro de

enriquecimento hierárquico definido pela equação (13) é referenciado daqui em diante como  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

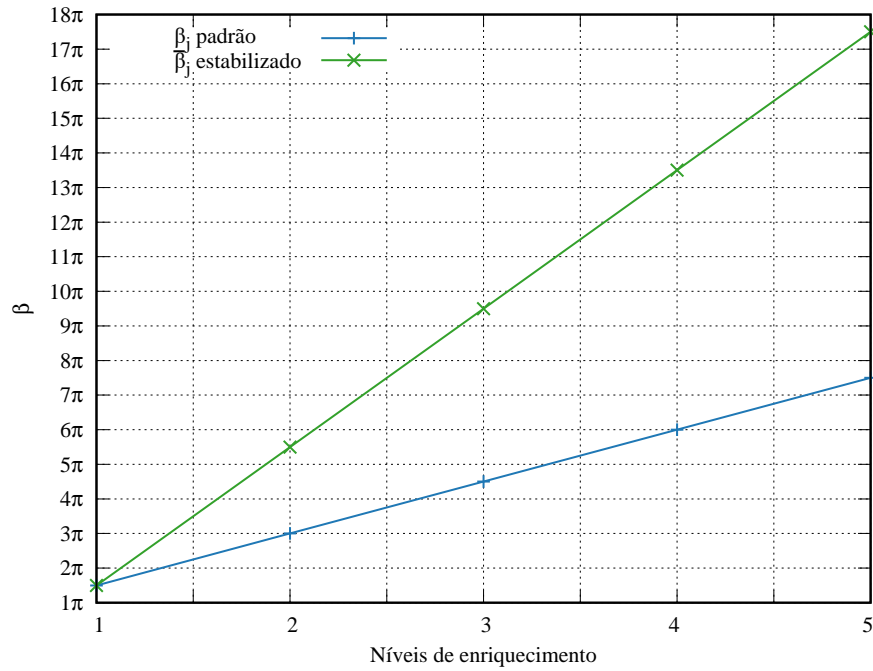


FIGURA 1 – Parâmetros de enriquecimento hierárquicos.

### 3 PROCESSO DE ESTABILIZAÇÃO DO MEFGE

Neste capítulo são apresentados os conceitos do MEFGE Estabilizado, as funções de enriquecimento estabilizadas e a nova proposta para estabilização com a Partição da Unidade *flat-top*.

#### 3.1 MEFGE ESTABILIZADO

O Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado (MEFGE) foi proposto por Babuška e Banerjee (2011, 2012) para melhorar o MEFGE tornando-o numericamente mais estável. Basicamente, o MEFGE modifica as funções de enriquecimento retirando delas um interpolador linear, visando criar um espaço de funções de enriquecimento quase ortogonal em relação ao espaço de aproximação MEF, que, para problemas estáticos, mudaria a tendência de ser mal condicionado. Chamando  $\tilde{\varphi}_i$  a  $i$ -ésima função de enriquecimento estabilizada,  $\varphi_i$  a  $i$ -ésima função de enriquecimento não estabilizada, e  $I_\omega(\varphi_i(\xi))$  o interpolador linear da  $i$ -ésima função de enriquecimento relativo ao suporte  $\omega$ , pode-se escrever:

$$\tilde{\varphi}_i(\xi) = \varphi_i(\xi) - I_\omega(\varphi_i(\xi)) \quad (14)$$

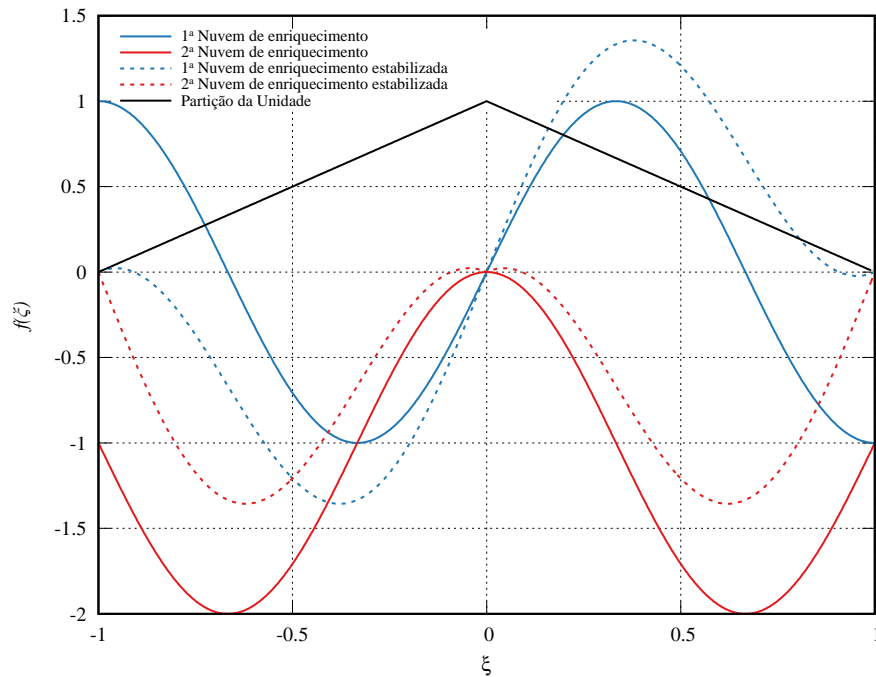
onde o interpolador linear  $I_\omega(\varphi_i(\xi))$  é determinado por:

$$I_\omega(\varphi_i(\xi)) = \sum_{j=1}^2 N_j(\xi) \varphi_i(\xi_j) \quad (15)$$

sendo  $N_j(\xi)$  a PU linear, apresentada nas equações (5) e (6), e  $\xi_j$  são coordenadas nodais do elemento padrão, i.e.  $\xi_1 = -1$  e  $\xi_2 = +1$ .

Como exemplo, as funções enriquecidas estabilizadas são mostradas na figura 2, onde podem ser vistas a partição da unidade (*hat-functions*), a primeira e a segunda nuvens de enriquecimento (em linhas contínuas) e as nuvens estabilizadas (em linhas tracejadas). O interpolador força valores nulos para as funções de enriquecimento nos nós, nos pontos  $\xi$  iguais a  $-1$ , e  $+1$ , reduzindo a possibilidade de dependência linear da matriz de rigidez.

A aplicação do MEFGE em problemas da análise dinâmica foi abordada por Weinhardt (2016) e Weinhardt *et al.* (2018), onde observou-se que a instabilidade encontrada no processo de enriquecimento sucessivo do MEFGE não foi contornada satisfatoriamente, sem alterações significativas sobre os números de condição das matrizes de massa e rigidez e sobre os espectros de frequências, grandezas que serão tratados mais adiante neste trabalho.



Fonte: Adaptado de Weinhardt (2016).

FIGURA 2 – Processo de estabilização das funções para o 1º nível de enriquecimento.

### 3.2 FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO ESTABILIZADAS

As funções de enriquecimento não-polinomiais definidas na seção 2.5, equações (8) à (11), são reescritas em sua forma estabilizada conforme a proposta do MEFGE, como:

$$\tilde{\gamma}_{1j} = \sin\left(\beta_j \frac{1+\xi}{2}\right) - \sin(\beta_j) \frac{1+\xi}{2} \quad (16)$$

$$\tilde{\gamma}_{2j} = \sin\left(\beta_j \frac{\xi-1}{2}\right) - \sin(\beta_j) \frac{\xi-1}{2} \quad (17)$$

$$\tilde{\phi}_{1j} = \cos\left(\beta_j \frac{1+\xi}{2}\right) - \cos(\beta_j) \frac{1+\xi}{2} - \frac{1-\xi}{2} \quad (18)$$

$$\tilde{\phi}_{2j} = \cos\left(\beta_j \frac{\xi-1}{2}\right) - \cos(\beta_j) \frac{1-\xi}{2} - \frac{1+\xi}{2}. \quad (19)$$

Em concordância com a estratégia do MEFGE, as funções de enriquecimento estabilizadas se anulam nos nós do elemento mestre, com coordenadas  $\xi = -1$  e  $\xi = +1$ .

Os parâmetros de enriquecimento hierárquico  $\beta_j$  e  $\bar{\beta}_j$  são aplicáveis conforme definição das equações (12) e (13), e atendem a estratégia de estabilização do MEFGE. Alguns resultados apresentados neste trabalho consideram a sobreposição das estratégias de estabilização do MEFGE com a aplicação do parâmetro  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

Adiantando uma discussão importante, a figura 3 ilustra o processo de construção das funções de enriquecimento através do MEFGE e do MEFGE. A figura 3(a) mostra o processo de obtenção das funções de enriquecimento estabilizadas a partir da subtração das funções de enriquecimento não estabilizadas pelos respectivos interpoladores lineares.

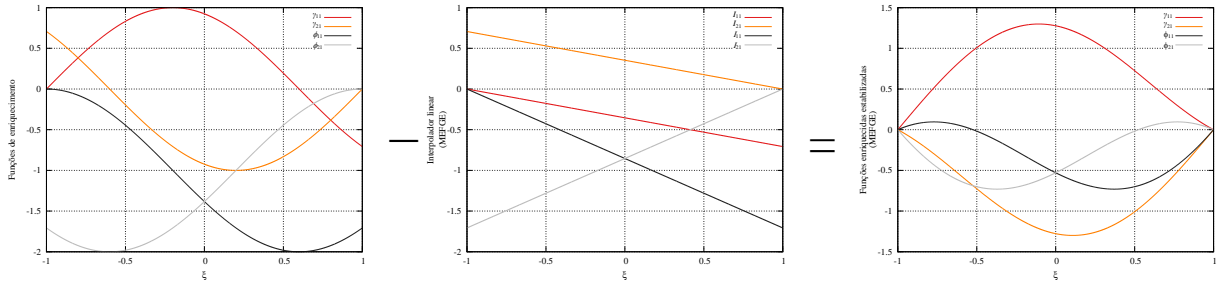
A figura 3(b) apresenta o processo seguinte, com a multiplicação entre as funções de enriquecimento estabilizadas e a partição da unidade, obtendo assim, em conjunto com as funções da PU, as funções de forma enriquecidas pelo MEFGE. A figura 3(c) mostra o processo semelhante para o MEFGE, onde as funções de enriquecimento são multiplicadas diretamente pelas funções da PU.

As figuras 3(d) e 3(e) apresentam os espaços de funções enriquecidas gerados pelo MEFGE e MEFGE, respectivamente. Nota-se a semelhança entre os dois conjuntos de funções, que neste caso foram construídas com  $\beta_1 = 5\pi/4$ , porém resultados similares também são obtidos para outros valores de  $\beta_1$  e para níveis superiores de enriquecimento.

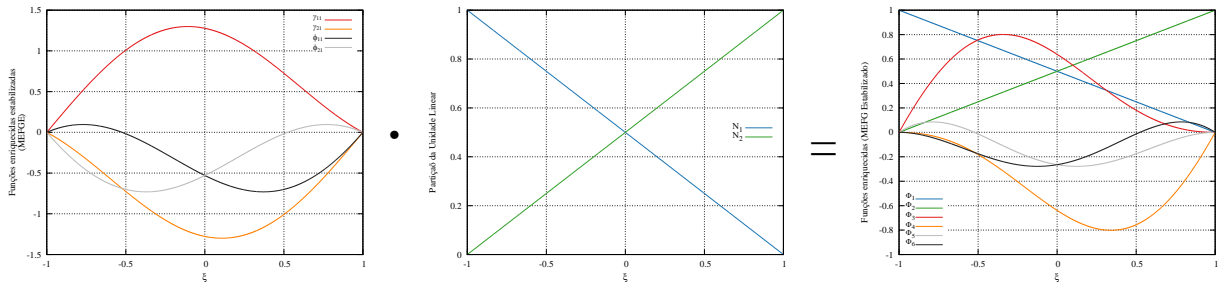
A semelhança entre os espaços de aproximação do MEFGE e MEFGE pode ser justificada pelo fato de que as funções de enriquecimento representadas pelas equações (8) a (11), definidas originalmente por Arndt (2009), possuem a propriedade de se anularem no nós após a multiplicação pela PU. Com essa característica, as funções enriquecidas acabam alcançando o mesmo objetivo final esperado pelo MEFGE, após a remoção do interpolador linear.

Como observado no trabalho de Weinhardt (2016), onde o MEFGE e o MEFGE foram aplicados em problemas da análise dinâmica, os resultados obtidos com os dois métodos foram muito semelhantes, sem representação de um ganho significativo de estabilidade na aplicação do MEFGE nos problemas avaliados.

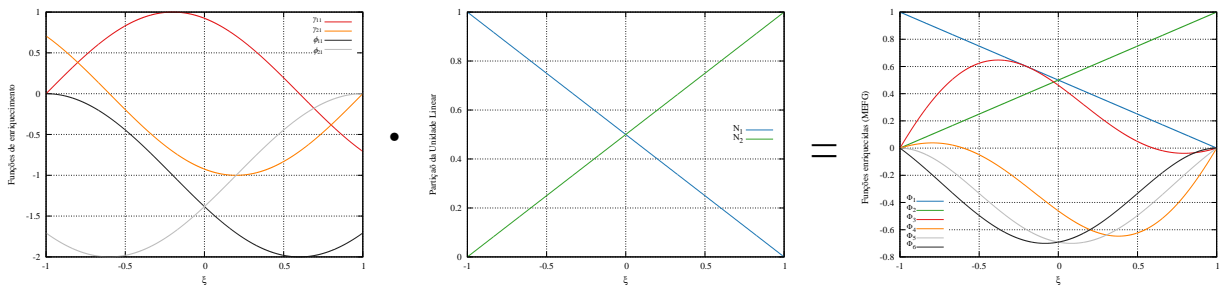
Este trabalho aborda uma proposta diferente para o MEFGE, apresentada no trabalho de Zhang *et al.* (2014), que considera uma alteração na PU utilizada nas funções de enriquecimento, com o objetivo de estender o MEFGE para enriquecimentos de alta ordem.



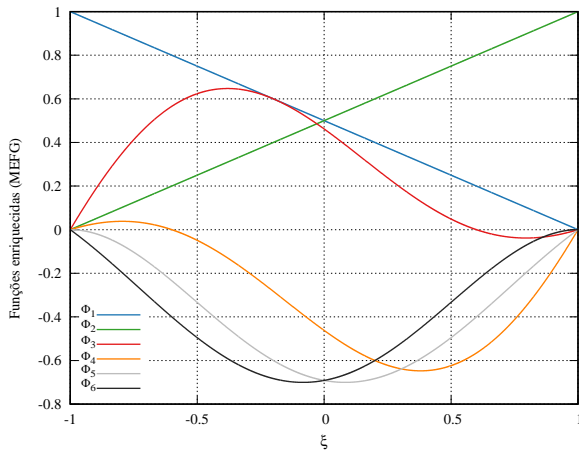
(a) processo de estabilização do MEFGE



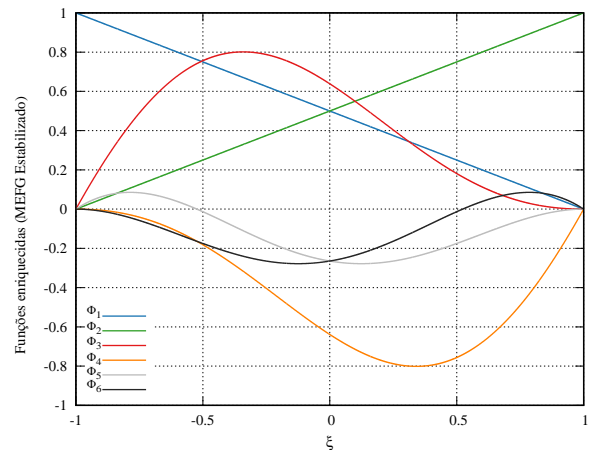
(b) construção das funções enriquecidas com o MEFGE



(c) construção das funções enriquecidas com o MEFG



(d) funções enriquecidas pelo MEFG



(e) funções enriquecidas pelo MEFGE

FIGURA 3 – Processo de construção das funções enriquecidas pelo MEFG e MEFGE.

### 3.3 PARTIÇÃO DA UNIDADE *FLAT-TOP*

Zhang *et al.* (2014) mostraram que, para o enriquecimento polinomial de alta ordem ( $p > 1$ ), a modificação proposta pelo MEFGE não é condição suficiente para garantir o adequado condicionamento do problema, propondo assim uma nova abordagem para o processo de construção das funções enriquecidas. Para evitar a quase dependência linear do sistema numérico com o enriquecimento de alta ordem, Zhang *et al.* (2014) sugeriram uma modificação suave na partição da unidade dos termos de enriquecimento.

A ideia principal não é reduzir as funções da PU imediatamente após os nós ou bordas dos elementos, como nas funções chapéu, mas mantê-las em um platô constante unitário (região plana) próximo aos nós ou bordas do elemento. Ao longo deste platô, uma das funções de PU é mantida com valor unitário constante enquanto a outra é nula e vice-versa. As funções alteram de valor unitário para zero apenas dentro da região intermediária do elemento, mas as regras para uma PU são mantidas em todo o domínio. Griebel e Schweitzer (2007) denominaram esta condição da PU de propriedade *flat-top*. A PU *flat-top* foi aplicada inicialmente por Schweitzer (2003) no lugar da PU linear tradicional com o objetivo de reduzir o problema da dependência linear entre as funções de enriquecimento.

A PU *flat-top* utilizada no componente de enriquecimento do MEFGE é baseado em Zhang *et al.* (2014) e para um elemento mestre 1D com  $\xi \in [-1, +1]$  pode ser escrita como:

$$\varphi_1(\xi) = \begin{cases} 1 & \xi \in [-1, -\alpha] \\ \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2\alpha}\right)^k\right)^k & \xi \in [-\alpha, \alpha] \\ 0 & \xi \in [\alpha, +1] \end{cases} \quad (20)$$

e

$$\varphi_2(\xi) = \begin{cases} 0 & \xi \in [-1, -\alpha] \\ 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\xi}{2\alpha}\right)^k\right)^k & \xi \in [-\alpha, \alpha] \\ 1 & \xi \in [\alpha, +1] \end{cases} \quad (21)$$

onde  $\alpha \in (0, 1]$  é o parâmetro de construção da *flat-top* e  $k \in \mathbb{N}^*$  é um parâmetro que controla o grau de suavização das curvas entre as regiões planas. As figuras 4(a) e 4(b) mostram, respectivamente, para o domínio  $\xi \in [-1, +1]$ , a PU *flat-top* com  $\alpha = 0.5$  para os casos  $k = 1$  e  $k = 2$ . Observe que o parâmetro  $\alpha$  é medido do centro do elemento até o início da região plana. É fácil observar que a PU linear é obtida quando  $\alpha = 1$  e  $k = 1$ , o que significa que a PU linear é um caso particular da PU *flat-top*, mas o que não é verdade quando  $k \neq 1$ .

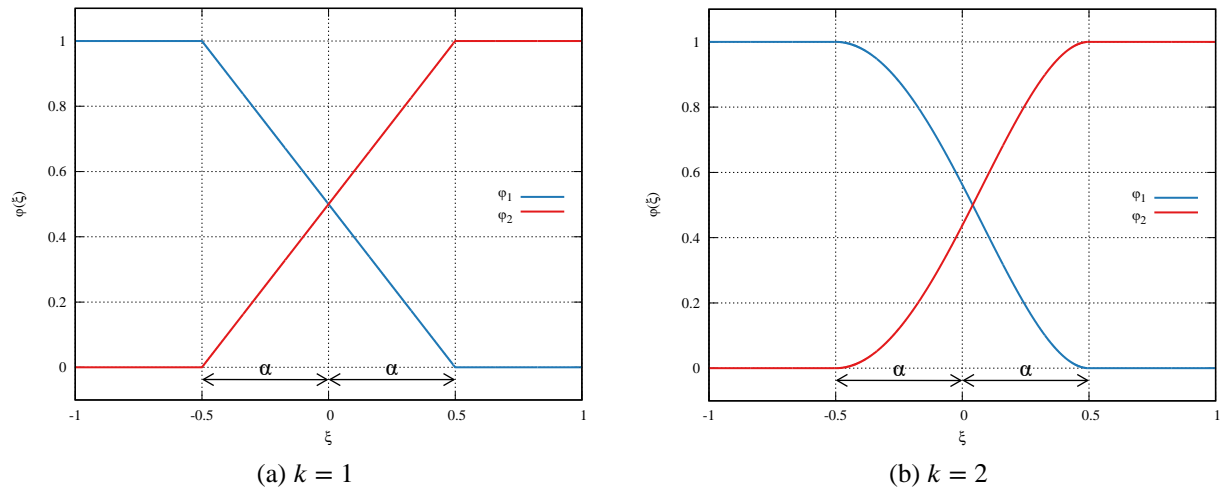


FIGURA 4 – Partição da Unidade *flat-top* com  $\alpha = 0.5$ , (a)  $k = 1$  e (b)  $k = 2$ .

Em sua análise, Zhang *et al.* (2014) abordaram os enriquecimentos polinomiais de alta ordem. A aplicação da PU *flat-top* com enriquecimentos não-polinomiais em problemas da análise dinâmica será apresentada ao logo deste trabalho.

## 4 FUNÇÕES DE FORMA ENRIQUECIDAS

As funções de forma enriquecidas em conjunto com as funções de forma do MEF compõem o espaço de aproximação enriquecido do MEFG/MEFGE. Neste capítulo são apresentados os aspectos de construção destes espaços de funções, para o caso unidimensional e a sua generalização para o caso bidimensional.

### 4.1 PARA O ELEMENTO 1D

Uma vez que as funções da partição da unidade são conhecidas, então as funções de forma enriquecidas podem ser determinadas multiplicando as funções da PU pelas funções de enriquecimento. Para os elementos unidimensionais, as funções da PU *flat-top*, equações (20) e (21), devem ser multiplicadas pelas funções de enriquecimento das equações (16) a (19), devidamente ordenadas de acordo com a equação (4). As figuras 5(a) e 5(b) mostram as funções enriquecidas para os casos de PU *flat-top* com  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 0.5$  respectivamente, em ambos os casos com  $\beta_1 = 3\pi/2$  e  $k = 1$ . Destaca-se a perda de continuidade das derivadas das funções de forma observada pela inclinação das curvas no final de regiões planas ou de topo como pode ser visto na figura 5(b).

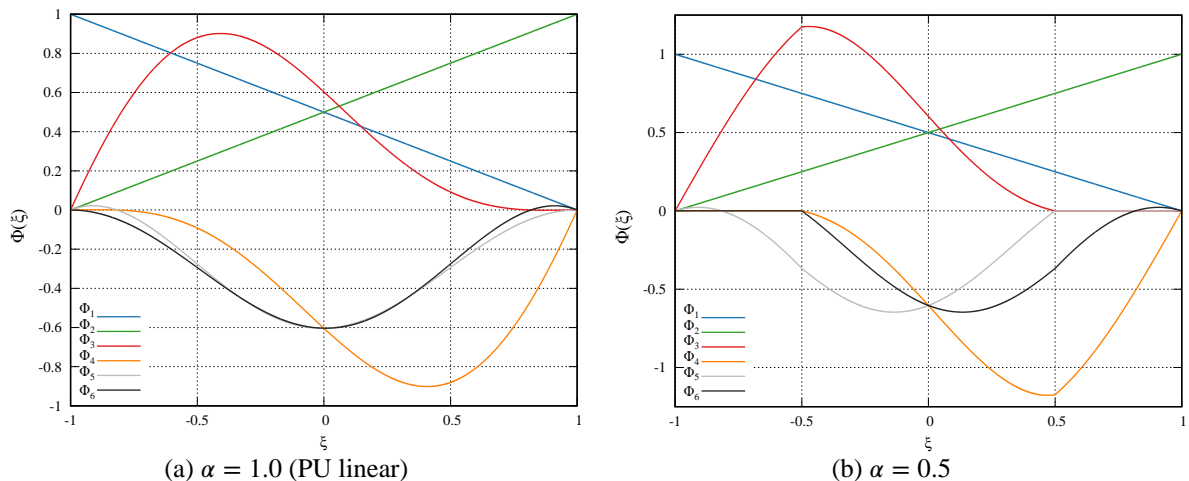


FIGURA 5 – Funções de forma enriquecidas com a PU *flat top* com  $k = 1$  e  $\beta_1 = 3\pi/2$ , (a)  $\alpha = 1.0$  e (b)  $\alpha = 0.5$ .

O vetor de funções de forma do MEFGE é construído através da combinação das funções da partição da unidade do MEF com as funções de forma enriquecidas. Neste trabalho as funções de forma do MEF são alocadas no início do vetor e as funções de forma enriquecidas são adicionadas em sequência, de acordo com o número de níveis de enriquecimento:

$$\Phi^T(\xi) = \left[ \underbrace{N_1 \quad N_2}_{MEF} \quad \underbrace{\varphi_1 \tilde{\gamma}_{11} \quad \varphi_1 \tilde{\phi}_{11} \quad \varphi_2 \tilde{\gamma}_{21} \quad \varphi_2 \tilde{\phi}_{21}}_{1^\circ \text{ nível de enriquecimento}} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \right] \quad (22)$$

2°  $n_l^\circ$

Esta disposição dos termos no vetor de funções de forma facilita a implementação hierárquica do MEFGE, onde novos níveis de enriquecimento podem ser incluídos no processo de análise com reaproveitamento dos cálculos anteriores.

No caso do problema 1D é importante ressaltar que, desenvolvendo a equação (4), é necessário um total de seis funções para o primeiro nível de enriquecimento, conforme também pode ser observado na equação (22). Já para um número  $n_l$  de níveis de enriquecimento são necessárias  $n = 2 + 4n_l$  funções de forma.

#### 4.2 PARA O ELEMENTO QUADRILÁTERAL 2D

A determinação de funções enriquecidas para o caso de elementos quadriláteros 2D é feita de modo análogo ao caso 1D, considerando o processo de multiplicação apresentado na seção 2.6, equação (7). Assim, um conjunto de quatro funções *flat-top* é desenvolvido e todas elas são mostradas na figura 6. Multiplicando-se cada função *flat-top* pelas funções de enriquecimento obtém-se as funções de forma enriquecidas, conforme processo mostrado na figura 7

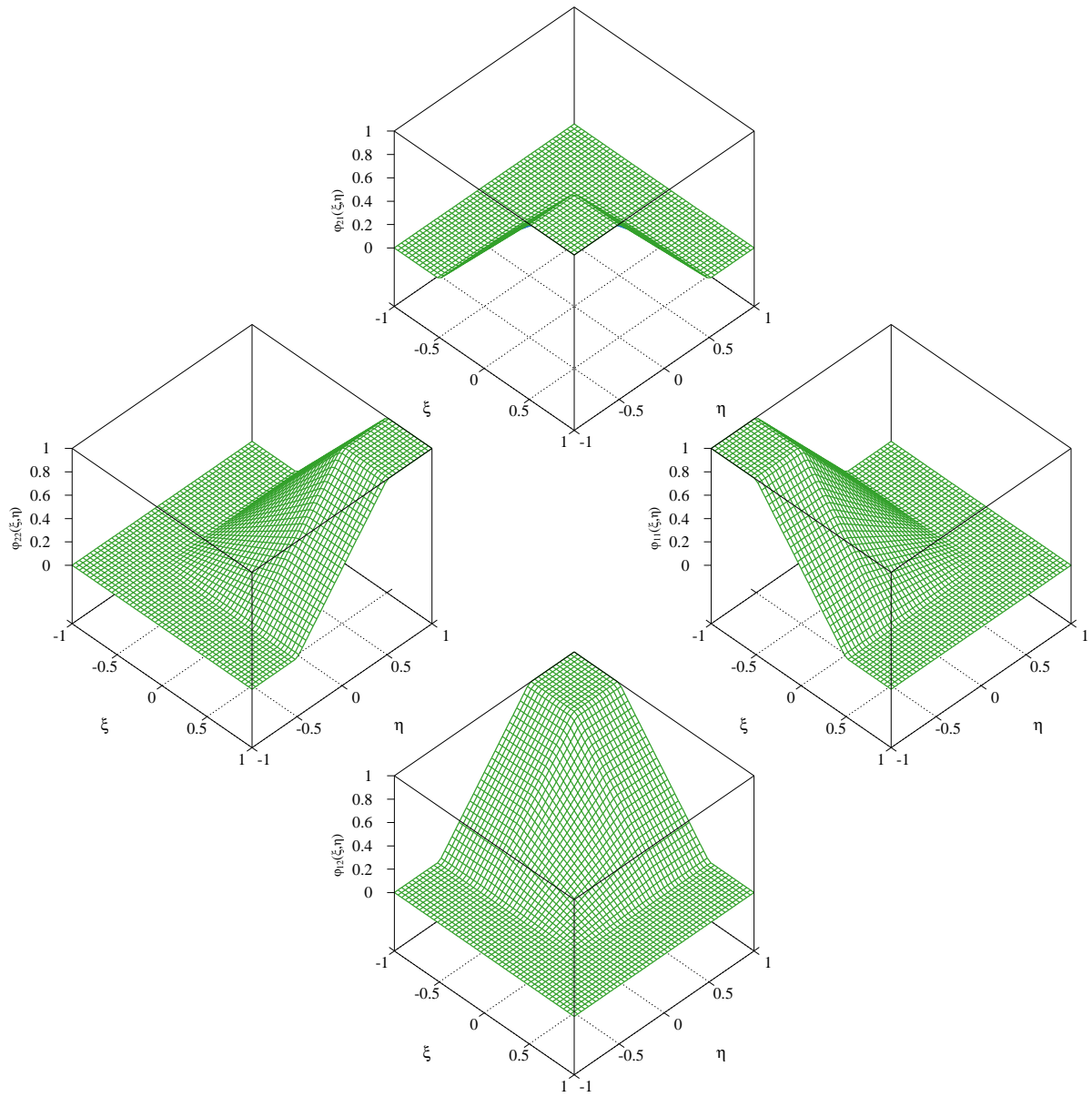


FIGURA 6 – As funções de *flat-top* para elemento 2D,  $\alpha = 0.5$  e  $k = 1$ .

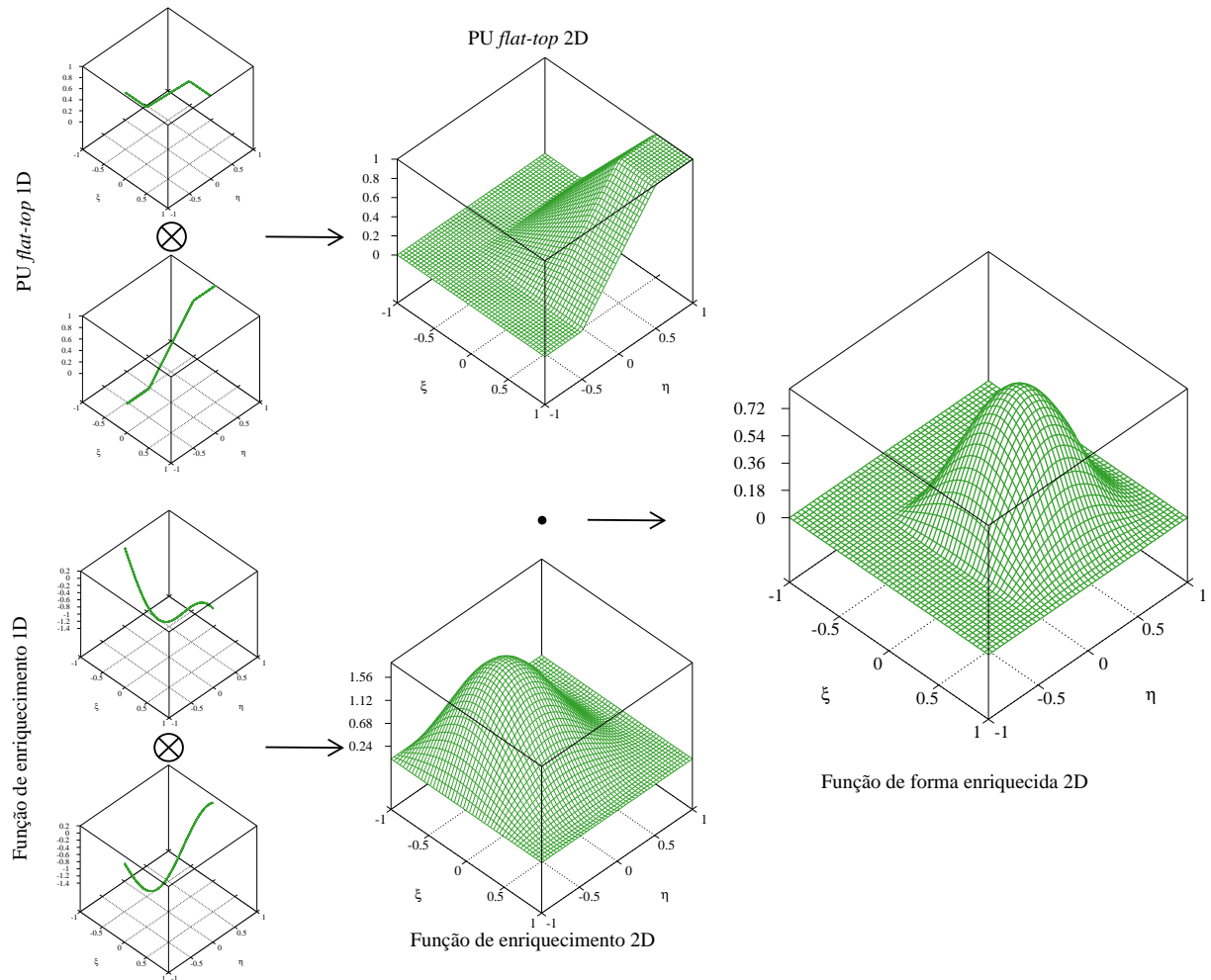


FIGURA 7 – Processo de construção das funções enriquecidas para o problema 2D com a PU *flat-top*.

Observe que a geração da PU *flat-top* ou funções de enriquecimento no caso 2D começa a partir da multiplicação de funções 1D desenvolvidas nas direções elementares  $\xi$  e  $\eta$ , como mostrado na figura 7. Então, após a construção da função PU *flat-top* 2D e da função de enriquecimento 2D, a multiplicação dessas duas funções resulta na função de forma enriquecida 2D.

No caso do problema 1D são necessárias seis funções para o primeiro nível de enriquecimento, por outro lado, um total de 36 funções de forma são geradas no caso bidimensional. Para o problema 2D, o número total de funções em relação ao número de níveis de enriquecimento é  $n = 4 + 16n_l + 16n_l^2$ .

As funções de forma de um elemento quadrilateral podem ser classificadas de acordo com Solín *et al.* (2004) em: funções nodais, funções de borda e funções bolha. As funções nodais são não nulas em um nó do elemento e estão relacionadas com as funções de forma do MEF. As funções tipo bolha são não nulas somente dentro do domínio do elemento e estão relacionadas somente com as funções de forma enriquecidas do MEFGE/MEFG. As funções

de borda são não nulas somente dentro domínio do elemento e sobre alguma borda do elemento, mas são nulas em todos os nós. Esta classificação foi proposta para o MEFH polinomial e aplicada por Torii (2012) para o MEFG.

A base de aproximação criada com o primeiro nível de enriquecimento é composta por: 4 funções nodais, 16 funções de borda ( $16n_l$ ) e 16 funções bolha ( $16n_l^2$ ). A tabela 1 apresenta um roteiro que ilustra a geração desta funções como consequência da sobreposição das funções unidimensionais nas direções  $\xi$  e  $\eta$ .

TABELA 1 – Tipo de funções de forma para o problema 2D com um primeiro nível de enriquecimento.

Funções de Forma	$N_1(\eta)$	$N_2(\eta)$	$\varphi_1(\eta) \gamma_{11}(\eta)$	$\varphi_1(\eta) \phi_{11}(\eta)$	$\varphi_2(\eta) \gamma_{21}(\eta)$	$\varphi_2(\eta) \phi_{21}(\eta)$
$N_1(\xi)$	nodal	nodal	borda	borda	borda	borda
$N_2(\xi)$	nodal	nodal	borda	borda	borda	borda
$\varphi_1(\xi) \gamma_{11}(\xi)$	borda	borda	bolha	bolha	bolha	bolha
$\varphi_1(\xi) \phi_{11}(\xi)$	borda	borda	bolha	bolha	bolha	bolha
$\varphi_2(\xi) \gamma_{21}(\xi)$	borda	borda	bolha	bolha	bolha	bolha
$\varphi_2(\xi) \phi_{21}(\xi)$	borda	borda	bolha	bolha	bolha	bolha

A figura 8 representa as funções de forma na mesma ordem considerada na tabela 1, com domínio  $\xi \in [-1, +1]$  e  $\eta \in [-1, +1]$ , e parâmetros PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$  e  $k = 1$  e  $\beta_1 = 3\pi/2$  para as funções de enriquecimento.

Como pontuado por Torii (2012), as bordas podem ser compartilhadas entre dois elementos adjacentes, logo deve existir uma compatibilização dos graus de liberdade relacionados às funções de borda. As funções de borda devem definir um único grau de liberdade, a fim de garantir a conformidade da aproximação. Uma estratégia para o mapeamento e tratamento destas interfaces é apresentada no Apêndice C.

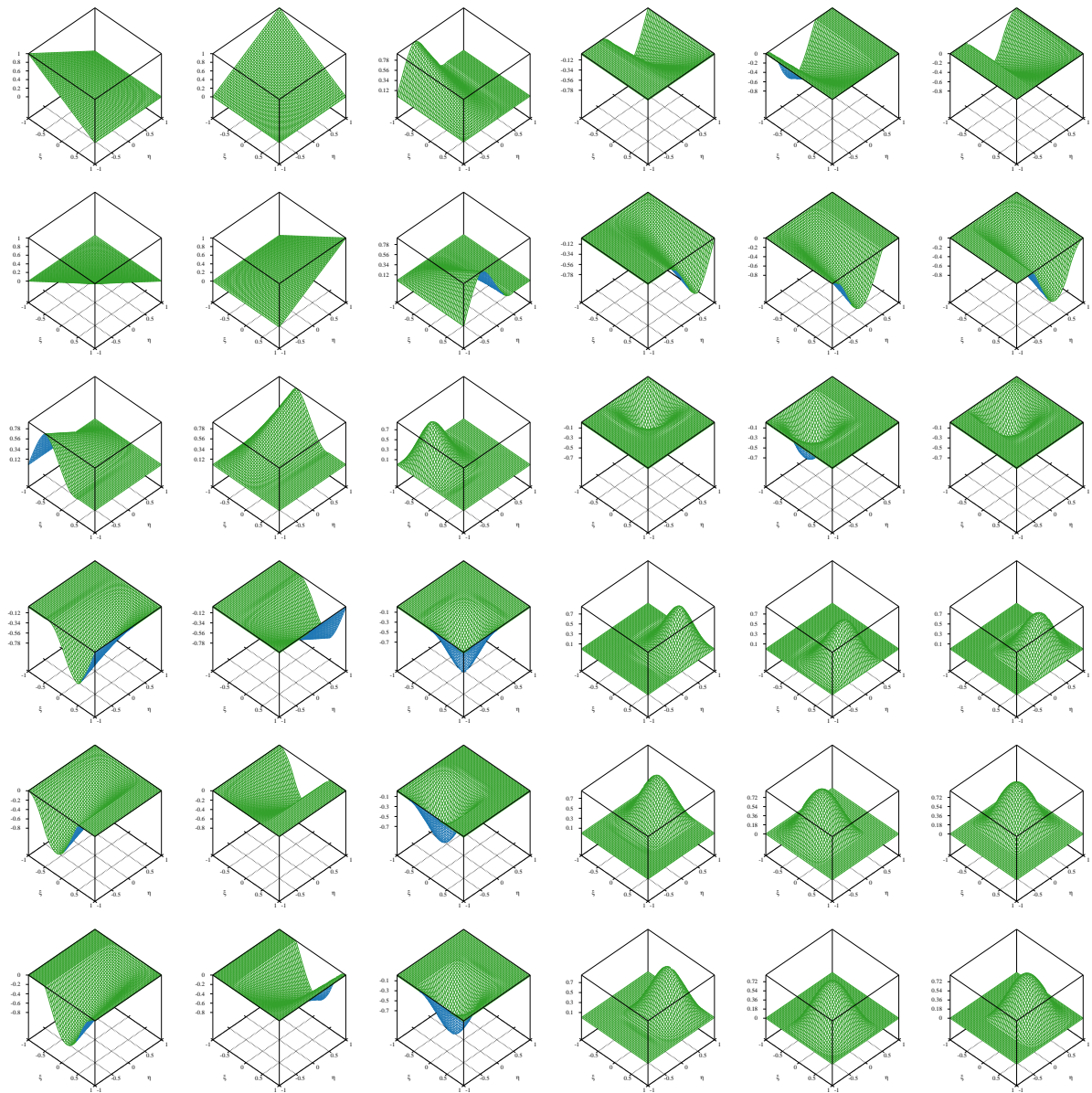


FIGURA 8 – Funções do espaço de aproximação enriquecido.

## 5 PROBLEMAS DA ANÁLISE DINÂMICA

Os problemas dinâmicos são aqueles em que os efeitos inerciais não são desprezíveis, além disso, em certas análises, a solução deve ser determinada em cada intervalo de tempo. A resposta dinâmica depende da massa e da rigidez da estrutura, e na maioria das aplicações, os efeitos de amortecimento tendem a diminuir a amplitude das oscilações ao longo do tempo. O comportamento estrutural depende das propriedades mecânicas e das condições de contorno, o que contribui para estabelecer as frequências naturais e modos de vibração, que são as principais características dinâmicas da estrutura e cuja determinação compreende uma das etapas essenciais para a resolução de problemas dinâmicos (CHOPRA, 1995; BATHE, 1996).

A análise do problema de vibrações livres busca determinar as frequências naturais de vibração de uma estrutura e seus respectivos modos de vibração, que de modo geral, é o ponto de partida da análise dinâmica estrutural. Esse procedimento também é conhecido como Análise Modal.

### 5.1 PROBLEMA DE VIBRAÇÕES LIVRES

O problema de vibrações livres busca determinar as frequências e modos naturais de vibração, características fundamentais do comportamento estrutural. A formulação para esse problema é descrita em detalhes em vários trabalhos, como Bathe (1996), Chopra (1995) e Rao (2010). Os sistemas matriciais para o problema não amortecido dinâmico estrutural podem ser escritos como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (23)$$

onde,  $\mathbf{M}$  e  $\mathbf{K}$  são as matrizes de massa e rigidez, respectivamente,  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos,  $\ddot{\mathbf{u}}$  é o vetor de aceleração e  $\mathbf{F}$  é o vetor de forças aplicadas. As frequências naturais e modos de vibração podem ser obtidos para o caso em que  $\mathbf{F}$  é um vetor nulo (sem carregamentos aplicados), resolvendo o problema de autovetor generalizado definido por Hughes (1987), Bathe (1996), Zienkiewicz e Taylor (2000) como:

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\phi} = \omega^2 \mathbf{M}\boldsymbol{\phi} \quad (24)$$

onde  $\omega$  são as frequências naturais e  $\boldsymbol{\phi}$  são os vetores modos de vibração do problema.

As matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  podem ser obtidas a partir da discretização e aproximação pelos procedimentos do MEF sobre o Problema de Valor de Contorno (PVC) relacionado ao equilíbrio dinâmico do sistema. Assim, para problema de segunda ordem, as matrizes  $\mathbf{K}$  e  $\mathbf{M}$  são construídas, respectivamente, a partir da contribuição das matrizes elementares  $\mathbf{k}^e$  e  $\mathbf{m}^e$ , dadas por:

$$\mathbf{k}^e = \int_{\Omega^e} \bar{\mu} \nabla \Phi^T \nabla \Phi d\Omega^e \quad (25)$$

e

$$\mathbf{m}^e = \int_{\Omega^e} \bar{\rho} \Phi^T \Phi d\Omega^e \quad (26)$$

onde  $\Phi$  é o vetor de funções de forma (base do espaço de aproximação),  $\bar{\mu}$  e  $\bar{\rho}$  são parâmetros de rigidez e massa, respectivamente (que dependem do tipo de problema, ou seja, barra reta, membrana, estado plano de tensão ou deformação, etc.) e  $\Omega^e$  é o domínio do elemento mestre.

A matriz de massa utilizada neste trabalho, representada na equação (26), é conhecida na literatura como matriz de massa consistente (RAO, 2010).

A análise realizada neste trabalho se restringiu a análise modal dos problemas dinâmicos regidos por equações diferenciais parciais de segunda ordem. A Análise Transiente para estes problemas foi abordada por Torii (2012), Debella (2018), Debella *et. al.* (2019), e no âmbito da PU *flat-top* será tratada em um trabalho futuro.

As próximas secções apresentam as formulações para os 3 modelos de problemas dinâmicos abordados neste trabalho: vibrações livres em barra reta, vibrações livres em membrana e vibrações livres sob o estado plano de tensão.

## 5.2 VIBRAÇÃO EM BARRA RETA

A vibração da barra é um problema dependente do tempo e a equação diferencial parcial que governa os deslocamentos axiais é (TIMOSHENKO; GOODIER; 1951, ARNDT, 2009; TORII, 2012):

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F(x, t), \quad \forall x \in \Omega = [0, L], \quad (27)$$

onde são propriedades do material, consideradas constantes:  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $A$  é a área da seção transversal,  $\rho$  é a massa específica e  $L$  o comprimento da barra.

Embora a equação (27) completa permita a análise do problema transiente, para a análise de vibrações livres considera-se o caso onde  $F(x, t) = 0$  (carregamento nulo).

Para obter a forma fraca deste problema, multiplica-se a equação (27) pela função de teste  $v(x)$  e integra-se no domínio (CAREY; ODEN, 1984):

$$\int_{\Omega} \left( EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) v \, d\Omega = \int_{\Omega} \left( \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) v \, d\Omega. \quad (28)$$

Integrando o termo de segunda ordem por partes e aplicando o Método de Galerkin com a substituição das funções  $u$  e  $v$  pelas aproximações locais definidas pela equação (4), obtém-se as matrizes de rigidez e massa elementares:

$$\mathbf{k}^e = [k_{ij}] = \int_{\Omega^e} EA \nabla \Phi^T \nabla \Phi \, d\Omega^e = EA \int_{\Omega^e} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} \, d\Omega^e \quad (29)$$

e

$$\mathbf{m}^e = [m_{ij}] = \rho A \int_{\Omega^e} \Phi_i \Phi_j \, d\Omega^e. \quad (30)$$

Os parâmetros de rigidez e massa, apresentados respectivamente nas equações (25) e (26), são assim definidos para o problema da barra como  $\bar{\mu} = EA$  e  $\bar{\rho} = \rho A$ .

### 5.3 VIBRAÇÃO EM MEMBRANA

A vibração em membrana é representada pela equação da onda bidimensional, governada pela seguinte equação diferencial parcial (RAO, 2010; TORII, 2012; LEISSA; QATU, 2011):

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - F(x, y, t), \quad \forall x, y \in \Omega = \mathbb{R}^2, \quad (31)$$

onde  $c$  é a velocidade de propagação da onda,  $c = \sqrt{E/\rho}$ . Conforme definição do problema de vibrações livres, considera-se  $F(x, y, t) = 0$ .

Para obter a forma fraca deste problema, multiplica-se a equação (31) pela função de teste  $v(x, y)$  e integra-se no domínio (CAREY; ODEN, 1984):

$$\int_{\Omega} (\nabla^2 u) v \, d\Omega = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) v \, d\Omega. \quad (32)$$

Realizando a integração do termo a esquerda na equação (32) e aplicando o Método de Galerkin com a substituição das funções  $u$  e  $v$  pelas aproximações locais definidas pela equação (4), obtém-se as matrizes de rigidez e massa elementares:

$$\mathbf{k}^e = [k_{ij}] = \int_{\Omega^e} \nabla \Phi^T \nabla \Phi d\Omega^e = \int_{\Omega^e} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x} \frac{\partial \Phi_j}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_i}{\partial y} \frac{\partial \Phi_j}{\partial y} d\Omega^e \quad (33)$$

e

$$\mathbf{m}^e = [m_{ij}] = \frac{1}{c^2} \int_{\Omega^e} \Phi_i \Phi_j d\Omega^e. \quad (34)$$

Para a correlação com as equações (25) e (26), os parâmetros de rigidez e massa são definidos respectivamente como  $\bar{\mu} = 1$  e  $\bar{\rho} = 1/c^2$ .

#### 5.4 ESTADO PLANO DE TENSÕES

O sistema de equações para o problema de estado plano de tensões é o mesmo da equação (24), e a determinação das matrizes de pode ser obtido através do Princípio dos Trabalhos Virtuais, como demonstrado por Bathe (1996), Hughes (1987), Reddy (2006), Zienkiewicz e Taylor (2000). As matrizes elementares são definidas por:

$$\mathbf{k}^e = [k_{ij}] = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega^e \quad (35)$$

e

$$\mathbf{m}^e = [m_{ij}] = \rho t \int_{\Omega^e} \mathbf{H}^T \mathbf{H} d\Omega^e \quad (36)$$

onde  $\mathbf{H}$  é a matriz de funções de forma, definida por:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & 0 & \dots & \Phi_n & 0 \\ 0 & \Phi_1 & 0 & \Phi_2 & \dots & 0 & \Phi_n \end{bmatrix}, \quad n = 4 + 16n_l + 16n_l^2, \quad (37)$$

$\mathbf{B}$  é a matriz das derivadas de primeira ordem de  $\mathbf{H}$ , definida por:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \mathbf{H} \quad (38)$$

e  $\rho$  é a massa específica,  $t$  é a espessura do elemento,  $\Omega^e$  é o domínio do elemento e  $\mathbf{D}$  é o tensor de relações constitutivas definido por:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \quad (39)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade do material e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

## 6 METODOLOGIA ADOTADA

Neste capítulo serão descritos os principais procedimentos metodológicos adotados no presente trabalho. Basicamente, um programa computacional original foi desenvolvido para a aplicação da PU *flat-top* no MEFGE em problemas da Análise Dinâmica. As rotinas relativas ao MEFGE PU *flat-top* são muito semelhantes às rotinas do MEFG convencional e portanto de fácil implementação a partir de um código existente.

As etapas de processamento seguem o roteiro tradicional para a resolução de um modelo numérico pelo MEF, e são listadas resumidamente a seguir:

### **Pré-processamento**

1. Leitura dos arquivos de dados da malha (tipo do problema, parâmetros de construção das funções, parâmetros de enriquecimento, informações dos materiais, condições de contorno, informações dos nós e informações dos elementos finitos);

### **Processamento**

2. Construção das funções de aproximação (PU linear, PU *flat-top*, funções de enriquecimento e funções enriquecidas);
3. Integração numérica das matrizes elementares de rigidez e massa (construção dos pontos de integração (ver Apêndice A), determinação da matriz jacobiana (ver Apêndice B), integração da matriz de rigidez e integração da matriz de massa);
4. Montagem das matrizes globais de rigidez e massa (ver Apêndice C);
5. Imposição das condições de contorno;
6. Determinação dos números de condição das matrizes de rigidez e massa;
7. Resolução do problema de autovalores e autovetores generalizados (determinação das frequências naturais aproximadas e respectivos modos de vibração);

### **Pós-processamento**

8. Cálculo de resultados secundários, impressão dos resultados, plotagem dos gráficos e modos de vibração.

Os aspectos de implementação e considerações importantes sobre a integração numérica, a determinação dos números de condição e a resolução do problema numérico de autovalores generalizados são apresentados a seguir.

## 6.1 ASPECTOS DE IMPLEMENTAÇÃO

A implementação computacional foi realizada com a linguagem de programação C++, que é uma linguagem compilada de alto desempenho, de alto nível e orientada a objetos (STROUSTRUP, 2013). O código computacional foi desenvolvido seguindo o paradigma de programação orientada a objetos, permitindo a fácil adaptação e ampliação das rotinas desenvolvidas para a aplicação em novos problemas ou modelos de estudo.

Nas rotinas desenvolvidas é considerada a precisão dupla para a representação dos números do tipo ponto flutuante (QUARTERONI *et al.*, 2007; IEEE, 2008), com 15 casas decimais de precisão. Excepcionalmente, no algoritmo para determinação dos pontos e pesos da integração numérica é considerada a precisão quádrupla (IEEE, 2008), com 33 casas decimais de precisão. A utilização da precisão quádrupla neste aspecto tem o objetivo de mitigar eventuais erros numéricos sobre os valores calculados para os pesos e pontos de integração.

Algumas bibliotecas de computação de alto desempenho para álgebra linear são utilizadas: ATLAS (WHALEY, 2011) para rotinas elementares de álgebra linear; LAPACK (ANDERSON *et al.*, 1999) e MAGMA (TOMOV *et al.* 2010) para rotinas avançadas de álgebra linear.

O código computacional foi compilado com o compilador GCC 8.5 (STALLMAN, 2021).

Todos os resultados apresentados neste trabalho foram obtidos através das simulações realizadas em um computador pessoal portátil, modelo Asus G53JW, com processador Intel Core i7 740QM (4 núcleos e 8 *threads*  $\times$  1.73 GHz), 16 GB de memória ram e placa de vídeo Nvidia Geforce GTX 460M (192 núcleos Cuda e 1.5 GB de memória ram).

## 6.2 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

As componentes das matrizes de rigidez e massa são determinadas numericamente pela quadratura de Gauss-Legendre (PRESS *et al.*, 2007). O domínio de integração é dividido em subdomínios de acordo com os intervalos de construção das funções *flat-top*, definidas nas equações (20) e (21). São utilizados três subdomínios para o caso unidimensional e nove subdomínios para o caso bidimensional conforme proposto por Sato *et al.* (2018). Um número adequado de pontos de integração é determinado em tempo de execução, de acordo com a complexidade das funções de forma empregadas, através da aplicação de uma estratégia de integração numérica adaptativa baseada em Piessens *et al.* (1983). A construção dos pontos e

pesos da quadratura de Gauss-Legendre é realizada em tempo de execução através dos algoritmos apresentados no Apêndice A.

### 6.3 NÚMERO DE CONDIÇÃO

A estabilidade numérica é verificada neste trabalho através dos números de condição da matriz de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$  e matriz de massa  $\kappa(\mathbf{M})$ , considerando que um melhor condicionamento está relacionado ao baixo número de condição para as matrizes (WILKINSON, 1965; COOK *et al.*, 2002; PETROLI *et al.*, 2017). O número de condição  $\kappa$  para uma matriz quadrada é dado por (DEMME, 1997; ANDERSON *et al.*, 1999):

$$\kappa_p(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A}\|_p \|\mathbf{A}^{-1}\|_p \quad (40)$$

onde  $p$  define a norma da matriz  $\|\mathbf{A}\|_p$ . Neste trabalho os números de condição são determinados pela norma “um” ( $p = 1$ ), que é equivalente ao determinado pela norma infinita ( $p = \infty$ ), uma vez que as matrizes de rigidez e massa são matrizes simétricas, hermitianas e positivo definidas (HUGHES, 1987; PETROLI *et al.*, 2017; WEINHARDT, 2016). Os números de condição foram determinados para as matrizes de rigidez e massa globais, após a imposição das condições de contorno.

Apesar de alguns trabalhos terem adotado o método do número de condição escalonado para medir a razão entre os valores próprios máximo e mínimo da matriz de rigidez (ver, por exemplo, Babuška e Banerjee, 2011; Sato *et al.*, 2018), numericamente, os números de condição são determinados neste trabalho usando a rotina DGECON da biblioteca LAPACK (ANDERSON *et al.*, 1999), que aplica o algoritmo de Hager para estimar a norma  $p = 1$  da matriz inversa, conforme proposto por Higham (1998).

Uma segunda rotina para cálculo do número de condição de matrizes definidas positivas, denominada DPOCON, também foi utilizada para comparação de resultados, porém os números de condição obtidos foram limitados a ordem máxima entre  $O(10^{15})$  e  $O(10^{18})$ , sendo essa uma limitação da rotina e não da análise. Os erros reportados por esta rotina indicaram que a matriz deixou de ser definida positiva.

#### 6.4 PROBLEMA DE AUTOVALORES GENERALIZADOS

Para a determinação das frequências naturais e modos de vibração é necessário resolver o problema de autovalores e autovetores generalizados definido pela equação (24). Neste trabalho este problema foi resolvido numericamente com a rotina DSYGV da biblioteca LAPACK (ANDERSON *et al.*, 1999) em sua versão implementada na biblioteca MAGMA (TOMOV *et al.*, 2010). Alternativamente também foi considerada a rotina DGGEV da biblioteca LAPACK.

Uma consideração importante sobre a resolução do problema de autovalores generalizados com a rotina DSYGV é que o algoritmo realiza a decomposição Cholesky da matriz  $M = LL^T$ , onde  $L$  é uma matriz triangular inferior (DEMMELE, 1997; ANDERSON *et al.*, 1999; BAI *et al.*, 2000). A decomposição Cholesky requer que a matriz  $M$  seja uma matriz hermitiana e definida positiva, portanto, o algoritmo falha quando essa condição não é atendida. A mesma condição ocorre com a rotina DPOCON, com mencionado anteriormente.

A ordem máxima dos números de condição obtidos com a rotina DPOCON, que considera a matriz definida positiva, foi entre  $O(10^{15})$  e  $O(10^{18})$ , sugerindo que a matriz deixou de ser definida positiva nos problemas com números de condição mais elevados. Petrolí (2016) observou uma correlação direta entre a potência da ordem do número de condição da matriz de massa e a quantidade de dígitos significativos (casas decimais de precisão) necessários para que a matriz de massa seja numericamente definida positiva. Essa correlação pode justificar a ordem máxima dos números de condição obtidos, uma vez que foram considerados números representados com 15 casas decimais de precisão (precisão dupla).

A rotina DGGEV (decomposição Schur) foi considerada como uma segunda opção, obtendo praticamente as mesmas respostas que a rotina DSYGV (decomposição Cholesky), quando essa conseguiu resolver o problema. A rotina DGGEV considera a decomposição Schur (ANDERSON *et al.*, 1999; BAI *et al.*, 2000) e também pode trabalhar com matrizes não definidas positivas. Entretanto, na maioria dos casos em que a rotina DSYGV (decomposição Cholesky) falhou, a tentativa com a rotina DGGEV (decomposição Schur) retornou resultados quem incluíam autovalores reais negativos e autovalores complexos.

## 7 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, são apresentados os resultados numéricos para alguns problemas dinâmicos resolvidos pelo MEFGE com a PU *flat-top*. O desempenho do método é examinado considerando a influência de parâmetros  $\alpha$  e  $k$  que estão relacionados com o tipo e a suavidade das funções do *flat-top*. A influência do número de níveis de enriquecimento também é investigada. Verificam-se os resultados da PU *flat-top* com a aplicação do enriquecimento trigonométrico hierárquico, de acordo com os parâmetros de enriquecimento hierárquico  $\beta_j$  padrão e  $\bar{\beta}_j$  estabilizado, definidos respectivamente nas equações (12) e (13). Quando nenhuma informação é apresentada, o valor  $\beta_1 = 3\pi/2$  é adotado como padrão conforme encontrado em outros trabalhos, por exemplo, Torii *et al.* (2012) e Weinhardt *et al.* (2018).

Os resultados para os números de condição são apresentados em gráficos *log* e para as taxas de convergência são apresentados em gráficos *loglog*. As frequências aproximadas  $\omega_h$  e as frequências de referência ou analíticas  $\omega$ , são apresentadas através dos espectros de frequências, que mostram as frequências aproximadas representadas de forma normalizada, levando em consideração a razão de  $\omega_h/\omega$  e a razão entre os graus de liberdade e o número total de graus de liberdade  $n/N$ , como sugerido por Cottrell *et al.* (2006). Todos os resultados apresentados nos gráficos são adimensionais, exceto quando indicado.

Cinco problemas diferentes são analisados e muitas simulações foram desenvolvidas para testar o desempenho da abordagem *flat-top* para problemas dinâmicos de vibrações livres. O primeiro é sobre vibrações livres em uma única barra. Este problema tem solução analítica, de modo que os resultados numéricos podem ser comparados com alta precisão e exatidão. A escolha de um modelo simples permite fazer muitas simulações numéricas para destacar as vantagens e desvantagens de cada abordagem. O segundo e terceiro problemas estendem a análise para estruturas treliçadas mais complexas, como a treliça plana e a treliça espacial, respectivamente. O quarto problema é sobre vibrações livres de uma membrana engastada, um problema bidimensional e com maior complexidade de implementação, mas que também possui solução analítica. Por fim, o quinto problema é sobre vibrações livres em uma chapa submetida ao estado plano de tensões, um problema bidimensional com dois graus de liberdade por nó.

## 7.1 BARRA FIXA (1D)

O primeiro exemplo considerado está relacionado com a vibração livre em barra reta. O modelo adotado é uma barra reta de comprimento  $L$  e área  $A$  de seção transversal constante, fixa em ambas as extremidades como mostrado na figura 9.

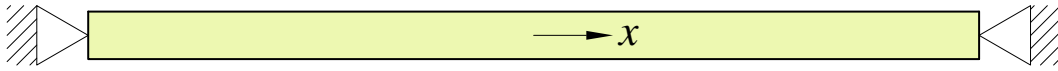


FIGURA 9 – Barra fixa.

A solução analítica para as frequências naturais pode ser determinada por (KREYSZIG, 2010; GREENBERG, 1998):

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (41)$$

Sem perda de generalidade, neste exemplo foi adotado o valor unitário para todas as constantes: área da seção transversal  $A$ , comprimento  $L$ , massa específica  $\rho$  e módulo de elasticidade  $E$ . Logo, a solução analítica pode ser reescrita como:

$$\omega_n = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (42)$$

A barra foi discretizada através de uma malha uniforme com 100 elementos finitos lineares, com dois nós por elemento, seguindo o modelo proposto por Weinhart (2016). A discretização com um maior número elementos, conseqüentemente uma análise com um maior número de graus de liberdade, permite gerar espectros suaves devido a inclusão de um maior número de frequências. A análise modal foi realizada com a aplicação do MEFGE com a PU *flat-top* considerando o enriquecimento trigonométrico. Os resultados são apresentados a seguir.

### 7.1.1 Número de condição em função do parâmetro $\alpha$

Aplicando os métodos descritos anteriormente, os números de condição para as matrizes globais de rigidez e massa foram determinados conforme a equação (40). Considera-se que quanto maior o número de condição, pior o condicionamento numérico das matrizes (WILKINSON, 1965; COOK *et al.*, 2002; PETROLI *et al.*, 2017).

A figura 10 apresenta os números de condição para as matrizes de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$  e massa  $\kappa(\mathbf{M})$ , considerando apenas um nível enriquecimento,  $n_l = 1$ , e diferentes graus de suavidade para a função PU *flat-top*,  $k = 1, 2, 3$ . Quando  $k = 1$ , denomina-se aqui neste trabalho como PU *flat-top* linear. É possível observar que o número de condição da matriz de massa pode ser maior ou menor que o número de condição da matriz de rigidez em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $k$ . Então quando  $k = 1$ , para  $\alpha \leq 0.6$ , os números de condição da matriz de rigidez são maiores que a matriz de massa, mas para  $0.6 < \alpha \leq 1$  esse comportamento é alterado. E para o caso  $\alpha = 1$  e  $k = 1$ , i.e. PU linear, os maiores números de condição estão relacionados à matriz de massa, conforme observado por Petrolí *et al.* (2017), sugerindo que o controle da estabilidade seja realizado através da matriz de massa e não pela matriz de rigidez. Por outro lado, quando  $k > 1$ , essa condição tende a se inverter, com a predominância dos maiores números de condição na matriz de rigidez. Observe que, para  $k = 2$  e  $k = 3$ , o número de condição da matriz de massa é sempre menor que para a matriz de rigidez para qualquer valor de  $\alpha$ . Por fim, é observado que o valor máximo do número de condição é da ordem de grandeza  $O(10^6)$  para todo o intervalo de  $\alpha$  quando aplicado um nível enriquecimento.

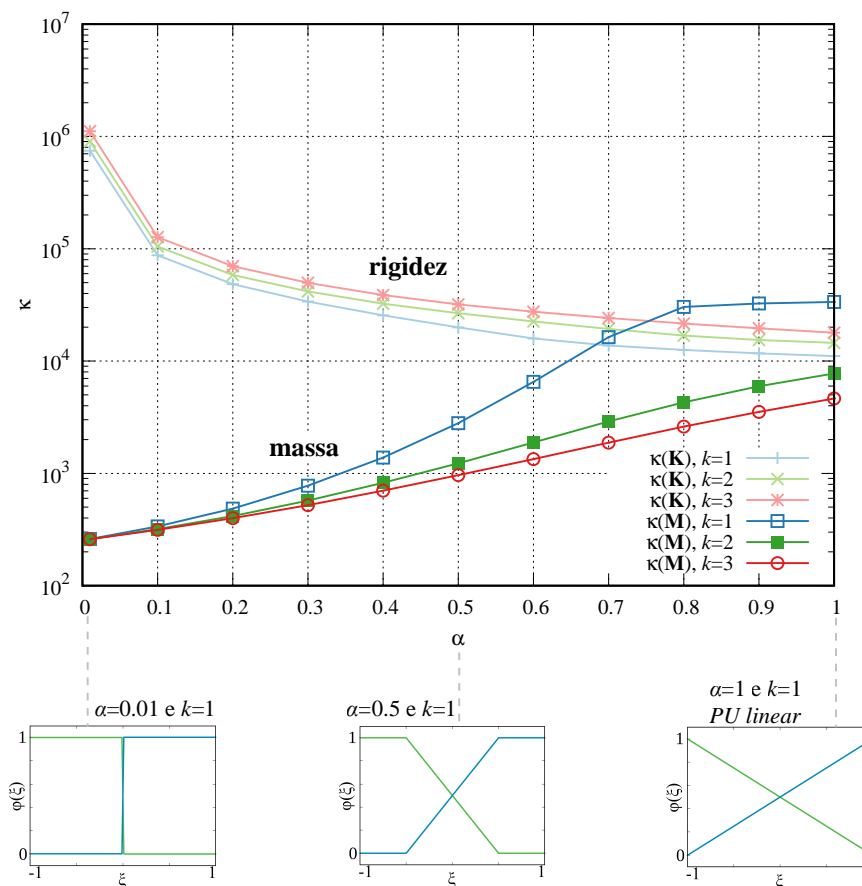


FIGURA 10 – Barra fixa: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro  $\alpha$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1, 2, 3$  utilizando a técnica *flat-top*.

Esse resultado merece um destaque importante. A maioria dos trabalhos utilizando MEFGE foi restrita a problemas estáticos, onde o sistema estabilizado foi analisado apenas em termos do número de condição da matriz de rigidez. A figura 10 apresenta uma outra perspectiva para problemas dinâmicos, onde a instabilidade numérica pode ser afetada pelo número de condição da matriz de massa e não necessariamente da matriz de rigidez. É mais evidente para o caso em que  $\alpha = 1$ , pois esse valor está relacionado à PU linear (“*hat-functions*”). Trabalhos recentes que estudam instabilidade numérica para os problemas dinâmicos passaram a considerar a principal contribuição da matriz de massa, que é correta em termos de PU linear (PETROLI *et al.*, 2017; WEINHARDT *et al.*, 2018). Mas os resultados apresentados aqui indicam que o condicionamento numérico pode depender do parâmetro  $\alpha$ . Outro aspecto importante que pode ser destacado é que o parâmetro  $\alpha$  afeta em direções opostas os números de condição para as matrizes de massa e rigidez. Para valores pequenos, o número de condição da matriz de rigidez aumenta enquanto diminui para a matriz de massa. Mas, quanto maior for o parâmetro  $\alpha$ , menor será o número de condição da matriz de rigidez. Para a matriz de massa, é o oposto.

Ampliando a análise, agora verifica-se a influência dos parâmetros  $\alpha$  e  $k$  para altos níveis de enriquecimento. Considera-se um caso com maior nível de enriquecimento, neste exemplo,  $n_l = 5$  e  $k = 1, 2, 3$ . A figura 11 mostra os números de condição para as matrizes de rigidez e massa obtidos com o processo de enriquecimento com o parâmetro  $\beta_j$  padrão, enquanto a figura 12 apresenta o caso para  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

Quando  $\beta_j$  padrão é considerado fica evidente a tendência de aumento dos valores de  $\kappa(\mathbf{K})$  e  $\kappa(\mathbf{M})$  quando eles são comparados com os valores apresentados na figura 10. Observa-se que o número de condição máximo na figura 10 é de ordem  $O(10^6)$  enquanto na figura 11 é de ordem de  $O(10^{20})$ , quando  $\alpha = 1$ . Além do mais, o número de condição apresenta tendência de aumento em função do aumento do parâmetro  $k$ , e os valores mínimos são obtidos quando  $\alpha = 0.5$ , para ambas as matrizes.

Em contraste, para o caso com  $\bar{\beta}_j$  estabilizado, o número de condição é menor que  $O(10^8)$  para todo o intervalo. O parâmetro  $\alpha$  afeta o número de condição da matriz de massa em todo o intervalo, porém não com ordem superior a  $O(10^8)$ . Outro aspecto a ser enfatizado é que o parâmetro  $\alpha$  não afetou o número de condição da matriz de rigidez com valores praticamente equivalentes para a faixa de valores  $0.1 \leq \alpha \leq 1$ , na ordem de  $O(10^6)$ . Quando

$\alpha < 0.1$ , o número de condição da matriz de rigidez torna-se um pouco maior, porém com ordem de grandeza ainda menor que  $O(10^7)$ .

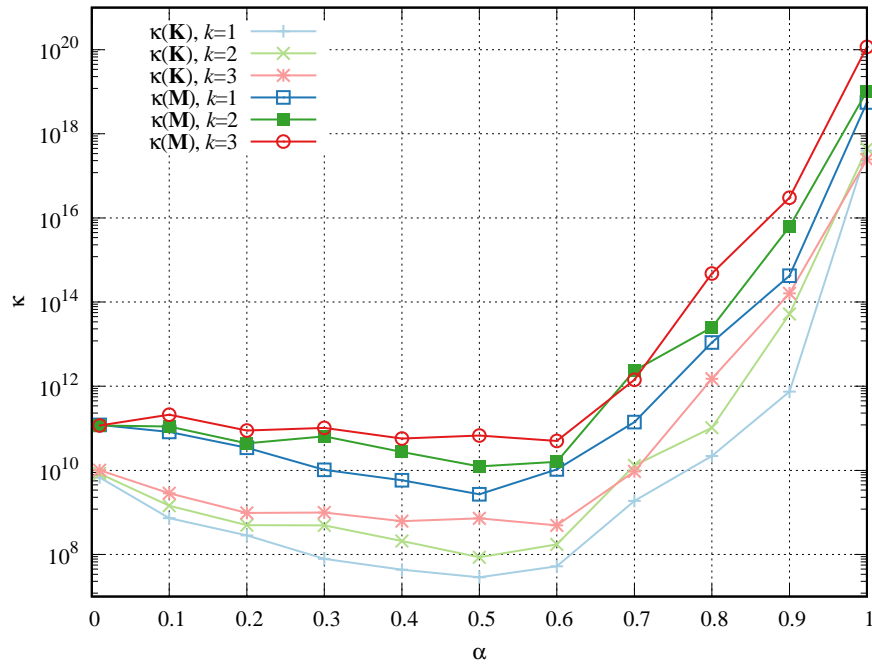


FIGURA 11 – Barra fixa: números de condição das matrizes de rigidez e massa, com  $n_l = 5$ ,  $k = 1, 2, 3$  e  $\beta_j$  padrão.

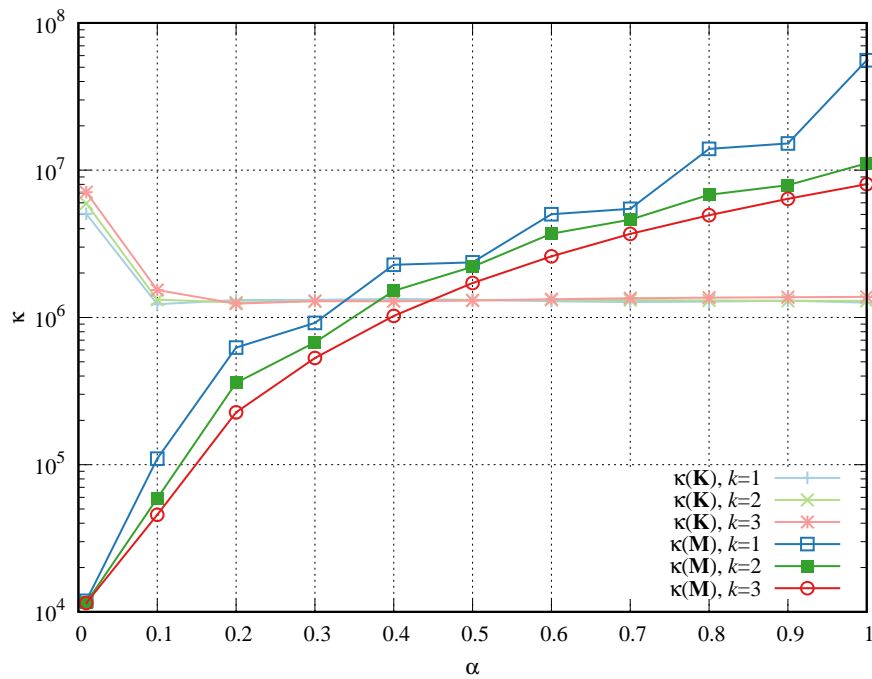


FIGURA 12 – Barra fixa: números de condição das matrizes de rigidez e massa com  $n_l = 5$ ,  $k = 1, 2, 3$  e  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

### 7.1.2 Número de condição e a influência do enriquecimento

As figuras 13 a 16 mostram os números de condição em função do número de níveis de enriquecimento utilizando os parâmetros  $\beta_j$  padrão e  $\bar{\beta}_j$  estabilizado. Nestes exemplos foram considerados até 10 níveis de enriquecimento.

Fica claro que a escolha do parâmetro  $\alpha$  tem influência sobre o número de condição, implicando no grande aumento dos números de condição para análises com maior número de níveis de enriquecimento, principalmente quando o parâmetro  $\beta_j$  padrão é considerado. Por exemplo, na figura 13, no caso da PU linear ( $\alpha = 1$ ), o valor de  $\kappa(\mathbf{M})$  alcança a ordem de  $O(10^{20})$  no quinto nível de enriquecimento. Alterando o valor de  $\alpha$ , é possível obter uma quantidade maior de níveis de enriquecimento com menores números de condição. Para o caso  $\alpha = 0.5$ , foi possível alcançar os 10 níveis de enriquecimento com  $\kappa(\mathbf{M})$  com ordem menor que  $O(10^{17})$ . Comportamento semelhante é observado para a matriz de rigidez, conforme pode ser visualizado na figura 14.

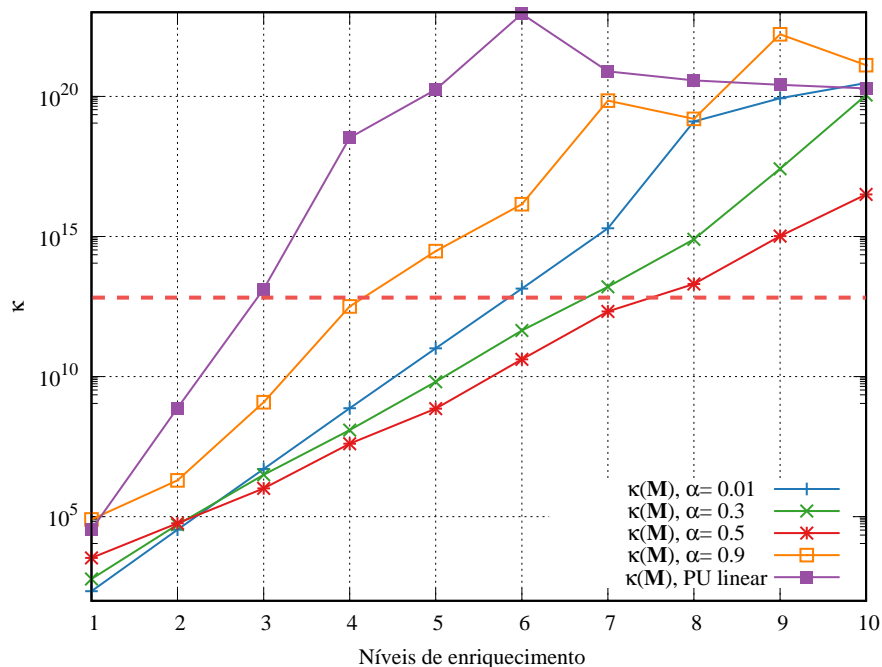


FIGURA 13 – Barra fixa: números de condição da matriz de massa  $\kappa(\mathbf{M})$ , com o enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

A linha tracejada na figura 13 representa a fronteira da ordem de grandeza  $O(10^{13})$  para os números de condição, antecipando uma observação sobre o limite para a determinação das respostas do problema de autovalores generalizados, apresentado mais adiante em conjunto

com os resultados na tabela 3. Como observado na tabela 3, onde são correlacionadas as magnitudes dos erros obtidos na determinação da primeira frequência para análises com diversos níveis de enriquecimento com os respectivos números de condição  $\kappa(\mathbf{M})$ , os casos onde o número de condição  $\kappa(\mathbf{M})$  foi superior a  $O(10^{13})$  não conseguiram apresentar respostas válidas. Essa conclusão é para o exemplo avaliado, com os parâmetros de malha utilizados, as rotinas utilizadas e a representação numéricas com dupla precisão.

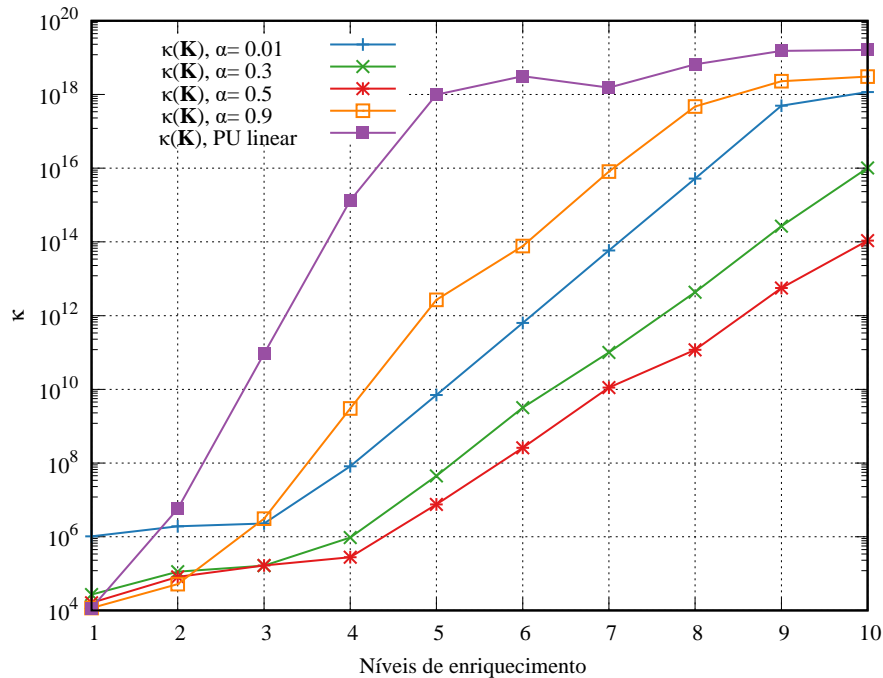


FIGURA 14 – Barra fixa: números de condição da matriz de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$ , com o enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

O efeito do parâmetro  $\bar{\beta}_j$  estabilizado sobre os números de condição da matriz de massa pode ser observado nas figuras 12 e 15, em concordância com os resultados apresentados por Weinhardt *et al.* (2015) para o caso da PU linear. Em ambas as situações, o uso do parâmetro estabilizado traz bons resultados e a ordem do número de condição não é superior a  $O(10^{10})$  para matriz de massa e  $O(10^7)$  para a matriz de rigidez. O parâmetro  $\alpha$  mostra menor influência sobre o número de condição da matriz de rigidez quando o parâmetro  $\bar{\beta}_j$  estabilizado é utilizado, conforme pode ser observado nas figuras 12 e 16.

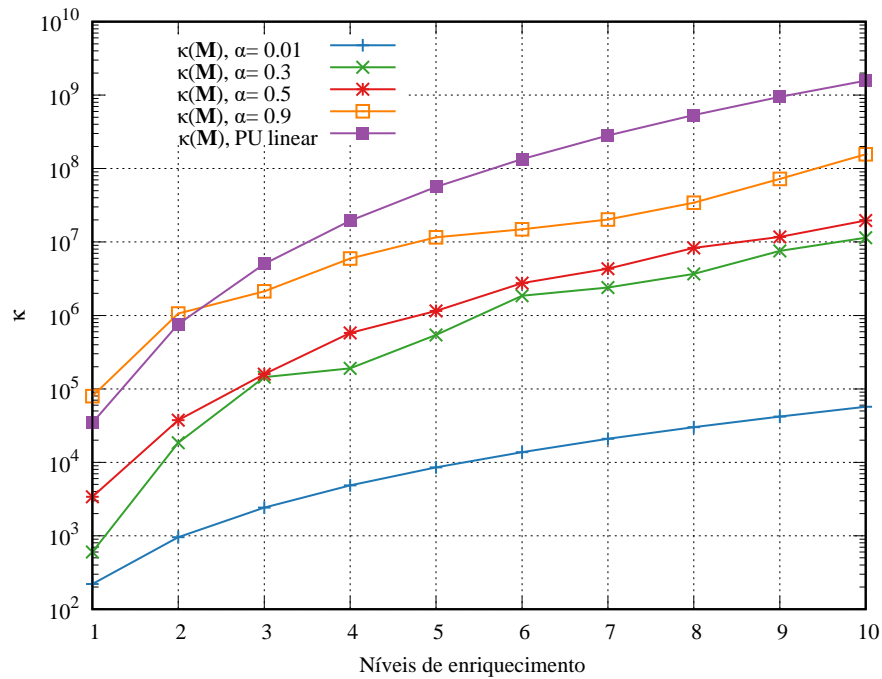


FIGURA 15 – Barra fixa: números de condição da matriz de massa  $\kappa(\mathbf{M})$ , com o enriquecimento utilizando  $\bar{\beta}_j$  estabilizado

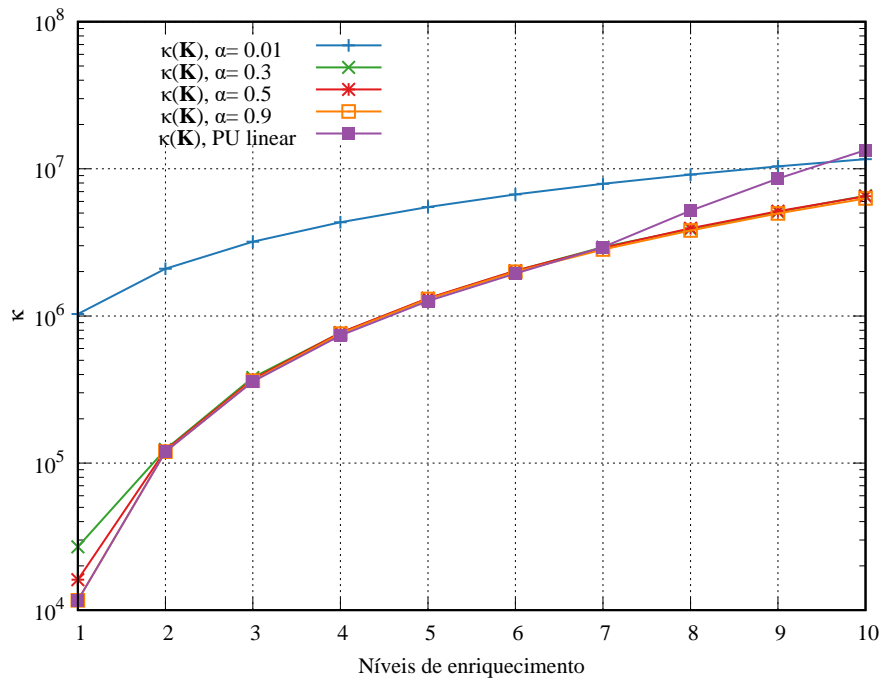


FIGURA 16 – Barra fixa: números de condição da matriz de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$ , com o enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado

### 7.1.3 Número de condição e a influência do parâmetro $\beta_1$

O parâmetro de enriquecimento hierárquico  $\beta_j$  foi proposto originalmente por Arndt (2009) como função de parâmetros do material (comprimento, peso específico, módulo de

elasticidade), posteriormente Torii (2012) propôs uma modificação desvinculando o parâmetro  $\beta_j$  dos parâmetros do material e essa modificação foi adotada por outros trabalhos posteriores. Os estudos de Weinhart *et al.* (2015) e Weinhart (2016) avaliaram os efeitos da escolha do parâmetro  $\beta_j$  na construção das funções de enriquecimento.

As figuras 17(a) e 17(b) apresentam respectivamente os números de condição para as matrizes de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$  e massa  $\kappa(\mathbf{M})$ , considerando apenas um nível enriquecimento e com a PU *flat-top* linear, onde é possível avaliar o comportamento do parâmetro  $\alpha$  para diferentes valores de  $\beta_1$ .

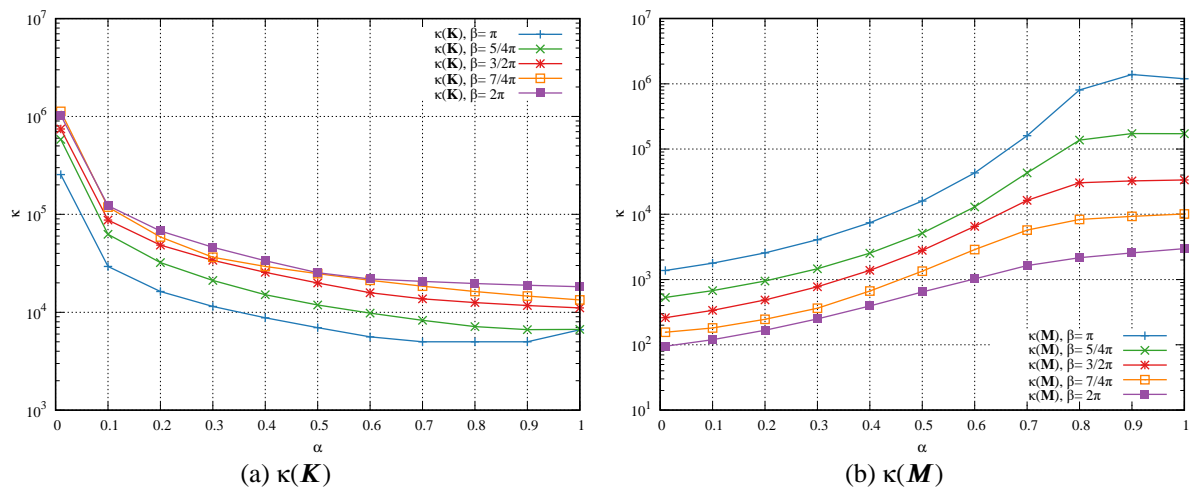


FIGURA 17 – Barra fixa: números de condição das matrizes de rigidez (a) e massa (b) versus o parâmetro  $\alpha$ , com  $n_l = 1$ ,  $k = 1$  e diferentes valores de  $\beta_1$ .

Os números de condição da matriz de rigidez em função do parâmetro  $\alpha$  apresentam comportamento similar ao observado na figura 10, com uma pequena variação em torno do valor de  $\beta_1$  e uma tendência de aumento para maiores valores de  $\beta_1$ . Para a matriz de massa, os números de condição também apresentam comportamento similar ao observado na figura 10 porém com uma variação um pouco maior em torno do valor de  $\beta_1$ . Os números de condição da matriz massa apresentaram tendência de redução em função do parâmetro  $\beta_1$ , em sentido oposto ao observado para a matriz de rigidez.

#### 7.1.4 Espectro de frequências

Normalmente, o desempenho de um método numérico aplicado para análise de vibrações livres é avaliado através do espectro de frequências (COTTRELL *et al.*, 2004). O espectro de frequências é uma representação gráfica do erro relativo entre as frequências

aproximadas e exatas para todas as frequências na faixa  $0 < n/N \leq 1$ , onde  $n$  é uma frequência aproximada e  $N$  é o número total de frequências do modelo. O MEF apresenta bons resultados para as frequências mais baixas, que estão na faixa acústica (COTTRELL *et al.*, 2004), mas tem maior dificuldade na precisão para as frequências mais altas, na faixa óptica. Muitos estudos mostram que, para o MEF/MEFE, apesar de melhorar a precisão das frequências mais baixas, as mais altas ainda são avaliadas com imprecisão (ARNDT *et al.*, 2010, 2016; TORII; MACHADO, 2012; TORII *et al.*, 2016).

A figura 18 apresenta o espectro de frequências para o caso de  $n_l = 1$  e  $k = 1$ . A PU *flat-top* causa uma pequena perda de precisão em comparação com a PU linear, como melhor evidenciado no início do espectro, figura 18(b). No final do espectro os resultados obtidos com  $0.1 \leq \alpha \leq 0.5$  são ligeiramente melhores do que os obtidos com a PU linear.

A figura 19 apresenta o espectro de frequências obtidos com a PU *flat-top* com  $k = 1, 2, \dots, 5$  e  $\alpha = 0.5$ . Os resultados obtidos com  $k > 1$  foram similares aos obtidos com  $k = 1$  para a faixa acústica do espectro, frequências mais baixas, porém houve melhora significativa para as frequências mais altas (faixa óptica). Destaca-se que em Zhang *et al.* (2014) foi considerado apenas  $k = 1$  para os experimentos numéricos. Os resultados aqui apresentados indicam que é possível obter melhor condicionamento e precisão para outros valores de  $k$ , sugerindo uma investigação mais aprofundada sobre este parâmetro.

A figura 20 apresenta o espectro de frequências para o 2º nível de enriquecimento  $\beta_j$  padrão, considerando os resultados obtidos com a PU *flat-top* com  $k = 1$  e com a PU linear. Observa-se no início do espectro o aumento da precisão obtidos para as primeiras frequências, com a redução do erro relativo de  $O(10^{-3})$  para  $O(10^{-5})$ . No fim do espectro a PU *flat-top*  $\alpha = 0.3$  e  $\alpha = 0.5$  apresentam respostas com erros menores que a PU linear e praticamente com os mesmos erros relativos observados no caso com  $n_l = 1$ .

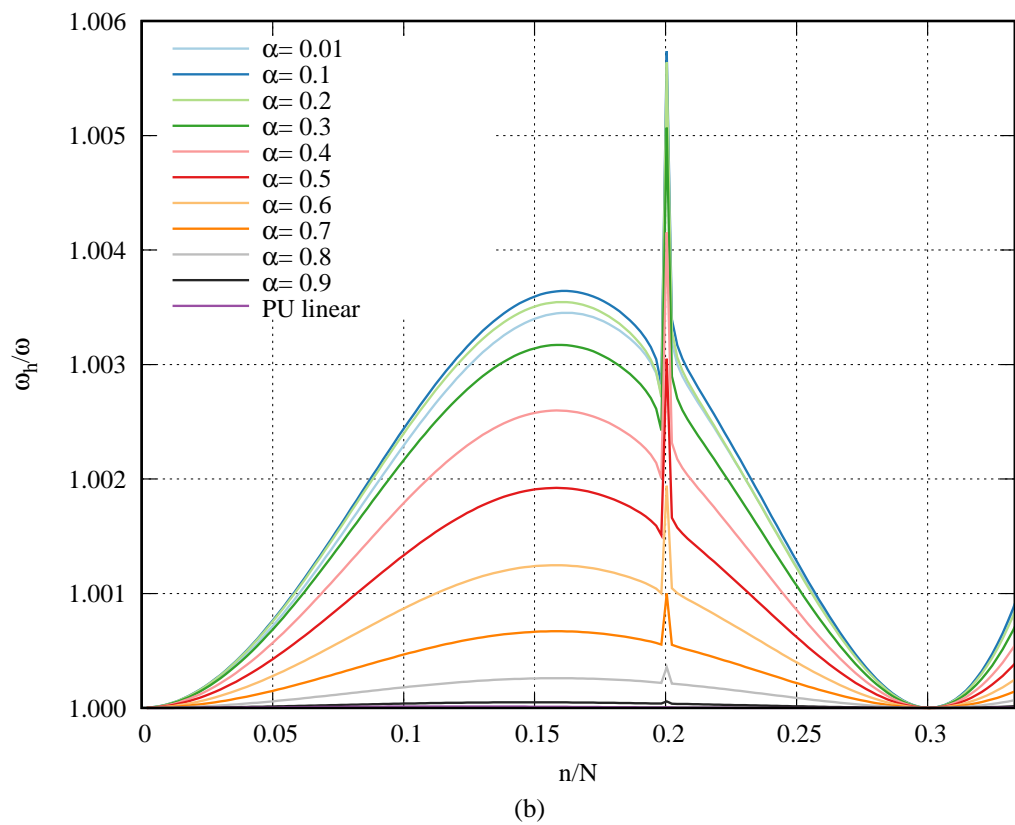
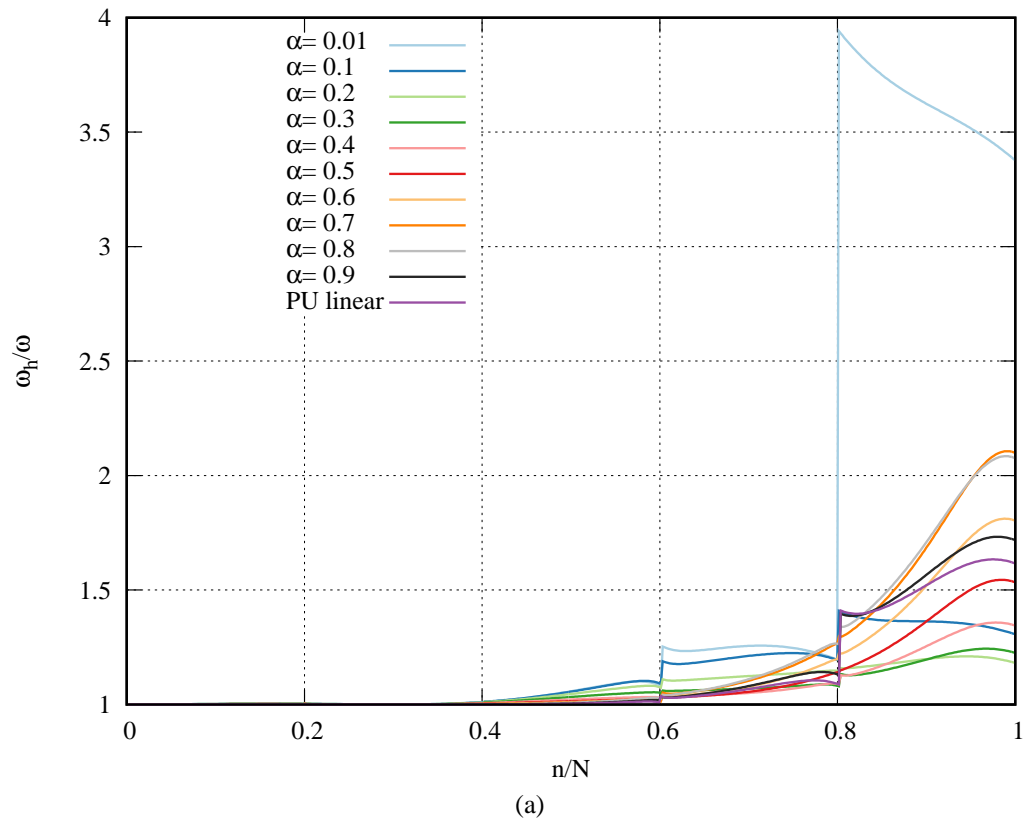


FIGURA 18 – Barra fixa: (a) espectro de frequências obtido com a PU *flat-top*,  $n_l = 1$  e  $k = 1$ , (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

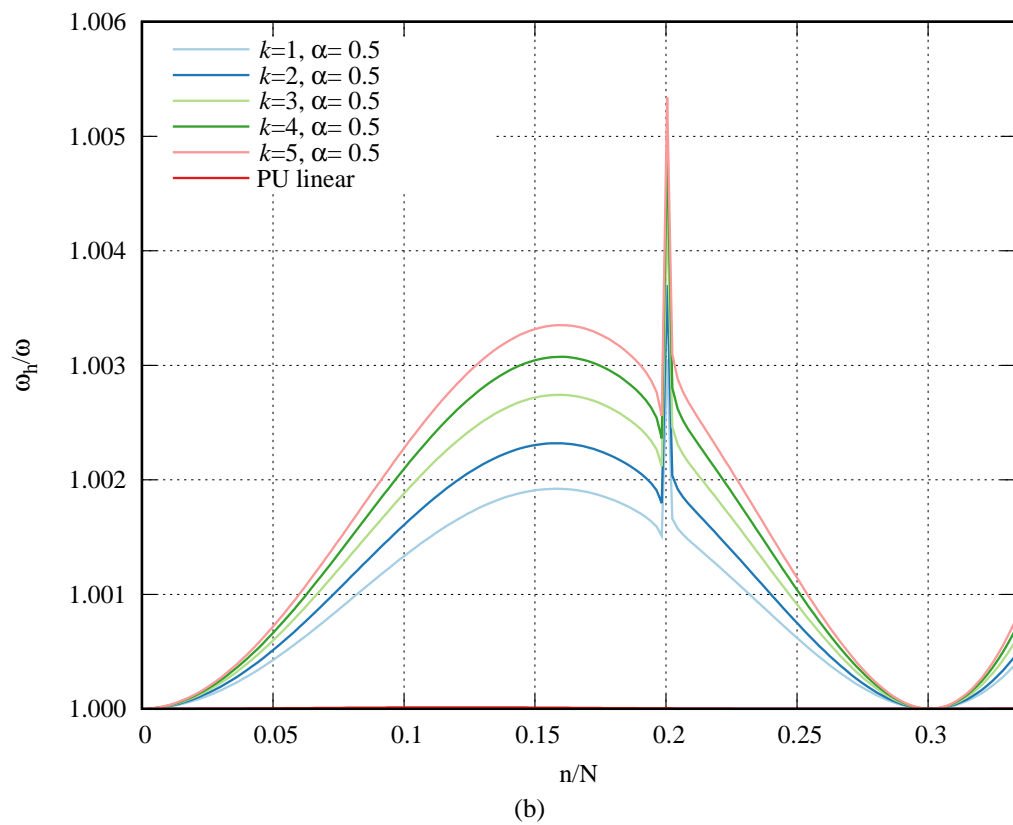
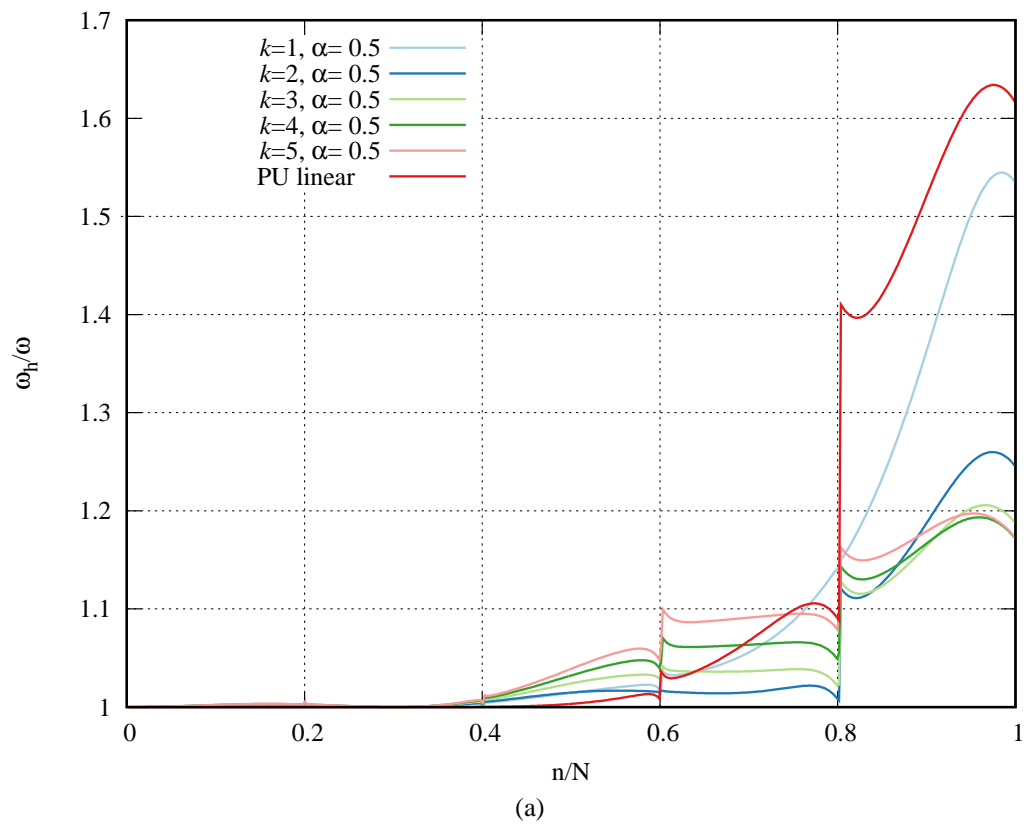


FIGURA 19 – Barra fixa: (a) espectro de frequências para  $\alpha = 0.5$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1, 2, \dots, 5$ , e PU linear, (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

Aumentando o número de níveis de enriquecimento, a figura 21 apresenta o espectro para  $n_l = 5$  com  $\beta_j$  padrão. Neste caso são apresentados somente os resultados com a PU *flat-top* uma vez que não foi possível obter resultados com a PU linear para este nível de enriquecimento, assunto que será tratado mais adiante neste trabalho. Os resultados mostram novamente ganho de precisão para as frequências mais baixas, com erros relativos na ordem de  $O(10^{-8})$ .

A figura 22 apresenta o mesmo nível de enriquecimento do caso anterior,  $n_l = 5$ , porém agora considerando o  $\bar{\beta}_j$  estabilizado. Neste caso é possível obter resultados com a PU linear, que são apresentadas em conjuntos com os resultados obtidos com a PU *flat-top* com  $k = 1$ . Como observado no início do espectro, as frequências obtidas com a aplicação do parâmetro  $\bar{\beta}_j$  estabilizado são menos precisas que as frequências obtidas com o  $\beta_j$  padrão, com erros relativos de ordem  $O(10^{-3})$  e  $O(10^{-8})$ , respectivamente.

A figura 23 mostra o espectro para as frequências obtidas com dois níveis de enriquecimento  $\beta_j$  padrão com a PU *flat-top* com  $k = 1, 2, \dots, 5$  e  $\alpha = 0.5$ , onde observa-se também o ganho de precisão para as primeiras frequências em todos os valores de  $k$  avaliados.

Por fim, a figura 24 ilustra os últimos espectros desta seção, que trazem os espectros de frequências para valores de  $\beta_1$ , com um nível de enriquecimento, nos casos com PU *flat-top* linear  $\alpha = 0.5$  e PU linear. Os erros relativos em função de  $\beta_1$  se alternam entre as faixas acústicas e ópticas do espectro, onde valores menores de  $\beta_1$  representam erros menores no início do espectro e maiores no fim, e para valores maiores de  $\beta_1$  essa condição se inverte. Esse comportamento é observado tanto para a PU *flat-top* e quanto para a PU linear. A maioria dos resultados apresentados neste trabalho considerou o valor  $\beta_1 = 3\pi/2$  como valor padrão, por representar uma condição intermediária.

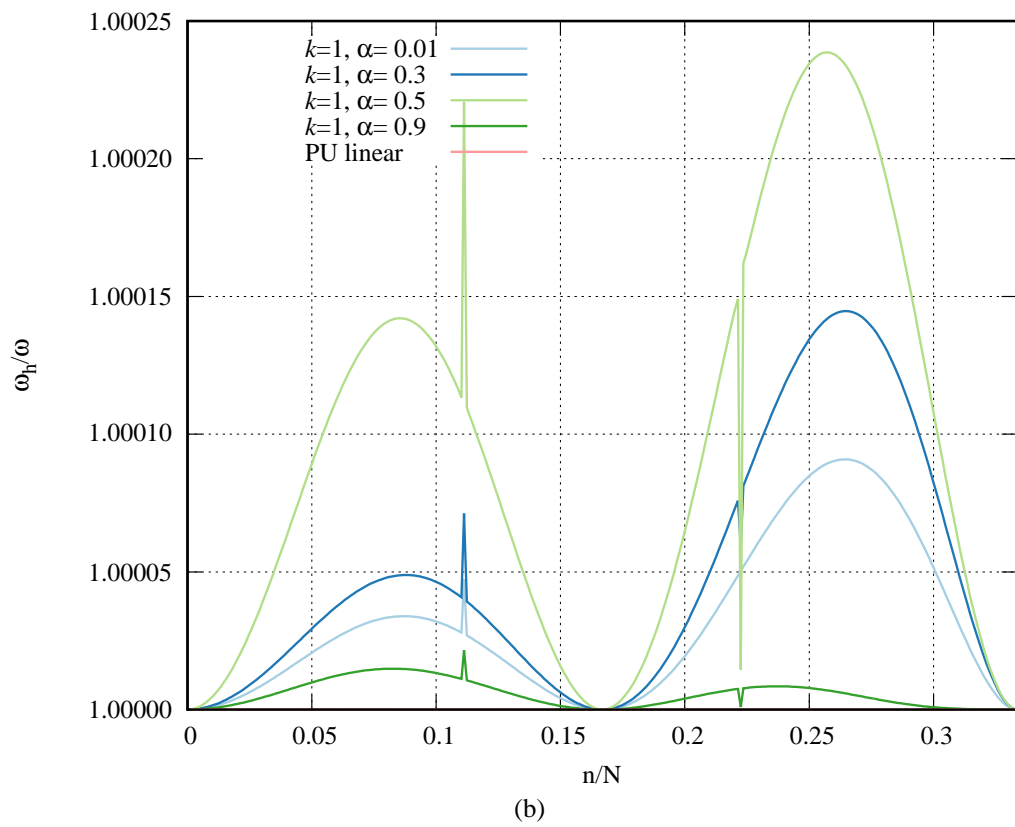
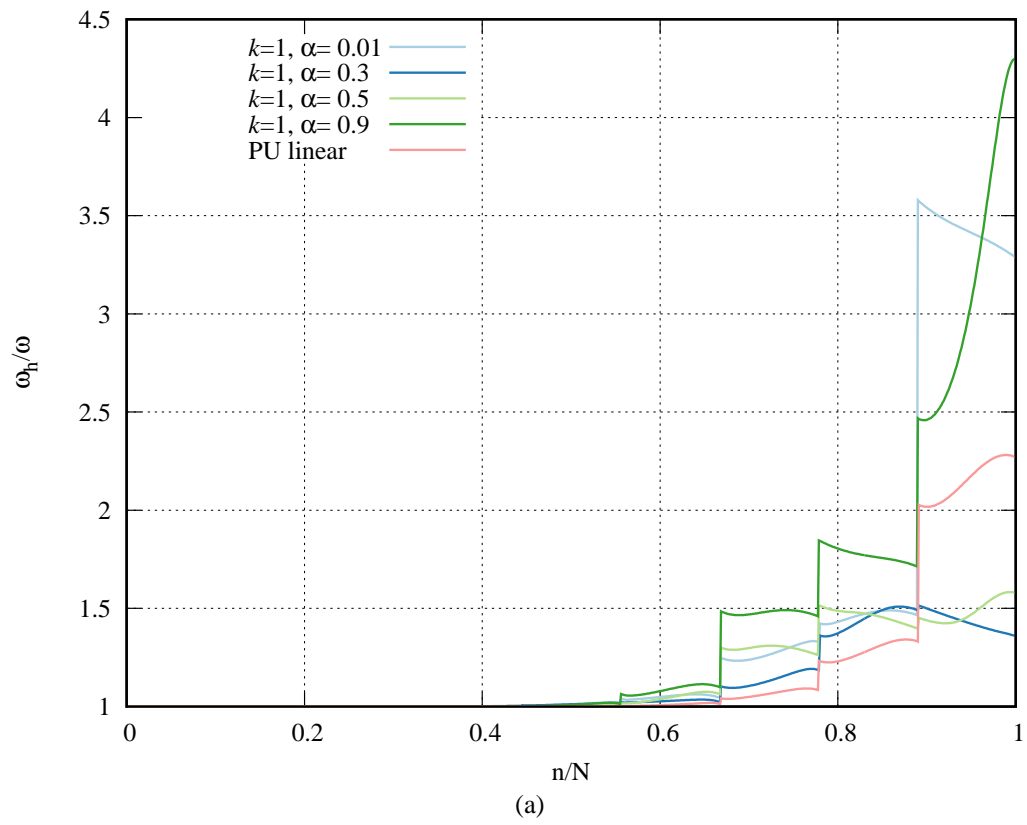


FIGURA 20 – Barra fixa: (a) espectro de frequências obtido com a PU *flat-top*,  $n_1 = 2$ ,  $k = 1$  e  $\beta_j$  padrão (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

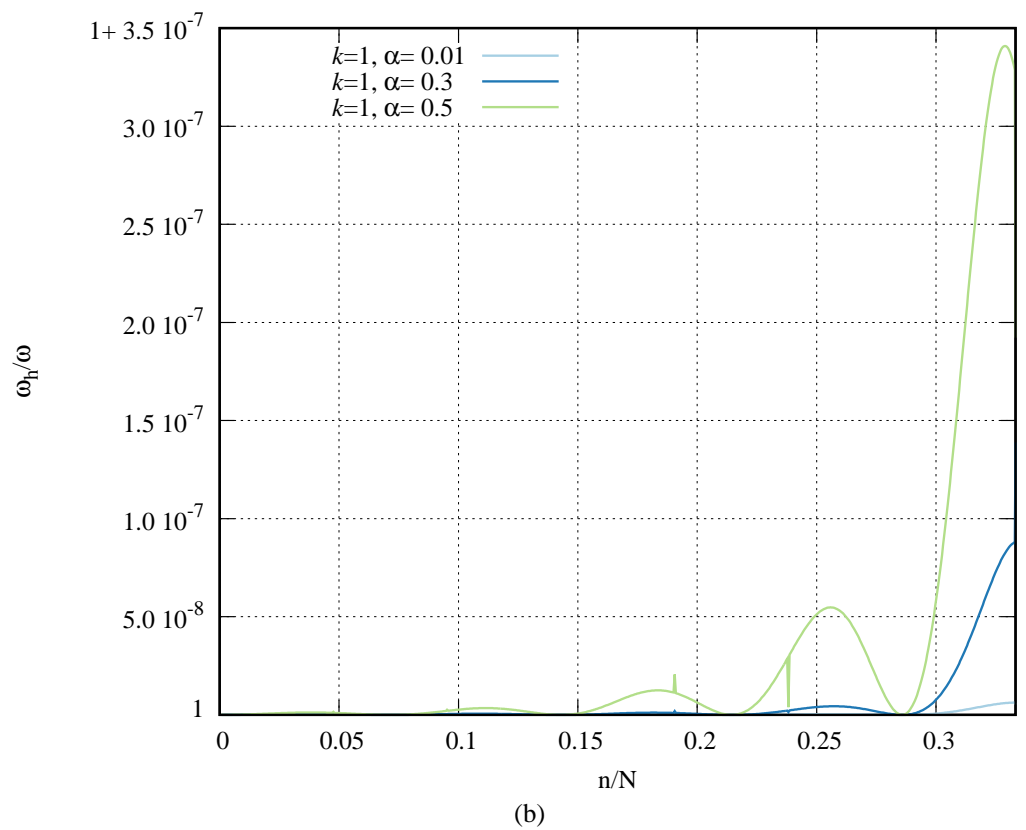
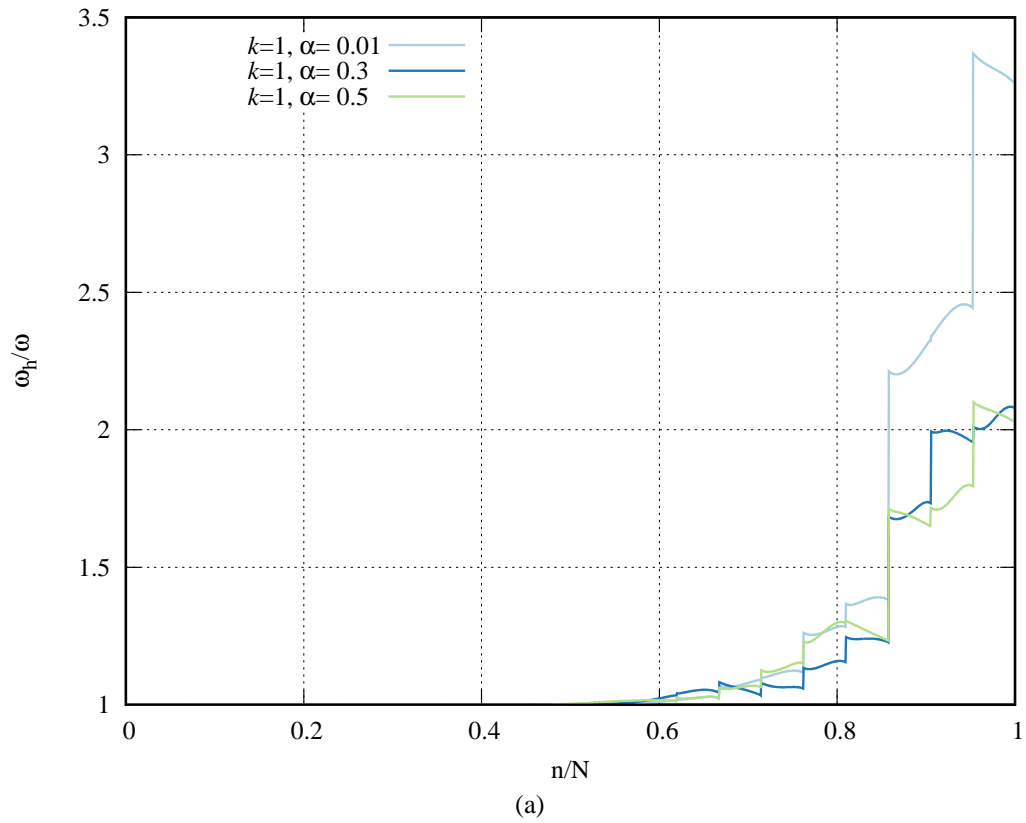


FIGURA 21 – Barra fixa: (a) espectro de frequências obtido com a PU *flat-top*,  $n_1 = 5$ ,  $k = 1$  e  $\beta_j$  padrão (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

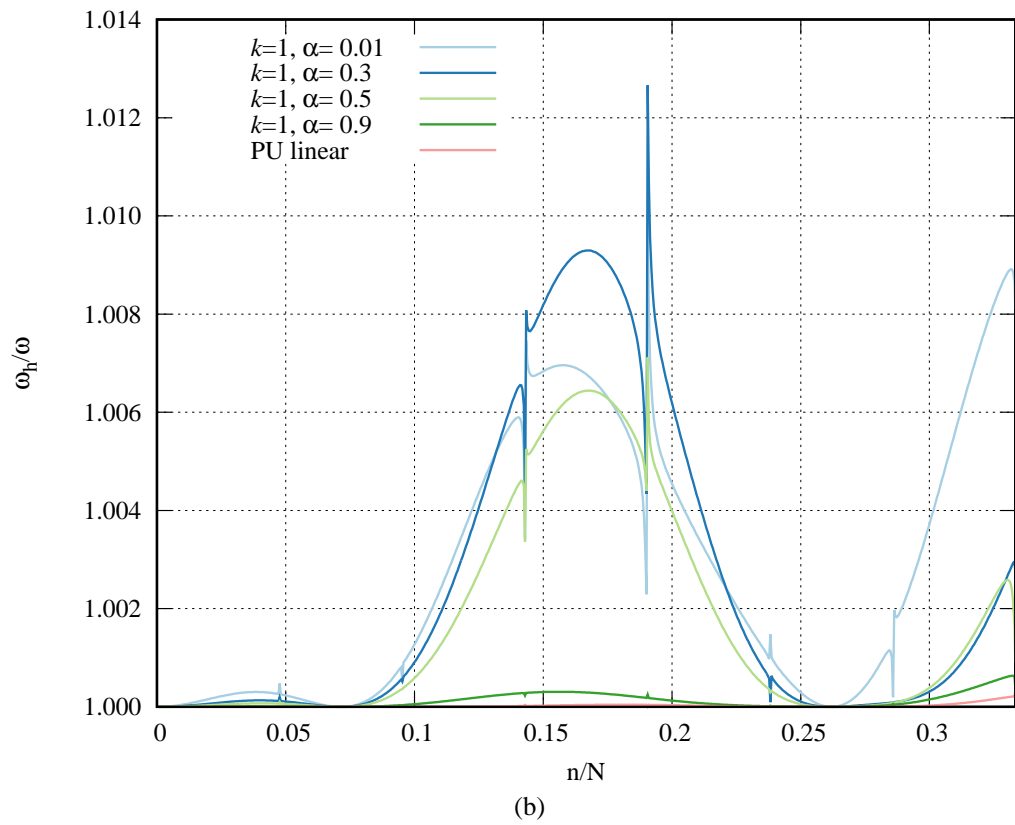
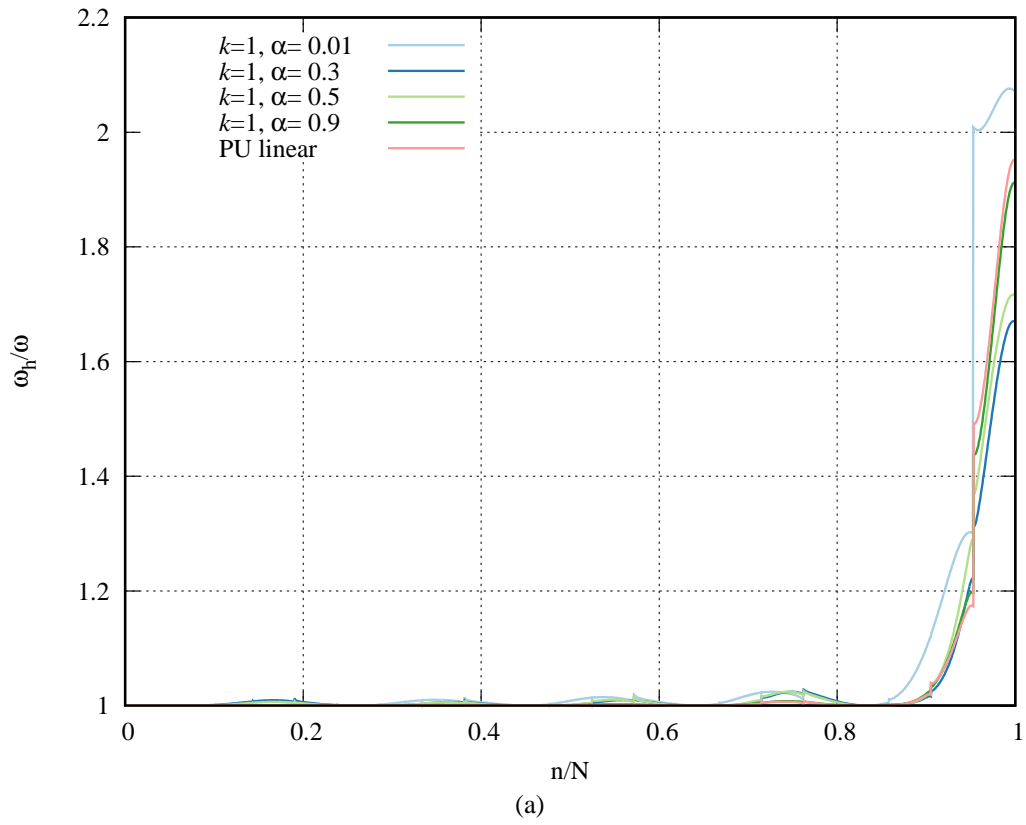


FIGURA 22 – Barra fixa: (a) espectro de frequências obtido com a PU *flat-top*,  $n_l = 5$ ,  $k = 1$  e  $\bar{\beta}_j$  estabilizado, (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

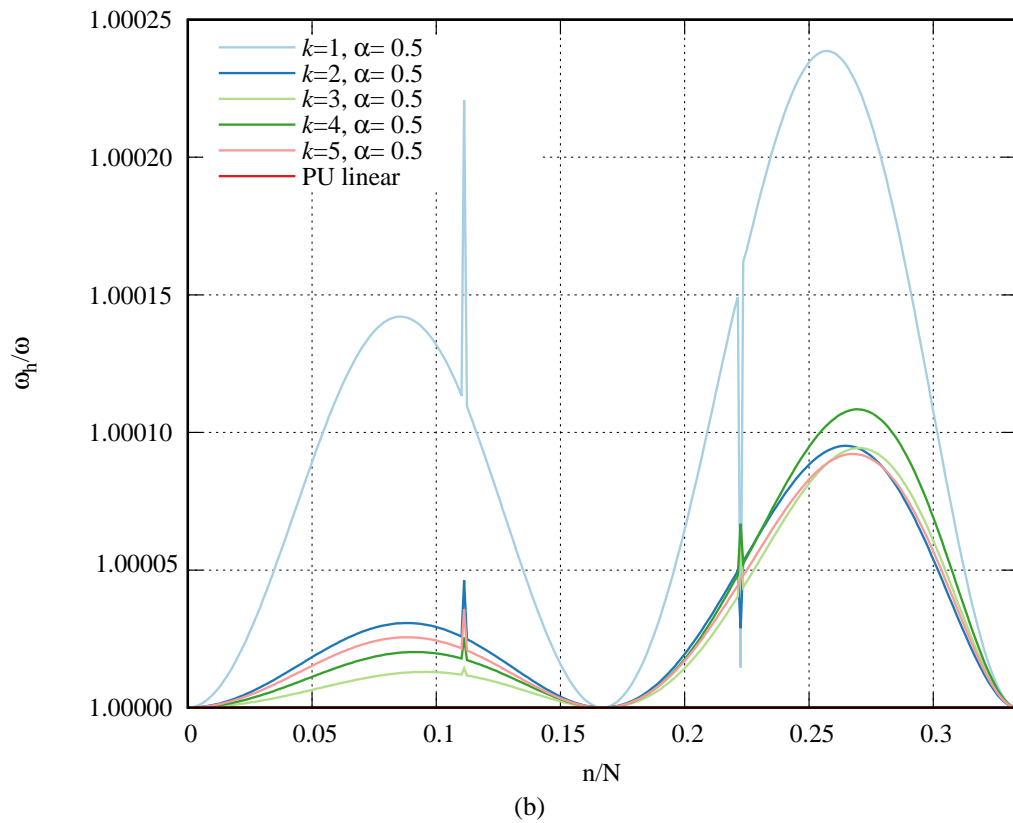
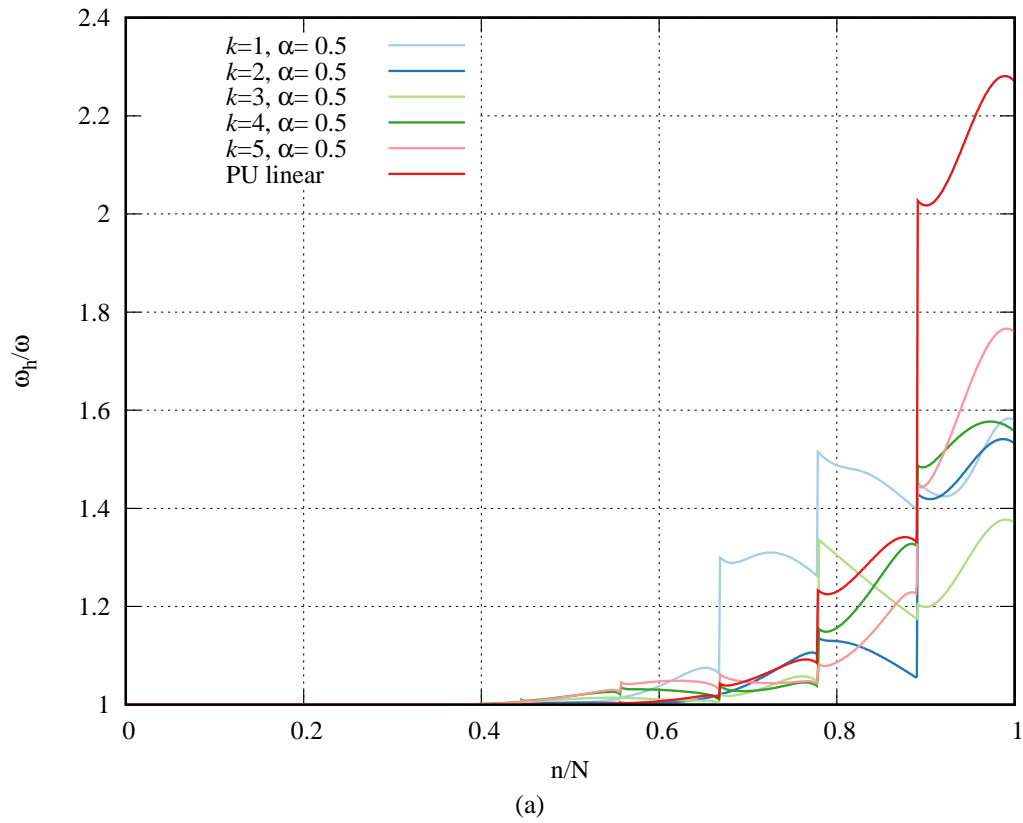


FIGURA 23 – Barra fixa: (a) espectro de frequências para  $\alpha = 0.5$ ,  $n_l = 2$ ,  $k = 1, 2, \dots, 5$  e  $\beta_j$  padrão e PU linear, (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

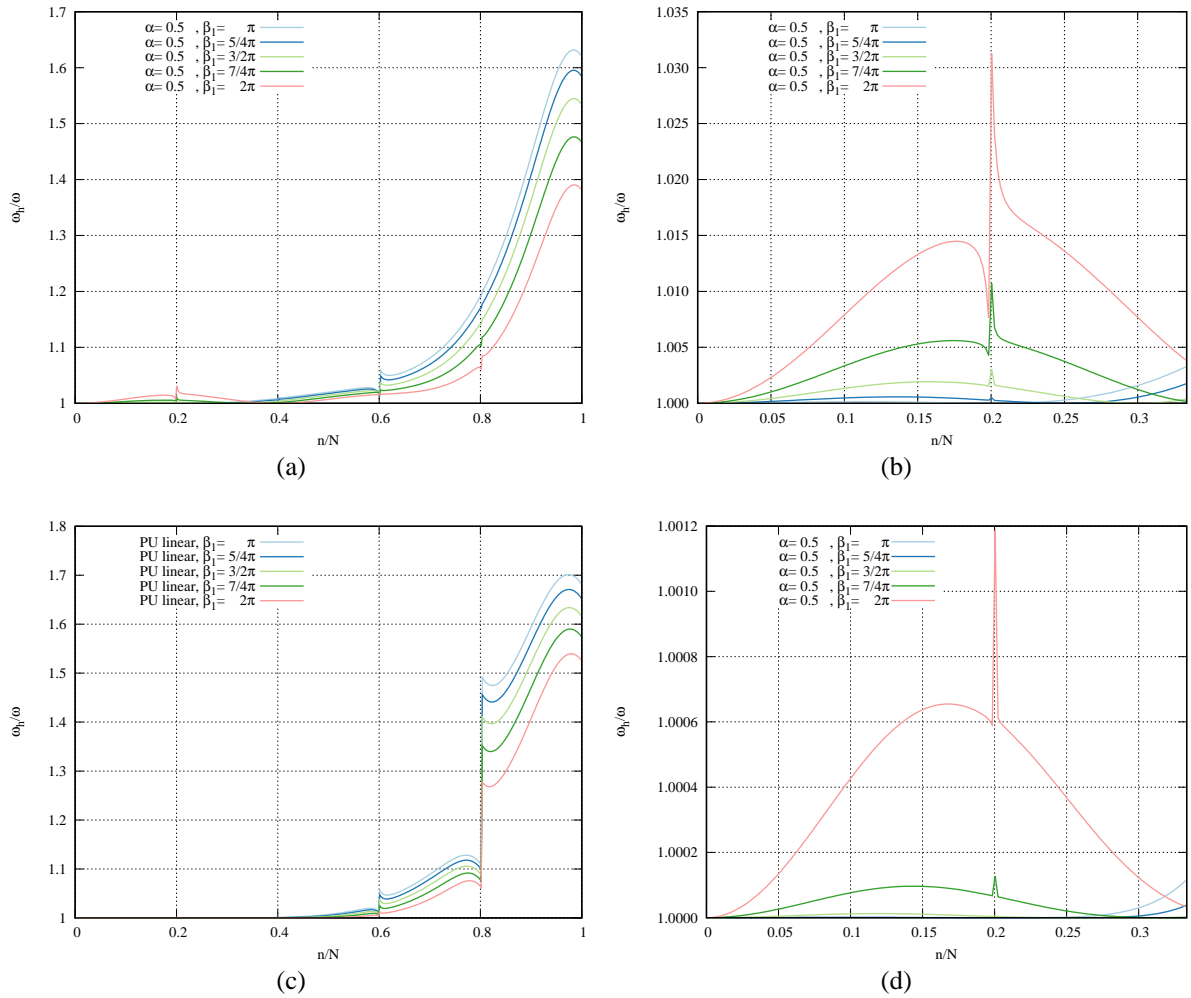


FIGURA 24– Barra fixa: espectros de frequências para diferentes valores de  $\beta_1$ , (a) PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$ , (c) PU linear, (b) e (d) ampliações das regiões entre 0 e  $1/3$ .

### 7.1.5 Taxa de convergência

A taxa de convergência da solução aproximada pelo MEFGE foi avaliada para a primeira e segunda frequências naturais de vibração, representadas no início do espectro de frequências, e para a 499ª frequência natural, que corresponde à última frequência aproximada obtida com apenas um nível de enriquecimento (com respeito aos graus de liberdades após a imposição das condições de contorno), adotada como exemplo para avaliação da convergência para frequências mais elevadas. O erro percentual entre uma frequência aproximada e uma frequência natural é determinado pela equação:

$$Erro(\%) = \frac{\omega_h - \omega}{\omega} 100\% \quad (43)$$

onde  $\omega_h$  é a frequência aproximada e  $\omega$  é a frequência natural analítica.

A tabela 2 e a figura 25 apresentam os erros percentuais obtidos para a primeira frequência aproximada pelo MEFGE com a PU *flat-top* linear, com diferentes valores de  $\alpha$ , considerando o processo de enriquecimento com parâmetro  $\beta_j$  padrão. Foram considerados até 10 níveis de enriquecimento, no entanto as tabelas a seguir podem mostrar um número menor de níveis de enriquecimento, indicando que não foi possível obter uma resposta real ou válida para o problema. O valor *n<sub>gl</sub>* representa o número total de graus de liberdade obtidos em cada nível de enriquecimento, após a imposição das condições de contorno. Cada linha da tabela representa os valores obtidos em cada nível de enriquecimento.

Destaca-se o aumento de precisão com a aplicação dos níveis de enriquecimento, observada para todos os valores de  $\alpha$ . O MEFGE com a PU *flat-top* apresenta boas taxas de convergência, porém com erros percentuais maiores em relação do MEFGE PU linear, como será apresentado a seguir.

Os resultados destacados em vermelho nas tabelas a seguir, mostram soluções aproximadas que apresentaram aumento do erro percentual com o processo de enriquecimento, indicando uma possível influência da instabilidade numérica nestas soluções. Por exemplo, na tabela 2, no caso  $\alpha = 0.5$ , os resultados obtidos nos 7º e 8º níveis de enriquecimento, foram piores que o resultado obtido no 6º nível de enriquecimento.

Os resultados destacados em azul nas tabelas, sinalizam o menor erro percentual obtido para a respectiva frequência aproximada. Para a primeira frequência, o menor erro percentual é obtido no caso da PU linear ( $\alpha = 1$ ) e com 2 níveis de enriquecimento, com valor na ordem de  $O(10^{-10})$ .

TABELA 2 – Barra fixa: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

<i>n<sub>gl</sub></i>	<i>n<sub>l</sub></i>	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
499	1	1.23167E-04	1.18349E-04	7.38213E-05	2.28874E-06	8.80509E-07
899	2	1.33710E-06	1.88626E-06	5.86278E-06	6.66598E-07	3.32556E-10
1299	3	1.31931E-08	3.10451E-08	1.87209E-07	1.69560E-08	NC
1699	4	1.16295E-09	1.43844E-09	2.42563E-09	5.84032E-10	NC
2099	5	5.10647E-10	1.28195E-09	1.41284E-09	NC	NC
2499	6	NC	2.23172E-09	7.51843E-10	NC	NC
2899	7	NC	NC	1.78934E-09	NC	NC
3299	8	NC	1.32893E-09	3.23565E-09	NC	NC

\*NC - não computado.

Os casos indicados com “NC” não foram determinados devido a falha no algoritmo de resolução do problema de autovalores generalizados, conforme mencionado na seção 6.4.

Todos os casos para o 9º e 10º níveis de enriquecimento não foram computados e portanto não são apresentados na tabela 2, 4 e 5.

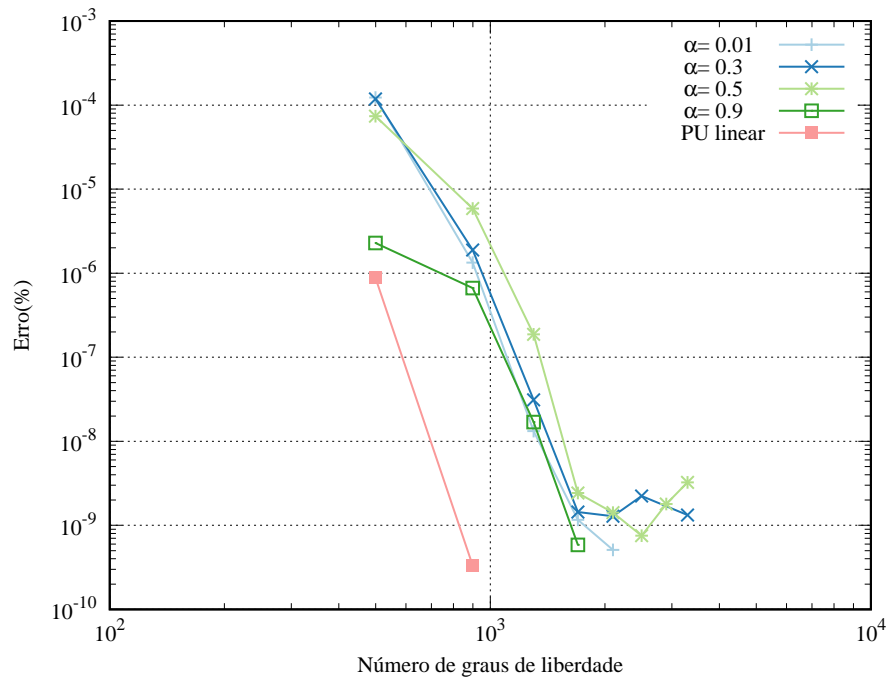


FIGURA 25 – Barra fixa: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

É importante notar que, assim como observado no processo de determinação dos números de condição das matrizes de rigidez e massa, a escolha do parâmetro  $\alpha$  tem influência sobre a taxa de convergência da solução e pode permitir ou não um número maior de níveis de enriquecimento. No caso MEFGE com a PU linear ( $\alpha = 1$ ), conforme se observa na tabela 2, são possíveis somente 2 níveis de enriquecimento para uma malha com 100 elementos finitos, porém com melhor taxa de convergência para a solução aproximada.

Uma importante observação é sobre a diferença entre a quantidade de soluções obtidas para as frequências aproximadas e os números de condição das matrizes de massa e rigidez, apresentados na figura 13 e 14, respectivamente. A tabela 3 correlaciona os níveis de enriquecimento com respectivo número de condição da matriz de massa e a ordem de grandeza do erro percentual. Para os itens onde a ordem do erro indica “NC” não foi possível computar a solução, conforme explicado anteriormente. Por exemplo, na tabela 3, para  $\alpha = 0.01$ , o número de condição com 10 níveis de enriquecimento atinge a ordem de  $O(10^{20})$ , mas somente é possível obter uma resposta válida para frequência aproximada com até 5 níveis de enriquecimento, que apresentou número de condição  $\kappa(\mathbf{M})$  na ordem de  $O(10^{11})$ . A mesma conclusão é obtida para outros valores de  $\alpha$ , inclusive para PU linear ( $\alpha = 1$ ). Neste ponto,

nota-se a influência dos números de condição sobre a estabilidade numérica do problema. Os níveis de enriquecimento com elevados números de condição, com ordem de grandeza maior ou igual a  $O(10^{13})$ , não conseguiram apresentar soluções aproximadas válidas.

TABELA 3 – Barra fixa: soluções obtidas e respectivos números de condição para a 1ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

$ngl$	$n_l$	$\alpha = 0.01$		$\alpha = 0.3$		$\alpha = 0.5$		$\alpha = 0.9$		PU linear	
		$O_{\text{erro}}$	$\kappa(\mathbf{M})$	$O_{\text{erro}}$	$\kappa(\mathbf{M})$	$O_{\text{erro}}$	$\kappa(\mathbf{M})$	$O_{\text{erro}}$	$\kappa(\mathbf{M})$	$O_{\text{erro}}$	$\kappa(\mathbf{M})$
499	1	-4	2.60E+02	-4	7.75E+02	-5	2.79E+03	-6	3.25E+04	-7	3.36E+04
899	2	-6	3.80E+04	-6	4.92E+04	-6	8.08E+04	-7	4.05E+07	-10	6.11E+08
1299	3	-8	5.62E+06	-8	4.22E+06	-7	1.87E+06	-8	1.23E+10	NC	1.07E+13
1699	4	-9	8.54E+08	-9	1.73E+08	-9	6.90E+07	-10	5.56E+11	NC	7.60E+17
2099	5	-10	1.20E+11	-9	1.02E+10	-9	2.70E+09	NC	4.18E+14	NC	3.69E+19
2499	6	NC	1.53E+13	-9	8.42E+11	-10	2.99E+11	NC	8.36E+17	NC	1.02E+21
2899	7	NC	2.13E+15	NC	2.95E+13	-9	4.51E+12	NC	2.51E+19	NC	8.19E+21
3299	8	NC	1.01E+20	-9	1.62E+15	-9	1.00E+14	NC	4.14E+19	NC	3.78E+20
3699	9	NC	5.33E+19	NC	1.37E+19	NC	6.64E+15	NC	6.32E+19	NC	1.16E+20
4099	10	NC	2.32E+20	NC	5.19E+19	NC	7.14E+17	NC	2.90E+20	NC	1.18E+21

\*NC - não computado.

Na tabela 4 e figura 26 são apresentados os resultados dos erros percentuais para a segunda frequência de vibração, onde o comportamento é similar ao observado para a primeira frequência aproximada.

TABELA 4 – Barra fixa: erros percentuais da solução aproximada para a 2ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

$ngl$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
499	1	4.92506E-04	4.73228E-04	2.95176E-04	9.15263E-06	3.52052E-06
899	2	5.34603E-06	7.54603E-06	2.34421E-05	2.66503E-06	1.47659E-10
1299	3	5.11854E-08	1.23864E-07	7.51449E-07	6.90670E-08	NC
1699	4	2.33879E-10	5.68767E-09	1.00305E-08	4.40181E-10	NC
2099	5	2.62989E-10	8.52184E-10	2.11164E-10	NC	NC
2499	6	NC	1.57474E-10	1.47950E-09	NC	NC
2899	7	NC	NC	3.47877E-10	NC	NC
3299	8	NC	5.19162E-10	2.54685E-11	NC	NC

\*NC - não computado.

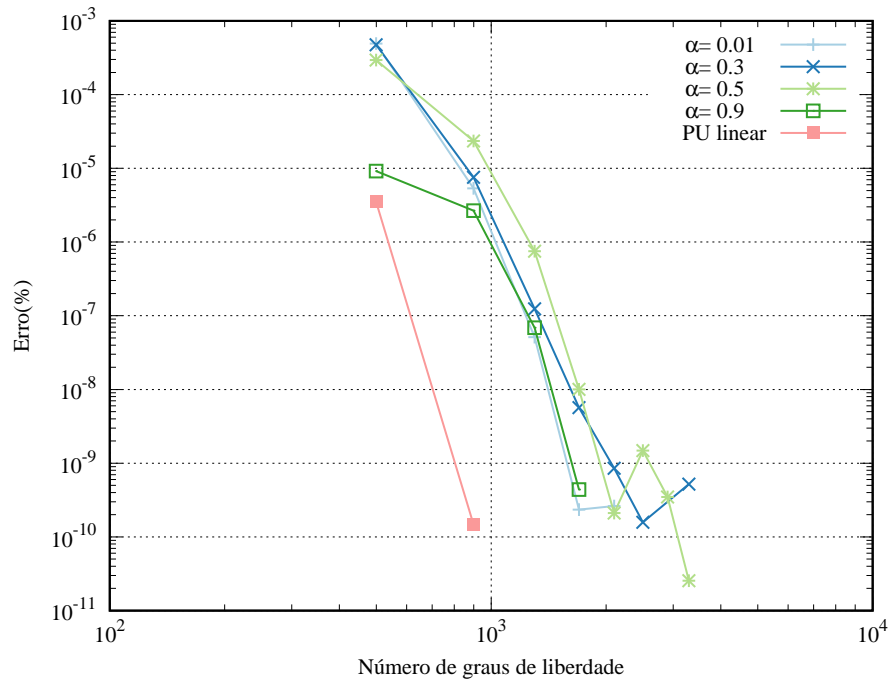


FIGURA 26 – Barra fixa: convergência para a 2ª frequência natural com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

A tabela 5 e figura 27 apresentam os resultados dos erros percentuais para a última frequência de vibração aproximada obtida com um nível de enriquecimento. Observa-se que as soluções aproximadas obtidas com a PU *flat-top* são mais precisas que as soluções obtidas com a PU linear, isso é possível porque a PU *flat-top* permite a aplicação de um número maior de níveis de enriquecimento.

TABELA 5 – Barra fixa: erros percentuais da solução aproximada para a 499ª frequência de vibração, com o  $\beta_j$  padrão.

$n_{gl}$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
499	1	2.37679E+02	2.25781E+01	5.34233E+01	7.17697E+01	6.15939E+01
899	2	2.03094E+00	1.77439E+00	1.02842E+00	1.27670E+00	1.69746E-01
1299	3	3.15983E-03	1.45321E-02	4.11717E-03	1.26344E-04	NC
1699	4	4.76278E-06	2.83143E-05	7.74976E-05	2.22418E-06	NC
2099	5	1.91613E-08	2.15914E-07	2.86500E-06	NC	NC
2499	6	NC	6.75017E-09	8.12691E-08	NC	NC
2899	7	NC	NC	8.90754E-10	NC	NC
3299	8	NC	8.01581E-12	9.32587E-12	NC	NC

\*NC - não computado.

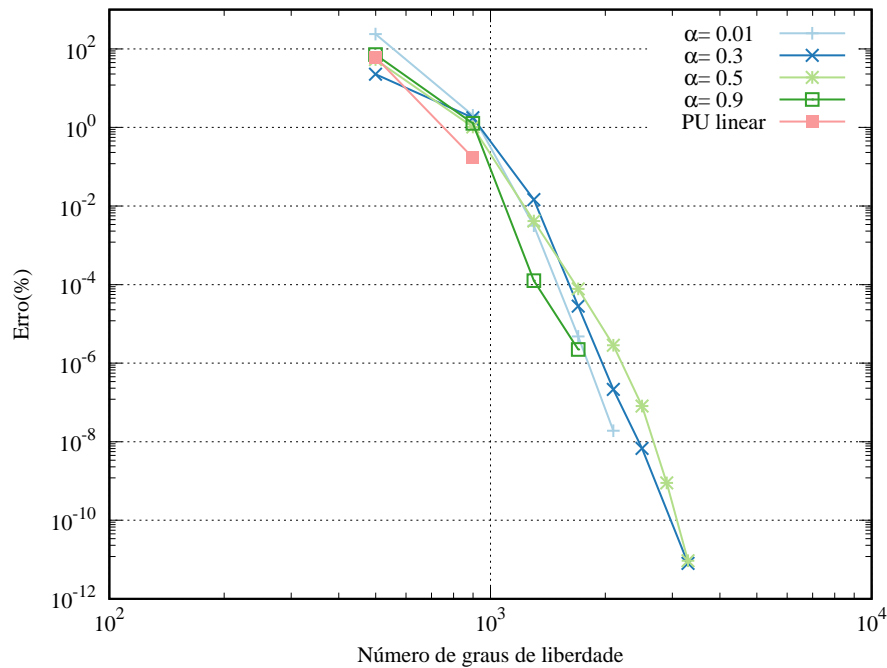


FIGURA 27 – Barra fixa: convergência para a 499ª frequência natural com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

Agora a análise é realizada considerando o processo de enriquecimento com parâmetro  $\bar{\beta}_j$  estabilizado. Os resultados para os erros percentuais obtidos para a primeira frequência aproximada são apresentados na tabela 6 e figura 28. Observa-se que o enriquecimento com parâmetro  $\bar{\beta}_j$  estabilizado afeta a convergência da solução aproximada, principalmente para os casos com a PU *flat-top*, não permitindo a convergência para erros percentuais de ordem menor que  $O(10^{-7})$  até os 10 níveis de enriquecimento. A melhor aproximação foi obtida com a PU linear com 7 níveis de enriquecimento e erro percentual na ordem de  $O(10^{-11})$ , equivalente ao caso da PU linear com 2 níveis de enriquecimento com  $\beta_j$  padrão, onde o erro percentual é da ordem de  $O(10^{-10})$ .

As frequências aproximadas com o primeiro nível de enriquecimento padrão e estabilizado apresentam os mesmos erros percentuais, o que era esperado pois o espaço das funções de enriquecimento é o mesmo quando se considera o  $\beta_j$  padrão ou  $\bar{\beta}_j$  estabilizado com um único nível de enriquecimento.

A tabela 7 e figura 29 apresentam os resultados dos erros percentuais para a segunda frequência de vibração, considerando o processo de enriquecimento com parâmetro  $\bar{\beta}_j$  estabilizado. O comportamento é similar ao observado para a primeira frequência aproximada, porém nota-se uma instabilidade nas respostas obtidas com a PU linear após o 7º nível de enriquecimento.

TABELA 6 – Barra fixa: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

$n_{gl}$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
499	1	1.23167E-04	1.18349E-04	7.38213E-05	2.28874E-06	8.80509E-07
899	2	4.35306E-05	2.14524E-05	4.90334E-06	1.21306E-06	5.67935E-08
1299	3	2.36795E-05	6.48189E-06	4.82445E-06	9.40320E-07	1.20816E-08
1699	4	1.54140E-05	4.93719E-06	2.39250E-06	6.87358E-07	2.88904E-09
2099	5	1.10620E-05	4.32558E-06	2.19882E-06	4.46822E-07	2.12703E-09
2499	6	8.43748E-06	3.30024E-06	1.62291E-06	2.64182E-07	1.71420E-09
2899	7	6.71288E-06	2.63419E-06	1.47528E-06	1.72021E-07	1.08468E-11
3299	8	5.49854E-06	2.46562E-06	1.22744E-06	1.35691E-07	2.54429E-10
3699	9	4.61600E-06	2.16561E-06	1.11811E-06	1.35071E-07	8.63176E-10
4099	10	3.93085E-06	1.88251E-06	9.94714E-07	1.20463E-07	2.30474E-09

TABELA 7 – Barra fixa: erros percentuais da solução aproximada para a 2ª frequência de vibração com o  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

$n_{gl}$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
499	1	4.92506E-04	4.73228E-04	2.95176E-04	9.15263E-06	3.52052E-06
899	2	1.74062E-04	8.57832E-05	1.96105E-05	4.85069E-06	2.29602E-07
1299	3	9.46837E-05	2.59140E-05	1.92962E-05	3.76037E-06	4.51315E-08
1699	4	6.16276E-05	1.97504E-05	9.56019E-06	2.74152E-06	1.29221E-08
2099	5	4.42300E-05	1.73022E-05	8.79615E-06	1.77906E-06	7.63924E-09
2499	6	3.37450E-05	1.31918E-05	6.47904E-06	1.05551E-06	3.19881E-09
2899	7	2.68381E-05	1.05398E-05	5.88591E-06	6.68412E-07	2.14728E-10
3299	8	2.19949E-05	9.85682E-06	4.89333E-06	5.43678E-07	1.12829E-09
3699	9	1.84473E-05	8.66565E-06	4.47798E-06	5.26372E-07	3.86242E-09
4099	10	1.57383E-05	7.51147E-06	3.93285E-06	5.01169E-07	3.01980E-10

TABELA 8 – Barra fixa: erros percentuais da solução aproximada para a 499ª frequência de vibração com o  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

$n_{gl}$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
499	1	2.37679E+02	2.25781E+01	5.34233E+01	7.17697E+01	6.15939E+01
899	2	4.95572E-01	6.85724E-01	4.90316E-01	1.90249E-02	1.35360E-02
1299	3	2.25682E-01	2.28894E-01	7.83834E-02	4.87362E-03	2.08859E-03
1699	4	1.39123E-01	8.55035E-02	7.22076E-02	2.30754E-03	6.07800E-04
2099	5	9.72799E-02	5.70509E-02	3.59515E-02	1.27843E-03	2.39633E-04
2499	6	7.30126E-02	5.43419E-02	3.39908E-02	7.09929E-04	1.13237E-04
2899	7	5.73853E-02	3.86789E-02	2.26802E-02	3.71367E-04	6.03967E-05
3299	8	4.66033E-02	2.65321E-02	2.13315E-02	1.80599E-04	3.51385E-05
3699	9	3.87891E-02	2.54767E-02	1.61637E-02	8.64771E-05	2.18282E-05
4099	10	3.29121E-02	2.21920E-02	1.52034E-02	4.80762E-05	1.42729E-05

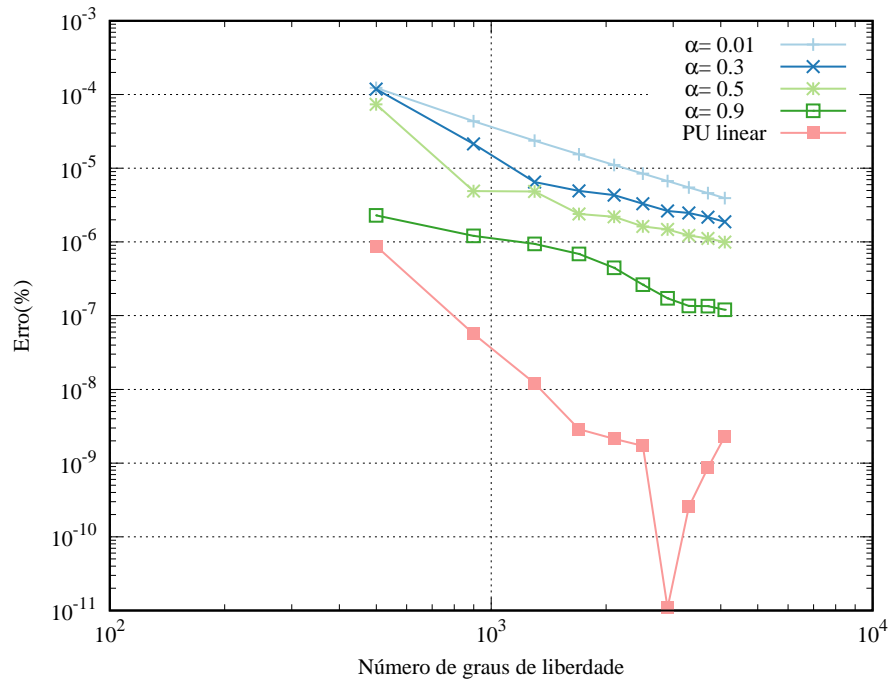


FIGURA 28 – Barra fixa: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

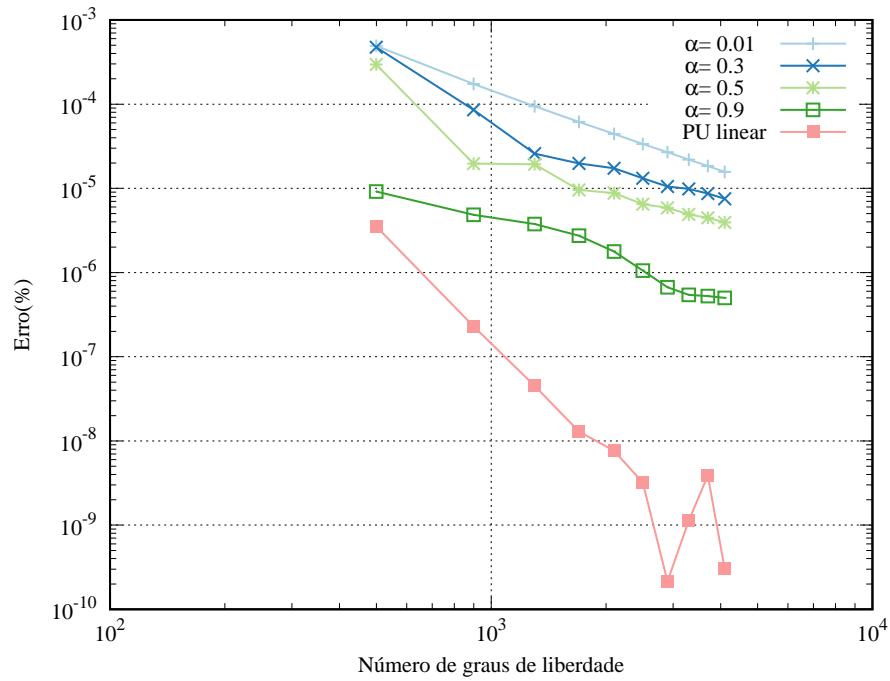


FIGURA 29 – Barra fixa: convergência para a 2ª frequência natural, com enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

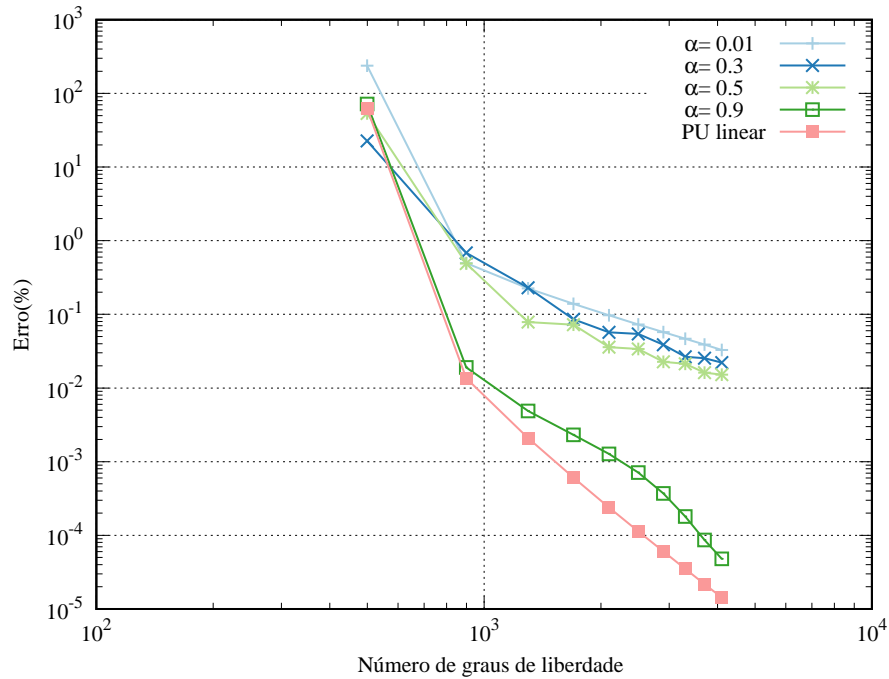
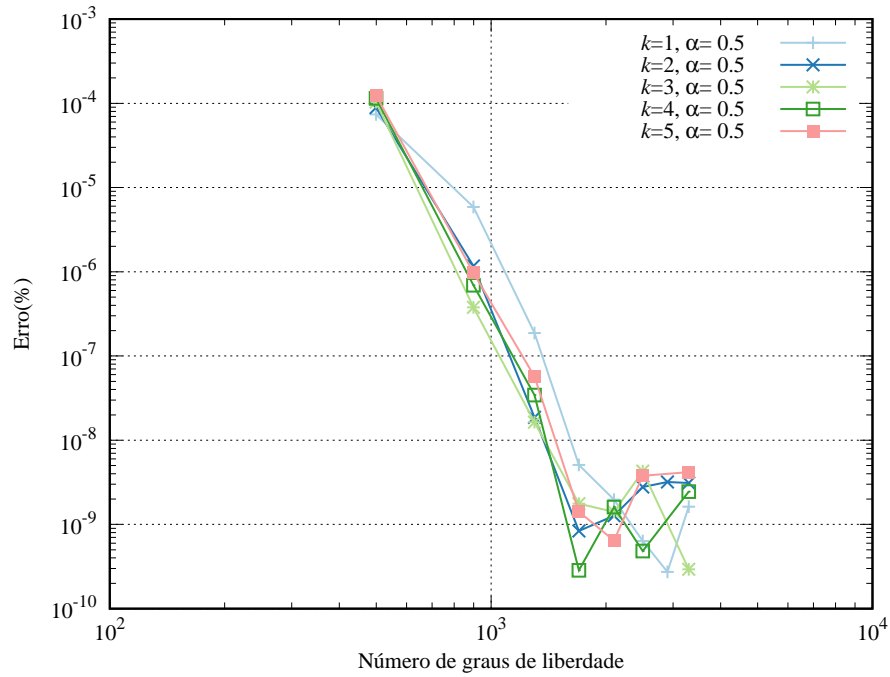


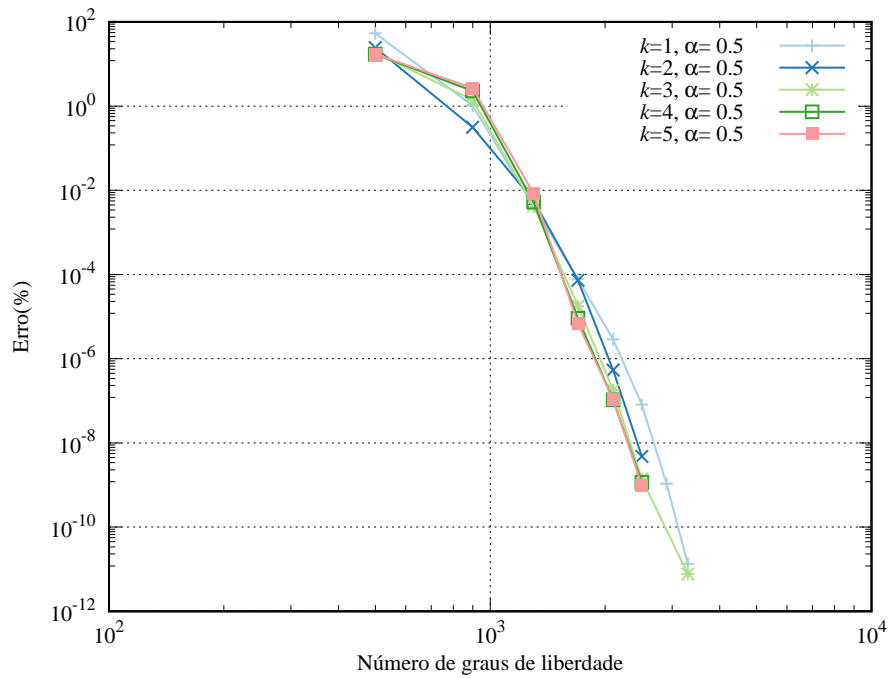
FIGURA 30 – Barra fixa: convergência para a 499ª frequência natural com enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

Na sequência, a tabela 8 e a figura 30 apresentam os resultados dos erros percentuais para a 499ª frequência com o enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado. Observa-se também a redução na taxa de convergência das aproximações após o segundo nível de enriquecimento. O menor erro percentual obtido nesta análise, com os 10 níveis de enriquecimento estabilizado, é da ordem de  $O(10^{-5})$ , enquanto para o enriquecimento padrão é da ordem de  $O(10^{-12})$ , com a PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$ .

Por fim a figura 31 apresenta os resultados para a PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$  considerando o enriquecimento  $\beta_j$  padrão para casos com  $k = 1, 2, \dots, 5$ . Embora existam pequenas variações nos erros relativos encontrados, as taxas de convergências não são significativamente influenciadas pelo parâmetro  $k$ .



(a) 1ª frequência



(b) 499ª frequência

FIGURA 31 – Barra fixa: convergência para a (a) 1ª e (b) 499ª frequências naturais com enriquecimento  $\beta_j$  padrão, considerando a PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$  com  $k = 1, 2, \dots, 5$ .

### 7.1.6 Modos de vibração

Como ilustração, a figura 32 mostra uma representação dos seis primeiros modos de vibração para a barra fixa, obtidos pelo MEFGE PU *flat-top* com  $\alpha = 0.5$ ,  $k = 1$  e um nível de enriquecimento. A figura 32 representa os modos de vibração para um elemento estrutural de barra. Como, para os elementos de barra, os graus de liberdade são axiais, o que se representa na figura 32 são os deslocamentos na direção longitudinal das barras, e não deslocamentos no plano transversal, tal como se tem para as vigas.

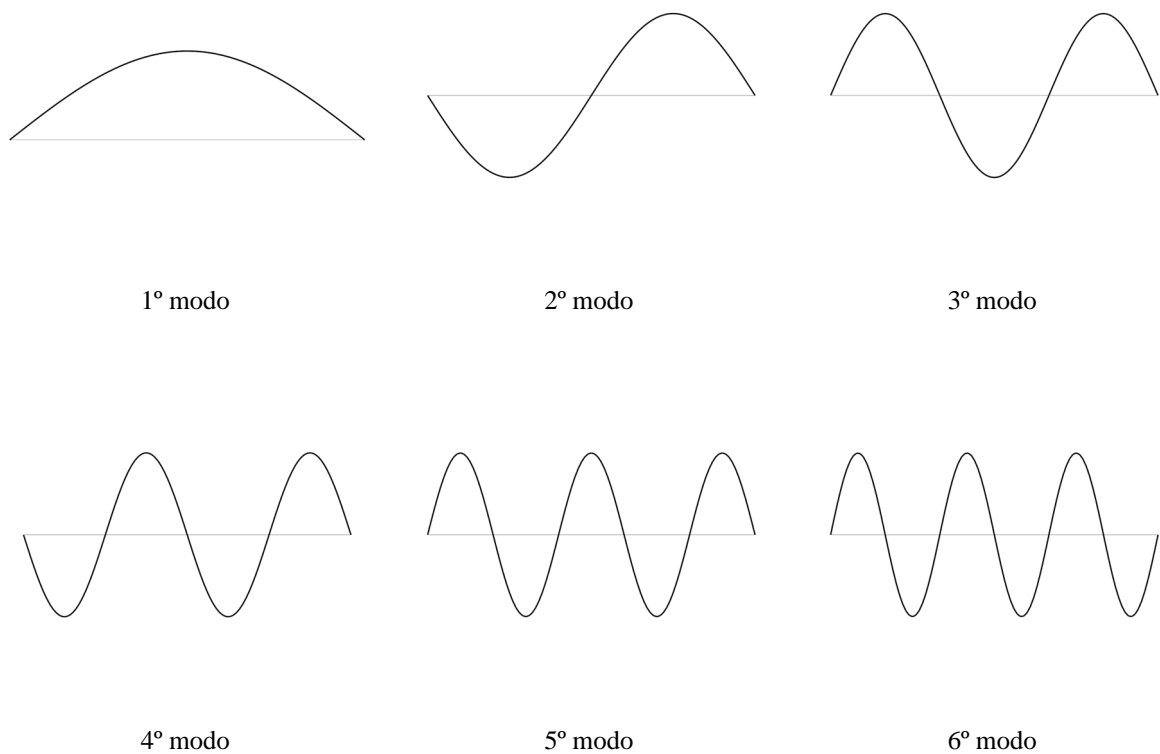


FIGURA 32 – Barra fixa: os seis primeiros modos de vibração obtidos com a PU *flat-top*,  $\alpha = 0.5$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1$ .

## 7.2 TRELIÇA PLANA (2D)

O segundo exemplo também está relacionado com a vibração livre em barra reta, porém agora considera-se a análise de uma treliça plana. A formulação é a mesma considerada para o problema anterior, porém é necessário aplicar uma transformação de coordenadas para compatibilização dos graus de liberdade, conforme processo detalhado no Apêndice B.

A treliça plana é composta por sete barras, conforme geometria representada na figura 33 (dimensões em metros). Este modelo foi proposto inicialmente por Zeng (1998) e tratado nas análises de Arndt (2009), Rauen (2014), Rauen *et al.* (2017) e Cittadin (2017) e aqui consideram-se as mesmas configurações adotadas nesses trabalhos. Todas as barras da estrutura são uniformes e possuem as seguintes características: área da seção transversal  $A = 0.001 \text{ m}^2$ , massa específica  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$  e módulo de elasticidade  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ .

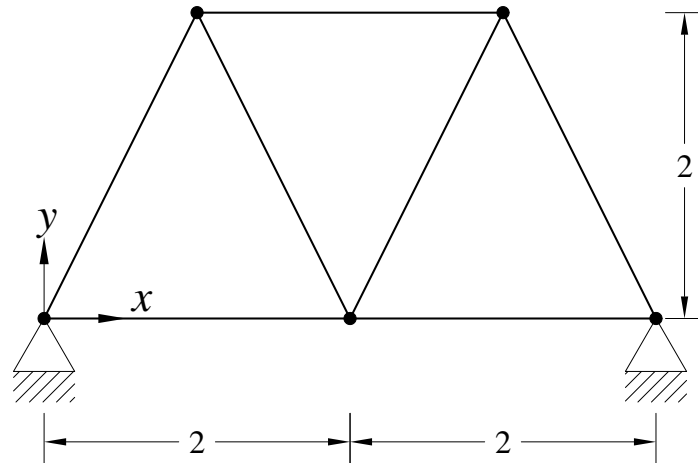


FIGURA 33 – Treliça plana composta por 7 barras.

Este problema foi resolvido tratando cada barra da treliça como um elemento finito, abordagem usualmente aplicada neste tipo de problema, exceto para o resultado apresentado na figura 40, onde foi considerado o refino  $h$  nas barras, seguindo a metodologia proposta no trabalho de Cittadin (2017). As demais análises apresentadas neste trabalho não consideraram o refino  $h$  para as barras da treliça.

### 7.2.1 Número de condição em função do parâmetro $\alpha$

Assim como apresentado na figura 10 do problema anterior, a figura 34 apresenta os números de condição para as matrizes de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$  e massa  $\kappa(\mathbf{M})$ , considerando-se apenas um nível enriquecimento e com diferentes graus de suavidade para a função PU *flat-top*,  $k = 1, 2, 3$ .

O comportamento dos números de condição da matriz de massa em função do parâmetro  $\alpha$  é similar ao observado para o problema da barra fixa, na comparação das figuras

10 e 34. Os valores dos números de condição são praticamente de mesma ordem de grandeza e com valor máximo não superior a  $O(10^5)$  quando  $k = 1$  e  $\alpha \geq 0.8$ .

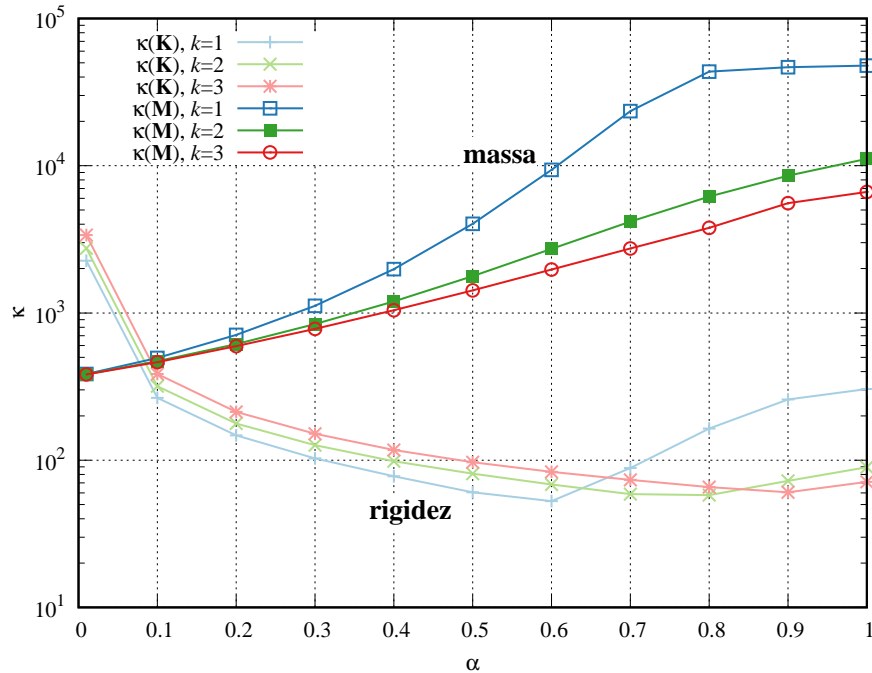


FIGURA 34 – Treliça plana: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro  $\alpha$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1, 2, 3$  utilizando a técnica *flat-top*.

No entanto, diferente do observado no problema da barra fixa, nota-se aqui que os números de condição da matriz de rigidez são sempre menores que os números de condição da matriz de massa, exceto para valores de  $\alpha < 0.1$ . Os números de condição da matriz de rigidez são, em média, duas ordens de grandeza inferiores que o verificado para o problema anterior, por exemplo, de  $O(10^4)$  para  $O(10^2)$  quando  $\alpha = 0.5$ .

As figuras 35(a) e 35(b) apresentam os números de condição para as matrizes de massa e rigidez, respectivamente, agora com um maior nível de enriquecimento, com  $n_l = 5$  e  $k = 1, 2, 3$ . A figura 35(a) apresenta os resultados para  $\kappa(\mathbf{K})$  e  $\kappa(\mathbf{M})$  com o enriquecimento  $\beta_j$  padrão, observar-se que estes valores são bem similares aos observados na figura 11 para o problema da barra fixa, com menores números de condição quando  $\alpha = 0.5$ . O mesmo pode ser observado nas figuras 12 e 35(b) para os valores de  $\kappa(\mathbf{M})$  com o enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado. A invariância de  $\kappa(\mathbf{K})$ , observada na figura 12 em relação aos valores de  $\alpha$ , não é reproduzida no problema da treliça plana. Neste caso, os valores de  $\kappa(\mathbf{K})$  são sempre menores que  $\kappa(\mathbf{M})$ , porém aumentam quase que proporcionalmente com os valores de  $\alpha > 0.1$ .

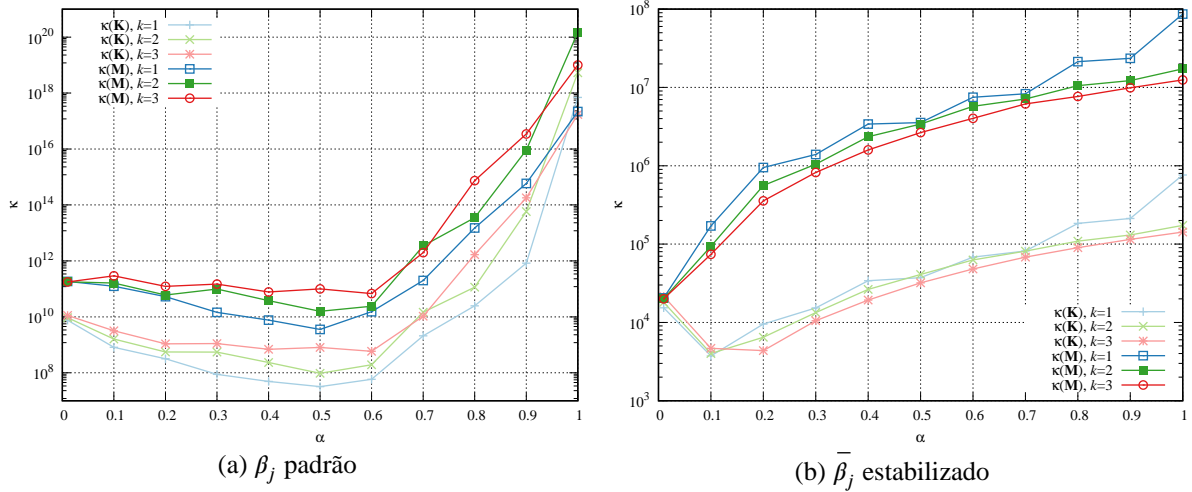


FIGURA 35 – Treliça plana: números de condição das matrizes de rigidez e massa, com  $n_l = 5$  e  $k = 1, 2, 3$ , para o enriquecimento: (a)  $\beta_j$  padrão e (b)  $\beta_j$  estabilizado.

### 7.2.2 Número de condição e a influência do enriquecimento

As figuras 36 e 37 mostram os números de condição para o enriquecimento utilizando os parâmetros  $\beta_j$  padrão e  $\beta_j$  estabilizado, respectivamente. Neste exemplo foram considerados até 10 níveis de enriquecimento.

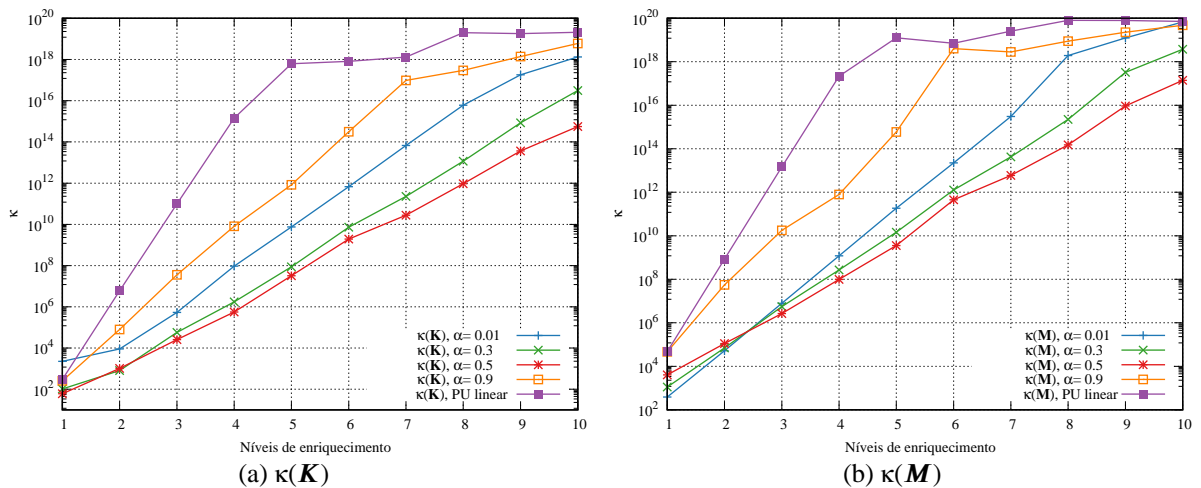


FIGURA 36 – Treliça plana: números de condição da matriz de (a) rigidez e (b) massa com o enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

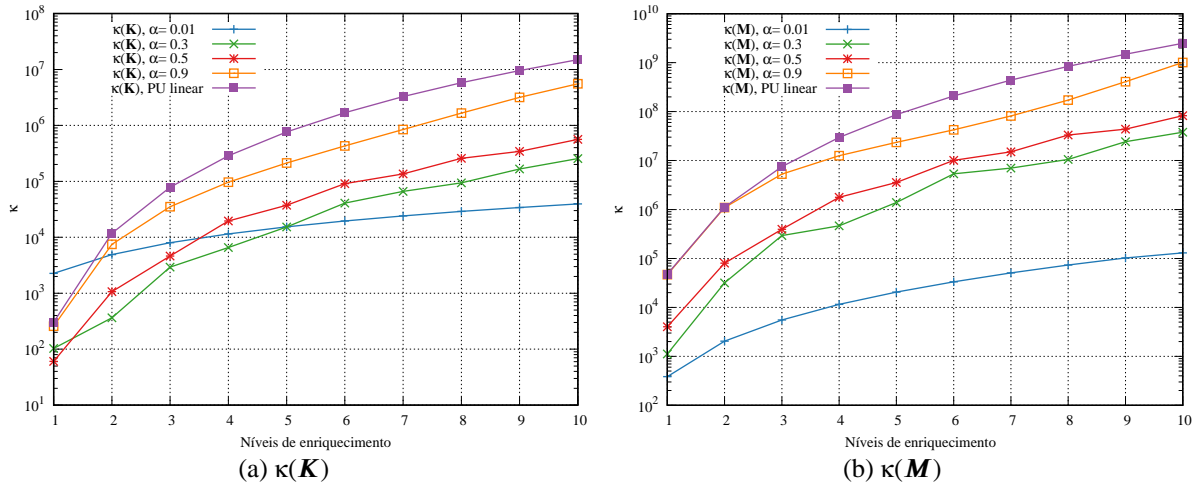


FIGURA 37 – Treliça plana: números de condição da matriz de (a) rigidez e (b) massa com o enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

O comportamento do condicionamento das matrizes de massa e rigidez para o caso do enriquecimento padrão foram similares aos observados ao problema da barra fixa, conforme pode ser observado na comparação entre os resultados apresentados nas figuras 13, 14 e 37.

No caso do enriquecimento estabilizado, o comportamento para a matriz de massa também foi idêntico ao problema da barra fixa (figura 15). Porém o mesmo não foi observado para a matriz de rigidez, que neste problema apresentou maior variação do número de condição em função do parâmetro  $\alpha$  e com menores ordens de grandeza para os números de condição obtidos com  $\alpha < 1$ .

### 7.2.3 Número de condição e a influência do parâmetro $\beta_1$

A figura 38 mostra os números de condição para diferentes valores de  $\beta_1$  em função do parâmetro  $\alpha$ . Nota-se que os valores de  $\kappa(\mathbf{K})$  neste problema foram reduzidos em relação do problema da barra fixa, em aproximadamente duas ordens de grandeza. Para valores de  $\beta_1 < 2\pi$ , nota-se uma alteração no comportamento dos números de condição em função de  $\alpha$ , para menores valores  $\alpha$  obtém-se menores números de condição com menores valores de  $\beta_1$ , porém esse comportamento se altera para maiores valores de  $\alpha$ , com maiores números de condição obtidos com menores valores de  $\beta_1$ . Para todos os valores de  $\alpha$ , o número de condição da matriz de rigidez da treliça plana foi menor que o correspondente à barra fixa.

Sobre os valores de  $\kappa(\mathbf{M})$ , observa-se que o comportamento do número de condição foi praticamente idêntico ao observado no problema da barra fixa, figura 17(b).

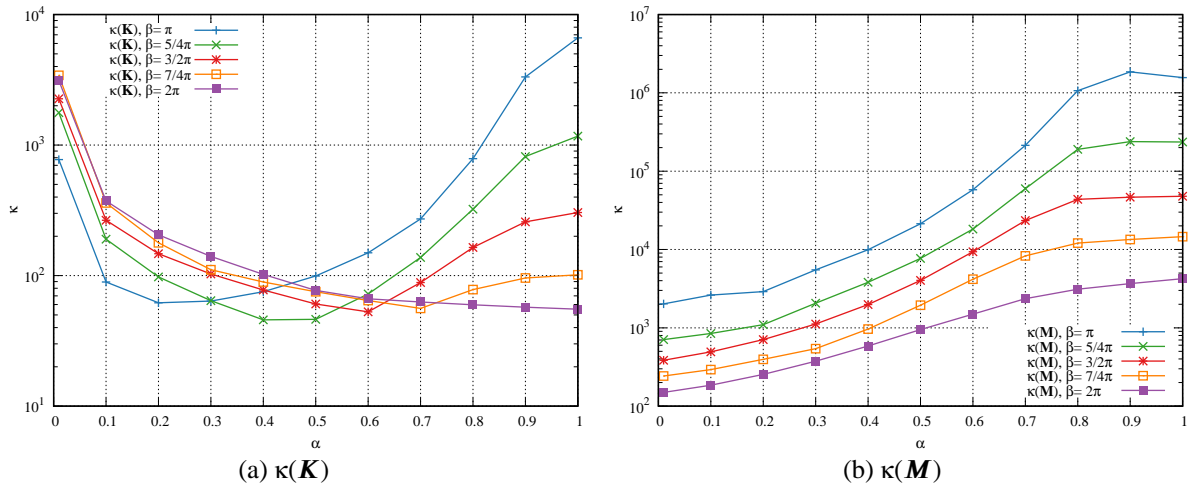


FIGURA 38 – Treliça plana: número de condição das matrizes (a) de rigidez e (b) massa, com  $n_l = 1, k = 1$  e diferentes valores de  $\beta_1$ .

### 7.2.4 Espectro de frequências

O problema desta análise não possui uma solução analítica conhecida. Para apresentação dos espectros de frequências é adotada uma solução aproximada de referência com grande refino  $p$ . São considerados os resultados obtidos com o Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH) polinomial de ordem 20. A tabela 9 apresenta alguns resultados obtidos na literatura para as seis primeiras frequências de vibração, a solução de referência do MEFH e os resultados obtidos com a PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$  com cinco níveis de enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

TABELA 9 – Frequências naturais aproximadas para a treliça plana com 7 barras.

	MEF	MC	MEFG Adaptativo	AIG	MEFH $p = 20$	MEFGE PU <i>flat top</i> $\alpha = 0.5$ $n_l = 5$
	Arndt (2009)	Zeng (1998)	Arndt (2009)	Rauen <i>et al.</i> (2017)	$p = 20$	$\alpha = 0.5$ $n_l = 5$
	$n_{gl} = 6$	$n_{gl} = 13$	$*n_{gl} = 34$	$n_{gl} = 41$	$n_{gl} = 139$	$n_{gl} = 146$
$n$	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)
1	1683.521413	1648.516148	1647.784428	1647.784440	1647.784428	1647.784428
2	1776.278483	1741.661466	1740.839797	1740.839809	1740.839797	1740.839797
3	3341.375203	3119.123132	3111.322715	3111.322739	3111.322715	3111.322716
4	5174.353866	4600.595156	4561.817307	4561.817389	4561.817307	4561.817311
5	5678.184561	4870.575795	4823.248678	4823.248800	4823.248678	4823.248683
6	8315.400602	7380.832845	7379.482322	7379.484052	7379.482322	7379.482333
⋮						
34					37135.01041	37135.01065

\* $n_{gl} = 1 \times 6 + 2 \times 34$

A figura 39 apresenta o espectro de frequências obtidos com a PU *flat-top* linear com um nível de enriquecimento. A PU *flat-top* causa uma pequena perda de precisão em comparação com a PU linear, principalmente para as frequências mais baixas, assim como observado para o problema da barra fixa. No final do espectro os resultados obtidos com  $0.1 \leq \alpha \leq 0.4$  também são um pouco melhores do que aqueles obtidos com a PU linear. Destaca-se a semelhança de amplitude dos erros relativos observados nos espectros dos problemas da barra fixa e treliça plana.

A fim de aumentar o número de frequências incluídas no espectro, a figura 40 apresenta os resultados considerando um refino de malha tipo  $h = 1/10$ , onde cada barra foi dividida em 10 elementos finitos, aumentando o número de graus de liberdade de 34 para 349. Como solução de referência também foi considerada uma malha refinada  $h = 1/25$  com MEFH  $p = 20$  ( $n_{gl} = 3499$ ). Os resultados mostram que os erros relativos apresentados nos espectros das figuras 39 e 40 apresentam a mesma ordem de grandeza.

A figura 41 mostra o espectro de frequências obtido com a PU *flat-top* com  $k = 1, 2, \dots, 5$  e  $\alpha = 0.5$ . Assim como observado para o problema da barra fixa, a utilização da PU *flat-top* apresentou resultados melhores para as frequências mais altas em comparação com a PU linear. Porém no início do espectro a PU linear apresentou resultados melhores.

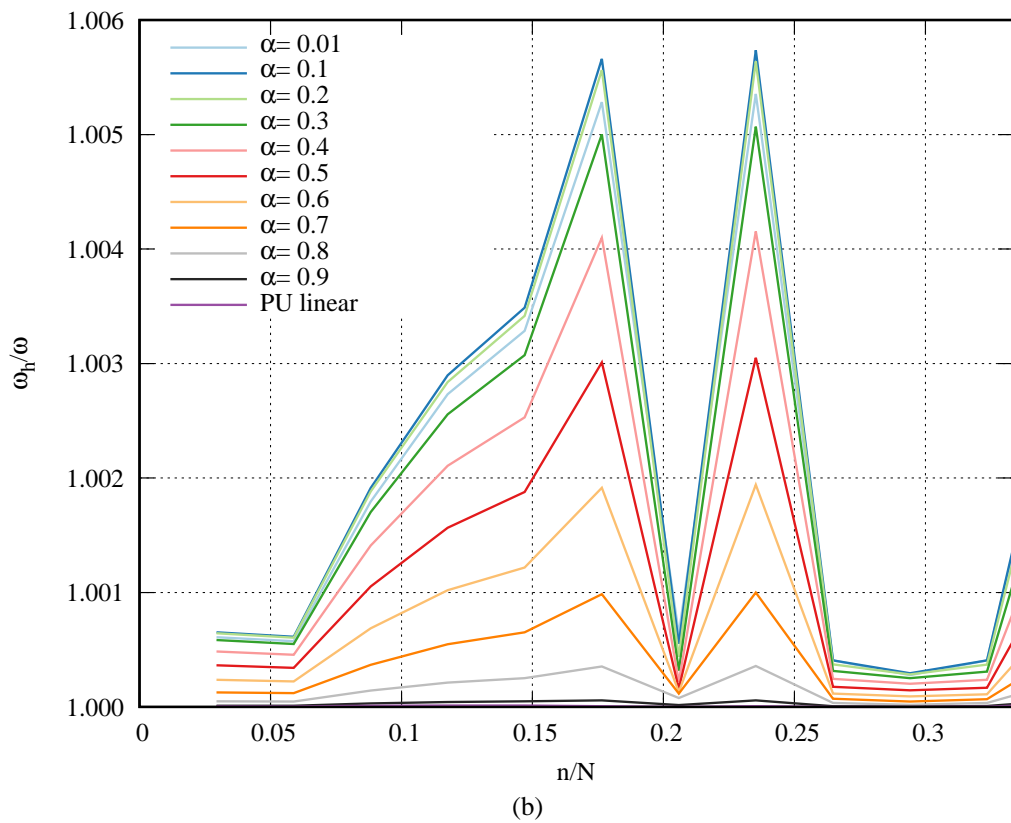
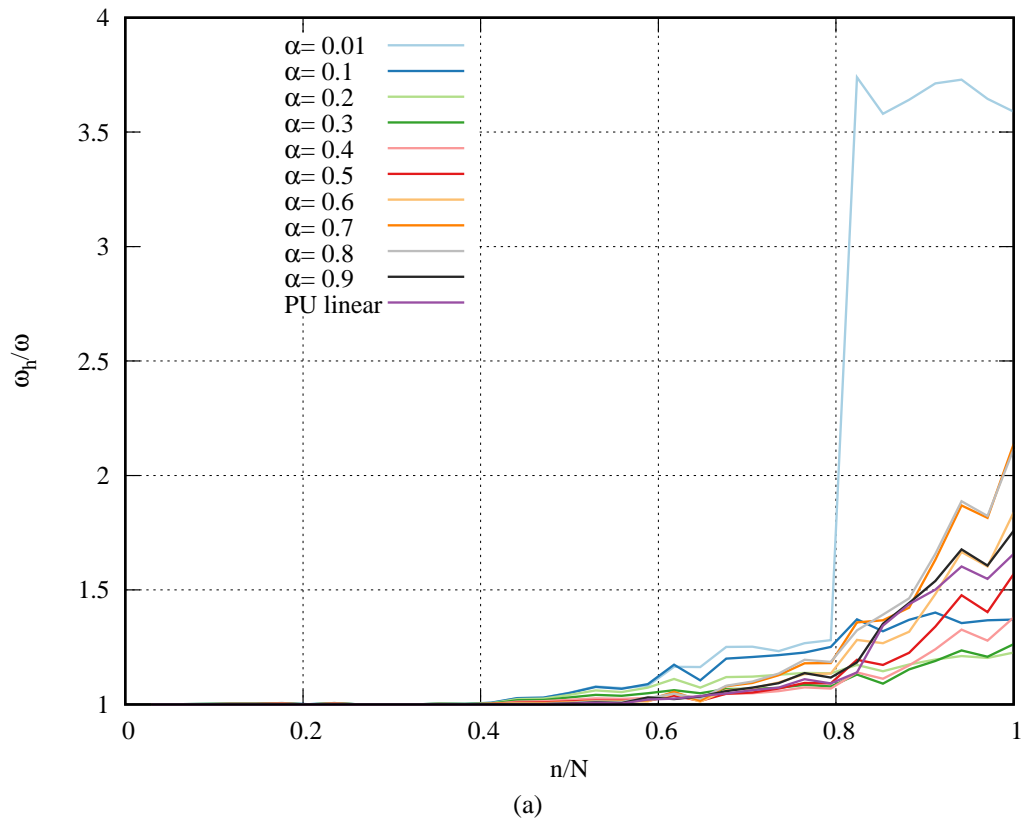


FIGURA 39 – Treliça plana: (a) espectro de frequências obtido com a PU *flat-top*,  $n_l = 1$  e  $k = 1$ , (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

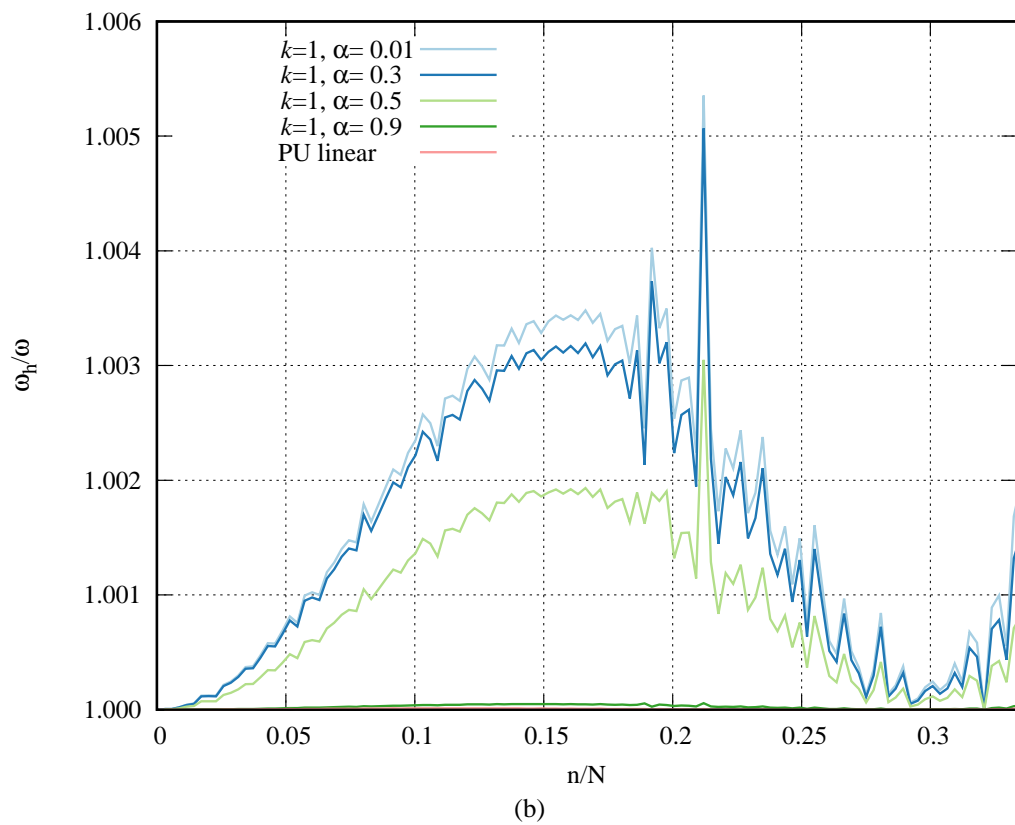
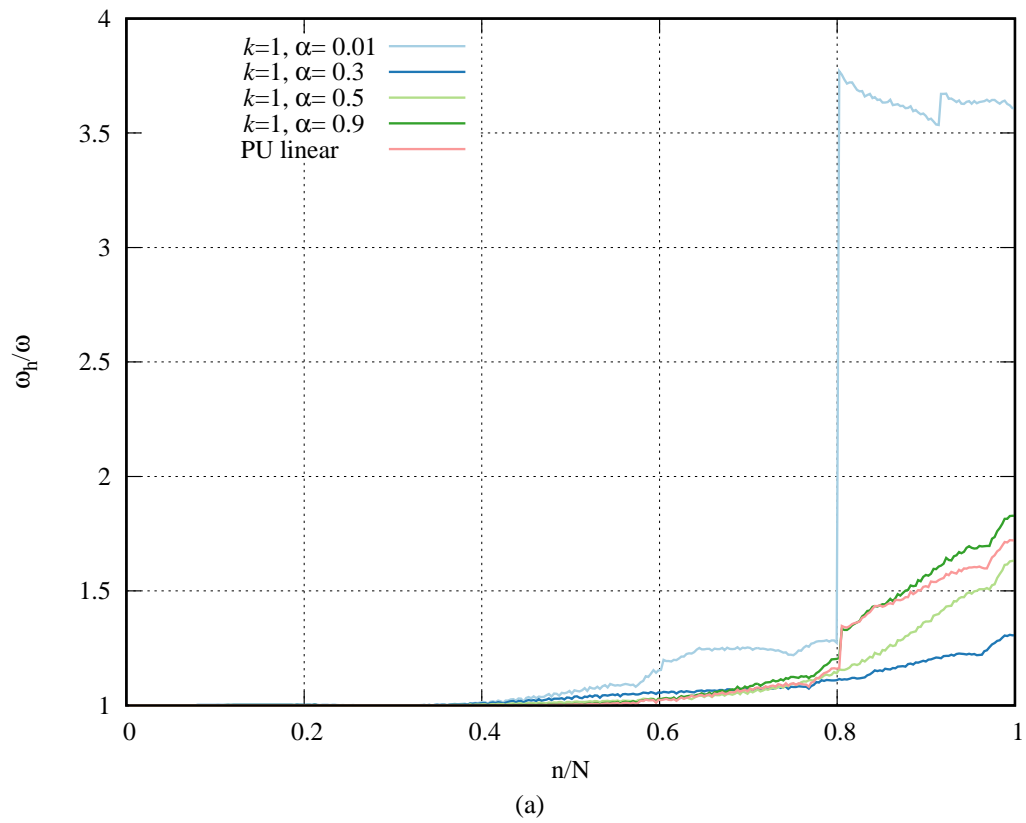


FIGURA 40 – Treliça plana: (a) espectro de frequências obtido com a PU *flat-top*,  $n_l = 1$  e  $k = 1$ , com refino  $h = 1/10$ , (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

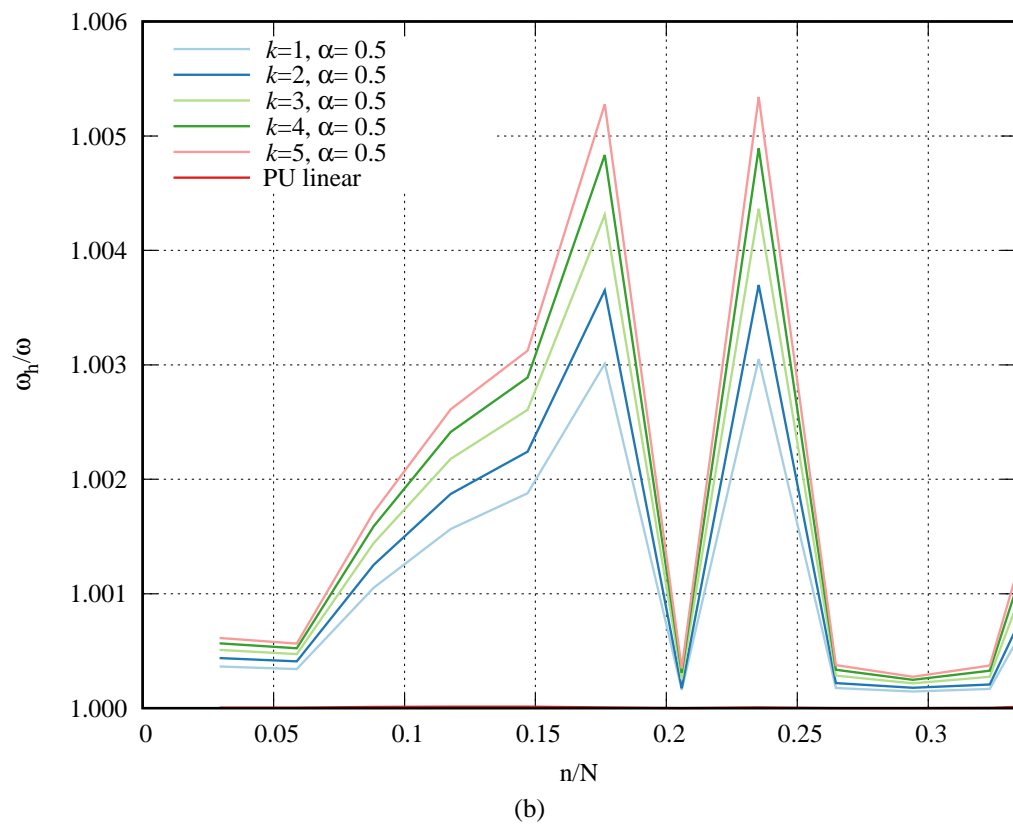
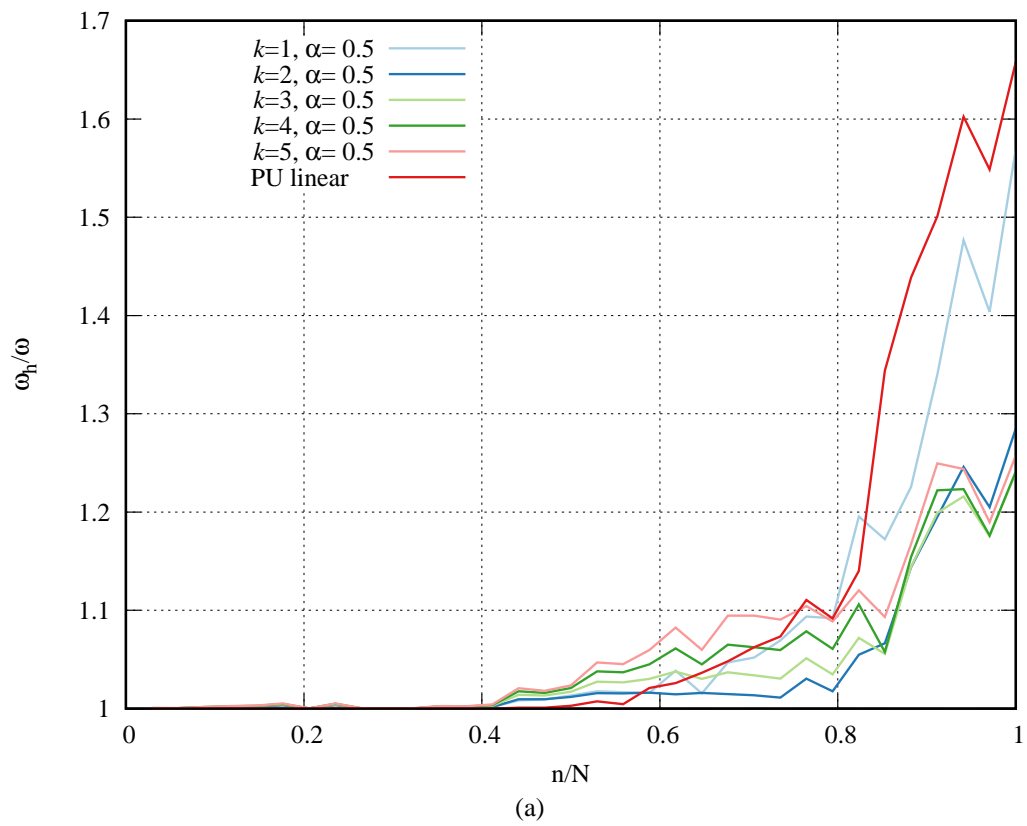


FIGURA 41 – Treliça plana: (a) espectro de frequências para  $\alpha = 0.5$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1, 2, \dots, 5$ , e PU linear, (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

### 7.2.5 Taxa de convergência

A tabela 10 e a figura 42 apresentam os erros percentuais obtidos para a primeira frequência aproximada pelo MEFGE com a PU *flat-top* linear para diferentes valores de  $\alpha$ , considerando o processo de enriquecimento com parâmetro  $\beta_j$  padrão. As frequências de referência foram determinadas com o MEFH polinomial de ordem 10.

TABELA 10 – Treliça plana: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

$n_{gl}$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
34	1	6.09448E-02	5.83602E-02	3.63023E-02	1.10360E-03	4.09178E-04
62	2	6.55480E-04	9.26973E-04	2.86470E-03	3.23279E-04	4.28464E-08
90	3	6.25782E-06	1.51674E-05	9.17279E-05	8.43436E-06	1.43218E-12
118	4	5.78298E-08	7.36090E-07	1.32339E-06	1.38576E-07	7.97140E-12
146	5	5.21915E-10	9.06776E-09	2.17560E-08	1.57047E-08	NC
174	6	3.41948E-12	1.44773E-10	8.59690E-10	NC	NC
202	7	1.17017E-11	2.37587E-12	6.81454E-11	NC	NC
230	8	NC	3.22519E-11	7.73825E-12	NC	NC

\*NC - não computado.

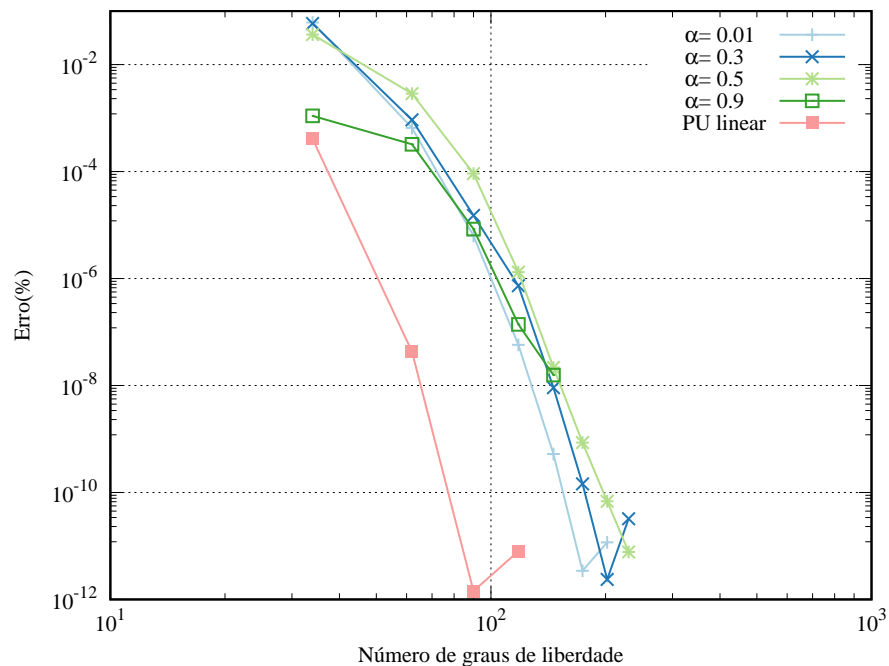


FIGURA 42 – Treliça plana: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

A redução na precisão das frequências aproximadas pela PU *flat-top* em relação a PU linear também é observada neste problema. O menor erro percentual foi encontrado com a PU

linear com 3 níveis de enriquecimento, porém outras respostas de mesma ordem também são obtidas com a PU *flat-top* com mais níveis de enriquecimento, e.g.  $\alpha$  igual a 0.01, 0.3 e 0.5.

A análise dos resultados destacados em vermelho na tabela 11, assim como nas tabelas 11 e 12, mostram soluções aproximadas que apresentaram aumento de erro percentual com o processo de enriquecimento, indicando uma possível influência da instabilidade numérica nestas soluções.

Na tabela 11 e figura 43 são apresentados os resultados para os erros percentuais da segunda frequência aproximada com o enriquecimento  $\beta_j$  padrão. Nota-se uma instabilidade na convergência da segunda frequência com a PU *flat-top*, para  $\alpha$  igual a 0.01 e 0.3, e PU linear, a partir de um certo número de nível de enriquecimento, conforme destacados nos valores em vermelho.

TABELA 11 – Treliça plana: erros percentuais da solução aproximada para a 2ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

$n_{gl}$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
34	1	5.73580E-02	5.48786E-02	3.41336E-02	1.04075E-03	3.85763E-04
62	2	6.17633E-04	8.72985E-04	2.69314E-03	3.04027E-04	4.04269E-08
90	3	5.90058E-06	1.43170E-05	8.62496E-05	7.93280E-06	4.52970E-12
118	4	5.45945E-08	6.92577E-07	1.24559E-06	1.30389E-07	2.49023E-11
146	5	5.01554E-10	8.58697E-09	2.05509E-08	1.47897E-08	NC
174	6	6.27942E-11	1.07425E-10	8.07798E-10	NC	NC
202	7	7.40074E-11	2.67674E-11	8.72857E-11	NC	NC
230	8	NC	5.42232E-11	2.66453E-13	NC	NC

\*NC - não computado.

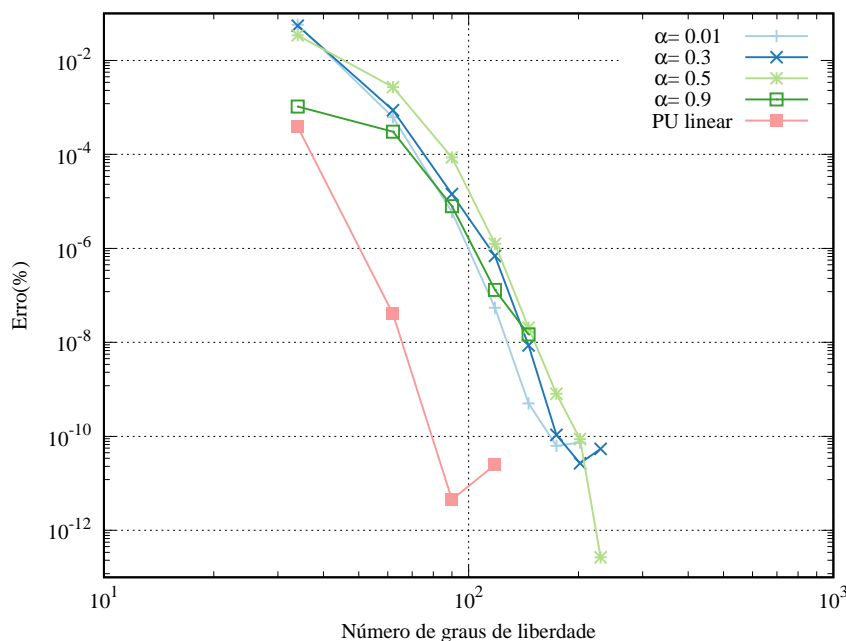


FIGURA 43 – Treliça plana: convergência para a 2ª frequência natural com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

A tabela 12 e figura 44 apresentam os resultados dos erros percentuais para a última frequência de vibração aproximada obtida com um nível de enriquecimento, que no caso da treliça de 7 barras é a 34ª frequência natural, adotada aqui para verificação da convergência em frequências mais elevadas. Observa-se que é possível obter soluções aproximadas precisas com a PU *flat-top* assim como para a PU linear, porém com a necessidade de aplicação de um número maior de níveis de enriquecimento.

TABELA 12 – Treliça plana: erros percentuais da solução aproximada para a 34ª frequência de vibração, com o  $\beta_j$  padrão.

$n_{gl}$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
34	1	2.58932E+02	2.63868E+01	5.69548E+01	7.58911E+01	6.58089E+01
62	2	2.59764E+00	1.94564E+00	1.52207E+00	2.55398E+00	3.44494E-01
90	3	7.07611E-03	1.19203E-02	3.24304E-03	5.97688E-04	1.23229E-06
118	4	8.35711E-06	3.87622E-05	3.90898E-05	1.11420E-06	7.32747E-13
146	5	3.16063E-08	1.65453E-07	6.54952E-07	3.14385E-08	NC
174	6	1.70152E-10	3.04110E-09	1.34777E-08	NC	NC
202	7	8.88178E-13	8.06243E-11	1.72994E-10	NC	NC
230	8	NC	-4.44089E-14	1.99840E-12	NC	NC

\*NC - não computado.

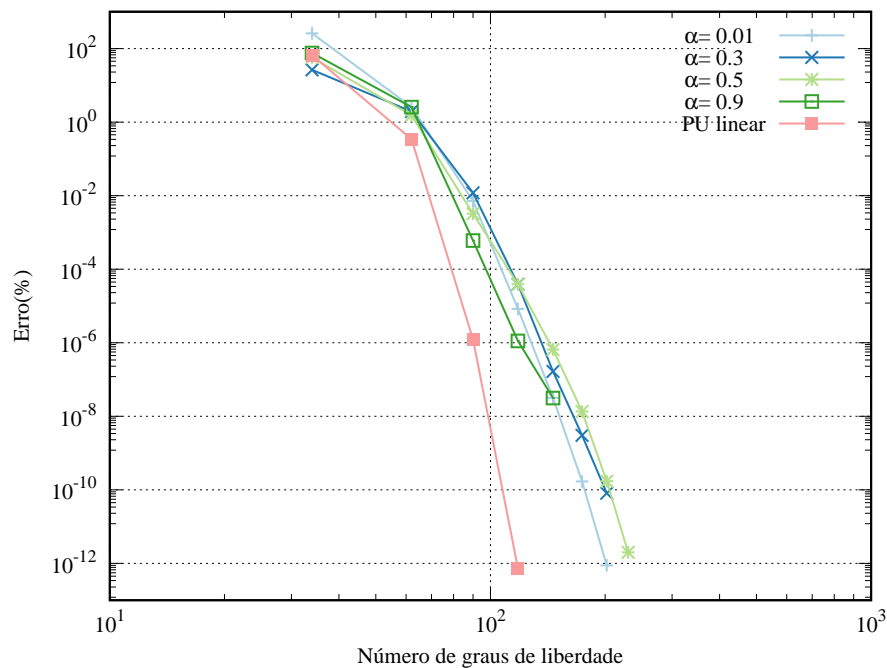


FIGURA 44 – Treliça plana: convergência para a 34ª frequência natural com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

Agora, as figuras 45 e 46 apresentam os erros percentuais para a primeira e 34ª frequências aproximadas, respectivamente, considerando a PU *flat-top* linear com o enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

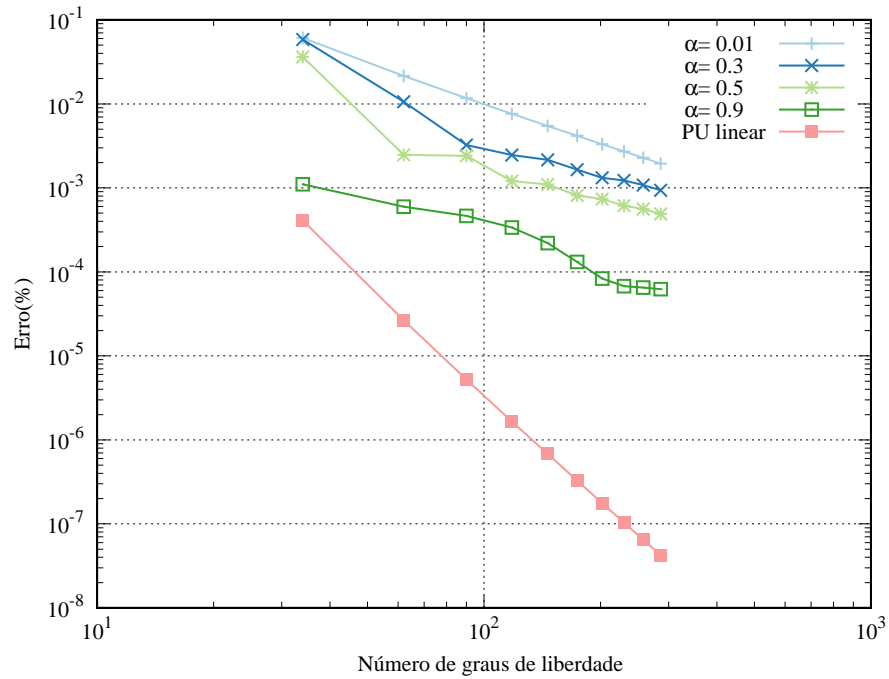


FIGURA 45 – Treliça plana: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

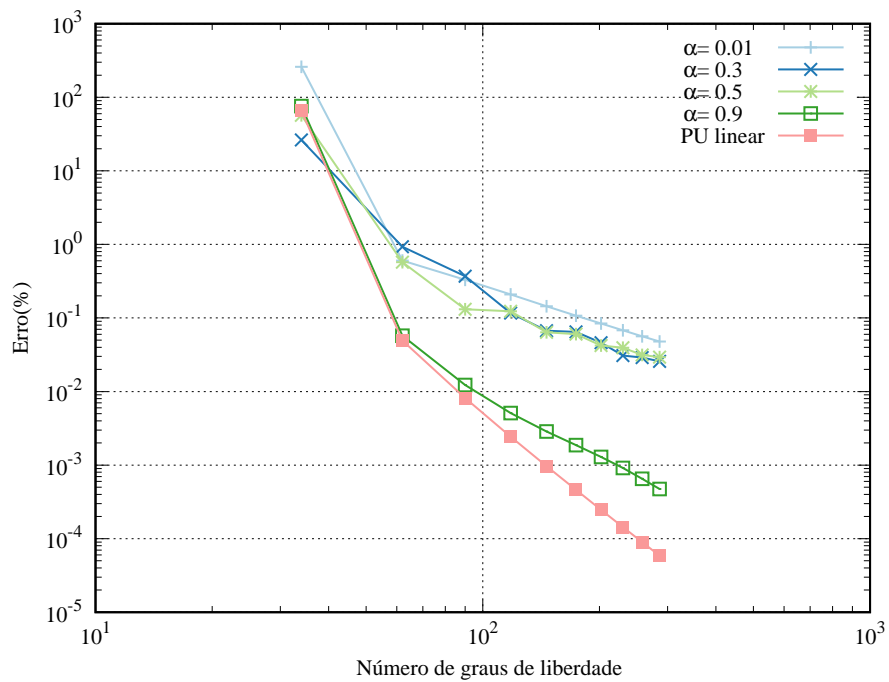
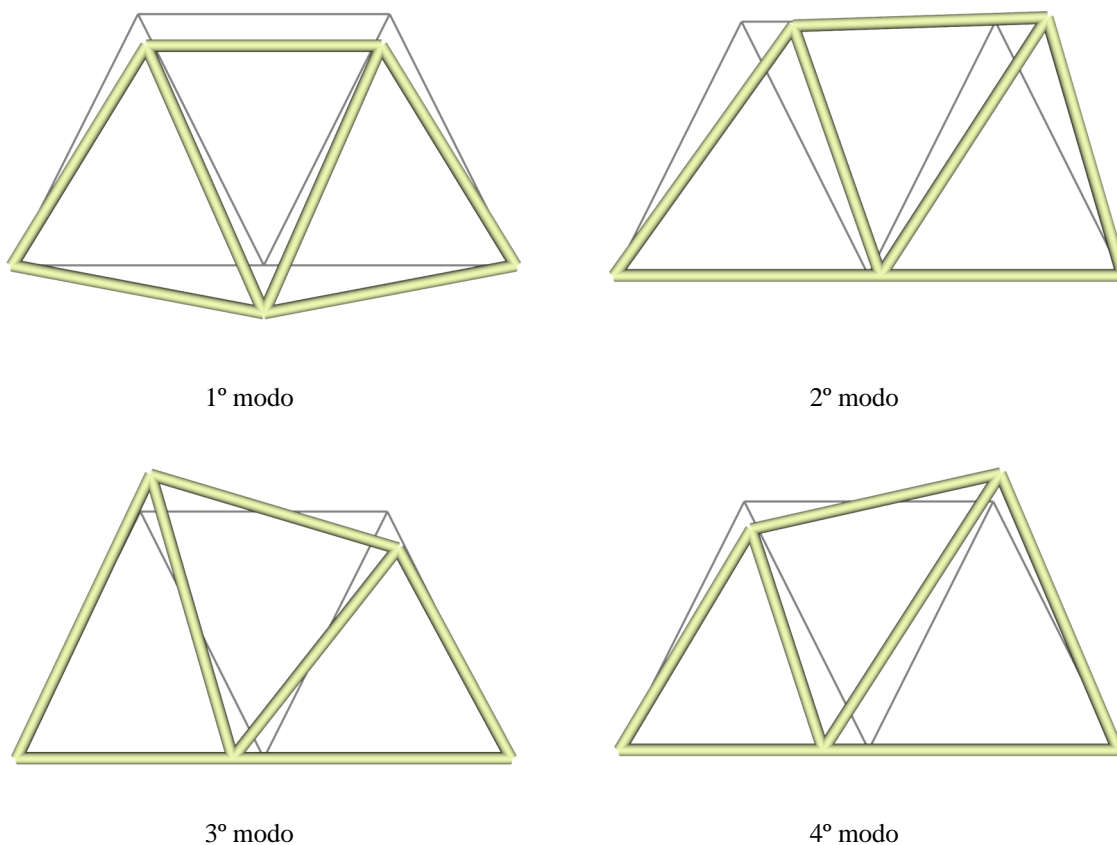


FIGURA 46 – Treliça plana: convergência para a 34ª frequência natural com enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

Assim como observado para o problema da barra, o enriquecimento com parâmetro  $\bar{\beta}_j$  estabilizado compromete a convergência da solução aproximada, principalmente para os casos com a PU *flat-top*, onde a ordem do erro percentual ficou acima de  $O(10^{-4})$ . A melhor aproximação para a primeira frequência é obtida com a PU linear após 10 níveis de enriquecimento, com um erro percentual na ordem de  $O(10^{-7})$ , porém não é melhor que a PU linear com 3 níveis de enriquecimento padrão, com erro percentual na ordem de  $O(10^{-12})$ . Em relação a 34ª frequência, a melhor aproximação foi obtida também com a PU linear após 10 níveis de enriquecimento, com erro percentual na ordem de  $O(10^{-4})$ , em contrapartida o menor erro percentual obtido com o enriquecimento padrão tem ordem  $O(10^{-13})$ .

### 7.2.6 Modos de vibração

A figura 47 apresenta os seis primeiros modos de vibração para a treliça plana obtidos pelo MEFGE PU *flat-top* linear  $\alpha = 0.5$  e um nível de enriquecimento.



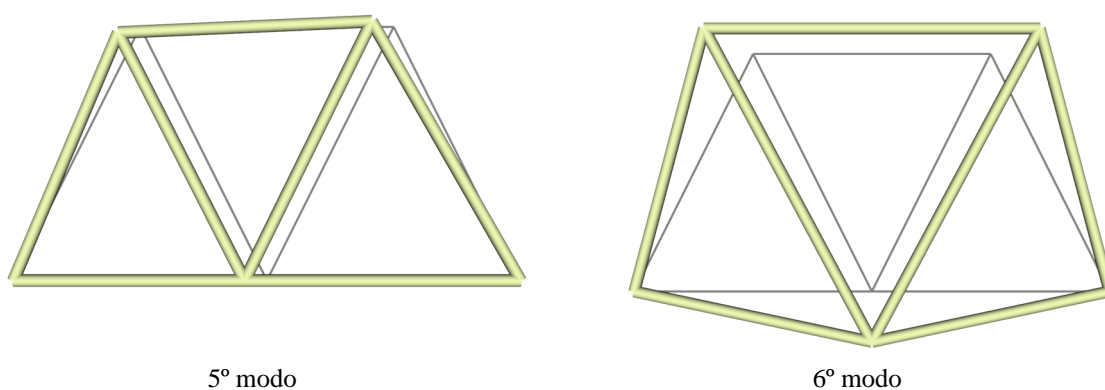


FIGURA 47 – Treliça plana: os seis primeiros modos de vibração obtidos com a PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1$ .

### 7.3 TRELIÇA ESPACIAL (3D)

O terceiro exemplo avaliado neste trabalho amplia ainda mais a análise para problemas de vibrações livres em estruturas reticuladas. Agora o problema adotado é uma torre de transmissão de energia, modelada como uma treliça espacial, onde cada nó possui três graus de liberdade. A geometria da torre é representada na figura 48 (dimensões em metros). A estrutura é composta por 294 barras (elementos) e 83 ligações rotuladas (nós). As propriedades do material são as mesmas adotadas no problema da treliça plana (por convenção), onde todas as barras da estrutura são uniformes e possuem as seguintes características: área da seção transversal  $A = 0.001 \text{ m}^2$ , massa específica  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$  e módulo de elasticidade  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$ .

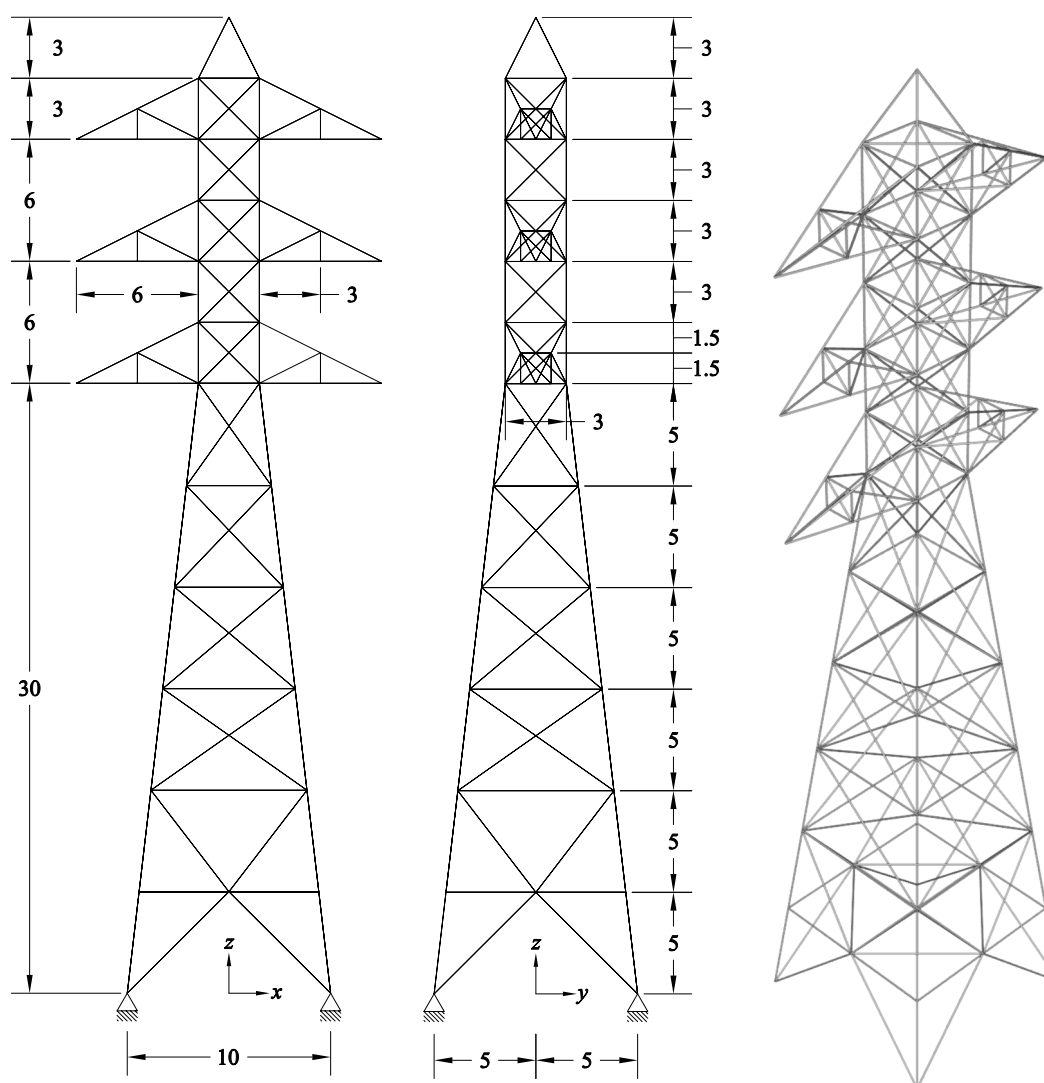


FIGURA 48 – Torre de transmissão, treliça espacial composta por 294 barras.

### 7.3.1 Número de condição em função do parâmetro $\alpha$

Os números de condição das matrizes de rigidez e massa foram avaliados para o problema das treliça espacial, inicialmente considerando apenas um nível enriquecimento, com diferentes graus de suavidade para a função PU *flat-top*. Os resultados são apresentados na figura 49.

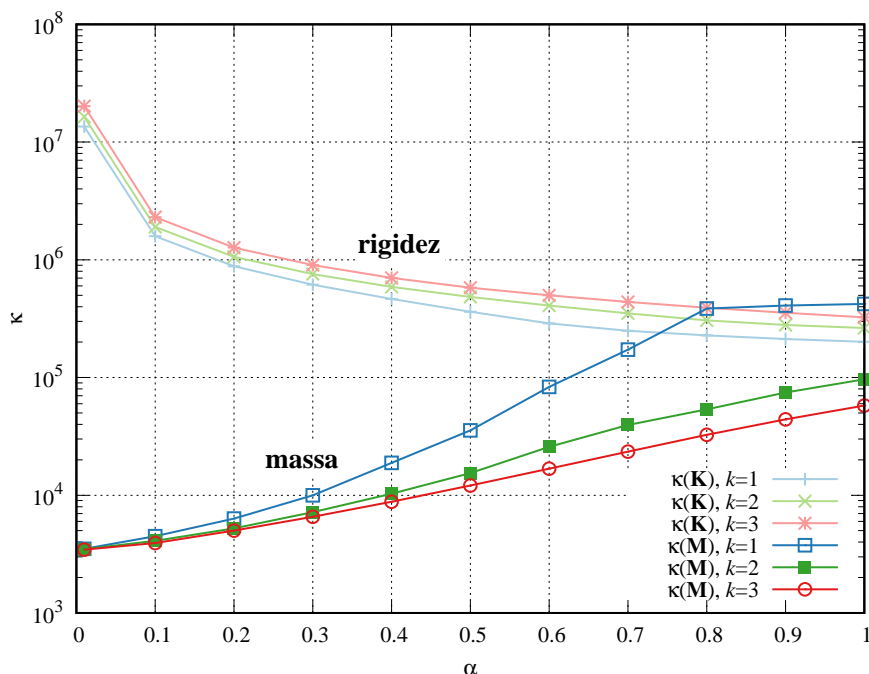


FIGURA 49 – Treliça espacial: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro  $\alpha$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1, 2, 3$  utilizando a técnica *flat-top*.

O comportamento dos números de condição para matrizes de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$  e massa  $\kappa(\mathbf{M})$  foi muito similar ao observado para o problema da barra (figura 10), em toda a faixa considerada para o parâmetro  $\alpha$ . Nota-se que houve um pequeno aumento comum sobre os números de condição, em aproximadamente uma ordem de grandeza para todos os valores de  $\alpha$ . Por exemplo, para  $\alpha = 1$ , a ordem de  $\kappa(\mathbf{K})$  e  $\kappa(\mathbf{M})$  foi de  $O(10^4)$  no problema da barra fixa e  $O(10^5)$  neste exemplo.

As figuras 50(a) e 50(b) mostram os números de condição para o enriquecimento com 5 níveis, com os parâmetros  $\beta_j$  padrão e  $\bar{\beta}_j$  estabilizado, respectivamente. Nota-se o mesmo comportamento observado para o condicionamento do problema enriquecido no caso da barra, também com um pequeno aumento generalizado no número de condição, em aproximadamente uma ordem de grandeza para os menores valores de  $\alpha$  e duas ordens para  $\alpha = 1$  e  $\beta_j$  padrão, com valor máximo de  $O(10^{22})$  (ver figuras 11 e 12).

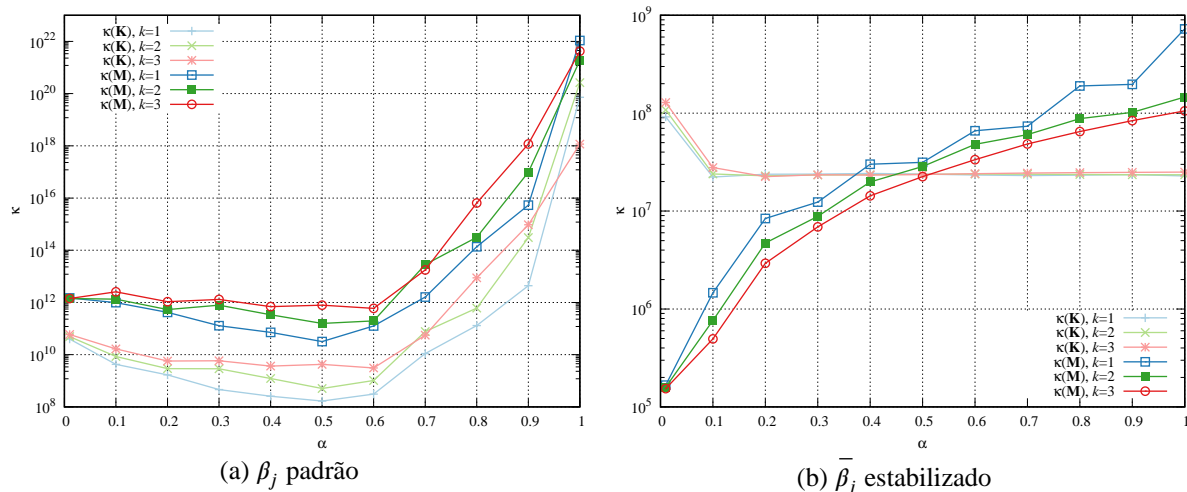


FIGURA 50 – Treliça espacial: números de condição das matrizes de rigidez e massa, com  $n_l = 5$  e  $k = 1, 2, 3$ , para o enriquecimento: (a)  $\beta_j$  padrão e (b)  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

### 7.3.2 Número de condição e a influência do enriquecimento

Os números de condição foram avaliados em função do número de níveis de enriquecimento quando utilizando o parâmetro  $\beta_j$  padrão, com resultados apresentados na figura 51, e quando utilizando o parâmetro  $\bar{\beta}_j$  estabilizado, com resultados apresentados na figura 52. Nestes exemplos são considerados até 10 níveis de enriquecimento.

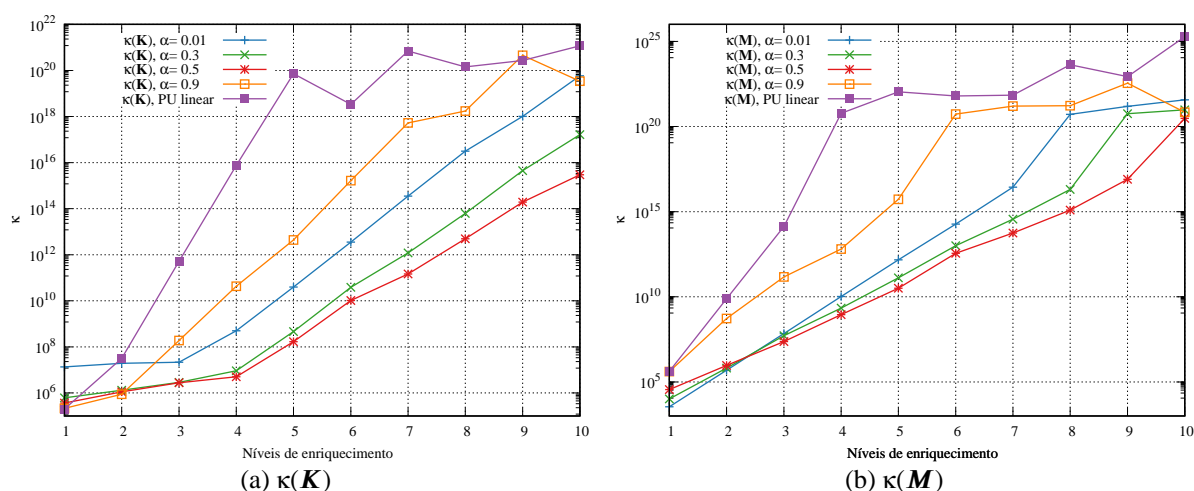


FIGURA 51 – Treliça espacial: números de condição das matrizes (a) de rigidez e (b) massa, com o enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

Para ambos os processos de enriquecimento, padrão e estabilizado, nota-se o mesmo comportamento observado no problema da barra (figuras 13 a 16). De modo geral, houve um

aumento aproximado de duas ordens de grandeza nos números de condição das matrizes de rigidez.

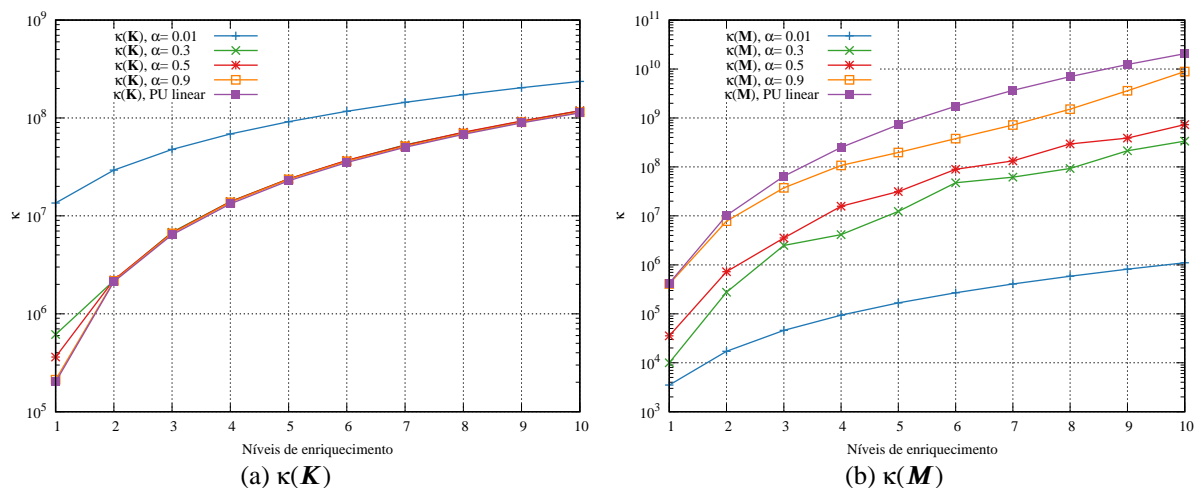


FIGURA 52 – Treliça espacial: números de condição das matrizes (a) de rigidez e (b) massa, com o enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

O comportamento de invariância do número de condição da matriz de rigidez em relação ao parâmetro  $\alpha$  com enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado, apresentado no problema da barra fixa (ver figura 12), é reproduzido no problema da treliça espacial (figura 50(b)), porém não no problema da treliça plana (figura 35(b)). Os valores de  $\kappa(\mathbf{K})$  e  $\kappa(\mathbf{M})$  foram em média uma ordem maior que o problema da barra fixa.

### 7.3.3 Número de condição e a influência do parâmetro $\beta_1$

As figuras 53(a) e 53(b) apresentam respectivamente os números de condição para as matrizes de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$  e massa  $\kappa(\mathbf{M})$ , considerando apenas um nível enriquecimento e PU *flat-top* linear, onde é possível avaliar o comportamento do parâmetro  $\alpha$  para diferentes valores de  $\beta_1$ .

Assim, como observado no comportamento dos números de condição em função da influência do parâmetro  $\alpha$  e para o processo de enriquecimento, a influência do parâmetro  $\beta_1$  sobre os números de condição foi similar ao observado para o problema da barra fixa. Porém, de modo geral, houve um aumento aproximado de uma ordem de grandeza nos números de condição das matrizes de rigidez e massa.

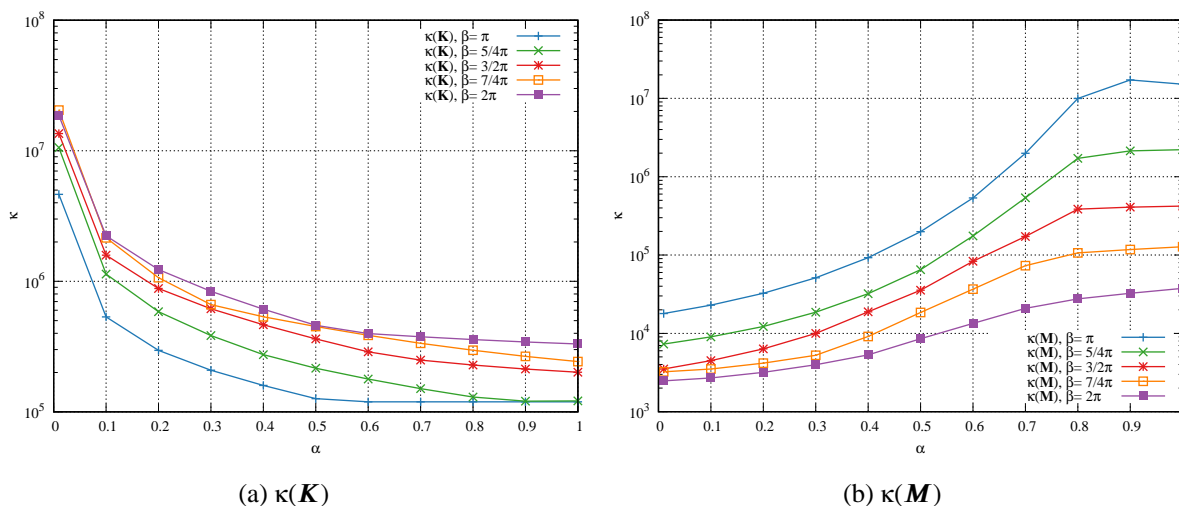


FIGURA 53 – Treliça espacial: números de condição das matrizes de (a) rigidez e (b) massa, com  $n_l = 1$ ,  $k = 1$  e diferentes valores de  $\beta_1$ .

### 7.3.4 Espectro de frequências

A treliça espacial apresentada na figura 48 é um problema mais complexo e que não possui uma solução analítica conhecida ou uma solução de referência na literatura atual. E, assim como para o problema da treliça plana, aqui é adotada uma solução aproximada de referência com grande refino  $p$ , neste caso, a solução aproximada obtida com o MEFH polinomial de ordem 10. A tabela 13 apresenta os resultados para as dez primeiras frequências de vibração e para a 237ª frequência de vibração, obtidos pelo MEFH e pelo MEFH/E com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

A figura 54 apresenta o espectro de frequências para o caso com a PU *flat-top* linear com um nível de enriquecimento. No início do espectro, observa-se que os erros relativos obtidos com a PU *flat-top* foram maiores que a PU linear, indicando a perda de precisão em comparação com a PU linear. No final do espectro os resultados obtidos com  $\alpha$  igual a 0.3 e 0.5 são um pouco melhores do que os obtidos com PU linear.

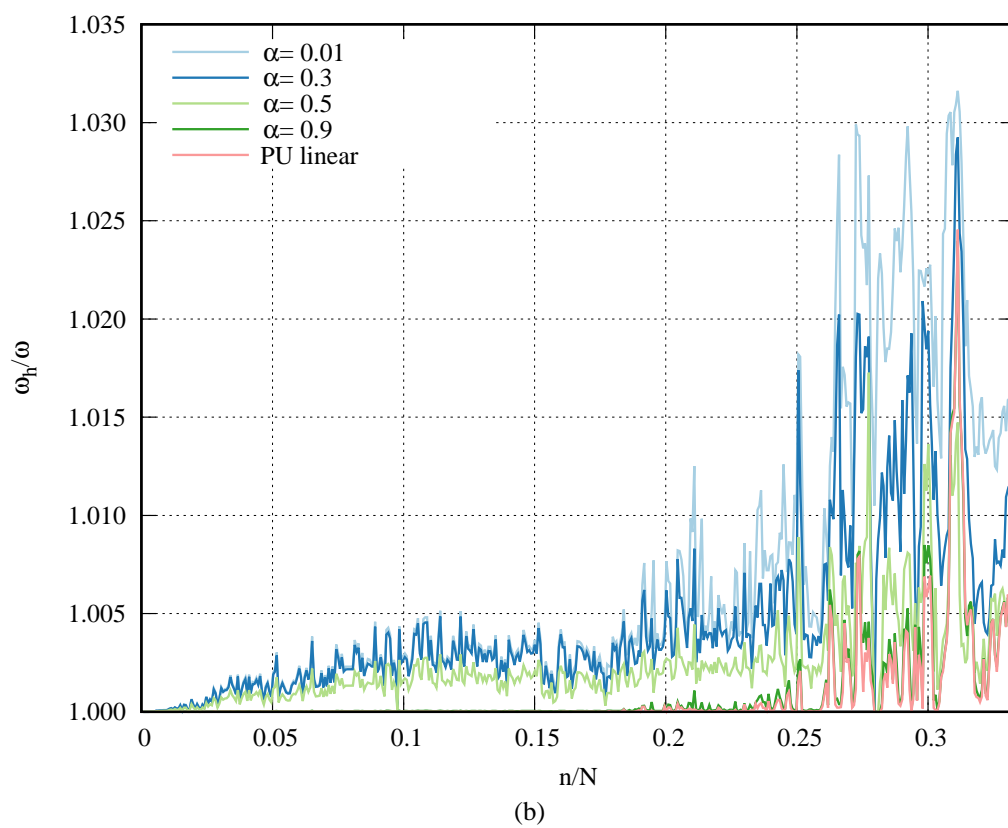
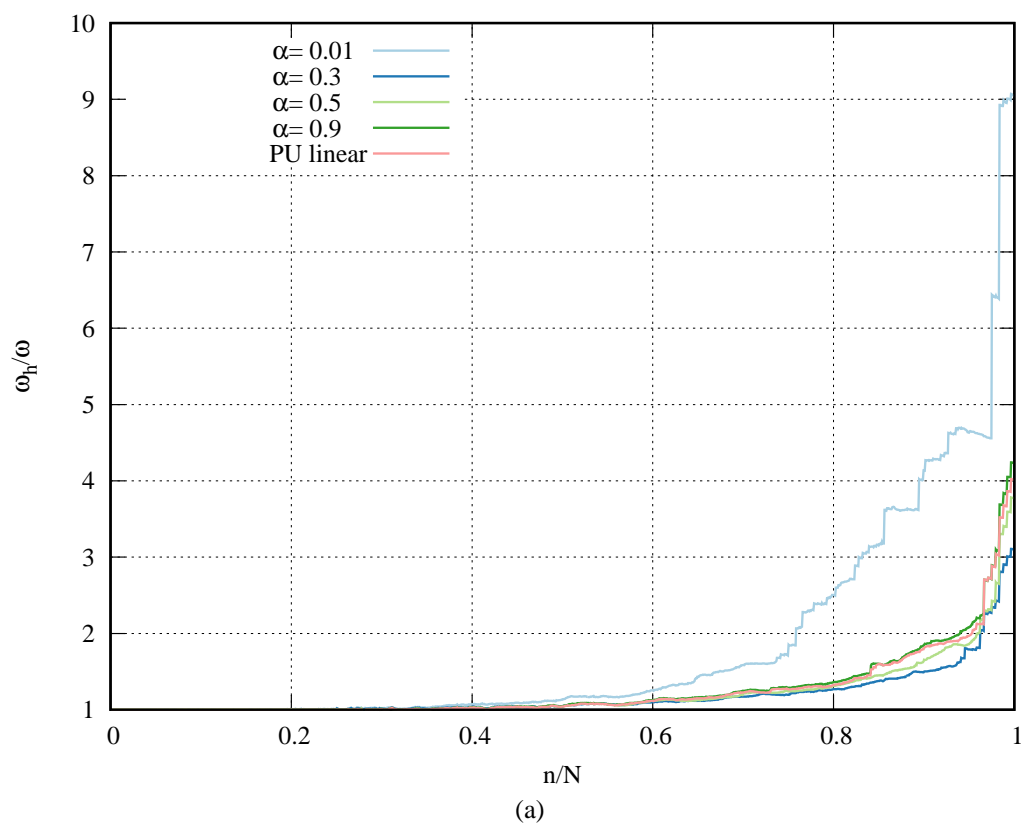


FIGURA 54 – Treliza espacial: (a) espectro de frequências obtido com a PU *flat-top*,  $n_l = 1$  e  $k = 1$ , (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

Na sequência, a figura 55 apresenta o espectro de frequências para o segundo nível de enriquecimento  $\beta_j$  padrão. Observa-se o aumento de precisão obtidos para as primeiras frequências, com erros relativos de ordem  $O(10^{-5})$  para os resultados obtidos com a PU *flat-top*, no entanto, maiores que os erros obtidos com a PU linear, onde os erros são da ordem de  $O(10^{-9})$ . A figura 55(c) apresenta o espectro parcial inicial para as 258 primeiras frequências.

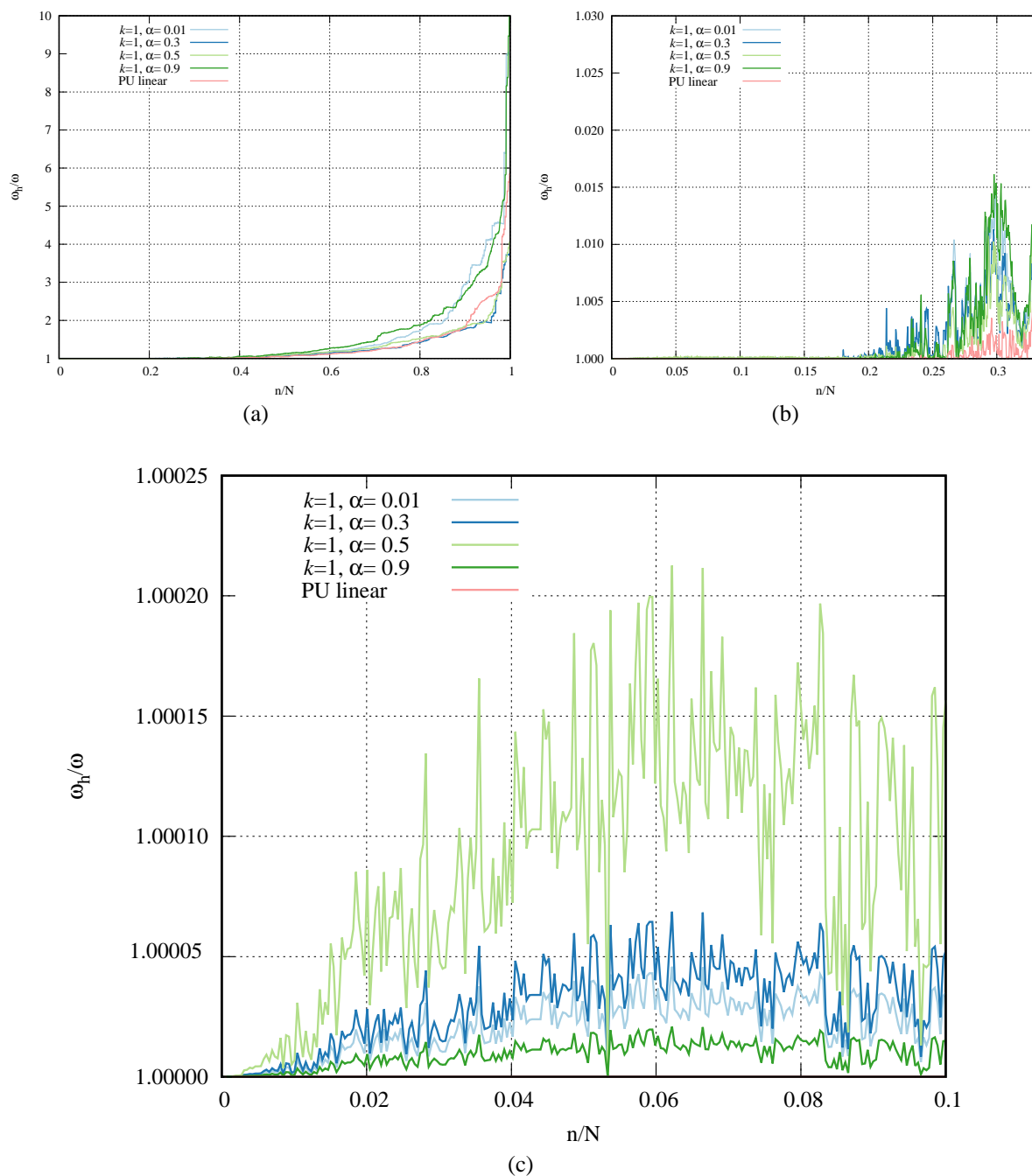


FIGURA 55 – Treliça espacial: (a) espectro de frequências obtido com a PU *flat-top*,  $n_l = 2$  e  $k = 1$ , (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ , (c) ampliação da região entre 0 e  $1/10$ .

A figura 56 mostra o espectro de frequência obtidos com a PU *flat-top* com  $k = 1, 2, \dots, 5$  e  $\alpha = 0.5$ . Os resultados obtidos com  $k > 1$  apresentam resultados um pouco melhores para as frequências mais altas.

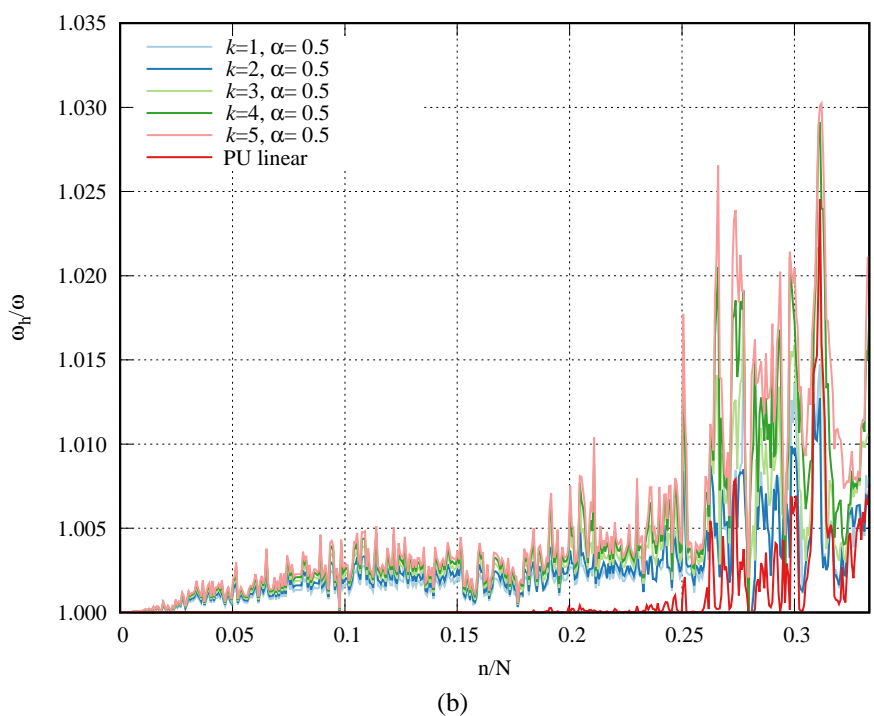
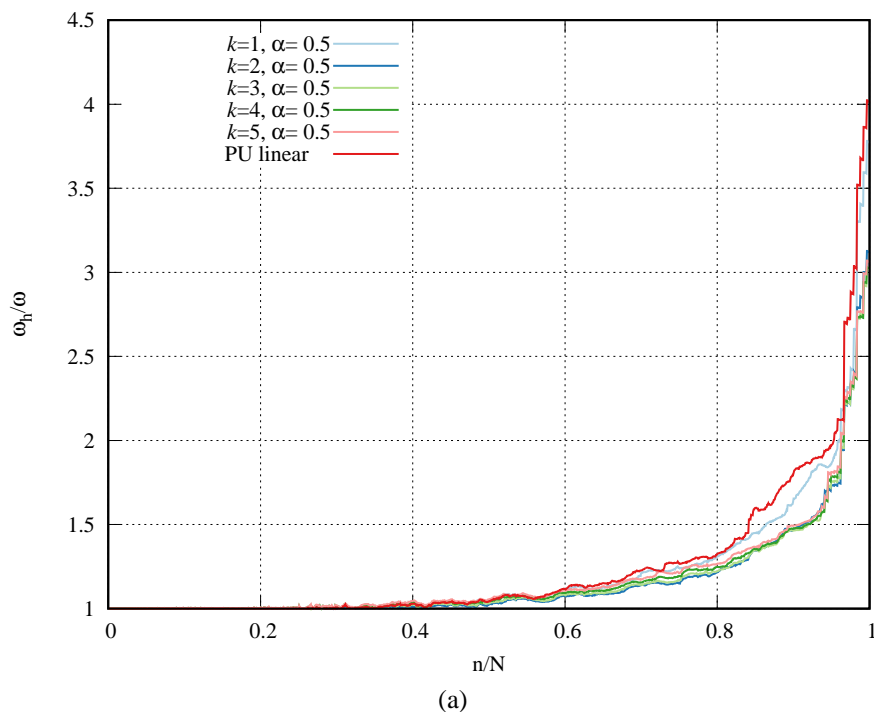


FIGURA 56 – Treliça espacial: (a) espectro de frequência para  $\alpha = 0.5$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1, 2, \dots, 5$ , e PU linear, (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

TABELA 13 – Frequências naturais aproximadas para a treliça espacial com 294 barras.

	MEFH $p = 20$ $n_{gl} = 5823$	MEFH $p = 10$ $n_{gl} = 2883$	MEFG PU linear $n_l = 1$ $n_{gl} = 1413$	MEFGE PU linear $n_l = 1$ $n_{gl} = 1413$	MEFGE PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$ e $n_l = 3$ $n_{gl} = 3765$
$n$	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)
1	17.05163628	17.05163629	17.0516363	17.0516363	17.0516363
2	23.62477863	23.62477862	23.6247787	23.6247787	23.6247786
3	59.98378307	59.98378307	59.9837853	59.9837842	59.9837833
4	76.79514185	76.79514185	76.7951476	76.7951447	76.7951425
5	98.11351390	98.11351390	98.1135298	98.1135219	98.1135156
6	101.40282225	101.40282225	101.4028380	101.4028302	101.4028240
7	121.34720543	121.34720543	121.3472295	121.3472176	121.3472080
8	175.28330560	175.28330560	175.2834460	175.2833765	175.2833208
9	182.81109739	182.81109739	182.8112550	182.8111769	182.8111145
10	205.10550467	205.10550467	205.1057342	205.1056204	205.1055296
⋮					
237	3506.16375800	3506.16375800	3506.2558931	3506.1987674	3506.1798253

### 7.3.5 Taxa de convergência

A tabela 14 e a figura 57 apresentam os erros percentuais obtidos para a primeira frequência aproximada pelo MEFGE com a PU *flat-top* linear para diferentes valores de  $\alpha$ , considerando o processo de enriquecimento com até 7 níveis com parâmetro  $\beta_j$  padrão. As frequências de referência foram determinadas com o MEFH polinomial de ordem 20.

TABELA 14 – Treliça espacial: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

$n_{gl}$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
1413	1	1.76149E-05	1.69190E-05	1.05269E-05	2.54233E-07	4.54110E-08
2589	2	1.12116E-07	1.85574E-07	7.66872E-07	1.38473E-08	7.78682E-08
3765	3	7.13652E-08	7.37393E-08	3.21671E-08	5.59407E-08	NC
4941	4	7.13189E-08	8.02714E-08	8.13618E-08	7.46109E-08	NC
6117	5	3.35088E-08	7.65830E-08	9.11515E-08	NC	NC
7293	6	NC	5.33098E-08	5.56436E-08	NC	NC
8469	7	NC	NC	1.03772E-07	NC	NC

\*NC - não computado.

Destaca-se que os erros percentuais obtidos com apenas um nível de enriquecimento foram pequenos para todos os valores de  $\alpha$ , com erros na ordem de  $O(10^{-5})$ , e a melhor solução foi obtida com  $\alpha = 0.9$  com dois níveis de enriquecimento, melhor que o resultado obtido com a PU linear.

Os valores destacados em vermelho mostram soluções aproximadas que obtiveram aumento de erro percentual com o processo de enriquecimento, indicando uma possível influência da instabilidade numérica nestas soluções, esse comportamento pode ser observado na figura 57.

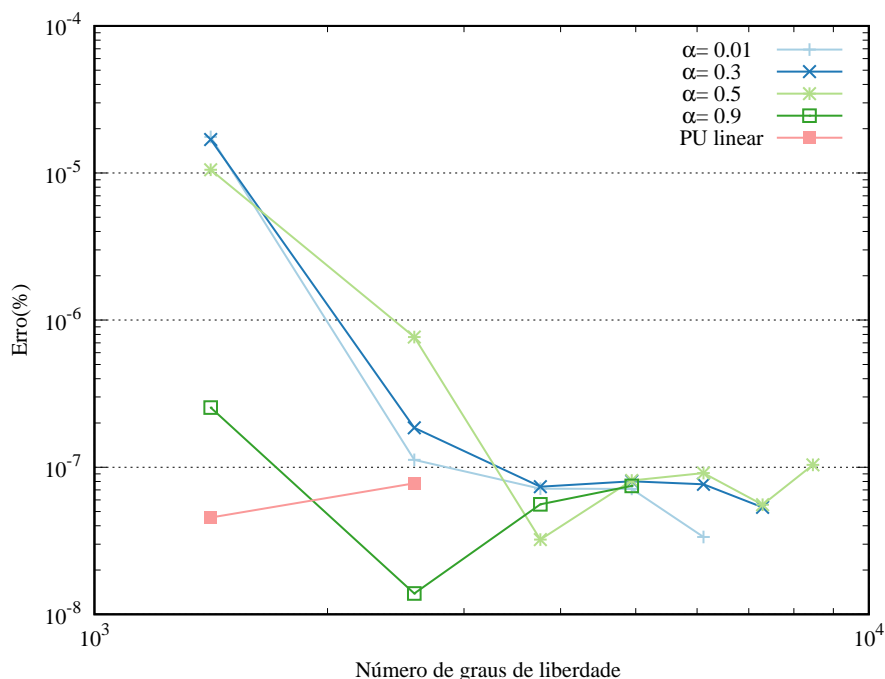


FIGURA 57 – Treliça espacial: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

Na tabela 15 e na figura 58 são apresentadas os erros percentuais obtidos para a 237ª frequência aproximada, que é a última frequência obtida com os graus de liberdade naturais da treliça espacial (referente ao total obtido com os três graus de liberdade por nó após a imposição das condições de contorno). A solução com menor erro percentual é obtida com PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$ , com ordem de  $O(10^{-10})$ .

TABELA 15 – Treliça espacial: erros percentuais da solução aproximada para a 237ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

$n_{gl}$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
1413	1	3.48514E-01	3.23543E-01	1.96201E-01	4.81389E-03	9.98510E-04
2589	2	3.38391E-03	4.90639E-03	1.45043E-02	1.49869E-03	7.06810E-08
3765	3	3.08616E-05	7.87997E-05	4.58257E-04	4.13470E-05	NC
4941	4	2.77448E-07	3.48133E-06	6.68875E-06	6.70386E-07	NC
6117	5	2.46598E-09	4.39539E-08	1.18552E-07	NC	NC
7293	6	NC	7.28750E-10	4.67692E-09	NC	NC
8469	7	NC	NC	2.76445E-10	NC	NC

\*NC - não computado.

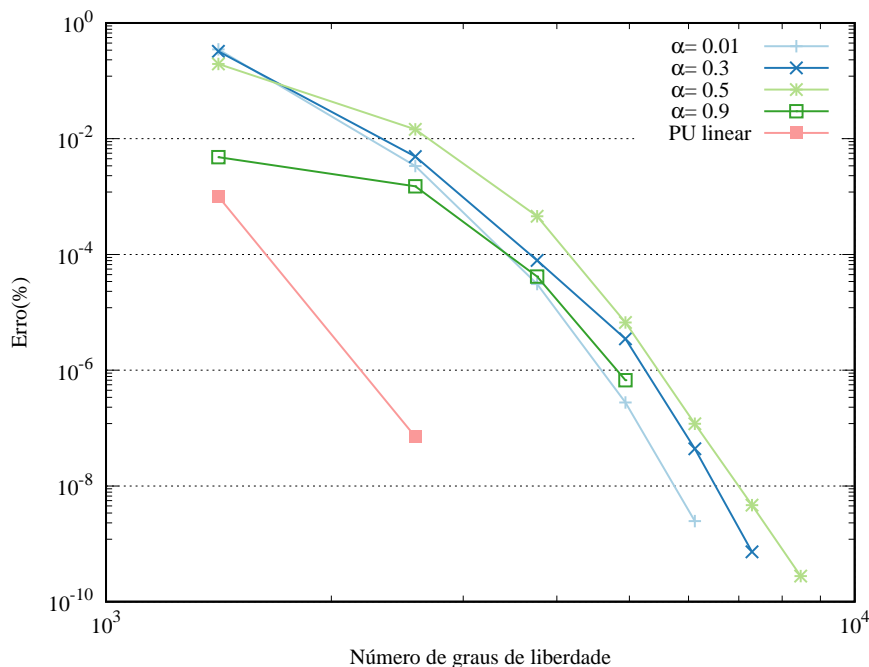


FIGURA 58 – Trelíça espacial: convergência para a 237ª frequência natural com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

Os erros percentuais das soluções aproximadas para a 1ª e 237ª frequências naturais com o enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado são apresentados nas figuras 59 e 60, respectivamente. Nota-se que o enriquecimento estabilizado compromete a taxa de convergência das soluções PU *flat-top* e PU linear, assim como observado para os problemas anteriores. Para os casos de  $\alpha$  igual a 0.9 e 1 observa-se que as soluções obtidas com processo de enriquecimento não convergem para menores erros percentuais para a 1ª frequência natural.

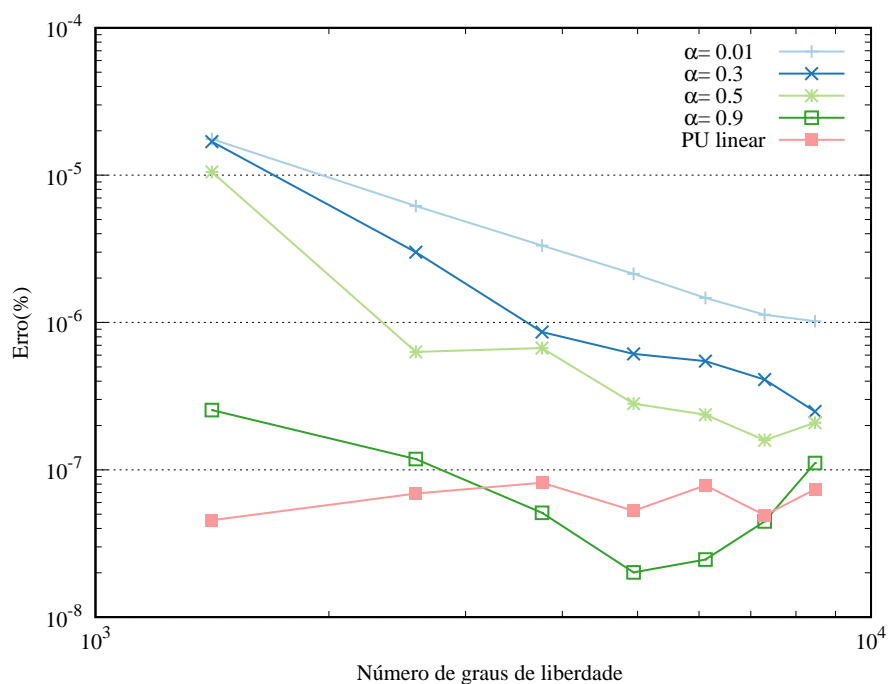


FIGURA 59 – Treliça espacial: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

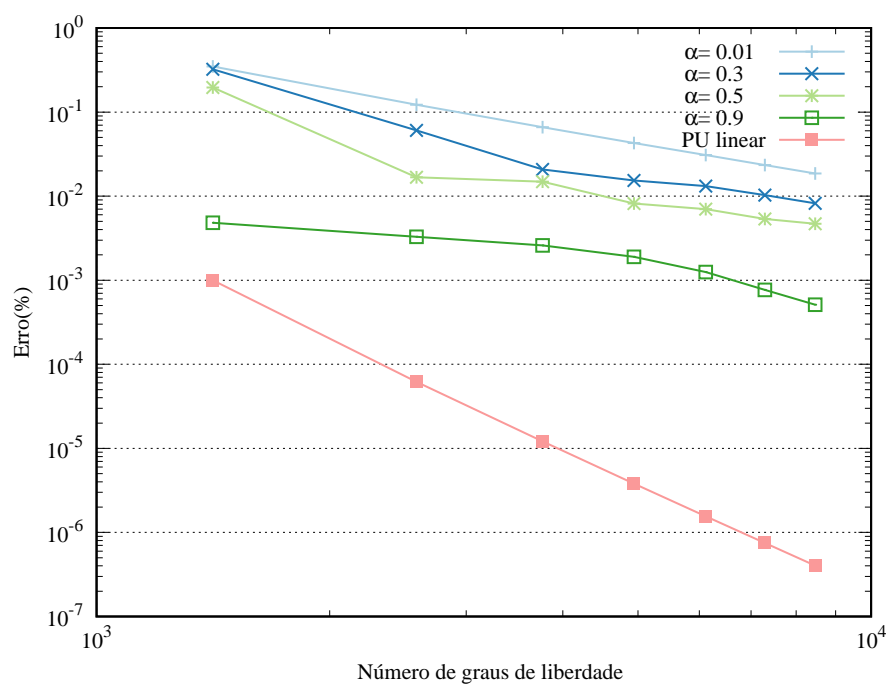
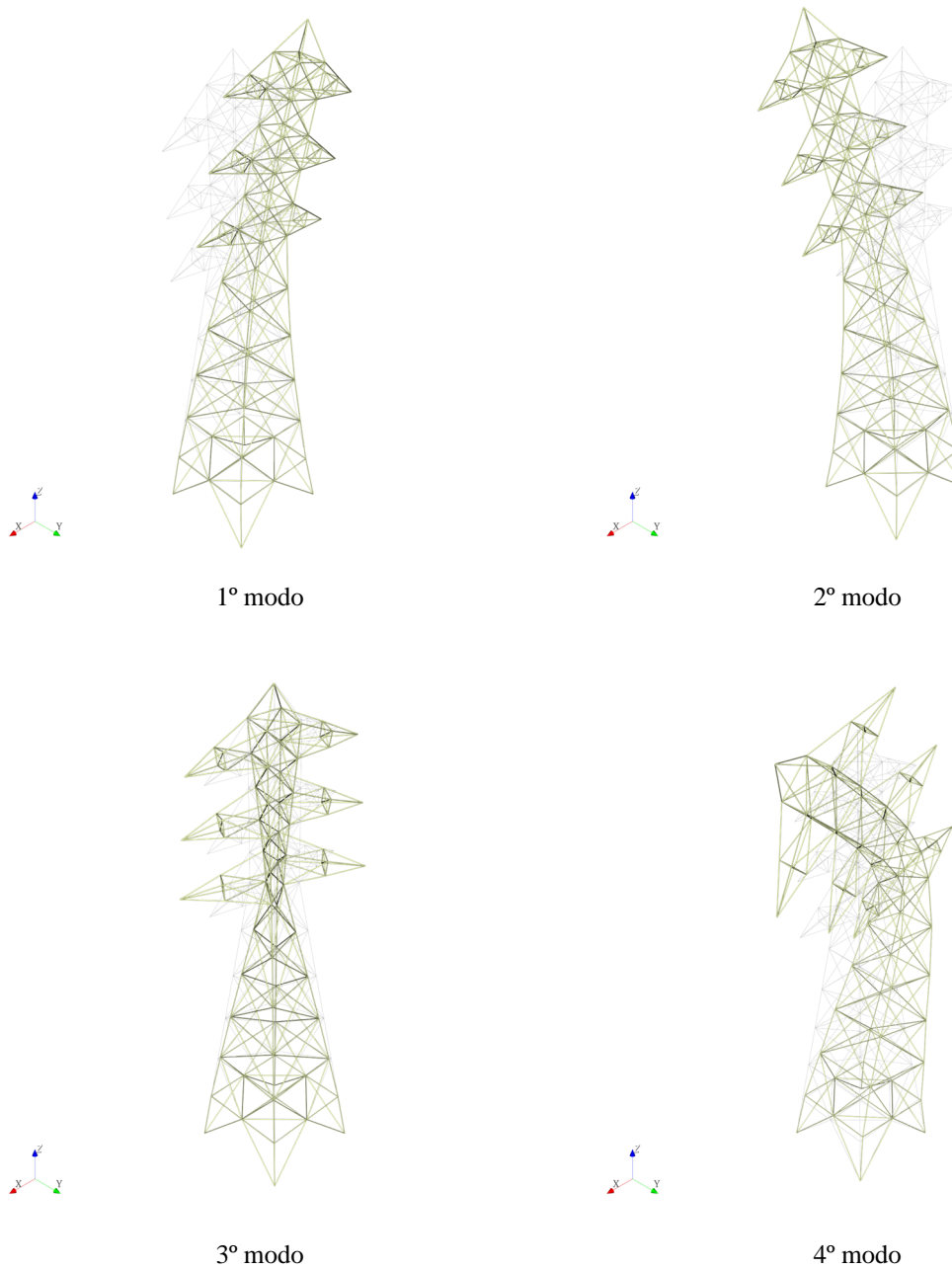


FIGURA 60 – Treliça espacial: convergência para a 237ª frequência natural, com enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

### 7.3.6 Modos de vibração

Como ilustração, a figura 61 apresenta os seis primeiros modos de vibração para a treliça espacial obtidos pelo MEFGE PU *flat-top* com  $\alpha = 0.5$ ,  $k = 1$  e um nível de enriquecimento.



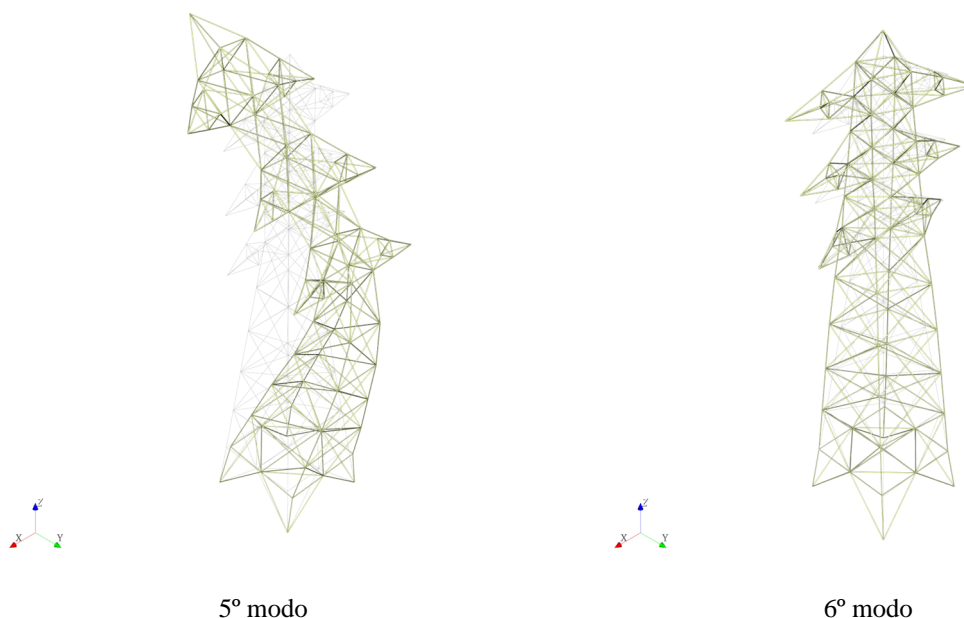


FIGURA 61 – Treliça espacial: os seis primeiros modos de vibração obtidos com a PU *flat-top*,  $\alpha = 0.5$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1$ .

#### 7.4 MEMBRANA ENGASTADA (2D)

Encaminhado a análise para os problemas bidimensionais, o quarto exemplo é sobre vibrações livres em uma membrana quadrada totalmente fixa, com lados de comprimentos  $L_x = L_y$ , como mostrado na figura 62(a). Este problema é modelado matematicamente pela equação da onda bidimensional, com um grau de liberdade por nó (deslocamento transversal). A solução analítica para as frequências naturais pode ser determinada por separação de variáveis conforme apresentado por Kreyszig (2010) e é dada por:

$$\omega_{mn} = \pi c \sqrt{\frac{m^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}} \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (44)$$

onde  $c$  é a velocidade de propagação da onda,  $c = \sqrt{E/\rho}$ . Sem perda de generalidade, todos os dados são considerados unitários, ou seja,  $L_x = L_y = 1$  e  $c = 1$ . Portanto, a solução analítica pode ser reescrita como:

$$\omega_{mn} = \pi \sqrt{m^2 + n^2} \quad m, n = 1, 2, 3, \dots \quad (45)$$

A membrana foi discretizada por uma malha uniforme com quatro elementos finitos quadrilaterais lineares, conforme mostrado na figura 62. O ponto  $A$  está posicionado no centro

da membrana. O problema é resolvido por meio de análise modal, com a aplicação de MEFGE PU *flat-top* e PU linear, com o enriquecimento trigonométrico. Os resultados são apresentados a seguir.

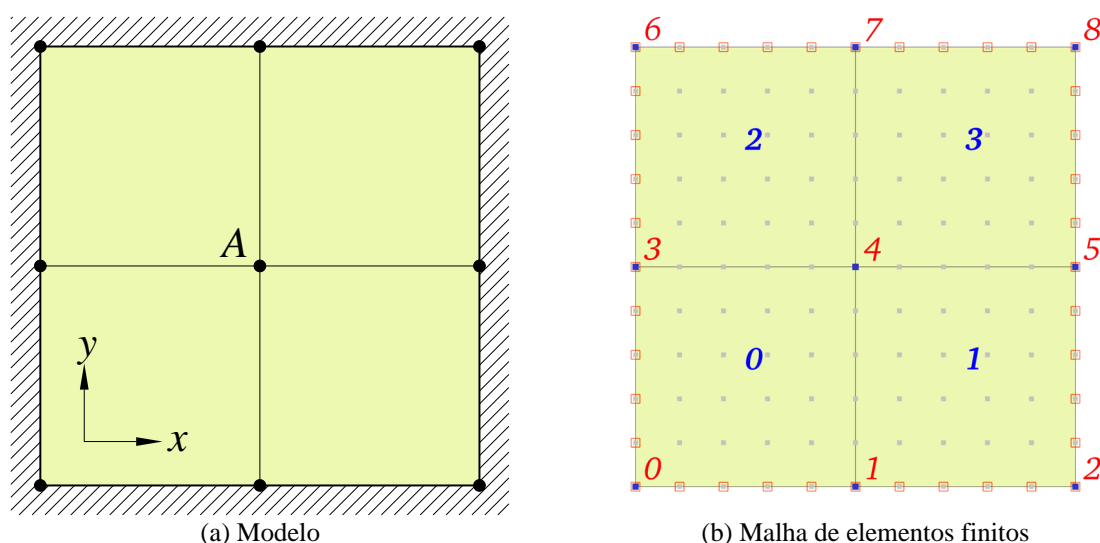


FIGURA 62 – Membrana quadrada engastada (CCCC).

A figura 62(b) é uma ilustração da malha de elementos finitos. Os quatro elementos finitos estão numerados de 0 a 3, na cor azul. Os nós estão representados pelos pontos escuros, ao todo são 9 nós numerados de 0 a 8, na cor vermelho. Os pontos claros são uma representação simbólica dos graus de liberdade de campo, que estão relacionados às funções de enriquecimento, neste caso, a malha representa o modelo com um nível de enriquecimento (36 pontos por elemento). Os pontos destacados pelos pequenos quadrados em cor laranja são os nós ou graus de liberdade sujeitos à condição de contorno do engastamento, i.e. deslocamento restrito.

#### 7.4.1 Número de condição versus parâmetro $\alpha$

A influência do parâmetro  $\alpha$  sobre o número de condição foi verificado para o problema bidimensional de vibração livre em membrana, inicialmente, adotando  $n_l = 1$  e considerando três graus de suavidade ( $k = 1, 2, 3$ ). Os números de condição para as matrizes de massa e rigidez são determinados em função do parâmetro  $\alpha$ , com os resultados apresentados na figura 63. Os principais pontos a serem destacados são: (i) os números de condição são menores que  $O(10^9)$  para ambas as matrizes em toda faixa de  $\alpha$  e para cada grau de suavidade

considerado; (ii) o número de condição da matriz de massa é sempre maior que o de rigidez; (iii) aumentando o parâmetro  $k$ , o número de condição diminui.

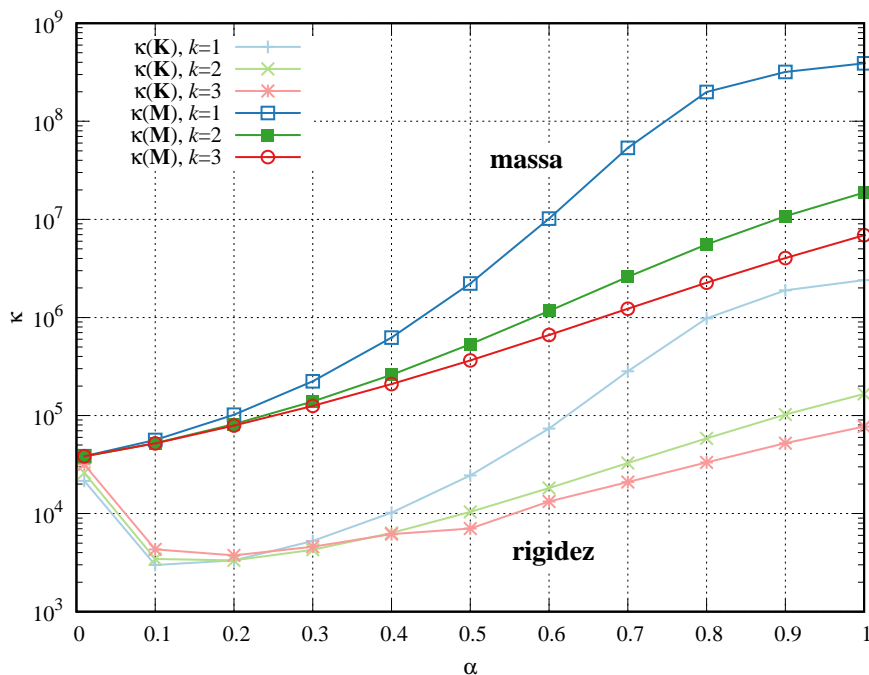


FIGURA 63 – Membrana engastada: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro  $\alpha$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1, 2, 3$  utilizando a técnica *flat-top*.

Se o número de níveis de enriquecimento for aumentado, por exemplo,  $n_l = 3$ , conforme mostrado na figura 64, o número de condição tende a ser elevado em comparação com os mostrados na figura 63. Os valores de  $\kappa(\mathbf{M})$  atingem  $O(10^{20})$  para matriz de massa quando  $\alpha \geq 0.8$  e  $k = 3$ , mas o número de condição é mantido estável abaixo de  $O(10^{15})$  para o intervalo de  $0 < \alpha \leq 0.6$  para o caso do enriquecimento  $\beta_j$  padrão. Um comportamento semelhante é encontrado para a matriz de rigidez, com valores máximos atingindo a ordem  $O(10^{20})$ . Por outro lado, os maiores valores para o enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado são de ordem  $O(10^{14})$  e  $O(10^{11})$ , respectivamente, para matrizes de massa e rigidez, como pode ser visto na figura 65. Ou seja, as ordens de  $\kappa(\mathbf{M})$  e  $\kappa(\mathbf{K})$  são sempre muito menores para o caso estabilizado do que para o caso padrão para  $n_l > 1$ .

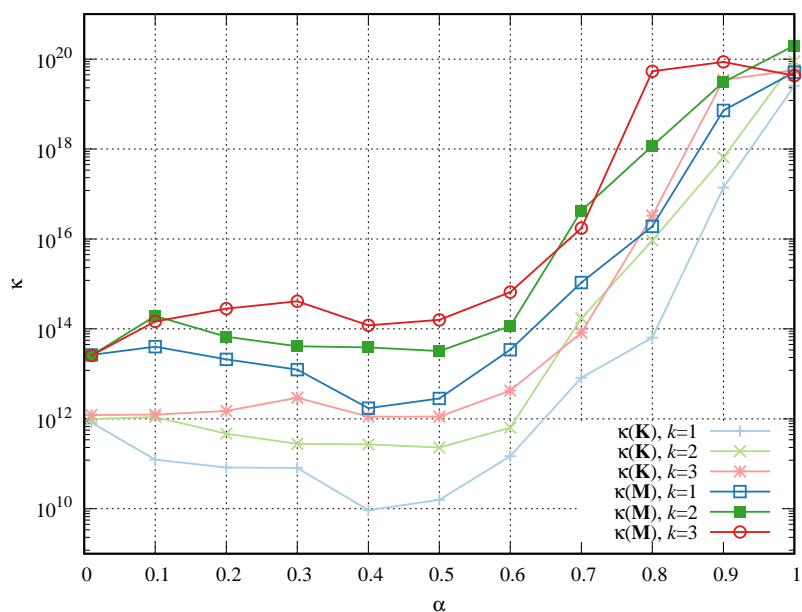


FIGURA 64 – Membrana engastada: números de condição das matrizes de rigidez e massa, com  $n_l = 3$ ,  $k = 1, 2, 3$  e  $\beta_j$  padrão.

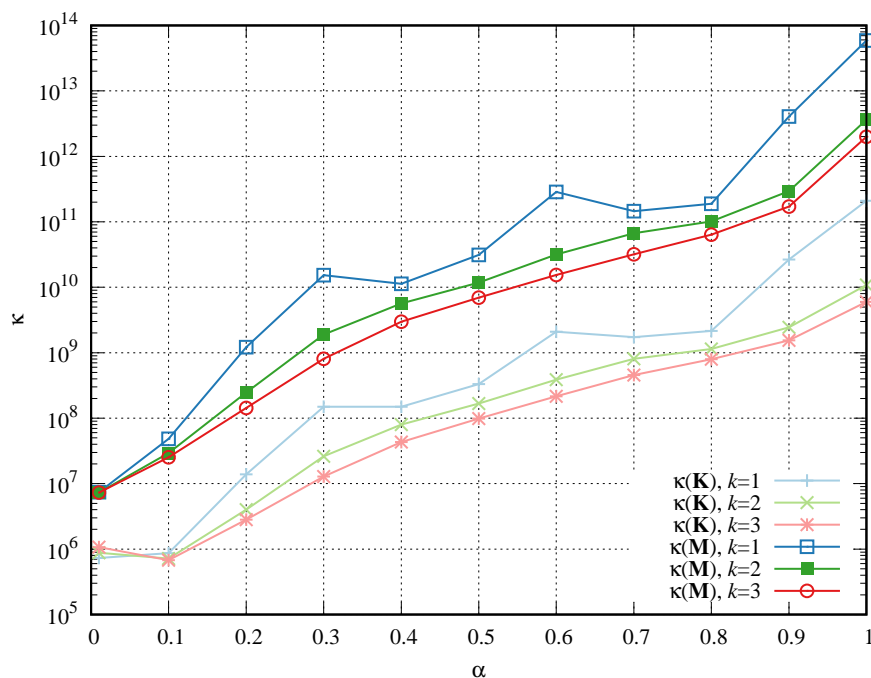


FIGURA 65 – Membrana engastada: números de condição das matrizes de rigidez e massa, com  $n_l = 3$ ,  $k = 1, 2, 3$  e  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

#### 7.4.2 Número de condição e a influência do enriquecimento

Como nos exemplos anteriores, o número de níveis de enriquecimento afeta a ordem do número de condição para ambas as matrizes, rigidez e massa. No entanto, a taxa de

crescimento dos números de condição depende do parâmetro  $\alpha$ . As figuras 66 e 67 mostram que com  $\alpha = 0.5$  o enriquecimento com cinco níveis atinge o número de condição na ordem  $O(10^{18})$  para o  $\beta_j$  padrão mas, para PU linear, essa magnitude de condicionamento é obtida com apenas dois níveis.

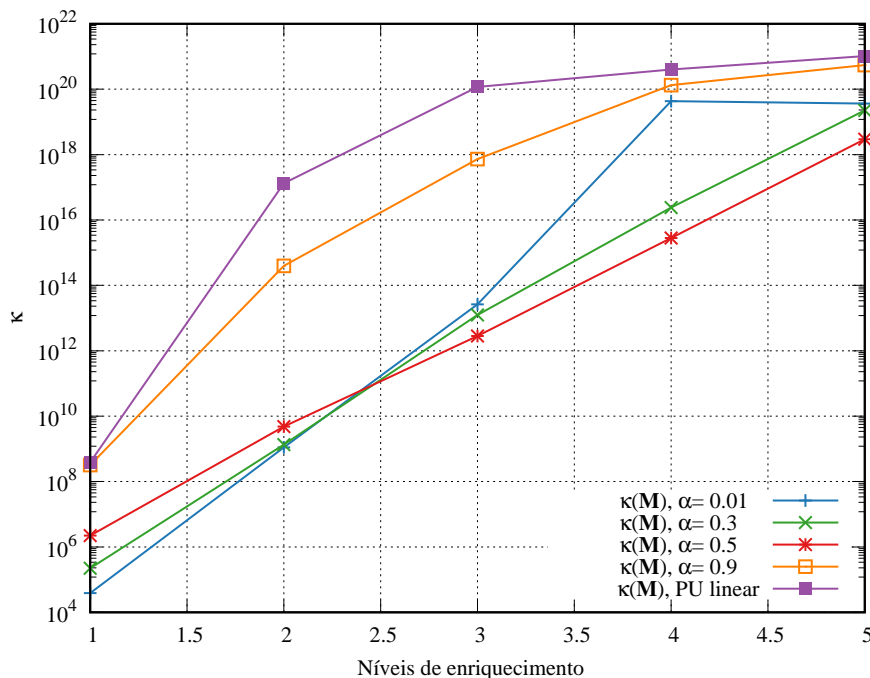


FIGURA 66 – Membrana engastada: números de condição da matriz de massa  $\kappa(\mathbf{M})$  com o enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

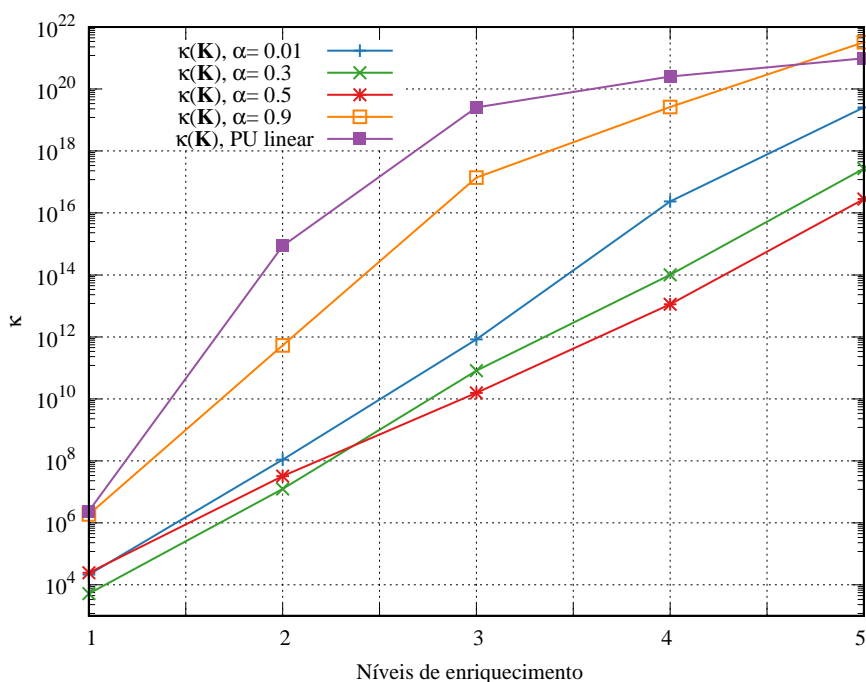


FIGURA 67 – Membrana engastada: números de condição da matriz de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$  com o enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

Para o caso de  $\bar{\beta}_j$  estabilizado, o condicionamento devido ao enriquecimento foi menor para qualquer valor de  $\alpha$ , como pode ser observado nas figuras 68 e 79. Neste caso, o número de condição máximo é de  $O(10^{15})$  para a matriz de massa, e  $O(10^{13})$  para a matriz de rigidez.

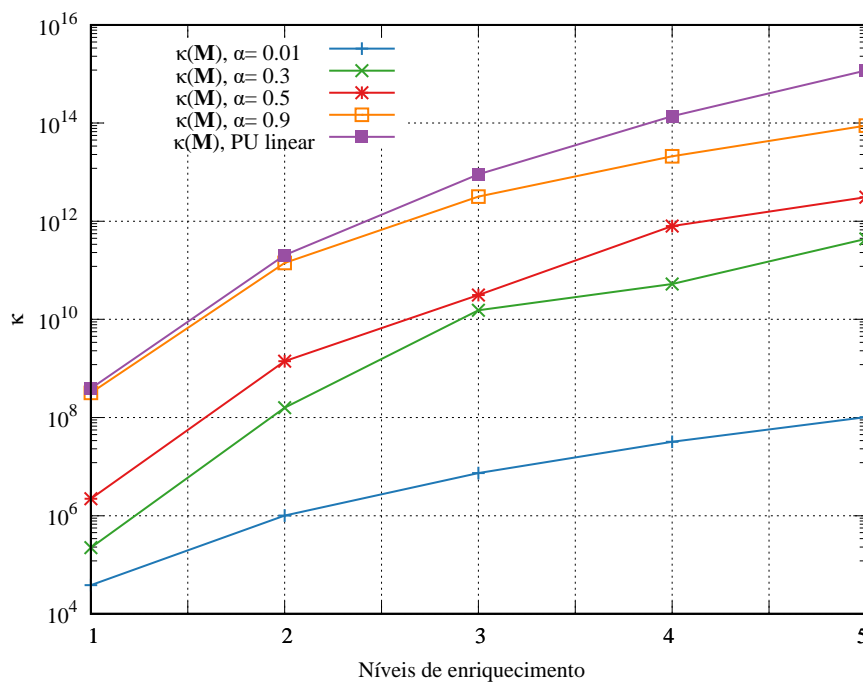


FIGURA 68 – Membrana engastada: números de condição da matriz de massa  $\kappa(\mathbf{M})$  com o enriquecimento utilizando  $\bar{\beta}_j$  estabilizado

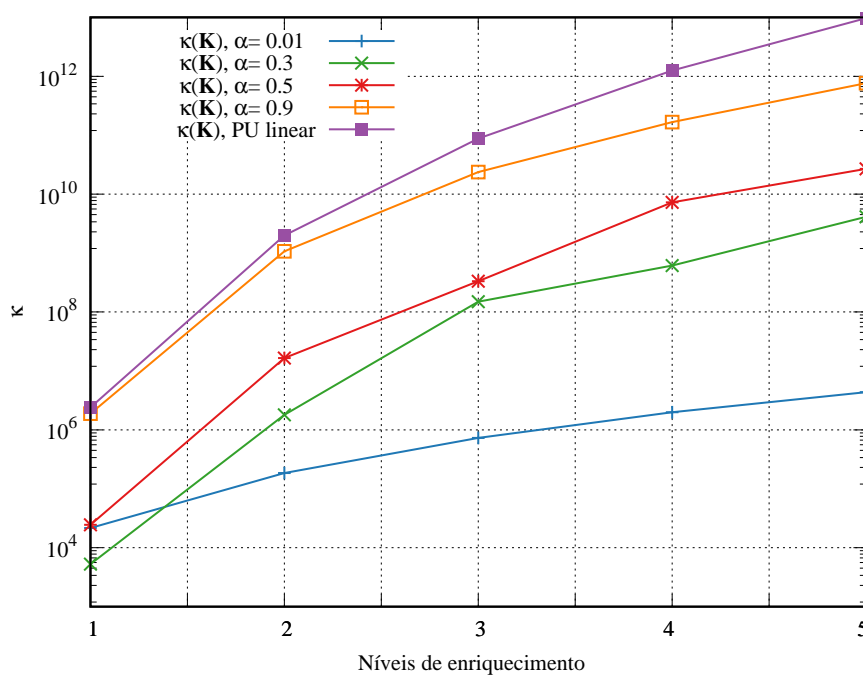


FIGURA 69 – Membrana engastada: números de condição da matriz de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$  com o enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado

### 7.4.3 Número de condição e a influência do parâmetro $\beta_1$

As figuras 70(a) e 70(b) apresentam os números de condição para as matrizes de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$  e massa  $\kappa(\mathbf{M})$ , respectivamente, considerando a PU *flat-top* linear com apenas um nível enriquecimento, em função do parâmetro  $\alpha$  para diferentes valores de  $\beta_1$ .

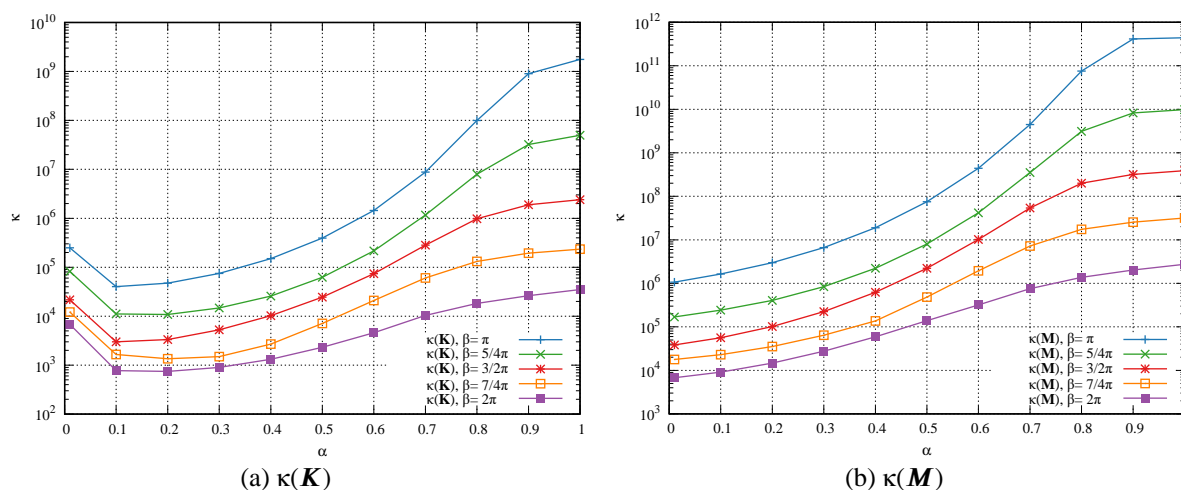


FIGURA 70 – Membrana engastada: números de condição das matrizes de (a) rigidez e (b) massa versus o parâmetro  $\alpha$ , com  $n_l = 1$  e  $k = 1$ , e diferentes valores de  $\beta_1$ .

O comportamento dos números de condição, em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\beta_1$ , é semelhante para ambas as matrizes, porém com os valores de  $\kappa(\mathbf{M})$  superiores aos valores de  $\kappa(\mathbf{K})$  em duas ordens de grandeza, em média. O comportamento de  $\kappa(\mathbf{M})$  para o problema da membrana foi similar ao comportamento de  $\kappa(\mathbf{M})$  para o problema da barra, figura 17(a), porém a magnitude dos números de condição foi duplicada, e.g. para  $\alpha = 1$  e  $\beta_1 = 3\pi/2$ ,  $O(10^4)$  para barra e  $O(10^8)$  para membrana.

### 7.4.4 Espectro de frequências

Quando comparamos com a PU linear, conclui-se que o parâmetro  $\alpha$  também afeta o espectro de frequências para a membrana engastada, conforme apresentando na figura 71. Alguns valores produzem uma grande amplificação na faixa final, como pode ser visto na figura 71, mas, se o parâmetro  $\alpha$  for igual a 0.3 ou 0.5, os resultados são melhores que o PU linear.

A figura 72 mostra a influência do parâmetro  $k$  que controla a suavização das curvas entre as regiões planas. De fato, para maiores valores de  $k$ , o erro relativo diminui para frequências mais altas.

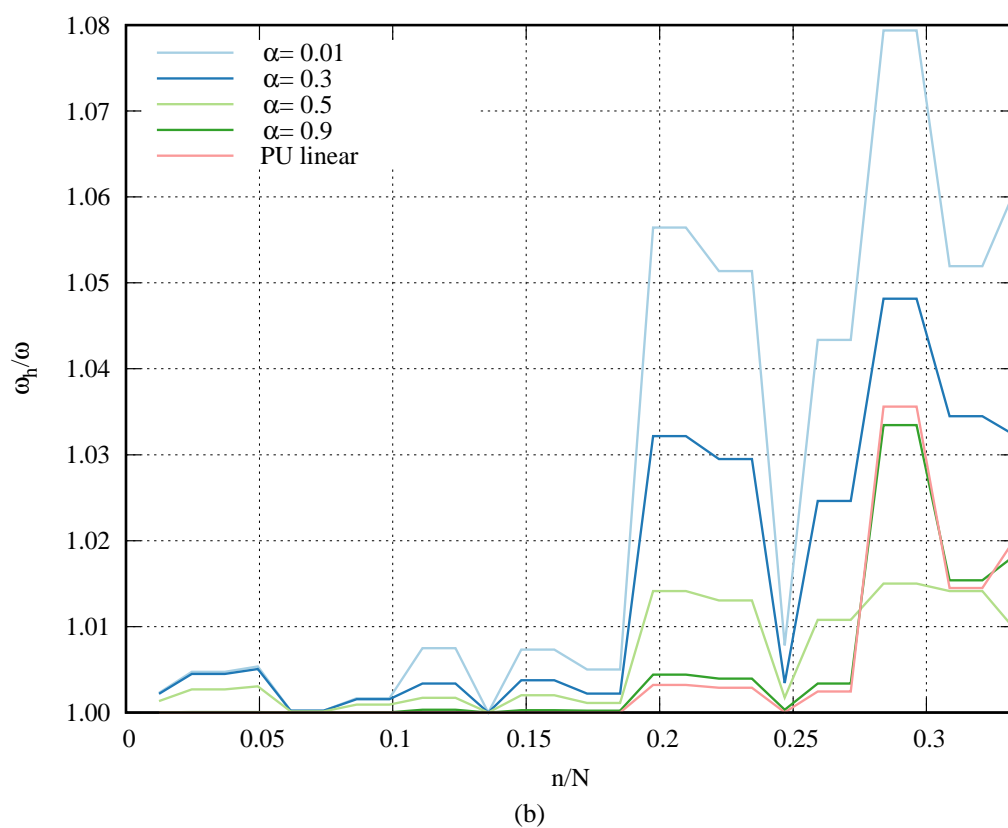
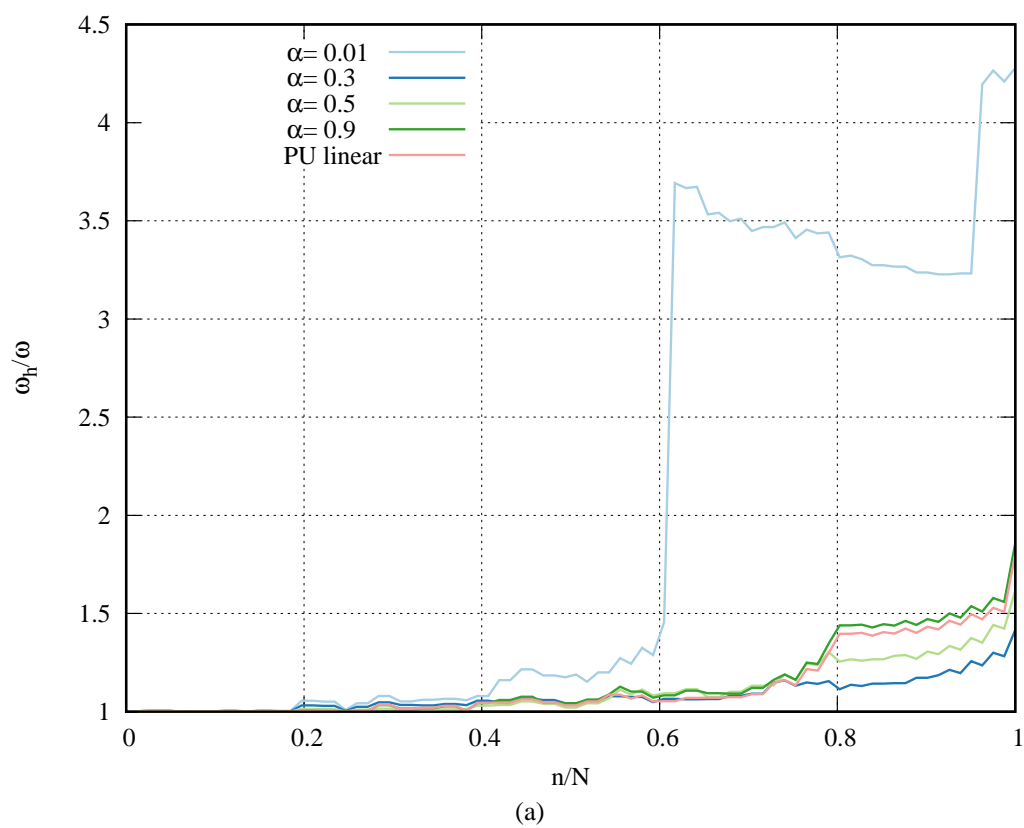


FIGURA 71 – Membrana engastada: (a) espectro de frequências obtido com a PU *flat-top*,  $n_1 = 1$  e  $k = 1$ , (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

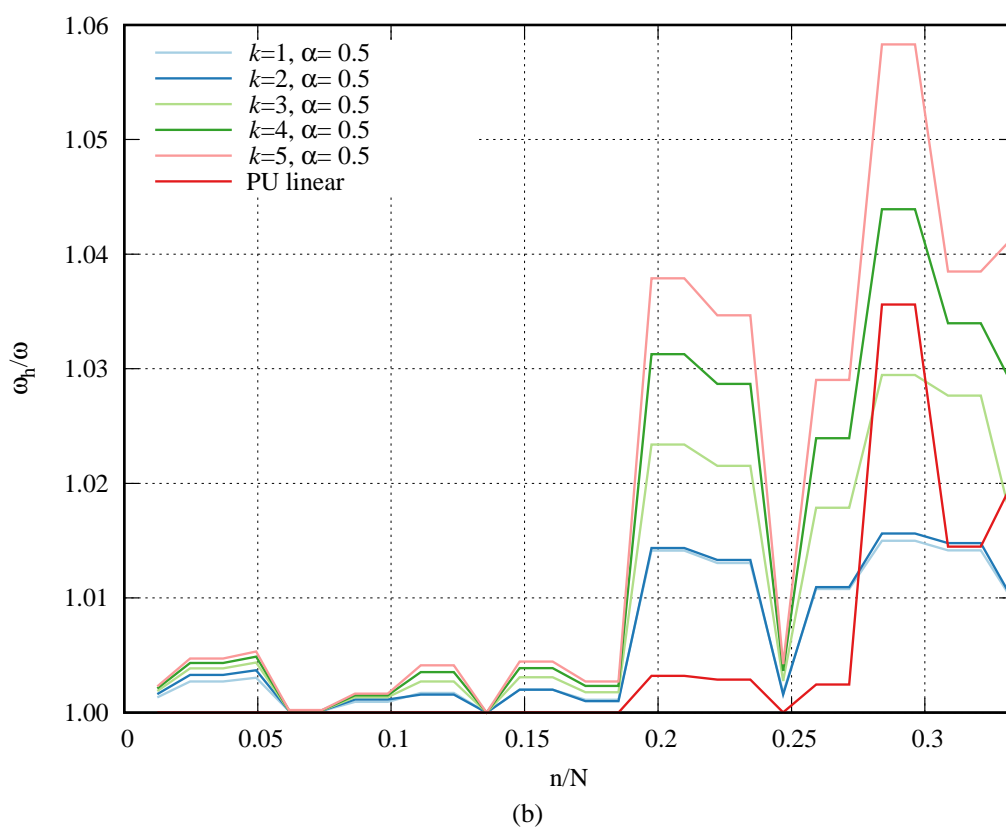
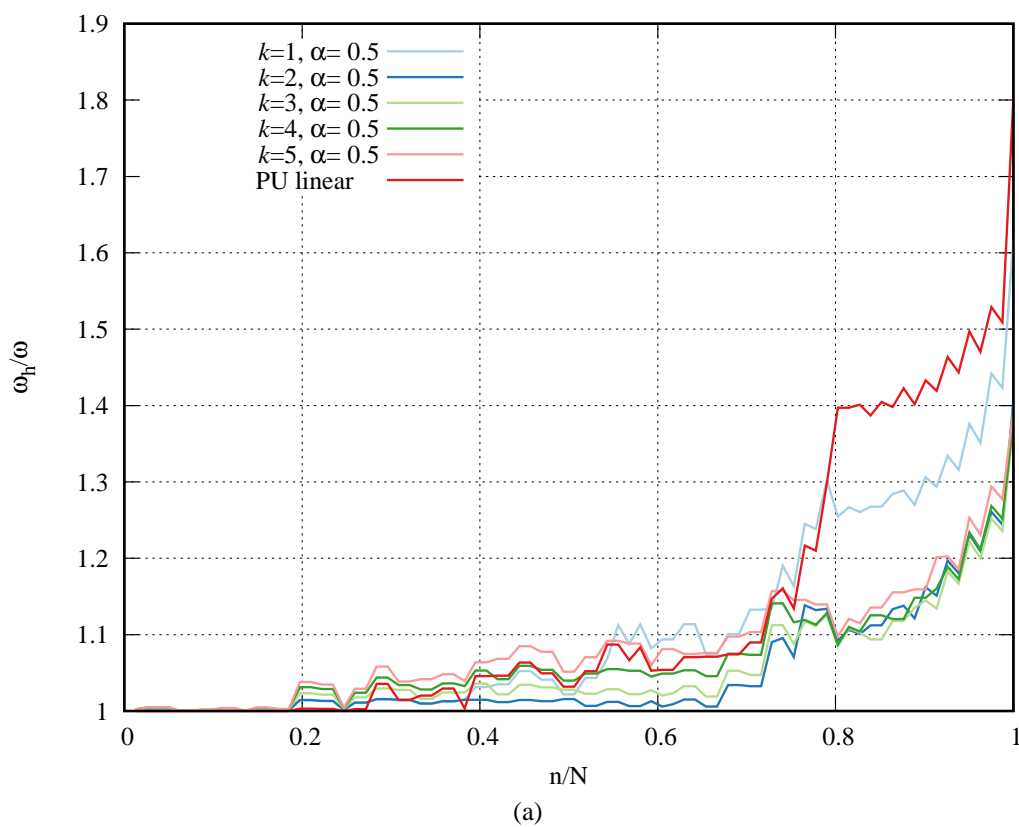


FIGURA 72 – Membrana engastada: (a) espectro de frequências para  $\alpha = 0.5$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1, 2, \dots, 5$ , e PU linear, (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

A figura 73 apresenta o espectro de frequências para o segundo nível de enriquecimento  $\beta_j$  padrão. Observa-se o aumento de precisão obtidos para as primeiras frequências, com erros relativos de ordem  $O(10^{-5})$  para os resultados obtidos com a PU *flat-top*, no entanto, maiores que os erros obtidos com a PU linear, onde os erros são da ordem de  $O(10^{-9})$ . A figura 73(c) apresenta o espectro parcial inicial para as 28 primeiras frequências.

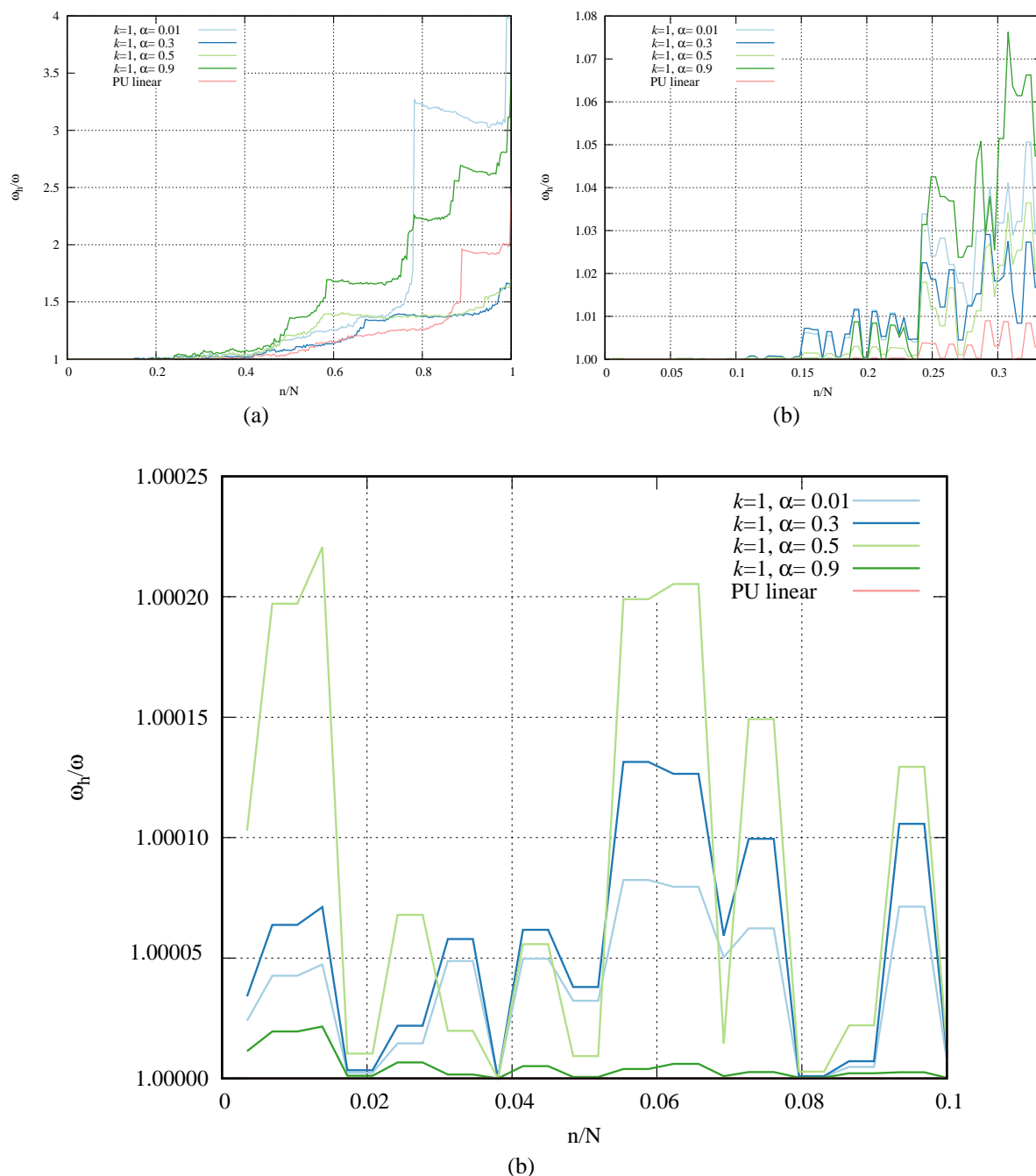


FIGURA 73 – Membrana engastada: (a) espectro de frequências obtido com a PU *flat-top*,  $n_l = 2$  e  $k = 1$ , (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ , (c) ampliação da região entre 0 e  $1/10$ .

#### 7.4.5 Taxa de convergência

A taxa de convergência da solução aproximada pelo MEFGE foi avaliada para a primeira e segunda frequências naturais de vibração, no início do espectro de frequências, e para a 81ª frequência natural, que corresponde a última frequência aproximada obtida com apenas um nível de enriquecimento, cabe ressaltar que ela não será mais a última frequência do espectro quando  $n_l > 1$ . A análise considerou até cinco níveis de enriquecimento.

A tabela 16 e a figura 74 mostram os erros percentuais obtidos para a primeira frequência aproximada pelo MEFGE com a PU *flat-top* linear para diferentes valores de  $\alpha$ , considerando o processo de enriquecimento com parâmetro  $\beta_j$  padrão. O resultados obtidos com a PU *flat-top* apresentaram boas taxas de convergência, mas não melhores que a taxa de convergência obtida com a PU linear, assim como observado nos problema anteriores. O menor erro percentual foi da ordem  $O(10^{-7})$ , obtido com a PU linear com dois níveis de enriquecimento. Um resultado com mesma grandeza foi obtido com  $\alpha = 0.01$  porém após 4 níveis de enriquecimento.

TABELA 16 – Membrana engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

$n_{gl}$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
81	1	2.29737E-01	2.16955E-01	1.33621E-01	3.78801E-03	1.19228E-03
289	2	2.39149E-03	3.40466E-03	1.02949E-02	1.12915E-03	1.10377E-07
625	3	2.25276E-05	5.58184E-05	3.28297E-04	3.00212E-05	NC
1089	4	2.06586E-07	2.59120E-06	4.77475E-06	NC	NC

\*NC - não computado.

As taxas de convergência para a segunda frequência aproximada foram similares às taxas obtidas para a primeira frequência, com erros percentuais com a mesma ordem de grandeza, conforme pode ser observado através dos resultados apresentados na tabela 17 e figura 75.

TABELA 17 – Membrana engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 2ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

$n_{gl}$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
81	1	4.74332E-01	4.48918E-01	2.70739E-01	5.39031E-03	7.67961E-04
289	2	4.26585E-03	6.37415E-03	1.97121E-02	1.94781E-03	4.35354E-08
625	3	3.73342E-05	9.36767E-05	6.16443E-04	5.47321E-05	NC
1089	4	3.26725E-07	4.48985E-06	8.71323E-06	NC	NC

\*NC - não computado.

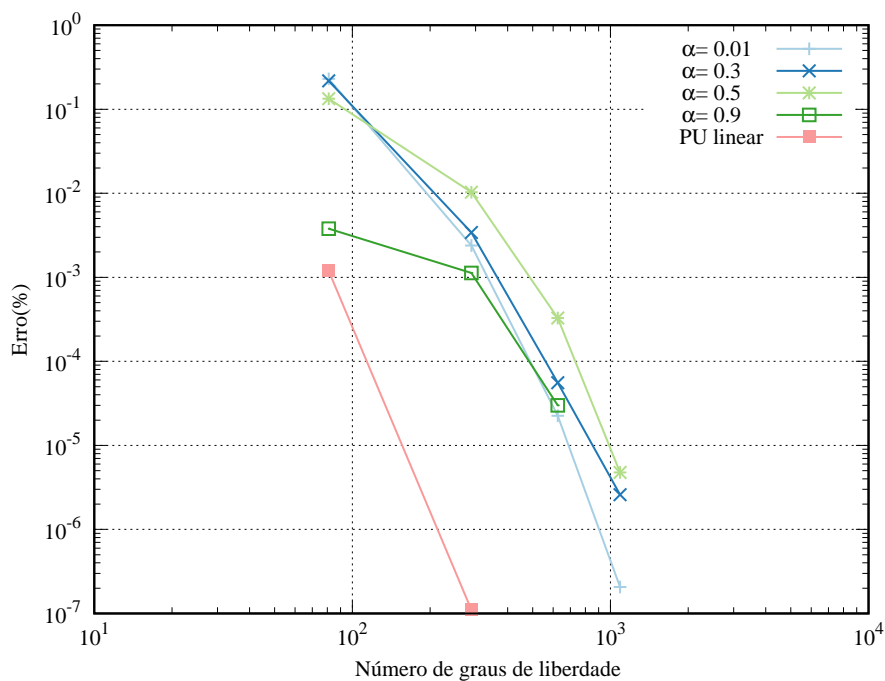


FIGURA 74 – Membrana engastada: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

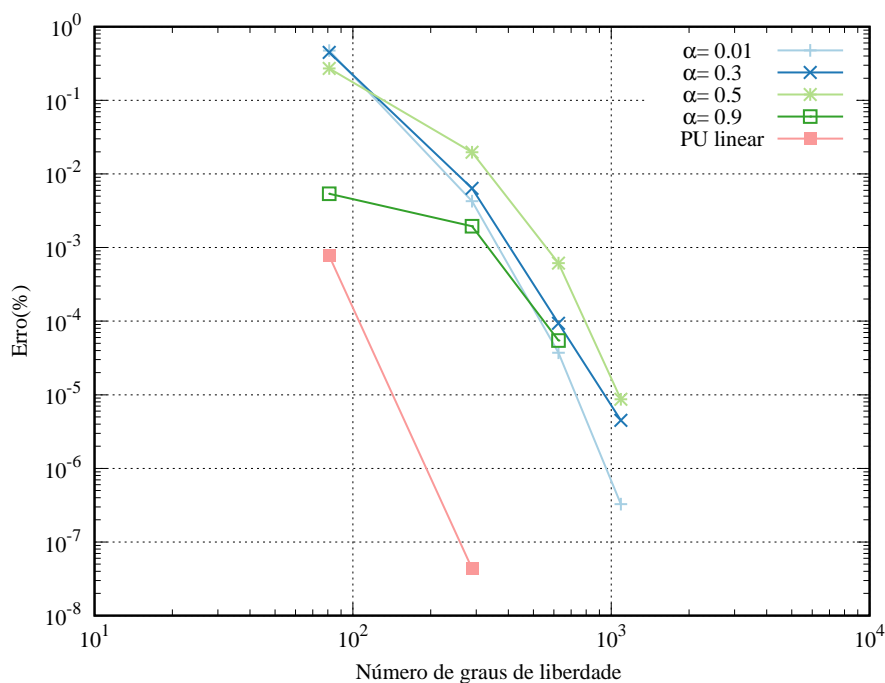


FIGURA 75 – Membrana engastada: convergência para a 2ª frequência natural com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

Quando se verifica os resultados obtidos para a 81ª frequência, apresentados na tabela 18 e figura 76, conclui-se que a taxa de convergência da PU linear e PU *flat-top* são equivalentes, porém com a PU *flat-top* é possível aplicar mais níveis de enriquecimento e assim

obter uma melhor aproximação para as frequências mais elevadas. O melhor resultado foi obtido com  $\alpha = 0.01$  e  $n_l = 5$ , com erro percentual de ordem  $O(10^{-6})$ .

TABELA 18 – Membrana engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 81ª frequência de vibração, com o  $\beta_j$  padrão.

$n_{gl}$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
81	1	3.27829E+02	4.16445E+01	6.16983E+01	8.57537E+01	8.02146E+01
289	2	1.26551E+00	1.24252E+00	6.39790E-01	2.63491E+00	3.30519E-01
625	3	4.35527E-03	6.19042E-03	2.89140E-03	2.38723E-04	NC
1089	4	6.98436E-06	2.73876E-05	3.40254E-05	NC	NC

\*NC - não computado.

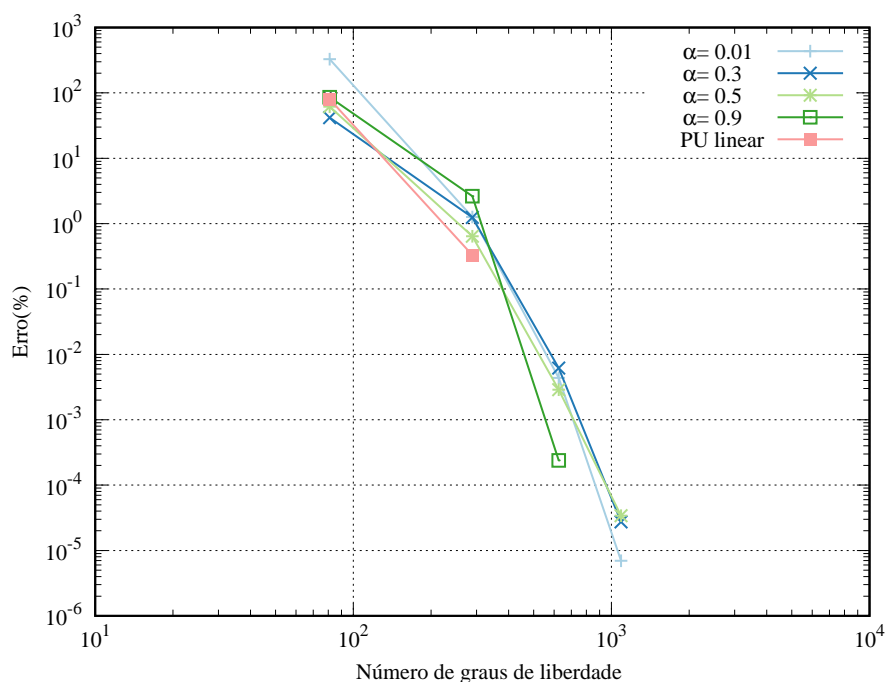


FIGURA 76 – Membrana engastada: convergência para a 81ª frequência natural com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

Agora considerando o processo de enriquecimento estabilizado, observa-se que as taxas de convergência são reduzidas quando o  $\bar{\beta}_j$  estabilizado é aplicado, conforme pode ser observado dos resultados apresentados na tabela 19 e figura 77, para a primeira frequência, e tabela 20 e figura 78, para a 81ª frequência.

TABELA 19 – Membrana engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

$n_{gl}$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
81	1	2.29737E-01	2.16955E-01	1.33621E-01	3.78801E-03	1.19228E-03
289	2	8.06871E-02	3.99156E-02	1.01142E-02	2.23083E-03	7.63511E-05
625	3	4.37855E-02	1.28623E-02	9.34368E-03	1.73302E-03	1.50121E-05
1089	4	2.84516E-02	9.60976E-03	4.89906E-03	1.26187E-03	4.73637E-06
1681	5	2.03915E-02	8.31271E-03	4.33262E-03	8.23319E-04	1.93764E-06

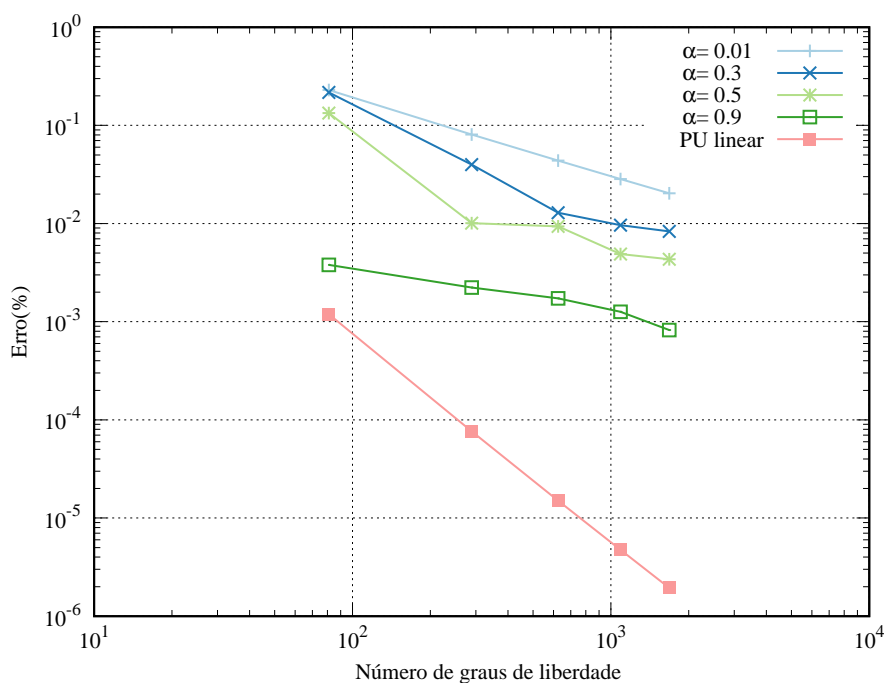


FIGURA 77 – Membrana engastada: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

TABELA 20 – Membrana engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 81ª frequência de vibração com o  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

$n_{gl}$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
81	1	3.27829E+02	4.16445E+01	6.16983E+01	8.57537E+01	8.02146E+01
289	2	2.13130E+00	2.55393E+00	2.20241E+00	2.75179E-02	1.94740E-02
625	3	8.14140E-01	1.61490E+00	7.01711E-02	8.25350E-03	3.20151E-03
1089	4	1.91202E-01	2.92643E-01	5.90980E-02	4.12849E-03	9.51570E-04
1681	5	1.34769E-01	1.54903E-02	3.06844E-02	2.38444E-03	3.78800E-04

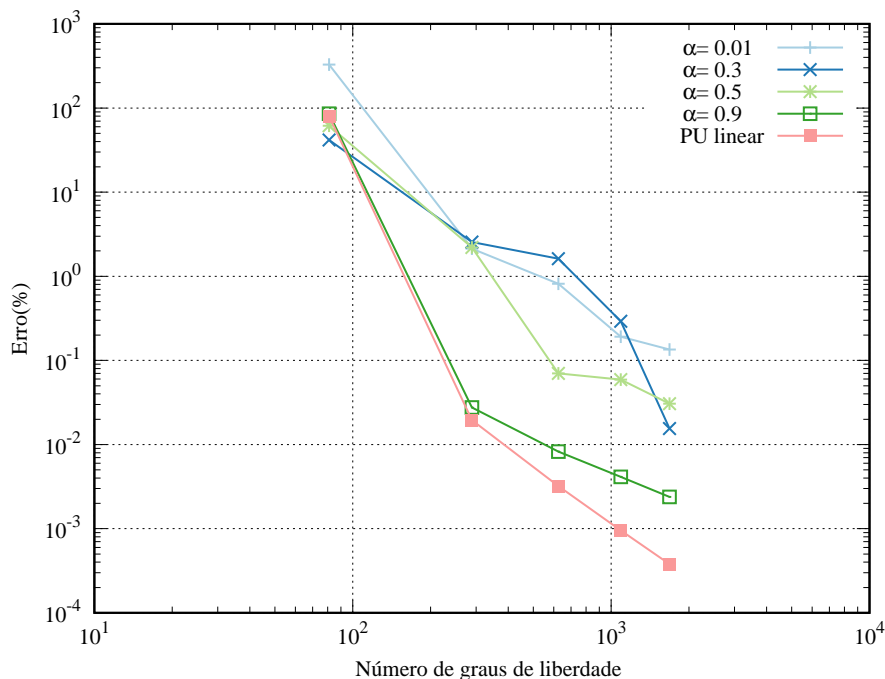


FIGURA 78 – Membrana engastada: convergência para a 81ª frequência natural com enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

Nos casos em que a PU *flat-top* foi considerada não é possível obter respostas com erros percentuais para a 81ª frequência menores que  $O(10^{-3})$  mesmo após 5 níveis de enriquecimento estabilizado. O menor erro percentual para a primeira frequência e 81ª frequência, de ordem  $O(10^{-6})$  e  $O(10^{-3})$  respectivamente, foram obtidos com a PU linear com 5 níveis de enriquecimento. Porém esses resultados obtidos com o enriquecimento estabilizado não são melhores que aqueles obtidos com o enriquecimento padrão, quando comparados em um mesmo nível de enriquecimento e número de graus de liberdade.

#### 7.4.6 Modos de vibração

Como ilustração, a figura 79 apresenta os nove primeiros modos de vibração para a membrana engastada, obtidos pelo MEFGE PU *flat-top* com  $\alpha = 0.5$ ,  $k = 1$  e um nível de enriquecimento.

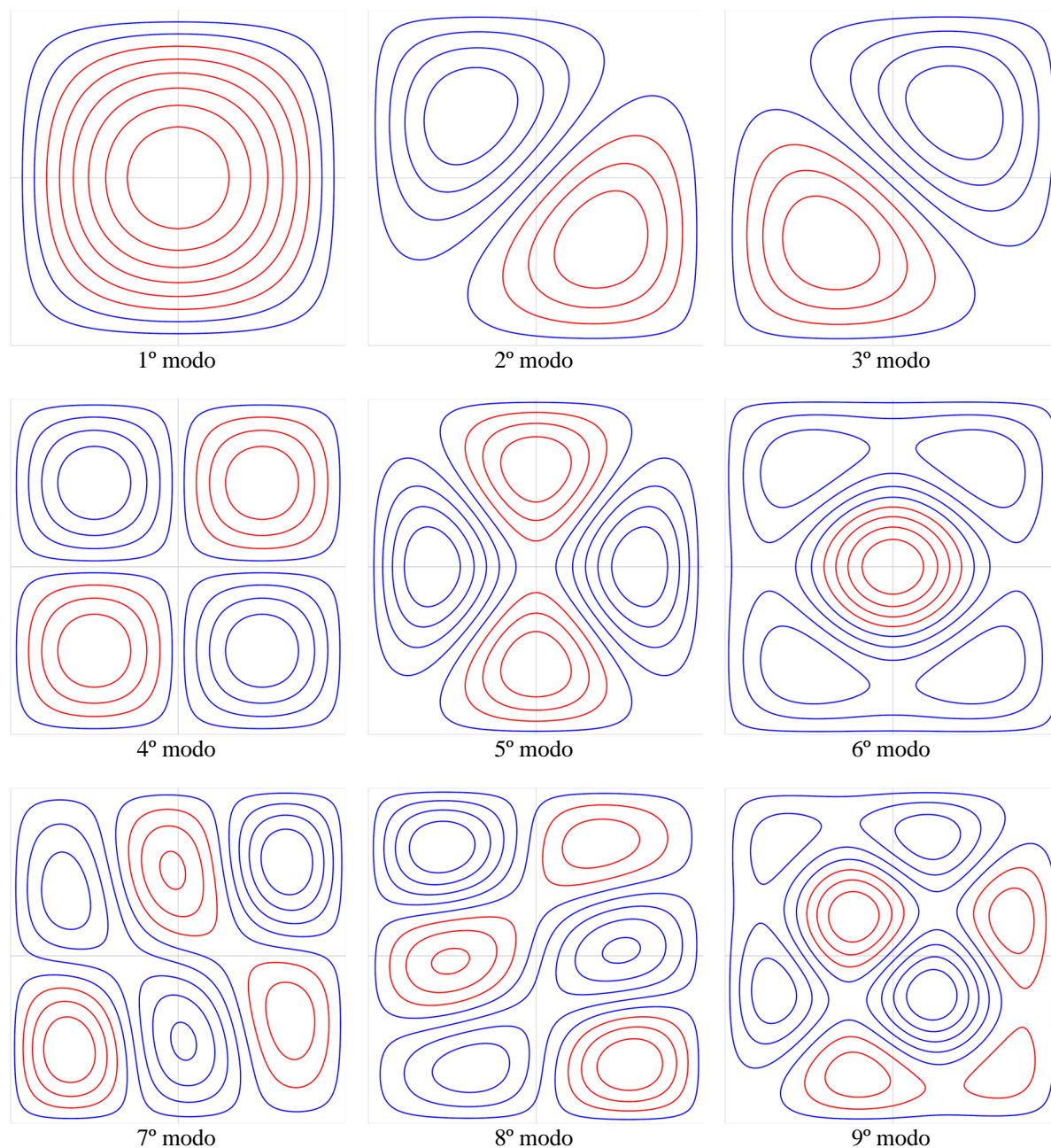


FIGURA 79 – Membrana engastada: os nove primeiros modos de vibração obtidos com a PU *flat-top*,  $\alpha = 0.5$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1$ .

#### 7.4.7 Malhas distorcidas

Agora o objetivo é verificar o comportamento do MEFGE *flat-top* aplicado à malhas distorcidas. São propostas duas malhas distorcidas: (i) uma malha (pouco) distorcida, representada na figura 80(a); (ii) uma malha muito distorcida, representada na figura 80(b).

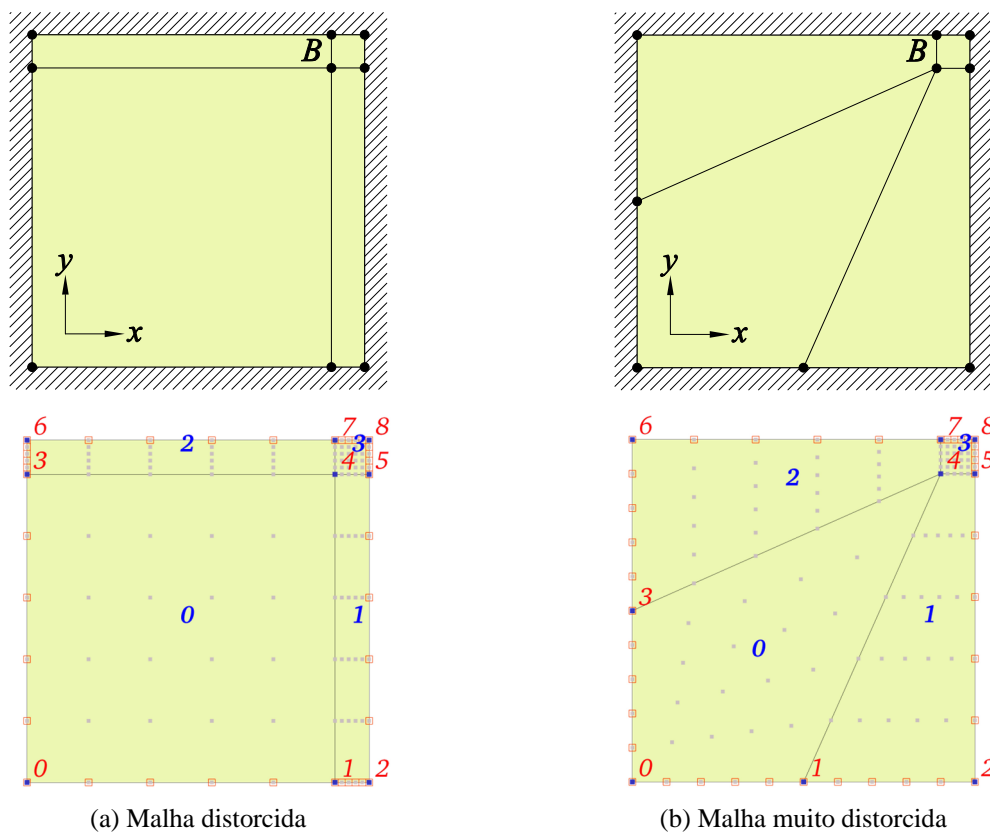


FIGURA 80 – Membrana engastada: malhas distorcidas.

As mesmas propriedades do material, parâmetros dimensionais e as mesmas condições de contorno do problema original são consideradas. O ponto  $B$  está posicionado a  $1/10$  dos lados da membrana.

A primeira verificação é sobre a influência do parâmetro  $\alpha$  sobre o número de condição para as malhas distorcidas. A figura 81(a) apresenta o comportamento do número de condição das matrizes de massa e rigidez para a malha distorcida e a figura 81(b) os respectivos resultados obtidos com a malha muito distorcida. Em ambos os casos é considerado um nível de enriquecimento, com  $k = 1, 2, 3$ .

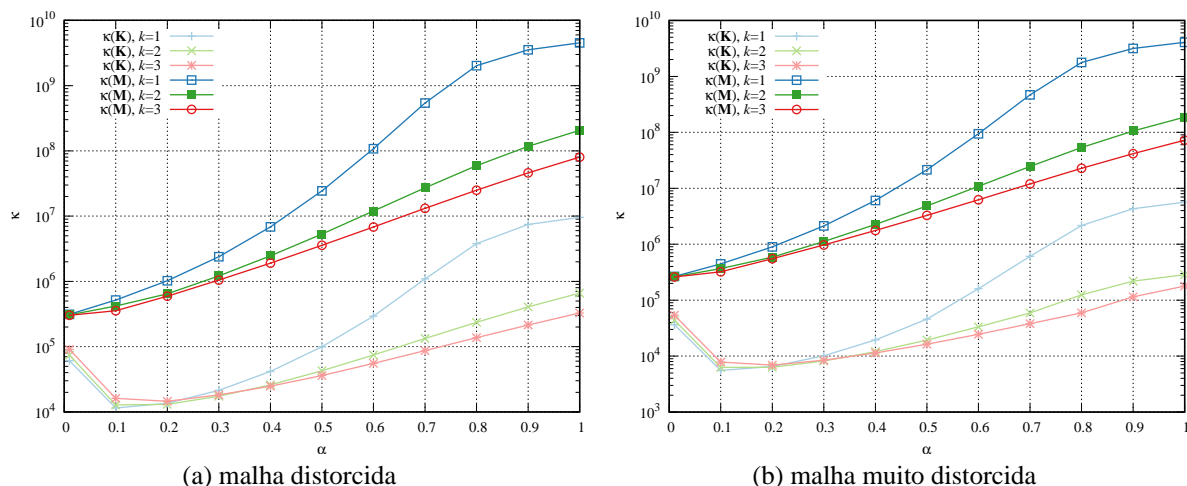


FIGURA 81 – Malhas distorcidas: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro  $\alpha$ , com  $n_l = 1$  e  $k = 1$ .

Nota-se que o comportamento do número de condição em função do parâmetro  $\alpha$  é muito similar entre a malha distorcida, malha muito distorcida e a malha uniforme (figura 63). Uma pequena redução nos números de condição da matriz de rigidez é observada para valores de  $\alpha \leq 0.3$ . A tabela 21 apresenta os números de condição das matrizes de rigidez e massa obtidos com as três malhas, para o caso de  $k = 1$ .

TABELA 21 – Malhas distorcidas: números de condição obtidos com malhas distintas com PU *flat-top*,  $n_l = 1$  e  $k = 1$ .

$\alpha$	Matriz de rigidez			Matriz de massa		
	Uniforme	Distorcida	Muito distorcida	Uniforme	Distorcida	Muito distorcida
0.01	2.15E+04	6.10E+04	3.63E+04	3.85E+04	3.12E+05	2.65E+05
0.1	2.98E+03	1.15E+04	5.54E+03	5.62E+04	5.17E+05	4.45E+05
0.2	3.33E+03	1.35E+04	6.52E+03	1.01E+05	1.02E+06	8.97E+05
0.3	5.25E+03	2.13E+04	1.01E+04	2.23E+05	2.38E+06	2.12E+06
0.4	1.02E+04	4.17E+04	1.94E+04	6.23E+05	6.85E+06	6.07E+06
0.5	2.45E+04	9.96E+04	4.58E+04	2.22E+06	2.43E+07	2.14E+07
0.6	7.37E+04	2.93E+05	1.60E+05	1.01E+07	1.07E+08	9.41E+07
0.7	2.82E+05	1.09E+06	6.08E+05	5.37E+07	5.40E+08	4.68E+08
0.8	9.79E+05	3.77E+06	2.15E+06	1.99E+08	2.02E+09	1.77E+09
0.9	1.89E+06	7.44E+06	4.31E+06	3.18E+08	3.52E+09	3.15E+09
PU linear	2.40E+06	9.54E+06	5.63E+06	3.89E+08	4.51E+09	4.06E+09

Os valores de  $\kappa(\mathbf{K})$  para  $\alpha = 0.01$  são maiores que para  $\alpha = 0.1$ , onde os menores números de condição são obtidos, porém passam a aumentar conforme  $\alpha$  aumenta. Para  $\kappa(\mathbf{M})$ , os valores sempre aumentam com o aumento de  $\alpha$ , com valores máximo quando  $\alpha = 1$ . Observa-se que os números de condição das matrizes de rigidez e massa, obtidos com as malhas

distorcida e muito distorcida foram suavemente superiores aos obtidos com a malha uniforme, e ainda, que os valores obtidos para a malha distorcida foram superiores aos obtidos com a malha muito distorcida, como pode ser visto nos dois exemplos destacados em cor azul na tabela acima.

O comportamento observado para os números de condição obtidos com as malhas distorcidas para maiores níveis de enriquecimento foi similar ao observado para o caso da malha uniforme.

Os espectros de frequências aproximadas obtidas com as malhas distorcidas foram significativamente comprometidos, conforme mostrado nas figuras 82 e 83.

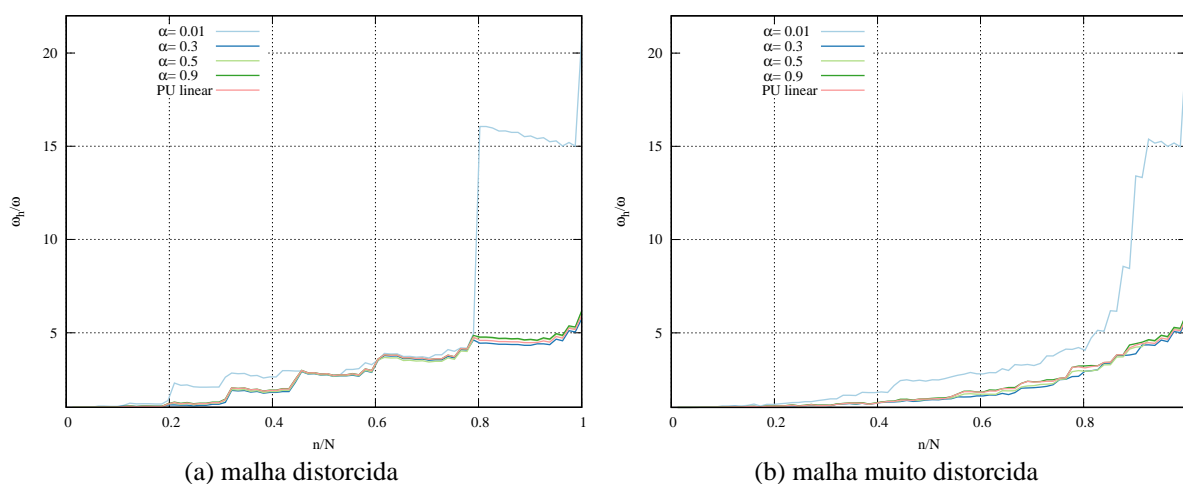


FIGURA 82 – Malhas distorcidas: espectro de frequências obtido com a PU *flat-top*,  $n_l = 1$  e  $k = 1$ .

No final do espectro são encontrados valores de  $\omega_h/\omega$  bem elevados em comparação com a referência da malha uniforme. Os valores das frequências normalizadas obtidas pelas três malhas são apresentados na tabela 22 (1ª e 81ª frequências), para PU *flat-top*  $\alpha = 0.01$  (maior amplitude observada) e PU linear com um nível de enriquecimento.

TABELA 22 – Malhas distorcidas: frequências aproximadas normalizadas para o início e fim do espectro.

Malha	PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.01$		PU Linear	
	Início do espectro	Fim do espectro	Início do espectro	Fim do espectro
	$\omega_h/\omega$	$\omega_h/\omega$	$\omega_h/\omega$	$\omega_h/\omega$
Uniforme	1.00229737	4.27829230	1.00001192	1.80214677
Distorcida	1.00543844	20.76771615	1.00001097	5.92909884
Muito distorcida	1.00356437	20.74222978	1.00000715	5.85737530

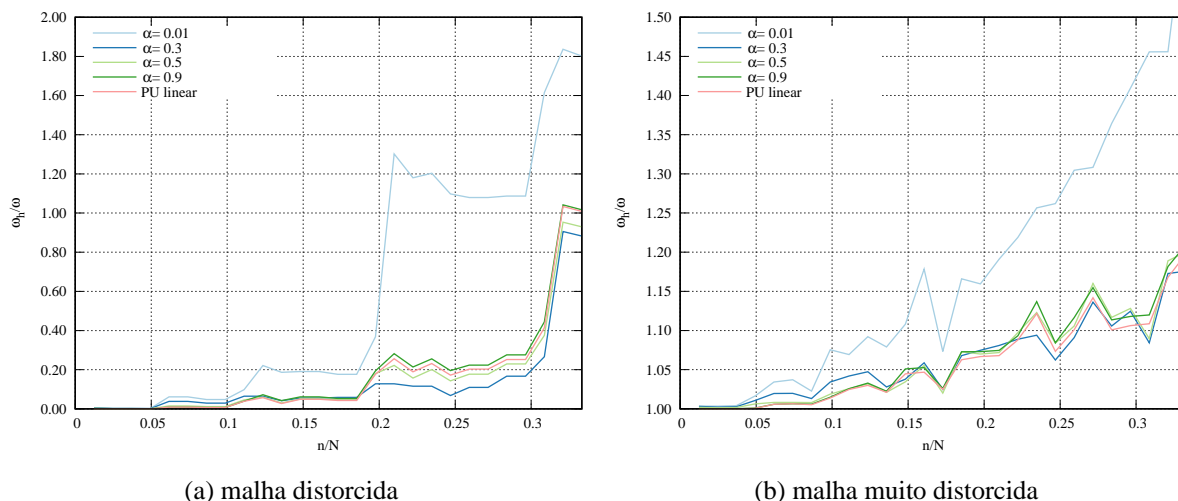


FIGURA 83 – Malhas distorcidas: espectro de frequências parcial (1/3), obtido com a PU *flat-top*,  $n_l = 1$  e  $k = 1$ , (a) malha distorcida e (b) malha muito distorcida.

Conclui-se que a distorção nas malhas não altera significativamente o número de condição das matrizes, porém impacta na precisão das respostas, com grande ampliação dos erros relativos representados no espectro de frequência.

Quando se compara os espectros de frequências apresentados na figura 83 com o espectro para a malha uniforme, figura 71, observa-se aumento na amplitude dos erros relativos para o início do espectro (1/3). Os resultados da malha distorcida são menos precisos que os resultados da malha muito distorcida. Essa observação sugere que a distorção representada na malha distorcida possui maior impacto do que a distorção observada na malha muito distorcida, o que pode estar relacionado com a maior diferença relativa entre os elementos que compõe a malha distorcida (ver a figura 80).

As taxas de convergência das respostas aproximadas para a primeira frequência, com as malhas distorcidas, são apresentadas na figura 84. Como mostrado na tabela 23, as taxas de convergência para o caso PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$  são similares para as três malhas, com menor erro percentual para a malha uniforme até o 4º nível de enriquecimento, porém na malha muito distorcida foi possível aplicar um 5º nível que retornou o menor erro para as três malhas. No caso da PU linear, não é possível obter uma resposta para o terceiro nível de enriquecimento.

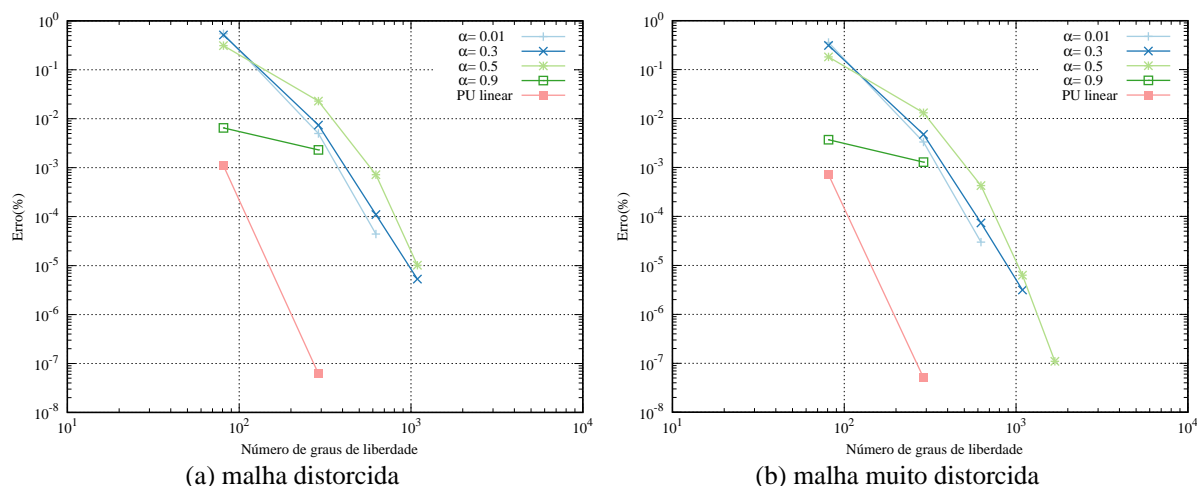


FIGURA 84 – Malhas distorcidas: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

TABELA 23 – Malhas distorcidas: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

$n_{gl}$	$n_l$	PU flat-top $\alpha = 0.5$			PU linear		
		Uniforme	Distorcida	Muito distorcida	Uniforme	Distorcida	Muito distorcida
81	1	1.33621E-01	3.12088E-01	1.81564E-01	1.19228E-03	1.09788E-03	7.15956E-04
289	2	1.02949E-02	2.29527E-02	1.31069E-02	1.10377E-07	6.16461E-08	5.06901E-08
625	3	3.28297E-04	7.19869E-04	4.28062E-04	NC	NC	NC
1089	4	4.77475E-06	1.01955E-05	6.30572E-06	NC	NC	NC
1681	5	NC	NC	1.09700E-07	NC	NC	NC

\*NC - não computado.

A tabela 24 e figura 85 apresentam os resultados de convergência para a 81ª frequência. No caso PU flat-top  $\alpha = 0.5$ , agora para uma frequência mais elevada, nota-se que as malhas distorcidas impactam nas taxas de convergência de forma significativa, e o melhor resultado é ainda o obtido com a malha uniforme.

TABELA 24 – Malhas distorcidas: erros percentuais da solução aproximada para a 81ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

$n_{gl}$	$n_l$	PU flat-top $\alpha = 0.5$			PU linear		
		Uniforme	Distorcida	Muito distorcida	Uniforme	Distorcida	Muito distorcida
81	1	6.16983E+01	5.12718E+02	5.06897E+02	8.02146E+01	4.92909E+02	4.85737E+02
289	2	6.39790E-01	3.53400E+01	2.38289E+01	3.30519E-01	4.10166E+01	1.40144E+01
625	3	2.89140E-03	1.03310E+01	5.41623E+00	NC	NC	NC
1089	4	3.40254E-05	4.69397E-01	3.70081E-01	NC	NC	NC
1681	5	NC	NC	2.74211E-02	NC	NC	NC

\*NC - não computado.

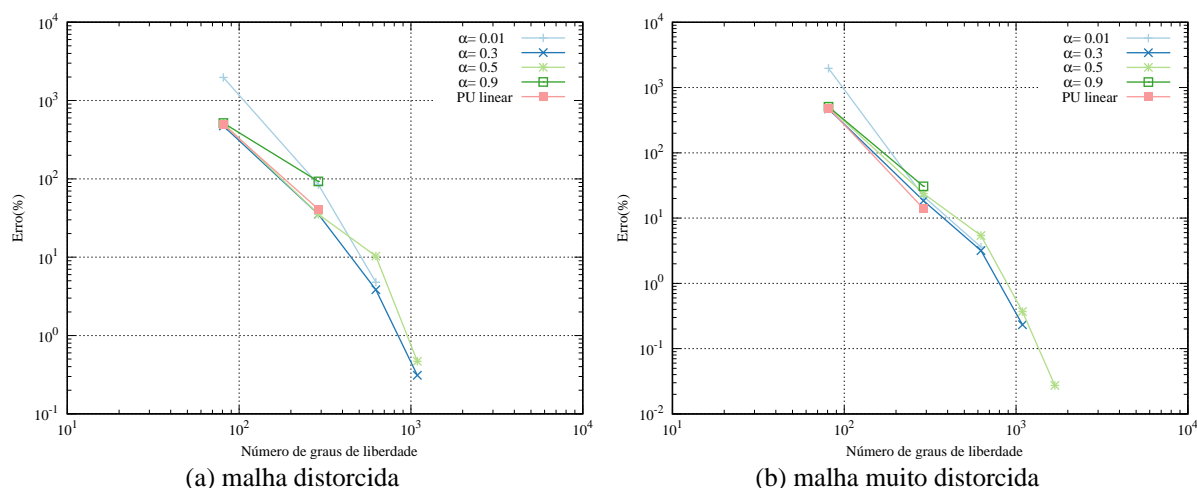


FIGURA 85 – Malhas distorcidas: convergência para a 81ª frequência natural com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

Quando considerado o enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado, nota-se que o enriquecimento estabilizado reduz as taxas de convergência da PU *flat-top*, como apresentado nas tabelas 25 e 26 e figuras 86 e 87, para ambas as malhas consideradas. No entanto, o enriquecimento estabilizado permite mais níveis de enriquecimento com a PU linear, que apresenta boas taxas de convergências para a primeira frequência. Para a frequência mais alta, observa-se que as malhas distorcidas também reduzem as taxas de convergência no caso em que o enriquecimento estabilizado é considerado.

TABELA 25 – Malhas distorcidas: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

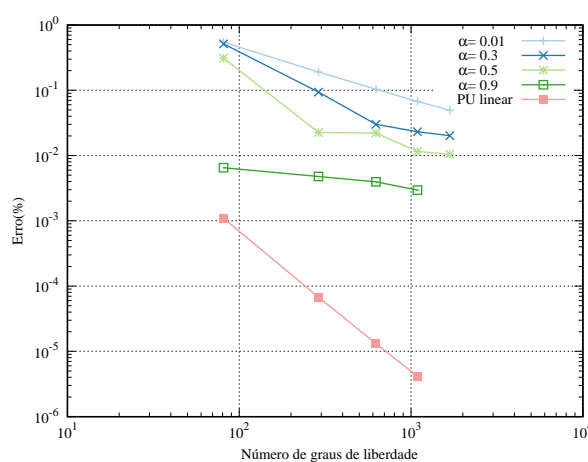
$n_{gl}$	$n_l$	PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$			PU linear		
		Uniforme	Distorcida	Muito distorcida	Uniforme	Distorcida	Muito distorcida
81	1	1.33621E-01	3.12088E-01	1.81564E-01	1.19228E-03	1.09788E-03	7.15956E-04
289	2	1.01142E-02	2.26132E-02	1.44058E-02	7.63511E-05	6.75715E-05	4.35170E-05
625	3	9.34368E-03	2.21817E-02	1.31491E-02	1.50121E-05	1.31705E-05	8.41529E-06
1089	4	4.89906E-03	1.15926E-02	7.01653E-03	4.73637E-06	4.14211E-06	2.63346E-06
1681	5	4.33262E-03	1.04849E-02	6.23545E-03	1.93764E-06	NC	NC

\*NC - não computado.

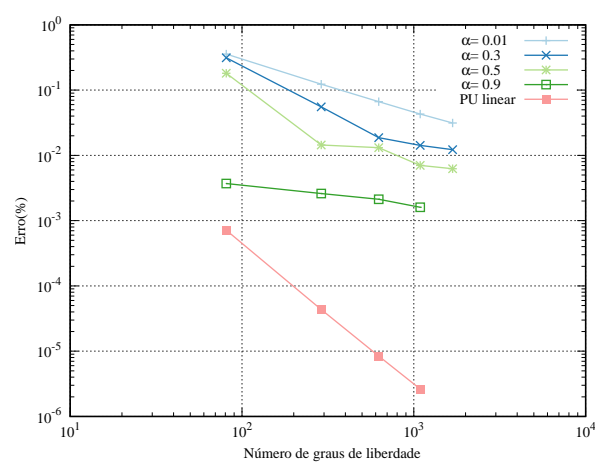
TABELA 26 – Malhas distorcidas: erros percentuais da solução aproximada para a 81ª frequência de vibração com o  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

$n_{gl}$	$n_l$	PU flat-top $\alpha = 0.5$			PU linear		
		Uniforme	Distorcida	Muito distorcida	Uniforme	Distorcida	Muito distorcida
81	1	6.16983E+01	5.12718E+02	5.06897E+02	8.02146E+01	4.92909E+02	4.85737E+02
289	2	2.20241E+00	3.47699E+01	8.42018E+00	1.94740E-02	3.24029E+01	7.68212E+00
625	3	7.01711E-02	4.07836E-01	5.70033E-01	3.20151E-03	2.75585E-02	1.54019E-01
1089	4	5.90980E-02	1.87806E-01	3.35587E-01	9.51570E-04	6.83520E-03	3.67792E-02
1681	5	3.06844E-02	1.07778E-01	2.02765E-01	3.78800E-04	NC	NC

\*NC - não computado.

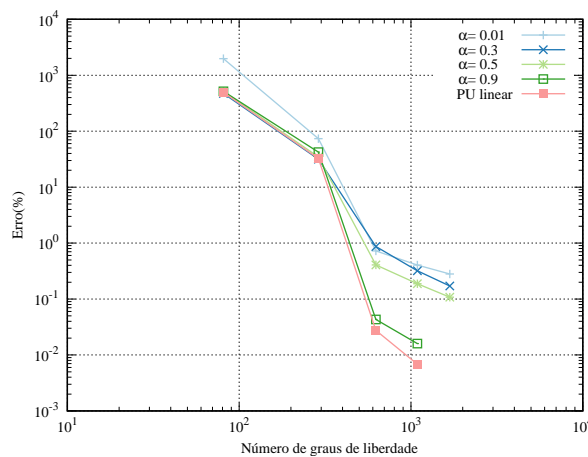


(a) malha distorcida

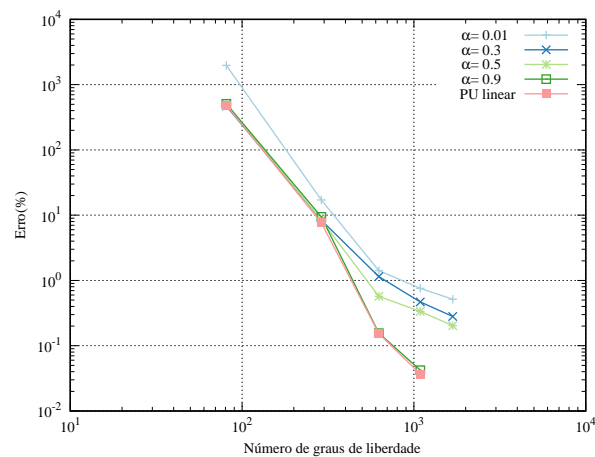


(b) malha muito distorcida

FIGURA 86 – Malhas distorcidas: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento o  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.



(a) malha distorcida



(b) malha muito distorcida

FIGURA 87 – Malhas distorcidas: convergência para a 81ª frequência natural com enriquecimento o  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

### 7.4.8 Refino de malha

Dando continuidade à investigação sobre a PU *flat-top*, agora verifica-se o comportamento do condicionamento e precisão sobre malhas com refino  $h$ . Para essa análise consideram-se 4 malhas uniformes com tamanhos distintos: (i) primeiro tomando os lados da membrana e dividindo ao meio, criando  $2 \times 2$  elementos ( $h = 1/2$ ); (ii) depois dividindo ao meio novamente, criando  $4 \times 4$  elementos ( $h = 1/4$ ); (iii) e assim por diante,  $8 \times 8$  elementos ( $h = 1/8$ ); e (iv)  $16 \times 16$  elementos ( $h = 1/16$ ). O caso  $h = 1/2$  representa a mesma malha uniforme utilizada no exemplo anterior, figura 62, e as demais estão representadas na figura 88. As demais propriedades: dimensionais, materiais, condições de contorno e solução analítica são as mesmas do problema original.

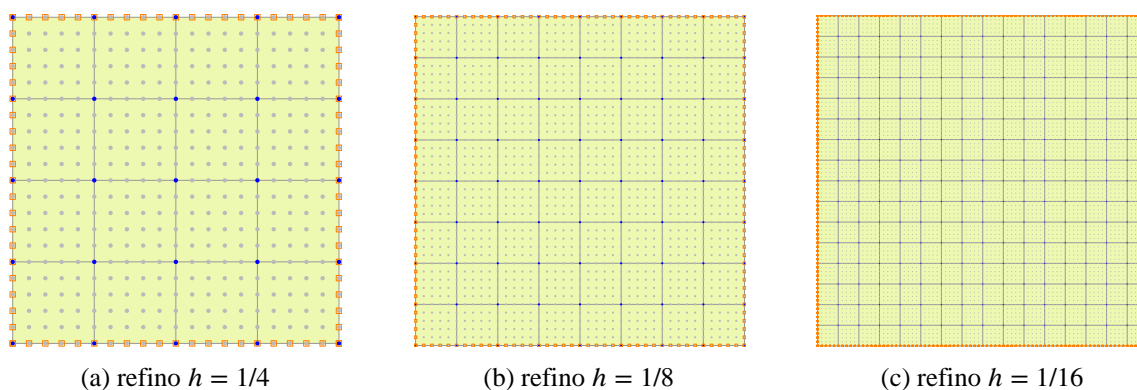


FIGURA 88 – Membrana engastada: malhas refinadas.

Os resultados para os números de condição das matrizes de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$  e massa  $\kappa(\mathbf{M})$ , para as malhas refinadas com a PU *flat-top* e um nível enriquecimento, são apresentados na figura 89.

Apesar de uma pequena diferença para o caso  $h = 1/2$ , observa-se que os números das matrizes de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$  e massa  $\kappa(\mathbf{M})$  não são alterados com o refino  $h$ . O parâmetro  $\alpha$  continua influenciando os números de condição mas o parâmetro  $h$  não.

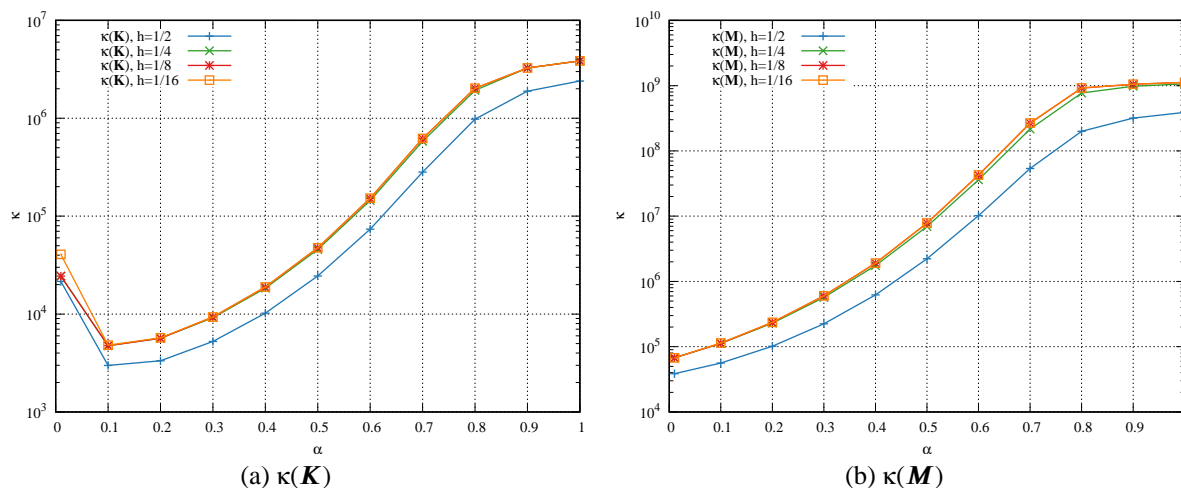
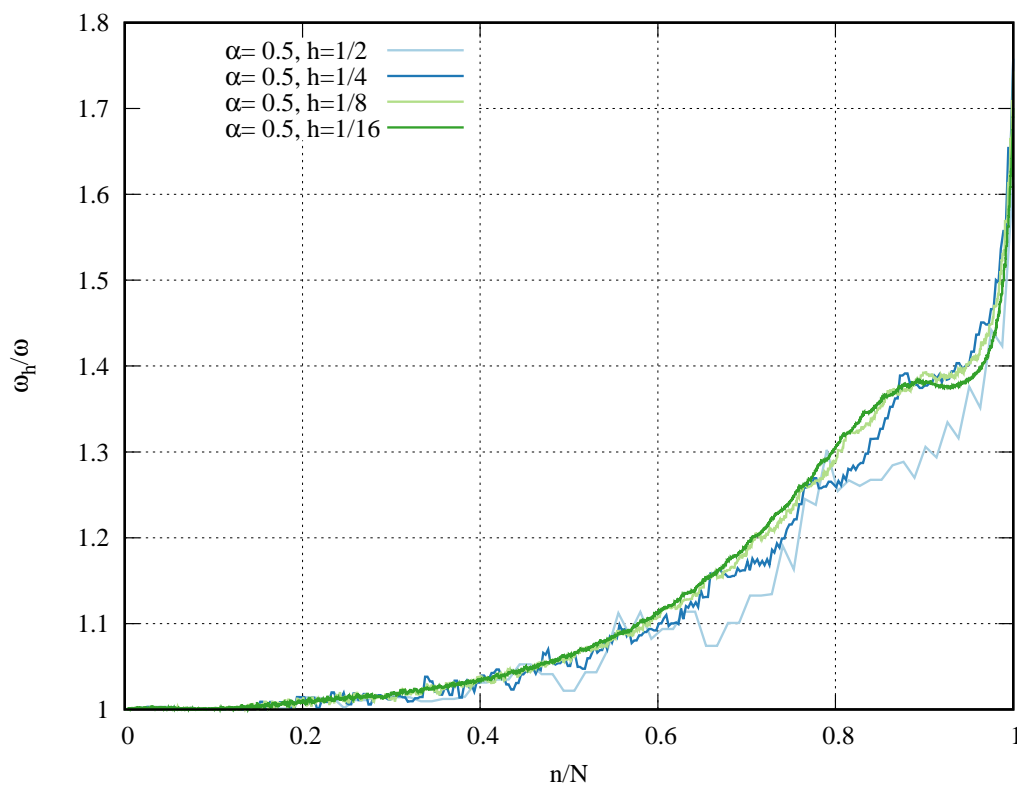


FIGURA 89 – Refino de malha: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro  $\alpha$ , com  $n_l = 1$  e  $k = 1$  para diversos tamanho de malha.

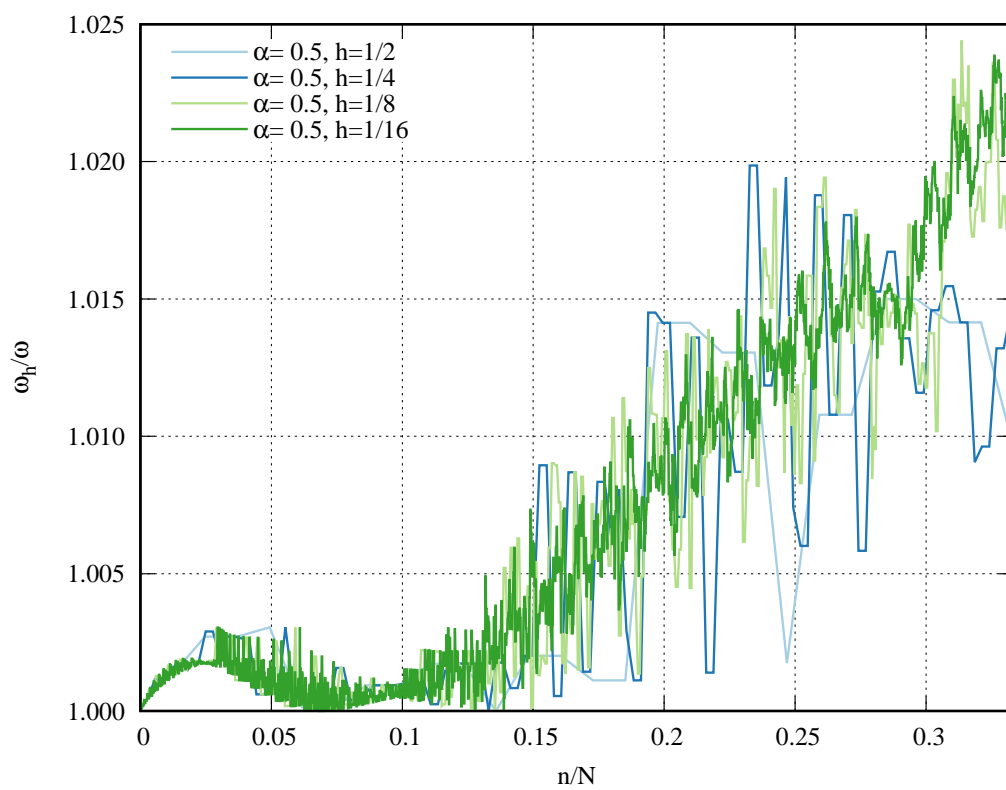
A figura 90 mostra o espectro de frequências obtidas com as quatro malhas refinadas, para um primeiro nível de enriquecimento com PU *flat-top* linear e  $\alpha = 0.5$ . Nota-se que o refino  $h$  não altera a representação do espectro, ou seja, não existe redução dos erros relativos entre as frequências aproximadas e analíticas. Como observado no início do espectro, existem pequenas variações entre as respostas aproximadas para um mesmo ponto no espectro, mas esse comportamento tende a desaparecer com a inclusão de mais frequências obtidas com malhas com um número maior de graus de liberdade.

As taxas de convergência são verificadas para a 1ª e 81ª frequências aproximadas, assim como nos exemplos anteriores. Para essa análise considerou-se a PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$  e até 5 níveis de enriquecimento padrão. A PU linear não foi considerada pois seriam possíveis somente 2 níveis de enriquecimento, conforme discutido anteriormente.

Para o caso com  $h = 1/16$  não é possível apresentar resultados para 4 ou mais níveis de enriquecimento devido à limitação de recurso computacional para a simulação do problema com mais graus de liberdade (limitação devido ao tamanho da memória ram do hardware informado na seção 6.1). Portanto essa não é uma limitação devido ao condicionamento numérico, como observado nas demais análises sobre as taxas de convergência.



(a)



(b)

FIGURA 90 – Refino de malha: (a) espectro de frequências obtido com a PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$ ,  $n_1 = 1$  e  $k = 1$ , (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

As taxas de convergência para a primeira frequência são apresentadas na tabela 27 e figura 91(a). A malha  $h = 1/2$  apresenta a melhor taxa de convergência para a 1ª frequência, com erro percentual da ordem  $O(10^{-6})$  obtido no 4º nível de enriquecimento e com 1089 graus de liberdade (tamanho da análise). Uma resposta com erro de mesma ordem foi obtida com a malha  $h = 1/4$ , também com 4 níveis de enriquecimento, porém com 4489 graus de liberdade. As malhas  $h = 1/8$  e  $h = 1/16$  apresentam menores erros percentuais quando comparadas no mesmo nível de enriquecimento, porém com um tamanho de análise muito maior, implicando em maior custo computacional para a obtenção de uma resposta com erro percentual de mesma ordem.

A tabela 28 e a figura 91(b) apresentam as taxas de convergência para a 81ª frequência. Observa-se que os erros percentuais para as malhas menos refinadas são altos quando considerado os resultados com somente o primeiro nível de enriquecimento, porém as taxas de convergência das malhas  $h = 1/2$  e  $h = 1/4$  são mais altas que as taxas das outras duas malhas mais refinadas, entregando assim uma resposta com menor erro percentual e com menor custo computacional. Os resultados obtidos com a malha  $h = 1/16$  não foram melhores que os resultados obtidos para a malha  $h = 1/8$ .

Enquanto a figura 91 apresenta os resultados pela perspectiva do processo de enriquecimento (refino  $p$ ) a figura 92 apresenta os mesmos resultados porém pelo ponto de vista do refino  $h$ . Nesta representação fica mais evidente que a convergência do refino  $h$  é menor que a convergência obtida com a aplicação de mais níveis de enriquecimento.

TABELA 27 – Refino de malha: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

$n_l$	$h = 1/2$		$h = 1/4$		$h = 1/8$		$h = 1/16$	
	$n_{gl}$	Erro (%)	$n_{gl}$	Erro (%)	$n_{gl}$	Erro (%)	$n_{gl}$	Erro (%)
1	81	1.33621E-01	361	4.26889E-02	1521	1.13156E-02	6421	2.87015E-03
2	289	1.02949E-02	1255	3.36420E-03	5041	8.96959E-04	20449	2.27834E-04
3	625	3.28297E-04	2601	1.07701E-04	10609	2.87415E-05	42849	7.33344E-06
4	1089	4.77475E-06	4489	1.55464E-06	18225	4.14523E-07	73441	-

TABELA 28 – Refino de malha: erros percentuais da solução aproximada para a 81ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

$n_l$	$h = 1/2$		$h = 1/4$		$h = 1/8$		$h = 1/16$	
	$n_{gl}$	Erro (%)	$n_{gl}$	Erro (%)	$n_{gl}$	Erro (%)	$n_{gl}$	Erro (%)
1	81	6.16983E+01	361	1.06047E+00	1521	7.09614E-02	6421	1.53756E-01
2	289	6.39790E-01	1255	2.05344E-02	5041	4.82404E-03	20449	1.16698E-02
3	625	2.89140E-03	2601	5.73370E-04	10609	1.50837E-04	42849	3.71171E-04
4	1089	3.40254E-05	4489	9.75584E-06	18225	2.27128E-06	73441	-

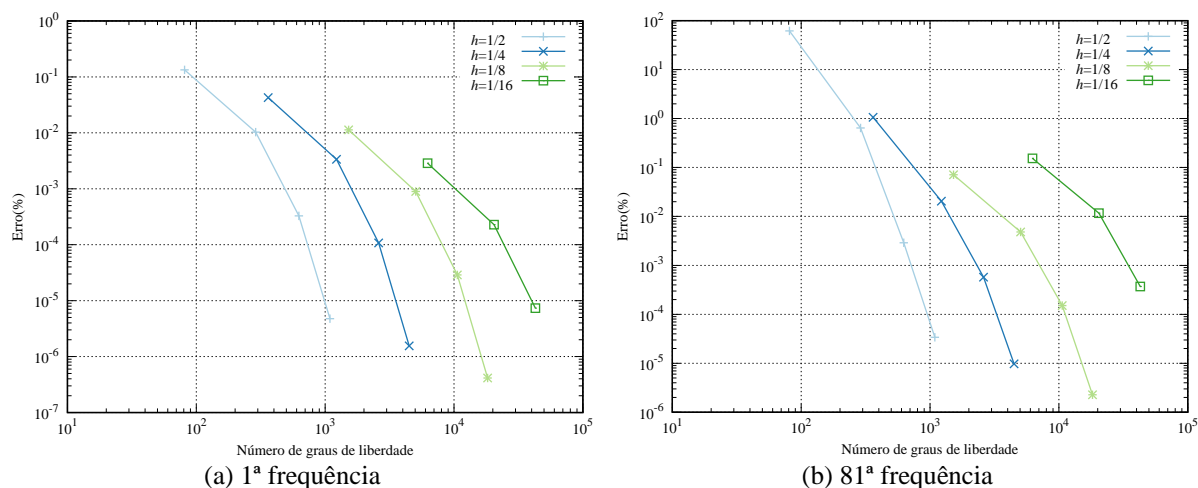


FIGURA 91 – Refino de malha: convergência para a (a) 1ª e (b) 81ª frequências naturais com enriquecimento  $\beta_j$  padrão, em função do número de graus de liberdade.

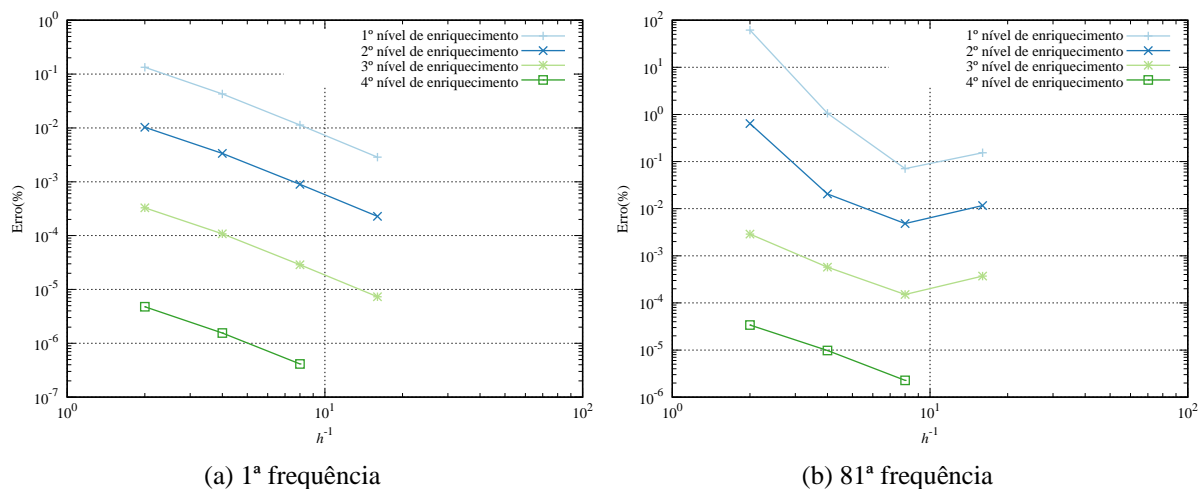


FIGURA 92 – Refino de malha: convergência para a (a) 1ª e (b) 81ª frequências naturais com enriquecimento  $\beta_j$  padrão, em função do tamanho de malha.

#### 7.4.9 Alteração na condição de contorno

Ainda considerando o problema de vibrações livres em membrana, o objetivo agora é verificar as alterações no condicionamento e precisão das respostas devido a uma pequena modificação da condição de contorno do problema. Consideram-se as mesmas propriedades do exemplo anterior, porém sem o engastamento em metade dos lados direito e superior, conforme mostrado na figura 93. Agora ponto C está totalmente livre.

A mesma malha uniforme com quatro elementos finitos é adotada, porém com as alterações nas condições de contorno. Na figura 93(b), os pontos destacados pelos pequenos

quadrados em cor laranja são os nós ou graus de liberdade sujeitos à condição de contorno do engastamento, representados assim em concordância com a definição deste problema.

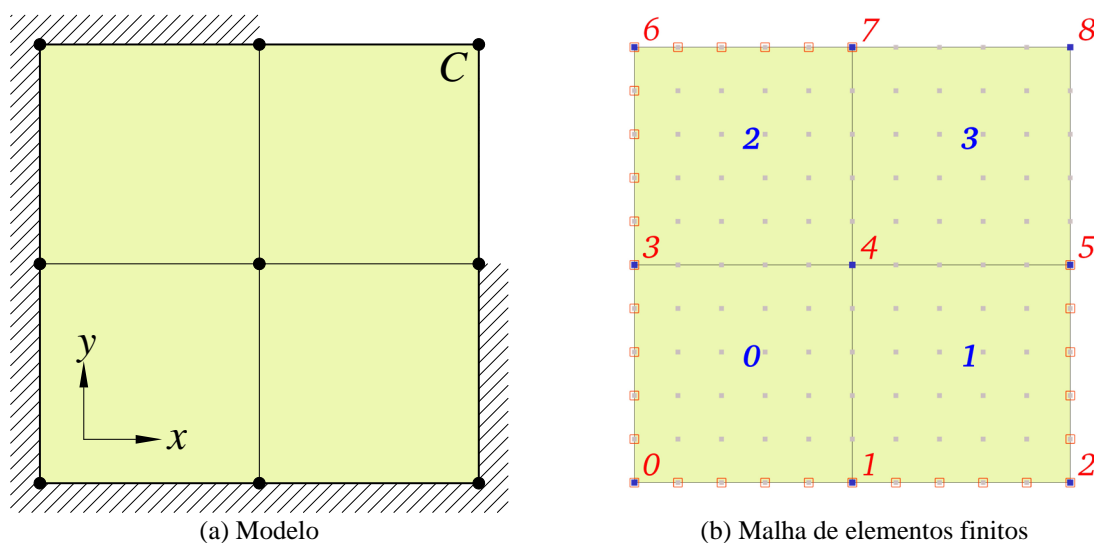


FIGURA 93 – Membrana quadrada parcialmente engastada.

O primeiro resultado é apresentado na figura 94, sobre o condicionamento das matrizes de massa e rigidez em função do parâmetro  $\alpha$  para o primeiro nível de enriquecimento. Nota-se que o comportamento dos números de condição é muito similar ao observado para a membrana engastada, com pequenas variações mas sem alterar a ordem de grandeza.

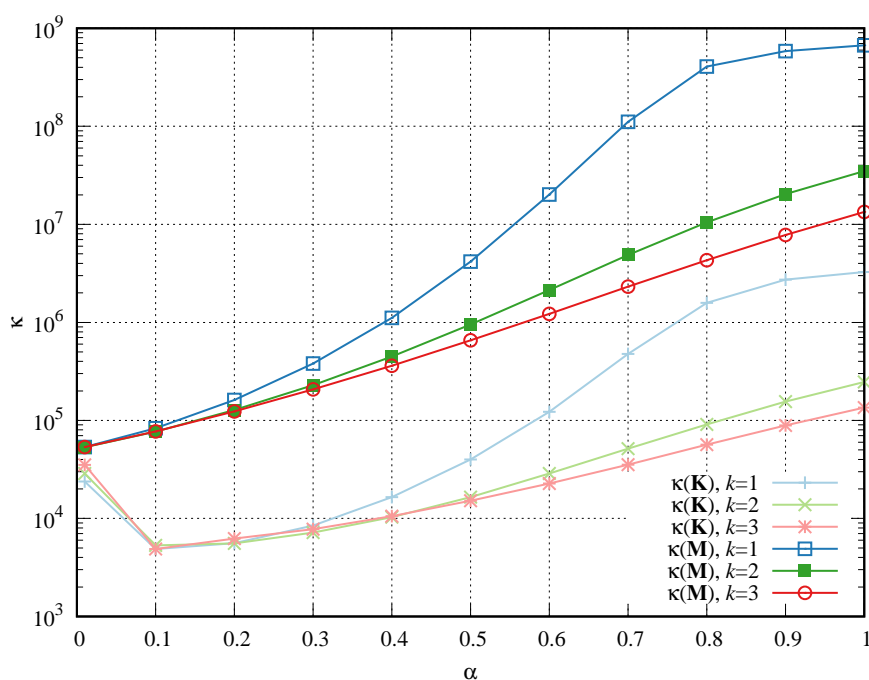


FIGURA 94 – Membrana parcialmente engastada: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro  $\alpha$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1, 2, 3$  utilizando a técnica *flat-top*.

A figura 95 apresenta os resultados para os números de condição para a condição enriquecida com três níveis, com  $\beta_j$  padrão e  $\bar{\beta}_j$  estabilizado. O comportamento observado é também similar ao caso da membrana totalmente engastada, com valores na mesma ordem de grandeza.

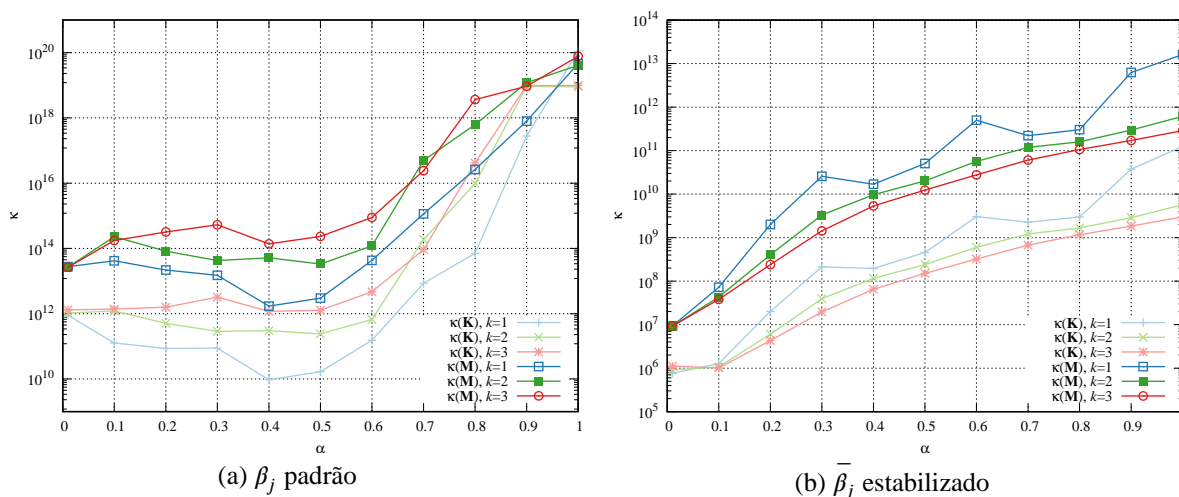


FIGURA 95 – Membrana parcialmente engastada: números de condição das matrizes de rigidez e massa, com  $n_l = 3$  e  $k = 1, 2, 3$ , para o enriquecimento: (a)  $\beta_j$  padrão e (b)  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

Uma solução aproximada com o MEFH polinomial, com grande refino  $hp$ , foi adotada como referência para comparação das respostas obtidas pelo MEFGE. A solução foi determinada com polinômios de Lobatto de ordem 11 e tamanho de malha  $h = 1/8$ . A tabela 29 apresenta os resultados da solução de referência e as soluções aproximadas pelo MEFGE com enriquecimento padrão.

A alteração de contorno deixou a membrana mais flexível e portanto as frequências naturais encontradas neste problema são menores que o caso da membrana totalmente engastada. O espectro de frequências para o primeiro nível de enriquecimento é apresentado na figura 96. A amplitude dos erros no final do espectro é muito semelhante ao observado para o problema da membrana totalmente engastada. Os resultados com parâmetro  $\alpha$  igual a 0.3 e 0.5 são melhores que a PU linear na parte final do espectro.

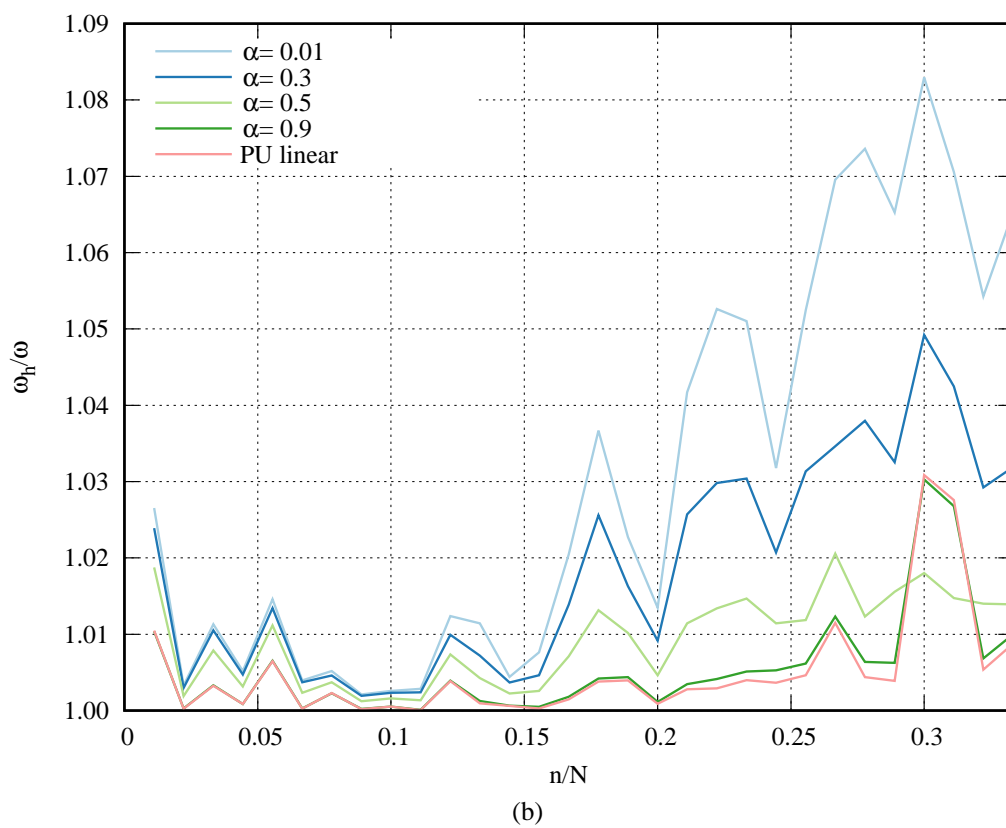
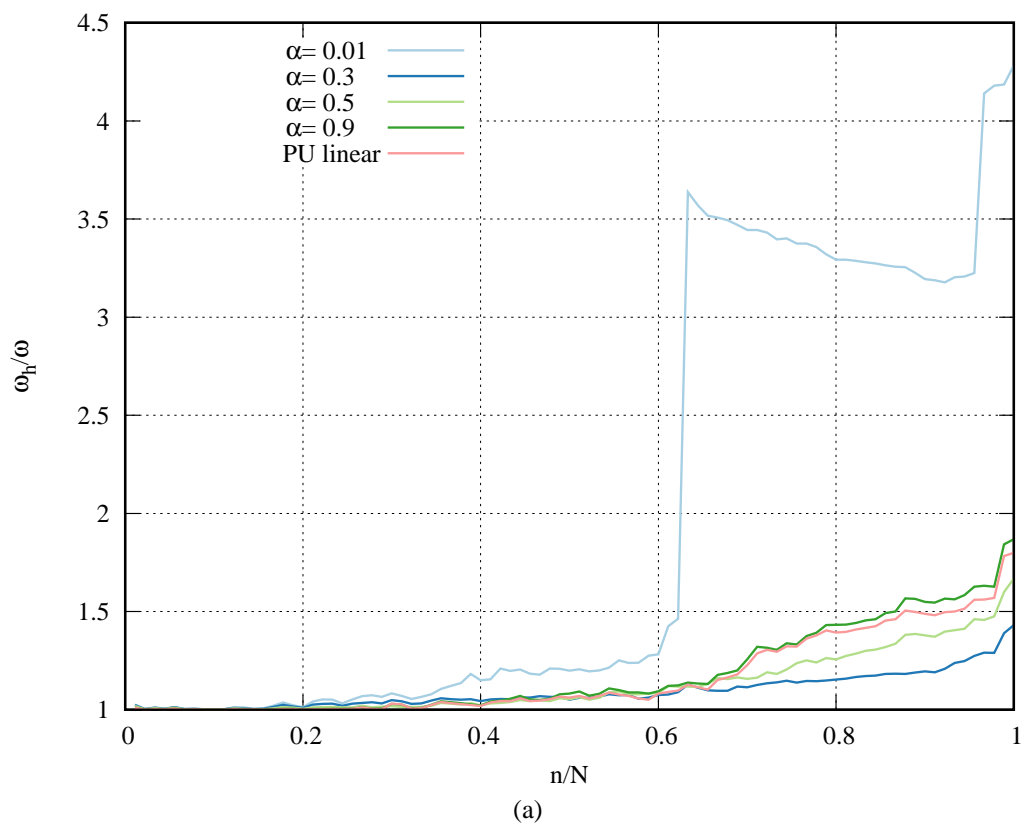


FIGURA 96 – Membrana parcialmente engastada: (a) espectro de frequências obtido com a PU *flat-top*,  $n_1 = 1$  e  $k = 1$ , (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

TABELA 29 – Membrana parcialmente engastada: frequências naturais aproximadas.

	MEFH $p = 11$ $e h = 1/8$ $ngl = 7656$	MEFG PU linear $n_l = 2$ $ngl = 306$	MEFGE PU linear $n_l = 2$ $ngl = 306$	MEFGE PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$ e $n_l = 2$ $ngl = 306$	MEFGE PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$ e $n_l = 4$ $ngl = 1122$
$n$	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)
1	3.18733846	3.20349941	3.19765088	3.21276419	3.19354125
2	5.10905175	5.10958958	5.10938383	5.11048268	5.10925068
3	6.82425413	6.83516549	6.83110323	6.84253142	6.82832673
4	7.51429225	7.51738372	7.51626550	7.52002198	7.51548131
5	8.63156108	8.65871019	8.64854058	8.67444291	8.64161820
6	9.16046278	9.16148750	9.16111378	9.16331083	9.16085660
7	9.88479514	9.89605378	9.89203542	9.90202473	9.88916353
8	10.63539101	10.63627069	10.63591997	10.63749227	10.63570183
9	11.52398189	11.52689154	11.52584773	11.52902988	11.52511048
10	11.78595554	11.78614700	11.78606167	11.78712314	11.78601788
⋮					
81	32.96065967	32.98122093	33.05782827	33.37738385	32.96541465

As taxas de convergência para a 1ª e 81ª frequências são apresentadas na tabela 30 e figura 97, considerando o enriquecimento padrão. A utilização da PU *flat-top* permitiu aplicar mais níveis de enriquecimento, e os menores erros percentuais são obtidos com  $\alpha = 0.5$ . Nota-se que os erros percentuais neste problema foram maiores que aqueles obtidos para a membrana totalmente engastada (tabelas 16 e 18, figuras 74 e 76), sugerindo que a alteração de contorno reduziu a taxa de convergência das respostas.

TABELA 30 – Membrana parcialmente engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª e 81ª frequências de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

$ngl$	$n_l$	1ª frequência		81ª frequência	
		PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$	PU linear	PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$	PU linear
90	1	1.87415E+00	1.04804E+00	3.78614E+01	4.88509E+01
306	2	7.97710E-01	3.23543E-01	1.26430E+00	2.94801E-01
650	3	3.46653E-01	NC	2.80062E-02	NC
1122	4	1.94607E-01	NC	1.44262E-02	NC
1722	5	NC	NC	NC	NC

\*NC - não computado.

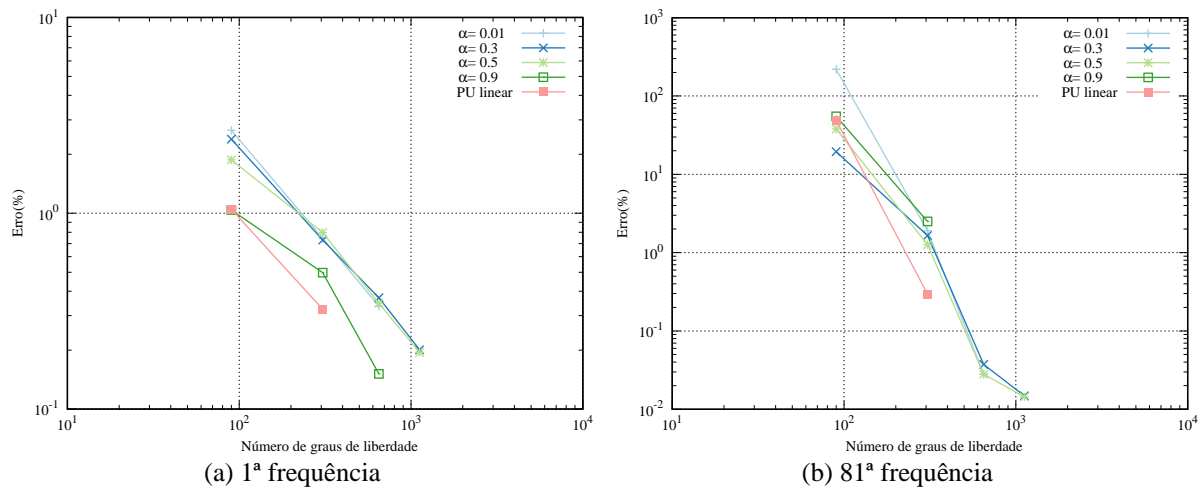


FIGURA 97 – Membrana parcialmente engastada: convergência para a 1ª e 81ª frequências naturais com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

Os seis primeiros modos de vibração obtidos pelo MEEFG PU *flat-top* com  $\alpha = 0.5$ , com um nível de enriquecimento são mostrados na figura 98.

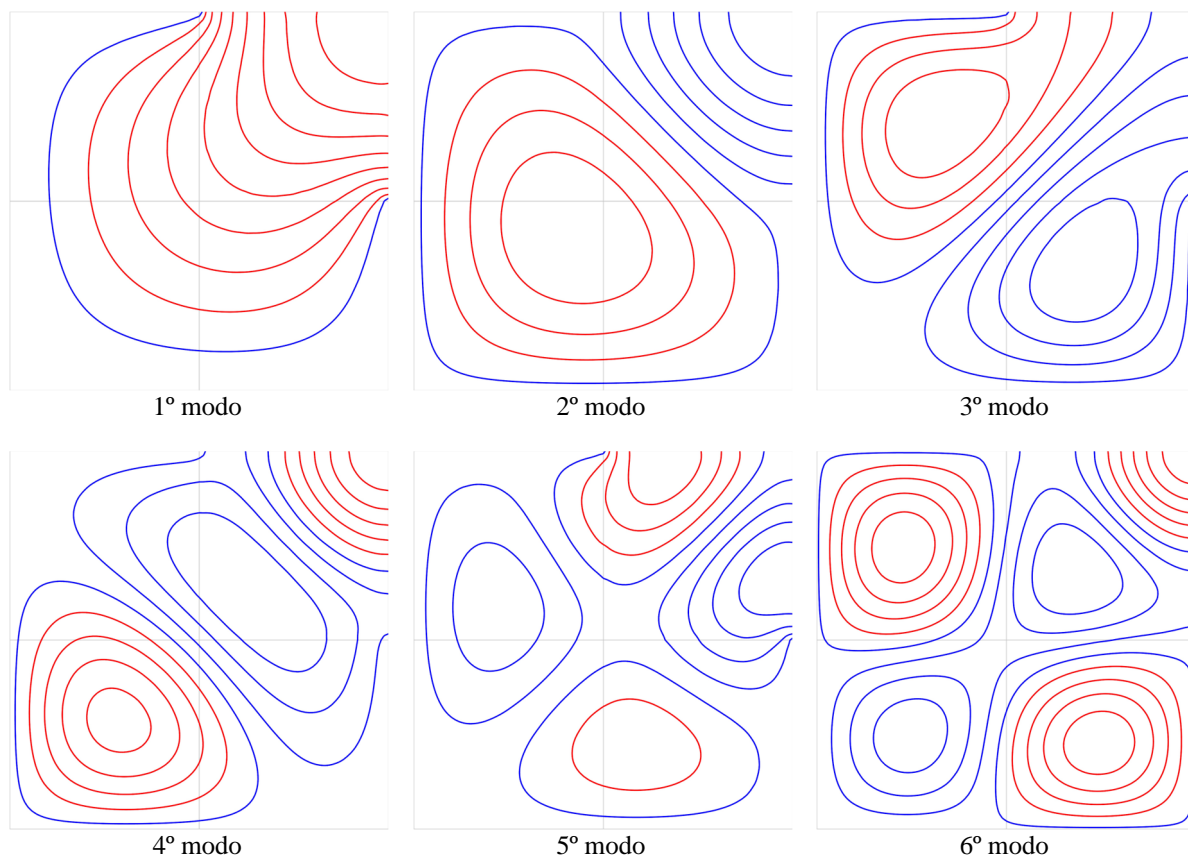
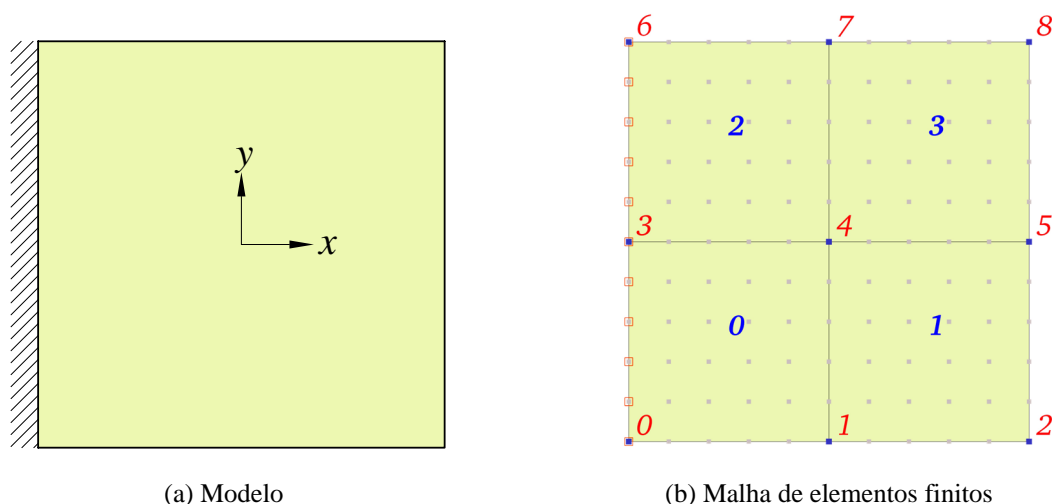


FIGURA 98 – Membrana parcialmente engastada: os seis primeiros modos de vibração obtidos com a PU *flat-top*,  $\alpha = 0.5$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1$ .

## 7.5 ESTADO PLANO DE TENSÕES (2D)

O quinto e último exemplo é uma chapa quadrada submetida ao estado plano de tensões, apresentada na figura 99. Esse é um problema bidimensional com dois graus de liberdade por nó (deslocamentos nas direções  $x$  e  $y$ ), apresentado originalmente no trabalho de Torii (2012) e também tratado por Rauen (2014) e Cittadin (2020). As propriedades do material são: módulo de elasticidade  $E = 210 \text{ GPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0.3$  e massa específica  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ . A chapa possui lados com comprimento iguais  $L_x = L_y = 1 \text{ m}$  e espessura  $t = 0.05 \text{ m}$ . A chapa está em balanço, engastada na borda esquerda, i.e. com deslocamentos horizontais e verticais restritos.



(a) Modelo

(b) Malha de elementos finitos

FIGURA 99 – Chapa engastada submetida ao estado plano de tensões.

A chapa foi discretizada com uma malha uniforme com quatro elementos finitos quadrilaterais lineares, conforme mostrado na figura 99(b). Os elementos, nós e condições de contorno são representados na mesma forma como explicado para a figura 62(b).

### 7.5.1 Número de condição em função do parâmetro $\alpha$

A figura 100 mostra os números de condição para as matrizes de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$  e massa  $\kappa(\mathbf{M})$ , considerando apenas um nível enriquecimento e diferentes graus de suavidade para a função PU *flat-top*. Os principais pontos a serem destacados são: (i) os números de condição da matriz de massa são menores que  $O(10^9)$  e os números de condição da matriz de rigidez são menores que  $O(10^7)$ , em toda faixa de  $\alpha$  e para cada grau de suavidade considerado; (ii) o

número de condição da matriz de massa é sempre maior que os de rigidez, em média duas ordens de grandeza, exceto para valores de  $\alpha = 0.01$ ; (iii) aumentando o parâmetro  $k$ , o número de condição diminui; (iv) estes comportamentos são similares aos observados para o problema da membrana engastada.

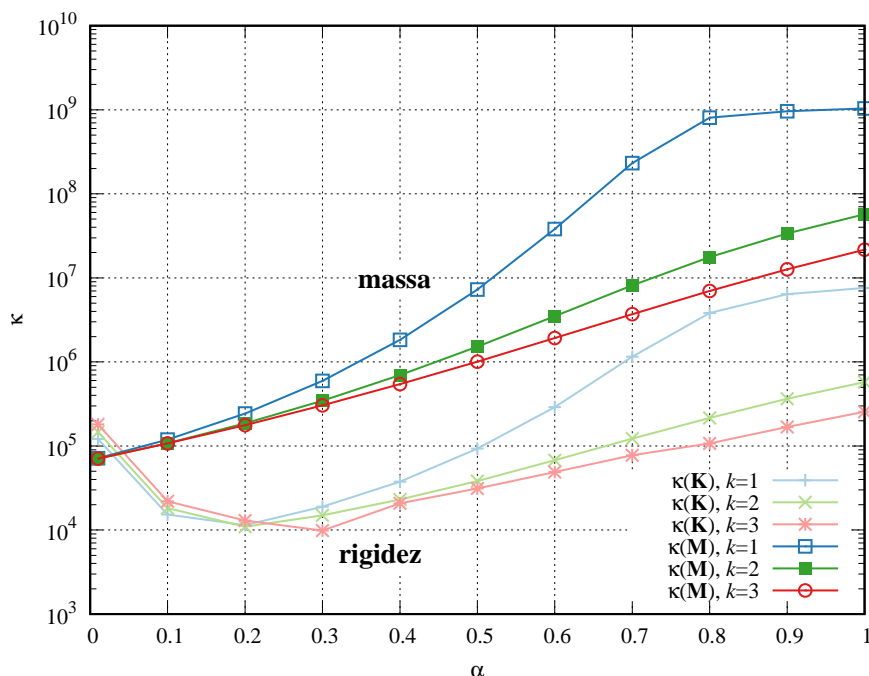


FIGURA 100 – Placa engastada: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro  $\alpha$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1, 2, 3$  utilizando a técnica *flat-top*.

A figura 101 apresenta os números de condição para o caso com três níveis de enriquecimento padrão ( $\beta_j$  e  $n_l = 3$ ). Novamente o processo de enriquecimento aumentou significativamente os números de condição de ambas as matrizes, nota-se que: (i) o valor mínimo dos números de condição foi obtido com  $0.3 < \alpha < 0.6$ ; (ii) aumentando o parâmetro  $k$ , o número de condição também aumentou; (iii) os números de condição no intervalo de  $\alpha > 0.7$  são bem elevados; (iv) estes comportamentos são similares aos observados para o problema da membrana engastada.

Considera-se agora os números de condição para o caso com três níveis de enriquecimento estabilizado ( $\bar{\beta}_j$  e  $n_l = 3$ ), que são apresentados na figura 102. Os números de condição foram menores que aqueles obtidos com o enriquecimento padrão. A ordem de grandeza mínima foi de  $O(10^7)$  para  $\alpha = 0.01$ , crescendo proporcionalmente com os valores  $\alpha$  até a ordem máxima de  $O(10^{13})$  quando  $\alpha = 1$ .

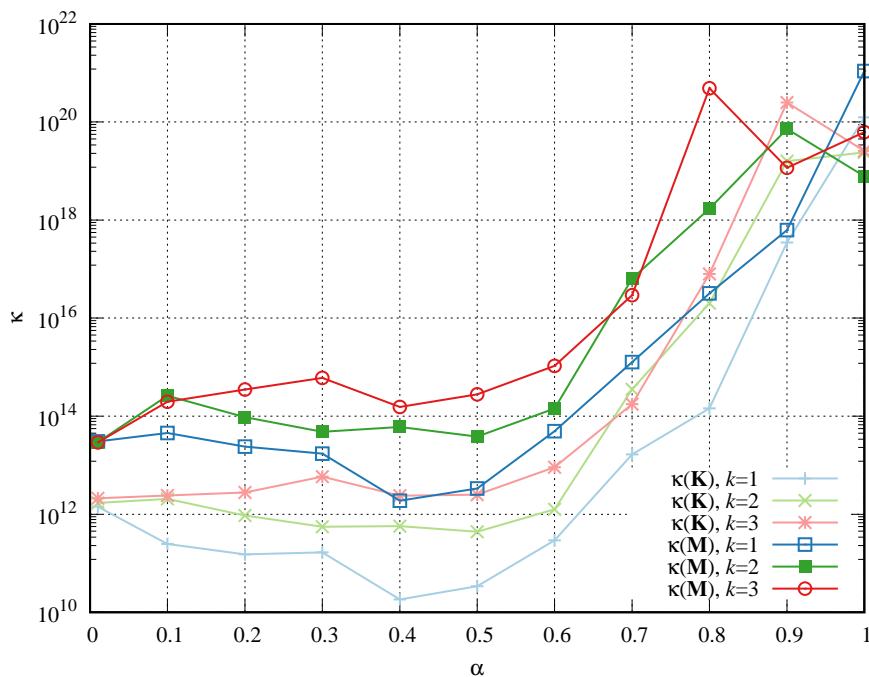


FIGURA 101 – Chapa engastada: números de condição das matrizes de rigidez e massa, com  $n_l = 3$ ,  $k = 1, 2, 3$  e  $\beta_j$  padrão.

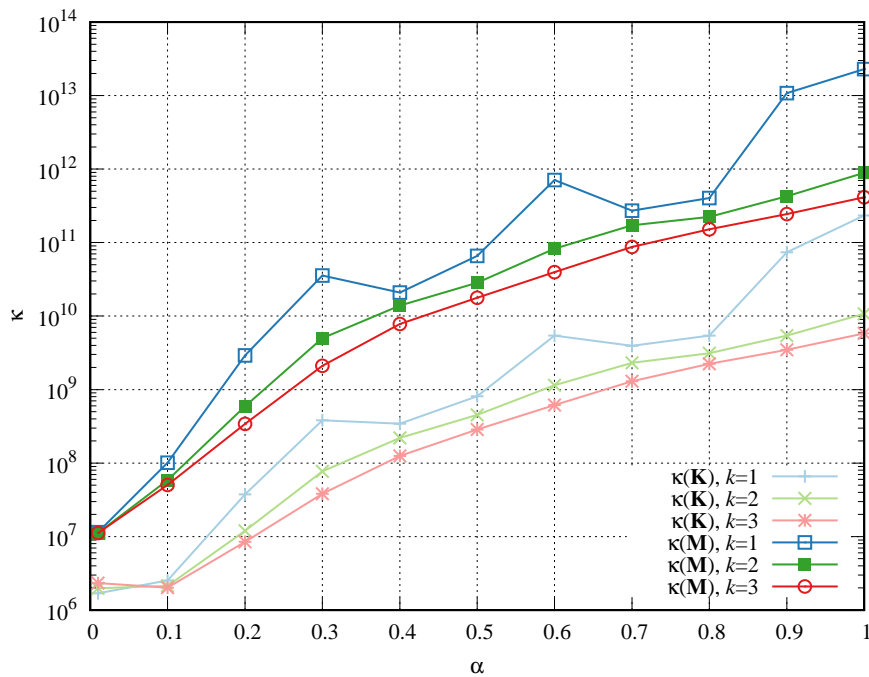


FIGURA 102 – Chapa engastada: números de condição das matrizes de rigidez e massa, com  $n_l = 3$ ,  $k = 1, 2, 3$  e  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

### 7.5.2 Número de condição e a influência do enriquecimento

As figuras 103 e 104 apresentam os números de condição para as matrizes de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$  e massa  $\kappa(\mathbf{M})$ , respectivamente, obtidos para o processo de enriquecimento padrão, considerando até cinco níveis de enriquecimento.

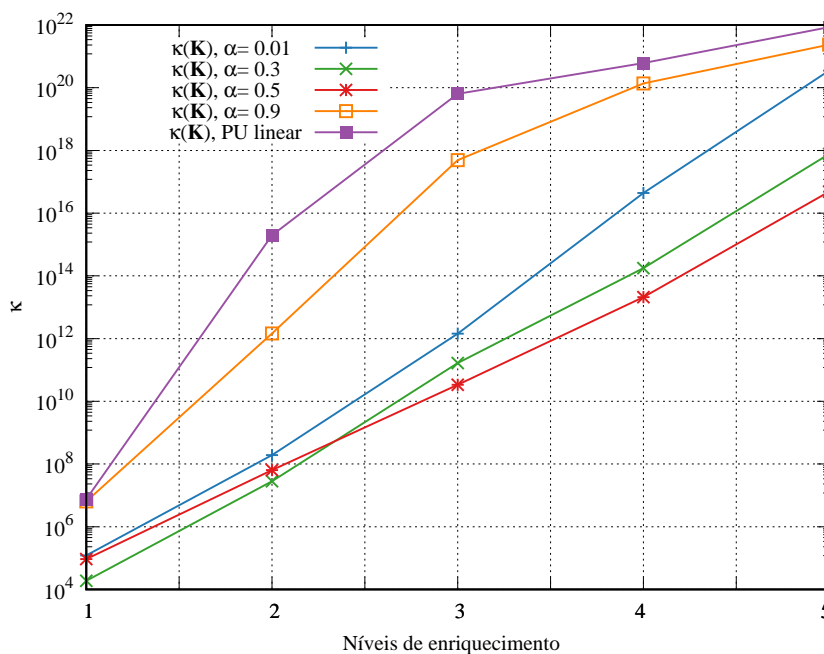


FIGURA 103 – Chapa engastada: números de condição da matriz de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$  com o enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

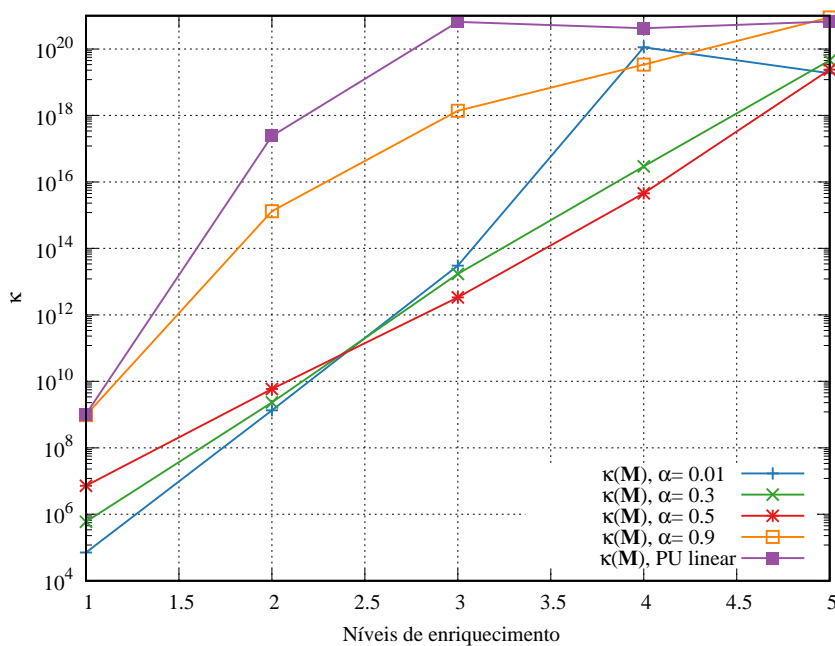


FIGURA 104 – Chapa engastada: números de condição da matriz de massa  $\kappa(\mathbf{M})$  com o enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

Os resultados novamente demonstram que o processo de enriquecimento afeta a ordem dos números de condição para ambas as matrizes, dependendo do tipo de enriquecimento, do número de níveis de enriquecimento e do parâmetro  $\alpha$ . Com a PU linear, os números de condição atingem a ordem de  $O(10^{18})$  com apenas dois níveis, enquanto com a PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$  são obtidos resultados para até cinco níveis de enriquecimento, com números de condição  $\kappa(\mathbf{M})$  e  $\kappa(\mathbf{K})$  da ordem de  $O(10^{18})$  e  $O(10^{16})$ , respectivamente, considerando  $\beta_j$  padrão.

Para o enriquecimento estabilizado, os números de condição  $\kappa(\mathbf{K})$  e  $\kappa(\mathbf{M})$  são reduzidos, conforme apresentado nas figuras 105 e 106, respectivamente, com maior valor na ordem de grandeza  $O(10^{15})$  e  $O(10^{13})$ . Os maiores números de condição são obtidos com a PU linear e observa-se a tendência de redução com menores valores de  $\alpha$ .

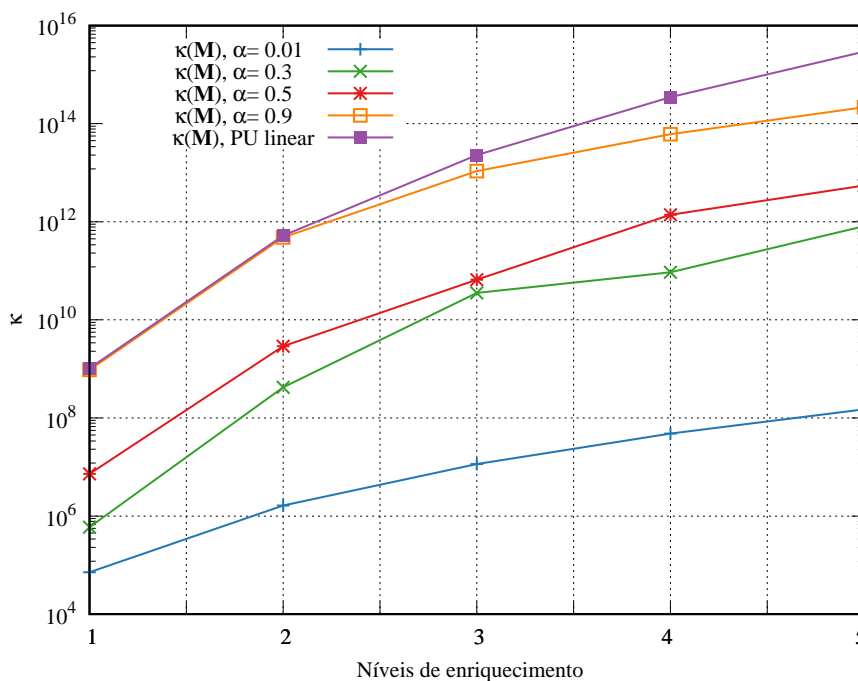


FIGURA 105 – Chapa engastada: números de condição da matriz de massa  $\kappa(\mathbf{M})$  com o enriquecimento utilizando  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

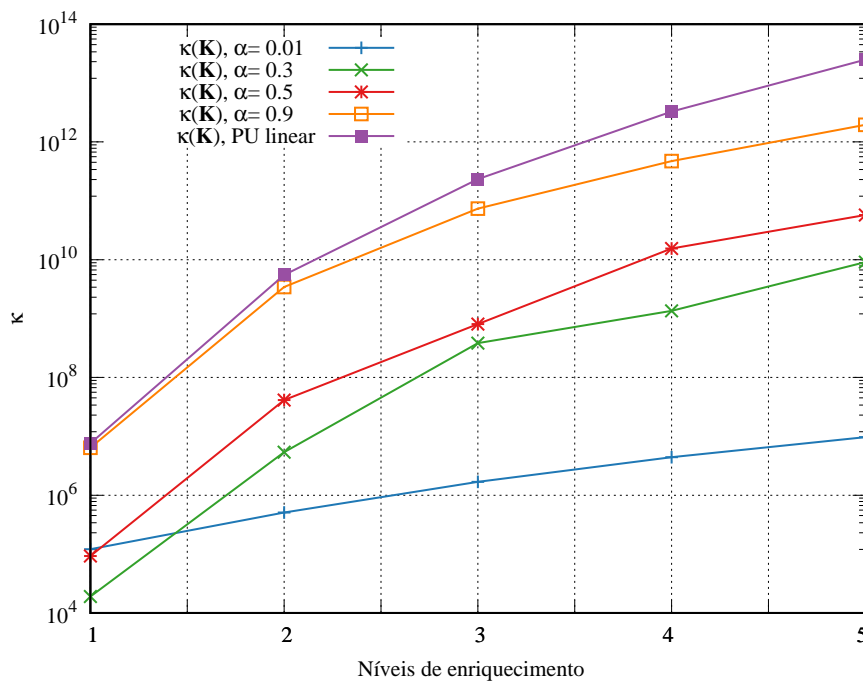


FIGURA 106 – Chapa engastada: números de condição da matriz de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$  com o enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

### 7.5.3 Número de condição e a influência do parâmetro $\beta_1$

Os números de condição das matrizes em função do parâmetro  $\alpha$  para diferentes valores de  $\beta_1$  são apresentados na figura 107, considerando a PU *flat-top* linear com apenas um nível enriquecimento.

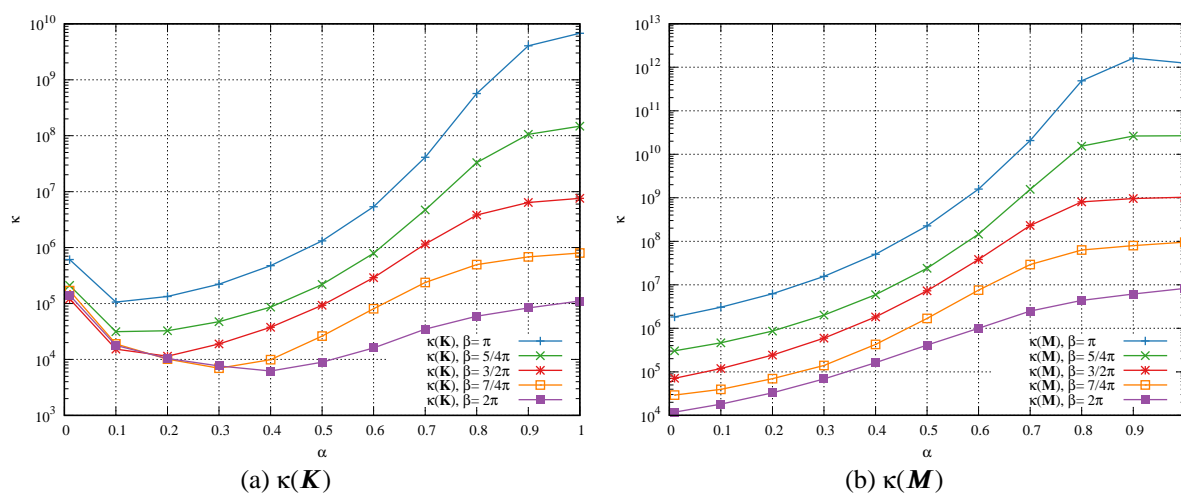


FIGURA 107 – Chapa engastada: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro  $\alpha$ , com  $n_l = 1$  e  $k = 1$ , e diferentes valores de  $\beta_1$ .

O comportamento de  $\kappa(\mathbf{K})$  para  $\alpha > 0.5$  é similar ao  $\kappa(\mathbf{M})$ , porém em média duas ordens de grandeza menor, enquanto para  $\alpha \leq 0.5$ , observa-se a redução da influência de  $\beta_1$  sobre o número de condição para menores valores a  $\alpha$ .

O comportamento de  $\kappa(\mathbf{M})$  em função do parâmetro  $\beta_1$  para o problema da placa engastada é equivalente ao problema da membrana (figura 70), e apresenta em média o dobro da grandeza dos números de condição observados no problema da barra (figura 17).

#### 7.5.4 Espectro de frequências

Para a apresentação dos espectros de frequências foi adotada novamente uma solução aproximada de referência, obtida com o refino  $hp$  com o MEFH polinomial de ordem 15 e tamanho de malha  $h = 1/4$ . A tabela 31 apresenta os resultados para as dez primeiras frequências e para a 220ª frequência de vibração, obtidos pelo MEFH e pelo MEFGE com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

TABELA 31 – Chapa engastada: frequências naturais aproximadas.

	MEFH Torii, 2012 $p = 9$ e $h = 1/4$ $n_{gl} = 2664$	MEFH $p = 15$ e $h = 1/4$ $n_{gl} = 7320$	MEFG Cittadin, 2020 $n_l = 1, \beta = \pi$ $n_{gl} = 512$	MEFG PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$ e $n_l = 5$ $n_{gl} = 3612$	MEFGE PU linear $n_l = 1$ $n_{gl} = 220$	MEFGE PU <i>flat-top</i> $\alpha = 0.5$ e $n_l = 4$ $n_{gl} = 2380$
$n$	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)	$\omega_n$ (rad/s)
1	3372.13	3372.0230	3373.2183	3372.1615	3374.6052	3372.2565
2	8092.72	8092.6345	8093.5838	8092.7447	8094.6298	8092.8205
3	9079.09	9079.0649	9079.5432	9079.0995	9080.8523	9079.1272
4	14427.23	14427.2249	14427.3984	14427.2365	14428.1508	14427.2467
5	15558.23	15558.0034	15560.7842	15558.2981	15564.8939	15558.5066
6	16511.96	16511.9510	16512.0144	16511.9573	16512.4797	16511.9627
7	20812.77	20812.7210	20813.9295	20812.7834	20818.1987	20812.8394
8	21911.61	21911.2763	21915.6880	21911.7006	21923.8274	21912.0087
9	24194.74	24194.7148	24195.6131	24194.7455	24199.8014	24194.7782
10	24349.42	24349.2463	24351.1378	24349.4630	24354.0455	24349.6137
⋮						
220		138716.2922		138716.5221	318549.8209	138717.3073

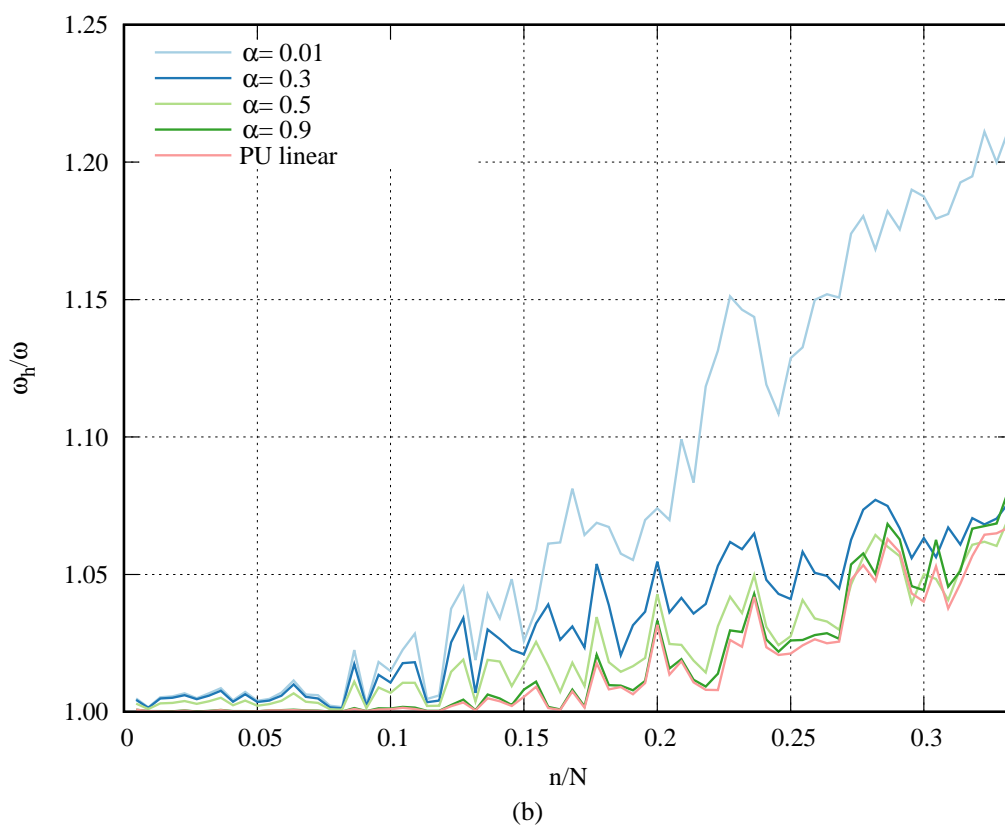
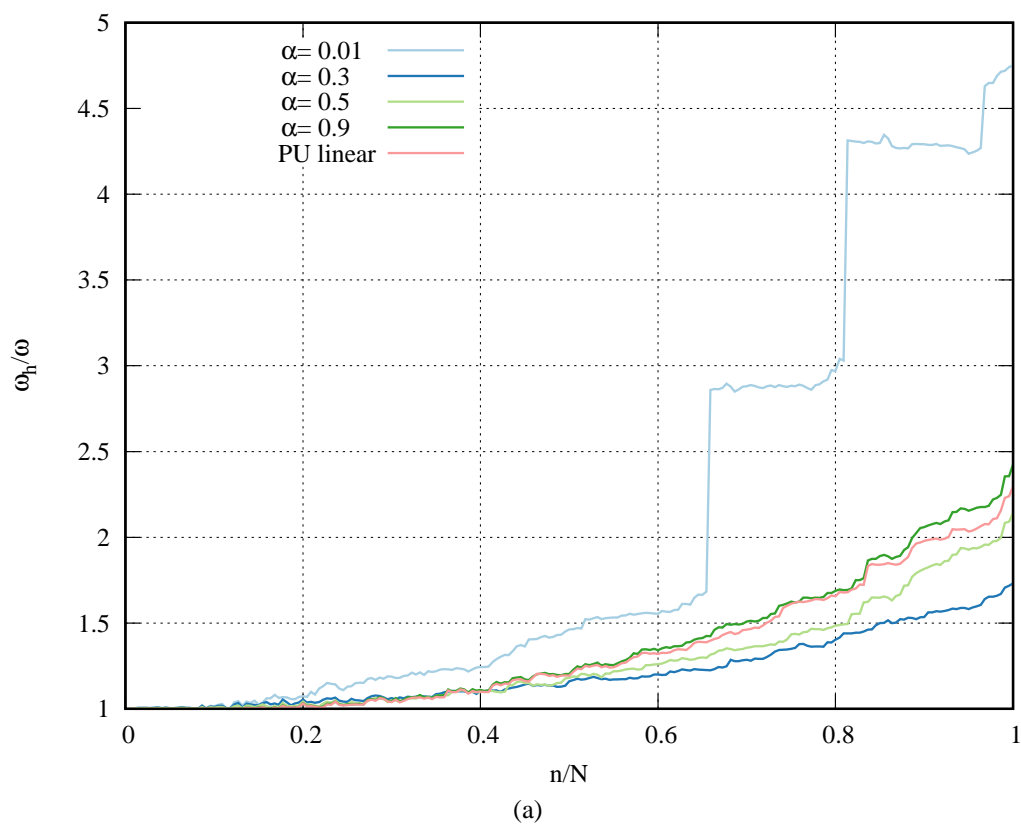


FIGURA 108 – Chapa engastada: (a) espectro de frequências obtido com a PU *flat-top*,  $n_1 = 1$  e  $k = 1$ , (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

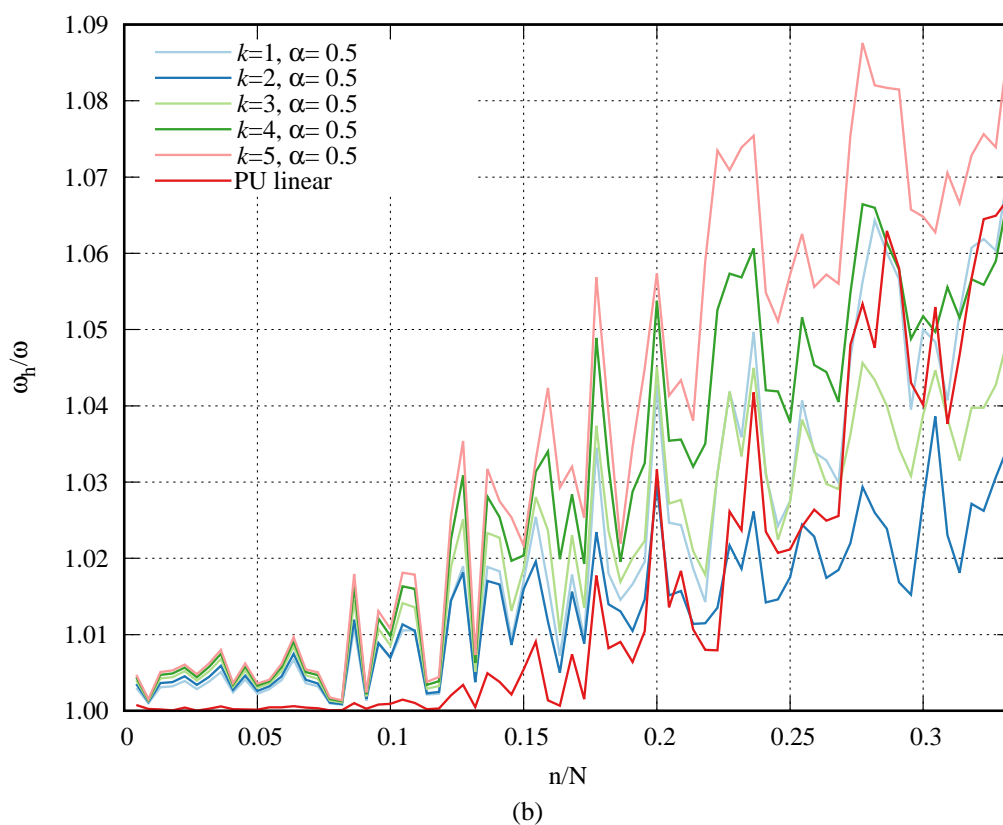
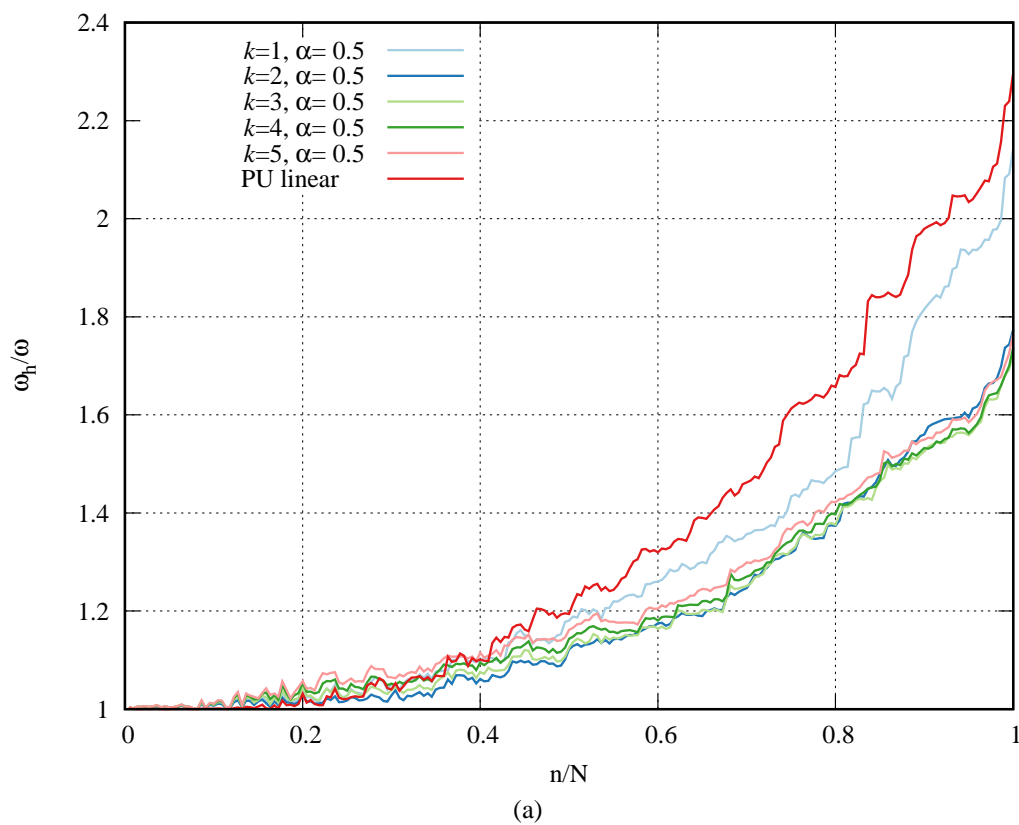


FIGURA 109 – Chapa engastada: (a) espectro de frequências para  $\alpha = 0.5$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1, 2, \dots, 5$ , e PU linear, (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

O espectro de frequências apresentado na figura 108 mostra a influência do parâmetro  $\alpha$  sobre a precisão das respostas. No fim do espectro as frequências obtidas com  $\alpha = 0.01$  apresentaram grande amplificação (500%), porém resultados obtidos com  $\alpha = 0.3$  e  $\alpha = 0.5$  foram melhores que a PU linear, comportamento semelhante ao observado para o problema da membrana engastada (figura 71). No início do espectro, a PU *flat-top* foi menos precisa que a PU linear, porém com erros relativos na mesma ordem de grandeza para  $\alpha$  igual a 0.3 e 0.5.

A figura 109 mostra que PU *flat-top* com valores de  $k > 1$  apresenta respostas para as frequências mais altas com menor erro relativo que a PU linear. No entanto, a PU linear apresenta respostas mais precisas para as frequências mais baixas.

### 7.5.5 Taxa de convergência

A convergência da solução aproximada foi avaliada para a primeira e segunda frequências e para a 220ª frequência de vibração, que corresponde ao último grau de liberdade obtido com o primeiro nível de enriquecimento.

A tabela 32 e a figura 100 mostram os erros percentuais obtidos para a primeira frequência aproximada com até 5 níveis de enriquecimento padrão. Nota-se que a solução com a PU linear é limitada somente aos dois primeiros níveis de enriquecimento, com erro percentual na ordem de  $O(10^{-2})$ , enquanto com a PU *flat-top* é possível obter respostas com erros percentuais menores, onde o menor erro percentual foi obtido com  $\alpha = 0.9$  e três níveis de enriquecimento.

Nota-se a relação entre o número de enriquecimentos obtidos nesta análise com a amplitude dos números de condição apresentadas na figura 104.

TABELA 32 – Chapa engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

$ngl$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
220	1	4.81391E-01	4.32475E-01	3.01134E-01	7.99795E-02	7.65773E-02
684	2	4.64269E-02	4.70733E-02	6.17052E-02	3.16544E-02	1.38738E-02
1404	3	1.42909E-02	1.65154E-02	1.54534E-02	5.74480E-03	NC
2380	4	NC	7.22336E-03	6.92487E-03	NC	NC

\*NC - não computado.

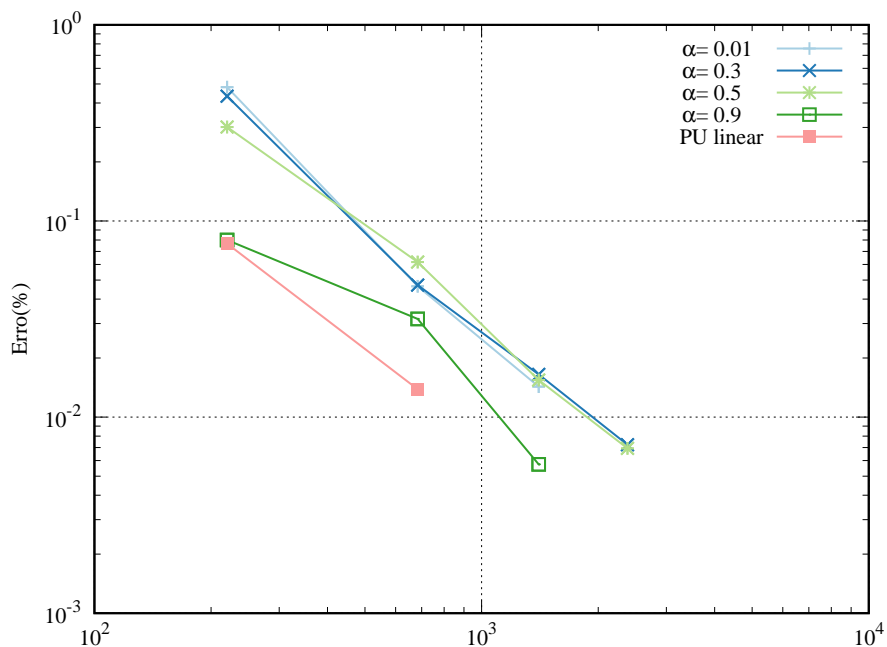


FIGURA 110 – Chapa engastada: convergência para a 1ª frequência natural, com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

Os resultados para segunda frequência são apresentados na tabela 33 e figura 111, onde observa-se comportamento similar ao caso anterior, porém com uma pequena redução no erro percentual.

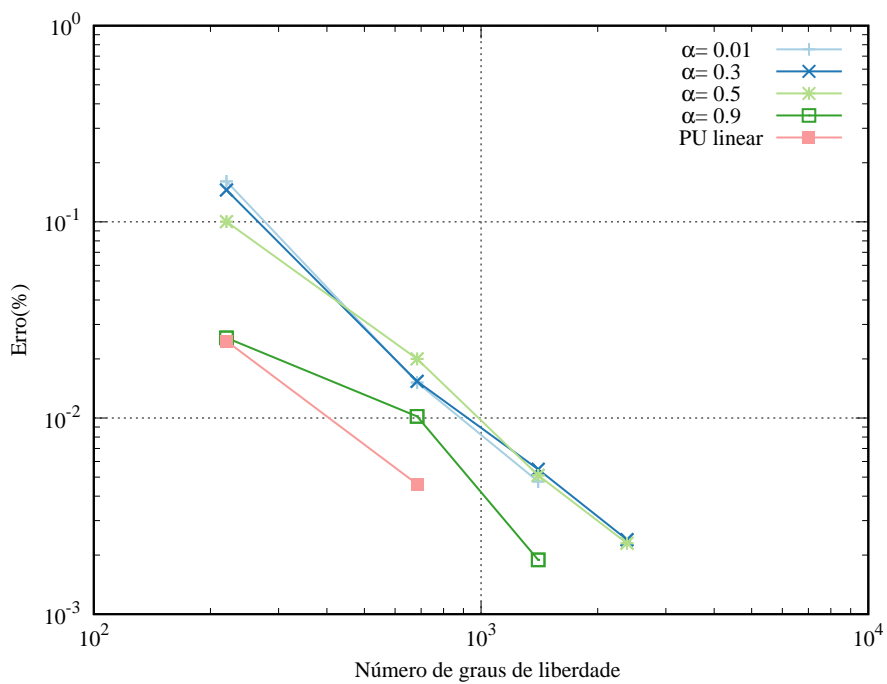


FIGURA 111 – Chapa engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 2ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

TABELA 33 – Chapa engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 2ª frequência de vibração, com o  $\beta_j$  padrão.

$n_{gl}$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
220	1	1.60958E-01	1.45441E-01	1.00130E-01	2.56346E-02	2.46554E-02
684	2	1.51499E-02	1.53814E-02	2.00015E-02	1.01894E-02	4.60652E-03
1404	3	4.74435E-03	5.47724E-03	5.10885E-03	1.88992E-03	NC
2380	4	NC	2.39734E-03	2.29836E-03	NC	NC

\*NC - não computado.

Prosseguindo para a 220ª frequência, nota-se que os resultados obtidos com a PU *flat-top* apresentam boas taxas de convergência para a frequência mais alta, com erro percentual menor que o encontrado para as frequências mais baixas. Destaca-se a limitação do uso da PU linear, que somente permite a aplicação de dois níveis de enriquecimento e retorna a resposta aproximada com um erro percentual muito elevado, conforme observado na tabela 34 e figura 112.

TABELA 34 – Chapa engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 220ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

$n_{gl}$	$n_l$	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.3$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.9$	PU linear
220	1	3.75112E+02	7.31052E+01	1.14193E+02	1.42475E+02	1.29641E+02
684	2	1.23628E+01	7.45271E+00	1.46313E+01	1.70611E+01	4.18994E+00
1404	3	8.52260E-02	1.19790E-01	1.40141E-01	-1.8672E+00	NC
2380	4	NC	1.61979E-03	7.31750E-04	NC	NC

\*NC - não computado.

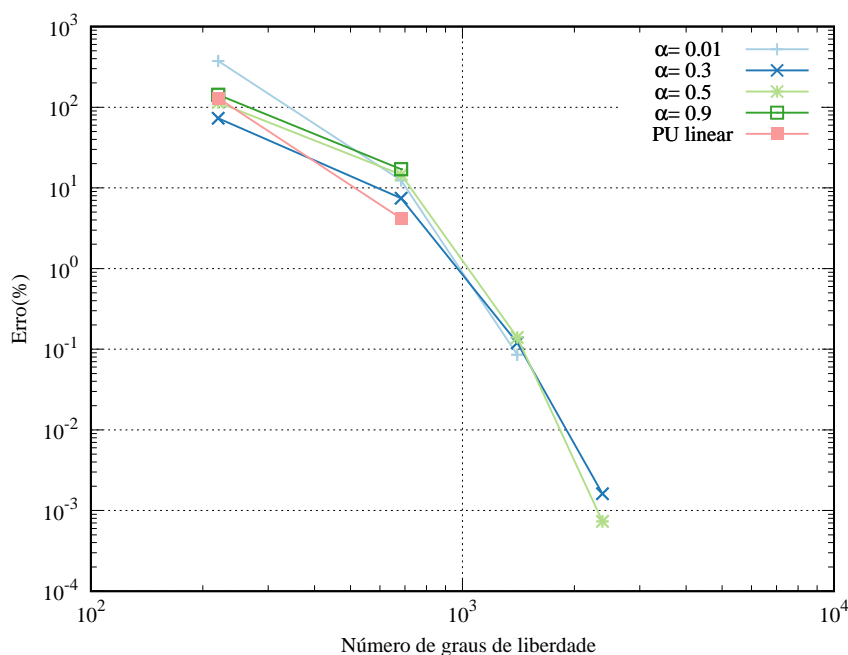


FIGURA 112 – Chapa engastada: erros percentuais da solução aproximada para a 220ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

As figuras 113 e 114 apresentam os erros percentuais obtidos com o processo de enriquecimento estabilizado, para a 1ª e 220ª frequências, respectivamente. Nota-se que o parâmetro de enriquecimento estabilizado não apresenta boas taxas de convergência, em comparação ao observado para o  $\beta_j$  padrão, principalmente para a PU *flat-top*, mesmo permitindo a aplicação de mais níveis de enriquecimento.

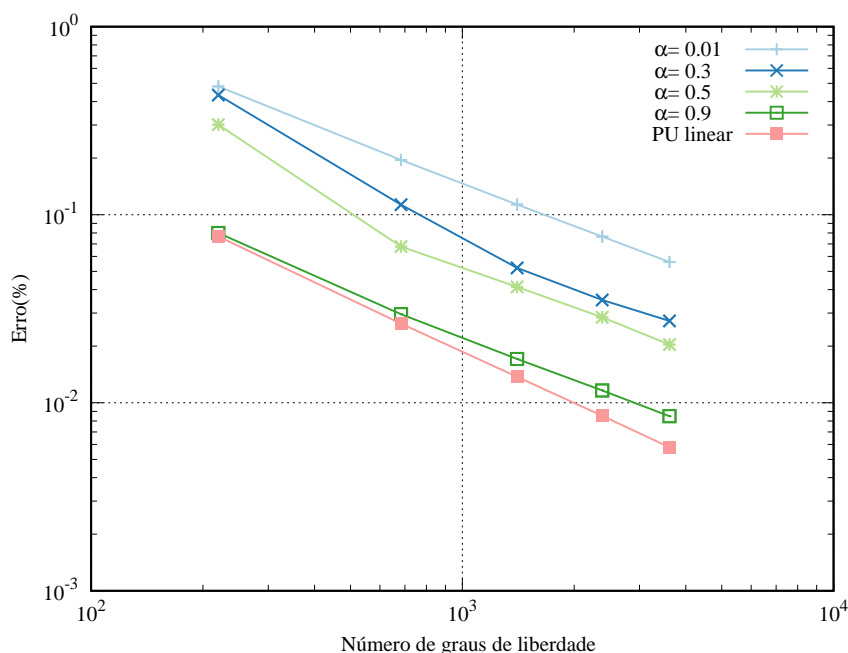


FIGURA 113 – Chapa engastada: convergência para a 1ª frequência natural com enriquecimento o  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

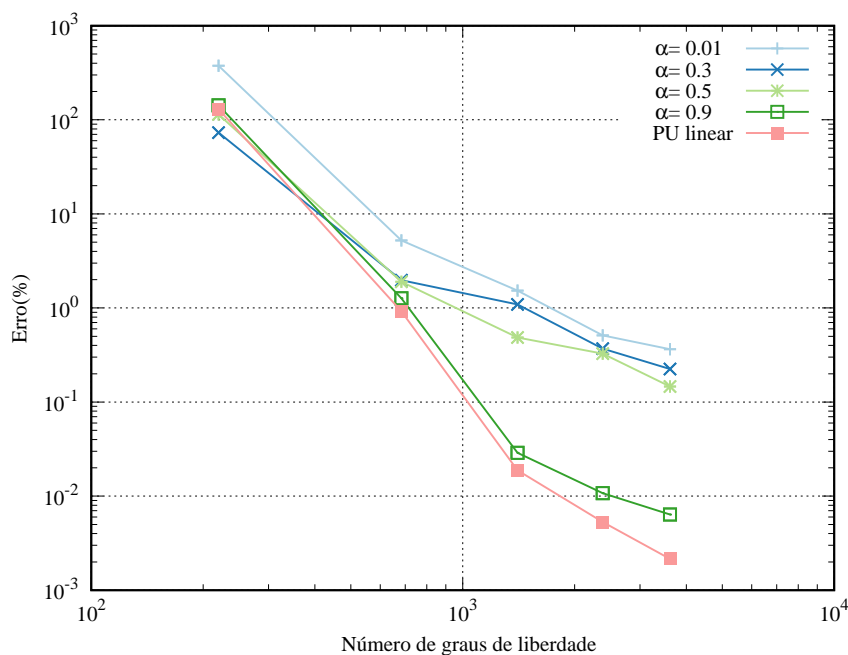


FIGURA 114 – Chapa engastada: convergência para a 220ª frequência natural com enriquecimento o  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

### 7.5.6 Modos de vibração

Por fim, a figura 115 apresenta os seis primeiros modos de vibração para a chapa engastada obtidos pelo MEFGE PU *flat-top* linear com  $\alpha = 0.5$  e um nível de enriquecimento.

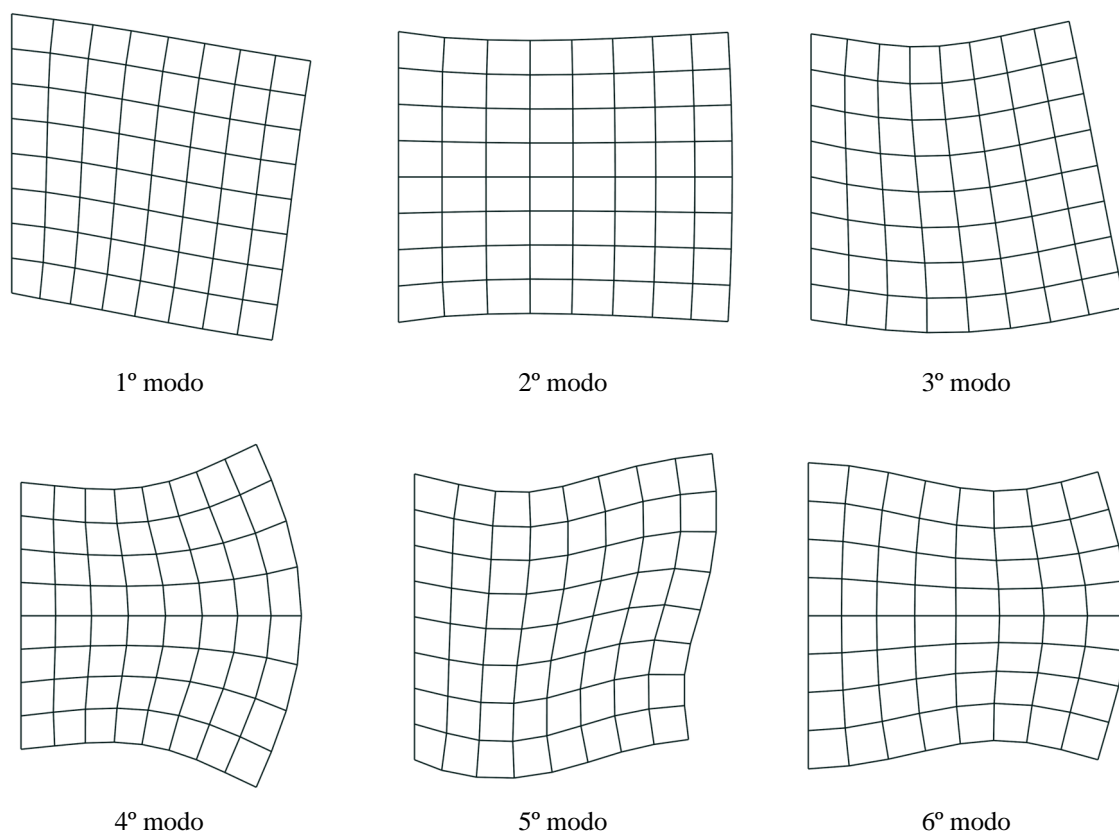


FIGURA 115 – Chapa engastada: os seis primeiros modos de vibração obtidos com a PU *flat-top*,  $h = 1/8$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1$ .

### 7.6 COMPARAÇÃO ENTRE MEFG E MEFGE

Como discutido na seção 3.2, os espaços de aproximação gerados com as funções enriquecidas pelo MEFG e pelo MEFGE são muito semelhantes, quando adotada a formulação utilizada para resolução dos problemas da análise dinâmica. Esta seção apresenta alguns resultados obtidos com a PU *flat-top* aplicada a ambos os métodos, no MEFG com a multiplicação entre PU *flat-top* e as funções de enriquecimento definidas nas equações (8) a (11), e no MEFGE com a multiplicação entre a PU *flat-top* e as funções de enriquecimento estabilizadas definidas nas equações (16) a (19).

O primeiro resultado é apresentado na figura 116, com os números de condição das matrizes de massa e rigidez para o problema da barra definido na seção 7.1. Os resultados foram obtidos com o primeiro nível de enriquecimento.

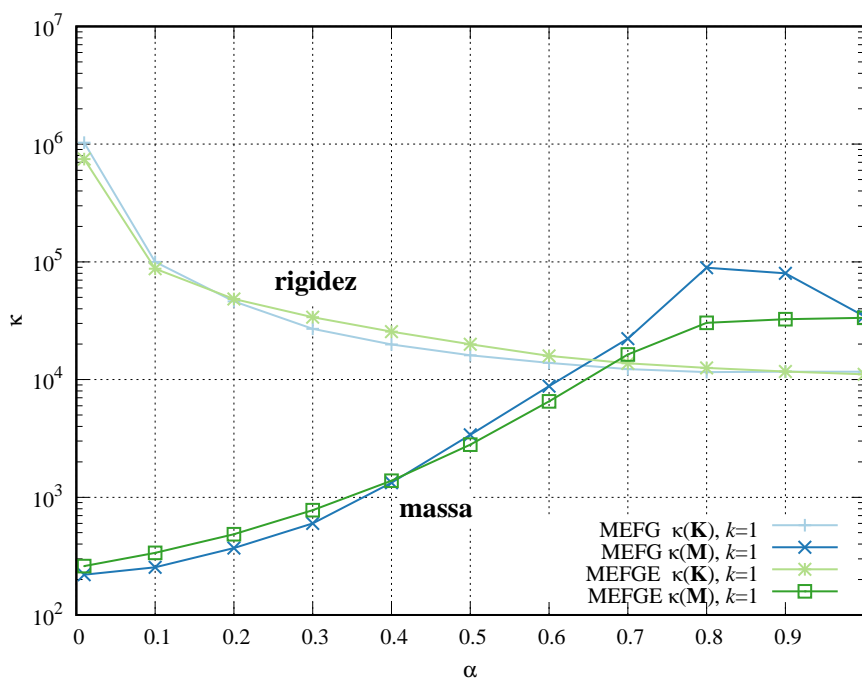


FIGURA 116 – MEFG x MEFGE: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro  $\alpha$ ,  $n_l = 1$  e  $k = 1$ , para o problema da barra.

Os números de condição estão dentro da mesma ordem de grandeza para ambos os métodos quando avaliado o mesmo valor de  $\alpha$ . No caso do MEFG, observa-se um pequeno aumento do número de condição  $\kappa(\mathbf{M})$  para  $0.7 < \alpha < 1$ . O MEFGE apresenta uma condição mais suave neste trecho e com números de condição para a matriz de massa menores que no MEFG para  $0.4 < \alpha$ , mas esse comportamento se inverte para os valores mais altos de  $\alpha$ . Para a matriz de rigidez, os números de condição obtidos pelos dois métodos são muito próximos, mas com alguns valores maiores obtidos pelo método estabilizado. Essa observação é interessante, uma vez que o MEFGE foi proposto originalmente para tratar do mau condicionamento da matriz de rigidez em problemas estáticos, mas o que se observa aqui é que os dois métodos são equivalentes para os problemas da análise dinâmica.

Explorando agora o caso com mais níveis de enriquecimento, a figura 117 apresenta os números de condição obtidos com 5 níveis de enriquecimento.

No caso do  $\beta_j$  padrão, os dois métodos apresentaram números de condição equivalentes para os mesmos valores de  $\alpha$ , comportamento observado para ambas as matrizes. Quando  $\alpha = 1$ , tradicional PU linear, o MEFGE mostra um pequeno aumento do número de condição da matriz de massa.

Os números de condição da matriz de rigidez foram praticamente os mesmos quando o  $\bar{\beta}_j$  estabilizado é aplicado, não sendo possível notar diferenças dos valores apresentados na figura 117(b). No entanto, uma diferença maior é observada para a matriz de massa, com maiores valores de  $\kappa(\mathbf{M})$  obtidos pelo o MEFGE, exceto para a PU linear.

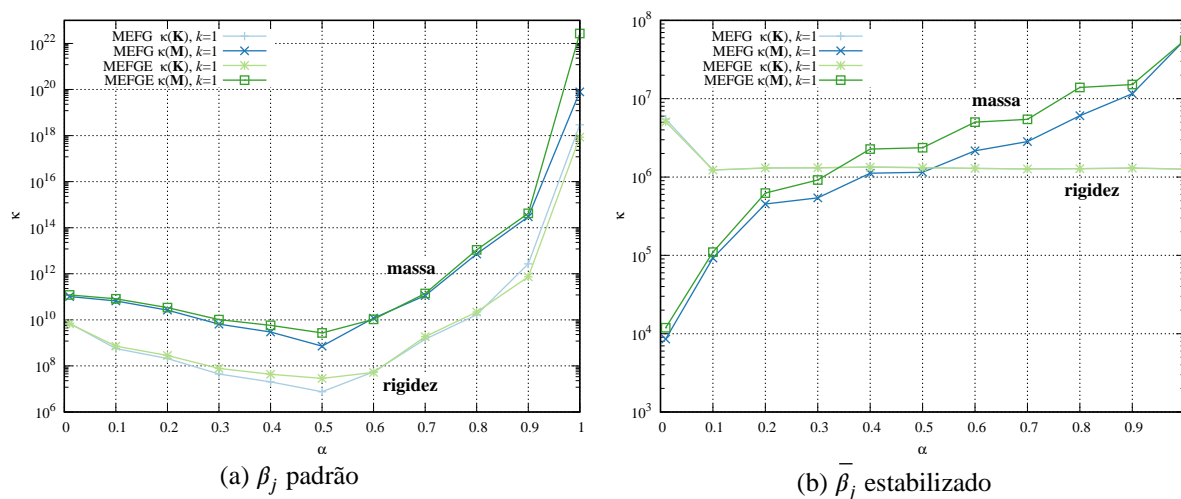


FIGURA 117 – MEFG x MEFGE: números de condição das matrizes de rigidez e massa, com  $n_l = 5$  e  $k = 1$ , para o enriquecimento: (a)  $\beta_j$  padrão e (b)  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

Considerando até 10 níveis de enriquecimento com o  $\beta_j$  padrão, as figuras 118 e 119 apresentam os números de condição das matrizes de massa e rigidez, respectivamente.

O comportamento observado com a PU *flat-top* foi similar em ambos os métodos, com a redução dos números de condição das matrizes em comparação com a PU linear, com os valores obtidos pelo MEFGE levemente superiores ao MEFG.

Na PU linear os métodos apresentaram os mesmos números de condição até a ordem de grandeza  $O(10^{15})$ . Acima desta ordem de grandeza nota-se uma oscilação para os valores muito altos, indicado uma possível influência numérica.

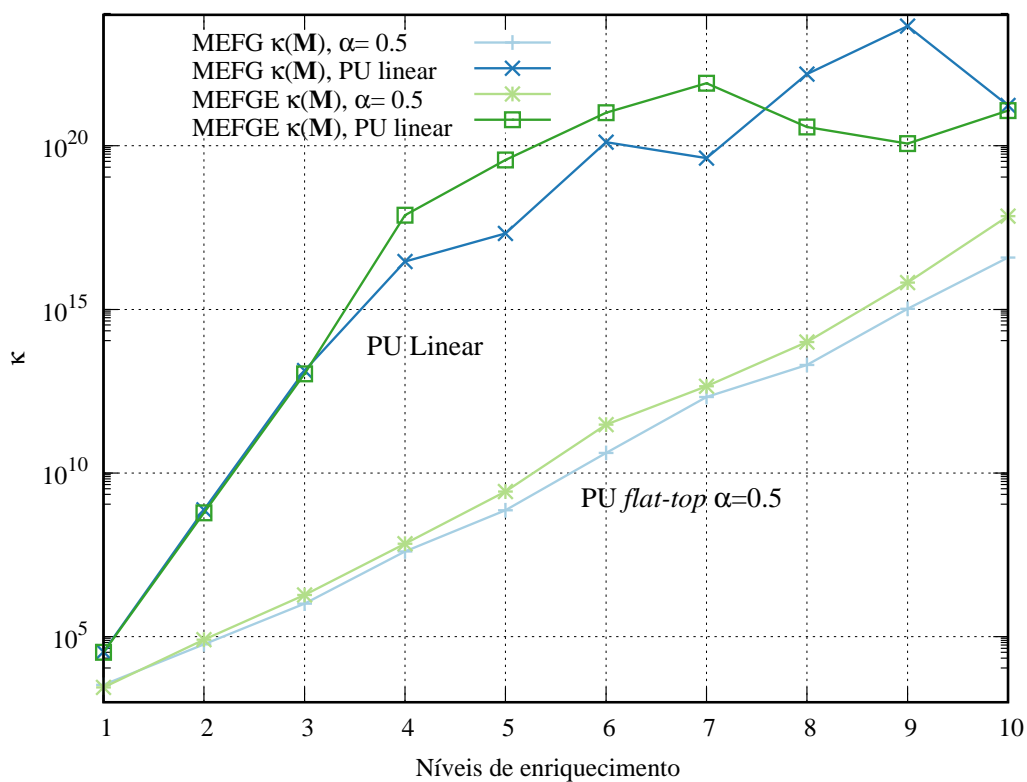


FIGURA 118 – MEFG x MEFGE: números de condição da matriz de massa  $\kappa(\mathbf{M})$  com o enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

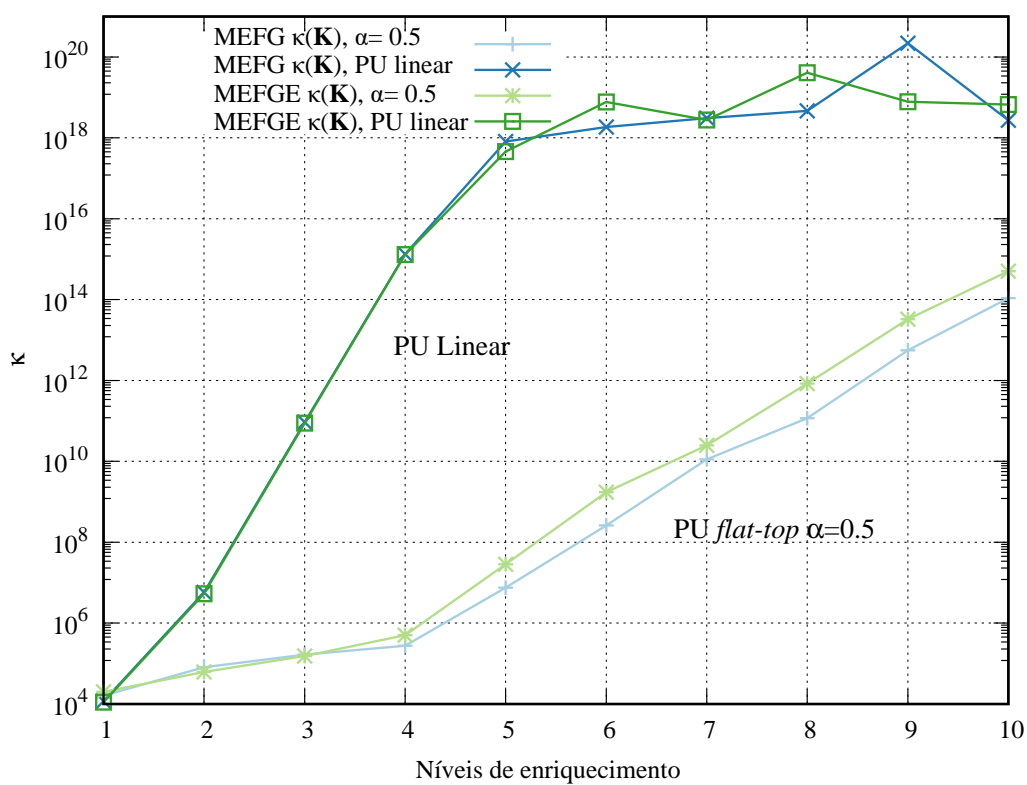


FIGURA 119 – MEFG x MEFGE: números de condição da matriz de rigidez  $\kappa(\mathbf{K})$  com o enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

A figura 120 mostra a análise correspondente ao processo de enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado. Os valores de  $\kappa(\mathbf{K})$  são praticamente idênticos em ambos os métodos e ambas as PUs, assim como observado na figura 16 para valores de  $\alpha > 0.01$ . Sobre  $\kappa(\mathbf{M})$ , a PU linear apresentou os mesmos números de condição para o MEFG e MEFGE, e no caso da PU *flat-top* os valores obtidos com o MEFGE foram um pouco superiores.

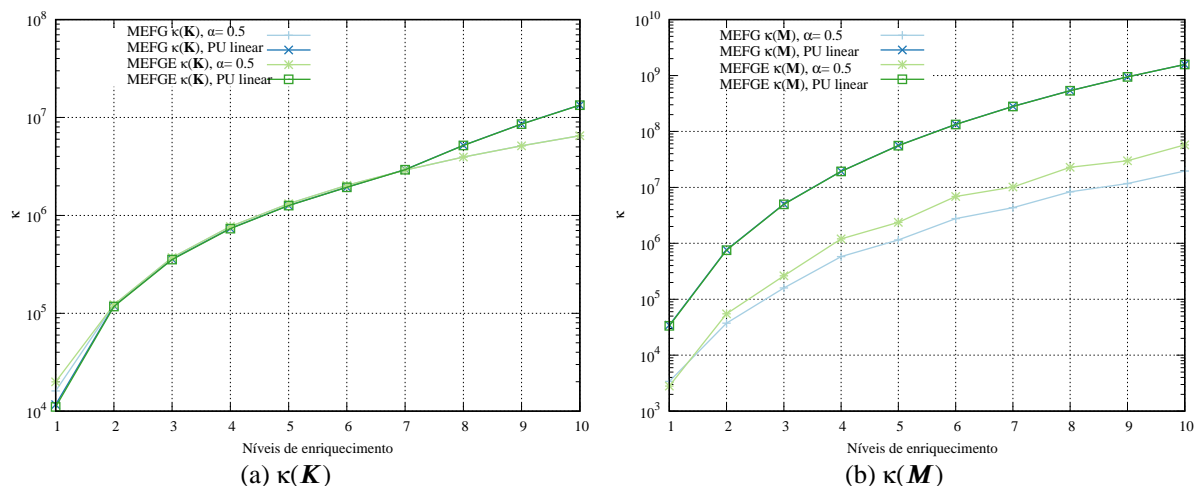


FIGURA 120 – MEFG x MEFGE: números de condição da matriz de rigidez e massa com o enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado.

Agora para comparar os espectros frequências obtidos com o MEFG e MEFGE, são apresentadas as figuras 121 a 125. As figuras 121 e 122 mostram o espectros de frequências para o 1º e 2º níveis de enriquecimento, respectivamente. Estes dois resultados foram apresentados originalmente por Weinhardt (2016) e são reproduzidos aqui. Assim como observado por Weinhardt (2016), o MEFGE apresentou maior precisão para frequências mais baixas enquanto o MEFG foi mais preciso para as frequências mais altas. Entretanto, as diferenças entre os resultados obtidos com os dois métodos foram bem pequenas, da ordem  $O(10^{-5})$  para o 1º nível e  $O(10^{-9})$  para o 2º nível.

As figuras 123, 124 e 125 mostram os espectros obtidos com a PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$  com um, dois e cinco níveis de enriquecimento padrão, respectivamente. Com a PU *flat-top* nota-se uma maior diferença entre os espectros. No caso com  $n_l = 1$ , o MEFGE apresentou melhores resultados tanto para as frequências mais altas quanto para as mais baixas. Para os maiores níveis, o MEFG apresentou respostas melhores para as frequências mais altas e o MEFGE para as frequências mais baixas.

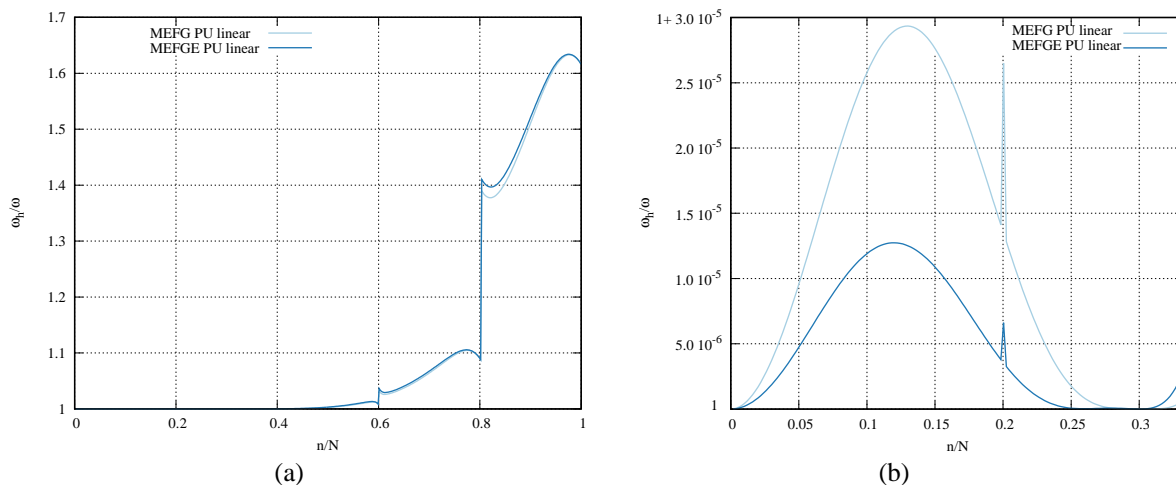


FIGURA 121 – MEFG x MEFGE: (a) espectro de frequências obtido com a PU linear e um nível de enriquecimento, (b) ampliação da região entre 0 e 1/3.

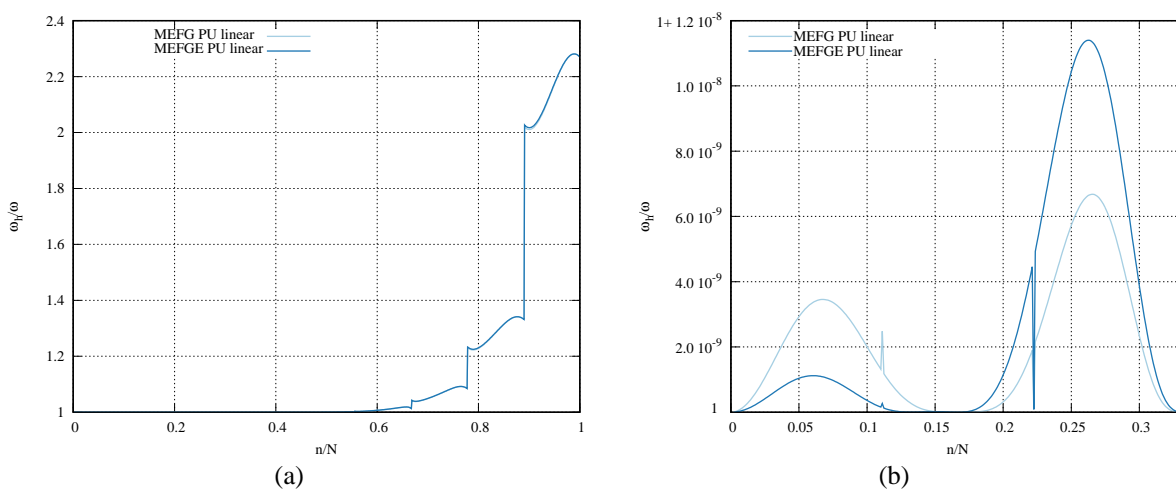


FIGURA 122 – MEFG x MEFGE: (a) espectro de frequências obtido com a PU linear e dois níveis de enriquecimento, (b) ampliação da região entre 0 e 1/3.

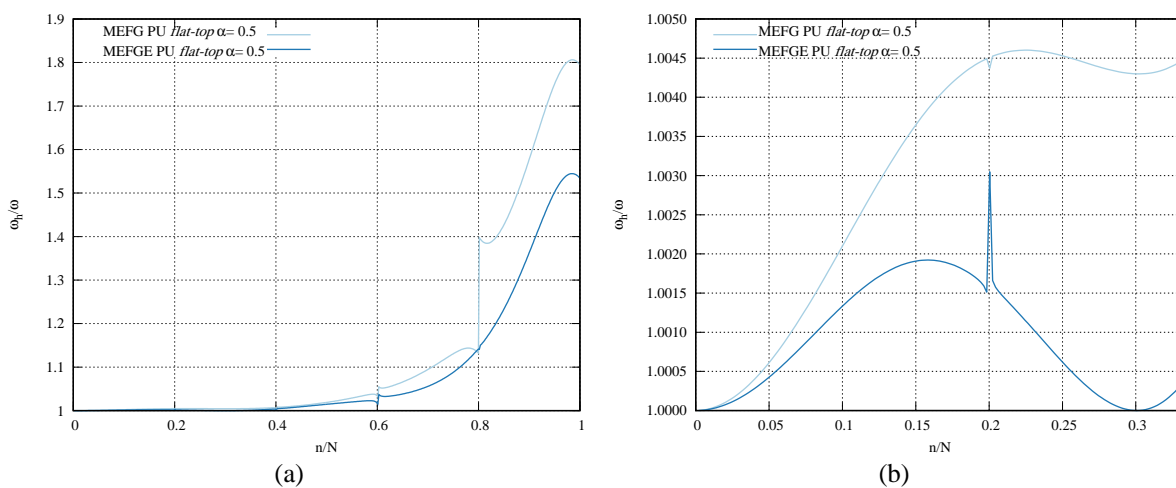


FIGURA 123 – MEFG x MEFGE: (a) espectro de frequências obtido com a PU flat-top  $\alpha = 0.5$ ,  $k = 1$  e um nível de enriquecimento, (b) ampliação da região entre 0 e 1/3.

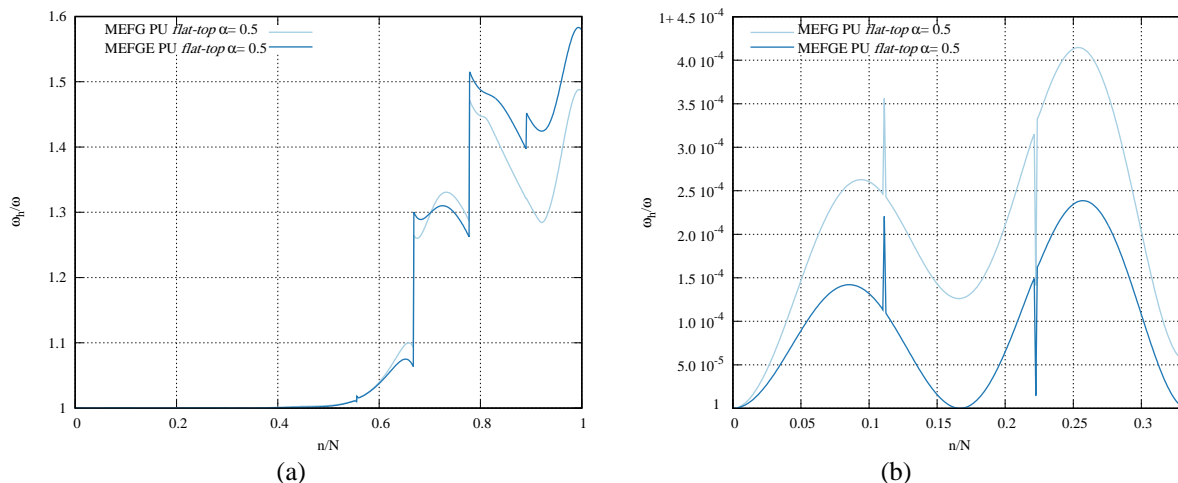


FIGURA 124 – MEFG x MEFGE: (a) espectro de frequências obtido com a PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$ ,  $k = 1$  e dois níveis de enriquecimento, (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

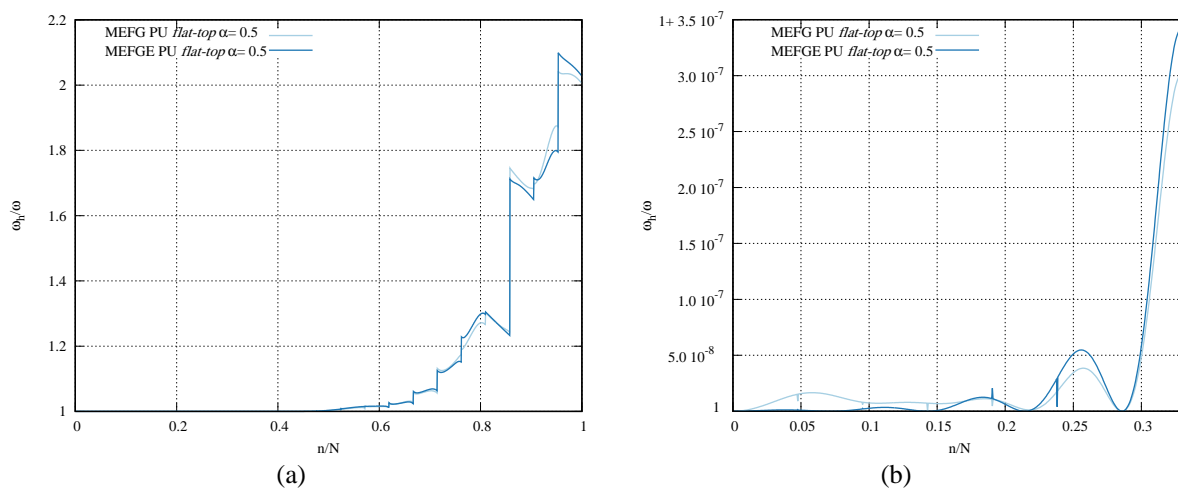


FIGURA 125 – MEFG x MEFGE: (a) espectro de frequências obtido com a PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$ ,  $k = 1$  e cinco níveis de enriquecimento, (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

As taxas de convergências para a 1<sup>a</sup> e 499<sup>a</sup> frequências são apresentadas na figura 126 e respectivamente nas tabelas 35 e 36. Os resultados mostram que os dois métodos apresentam praticamente as mesmas taxas de convergência, com pequenas diferenças nos erros relativos obtidos em cada método.

TABELA 35 – MEFG x MEFGE: erros percentuais da solução aproximada para a 1ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

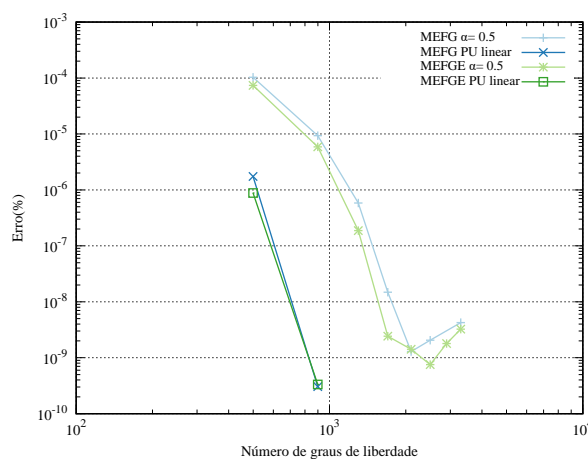
ngl	$n_l$	PU flat-top $\alpha = 0.5$		PU linear	
		MEFG	MEFGE	MEFG	MEFGE
499	1	1.03205E-04	7.38213E-05	8.80509E-07	1.74166E-06
899	2	9.32933E-06	5.86278E-06	3.32556E-10	3.05067E-10
1299	3	5.83992E-07	1.87209E-07	NC	NC
1699	4	1.48235E-08	2.42563E-09	NC	NC
2099	5	1.28921E-09	1.41284E-09	NC	NC
2499	6	2.05889E-09	7.51843E-10	NC	NC
2899	7	NC	1.78934E-09	NC	NC
3299	8	4.24388E-09	3.23565E-09	NC	NC

\*NC - não computado.

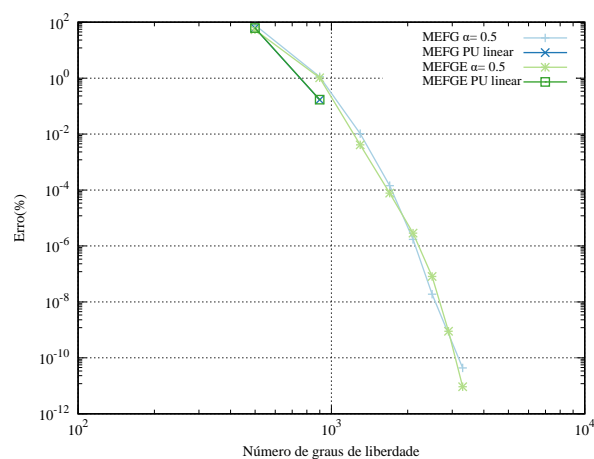
TABELA 36 – MEFG x MEFGE: erros percentuais da solução aproximada para a 499ª frequência de vibração com o  $\beta_j$  padrão.

ngl	$n_l$	PU flat-top $\alpha = 0.5$		PU linear	
		MEFG	MEFGE	MEFG	MEFGE
499	1	7.94767E+01	5.34233E+01	6.15933E+01	6.15939E+01
899	2	1.12181E+00	1.02842E+00	1.67602E-01	1.69746E-01
1299	3	1.03705E-02	4.11717E-03	NC	NC
1699	4	1.43761E-04	7.74976E-05	NC	NC
2099	5	1.71219E-06	2.86500E-06	NC	NC
2499	6	1.88515E-08	8.12691E-08	NC	NC
2899	7	NC	8.90754E-10	NC	NC
3299	8	4.37205E-11	9.32587E-12	NC	NC

\*NC - não computado.



(a) 1ª frequência



(b) 499ª frequência

FIGURA 126 – MEFG x MEFGE: convergência para a (a) 1ª e (b) 499ª frequências naturais com enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

As figuras 127 e 128 encerram essa análise com a comparação dos resultados obtidos pelo MEFG e MEFGE no problema bidimensional da membrana engastada.

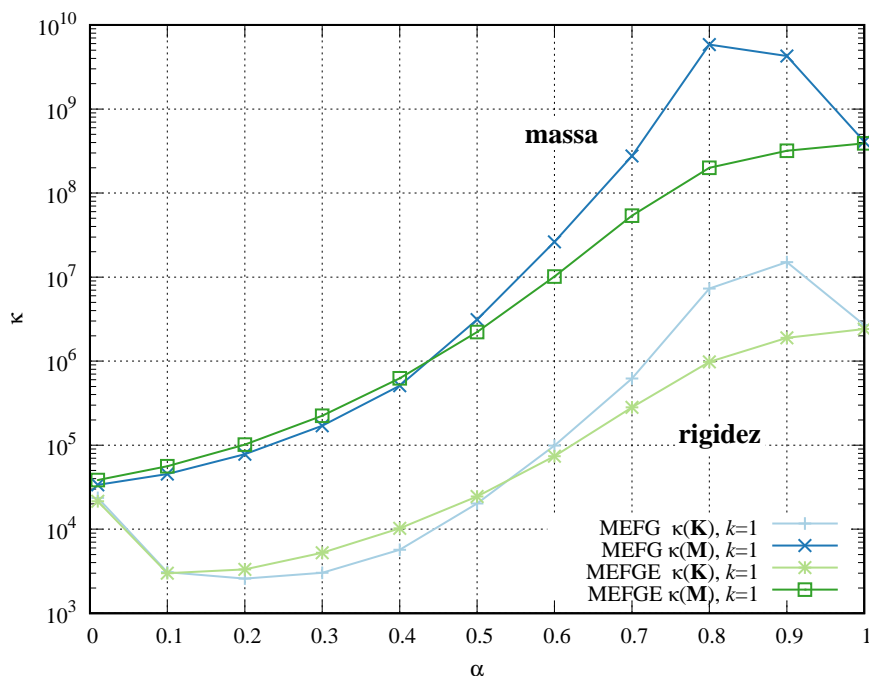


FIGURA 127 – MEFG x MEFGE: números de condição das matrizes de rigidez e massa versus o parâmetro,  $n_l = 1$  e  $k = 1$ , para o problema da membrana engastada.

As observações apresentadas para o problema unidimensional também se aplicam para o problema bidimensional. Os resultados obtidos pelo MEFG e MEFGE são semelhantes, com pequenas diferenças nos números de condição obtidos pelo MEFG com a PU *flat-top* para o intervalo de  $0.5 < \alpha < 1$ , conforme nota-se na figura 127.

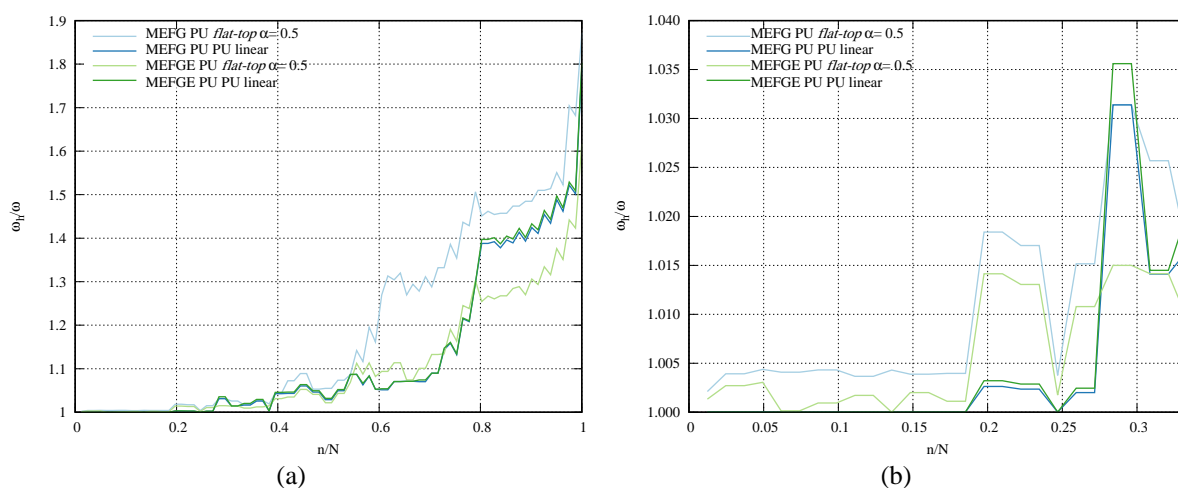


FIGURA 128 – MEFG x MEFGE: (a) espectro de frequências obtido com a PU linear e PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$ , com um nível de enriquecimento para o problema da membrana engastada, (b) ampliação da região entre 0 e  $1/3$ .

Os espectros de frequências para a PU linear apresentam diferenças bem suaves, conforme mostrado na figura 128. Os resultados obtidos com o MEFGE PU *flat-top* foram melhores que os resultados do MEFG PU *flat-top*, e mais precisos que a PU linear no fim do espectro.

## 8 CONCLUSÕES

Este trabalho verificou a aplicação da PU *flat-top* no Método dos Elementos Finitos Generalizados Estabilizado em problemas da Análise Dinâmica com enriquecimentos não-polinomiais, em termos de condicionamento das matrizes de rigidez e massa, precisão do espectro de frequências e taxas de convergência. A PU *flat-top* foi aplicada na construção dos espaços de aproximação hierarquicamente enriquecidos com funções trigonométricas, com base nas propostas de Arndt (2009), Torii (2012) e Weinhardt (2016). O MEFGE PU *flat-top* foi aplicado para resolver cinco problemas dinâmicos de vibrações livres: barra, treliça plana, treliça espacial, membrana bidimensional e estado plano de tensões.

Na maioria dos casos, os resultados apresentados mostram que a PU *flat-top* melhorou o condicionamento do problema, com a redução do número de condição das matrizes de rigidez e massa, principalmente para casos com enriquecimento hierárquico, para ambos os parâmetros de enriquecimento:  $\beta_j$  padrão e  $\bar{\beta}_j$  estabilizado. Nos casos com o parâmetro  $\bar{\beta}_j$ , o processo de estabilização, que já havia sido observado por Weinhardt (2016), foi mantido e melhorado com a redução da ordem de magnitude dos números de condição.

Os três primeiros problemas apresentados, barra, treliça plana e treliça espacial, possuem a mesma formulação e foram comparados entre si. O condicionamento da matriz de massa para a treliça plana foi idêntico ao observado na barra, porém para a treliça espacial foi observado o aumento de uma ordem de grandeza. No caso da matriz de rigidez, a treliça plana apresentou uma redução no número de condição de duas ordens de grandeza para primeiro nível de enriquecimento e alteração no comportamento observado no problema da barra em relação ao enriquecimento estabilizado. A treliça espacial apresentou mesmo comportamento da barra, com um pequeno aumento na ordem do número de condição. Esses resultados também foram verificados no processo de enriquecimento e na influência do parâmetro  $\beta$ .

A equivalência entre os resultados obtidos para os problemas mais complexos, como a treliça plana e treliça espacial, com os resultados da barra, justifica a utilização de problemas mais simples (didáticos) como ponto de partida para o desenvolvimento de pesquisas e avaliação dos métodos numéricos.

Para os dois problemas bidimensionais, membrana e estado plano de tensões, o comportamento dos números de condição das matrizes de rigidez e massa foram equivalentes. A análise do problema da membrana foi estendida para as seguintes verificações: (i) para malhas distorcidas, observou-se um pequeno aumento nos números de condição das matrizes de massa e rigidez; (ii) para malhas refinadas, concluiu-se que o refino de malha não alterou os

números de condição das matrizes; (iii) para alteração na condição de contorno, não houve mudança no condicionamento do problema.

Quando comparados para um mesmo nível de enriquecimento, os resultados com a PU *flat-top* foram menos precisos do que os resultados da PU linear para as frequências mais baixas, como pode ser visto nos espectros de frequências. No entanto, para alguns valores do parâmetro  $\alpha$  a PU *flat-top* foi mais precisa que a PU linear para as frequências mais altas. As taxas de convergência da PU linear foram melhores que a PU *flat-top*, porém o processo de enriquecimento foi limitado devido ao pior condicionamento observado para a PU linear. Com o enriquecimento  $\beta_j$  padrão, a PU *flat-top* conseguiu apresentar boas taxas de convergência, e devido ao melhor condicionamento, foi possível aplicar mais níveis de enriquecimento, o que gerou respostas mais precisas que a PU linear, principalmente para as frequências mais altas, porém com um maior custo para a análise.

Para o problema de estado plano de tensões, a PU linear não conseguiu apresentar boas respostas pois não foi possível utilizar o processo de enriquecimento padrão com muitos níveis e com o processo de enriquecimento estabilizado as respostas ainda apresentaram erros percentuais altos. A PU *flat-top* conseguiu apresentar respostas melhores que a PU linear, porém com a necessidade de aplicação de mais níveis de enriquecimento, implicando em maior custo para a análise.

Os seguintes aspectos sobre convergência foram verificados para o problema da membrana: (i) as taxas de convergência da PU linear foram melhores para as frequências mais baixas, enquanto as taxas de convergência da PU *flat-top* foram melhores para as frequências mais altas; (ii) as malhas distorcidas amplificaram os erros relativos e reduziram as taxas de convergência; (iii) as malhas refinadas (refino  $h$ ) não melhoraram a qualidade dos espectros de frequências e apresentaram menores taxas de convergências que os processo de enriquecimento hierárquico (refino  $p$ ); (iv) a alteração na condição de contorno reduziu a taxa de convergência.

Para todos os casos analisados, o processo de enriquecimento  $\bar{\beta}_j$  estabilizado reduziu as taxas de convergência da PU linear e principalmente da PU *flat-top*. O melhor desempenho em termos de precisão foi observado com o processo de enriquecimento  $\beta_j$  padrão com a PU *flat-top*, porém esse resultado sempre foi obtido a partir da aplicação de mais níveis de enriquecimento, o que consequentemente aumentou o custo computacional da análise.

Os resultados de condicionamento, precisão e convergência foram significativamente alterados pelos parâmetros de construção das funções *flat-top* ( $\alpha$  e  $k$ ), e para alguns casos, houve melhora no condicionamento e na precisão do espectro de frequências.

A estabilidade numérica do sistema enriquecido é melhorada com a PU *flat-top* em comparação com o PU linear, mesmo para funções de enriquecimento não-polinomiais. Nesse sentido, as soluções com o enriquecimento  $\beta_j$  padrão são mais beneficiadas, com melhor condicionamento e possibilidade de convergência para respostas mais precisas em comparação com PU linear tradicional.

Conclui-se que, em uma análise com o mesmo número de níveis de enriquecimento, a PU linear apresenta as melhores respostas. A PU *flat-top* se apresenta como uma alternativa para uma análise com maior enriquecimento e levando ao aumento na precisão da frequências mais elevadas, porém com um custo computacional maior.

Os resultados apresentados neste trabalho, obtidos a partir dos problemas estudados, com as devidas formulações, rotinas computacionais empregadas, parâmetros e valores definidos nas análises, permitem resumir algumas considerações finais e recomendações sobre a aplicação dos parâmetros destacados a seguir.

- **Parâmetro  $n_l$  (níveis de enriquecimento)**

- A aplicação do processo de enriquecimento progressivo ( $n_l > 1$ ) é o fator que possui maior influência sobre a análise e resultados, contribuindo para o aumento de precisão (aspecto positivo) e para o aumento do mau condicionamento (aspecto negativo). Importante ressaltar que o processo de enriquecimento aumenta o número de graus de liberdade do problema e conseqüentemente o custo computacional da solução.
- A necessidade de enriquecimentos com  $n_l > 1$  deve ser avaliada quanto ao grau de precisão requerido e ao conjunto alvo de frequências e modos naturais de vibração. Normalmente a utilização de mais níveis de enriquecimento se justifica quando existe a necessidade buscar maior precisão para frequências e modos mais elevados.
- A PU linear é recomendada sempre que o mau condicionamento não for um fator limitante. Neste trabalho isto foi observado para os casos com enriquecimento  $n_l \leq 2$ . Quando  $n_l > 2$ , a PU linear pode ser aplicada com o parâmetro  $\bar{\beta}_j$  estabilizado, porém com menor convergência em comparação com a PU *flat-top* com o  $\beta_j$  padrão.
- Quando o mau condicionamento for um fator limitante, a PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$  com o parâmetro  $\beta_j$  padrão se apresenta como uma opção a fim de obter respostas mais precisas e com maior convergência. No entanto, uma observação importante é que a PU *flat-top*

reduz o mau condicionamento, porém não é capaz de limitá-lo para maiores níveis de enriquecimento.

- Entre as duas alternativas, PU linear com  $\bar{\beta}_j$  estabilizado e PU *flat-top* com  $\beta_j$  padrão e, a primeira é a melhor alternativa para as análises com elevados níveis de enriquecimento, por melhor contornar o problema do condicionamento.

- **Parâmetros  $\beta_j$  padrão e  $\bar{\beta}_j$  estabilizado**

- O parâmetro  $\bar{\beta}_j$  estabilizado possui maior influência sobre os números de condição das matrizes, superando os resultados da PU *flat-top* quanto ao condicionamento, quando avaliados de maneira independente. Em contrapartida, apresenta redução na taxa de convergência das repostas, principalmente para as frequências mais baixas.
- A utilização da PU *flat-top* com o  $\bar{\beta}_j$  estabilizado não se mostrou vantajosa, sendo recomendado utilizar a PU linear com este parâmetro.
- O parâmetro  $\beta_j$  padrão apresenta os melhores resultados quando associado com a PU *flat-top* para o enriquecimento com  $n_l > 2$ , visando principalmente aumentar a precisão para as frequências mais altas. Neste caso o valor recomendado para a PU *flat-top* é  $\alpha = 0.5$ .

- **Parâmetros  $\alpha$  e  $k$**

- Conforme observado na maioria dos resultados, a utilização da PU *flat-top* não se mostrou vantajosa para análises com um ou dois níveis de enriquecimento, nestes casos os melhores resultados são obtidos com a PU linear, i.e.,  $\alpha = 1$ .
- Quando um maior número de níveis de enriquecimento for utilizado ( $n_l > 2$ ) a PU *flat-top* apresenta os melhores resultados quando em conjunto com  $\beta_j$  padrão e com  $\alpha = 0.5$ .
- O parâmetro  $k$  apresenta menor influência sobre o condicionamento e precisão das respostas quando comparado com os demais parâmetros. O valor de  $k = 1$  foi adotado na maioria das análises por apresentar menor número de condição quando adotado em conjunto com o enriquecimento  $\beta_j$  padrão.

Por fim, uma comparação entre os resultados obtidos com o MEFGE e o MEFGE, ambos com a PU *flat-top* e PU linear, mostrou que, da forma como apresentados para os

problemas da análise dinâmica e com a formulação adotada neste trabalho, não existem diferenças significativas em termos de condicionamento, precisão e convergência das respostas. Importante destacar que essa não é uma constatação ou afirmação de que o MEFGE e o MEFGE são iguais.

O MEFGE, assim como o MEFGE com a PU *flat-top* foram originalmente concebidos no contexto dos problemas da mecânica da fratura e exaustivamente testados em problemas polinomiais (BABUŠKA; BANERJEE, 2011, 2012; GUPTA *et al.*, 2013, 2015; ZHANG *et al.*, 2014; SATO *et al.* 2018). A extensão desse método para os problemas da dinâmica foi abordada neste trabalho, onde se observou que a formulação adotada originalmente no MEFGE não conseguiu apresentar resultados equivalentes aos observados para os problemas estáticos, como os problemas da mecânica de fratura.

Os resultados apresentados neste trabalho mostraram que a relação entre condicionamento e ganho de precisão são influenciados por vários fatores e parâmetros. Este trabalho contribuiu para a ampliação do conhecimento e do entendimento acerca destes fatores nas aplicações nos problemas da análise dinâmica. Para a complementação e continuidade deste estudo, são apresentadas a seguintes sugestões para trabalhos futuros:

- Estudar a aplicação da PU *flat-top* em conjunto com as técnicas de enriquecimento adaptativo (ARDNT, 2009; ARNDT, MACHADO e SCREMIN, 2016; DEBELLA *et al.*, 2019) e com as técnicas de enriquecimento seletivo (MALACARNE, 2018; CITTADIN, 2020; CITTADIN *et al.* 2022).
- Estender a aplicação do MEFGE PU *flat-top* em problemas de ordem superior, como vigas e pórticos.
- Investigar e propor modificações no MEFGE afim de aumentar sua eficiência na aplicação de problemas não-polinomiais, como os problemas da análise dinâmica.
- Avaliar as estratégias de enriquecimentos hierárquicos e estratégias estabilização quanto aos aspectos de performance computacional.
- Estender a aplicação da PU *flat-top* para problemas transientes e problemas com amortecimento.

## REFERÊNCIAS

ANDERSON, E.; BAI, Z.; BISCHOF, C.; BLACKFORD, S.L.; DEMMEL, J.W.; DONGARRA, J.J.; CROZ, J.D.; GREENBAUM, A.; HAMMARLING, S.; MCKENNEY, A.; SORENSEN, D.C. **LAPACK User's Guide**, 3<sup>a</sup> ed. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.

ARNDT, M. **O método dos elementos finitos generalizados aplicado à análise de vibrações livres de estruturas reticuladas**. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia) - Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2009.

ARNDT, M.; MACHADO R.D.; SCREMIN, A. An adaptive generalized finite element method applied to free vibration analysis of straight bars and trusses. **Journal of Sound and Vibration**, v. 329, p. 659-672, 2010.

ARNDT, M.; MACHADO, R.D.; SCREMIN, A. Accurate assessment of natural frequencies for uniform and non-uniform Euler-Bernoulli beams and frames by adaptive generalized finite element method. **Engineering Computations**, v. 33, n. 5, p. 1586-1609, 2016.

BABUŠKA I.; BANERJEE U. Stable generalized finite element method (SGFEM). Technical Report, Technical Report Ices Report 11-07, **The Institute for Computational Engineering and Sciences**, The University of Texas at Austin, Austin, Texas, USA, 2011.

BABUŠKA, I.; BANERJEE, U. Stable Generalized Finite Element Method (SGFEM). **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 201-204, 91-111, 2012.

BABUŠKA, I.; BANERJEE, U.; OSBORN, J.E. Generalized finite element methods: main ideas, results, and perspective. Technical Report No. 04-08, **TICAM**, University of Texas at Austin, Austin, 2004.

BABUŠKA, I.; MELENK, J.M. The partition of unity finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering** 40, 727-758, 1997.

BAI Z., DEMMEL J., DONGARRA J., RUHE A., H. VAN DER VORST, **Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems: A Practical Guide**. SIAM, Philadelphia, 2000.

BATHE, K. J. **Finite element procedures**. Prentice-Hall, 1996.

BECKER, A.; CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite Elements: An Introduction**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1981.

BELYTSCHKO, T.; BLACK, T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering** 45, 601- 620, 1999.

BELYTSCHKO, T.; GRACIE, R.; VENTURA, G. A review of extended/generalized finite element methods for material modelling. **Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering**, v. 17, n. 4, p. 1-25, 2009.

CAREY, G. F.; ODEN, J. T. **Finite elements**. New Jersey: Prentice-Hall, 1984. v. 2: A second course.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering**. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1995.

CITTADIN, C. C. **Aplicação de refinamentos h e p do método dos elementos finitos na análise de vibração livre de treliças planas**. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Paraná, 2017.

CITTADIN, C. C. **Enriquecimento seletivo com uso do Método dos Elementos Finitos Generalizados na Análise Dinâmica de problemas de estado plano**. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2020

CITTADIN, Carolina Castro *et al.* Selective enrichment and modal matrix reduction in the generalized/extended Finite Element Method applied to dynamic analysis of plane state problems. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, Elsevier, v. 91, p. 104430, 2022.

COOK, R. D. et al. **Concept and Applications of Finite Element Analysis**. Madison: John Wiley & Sons, 733 p. ISBN 978-0-471-35605-9, 2002.

CORRÊA, R. M. **Análise dinâmica de arcos utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados**. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2019.

CORRÊA, R.M.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. Free in-plane vibration analysis of curved beams by the generalized/extended finite element method. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, Elsevier, v. 88, p. 104244, 2021.

COTTRELL, J. A., REALI, A., BAZILEVS, Y. e HUGHES, T. J. R., Isogeometric analysis of structural vibrations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** 195, 5257–5196, 2006.

CUI, C.; ZHANG, Q. Stable generalized finite element methods for elasticity crack problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering** 119, 1-17, 2020.

DEBELLA, L.B.C. **Análise dinâmica transiente pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados**. Dissertação (Mestrado em Engenharia da Construção Civil) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

DEBELLA, L.B.C; CITTADIN, C.C.; ARNDT, M.; MACHADO, R.D. Transient dynamic analysis of bars and trusses by the adaptive generalized finite element method. **Engineering Computations**, Vol. 37 no. 3, pp. 789-821, 2019.

DEMME, J. W. **Applied Numerical Linear Algebra**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1997.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An h-p adaptive method using clouds. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** 139, 237–262, 1996.

DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. Hp clouds and hp meshless method. **Numerical Methods for Partial Differential Equations** 12, 673–706, 1996.

FREISLEBEN, P.L.M. **Análise dinâmica de vigas de Timoshenko utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados**. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2019.

GUPTA, V. et al. A stable and optimally convergent generalized fem (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 266, p.23–39, 2013.

GUPTA, V. et al. Stable GFEM (SGFEM): Improved conditioning and accuracy of GFEM/XFEM for three-dimensional fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 289, p. 355–386, 2015.

GREENBERG, M. **Advanced Engineering Mathematics**. 2. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 1998.

GRIEBEL, M.; SCHWEITZER, M. A particle-partition of unity method part VII: adaptivity. **Lecture Notes in Computational Science and Engineering, Springer**, v. 57, p. 121–147, 2007.

HIGHAM N.J. FORTRAN codes for estimating the one-norm of a real or complex matrix, with applications to condition estimation. **ACM Transactions on Mathematical Software**, 14, 381-396, 1988.

HUGHES, T.J.R. **The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis**. Prentice Hall, 1987.

IEEE COMPUTER SOCIETY. **IEEE Standard for Floating-Point Arithmetic**, IEEE Std 754-2008, pp.1-70, New York, USA, 2008.

KOWALCZUK, B. C. **Aplicação do método dos elementos finitos generalizados para análise dinâmica de placas de Kirchhoff-Love**. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2021

KREYSZIG, E. **Advanced Engineering Mathematics**. 10 ed. New York, John Wiley & Sons, 2010.

LEISSA, A. W.; QATU, M. S. **Vibration of continuous systems**. New York: McGraw Hill Professional, 2011.

LINS, R.; PROENÇA, S.P.; DUARTE, C.A. Efficient and accurate stress recovery procedure and a posteriori error estimator for the stable generalized/extended finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 119, 1279-1306, 2019.

MALACARNE, M.F. **O indicador de erro de Friberg empregado no Método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado à análise dinâmica de estruturas.** Dissertação (Mestrado em Engenharia da Construção Civil) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

MAPLESOFT. **Maple 18.** Waterloo, ON: Maplesoft, 2018.

MELENK, J. M. **On generalized finite element methods.** Tese de Doutorado. The University of Maryland, 1995.

MELENK, J.; BABUSKA, I. The Partition of Unity Finite Element Method: Basic Theory and Applications. Austin: **Institute for Computational Engineering and Sciences**, University of Texas at Austin, 1996. a, 32p. Relatório Técnico.

MELENK, J.; BABUSKA, I. The partition of unity method: basic theory and applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1-4, p. 289–314, 1996. b.

MOËS, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A Finite Element Method for crack growth without remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 46, 131-150, 1999.

ODEN, J. T.; DUARTE, C. A. Clouds, cracks and fem's. In. B.D. Reddy (Ed.), Recent developments in computational and applied mechanics, **International Center for Numerical Methods in Engineering, CIMINE**, Barcelona, Spain, p. 302–321, 1997.

PETROLI, T.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D.; WEINHARDT, P. O. Numerical stability of GFEM evaluation for free vibration analysis in trussed structures. **Proceedings of the 6th International Symposium on Solid Mechanics**, 1, 761-775, 2017.

PIEDEDE NETO, D.; PROENÇA, S. P. B. Generalized Finite Element Method in linear and nonlinear structural dynamic analyses. **Engineering Computations**, 33, 806-830, 2016.

PIESSENS, R., DE DONCKER-KAPENGA, E., ÜBERHUBER, C., AND KAHANER, D. **QUADPACK, A Subroutine Package for Automatic Integration.** New York, Springer, 1983.

QUARTERONI, A.; SACCO, R.; SALERI, F. **Numerical Mathematics.** 2. ed. Berlin: Springer, 2007.

RAO, S. **Mechanical Vibrations.** 5. ed. Pearson Prentice Hall, 2010.

RAUEN, M. **Análise isogeométrica aplicada aos problemas de vibração livre na mecânica das estruturas.** Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) – Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2014.

RAUEN, M.; MACHADO, R.D.; ARNDT, M. Isogeometric analysis of free vibration of framed structures: Comparative problems. **Engineering Computations** (Swansea, Wales). 34. 377-402, 2017.

REDDY, J.N. **An Introduction to the Finite Element Method**. 3 ed. Nova York: McGraw-Hill, 2006.

SATO, F. M.; PIEDADE NETO, D.; PROENÇA, S.P.B. Numerical experiments with the Generalized Finite Element Method based on a flat-top Partition of Unity. **Latin American Journal of Solids and Structures**, 15, 2018

SCHWEITZER, M. A. **A Parallel Multilevel Partition of Unity Method for Elliptic Partial Differential Equations**. [S.l.: s.n.], 2003. 196 p.

SHANG, Y. H. **Análise dinâmica elastoplástica de problemas da mecânica de sólidos via métodos enriquecidos de elementos finitos**. Tese (Doutorado), Pontifícia Universidade Católica do Paraná, 2014.

SHANG, Y. H.; MACHADO, R. D.; ABDALLA FILHO, J.E.; ARNDT, M. Numerical analysis of plane stress free vibration in severely distorted mesh by Generalized Finite Element Method. **European Journal of Mechanics - A/Solids**, 2016 a.

SHANG, Y. H. Enriched Finite Element Methods for Timoshenko beam free vibration analysis. **Applied Mathematical Modelling**, 40, 7012-7033, 2016 b.

SILVA, I. A.; MACHADO, R. D.; ARNDT, M.; WEINHARDT, P. O. Assessment of the flat-top stable GFEM for free vibration analysis. **Computers & Mathematics with Applications**, 117, pg. 271-283, 2022.

SOLÍN, P.; SEGETH, K.; DOLEZEL, I. **Higher-Order Finite Element Methods**. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2004.

SORIANO, H. **Elementos Finitos: Formulação e Aplicação na Estática e Dinâmica das Estruturas**. [S.l.]: Ciência Moderna, 2009.

SORIANO, H.; LIMA, S. D. S. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas**. [S.l.]: EDUSP, 2003.

STALLMAN R.M.: **Using and Porting the GNU Compiler Collection**, Free Software Foundation, 2021.

STROUBOULIS, T.; BABUSKA, I.; COPPS, K. The design and analysis of the generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 181, n. 1-3, p. 43–69, 2000.

STROUBOULIS, T.; COPPS, K.; BABUSKA, I. The generalized finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 190, p. 4081–4193, 2001.

STROUSTRUP, B. **The C++ Programming Language**. Upper Saddle River, NJ, Addison-Wesley, 2013.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. **Theory of Elasticity**. New York: McGraw-Hill, 1951.

TOMOV S., DONGARRA J., BABOULIN M. Towards dense linear algebra for hybrid GPU accelerated manycore systems, **Parallel Computing**, Volume 36, Issues 5–6, 232-240, 2010.

TORII, A.J. **Análise dinâmica de estruturas com o método dos elementos finitos generalizado**. Tese (Doutorado em Métodos Numéricos em Engenharia) - Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

TORII, A. J.; MACHADO, R. D. Structural dynamic analysis for time response of bars and trusses using the generalized finite element method. **Latin American Journal of Solids and Structures** 9, 1–31, 2012.

TORII, A. J.; MACHADO, R. D.; ARNDT, M. GFEM for modal analysis of 2D wave equation. **Engineering Computations** 32, 1779–1801, 2016.

WEINHARDT, P. O. **Estudo da estabilidade do método dos Elementos Finitos Generalizados aplicado à análise dinâmica**. Dissertação (Mestrado em Métodos Numéricos em Engenharia) - Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

WEINHARDT, P. O.; DEBELLA, L. B.; ARNDT, M.; MACHADO, R. D. GFEM stabilization techniques applied to dynamic analysis of non-uniform section bars. **Latin American Journal of Solids and Structures**, 15, 2018.

WHALEY, R.C. ATLAS (Automatically Tuned Linear Algebra Software). In: Padua, D. (eds) **Encyclopedia of Parallel Computing**. Springer, Boston, MA, 2011.

PRESS W. H; TEUKOLSKY A. S.; VETTERLING W. T.; FLANNERY B. P. **Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing**. 3 ed. Cambridge University Press, USA, 2007.

WILKINSON, J. H. **The Algebraic Eigenvalue Problem**. [S.l.: s.n.], 1965.

ZENG, P. Composite element method for vibration analysis of structures, part i: Principle and  $C^0$  element (bar). **Journal of Sound and Vibration**, v. 218, n. 4, p. 619–658, 1998.

ZHANG, Q.; BANERJEE, U.; BABUŠKA, I. Higher order stable generalized finite element method. **Numerische Mathematik**, 128, 1–29, 2014.

ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. **The Finite Element Method**. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.

## APÊNDICE A – INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

A integração numérica é um processo muito importante na maioria dos métodos aproximados, onde muitas vezes não é possível realizar a integração analítica das equações que definem a solução do problema. No MEF é muito comum a utilização da Quadratura de Gauss-Legendre, que pode integrar exatamente polinômios de ordem  $p = 2n_p - 1$ , onde  $n_p$  é o número de pontos da quadratura. Entretanto, os métodos enriquecidos normalmente utilizam funções não-polinomiais, assim como é o caso do MEEG/MEFGE com funções de enriquecimento trigonométricas, conforme apresentado neste trabalho. A integração destas funções normalmente requer estratégias especiais, como a subdivisão de intervalos, aplicação de grande número de pontos ou tipos específicos de quadratura.

Este apêndice apresenta a estratégia de integração numérica adotada neste trabalho, que primeiro utilizou um algoritmo para determinação um número arbitrário de pontos e pesos e um segundo algoritmo para a estimativa da quantidade mínima de pontos de integração afim minimizar o erro devido ao processo de integração.

### A.1. Algoritmo para geração dos pontos da quadratura de Gauss-Legendre

O algoritmo apresentado nesta seção determina os pontos e pesos da quadratura de Gauss-Legendre, a partir do número de pontos e intervalo de integração informados. Este algoritmo foi adaptado de Press *et al.* (2017) e apresentado a seguir em linguagem C++, onde é considerada a precisão quádrupla, a fim de garantir a grande exatidão dos pontos e pesos calculados. A tolerância definida é da ordem de  $O(10^{-27})$ .

TABELA 37 – Pontos e pesos calculados para quadratura de Gauss-Legendre, 20 pontos para  $\xi = [-1,1]$ .

Pontos	Coordenadas $\xi_i$	Pesos $w_i$
1	$\pm 0.99312\ 85991\ 85094\ 92478\ 61224$	0.01761 40071 39152 11831 18620
2	$\pm 0.96397\ 19272\ 77913\ 79126\ 76661$	0.04060 14298 00386 94133 10400
3	$\pm 0.91223\ 44282\ 51325\ 90586\ 77524$	0.06267 20483 34109 06356 95065
4	$\pm 0.83911\ 69718\ 22218\ 82339\ 45290$	0.08327 67415 76704 74872 47581
5	$\pm 0.74633\ 19064\ 60150\ 79261\ 43051$	0.10193 01198 17240 43503 67501
6	$\pm 0.63605\ 36807\ 26515\ 02545\ 28367$	0.11819 45319 61518 41731 23774
7	$\pm 0.51086\ 70019\ 50827\ 09800\ 43640$	0.13168 86384 49176 62689 84945
8	$\pm 0.37370\ 60887\ 15419\ 56067\ 25482$	0.14209 61093 18382 05132 92983
9	$\pm 0.22778\ 58511\ 41645\ 07808\ 04962$	0.14917 29864 72603 74678 78287
10	$\pm 0.07652\ 65211\ 33497\ 33375\ 46404$	0.15275 33871 30725 85069 80843

ALGORITMO 1: Algoritmo para geração dos pontos de quadratura de Gauss-Legendre.

```

// ALGORITMO PARA GERAÇÃO DOS PONTOS DA QUADRATURA DE GAUSS-LEGENDRE
// ENTRADAS
// np = número de pontos
// x0 = início do intervalo, o padrão é x0 = -1
// x1 = fim do intervalo, o padrão é x1 = +1
// SAÍDAS
// weights = vetor com os pesos calculados, tamanho = np
// points = vetor com os pontos calculados, tamanho = np

Mth::IntegralGL1D::IntegralGL1D(int np, float128 x0, float128 x1, float128
*weights, float128 *points)
{
    float128 z,z1,pp,p1,p2,p3; // variáveis temporárias
    float128 tol = 1.0e-27q; // tolerância, precisão relativa
    float128 xm = (x0+x1)/2.0q; // ponto médio do intervalo
    float128 xl = (x1-x0)/2.0q; // metade do tamanho do intervalo

    // loop para a metade simétrica do intervalo
    for(int i=0; i<(np+1)/2; i++)
    {
        // aproximação para a iª raiz do polinômio de Legendre
        float128 z = cosq(m_PIq*(i+0.75q)/(np+0.5q));

        // loop para calcular a iª raiz pelo método de Newton-Raphson
        do{
            p1 = 1.0q;
            p2 = 0.0q;

            // loop para calcular o polinômio de Legendre no ponto z
            for(int j=0; j< np; j++)
            {
                p3 = p2;
                p2 = p1;
                p1 = ((2.0q*j+1.0q)*z*p2-j*p3)/(j+1);
            }
            // derivada do polinômio no ponto z
            pp = n*(z*p1-p2)/(z*z-1.0q);
            z1 = z;
            z = z1-p1/pp; // método de Newton-Raphson
        }while((z-z1)>0.0q? (z-z1)>tol:(z1-z)>tol);

        // resultados para o iº ponto, dentro da tolerância especificada
        points[i] = xm-xl*z; // salva o valor da raiz calculada no vetor
        points[n-1-i] = xm+xl*z; // salva a contraparte simétrica
        weights[i] = 2.0q*xl/((1.0q-z*z)*pp*pp); // salva o valor do peso
        weights[n-1-i] = w[i]; // salva a contraparte simétrica
    }
} //FIM

```

Como exemplo, a tabela 37 apresenta os pontos e pesos calculados com este algoritmo, para o caso  $n_p = 20$  e  $\xi = [-1,1]$ . Como os pontos são simétricos com relação à coordenada zero, centro do domínio, somente metade dos pontos são apresentados.

## A.2. Determinação do número de pontos de integração

A estratégia de integração considerou a determinação e a aplicação de um número adequado de pontos de integração, de acordo com a complexidade das funções envolvidas.

Antes de apresentar a metodologia para definição no número de pontos, as figuras 129 a 131 apresentam resultados sobre os erros de integração para as matrizes de massa e rigidez em função do número de pontos, no caso unidimensional apresentado na seção 7.1 (barra reta). O erro relativo foi calculado através da seguinte equação:

$$Erro = \frac{\|\mathbf{A} - \tilde{\mathbf{A}}\|_2}{\|\mathbf{A}\|_2} \quad (46)$$

onde  $\mathbf{A}$  é a matriz de referência e  $\tilde{\mathbf{A}}$  a matriz calculada com a integração numérica. As soluções de referência para as matrizes de massa e rigidez foram determinadas por meio de integração simbólica através do *software* Maple (MAPLESOFT, 2018), com 20 casas decimais de precisão.

A figura 129 apresenta os resultados para 10 níveis de enriquecimento estabilizado com a PU linear e para quatro subintervalos de integração distintos, um intervalo total e subintervalos com 3, 5 e 10 divisões do intervalo total.

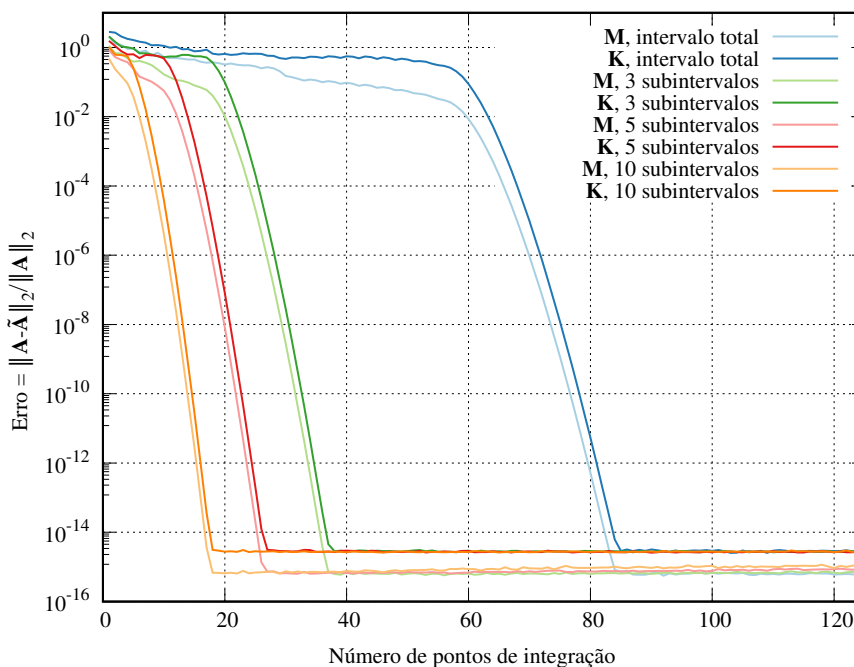


FIGURA 129 – Integração numérica: erros de aproximação em função do número de pontos e do número de divisões do intervalo de integração para 10 níveis de enriquecimento.

Observa-se que existe um número mínimo de pontos necessários para que os erros alcancem uma ordem de menor erro, onde após esse número, não é possível reduzir o erro com a inclusão de mais pontos. O número de pontos pode ser reduzido com a utilização de

subintervalos de integração, onde um maior número de subintervalos implica na redução do número de pontos.

A figura 130 apresenta os resultados para 1 e 5 níveis de enriquecimento, onde fica evidente que o número de pontos de integração depende da quantidade de níveis de enriquecimento.

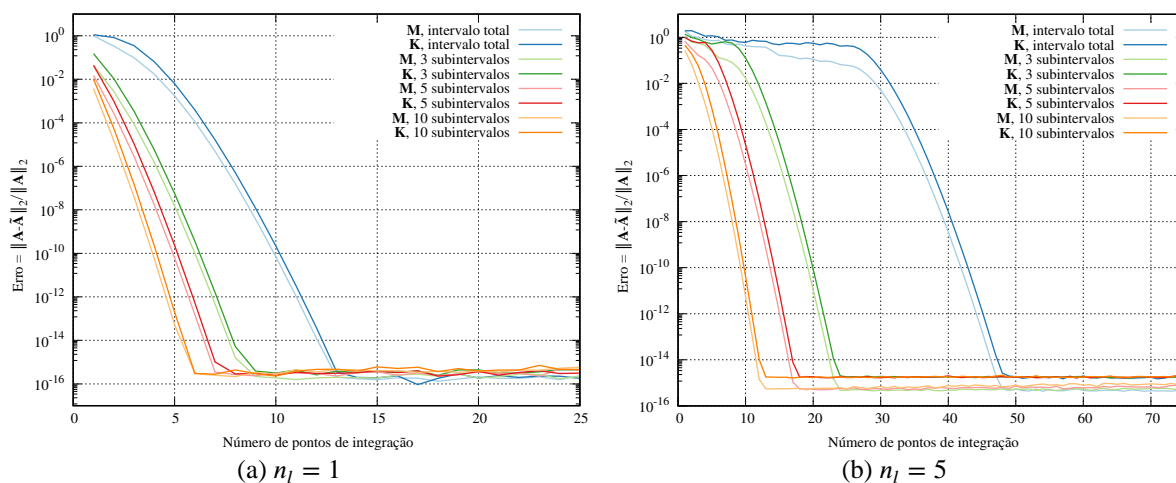


FIGURA 130 – Integração numérica: erros de aproximação em função do número de pontos e do número de divisões do intervalo de integração para 1 e 5 níveis de enriquecimento.

A tabela 38 apresenta o número mínimo de pontos necessários para se obter o menor erro possível nos três casos de enriquecimento, e o número de avaliações numéricas das funções envolvidas no processo, considerando que cada ponto de integração requer a avaliação de duas funções. Quanto maior o número de operações, maior é o custo computacional.

TABELA 38 – Integração numérica: número de pontos otimizado por número de subintervalos.

Número de subintervalos	1 nível de enriquecimento		5 níveis de enriquecimento		10 níveis de enriquecimento	
	Número de Pontos	Número de operações	Número de Pontos	Número de operações	Número de Pontos	Número de operações
1	14	28	50	100	85	170
3	10	60	26	156	39	234
5	8	80	18	180	27	270
10	6	120	15	300	19	380

Conclui-se que a estratégia de integração por subintervalos com menor número de pontos implica em maior custo computacional que a integração em intervalo único com maior número de pontos. Neste sentido, a integração em intervalo único foi considerada como padrão neste trabalho.

No caso da PU *flat-top*, a integração seguiu os três intervalos naturais definidos pelo parâmetro  $\alpha$ , porém dentro destes intervalos foi considerada a integração sem subintervalos e com o mesmo número de pontos. Para a definição do número de pontos foi observado o intervalo  $(-\alpha, \alpha)$ , que contém as funções mais complexas no integrando. A figura 131 apresenta o resultado para a PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$ ,  $k = 2$  e 10 níveis de enriquecimento estabilizado. Nota-se que os números de pontos são menores que o observado na figura 129, visto que na PU *flat-top* já considera uma divisão inicial com 3 intervalos:  $(-1, -\alpha)$ ,  $(-\alpha, \alpha)$  e  $(\alpha, 1)$ , para o caso unidimensional.

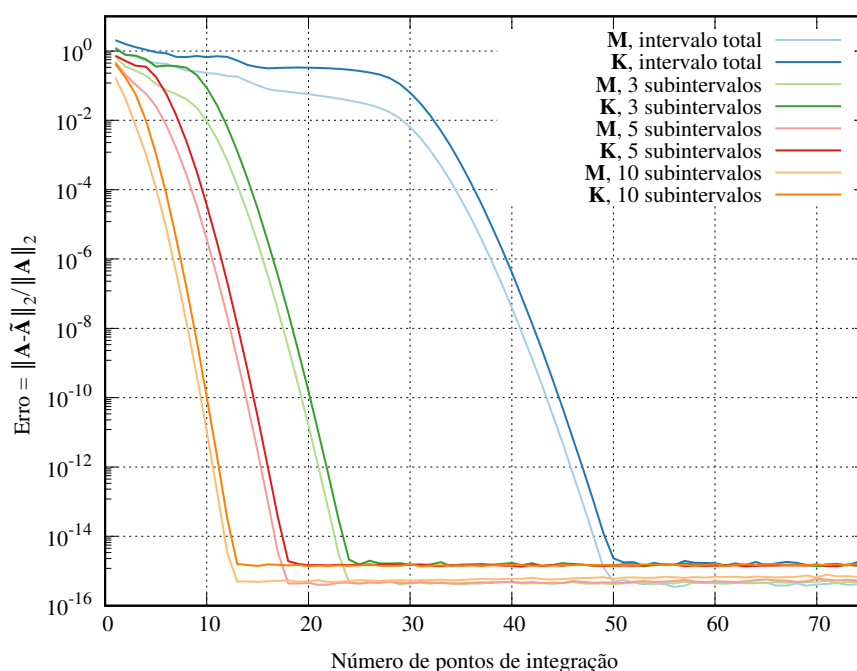


FIGURA 131 – Integração numérica: erros de aproximação em função do número de pontos e do número de divisões do intervalo de integração, com PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$ ,  $k = 2$  e 10 níveis de enriquecimento.

A figura 132 mostra o comportamento do erro de integração na matriz de massa em função do número de pontos de integração para a PU *flat-top* com diferentes valores para o parâmetro de suavização  $k$ . Observa-se que o valor do parâmetro  $k$  apresenta pouca influência sobre o número de pontos de integração, em média, aproximadamente um ponto adicional para cada incremento de  $k$  afim que alcançar a ordem de menor erro de integração.

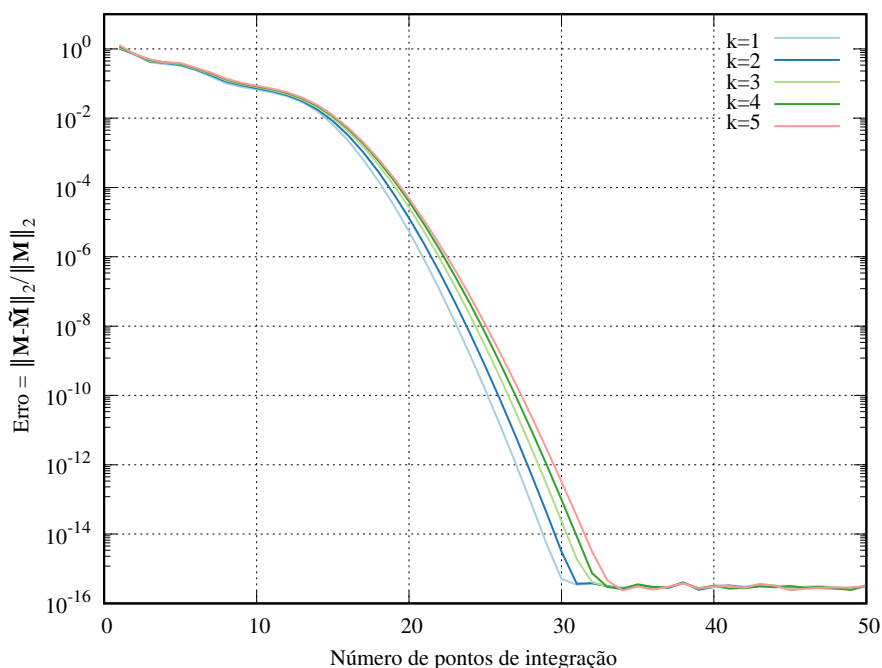


FIGURA 132 – Integração numérica: erros de aproximação em função do número de pontos e do parâmetro  $k$ , com PU *flat-top*  $\alpha = 0.5$  e 5 níveis de enriquecimento.

Por fim, a figura 133 apresenta os erros absolutos avaliados em cada elemento das matrizes. No caso da matriz de massa, todos os erros absolutos são de ordem  $O(10^{-18})$ , sugerindo que estes erros sejam de origem no truncamento numérico. No caso da matriz de rigidez observa-se erros absolutos maiores, na ordem de  $O(10^{-10})$ , localizados em elementos da matriz que são determinados pelas funções de maior ordem e complexidade, indicando que esses erros são devidos à integração numérica.

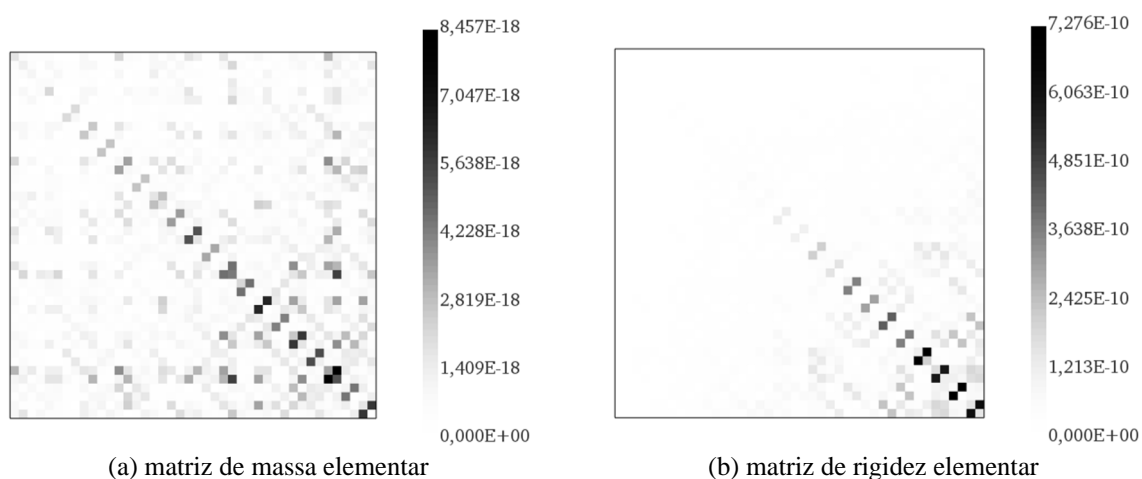


FIGURA 133 – Integração numérica: erros absolutos para os elementos das matrizes de massa e rigidez, com 85 pontos de integração para 10 níveis de enriquecimento.

Como observado nos resultados anteriores, existe um número mínimo de pontos de integração para se alcançar um menor erro de integração numérica, porém essa determinação foi obtida a partir de uma resposta de referência conhecida, porém, esse tipo de informação normalmente não está disponível.

O algoritmo 2 apresenta uma alternativa para a estimativa deste número mínimo sem o conhecimento prévio da resposta de referência, baseando-se na convergência do erro relativo entre duas respostas obtidas com número de integração distintos.

ALGORITMO 2: Algoritmo para a estimativa do número de pontos de integração.

```
// ALGORITMO PARA ESTIMATIVA DO NÚMERO DE PONTOS DE INTEGRAÇÃO
// ENTRADAS
// f1 = primeira função
// f2 = segunda função
// tol = tolerância relativa
// maxit = número máximo de iterações
// np_i = número inicial de pontos de integração (padrão=1)
// SAÍDAS
// np = número de pontos de integração

int Mth::IntegralGL1D::query(Functor1D *f1, Functor1D *f2, double tol, int maxit,
int np_i)
{
    double v0, v1 = 0.0;
    double err0, err1 = 1.0;
    int dnp = 1;
    int half_dnp = -static_cast<int> (log10(tol))/2-1; // metade da ordem da
tolerância

    bool speedup = true; // flag de aceleração

    // loop sobre os pontos de integração
    for(int np=np_i; np<=maxit; np++)
    {
        IntegralGL1D integrator(np); // objeto de integração
        v0 = v1;
        err0 = err1;
        v1 = integrator(*f1, *f2); // avalia a integral do produto das funções
        err1 = fabs(v1 - v0); // compara com o resultado anterior

        if(err1 < tol) return np; // retorna se a tolerância foi atendida

        if(speedup)
        { // avalia se houve boa convergência
            if(-static_cast<int> (log10(fabs(err1/v1))) < half_dnp)
            {
                dnp++; //dnp = dnp+1
                np += dnp; // aumenta o número de pontos
            }
        }
        else
        {
            np -= dnp+1 ; // retorna ao estágio anterior
            dnp = 1;
            speedup = false; // "desliga" o processo de aceleração
        }
    }
}
return maxit;
} //FIM
```

A tabela 39 apresenta os resultados do processo iterativo para a determinação do número mínimo de pontos de integração para as matrizes obtidas com 10 níveis de enriquecimento. O valor estimado foi de 85 pontos, assim como o resultado obtido com a análise apresentada na figura 129.

TABELA 39 – Integração numérica: processo iterativo para estimativa do número de pontos de integração para 10 níveis de enriquecimento.

$i$	$n_p$	$\Delta n_p$	$erro =  v_i - v_{i-1} $	$\log(erro/ v_i )$	$-\log(tol)$
1	1	1	1,46E+00	0	14
2	4	3	5,51E-01	0	14
3	8	4	4,13E-01	0	14
4	13	5	4,71E-01	0	14
5	19	6	1,98E-01	0	14
6	26	7	1,11E-02	1	14
7	34	8	1,21E-01	0	14
8	43	9	5,53E-03	2	14
9	53	10	2,16E-02	1	14
10	64	11	4,60E-02	1	14
11	76	12	1,66E-03	2	14
12	89	13	1,17E-09	8	14
13	77	1	2,60E-10	9	14
14	78	1	3,16E-10	9	14
15	79	1	6,72E-11	10	14
16	80	1	1,37E-11	10	14
17	81	1	2,70E-12	11	14
18	82	1	5,12E-13	12	14
19	83	1	9,40E-14	13	14
20	84	1	1,74E-14	13	14
21	85	1	3,00E-15	14	14

A figura 134 apresenta a estimativa de pontos de integração obtidas com o algoritmo proposto para até 20 níveis de enriquecimento, no caso unidimensional.

Os algoritmos apresentados neste capítulo também podem ser generalizados para a integração numérica bidimensional. A figura 135 apresenta os resultados equivalentes a figura 134, agora para o caso bidimensional, onde o número de pontos indicado na figura é aplicado nas duas direções, logo o número total de pontos é  $n_p^2$ . Observa-se que o número de pontos necessários para o caso bidimensional em uma direção é equivalente ao número de pontos para o caso unidimensional.

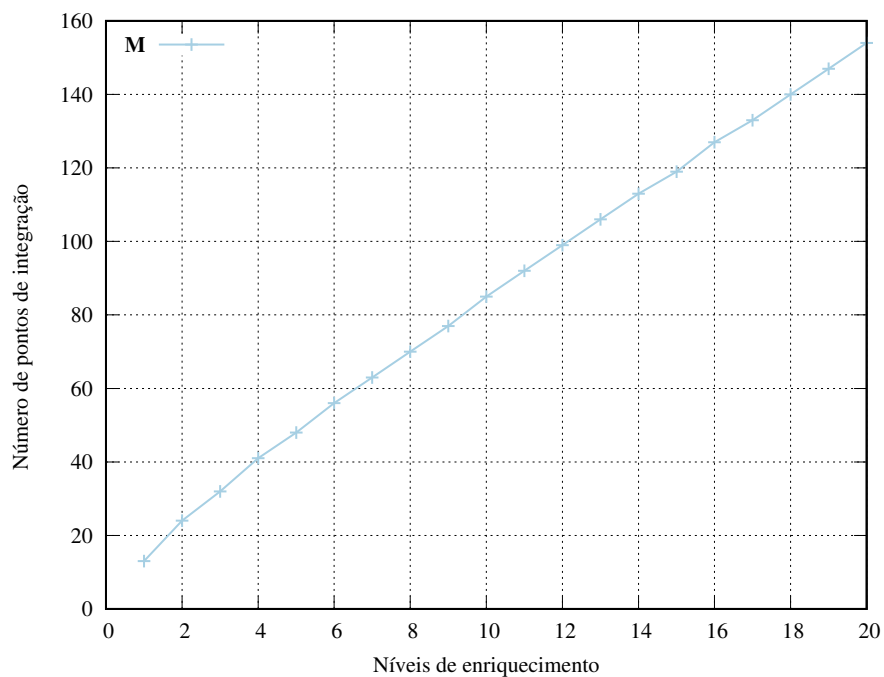


FIGURA 134 – Integração numérica: número de pontos de integração determinados em função do número de níveis de enriquecimento para o caso unidimensional.

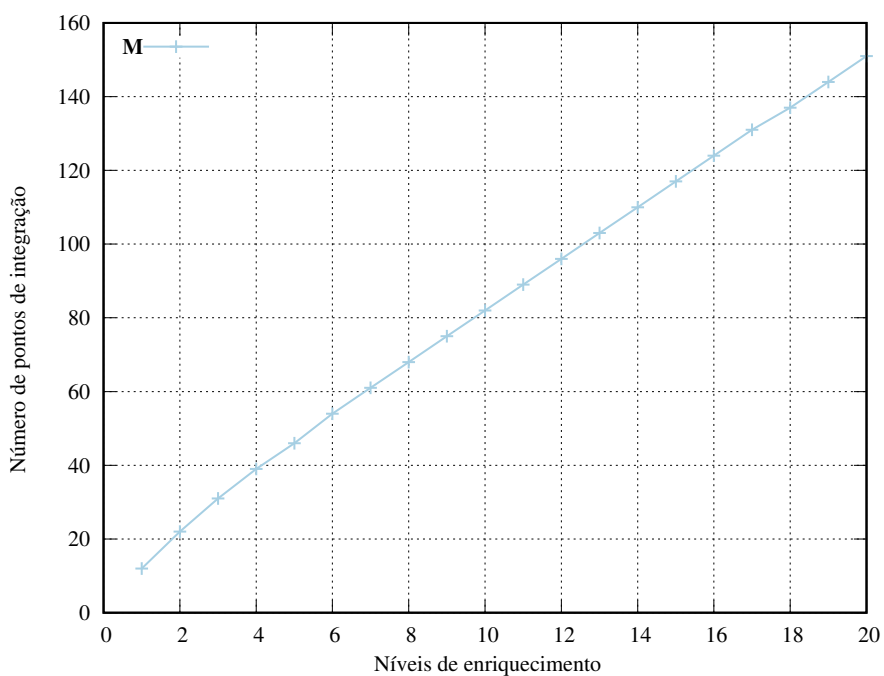


FIGURA 135 – Integração numérica: número de pontos de integração determinados em função do número de níveis de enriquecimento para o caso bidimensional.

## A.2. Pontos de integração e números de condição

Para concluir essa discussão, as figuras 136 e 137 apresentam a evolução do número de condição das matrizes de massa e rigidez em função do número de pontos de integração, para o caso unidimensional.

Observa-se que o condicionamento das matrizes é significativamente afetado pelo processo de integração, caso o número de pontos de integração seja insuficiente. Para  $n_l = 1$ , conforme figura 136, são necessários no mínimo 6 pontos de integração, porém após esse número, os números de condição das matrizes de massa e rigidez não sofrem mais alterações. No caso de  $n_l = 10$ , conforme figura 137, o número mínimo é de aproximadamente 55 pontos, indicando novamente uma relação direta deste número mínimo de pontos com a complexidade das funções envolvidas.

Em ambos os casos, o número de pontos mínimo é inferior ao estimado para que o erro de integração seja reduzido, conforme observado nos resultados anteriores.

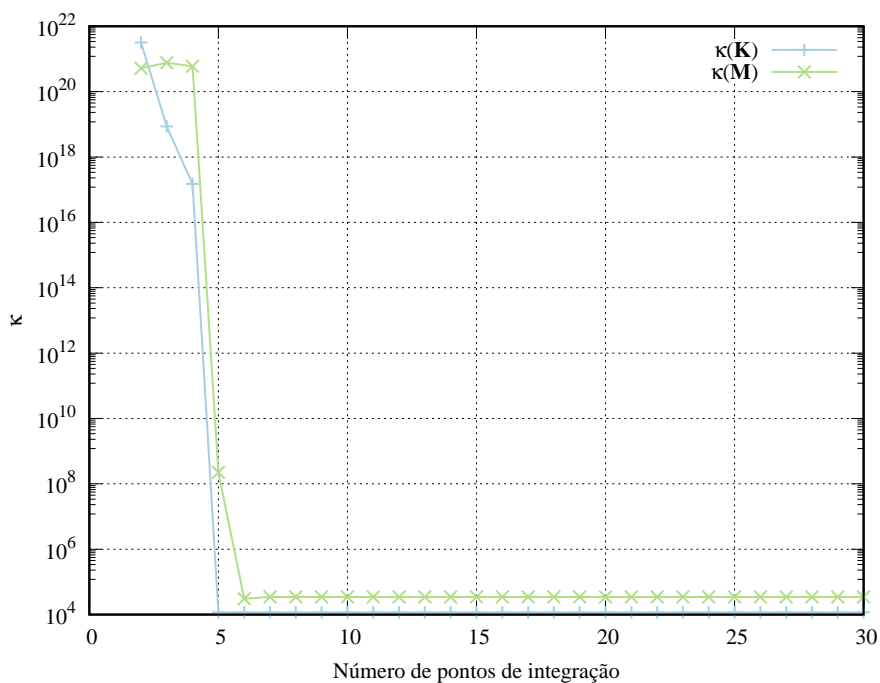


FIGURA 136 – Integração numérica: número de pontos de integração e o condicionamento das matrizes com 1 nível de enriquecimento.

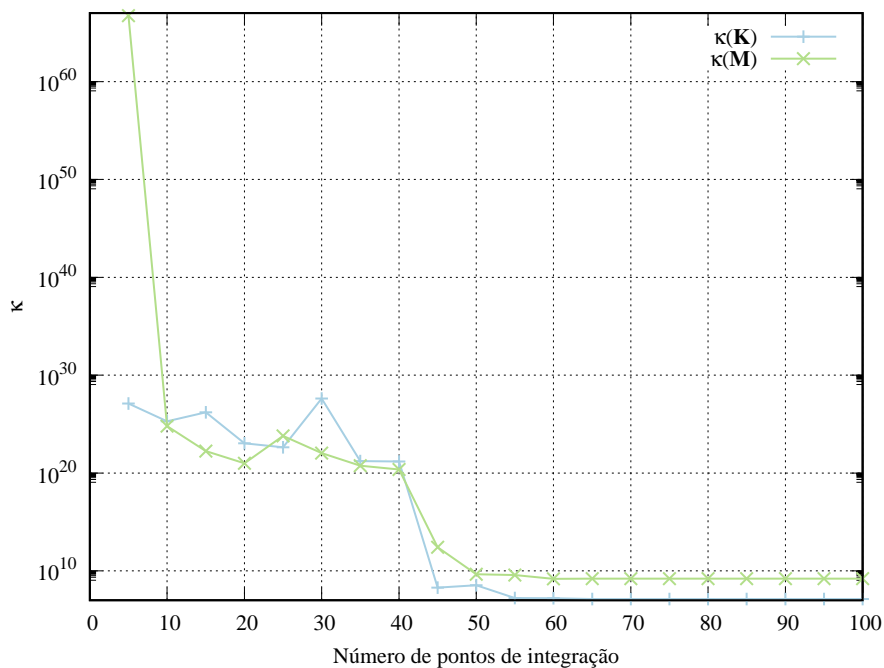


FIGURA 137 – Integração numérica: número de pontos de integração e o condicionamento das matrizes com 10 níveis de enriquecimento.

## APÊNDICE B – MUDANÇA DE COORDENADAS

Este apêndice apresenta a formulação para mudanças de coordenadas em estruturas treliçadas, como os casos da treliça de 7 barras e da torre de transmissão, e o mapeamento de coordenadas para o elemento mestre 2D.

### B.1. Estruturas treliçadas

Considera-se um elemento de barra no espaço tridimensional conforme representado na figura 138. As coordenadas locais  $\mathbf{u}'$  podem ser representadas através das coordenadas globais  $\mathbf{u}$  através da transformação de coordenadas definida por:

$$\mathbf{u}' = \mathbf{T}\mathbf{u} \quad (47)$$

ou na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} u'_i \\ u'_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{xi} \\ u_{yi} \\ u_{zi} \\ u_{xj} \\ u_{yj} \\ u_{zj} \end{bmatrix} \quad (48)$$

onde a matriz de transformação de coordenadas  $\mathbf{T}$  é definida por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos \theta_x & \cos \theta_y & \cos \theta_z \end{bmatrix} \quad (49)$$

e determinada com os cossenos diretores, definidos em função das coordenadas dos nós:

$$\cos \theta_x = \frac{x_j - x_i}{L}, \quad \cos \theta_y = \frac{y_j - y_i}{L}, \quad \cos \theta_z = \frac{z_j - z_i}{L}, \quad (50)$$

sendo  $L$  o comprimento do elemento, definido por:

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}. \quad (51)$$

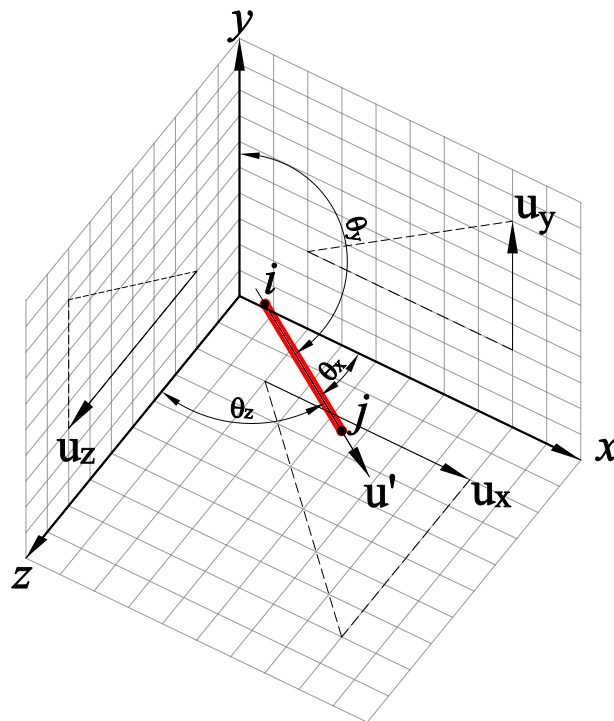


FIGURA 138 – Elemento de barra no espaço 3D.

A matriz de rigidez no sistema global passa a ser definida em termos da matriz de rigidez no sistema local através da seguinte transformação:

$$\mathbf{k} = \mathbf{T}^T \mathbf{k}^e \mathbf{T} \quad (52)$$

e para a matriz de massa:

$$\mathbf{m} = \mathbf{T}^T \mathbf{m}^e \mathbf{T}. \quad (53)$$

## B.2. Mapeamento do elemento mestre 2D

Um elemento finito quadrilateral no espaço 2D, conforme representado na figura 139 (à direita), pode ser mapeado geometricamente através das funções de forma definidas em um elemento mestre (padrão) com coordenadas locais  $\xi \in [-1, +1]$  e  $\eta \in [-1, +1]$ , figura 139 (à esquerda).

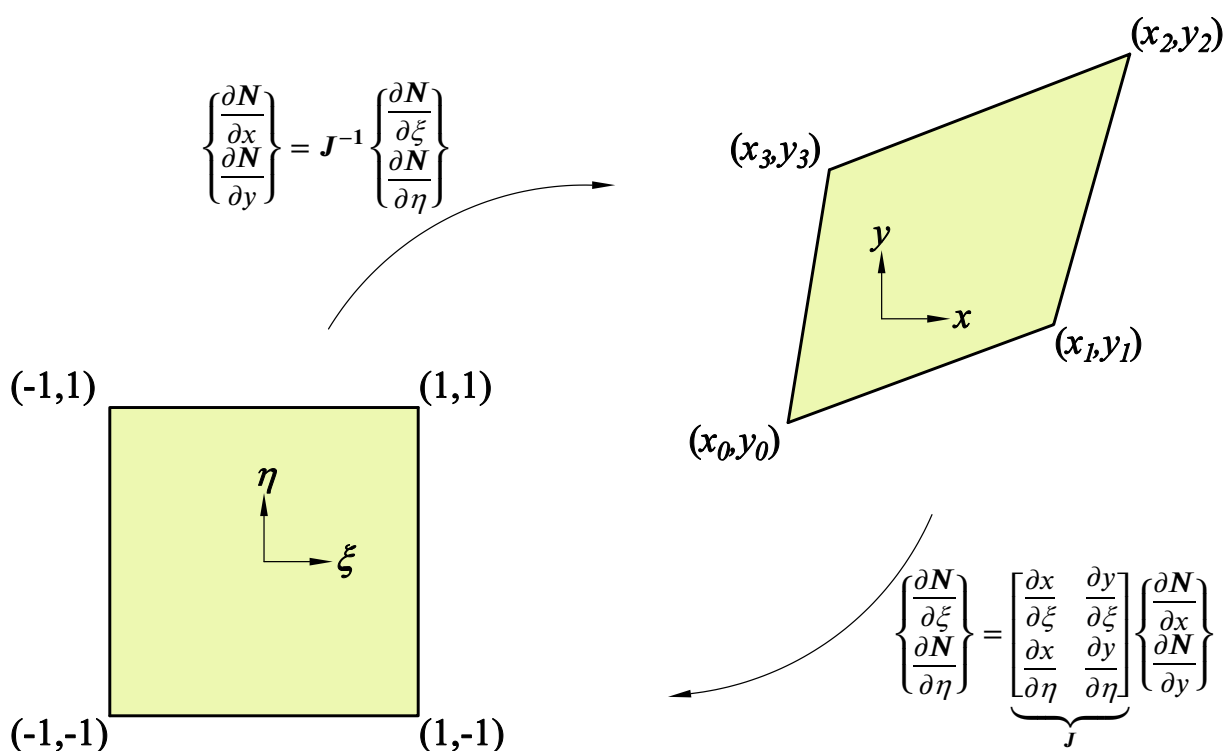


FIGURA 139 – Mapeamento de coordenadas 2D.

Como os termos diferenciais apresentados nas formulações são definidos em função das coordenadas globais, é necessário compatibilizar esses termos com a equação:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (54)$$

onde  $\mathbf{J}$  é a matriz jacobiana, definida por:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (55)$$

O termo diferencial  $d\Omega^e$ , pode ser reescrito em função das coordenadas locais como:

$$d\Omega^e = \det[\mathbf{J}]d\xi d\eta. \quad (56)$$

Logo, para o caso da membrana bidimensional, as matrizes de rigidez e massa podem ser determinadas em função das coordenadas locais como:

$$\mathbf{k}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \nabla \Phi^T(\xi, \eta) \nabla \Phi(\xi, \eta) \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta \quad (58)$$

e

$$\mathbf{m}^e = \frac{1}{c^2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \Phi^T(\xi, \eta) \Phi(\xi, \eta) \det[\mathbf{J}] d\xi d\eta. \quad (59)$$

## APÊNDICE C – MONTAGEM DAS MATRIZES

A estratégia para a montagem das matrizes de rigidez está vinculada com a relação entre os nós e os elementos. Antes de discorrer sobre essa estratégia, apresentam-se alguns aspectos de programação.

A programação orientada a objetos, adotada neste trabalho, é um paradigma de programação onde alguma entidade (concreta ou abstrata) é representada através de um objeto. Esse objeto possui um conjunto de propriedades, estados e comportamentos definidos através de uma classe. O código computacional desenvolvido neste trabalho modelou os objetos através de classes, onde destacam-se alguns exemplos como: nós, elementos, materiais, funções de forma, matrizes, malhas, etc.

No caso dos objetos tipo nó, os principais atributos são: índice, coordenadas e condições de contorno nodais. E para os objetos tipo elementos, são exemplos de atributos: nós, materiais, funções de forma, condições de carregamento, etc. Além destes, os elementos possuem também os métodos (rotinas), e.g.: cálculo das matrizes de rigidez e massa. O conjunto

de nós, elementos, materiais, condições de contorno, funções de forma, entre outros, definem um outro objeto: a malha de elementos finitos.

No início do processo de construção da malha, os primeiros nós são criados a partir das definições geométricas do modelo, esses nós são relacionados aos graus de liberdade do MEF definidos na equação (4). Com o processo de enriquecimento, novos graus de liberdade são adicionados ao modelo, que aqui também são tratados como nós (virtuais).

A figura 140 ilustra uma malha com 2 elementos finitos e os respectivos nós para 1 nível de enriquecimento.

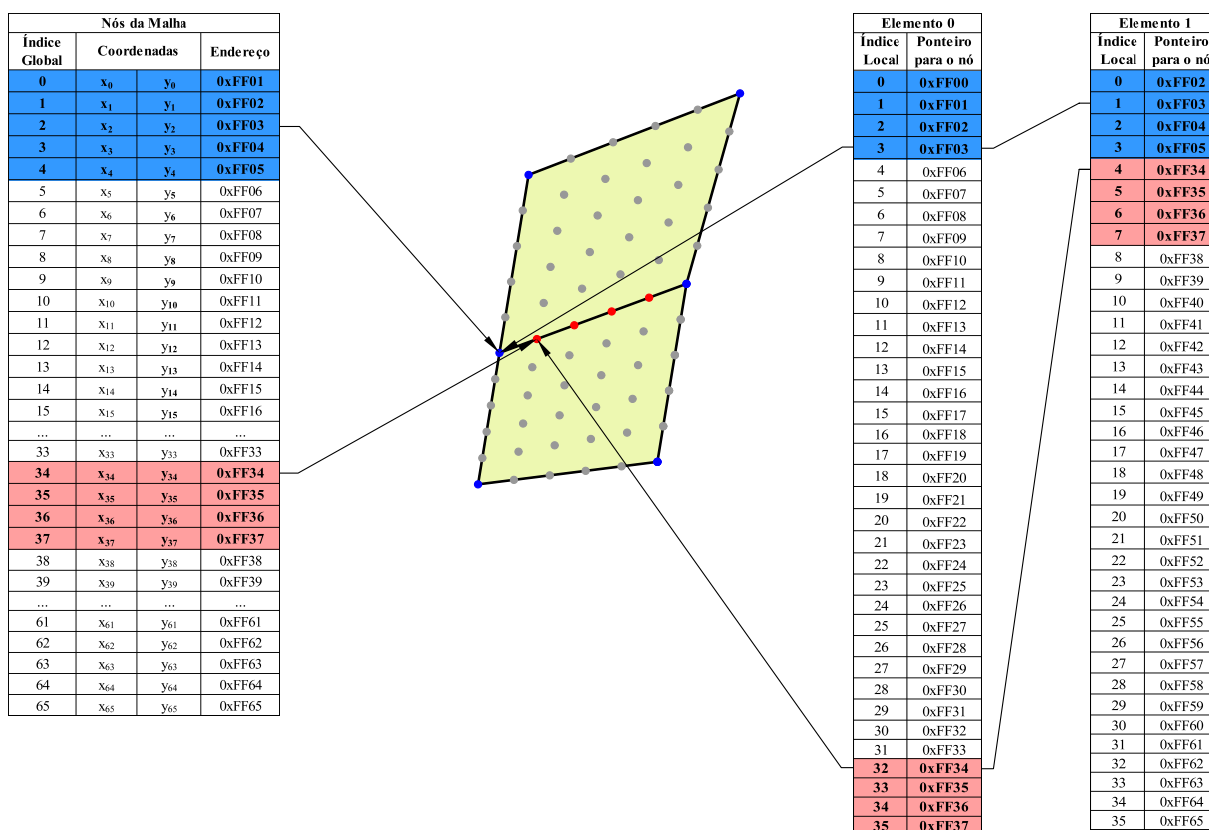


FIGURA 140 – Malha com 2 elementos e a relação entre os nós.

O quadro à esquerda na figura 140 ilustra um vetor global de nós da malha, os primeiros nós estão destacados em azul, que são os nós relacionados aos graus de liberdade do MEF. Esse vetor é ampliado com o processo de enriquecimento, que inclui novos nós (virtuais) ao modelo. Os dois quadros à direita ilustram os vetores locais de nós para os respectivos elementos. Esses vetores não armazenam diretamente as informações dos nós, mas sim um *link* (ponteiro) para os respectivos nós no vetor global de nós.

Quando o processo de enriquecimento é aplicado ao elemento, um mapeamento geométrico define coordenadas (virtuais) para os novos nós. Antes de criar um novo nó, realiza-

se uma consulta ao vetor global de nós para verificar a existência de um nó na mesma coordenada e se houver, retorna-se o endereço do nó existente, sem criar um novo nó.

Os nós destacados em vermelho na figura 140 foram criados e referenciados durante o processo de enriquecimento do primeiro elemento, mas no segundo elemento estes nós apenas foram referenciados, pois já existiam. Essa estratégia resolve o problema de interface entre os elementos e as funções de forma tipo borda, mencionado na seção 4.2.

Uma vez definida essa correlação entre os nós e elementos, a montagem das matrizes de rigidez e massa torna-se trivial, conforme apresentado no algoritmo 3. Em resumo, realiza-se um *loop* sobre todos os elementos e um *loop* interno sobre as referências dos nós que compõem cada elemento. As contribuições das matrizes de massa e rigidez dos elementos são devidamente aplicadas às respectivas matrizes globais, através dos índices e referências aos nós que compõem cada elemento.

ALGORITMO 3: Algoritmo para montagem das matrizes de rigidez e massa.

```
// MONTAGEM DAS MATRIZES DE RIGIDEZ E MASSA
// k = matriz de rigidez global (inicialmente zerada)
// m = matriz de massa global (inicialmente zerada)
// nElements = número de elementos
// e->nNodes = número de nós do elemento
// e->nodes[ii]->index = índice global do nó, relativo ao índice local ii

//loop sobre todos os elementos da malha
for(int i=0; i<nElements; i++)
{
    Plane53Element *e = elements[i]; // seleciona o ith elemento
    // loop sobre todos os nós do elemento
    for(int ii=0; ii<e->nNodes; ii++)
        for(int jj=0; jj< e->nNodes; jj++)
        {
            // adiciona os valores das matrizes locais nas matrizes globais
            k.add(e->nodes[ii]->index, e->nodes[jj]->index, e->k(ii, jj));
            m.add(e->nodes[ii]->index, e->nodes[jj]->index, e->m(ii, jj));
        }
} //FIM
```