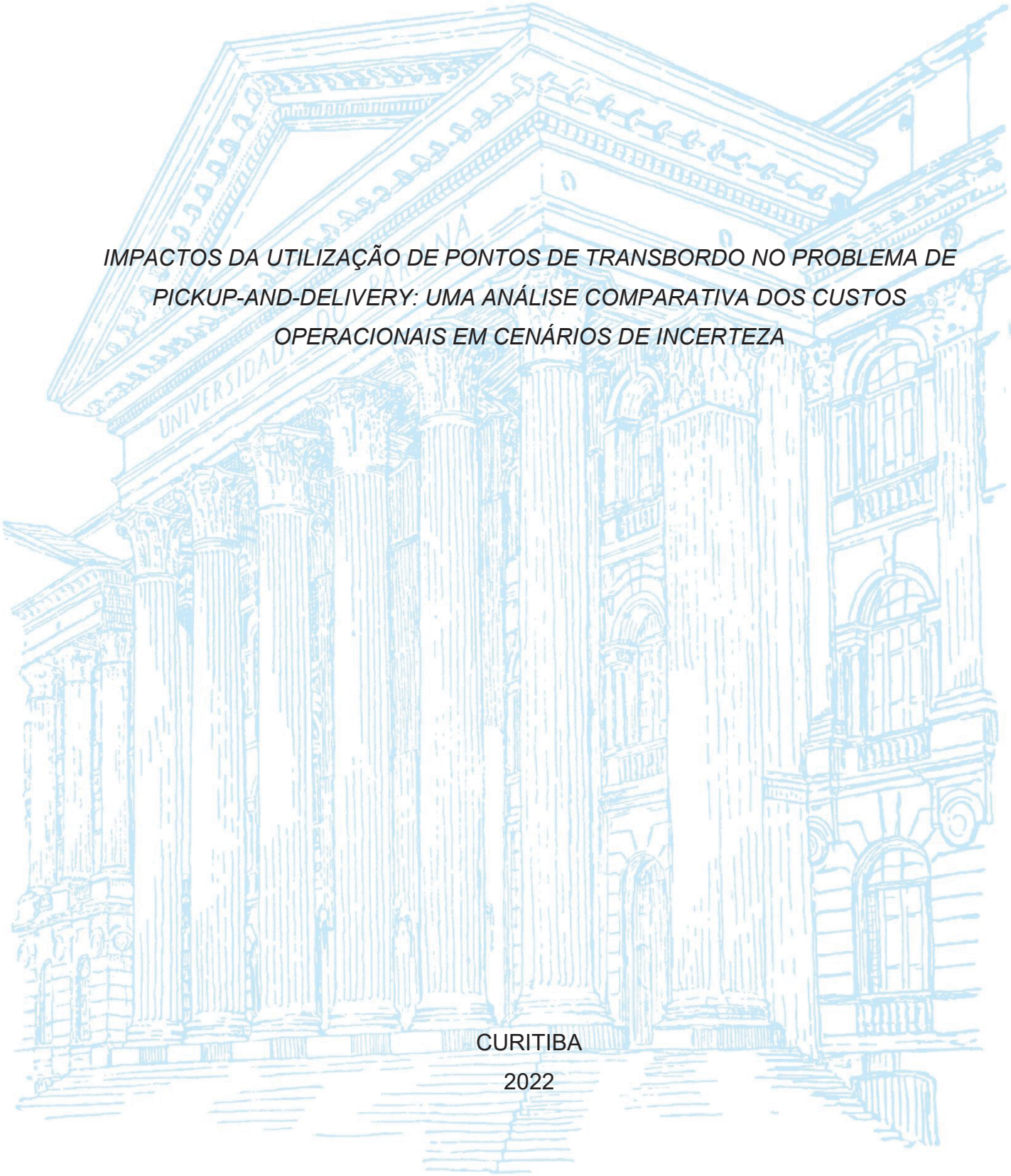
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

PATRICK RONCOSKI



IMPACTOS DA UTILIZAÇÃO DE PONTOS DE TRANSBORDO NO PROBLEMA DE PICKUP-AND-DELIVERY: UMA ANÁLISE COMPARATIVA DOS CUSTOS OPERACIONAIS EM CENÁRIOS DE INCERTEZA

CURITIBA

2022

PATRICK RONCOSKI

IMPACTOS DA UTILIZAÇÃO DE PONTOS DE TRANSBORDO NO PROBLEMA DE PICKUP-AND-DELIVERY: UMA ANÁLISE COMPARATIVA DOS CUSTOS OPERACIONAIS EM CENÁRIOS DE INCERTEZA

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Gestão de Organizações, Liderança e Decisão, Setor de Ciências Sociais Aplicadas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Gestão de Organizações, Liderança e Decisão.

Orientador: Prof. Dr. Gustavo Valentim Loch

CURITIBA

2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIAS SOCIAIS APLICADAS

Roncoski, Patrick
Impactos da utilização de pontos de transbordo no problema de *pickup-and-delivery* : uma análise comparativa dos custos operacionais em cenários de incerteza / Patrick Roncoski. – Curitiba, 2023.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Sociais Aplicadas, Programa de Pós-Graduação em Gestão de Organizações, Liderança e Decisão.
Orientador: Prof. Dr. Gustavo Valentim Loch.

1. Logística empresarial. 2. Empresas de transporte. 3. Distribuição de mercadorias. 4. Transporte de mercadorias. 5. Custo operacional. I. Loch, Gustavo Valentim. II. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Gestão de Organizações, Liderança e Decisão. III. Título.

Bibliotecária: Maria Lidiane Herculano Graciosa CRB-9/2008

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação GESTÃO DE ORGANIZAÇÕES, LIDERANÇA E DECISÃO da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **PATRICK RONCOSKI** intitulada: **IMPACTOS DA UTILIZAÇÃO DE PONTOS DE TRANSBORDO NO PROBLEMA DE PICKUP-AND-DELIVERY: UMA ANÁLISE COMPARATIVA DOS CUSTOS OPERACIONAIS EM CENÁRIOS DE INCERTEZA**, sob orientação do Prof. Dr. GUSTAVO VALENTIM LOCH, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 14 de Julho de 2022.

Assinatura Eletrônica
07/02/2023 12:54:52.0
GUSTAVO VALENTIM LOCH
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
08/02/2023 14:05:13.0
CASSIUS TADEU SCARPIN
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
10/02/2023 14:23:42.0
JOSÉ EDUARDO PÉCORA JUNIOR
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
07/02/2023 13:55:16.0
TALITA MARIANA PINHO SCHIMIDT
Avaliador Externo (null)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus pais, pelo apoio durante toda a vida. Talita, por todo o amor e carinho que recebi, e Geraldo, por todos os incentivos que tive ao longo dos anos. Devo tudo o que sou e o que conquistei a vocês dois.

Agradeço também à minha namorada, Ketlyn Ribeiro, por todo o apoio, paciência e compreensão durante esse tempo, e por acreditar em mim quando eu mesmo não acreditava. Obrigado por tudo.

Agradeço à minha irmã (ou “maninha”), Pâmela do Rocio Roncoski, pelas conversas e momentos de descontração que me foram essenciais.

Agradeço ao meu amigo de longa data, Vithor Temanski, pelos vários conselhos, pela atenção e por me ouvir quando as coisas não iam bem.

Agradeço ao meu orientador, professor Gustavo Valentim Loch, pelas aulas que me foram de grande proveito, e pelos direcionamentos corretos e ideias certeiras que me tiraram dos maiores percalços e me fizeram superar os maiores desafios durante o desenvolvimento da pesquisa.

Agradeço ao meu professor, Cassius Tadeu Scarpin, por me apresentar a área de pesquisa operacional e por ter aberto tantas portas para mim desde a graduação.

Agradeço também àquelas pessoas que me ajudaram em condições específicas. Anderson Oberdan, pelas dicas pontuais e valiosas ao longo do tempo. Guilherme Batista, por me ajudar em um detalhe de programação que eu não teria descoberto sozinho. Lucas Vasconcelos, pelo apoio e compreensão na reta final.

Agradeço aos professores do PPGOLD, cujos ensinamentos me foram essenciais. Agradeço também os meus amigos e colegas do Grupo de Tecnologia Aplicada à Otimização (GTAO), pela troca de conhecimento durante o período.

Agradeço, por fim, todos os demais familiares, amigos e professores que, de alguma forma, contribuíram para o desenvolvimento e conclusão deste trabalho. Serei sempre grato a todos aqueles que, direta ou indiretamente, me auxiliaram em algum momento durante essa jornada.

“A imaginação muitas vezes nos conduz a mundos que nunca existiram, mas sem ela nós não iremos a lugar algum.”

Carl Sagan

RESUMO

No contexto prático de transportadoras e operadores logísticos, é comum não haver o conhecimento quanto às datas em que transportes de remessas serão solicitados. Neste trabalho, uma variante do *Pickup-and-Delivery Problem* foi proposta, denominada UHPDP (*Uncertain Horizon Pickup-and-Delivery Problem*), que parte do princípio de que o modelo matemático é executado dia após dia durante um certo período, considerando as remessas que vão sendo reveladas à transportadora ou operador logístico ao longo do tempo. Nessa variante, os veículos não têm uma restrição quanto ao ponto em que precisam encerrar a rota, é permitido haver atrasos de entrega, contanto que a transportadora pague multas, além de ser possível que transbordos sejam realizados em um dia ou de um dia para outro. Instâncias foram geradas aleatoriamente em algumas cidades do estado do Paraná. Comparações foram feitas para algumas instâncias a partir da existência de pontos de transbordo habilitados ou não, no que diz respeito ao custo mensal. Algumas alterações de parâmetros, como custo de atraso por remessa, custo de combustível e prazo de entrega foram feitas para averiguar o comportamento dos custos de atraso e custos de transporte do UHPDP. O Método de Monte Carlo foi utilizado para determinar médias do custo mensal e da ocupação média dos veículos a partir da replicação do modelo UHPDP para diferentes instâncias de demandas, em um conjunto definido de parâmetros. Os resultados indicam que há redução dos custos de transporte e de atraso ao longo do mês para alguns dos cenários testados, embora a média de ocupação dos veículos não tenha apresentado variações consideráveis com a utilização de transbordos no UHPDP.

Palavras-chave: pickup-and-delivery, roteirização de veículos, ponto de transbordo, demanda estocástica

ABSTRACT

In the context of carriers and logistics operators, it is common not to have knowledge about the day in which the transport of shipments will be requested. In this work, a variant of the Pickup-and-Delivery Problem was proposed, called UHPDP (Uncertain Horizon Pickup-and-Delivery Problem), which assumes that the model is calculated everyday for a period, considereing the shipments that are being disclosed to the carrier or logistics operator over time. In this variant, vehicles do not have a restriction on the point at which they need to end the day, it is possible to delay the deliveries, as long as carriers pay the taxes. Also, it is possible to exist transshipment during the same day or different days. Instances were generated randomly in some cities of Paraná state. Comparisons were made for some instances based on the existence, or not, of transshipment points, considering monthly cost. Some changes in some parameters, such as delay cost per item, fuel cost and deliver deadline were made in order to find out the behavior of delay costs and transportation costs of UHPDP. The Monte Carlo Method was used to determine averages of monthly costs and occupation percentages of vehicles from the replication of UHPDP model for different instances of demands, in a defined set of parameters. The results indicates that there are transportation costs reduction and delay costs reduction in some of the cases tested, but the average percentage of vehicle occupation of the fleet did not shown considerable variations with the use of transshipment points in UHPDP.

Keywords: pickup-and-delivery, vehicle routing, transshipment point, stochastic demand

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – MELHORIA PERCENTUAL DOS CUSTOS DE OPERAÇÃO PARA DIFERENTES QUANTIDADES DE REMESSAS 18
FIGURA 2 – EXEMPLO DE VALIDAÇÃO DE SUBROTAS 38
FIGURA 3 – EXEMPLO DE TRANSBORDO DURANTE O DIA 40
FIGURA 4 – EXEMPLO DE TRANSBORDO NO DIA 1 42
FIGURA 5 – EXEMPLO DE TRANSBORDO NO SEGUNDO DIA 44
FIGURA 6 – EXEMPLO DE TRANSBORDO NO DIA 3 45
FIGURA 7 – LOCALIZAÇÃO GEOGRÁFICA DAS CIDADES UTILIZADAS NOS TESTES COM UM TRANSBORDO 47
FIGURA 8 – LOCALIZAÇÃO GEOGRÁFICA DAS CIDADES UTILIZADAS NOS TESTES COM DOIS TRANSBORDOS 48
FIGURA 9 – EXEMPLO DE OCUPAÇÃO DOS VEÍCULOS 50

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – CONJUNTOS DO MODELO MATEMÁTICO 31
TABELA 2 – PARÂMETROS DO MODELO MATEMÁTICO 31
TABELA 3 – VARIÁVEIS DO MODELO MATEMÁTICO 32
TABELA 4 – REMESSAS NO EXEMPLO DE TRANSBORDO DURANTE O DIA 39
TABELA 5 – VEÍCULOS NO EXEMPLO DE TRANSBORDO DURANTE O DIA 40
TABELA 6 – EXEMPLO: DADOS DAS REMESSAS NO DIA 1 41
TABELA 7 – EXEMPLO: DADOS DOS VEÍCULOS NO DIA 1 42
TABELA 8 – EXEMPLO: DADOS DAS REMESSAS NO DIA 2 43
TABELA 9 – EXEMPLO: DADOS DOS VEÍCULOS NO INÍCIO DO DIA 2 43
TABELA 10 – EXEMPLO: DADOS DAS REMESSAS NO INÍCIO DO DIA 3 44
TABELA 11 – EXEMPLO: DADOS DOS VEÍCULOS NO INÍCIO DO DIA 3 45
TABELA 12 – CARACTERÍSTICAS DA FROTA HOMOGÊNEA 49
TABELA 13 – CARACTERÍSTICAS DOS CONTRATOS GERADOS 49
TABELA 14 – ESTIMATIVA DO PARÂMETRO Eij 54
TABELA 15 – DADOS DO CENÁRIO DE TESTE 54
TABELA 16 – DADOS DA FROTA GERADA 55
TABELA 17 – ABREVIAÇÕES UTILIZADAS NOS RESULTADOS 56
TABELA 18 – CUSTOS DOS TESTES INICIAIS 56
TABELA 19 – PERCENTUAL DE OCUPAÇÃO DA FROTA 57
TABELA 20 – RESULTADOS COM PRAZO DE ENTREGA MENOR 58
TABELA 21 – RESULTADOS COM PRAZO DE ENTREGA MAIOR 59
TABELA 22 – RESULTADOS COM CUSTO DE ATRASO MAIOR 60
TABELA 23 – RESULTADOS COM CUSTO DE TRANSPORTE MAIOR 60
TABELA 24 – CUSTOS DAS INSTÂNCIAS NA ESTIMATIVA N5-T2 61
TABELA 25 – CUSTOS DAS INSTÂNCIAS NA ESTIMATIVA N6-T3 62
TABELA 26 – MÉDIAS DAS OCUPAÇÕES DOS VEÍCULOS EM CADA CENÁRIO 63
TABELA 27 – MÉDIA E DESVIO PADRÃO DO CUSTO EM CADA CENÁRIO 65
TABELA 28 – INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA A MÉDIA DE OCUPAÇÃO DOS VEÍCULOS 65

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

CNT – Confederação Nacional de Transporte
CVRP – Capacitated Vehicle Routing Problem
GPDP – Green Pickup-and-Delivery Problem
IDE – Integrated Development Environment
IRP – Inventory Routing Problem
IPRT – Inventory Routing Problem With Transshipment
MDVRP – Multiple Depots Vehicle Routing Problem
MVPPDP – Multi-Vehicle Profitable Pickup-and-Delivery Problem
OVRP – Open Vehicle Routing Problem
PDP – Pickup-and-Delivery Problem
PDPSLT – Pickup-and-Delivery Problem with Split Loads and Transshipments
PDPT – Pickup-and-Delivery Problem with Transshipment
PDPTW – Pickup-and-Delivery Problem with Time Windows
PDPTTW – Pickup-and-Delivery Problem with Transshipment and Time Windows
PIB – Produto Interno Bruto
SVRP – Stochastic Vehicle Routing Problem
TSP – Traveling Salesman Problem
UHPDP – Uncertain Horizon Pickup-and-Delivery Problem
VMI – Vendor-Managed Inventory
VRP – Vehicle Routing Problem
VRPPD – Vehicle Routing Problem with Pickups and Deliveries

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 16
1.1 JUSTIFICATIVA E PROBLEMA DE PESQUISA 17
1.2 OBJETIVOS 18
1.2.1 Objetivo geral 19
1.2.2 Objetivos específicos 19
1.3 ORGANIZAÇÃO DO ESTUDO 19
2 REVISÃO DA LITERATURA 20
2.1 ORIGENS DO PICKUP-AND-DELIVERY PROBLEM 20
2.2 PICKUP-AND-DELIVERY PROBLEM WITH TIME WINDOWS 22
2.3 PICKUP-AND-DELIVERY PROBLEM WITH TRANSSHIPMENT 22
2.4 PONTOS DE TRANSBORDO APLICADOS AO LAST MILE DELIVERY 24
2.5 INVENTORY ROUTING PROBLEM 25
2.6 INCERTEZAS NO PICKUP-AND-DELIVERY PROBLEM 26
3 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA 28
4 MODELO MATEMÁTICO 30
4.1 DEFINIÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO 30
4.2 VALIDAÇÃO DE SUBROTAS 37
4.3 EXEMPLOS ILUSTRATIVOS 38
4.3.1 Transbordo no mesmo dia 39
4.3.2 Transbordo em dias distintos 41
5 METODOLOGIA 47
5.1 CÁLCULO DA OCUPAÇÃO DOS VEÍCULOS 50
5.2 MATRIZ DE DISTÂNCIAS 51
5.3 MÉTODO DE MONTE CARLO 52
5.4 ANÁLISE DO CUSTO FICTÍCIO E DO PARÂMETRO Eij 52
5.5 PARÂMETROS FIXOS DOS TESTES 54
6 RESULTADOS 56
6.1 CENÁRIOS ALTERNATIVOS 58
6.1.1 Prazo de entrega menor 58
6.1.2 Prazo de entrega maior 59
6.1.3 Custo de atraso maior 59
6.1.4 Custo de transporte maior 60

6.2 RESULTADOS DO MÉTODO DE MONTE CARLO 61
7 CONCLUSÃO 67
REFERÊNCIAS.....69

1 INTRODUÇÃO

O problema de *Pickup-and-Delivery*, ou *Pickup-and-Delivery Problem* (PDP), pode ser compreendido como um problema logístico em que uma frota de veículos, cada um com seu ponto de origem e ponto de destino, deve realizar o transporte de um conjunto de remessas, cada uma com seu ponto de *pickup* (coleta) e *delivery* (entrega) específicos.

O PDP vem sendo muito abordado na literatura e apresenta grande relevância prática nas organizações que operam com transporte de mercadorias. Diversas variações do modelo matemático do problema original já foram desenvolvidas e abordadas na literatura, considerando uma série de parâmetros, cenários e particularidades. No entanto, há pouca literatura que considere o contexto em que o PDP seja abordado em cenários em que, para a transportadora que irá realizar os transportes, haja incerteza na informação. Essa incerteza pode estar relacionada à data de entrega, à quantidade a ser transportada, ao tempo gasto para percorrer determinado trajeto ou ao custo do transporte.

Um caso recorrente no contexto das transportadoras diz respeito a contratos que são estabelecidos junto a empresas que terceirizam o serviço de transporte. Nesse caso, a transportadora realiza um certo número de coletas e entregas de mercadorias durante um período pré-determinado sem, contudo, saber previamente as datas em que as demandas serão solicitadas. Assim, o contrato é estabelecido entre transportador e contratante de modo que exista um prazo de entrega para as mercadorias a partir da data em que o transportador é informado sobre o pedido e uma multa por dia de atraso.

Outro aspecto importante para as transportadoras que precisam fazer a entrega de múltiplas mercadorias reside na possibilidade de utilização de pontos de transbordo, no intuito de trocar a carga de um veículo para o outro. Assim, a proposta do presente trabalho consiste em propor o Problema de Coleta e Entrega com Horizonte Incerto, ou UHPDP (*Uncertain Horizon Pickup-and-Delivery Problem*), em que a modelagem matemática pressupõe múltiplas rodagens, uma para cada dia do período considerado, tendo em vista as informações disponíveis para a transportadora a cada dia e as condições das remessas e dos veículos no fim do dia anterior. O intuito é minimizar os custos totais de transporte e atraso ao longo do período considerado.

No UHPDP, uma transportadora tem um conjunto de contratos. Cada contrato é composto por um local definido de coleta, um local definido de entrega, um período de vigência, um número de entregas que devem ser realizadas durante esse período, uma quantidade mínima e máxima de carga em um pedido, um prazo de entrega (em dias) e uma multa por dia de atraso na entrega. A incerteza está no fato de que o número de viagens de cada contrato a ser realizado no mês é conhecido e determinístico, mas não existe definição prévia dos dias em que os transportes deverão ocorrer. Cada veículo pode realizar qualquer trajeto, desde que a distância total percorrida dia não ultrapasse uma distância máxima.

Dessa forma, dentro do horizonte de tempo considerado, os pedidos vão sendo revelados para a transportadora e, a cada dia, ela deve resolver uma variação do *Pickup-and-Delivery Problem* em que não existe a obrigatoriedade de atender a todas as requisições do dia, embora isso possa levar a atrasos e multas. O veículo inicia suas atividades em determinado dia no mesmo ponto em que encerrou suas operações no dia anterior. Além disso, o transbordo pode ser realizado tanto no mesmo dia quanto em dias diferentes, ou seja, um veículo pode deixar a carga em um ponto de transbordo em um determinado dia para que outro veículo possa realizar, em data posterior, a coleta dessa carga a partir desse ponto de transbordo.

1.1 JUSTIFICATIVA E PROBLEMA DE PESQUISA

Segundo a Confederação Nacional do Transporte (CNT), os custos do transporte rodoviário no Brasil são equivalentes a 6% do Produto Interno Bruto (PIB) do país. As últimas publicações do Boletim Econômico da CNT também alegam que o modal rodoviário é responsável por cerca de 60% da movimentação de mercadorias no território nacional. A principal justificativa de estudo deste tema, portanto, está no fato de haver custos muito elevados no modal rodoviário de transporte e grandes volumes de movimentação de cargas em território brasileiro. Com isso, surgem diversas alternativas e possibilidades que podem ser analisadas para melhorar a utilização dos recursos e reduzir os custos operacionais das organizações que atuam com transporte de mercadorias.

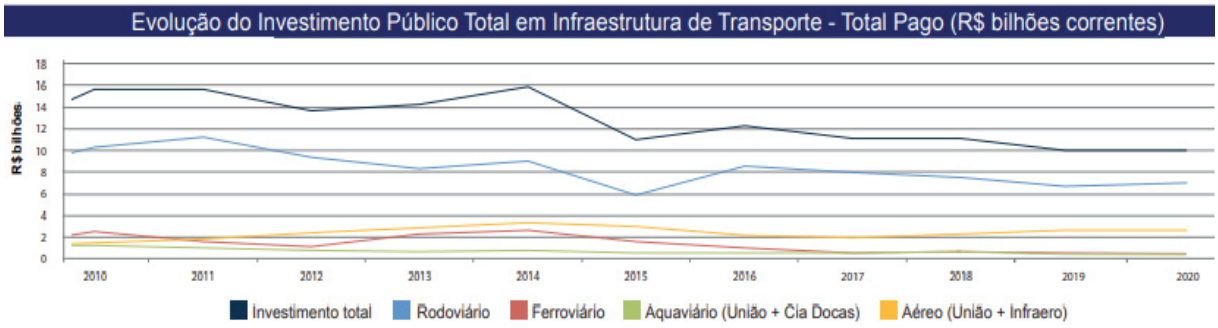
Dentre essas alternativas, ressalta-se a utilização de pontos de transbordo, que permitem a consolidação de cargas, a troca de mercadorias de um veículo para outro e, ainda, a alteração do modal de transporte. A partir desse contexto, o problema de

pesquisa proposto é: **Qual o impacto nos custos operacionais das organizações ao utilizar pontos de transbordo em cenários de incerteza quanto ao dia em que os transportes serão solicitados?**

Segundo a pesquisa de Matinrad et al. (2013), nos estudos relacionados à cadeia de suprimentos em cenários de incerteza, alguns problemas da logística tiveram poucos trabalhos que considerassem o horizonte temporal, dentre os quais se destaca o VRP. Tendo em vista que o *Pickup-and-Delivery Problem* (PDP) é uma extensão dos problemas do VRP, na qual os veículos não necessariamente saem de um depósito central, e que tal realidade faz parte do cotidiano de muitas organizações, é notório que um estudo mais aprofundado sobre o problema faz-se pertinente.

A justificativa prática do trabalho também existe devido ao grande volume movimentado pelo modal rodoviário, sobretudo no Brasil, de acordo com os relatórios divulgados pela CNT. Os Boletins Econômicos mostram, também, que os investimentos públicos no modal rodoviário de transporte vêm se mantendo muito acima dos modais aéreo, ferroviário e aquaviário. O gráfico abaixo ilustra o capital investido no transporte brasileiro, sobretudo no modal rodoviário, na última década:

FIGURA 1 – MELHORIA PERCENTUAL DOS CUSTOS DE OPERAÇÃO PARA DIFERENTES QUANTIDADES DE REMESSAS



Fonte: Boletim Econômico da Confederação Nacional do Transporte (2021).

1.2 OBJETIVOS

Tendo em vista o contexto do problema de *Pickup-and-Delivery* e a justificativa teórica e prática a respeito do tema, é possível estabelecer o objetivo geral

deste trabalho e alguns objetivos específicos, que irão auxiliar no atingimento do objetivo geral.

1.2.1 Objetivo geral

Mensurar a redução dos custos de transportadoras e operadores logísticos ao utilizar pontos de transbordo no *Uncertain Horizon Pickup-and-Delivery Problem*.

1.2.2 Objetivos específicos

- Propor um modelo matemático do *Uncertain Horizon Pickup-and-Delivery Problem* (UHPDP);
- Mensurar a redução de custos com a utilização de um ponto de transbordo de acordo com as características das instâncias testadas;
- Analisar custos de transporte e custos de atraso da entrega no contexto de utilização de pontos de transbordo;
- Verificar o impacto da utilização de pontos de transbordo no UHPDP na ocupação média dos veículos.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO ESTUDO

O trabalho está estruturado da seguinte forma: o capítulo 1 contém a introdução, com a apresentação do tema de pesquisa, a justificativa, o objetivo geral e os objetivos específicos; o capítulo 2 contém a revisão da literatura, no que compete ao problema de *Pickup-and-Delivery*, os problemas que deram origem ao PDP e suas principais variações; o capítulo 3 descreve verbalmente o problema abordado neste trabalho em suas particularidades, tendo em vista o contexto proposto; o capítulo 4 contém a proposta e explicação do modelo matemático; o capítulo 5 contempla os materiais e métodos utilizados para implementação computacional do modelo; o capítulo 6 descreve e analisa os principais resultados obtidos e, por fim, o capítulo 7 conclui o tema abordado, apresentando as principais constatações, limitações da pesquisa e *gaps* para futuros trabalhos relacionados ao tema.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Tendo em vista o tema abordado por este trabalho e os objetivos apontados para atender ao problema de pesquisa, faz-se necessária uma contextualização a respeito do assunto referente à pesquisa acadêmica do problema de *Pickup-and-Delivery,* suas origens e principais variantes.

2.1 ORIGENS DO PICKUP-AND-DELIVERY PROBLEM

O *Pickup-and-Delivery Problem* (PDP) pode ser compreendido como uma generalização do Problema de Roteirização de Veículos, ou *Vehicle Routing Problem* (VRP). Os problemas relacionados à roteirização de veículos têm sua origem no artigo "*The Truck Dispatching Problem*", de Dantzig e Ramser (1959). Ao realizar uma generalização do *Traveling Salesman Problem* (TSP), ou Problema do Caixeiro Viajante, e adicionar restrições relacionadas à necessidade de o veículo retornar ao depósito para ser reabastecido, o VRP tomou suas formas iniciais e, a partir disso, tornou-se um dos problemas mais conhecidos da área de pesquisa operacional. Laporte (2009) defende que o VRP é central para a logística de distribuição por estar presente na rotina de muitas transportadoras.

De acordo com Vigo (2000), centenas de algoritmos e modelos matemáticos já foram propostos para resolver de maneira exata e de maneira aproximada diversas variações do problema de VRP. Uma das variações mais comuns do VRP é o *Capacitated Vehicle Routing Problem* (CVRP), que considera que os veículos têm uma capacidade limitada para transportar cargas. Vigo (2000) também realça que o VRP é um dos problemas de otimização combinatorial mais importantes e mais estudados na área de logística.

O *Vehicle Routing Problem with Backhauls* (VRPB) é uma extensão do VRP (GOETSCHALCKX; JACOBS-BLECHA, 1989). Enquanto o VRP clássico considera que todas as coletas vão ser realizadas no depósito (origem dos veículos) para serem entregues aos clientes, o VRPB permite que seja possível realizar coletas ou entregas no meio da rota dos veículos. Em outras palavras, os clientes podem representar tanto pontos de entrega quanto de coleta de cargas. Goetschalckx e Jacobs-Blecha (1989) salientam que o VRPB reduz a capacidade ociosa de veículos que, no VRP clássico, viajariam vazios de volta ao depósito.

Segundo Xu et al. (2003), a roteirização de veículos constitui um papel muito importante na logística das organizações. O *Vehicle Routing Problem* (VRP) é um caso particular do PDP em que a origem e o destino de todos os veículos é o depósito (HALL, 1999). O autor ainda ressalta que, apesar da equiparável importância prática do PDP, o VRP tem recebido mais atenção da literatura.

A aplicação do VRP e do PDP também se estende à distribuição no setor do varejo. Os estudos de Abdulkader et al. (2018), ao analisar e implementar o problema no contexto de *omni-channel*, consideram que uma frota de veículos deve atender tanto os pedidos on-line realizados por clientes quanto as demandas das lojas varejistas. Esse contexto representa outra variação do VRP, o que permitiu a criação de um modelo matemático específico para o *omni-channel*.

Diversas variações do problema foram abordadas em outros estudos, como o *Multiple Depot Vehicle Routing Problem* (MDVRP), estudado por Wang (2012), que considera múltiplos depósitos, ou o *Multi-vehicle Profitable Pickup-and-Delivery Problem* (MVPPDP) estudado por Gansterer et al. (2017). Esses trabalhos atuaram com o auxílio de algoritmos de busca local ou ainda com a utilização de alguma meta-heurística.

Outra variação bastante comum do VRP é o *Open Vehicle Routing Problem* (OVRP). Trata-se de uma abordagem em que os veículos, após atenderem ao último cliente da rota, não precisam retornar ao depósito inicial. A ideia do OVRP foi citado primeiramente por Schrage (1981), ao pontuar os principais aspectos de um problema de roteirização de veículos que ocorre na prática.

Variações do OVRP foram estudadas por Sariklis e Powell (2000), ao ampliar o conceito e propor que o OVRP poderia ter uma dentre duas características: o veículo não precisaria retornar ao depósito de origem ou o veículo faria a rota no sentido contrário, atendendo aos vértices que já havia passado antes, do último ao primeiro, retornando ao depósito inicial.

Ademais, outra variante do PDP com grande presença na literatura, e que vem ganhando ênfase nas últimas décadas, é o *Green Pickup-and-Delivery Problem* (GPDP). Nessa abordagem, o modelo considera as características e a quantidade de veículos utilizados e os custos operacionais no intuito de, na função objetivo, minimizar a emissão de gases nocivos à atmosfera, como gases nitrogenados e dióxido de carbono. Wang et al. (2018) estudam esse problema no contexto colaborativo entre duas ou mais empresas. Os pesquisadores argumentam que,

embora seja possível assegurar a solução do GPDP de modo a minimizar a emissão de poluentes, essa solução comumente não é a melhor solução para alguma das empresas envolvidas, o que dificulta em grande medida a implementação da solução obtida pelo software de otimização.

2.2 PICKUP-AND-DELIVERY PROBLEM WITH TIME WINDOWS

O *Pickup-and-Delivery Problem With Time Windows* (PDPTW) é uma generalização do modelo do VRP, com a adição de restrições relacionadas ao tempo de entrega (DUMAS et al., 1991). Nessa generalização, o tempo de deslocamento dos veículos é considerado no modelo e o instante em que um veículo inicia sua operação é incluído no conjunto de variáveis de decisão. Mues e Pickl (2005) alegam que problemas envolvendo roteirização de veículos com a presença de janelas de tempo são bastante comuns, principalmente em empresas de grande porte, nas quais a natureza multimodal do transporte de mercadorias se faz presente.

Sun et al. (2018) ampliaram o modelo do PDPTW ao adicionar, na função objetivo, custos variáveis de percorrer um arco dependendo do horário em que o veículo realiza o transporte. Em horários de pico, por exemplo, os autores reforçam que os custos com combustível, a distância percorrida para se atender a um cliente e o tempo de travessia de um arco pode ser maior do que nos demais horários, devido à velocidade média menor em tráfegos intensos ou desvios da rota principal para evitar o tráfego.

Dahle et al. (2019) realizaram testes com diversas instâncias do PDPTW, ao incorporar a prática do *crowdshipping*, adotada por grandes empresas como Amazon e Walmart. Essa prática, de considerar motoristas ocasionais, que não fazem parte do fluxo original no cenário de entregas em troca de uma pequena negociação, trouxe uma redução de custos entre 10% e 15% nas instâncias testadas do PDPTW.

2.3 PICKUP-AND-DELIVERY PROBLEM WITH TRANSSHIPMENT

De acordo com Mues e Pickl (2005), a maioria dos problemas de PDP e VRP consideram um único modal de transporte. Com isso, a abordagem de utilizar pontos de transbordo permite a consideração de mais de um modal, embora os autores

afirmem que existam poucos trabalhos na literatura que considerem mais de um modal de transporte.

Segundo os trabalhos de Mitrović-Minić e Laporte (2006), é possível ampliar o PDPTW e utilizar-se de um subconjunto de pontos de transbordo. Em alguns contextos, a utilização dos pontos de transbordo pode propiciar soluções com redução na distância percorrida pela frota ou, ainda, redução do número de veículos utilizados. Além disso, Yang e Xiao (2007) ressaltam que um ponto de transbordo tem um papel importante na logística ao conectar fornecedores com varejistas na cadeia de suprimentos. No entanto, os autores salientam que os ajustes no transporte para utilização de um ponto de transbordo podem aumentar os custos operacionais da organização.

O estudo de Rais et al. (2014) propôs um modelo de programação inteira binária para o *Pickup-and-Delivery Problem with Transshipment and Time Windows* (PDPTTW) que considera tanto a janela de tempo, como restrição para atender aos clientes, quanto a possibilidade de haver pontos de transbordo. Ao contrário do PDP, o *Pickup-and-Delivery Problem with Transshipment* (PDPT) considera pontos de transbordo em que veículos podem parar para descarregar e ajustar suas cargas, além de possibilitar que motoristas possam trocar de veículo ou parar com suas atividades de transporte para atender às leis e políticas da empresa.

Similarmente, o trabalho de Mitrović-Minić e Laporte (2006) estuda o problema PDPTTW e os resultados da pesquisa indicam que há benefícios em se considerar pontos de transbordo, uma vez que nos cenários testados (gerados aleatoriamente com instâncias relativamente agrupadas, ou seja, com grupos de pontos próximos entre si) a distância total percorrida pela frota foi inferior quando comparada com a distância total percorrida no cenário sem a existência de pontos de transbordo. As constatações desse estudo indicaram que a presença de um ponto de transbordo foi especialmente vantajosa nas instâncias de maior porte, ou seja, com maior quantidade de veículos, nós e remessas a serem entregues.

Já os estudos de Vornhusen et al. (2014) abordam um modelo matemático de PDPTW considerando colaboração horizontal entre diferentes transportadoras de fretes. A criação e implementação do modelo matemático que considera tais parcerias trouxe resultados consideráveis de redução de custos para transportadoras de pequeno e médio porte. Os testes, sem a utilização de pontos de transbordo, e apenas com a colaboração entre transportadoras, trouxe grandes reduções nos custos. Com

a adição de pontos de transbordo ao cenário de testes, os custos ficaram ainda menores para as transportadoras envolvidas.

Outro estudo que contempla o PDPT é o de Wolfinger e Salazar-González (2021). Os autores abordam outra variação do problema, denominada *Pickup-and-Delivery Problem with Split Loads and Transshipments* (PDPSLT). Nessa variante do problema de programação inteira mista, além de haver a possibilidade de transbordo, os clientes podem ser visitados mais de uma vez por mais de um veículo, já que uma remessa demandada por um cliente pode ser fracionada e entregue em momentos distintos. Os autores ressaltam que essa variação do PDP surge naturalmente ao se analisar o transporte multimodal. Entretanto, ressaltam a necessidade de utilizar heurísticas e metaheurísticas, tendo em visto a complexidade do modelo matemático e o tempo necessário de processamento computacional para atingir a solução ótima.

2.4 PONTOS DE TRANSBORDO APLICADOS AO LAST MILE DELIVERY

O *last mile delivery* de um processo de transporte está relacionado ao transporte no último trecho de uma rota que vai até o cliente, utilizando o último modal de transporte Macioszek (2018). O autor também salienta que o *last mile delivery* é bastante utilizado principalmente em cenários com uma rede de transportes densa, com muitas ruas e muito tráfego. Segundo Ranieri et al. (2018), o *last mile delivery* representa um problema significativo para o volume de tráfego nas áreas urbanas.

Os complementos de Ranieri et al. (2018) ainda enaltecem que, embora existam casos nos quais outros modais sejam utilizados para o transporte de *last mile delivery,* de acordo com as características das cidades, o modal rodoviário ainda é o mais adotado na grande maioria dos casos.

Segundo Macioszek (2018) a área da logística vem ganhando cada vez mais importância, tanto no contexto teórico quanto prático. Consumidores estão comprando mais via internet, desde pequenos produtos e materiais de construção até mobília de grande porte. Lojas on-line estão se especializando nesse tipo de consumo, que exige um planejamento detalhado da operação de entregas, dada a complexidade do processo, fato que enseja operações em *last mile delivery*.

Vale ressaltar, no entanto, que o planejamento do *last mile delivery* tem aplicações que vão além da entrega de produtos aos consumidores. Os estudos de Balcik et al. (2008) apontam o grande impacto do planejamento do *last mile delivery*

por meio de uma abordagem analítica em um processo de distribuição de suprimentos de emergência a uma população atingida por desastres naturais. A formulação do modelo matemático, no contexto abordado, permitiu a eficiente alocação de recursos e designação de rotas para minimizar os custos logísticos e garantir a entrega dos suprimentos às localidades em estado emergencial.

Existem alguns fatores que são considerados boas práticas na implementação de um *last mile delivery* em uma organização. Macioszek (2018) destaca: respeito às leis locais no transporte noturno no que diz respeito ao barulho emitido; transporte multimodal, ou seja, transferência do modal ferroviário para que o modal rodoviário realize as entregas finais; utilização das linhas corretas nas estradas no intuito de evitar tráfegos intensos e; criação de pequenos centros de consolidação de cargas no cenário urbano para que meios de transporte menos nocivos ao meio ambiente, como carros elétricos e bicicletas, realizem o transporte até o cliente final. É possível, portanto, estabelecer um paralelo entre os centros de consolidação de cargas (pontos de transbordo) com o contexto do *last mile delivery*.

2.5 INVENTORY ROUTING PROBLEM

O *Inventory Routing Problem* (IRP) teve suas origens em Bell et al. (1983), em um estudo que visava abordar minimizar o custo de transporte de gases químicos em um contexto de crise financeira que impactava o setor em grande medida. O IRP parte do *Vendor-Managed Inventory* (VMI), prática que visa reduzir os custos logísticos. Segundo Xu et al. (2003), O VMI é um sistema no qual o fornecedor tem as informações, e também a responsabilidade, de gerenciar os níveis de estoque dos seus clientes, com o objetivo de reduzir o estoque médio e os custos de transporte e reposição de estoques, para beneficiar ambas as partes da cadeia de suprimentos.

As primeiras abordagens do IRP foram variações de modelos VRP, com a adição de restrições relacionadas ao nível de estoques por parte dos clientes Coelho et al. (2014). No contexto do VMI, fornecedor e clientes são beneficiados, já que o modelo matemático do problema considera, para além dos custos de transporte, os custos de manutenção dos estoques nos clientes, tratando-se, portanto, de uma junção do problema de roteirização de veículos com o problema de gestão de estoques.

Similarmente ao que acontece no PDP, a existência de pontos de transbordo pode ser vantajosa também no IRP. Nesse sentido, Coelho, Cordeau e Laporte (2014) realizaram testes em cima do *Inventory and Routing Problem with Transshipment* (IRPT). Os resultados do estudo mostraram a alta complexidade e custo computacional para se encontrar a solução ótima do problema. No entanto, heurísticas foram desenvolvidas e testadas para o IPRT e sugeriram que, dependendo dos custos unitários de transporte e dos custos de utilização de um veículo, a existência de pontos de transbordo pode reduzir bastante os custos de uma solução factível encontrada em tempo razoável de processamento do modelo.

2.6 INCERTEZAS NO PICKUP-AND-DELIVERY PROBLEM

Algumas incertezas já foram consideradas em pesquisas anteriores de PDP e VRP. Embora aplicável a ambos os casos, o VRP tem recebido mais atenção da literatura acadêmica no que se refere a incertezas de demanda, tempo de serviço de coleta e entrega ou tempo de travessia de um arco. De acordo com Oyola et al. (2018), os modelos matemáticos de *Stochastic Vehicle Routing Problem* (SVRP) costumam ser criados a partir de ajustes dos modelos de CVRP.

No que tange ao caso geral do PDP, os estudos de Bruni et al. (2021) abordaram tempos de viagem incertos para a travessia de um arco, adicionando custos relacionados ao não cumprimento das janelas de tempo dos clientes. O trabalho discute o impacto dessa variabilidade dos tempos e propõe uma variante do modelo em que os clientes que fornecem maior lucro têm prioridade na roteirização dos veículos. Estudos semelhantes foram realizados por Al Chami et al. (2018), também considerando incertezas quanto ao tempo de viagem dos veículos e heurísticas para encontrar, em menor tempo de processamento computacional, a solução ótima do problema.

Além disso, Beraldi et al. (2010) estuda um modelo matemático baseado em análise probabilística do MPDP (*Multi-vehicle Pickup-and-Delivery Problem*) em que a probabilidade de um cliente requisitar uma entrega é parâmetro do modelo. Além disso, algoritmos de busca local foram aplicados no MPDP, de modo que o tempo computacional de processamento foi reduzido em aproximadamente metade.

Ainda assim, a análise da literatura revela que o estudo de incertezas, como tempo de travessia de um arco e o caráter estocástico da demanda, é mais explorado

no caso particular em que os veículos têm uma origem em comum (VRP) do que no caso geral do PDP. Alguns dos estudos supracitados que abordam o PDP também restringem o cenário à particularidade do VRP, considerando que a frota de veículos parte de um depósito central.

Nessas condições, é visível que uma pesquisa que aborde o PDP tendo em vista o horizonte temporal e cenários de incerteza, em que o transportador não sabe com antecedência quais cargas devem ser transportadas a partir de quais locais, torna-se relevante. Não obstante, considerar o impacto de utilizar pontos de transbordo, tanto para a ocorrência de transbordo em um mesmo dia quanto em dias distintos, em que uma remessa pode ser deixada para ser transportada em outro dia, também podem levar a novas conclusões.

3 DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

O UHPDP proposto neste trabalho parte do problema original de *Pickup-and-Delivery*, com algumas modificações. No contexto de uma transportadora ou operador logístico que possua uma frota de veículos, há uma série de remessas que estão em determinados locais e que precisam ser transportadas e entregues para determinados clientes. Cada veículo possui um local de origem e um local de destino, fato que diferencia o PDP do VRP, em que todos os veículos têm como origem e destino um depósito central. Assim, no PDP, se o veículo sair da origem, ele deve encerrar a rota no seu ponto de destino.

O modelo estudado neste trabalho, denominado por UHPDP, é uma expansão do PDP e considera também características relacionadas ao Open VRP. No PDP tradicional, o veículo precisa chegar a um determinado ponto de destino, enquanto no Open VRP o veículo não tem a obrigatoriedade de retornar ao depósito central, que corresponde à origem do veículo. Já no UHPDP, o veículo não tem obrigatoriedade de encerrar o dia em nenhum nó em específico.

O UHPDP considera, também, a possibilidade de uma carga passar por um ou mais pontos de transbordo (característica do PDPT). Isso indica que um veículo pode descarregar uma remessa em um ponto de transbordo para que outro veículo continue o transporte. Tal possibilidade pode diminuir os custos operacionais, uma vez que permite que a capacidade ociosa e a distância percorrida por alguns veículos sejam reduzidas. Para a realização do transbordo de uma remessa em determinado dia, o UHPDP também considera o tempo do trajeto dos veículos, e só possibilita que o transbordo aconteça se o primeiro veículo chegar com a remessa no ponto de transbordo em algum instante anterior ao instante em que o segundo veículo sair desse ponto de transbordo carregando a remessa.

Considerando que o modelo do UHPDP parte do princípio de ser rodado a cada dia, considerando, como parâmetros de entrada, os resultados do dia anterior, há também a possibilidade de realização de transbordo de um dia para o outro. Ou seja, uma remessa pode ser coletada de sua origem e levada até a um ponto de transbordo, de modo a encerrar o dia nesse ponto. Dessa forma, o UHPDP considera que, no dia seguinte, o ponto de coleta da remessa seja o ponto de transbordo no qual encerrou o dia anterior. A utilização de tal modelo dia após dia é viável, no que diz respeito ao

tempo computacional, para instâncias pequenas, ou seja, com poucos nós, veículos e remessas.

No UHPDP, há também a presença de contratos, estabelecidos entre empresas solicitantes e a transportadora ou operador logístico responsável pelos transportes. Há um número de demandas definida dentro do prazo do contrato, com um limite para a quantidade mínima e máxima de cada demanda (em toneladas). Esse contrato também possui um ponto de origem definido e um ponto de destino definido, de modo que todas as demandas associadas a um determinado contrato têm o mesmo vértice de origem e o mesmo vértice de destino. Além disso, também fica definido no contrato o prazo de entrega, a partir do momento em que o transporte é solicitado, e a multa cumulativa por dia de atraso.

A incerteza do UHPDP está diretamente associada às datas em que as demandas serão solicitadas, que não é conhecida a priori. Embora o número de viagens de cada contrato a ser realizado no mês seja conhecido e determinístico, não existe definição prévia dos dias em que os transportes deverão ocorrer. Os veículos podem realizar qualquer trajeto, desde que a distância total percorrida por dia não ultrapasse uma distância máxima.

Dessa forma, dentro do horizonte de um mês, os pedidos vão sendo revelados para operador logístico e a cada dia a transportadora deve resolver uma variação do *Pickup-and-Delivery Problem* (PDP), em que não existe a obrigatoriedade de atender a todas as requisições do dia, embora isso possa levar a atrasos e multas. Além disso, o veículo inicia suas atividades em determinado dia no mesmo ponto em que encerrou suas operações no dia anterior, fato que também se aplica às remessas, caso não tenham sido coletadas ou caso tenham encerrado o dia em um ponto de transbordo. Mesmo que a remessa já esteja atrasada, é necessário entregá-la para que a transportadora evite multas por atrasos cada vez maiores.

4 MODELO MATEMÁTICO

O modelo matemático de UHPDP apresentado neste capítulo foi baseado, inicialmente, no modelo de programação inteira binária de *Pickup-and-Delivery* definido por Rais et al. (2014). No entanto, algumas alterações, como adição de variáveis e restrições, foram feitas para que o modelo se adequasse ao contexto proposto do UHPDP.

Uma diferença em comparação ao modelo exposto em Rais et al. (2014) reside na ausência de restrições relacionadas à janela de tempo de coleta e entrega, ou seja, as remessas podem ser coletadas de suas origens e os clientes podem receber suas remessas nos pontos de destino a qualquer momento. Porém, a janela de tempo foi considerada para fins de realização do transbordo, no intuito de garantir que um veículo só saia do ponto com a remessa após outro veículo ter chegado naquele ponto de transbordo com a remessa em questão, caso haja a troca da demanda de um veículo para outro naquele dia.

Além disso, a função objetivo foi alterada para considerar também os custos de atraso das remessas que não são entregues dentro do prazo, e foi adicionada uma parcela que diz respeito a um custo fictício que será desconsiderado das análises do capítulo 6, mas cuja lógica será explicada em mais detalhes na seção 5.4.

4.1 DEFINIÇÃO DO MODELO MATEMÁTICO

Dado um conjunto de vértices *N*, é possível estabelecer conexões (arcos) entre esses vértices. Seja *N* o conjunto de tal que $i \in N$ e $j \in N$, com $i \neq j$. Seja *R* o conjunto de remessas *r* que devem ser entregues em determinado dia. Cada remessa encontra-se inicialmente em algum ponto $p(r)$, com $p(r) \in N$. Cada remessa também deve ser entregue para algum cliente no ponto $d(r)$, com $d(r) \in N$ e possui um peso (massa) q_r. Seja *K* o conjunto de veículos *k*. Cada veículo *k* possui um ponto de origem $o(k)$, com $o(k) \in N$, e um ponto de destino $o'(k)$, com $o'(k) \in N$, além de uma capacidade de carregamento de peso (massa) u_k. Destaca-se que existe um custo para o veículo *k* percorrer o arco (*i, j)*, calculado com base na distância d_{ij} entre esses pontos, no consumo, em quilômetros por litro do veículo (denotado por c_k) e no custo

estimado do litro do combustível (denotado por f). Considera-se que alguns pontos permitem transbordo, ou seja, a troca de uma carga (remessa) de um veículo para outro. Seja *T* o conjunto de vértices que permitem o transbordo, com $T \subset N$.

A tabela 1 abaixo resume a notação dos conjuntos utilizados no UHPDP.

TABELA 1 – CONJUNTOS DO MODELO MATEMÁTICO

Notação	Descrição
N	Conjunto de vértices.
T	Conjunto de vértices que são transbordos.
K	Conjunto de veículos.
R^+	Conjunto de remessas que não estão atrasadas.
R^-	Conjunto de remessas que, caso não sejam entregues, levarão à incidência de multas.
R	Conjunto de todas as remessas do modelo ($R^+ \cup R^-$)
G_r	Conjunto de possíveis pontos em que a remessa *r* pode encerrar o dia.

Fonte: o autor (2022).

Analogamente, a tabela 2 apresenta a lista dos parâmetros de entrada:

TABELA 2 – PARÂMETROS DO MODELO MATEMÁTICO

Notação	Descrição
d_{ij}	Distância, em quilômetros, entre os nós *i* e *j*.
c_k	Consumo do veículo *k* em litros de combustível por quilômetro.
$o(k)$	Vértice de origem do veículo *k* no dia
$o'(k)$	Vértice de destino do veículo *k*.
$p(r)$	Vértice de coleta da remessa *r*
$d(r)$	Vértice de entrega da remessa *r*
q_r	Peso da remessa *r*
u_k	Capacidade de carregamento do veículo *k*
E_{ij}	Estimativa de custo de transportar uma remessa de *i* para *j*
f	Custo do litro de combustível
D_{max}	Distância máxima que um veículo pode percorrer em um dia

n_r	Número de dias em atraso da remessa *r*
m_r	Multa diária de atraso da remessa *r*
w_r	Número de dias transcorridos desde que a entrega da remessa *r* foi solicitada.
τ_{ijk}	Tempo que o veículo k demora para atravessar o arco (*i, j*)
δ_{min}	Instante mínimo considerado no dia para a atividade dos veículos
δ_{max}	Instante máximo considerado no dia para a atividade dos veículos

Fonte: o autor (2022).

Por fim, a tabela 3 apresenta a lista de variáveis do modelo UHPDP.

TABELA 3 – VARIÁVEIS DO MODELO MATEMÁTICO

Notação	**Descrição**
x_{ijk}	Assume o valor 1 se o veículo *k* percorre o arco (*i, j*), 0 caso contrário.
y_{ijkr}	Assume o valor 1 se o veículo *k* percorre o arco (*i,j*) transportando a remessa *r*, 0 caso contrário.
z_{ijk}	Assume o valor 1 se o vértice *i* precede o vértice *j* na rota do veículo *k*, 0 caso contrário.
t_{jk}	Instante em que o veículo *k* chega ao vértice *j*
t_{jk}^{-}	Instante em que o veículo *k* sai do vértice *j*
s_{jklr}	Assume o valor 1 se houve transbordo da remessa *r* no ponto *j* do veículo *k* para o veículo *l*, 0 caso contrário.
a_r	Assume o valor 1 se uma remessa *r* do conjunto R^{-} não é coletada, 0 caso contrário.
b_r	Assume o valor *1* se uma remessa *r* do conjunto R^{-} não é entregue, 0 caso contrário.
h_r	Assume o valor 1 se a remessa *r* ficou em atraso, 0 caso contrário.
p_{rj}	Assume o valor 1 se a remessa *r* encerrou o dia no ponto *j*.

Fonte: o autor (2022).

O modelo do UHPDP pode ser representado pelos conjuntos de equações e inequações (1)-(40) escritos a seguir:

$$Min\ Z = \sum_{k\epsilon K}\sum_{i\epsilon N}\sum_{j\epsilon N}\frac{d_{ij}}{c_k}\cdot f\cdot x_{ijk} + \sum_{r\,\epsilon R} n_r\cdot m_r\cdot h_r + \sum_{j\epsilon N}\sum_{r\epsilon R} E_{jd(r)}\cdot p_{rj}\cdot(w_r+1) \quad (1)$$

$$\sum_{j\epsilon N} x_{ijk} \le 1 \quad \forall k\,\epsilon\,K, \quad i = o(k) \quad (2)$$

$$\sum_{j\epsilon N} x_{jik} = 0 \quad \forall k\,\epsilon\,K, \quad i = o(k) \quad (3)$$

$$\sum_{i\epsilon N} x_{jik} = 0 \quad \forall k\,\epsilon\,K, \quad j = o'(k) \quad (4)$$

$$\sum_{j\epsilon N} x_{ijk} = \sum_{j\epsilon N} x_{jik} \quad \forall k\,\epsilon\,K, \quad \forall i\ \in N\ \setminus\{o(k), o'(k)\} \quad (5)$$

$$\sum_{k\epsilon K}\sum_{j\epsilon N} y_{ijkr} \le 1 \quad \forall r\,\epsilon\,R^{+}, \ \ i = p(r) \quad (6)$$

$$\sum_{k\epsilon K}\sum_{j\epsilon N} y_{jikr} = 0 \quad \forall r\,\epsilon\,R, \ \ i = p(r) \quad (7)$$

$$\sum_{k\epsilon K}\sum_{i\epsilon N} y_{jikr} = 0 \quad \forall r\,\epsilon\,R, \ \ j = d(r) \quad (8)$$

$$\sum_{k\epsilon K}\sum_{j\epsilon N} y_{ijkr} + a_r = 1 \quad \forall r\,\epsilon\,R^{-}, \ \ i = p(r) \quad (9)$$

$$\sum_{k\epsilon K}\sum_{j\epsilon N} y_{jikr} \le 1 \quad \forall r\,\epsilon\,R^{+}, \ \ i = d(r) \quad (10)$$

$$\sum_{k\epsilon K}\sum_{j\epsilon N} y_{jikr} + b_r = 1 \quad \forall r\,\epsilon\,R^{-}, \ \ i = d(r) \quad (11)$$

$$\sum_{k\epsilon K}\sum_{j\epsilon N} y_{ijkr} \le \sum_{k\epsilon K}\sum_{j\epsilon N}\sum_{l\in G_r} y_{jlkr} \quad \forall r\,\epsilon\,R, \ \ i = p(r) \quad (12)$$

$$\sum_{j\epsilon N} y_{ijkr} = \sum_{j\epsilon N} y_{jikr} \quad \forall k\in K, \ \ \forall r\,\epsilon\,R, \quad \forall i\,\epsilon\,N\setminus\{T, p(r), d(r)\} \quad (13)$$

$$\sum_{k\epsilon K}\sum_{j\epsilon N} y_{tjkr} \le \sum_{k\epsilon K}\sum_{j\epsilon N} y_{jtkr} \quad \forall r\,\epsilon\,R, \quad t\,\epsilon\,T \mid t\ \neq p(r) \quad (14)$$

$$y_{ijkr} \le x_{ijk} \quad \forall i,j\ \in N, \ \ \forall k\in K \quad (15)$$

$$\sum_{r\in R} q_r\cdot y_{ijkr} \le u_k\cdot x_{ijk} \quad \forall i,j\ \in N, \ \ \forall k\ \in K \quad (16)$$

$$\sum_{i\in N}\sum_{j\in N} d_{ij}\cdot x_{ijk} \leq D_{max} \quad \forall k \in K \tag{17}$$

$$t_{ik}^{-} + \tau_{ijk} - t_{jk} \leq \delta_{max}\cdot\left(1 - x_{ijk}\right) \quad \forall ij \in A \quad \forall k \in K \tag{18}$$

$$t_{jk} \leq t_{jk}^{-} \quad \forall j \in N, \quad \forall k \in K \tag{19}$$

$$\sum_{j\epsilon T} y_{jikr} + \sum_{j\epsilon T} y_{ijlr} \leq s_{jklr} + 1 \quad \forall r \epsilon R, \ \forall i \epsilon T, \quad \forall k,l \in K, \quad k \neq l \tag{20}$$

$$t_{jk} - t_{jl}^{-} \leq \delta_{max}\cdot\left(1 - s_{jklr}\right) \quad \forall r \epsilon R, \ \forall j \epsilon T, \quad \forall k,l \in K, \quad k \neq l \tag{21}$$

$$\delta_{min} \leq t_{jk} \leq \delta_{max} \quad \forall k \in K, \ \forall j \in N \tag{22}$$

$$\delta_{min} \leq t_{jk}^{-} \leq \delta_{max} \quad \forall k \in K, \ \forall j \in N \tag{23}$$

$$p_{rj} \geq \sum_{k\in K}\sum_{i\in N} y_{ijkr} - \sum_{k\in K}\sum_{i\in N} y_{jikr} \quad \forall r \epsilon R, \ \forall j \epsilon N \tag{24}$$

$$\sum_{j\in N} p_{rj} = 1 \ \forall r \in R \tag{25}$$

$$p_{rp(r)} + \sum_{k\in K}\sum_{i\in N} y_{p(r)ikr} = 1 \quad \forall r \in R \tag{26}$$

$$a_r + b_r \leq 2\cdot h_r \quad \forall r \epsilon R^{-} \tag{27}$$

$$x_{ijk} \leq z_{ijk} \quad \forall i,j \in N, \quad \forall k \in K, \quad i \neq o(k), \quad j \neq o'(k) \tag{28}$$

$$z_{ijk} + z_{jik} = 1 \quad \forall i,j \in N, \quad \forall k \in K, \quad i \neq o(k), \quad j \neq o'(k) \tag{29}$$

$$z_{ijk} + z_{jlk} + z_{lik} \leq 2 \ \forall i,j,l \in N, \ \forall k \in K, \quad i,j \neq o(k), \ l \neq o'(k) \tag{30}$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \ \forall i,j \in N, \quad \forall k \in K \tag{31}$$

$$y_{ijkr} \in \{0,1\} \ \forall i,j \in N, \quad \forall k \in K, \ \forall r \in R \tag{32}$$

$$z_{ijk} \in \{0,1\} \ \forall i,j \in N, \quad \forall k \in K \tag{33}$$

$$a_r \in \{0,1\} \quad \forall r \in R \tag{34}$$

$$b_r \in \{0,1\} \quad \forall r \in R \tag{35}$$

$$h_r \in \{0,1\} \quad \forall r \in R \tag{36}$$

$$p_{jr} \in \{0,1\} \quad \forall r \in R \tag{37}$$

$$s_{ijkr} \in \{0,1\} \ \forall i,j \in N, \quad \forall k \in K, \ \forall r \in R \tag{38}$$

$$t_{ik} \epsilon \mathbb{R}_{+} \quad \forall i \in N, \quad \forall k \in K \tag{39}$$

$$t_{ik}^{-} \epsilon \mathbb{R}_{+} \quad \forall i \in N, \quad \forall k \in K \tag{40}$$

O modelo de *Pickup-and-Delivery With Transshipment*, adaptado de Rais et al. (2014), tem como objetivo minimizar os custos totais que, na variação do UHPDP, foram separados em três componentes: custos de transporte (tendo em vista o custo

total de deslocamento dos veículos); custos de atraso (proporcionais ao número de dias em atraso de cada remessa atrasada); e um custo fictício para que o modelo possa entregar as remessas antes do atraso. Sem esse custo fictício, o modelo optaria por não realizar nenhum transporte (custo de transporte nulo) para todas as remessas que não estivessem no conjunto R^-. Dessa forma, o modelo é impelido a realizar as entregas antes do atraso sem, contudo, ser obrigado a isso.

A função objetivo apresentada em (1) contém três parcelas: o custo gasto com combustível devido ao transporte, o custo de atraso (das remessas que estão em atraso e não foram entregues) proporcional ao número de dias em que a remessa encontra-se em atraso, e o custo fictício que será melhor detalhado na seção 5.4.

O conjunto de restrições (2) indica que um determinado veículo só pode sair de sua origem para, no máximo, um vértice. Os conjuntos (3) e (4) estabelecem, respectivamente, que o veículo não pode chegar em seu próprio vértice de origem ou sair do seu próprio vértice de destino. Ressalta-se que, no contexto explorado, o destino de todos os veículos consiste sempre em um ponto sumidouro fictício, com distância nula para todos os demais pontos do grafo. O conjunto (5) mantém o fluxo de veículos nos demais pontos, ou seja, garante que se o veículo chegou em um determinado ponto (que não é o seu vértice de origem nem seu vértice de destino), esse veículo necessariamente saiu desse ponto.

O conjunto (6) estabelece que remessas que não estão atrasadas podem ser coletadas por um veículo e sair para exatamente um ponto, se de fato houver a coleta. Os conjuntos (7) e (8) impedem, respectivamente, que a remessa chegue ao seu ponto de origem e saia do seu ponto de destino. O conjunto (9) obriga a variável a_r ser igual a 1 caso uma remessa *r* que está em atraso não seja coletada. O conjunto (10) indica que remessas que não estão atrasadas podem ser entregues ao seu ponto de destino por exatamente um veículo vindo de um vértice, se de fato houver a entrega. O conjunto de restrições (11) obriga a variável b_r ser igual a 1 caso uma remessa *r* que está em atraso não seja entregue.

O conjunto de restrições (12) indica que, se uma remessa for coletada, ela deve chegar ou ao seu destino ou a um ponto de transbordo. A desigualdade da restrição existe porque, para um determinado dia, a remessa pode chegar em mais de um ponto de transbordo e/ou ao seu vértice de destino. O conjunto (13) possibilita o fluxo das remessas em pontos que não são de coleta, entrega ou pontos de transbordo.

O conjunto (14) considera o fluxo das remessas especificamente em pontos de transbordo, e é válido somente para transbordos que não são ponto de coleta da remessa em questão. Caso a remessa tenha como vértice de origem um ponto de transbordo, essa remessa poderá apenas sair desse ponto (a restrição não se aplica); caso contrário, a restrição estabelece que a remessa só pode sair do transbordo se houver chegado. É possível, no entanto, que a remessa apenas chegue ao ponto de transbordo, sem ser transportada a partir desse local por nenhum veículo, já que o UHPDP permite que a remessa encerre o dia em um transbordo.

O conjunto de restrições (15) assume que uma remessa só pode percorrer um arco (*i, j*) dentro de um veículo *k* se esse veículo também percorrer esse arco. O conjunto de restrições (16) diz respeito à capacidade de carregamento de cada veículo e o conjunto (17) estabelece um limite máximo para a distância percorrida por um veículo no dia.

O conjunto (18) diz respeito à janela de tempo, considerando o horário de saída do veículo de um vértice, o horário de chegada em outro e a duração do percurso, se esse arco tiver sido percorrido. O conjunto de restrições (19) impede que o veículo saia de um vértice antes de ter chegado nele. O conjunto (20) garante que, para haver o transbordo de uma remessa entre dois veículos, um deles precisa chegar ao ponto de transbordo carregando a remessa e outro sair do transbordo também carregando essa remessa. O conjunto (21) garante que o transbordo só será possível se o primeiro veículo chegar ao ponto de transbordo antes, ou ao mesmo instante, que o segundo veículo sair do ponto com a remessa. Os conjuntos (22) e (23) correspondem a restrições dos horários de atividade dos veículos no dia.

O conjunto de restrições (24) garante que a variável p_{rj} assuma o valor 1 se a remessa *r* de fato terminar o dia no ponto *j*. O conjunto (25), por sua vez, indica que cada remessa deve terminar o dia em exatamente um ponto. O conjunto (26) garante que, se a remessa não for coletada, ela encerrará o dia no próprio ponto de coleta. O conjunto (27) garante que a variável h_r será igual a 1 caso uma remessa que esteja atrasada não seja entregue.

Os conjuntos (28), (29) e (30) servem para, em conjunto, evitar a existência de subrotas dos veículos. O conjunto (28) estabelece que se um veículo *k* percorrer o arco (*i, j*), então o ponto *i* precede o ponto *j* na rota desse veículo. O conjunto (29) garante que, se o ponto *i* precede o ponto *j* na rota do veículo *k*, então o ponto *j* não precede o ponto *i* na rota do veículo *k*. O conjunto (30) indica que, se *i* precede *j* e *j*

precede *l* na rota do veículo *k*, então *l* não precede *i*. Vale ressaltar que *i*, *j* e *l* são três vértices distintos quaisquer, não necessariamente consecutivos, da rota de *k*.

Por fim, os conjuntos de restrições (31)-(38) definem a natureza das variáveis binárias, e os conjuntos (39) e (40) definem a natureza real não nula das variáveis relacionadas aos instantes de chegada e partida dos veículos aos vértices.

Vale ressaltar que, no presente trabalho, o modelo matemático roda a cada dia em que há remessas a serem entregues. Se a remessa for entregue ao seu destino, ela não é adicionada aos parâmetros do dia seguinte, ou seja, é removida do conjunto R. Porém, se a remessa não for entregue ao seu destino, essa remessa é passada para o dia seguinte, e terá seu parâmetro $w(r)$ acrescido em uma unidade. Se essa remessa encerrar o dia em um ponto de transbordo, ela iniciará o dia seguinte nesse mesmo ponto onde encerrou o dia anterior, ou seja, o transbordo será o novo parâmetro $p(r)$ da remessa.

Além disso, ao fim de cada dia é feito o processamento dos resultados do modelo exato no que diz respeito aos veículos. Se o veículo não tiver sido utilizado, ele iniciará o dia seguinte no mesmo ponto em que estava no dia anterior, ou seja, $o(k)$ mantém-se inalterado. Caso contrário, a rota desse veículo é verificada e o último ponto da rota, com exceção do ponto sumidouro fictício, será o novo ponto de origem $o(k)$ do veículo no dia seguinte.

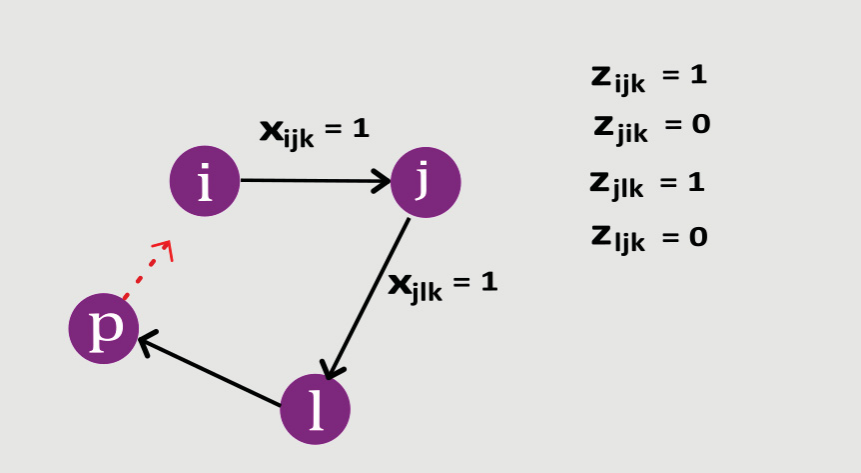
Os principais fatores que diferenciam o modelo supracitado dos modelos abordados em literaturas prévias estão relacionados às variáveis a_r, b_r, h_r e p_{rj}. Consequentemente, os conjuntos de restrições (9), (11) e (24)-(27) foram essenciais para a formulação do modelo considerando as especificidades do UHPDP. Com isso, é possível que o modelo traga como resposta a localização das remessas ao término do dia.

4.2 VALIDAÇÃO DE SUBROTAS

Como os conjuntos (3) e (4) garantem que o veículo não pode chegar em seu próprio vértice de origem ou sair do seu próprio vértice de destino, as subrotas podem ocorrer nos demais pontos, criando cenários em que o veículo, sem sair do ponto onde iniciou o dia, percorra subciclos e satisfaça a restrição de fluxo do conjunto (5). Para isso, os conjuntos (28), (29) e (30) servem para evitar a existência de subrotas.

A figura 2, exposta abaixo, ilustra uma possível rota para um dado veículo *k*, que percorreu quatro vértices *i*, *j*, *l* e *p*, nessa ordem, sem que nenhum desses pontos corresponda à origem ou ao destino do veículo:

FIGURA 2 – EXEMPLO DE VALIDAÇÃO DE SUBROTAS



Fonte: o autor (2022).

A figura ilustra uma rota percorrida por um veículo considerando os quatro vértices utilizados como exemplo, em que os arcos (*i, j*), (*j, l*) e (*l, p*) foram percorridos. Os conjuntos (28), (29) e (30) garantem que o veículo não percorra o arco (*p, i*) e, consequentemente, não percorra subrotas. Primeiramente, como os arcos (*i, j*) e (*j, l*) foram percorridos, segue que $x_{ijk} = 1$ e $x_{jlk} = 1$. Devido ao conjunto de restrições (28), segue que $z_{ijk} = 1$ e $z_{jlk} = 1$. Por conta do conjunto de restrições (29), é notório que $z_{jik} = 0$ e $z_{ljk} = 0$.

Como *i*, *j* e *l* são vértices que já pertencem à rota do veículo *k*, nessa ordem, isso implica que a restrição do conjunto (30) associada a esses vértices impede que a variável z_{lik} assuma um valor diferente de nulo. Considerando novamente o conjunto (29), se $z_{lik} = 0$, então $z_{ilk} = 1$, ou seja, o modelo consegue definir a precedência entre os dois pontos não consecutivos da rota, *i* e *l*, de modo que *i* preceda *l* e a subrota não aconteça. Destaca-se que essas restrições que evitam subrotas foram utilizadas nos trabalhos de Rais et al (2014).

4.3 EXEMPLOS ILUSTRATIVOS

Tendo em vista as particularidades do UHPDP, alguns exemplos podem auxiliar na compreensão do modelo exposto acima. Ressalta-se, no entanto, que os

exemplos abaixo foram criados no intuito de elucidar a lógica e funcionalidade do modelo, sem representar, necessariamente, a solução ótima dos dados apresentados a seguir.

O UHPHP parte do princípio de que o modelo matemático será rodado a cada dia durante determinado período, Isso implica em admitir que os resultados de um dia determinam os parâmetros de entrada do modelo para o dia seguinte no que tange à situação dos veículos e das remessas.

Para isso, considera-se um cenário com os pontos A, B, C, D, E e F, que podem ser pontos de coleta ou entrega das remessas, bem como origem de veículos. Além disso, há o ponto T que representa um ponto de transbordo, além do já citado ponto sumidouro que, embora necessário para o correto funcionamento do modelo matemático, será omitido dos exemplos, por se tratar de um ponto inexistente na prática.

4.3.1 Transbordo no mesmo dia

Para o primeiro exemplo, em um determinado dia há três remessas, R1, R2 e R3, que podem ser entregues. O modelo matemático constata que, nesse dia, para evitar custos de atraso ou o custo fictício exposto em (1), a solução ótima contempla a entrega de todas as três remessas, cujas informações estão expressas na tabela abaixo:

TABELA 4 – REMESSAS NO EXEMPLO DE TRANSBORDO DURANTE O DIA

Dados	**Remessa R1**	**Remessa R2**	**Remessa R3**
Peso em toneladas - q_r	6	6	8
Ponto de coleta - $p(r)$	C	B	E
Ponto de entrega - $d(r)$	D	E	F

Fonte: o autor (2022).

De maneira similar, a tabela 5 considera as condições dos veículos no início do dia 1.

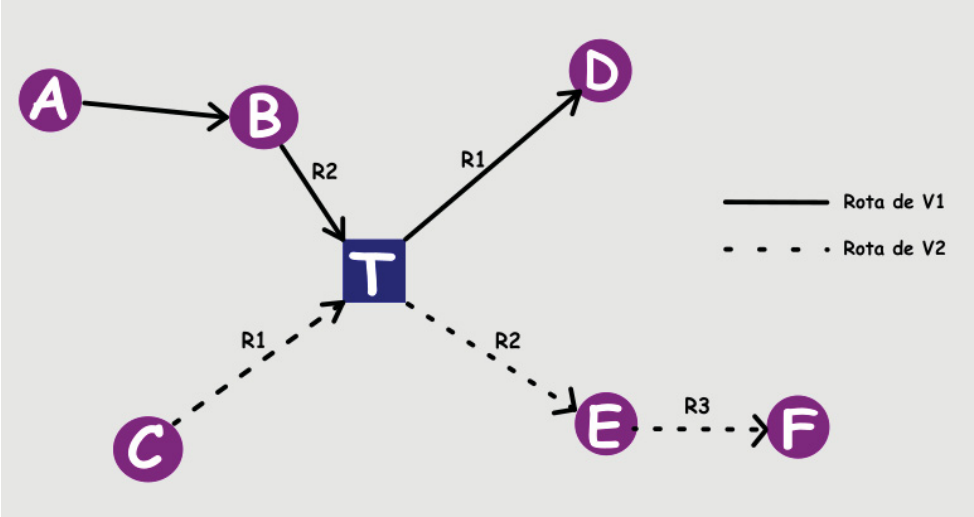
TABELA 5 – VEÍCULOS NO EXEMPLO DE TRANSBORDO DURANTE O DIA

Dados	Veículo V1	Veículo V2
Capacidade (toneladas) - u_k	6	10
Localização início do dia - $o(k)$	A	C
Ponto de destino - $o'(k)$	S	S

Fonte: o autor (2022).

A figura 3, exposta abaixo, mostra uma possível solução para os dados considerados, com a utilização do ponto de transbordo:

FIGURA 3 – EXEMPLO DE TRANSBORDO DURANTE O DIA



Fonte: o autor (2022).

O veículo V1 parte do ponto A, próximo ao ponto B, onde a remessa R2 está situada. Sem o ponto de transbordo, se o veículo V1 realizasse a coleta de R2 no ponto B, ele necessariamente teria de fazer a entrega de R2 no ponto E. No entanto, o veículo V1 tem a opção de ir até o ponto de transbordo T para deixar a remessa para que outro veículo (no exemplo, V2) prossiga a viagem com R2.

O veículo V2 inicia o dia no ponto C, onde a remessa R1 se encontra a princípio. De maneira similar, sem o ponto de transbordo o veículo V2 seria obrigado, após realizar a coleta de R1 em C, a realizar a entrega da remessa em D. Como o ponto de transbordo está habilitado, o veículo tem a possibilidade de

Mesmo que o veículo V1 chegasse ao ponto E, o veículo V1 não teria a capacidade de carregamento para fazer a coleta de R3, obrigando o veículo V2 a realizar uma rota maior para fazer a entrega de R1 no ponto D e só então fazer a coleta de R3 em E.

4.3.2 Transbordo em dias distintos

Nesse segundo exemplo, o objetivo é facilitar a compreensão a respeito da possibilidade de transbordo em dias distintos, ou seja, em que a remessa pode encerrar o dia em um ponto de transbordo para, no dia seguinte, ser coletada a partir daquele ponto de transbordo. O exemplo simulará o funcionamento do UHPDP para três dias. Considera-se que o modelo deverá rodar, primeiramente, para o dia 1, em que há os seguintes parâmetros referentes às remessas:

TABELA 6 – EXEMPLO: DADOS DAS REMESSAS NO DIA 1

Dados	**Remessa R1**	**Remessa R2**
Peso em toneladas - q_r	6	6
Dia de entrega	1	1
Prazo de entrega (dias)	1	1
Ponto de coleta inicial	B	C
Ponto de entrega - $d(r)$	D	D
Localização atual - $p(r)$	B	C
Dias transcorridos - $w(r)$	0	0
Dias em atraso - $n(r)$	0	0

Fonte: o autor (2022).

As remessas R1 e R2 têm 1 dia de prazo de entrega, ou seja, podem ser entregues no dia 1 ou no dia 2 sem que a transportadora pague multa por atraso. Destaca-se que o que é considerado como ponto de coleta da remessa é a sua localização atual, e não necessariamente o ponto de coleta em que a remessa se encontrava inicialmente. Como é o primeiro dia, a localização de ambas as remessas coincide com seu ponto de coleta.

Na tabela abaixo encontram-se as informações relacionadas aos veículos utilizados como exemplo.

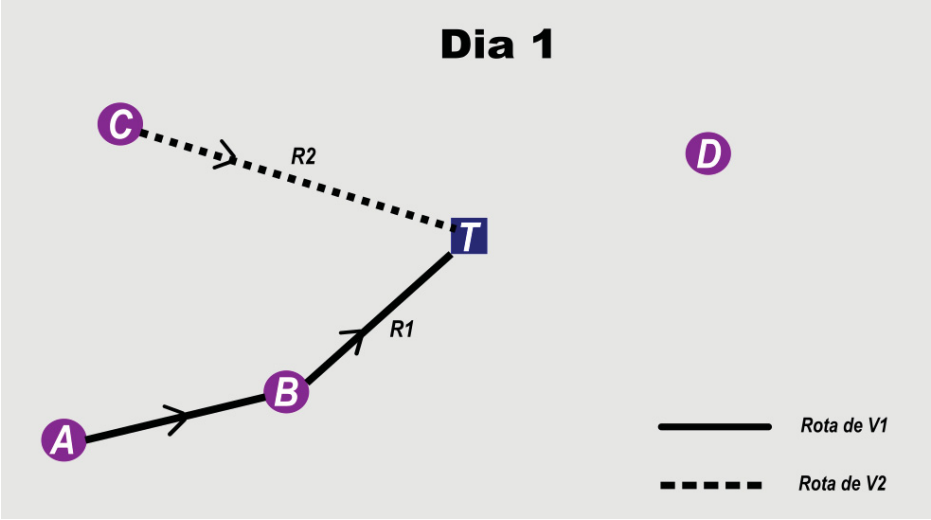
TABELA 7 – EXEMPLO: DADOS DOS VEÍCULOS NO DIA 1

Dados	Veículo V1	Veículo V2
Capacidade (toneladas)	12	12
Localização início do dia - $o(k)$	A	C
Ponto de destino - $o'(k)$	S	S

Fonte: o autor (2022).

O ponto de destino dos veículos, no contexto apresentado, sempre é o sumidouro, que possui distância nula para os demais pontos. Com base nos dados apresentados acima, os resultados do modelo matemático podem mostrar o seguinte cenário para o dia 1:

FIGURA 4 – EXEMPLO DE TRANSBORDO NO DIA 1



Fonte: o autor (2022).

Primeiramente, observa-se que ambos os veículos, V1 e V2, encerraram suas rotas no ponto de transbordo T (desconsiderando o ponto fictício S). O mesmo ocorre com as remessas R1 e R2, que não foram entregues ao seu ponto de destino D. Assim, ambas as remessas serão consideradas quando o modelo matemático for executado no dia seguinte.

A partir dos resultados obtidos pelo modelo matemático, os dados das remessas são manipulados da seguinte maneira:

TABELA 8 – EXEMPLO: DADOS DAS REMESSAS NO DIA 2

Dados	Remessa R1	Remessa R2	Remessa R3	Remessa R4
Peso em toneladas - q_r	6	6	5	10
Dia de entrega	1	1	2	2
Prazo de entrega (dias)	1	1	0	0
Ponto de coleta inicial	B	C	D	B
Ponto de entrega - $d(r)$	D	D	C	A
Localização Atual - $p(r)$	T	T	--	B
Dias transcorridos - $w(r)$	1	1	0	0
Dias em atraso - $n(r)$	0	0	0	0

Fonte: o autor (2022).

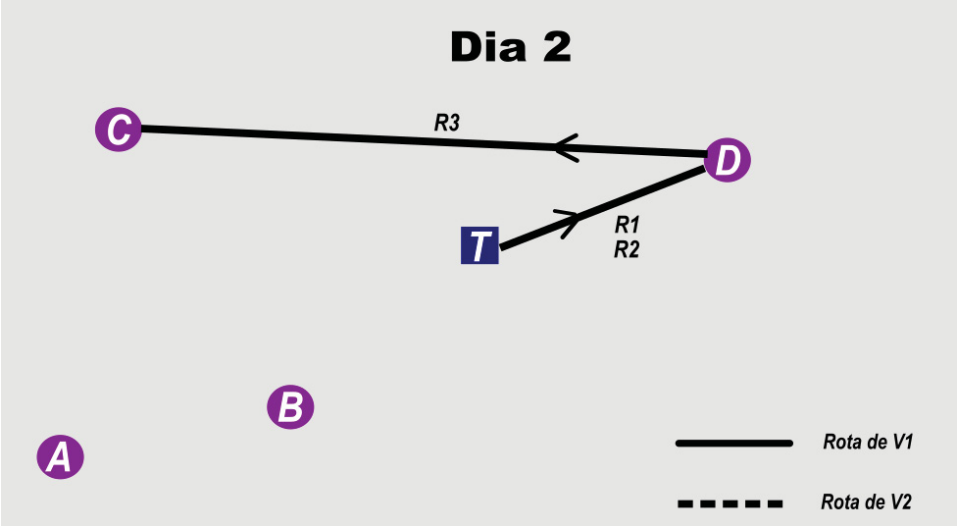
Além das já citadas remessas R1 e R2, outras remessas, R3 e R4, foram reveladas para a transportadora, e precisam ser entregues no dia 2 para evitar custos de atraso (já que o prazo de entrega é de 0 dias, o que indica que a remessa deve ser entregue na data atual). No entanto, a transportadora pode optar por não entregar uma remessa ao seu destino mesmo que ela já esteja em situação de atraso.

TABELA 9 – EXEMPLO: DADOS DOS VEÍCULOS NO INÍCIO DO DIA 2

Dados	Veículo V1	Veículo V2
Capacidade (toneladas)	12	12
Localização início do dia - $o(k)$	T	T
Ponto de destino - $o'(k)$	S	S

Fonte: o autor (2022).

1FIGURA 5 – EXEMPLO DE TRANSBORDO NO SEGUNDO DIA



Fonte: o autor (2022).

Observa-se, a partir da imagem, que as remessas R1 e R2 foram transportadas a partir do local em que estavam (T) para seu ponto de destino (D) pelo veículo V1. Em seguida, V1 também transportou a remessa R3 pelo arco D-C, levando-a ao seu ponto de entrega.

Ressalta-se que a remessa R4, que precisaria ser entregue no dia 2 para evitar custos de atraso, não foi entregue. Ou seja, mesmo remessas que estejam em condição de atraso podem não ser entregues. As remessas R1 e R2 são removidas da tabela de remessas a serem entregues, e a situação fica conforme tabela abaixo para o dia seguinte:

TABELA 10 – EXEMPLO: DADOS DAS REMESSAS NO INÍCIO DO DIA 3

Dados	Remessa R4	Remessa R5
Peso em toneladas - q_r	10	6
Dia de entrega	2	3
Prazo de entrega (dias)	0	2
Ponto de coleta	B	C
Ponto de entrega - $d(r)$	A	D
Localização atual - $p(r)$	B	C
Dias transcorridos - $w(r)$	1	0
Dias em atraso - $n(r)$	1	0

Fonte: o autor (2022).

De maneira similar, com os veículos, a situação é apresentada conforme tabela abaixo:

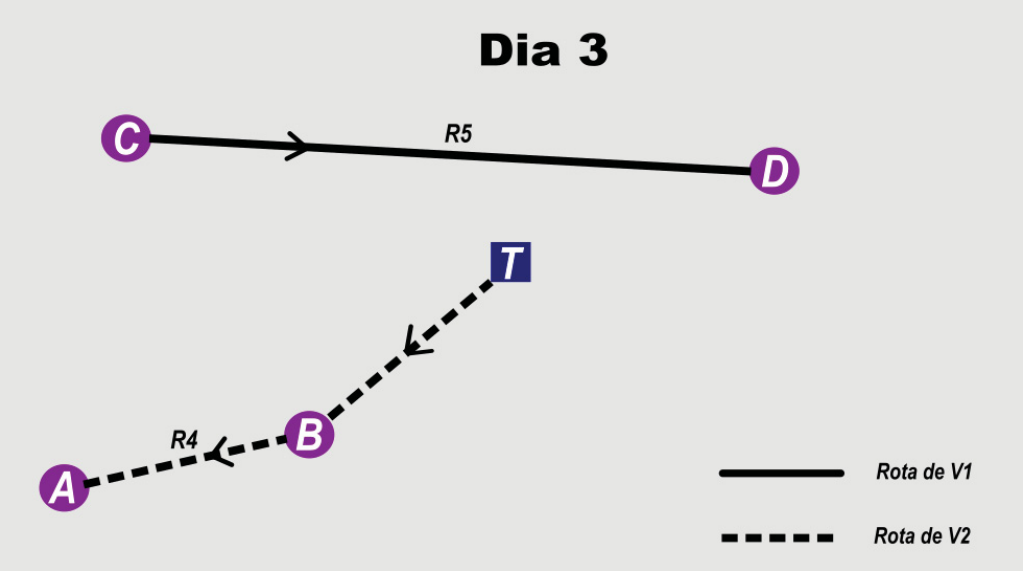
TABELA 11 – EXEMPLO: DADOS DOS VEÍCULOS NO INÍCIO DO DIA 3

Dados	Veículo V1	Veículo V2
Capacidade (toneladas) - u_k	12	12
Localização início do dia - $o(k)$	T	T
Ponto de destino - $o'(k)$	S	S

Fonte: o autor (2022).

Ao rodar o modelo do UHPDP para o dia 3, uma possível solução é exemplificada abaixo:

FIGURA 6 – EXEMPLO DE TRANSBORDO NO DIA 3



Fonte: o autor (2022).

No terceiro dia em que o modelo matemático é rodado, a remessa R4 é entregue pelo veículo V2 e a remessa R5 é entregue ao seu destino pelo veículo V1. Reitera-se que um veículo pode encerrar suas operações do dia em qualquer ponto considerado, mas uma remessa *r* só pode encerrar o dia em:

- Em ponto de coleta inicial (no caso de não ter saído de sua origem);
- No ponto de entrega (no caso de ter sido entregue por algum veículo).

- Em um ponto de transbordo;

Que pode ser representado pelo conjunto $G_r = \{p(r), d(r)\} \cup T$.

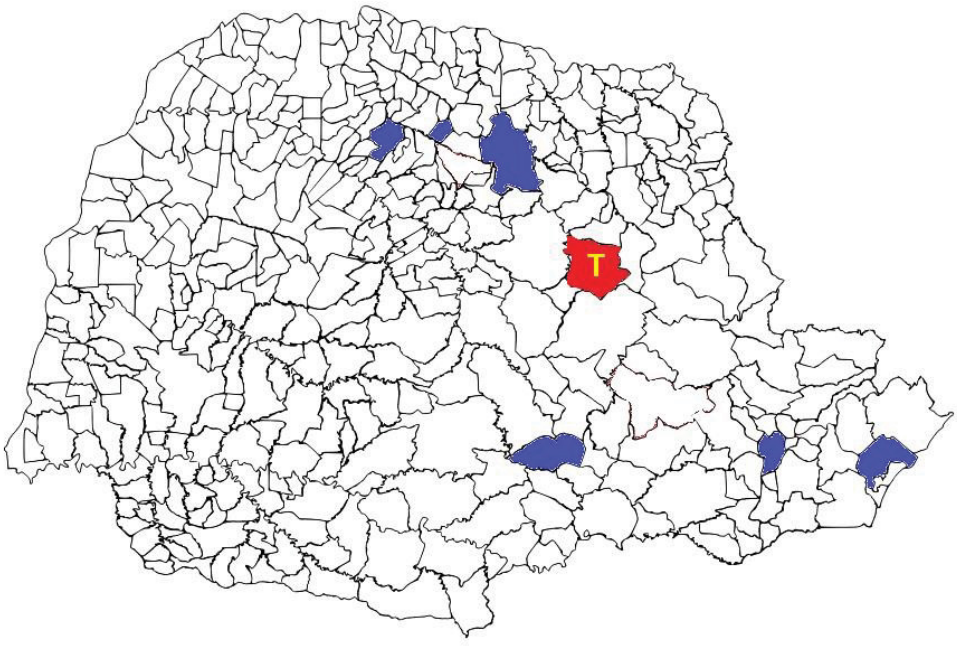
5 METODOLOGIA

Para a realização deste trabalho, foi utilizada a *Integrated Development Environment* (IDE*) Microsoft Visual Studio*. O modelo matemático do *Pickup-and-Delivery Problem with Transshipment,* apresentado no capítulo 4, foi implementado na linguagem C#, em conjunto com a versão acadêmica do *software* de otimização *Gurobi Optimizer* 9.1.2.

Os testes realizados foram intermunicipais, considerando seis cidades do Paraná como possíveis pontos de coleta ou entrega de mercadorias: Maringá, Arapongas, Londrina, Irati, Curitiba e Paranaguá. A localização exata de cada um desses pontos foi definida como as coordenadas do ponto central da cidade. Tais coordenadas foram obtidas por meio do serviço *Google Maps*. As cidades foram escolhidas no estado do Paraná de modo que houvesse dois agrupamentos geográficos bem definidos: Maringá, Arapongas e Londrina (grupo Norte-Noroeste); e Irati, Curitiba, Paranaguá (grupo Sudeste-Metropolitano).

Pontos de transbordo foram escolhidos em dois casos distintos. No caso de haver apenas um ponto de transbordo habilitado, o ponto escolhido foi a cidade de Telêmaco Borba. A figura abaixo ilustra as localizações dessas cidades, em que a cidade marcada com “T” representa o ponto de transbordo.

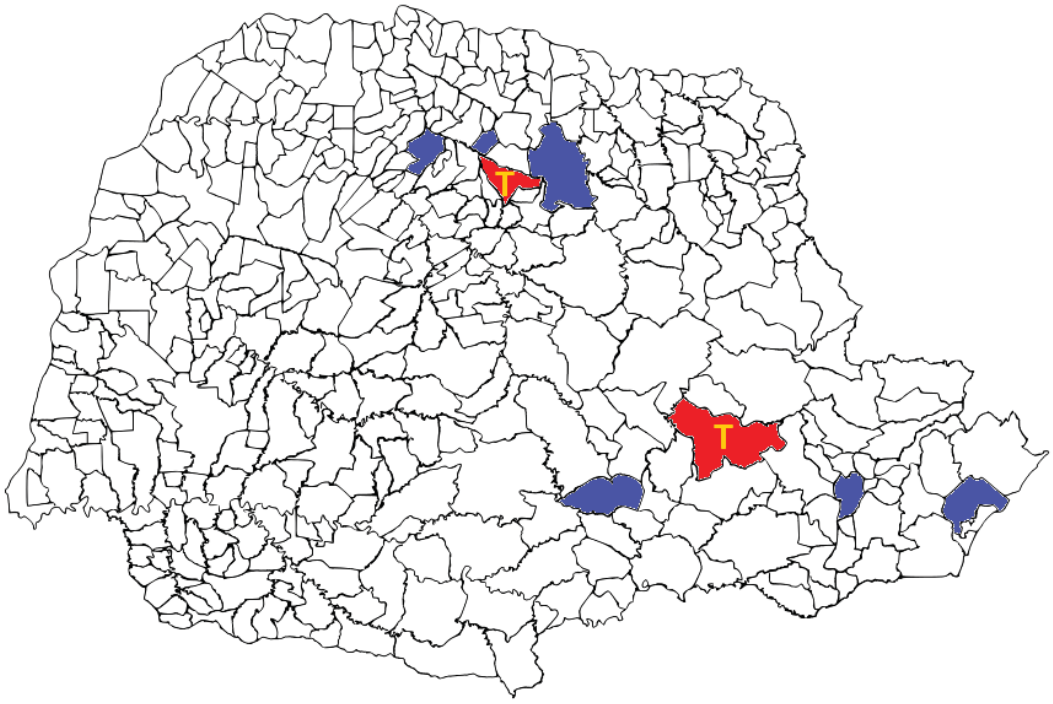
FIGURA 7 – LOCALIZAÇÃO GEOGRÁFICA DAS CIDADES UTILIZADAS NOS TESTES COM UM TRANSBORDO



Fonte: o autor (2022).

Já no caso de haver dois pontos de transbordo habilitados, outras duas cidades paranaenses foram escolhidas: Apuracana e Ponta Grossa. A figura abaixo ilustra as coordenadas geográficas das cidades consideradas, em que as cidades marcadas com “T” são utilizadas como pontos de transbordo:

FIGURA 8 – LOCALIZAÇÃO GEOGRÁFICA DAS CIDADES UTILIZADAS NOS TESTES COM DOIS TRANSBORDOS



Fonte: O autor (2021).

Destaca-se que a escolha geográfica dos possíveis pontos de transbordo foi escolhida de modo a tornar viável sua utilização. Tendo em vista que o modelo matemático exposto no capítulo 4 não engloba a definição da localização mais adequada para os pontos de transbordo, a análise partirá do pressuposto que os pontos de transbordo estão habilitados em locais próximos aos agrupamentos considerados (Norte-Noroeste e Sudeste-Metropolitano).

A definição do ponto de origem do veículo no início do mês foi definida aleatoriamente, seguindo uma distribuição uniforme de probabilidade, de modo que fosse equiprovável que qualquer uma das cidades (desconsiderando pontos de

transbordo) fosse selecionada como origem $o(k)$ do veículo. As demais propriedades da frota homogênea considerada estão expressas na tabela abaixo:

1TABELA 12 – CARACTERÍSTICAS DA FROTA HOMOGÊNEA

Propriedade	**Valor atribuído**
Capacidade (toneladas) - u_k	12 toneladas
Ponto de destino - $o'(k)$	Ponto sumidouro fictício
Velocidade média (km/h) - v_k	70
Consumo médio (km/l) - c_k	2,5

Fonte: o autor (2022).

Já no que se refere aos contratos, as características adotadas nos testes foram as seguintes:

TABELA 13 – CARACTERÍSTICAS DOS CONTRATOS GERADOS

Propriedade	**Valor atribuído**
Período de vigência	30 dias
Quantidade de remessas	4
Quantidade por pedido - q_r	Aleatório entre 2 e 4 toneladas, com base em uma distribuição uniforme
Ponto de coleta das remessas - $p(r)$	Aleatório entre as 6 possíveis cidades, com base em uma distribuição uniforme
Ponto de entrega das remessas - $d(r)$	Aleatório entre as 5 possíveis cidades (desconsidera-se o ponto de coleta), com base em uma distribuição uniforme
Prazo de entrega (dias) - ω	1
Multa por dia de atraso - m_r	300

Fonte: o autor (2022).

Assim, cada contrato gerado dá origem a quatro remessas, que têm o mesmo ponto de origem, ponto de destino, prazo de entrega e multa por dia de atraso. Seja ω o prazo de entrega das remessas do contrato. A data em que cada remessa pode ser solicitada será definida no intervalo entre 1 e $30 - \omega$. Isso foi feito para que exista

a possibilidade de que todas as remessas do contrato sejam entregues sem atraso, independentemente do dia em que o transporte for solicitado.

Inclusive, no último dia do mês há a obrigatoriedade de que todas as remessas ainda não entregues sejam levadas ao seu destino e todas as entregas previstas no contrato sejam realizadas. Ou seja, há a adição da seguinte restrição no modelo matemático, válida apenas para o último dia do período considerado:

$$\sum_{k \epsilon K} \sum_{j \epsilon N} y_{jikr} = 1 \quad \forall r \, \epsilon \, R, \;\; i = d(r) \tag{41}$$

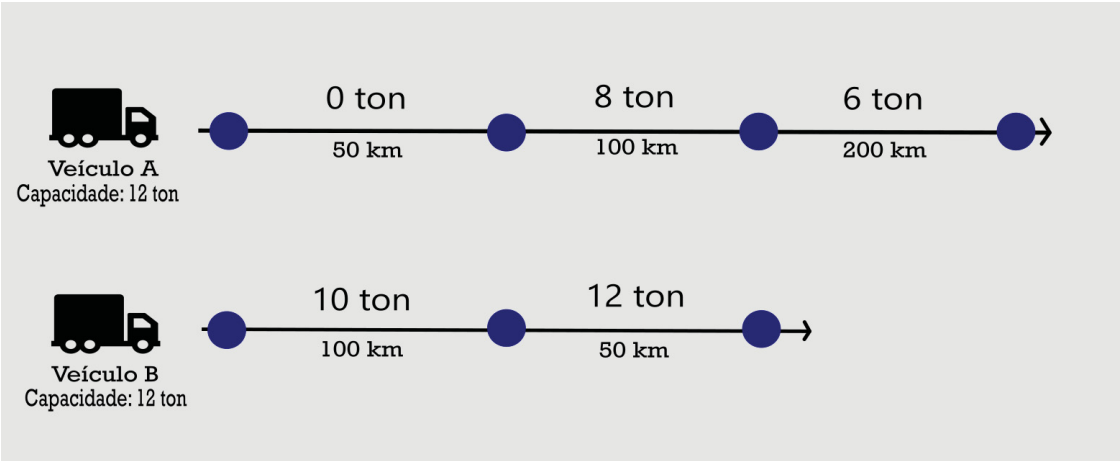
5.1 CÁLCULO DA OCUPAÇÃO DOS VEÍCULOS

Em primeiro lugar, destaca-se que o cálculo da ocupação média dos veículos é feito ao fim de cada dia, apenas após o modelo matemático ser executado, e é realizado com base nos valores das variáveis x_{ijk} e y_{ijkr}, na distância entre os pontos *i* e *j* (d_{ij}), no peso das remessas (q_r) e na capacidade de carregamento do veículo (u_k).

$$Ocupação\ Média\ do\ Dia = \frac{\sum_k \sum_i \sum_j \sum_r (q_r \cdot d_{ij} \cdot y_{ijkr})}{\sum_k \sum_i \sum_j (u_k \cdot d_{ij} \cdot x_{ijk})} \tag{42}$$

O cenário abaixo serve para exemplificar o cálculo:

FIGURA 9 – EXEMPLO DE OCUPAÇÃO DOS VEÍCULOS



Fonte: o autor (2022).

Na figura acima, o veículo A tem 12 toneladas de capacidade e percorre, ao todo, 350 km, enquanto o veículo B, também com 12 toneladas de capacidade, percorre 150 km. Veículos que não foram utilizados no exemplo acima não são considerados para o cálculo da ocupação média. Assim, a ocupação média do cenário considerado é:

$$Ocupação\ média\ do\ dia = \frac{0 \cdot 50 + 8 \cdot 100 + 6 \cdot 200 + 10 \cdot 100 + 12 \cdot 50}{12 \cdot 50 + 12 \cdot 100 + 12 \cdot 200 + 12 \cdot 100 + 12 \cdot 50} \quad (43)$$

$$Ocupação\ média\ do\ dia = 60\% \quad (44)$$

No exemplo acima, a ocupação do veículo A é de 47,62%, ao passo que a ocupação do veículo B é de 88,89%. No entanto, tendo em vista a diferença entre as distâncias percorridas pelos veículos A e B, a média de ocupação geral é de 60%. Portanto, a ocupação média da frota utilizada neste trabalho é calculada com base nos trechos percorridos pela frota como um todo, e não como a média das ocupações dos veículos individuais. A média de ocupação do período como um todo foi calculada com base na média aritmética das ocupações diárias.

5.2 MATRIZ DE DISTÂNCIAS

Para criar a matriz de distâncias e atribuir valores aos parâmetros d_{ij}, foi utilizada a fórmula de *Haversine*. Essa fórmula calcula a distância entre dois pontos *i* e *j* na Terra a partir da latitude, da longitude e do raio do planeta (CHOPDE; NICHAT 2013). Assim, a distância, medida em quilômetros, é calculada pela equação (45):

$$d_{ij} = \mu \cdot 2 \cdot r \cdot arcsin\left(\sqrt{sin^2\left(\frac{\theta_j - \theta_i}{2}\right) + \cos(\theta_i) \cdot cos(\theta_j) \cdot sin^2\left(\frac{\varphi_j - \varphi_i}{2}\right)}\right) \quad (45)$$

Em que d_{ij} é a distância entre dois pontos, r = 6371, θ_j e θ_i são as latitudes, φ_j e φ_i são as longitudes dos pontos considerados. Além disso, o coeficiente $\mu = 1{,}15$ foi utilizado para ajustar a distância real a ser percorrida por um veículo, considerando aspectos como irregularidades do terreno, desvios de rota, entre outros fatores.

Para determinar o tempo de travessia de um arco (*i, j*), denotado no modelo por τ_{ijk}, o cálculo considera a velocidade média v_k do veículo, ou seja:

$$\tau_{ijk} = \frac{d_{ij}}{v_k} \tag{46}$$

5.3 MÉTODO DE MONTE CARLO

Para comparar os cenários em que há transbordos habilitados em relação aos cenários em que o ponto de transbordo não está disponível, será feita a utilização do método de Monte Carlo. Esse método é uma técnica estatística parte de amostragens aleatórias para determinar um intervalo de confiança de uma variável.

O intervalo de confiança IC para um dado nível de significância α pode ser expresso como:

$$IC_\alpha = \left[\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] \tag{47}$$

Em que $\bar{x}$ indica a média amostral calculada, $z_{\alpha/2}$ é o valor padronizado da distribuição normal, σ é o desvio padrão e n é o tamanho da amostra. Embora os valores reais para o desvio padrão populacional não sejam conhecidos, fato que incita a utilização da distribuição de probabilidade T de Student, o tamanho da amostra, como será destacado na seção 6.2, foi $n = 30$. Assim, o valor do desvio padrão amostral s se aproxima do desvio padrão populacional σ. O nível de significância adotado neste trabalho foi $\alpha = 0{,}05$, de modo que o valor padronizado da distribuição normal é $z_{0{,}025} = 1{,}96$.

5.4 ANÁLISE DO CUSTO FICTÍCIO E DO PARÂMETRO E_{ij}

É visível que, sem o componente do custo fictício exposto na função objetivo da equação (1), a solução ótima jamais realizaria qualquer transporte para remessas que não estão em atraso, a fim de deixar nulos quaisquer custos associados às remessas. Em outras palavras, sem o custo fictício o transporte só seria realizado quando o custo de transportar uma remessa ao seu ponto de entrega fosse menor do que a multa por não entregá-la.

O parâmetro E_{ij}, que diz respeito ao custo fictício de enviar uma remessa do ponto *i* para o ponto *j* no dia seguinte, foi definido da seguinte forma:

$$E_{ij} = \begin{cases} \dfrac{d_{ij} \cdot f}{c_m \cdot \beta_T}, & se\ i \in T \\ \dfrac{d_{ij} \cdot f}{c_m \cdot \beta_N}, & caso\ contrário \end{cases} \tag{48}$$

Em que c_m corresponde ao consumo médio da frota, ou seja:

$$c_m = \frac{\sum_k c_k}{|K|} \tag{49}$$

Os valores β_T e β_N são coeficientes para estimar, respectivamente, o custo fictício que a função objetivo (1) considera caso a remessa termine o dia em um ponto de transbordo ou outro ponto qualquer. Logo, o parâmetro E_{ij} é proporcional ao custo de percorrer o arco entre *i* e *j*.

Na função objetivo (1), o custo fictício é expresso como:

$$Custo\ Fictício = \sum_{j \in N} \sum_{r \in R} E_{jd(r)} \cdot p_{rj} \cdot (w_r + 1) \tag{50}$$

Essa parcela do custo está diretamente associada à variável binária p_{rj}, que indica se a remessa *r* encerrou o dia no ponto *j* ou não, de modo que o custo fictício considera apenas o ponto em que a remessa encerrou o dia. Caso a remessa encerre o dia em seu ponto de entrega, ou seja, $j = d(r)$, então $E_{jd(r)} = 0$. O custo fictício de não entregar uma remessa no dia também é diretamente proporcional ao parâmetro $(w_r + 1)$, que indica o número de dias transcorridos desde que a entrega da remessa *r* foi solicitada acrescido de um. A soma do valor 1 ao parâmetro w_r ocorre para que o modelo considere o custo fictício mesmo no dia em que a demanda é revelada à transportadora (quando $w_r = 0$) e, assim, incentive o transporte da remessa.

Assim, quanto mais dias se passarem sem que a remessa seja entregue, maior será o custo fictício associado a ela.

É essencial estimar o parâmetro E_{ij}, já que valores muito baixos podem não incentivar que a entrega seja realizada antes do atraso e valores muito elevados podem incentivar todas as remessas a serem entregues no dia em que são reveladas à transportadora, gerando custos mais elevados de transporte.

Dessa forma, é essencial analisar aspectos relacionados a esse custo fictício, mais especificamente sobre o coeficiente E_{ij} a partir dos valores de β_N e β_T. Alguns valores foram propostos, sem critérios específicos, e testados no capítulo 6. Essas estimativas estão exemplificadas abaixo:

TABELA 14 – ESTIMATIVA DO PARÂMETRO $\boldsymbol{E_{ij}}$

Estimativa de E_{ij} (nome)	**Valor de β_N**	**Valor de β_T**
N1-T1	1	1
N1-T10	1	10
N2-T2	2	2
N5-T2	5	2
N5-T10	5	10
N6-T3	6	3
N20-T20	20	20

Fonte: o autor (2022).

Destaca-se que essas são apenas algumas formas escolhidas para realização dos testes, já que β_N e β_T, como expostos na equação (48), podem assumir qualquer valor não nulo.

5.5 PARÂMETROS FIXOS DOS TESTES

A tabela abaixo indica os valores utilizados para alguns dos parâmetros nos testes do capítulo 6.

TABELA 15 – DADOS DO CENÁRIO DE TESTE

Parâmetro	**Valor**
Horário de início (min) - ∂_{min}	0

Horário de término (min) - ∂_{max}	720
Número de contratos vigentes no mês	15
Limite de distância percorrida por veículo (km) - D_{max}	700

Fonte: o autor (2022).

Ou seja, os veículos podem iniciar as operações a partir do instante ∂_{min} e encerrá-las até o instante ∂_{max}. Além disso, o número de 15 contratos, cada um com 4 remessas (indicado na tabela 13), indica que, ao longo do período considerado, 60 remessas devem ser entregues pela transportadora ou operador logístico responsável pelos transportes.

Ademais, foi gerada uma frota homogênea de quatro veículos (com as características expostas na tabela 12). A definição do ponto de origem no início do mês foi gerada aleatoriamente, seguindo uma distribuição uniforme de probabilidade, e a frota abaixo foi utilizada no decorrer de todos os testes posteriores:

TABELA 16 – DADOS DA FROTA GERADA

VEÍCULO	**Origem no início do mês**
V1	Paranaguá
V2	Irati
V3	Arapongas
V4	Curitiba

Fonte: o autor (2022).

6 RESULTADOS

Os resultados foram criados primeiramente em um cenário inicial, com os parâmetros definidos nas tabelas 13, 14, 15 e 16, expostas no capítulo 5. Para simplificar a notação, a tabela 17 abaixo denota a abreviação utilizada para os resultados das tabelas posteriores e seu significado respectivo:

TABELA 17 – ABREVIAÇÕES UTILIZADAS NOS RESULTADOS

Abreviação	Significado
CT	Custo de transporte ao longo do mês
CA	Custo de atraso ao longo do mês
S-TRANS	Cenário sem utilização de nenhum ponto de transbordo
1-TRANS	Cenário com utilização de 1 ponto de transbordo, localizado na cidade de Telêmaco Borba
2-TRANS	Cenário com utilização de 2 pontos de transbordo, localizados nas cidades de Apucarana e Ponta Grossa

Fonte: o autor (2022).

O modelo matemático exposto no capítulo 4 foi implementado e utilizado na instância gerada aleatoriamente a partir dos valores expostos na tabela 15. Nesse cenário inicial, foram testadas diferentes estimativas para E_{ij} para a mesma instância do problema, e os custos totais do mês, considerando os 30 dias em que o modelo UHPDP foi executado, foram separados entre custo de transporte e custo de atraso, conforme ilustra a tabela abaixo:

TABELA 18 – CUSTOS DOS TESTES INICIAIS

Estimativa de E_{ij}	CT S-TRANS	CA S-TRANS	CT 1-TRANS	CA 1-TRANS	CT 2-TRANS	CA 2-TRANS
N1-T1	19523	600	18781	0	18781	0
N1-T10	19523	600	20983	600	18204	2100
N2-T2	16581	900	19892	4200	15834	8700
N5-T2	14259	900	14259	900	13856	600
N6-T3	13486	900	13486	900	13486	900
N5-T10	14259	900	14167	1200	15040	2400
N20-T20	12758	6300	13366	6000	13645	5100

Fonte: o autor (2022).

Os resultados mostram que as estimativas N5-T2 e N6-T3 foram as que trouxeram os melhores resultados, tanto para os cenários sem transbordo quanto os cenários com transbordo. Destaca-se que a estimativa N20-T20 deixaram os custos, de todos os cenários, bastante elevados. Isso ocorre porque, nessa estimativa, E_{ij} assume valores muito baixos na função objetivo, que não fomentam o transporte das mercadorias antes de elas se encontrarem em condição de atraso.

Destaca-se, também, que para algumas estimativas, como N2-T2, os cenários com transbordo apresentaram custos superiores ao cenário sem transbordo. Isso é possível, pois, como o modelo UHPDP é executado de maneira independente em cada dia, a solução ótima para um determinado dia pode alterar os parâmetros do dia seguinte, de modo que a solução ótima do dia seguinte seja um valor muito elevado.

Nos casos específicos de estimativas N1-T10 e N2-T2, o modelo incentivava o transporte da remessa para um ponto de transbordo, sem realizar a entrega. Isso fez com que várias remessas ficassem, por vários dias, paradas em pontos de transbordo, devido ao baixo custo fictício no caso de as remessas encerrarem o dia nesses pontos. Isso reitera a importância de estimar corretamente o parâmetro E_{ij}, pois, para a mesma instância, outras estimativas trouxeram resultados equivalentes nos cenários S-TRANS, 1-TRANS e 2-TRANS, o que indica que o ponto de transbordo não foi utilizado nesses cenários. A não utilização do ponto de transbordo também pode ser explicada pelo número baixo de remessas em cada dia.

Destaca-se que, especificamente o cenário 2-TRANS com a estimativa N5-T2 apresentou o menor custo total, o que denota a possibilidade de utilização de múltiplos pontos de transbordo reduzir o custo total da transportadora ou operador logístico no UHPDP. No entanto, a instância específica que gerou os resultados da tabela 18 não permite concluir quais estimativas reduzem o custo total ao longo do período.

No que diz respeito ao percentual de ocupação da frota, a tabela 19 abaixo ilustra os valores em cada instância, considerando cenários sem e com transbordos habilitados, bem como as estimativas de custo fictício utilizadas.

TABELA 19 – PERCENTUAL DE OCUPAÇÃO DA FROTA

Estimativa de E_{ij}	Ocupação S-TRANS	Ocupação 1-TRANS	Ocupação 2-TRANS
N1-T1	39,04	40,42	42,63
N1-T10	39,04	43,55	42,4
N2-T2	43,79	48,26	46,97

N5-T2	53,18	53,18	49,42
N6-T3	56,4	56,4	56,4
N5-T10	53,18	53,59	41,44
N20-T20	53,25	54,45	46,3

Fonte: o autor (2022).

Os resultados da média de ocupação dos veículos não foram particularmente favoráveis para os cenários com transbordo. Na realidade, a média de ocupação dos veículos variou muito dependendo da estimativa de custo fictício utilizada.

A partir desse cenário inicial gerado, a tabela 18 sugere que, dentre as estimativas testadas, N5-T2 e N6-T3 são as mais eficientes para reduzir o custo total do mês. Para os testes realizados a partir da seção 6.1, serão consideradas somente essas duas estimativas.

6.1 CENÁRIOS ALTERNATIVOS

Alguns testes foram realizados a partir do cenário inicial, com alteração de parâmetros específicos que serão destacados a seguir. A mesma instância utilizada na seção 6.1 também foi utilizada para os testes seguintes, em que um parâmetro foi alterado por vez.

6.1.1 Prazo de entrega menor

Nesse cenário, foi definido que o prazo de entrega ω dos contratos seja de 0 dias, o que implica em assumir que, se a remessa não for entregue ao seu ponto de destino no dia em que a demanda for revelada ao operador logístico, haverá multa por atraso.

TABELA 20 – RESULTADOS COM PRAZO DE ENTREGA MENOR

Estimativa E_{ij}	Transbordo	CT	CA	Custo Mensal (CT+CA)
N5-T2	S-TRANS	14231	3900	18131
N6-T3	S-TRANS	14259	4200	18459
N5-T2	1-TRANS	14231	3900	18131
N6-T3	1-TRANS	14259	4200	18459
N5-T2	2-TRANS	14231	3900	18131
N6-T3	2-TRANS	15063	4500	19563

Fonte: o autor (2022).

Para a estimativa N5-T2, não houve variações entre os cenários S-TRANS, 1-TRANS e 2-TRANS, ou seja, o ponto de transbordo não foi utilizado. Já para a estimativa N6-T3, o cenário 2-TRANS apresentou um desempenho inferior. Ou seja, o transbordo foi usado porque diminuía o custo da função objetivo (incluindo o custo fictício), mas que se provou inviável nos dias subsequentes.

6.1.2 Prazo de entrega maior

Nesse cenário, foi definido que o prazo de entrega ω dos contratos seja de 2 dias, o que implica em permitir que a remessa fique mais tempo sem ser entregue ao destino final e sem a incidência de multas por atraso.

TABELA 21 – RESULTADOS COM PRAZO DE ENTREGA MAIOR

Estimativa E_{ij}	Transbordo	CT	CA	Custo Mensal (CT+CA)
N5-T2	S-TRANS	12632	600	13232
N6-T3	S-TRANS	11875	600	12475
N5-T2	1-TRANS	12632	600	13232
N6-T3	1-TRANS	11875	600	12475
N5-T2	2-TRANS	12845	0	12845
N6-T3	2-TRANS	11875	600	12475

Fonte: o autor (2022).

Para a estimativa N6-T3, os custos foram iguais nos cenários S-TRANS, 1-TRANS e 2-TRANS, o que indica, mais uma vez, a não utilização do transbordo. Porém, para a estimativa N5-T2, o cenário 2-TRANS apresentou custo inferior. Embora o custo de transporte, ao longo do mês, tenha sido superior ao S-TRANS e 1-TRANS, não houve atrasos, o que reduziu o custo mensal.

6.1.3 Custo de atraso maior

Nesse cenário, foi definido que o custo diário de atraso de uma remessa que não foi entregue é $m_r = 600$. Isso implica em, teoricamente, favorecer a entrega antes que a remessa esteja em condição de atraso.

TABELA 22 – RESULTADOS COM CUSTO DE ATRASO MAIOR

Estimativa E_{ij}	Transbordo	CT	CA	Custo Mensal (CT+CA)
N5-T2	S-TRANS	14934	0	14934
N6-T3	S-TRANS	15026	600	15626
N5-T2	1-TRANS	14934	0	14934
N6-T3	1-TRANS	15026	600	15626
N5-T2	2-TRANS	13766	0	13766
N6-T3	2-TRANS	15026	600	15626

Fonte: o autor (2022).

Para a estimativa N6-T3, os custos foram iguais nos cenários S-TRANS, 1-TRANS e 2-TRANS, o que indica, novamente, a não utilização do transbordo. Porém, para a estimativa N5-T2, o cenário 2-TRANS evitou o atraso de uma remessa, além de reduzir o custo de transporte ao realizar o transbordo em um determinado dia.

6.1.4 Custo de transporte maior

Nesse cenário, foi definido que o custo de combustível dobrasse e assumisse o valor $f = 10$. Isso encarece os transportes, e faz com que, em alguns casos, o pagamento da multa por atraso seja preferível ao invés da realização do transporte.

TABELA 23 – RESULTADOS COM CUSTO DE TRANSPORTE MAIOR

Estimativa E_{ij}	Transbordo	CT	CA	Custo Mensal (CT+CA)
N5-T2	S-TRANS	26973	900	27873
N6-T3	S-TRANS	27112	3900	31012
N5-T2	1-TRANS	26973	900	27873
N6-T3	1-TRANS	27112	3900	31012
N5-T2	2-TRANS	27713	1500	29213
N6-T3	2-TRANS	27112	3900	31012

Fonte: o autor (2022).

Para esse último caso testado, em que o custo de combustível é maior, nota-se que os custos em todos os casos foram superiores em relação aos casos anteriores e que não houve diferenças significativas nos cenários 0-TRANS, 1-TRANS e 2-TRANS. Destaca-se também que, apesar dos custos elevados de transporte, os custos de atraso também foram consideravelmente altos. Isso ocorre porque, em caso de custos de transporte muito elevados, o modelo matemático, em vários dias, indica

que pagar a multa por atraso é menos oneroso ao operador logístico do que pagar pelo transporte.

6.2 RESULTADOS DO MÉTODO DE MONTE CARLO

Considerando as estimativas N5-T2 e N6-T3, 30 instâncias distintas, cada uma com 15 contratos no mês, foram geradas. Os resultados para a estimativa N5-T2, no que diz respeito aos custos de transporte mensal e custos de atraso ao longo do mês, foram calculados na tabela abaixo:

TABELA 24 – CUSTOS DAS INSTÂNCIAS NA ESTIMATIVA N5-T2

Instância	CT S-TRANS	CA S-TRANS	CT 1-TRANS	CA 1-TRANS	CT 2-TRANS	CA 2-TRANS
INS-01	16435	3300	16435	3300	15188	3000
INS-02	12968	2400	12882	2400	12882	2400
INS-03	7953	5700	7953	5700	12152	1500
INS-04	15457	4800	15457	4800	14148	2400
INS-05	13796	900	13796	900	14066	600
INS-06	16572	3000	16572	3000	16971	2100
INS-07	11713	0	11713	0	11713	0
INS-08	13843	3900	13843	3900	13204	4200
INS-09	13189	900	13189	900	13189	900
INS-10	16006	2700	16006	2700	14800	2100
INS-11	15232	3000	11096	2700	13727	3900
INS-12	12268	1500	12268	1500	12268	1500
INS-13	7173	900	7173	900	7173	900
INS-14	13668	5100	13668	5100	13668	5100
INS-15	11305	1200	11272	900	11339	1200
INS-16	12622	2700	12622	2700	12622	2700
INS-17	12777	4200	12777	4200	14494	3900
INS-18	14270	3900	14270	3900	14116	4500
INS-19	15042	7200	15081	6900	14419	3900
INS-20	12618	600	12618	600	12618	600
INS-21	15769	3600	15769	3600	16410	3300
INS-22	12686	2700	12773	1800	12773	2100
INS-23	16657	4500	16565	4500	15432	3000
INS-24	14902	900	15739	900	15182	900
INS-25	13806	600	12691	900	12412	900
INS-26	13740	1500	13740	1500	13740	1500
INS-27	13785	1800	14527	900	14527	900
INS-28	16000	0	16000	0	15909	0
INS-29	11403	1200	11403	1200	11403	1200
INS-30	12250	1800	12250	1800	12250	1800

MÉDIA	13530,17	2550	13404,93	2470	13493,17	2100
DESVIO PADRÃO	2253,765	1799,569	2305,03	1794,272	1880,753	1387,133

Fonte: o autor (2022).

Para a estimativa N5-T2, o cenário 2-TRANS apresentou a menor média de custo mensal (15593,17 unidades monetárias) em relação ao cenário 1-TRANS (15874,93 unidades monetárias). Ambos os casos, por sua vez, apresentaram custos inferiores ao cenário S-TRANS (16080,17 unidades monetárias). Apesar de apresentar um custo médio de transporte superior ao cenário 1-TRANS, o cenário 2-TRANS apresentou uma média inferior para o custo de atraso do cenário considerado.

O cenário S-TRANS apresentou custo mensal inferior aos demais em uma instância, ao passo que os cenários 1-TRANS e 2-TRANS apresentaram, respectivamente, o menor custo mensal em três e onze instâncias. Em diversas instâncias, dois cenários, ou mesmo os três cenários, apresentaram custo mensal idêntico, o que indica que o ponto de transbordo não foi utilizado durante o período.

Analogamente, os resultados para a estimativa N6-T3 são os seguintes:

TABELA 25 – CUSTOS DAS INSTÂNCIAS NA ESTIMATIVA N6-T3

Instância	CT S-TRANS	CA S-TRANS	CT 1-TRANS	CA 1-TRANS	CT 2-TRANS	CA 2-TRANS
INS-01	14988	2400	14858	2400	14112	2400
INS-02	12227	2100	12882	2400	12882	2400
INS-03	12138	1800	12138	1800	12138	1800
INS-04	15457	4800	14705	3300	14148	2400
INS-05	13796	900	13796	900	13796	900
INS-06	16763	5100	15991	4200	17279	3000
INS-07	11713	300	11713	300	11713	300
INS-08	12937	5100	12937	5100	13523	3900
INS-09	12448	1500	12448	1500	12448	1500
INS-10	15268	3000	15268	3000	14101	2700
INS-11	14505	3300	13796	2700	13727	3900
INS-12	11435	2700	11435	2700	11435	2700
INS-13	7106	1200	7106	1200	7106	1200
INS-14	13668	5400	13668	5400	13668	5400
INS-15	11339	1500	11475	1200	11405	1800
INS-16	11898	3300	11898	3300	12184	3300
INS-17	12777	4200	12777	4200	12777	4200
INS-18	14173	2700	14173	2700	13057	9600
INS-19	15042	8400	15263	2700	13831	5700
INS-20	11896	1200	11896	1200	11896	1200
INS-21	15769	3600	15769	3900	16410	3300

INS-22	12773	2400	12773	1800	12773	2100
INS-23	16657	5400	16799	15000	14045	2400
INS-24	14288	2700	14278	1800	14599	2100
INS-25	12133	1900	12705	900	12426	900
INS-26	12906	1500	12906	1500	13091	1200
INS-27	13785	2100	13785	2100	14560	1500
INS-28	15193	1200	15193	1200	15148	1200
INS-29	10679	2100	10679	2100	10861	2100
INS-30	11634	2100	11634	2100	11632	2400
MÉDIA	**13246,37**	**2863,333**	**13224,8**	**2820**	**13092,37**	**2650**
DESVIO PADRÃO	**2019,637**	**1753,909**	**1933,565**	**2616,051**	**1837,743**	**1829,217**

Fonte: o autor (2022).

Para a estimativa N6-T3, o cenário 2-TRANS continuou com a menor média de custo mensal (15742,37 unidades monetárias) em relação ao cenário 1-TRANS (16044,80 unidades monetárias) e ao cenário S-TRANS (16109,70). Porém, os três cenários apresentaram uma média de custo superior ao da estimativa N5-T2. Nessa estimativa, ainda, o cenário 2-TRANS apresentou uma média inferior aos demais cenários tanto para o custo de transporte quanto para o custo de atraso.

O cenário S-TRANS apresentou custo mensal inferior aos demais em duas instâncias, ao passo que os cenários 1-TRANS e 2-TRANS apresentaram, respectivamente, o menor custo mensal em seis e oito instâncias. Assim como na estimativa N5-T2, em diversas instâncias, dois cenários, ou mesmo os três cenários considerados, apresentaram custo mensal idêntico, o que indica a não utilização de transbordos durante o período.

A tabela abaixo apresenta a média das ocupações das instâncias testadas, em valor percentual, para cada estimativa de custo fictício utilizada e cada cenário analisado.

TABELA 26 – MÉDIAS DAS OCUPAÇÕES PERCENTUAIS DOS VEÍCULOS EM CADA CENÁRIO

Instância	**N5-T2 0-TRANS**	**N6-T3 0-TRANS**	**N5-T2 1-TRANS**	**N6-T3 1-TRANS**	**N5-T2 2-TRANS**	**N6-T3 2-TRANS**
INS-01	52,89	58,88	52,89	56,72	51,15	52,2
INS-02	47,35	49,69	52,39	52,39	50,78	53,39
INS-03	55,17	55,13	55,17	55,13	55,57	55,13
INS-04	52,5	52,56	52,5	54,86	53,29	53,57
INS-05	59	59,2	59	58,85	54,33	59,2
INS-06	59,89	63,48	59,89	62,29	54,18	54,22

INS-07	52,79	54,35	52,79	54,52	54,22	54,04
INS-08	50,43	51,15	50,43	51,1	50,29	46,41
INS-09	58,33	59,82	58,33	61,76	58,22	59,71
INS-10	59,28	60	59,28	59,78	61,17	56,95
INS-11	61,05	60,89	64,33	64,67	64,67	65,44
INS-12	45,17	47,27	45,17	47,27	45,17	46,95
INS-13	43,52	45,43	43,52	45,43	43,52	45,43
INS-14	43,18	43,23	43,18	43,23	43,18	43,23
INS-15	52,58	55	55,63	46,7	52,5	53,1
INS-16	59,94	58,16	59,94	58,16	59,94	54,71
INS-17	53,95	53,95	53,95	53,95	49,21	53,95
INS-18	62,47	54,26	62,47	54,26	60	57,17
INS-19	52,89	54,06	51,1	48,9	49,76	52,33
INS-20	53,82	49,65	53,82	49,65	53,82	49,65
INS-21	53,52	53,52	53,52	54,29	49,86	52,45
INS-22	54,79	54,74	54,35	54,1	52,29	52,76
INS-23	57,32	57,42	59,53	57,42	54,1	54,35
INS-24	52,71	59,11	53,16	57,4	54,32	61,5
INS-25	48,82	52,95	54	51,55	54,05	52
INS-26	59,23	62,75	59,23	62,6	59,23	60,52
INS-27	62,14	61,64	61	61,64	58,52	59,35
INS-28	63,41	68,9	63,41	68,9	62,5	68,9
INS-29	48,19	50,05	48,19	50,05	48,19	48,25
INS-30	52,82	53,29	52,82	53,13	52,82	51,87
MÉDIA	**54,305**	**55,351**	**54,833**	**55,02333**	**53,695**	**54,291**
DESVIO PADRÃO	**5,537881**	**5,627075**	**5,472661**	**5,986691**	**5,286316**	**5,652841**

Fonte: o autor (2022).

O cenário 2-TRANS apresentou ocupação média inferior aos cenários 1-TRANS e 0-TRANS. No entanto, é visível que as médias de ocupação em cada estimativa e cenário testado foram bastante semelhantes.

Para o cálculo dos intervalos de confiança, foi considerado um nível de significância $\alpha = 0{,}05$. Assim, o parâmetro estatístico tabelado da distribuição normal, utilizado no cálculo, foi $z_{0{,}025} = 1{,}96$.

O desvio padrão calculado foi o amostral. Como a distribuição de probabilidade T de Student tende à da Distribuição Normal na medida em que se aumenta o tamanho da amostra, e como o tamanho da amostra n é de 30 cenários (instâncias distintas testadas), assume-se que o desvio padrão amostral s se aproxima do desvio padrão populacional σ (desconhecido no contexto explorado), e que a média amostral $\bar{x}$ se aproxima da média populacional μ (também desconhecida no contexto proposto).

Assim, segue-se os intervalos de confiança para o custo médio total do mês (considerando tanto custos com transporte e custos com atraso), sintetizados na tabela abaixo.

TABELA 27 – MÉDIA E DESVIO PADRÃO DO CUSTO EM CADA CENÁRIO

Estimativa	Transbordo	Custo médio total	Desvio padrão	IC limite inferior	IC limite superior
N5-T2	S-TRANS	16080,17	3146,62	14954,16	17206,17
N6-T3	S-TRANS	16109,70	3298,45	14929,37	17290,03
N5-T2	1-TRANS	15874,93	3165,57	14742,15	17007,72
N6-T3	1-TRANS	16044,80	3921,99	14641,33	17448,27
N5-T2	2-TRANS	15593,17	2644,89	14646,7	16539,63
N6-T3	2-TRANS	15742,37	2841,40	14725,59	16759,15

Fonte: o autor (2022).

Embora os intervalos de confiança gerados sejam demasiado abrangentes quanto ao limite inferior e limite superior, é notório que, considerando as 30 instâncias testadas, os cenários 2-TRANS apresentaram os menores limites superiores (abaixo de 17000 unidades monetárias). O melhor cenário, dentre todos os testados, foi o 2-TRANS com a estimativa de custo fictício N5-T2. Destaca-se também que, para as instâncias testadas, o cenário 2-TRANS apresentou, em ambas as estimativas de custo fictício, variabilidade do custo mensal (desvio padrão mensurado) inferior aos cenários S-TRANS e 1-TRANS.

Os intervalos de confiança no que diz respeito às ocupações médias são expostos na tabela a seguir:

TABELA 28 – INTERVALOS DE CONFIANÇA PARA A MÉDIA DE OCUPAÇÃO DOS VEÍCULOS

Estimativa	Transbordo	Ocupação Média	Limite inferior	Limite Superior
N5-T2	S-TRANS	54,30%	52,32%	56,28%
N6-T3	S-TRANS	55,35%	53,33%	57,36%
N5-T2	1-TRANS	54,83%	52,87%	56,79%
N6-T3	1-TRANS	55,02%	52,88%	57,16%
N5-T2	2-TRANS	53,69%	51,80%	55,58%
N6-T3	2-TRANS	54,29%	52,26%	56,31%

Fonte: o autor (2022).

Observa-se que, a partir das instâncias testadas e as estimativas para o custo fictício, não foram observadas diferenças consideráveis no que diz respeito à média de ocupação dos veículos nos cenários S-TRANS, 1-TRANS e 2-TRANS.

Em suma, a utilização de pontos de transbordo no UHPDP, embora não apresente diferenças significativas na ocupação média dos veículos, pode apresentar, em alguns casos, redução nos custos gerais do operador logístico ao longo do mês, tendo em vista os custos associados ao transporte de mercadorias e ao atraso nas entregas.

Em geral, pelas estimativas de custo fictício N5-T2 e N6-T3, o cenário 2-TRANS apresentou-se mais favorável e com custo mensal médio inferior ao cenário 1-TRANS, que por sua vez também apresentou, em geral, custos mensais inferiores ao cenário S-TRANS. Apesar disso, para algumas instâncias testadas, o cenário 2-TRANS apresentou custos superiores aos cenários 1-TRANS e S-TRANS, o que sugere que, para instâncias do tamanho dos testes realizados, as características das demandas ainda podem não tornar viável, em alguns casos, a utilização de um ou mais pontos de transbordo no UHPDP.

7 CONCLUSÃO

Neste trabalho, uma nova variante do *Pickup-and-Delivery Problem* foi proposta, denominada UHPDP (*Uncertain Horizon Pickup-and-Delivery Problem*), em que o modelo matemático é executado dia após dia durante um mês, o veículo pode encerrar o dia em qualquer ponto do grafo considerado e os resultados do dia anterior interferem nos parâmetros de entrada do dia seguinte. Multas de atraso foram consideradas e um custo fictício foi acrescentado à função objetivo para incentivar o modelo a realizar antes da aplicação de multas por atraso. Além disso, o impacto da existência de pontos de transbordo foi mensurado nesse contexto.

Em geral, a utilização de pontos de transbordo mostrou-se vantajosa em relação aos custos totais de todo o período. No entanto, os resultados não foram conclusivos, uma vez que algumas instâncias apresentaram custos inferiores para os cenários com nenhum ou apenas um transbordo em relação ao cenário com dois transbordos. Os intervalos de confiança gerados a partir do método de Monte Carlo, ao nível de significância $\alpha = 0{,}05$, foram muito abrangentes no que diz respeito a uma verdadeira média para o custo mensal do operador logístico.

Há algumas limitações presentes neste trabalho. Primeiramente, não foram utilizadas instâncias já testadas na literatura para a geração dos resultados do capítulo 6. Assim, a ausência de dados práticos para definição dos parâmetros de teste (número de veículos, contratos, remessas, custo de atraso, tamanho das cargas, prazo de entrega, entre outros parâmetros) pode distanciar os resultados obtidos do contexto prático das organizações que efetuam transporte de remessas.

Além disso, devido ao tamanho limitado da instância testada nos cenários da seção 6.1, não foi possível identificar tendências sobre quais parâmetros mais interferem nos custos mensais nos casos com nenhum (S-TRANS), apenas um (1-TRANS) ou dois pontos de transbordo (2-TRANS) habilitados.

Como sugestão para trabalhos futuros, a análise estatística pode ser mais bem explorada, observando se os resultados de custo mensal ou média de ocupação dos veículos realmente seguem uma distribuição normal, além de aumentar o tamanho da amostra para restringir o intervalo de confiança calculado e, assim, possibilitar testes de hipóteses que apontem para diferenças mais significativas entre cenários com ou sem transbordos.

Outrossim, trabalhos futuros podem se privilegiar de realizar testes com instâncias maiores, dados reais das operações logísticas de uma transportadora e aperfeiçoar a determinação do custo fictício considerado. O parâmetro E_{ij} é especialmente importante, e por mais que alguns valores de β_N e β_T tenham sido testados, é notório que o aperfeiçoamento desses valores possa reduzir em grande medida os custos totais, tanto em cenários sem transbordo quanto em cenários em que há pontos de transbordo habilitado. Além disso, os valores mais adequados de β_N e β_T observados neste trabalho podem não ser os que condizem com o menor custo do período considerado, e podem variar conforme as características das instâncias testadas.

Ademais, é viável analisar mais a fundo variações do modelo, com remoção e adição de restrições que se adequem à prática das transportadoras, tais como janela de tempo para coleta e entrega das mercadorias, limite da jornada de trabalho de um motorista, local definido em que os veículos devem encerrar as operações, utilização de frota heterogênea, definição da localização dos pontos de transbordo, entre outras possibilidades.

Por fim, é interessante que trabalhos futuros se utilizem de heurísticas e meta-heurísticas para reduzir o tempo de solução do modelo e permitir testes com instâncias de maior porte, com mais parâmetros, variáveis e restrições. Analisar o *gap* da solução em instâncias grandes também é uma alternativa para comparar as vantagens e desvantagens de se utilizar pontos de transbordo no contexto explorado.

REFERÊNCIAS

ABDULKADER, M. M. S.; GAJPAL, Y.; ELMEKKAWY, T. Y. Vehicle routing problem in omni-channel retailing distribution systems. **International Journal of Production Economics**, v. 196, p. 43–55, 2018. Elsevier B.V. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2017.11.011>. .

AL CHAMI, Z.; BECHARA, B.; MANIER, H.; MANIER, M. A. A robust pickup and delivery problem with uncertain travel time. **Proceedings - International Conference on Tools with Artificial Intelligence, ICTAI**, v. 2018-Novem, p. 940–946, 2018. IEEE.

BALCIK, B.; BEAMON, B. M.; SMILOWITZ, K. Last mile distribution in humanitarian relief. **Journal of Intelligent Transportation Systems: Technology, Planning, and Operations**, v. 12, n. 2, p. 51–63, 2008.

BELL, W. J.; DALBERTO, L. M.; FISHER, M. L.; et al. Improving the Distribution of Industrial Gases With an on-Line Computerized Routing and Scheduling Optimizer. **Interfaces (Providence, Rhode Island)**, v. 13, n. 6, p. 4–23, 1983.

BERALDI, P.; GHIANI, G.; MUSMANNO, R.; VOCATURO, F. Efficient neighborhood search for the probabilistic multi-vehicle pickup and delivery problem. **Asia-Pacific Journal of Operational Research**, v. 27, n. 3, p. 301–314, 2010.

BRUNI, M. E.; TOAN, D. Q.; NAM, L. H. The multi-vehicle profitable pick up and delivery routing problem with uncertain travel times. **Transportation Research Procedia**, v. 52, p. 509–516, 2021. Elsevier B.V. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2021.01.060>. .

CHOPDE, N.; NICHAT, M. Landmark Based Shortest Path Detection by Using A* and Haversine Formula. **GH Raisoni College of Engineering and …**, v. 1, n. 2, p. 298–302, 2013. Disponível em: <http://www.ijircce.com/upload/2013/april/17_V1204030_Landmark_H.pdf>. .

COELHO, L. C.; CORDEAU, J. F.; LAPORTE, G. Thirty years of inventory routing.

Transportation Science, v. 48, n. 1, p. 1–19, 2014.

CNT. Confederação Nacional do Transporte, CNT. Boletim Econômico. Brasília, 2021. Disponível em: <https://www.cnt.org.br/boletins >. Acesso em: 02 março 2021.

DAHLE, L.; ANDERSSON, H.; CHRISTIANSEN, M.; SPERANZA, M. G. The pickup and delivery problem with time windows and occasional drivers. **Computers and Operations Research**, v. 109, p. 122–133, 2019. Elsevier Ltd. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.cor.2019.04.023>. .

DANTZIG, G. B. AT; RAMSER, J. H. The Truck Dispatching Problem. **Management Science**, 1959.

DUMAS, Y.; DESROSIERS, J.; SOUMIS, F. The pickup and delivery problem with time windows. **European Journal of Operational Research**, v. 54, n. 1, p. 7–22, 1991.

GANSTERER, M.; KÜÇÜKTEPE, M.; HARTL, R. F. The multi-vehicle profitable pickup and delivery problem. **OR Spectrum**, v. 39, n. 1, p. 303–319, 2017. Springer Berlin Heidelberg.

GOETSCHALCKX, M.; JACOBS-BLECHA, C. The vehicle routing problem with backhauls. **European Journal of Operational Research**, v. 42, n. 1, p. 39–51, 1989.

HALL, R. W. Transportation Science. , , n. September 2015, p. 1–4, 1999.

LAPORTE, G. Fifty years of vehicle routing. **Transportation Science**, v. 43, n. 4, p. 408–416, 2009.

MACIOSZEK, E. First and last mile delivery - problems and issues. **Advances in Intelligent Systems and Computing**, v. 631, p. 147–154, 2018.

MATINRAD, N.; ROGHANIAN, E.; RASI, Z. Supply chain network optimization: A review of classification, models, solution techniques and future research. **Uncertain Supply Chain Management**, v. 1, n. 1, p. 1–24, 2013.

MITROVIĆ-MINIĆ, S.; LAPORTE, G. The pickup and delivery problem with time windows and transshipment. **Infor**, v. 44, n. 3, p. 217–227, 2006.

MUES, C.; PICKL, S. Transshipment and time windows in vehicle routing. **Proceedings of the International Symposium on Parallel Architectures, Algorithms and Networks, I-SPAN**, v. 2005, p. 113–119, 2005.

OYOLA, J.; ARNTZEN, H.; WOODRUFF, D. L. The stochastic vehicle routing problem, a literature review, part I: models. **EURO Journal on Transportation and Logisics**, v. 7, n. 3, p. 193–221, 2018. Springer Berlin Heidelberg.

RAIS, A.; ALVELOS, F.; CARVALHO, M. S. New mixed integer-programming model for the pickup-and-delivery problem with transshipment. **European Journal of Operational Research**, v. 235, n. 3, p. 530–539, 2014. Elsevier B.V. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2013.10.038>. .

RANIERI, L.; DIGIESI, S.; SILVESTRI, B.; ROCCOTELLI, M. A review of last mile logistics innovations in an externalities cost reduction vision. **Sustainability (Switzerland)**, v. 10, n. 3, p. 1–18, 2018.

SARIKLIS, D.; POWELL, S. A heuristic method for the open vehicle routing problem. **Journal of the Operational Research Society**, v. 51, n. 5, p. 564–573, 2000.

SCHRAGE, L. Formulation and structure of more complex/realistic routing and scheduling problems. **Networks**, v. 11, n. 2, p. 229–232, 1981.

SUN, P.; VEELENTURF, L. P.; HEWITT, M.; VAN WOENSEL, T. The time-dependent pickup and delivery problem with time windows. **Transportation Research Part B: Methodological**, v. 116, p. 1–24, 2018. Elsevier Ltd. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2018.07.002>. .

VIGO, P. T. AND D. The Vehicle Routing Problem. , v. 0, p. 1–4, 2000.

VORNHUSEN, B.; WANG, X.; KOPFER, H. Vehicle routing under consideration of transhipment in horizontal coalitions of freight carriers. **Procedia CIRP**, v. 19, n. C, p. 117–122, 2014. Elsevier B.V. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1016/j.procir.2014.05.008>. .

WANG, F. Measurement, Optimization, and Impact of Health Care Accessibility: A Methodological Review. **Annals of the Association of American Geographers**, v. 102, n. 5, 2012.

WANG, J.; YU, Y.; TANG, J. Compensation and profit distribution for cooperative green pickup and delivery problem. **Transportation Research Part B: Methodological**, v. 113, p. 54–69, 2018. Elsevier Ltd. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.trb.2018.05.003>. .

WOLFINGER, D.; SALAZAR-GONZÁLEZ, J. J. The Pickup and Delivery Problem with Split Loads and Transshipments: A Branch-and-Cut Solution Approach. **European Journal of Operational Research**, v. 289, n. 2, p. 470–484, 2021. Elsevier B.V.

XU, H.; CHEN, Z. L.; RAJAGOPAL, S.; ARUNAPURAM, S. Solving a practical pickup and delivery problem. **Transportation Science**, v. 37, n. 3, p. 347–364, 2003.

YANG, F.; XIAO, H. Models and Algorithms for Vehicle Routing Problem with Transshipment Centers. **Systems Engineering - Theory & Practice**, v. 27, n. 3, p. 28–35, 2007.