UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

THAÍS ALVARENGA BASSO

A MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO DE UMA ESCOLA WALDORF: UMA DISCUSSÃO SOBRE CURRÍCULO

CURITIBA

2023

THAÍS ALVARENGA BASSO

A MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO DE UMA ESCOLA WALDORF: UMA DISCUSSÃO SOBRE CURRÍCULO

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática do Setor das Exatas da Universidade Federal do Paraná como como requisito parcial à obtenção do título de Mestra em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Emerson Rolkouski

CURITIBA

2023

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Basso, Thaís Alvarenga
A matemática no ensino médio de uma escola Waldorf : uma discussão sobre currículo. / Thaís Alvarenga Basso. – Curitiba, 2023.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ciências e em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Emerson Rolkouski.

1. Waldorf, Método de educação. 2. Currículos. 3. Ensino médio. I. Rolkouski, Emerson. II. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Ciências e em Matemática. III. Título.

Bibliotecário: Leticia Priscila Azevedo de Sousa CRB-9/2029

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EDUCAÇÃO EM
CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA - 40001016068P7

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação EDUCAÇÃO EM CIÊNCIAS E EM MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da dissertação de Mestrado de **THAÍS ALVARENGA BASSO** intitulada: **A MATEMÁTICA NO ENSINO MÉDIO DE UMA ESCOLA WALDORF: UMA DISCUSSÃO SOBRE CURRÍCULO**, sob orientação do Prof. Dr. EMERSON ROLKOUSKI, que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestra está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 16 de Fevereiro de 2023.

Assinatura Eletrônica
23/02/2023 15:06:51.0
EMERSON ROLKOUSKI
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
24/02/2023 10:35:08.0
CARLOS ROBERTO VIANNA
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
03/03/2023 15:39:08.0
TANIA STOLTZ
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
23/02/2023 12:45:31.0
ELOISA ROSOTTI NAVARRO
Avaliador Interno Pós-Doc (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a todos que, de um modo ou de outro, contribuíram para que este projeto se concretizasse.

Primeiramente, à vida pelo simples fato dela existir e, assim, me possibilitar que nestes dois últimos anos eu me desenvolvesse em tantos âmbitos de minha vida de uma forma como nunca havia experenciado antes.

Assim, agradeço à minha família pelo apoio emocional e material para que eu pudesse dar continuidade aos meus sonhos.

Às amizades por compartilharem comigo suas aventuras e desventuras como jovens adultos tanto nos momentos tristes como também nos felizes.

Ao vô Alcides (*in memorian*) e a vó Lurdes (*in memorian*) por me acompanharem enquanto eu ainda estava realizando a Pesquisa de Campo na escola.

À Universidade Federal do Paraná (UFPR), ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGECM) e ao Grupo de Pesquisa em Educação Matemática (GEPEM) por me acolherem e me incentivarem em cada etapa desta jornada. Agradeço também a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e a todos que lutaram pela minha permanência e de tantos outros pesquisadores em seus cursos superiores.

Ao professor Emerson por acreditar em meu potencial e no potencial desta pesquisa quando, vezes ou outras, eu ainda não sabia o que estava fazendo ou achava que sabia o que estava fazendo.

Ao Prof. Dr. Carlos Vianna, Profa. Dra. Eloísa Navarro e a Profa. Dra. Tania Stoltz pelas contribuições como banca de qualificação e defesa.

Agradeço à professora colaboradora desta pesquisa juntamente a toda equipe escolar e seus alunos por me receberem em suas aulas de matemática e compartilharem comigo um pouco de suas experiências. Apesar de nestas páginas se encontrarem apenas fragmentos de todoo aprendizado que tive com vocês, acredito que nelas conseguimos apresentar um pouco mais do Ensino Médio Waldorf para aqueles que o desconhecem.

À Escola Waldorf Angelim por me acolher como professora e me apoiar ainda que na finalização deste trabalho.

E, por fim, a você que se encontra interessado por esta dissertação. Seu apoio também é essencial para que este trabalho continue a viver para além destas páginas!

UM SEGREDO DA NATUREZA

Contemple a planta!
Ela é da Terra
A borboleta aprisionada.

Contemple a borboleta!
Ela é do cosmos
A planta liberta.

(RUDOLF STEINER)

RESUMO

Contribuindo para os estudos acerca do ensino da matemática nas escolas fundamentadas em pedagogias alternativas e, em particular, na Pedagogia Waldorf, nesta pesquisa questionamos "Como aspectos do currículo de matemática de uma Escola Waldorf se manifestam na prática docente?". Para isso, objetivamos "identificar como aspectos do currículo de matemática do Ensino Médio de uma Escola Waldorf se manifestam na prática docente" e, assim, nos fundamentamos teoricamente em José Gimeno Sacristán acerca dos currículos prescrito, apresentado, modelado e em ação. Pautado metodologicamente em Marli Eliza Dalmazo Afonso de André e Hermengarda Alves Lüdke, a Pesquisa de Campo se deu em uma Escola Waldorf do interior do estado de São Paulo entre junho e dezembro de 2021 e, a partir disso, obtivemos acesso a livros de prescrição curricular, materiais didáticos e Plano Escolar, além de termos constituído um Diário de Campo sobre as observações das aulas de matemática. Através da análise de dados proposta por John Ward Creswell, emergiram cinco categorias, que são "História da Matemática", "Resolução de Problemas", "Investigação Matemática", "Fluência Matemática' e "Para Além da Matemática Convencional...". Com isso, observamos que a filosofia educacional de uma escola baseada na Pedagogia Waldorf possui particularidades que contemplam diferenciações em seu ambiente físico, pedagógico e, consequentemente, em suas práticas matemáticas. No que se refere aos conteúdos e métodos empregados no Ensino Médio, há a busca pelo equilíbrio entre a matemática convencional e as experiências matemáticas que estimulam o entusiasmo dos alunos pela disciplina e suas capacidades de investigação e de resolução de problemas.

Palavras-chave: Pedagogia Waldorf; educação matemática; ensino médio; currículo.

ABSTRACT

Contributing to the studies about the teaching of mathematics in schools based on alternative pedagogies and, in particular, on Waldorf Pedagogy, in this research the main question is "How the aspects of the mathematics curriculum in the High School of a Waldorf School are manifested in practice?". For this, we aimed to identify how the aspects of the mathematics curriculum in the High School of a Waldorf School are manifested in practice and we based on José Gimeno Sacristán´s theory about the prescribed, presented, modeled and in-action curriculum. Methodologically based on Marli Eliza Dalmazo Afonso de André and Hermengarda Alves Lüdke, the Field Research took place in a Waldorf School in the countryside in the state of Sao Paulo between June and December 2021 and, from that, we obtained access to prescription books curriculum, didactic materials and School Plan, in addition to having created a Field Diary on the observations of mathematics classes. Through the data analysis proposed by John Ward Creswell, five categories emerged, being: Mathematics History, Problem Solving, Mathematical Investigation, Mathematical Fluency, and Beyond Conventional Mathematics. Thereby, we observe that the educational philosophy of a school based on Waldorf Pedagogy has particularities that contemplate differentiations in its physical and pedagogical environment and, consequently, in its mathematical practices. Regarding the contents and methods used in High School, there is a search for a balance between conventional mathematics and mathematical experiences that stimulate the students' enthusiasm for the subject and their investigation and problem-solving capabilities.

Keywords: Waldorf Pedagogy; mathematics education; high school; curriculum.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE QUADROS E TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

BNCC	Base Nacional Comum Curricular
EM	Ensino Médio
EMEF	Escola Municipal de Ensino Fundamental
FEUSP	Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo
FEWB	Federação das Escolas Waldorf no Brasil
HM	História da Matemática
IM	Investigação Matemática
PIBID	Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência
PPGECM	Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática
PPGE	Programa de Pós-Graduação em Educação
PW	Pedagogia Waldorf
RP	Resolução de Problemas
SAT	Scholastic Aptitude Test
UFPR	Universidade Federal do Paraná
USP	Universidade de São Paulo

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

MARIA MONTESSORI
CÉLESTIN FREINET
PAULO FREIRE
RUDOLF STEINER

Estes foram alguns dos educadores do século XX que a Prof. Dra. Michela Tuchapesk propôs que eu e meus colegas da disciplina de Didática I, oferecida em 2019 ao curso de Licenciatura em Matemática pela Universidade de São Paulo (USP) de São Carlos, SP, pesquisássemos.

Ao ter lembrado que, em 2016, eu havia tido contato com o nome de Rudolf Steiner através das redes sociais, fiz minha escolha e eu estava então no grupo que se dedicaria a este autor e sua proposta educacional. Além disso, deveríamos entrar em contato e conhecer uma escola que adotasse seus princípios educacionais e sua proposta da Pedagogia Waldorf (PW). Eis que este foi meu primeiro contato, mais sistemático, com o que viria a ser meu interesse de estudo e pesquisa.

Então, já nesta primeira oportunidade que tive de conhecer a PW, eu e um colega de trabalho conhecemos duas Escolas Waldorf (EWs) da região de Campinas, SP. Ao conversarmos um pouco com professores de matemática e de biologia, fomos apresentados à filosofia educacional da escola e sua estrutura física e pedagógica. Neste mesmo dia, tivemos o privilégio de acompanhar duas aulas de geometria nos 6º e 7º anos. No 6° ano, os alunos construíram algumas figuras geométricas, as rosáceas, com régua e compasso e, depois, pintaram e deram vida a elas. Na outra sala, a turma estudou os polígonos, exibindo criatividade ao desenharem quadriláteros não-convencionais, que se diferenciam do quadrado e do retângulo, e ao nomearem seus ângulos internos para além dos usuais α e β.

Este contato com as EWs me proporcionou conhecer uma proposta de educação bastante diferente da que estava acostumada como aluna e como professora em formação. De certa forma, as leituras teóricas e as impressões que tive das escolas me incentivaram a buscar na PW algumas respostas para minhas inquietações com relação às temáticas educacionais das quais estava começando a tomar ciência em meu penúltimo ano de graduação.

Nesta época, eu já estagiava como pibidiana no Ensino Médio (EM) de uma escola pública fazia pouco mais de um ano e, por eu ter estudado o Fundamental II, Médio e ter feito cursinho em colégios particulares, este programa me fez conhecer um pouco de uma realidade bastante diferente da minha. Enquanto fui encaminhada para realizar todos os vestibulares mais tradicionais, havia uma grande parcela de estudantes que tinham outros planos de vida, de acordo com sua situação socioeconômica, com o incentivo que recebiam da sociedade e com suas próprias perspectivas sobre si mesmos e seus futuros.

Ao ouvir muitos relatos e falas de jovens que estavam desmotivados e odiando a escola, as disciplinas e, principalmente, a matemática, obtive uma autoconsciência de como eu me portava perante os estudos e como aquilo refletia em minha docência. Durante toda a minha escolaridade, interessei-me por várias disciplinas e eu não me questionava muito sobre o modelo pedagógico ou o porquê de todos aqueles conteúdos e atividades. Até mesmo com as matérias mais temidas pelos estudantes, eu compreendia a educação obrigatória e seu currículo como orientações “escritas por deuses”.

Já no curso de Licenciatura em Matemática na USP, junto a colegas de classe, passamos a denunciar a educação tradicional com a qual nos deparamos enquanto estagiários. Muitos de nós sentíamos impelidos a mudar a relação entre a teoria universitária, que nos envolvia com novas concepções acerca do universo escolar, e a prática dos professores da educação básica, que trabalham exaustivamente e ainda estão sob orientações externas às universidades. Eram burocracias, questões culturais e socioeconômicas, interesses políticos e tantas outras boas intenções que influenciavam a qualidade das aulas e das experiências escolares dos que se encontravam ali e não somente o conteúdo e a metodologia em si. Estas discussões foram palco de momentos bastante calorosos entre os licenciandos, quando nossos relatos e ideologias se entrecruzavam.

Nas disciplinas de estágio, conheci algumas metodologias ativas no ensino da disciplina e, com isso, me aproximei mais da Investigação Matemática e da Etnomatemática. Entretanto, em 2020, e em meio a uma pandemia e às aulas virtuais, nas quais não apareciam alunos, novamente me frustrei com aquilo que estava estudando e que me encantava, mas que era muito difícil de ser colocado em prática.

Ainda assim, acredito que algumas viagens pedagógicas realizadas na universidade me deram esperança de poder trabalhar em lugares que sinalizavam algum tipo de mudança quanto à educação tradicional vivenciada por muitos de nós. Visitamos a Escola Municipal de Ensino Fundamental (EMEF) Hemínio Pagotto, localizada em um assentamento rural em Araraquara, SP, a Escola de Aplicação da Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (FEUSP) e o Colégio Shunji Nishimura, em Pompéia, SP. Em outros momentos, discutimos sobre a existência de escolas internacionais como a Escola da Ponte, em Portugal, e a Reggio Emilia, na Itália. No contexto brasileiro, senti-me inspirada a conhecer as EMEFs Campos Salles e

Amorim Lima, ambas na capital paulista, ao saber que é possível remodelar o ambiente educacional em diversos contextos. Assim, interessei-me cada vez mais por pedagogias alternativas ou, ainda, escolas que remodelaram sua estrutura e que atualmente servem de inspiração em seus modos de ensinar e aprender. E, é claro, pergunto-me até hoje o que impulsiona e possibilita tais educadores a se engajarem na transformação do ambiente de trabalho, frente ao conformismo que é posto por aspectos políticos, econômicos e culturais.

Portanto, ter conhecido a PW me fez despertar interesse sobre outras possibilidades de estrutura escolar e de ensino e aprendizagem em matemática que, aparentemente, não seguiam os padrões aos quais estamos condicionados.

Além das questões profissionais, o meu interesse pela Waldorf também se relaciona com alguns *hobbies* e questões bastante pessoais. Ao me deparar com este contexto escolar, encontrei um espaço aberto às artes na educação, o que me reanimou quanto a minha conexão com a música, a escrita e a fotografia desde quando eu era criança. Somado a este lado artístico, nos últimos anos venho estudando a área de intersecção entre a psicologia e a espiritualidade. Como será apresentado no decorrer desta dissertação, Rudolf Steiner contribuiu para que nós não somente compreendêssemos intelectualmente e materialmente a vida, mas que também nos sensibilizássemos por ela também em outros âmbitos. Em um mundo regido por extremos da ciência fria e da religião cega, Steiner buscou desenvolver no indivíduo, por meio da educação, o equilíbrio entre as forças da arte, da ciência e da religião.

As EWs também me convidaram para estar mais conectada à natureza. Brincar, cair e se sujar são algumas lembranças das minhas férias no interior de Minas Gerais pelas quais tenho um carinho especial. Infelizmente sei que, assim como eu, muitos ainda crescem em cidades grandes e apartamentos e, portanto, acredito que o vínculo com a natureza deve ser levado muito em consideração ao se educar uma criança.

Durante o isolamento social em 2020, comecei a leitura de vários trabalhos acadêmicos que aguçaram ainda mais minha curiosidade, sobretudo acerca das figuras geométricas que compunham o currículo Waldorf, mas que eu ainda desconhecia. Motivei-me a estudar sobre como era o cotidiano de uma escola alternativa, apesar de saber que somente com leituras não me seria possível vivenciá-la em sua plenitude.

Contudo, não quero expor este trabalho de modo a você, leitor, acreditar que na Pedagogia não há desafios a serem pensados e repensados. Dentre eles, me foi evidente a relação entre a PW e as classes médias altas, com os altos custos dos materiais utilizados no

Curso de Fundamentação em Pedagogia Waldorf[1] para os professores e também em suas disciplinas escolares. Inclusive, ao longo deste trabalho, tomei conhecimento de tantas outras escolas independentes e afiliadas a uma filosofia pedagógica. Dentre elas, a Pedagogia Lumiar e a Pedagogia Griô, sendo ambas de origem brasileira e que são propostas interessantes de decolonialidade na educação, ponto este que considero um desafio à PW e sua origem teórica europeia.

Portanto, ao escrever meu projeto de pesquisa, estava em meu último semestre na graduação. Nestes meses, muitas também foram as incertezas sobre os diversos caminhos que começaria a trilhar como licenciada, mas que ainda se sentia em formação. Em deslizes de principiantes, realizei processos seletivos municipais pensando que eram concursos públicos e, descobrindo isto, iniciei a lecionar aulas particulares de modo virtual.

De qualquer modo, eu estava consciente em meu pré-projeto de Mestrado para Universidade Federal do Paraná (UFPR) de que gostaria de me aprofundar no ensino de matemática no âmbito da PW. Na época, eu estava frequentando alguns estudos de professores online de uma EW dos anos iniciais e havia começado o Curso de Fundamentação no Instituto Impulso de Bauru, SP, que decidi pausar em setembro do mesmo ano para me dedicar a outros aspectos do Mestrado. Com estas experiências que se iniciavam, desejei pesquisar aquilo que faltava na literatura acadêmica e que também eu tinha maior afinidade devido ao Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID). Constatei que era mais comum discutir pedagogias alternativas para a Educação Infantil do que pensando nos adolescentes e, por isso, ao aceitar e me comprometercom esta pesquisa em março de 2021, eu e o meu orientador, o professor Dr. Emerson Rolkouski, definimos então que nós pesquisaríamos "A Matemática no Ensino Médio das Escolas Waldorf".

Com isso, no questionamos "Como aspectos do currículo de matemática do Ensino Médio de uma Escola Waldorf se manifestam na prática docente?". Para respondermos à esta questão, traçamos como objetivo geral "Identificar como aspectos do currículo de matemática do Ensino Médio de uma Escola Waldorf se manifestam na prática docente".

Já os objetivos específicos eram

i) Apresentar elementos dos currículos prescrito, apresentado, modelado e em ação de matemática do Ensino Médio de uma Escola Waldorf;

---

[1] Os Cursos de Fundamentação em Pedagogia Waldorf são direcionados a pedagogos, licenciados e demais interessados nesta filosofia educacional. Durante cerca de 4 anos, são estudados os principais fundamentos teóricos e vivenciadas práticas artísticas, corporais e dentre outras atividades a serem posteriormente desenvolvidas com os alunos. Esta formação é, para a maioria das Escolas Waldorf, pré-requisito para a contratação dos docentes.

ii) Identificar os principais aspectos que se apresentam ao longo do desenvolvimento destes currículos;

iii) Identificar como os principais aspectos se apresentam na prática escolar.

Considerando as justificativas da pesquisa e seus fenômenos, título e objetivos, a metodologia foi traçada. Do meu pré-projeto de pesquisa, no qual já indicava que eu gostaria de observar o cotidiano de uma EW durante um período de tempo, inspiramo-nos[2] na etnografia proposta por André (1995) e Lüdke e André (2015). Observar algumas das vivências do EM de uma EW nos possibilitaria compreender como se coloca em prática a teoria que já estávamos tomando conhecimento por meio dos trabalhos acadêmicos e demais livros sobre a PW.

Diante das possibilidades para estudar este fenômeno, o conceito de currículo de Sacristán (1998) nos revelou um referencial interessante para observarmos os mais variados aspectos do ensino de matemática no EM desta escola. Ademais, com este referencial teórico, poderíamos abordar somente alguns aspectos, mas de modo mais aprofundado, assim como poderíamos apresentar uma variedade de tópicos de modo mais geral, convidando o leitor a conhecer esta proposta junto a mim. Em consenso, eu e orientador optamos por seguir a segunda linha de pensamento na pesquisa, destacando suas particularidades e similaridades ao tradicional, mas também seus desafios no que tange o seu ensino de matemática.

Sendo assim, frente a um extenso trabalho, ressaltamos que estas foram minhas primeiras experiências como graduada, ainda com poucas vivências como professora, mas com memórias muito recentes de minha posição de estudante do Ensino Básico e Superior. A cada leitura, me descobri como aluna e em como ser uma professora e, assim, esta pesquisa conversa, em diversos momentos, em como estive aprendendo mais sobre como as teorias e as práticas escolares se distanciam, se aproximam, convivem em diversos contextos.

Além disso, gostariamos de conscientizar o leitor de que esta pesquisa se fez em uma única escola entre os anos de 2021 e 2022, momento de retorno às atividades presenciais após o fechamento da mesma no ano anterior. Por outro lado, os dados coletados no EM ainda não são relacionados ao Novo Ensino Médio, cuja implementação se iniciou em 2022, após a Pesquisa de Campo.

Deste modo, após esta introdução, apresentamos no Capítulo 2 a proposta filosófica e

---

[2] Usamos aqui a expressão inspirar para elucidar que foram feitos estudos sobre etnografia que possibilitaram criar um modo de olhar o fenômeno. Por outro lado, deixamos claro que não compreendemos essa pesquisa como etnográfica.

antroposófica de Rudolf Steiner, teórico que fundou a PW e que fundamenta as respectivas Escolas. Diante de uma teoria educacional complexa, selecionamos os temas que consideramos fundamentais na compreensão do fenômeno estudado.

No Capítulo 3, discorremos acerca da fundamentação teórica deste trabalho, que compreende a teoria curricular de Sacristán (1998). Para efeito de escrita, primeiramente concebemos o entendimento deste autor acerca dos currículos e de que modo esta temática nos possibilitou realizar uma pesquisa mais abrangente e integrada.

Já no Capítulo 4, detalhamos a abordagem metodológica empregada nesta pesquisa, pautada em uma parte mais documental e outra de análise das observações do contexto da escola e das aulas da professora participante deste projeto.

No Capítulo 5, aprofundamos os currículos prescrito, apresentado, modelado e em ação teorizados por Sacristán (1998) seguidos, um a um, por uma sucinta apresentação destes a partir dos dados anteriormente constituídos.

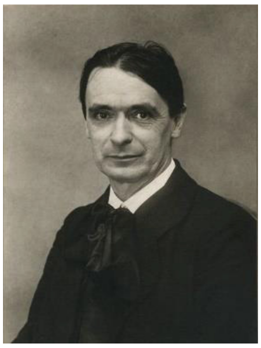
Já no Capítulo 6, com o apoio de Creswell (2014), analisamos os dados referentes aos currículos prescrito, apresentado, modelado e em ação. Em diálogo com os dados apresentados, aprofundamos a questão desta pesquisa com temas e autores do campo da Educação Matemática.

Por fim, no Capítulo 7, sumarizamos as principais conclusões acerca do fenômeno pesquisado até então. Refletimos sobre os principais aprendizados que esta pesquisa nos proporcionou e as possíveis contribuições do currículo matemático do EM Waldorf.

2. DA ANTROPOSOFIA À PEDAGOGIA WALDORF

Buscando identificarmos como aspectos do currículo de matemática do Ensino Médio de uma Escola Waldorf se manifestam na prática docente, devemos estudar a Pedagogia Waldorf em seus principais elementos históricos, culturais e filosóficos. Como referenciais teóricos, utilizamos os autores antroposóficos Lanz (1979) e Carlgren e Klingborg (2006), que apresentam a PW de modo geral em algumas de suas obras, e Burkhard (2006) para uma melhor compreensão da fase de desenvolvimento em que se encontram os alunos durante o EM. Além destes, acrescentamos as contribuições dos trabalhos de Bach (2013, 2019), Oliveira *et al* (2020), Oliveira (2021) e Rocha (2006) acerca dos fundamentos teóricos da PW no século XXI.

FIGURA 1- Rudolf Steiner.



FONTE: https://www.justrealmoms.com.br/o-que-voce-conhece-sobre-o-metodo-de-pedagogia-waldorf/rudolf-steiner/. Acessado em 01/04/2022.

Rudolf Steiner, fundador da PW, nasceu em 1861 e foi um filósofo, cientista e esotérico austríaco. Desde sua infância, Steiner já vivenciava fenômenos espirituais que eram pouco compreendidos por pessoas ao seu redor. Entretanto, estes episódios os guiaram em sua busca por estudos espiritualistas que sugeririam uma oposição ao materialismo que o mesmo denunciava na época pré-primeira guerra mundial. Ao trabalhar nas universidades europeias, Steiner trouxe à tona a utilização de metodologias qualitativas para os estudos científicos quantitativos, em um período em que na Alemanha dominavam a instabilidade e o medo de guerras, além dos questionamentos quanto à tecnologia que advinha do conhecimento científico que vinha sendo produzido.

Em sua juventude, o cientista estudou Goethe e Schiller, até que, em 1894 publicou sua principal obra, "A Filosofia da Liberdade". Nela, Steiner discutiu acerca da existência ou da ilusão sobre a liberdade humana e, se esta fosse possível, como poderia haver então um método para desenvolvê-la. Sendo assim, Steiner foi o primeiro a formular uma metodologia baseada no método científico de Goethe, que se fundamentou no estabelecimento da "relação sujeito e objeto de uma forma que não se encaixava nas duas correntes então vigentes: o empirismo e o racionalismo” (BACH, 2013, p. 141).

Já adulto, prosseguiu estudando, pesquisando, escrevendo obras e proferindo palestras. Como indica Carlgren e Klingborg (2006, p. 8), dentro do contexto acadêmico, Steiner buscava “encontrar novos métodos de pesquisa da alma baseados na ciência”. Enquanto isso, tornou-se reconhecido em Berlim por ter sido professor particular de um menino com hidrocefalia que era incapaz de aprender, e que

> Steiner, no entanto, por meio de medidas pedagógicas, na divisão rítmica do dia e com seu ensino concentrado, conseguiu obter uma melhora tão radical que, após dois anos, o menino pôde ser matriculado numa escola comum, numa classe de crianças da sua idade. Mais tarde concluiu seu curso com o exame Abitur e tornou-se médico. (CARLGREN; KLINGBORG, 2006, p.7).

Em 1913, com sua saída da Sociedade Teosófica de Helena Blavastky, Steiner impulsionou sua própria Sociedade Antroposófica. Como método de conhecimento da natureza do Ser Humano, do Universo e das relações entre estes, foi fundamentada a Ciência Espiritual, ou Antroposofia. Com sua filosofia, o cientista espiritual continuou a buscar compreender "o ser humano sob um aspecto mais amplo, embora seu raciocínio e seus métodos não deixem de ter o mesmo rigor científico" (LANZ, 1979, p. 13).

Empregando a metodologia científica baseada em Goethe e a partir de sua cosmovisão, que fora teorizada na Antroposofia, Rudolf Steiner contribui, ainda hoje, para diversas áreas do conhecimento humano, como na medicina antroposófica, na agricultura biodinâmica, na arquitetura, etc. Assim, diante das contribuições de Steiner ao buscar estender sua visão de mundo para além da ciência convencional através de uma visão diferente do ser humano e de seus conhecimentos, “diversos críticos avaliam que foi um demérito (intransponível) para Steiner ter se envolvido com o ocultismo, tornando-se o líder de uma comunidade que o considerava uma espécie de “guia espiritual” (OLIVEIRA *et al*, 2020, p. 600). Apesar disso, a ciência convencional ainda pode ter deixado de lado muitos conhecimentos devido a

> Sua não aceitação no meio acadêmico (que) parece não ser tanto uma consequência dos resultados de suas pesquisas (que nem sequer foram seriamente avaliadas), mas de como ele procedia suas investigações e do que mais ele fazia além de pesquisar. (OLIVEIRA *et al*, 2020, p. 600).

Portanto, Steiner se constituiu como “um pensador que valorizava a verificação empírica como critério para a construção do conhecimento científico” (OLIVEIRA *et al*, 2020,

p. 583), ainda que sua concepção acerca do empirismo seja diferenciada das concepções tradicionais. Além disso,

> Goethe e Steiner pertencem aos primeiros pensadores holísticos e ecológicos que anteviram as consequências negativas para a natureza, a sociedade e o indivíduo, de uma ciência que se desenvolvia através do poder e para o poder, focada no domínio, no controle e na manipulação das ideias e processos produtivos sem buscar uma efetiva compreensão em relação aos fenômenos da vida. (BACH, 2019, p. 19).

Por isso mesmo, como é no caso da agricultura biodinâmica, Oliveira *et al* (2020) discute a existência de autores que, apesar de considerarem as ideias de Steiner como pseudocientíficas, ainda reconhecem suas contribuições na área.

Sua contribuição para a educação já havia se iniciado em 1907 com a palestra "A Educação da Criança do Ponto de Vista da Ciência Espiritual", mas foi através da Primeira EW que a Pedagogia de mesmo nome foi sendo fundamentada. Em 1919, a pedido de Emil Molt, diretor da fábrica de cigarros Waldorf-Astoria, foi construída a primeira EW em Stuttgart, na Alemanha. A proposta era que a instituição serviria aos filhos dos operários da fábrica e, para isso, Steiner realizou um intenso preparamento dos professores em uma semana de formação, onde proferiu palestras pedagógicas. Nelas, "Ele deu uma série de conselhos preparatórios e, em parte, já entrou em detalhes quanto à distribuição das aulas e ao currículo da Escola que tinha em mente" (CARLGREN; KLINGBORG, 2006, p. 16). Posteriormente, estas palestras foram registradas em livros que se tornaram fundamentais para o movimento Waldorf.

Por isso, mesmo após a morte de Rudolf Steiner em 1925, a Pedagogia continuou a se dissipar pela Europa. Contudo, durante a Segunda Guerra Mundial, as EWs alemãs foram reprimidas e, portanto, fechadas, o que não impediu o movimento de se difundir pelo mundo afora e de, posteriormente, serem reabertas em 1945 em seu contexto de origem.

No Brasil, a primeira EW foi inaugurada em 1956 na cidade de São Paulo por um grupo de casais alemães que moravam na cidade, convidando o casal Karl e Ida Ulrich para serem professores do ensino básico e também da formação de professores Waldorf no nosso país. Desde então, foram inauguradas cerca de 250 escolas brasileiras inspiradas ou filiadas à PW[3], além da criação de 22 Cursos de Formação de Professores[4]. Em 1998, a Federação das Escolas Waldorf no Brasil (FEWB) foi fundada e atualmente é a responsável por apoiar,

---

[3] FEDERAÇÃO DAS ESCOLAS WALDORF NO BRASIL. **Planejamento Territorial de Escolas.** Disponível em http://www.fewb.org.br/territorios.html. Acessado em 18 abr. 2021.

[4] FEDERAÇÃO DAS ESCOLAS WALDORF NO BRASIL. **Formações em Pedagogia Waldorf no Brasil.** Disponível em http://www.fewb.org.br/formacoes_menu.html. Acessado em 30 mar. 2022.

orientar e representar as instituições a ela associadas[5]. Na última década, foi inaugurada a Faculdade Rudolf Steiner na capital paulista, que oferece cursos em nível superior com base na Antroposofia.

Já diante de tais contribuições para a pedagogia brasileira, assim como Oliveira *et al* (2020), Oliveira (2021, p. 20), ao pesquisar sobre o ensino de Geografia no EM Waldorf, encontrou certa "dificuldade de diálogo entre as discussões pedagógicas da academia e o que era produzido dentro da 'bolha Waldorf'", sendo comum que seus saberes se restrinjam à própria comunidade Waldorf. O mesmo autor considera que não somente é possível explorar a PW sem explorar seus elementos espiritualistas como também seu

> Sistema pedagógico é capaz de se sustentar e se legitimar de maneira independente a essas crenças. Ora, existem EWs em dezenas de países, nos mais diversos contextos sociais, culturais e religiosos. Há escolas dessa pedagogia em todos os continentes e até em território palestino. Além disso, existem muitos professores que lecionam há anos na PW e que não compartilham parcialmente ou totalmente das crenças antroposóficas, ainda que vejam um sentido na formação que ali é oferecida. Sendo assim, acredito que a supressão dos debates de ordem religiosa é uma maneira de ampliar o diálogo dos pressupostos teóricos e metodológicos dessa pedagogia para além de seus próprios muros. (OLIVEIRA, 2021, p. 23).

Sendo assim, considerando os autores discutidos, apresentamos, brevemente, os fundamentos da PW em sua origem antroposófica. A partir disso, buscaremos reinterpretar os elementos de cunho mais espiritualista a fim de que seja mais fluída a comunicação entre a PW e a comunidade acadêmica.

2.1. FUNDAMENTOS DA PEDAGOGIA WALDORF

Dentre muitos assuntos dos quais a Antroposofia se debruça, apresentamos a seguir seus principais conceitos que se fazem necessários para a compreensão da PW, das EWs e de como é seu desenvolvimento curricular.

Desde "*A Filosofia da Liberdade*" e ao longo de sua jornada acadêmica, Steiner buscou seu método para o desenvolvimento da liberdade humana, que estava apoiado em transformar o pensamento científico meramente racional em um pensamento mais holístico e que abrangesse também outras dimensões da natureza. Assim, foi através da Fenomenologia de Goethe que seus estudos posteriores se fundamentaram.

---

[5] FEDERAÇÃO DAS ESCOLAS WALDORF NO BRASIL. **Sobre a FEWB:** Missão. Disponível em http://www.fewb.org.br/sobre_desafios.html. Acessado em 30 mar. 2022.

Seu método consistiu em captar a essência de quaisquer fenômenos por meio de uma observação viva e contemplativa, sob um olhar sem pré-julgamentos ou concepções, a fim de possibilitar que sejamos afetados pelo fenômeno não somente a nível intelectual, mas também sensorial e artístico. De modo sucinto, o pesquisador inicia-se com as primeiras descrições do fenômeno que está sendo observado, de modo livre, seguido de um processo investigativo acerca de sua fluidez e possibilidades de se metamorfosear em outros fenômenos. A partir disso, são apontadas as primeiras relações entre as qualidades do objeto de estudo e as manifestações destes com as de outros fenômenos. Portanto, este processo considera que a natureza não é rígida e imutável, mas está em constante transformação também por estar conectada ao Ser Humano.

Contudo, a metodologia científica de Steiner não se reduziu a uma contemplação permeada pelas percepções sensoriais. Pelo contrário,

> Rudolf Steiner tenta recuperar em sua Filosofia da liberdade o conceito de individualidade, descrevendo um caminho para o 'individualismo ético'. O ponto central do individualismo ético é que o homem não consegue ser livre e ético sendo escravo de seus instintos ou submetendo-se às normas morais. O teor de ética no mundo se constitui das ações baseadas em liberdade. Liberdade é moralidade.
> Quando, porém, o homem é realmente livre? Ele é livre quando age a partir de impulsos realmente próprios, ou seja, quando uma ação é determinada só por ele, como instância autoconsciente. (MARCELO DA VEIGA, citado por OLIVEIRA *et al*, 2020, p. 588-589).

Sendo assim, a liberdade não significaria estar somente livre dos instintos, mas também das normas morais, com responsabilidade ética, que regem a cultura em que se encontra. Ela é desenvolvida também a partir de uma observação de seu próprio pensar, de sua própria consciência, exigindo e, ao mesmo tempo, promovendo no pesquisador o autoconhecimento, autoeducação e a autodisciplina. Portanto, através deste método se tornaria possível não somente observar o fenômeno de modo descritivo e quantitativo, mas também observar como interagimos com ele e as transformações que nos ocorrem ao nos relacionarmos com ele. Por isso, nos tornamos pesquisadores participativos, pois a Fenomenologia de Goethe atribui uma participação vivencial do pesquisador e, na educação de Steiner busca-se também, através da fenomenologia,

> Um processo de resgate da formação humana [Bildung] na medida em que estabelece uma continuidade. Não basta superar uma vez a dicotomia do eu em relação ao mundo, sendo importante transcender a cisão como tarefa perene da educação. (BACH, 2019, p. 17).

Portanto, a PW, considerada também como “Pedagogia para a Liberdade”, visa o desenvolvimento da liberdade humana através de uma reconexão com o mundo que permita também o autoconhecimento. Ela se pauta na fenomenologia de Goethe que

> É uma postura investigativa participativa, (que) exige sua execução, o aprimoramento disciplinado e auto transformativo do sujeito para ser compreendida. Entre as observações sensoriais, que revelam a multiplicidade do fenômeno natural, e a elaboração conceitual que desenvolve o poder das conexões (unidade), o sujeito fenomenológico realiza a intensificação da sua atividade cognitiva. (BACH, 2019, p. 24).

De fato, conceitualizando a liberdade para além dos ideais ocidentais “de democracia, ausência de autoritarismo e de obstruções, autonomia, autodeterminação (e) independência, liberdade de expressão e habilidade de satisfazer nossas necessidades” (ROCHA, 2006, p. 552), Steiner também se apoiou em conceitos orientais que atribuem a liberdade a fatores internos de cada indivíduo, como desapego aos medos e padrões limitantes e mecanizados de pensamento.

> Na concepção de Steiner, (...), liberdade também demanda o desenvolvimento de nossos sentidos e de nossa forma de sentir para que possamos perceber e apreciar as pequenas coisas do mundo à nossa volta; demanda autocontrole, disciplina e força de vontade para que possamos fazer o que precisa ser feito para atingirmos nossos objetivos; demanda equilíbrio emocional para que não nos deixemos levar por sentimentos rancorosos e ondas de pensamentos desregrados e negativos; demanda raciocínio lógico, conhecimentos, habilidades e competências para atingirmos as nossas metas; demanda um corpo e hábitos saudáveis; e finalmente, demanda também um certo grau de “capacidade intuitiva”. Intuição para ele é a capacidade de captarmos a essência de nossos pensamentos e de nossas experiências e de apreendermos a realidade de uma forma imediata, sem o uso de raciocínio. (ROCHA, 2006, p. 555).

Deste modo, em uma educação cujo objetivo é promover a liberdade, auxiliar o autoconhecimento se torna um elemento fundamental, pois, através dele, podemos “distinguir nossas necessidades e aspirações mais autênticas daquelas a nós impostas por outros” (ROCHA, 2006, p. 555). Neste processo de autoconhecimento, buscando um contato maior do aluno com seu interior,

> Para os educadores Waldorf, a concepção de liberdade demanda o desenvolvimento pleno de nosso ser, de nossas capacidades cognitivas, emocionais, físicas, espirituais e estéticas, o que implica necessariamente no desenvolvimento de autoconhecimento, autocontrole, equilíbrio emocional, raciocínio lógico, conhecimentos, habilidades, competências, intuição, disciplina e também força de vontade para que possamos escutar e obedecer a nós mesmos e não sermos instrumentos de outros e/ou da ideologia dominante. (ROCHA, 2006, p. 555).

Para compreendermos como isso é possibilitado na PW, Rudolf Steiner teorizou na Antroposofia que o ser humano é constituído de quatro corpos ou, de modo menos esotérico, o que chamaremos aqui de quatro dimensões. Intuitivamente, consideramos que todo o Universo é constituído de matéria na qual podemos aplicar as leis da física, química e matemática. Assim como nos reinos mineral, animal e vegetal, somos todos também constituídos de várias substâncias e elementos químicos. O corpo físico do Ser Humano é, portanto, sua dimensão material, visível e intuitivamente reconhecida.

Entretanto, algo difere os corpos constituídos apenas de matéria inorgânica, como os minerais e rochas, dos seres pertencentes aos demais reinos. As substâncias químicas fluem nos corpos físicos destes em ciclos biológicos de nascimento e morte, respiração e inspiração, reprodução, autocura, etc. Observamos uma força que dá vida aos reinos vegetal, animal e aos Seres Humanos. Tal conjunto de forças constitui um corpo que não é material, no qual Rudolf Steiner denominou corpo plasmador, mais conhecido como corpo vital ou corpo etérico, por segmentos filosóficos e espirituais antigos.

Mesmo o corpo vital não sendo perceptível aos nossos sentidos, podemos compreender que há processos biológicos que atuam sobre o corpo físico ao observarmos, por exemplo, o envelhecimento. Em uma criança, “sua vitalidade está no seu máximo: o corpo é mole, elástico, plasmável” (LANZ, 1979, p. 17), enquanto que, ao longo de sua vida, este se desvitaliza, enfraquece e então vão surgindo doenças.

Já o corpo astral é aquele que sustenta a vida anímica dos animais e Seres Humanos. Desde o reino animal, observa-se que “ele sente e reage; tem impulsos (procura de alimento, de parceiros sexuais, manifesta atitudes de atração (simpatia) e repulsa (antipatia), pode ‘aprender’, etc.” (LANZ, 1979, p. 18). Em nós, esta dimensão induz, inclusive, aos sentimentos mais elevados que possamos vivenciar.

Sua atuação sobre os corpos físico e vital pode ser constatada no espaço interno que se faz nos animais, ainda que estes não possuam consciência individual, e nos humanos. Através de seus movimentos corporais, eles se relacionam com o espaço.

Podemos questionar ainda se os Seres Humanos são também animais, apenas mais evoluídos, ou se há algo que os diferencia do reino anterior. Rudolf Steiner notou que somos seres individualizados, únicos e que possuímos uma autoconsciência. Lanz (1975, p. 21) aponta que esta noção de si próprio faz com que, em relação aos reinos anteriores, somente nós sejamos capazes de pensar, de elevar as experiências à abstração e de representar situações mentalmente. Consequências disto é sermos os únicos que possuem memória e também que conseguem dominar seus desejos, “pode(ndo) ter(mos) liberdade de agir, de escolher conscientemente entre vários atos possíveis” (LANZ, 1975, p. 21).

Portanto, o Ser Humano é então dotado de um “Eu” que lhe confere sua personalidade individual e que atua sobre os demais processos físicos, biológicos e psicológicos. É esta individualidade que age e que faz do Ser Humano um ser criador no mundo, capaz de transformar seu interno e seu externo.

A partir destas observações acerca da humanidade, compreendemos que Steiner buscou integrar os conhecimentos a respeito dos Seres Humanos com os conhecimentos acerca dos demais seres que convivem conosco. De modo mais holístico, Steiner contribuiu para a percepção de que somos seres que não podemos ser reduzidos às manifestações, cujo nível é somente fisicamente corporal, mas que também vivemos em ciclos biológicos, possuímos emoções e instintos e ainda assim cada um de nós somos uma individualidade com história própria. Deste modo, para uma compreensão mais integral de nós mesmos e de nossos semelhantes, faz-se necessário ir além do que é quantificável matemática e fisicamente, e considerarmos, assim, dimensões de ordem biológica, psicológica, etc.

A partir disso, Steiner admitiu que os seres humanos devem buscar o desenvolvimento de sua liberdade no trabalho de conscientização, a depender do livre arbítrio de cada um, de suas próprias atividades. Estas podem ser reduzidas a três, que são o pensar (incluindo o próprio raciocínio, a percepção sensorial e a memória), o sentir (que abrange as emoções e sensações), e o querer e/ou fazer (tanto a nível de trabalho físico quanto de ação no mundo de uma forma mais branda e abstrata). De um modo ou de outro, elas se refletem na constituição física e nos graus de consciência do Ser Humano.

Enquanto o pensar está concentrado na cabeça, ele se relaciona com o sistema neuro-sensorial e traz o indivíduo à vigília. Já nos membros, observamos sua capacidade de movimentação, ligado ao sistema rítmico-circulatório e pelo qual o ser humano age no mundo. Entre estes polos temos, então, o sentir, que media o pensar e o querer, assim como o tórax que conecta a cabeça aos membros.

Ao nos aprofundarmos na Antroposofia e na PW, torna-se interessante perceber que descobrir o mundo pelo intelecto é apenas uma das facetas possíveis. Assim, podemos ainda desvendá-lo por meio das experiências do sentir e também desenvolver nossas habilidades práticas quando agimos em nosso ambiente. Além disso, o excesso de estímulos intelectuais, sobretudo na primeira infância, traz consequências negativas para o adulto e, portanto, o currículo Waldorf considera um equilíbrio entre as atividades intelectuais, artísticas e motoras. A expressão artística, o trabalho com o movimento corporal e o ensino por meio de imagens seriam meios de vivenciar os conteúdos escolares e conhecimentos para além do intelectualismo predominante no ensino tradicional.

Os mesmos ideais de liberdade também são refletidos nas visões da Antroposofia sobre a política e a economia. Para Rudolf Steiner, a expressão “Igualdade, liberdade e fraternidade” é sobre igualdade a todos nas questões jurídicas, liberdade na expressão cultural por quaisquer grupos e fraternidade quanto à economia. Portanto, a PW se pauta na liberdade cultural e curricular das Escolas, assim como a fraternidade econômica e a igualdade entre todos os envolvidos nela.

Seu currículo e, consequentemente, suas práticas, consideram as fases de desenvolvimento psicológico dos Seres Humanos e as necessidades físicas, biológicas e emocionais de cada aluno, respeitando também cada um de seus limites. Deste modo, a educação tem a função de propiciar o desenvolvimento da liberdade dos indivíduos ao propor as atividades na faixa etária em que elas têm maior potencial de serem aprendidas e exploradas pelos alunos. Por exemplo, a alfabetização ocorre a partir dos sete anos quando, após a troca dos dentes de leite, a criança já pode canalizar suas intenções, antes voltadas ao brincar, para o então aprendizado escolar.

Apesar de haver experiências que são comuns à determinada faixa etária, ainda há aspectos biográficos individuais de cada um (BURKHARD, 2006). Assim, ao mesmo tempo em que a seleção e organização das atividades e conteúdos pela PW se baseia na Teoria dos Setênios, a individualidade dos alunos também é melhor compreendida pelos professores que buscam observar fenomenologicamente seus alunos para também adaptar as atividades das aulas à realidade psicológica da sua turma.

Steiner retoma o conceito de setênio, ou ciclo de 7 anos dos gregos. Para Burkhard (2006, p. 21), o provérbio chinês "O homem demora vinte anos para nascer, vinte anos para lutar e mais vinte anos para virar sábio" nos pode levar à reflexão de como, de fato, o ser humano leva aproximadamente vinte anos para se tornar responsável por si. Portanto, devido ao presente estudo se desenvolver perante à matemática do EM, explicito os primeiros vinte e um anos da vida humana, correspondente aos três primeiros setênios.

A partir do nascimento físico, ao longo dos primeiros sete anos de vida, a criança vai se tornando biologicamente independente da mãe ao explorar o mundo pelos sentidos físicos. Para que ela se desenvolva sadiamente, deve ser permitida sua vivência com a terra, com o brincar, o cair e, até mesmo, com as doenças saudáveis para que possa adquirir anticorpos.

A criança é conhecida por ser aberta a tudo que a rodeia, não havendo filtros e, portanto, sendo uma “esponja”. Logo, a personalidade dos adultos e, incluindo a do professor, a influencia diretamente, fazendo com que ela imite a todos (BURKHARD, 2006). O lema para os pequenos é de que "o mundo é bom".

Então, por volta dos 7 anos, há a sua troca de dentição. A partir deste momento, a criança pode utilizar melhor sua energia, que até então estava sendo canalizada para sua reconstrução corpórea, agora na escrita e na leitura.

No segundo setênio, entre os 7 e os 14 anos, inicia-se um processo de desenvolvimento dos seus ritmos e emoções internas. Neste setênio, há três fases em que a criança vai se desenvolvendo e se individualizando cada vez mais: uma de maior imitação, outra de maior religiosidade e a pré-puberdade. Predomina-se, nestes sete anos, o sistema rítmico, que é a sede do nosso sentir e, com isso, os conteúdos devem ser melhor instigados através das artes, da criatividade e da imaginação.

Na PW, o professor de classe torna-se a figura que Steiner chama de autoridade amada, apresentando assim o mundo aos seus alunos. Para esta faixa etária, “o mundo é belo” e seu pensar deve ser acordado de forma imaginativa, por meio de lendas, contos, imagens, etc. A troca com o professor deve ocorrer de maneira equilibrada, nem rígida demais, nem permissiva demais.

Ao fim deste setênio, inicia-se o despertar dos instintos e das paixões nos jovens. Logo as mudanças físicas e a maturação sexual se fazem presentes na vida do adolescente, no período que compreende entre os 14 e 21 anos. Correspondidos pelos órgãos metabólicos, eles se dirigem para o mundo e o corpo muda, se fortifica, pronto para atuar na vida.

Nesta fase, o jovem cai de seu paraíso bom e belo (BURKHARD, 2006, p. 70), e por conta disso, inicia-se mais intensamente sua busca pela verdade em si mesmo, nos seus próximos e pelo mundo afora. Seu corpo astral, já disponível, se individualiza cada vez mais e com ele surge uma visão ideal de Ser Humano, trazendo consigo suas paixões e inquietações. Agora, as ideias e projeções dos pais sob os filhos também são questionados, afinal, “Será que isto é verdade? Tudo isso é meu?”. Disto, há um movimento de dentro para fora que os impulsiona a fazerem críticas, ou melhor, a aprenderem a julgar e criticar aquilo que não se encaixa mais com quem eles vão se descobrindo ser, sentir ou querer.

Há também três fases, de acordo com Burkhard (2006): a dos 14 aos 16, em adaptação corporal, a dos 16 aos 18, fase de maior desejo de religar-se a algo, com a busca dos adolescentes pelos “ismos”, e a dos 18 aos 21, quando o jovem se volta mais para o desenvolvimento profissional.

Já nesta idade, portanto, são descobertas trapaças e que além da ciência material há também uma verdade espiritual, sendo a matemática a ciência mais espiritual (BURKHARD, 2006). Na escola, já não há a imitação, nem a autoridade, mas o professor se torna aquele que, ao demonstrar seus interesses mais genuínos, inspira o jovem a também buscar conhecer ou fazer algo próprio no mundo. Os conteúdos se tornam os meios pelos quais o professor demonstra seu amor pelo conhecimento, devendo além de apresentar conceitos abstratos, também entusiasmar os alunos a investigá-los pelo mundo, sabendo que sempre haverão de conviver com as dúvidas.

A individualidade de cada aluno também deve ser respeitada, ao passo de fazê-los se conscientizarem de suas responsabilidades. Diante de episódios emocionais intensos, cabem aos pais e educadores alimentarem no jovem a empatia pelo outro e o desejo de transformar o mundo, não deixando que suas dores, críticas e cinismo predominem sua visão de mundo enquanto caminham à vida adulta.

Nos anos finais escolares, deve-se ter um cuidado com o desabrochar profissional dos estudantes, para que eles realizem experiências diversas, visto que muitos ainda vão trocar de faculdade e emprego posteriormente. A escolha profissional deve vir do interior de cada um e nesta fase ainda deve haver equilíbrio com o lazer. No Brasil, há expectativas para esta idade e muitos pais querem ainda colher frutos imaturos e, do mesmo modo em relação à alfabetização, a PW preza por gerar menos ansiedade nos adolescentes desta idade do que comumente acontece nas escolas mais tradicionais.

O terceiro setênio se finda por volta dos 21 anos, quando o individualismo começa a se destacar e, assim, o aluno já se encontra estudando em algum curso universitário ou atuando no mundo através de suas primeiras experiências no mercado de trabalho.

2.2. AS ESCOLAS WALDORF

A partir da PW, as EWs são instituições cujos princípios e estrutura escolar nela se pautam. Apesar disso, Lanz (1979) afirma que há aspectos variantes de acordo com cada instituição e que estas devem possuir a liberdade quanto às suas metas da educação, seu método pedagógico e seu currículo.

Por se fundamentarem na Antroposofia, são estimuladas a exercerem sua liberdade cultural, uma igualdade democrática em suas questões jurídicas e a fraternidade social em sua vida econômica (CARLGREN; KLINGBORG, 2006). Logo, frente às necessidades econômicas e administrativas do Estado, a liberdade cultural e, consequentemente, o currículo das escolas estão prejudicados (CARLGREN; KLINGBORG, 2006). Entretanto, sua liberdade não significaria não ensinar as matérias exigidas por programas oficiais, mas que matérias adicionais possam ser incluídas de acordo com as orientações antroposóficas (LANZ, 1979). Em sua liberdade curricular, não se adota sistema apostilado e, assim, tornam-se importantes os cadernos confeccionados pelos próprios alunos que "resumem um período de aulas" (CARLGREN; KLINGBORG, 2006, p. 45). Estes cadernos são comumente chamados de "Materiais de Consulta".

As EWs são conhecidas por proporcionarem maior contato com a natureza pelos alunos. É comum seus nomes e logotipos remeterem ao natural, a seres religiosos ou, no caso brasileiro, aos indígenas. Portanto, sugere-se que seu ambiente físico proporcione a seus alunos o brincar com areia, barro, flores e folhas.

Estas instituições se iniciam na Educação Infantil e, ao longo dos anos e a pedido dos pais, se estendem até o EM. Contudo, este é um processo que exige dedicação de toda a comunidade escolar e, também por isso, as iniciativas se concentram na Educação Infantil e Fundamental I.

Sua gestão é pautada em uma autogestão na qual as decisões escolares são tomadas por grupos de professores. Declaradas sem fins lucrativos, a maioria ainda são instituições particulares que possuem sistemas de bolsas em três tipos de contribuições: solidárias, sociais e ideais. Por isso, também é comum encontrar nelas anúncios de bazares, rifas e produtos comercializados entre os pais da escola e a comunidade interna e externa para a arrecadação de fundos. Com isto, cria-se um vínculo entre a escola, os pais e a comunidade que opta pelo estilo da PW na educação de seus filhos.

Na Educação Infantil, há a presença das materneiras e das jardineiras e, o ideal, é que as crianças brinquem o máximo que puderem, sem estímulos intelectuais precoces. No Ensino Fundamental, o professor pedagogo se torna o professor de classe que acompanha a mesma turma durante cerca de 8 anos. Steiner propôs que nesta fase fossem aproveitadas as qualidades psicológicas dos alunos para que se criasse um vínculo profundo entre eles e seus educadores.

De acordo com a Teoria dos Setênios, se na Educação Infantil trabalha-se com as crianças do 1° setênio, no Ensino Fundamental seus alunos estão no 2° setênio. Consequentemente, a partir dos 14 anos, com o início do 3° setênio, inicia-se também o EM Waldorf e, no Brasil, este período escolar compreende o 9° ano do Ensino Fundamental e as 1ª, 2ª e 3ª séries do EM ou, em termos análogos, os 10º, 11° e 12° anos.

Passados os oito anos no Ensino Fundamental com um mesmo professor de classe, no EM a turma passa a ter um tutor que a acompanhará até o último ano escolar. Nas disciplinas do antigo professor de classe, surgem os professores especialistas que aprofundam os conteúdos. Entretanto, no Brasil, devido à dificuldade na contratação de especialistas ou até mesmo aos desafios que os professores de classe enfrentam com a abordagem dos conteúdos mais densos, é comum encontrar professores especialistas das disciplinas do EM auxiliando os de classe, seja em tutoriais, conversas e, inclusive, atribuindo aulas a partir do Ensino Fundamental II.

Na criação de um ritmo diário que contemple o pensar, o sentir e o querer, todos os dias, no primeiro período de aula, há a repetição do seguinte verso de Rudolf Steiner pelos professores e alunos.

Eu contemplo o mundo,
Onde o Sol reluz,
Onde as estrelas brilham
Onde as pedras jazem
Onde as plantas vivem
E vivendo crescem
Onde os bichos sentem
E sentindo vivem
Onde já o homem
Tendo em si a alma
Abrigou o espírito.
Ó divino espírito
Age dentro dela
Assim como atua
Sobre a luz do Sol.
Ele paira fora
Na amplidão do espaço
E nas profundezas da Alma também.
A Ti eu suplico
Ó divino espírito
Que bençãos e forças
Para o aprender
Para o trabalhar
Cresçam dentro em mim.
(RUDOLF STEINER)

Aliás, esta primeira aula dupla é planejada em blocos mensais, as chamadas Épocas, que são indicadas para que haja economia de ensino uma vez que

> O professor pode renunciar a todos os detalhes sem nexo, que serão logo esquecidos, e só oneram a memória. Em cada matéria existem fatos, conhecimentos, leis e relações essenciais; é isto que o aluno deve conhecer; melhor do que conhecer uma fórmula é saber deduzi-la. Pensar "matematicamente' ou "historicamente" vale mais do que o acúmulo de fórmulas. (LANZ, 1979, p. 92).

Além destas, há as Aulas de Curso, também disponíveis em blocos mensais, porém com menos frequência na semana, e as Aulas Avulsas, com horários semanais estabelecidos para todo o ano. Nelas, o professor deve “aproveitar o tempo disponível, apresentar as matérias de forma viva e atraente, para que se gravem facilmente na memória, e evitar o cansaço; é óbvio que deve dominar a matéria de forma perfeita" (LANZ, 1979, p. 92). Nas aulas, devem dividir o tempo disponível de modo a "atingir sucessivamente o intelecto, o sentir e o querer dos alunos" (LANZ, 1979, p. 93), de acordo com sua interação com os alunos e as características das salas. Em uma introdução rítmica ou poética, todos se preparam para a aula, nas recordações dos dias anteriores, o sentir é despertado e, nos exercícios e atividades, os pensar e fazer são postos em prática.

Para além das disciplinas comuns às demais escolas, as outras disciplinas do currículo Waldorf se constituem em "matérias artísticas, artesanais, educação física, música, línguas estrangeiras, etc." (LANZ, 1979, p. 92-93).

Há também eventos da tradição Waldorf correspondentes a cada ano escolar, incluindo viagens, apresentações de Teatro e Trabalhos de Conclusão de Curso (TCCs), Épocas com temas diferenciados, etc. No EM, o 9° ano organiza e apresenta as "Biografias". Nelas, cada aluno, orientado por tutores de sua escolha, se aprofunda na história de vida de um indivíduo a quem se inspira. Ainda no 9° ano, há o estágio agrícola em que a turma faz uma visita prática à uma fazenda por alguns dias.

O 10° ano já é reconhecido pela Viagem de Agrimensura em que, dentro do contexto de estudo matemático, realizam medições de um terreno durante uma semana. Já no 11° ano há a vivência artística e filosófica da lenda medieval de Parsifal, que proporciona aos jovens um momento de reflexão para o autoconhecimento.

Para finalizar, o 12° ano realiza um estágio social e é responsável pelas apresentações do teatro e dos TCCs individuais. Este último possui um tema a ser definido pelo aluno de acordo com seus interesses, sendo organizado ao longo do ano junto aos tutores.

Estas e demais experiências são adicionadas a todo o vocabulário e considerações acerca da Antroposofia. Afinal, os professores, em parte considerável, são também formados em Cursos de Formação da PW, com duração de cerca de 4 anos e, com isso, são aptos a lecionarem atividades que possam ter sido alheias à sua formação acadêmica. Por isso e pelas considerações até então apresentadas, Rocha (2006) também observa que o currículo Waldorf, ao mesmo tempo em que possibilita o desenvolvimento artístico dos alunos, também é bastante estruturado, já que os professores direcionam determinadas experiências a determinados anos escolares.

2.3. PESQUISAS BRASILEIRAS SOBRE A MATEMÁTICA NAS ESCOLAS WALDORF

Em maio de 2021, ao realizar buscas na Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD), no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES e no *Google* Acadêmico com o termo "Waldorf", identificamos o mapeamento de pesquisas brasileiras sobre a Pedagogia em questão, realizadas por Santos e Gomes (2021) em um artigo científico. Nela, os autores apresentam dados importantes sobre os temas mais pesquisados neste contexto educacional. Neste artigo, destaca-se que "desde o primeiro trabalho de mestrado registrado em plataforma digital datado de 1980 até o ano de 2020" (SANTOS; GOMES, 2021, p. 3) houve avanços deste tema no âmbito das pesquisas acadêmico-científicas no Brasil, o que demonstra como a PW vem se consolidando na área da educação. Esta condição também se relaciona com o aumento significativo da quantidade de EWs no país nos últimos anos.

Com os 114 trabalhos até então identificados, observaram que alguns temas foram mais recorrentes como: a formação docente, questões ambientais, aspectos artísticos, estéticos, filosóficos, dentre outros. No que diz respeito às disciplinas escolares, contam-se dissertações sobre o "Ensino de Matemática, Língua Portuguesa, Ciências Naturais, Geografia ou História, havendo predominância para a área da Matemática" (SANTOS; GOMES, 2021, p. 8).

Considerando esta predominância da minha área de formação e pesquisa, retornamos às mesmas bibliotecas digitais e buscamos pela "Matemática Waldorf". Com isso, foram constatadas 6 dissertações e 1 tese acerca da matemática produzida nestas Escolas. Destas produções acadêmicas, todas são recentes e datam da última década.

A primeira dissertação, advinda de um mestrado acadêmico, é sobre as "Vivências espaciais e saberes em uma escola Waldorf: um estudo etnomatemático" (SANTOS, 2010c). Sua observação e análise se deu sobre todo o Ensino Fundamental, relacionando os saberes matemáticos presentes em uma EW com suas vivências espaciais.

Já Neves (2015) apresenta "O papel da matemática no desenvolvimento do indivíduo na perspectiva da Pedagogia Waldorf". Neste trabalho, discute-se o papel matemático na formação estética e moral dos indivíduos sob a concepção de Rudolf Steiner. São apresentados os conteúdos comumente abordados na matemática de cada ano escolar Waldorf, além de apresentar a importância e o caminho percorrido pela Geometria dentro do currículo.

Em "A avaliação da aprendizagem em uma escola de Pedagogia Waldorf: singularidades e semelhanças", Matos (2017) reflete sobre o processo de avaliação no ensino de matemática do 5° ano do Ensino Fundamental.

No âmbito do mestrado profissional, encontra-se "O Ensino de Frações Inspirado na Pedagogia Waldorf", de Gonçalves (2015), em que foram planejadas e desenvolvidas um conjunto de aulas inspiradas nos preceitos da Pedagogia em uma escola pública tradicional.

Em “Educação financeira e o ensino de matemática em uma escola Waldorf: currículo, professores e estudantes”, Albino (2017) reflete sobre a matemática financeira que faz parte do currículo do 6° ano Waldorf.

Por fim, Lucisano (2018) dissertou sobre “Contexto Matemático Inserido na Vivência de Agrimensura”, que também marca o currículo Waldorf no 10° ano do EM. Esta dissertação apresenta aspectos específicos dos conteúdos que são planejados para o cálculo de uma área rural que é visitada por meio de uma viagem com duração de uma semana.

A única tese da área é sobre a “Formação de professores no contexto das propostas pedagógicas de Rudolf Steiner (Pedagogia Waldorf), Maria Montessori e da Experiência da Escola da Ponte” (SANTOS, 2015). Nela, a pesquisadora contribui, principalmente, para a reflexão acerca da formação dos professores de classe no que diz respeito à matemática, além de nos apresentar outros contextos de formação alternativa.

Como podemos observar em Santos (2010c) e Neves (2015), as autoras são importantes contribuintes para entendermos o desenvolvimento da disciplina da matemática ao longo dos Ensinos Fundamental e Médio da PW.

Santos (2010c) revela que nos 1°, 2° e 3° anos escolares há a introdução qualitativa e quantitativa dos números e das quatros operações básicas. Elas são exercitadas pelo movimento, pelo cálculo mental e, já no 3° ano, pelas contas armadas.

Nos 4°, 5° e 6° anos há a descoberta das frações e dos ângulos nos desenhos de formas. Aborda-se os sistemas métricos e decimais e outros tópicos comuns às demais escolas, como proporções e áreas de figuras geométricas, destacando-se a Época de economia, no 6° ano. Como intuitivamente esperado, Santos (2010c) também indica que ao longo destes anos diminui-se consideravelmente as atividades rítmicas. A partir disso, nos 7° e 8° anos, introduz-se as primeiras equações na álgebra e aprofunda-se os estudos das principais figuras geométricas, como o triângulo e suas relações.

Neves (2016), indica que o currículo Waldorf para o EM compreende álgebra, lugares geométricos e probabilidade no 9° ano, aplicação matemática das funções quadráticas e trigonométricas, além da geometria descritiva no 10° ano, logaritmo e geometrias analítica e não-euclidianas, como hiperbólica e projetiva no 11° ano e funções, séries e introdução ao cálculo no 12° ano. No desenho geométrico, há secções cônicas e hiperbólicas no 9º ano, geometria descritiva, sombras e trigonometria no 10° ano, geometrias não-euclidianas e relações com a astronomia no 11° ano e, por fim, relações sintéticas entre a geometria e a álgebra no 12° ano, destacando-se as revisões.

Na Geometria, há um notório enfoque em comparação à educação tradicional, que costuma desviar destes tópicos. Desde os anos iniciais, as formas são vivenciadas corporalmente e, com isso, segue-se com os Desenhos de Formas, inicialmente também explorados corporalmente no Ensino Fundamental I, seguidos dos desenhos com instrumentos geométricos (régua, compasso, etc.) e maior precisão geométrica no Ensino Fundamental II (SANTOS, 2010c), até que, já no EM, as Geometrias Euclidianas e Não-Euclidianas, de modo mais abstrato, são estudadas.

Estes trabalhos nos sinalizaram alguns aspectos já estudados e que constituem um valioso material de consulta para a formulação de objetivos, coleta de dados, análise e escrita da dissertação. Com isso, o que pode ser diferenciado entre as pesquisas anteriores e a que realizamos?

É importante notar, por meio dos dados de Santos e Gomes (2021), que ainda não havia nenhum estudo que reflita diretamente sobre o ensino de algumas disciplinas que compõem o currículo de seu EM, como filosofia, sociologia e física, o que evidencia a necessidade de incentivar mais pesquisas acerca destas temáticas. Portanto, uma das motivações para o fenômeno da presente pesquisa possui enfoque sobre este período escolar. Ao longo desta pesquisa, descobrimos que as particularidades do currículo Waldorf do EM e sua posterior realização prática foram tema de interesse de Oliveira (2021) na área da Geografia e de Garcia (2022) em História.

Para além das descrições do currículo realizadas por Santos (2010c) no Ensino Fundamental, por Neves (2015) ao longo de todos os anos escolares e das observações sobre a Avaliação por Matos (2017), meu trabalho busca analisar as relações entre a teoria proposta por Steiner, a utilização dos materiais didáticos que dialogam com a Pedagogia, os planejamentos dos docentes e, por fim, a prática escolar nos anos finais escolares através dos currículos definidos por Sacristán (1998). Se Neves (2015) e Oliveira (2021) escreveram suas pesquisas do ponto de vista de serem professores de matemática e geografia Waldorf, neste sentido, me aproximo de Santos (2010c) por meio da observação do cotidiano escolar.

3. SOBRE CURRÍCULO E CURRÍCULOS

> Quando se fala de currículo como seleção particular de cultura, vem em seguida à mente a imagem de uma relação de conteúdos intelectuais a serem aprendidos, pertencentes a diferentes âmbitos da ciência, das humanidades, das ciências sociais das artes, da tecnologia, etc. - esta é a primeira acepção mais elementar. Mas a função educadora e socializadora da escola não se esgota aí, embora se faça através dela e, por isso mesmo, nos níveis do ensino obrigatório, também o currículo estabelecido vai logicamente além das finalidades que se circunscrevem a esses âmbitos culturais, introduzindo nas orientações, nos objetivos, em seus conteúdos, nas atividades sugeridas, diretrizes e componentes que colaborem para definir um plano educativo que ajude na consecução de um projeto global de educação para os alunos. Os currículos, sobretudo nos níveis da educação obrigatória, pretendem refletir o esquema socializador, formativo e cultural que a instituição escolar tem. (SACRISTÁN, 1998, p. 18).

Com a pretensão de identificarmos como aspectos do currículo de matemática do Ensino Médio de uma Escola Waldorf se manifestam na prática docente, fundamentamos nossa coleta de dados via estudo curricular. Dessa maneira, apresentamos o conceito de currículo sob o referencial teórico de Sacristán (1998), com apoio de Aragão (2017), Côrtes (2015), Santos (2019) e demais teóricos da própria Pedagogia Waldorf.

Ao contrário do senso comum que considera o currículo como sinônimo de prescrições de conteúdo para determinados anos escolares, o trecho acima nos evidencia que o currículo abrange outras facetas do processo escolar de ensino e aprendizagem. Para além desta visão conteudista e parcial acerca dos currículos, este é um meio para a expressão de forças políticas, crenças, interesses e valores, assim como todas as pretensões educativas, de diversos agentes sobre a educação. Nele são referidas práticas que não são propriamente pedagógicas, mas também

> Ações que são de ordem política, administrativa, de supervisão, de produção de meios, de criação intelectual, de avaliação, etc., e que, enquanto são subsistemas em parte autônomos e em partes, interdependentes, geram forças diversas que incidem na ação pedagógica. Âmbitos que evoluem historicamente, de um sistema político social a outro, de um sistema educativo a outro diferente. Todos esses usos geram mecanismos de decisão, tradições, crenças, conceitualizações, etc. que, de uma forma mais ou menos coerente, vão penetrando nos usos pedagógicos e podem ser apreciados com maior clareza em momentos de mudança. (SACRISTÁN, 1998, p. 22).

Sendo assim, diante da teoria antroposófica da PW apresentada no capítulo anterior, podemos perceber concepções educacionais já aparentemente diferenciadas e que potencialmente refletem nos conteúdos, atividades e demais aspectos da disciplina de matemática de uma EW. Através da teoria steineriana, seu currículo expressa o objetivo de desenvolver a liberdade nos alunos por meio da educação não somente intelectual, mas também artística e motora através do desenvolvimento de determinados tipos de atividades, a fim de cumprirem tais objetivos. Deste modo, a partir de seu cumprimento por todos aqueles que compõem o sistema escolar, incluindo os professores e os próprios alunos, concretiza-se então a função escolar e os objetivos atribuídos à educação que nela é oferecida.

Além disso, o currículo expressa também a incidência da sociedade e de agentes exteriores às práticas escolares no ensino e na aprendizagem dos alunos. O currículo, como um projeto educativo não-neutro, serve a certos interesses sociais e políticos e, como indica Santos (2019, p. 3591), "é também um artefato social e cultural implicado em relações de poder que constroem visões e identidades sociais específicas e interessadas". Portanto, de certo modo, Steiner já estava ciente quanto a estas forças exteriores à escola, e indicava então que deveria haver liberdade cultural nestas instituições, conferindo maior autonomia e poder de seleção cultural aos docentes.

Em vista disso, ao sistema escolar são atribuídas funções que devem ser cumpridas perante os alunos e a sociedade e "devido ao surgimento da escolarização em massa" (SANTOS, 2019, p. 3593) surgiu inicialmente a necessidade administrativa de ordenação de seu próprio sistema e o planejamento e previsão de suas práticas educacionais. O currículo, portanto, é um campo de estudo que não surge de necessidades apenas pedagógicas, mas também com o propósito de resolver problemas administrativos escolares.

Logo, o currículo é definido

> Como o projeto seletivo de cultura, cultural, social, política e administrativamente condicionado, que preenche a atividade escolar e que se torna realidade dentro das condições da escola tal como se acha configurada. (SACRISTÁN, 1998, p. 34).

Sendo a escola uma instituição organizada, suas condições político-administrativas condicionam as aprendizagens e os processos correlatos. Contudo, o currículo também depende do formato em que este é adotado e das condições nas quais ele se desenvolve, ou seja, tal projeto não se esgota em uma prescrição governamental ou filosófica, como é a PW. Ele também se apresenta em seus processos de modelação e adaptação à realidade escolar, às suas práticas e, até mesmo em sua avaliação acerca dos objetivos cumpridos ou não. Logo, o currículo é uma práxis que nos proporciona compreender melhor a prática educativa escolar (SACRISTÁN, 1998).

A partir disso, há agentes exteriores à prática pedagógica que incidem sobre o currículo, tais como os produtores de materiais didáticos, profissionais do contexto escolar, e até mesmo os professores e alunos. Para Sacristán (1998, p. 22), o desenvolvimento curricular é também "um complexo processo social com múltiplas expressões, mas com uma determinada dinâmica, já que é algo que se constrói no tempo e dentro de certas condições" e, neste complexo sistema, cada um dos agentes possui interdependência entre si e cada um deles influencia em pontos diferentes no desenvolvimento curricular.

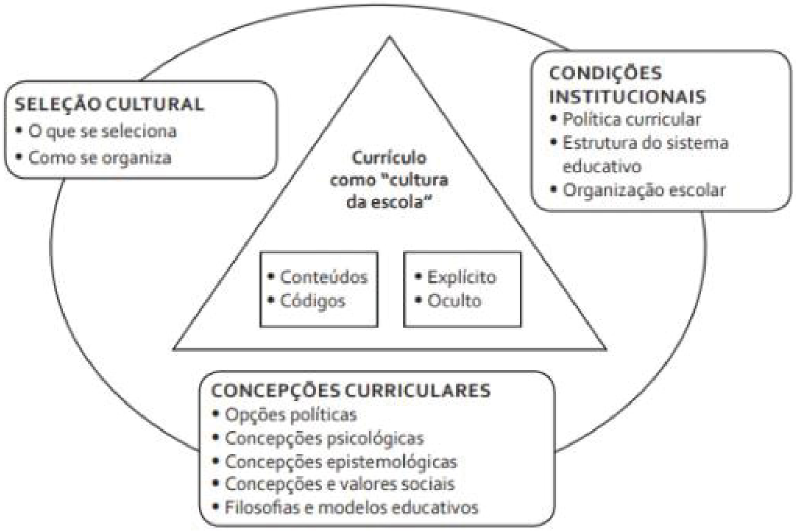
O currículo se desenvolve, se concretiza e adquire significados aos professores e alunos em sala de aula, sendo a prática um aspecto importante na concepção de Sacristán (1998). Portanto, analisar currículos não é somente analisar suas prescrições, mas também "estudá-los no contexto em que se configuram e através do qual se expressam em práticas educativas e em resultados" (SACRISTÁN, 1998, p. 16). Em nosso caso, estudar o currículo de matemática no EM Waldorf, em sua completude, significa considerar também como sua teoria é vivenciada no cotidiano escolar.

Devido ao currículo abranger diversos processos educativos, de fato, todas as ações no meio escolar se relacionam a ele. São poucos os acontecimentos escolares que não estão interligados ao currículo, incluindo os problemas da

> Organização do sistema escolar por níveis e modalidades, seu controle, a formação, a seleção e nomeação do professorado, a seletividade social através do sistema, a igualdade de oportunidades, a avaliação escolar, a renovação pedagógica do mesmo, os métodos pedagógicos, a profissionalização dos professores, etc. (SACRISTÁN, 1998, p. 28).

Diante da complexidade das situações escolares e da dinâmica curricular, os problemas relacionados ao currículo podem ser analisados em três grandes grupos, sendo eles a seleção dos conteúdos, as condições institucionais e a filosofia e a concepção curricular, conforme figura abaixo.

FIGURA 2- Esquema para uma teoria de currículo.



FONTE: SACRISTÁN (2020, p. 36)

Além destes, um quarto fator deve ser considerado, que é o da inovação curricular, uma vez que "por trás de cada concepção do currículo, existe uma forma implícita de entender o que é a mudança do mesmo na prática pedagógica" (HABERMAS, 1982 citado por SACRISTÁN, 1998, p. 36), ou seja, um ponto de inovação diferente. Enquanto há a possibilidade de pensar que a mera mudança de conteúdo é capaz de inovar a prática, pode-se ir além e considerar que a mudança na prática das aulas ainda precisa da inovação institucional, por exemplo.

Sendo assim, apesar do currículo ser comumente conhecido por ser uma seleção cultural de conteúdos intelectuais, esse ainda reflete

> Um projeto educativo globalizador, que agrupa diversas facetas da cultura, do desenvolvimento pessoal e social, das necessidades vitais dos indivíduos para seu desempenho em sociedade, aptidões e habilidades consideradas fundamentais, etc. (SACRISTÁN, 1998, p. 55).

Assim, apesar da necessidade de serem selecionados saberes e aspectos culturais, o currículo não se restringe à seleção de conteúdos meramente acadêmicos, mas àqueles considerados importantes na formação de indivíduos de uma sociedade.

Esta importância dada ao currículo se faz perante as complexidades das funções atribuídas à escolaridade obrigatória e as tendências de transferência das missões educativas de outras instituições à escola. Inclusive, estas pretensões podem ser contraditórias ao se pensar na necessidade de educação para o trabalho em paralelo ao surgimento de novas concepções de educação que preconizam uma educação global, envolvendo aspectos sociais, éticos, políticos, emocionais, etc.

Se o currículo expressa a função da escola, assim tem-se a ampliação deste sobre as atividades que ficam sob seu controle. Por isso que, com esse aumento de poder e prestígio que a escola adquiriu perante a sociedade, também aconteceu o aumento do interesse de agentes exteriores na regulação curricular e seus processos de desenvolvimento.

No currículo Waldorf podemos observar que esta ampliação dos conteúdos e atividades que a escola se torna responsável por desenvolver com os alunos é ainda mais profunda. Para além, por exemplo, da mera formação profissional dos jovens, notamos que a PW contempla ainda atividades artísticas, manuais, de movimentação corporal, etc., o que escapa da mera intelectualização. Além disso, ela incorpora novas concepções de avaliação contínua dos alunos e o desenvolvimento de habilidades, tais como saber trabalhar em grupo, por exemplo.

Em uma realidade em que é constante o aumento da quantidade de informações, se coloca em debate qual deveria ser a cultura mínima a ser transmitida à toda escolaridade básica. Estes conteúdos culturais devem ser um mapa representativo da cultura em que estes estão inseridos, de modo que, através do currículo, eles sejam estimulados a conhecerem, aprenderem e buscarem, por si mesmos, sua participação na sociedade.

Por outro lado, diante da pluralidade social, econômica e política, torna-se difícil introduzir diferentes alunos a um mesmo currículo, a exemplo dos documentos curriculares brasileiros. Além do inevitável conflito de interesses, alguns saberes culturais a serem transformados em conteúdos escolares estão na vivência extraescolar e são previamente conhecidos pelos alunos de determinadas classes sociais e sua cultura. Se para as classes mais abastadas, o currículo acadêmico e o prosseguimento em estudos mais avançados são uma extensão natural de seu contexto, observa-se nas classes populares a função da escola em oportunidade de formação profissionalizante e de redenção social, evidenciado principalmente nos últimos anos escolares. Sobretudo na PW brasileira, historicamente seu currículo foi sendo construído através de instituições Waldorf privadas, que viabilizaram tal educação às classes mais abastadas que viviam em grandes centros urbanos e de origem familiar europeia. Ainda em menor quantidade, atualmente "há diferentes experiências de tal Pedagogia implantadas em escolas públicas por todo o mundo, incluindo o Brasil" (MARTINS; CÂNDIDO, 2021, p.16), o que vislumbra um possível futuro mais inclusivo à PW e diversificado quanto ao currículo inicialmente proposto em contexto alemão. Entretanto, o currículo da PW, assim como qualquer outro, imprime uma determinada cultura, já conhecida de uma determinada classe social, favorecendo assim o fracasso das classes sociais que a desconhecem, o que culmina em um dos fatores dos quais se torna mais difícil o estabelecimento de um currículo que considere as diferenças culturais à medida que se avança nos níveis escolares (Sacristán, 1998).

Outro ideal acerca do currículo é sua interpretação como único e inquestionável. Por mais tradicional que um currículo seja, este ainda não é algo definitivo e estático, mas uma invenção social, um processo que ocorre em certas condições culturais e sociais e que se transforma ao longo da história. Sendo assim, o contexto de criação e a existência do próprio currículo Waldorf demonstra que há mais de uma possibilidade curricular a ser seguida pelas demais escolas. Ainda inserido neste contexto, Bach e Guerra (2019) compreendem que há educadores com uma posição acrítica quanto ao currículo Waldorf, pelo fato destes descreverem e justificarem conteúdos e metodologias sem a exploração da tensão entre seus ideais e a realidade histórico-cultural de cada escola, com seus respectivos professores e alunos. Assim, em uma postura mais crítica, seus educadores devem

> Saber interpretar e simultaneamente criar o currículo adequado (que) exige não só a internalização dos ideais da educação Waldorf, mas também a leitura do mundo em que se está vivendo. (BACH; GUERRA, 2019, p. 859).

De modo geral, o currículo se constitui a partir dos conteúdos que são mais valorizados que outros, como geralmente são os conteúdos intelectuais em relação às experiências corporais ou de expressão artística comumente associadas às disciplinas extracurriculares. Logo, o currículo da PW nos apresenta a possibilidade de se trabalhar e valorizar mais alguns dos conteúdos que tradicionalmente são desvalorizados ao longo da trajetória escolar, simplesmente por não serem requisitados pelos vestibulares, como as artes e trabalhos manuais. Aliás, na própria disciplina de matemática podemos notar a valorização de aspectos artísticos desta quando, por exemplo, são exploradas as construções geométricas ainda no Ensino Fundamental II.

Aos saberes considerados importantes ou mínimos a serem apreendidos pelos alunos, dá-se o nome de "conhecimento valioso" e, no geral, não somente a administração e os professores, mas também os alunos e próprios pais sabem os reconhecer. Os familiares, inclusive, ao matricularem seus filhos em determinada escola podem temer que o currículo escolar não proporcione melhores oportunidades em seus futuros. No caso do EM de uma EW, que traz diferentes valorizações quanto aos conteúdos, os vestibulares podem gerar um ponto de possível repulsa dos pais em relação à PW.

Estas concepções sobre quais são os conhecimentos e saberes culturais valiosos influenciam "na seleção de seus conteúdos, na avaliação dos livros didáticos, na formação dos professores e na prática do ensino em geral" (SACRISTÁN, 1998, p. 68). Assim, em uma inovação curricular que contemple uma educação mais integradora, são exigidas transformações profundas no professor e, diante da geração de um sentimento de impotência dos docentes frente à complexidade de seu trabalho, é preciso então mudar qualitativamente o sistema. Para os professores, pode haver uma necessidade de equilibrar o tradicional com o inovador e Sacristán (1998, p. 71) indica que este equilíbrio se faz em brechas e justaposições do ensino inovador, que podem ter ou não ter relação com o molde tradicional. No caso desta pesquisa, como citado anteriormente, os professores, além de sua formação inicial, passam por um processo de formação teórica e prática quanto aos preceitos da PW que possibilita a incorporação de atividades consideradas inovadoras neste contexto educacional em suas experiências de vida.

Infelizmente, a escola tradicional oculta os acertos e erros cometidos ao longo da evolução daquele campo de saber científico, e é comum a predominância da memorização dos conteúdos ou a concepção dos alunos sobre o conhecimento transmitido ser estático, finalizado e, até mesmo, impossível de ser contestado. Assim, outro desafio que Steiner apresenta para ser discutido com a PW é colocação dos conteúdos curriculares de uma forma viva, dinâmica e que vai além de sua mera intelectualização, considerando também as transformações dos saberes ao longo da história humana.

Atualmente, as informações adquiridas com o ensino informal também são um desafio ao ensino tradicional e se faz um desafio à escola, em seu currículo ordenado e frente a um mundo em constante mudança, "se conectar melhor com a cultura exterior, cada vez mais ampla, mais complexa, mais diversificada e mais atrativa" (SACRISTÁN, 1998, p. 75) e, ao mesmo tempo, orientar os alunos sobre estas informações tão variadas. Logo, não basta apenas um discurso anti-conteudista, focado nas necessidades dos alunos, como denuncia a PW, mas também que considere os aspectos culturais externos à escola. Sobretudo

> No Ensino Médio, a cada geração há uma adolescência que, no seu afã de conquistar sua autonomia adulta, já possui uma articulação com o mundo independente da família e da escola, e, por apresentar questionamentos e necessidades condizentes com sua condição temporal, coloca o desafio aos educadores de uma atualização dos propósitos educativos. Por esse motivo, há escolas Waldorf desenvolvendo métodos específicos para o Ensino Médio (RICHTER, 2002a). Além disso, há também pesquisas pioneiras a respeito da inserção do ensino de computação e tecnologias no currículo (WHITTEL, 2003). (BACH; GUERRA, 2019, p. 871).

Disto, é necessário observar que "o currículo está presente nos lugares, nos espaços, mas é preciso que sejam enxergados e aproveitados como elementos necessários na vida das pessoas no contexto escolar ou não." (ARAGÃO, 2017, p. 37). Assim, os educadores devem se abrir ao caráter orgânico da PW, investigando a realidade em que atuam de modo a trazer um ensino vivo.

Os conteúdos escolares estão organizados em um formato curricular, no qual as ideias advindas da teoria são comunicadas sob certos critérios e princípios de seleção, de organização e de transmissão aos demais agentes curriculares, a fim de alcançar determinados objetivos. No caso da PW, o desenvolvimento da liberdade de seus alunos.

A estes e demais princípios educacionais que se projetam na elaboração do currículo, Sacristán (1998) denominou códigos metodológicos. Para o autor, eles são originários de posições políticas e sociais, de concepções epistemológicas, de princípios psicológicos e pedagógicos, de princípios organizativos, entre outros, que se projetam no ambiente escolar de modo geral. Eles também sedimentam uma naturalidade de determinado currículo como a única possibilidade de disposição cultural, definindo o que é estranho à escola e o que não o é. Portanto, uma reforma escolar como a PW e que introduza novos saberes que não são valorizados pode ser um desafio aos pais, alunos e professores, pois exige também uma quebra de paradigmas e uma mudança nas concepções acerca da educação e do próprio sistema escolar.

Na Educação Infantil Waldorf, por exemplo, assim como no ensino tradicional, nota-se um código mais integrado e que transcende às disciplinas de conhecimento específicas, enquanto que, nos níveis mais avançados, os especialistas das áreas normalmente são reconhecidos por sua especialização em uma determinada disciplina separada de outras. Na própria PW notamos que é creditado ao professor de classe a responsabilidade por sua turma ao longo de todo o Ensino Fundamental, enquanto o professor especialista do EM é responsável por sua disciplina. Esta divisão influencia, portanto, na própria organização escolar, em que professores específicos em classes específicas ministram aulas em um determinado local e tempo.

A esta organização escolar em disciplinas isoladas Sacristán (1998) indica a exigência de uma formação mais ampla do professor. Como alternativa a esta dificuldade dos professores em compartilhar suas experiências, Sacristán (1998) acredita que se faz ideal uma profissionalização compartilhada e a colaboração entre agentes do mesmo nível, o que, de certo modo, a autogestão de uma EW poderia contribuir para a integralização entre seus docentes.

A forma como o conteúdo é organizado e disposto em disciplinas favorece a ordenação do currículo, mas por outro lado os alunos também são prejudicados por não obterem uma visão mais integrada e orgânica do mundo. Do mesmo modo, ao restringirem a conexão de saberes e a sua pluralidade, definem o que será considerado sucesso ou fracasso escolar devido à complexidade que se torna não somente o ensino e aprendizado, mas também a avaliação.

A especialização também dificulta a interação de conhecimentos e a coerência de um projeto curricular mais integrado, que vai lentamente se desfazendo ao longo da trajetória escolar. Isto, inclusive, pode ser um dos motivos de desinteresse dos alunos nos anos finais escolares, ao se depararem com desconexões entre as diversas disciplinas específicas.

Os ciclos da educação básica e, mais especificamente, os níveis anuais de ensino são mais um reflexo da organização do sistema escolar e que proporcionam também um modo de planejar o ensino em unidades, das quais em determinado tempo se pode cumprir os objetivos mínimos estabelecidos. Assim, são atribuídas parcelas de habilidades e objetivos em ciclos temporais específicos de acordo com a proposta de desenvolvimento cognitivo, social, psicológico, etc. dos alunos no ambiente escolar. Consequentemente, estas dimensões de tempo influenciam a confecção dos materiais didáticos, o planejamento dos professores nas escolhas metodológicas, o calendário avaliativo, etc. Disto, o próprio EM em uma EW já possui uma estrutura diferenciada, uma vez que este contempla o 9° do Ensino Fundamental e o próprio EM, além das especificidades nas atividades propostas a este ciclo escolar em relação aos ciclos anteriores. Por isso, devido às considerações psicológicas dos alunos em cada ano biográfico no seu currículo, se evidencia ainda mais a importância dos ciclos anuais escolares em uma EW. Contudo, estas considerações mais minuciosas no currículo Waldorf também abrem margens para um suposto "conteúdo certo para a idade e o ano escolar certo" e que deve ser estudado com maior profundidade e questionado pelos professores (BACH; GUERRA, 2019).

Com a estruturação em ciclos a relação professor-aluno também pode ser impactada, uma vez que "professores de curso anual frente a professores de ciclo têm menos oportunidades de se confrontarem com períodos evolutivos e educativos mais amplos para notar amplas transformações" (SACRISTÁN, 1998, p. 84). Por isso, Sacristán (1998) sugere que a figura de um tutor de um grupo de alunos possa reconciliar tais funções em uma unidade educativa, como é realizado no EM das EWs.

A partir também das determinações exteriores e anteriores é que o ambiente de aprendizagem, em que se encontra a socialização escolar, também se molda e, assim, possibilita determinadas aprendizagens. Neste sentido, a qualidade da educação não se refere somente à atividade do professor, em seu conteúdo e metodologia, mas também ao sistema escolar e suas possibilidades de aprendizado. A estes elementos que compõem o ambiente escolar é o que se denomina currículo oculto.

O ambiente psicossocial da escola e as relações entre os alunos, professores e o espaço e tempo na escola são influenciados pela organização curricular e estes também influenciam diretamente o ensino e aprendizagem dos alunos, ou seja, o desenvolvimento do currículo. Uma aula a ser organizada em sala de aula possui um ambiente de aprendizado diferente de uma aula em um laboratório, por exemplo.

Acerca das dimensões do ambiente escolar, Schubert (1998), citado por Sacristán (1998), destaca que há as dimensões física, material, interpessoal, institucional e psicossocial. Além disso, Sacristán (1998, p. 93) acrescenta o fator psicológico que a avaliação exerce sobre os professores e alunos, também sendo "elemento-chave da configuração de um clima escolar".

Entretanto, "muitos outros objetivos propostos nos currículos necessitam de certas condições ambientais prévias para a sua realização" (SACRISTÁN, 1998, p. 91). Um currículo pautado em uma educação cada vez mais globalizada, cada vez mais indica aprendizagens que dependem das condições em que são desenvolvidas. Em uma escola que é receptiva às atividades artísticas, como são as EWs, são abertas margens aos professores de matemática planejarem suas aulas com elementos alternativos. Disto, os alunos também podem aprender que é possível relacionar a disciplina com as demais expressões visuais, musicais, etc.

Entretanto, novas exigências profissionais são feitas ao professor que enfrenta "aspectos diversos para além da relação com o saber e o conhecimento" (SACRISTÁN, 1998, p. 95), como sociais, emocionais, etc. Com estas novas habilidades, o professor necessita buscar uma nova formação, que abranja estas dimensões sociais e culturais, para que ele não apenas reproduza os conteúdos por ele estudados e indicados em livros, mas para que também entenda as relações de seu conhecimento com o processo global da educação de modo a participar mais ativamente. Do mesmo modo, o ambiente se torna mais complexo e menos previsível, exigindo-se mais do professor a ser um professor ideal, mas que se encontra desvalorizado econômica, social, intelectualmente, etc. em suas reais condições de trabalho.

Considerando esta complexidade, nota-se a gradual relegação da função do professor como agente ativo no planejamento curricular. Diante de agentes externos às escolas, suas orientações influenciam suas concepções sobre seu próprio papel no sistema, que costuma se divergir da função de elaborador do currículo, e passa então a ser atribuído aos livros didáticos.

O professor também se encontra em meio às contradições entre as pressões sociais e institucionais e aos interesses dos alunos e suas necessidades. Em uma EW, além da teoria antroposófica a ser considerada, pode haver pressões governamentais e a necessidade de se considerar a BNCC, além das expectativas dos pais quanto a esta escola considerada alternativa. Portanto, se os alunos também aprendem e incorporam mentalidades, concepções e tradições nas condições em que o currículo se concretiza, assim, a inovação pedagógica não necessita apenas da transformação do conteúdo, mas também das condições e das interações pedagógicas em que eles se desenvolvem.

Por fim, ao questionar a melhoria da qualidade educacional e buscar sua inovação, deve-se também compreender o currículo em sua configuração e desenvolvimento, que transborda o âmbito da sala de aula. Afinal, pode-se compreender que problemáticas educacionais como, por exemplo, o fracasso escolar e a reprovação, estejam interdependentes do currículo, seus conteúdos mínimos exigidos e os métodos selecionados. Já o tempo cedido para o tratamento de determinada quantidade de temas, assim como a atuação profissional dos professores, também é capaz de serem ditados pelo currículo.

Além da seleção dos conteúdos, as concepções curriculares ou "as formas de conceber o currículo têm uma importância determinante na concepção própria do que se entende por tal e nas formas de organizá-lo" (SACRISTÁN, 1998, p. 35). Disto, "a melhora e a mudança da prática (também) têm diferentes versões" (SACRISTÁN, 1998, p. 36) e a PW seria apenas uma delas, com uma concepção e dinâmica de inovação curricular específicas.

Entretanto,

> A especificidade do nível educativo do qual se trate empresta um caráter peculiar a essas três dimensões básicas, que podem ser destacadas na prática do desenvolvimento dos currículos. Na discussão sobre o currículo da educação obrigatória são ressaltados predominantemente os problemas relativos à sua correspondência com as necessidades do aluno como membro de uma sociedade, dado que se trata de uma formação geral. No ensino profissionalizante, se mistura a aspiração a uma correta profissionalização com o discurso sobre a formação geral do aluno. No currículo do ensino secundário, costuma-se ressaltar o valor propedêutico para o ensino superior, tornando-se evidente as determinações do conhecimento especializado. No ensino universitário, se destaca a adequação dos currículos ao progresso da ciência, de diversos âmbitos do conhecimento e da cultura, e à exigência do mundo profissional. Em cada caso, a delimitação do problema está sujeita às necessidades que tem de cumprir, mesmo que não seja estranho que se misturem lógicas diferentes, quando nos ocupamos de um determinado nível escolar. (SACRISTÁN, 1998, p. 36-37).

Portanto, estas concepções "afetam de forma desigual os diferentes níveis do sistema educativo, expressam tradições e, às vezes, se entrecruzam na discussão de um mesmo problema" (SACRISTÁN, 1998, p. 39). De fato, as problemáticas referentes ao EM não seriam as mesmas que as da Educação Infantil, por exemplo.

Considerando que os discursos históricos sobre como entender e como abordar o currículo são influenciados pela historicidade, Sacristán (1998) esboça quatro grandes orientações básicas que configuraram modelos teóricos e práticas curriculares ao longo da história das teorias curriculares.

A primeira, é **“O currículo como soma de exigências acadêmicas”**, em que se valoriza os aspectos formais das disciplinas e possui uma força maior no ensino secundário. Este currículo é centrado nas disciplinas escolares e seus respectivos conteúdos, assim como suas regulações sobre estes. Há enfoque nos saberes “valiosos” e na cultura elaborada academicamente.

O segundo é **“O currículo como Base de experiências”**, pautado nas necessidades psicológicas, humanistas e sociais e que se firma mais na educação infantil. A exemplo do movimento da “Escola Nova”, há uma reação contra o academicismo e, para além do conteúdo, passa-se a considerar os aspectos metodológicos e seus processos educativos. Nesta visão curricular, observa-se o contexto escolar influenciando as experiências planejadas e não planejadas dos alunos, que é o que se entende por currículo oculto.

O terceiro é **“O Currículo tecnológico e eficientista”** e se pauta no currículo como um objeto gestionável em uma burocracia que estabelece "princípios de eficácia, controle, previsão, racionalidade e economia" (SACIRSTÁN, 1998, p. 45). Por meios administrativos, o ensino dos conteúdos acadêmicos busca "qualificar a população para introduzi-la nos diferentes níveis e modalidades da vida produtiva" (SACRISTÁN, 1998, p. 44). Assim, o gestor se encarrega de planejar e racionalizar o currículo para então professores e alunos executarem, do modo mais fiel possível, os objetivos que para eles foram propostos. Estes produtos educacionais são avaliados e regulados, da mesma forma, pelo controle administrativo.

Por fim, tem-se o **“Currículo como configurador da prática”** em perspectiva dialética teoria-prática, que se desenvolve em um contexto democrático e sugere maior autonomia tanto para a administração quanto para os docentes. A preocupação pela prática curricular e a tomada de consciência do professorado sobre o currículo como objeto social, cultural, histórico e capaz de emancipar os estudantes socialmente são fatores que impulsionam este modelo. Deste modo, o currículo não deve ser um simples guia para a prática, mas promover a discussão, de modo crítico, dos problemas reais que ocorrem nas escolas ao passo que estimula os professores à reflexão sobre suas ações e os alunos a participarem do desenvolvimento de seus próprios saberes.

Estas orientações curriculares influenciam, em maior ou menor grau, as concepções atuais de currículo. A sua renovação, portanto, se relaciona com a concepção curricular ou a filosofia curricular e, disto, observamos que a PW busca inovar sob influências diretas da concepção de **Currículo como Base de Experiências**, uma vez que

> Para Steiner, entretanto, a obtenção de liberdade só é possível na medida em que cuidadosamente estruturamos e dirigimos as experiências das crianças para que as mesmas, quando se tornarem mais velhas e experientes, se sintam de fato bem preparadas para serem livres no sentido pleno da palavra. (ROCHA, 2006, p. 554).

Baseando, principalmente, na necessidade psicológica da criança sobre "não o que ele consegue aprender, mas o que ela precisa aprender em determinada idade" (BACH; GUERRA, 2018, p. 859), as atividades escolares são estruturadas de modo a oferecem "uma multiplicidade de vivências diretas do mundo, (que) passa para um estágio em que o interesse é despertado por imagens e (que) culmina no domínio conceitual do mundo" (BACH; GUERRA, 2018, p. 862).

Ainda assim, no contexto desta pesquisa, se torna interessante considerar que a melhora na prática tem diferentes versões também a depender do contexto em que estamos inseridos e do nível escolar a ser pesquisado. Logo, no capítulo seguinte, apresentamos mais especificidades do EM Waldorf na escola pesquisada.

4. METODOLOGIA

Neste capítulo, explicitamos a escolha metodológica para a coleta e análise dos dados de modo a identificarmos como aspectos do currículo de matemática do Ensino Médio de uma Escola Waldorf se manifestam na prática docente. Como estivemos empenhados em encontrar relações mais explícitas entre a teoria que fundamenta esta pedagogia e as práticas desenvolvidas em seu cotidiano escolar, nossa escolha metodológica para esta pesquisa se pauta na pesquisa qualitativa de André (1995) e Lüdke e André (2015). Assim, também indicamos os caminhos percorridos para a coleta de dados durante seu decorrer.

Recorrendo ao senso comum, a princípio a pesquisa pode ser interpretada como um trabalho em que, simplesmente, se realiza uma busca de informações a respeito de algo. Contudo, a nível acadêmico,

> Para se realizar uma pesquisa é preciso promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre determinado assunto e o conhecimento teórico estudado a respeito dele (LÜDKE; ANDRÉ, 2015, p. 1-2).

Em particular, se tratando de uma atividade que estuda fenômenos sociais, a pesquisa em educação ainda se encontra demasiada submetida às metodologias quantitativas, nas quais se busca isolar o objeto de estudo a fim de uma suposta veracidade científica que é imutável e a parte do contexto histórico-cultural. Contudo, esta abordagem se encontra limitada, "pois em educação as coisas acontecem de maneira tão inextricável que fica difícil isolar as variáveis envolvidas" (LÜDKE; ANDRÉ, 2015, p. 4) e, com isso, estaríamos submetendo os complexos fenômenos educacionais às análises e interpretações um tanto simplistas.

Deste modo, Lüdke e André (2015), ao referenciarem Bodgan e Biklen (1982), apontam algumas características básicas da pesquisa qualitativa. Dentre elas, o pesquisador se torna o principal instrumento na coleta de dados cuja fonte é o ambiente natural em que o fenômeno ocorre, os dados coletados são predominantemente descritivos, as manifestações das atividades se tornam mais importantes do que seus resultados finais e o foco do pesquisador deve ser os significados atribuídos pelos participantes da pesquisa, buscando captar as perspectivas destes. Além disso,

> O desenvolvimento do estudo se assemelha-se a um funil: no início há questões ou focos de interesse mais amplos, que no final se tornam mais diretos e específicos. O pesquisador vai precisando melhor esses focos à medida que o estudo se desenvolve. (LÜDKE; ANDRÉ, 2015, p. 14).

Com isso em vista, a respeito das técnicas utilizadas na coleta dos dados qualitativos,

> São utilizadas mais frequentemente neste novo tipo de estudo a observação participante, que cola o pesquisador à realidade estudada; a entrevista, que permite maior aprofundamento das informações obtidas; e a análise documental, que complementa os dados obtidos através da observação e da entrevista e que aponta novos aspectos da realidade pesquisada. (LÜDKE; ANDRÉ, 2015, p.10).

André (1995) salienta qualidades que o pesquisador deve ter caso considere realizar observações ou, até mesmo, imersões em campo durante a coleta de dados. Dentre as citadas pela autora, destacamos a percepção, a comunicação (das mais variadas formas), a empatia e a maturidade em saber lidar tanto com as imprevisibilidades quanto com a quantidade de informações coletadas ao longo dos meses ou anos em que estiver sendo realizada a Pesquisa de Campo. Outro ponto importante é o autoconhecimento do pesquisador acerca de seus ideais e preferências para que o distanciamento ocorra. Portanto, pensando em tal necessidade pessoal perante a pesquisa e para maior aprofundamento na coleta de dados e clareza na análise destes, considerei o Método da Triangulação em que

> O pesquisador busca uma diversidade de sujeitos (pais, alunos, professores, técnicos e, em cada um desses grupos, posições diferenciadas), uma variedade de fontes (entrevistas, observações, depoimentos escritos, orais, documentais) e diferentes perspectivas de interpretação dos dados (psicológica, pedagógica, sociológica, antropológica, linguística, política, filosófica, histórica). (ANDRÉ, 1995, p.48).

Além disso, por meio da Triangulação, é possível a obtenção de dados variados visando apreensão das diferentes dimensões que permeiam o ambiente escolar. Para André (1995), tais dimensões se constituem em

i) institucional ou organizacional, referente ao contexto da instituição e suas práticas;
ii) instrucional ou pedagógica, referente à organização das atividades em sala de aula;
iii) sociopolítica e cultural, referente ao contexto histórico e político da sociedade em que a escola está inserida.

Neste sentido, a Triangulação, ao versar sobre os dados de "diferentes informantes, em situações variadas e em momentos diferentes” (LÜDKE; ANDRÉ, 2015, p. 61), possibilita ao pesquisador um compreendimento mais completo e um retrato mais sistemático do fenômeno.

Por tudo isso, consideramos que esta pesquisa qualitativa foi dividida em duas partes, as observações e a documental, a fim de obter os dados necessários para a compreensão do fenômeno. Através delas, poderia estudar mais profundamente sua filosofia educacional sob as questões escolares, observações e vivências no próprio ambiente escolar.

Assim, os dados foram constituídos na Pesquisa de Campo entre os meses de junho e dezembro de 2021. Nesta imersão em uma EW que possuía o EM, durante cerca de cinco meses escolares, procuramos

i) conhecer o ambiente virtual da Escola e o físico;
ii) observar as aulas de matemática do 9° ano e das 1ª, 2ª e 3ª série do Ensino Básico;
iii) observar eventos escolares.

É importante citar que, a princípio, foram consideradas também a realização de entrevista semi-estruturada com os professores participantes e a observação de reuniões administrativo-pedagógicas. Entretanto, em meados de julho de 2021, conforme a Pesquisa de Campo se consolidava e, ao mesmo tempo, estavam sendo mais bem definidos os referenciais teóricos, notamos que havia dados documentais interessantes a serem analisados. Assim, definimos, para além das observações das aulas, uma parte mais documental para a pesquisa, de modo que, além dos itens anteriores, deveríamos

iv) analisar o Plano Escolar;
v) analisar os materiais utilizados pela professora, como livros, listas e demais sugestões.

Portanto, diante dos itens estabelecidos, este projeto foi aprovado pelo Comitê de Ética do Setor de Ciências da Saúde da UFPR sob o número CAAE 50415921.9.0000.0102[6]. Devido à situação da pandemia do coronavírus ao longo deste período, foram prezados os acordos com as medidas sanitárias tomadas pela Instituição Coparticipante, sendo considerado o ajuste da pesquisa ao ensino remoto ou híbrido da Escola.

Na Pesquisa de Campo, o Diário de Campo foi utilizado como instrumento de confecção dos dados e constitui de anotações descritivas e pessoais sobre as aulas e eventos observados. Em junho, ainda no primeiro mês de fase de exploração, foram registradas

[6] O Termo de Concordância de participação consta no APÊNDICE 1. Já Termo de consentimento livre e esclarecido se encontra no APÊNDICE 2 e o Termo de solicitação de uso de imagem e som de voz para a pesquisa é constado no APÊNDICE 3.

anotações em forma de esquemas, rascunhos, sem muita sistematização. Estes primeiros dados eram diversos e, portanto, extensos, ainda sem muito foco sob o objeto central de estudo. A partir de agosto, adentrando a fase de sistematização da pesquisa, semanalmente os registros primários eram selecionados e reescritos em texto para maior clareza e objetividade.

Pela câmera do celular pessoal e sob o consentimento dos professores e da administração escolar, foram capturadas imagens dos materiais utilizados como cadernos, livros didáticos e anotações. Em alguns momentos, obtivemos acesso às Postagens do *Google Classroom* e às listas pelo *Whatsapp* pessoal da docente participante, além de conversas informais e participação em algumas tutorias realizadas pela professora para outros professores Waldorf acerca dos anos escolares do Ensino Fundamental II e Médio.

Demais documentos disponíveis pela escola, como o Plano Escolar, e livros teóricos e didáticos da PW também foram considerados, sejam estes indicados pelos próprios participantes ou ainda alguns que extrapolam a própria Pesquisa de Campo. Idem para as pesquisas acadêmicas encontradas e fontes indiretas de coleta de dados, tais como eventos externos que também foram vivenciados e se encontraram como espaços de formação pessoal que trouxeram materiais complementares à Pesquisa de Campo. Tanto nos eventos promovidos pelo próprio PPGECM/UFPR quanto no meio Waldorf, em cursos de formação e palestras, além da disciplina "Educação e Liberdade na Perspectiva de Rudolf Steiner", promovida pela Profa. Dra. Tania Stoltz no PPGE/UFPR, pudemos compartilhar ideias com os colegas, o que trouxe luz às análises e leituras mais densas.

4.1. SOBRE O CONTEXTO ESCOLAR

Em abril de 2021, após definir a metodologia da pesquisa, mapeamos no site da FEWB acerca das que possuíam o EM completo em seu currículo para possível estabelecimento de parceria. Das 244 unidades inspiradas ou filiadas à PW que constavam na lista do site[7], apenas 14 já haviam desenvolvido os anos finais escolares e destas, embora nenhuma se encontrasse no Estado do Paraná, 10 estavam em território paulista. Ao filtrar melhor os resultados, levamos em conta a facilidade de locomoção até a instituição pesquisada e a instável situação sanitária brasileira durante o período em que buscamos estabelecer os vínculos. As previsões, ainda incertas, de retorno às atividades escolares presenciais também influenciaram em uma escolha

[7] FEDERAÇÃO DAS ESCOLAS WALDORF NO BRASIL. **Planejamento Territorial de Escolas.** Disponível em http://www.fewb.org.br/territorios.html. Acessado em 18 abr. 2021.

mais cautelosa. Por isso, uma das Escolas com sede no interior de São Paulo, inclusive já conhecida por meio de uma entrevista para a seleção de estagiários, foi a primeira a ser contatada através de um breve e-mail de apresentação pessoal e do projeto.

Após o envio do e-mail, não obtendo resposta imediata, telefonamos para a escola e esta deu um retornou de modo positivo, solicitando para esperar o e-mail ser respondido pela professora. Assim, no dia 18/05, pela plataforma virtual do Zoom, conversamos pela primeira vez com a professora de matemática do Ensino Fundamental II e Médio. Neste dia, foram apresentados os principais objetivos e a metodologia da pesquisa, e já fomos convidados para observar as aulas da Época do 9º ano, que se concentrariam em junho.

Com a realização dos procedimentos éticos, iniciamos a Pesquisa de Campo conforme a disponibilidade da Escola e dos professores. Consideramos que iríamos desenvolvê-la ao longo do segundo semestre escolar de 2021, independentemente de suas atividades estarem em modo virtual ou presencial.

Com isso, já em junho, passamos a acompanhar diariamente as aulas e transmissões virtuais em uma fase de observação mais ampla. Ao retornar em agosto, com a vacina em dia, as visitas à Escola se tornaram, predominantemente, às terças, quintas e sextas, quando observávamos as aulas de matemática do 9° ao 12°, incluindo algumas do 8° ano e de outros professores, como de Tutoria, Artes, Euritmia, Cenotecnia, Física e Marcenaria. Também pudemos vivenciar eventos como a Festa de São João e a apresentação das Biografias, além do acompanhamento de três dias da imersão do 10° ano na Agrimensura.

Localizada em uma cidade média-grande do estado de São Paulo, a escola participante desta pesquisa oferece uma educação baseada nos princípios antroposóficos e na PW. Os primeiros impulsos para sua criação se deram a partir de 1998, para a fundação de uma Associação sem Fins Lucrativos e, consequentemente, o primeiro Jardim de Infância Waldorf da cidade. Já em 2002, foi doado um terreno de 10.000 m^2 à Associação e, com isso, iniciaram o desenvolvimento arquitetônico e demais obras.

Em 2003, a Escola foi "batizada" e iniciaram, portanto, as atividades com o Primeiro Ano do Ensino Fundamental. Desde então ela se desenvolveu e passou a oferecer mais salas, até que, em 2019, foi inaugurado o EM com o 10° ano, ou 1° ano e, assim, o 11° (ou 2° ano) em 2020 e, por fim, o 12° ano (ou 3° ano) em 2021. Atualmente, em 2023, conta com 05 turmas de Educação Infantil, 9 turmas de Ensino Fundamental e 3 turmas do EM.

Situada em um bairro a cerca de 10km do centro, durante a pesquisa se fazia necessária a locomoção via ônibus, vans, bicicleta, carro próprio ou grupo de caronas. Seu ambiente físico possuía um grande gramado aberto, além de muitas plantas e árvores, se comparado à maioria das escolas particulares urbanas atualmente. O estilo de construção era em madeira e tijolinhos e envolvia as crianças com um ar mais orgânico e menos uniformizador.

FIGURA 3- Visão geral da escola.

FONTE: A autora (2021).

FIGURAS 4 e 5- Blocos de salas de aula.

FONTE: A autora (2021).

Além dos blocos de salas de aula e brinquedos, havia lugares comuns escolares como a secretaria, cozinha, sala dos professores, biblioteca, etc. Apesar do gramado ser o palco das atividades físicas e demais jogos, ainda estava em projeto a construção de um espaço para a Educação Física. Os ambientes para as aulas de agricultura na horta e de marcenaria, onde mais pratica-se o fazer, eram exemplos de como a estrutura física da escola se adequava à sua filosofia e às atividades que foram planejadas.

FIGURAS 6 e 7 – Horta; Pinturas.

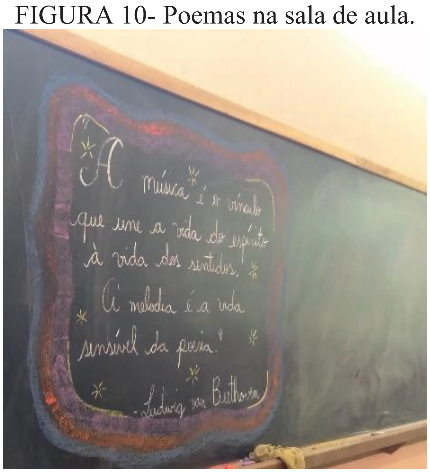
FONTE: A autora (2021).

FIGURAS 8 e 9- Encadernação; Marcenaria.

FONTE: A autora (2021).

No quesito artístico, era natural encontrar desenhos e poemas em murais, expostos nas paredes ou ainda mesmo, no chão pelas crianças menores. Para a lousa, havia dois tipos de giz, os comuns e uma coleção feita com cera de abelha, de aspecto mais úmido que são comumente usados nas EWs. Enquanto participávamos das aulas, regularmente ouviámos o som de um piano ou flauta pelas janelas, além de que alguns alunos levavam o próprio violão para a escola. Os barulhos do Infantil e do Fundamental correndo e brincando também se misturavam.

FIGURA 10- Poemas na sala de aula.



FONTE: A autora (2021).

Cada uma das salas de aula era pintada de uma cor e em suas paredes havia quadros de origem europeia, tanto advindos do esoterismo cristão quanto renascentistas, e trabalhos dos próprios alunos expostos. Além das carteiras de madeira, ora individuais, ora para trabalhos em grupo, na mesa da professora, localizada à frente, havia sempre um computador. No fundo, podiam ser encontrados armários para os alunos e, geralmente, uma estante pequena com livros.

FIGURAS 11 e 12- Sala de aula do 10° ano.

FONTE: A autora (2021).

FIGURAS 13 e 14- Sala de aula do 9° ano.

FONTE: A autora (2021).

O diferencial das salas era a presença de um balcão com pia, em que, além dos alunos a utilizarem para lavar as mãos, também colocavam trabalhos diversos, livros, caixas, instrumentos musicais, etc. Em algumas, havia bebedouro e, até mesmo, máquina de fazer misto quente.

FIGURAS 15 e 16- Lousa do 8° ano; Quadros.

FONTE: A autora (2021).

Durante o período da pesquisa, as turmas foram rearranjadas de sala devido à capacidade de cada uma delas e, portanto, o 12º ano passou a ter aulas na antiga sala dos professores. No ambiente desta turma, em particular, os alunos estavam dispostos entre uma grande mesa ao centro da sala e uma escrivaninha ao fundo, podendo escolher seus lugares.

Observamos também que neste ambiente era mais raro ter algum aluno utilizando celular em horários de aula ou para finalidades indevidas, pois no Diário de Campo, não constatamos os professores exigindo retirada do celular dos alunos presencialmente. Como alternativa, ainda no 12° ano, foi possível perceber também que os adolescentes, por terem desenvolvido habilidades artísticas ao longo de sua escolaridade, assim expressavam suas alegrias e tristezas por meio de desenhos, memes, poemas, charges, música, etc. Nesta sala, em específico, havia um mural e uma lousa branca em que os alunos expunham suas dispersões artísticas e filosóficas e demais piadas comuns entre adolescentes.

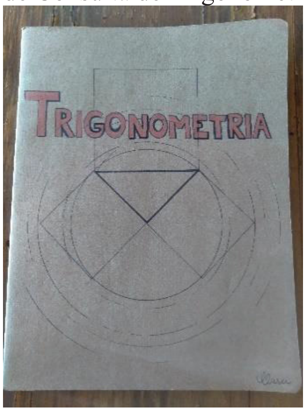
FIGURAS 17 e 18- Lousa da Época de Probabilidade e Estatística do 9° ano; Desenho em Material de Consulta de aluna.

FONTE: A autora (2021).

Em contatos mais pontuais com as turmas do Ensino Fundamental, notamos que as lousas dos professores de classe eram mais elaboradas artisticamente, enquanto que as lousas dos professores especialistas do EM possuíam mais diagramas, esquemas, citações de autores e resumos em tópicos das Épocas e Cursos. Por outro lado, os alunos do EM, possuindo maior maturidade artística, traziam à sala de aula desenhos que se destacavam em meio aos textos e exercícios mais densos intelectualmente.

Em relação ao ambiente virtual da escola, as reuniões e aulas ocorreram pelo *Zoom*, aplicativo de chamadas de vídeo que possui pacotes gratuitos e pagos, enquanto que algumas atividades eram postadas em turmas do *Google Classroom*. Devido a Escola não possuir material apostilado, as demais listas eram distribuídas impressas nas salas, assim como cadernos de cor parda para anotações, que eram utilizados por muitos alunos do EM, mas que não era regra.

FIGURA 19- Material de Consulta de Trigonometria de aluna do 10° ano.



FONTE: A autora (2021).

De acordo com o Plano Escolar de 2021 da Escola, foram matriculados 78 alunos na Educação Infantil, 230 no Ensino Fundamental e 47 no Médio. Disto, é possível notar uma média de 15 alunos nas salas de Educação Infantil, 25 nas do Ensino Fundamental e 15 nas do EM.

As aulas iniciavam-se no turno da manhã e havia dias na semana em que os alunos tinham aulas no período vespertino. O período matutino, no EM, ocorria das 7h20min às 12h50min.

No ano de 2020, por conta da pandemia, as aulas foram remotas. Entretanto, a partir de setembro de 2020, as aulas passaram a ser híbridas e com alternância de classes durante os dias da semana. Assim, até setembro de 2021, quando foram cessadas as transmissões ao vivo das aulas, nós as havíamos presenciado em quatro formatos, que foram

i) virtual;
ii) presencial;
iii) transmissão online para os que não estavam em aula presencial;
iv) acompanhamento, estando presencialmente junto à professora, em sua aula online.

A seguir, o horário do 12º ano para o 2º semestre de 2021 para o formato híbrido exemplifica como era composto o quadro de horários do EM da Escola. Em azul, constam as aulas virtuais e L.E. agrupam as línguas estrangeiras de Inglês e Alemão, que se alternavam entre os meses. Ao longo desta pesquisa, as aulas de Coral deram espaço às de Cenotecnia, nas quais os alunos fizeram projetos cenográficos. A Euritmia, como dito anteriormente, era uma aula que envolvia movimentos corporais e artísticos de acordo com os preceitos antroposóficos.

FIGURA 20- Quadro de horários do 12° ano.

	12º ANO				
	SEGUNDA	TERÇA	QUARTA	QUINTA	SEXTA
07h20 - 09h10	ÉPOCA				
09h10 - 09h30	INTERVALO				
09h30 - 10h15	Euritmia	CURSO	L. E.	CURSO	Matemática
10h15 - 11h00	Euritmia		Matemática		Tutoria/TCC
11h00 - 11h10	INTERVALO				
11h10 - 11h55	Filosofia	Artes	Cenotecnia	Português	L. E.
11h55 - 12h40	Religiosidade	Artes	Cenotecnia	L. E.	Português
12h40 - 13h40	ALMOÇO			ALMOÇO	
13h40 - 14h25	Música			*Espanhol (14h30 às 15h15)*	
14h25 - 15h10	Música				
15h10 - 15h30	INTERVALO				
15h30 - 16h15	Ed. física				
16h15 - 17h00	Ed. física				

FONTE: MATERIAL DA PROFESSORA (2021).

Se no Ensino Fundamental o Professor de Classe é o responsável por conduzir os alunos na maioria das matérias do 1° ao 8° ano, no EM surgiram os “Professores Especialistas” e os “Tutores”. Estes especialistas eram os responsáveis por sua disciplina e os tutores acompanhavam sua sala do 9° ao 12° ano. Portanto, a aula de tutoria era o horário semanal para os alunos e docentes discutirem temas que envolvem a sala, a escola, os pais, etc.

As aulas de Época e Curso duraram, cada uma, quatro semanas e eram alternadas entre as disciplinas de português, literatura, sociologia, geografia, história, matemática, biologia, química, física, astronomia e teatro. Nota-se, então, que as disciplinas de português e matemática possuem maior carga horária, constituindo das Épocas, Cursos e Avulsas ao longo de todo o ano. Também havia alguns horários combinados com os alunos, no período vespertino, para os plantões de dúvidas e recuperações.

QUADRO 1- Grade de Épocas e Cursos do EM em 2021.

Data	9° ano		10° ano		11° ano		12° ano	
25/01 a 27/02	Matemática E	Biologia C	Português E	História C	Biologia E	H. da Música C	História E	Matemática C
01/03 a 27/03	Português E	H. Arte C	História E	Biologia C	Matemática E	Física C	Biologia E	H. Arquitetura C
29/03 a 24/04	História E	Física C	Matemática E	Sociologia C	Literatura E	História C	Física E	Biologia C
03/05 a 28/05	Biologia E	Português C	Geografia E	Física C	Física E	Sociologia C	Teatro E/C	
31/05 a 26/06	Matemática E	H. Arte C	Física E	Matemática C	Química E	Biologia C	Português E	Astronomia C
02/08 a 28/08	Física E	Geografia C	Português E	H. Literatura C	História E	Matemática C	Geografia E	Química C
30/08 a 25/09	Português E	História C	Matemática E	Geografia C	Geografia E	Química C	Química E	Física C
27/09 a 30/10	Química E	Matemática C	Biologia E	Química C	Português E	Astonomia C	Matemática E	Geografia C
03/11 a 03/12	Geografia E	Química C	Química E	H. Literatura C	Física E	Geografia C	Português E	História C

FONTE: MATERIAL DA PROFESSORA (2021).

Ao final de cada mês, eram realizados sábados avaliativos, quando os professores das Épocas e dos Cursos finalizados naquele mês podiam enviar provas ou trabalhos a serem entregues nesta data.

Diante desta dinâmica escolar pode ser difícil para nós, acostumados com uma grade fixa semanal, compreendê-la. Contudo, após cursar uma disciplina condensada na pós-graduação[8] ao mesmo tempo em que acompanhava as Épocas, internamente as colocamos em analogia por sentir que ambas nos proporcionaram uma vivência mais intensa com a matéria durante poucas semanas.

Para além das aulas, a instituição também contava com grupos de estudos Antroposóficos, de meditação, Coral, e eventos como a Festa de São João, o Bazar de Natal, a Exposição Pedagógica, a Escola de Pais, Portas Abertas, etc. Alguns destes eventos contribuíram não somente com a exposição de trabalhos dos alunos e com a integração da

[8] Nas Universidades, as disciplinas semestrais podem ser ofertadas de modo condensado, ou seja, com uma intensa vivência de alguns dias ou semanas.

comunidade, mas também com o objetivo de levantar fundos para atividades pedagógicas específicas e para a manutenção e a ampliação da escola. Mensalmente, também era organizado e distribuído no interior da escola um boletim informativo com textos, poemas e imagens produzidos por professores, alunos e pais.

Seus alunos residiam na cidade em que está inserida a Escola ou em cidades vizinhas e eram, predominantemente, de classe média alta. Além de oferecer apoio às crianças de inclusão, como auxiliares de classe, a Escola também buscava ampliar o "apadrinhamento de alunos de classe média e baixa, assim como o processo de atendimento às solicitações de bolsas de estudo vem sendo viabilizado" (PLANO ESCOLAR, 2021, p. 5).

Já a equipe docente era constituída de docentes com maior ou menor tempo de estudos na Antroposofia, incluindo alguns que também trabalhavam em outras EWs. Em sua autogestão, havia a figura da diretora que respondia e assinava burocraticamente pela Escola. Entretanto, todas as decisões que envolviam a coletividade eram tomadas a partir das pautas discutidas pelo grupo de docentes da Conferência Interna.

Neste contexto pedagógico a professora de matemática participante desta pesquisa, é formada em engenharia agronômica pela USP e Mestra na mesma área. Por não ter pensado na carreira docente antes, iniciou na PW através de seu gosto e habilidade com a marcenaria, ministrando assim aulas desta disciplina. Seus filhos também ingressaram na PW e, assim como é comum para demais interessados na PW, ela também foi professora dos seus filhos. Com o passar do tempo, tornou-se professora de classe, cursou Licenciatura em Matemática e, inclusive, trabalhou em outras EWs do interior de São Paulo.

Até 2020, foi professora de classe da turma que se formou e se tornou o 9° ano que foi acompanhado nesta pesquisa. Portanto, ao longo de 2021, esteve ensinando matemática no 9°, 10°, 11° e 12° anos na Escola, além ser tutora, junto ao professor de Euritmia, e ensinar artes para o 9°. Para além das aulas, durante esta pesquisa, esteve como participante da Conferência Interna, o grupo de maior decisão sobre a escola, foi professora de um Curso de Fundamentação da PW oferecido no interior de São Paulo e também tutora de matemática de professores de outras EW.

Recentemente, a docente viajou aos Estados Unidos para um curso ministrado por Jamie York, autor do livro didático de matemática Waldorf que utiliza em suas aulas. Devido à escassez de materiais deste tipo na PW brasileira, a professora esteve traduzindo este material para possível divulgação pela FEWB.

Portanto, de toda esta apresentação sobre os participantes deste trabalho, é importante ressaltar que, durante a Pesquisa de Campo na Escola e em várias conversas cotidianas, concluímos que este estudo estava sendo realizado em um momento bastante delicado para a educação brasileira. Afinal, ainda estávamos em meio a uma pandemia e em meio às discussões mais decisivas acerca da implementação do Novo Ensino Médio. Com as EWs isto não foi diferente, e seu educadores se encontravam planejando os possíveis itinerários formativos para 2022.

Por isso, nesta seção apresentamos os dados gerais sobre a escola em que esta pesquisa foi realizada, de forma a situar o leitor sobre seu contexto social, político, econômico e histórico. Por não ser pretendida a análise detalhada do ambiente desta ou das demais EWs, sugerimos a leitura de trabalhos que possuem tais contextos como foco investigativo, constados em Santos e Gomes (2021).

5. SOBRE OS CURRÍCULOS DA ESCOLA

Para identificarmos como aspectos do currículo de matemática do Ensino Médio de uma Escola Waldorf se manifestam na prática docente, consideramos analisar tanto as orientações baseadas na teoria da Pedagogia Waldorf quanto a dinâmica e a prática de uma escola nela fundamentada. Para isso, consideramos o estudo teórico de Sacristán (1998) em nossa coleta de dados.

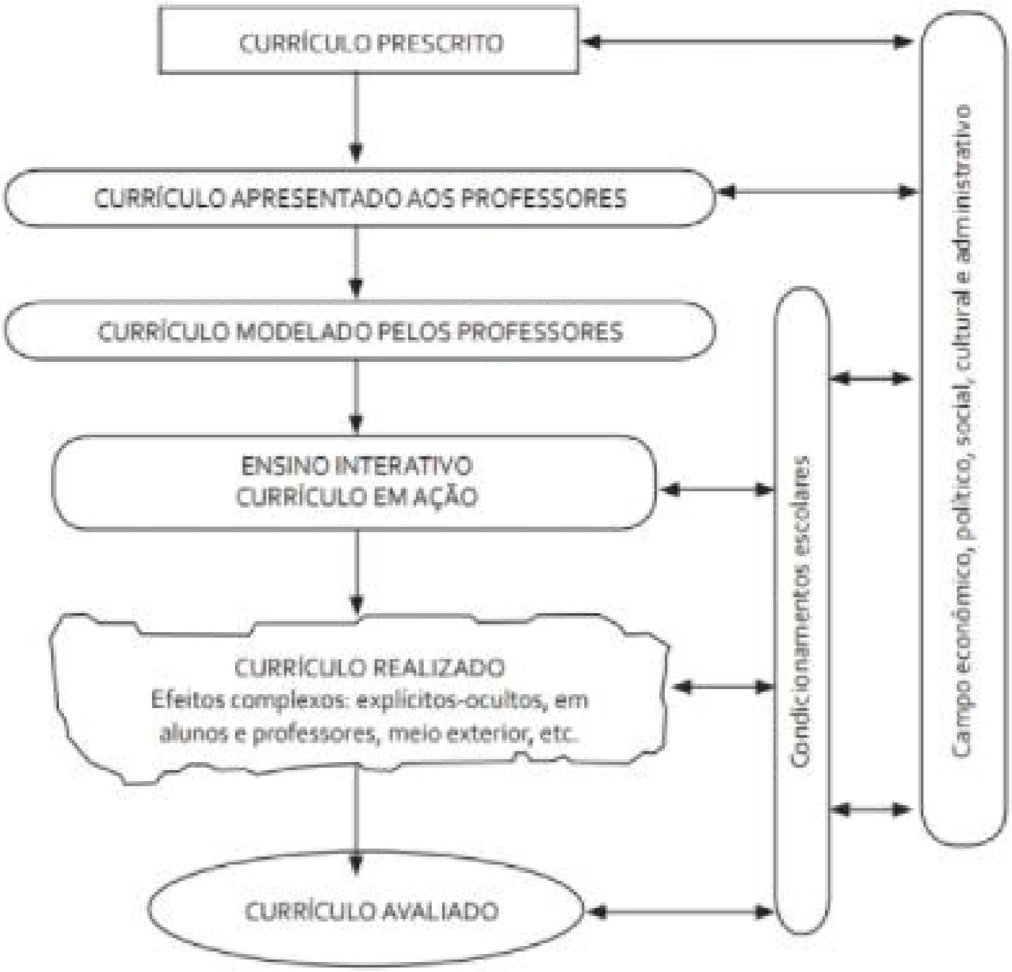
Em uma visão processual do currículo, Sacristán (1998) considera que diversos agentes, tanto externos quanto internos à escola, interferem em diferentes etapas de seu desenvolvimento. São forças que incidem antes mesmo de seu planejamento, como a fundamentação de Steiner sobre a PW, até a sua concretização nas aulas de matemática e sua posterior avaliação.

Apesar das contradições entre os papéis dos que atuam sob o currículo, Sacristán (1998, p. 102) adverte que cada um deles possui "algum grau de autonomia funcional, embora mantenham relações de determinação recíproca ou hierárquica com outros". Ainda que cada um deles incida com força desigual sob diferentes elementos curriculares, há um equilíbrio entre as forças que é determinado pela política curricular. Em cada sistema escolar se configura uma dinâmica própria, que torna o processo curricular complexo com características históricas e contextuais.

A partir desta concepção, a administração e as prescrições não são as únicas a incidirem na prática do professor, sendo que este também depende de sua formação, experiências pessoais, condições de trabalho, materiais didáticos, etc. Deste modo, nos conscientizamos que as atividades em uma EW, assim como em qualquer escola, também são influenciadas pelo contexto local em que esta está inserida.

Considerando que o currículo é um mediatizador entre as projeções das teorias educacionais e sua prática, o seu modelo explicativo das diferentes fases e níveis de desenvolvimento do currículo pode nos ajudar a compreender as relações entre as forças que operam sob este e como ele se desenvolve no contexto pesquisado.

FIGURA 21- As fases de desenvolvimento curricular.



FONTE: SACRISTÁN (2020, p. 103)

A primeira, o **currículo prescrito**, surge da necessidade administrativa de controle e ordem do sistema escolar. Este currículo prescreve os conteúdos e orienta os demais agentes que estão a ele submetidos, condicionando assim a estrutura escolar e todo o trabalho pedagógico. Para sua análise, consideramos as orientações curriculares da PW por Richter (2002).

O segundo, o **currículo apresentado aos professores**, compreende todos os materiais didáticos que traduzem o currículo prescrito em um modo mais tangível de se colocá-lo em prática. Geralmente, as prescrições anteriores são muito genéricas e as condições de trabalho são complexas e, sendo assim, os livros-texto são os que cumprem este papel em nossa tradição escolar. Neste trabalho, analisaremos a coleção "*Making Math Meaningful*" de Jamie York, professor matemático Waldorf estadounidense, e que é utilizada pela docente participante desta pesquisa.

Já o terceiro, o **currículo modelado pelos professores**, é desenvolvido por estes durante sua fase de planejamento curricular. Ao considerarem as necessidades dos alunos e as suas condições escolares, os docentes interpretam e traduzem as propostas curriculares, atuando ativamente tanto a nível individual quanto em grupo. Para sua análise, consideramos os episódios que remetem ao planejamento escolar como o Plano Escolar, algumas tutorias realizadas pela professora para outros professores Waldorf das quais participamos, postagens do *Google Classroom* ao longo do ano e conversas cotidianas constatadas em Diário de Campo.

É então no **currículo em ação** que toda a teoria é colocada em prática. Em um ambiente escolar atravessado por uma grande quantidade de variáveis e situações possíveis, a análise deste currículo se recai sob as tarefas escolares e, disto, analisaremos as que constam em alguns episódios observados das aulas de matemática e expressadas no Diário de Campo.

Já o quinto, o **currículo realizado**, assimila os efeitos sociais, emocionais, cognitivos, etc. que são produzidos em todos os envolvidos nas práticas. Inclusive, alguns efeitos deste currículo podem se encontrar ocultos ou indefinidos ao refletirem nas ações de professores e alunos em ambientes exteriores à escola. Além disso, em sua sexta etapa, o **currículo avaliado**, é reforçada a necessidade de controle administrativo, exercendo pressões em todo o sistema escolar para que seja possível validar os alunos em seus respectivos níveis escolares. Deste modo, devido à constatação, já no início da Pesquisa de Campo, de que seriam selecionados materiais com dados mais referentes ao ensino do que, propriamente, à aprendizagem dos alunos e seus efeitos a curto, médio e longo prazo, não iremos, portanto, analisar estes dois últimos currículos.

De cada uma destas esferas surgem determinados conceitos e problemáticas com os quais se torna importante tomarmos cautela ao atribuí-las exclusivamente a determinados agentes (SANTOS, 2019), mas que devem ser analisadas desde sua perspectiva teórica e filosófica até sua prática e, consequentemente, sua avaliação sob os objetivos traçados no planejamento curricular.

Nos próximos capítulos, aprofundaremos nas primeiras quatro fases mencionadas anteriormente sobre o currículo de matemática no EM da EW participante da pesquisa. Apresentaremos, um a um, de acordo com os dados constituídos que fazem referência à cada um deles.

5.1. CURRÍCULO PRESCRITO PARA A ESCOLA

Reconhecendo que o currículo é um objeto social, cultural e histórico em que múltiplos agentes e instâncias, desde administrativas, políticas, pedagógicas, etc. incidem sobre ele, a administração é a primeira a intervir em função dos interesses políticos sob a educação e também da necessidade de ordenação e controle curricular. É ela que estabelece a política curricular e, consequentemente, as respectivas funções e grau de autonomia dos demais agentes, juntamente à orientação e determinação dos conteúdos mínimos a serem transmitidos por estes aos alunos.

A política curricular e as prescrições curriculares intervêm na educação de modo mais ou menos coerente que, muitas vezes, acompanha "regulamentações administrativas e “orientações pedagógicas" com boas intenções, que tem a pretensão de "melhorar" a prática" (SACRISTÁN, 1998, p. 109). Ainda que elas sejam contraditórias e mais ou menos eficazes, as prescrições de mínimos são capazes de "facilitar a organização e cumprir com um modelo de controle do sistema com a orientação ao professorado" (SACRISTÁN. 1998, p. 123).

Ao prescrever uma quantidade mínima de conteúdos e aprendizagens básicas, é sugerido que a escola seja obrigatória a todos os alunos e que mantenha um projeto cultural comum aos que por ela passam. Contudo, em uma sociedade heterogênea, determinar tais mínimos se torna um conflito e, por isso, apesar dos mínimos prescritos, ainda é necessário considerar que nem todas as escolas e alunos terão as mesmas oportunidades e condições de abordagem de um mesmo currículo.

Um destes casos são os das EWs que, consequentemente, são pautadas na PW. Suas políticas e prescrições curriculares surgem de uma teoria específica e não somente da necessidade de um controle administrativo externo a ela. Assim, seria necessário um currículo diferenciado das diretrizes governamentais brasileiras, sobretudo a BNCC, que não são pautadas nos mesmos princípios filosóficos que a PW.

Buscando conhecimento de um currículo prescrito cuja fundamentação seja a PW, descobrimos que o currículo prescrito nos proporciona “um testemunho, uma fonte documental, um mapa do terreno sujeito a modificações” (SANTOS, 2019, p. 3592). Assim, Lemonje (2016, p. 90), ao estudar currículos no campo da História da PW, constatou que

> Assim como os professores de outras instituições de ensino, que estão sob as normas prescritas pela educação nacional, o corpo docente de escolas antroposóficas, além das normas mencionadas, também está submetido às normas do Currículo Waldorf e engendrado à cultura escolar praticada nesse modelo pedagógico.

De fato, em documentos disponíveis no site FEWB (2018) consta que

> Ele (currículo Waldorf) pontua as diretrizes essenciais, cuja prática, de acordo com a faixa etária, tem por objetivo fortalecer o desenvolvimento das crianças e dos jovens. Os componentes curriculares são conectados em arcos ao longo dos vários anos de escolaridade e está em constante desenvolvimento, levando em conta a localização geográfico-cultural, assim como o desenvolvimento político, geral e global da época. Cada escola situa-se em um espaço cultural, geográfico, histórico e político. Essas características influenciam o currículo de modo que considerem e complementem as sugestões apresentadas por Rudolf Steiner para a configuração das salas de aula e da arquitetura da escola/iniciativa a fim de proporcionar uma atmosfera contextualizada e adequada a cada classe. As indicações de Rudolf Steiner para o ensino podem ser complementadas ou transformadas por conteúdos culturais locais de valor equivalente, contanto que continuem respeitados os pressupostos antropológicos antroposóficos. (...) As escolas/iniciativas têm por tarefa conhecer as diretrizes legais (nacionais, estaduais e municipais) concernentes à educação e continuamente conciliá-las ao currículo aqui mencionado. Assim, cada escola/iniciativa deve responder aos requisitos das autoridades públicas locais responsáveis pela educação e para isso conta com o apoio da FEWB.
> Em muitos países há exigências estatais que têm influência sobre o currículo e, algumas vezes, estão em contraposição com a compreensão do desenvolvimento infanto-juvenil pela pedagogia Waldorf/Rudolf Steiner. (...) Cabe a cada escola encontrar soluções, caminhos e compromissos que preservem o espírito da pedagogia Waldorf/Rudolf Steiner e, ao mesmo tempo, estejam em conformidade com as exigências legais. Nesse campo de tensão vale encontrar uma aproximação frutífera entre o ideal e o possível, para atuar criativamente e promover o desenvolvimento da criança por meio do currículo.

Portanto, frente ao currículo nacional, a FEWB busca integrar suas práticas e experiências com a BNCC (FEWB, 2021) e, assim, sabendo previamente da BNCC e dos livros de orientações curriculares de Stockmeyer (2011) e Richter (2002), perguntamos sobre as prescrições em conversas cotidianas com a professora (DIÁRIO DE CAMPO, 2021). Esta sinalizou que considera a BNCC e que, no caso da matemática no EM, é Richter (2002) quem possui maior influência.

Contudo, para além dos conteúdos mínimos, através das prescrições curriculares, intervêm-se na prática ao determinar aspectos ainda mais específicos, tais como

> Determinar parcelas culturais, ponderando umas mais que as outras, ao optar por determinados aspectos da mesmas, quando se dão orientações metodológicas, ao agrupar ou separar saberes, ao decidir em que momento um conhecimento é pertinente dentro dos processos de escolaridade, ao proporcionar sequências de tipos de cultura e de conteúdos dentro de parcelas diversas, quando se regula o progresso dentro da escolaridade -a promoção dos alunos-, ao ordenar o tempo de sua aprendizagem -por curso, por ciclos-, dizendo o que é o currículo obrigatório e o que é currículo optativo, intervindo na oferta que se pode escolher, atribuindo tipos de saberes a ramos especializados paralelos dentro do sistema escolar, regulando os meios e o material didático, incidindo indiretamente com a dotação de materiais que se consideram necessários ou não nas escolas, ordenando o espaço escolar- teatro do desenvolvimento do currículo- o mobiliário, o funcionamento das escolas, estabelecendo diligências intermediárias para o desenvolvimento curricular, regulando a avaliação, etc. (SACRISTÁN, 1998, p. 113).

Analisando então a estrutura das prescrições curriculares, Richter (2002) apresenta aos professores alguns aspectos básicos do currículo Waldorf de modo geral. Em um capítulo introdutório, são explicitadas algumas noções da antropologia e sua incidência no currículo Waldorf, além de considerações sobre o modelo escolar Waldorf e sua autogestão. Por isso, a partir destas orientações gerais, podemos observar aspectos da política e da concepção curricular.

Em seguida, é apresentado o currículo horizontal de cada ano escolar que “expressa a tentativa de descrever a sintonia didática entre as diversas matérias e determinada faixa etária da criança ou do jovem” (RICHTER, 2002, p. 20). Neste sentido, algumas concepções sobre o papel da matemática no EM podem ser esclarecidas a partir do currículo horizontal.

Disto, se desenvolve o currículo básico vertical de cada disciplina escolar que “expõe a sequência cronológica dos conteúdos e as transformações, isto é, a evolução das metas pedagógicas dentro de uma determinada matéria” (RICHTER 2002, p. 70). Logo, no currículo vertical da matemática

> (D)as Escolas Waldorf, o ensino de matemática é dividido em três fases. Na primeira, a qual abrange os 5 primeiros anos de escola, o cálculo é derivado de atividades infantis intimamente ligadas com as funções vitais da criança, sendo ampliado pouco a pouco de dentro para fora. Na segunda fase, do 6° ao 8° ano, predomina o aspecto prático… A transição para a terceira fase, do 9° ano em diante, é caracterizada pelo acréscimo do ponto de vista racionalista”. É assim que H. v. Baravalle, primeiro professor de matemática na escola Waldorf de Stuttgart, descreve a estrutura desta matéria, em seu livro Rechenunterricht und der Waldorfschulplan [O Ensino da matemática e o plano de ensino Waldorf]. (RICHTER, 2002, p. 184).

Com o intuito de nos aprofundarmos no currículo do EM, vamos analisar a terceira fase do ensino de matemática sob as prescrições e orientações de Richter (2002) quanto ao ensino de matemática no EM Waldorf.

Como é possível observar na estrutura do documento, Richter (2002) introduz suas propostas curriculares para cada ano escolar dissertando sobre aspectos antropológicos para, em seguida, indicar “POSSÍVEIS CONTEÚDOS DE ENSINO” em uma série de tópicos. Nesta lista de conteúdos, ainda são colocados alguns a serem trabalhados eventualmente, pois “o grande número de conteúdos não permite que se estude tudo” (RITCHER, 2002, p. 203).

Ainda sobre estes, podemos analisar o QUADRO 2 e estabelecer, de modo sucinto, os principais conteúdos da disciplina no EM.

QUADRO 2- Resumo dos conteúdos prescritos de matemática para o EM da PW.

9° ano	**10° ano**	**11° ano**	**12° ano**
Conhecimentos e habilidades na álgebra elementar	Equações de 2° Grau	Progressões e séries	Cálculo infinitesimal
Álgebra	Potências com expoentes de números inteiros e racionais, logaritmos	Funções (também possível no 12° ano)	Cálculo diferencial
Análise Combinatória	Progressões (talvez também no 11° ano)	Álgebra e geometria analítica	Dedução da função inversa
O teorema binomial	Trigonometria plana (Aplicação do curso prático de agrimensura)	Estudo das oscilações (base matemática para a Época de eletricidade do 11° ano)	Cálculo integral
Processos algorítmicos	Desenho geométrico	Teorema da adição	Geometria (vide também 11° ano)
A incomensurabilidade na aritmética e na geometria	Aspectos geométricos do círculo e da reta	Geometria projetiva	Números complexos
Geometria	Elementos da geometria projetiva	Geometria esférica	
		Introdução à geometria não-euclidiana da esfera	
		Geografia matemática	
		Astronomia matemática	
		Álgebra de Boole	

FONTE: Adaptação de RICHTER (2002).

Ao final do documento, por fim, são considerados alguns projetos e Épocas práticas que incluem viagens, estágios, Agrimensura, sendo esta última relativa às aulas de matemática do 10° ano.

Diante disso, temos quais os conteúdos que são valorizados neste contexto escolar, assim como a seleção dos conteúdos prescritos a serem possivelmente desenvolvidos por seus professores, para que se cumpra os objetivos da educação escolar. Além disso, há conhecimentos matemáticos que são alheios ao contexto brasileiro da BNCC como, por exemplo, as Geometria Esférica, conceitos de Cálculo, Álgebra de Boole, etc. Por outro lado, Inequações e Matrizes não fazem parte do repertório e nota-se alterações na ordem de estudo de certos conteúdos como, por exemplo, Plano Cartesiano e Análise Combinatória e

Probabilidade. Disto, a PW pode nos ajudar a reconhecer que os mínimos curriculares são apenas uma das possibilidades de construção curricular.

A partir disso, com a ampliação das funções da escola em desenvolver aspectos não somente intelectuais, mas morais, sociais, emocionais, etc., supõe-se que a intervenção da administração pode facilitar os meios em que as escolas e os professores desenvolvem o currículo, mas deve ser prestada a devida atenção quanto à proposta de modelos definitivos que restringem a autonomia dos professores ou que submetem práticas complexas a esquemas prescritos documentalmente (SACRISTÁN, 1998). De acordo com Sacristán (1998), o controle do processo pedagógico por parte da administração gera consequências negativas, dentre elas gerar dependência dos professores à burocracia escolar ou criar uma ilusão de que a educação pode ser melhorada de modo simples e barato, sem a necessidade de manutenção do sistema a longo prazo, como a formação dos professores, melhora dos materiais didáticos e das condições sociais e ambientais da escola, etc. Cria-se então mentalidades e concepções curriculares dos professores sob a necessidade de tamanha intervenção da burocracia no currículo, que se faz necessária de alguma forma, mas que se mostra contraditória em suas prescrições incompatíveis com a realidade escolar.

Infelizmente, é igualmente comum a habituação dos docentes à dependência das prescrições e, inclusive, em contextos de prescrições alternativas como a PW. Apesar de Steiner (2003) ter deixado princípios e Richter (2014) “exemplos de possibilidade (que) representam casos particulares de sucesso oriundos de uma construção frutífera de encontro humano” (BACH; GUERRA, 2018, p. 865), ainda há correntes de professores Waldorf que seguem contradições envolvendo

> Detalhes do conteúdo do currículo que, com o passar do tempo, disseminaram-se a ponto de serem tomadas como única referência do que seria o correto. O conflito reside na interpretação que assume um “como tem de ser”, em vez de um “como pode ser”. A tensão surge, então, entre uma postura de obrigatoriedade no lugar de uma postura de possibilidade. (BACH; GUERRA, 2018, p. 865).

Entretanto, para Sacristán (1998, p. 114), por mais que haja tentativas de intervenção por meio de prescrições minuciosas e orientações diversas, estas ainda não possuem total controle sobre a prática. Seja na PW ou qualquer outro modelo pedagógico, suas respectivas prescrições ainda não expressam formas concretas de como organizar tais conteúdos dadas as condições e materiais que dispõem o professor e os alunos, exceto à disposição dos livros didáticos. Portanto, o currículo não deve ser “um tratado pedagógico e um guia físico que oferta planos elaborados para os professores" (SACRISTÁN, 1998, p. 118), mas o corpo administrativo escolar deve proporcionar a melhora do desenvolvimento curricular por outros meios além deste.

As prescrições também são um referencial útil para o controle do sistema educativo, seja sob os processos e as condições de ensino, em que se enfatiza o controle das condições de ensino e dos materiais didáticos, ou sob os produtos das aprendizagens, que sujeita o "processo pedagógico ao tipo de conhecimento e rendimento avaliado desde fora" (SACRISTÁN, 1998, p. 119).

Neste sentido, Rocha (2006) indica que o currículo Waldorf é bastante estruturado e, sobretudo nos anos iniciais escolares,

> Os educadores Waldorf tendem a ser bastante diretivos em seu trabalho buscando ter certeza que seus alunos estão sendo expostos a específicas situações de aprendizagem que talvez não se submeteriam espontaneamente, por falta de oportunidades, interesse e/ou por medo de errar/fracassar. (ROCHA, 2006, p. 560).

Além disso, no quesito avaliativo, Ritcher (2002) indica que "Em conformidade com as exigências legais para os exames de cada país, a escola Waldorf conduz os alunos a exames oficialmente reconhecidos" (p. 13). Contudo, "procura-se conseguir que os alunos, principalmente no ensino médio, reconheçam e apreciem os resultados em 'si', e aprendam, na medida do possível, produzi-los sozinhos" (RICHTER, 2002, p. 13).

Além desse foco mais processual do currículo Waldorf, podemos compreender se o controle em seu sistema educacional tende à maior centralização ou descentralização. Se, por um lado, a descentralização pode favorecer a consideração de particularidades locais, por outro lado, um sistema centralizado não reflete, necessariamente, em menos autonomia ao professorado, uma vez que fatores externos à administração escolar influenciam e restringem a atuação dos professores. Exemplos disso são as exigências da sociedade e, principalmente, a dos pais, as considerações sobre as necessidades dos alunos, a influência de especialistas, a formação dos docentes, etc. (SACRISTÁN, 1998, p. 121).

Com isso, Skilbeck (1972, citado por SACRISTÁN, 1998, p. 121) considera a existência de três modelos de gestão do currículo, que são

1. Modelo racional dedutivo, característico de sistemas mais centralizados;
2. Modelo racional interativo, em que "as decisões são compartilhadas entre os governos locais, os professores e até os pais e os alunos".
3. Modelo intuitivo, em que os professores detêm sua autonomia nas aulas de acordo com suas percepções sobre os alunos.

Para o referido autor, o modelo racional interativo é o que mais se adequa a um modelo democrático em que o currículo mínimo é garantido, assim como a autonomia das partes. Se os currículos estipulados pelos governos não se encontram suficientemente conectados aos preceitos da PW, inclusive, é indicado que o corpo pedagógico deva buscar sua liberdade no que tange aos conteúdos e atividades a serem trabalhados. Assim, torna-se interessante como as prescrições do currículo Waldorf apontam para a autonomia dos professores e a adequação ao contexto de cada uma de suas escolas, ainda que não saibamos se, de fato, ocorre na prática.

Embora as prescrições regulem os conteúdos e a metodologia da prática, Sacristán (1998, p. 121) considera que elas ainda são uma forma indireta de incidência na prática. Mesmo que os documentos oficiais iniciem todo o processo do desenvolvimento curricular, os docentes ainda devem considerar "os meios que o currículo lhe apresenta com algum grau de elaboração, para que seja levado à prática, e as condições imediatas de seu contexto" (SACRISTÁN, 1998, p. 122) e, por isso, a administração deve considerar que os materiais didáticos, neste sentido, são seus influenciadores mais diretos.

5.2. CURRÍCULO APRESENTADO PARA OS PROFESSORES

Segundo Sacristán (1998), ainda que o currículo prescrito condicione a prática pedagógica, suas orientações genéricas e variadas exigências são "pouco operativa(s) para orientar a prática concreta e cotidiana dos professores. A determinação da ação pedagógica nas escolas e nas aulas está em um outro nível de tomadas de decisões" (SACRISTÁN, 1998, p. 147).

Disto, surge a importância de meios intermediários que auxiliem os docentes em missões complexas frente a "princípios ideais para prática coerente com os mesmos, a não ser à medida que possa planejar uma estrutura de tarefas adequadas na qual se conjuguem os conteúdos curriculares e princípios pedagógicos." (SACRISTÁN, 1998, p. 149).

Logo,

> Uma série de razões de ordem diversa farão com que, de forma inevitável, o professor dependa, no desenvolvimento de seu trabalho, de elaborações mais concretas e precisas dos currículos prescritos realizados fora de sua prática (SACRISTÁN, 1998, p. 147).

É esperado que um professor Waldorf que estude a teoria Antroposófica se questione sobre as maneiras de transformar seu currículo prescrito para a matemática em uma prática constituída por atividades que estimulem o pensar, o sentir e o querer. Além deste estudo aprofundado e diante de conteúdos estranhos à sua formação, como poderia o docente desenvolvê-los com os alunos?

Dentre estas razões para a necessidade de “pré-elaborações” ou “pré-planejamento”, as indicadas por Sacristán (1998, p. 147-149) são

a. O fato de a escola responder às necessidades sociais e culturais de ordem complexa e, mesmo que o professor lecione apenas uma matéria, é preciso estruturar os diversos conteúdos de maneira coerente para que se cumpram os objetivos escolares.

b. A necessidade de conexão de conhecimentos de ordem distinta por parte do professor, desde domínio sobre seus alunos, o conteúdo, o processo de aprendizagem, as condições da escola, dos materiais, dos objetivos educacionais, das avaliações, etc.

c. Devido à formação dos professores não proporcionar o desenvolvimento de sua autonomia e pressupor que suas habilidades possam ser substituídas por outros canais.

d. Por não haver ponderação sobre o tempo necessário para o planejamento das atividades escolares.

Deste modo,

> As condições atuais da realidade impõem aos professores acudir a pré-elaborações do currículo para seu ensino, que se podem achar na tradição profissional acumulada e nos agentes externos que lhes ofereçam o currículo elaborado. (SACRISTÁN, 1998, p. 149)

Para Sacristán (1998, p.149), os guias didáticos e, sobretudo, os livros-textos, são os principais “responsáveis da aproximação das prescrições curriculares aos professores”. Não é incomum encontrá-los em situação de dependência destes guias e, até mesmo, duvidarem se é obrigatório ou não o seu uso. Assim, “O uso de tais meios é considerado inerente às vezes ao próprio exercício profissional” (SACRISTÁN, 1998, p. 150), sobretudo com a criação de um monopólio entre as escolas e as editoras destes materiais.

Por outro lado, acerca dos materiais didáticos para professores e alunos na escola participante da pesquisa,

> Há material didático de apoio à pesquisa para os professores tais como mapas, globos, livros.
> Um dos princípios Waldorf consiste em ir da atividade ou do fenômeno para a abstração conceitual. O caminho deve ser sempre da vontade para o sentimento e deste para o raciocínio, por isto não se utilizam livros didáticos (apostilados) os quais se iniciam, geralmente, por abstrações e definições. O ensino baseia-se na palavra viva do professor e a matéria exposta por ele é expressa por meio de esquemas, imagens,

> desenhos ou transcrita (quando o aluno já consegue se expressar de forma escrita) para o caderno de época. (PLANO ESCOLAR, 2021, p. 4).

Mesmo assim, sabendo previamente da existência de materiais didáticos confeccionados por professores Waldorf, realizamos pesquisas por autores e materiais brasileiros acerca da matemática na PW. Entretanto, nos deparamos com o que Santos (2015) também vivenciou.

> No caso das publicações sobre o Ensino de Matemática na área da Pedagogia Waldorf, apresentadas pelas apostilas Waldorf, estas são praticamente restritas ao núcleo da pedagogia, adquiridas na FEWB ou nas escolas Waldorf. Há livros publicados em língua inglesa ou alemã sobre o ensino de Matemática na proposta Waldorf, mas de difícil acesso aos professores brasileiros. (SANTOS, 2015, p. 71-72).

Na esperança de encontrar referências intermediárias brasileiras e, não necessariamente, livros didáticos, conhecemos os trabalhos de Waldemar W. Setzer, Prof. Titular Sênior do Departamento de Ciência da Computação do Instituto de Matemática e Estatística da USP. Em seus livros "A matemática pode ser interessante ... e linda! Espirais, Fibonacci, razão áurea, crescimento proporcional e a natureza" (SETZER, 2020) e "Os surpreendentes infinitos na geometria, nos conjuntos de números e no mundo físico" (SETZER, 2021), é apresentada a matemática através de princípios Steinerianos.

Deste modo, nossas pesquisas sobre os materiais didáticos internacionais acerca da matemática se concentraram, principalmente, no site "*The Online Waldorf Library*" (2021). Através dele, filtramos os títulos que continham conteúdos relacionados ao EM.

A partir disso, organizamos o seguinte quadro abaixo.

QUADRO 3- Lista de livros de matemática para o EM fundamentados na PW.

LIVROS

"Finding The Path: Themes and Methods for the Teaching of Mathematics in a Waldorf School", de Ullin (1991).
"A Waldorf High School Mathematics Program", de Oelhaf (2015).
"Topics in Mathematics for Waldorf High Schools: Volume 2 For Ages 14 to 18", de Jarman (2010).

COLEÇÕES

"Making Math Meaningful", de Jamie York, que compreende do 1º ao 12º ano escolar Waldorf.
"Topics in Mathematics", de Robert Neumann, que compreende os 9°, 10º, 11º e 12º anos.

OUTRAS SUGESTÕES

"A Matemática Pode Ser Interessante… e Linda!: Espirais, Fibonacci, Razão áurea, Crescimento Proporcional e a Natureza", de Setzer (2020).
"Os Surpreendentes Infinitos na Geometria, em Conjuntos De Números e no Mundo Físico", de Setzer (2021).

FONTE: Adaptação de THE ONLINE WALDORF LIBRARY (2021).

Esta dificuldade de encontrar materiais brasileiros também foi sinalizada pela professora. Apesar dela já ter utilizado outros livros didáticos, ela "também já realizou cursos no exterior sobre a Pedagogia e atualmente traduz alguns livros do professor Jamie York, que se dedica à matemática na PW norte-americana." (DIÁRIO DE CAMPO, CONTATO COM A ESCOLA, 2021).

Ao participar da palestra *Importancia e Influencia de Las Matemáticas em La Formación Del Ser Humano* (2021), ministrada por professores chilenos Waldorf, e do 3º Encontro de Matemática da Pedagogia Waldorf (2021), presenciamos colegas compartilhando entre si as mesmas fontes de materiais supracitados. Logo, foi possível constatar a utilização de alguns autores da própria PW e, disto, considerar possíveis relações entre um professor Waldorf de matemática e estes materiais.

Sabendo, portanto, que através dos materiais didáticos é possível exercer controle e intervir sobre a prática escolar, o currículo apresentado ao professor possui "funções reais (que) vão mais além de sua declarada missão de auxiliar os professores" (SACRISTÁN, 1998, p. 151) e incluem "elaboração dos conteúdos do currículo, orientação do professorado, controle do currículo, política de implantação de certas inovações ou reformas e interesses econômicos" (SACRISTÁN, 1998, p. 151). De fato,

> Os livros didáticos em especial, mas não de forma generalizada, são construídos a partir das culturas dominantes que se convencionam como necessárias a todos. Nesse sentido, quando o professor tem uma boa formação e autonomia para mudar, ele consegue adaptar os manuais didáticos com as realidades locais, embora tenha que

> desconsiderar muita coisa que diz respeito apenas aos construtores de tais materiais. (ARAGÃO, 2017, p. 39).

Neste sentido, um livro sob a orientação da filosofia educacional Waldorf seria útil ao professor que busca atividades diferenciadas daquelas tradicionalmente conhecidas em materiais divulgados a quaisquer escolas. Por outro lado, os livros didáticos sob a orientação Waldorf são um meio de ampliação da própria PW e de uma divulgação mais concreta das mesmas atividades realizadas pelas mesmas.

Por isso mesmo, devido à grande quantidade de alunos ao longo dos anos de escolaridade obrigatória e a debilidade profissional frente à carência de materiais alternativos, se torna garantida a necessidade do uso dos livros-texto (SACRISTÁN, 1998, p. 153). Diferente dos livros extraescolares, os conteúdos de todas as disciplinas são condensados em forma de teoria somada a exemplos de atividades que são, geralmente, dispostas de forma muito empobrecida nestes exemplares. Isto se deve, principalmente, ao fato de que

> Um livro-texto que se estendesse no desenvolvimento dos tópicos que abrange com informações diversas, abordando os temas de diferentes pontos de vista, contextualizando os conhecimentos, estendendo-se no desenvolvimento dos mesmos, analisando aplicações e consequências, exemplificando conceitos, fatos princípios e teorias que aborda, ilustrando-os graficamente, etc., trabalhando-os através de atividades muito diversificadas, formaria um volume inabarcável e caro. (SACRISTÁN, 1998, p. 152).

Assim, problemas de ordem econômica controlam a prática pedagógica, sendo apresentadas informações descontextualizadas e muito resumidas. Além disso,

> Assinalam o que deve ser ensinado, dão ênfase a uns aspectos sobre outros, ressaltam o que deve ser lembrado ou memorizado, dirigem a sequência de ensino durante períodos longos ou mais curtos de tempo, sugerem exercícios e atividades para os alunos que condicionam processos de aprendizagem, assinalam critérios de avaliação, etc. (SACRISTÁN, 1998, p. 156)

No contexto de uma filosofia Waldorf, torna-se função do autor do livro didático estabelecer relações entre a teoria da PW, suas prescrições curriculares e as possibilidades de atividades para os professores destas escolas. Inevitavelmente, seus livros-texto sustentariam a prática e condicionariam o comportamento dos alunos e professores, além de facilitarem a organização das atividades por tempos prolongados (SACRISTÁN, 1998, p. 157). Por exemplo, seus módulos são capazes de determinar quais de seus conteúdos são direcionados à certo período de tempo escolar como semanais, anuais ou, ainda, em Épocas.

Assim, o currículo traduzido e apresentado aos professores pelos livros-textos é necessário para auxiliá-lo em sua prática, pois estrutura os conteúdos e atividades afins facilitam a ação de acordo com as necessidades dos alunos. Entretanto, "o ensino e seu conteúdo são determinados em grande medida pelos materiais. Os alunos passam boa parte de seu tempo nas aulas e nas tarefas em casa em interação com eles." (SACRISTÁN, 1998, p. 160) e a dependência a estes sugere uma desqualificação de seu trabalho.

Com os livros didáticos, comumente homogeneíza-se também os estilos pedagógicos dos docentes como, por exemplo, a atribuição das tarefas de casa passa a ser meras "obrigações impostas aos mesmos para dar cumprimento às exigências que o próprio livro-texto sugere ao professor e que ele adota como guia pedagógico" (SACRISTÁN, 1998, p. 156). Assim, de certo modo, ocorre uma desprofissionalização docente a níveis técnico e intelectual, em que o planejamento da prática pode ser exercido por agentes externos à realidade escolar. Devido à dificuldade em controlar ambos os processos de planejamento e produção, "os professores não são donos de sua prática nem têm autonomia, pois não são os únicos agentes em sua configuração" (SACRISTÁN, 1998, p. 154). Torna-se então papel dos autores destes materiais a confecção e ordenação dos conteúdos e das atividades escolares enquanto que os professores passam a ser meros executores de uma prática.

Contudo, também é impossível, dentro do papel atribuído aos professores, planejar todos seus materiais. Para Sacristán (1998), "um professor que crie todos os meios didáticos para sua prática, inclusive trabalhando em grupo, é, no melhor dos casos, uma meta". Assim, Sacristán (1998) sugere que meios alternativos sejam gradualmente criados e utilizados pelos docentes em uma época em que há tantos recursos externos à escola e de tipo visual, interativo, etc. que poderiam ser elaborações intermediárias possíveis.

A melhoria da educação, portanto, não deve se pautar somente no controle pedagógico através dos livros didáticos, mas "fomentar a pesquisa e a experimentação de materiais alternativos" (SACRISTÁN, 1998, p. 158) e "estimular o intercâmbio dos mesmos entre os professores, alterar o caráter descartável que esses meios têm, favorecer sua diversificação, etc." (SACRISTÁN, 1998, p. 157). Podemos compreender também que a utilização dos livros didáticos sobre as práticas "também pode ser utilizada como uma estratégia de inovação da prática, como uma oportunidade para incidir na realidade, se se sabe aproveitar adequadamente" (SACRISTÁN, 1998, p. 159).

Estas possibilidades de estabelecimento de novas estratégias dependem de uma série de fatores, como o próprio desenvolvimento curricular dentro da política curricular daquele sistema de ensino, a variedade dos recursos disponíveis, existência de políticas da reutilização dos materiais, criação de equipes interdisciplinares, políticas de aperfeiçoamento dos professores e de autorização dos materiais, etc. (SACRISTÁN, 1998, p. 160).

A partir do panorama acerca dos materiais e livros até então encontrados, consideramos analisar a coletânea de preferência da professora. Ressaltamos que a escolha deste referencial, mesmo que compartilhada entre mais docentes Waldorf, ainda é uma dentre as possíveis para estes professores. Contudo, ainda nos é capaz de revelar as relações entre o currículo prescrito por Steiner e o currículo apresentado atualmente, além de como estes influenciam os currículos modelados e em ação.

No site oficial do educador matemático[9],

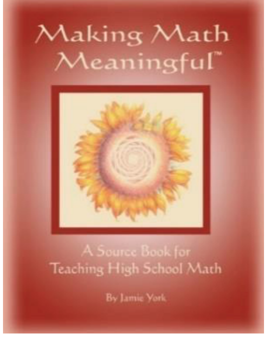
> **Jamie York**, autor, educador matemático Waldorf e missionário matemático, elaborou a série *Making Math Meaningful*™ como um currículo matemática baseado no desenvolvimento humano. Seu objetivo é fortalecer as habilidades matemáticas básicas, estimular o pensamento matemático e despertar o entusiasmo para aprender. A missão de Jamie York é inspirar os professores a reimaginarem a matemática e criarem coragem para sair do ensino tradicional voltado às habilidades matemáticas e então para trazer a real matemática para seus alunos. (TRADUÇÃO DA AUTORA).

Sua coletânea abrange todos os anos escolares e, portanto, os materiais para análise compreendem os títulos referentes ao EM. Disto, há

i) "*A Source Book for Teaching High Scool Math*", que compreende o conteúdo em si;

Neste título, há uma introdução acerca do próprio material com orientações para os professores sobre como utilizá-lo. Em seguida, nos demais capítulos, desenvolvem-se os conteúdos pretendidos ano a ano.

FIGURA 22- "A Source Book For Teaching High School Math".



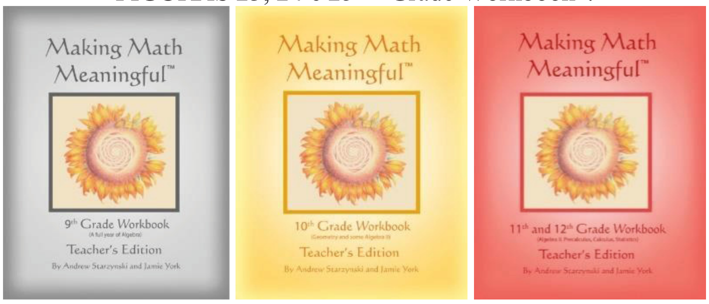
FONTE: https://www.jamieyorkpress.com/bookstore/. Acesso em 20/11/2021.

[9] JAMIE YORK PRESS. **HOME.** Disponível em https://www.jamieyorkpress.com/. Acesso em 27 de ago. de 2021.

ii) Os livros "*Grade WorkBook*" de cada ano escolar e que se constituem, basicamente, de exercícios referentes aos conteúdos do "*Source Book*".

Neles, além da introdução para os professores, há comentários unidade por unidade, listas de exercícios para cada conteúdo e alguns problemas e seus gabaritos.

FIGURAS 23, 24 e 25 - “Grade Workbook”.

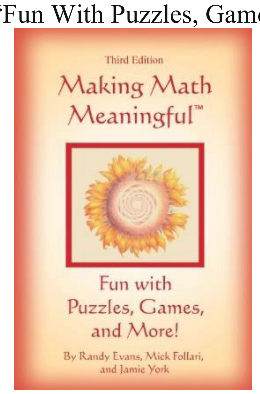


FONTE: https://www.jamieyorkpress.com/bookstore/. Acesso em 20/11/2021.

iii) "*Fun with Puzzles, Games and More!*", com jogos, desafios, enigmas, etc.;

Uma introdução também é disposta no material, e segue-se então com enigmas para cada ano do Ensino Fundamental até que, no EM, todas as séries se encontram inseridas em um único bloco. Ao final, há capítulos específicos de jogos, mágicas matemáticas e atividades mais interessantes para a sala.

FIGURA 26- “Fun With Puzzles, Games And More!”.



FONTE: https://www.jamieyorkpress.com/bookstore/. Acesso em 20/11/2021.

Além destes títulos, há também alguns que são indicados para os estudantes de cada ano escolar. São eles os "***Student's Book***", que contém atividades para os estudantes, e seus respectivos "***Answer Key***" com os gabaritos. Contudo, por não termos tido acesso a estes dois tipos de exemplares durante a pesquisa, pretendemos então analisar os materiais apresentados em **(i)**, **(ii)** e **(iii)**.

Complementando os livros acima, no site oficial de Jamie York encontram-se disponíveis para *download* gratuito algumas fotos e trechos de capítulos destes materiais.[10]

Assim, nota-se que há múltiplos aspectos desta coletânea que são possíveis de serem analisados. De acordo com Sacristán (1998, p. 160-163), as pautas básicas para a análise dos materiais pertinentes ao currículo apresentado são

1. **Suas orientações básicas:** experimentação prévia do material pelo seu autor, declaração e justificativa das orientações psicopedagógicas perante os conteúdos e sua ordenação, possível utilização do material por vários anos, indicação da utilização de outros materiais além do próprio texto, orientação do livro não poder se conectar a problemas de contexto imediato, custo aos alunos e professores, adequação aos alunos, etc.

2. **Conteúdos:** valor do conhecimento defendido, ponderação dos componentes das próprias disciplinas, conexão com problemas práticos e sociais, interdisciplinaridade, sequência ou linearidade proposta, aproximação às realidades sociais e culturais, currículo oculto e seus valores e preconceitos, etc.

3. **Estruturação pedagógica:** há as tarefas voltadas para o professor e a estruturação do material para que estes o adaptem à sua realidade, a extensão da programação do material por um período mais ou menos longo, o conjunto de tarefas exigidas para além do livro, etc. Além disso, há as tarefas dos alunos, seus respectivos tipos e variedades, os recursos extras a serem utilizados para a realização destas, a cultivação de objetivos que extrapolam a mera disciplina em questão, os tipos de objetivos educativos ocultos, tais como habilidades, hábitos e valores, etc.

Assim, são interessantes as orientações básicas dispostas na introdução dos materiais, que indicam concepções do autor sob o ensino de matemática e que incidem sob o modo como os professores e alunos podem se utilizar dos materiais. Paralelamente, podemos analisar a estrutura do livro em seus conteúdos selecionados para as listas de exercícios a serem feitas pelos alunos em sala de aula.

5.3. CURRÍCULO MODELADO PELOS PROFESSORES

Conforme Sacristán (1998), a equipe escolar, professores e alunos são os que atuam diretamente nos currículos que se encontram condicionados pelo ambiente escolar, ou seja, nos

[10] JAMIE YORK PRESS. **Free Downloads.** Disponível em https://www.jamieyorkpress.com/free-downloads/. Acesso em 20 de nov. de 2021.

currículos modelado, em ação, realizado e avaliado. Neste sentido, são os docentes quem mediam as prescrições curriculares, impostas por agentes externos, e os conteúdos e atividades propostas nos materiais apresentados aos seus alunos, dada sua condição escolar. Afinal, somente a equipe escolar e a comunidade local que conhecem as necessidades educacionais, sociais, etc. de seus alunos, além de seus interesses pessoais e coletivos e, a partir disso, agentes escolares "podem dar novas configurações para o fazer pedagógico" (ARAGÃO, 2017, p. 38).

Contudo, as tomadas de decisão não acontecem aleatoriamente, pois a equipe escolar "para realizar seu trabalho pedagógico, planeja sua prática curricular, a qual faz parte de um planejamento mais amplo, ou seja, a proposta curricular da escola e do sistema educacional" (SANTOS, 2019, p. 3596) sob os quais eles não possuem controle total. No planejamento em uma EW, deveriam considerar, por exemplo, quais são os conteúdos pré-estabelecidos pela PW que serão destinados a determinado grupo de alunos, com quem cada docente irá encontrar em horários e espaços pré-estabelecidos, como são os blocos de aulas de Época ou ainda as Aulas Avulsas. Buscariam também saber quais espaços físicos e materiais se encontram disponíveis, como eles devem se relacionar com seus alunos e com seus companheiros de trabalho, como conseguirão garantir o cumprimento das mínimas exigências para as avaliações, etc.

Disto, podemos repensar sobre o discurso idealista de educação que configura os docentes como os únicos responsáveis sobre a qualidade do ensino e, assim, compreendemos como as orientações alheias aos agentes escolares condicionam a estrutura escolar e também impactam em maior ou menor pressão na autonomia dos professores. Ainda assim, Tanner e Tanner (1980, p. 636 e ss., citado por SACRISTÁN, 1998), indicam que em um determinado sistema escolar ao professor pode ser atribuída a função de um mero executor até atuar como uma profissional crítico, que soluciona os problemas que se depara de modo original, pois em maior ou em menor medida, é o professor quem adapta os currículos. Deste modo, Lanz (1979) reconhece que os professores são o coração e cabeça da escola, ou seja, não devem apenas ministrar suas próprias aulas, mas contribuir para as tomadas de decisão da escola.

Diante de situações complexas e imprevisíveis em que o professor atua em seu cotidiano escolar podemos e devemos reconhecer o papel de mediador dos professores quando estes ainda exercem sua autonomia ao observar, interpretar, prever, criar e fechar as situações. Para Sacristán (1998, p. 174), a modelação é o campo em que o professor é capaz de ter mais autonomia, pois diante de uma realidade escolar que é incerta e conflitiva, um modelo técnico "não pode explicar a realidade" (SACRISTÁN, 1998, p. 174). Logo, se há uma margem de autonomia por parte dos docentes no desenvolvimento curricular e se "a implementação de qualquer currículo passa pelo crivo da interpretação dos profissionais de ensino"

(SACRISTÁN, 1998, p. 174), então sua autonomia se encontra na capacidade docente em atribuir significados ao currículo prescrito e apresentado, de acordo com suas concepções educacionais.

Ao tomar suas decisões, o docente expressa sua cultura e ponderações pessoais ao estar ciente de como percebe as demandas dos alunos, de quais conteúdos agradam mais aos alunos, quais são considerados como mais valiosos, as atividades nas quais serão desenvolvidos tais conteúdos, a quantidade de tempo que se dedicará a cada atividade e conteúdo, etc. Ainda, ao planejar suas aulas, é o professor quem decide o que será realizado em sala de aula, pois este dedica mais tempo a uns alunos do que outros ou mais tempo a certos conteúdos do que outros, etc.

O que deve ser ensinado, porque deve ser ensinado e como ensinar partem de concepções de caráter pedagógico, mas também se relacionam com as experiências do professor como aluno em sua formação, em que, muitas vezes, também foram passivos e acríticos. Por exemplo, para cada disciplina há uma visão compartilhada cultural e socialmente no meio em que professores e alunos estão inseridos e isto, inevitavelmente, gera concepções sobre o papel do professor naquela disciplina, que atividades deveriam ser feitas em sala, se há possibilidade de saídas fora da escola, trabalhos em laboratório, etc. Na PW, ainda há concepções compartilhadas sobre o papel dos professores em promover determinadas experiências aos alunos, o papel da matemática na formação do indivíduo, atividades potencialmente educativas, etc.

A valorização que atribui o saber, as atitudes, a ciência, o conhecimento, a cultura e o tempo de experiência profissional também são capazes de contribuir em suas concepções que se projetam na prática (SACRISTÁN, 1998, p. 182). Por exemplo, um professor que possui uma visão formal do conhecimento, consequentemente, terá opções metodológicas diferentes daquele que considera as concepções intuitivas dos alunos. Deste modo, um professor que "tem uma visão da forma linguística como algo absoluto ou a-histórico, será menos tolerante, seguramente, diante os "desvios" que os alunos possam apresentar" (SACRISTÁN, 1998, p. 182). Contudo, não podemos ainda nos esquecer de que os currículos prescrito e apresentado também indicam valorizações na qual o professor também pode se naturalizar com elas, além do autoconceito de seu papel de professor dentro da política curricular daquele sistema de ensino.

Assim, de acordo com suas concepções epistemológicas, o docente adequa os conteúdos para seus alunos, o que condiciona o aluno frente à sua posição para com o saber. De certo modo, os materiais didáticos já realizam esta transformação do conteúdo didaticamente, mas o professor com uma boa formação pedagógica, consciente de suas concepções de conhecimentos e domínio da matéria, ao analisar e criticar os materiais didáticos, torna-se independente deles (SACRISTÁN, 1998). Nota-se então que o momento de maior autonomia e tomada de decisões explícitas é no momento de planejamento, passando, inclusive pela escolha do livro didático e pela seleção e adaptação do que lhe é mais pertinente (ARAGÃO, 2017).

A posição perante o conhecimento e o valor atribuído a ele, portanto, influenciam as tomadas de decisão dos professores frente às situações complexas de seu trabalho, uma vez que "decisões que são automáticas ou implícitas, pois, em geral, o trabalho normal do professor não se resolve por decisões após reflexões prolongadas." (SACRISTÁN, 1998, p. 190).

Hammersley (1977, citado por SACRISTÁN, 1998, p. 191) vai além ao considerar "a definição do papel do professor, a concepção sobre o papel do aluno, a concepção sobre o conhecimento, a natureza que se pensa que a aprendizagem humana tem e é relativa a suas preferências metodológicas". Segundo Tabachnick e Zeichner (1982, citado por SACRISTÁN, 1998), há dilemas quanto à consideração do conhecimento como pessoal ou público, como um produto ou um processo, como algo certo e que representa uma verdade estabelecida ou como problemático, como universalista ou particular e, ainda, enfatizar uma aprendizagem fragmentada ou holística, justaposta ou integrada.

Assim,

> Todas estas dimensões, traduzidas pelo professor em perspectivas pessoais, serão um filtro decisivo para suas atitudes, seleção e definição de critérios na hora de ponderar, selecionar, distribuir conteúdos, selecionar atividades de aprendizagem para seus alunos, estabelecer critérios de valorização das aprendizagens escolares, etc. (...) A formação e a cultura geral do professor, a interação que nele se estabeleça entre o conhecimento de conteúdos e a diferenciação de aspectos relativos à sua estrutura com outros conhecimentos e a valorização pedagógicas serão as responsáveis pelo papel real de mediação que o professor tem no currículo. (SACRISTÁN, 1998, p. 193)

Portanto, diante das concepções dos professores sob o próprio processo curricular, seu papel nesse desenvolvimento e sob os elementos do currículo, os professores se tornam agentes ativos e "modeladores entre a cultura exterior e a cultura pedagógica da escola" (SACRISTÁN, 1998, p. 194) e, portanto, são estes que possibilitam as experiências que os alunos viverão dentro do contexto escolar.

Além das modelações individuais, a níveis mais técnicos e que se circunscrevem ao contexto de cada disciplina, há também as modelações coletivas dos professores sob os aspectos institucionais, organizativos e sociopolíticos. Apesar da mediação individual de cada professor, influenciado por suas concepções de conhecimentos e experiências pessoais, é no contexto social de profissionalização em que são compartilhadas as concepções individuais de cada docente.

Ao contrário do que o individualismo profissional nos faz acreditar e da restrição do campo de atuação docente à sala de aula, algumas variáveis da organização escolar e do desenvolvimento curricular exigem tomadas de decisões coletivas como, por exemplo,

> O horário escolar, o uso de determinados meios nas escolas, a escolha do material didático ou livros-texto, a criação de um ambiente coerente, o estabelecimento de normas coletivas para os alunos, a existência de um clima de participação democrática nas escolas, a organização de atividades para curriculares e extracurriculares, etc. (SACRISTÁN, 1998, p. 196).

Alguns desafios, assim como certos objetivos, não se restringem a um professor ou disciplina em particular como, por exemplo, "ensinar a se expressar, comunicar com clareza pensamentos próprios, fundamentar uma atitude crítica, fomentar hábitos de trabalho" (SACRISTÁN, 1998, p. 195). Além disso, qualquer instituição escolar está inserida em uma comunidade, "dentro de uma determinada filosofia educativa e sócio-política, atendendo a sua cultura" (SACRISTÁN, 1998, p. 197) e, por isso, o planejamento curricular coletivo deve levar em conta as demandas, exigências e projeções da comunidade na qual está inserida. Portanto, diante de todas as situações escolares, se faz necessário que o grupo de professores compartilhe um significado mínimo acerca dos elementos fundamentais do currículo e sua implementação de forma coerente em sua totalidade.

Em busca de uma inovação curricular, é essencial que os professores se conscientizem de seu papel ativo como transformador curricular e se faz fundamental que o currículo proponha mais caminhos que são possíveis do que soluções fechadas. Por isso, Sacristán (1998) defende a liberação progressiva de uma profissionalização individualizada para uma profissionalização compartilhada, pois ainda que esta possa implicar a perda da autonomia do professor sob certos aspectos, possibilita que estes compartilhem suas experiências, questionem seus modelos pedagógicos e organizacionais entre si, ganhem voz frente ao controle dominante sobre seu trabalho e que também ofereçam um projeto curricular mais coerente aos alunos.

Sendo assim, quanto às modelações coletivas, o modelo de gestão das EWs é adotado de acordo com as indicações de Rudolf Steiner. A escola pesquisada não possui a figura do diretor, mas este ainda é responsável burocraticamente pela instituição e, com isso, todas as decisões a serem tomadas pela escola passam pela discussão de um grupo de professores chamado Conferência Interna.

A professora participante, inclusive, era integrante deste grupo durante a Pesquisa. Nos momentos de tomada de decisão para a divulgação de nossos dados, como o nome da escola e dos participantes, fotografias, etc. a docente nos orientou a levar o tema para as recorrentes reuniões da Conferência Interna, para que todos os professores estivessem cientes.

Um traço interessante das EWs é a integração entre os professores desta rede. Em uma identificação profissional e cultural com a filosofia de Steiner, notamos que as EWs interagem entre si de diversas formas, em grupos de redes sociais, cursos e palestras antroposóficas, eventos escolares com os alunos, etc. Também há um intercâmbio entre professores de determinadas áreas que são contratados para trabalharem em outra EW.

Por exemplo, além de atuar na escola e em Seminários de Formação de Professores Waldorf, a docente também realizou tutorias de matemática com alguns professores de classe de outras instituições. Assim, tivemos acesso a duas delas de modo virtual e pudemos conhecer um pouco da dinâmica de apoio entre os docentes.

Para então compreendermos como podemos analisar o currículo modelado tanto individual quanto coletivamente, observa-se que na caracterização do currículo modelado pela escola de sua pesquisa, Côrtes (2015, p. 82) aponta

> Alguns aspectos como: ações da gestão e da coordenação pedagógica da escola, organização do tempo escolar, aspectos pedagógicos comuns a todos os professores, recursos disponíveis, características das professoras.

A pesquisadora traz neste momento de sua dissertação os aspectos gerais da escola, desde seu ambiente físico até os modelos de gestão e de tomadas de decisões em grupo e individuais dos professores. Sua análise se pauta no Projeto Político Pedagógico, em entrevistas, na observação de reuniões, nos documentos da Secretaria da Educação, nos registros de planejamento e, inclusive, na sequência didática observada nas aulas e nos Materiais de Consulta dos alunos.

Assim, esta pesquisa permite que a análise do currículo modelado seja feita a partir de alguns documentos que atravessam todos os currículos, como o Plano Escolar, registros no Diário de Campo sobre duas tutorias ministradas pela professora, suas aulas e conversas cotidianas que tivemos, além de suas postagens no *Google Classroom*. Considerando a prévia caracterização da escola junto à metodologia, apresentamos os dados constituídos que mais se interagem com currículo modelado coletivamente pela equipe escolar e individualmente pela professora em suas concepções de educação matemática, de conteúdo valioso e frente à realidade escolar.

Considerando o Plano Escolar, temos a apresentação da estrutura da escola e de algumas premissas básicas da PW que assim condicionam o ambiente e o trabalho dos professores e alunos. Por exemplo, sobre as aulas,

> O sistema de ensino por épocas é adotado na Pedagogia Waldorf por se revelar eficiente na economia de tempo, na integração e abrangência de conteúdos na possibilidade da transdisciplinaridade.
> No aspecto cooperativo, cabe destacar que para sua implementação subdivide-se o conteúdo do ano em unidades condensadas (épocas). Os docentes implicados determinam, antes do início do ano escolar, a duração e a distribuição das épocas tendo-se em conta para isso, os critérios básicos do ritmo (recurso didático que desperta e predispõe os alunos à aprendizagem), os grandes temas globais, os conteúdos básicos comuns e o desenvolvimento dos temas fundamentais selecionados, levando em conta a etapa evolutiva, o nível de maturidade e a peculiaridade do grupo de alunos.
> Cada época é dada nas duas primeiras horas do dia e tem duração aproximada de 3 a 4 semanas. Dentro deste período, o professor ministrará o conteúdo como um cosmo harmonioso que assume uma estrutura admirável e transforma o assunto numa espécie de obra artística integral, que constitui para o aluno um tesouro de forças e segurança para toda a vida.
> Os conteúdos ministrados nas épocas são das áreas de Ciências, Matemática, História, Geografia e Português. As demais disciplinas compõem o horário escolar após as duas horas da época. Conteúdos como Português e Matemática, além de serem trabalhados na época, são trabalhados também no horário semanal, completando-se assim a carga horária prevista. (PLANO ESCOLAR, 2021, p. 13).

Há também um panorama geral sobre o EM.

> A mudança esperada de um jovem no ensino médio, em relação ao último ano do ensino fundamental, é uma crescente vontade de encontrar a si próprio no âmbito do pensar, inicialmente. Uma busca mais contundente de sua individualidade trará clareza de raciocínio, através do exercitar de sua capacidade de julgar. Isso ajudará o estudante a transformar o predomínio das antipatias e simpatias, o que lhe confere um período de confronto em sua racionalidade, capaz de captar das leis naturais um pensar analítico. (PLANO ESCOLAR, 2021, p. 51)

Para além de todas as disciplinas e atividades que são desenvolvidas, o Plano Escolar apresenta comentários gerais sobre o planejamento da matemática para cada ano escolar e seus respectivos conteúdos, objetivos e metodologia a ser empregada. Abaixo, as indicações para o 10° ano, a título de exemplo.

> **MATEMÁTICA – GEOMETRIA**
>
> Neste ano escolar o aluno deve ser levado do conhecimento à cognição. A trigonometria e o estudo das funções são temas onde esse aspecto pode ser amplamente abordado. Na agrimensura o mundo corrige a precisão e assertividade do aluno, e não o professor. Os conteúdos devem possuir um cunho prático, muito presente o levantamento topográfico, aprendido de forma sintética e concreta. A pergunta que norteia os trabalhos e alimenta a necessidade anímica desses jovens é Como as coisas funcionam.

Objetivos:
• Reconhecer leis e padrões tanto na Álgebra quanto na Geometria, de forma a entender como as coisas funcionam.
• Ampliar a consciência do aluno sobre curvas vivenciadas através de movimentos sejam mecânicos ou orgânicos e compreender como matematizar essas formas através de leis algébricas e processos construtivos geométricos.
• Desenvolver habilidades como a precisão e apresentação artística dos desenhos geométricos.

Conteúdo:
• Teorema de Tales e Pitágoras (Revisão);
• As triplas pitagóricas;
• Razões Métricas no triângulo Retângulo;
• Razões trigonométricas no triângulo Retângulo;
• Ângulos notáveis;
• Soma dos ângulos internos de um polígono qualquer (revisão);
• Calculando área de um polígono qualquer – método da triangulação;
• Lei dos senos e cossenos;
• O círculo trigonométrico – seno, cosseno e tangente de ângulos maiores de 90º;
• Operações matemáticas com base 60 - graus, minutos e segundos (revisão);
• Medição de arcos em radianos;
• Espiral de triângulos retângulos com um cateto = 1 (espiral de raízes);
• Progressões Aritméticas: Termo geral, propriedades; Soma de n termos;
• Progressões Geométrica: Termo geral, propriedades; Soma de n termos;
• Área e Volume de diversas formas geométricas: circunferência, trapézio, triângulo, paralelogramo, cone, esfera, cilindro, pirâmide.

Desenho Geométrico:
• Espirais: falsas espirais de 2, 3 ou mais centros; envolvente do círculo; a espiral de Arquimedes; espiral de Fibonacci. Espiral Hiperbólica; Espiral Equiângula (ou Logarítmica);
• A Razão Áurea, o Número de Ouro e os meios geométricos de obter essa razão. Sua ocorrência no pentagrama, o Retângulo Áureo, o Triângulo Sublime e a Espiral de Ouro;
• Outros temas: Ciclóides, Epiciclóides e Hipociclóides, tanto simples como alongadas e encurtadas.

Metodologia:
• Cada tema é apresentado inicialmente com experimentos científicos, os quais devem ser contemplados;
• Realização de simulações até organização formal do conceito ou da regra geral;
• Exercitação com listas de exercícios.
• Observar as curvas, procurando caracterizá-las;
• Compreender o padrão geométrico de sua gênese;
• Construir com exatidão e limpeza as curvas com utilização de instrumentos de desenho geométrico;
• Ligar os pontos encontrados das curvas à mão livre, experimentando o movimento das mesmas.

AGRIMESURA
Objetivos:
• Efetuar o levantamento planialtimétrico de uma área rural.
• Desenvolver a capacidade de executar tarefas metódicas com disciplina, organização, precisão, autonomia, iniciativa, companheirismo, responsabilidade, engajamento e criatividade.

Conteúdo
• Conceitos básicos de agrimensura: curvas de nível, cota, planialtimetria, etc;
• Prática: Levantamento planialtimétrico – método utilizado – caminhamento;
• O que é um teodolito, para que serve, como utilizá-lo;

> • Como utilizar um teodolito.
> • Cálculo de desnível;
> • Fechamento horizontal de um polígono;
> • Fechamento vertical de desnível.
>
> **Metodologia:**
> • Viagem pedagógica de 5 dias com trabalho de campo durante o dia e aulas expositivas à noite.
> • Trabalho em grupos de 3 alunos;
> • Levantamento planialtimétrico pelo método de caminhamento com teodolito de uma área de cerca de 6 mil m²;
> • Produção de mapas com uso de instrumentos manuais (transferidor, régua, etc). (PLANO ESCOLAR, 2021, p. 51-53).

Disto, brevemente observamos que, para além dos conteúdos prescritos por Richter (2002) e destinados a determinados anos escolares, os objetivos das atividades e a metodologia empregada nas aulas de matemática no EM também é de suma importância. Contudo, nota-se que alguns conteúdos anteriormente prescritos ao 10° ano, como a "Equação de 2° Grau", não foram consideradas para este ano no Plano Escolar.

Sob a perspectiva individual da professora participante, a partir do acesso que tivemos às postagens do *Google Classroom* e das observações no Diário de Campo, foi possível resumir abaixo os conteúdos matemáticos trabalhados ao longo do ano de 2021 em todas as salas do EM. Destacamos em negrito e itálico os conteúdos que acompanhamos mais diretamente em seu desenvolvimento e, disto, em caixa cinza indicamos os assuntos dos quais obtivemos suas respectivas listas de exercícios e conteúdos que a professora disponibilizava aos alunos via impressa.

QUADRO 4- Relações entre os conteúdos programados em 2021 de acordo com as postagens no *Classroom* e Diário de Campo.

	BIM	Época	Curso	Avulsa
9° ANO	1°	Análise Combinatória e Probabilidade Geometria Descritiva		Geometria Descritiva
	2°	***Álgebra***		***Pré-Álgebra, Álgebra Básica, Expoentes e Polinômios, Fatoração***
	3°		***Fatoração, Frações e Raízes Logaritmo***	***Fatoração, Frações e Raízes Logaritmo***
	4°			
10° ANO	1°			Progressões, Sequências e Séries
	2°	Trigonometria	Geometria Euclidiana	
	3°	***Equação de 2° Grau, Logaritmo e Leitura de "Testemunha de Acusação" de Agatha Christie***		***Preparação para Equação de 2° Grau***
	4°	***Viagem de Agrimensura***		Preparação para a Viagem de Agrimensura
11° ANO	1°	Geometria Cartesiana Geometria Projetiva		Geometria Cartesiana Geometria Projetiva
	2°			Geometria Espacial
	3°		***Análise Combinatória e Probabilidade***	Análise Combinatória e Probabilidade
	4°			***Logaritmo***
12° ANO	1°		Análise Combinatória e Probabilidade	Análise Combinatória e Probabilidade
	2°			Geometria Cartesiana II
	3°			***Números Complexos***
	4°	***Preparação para o ENEM e Vestibulares, Leitura de "O lamento de um matemático" de Paul Lockhart[11] e Revisão de Crescimento Exponencial, Geometria Espacial, Análise Combinatória e Probabilidade e Trigonometria***		Preparação para o ENEM

FONTE: Adaptação do MATERIAL DA PROFESSORA (2021).

[11] Constado no APÊNDICE 4.

Como foi possível notar, supondo questões de economia e afinidade da professora, durante o 2° semestre de 2021 não presenciamos aulas que remetiam às Geometrias Não-Euclidianas no EM das EWs. Normalmente, quando havia Época ou Curso em uma determinada sala, o mesmo conteúdo se estendia às Aulas Avulsas. Por exemplo, no 3° bimestre do 10° ano houve uma preparação para o estudo das "Equações de 2° Grau" nas aulas Avulsas de agosto. Assim, em setembro, tanto as aulas de Época quanto as Avulsas foram preenchidas pelas "Equações de 2° Grau". O mesmo aconteceu com os conteúdos de "Análise Combinatória e Probabilidade" e "Logaritmo".

Contudo, esta tabela apenas resume o cronograma que fora exposto aos alunos, pois este fora modelado e remodelado antes de ser postado e, inclusive, passou por transformações ao ser realizado. Ainda assim, há uma quantidade significativa de trechos de conversas cotidianas e de observações das aulas de matemática constatadas no Diário de Campo que sinalizam a relação entre as concepções de educação e algumas tomadas de decisão feitas pela professora ao longo dos meses de planejamento das aulas.

Por exemplo, para o 10° ano, considerando as necessidades dos alunos,

> A professora explicou que, como eles tiveram um ano passado pandêmico, apesar do currículo indicar trabalharem geometria euclidiana e trigonometria, eles iriam focar na álgebra do 9° ano. (DIÁRIO DE CAMPO, 10º ANO, 03/08/2021).

No 12° ano acompanhamos algo parecido em que

> Os alunos disseram que fizeram questões da FUVEST na quarta. Eles continuaram a fazer a lista do ENEM.
> (...)
> Neste dia, a professora também me disse que não se sentia pronta para dar uma Época de Filosofia da Matemática e que não sabia o que iria desenvolver na sala." (DIÁRIO DE CAMPO, CONVERSA COM A PROFESSORA, 16/09/2021).

Devido à esta turma de 12° ano ter sido a primeira da história da escola, a docente assim encontrou uma necessidade maior de preparação para o comprimento do currículo Waldorf de "Filosofia da Matemática". Paralelamente, ela também se deparou com os anseios dos alunos para os vestibulares e com isso, já no dia 23/09,

> A professora disse que ia fazer uma "salada mista" na Época do 12° ano e pro 9° ano ia passar 2° Grau, mas somente com alguns métodos que passou para o 10° ano. (DIÁRIO DE CAMPO, CONVERSA COM A PROFESSORA, 23/09/2021)

Nestas aulas do 12° ano, ao acompanhar a leitura do texto "O lamento de um matemático" junto aos alunos, a professora discutiu temas pertinentes à educação matemática, tais como o medo dos alunos da matemática ou como muito dos professores Waldorf foram antes alunos em escolas tradicionais, o que também dificulta seus trabalhos. Com a mesma atividade, foi possível notar como a concepção da filosofia da educação matemática antroposófica e as orientações dos materiais didáticos Waldorf perpassam o discurso dos professores.

> A professora prosseguiu no texto impresso "O lamento de um matemático", de Paul Lockhart. Ela ia comentando conforme leitura e pedia para os alunos que "não precisavam concordar com tudo". Este texto evidenciava a filosofia da educação matemática de Steiner de modo a propor a matemática como arte. Foi comentado, em diálogo com a opinião dos alunos, sobre a matemática ser a matéria mais espiritual e que os professores tiveram uma educação tradicional, sendo difícil realizar algo diferente. (DIÁRIO DE CAMPO, 12° ANO, 29/09/2021).

A partir disso, observa-se que o planejamento também se realiza ao longo das aulas, ou seja, ao longo da própria prática. Vamos dar sequência a próxima fase de desenvolvimento curricular, o currículo em ação.

5.4. CURRÍCULO EM AÇÃO NA ESCOLA

A partir dos currículos anteriores, é no currículo em ação que todas as intenções e projeções sobre a educação se confluem com diversas variáveis da realidade escolar e, na prática, se manifesta e adquire significado para os alunos e para os professores.

Geralmente tais práticas curriculares recaem sobre as aulas de suas respectivas disciplinas que são determinadas a acontecerem em um certo espaço físico e em certos períodos curtos de tempo. Por isso, é comum encontrarmos uma estrutura de aula que é comum a grande parte dos professores e das disciplinas escolares, sobretudo no modelo tradicional escolar. Basta recordarmos de experiências escolares e do ideário de escola que a maioria de nós possuímos, em que se predominavam certos tipos de atividades.

Entretanto, apesar das atividades que as são comuns, as aulas ainda são complexas, pois nelas o professor se encontra executando diversas tarefas ao mesmo tempo, como ensinar, avaliar, administrar o tempo e os conteúdos, tomar decisões imediatas sobre acontecimentos imprevisíveis, etc. e ainda em equilibrar as demandas institucionais com as negociações feitas com seus alunos (SACRISTÁN, 1998).

Deste modo, para Sacristán (1998), as **tarefas escolares** são boas unidades de análise da prática, uma vez que elas são mediadoras entre a teoria e a prática e também se referem a todos os aspectos que se entrecruzam neste processo de ensino e aprendizagem. Se, por um lado, observamos que muitas delas são rotineiras e informais como, por exemplo, organizar o ambiente, recolher os materiais, etc. por outro, as atividades formais e acadêmicas são as que se referem diretamente à necessidade de preenchimento do tempo escolar de modo a desenvolver o currículo e, assim, cumprir a função e os objetivos da escola. Logo, ao analisarmos as atividades menores observamos que estas possuem uma coerência interna entre si e que, justapostas, dão significado ao projeto maior.

Cada tarefa estrutura a aula de um certo modo, criando assim determinados ambientes de ensino e aprendizagem. Para cada tipo de tarefa, observamos suas particularidades em seu ritmo de realização, pois, por exemplo, um professor pode estruturar suas aulas para que seus alunos realizem atividades mais mecânicas e individualizadas, como exigir cópia da lousa, e ainda estruturá-las com atividades mais livres ou em grupo, propondo trabalhos mais investigativos ou com temas de livre escolha. Podem também predominar as tarefas de ensino, sob a função do professor, ou sob as tarefas para aprender, com maior protagonismo por parte dos alunos. Por isso, se nas atividades entrecruzam diversos aspectos, então nenhum destes deve ser analisado isoladamente ao se buscar conhecer o modelo de ensino ou da escola que são caracterizados por se distinguirem nos tipos de tarefas e os modos em que são sequenciadas em suas práticas.

Ainda na PW, o docente deveria considerar atividades que estimulem o pensar, o sentir e o querer e poderia realizá-la tanto de modo mais mecanizado quanto atribuindo aos estudantes maior autonomia. Sobretudo para o Ensino Fundamental Waldorf,

> A proposta Waldorf também tem o ensino centrado no professor e no seu papel de transmissor e expositor do conteúdo através de preleções ou desenvolvimentos teóricos na lousa. No que tange a aprendizagem do aluno, esta não é considerada tão passiva, há memorização, reprodução dos raciocínios e procedimentos ditados pelo professor, mas há também uma grande atividade do aluno, seja através do corpo ou através de atividades que são elaboradas visando sua aprendizagem. (SANTOS, 2015, p. 180).

Contudo, o tempo disponível para cada aula e disciplina também contribui para que um número reduzido de tarefas possa ser realizado, o que faz com que geralmente os professores possuam estilos muito semelhantes entre si. Eles não podem estar reinventando sua prática cotidianamente e, por isso, a busca por uma inovação curricular e a mudança em seu estilo docente perpassa por um processo paulatino de incorporação de “achados” (SACRISTÁN, 1998, p. 216). Sobretudo na PW, observa-se a estruturação das aulas em Épocas, o que possibilita a incorporação de novas atividades às que comumente são realizadas no ensino tradicional. Ainda assim, ao se prolongarem durante o tempo, suas tarefas expressariam seu modelo pedagógico mais amplo, sendo capazes de definir sua cultura Waldorf.

As **concepções dos professores** acerca dos **conteúdos e seus formatos** também se expressam na prática, pois podemos encontrar conteúdos valiosos sendo explorados de modo pouco estimulante e vice-versa. Mesmo assim, notamos que a maioria das aulas no ensino tradicional são constituídas de exposição de conteúdos na lousa quando, em verdade, tarefas potencialmente valiosas para a matemática são distintas das tarefas potencialmente valiosas para as artes, para as ciências, e demais áreas, o que escapa à pretensão de delimitar um único tipo potencial de tarefa a todas as áreas de conhecimento.

Na matemática, também devido a uma concepção de senso comum acerca de sua natureza exata e inquestionável, é mais comum notar, por exemplo, a presença de tarefas mecanizadas e fechadas, com um único resultado exato, ao invés de atividades de investigação matemática ou nas quais o aluno tenha espaço para expressar suas intuições ou ideias mais informais. Sendo assim, se a PW se apresenta mais aberta às atividades artísticas nas disciplinas mais acadêmicas, como seria uma aula de matemática no EM sustentada por esta teoria? Quais atividades desenvolveriam, respectivamente, o sentir, o pensar e o querer? Seriam as tarefas nas aulas de matemática da PW inovadoras do ponto de vista da educação matemática?

A tarefa também depende de fatores do contexto escolar que estão além do professor. Por exemplo, atividades extraclasse requerem uma organização escolar favorável, além dos possíveis materiais os quais os alunos devem ter em mãos. Por outro lado, atividades mais complexas são difíceis de serem especificadas em modelos fechados acerca de como devem ser realizadas, o que faz com que professores os adaptem através de buscas e fontes informais.

Com a seleção das tarefas, **condicionam-se os resultados** que podem ser obtidos na realização das mesmas. Um mesmo conteúdo produz efeitos diferentes se abordado através de diferentes tarefas e, de acordo com suas exigências, os alunos adquirem diferentes modos de aprender frente àquilo que lhe é esperado em cada tipo de situação. Sendo assim, deveríamos considerar as intenções e o que se esperaria de um aluno em cada uma das tarefas nas aulas de matemática.

O conteúdo e a forma da avaliação ficam então condicionadas, pois o professor pode selecionar tarefas que prezam por alguns conteúdos considerados valiosos e que também permitem maior controle dos resultados e, assim, facilitar seu processo avaliativo. Enquanto algumas atividades possuem menor grau de ambiguidade na sua interpretação e na resolução por parte dos alunos, outras são mais complexas e imprevisíveis e exigem do professor maior segurança, assessoramento e supervisão sobre a classe. A depender da tarefa selecionada, ela pode simplificar ou dificultar os processos avaliativos.

Neste cenário, o aluno aprende o que é um bom aluno para o sistema e consegue apreender o que se espera dele, o que deve ser feito e como deve ser feito. Além disso, pode construir um ideário acerca da escola e de seus conteúdos, como por exemplo, ao lembrarmos de como eram nossas aulas de matemática na escola, podemos observar sua relação com o ideário comum de que ela é desinteressante e não é para todos.

Dentre outras razões, como vimos anteriormente, o professor possui uma multiplicidade de funções e, portanto, deve planejar sua aula para que este consiga prever, de alguma forma, o ambiente de sua aula e, assim, ordenar o transcorrer de sua prática a fim de cumprir seus objetivos e, neste sentido, **as tarefas simplificam o planejamento do professor.** Diante da **gestão da classe**, podemos observar que

> Uma tarefa mais definida, quanto ao processo que se deve seguir para obter o resultado que se espera dela, permite um controle mais fácil do grupo de alunos. Uma tarefa mais indefinida exige mais orientações do professor para os alunos, mais supervisão e assessoramento, mais volume de atividade, se queremos expressá-lo assim. (SACRISTÁN, 1998, p. 260).

Ao decidir as tarefas, o professor então "escolhe o tratamento de que o currículo será objeto e estabelece as regras de jogo para o comportamento dos alunos dentro da aula" (SACRISTÁN, 1998, p. 233). Com a previsão do seu trabalho, facilita-se sua posição diante das situações que podem surgir e o que será necessário para manter os alunos trabalhando e, portanto, conduzi-la até o final da realização da tarefa. Entretanto, ao executarem uma tarefa junto aos alunos, exige-se também flexibilidade por parte dos professores, pois as interações entre o professor, o aluno, seus colegas e os materiais também influenciam e são influenciados pela tarefa.

Sendo assim, o trabalho docente está sob condicionamentos institucionais que impactam a escolha das tarefas e seus potenciais efeitos educativos, mas o professor também possui um certo **grau de autonomia** no qual toma decisões individualmente. Diante desta complexidade de tarefas, Sacristán (1998) atribui a competência à capacidade de enfrentar e flexibilizar as situações que lhe são colocadas. Perante elas, pode-se adotar maior submissão, tentativa de resistência ou driblar seus limites através de seus esquemas práticos teóricos, também seus esquemas práticos subjetivos pessoais. Diante de uma prática institucionalizada, estes aprendem mais por osmose do que por suposições teóricas racionais (SACRISTÁN, 1998). Assim, um professor Waldorf, ainda que deva modelar sua aula e aplicação baseadas na teoria da PW, também toma suas decisões em demais experiências informais ou pessoais. Por isso, não podemos generalizar um modelo universal de planejamento ou atuação por parte dos professores Waldorf, uma vez que isto depende também de situações muito específicas de cada professor e turma. Apesar disso, ainda podemos compreender as possibilidades de atuação no EM de uma EW.

Do mesmo modo, as tarefas também, apesar de serem as mesmas, podem possuir significados distintos, a depender de sua sequência e o tempo em que se dedica à cada uma delas. Um exercício, se colocado na introdução de um conteúdo, pode ser um meio de aprendizagem dos conceitos enquanto que, se colocado como tarefa de casa, se torna uma aplicação dos mesmos conceitos. Disto, é indispensável considerar a relação do currículo em ação com o currículo apresentado, pois as tarefas também são apoiadas pelos conteúdos curriculares e as atividades que devem realizar, o que, de certo modo, é indicado nos materiais didáticos e livros-textos. Junto à experiência profissional e ao conhecimento da matéria, através do contínuo uso dos livros didáticos vão se condensando modos naturais de como se comportar durante as atividades na escola, mesmo em tarefas consideradas inovadoras, mas que se definem ao longo do tempo.

Portanto, é inegável um certo automatismo na escolha de cada tarefa, pois as decisões tomadas pelos docentes em seu contexto necessitam de certa urgência e sua profissionalização não possibilita isso. Assim, em condições de trabalho que tornam difícil a realização de tarefas mais complexas, Sacristán (1998) orienta que mudanças sejam feitas sob a organização escolar que possibilitem não somente o conhecimento de novas atividades práticas, mas também na busca de uma melhor fundamentação para as tarefas que seleciona. Sua inovação também exige uma mudança na estrutura escolar, seus materiais, formação dos professores, etc. e inclusive, quando as tarefas típicas do sistema tradicional são tidas como normais ou únicas a serem realizadas no desenvolvimento dos conteúdos. Observamos que na PW, desde os currículos prescrito e apresentado, que os conteúdos, a metodologia a ser aplicada e a própria estruturação escolar são comumente fundamentadas e justificadas por sua teoria.

Considerando então estes diversos aspectos das tarefas, de acordo com Côrtes (2015), para a compreensão do que acontece na escola, as observações realizadas na escola são as melhores fontes de dados. Portanto, nossas observações anotadas no Diário de Campo são os dados que nos permitem compreender as práticas cotidianas nas aulas de matemática do contexto pesquisado.

Conforme nossa disponibilidade e o cronograma da professora, entre os meses de junho e novembro de 2021 estivemos cerca de três vezes por semana na escola pesquisada. Com isso, presenciamos aulas de Época, Curso, Avulsas e também plantões de dúvidas de matemática dos 8°, 9°, 10°, 11° e 12°.

Para este momento, selecionamos as anotações de alguns episódios do Diário de Campo com o intuito de apresentar o modo com que constituímos os dados e também aspectos do currículo em ação. Estes episódios são da Época de “Equação do 2° Grau” e “Logaritmo” do 10° ano. As selecionamos deste modo, pois são aulas que demonstram variados aspectos presentes em tantas outras aulas.

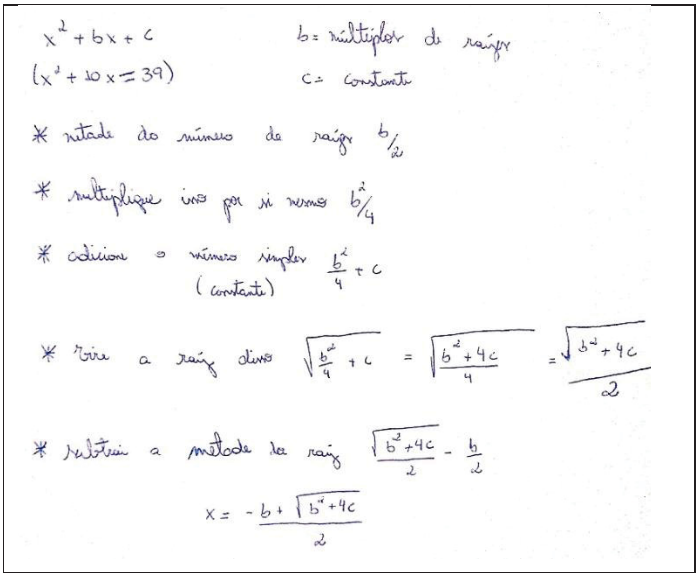
Vejamos a descrição do dia 02/09, no 10° ano.

QUADRO 6- Descrição do dia 02/09 no 10° ano.

No dia 02/09, no 10° ano, houve transmissão da aula. Ao recitarem o poema de Steiner, novamente foi retomada a questão de trocar o “homem” por “humano”. Isso significaria quebrar tradições “mas vocês que sabem” (palavras da professora). E assim foi feito.

Então recebi um caderno em espiral que, na verdade, era a impressão do livro “Testemunha de acusação”, da Agatha Christie. Durante cerca de meia hora, cada aluno lia as falas de um personagem e assim, terminaram o 1° ato neste dia.

Na lousa estavam contidos os passos para descobrir a “fórmula de x em termos de b e c” e que resultava na Fórmula de Bhaskara. Eles já haviam lido as listas 5 e 6 anteriormente e nesta aula continuaram a lista 6. Em interação com os alunos, foi passado na lousa para o material de consulta.



$x^2 + bx + c$ b = múltiplos de raízes

$(x^2 + 10x = 39)$ c = constante

* metade do número de raízes $b/2$

* multiplique isso por si mesmo $b^2/4$

* adicione o número simples (constante) $\frac{b^2}{4} + c$

* tire a raiz disso $\sqrt{\frac{b^2}{4} + c} = \sqrt{\frac{b^2+4c}{4}} = \frac{\sqrt{b^2+4c}}{2}$

* subtraia a metade da raiz $\frac{\sqrt{b^2+4c}}{2} - \frac{b}{2}$

$x = \frac{-b + \sqrt{b^2+4c}}{2}$

A professora ressaltou que o “a” foi retirado, pois se tratava de uma equação reduzida

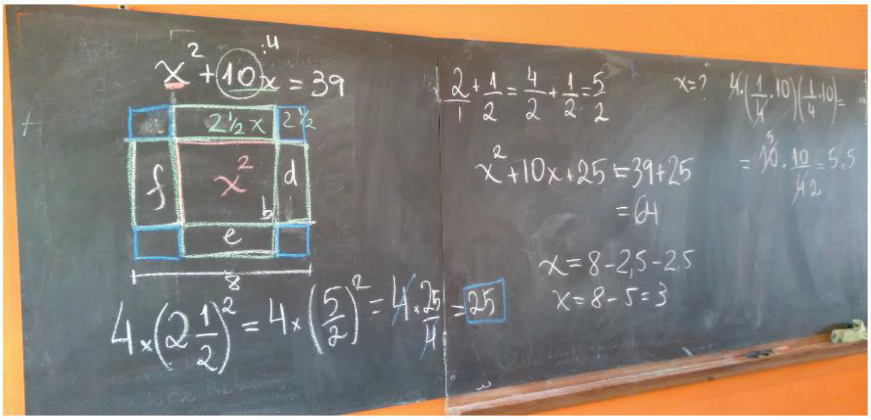
Deu-se sequência para os alunos fazerem o resto da lista 6 para entregá-la. Na lousa, foi feito um exercício.

FONTE: DIÁRIO DE CAMPO, 10° ANO, 02/09/2021.

Já no dia 03/09, temos a continuação do dia anterior,

QUADRO 7- Descrição do dia 03/09 no 10° ano.

No dia 03/09, no 10° ano, houve transmissão da aula. Após darem continuidade na leitura de Agatha Christie, por volta das 8:10, a docente perguntou se queriam fazer exercícios ou tentarem engatar a leitura da lista 7. Assim, seguiram na lista 7. Conforme liam o texto em voz alta, rabiscos e esquemas iam sendo passados na lousa.



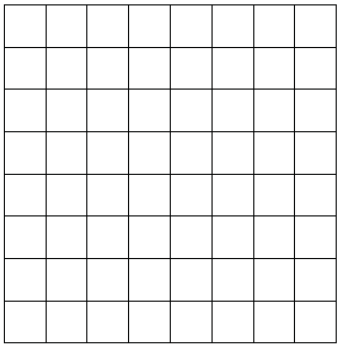
Por volta das 8:40, os alunos começaram a voltar para os exercícios. Enquanto a docente auxiliava um grupo de alunos na mesa do meio, andei pelas mesas e notei uma dupla fazendo a lista 10 e deixando as contas no caderno e o resultado final na lista de papel. Na mesa da frente, um aluno dormia enquanto os outros discutiam as questões juntos. Perguntei à professora sobre o livro que estavam lendo e ela me disse que era para desenvolver o julgamento deles.

FONTE: DIÁRIO DE CAMPO, 10° ANO, 02/09/2021.

Avançando alguns dias, temos um outro exemplo.

QUADRO 8- Descrição do dia 23/09 no 10° ano.

No dia 23/09, no 10° ano, a filha da professora estava dedilhando violão no início da aula. Assim, fizeram o poema de trás para frente e, em seguida, foi perguntado quantos quadrados tem a malha abaixo.



Os alunos estavam sentados em duplas nas mesas e duas delas descobriram um padrão, chegando na resposta. A docente perguntou quem queria ir à lousa e uma aluna foi explicar o raciocínio dela e de outros colegas, desenhando na malha e fazendo contas na lousa.
Foram feitos 10 minutos de cálculo mental, fazendo perguntas simples como 112, 13-24, 13% de 4, 36, etc. Quem soubesse a resposta deveria levantar a mão para responder.
Em seguida, as questões abaixo para o caderno da Época e explicado, através destes exercícios, os procedimentos.

72) $\log_5 (1/25) = x$ 77) $\log_{25} 5 = x$

Seguiu o restante da aula com a docente e eu auxiliando os alunos, em grupo e cada um a seu tempo, fazendo as listas. Uns faziam direto na lista, outros em cadernos diferentes, ou ainda no de época. Enquanto isso, tirei fotos do caderno da filha da professora com as tabelas, exercícios, desenhos e definições das lousas.

FONTE: DIÁRIO DE CAMPO, 10° ANO, 23/09/2021.

Considerando assim as tarefas que preenchem as aulas como unidade de análise do currículo em ação, a partir dos episódios, podemos notar uma certa estrutura nas aulas da Época, indicadas pelas PARTES 1 e 2, e de quaisquer aulas de Curso ou Avulsas, indicadas na parte 2. Com vistas a fornecer ao leitor uma ideia da rotina das aulas, destacamos a estrutura de uma típica aula Avulsa ou de Época.

QUADRO 9- Resumo da estrutura das aulas.

PARTE 1- Primeiros 40/50 minutos
Recitação do poema proposto por Steiner
Diálogos cotidianos
Sugestão de enigmas ou leitura de livros
Exposição das respostas do enigma por algum aluno na lousa
PARTE 2- Últimos 50/60 minutos
Eventualmente, retomada rápida sobre a aula anterior
Retomada de exercícios importantes das listas ou síntese de um novo conteúdo por meio de exemplos
Continuação do fazer das listas individualmente ou em grupos
Auxílio nas listas conforme necessidade dos alunos
Exposição do gabarito pelos alunos na lousa

FONTE: A autora (2022).

A partir disso, notamos que as tarefas práticas seriam então a última expressão da teoria da PW e suas intenções que se projetam em seu planejamento e são articuladas a outras de ordem pedagógica, social, psicológica, etc. Por elas, também podemos perceber que as

> Justificativas, as fundamentações, as razões e as valorizações que tenhamos para selecionar, ordenar ponderar e modelar as tarefas na hora de planejá-las e realizá-las de alguma forma serão as fundamentações e os pressupostos que “transferem” para a ação e a orientam. (SACRISTÁN, 1998, p. 264).

De fato, a priori, observa-se que o poema indicado por Steiner continua a ser recitado diariamente no Ensino Médio. Assim, no que tange mais especificamente à educação matemática propriamente, devemos prestar atenção ao seu discurso e, considerando as tarefas nas aulas do contexto pesquisado, podemos visualizar sob quais aspectos do currículo em ação se propõe inovação.

Logo, se faz um meio para analisarmos os fundamentos das práticas vigentes e refletirmos sobre a própria prática matemática nas aulas desta matéria no EM Waldorf. De modo geral, podemos compreender o que caracteriza cada uma das tarefas realizadas nestas aulas e quais os principais elementos que as constituem. Podemos analisar cada uma das tarefas no que tange à sua sequência, os conteúdos abordados através delas, os materiais e as condições necessárias para suas realizações. Além disso, podemos observar como elas definem o ambiente de ensino e aprendizagem, o papel dos alunos e da professora, os resultados esperados, etc.

6. ANÁLISE DE DADOS

Para identificarmos como aspectos do currículo de matemática do Ensino Médio de uma Escola Waldorf se manifestam na prática docente, a partir dos dados constituídos acerca dos currículos prescrito, apresentado, modelado e em ação propostos por Sacristán (1998) e das contribuições da banca da qualificação em maio de 2021, buscamos autores para nos fundamentarmos quanto à análise dos nossos dados. Compreendemos também que o processo de análise dos dados em uma pesquisa qualitativa se constitui, para além da interpretação dos textos e imagens, também com

> A organização dos dados, a realização de uma leitura preliminar da base de dados, a codificação dos temas, a representação dos dados e a formulação de uma interpretação deles. (CRESWELL, 2014, p. 146).

Sendo assim, nosso processo de análise de dados possui referências à análise de dados de pesquisas qualitativas segundo Creswell (2014). Para o autor, a primeira etapa da análise é a organização dos dados a serem analisados e, a partir disso, tínhamos os seguintes materiais constituídos na Pesquisa de Campo a serem possivelmente analisados:

1. Livro "Objetivo Pedagógico e Metas de Ensino de uma Escola Waldorf" com as prescrições curriculares de Tobias Richter (2002);
2. Coleção "*Making Math Meaningful*" do professor Waldorf de matemática Jamie York;
3. "Plano Escolar" da escola;
4. Listas de leituras e exercícios distribuídos pela professora aos alunos;
5. Diário de Campo com as anotações diárias das aulas;
6. Anotações referentes às postagens do *Google Classroom* das turmas;
7. Anotações referentes às tutorias realizadas pela docente;
8. Fotos de cadernos de alunos e do ambiente escolar.

Ainda durante a Pesquisa de Campo, constantemente buscamos organizar todos os documentos coletados, com exceção do Diário de Campo, em pastas e documentos virtuais. Já na fase de pré-análise, em que líamos e relíamos diversas vezes os materiais, notamos uma grande quantidade de informações a serem tratadas, afinal, havíamos observado quatro salas diferentes nas quais tinham sido estudados tópicos distintos da matemática. Por isso, optamos por reduzir nossos dados ao selecionarmos um ano escolar que se mostrasse representativo dos demais anos. Neste caso, elegemos o 10º ano na Época de Equação de 2º Grau e Logaritmo, pois, ao ler mais profundamente os episódios desta turma, encontramos uma quantidade expressiva de similaridades quanto ao conteúdo e metodologia empregada nos demais anos do EM. Sendo assim, analisaríamos

1. As orientações de Richter (2002) referentes à Matemática no 10° ano;
2. Os tópicos referentes à Equação do 2° Grau e ao Logaritmo presentes nos livros didáticos da coleção utilizada pela professora;
3. As orientações do Plano Escolar referentes à Matemática no 10° ano;
4. As listas de exercícios utilizadas pela professora com o 10° ano;
5. As observações do 10° ano constatadas no Diário de Campo.

Definido nosso recorte, buscamos tudo o que se referenciava à matemática no 10° ano nos documentos anteriores. Prezando pelas questões de estética e pela possibilidade de realizar comentários diversas vezes, os trechos pertinentes do Diário de Campo foram reescritos em formato virtual, o qual originalmente estava escrito à mão. Em uma reorganização, para que não houvesse divagações com demais trechos dos documentos que não fariam parte de nossa análise, selecionamos aqueles que fossem pertinentes e os escrevemos em documentos de Word e PDF.

Neste mesmo estágio do processo de análise

> Os pesquisadores organizam seus dados em arquivos de computador. Além de organizarem os arquivos, os pesquisadores convertem seus arquivos em unidades de texto apropriadas (p. ex., uma palavra, uma frase, uma história inteira) para análise manual ou por computador. Os materiais devem ser facilmente localizados em grandes bases de dados de texto (ou imagens). (CRESWELL, 2014, p. 149)

Estes processos de releituras e (re)escritas tornaram mais fácil a visualização dos dados e também nos conduziram a relembrar das experiências vividas e descritas anteriormente. Com isso, a análise se convergia para a próxima etapa, a classificação dos dados em temas e/ou categorias em que há uma "redução dos dados em temas por meio de um processo de criação e condensação dos códigos" (CRESWELL, 2014, p. 147). Para o autor, codificar os dados, reduzindo-os a segmentos significativos e atribuindo-os nomes, além de combinar tais códigos em categorias e as compará-las, são elementos centrais da análise de pesquisas qualitativas.

Iniciando a categorização pelo Diário de Campo, destacamos suas partes mais significativas e as tabelamos, convertendo assim os episódios nele constados em unidades de texto apropriadas e as codificando para que pudéssemos identificá-las com maior facilidade. Nesta ocasião, a fim de comparar as unidades de texto e agrupá-las em categorias, fizemos anotações de palavras-chave em cada uma delas, o que, ao longo do processo de tabulação dos dados dos demais documentos, se tornaram a nomeação das categorias iniciais. Disto, foram tabeladas as unidades de texto apropriadas dos demais materiais obtidos.

Conforme exemplo abaixo, retirado das tabelas de categorização dos dados constados no APÊNDICE 5, apresentamos uma unidade de texto apropriada referente ao currículo prescrito por Richter (2002).

TABELA 1- Exemplo de categorização dos dados.

CODIFICAÇÃO	UNIDADES DE TEXTO APROPRIADAS	UNIDADE DE CONTEXTO	CATEGORIA
TR01	O cerne da atividade matemática é a solução de problemas. O essencial é **como** se resolve um problema e não aquilo que se consegue como “resposta”. Com tal critério, a matemática ensinada nas escolas se baseia em dois fundamentos matemáticos: a fantasia (indução) na fase inicial e a conclusão lógica (dedução) numa fase posterior da atividade matemática. A meta mais importante consiste em desenvolver a capacidade de pensar dos alunos, num leque amplo que vai do “adivinhar” até a conclusão pela lógica, dando-lhes autoconfiança, isto é, a confiança na própria capacidade de raciocinar.	Introdução do currículo prescrito de matemática	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

FONTE: A autora (2022).

Assim, no âmbito dos dados coletados na Pesquisa de Campo, seguiu-se a seguinte codificação, seguida da numeração de seus trechos[12]:

1. TR para o currículo prescrito por Richter (2002).
2. MMMSB para as orientações ao professor no currículo apresentado por York (2015);
3. PE para o Plano Escolar (2021);
4. EQ2L para as Listas de Equação de 2° Grau;
5. LG para as Listas de Logaritmo;
6. FATL para as Listas de Fatoração;
7. DC para o Diário de Campo.

Ao longo de todo o processo de categorização buscamos constantemente identificar episódios que possuíam relevância, ou seja, que representavam acontecimentos que se repetiam

[12] Por questões de referência, as unidades de texto do currículo prescrito e apresentado estarão referenciados de acordo com a norma ABNT e não por seus códigos.

semanalmente ou ainda que se destoavam das demais experiências. Em um primeiro momento, não nos preocupamos se os conteúdos em destaque possuíam ou não relações diretas entre si. Contudo, ao ler e reler os documentos, tabelar as unidades de significado e iniciar o processo de codificação, identificamos temas e episódios recorrentes, de modo a acentuar certos padrões e, com isso, começamos a classificar as unidades de significado contidos na tabela de acordo com as proximidades com as demais. Neste processo de categorização, encontramos episódios que possuíam uma ideia central e que, uns aos outros, se complementavam e evidenciavam suas respectivas categorias.

Conforme avançávamos na análise, tomávamos consciência de que havia certos temas que nos atravessaram desde a escrita do Diário e para além da releitura dele após alguns meses de sua confecção. Certas palavras-chaves estavam constantemente presentes nas anotações pessoais e diagramas de visualização da pesquisa. Disto, foram surgindo possíveis categorias a serem analisadas, sendo que alguns episódios foram realocados de categoria ao longo da análise devido à sua pertinência e também considerando quais seriam as ordens de apresentação das categorias analisadas.

Assim, tabeladas as unidades de significado, ao agrupá-las consideramos que "o processo de coleta de dados, análise de dados e redação do relatório não são passos distintos do processo" (CRESWELL, 2014, p. 147), ou seja, que ocorrem simultaneamente. A partir disso, a primeira categoria e a mais evidente ainda durante a Pesquisa de Campo foi a categoria de "Para Além da Matemática Convencional...." e, assim, ao relermos, grifarmos e buscarmos categorizar os episódios, identificamos e agrupamos as seguintes categorias:

1. História da Matemática
2. Resolução de Problemas
3. Investigação Matemática
4. Fluência Matemática
5. Para Além da Matemática Convencional....

Portanto, conforme se consolidavam as categorias acima, nossas análises foram sendo compostas por um diálogo entre recortes dos materiais citados, das pesquisas acadêmicas e teóricas acerca de nosso tema de pesquisa e também das ideias de pesquisadores da área de Educação Matemática. Deste modo, poderíamos compreender como tais elementos evidenciados, primeiramente na prática cotidiana, se interagiam com os demais currículos e com a teoria acadêmica.

Por fim, Creswell (2014, p. 155) indica que o pesquisador deve "apresentar a narração da 'essência' da experiência em tabelas, figuras ou discussão". Em nosso caso, narramos nossas experiências através de uma descrição exaustiva do fenômeno de acordo com Moustakas (1994) citado por Creswell (2014, p. 157). Nesta redação, buscamos aprofundar no fenômeno ao descrevermos a essência de cada uma das categorias não somente sobre o que aconteceu e como aconteceu, mas também integrando os resultados obtidos nos currículos prescrito, apresentado, modelado e em ação.

Com vistas a isso, antes de iniciarmos a apresentação das análises de cada uma das categorias propriamente ditas, é importante ressaltar que seus respectivos títulos se deram a partir do viés teórico da Educação Matemática. Sendo assim, consideramos estas teorias como ferramentas que nos ajudam a ampliar nossa compreensão acerca da matemática no EM Waldorf e estas, não necessariamente, se constituem parte do vocabulário dos professores e alunos Waldorf. A respeito disso, em conversa informal com a professora,

> Conversamos também sobre o fazer, o exercitar e descobrir da matemática que ela buscava em suas aulas e, inclusive, (eu) disse (à ela) que tudo isso me remetia à Resolução de Problemas e à Investigação Matemática. Ela perguntou o que eram e disse brevemente sobre problemas abertos e fechados. Ela também me mostrou alguns enigmas do livro e como alguns (foto) já tinham sido respondidos por alunos mais rápidos que ela. (DIÁRIO DE CAMPO, CONVERSA INFORMAL, 19/08/2021).

A partir disso, descrevemos então os principais aspectos do currículo de Matemática no EM de uma EW.

6.1. HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

A partir da constatação de elementos de ensino e aprendizagem do conteúdo por meio da História da Matemática (HM) presentes em episódios distintos de cada um dos currículos indicados por Sacristán (1998), assim intitulamos tal categoria como História da Matemática. Com o apoio teórico de Vianna (1995, 2000), analisamos como a HM é empregada como metodologia de ensino e aprendizagem no Ensino Médio Waldorf.

No âmbito da Educação Matemática, desde a escrita de seu trabalho, Vianna (1995) indica que houve um crescente número de livros didáticos e paradidáticos que utilizam da HM para o ensino da disciplina. Segundo o autor, ao considerarmos os aspectos culturais, políticos, filosóficos e históricos desta ciência exata, podemos assim "contribuir para uma melhor compreensão do conteúdo matemático, mas também (...) pode(mos) lançar alguma luz sobre o conhecimento deste conteúdo matemático." (VIANNA, 1995, p.07).

Quando abordarmos a Matemática por meio de seus elementos históricos, podemos conscientizá-los de que esta área de conhecimento, assim como qualquer outra, é inacabada e está constantemente sendo construída e ressignificada. Sendo assim, para além dos resultados e fórmulas finais que comumente são apresentadas nos livros didáticos, através da HM o professor pode motivar e incentivar seus alunos a contribuírem com suas descobertas dentro e fora de sala de aula. Afinal, a Matemática, assim como a História, está sempre sendo construída pela Humanidade em suas diversas sociedades e culturas.

Apesar do crescente número de aparições da HM nos livros didáticos ainda na década de 90, Vianna (1995, p.22) notou que ela era abordada nos livros em um formato padrão. Ao procurar como alguns dos "sintomas" da HM aparecem nas salas, Vianna (2000, p. 2) detectou como eles são apresentados nos livros didáticos utilizados pelos professores. Nesta ocasião, o autor classificou as aparições encontradas em 4 categorias, que são

> 1) **História da Matemática Como Motivação.**
> O que caracteriza o uso motivacional é a forma como aparece a história da matemática: como uma anedota, uma lenda ou um breve texto introdutório. O que determina a inclusão nessa categoria é o fato de "ser introdução a alguma coisa". Todos os textos categorizados como "motivação" poderiam também ser incluídos na categoria de "informação" pois é evidente que todo texto transmite informação. Meu critério é simples, mas não permite dúvidas: considero como motivacional os textos que estão no início de um capítulo ou de uma unidade didática.
> 2) **História da Matemática Como Informação.**
> Essa categoria compreende as "notas históricas" que frequentemente aparecem depois de concluído um tema ou capítulo de conteúdo matemático. Tais "notas históricas" são usadas como dados adicionais ao que foi tratado, são informações extra. Aqui também se inserem eventuais quadros-informativos que aparecem no meio do livro, às vezes entre os exercícios, mas que não complementam nem auxiliam especificamente a resolução de nenhuma dificuldade de conteúdo. O critério para incluir um texto como "informação" ou "motivação" baseou-se principalmente na posição do texto dentro da unidade e na seqüência do desenvolvimento do conteúdo; muito raramente seguiu-se uma aplicação ou uso didático aos textos que foram incluídos como "informação". Por outro lado, aos textos motivacionais se seguia um desenvolvimento de seqüências ou atividades didáticas com o mesmo conteúdo tratado como motivação.
> 3) **História da Matemática Como Estratégia Didática.**
> Nessa categoria estão as intervenções direcionadas a conduzir o aluno para um determinado tipo de procedimento que encontra alguma relação com o desenvolvimento do conteúdo. Por exemplo, a estratégia de medir sombras para calcular alturas ou a de tentar relacionar a circunferência com seu diâmetro através da utilização de um barbante. Aqui, além do aspecto motivacional ou da simples informação, o texto convidar o aluno a realizar algumas atividades ou sugere idéias que levem à compreensão do conteúdo matemático. Nestes casos a referência história nem sempre é explícita.
> 4) **História da Matemática Imbricada no Conteúdo.**
> Aqui a presença da história é implícita, não se fala nela nem se fala em nomes de matemáticos: a história fornece (ou deveria ter fornecido) o conhecimento que permite

> estruturar o desenvolvimento do conteúdo de uma determinada forma em detrimento de outras formas possíveis.
> Não há possibilidade de decidir categoricamente se o autor usou ou não, deliberadamente, conhecimentos históricos ao elaborar o livro; seria necessário dispor de depoimentos onde fossem narradas as decisões tomadas quando da criação do texto e das atividades. Os exemplos incluídos nessa categoria são exíguos, apenas cinco no total dos quatro volumes: duas vezes na quinta série e uma vez em cada uma das outras. (VIANNA, 2000, p. 2-3).

Por isso, nota-se que a HM é comumente apresentada nos livros didáticos como curiosidade ou, ainda, como meras informações em textos de início e fim de capítulo. Contudo, também podemos abordar a HM e os conteúdos dispostos no currículo ao resgatarmos as mesmas situações-problema que os diversos povos e personalidades matemáticas já enfrentaram anteriormente. Estas situações, quando vivenciadas pelos alunos, os colocam em um processo de redescoberta de problemas que anteriormente não tinham solução, podendo assim favorecê-los em seus processos de aprendizagem e a compreensão dos fenômenos.

Com isso em vista, observamos que nas aulas da Época sobre Equações de 2° Grau e Logaritmos havia elementos de ensino e aprendizagem do conteúdo por meio da HM. Mais especificamente, em aulas Avulsas do mês anterior à Época, a turma estava trabalhando as primeiras listas de Equação de 2° Grau ao passo que, na Época propriamente dita, a docente acompanhou com os alunos as listas de Equação de 2° Grau nas primeiras três semanas e as listas de Logaritmo na última semana, ambas dispostas no "*9th Grade Workbook*" de Starzynski e York (2015).

Quanto ao conteúdo das listas utilizadas nas aulas, notamos que estas abordam a Equação de 2° Grau através da HM. Conforme já é apresentado na Lista 1 de Equação de 2° Grau,

> **Trabalho em Grupo**
> No final da unidade de *Fatoração* você encontrou a seguinte equação de 2º grau para resolver: $x^2 + 6x = 3$.
> Entretanto, neste momento, você não tinha ferramentas para resolver esse problema. (Você consegue perceber o porquê?) Um dos objetivos dessa unidade é aprender a solucionar problemas como este, e desenvolver uma fórmula, conhecida como a *Fórmula de Bhaskara* (nome dado em homenagem a um matemático indiano), que nos auxilia a resolver esse tipo de problema com facilidade. Daremos nosso primeiro passo nessa direção. (EQ2L1).

Se nas primeiras listas foram trabalhados os métodos de fatoração e de completar quadrado, a partir da lista 5 é desenvolvida a Fórmula de Resolução da Equação Quadrática.

> **Discussão em Grupo**

> Por volta de 825 d.C., Mohammed ib'n Musa Al-Khwarizmi escreveu *Hisab al-jabr wal-muqabala.* A maior parte do livro contempla a aritmética, a mensuração, a matemática financeira e problemas de negócios. Mas foi o seu o primeiro capítulo que tornou o livro famoso, e iniciou o estudo formal de álgebra. Iremos agora ler o primeiro capítulo do livro. (EQ2L5).

Assim, no decorrer de três listas, a professora e os alunos leram o 1° capítulo deste livro juntos, a fim de desenvolverem a fórmula que os possibilitaria resolver tais equações. Em suma, no decorrer dos textos, Al-Khwarizmi relata os seis tipos de Equação de 2° Grau para, em seguida, resolver a equação $x^2 + 10x = 39$ utilizando os métodos da fatoração e de completar quadrados da fatoração, sendo estes vistos anteriormente pelos alunos. Com isso, nota-se uma sequência didática que considera os conhecimentos prévios dos estudantes e que também os induzem a realizar atividades conforme eles acompanham a professora e o raciocínio de Al-Khwarizmi.

Portanto, ao discorrer paralelamente sobre discussões em grupo e exercícios, o texto histórico apresentado pelo livro indica o uso da HM está "Como Estratégia Didática", pois

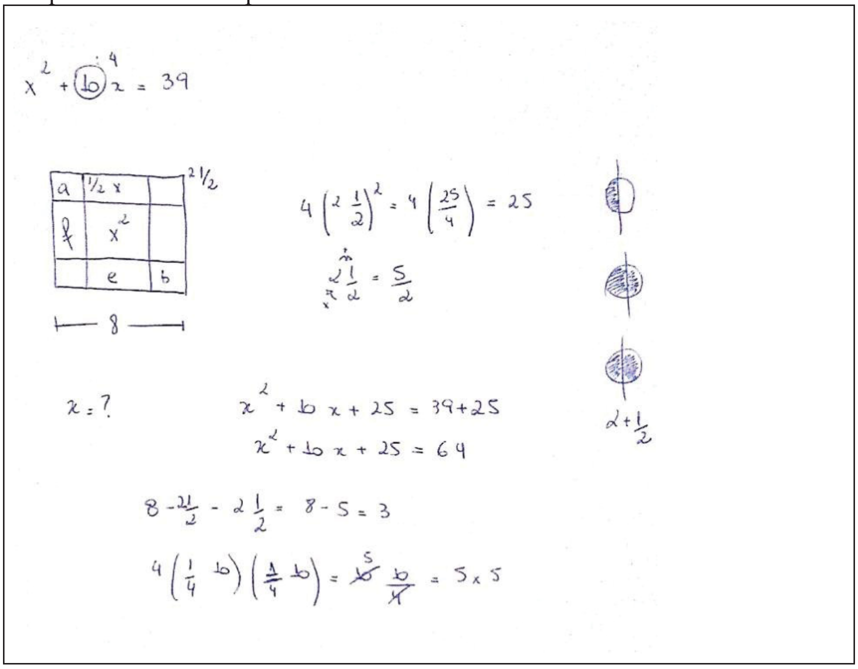
> Nessa categoria estão as intervenções direcionadas a conduzir o aluno para um determinado tipo de procedimento que encontra alguma relação com o desenvolvimento do conteúdo. (...) Aqui, além do aspecto motivacional ou da simples informação, o texto convida o aluno a realizar algumas atividades ou sugere ideias que levem à compreensão do conteúdo matemático. (VIANNA, 2000, p. 2-3).

Por exemplo, se utilizando da Lista 7 discutida e trabalhada em sala de aula,

> Seção VII. UMA DEMONSTRAÇÃO DO CASO
> *"Um quadrado e dez raízes são iguais a 39."*
> Primeiro, construímos um quadrado ab de lados desconhecidos. Este quadrado representa o quadrado que, junto com sua raiz, você deseja encontrar. Qualquer lado deste quadrado representa uma das raízes que desejamos conhecer. Agora pegaremos um quarto do número de raízes, ou seja, um quarto de dez, para obter 2½ . Combinando isso com o lado do quadrado nos dá quatro novos retângulos (c, d, e, f), que colocaremos nas laterais do quadrado [como mostrado no desenho abaixo]. Agora temos um quadrado novo e maior, exceto que faltam pequenos pedaços quadrados em seus quatro cantos. Cada um desses quatro cantos tem uma área de 2 ½ vezes 2 ½ . Quando adicionamos esses quatro cantos à nossa figura [como mostrado no desenho inferior], aumentamos a área em quatro vezes o quadrado de 2 ½ , que é 25.
> A partir da afirmação original, sabemos que o quadrado ab combinado com quatro retângulos, que juntos representam dez raízes, devem ser iguais a um total de 39. A isso adicionamos 25 (a área dos quatro cantos pequenos) para obter um total de 64, que é a área do grande quadrado GH. O lado desse grande quadrado deve ser oito. Se subtrairmos duas vezes um quarto de dez, que é cinco, desse oito, obteremos três - a raiz do quadrado que buscamos. Deve-se observar que aqui pegamos um quarto do número de raízes, multiplicamos esse resultado por si mesmo e, em seguida, multiplicamos isso por quatro, que é o equivalente a pegar a metade do número de raízes e então multiplicar esse número por ele mesmo [que é o que foi feito na seção IV]. (EQ2L7).

A partir deste trecho, os alunos acompanharam, junto à professora, o raciocínio do matemático na resolução deste problema.

> A professora perguntou se queriam fazer exercícios ou tentarem engatar a leitura da lista 7. Assim, seguiram a lista 7. Conforme liam o texto em voz alta, rabiscos e esquemas iam sendo passados na lousa.



> . (DC11).

Mais adiante, nos exercícios da mesma lista, são reforçadas as referências aos métodos de resolução de Equação de 2° Grau discutidos por Al-Khwarizmi através de seus exemplos.

> **Trabalho em Grupo**
> 1) Expresse a seguinte afirmação
> *Um quadrado e 8 raízes são iguais a 65.*
> a) Como uma equação de álgebra moderna.
> b) Como um quebra-cabeça geométrico grego.
> 2) Resolva o problema 8 da lista 1 usando:
> a) Método geométrico de Al-Khwarizmi (como visto na seção VII)
> b) Fórmula de Al-Khwarizmi (como visto na seção IV)
> c) Completando quadrado. (EQ2L7).

Diante disto, constatamos que os exercícios também abordavam o conteúdo através da HM. Deste modo, a integração entre o texto histórico e as atividades que fazem referências a ele proporcionou que os alunos acompanhassem, passo a passo, como Al-Khwarizmi resolveu os 6 tipos de equação de segundo grau através de diferentes métodos para, assim, também descobrir ao final a Fórmula da Resolução da Equação do 2° Grau. Desta forma, os alunos também puderam compreender os conceitos e procedimentos para a resolução de problemas similares.

Curiosamente, a Fórmula de Resolução de Equação de 2° Grau é apresentada inicialmente como Fórmula de Al-Khwarizmi a partir de sua descoberta, na Lista 7. Contudo, é somente na lista 9 que se cita a "Fórmula de Bhaskara", como popularmente é conhecida.

> **Trabalho em Grupo**
> **Resolva** completando quadrado.
> 1) $3x^2 + 11x + 5 = 0$
>
> (Deixe sua resposta em forma de raiz quadrada)
> 2) $ax^2 + bx + c = 0$
>
> (Sua resposta é a "fórmula de Bhaskara") (EQ2L9).

Por fim, no último exercício da Lista 13, que é a última lista para este conteúdo, há um exercício de demonstração extraído do Teorema 11 do livro II de "Elemento de Euclides".

> 13) (Teorema 11, do Livro II, De Euclides's *The Elements*)
> a) Onde você pode cortar uma linha reta de 10 cm de comprimento de forma que o retângulo formado pela linha inteira e um dos segmentos formados seja igual ao quadrado segmento restante?
> b) Qual é a razão (na forma decimal) dos comprimentos dos dois segmentos encontrados acima? (EQ2L13).

Deste modo, neste episódio e nos episódios anteriores, podemos observar que HM é apresentada estando associada às demais tendências da Educação Matemática como, por exemplo, à Resolução de Problemas. Uma vez que a HM não se restringe à leitura do texto, também são utilizados problemas advindos da história da matemática para que se despertasse o interesse dos alunos pelos conteúdos e a melhor compreensão destes através da resolução de tais problemas históricos. Segundo Vianna (1995, p. 4),

> A história da matemática pode ser uma fonte relevante de problemas para serem trabalhados na resolução de problemas, o estudo da solução dada aos problemas reais que foram enfrentados em épocas diversas pode fornecer contribuições relevantes para o desenvolvimento de técnicas de modelagem e para o aprimoramento de modelos já elaborados, o conhecimento da história da matemática dos diversos povos entrelaça-se inevitavelmente com os trabalhos de Etnomatemática... Assim, tal como temos que falar em um determinado idioma, também deveríamos pensar os conteúdos matemáticos, as tendências em educação matemática, de um modo histórico, imersas na história, e diríamos que o problema de "usar" a história da matemática deixaria de ser um "problema" teórico e se tornaria uma ação didática efetiva.

Este uso da HM como ação didática através de problemas e demonstrações se faz consciente para a professora. Como sinalizado em algumas conversas informais,

> Foi dito que a Época seria dividida entre um bloco de álgebra e outro de provas matemáticas, onde eles vão "desenvolver o pensamento dos matemáticos", citando o cálculo da soma dos ângulos internos dos triângulos. (DC04).

Também podemos observar o intuito da professora em vivenciar com seus alunos todo o processo de construção do conhecimento matemático, incluindo os desafios e sucessos que a humanidade vivenciou até então.

> Enquanto os alunos faziam as listas, conversamos sobre os livros Waldorf trazerem bastante de história da matemática e ela disse que "traz o que é feito pelo homem". Antes, ela fazia apenas a introdução algébrica de Bhaskara e hoje ela inclui a geometria também. (DC10).

Neste sentido, a docente, ao utilizar da coleção de livros didáticos de York (2015), já é apresentada aos possíveis usos da HM como estratégia didática. De acordo com as indicações para o uso do livro pelo professor, prover o contexto histórico é uma das recomendações para fazer com que a matemática seja significativa aos estudantes. Isto se deve a eles "perceberem que eles estão vivendo e respirando os mesmos pensamentos que os maiores pensadores da história já se desafiaram também" (YORK, 2015, p. 6, TRADUÇÃO DA AUTORA). O mesmo autor considera que

> Em contraste, acredito que é criticamente importante que os estudantes compreendam a matemática por detrás da matemática, que percebam que a matemática não é algo que "está por aí", mas que a matemática é uma das coisas que nos fazem seres humanos.
> Nós queremos que os estudantes vivenciem a matemática como uma aventura, e que sintam que a matemática é um profundo esforço humano. (YORK, 2015, p. 1, TRADUÇÃO DA AUTORA).

Além da abordagem utilizada por York (2015) no EM Waldorf, a HM também está presente em outros momentos do currículo de matemática Waldorf, que busca apresentar como os conteúdos matemáticos foram sendo construídos ao longo da história da humanidade. Podemos observar no currículo prescrito por Richter (2002), algumas sugestões acerca de eventuais trabalhos com biografias de famosos matemáticos. Para o conteúdo de "Potências com expoentes de números inteiros e racionais, logaritmos" no 10° ano, tem-se

> Eventualmente: Escalas logarítmicas nas ciências naturais
> Espiral de Arquimedes e logarítmica (exemplos morfológicos na natureza), evolutas. Biografia: Euler. (RICTHER, 2002, p. 204)

Já em pesquisas acadêmicas brasileiras, Lemonje (2015) ressalta que o ensino de História na PW ainda "é configurado sob uma perspectiva eurocêntrica e de cunho positivista, reforçando aspectos lineares, factuais, evolucionistas, civilizatórios e conteudistas" (LEMONJE, 2015, p. 6). Deste modo, considerando o ensino de aspectos históricos nas demais disciplinas, também se nota que a HM na PW, ao evidenciar biografias de matemáticos clássicos, ainda possui traços de uma concepção platônica da matemática. Ela ainda

> Mescla, principalmente, duas tendências: a empírico-sensualista e a formalista clássica. Ela se identifica na tendência formalista clássica por se admitir a concepção platônica da Matemática, que por sua vez, [...] caracteriza-se por uma visão estática, a-histórica, dogmática das ideias matemáticas, como se essas existissem independentemente dos homens. Segundo essa concepção inatista, a Matemática não é inventada ou construída pelo homem. O homem apenas pode, pela intuição e reminiscência, descobrir as idéias matemáticas que preexistem em um mundo ideal e que estão adormecidas em sua mente (FIORENTINI, 1995, p. 5, citado por SANTOS, 2015, p. 180).

Considerando então tal aspecto do currículo Waldorf, Albino (2017), ao investigar como acontece a Educação Financeira no 6° ano de uma EW, cita que

> A época da Vida Econômica e Financeira foi dada na turma do 6º ano, pois levando em consideração a maturidade da criança segundo Steiner esse ensino deve ocorrer a partir dos doze anos, e contemplou assuntos diversos, como: a história do dinheiro, práticas conscientes de consumo, porcentagem, como os juros apareceram na história da humanidade, cálculo de juros simples, a importância de saber manejar criticamente os objetos matemáticos de cunho financeiro-econômico, questões ligadas a Trimembração do Organismo Social, etc. (ALBINO, 2017, p. 126).

Neves (2017, p. 102), ao apresentar o currículo matemático na PW, também indica uma abordagem da matemática, assim como as demais disciplinas, através de sua história.

> Já a História, que tem relação com aspectos do temporal, ao ser trabalhada adequadamente com as crianças, não somente a partir de imagens, mas tornando o espaço de tempo presente e abarcando a noção de distância temporal, estimula o interior do ser humano. O efeito principal dessa abordagem é tornar-se objetivo em relação ao mundo. Muito se pode explorar nessa direção, com cada matéria, contribuindo para aprofundar a reflexão de professores sobre o seu fazer pedagógico.

Deste modo, percebe-se que a HM é um dos elementos que compõem o currículo Waldorf, com o poder de cativar o aluno para os problemas que algumas personalidades e civilizações enfrentaram e como, a partir das soluções encontradas, os conhecimentos matemáticos foram e continuam a serem construídos.

6.2. RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Ao buscarmos captar a estrutura das aulas de Época de matemática na escola pesquisada, notamos haver um momento inicial destinado às atividades não convencionais, um segundo momento para a explanação do conteúdo pela professora e, assim, sua exercitação por parte dos alunos. Conforme citada na categoria anterior, podemos compreender algumas das atividades realizadas em sala de aula com o apoio teórico da HM, mas também pela lente da Resolução de Problemas (RP). Para isso, utilizamos dos conceitos apresentados por Onuchic e Allevato (2011) e Onuchic *et al* (2014).

A RP é uma tendência metodológica na área da Educação Matemática que possui o princípio de proporcionar aos estudantes uma participação mais ativa na construção de seu conhecimento. Dentre as distintas definições na literatura acadêmica sobre o que é um problema, Onuchic e Allevato (2011, p. 81) definem que um problema é "tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que se está interessado em fazer". Neste rol de experiências,

> Podem ser encontrados muitos conceitos de problemas adjetivados, refletindo neles qualidades específicas que deles se espera: problemas de fixação, exercícios, problemas abertos, problemas fechados, problemas padrão, problemas rotineiros e não rotineiros, quebra-cabeças, desafios, entre outros. Na realidade, são todos problemas, e os adjetivos expressam diferentes tipos de problemas que admitem, para sua resolução, diferentes estratégias. (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 81).

Portanto, independentemente se o problema é apresentado no formato de exercício, desafio, jogo, situação-problema, etc., ele assim pode ser considerado como problema se os alunos ainda não possuem uma clara percepção sobre como resolvê-lo ou se ainda não foram apresentados e induzidos a aplicarem determinados algoritmos na sua resolução.

Segundo Schroeder e Lester (1989), citados por Onuchic e Allevato (2011), há três abordagens da RP. A primeira é ensinar sobre resolução de problemas, na qual o professor ensina estratégias de como resolver problemas. Sendo a abordagem mais comum no ensino tradicional, esta vertente assume que a finalidade da matemática é a resolução de problemas aplicados ou não e, disto, usualmente são ensinados conceitos e procedimentos matemáticos com o intuito de que os alunos os apliquem nos problemas encontrados em suas tarefas. Assim,

> O professor se concentra sobre as formas de como a Matemática a ser ensinada pode ser aplicada na resolução de problemas rotineiros ou não rotineiros. Nessa abordagem, embora a aquisição de conhecimento matemático tenha uma importância primeira, o maior propósito da aprendizagem é ser capaz de utilizá-la. (ONUCHIC *et al*, 2014, p. 29).

A segunda é ensinar sobre resolução de problemas, em que o professor ensina o aluno como se resolve problemas. É dado um enfoque maior ao método de resolução de problemas proposto por Pólya (1994) em “A Arte de Resolver Problemas”. Seu método consiste em quatro etapas que são a compreensão do problema, a construção de uma estratégia de resolução, execução da estratégia e a revisão da solução encontrada. Logo, nesta abordagem, o professor não somente busca ensinar a matemática em si, mas também como interpretar um problema, identificar seus dados, organizar uma estratégia de solução, verificar a viabilidade de sua resposta, etc.

Já a terceira concepção de resolução de problemas é sobre ensinar matemática através da resolução de problemas, ou seja, se utilizar de problemas para que os alunos possam construir novos conteúdos e conceitos, sendo eles os “co-construtores de seu próprio conhecimento e, os professores, os responsáveis por conduzir esse processo” (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011, p. 80). Assim, esta terceira abordagem da RP pode ser considerada a mais progressista, pois nela compreende-se que é através dos problemas a serem resolvidos que os alunos podem também entender melhor os conceitos dos conteúdos que estão sendo trabalhados.

Neste sentido, as abordagens socioconstrutivistas “partem do princípio de que a aprendizagem se realiza pela construção dos conceitos pelo próprio aluno, quando ele é colocado em situação de resolução de problemas” (ONUCHIC *et al*, 2014, p.50). Sendo assim, no ensino da matemática através da RP, “o professor não pode prescrever aos estudantes os método e/ou regras específicas para que obtenham a solução” (ONUCHIC *et* al, 2014, p.50), se tornando assim um mediador no aprendizado.

Conforme indicada na categoria anterior, de HM, esta tendência “pode ser uma fonte relevante de problemas para serem trabalhados na resolução de problemas” (VIANNA, 2000, p. 3-4). Deste modo, logo no início da L1, observamos que os alunos vão desenvolver a fórmula de Bhaskara para solucionar os problemas referentes às Equações de 2° Grau.

> No final da unidade de *Fatoração* você encontrou a seguinte equação de 2º grau para resolver: $x^2 + 6x = 3$.
> (...) Um dos objetivos dessa unidade é aprender a solucionar problemas como este, e desenvolver uma fórmula, conhecida como a *Fórmula de Bhaskara* (nome dado em homenagem a um matemático indiano), que nos auxilia a resolver esse tipo de problema com facilidade. Daremos nosso primeiro passo nessa direção. (EQ2L1).

A partir desta introdução, observa-se que o intuito do autor do livro didático é o de proporcionar aos alunos o desenvolvimento da fórmula e a construção do seu próprio conhecimento para posteriores resoluções de problemas. Assim, nota-se a abordagem através da RP.

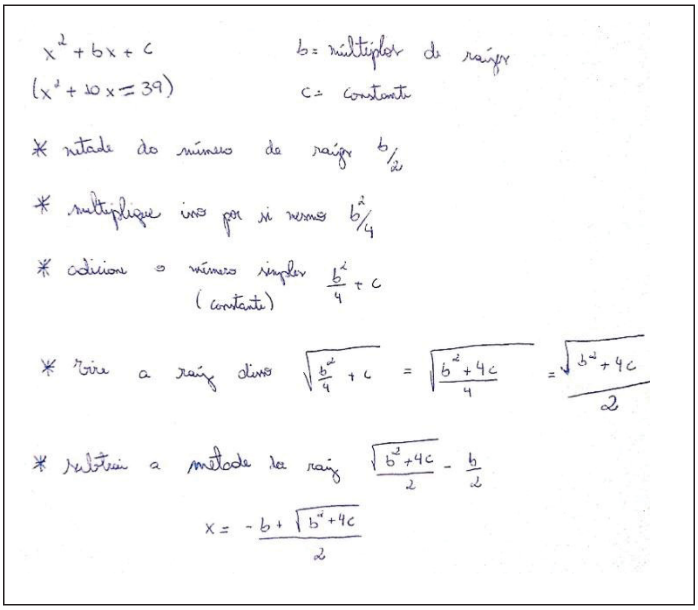
Mais adiante, na Lista 6,

Trabalho em Grupo

1) Essencialmente, Al-Khwarizmi desvendou a equação para solucionar qualquer equação quadrática. Considere o número de raízes (no caso o coeficiente do termo x) como b, e a constante como c. Agora leia novamente a Seção IV para derivar a fórmula de x dada em termos de b e c. (EQ2L6).

No trecho acima, York (2015) prossegue com a abordagem do conteúdo através da RP ao propor um problema na lista no qual a professora e os alunos, em conjunto, devem derivar a fórmula de Bhaskara a partir da leitura de Al-Khwarizmi. Deste modo, em sala de aula, todos acompanharam o texto disponibilizado na lista sobre como resolver, passo a passo, a equação $x^2 + 10x = 39$. Conforme consta abaixo,

Na lousa estavam contidos os passos para descobrir a “fórmula de x em termos de b e c” e que resultava na Fórmula de Bhaskara.
Eles já haviam lido as listas 5 e 6 anteriormente e nesta aula continuaram a lista 6. Em interação com os alunos, foi passado na lousa para o material de consulta.



$x^2 + bx + c$ b= múltiplos de raízes
($x^2 + 10x = 39$) c= constante

* metade do número de raízes $b/2$

* multiplique isso por si mesmo $b^2/4$

* adicione o número simples (constante) $\frac{b^2}{4} + c$

* tire a raiz disso $\sqrt{\frac{b^2}{4} + c} = \sqrt{\frac{b^2+4c}{4}} = \frac{\sqrt{b^2+4c}}{2}$

* subtraia a metade da raiz $\frac{\sqrt{b^2+4c}}{2} - \frac{b}{2}$

$x = \frac{-b + \sqrt{b^2+4c}}{2}$

A professora ressaltou que o “a” foi retirado, pois se tratava de uma equação reduzida. (DC09).

Analisando este problema, notamos não somente a obtenção de um algoritmo final para a resolução de Equações de 2° Grau por parte dos alunos, mas também a possibilidade destes em compreenderem os conceitos que envolvem a resolução de Equações de 2° Grau.

Como consta no currículo prescrito, este já indica princípios do ensino de matemática através e sobre a RP ao revelar que

> O cerne da atividade matemática é a solução de problemas. O essencial é **como** se resolve um problema e não aquilo que se consegue como "resposta". Com tal critério, a matemática ensinada nas escolas se baseia em dois fundamentos matemáticos: a fantasia (indução) na fase inicial e a conclusão lógica (dedução) numa fase posterior da atividade matemática.
> A meta mais importante consiste em desenvolver a capacidade de pensar dos alunos, num leque amplo que vai do "adivinhar" até a conclusão pela lógica, dando-lhes auto-confiança, isto é, a confiança na própria capacidade de raciocinar. (RICHTER, 2002, p. 197).

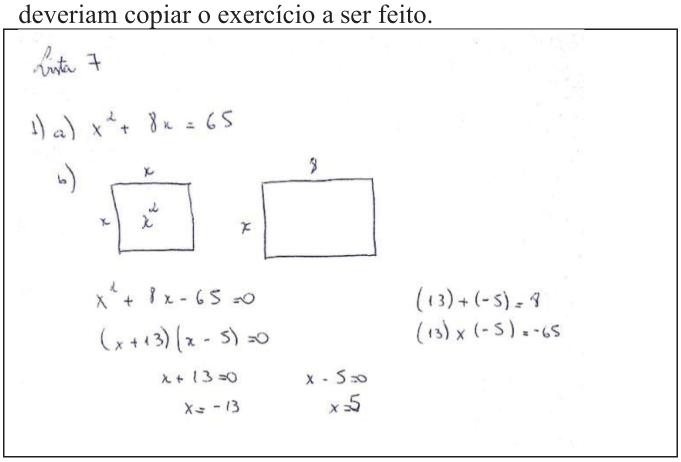
Portanto, favorecer diferentes métodos e estratégias de resolução é importante, assim

> Os alunos têm a possibilidade de observar, sob vários ângulos, a sua própria maneira de raciocinar, de procurar vários pontos de partida, de escolher exemplos- ou exemplos contrários- de fazer uma investigação sistemática e de demonstrar os resultados obtidos. (RITCHER, 2002, p. 198).

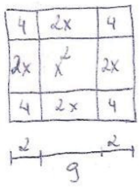
A respeito disso, York (2015) compreende que dentre as habilidades necessárias a serem desenvolvidas nos alunos do século XXI está a capacidade em resolver problemas de forma flexível, criativa e independente. Portanto, ao ensinar matemática, o professor deve ir além dos procedimentos mecânicos comumente apresentados e proporcionar aos alunos experiências matemáticas incluindo, inclusive, a descoberta de diferentes métodos de resolução de problemas.

Conforme em DC12,

> Foi orientado que entregariam a lista 6 neste dia e a lista 7 futuramente. Logo, deveriam copiar o exercício a ser feito.



> A docente citou que eles estavam vendo vários métodos de "como foi desenvolvido na humanidade para resolver um mesmo problema".
> Com cores diferentes, seguiu,



$$x^2+8x=65$$
$$x^2+8x+16=65+16$$
$$x^2+8x+16=81$$
$$\sqrt{81}=9$$
$$9-2-2=5$$
$$9-4=5$$

(DC12).

Portanto, torna-se interessante a apresentação de diferentes métodos para a resolução da Equação de 2° Grau, tais como a Fórmula de Bhaskara ou método de completar quadrados através da visualização geométrica.

Ainda assim, "outra meta justificada consiste em capacitar os alunos para aplicar métodos de cálculos na vida diária e fornecer as bases necessárias para um estudo pós-escolar" (RICHTER, 2002, p. 197), conferindo um caráter de ensino de métodos para a aplicação da matemática em problemas diversos.

Como em DC10,

> Deu-se sequência para os alunos fazerem o resto da lista 6 para entregá-la. Na lousa, foi feito um exercício.

$$x^2+10x=39$$
$$x^2+10x+25=39+25$$
$$(x+5)^2=64 \quad \text{ou} \quad x+5=-8$$
$$x+5=8 \qquad x=-8-5$$
$$x=8-5 \qquad x=-13$$
$$x=3$$

(DC10).

Disto, observa-se que a RP também foi abordada para a resolução de problemas, principalmente quando os procedimentos matemáticos foram apresentados em problemas similares às atividades a serem realizadas posteriormente pelos alunos.

Portanto, a matemática neste contexto é estudada através de diferentes variações da RP. Isto inclui a construção dos conceitos pelos próprios alunos através da resolução de problemas, a viabilização da abordagem de um mesmo problema por diferentes métodos de resolução e, até mesmo, a apresentação de problemas visando uma aplicação dos conceitos e procedimentos em situações posteriores.

6.3. INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Aspectos da Investigação Matemática (IM) também emergiram da categorização dos episódios do livro didático, listas de exercícios e Diário de Campo. Para compreendermos melhor os episódios com as atividades que sinalizam aspectos investigativos, consideramos as concepções de Ponte (2003) sobre a IM, as adaptações de problemas abertos em exercícios algorítmicos de Butts (1997) e demais aspectos do ensino, pelo viés da fenomenologia goethiana aplicada ao ensino de Ciências na PW de acordo com Figueiredo (2015).

De acordo com Ponte (2003, p. 23), os problemas e exercícios se constituem de situações em que

> O seu enunciado indica claramente o que é dado e o que é pedido. Não há margens para ambiguidades. A solução é sabida de antemão, pelo professor, e a resposta do aluno está certa ou errada.

Já em uma investigação, "a questão não está bem definida no início, cabendo a quem investiga um papel fundamental na definição" (PONTE, 2003, p.23). Por isso, costuma-se dizer que enquanto a RP indica situações mais fechadas, a IM trabalha com problemas abertos.

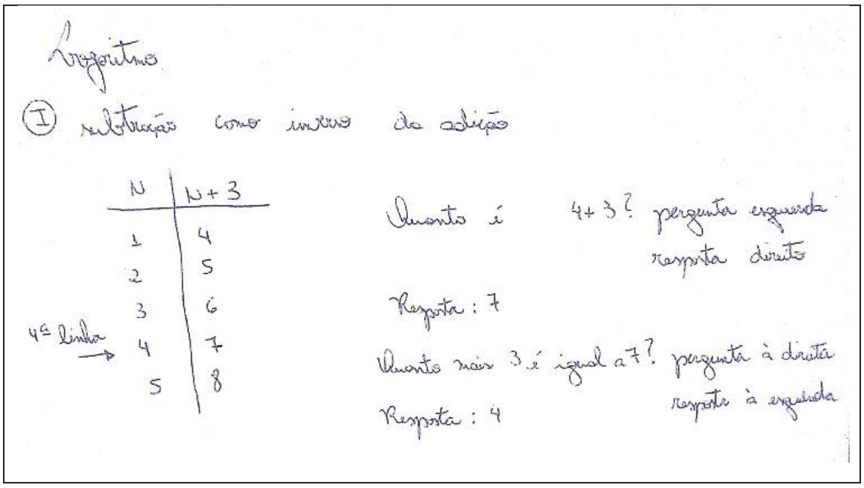
Neste processo investigativo, é pretendida haver uma fase inicial de exploração e formulação das questões, seguida da organização dos dados e da formulação de conjecturas. Posteriormente, realizam-se testes para possível confirmação e justificação da conjectura e, com isso, se faz necessário avaliar o resultado para que possa apresentá-lo aos demais. Por isso, a Investigação Matemática, como metodologia de ensino e aprendizagem, é capaz de proporcionar aos alunos a possibilidade de construírem seus próprios conhecimentos, considerando que, ao buscarmos investigar padrões matemáticos, estamos indo para além de buscar resolver um problema, mas também "podemos fazer descobertas que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original" (PONTE, 2003, p. 17).

Assim, em nossa pesquisa também constatamos episódios em que os alunos trabalharam com problemas mais abertos se em comparação com os demais. Contudo, ainda que tais problemas não eram totalmente abertos, eles se apresentaram interessantes por proporcionarem aos alunos, através de exercícios algorítmicos, a observação de alguns padrões matemáticos sob a prática da filosofia fenomenológica da PW.

Um outro autor consultado que nos auxilia na discussão dessa categoria, Butts (1997), identifica cinco tipos de problemas: os exercícios de reconhecimento, os exercícios algorítmicos, os problemas de aplicação, os problemas de pesquisa aberta e as situações-problema. Enquanto os exercícios de reconhecimento requerem que o resolvedor recorde fatos e definições, os exercícios algorítmicos "podem ser resolvidos com um procedimento passo-a-passo" (BUTTS, 1997, p. 34). Já os problemas de aplicação exigem a manipulação dos dados e algoritmos, enquanto que os problemas abertos não indicam a estratégia a ser utilizada. Ainda assim, esse autor enfatiza que tais exercícios mais simples podem ser reformulados tornando-os mais investigativos e, por assim dizer, proporcionando uma ação mais ativa dos alunos na (re)criação de conceitos matemáticos.

A partir disso, observamos alguns experimentos matemáticos que foram realizados nas introduções e explanações dos conteúdos. Conforme consta abaixo na introdução de Logaritmo, os alunos foram induzidos pela apresentação da professora a testarem valores para a observação de padrões nas operações de soma, subtração, divisão, multiplicação, radiciação, potenciação e, consequentemente, de logaritmos.

> Para o material de consulta,



Logaritmo

I subtração como inverso da adição

N	N + 3
1	4
2	5
3	6
4	7
5	8

4ª linha

Quanto é 4+3? pergunta esquerda resposta direita

Resposta: 7

Quanto mais 3 é igual a 7? pergunta à direita resposta à esquerda

Resposta: 4

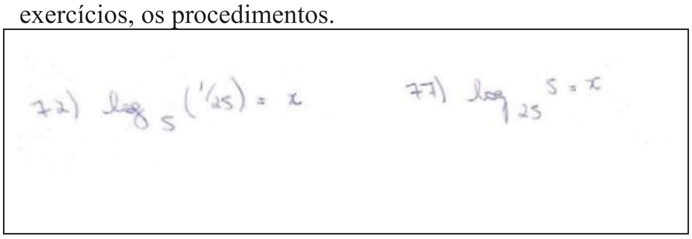
> Foi dada continuidade então para
> II) divisão como inverso da multiplicação;
> III) raíz como inverso da potência;
> IV) logaritmo como inverso da potência.
> Nos exemplos, faziam a tabela e formulavam e respondiam às 2 perguntas, sempre com relação à 4ª linha. (DC 19-20).

Mais adiante, nas listas utilizadas nas aulas, nota-se a presença de exercícios predominantemente algorítmicos, dos quais os alunos devem aplicar os conceitos e procedimentos que estão sendo estudados. Ainda assim, em uma análise mais minuciosa, o grau de dificuldade dos exercícios aumentava gradativamente e possibilitava que os estudantes explorassem diferentes valores e observassem, em sequência, as propriedades dos conteúdos que estão sendo estudados. Conforme a lista com exercícios de potenciação, utilizada no contexto do estudo de Logaritmos,

> Calcule utilizando a Tabela de bases e potências se necessário. Simplifique as raízes.
> 42) 8^3
> 43) 8^{-3}
> 44) $8^{\frac{1}{3}}$
> 45) $8^{-\frac{1}{3}}$
> 46) 8000^3
> 47) 8000^{-3}
> 48) $8000^{\frac{1}{3}}$
> 49) $8000^{-\frac{1}{3}}$ (LGPT1E3).

Em referência à abordagem sobre a RP, vista na categoria anterior, após a aula introdutória, em algumas aulas houve a apresentação dos procedimentos para a realização das tarefas através de alguns exercícios próprios da lista. Como abaixo,

> Foram feitas as questões abaixo para o caderno da época e explicado, através destes exercícios, os procedimentos.



72) $\log_5 (1/25) = x$ 77) $\log_{25} 5 = x$

> (DC21).

É necessário destacar que os exercícios, por terem respostas fechadas, ou seja, terem suas resoluções consideradas como certas ou erradas, não podem ser considerados como apenas IM. Entretanto, categorizamos como Investigações devido às pretensões colocadas nos exercícios de que os alunos consigam observar os padrões matemáticos e, com eles, aprendam os conceitos e procedimentos matemáticos.

De acordo com Butts (1997), os exercícios algorítmicos, como os apresentados anteriormente, podem ser reformulados de modo a torná-los mais interessantes. De acordo com o autor, podemos dar esta sequência de exercícios com um propósito ou ainda fazermos a inversão do mesmo problema.

Portanto, diante o contexto da PW, notamos que a matemática pode ser estudada a partir de experiências que estimulem a observação do mundo e de seus próprios padrões. Por outro lado, uma das possibilidades de desenvolver a capacidade de observação dos estudantes também se faz através de exercícios algorítmicos sequenciados com este mesmo propósito.

Considerando a aplicação da Fenomenologia de Goethe na PW,

> A fenomenologia goetheanística é a base da metodologia específica do Ensino de Ciências na Pedagogia Waldorf, que consiste em observar um evento de maneira cuidadosa e possivelmente repetidamente, muitas vezes observando o mesmo fenômeno em diferentes situações, esse processo no Ensino de Ciências tem por intenção uma compreensão mais profunda e global do fenômeno (LANZ, 1985). (FIGUEIREDO, 2015, p. 68).

Podendo a Fenomenologia ser aplicada como metodologia para o conhecimento de quaisquer fenômenos, nas disciplinas de ciências,

> O processo de repetição de várias experiências sobre o mesmo assunto tem a finalidade de demonstrar diferentes pontos de vista do mesmo fato, possibilitando ao aluno extrapolar o que presenciou para um conceito maior. (...). Essas atividades viabilizam o envolvimento emocional do aluno com a aula, com o conteúdo, e por meio desse envolvimento que a curiosidade dos alunos é estimulada. Apesar de a maioria das experiências serem realizadas somente pelo professor, os alunos demonstram grande interesse pela atividade, fazendo perguntas, levantando hipóteses entres seus pares e solicitando a repetição da atividade, em alguns casos. (FIGUEIREDO, 2015, p. 93).

Sendo assim, ao lado de Santos (2015), constatamos que, para além da concepção formalista clássica, a proposta da PW para o ensino de matemática também reforça a tendência empírico-sensualista de Fiorentini (1995). Somado às considerações acerca dos aspectos cognitivos e emocionais dos alunos,

> No que tange a aprendizagem do aluno, esta não é considerada tão passiva, há memorização, reprodução dos raciocínios e procedimentos ditados pelo professor, mas há também uma grande atividade do aluno, seja através do corpo ou através de atividades que são elaboradas visando sua aprendizagem. (SANTOS, 2015, p. 180).

Neste sentido, sobretudo no EM, há

> A observação contemplativa da natureza ou de objetos/réplicas de figuras geométricas para a descoberta das ideias matemáticas. Assim, por exemplo, o homem teria descoberto a ideia de plano observando a superfície de um lago; teria descoberto os números a partir da observação de diferentes quantidades de objetos. (FIORENTINI, 1995, p. 9).

Em nosso Diário de Campo notamos que aspectos da Fenomenologia de Goethe surgem no ensino de matemática no EM Waldorf, através de exercícios com o propósito dos alunos observarem, identificarem e descreverem padrões matemáticos.

De fato, no currículo prescrito,

> Quando se trata de investigar e de elaborar uma teoria, os alunos devem ser livres para adivinhar, para experimentar, para tentar várias possibilidades. Para buscar uma solução, pode-se simplificar o problema, formar uma analogia ou generalizar a pergunta- é necessário intuir qual a atitude mais promissora.
> Nessa fase evolutiva dos alunos, a matemática- oferecendo, de modo criativo, várias alternativas de solução-, pode ter um significado existencial. Os alunos têm a possibilidade de observar, sob vários ângulos, a sua própria maneira de raciocinar, de procurar vários pontos de partida, de escolher exemplos- ou exemplos contrários- de fazer uma investigação sistemática e de demonstrar os resultados obtidos. Eles aprendem a analisar e a julgar condições e pressupostos. (RICHTER, 2002, p. 197-198).

Além disso, a IM pode contribuir para o desenvolvimento da autoestima dos estudantes, pois

> É importante que os alunos possam fazer conquistas íntimas quanto à validade geral das suas ideias. A maior satisfação resulta de algo que eles primeiro supunham existir, ou que adivinharam, e que, depois, eles conseguiram demonstrar. (RICHTER, 2002, p. 198).

De acordo com York (2015, p. 4, TRADUÇÃO DA AUTORA),

> Eu tenho intencionalmente invertido o processo nesse livro e em nossos *workbooks*. Com uma abordagem fenomenológica, nós começamos as coleções com exemplos e através das observações próprias dos estudantes, eles discernem um padrão escondido ou uma qualidade em comum. Com a abordagem do caminho da descoberta, nós servimos como guias aos estudantes- tendo o cuidado de não revelarmos muito. Com ambas destas abordagens, os estudantes formulam a afirmação de uma regra, propriedade, ou teorema por eles mesmos. Eles criam a matemática (em algum nível) ao invés de terem o conteúdo dado a eles.

Disto, o Plano Escolar, indicado pela modelação da professora, aponta como objetivo para o 10° ano "Reconhecer leis e padrões tanto na Álgebra quanto na Geometria, de forma a entender como as coisas funcionam" (PE10). Já na metodologia do ensino de matemática do mesmo ano,

> **<u>Metodologia:</u>**
> • Cada tema é apresentado inicialmente com experimentos científicos, os quais devem ser contemplados;
> • Realização de simulações até organização formal do conceito ou da regra geral;
> • Exercitação com listas de exercícios. (...) (PE10).

Portanto, os processos investigativos constituem uma abordagem a ser utilizada na matemática do EM Waldorf, de modo que evidencie que ela é uma ciência que ainda está em constante desenvolvimento. Além disso, através do reconhecimento dos alunos acerca de suas próprias potencialidades matemáticas, eles podem não somente compreender os conteúdos matemáticos como também desenvolver seu pensamento matemático.

6.4. FLUÊNCIA MATEMÁTICA

Além das investigações e experimentações matemáticas apresentadas nas categorias anteriores, constatamos nos materiais que compõem nossa análise que o currículo matemático no EM Waldorf também considera necessário que os alunos desenvolvam habilidades matemáticas[13]. Em verdade, York (2015) indica que os professores devem buscar o equilíbrio do oferecimento de experimentações matemáticas aos alunos e o desenvolvimento dos conteúdos que precisam ser dominados. Portanto, não somente investigar e compreender, mas saber aplicar os conceitos e procedimentos em diferentes situações também é uma dimensão importante do ensino de matemática no contexto Waldorf. Pensando nisso, consideramos as definições do NCTM (2014) e de Russell (2000, 2007) acerca do desenvolvimento da fluência matemática.

De acordo com o NCTM (2014),

> A fluência é um componente crítico da proficiência matemática. Fluência é a habilidade de aplicar procedimentos correta, eficiente e flexivelmente; de transferir procedimentos para diferentes problemas e contexto; construir ou modificar procedimentos; e reconhecer quando uma estratégia ou procedimento é mais apropriado que outro. (TRADUÇÃO DA AUTORA).

A partir disso, Russell (2000) compreende que para ser fluente matematicamente é necessário estar além da decoração para a aplicação de fórmulas ou, ainda mesmo, saber aplicar os procedimentos na resolução dos problemas. Ainda é fundamental que os alunos também tenham compreendido e atribuído corretamente um significado aos conceitos e procedimentos. Assim, para Russell (2000), o professor deve desenvolver nos alunos, de modo equilibrado, a compreensão dos conceitos e algoritmos matemáticos junto à capacidade de aplicação dos mesmos nos processos de resolução de problemas.

Entre as sugestões para um melhor trabalho visando o desenvolvimento da fluência matemática, Hiebert (1997), citado por Russell (2007), indica que a matemática não deveria ser

[13] A partir de York (2015), traduzimos “math skills” como “habilidades matemáticas” para fins de facilitar a escrita e a leitura. Assim, nesta categoria, estaremos sempre nos referenciando ao termo e significado utilizado pelo autor.

resumida a seus algoritmos e fórmulas, mas que estes devem ser auxiliares na resolução de problemas. Para esta nova atribuição de significados aos procedimentos, é requerido que “os alunos trabalhem com as ferramentas matemáticas por longos períodos de tempo, testando-as e tentando observar o que acontece. O significado não reside nas fórmulas, mas é construído pelos estudantes enquanto eles a utilizam” (HIEBERT, 1997, p. 10, citado por RUSSELL, 2007). Além disso, o fato de compartilhar diferentes estratégias na resolução de um mesmo problema e de oportunizar que os alunos pratiquem exercícios mais básicos, antes da generalização de fórmulas para posterior aplicação em problemas mais complexos, também contribui para o desenvolvimento da fluência matemática.

Com isso, observamos que a estrutura das aulas de época era marcada por momentos destinados aos alunos trabalharem, em grupo, com as listas de exercícios. Como Figueiredo (2015, p. 93) aponta, havia um terceiro momento da aula de ciências, após a realização de algumas experiências e suas descrições, em que os alunos realizavam tarefas relacionadas aos experimentos antes vivenciados, sendo este terceiro momento também destinado ao desenvolvimento do querer (ou do fazer) nos adolescentes. Indicações similares a este ensino também estão constadas na fase de planejamento coletivo sobre a Metodologia do ensino de matemática do 10° ano no PE.

> **Metodologia:**
> • Cada tema é apresentado inicialmente com experimentos científicos, os quais devem ser contemplados;
> • Realização de simulações até organização formal do conceito ou da regra geral;
> • Exercitação com listas de exercícios.
> • Observar as curvas, procurando caracterizá-las;
> • Compreender o padrão geométrico de sua gênese;
> • Construir com exatidão e limpeza as curvas com utilização de instrumentos de desenho geométrico;
> • Ligar os pontos encontrados das curvas à mão livre, experimentando o movimento das mesmas. (PE10).

Observamos, assim, que o currículo modelado sofreu influências do currículo apresentado por York (2015) quando este autor considera que os conteúdos matemáticos podem ser divididos em duas categorias, que são as experiências matemáticas e as habilidades. As experiências matemáticas proporcionam descobertas que abrangem

> Uma categoria mais ampla de experiências matemáticas – algo que é crítico para o desenvolvimento de uma verdadeira capacidade de pensar matemático, ainda tão negligenciado em nossas aulas de matemáticas atualmente. Experiências matemáticas incluem descobertas, *puzzles*, jogos e resolução de problemas. Nós ensinamos esses tópicos porque eles esticam a mente de nossos estudantes, eles ensinam o pensamento matemático e eles geram entusiasmo e adoração pela matemática. (YORK, 2015, p. 4, TRADUÇÃO DA AUTORA).

Além disso, para que as habilidades e conceitos sejam dominadas,

> O professor precisa criar uma dança entre introduzir, aprofundar, praticar, adormecer e revisar. Quanto mais extenso for o conteúdo, maior o número de vezes que ele precisa ser colocado "para o sono" e então revisado mais tarde. É bastante comum a introdução de um conteúdo em um ano, mas não ter os estudantes o dominando até o próximo ano ou no próximo ano. (YORK, 2015, p. 4, TRADUÇÃO DA AUTORA).

Deste modo, York (2015) sugere que as aulas de matemática mantenham um equilíbrio entre a matemática convencional, abordada por meio de exercitação das habilidades matemáticas de conteúdos convencionais, e a matemática não-tradicional. Como é apontado pelo próprio autor,

> Enquanto nossos *workbooks* focam no desenvolvimento das técnicas padrões, eles também proporcionam experiências matemáticas aos estudantes e os dão um sentimento de descoberta. (YORK, 2015, p. 2, TRADUÇÃO DA AUTORA).

Contudo, York (2015, p. 2, TRADUÇÃO DA AUTORA) ainda cita que "O melhor jeito de saber como eu ensino a matemática convencional é lendo os '*workbooks*'" e, portanto, a fim de apresentarmos como os alunos do EM Waldorf exercitam os conteúdos matemáticos, consideramos a análise da estrutura das listas de exercícios presentes nos "*Workbooks*" da coleção *Making Math Meaningful*, traduzidas e distribuídas aos alunos pela docente. Em paralelo, analisamos também como tais atividades foram desenvolvidas em sala de aula.

De acordo com a estrutura das listas de exercícios presentes nos '*Workbooks*", observa-se as seguintes seções: Discussão em grupo, Trabalho em grupo, Exercitando e Problemas Dissertativos.

As seções de "Discussão em Grupo" e "Trabalho em Grupo" se referiam, principalmente, às atividades destinadas para a apresentação do conteúdo por parte do professor em sala de aula. De certo modo, já apresentamos parte considerável do material nas categorias anteriores.

Em seguida, a terceira secção é a "Exercitando". Nesta secção de atividades, nota-se a presença de exercícios elencados em itens, como apresentado abaixo:

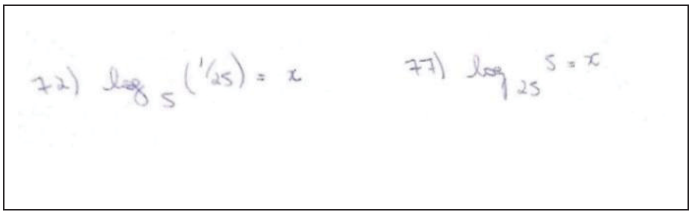
> Fatore
> 1) $x^2 + 9x + 20$
> 2) $x^2 + 14x + 45$
> 3) $x^2 - 14x + 45$
> 4) $x^2 + 8x - 20$
> 5) $x^2 - 8x - 20$
> 6) $x^2 + 15x + 54$

7) $x^2 + 15x + 54$
8) $x^2 + 15x - 54$
9) $x^2 - 15x - 54$
10) Use os problemas acima para formular Regras de Fatoração de Trinômios. (FATL3).

De fato, os exercícios são voltados para o desenvolvimento de habilidades matemáticas mais mecânicas. Entretanto, ainda se observam exercícios com aspectos da IM como demonstrado no exemplo anterior em que, após nove itens, os alunos devem formular, a partir dos itens anteriores, “Regras de Fatoração de Trinômios”.

Pelo mesmo motivo, estas listas podiam se tornar extensas, como verificado no estudo de Logaritmos, cuja listas tinham mais de 70 itens.

Foram feitas as questões abaixo para o caderno da época e explicado, através destes exercícios, os procedimentos.


72) $\log_5 (1/25) = x$ 77) $\log_{125} 5 = x$

(DC21).

Por fim, os últimos exercícios das listas eram intitulados “Problemas Dissertativos”. Como em EQ2L4,

Problemas dissertativos
10) Sete vezes o menor número é 4 a mais do que o dobro do número maior, e a soma dos dois números e igual a 16. Quais são os números?
11) O salário do Gabriel é 2/3 do salário da Alice. Juntos eles recebem R$ 600 por semana. Quanto é o salário de cada um?

Com isso, nota-se que o autor busca construir uma longa sequência de exercícios gradativos que facilite o caminho para os alunos perceberem alguns padrões matemáticos, mas que deixa menos espaço aos problemas com enunciados mais extensos e que necessitassem de uma interpretação mais aprofundada por parte dos alunos. De certo modo, ainda devemos considerar que este livro didático é de origem estadounidense e, portanto, é influenciado por uma cultura escolar cujo modelo de vestibulares é diferente dos modelos de vestibulares brasileiros. No caso do SAT, Exame de Admissão Estadunidense, seus enunciados são relativamente curtos se comparados com o do ENEM, Exame Nacional do Ensino Médio.

Torna-se interessante notar que na exercitação, por já terem sido apresentados os procedimentos, os próprios alunos passaram a saber quais métodos poderiam ou deveriam utilizar para resolver os exercícios. Assim, observa-se que as indicações de York (2015), junto à disposição das atividades em seu material favorecem ao professor desenvolver a fluência matemática em seus alunos, através da resolução de listas de exercícios.

Como em DC12,

> Depois de terminarem a 2) c), foram separados os quartos e grupos de alunos. Eles deveriam continuar nas listas.
> Nos grupos, presenciei alunos tentando identificar onde haviam começado a ver a fórmula de Bhaskara. Havia frases como "a gente começou a ver essa fórmula na lista 5, questão 1, e na 6. Então é daí pra frente".

Mesmo gerando situações em que os alunos pareciam mecanizar o processo de resolução dos exercícios, ainda assim havia exercícios, em maior ou menor medida, que proporcionavam aos alunos a reflexão e, consequentemente, a escolha do método que tivessem julgado como mais conveniente de resolvê-los. Como em EQ2L10,

> **Exercitando**
> **Resolva** usando cada um dos três métodos:
> 3) $x^2 + 6x - 16 = 0$
> **Resolva** usando a fórmula de Bhaskara
> 4) $3x^2 - 8x + 4 = 0$
> **Resolva** usando o método mais fácil:
> 5) $x^2 + 9x + 14 = 0$
> 6) $x^2 + 5x - 11 = 0$
> 7) $3x^2 + 10x + 8 = 0$
> 8) $5x^2 + 7x - 10 = 0$
> 9) $x^2 + 6x = 3$

Em maior ou menor grau, os alunos tinham certa autonomia para fazerem os exercícios, fosse individualmente ou em grupo. De acordo com York (2015), dispor os alunos em grupos se tornava interessante, sobretudo, aos que tinham mais facilidade com matemática e se encontravam mais avançados. Assim, com a separação da turma em grupos, estes alunos também podiam se encontrar desafiados em aulas cujo professor, paralelamente, deve revisar os conteúdos com os alunos que têm mais dificuldade.

O mesmo autor ainda considera que pode ser um desafio para o docente garantir que os estudantes mais avançados estejam sendo desafiados e que, ao mesmo tempo, os estudantes com maiores dificuldades consigam acompanhar os conteúdos. Ao nível do Ensino Médio, o autor sugere que as aulas Avulsas sejam divididas em grupos de alunos regulares e mais avançados. Neste sentido, em suas listas é possível observar a divisão dos exercícios em partes

A e B, sendo a A comumente requisitada pela professora para a composição da nota bimestral e a B que permite que os alunos mais avançados sejam estimulados a resolverem exercícios mais complexos. Como em DC18,

> Depois da revisão com exemplos, foi decidido que os alunos terminariam as listas 12 ou 13 de equação do 2° grau ou já avançariam em log com a lista passada para eles. Os alunos iam fazendo, sozinhos ou em grupos, e eu ia andando pela sala com a professora. Alguns faziam as listas 12 ou 13 e outros, a de log.

Ainda segundo York (2015), as aulas Avulsas deveriam proporcionar aos estudantes mais tempo de trabalho em suas próprias tarefas, o que permitiria que eles levassem menos tarefas de casa, mas também que o professor pudesse responder a maior quantidade de dúvidas possível. Para isso, o autor indica que cerca de 50% do período de sua aula é vivenciado deste modo e, em nossas anotações do Diário de Campo acerca da aulas de época, podemos observar como a docente também destinou um tempo significativo para que seus alunos resolvessem suas próprias listas enquanto ela os auxiliava.

No caso das aulas virtuais observadas no 10° ano, os grupos eram separados pelos próprios alunos, que se organizavam entre si, e observa-se assim que sua disposição em grupos permitiu que cada um avançasse em seu ritmo. Já nas aulas presenciais, a própria disposição das carteiras facilitava que a aula assim fosse conduzida. Além disso, notava-se como os alunos se desenvolviam ao ajudarem uns aos outros.

Ao final de algumas aulas, os gabaritos eram passados na lousa pelos alunos ou pela própria docente com o auxílio dos mesmos. Ainda assim, algumas destas listas compunham a nota final do bimestre junto ao material de consulta, que era um livro ou caderno feito pelo próprio aluno, com as anotações mais pertinentes e demais resumos das aulas, e o sábado avaliativo, no qual era feita uma prova sobre o conteúdo daquela Época ou Curso.

6.5. PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...

Por fim, referenciamos as atividades que se encontravam na primeira parte da aula de Época e que extrapolam o desenvolvimento do conteúdo e sua aplicação em problemas e exercícios.

Ao buscar categorizar os elementos que constituem o currículo de matemática do Ensino Médio Waldorf, relembramos que já em um primeiro contato com a professora, fomos informados sobre alguns diferenciais do ensino da matemática no contexto Waldorf. Dentre eles,

> A docente discorre sobre o medo de alguns professores em gastar tempo, mas é isto (gastar tempo) que faz com que os estudantes possam se apropriar de algo construído, se tornando assim um diferencial na Waldorf. Para isso, ela cita Jamie York que diz que 50% da aula pode ser composta de enigmas e 50% do conteúdo em si, apesar de ela conseguir 35%-65%. Em sua visão, quando surgem perguntas "pra que serve" em sua aula, então a aula está ruim. E se perguntam "como faz?", então é porque o aluno quer saber logo para largar o lápis e sair dali. (DIÁRIO DE CAMPO, CONTATO COM A ESCOLA)

Nota-se que, ao dividirmos a aula em tempo reservado aos enigmas e tempo reservado ao conteúdo em si, compreendemos que os enigmas se baseiam em justamente não ter como foco a aplicação de um conteúdo específico.

De fato, já nas primeiras aulas observadas durante nossa Pesquisa de Campo, conseguimos notar uma estrutura geral das aulas de Época. Resumidamente, notamos que a docente desenvolvia suas aulas em dois momentos: o primeiro, constituído de enigmas, jogos e leituras matemáticas, e o segundo, no qual os conteúdos eram melhor explanados e exercitados. Assim, tais atividades trabalhadas em sala de aula se apontaram como um diferencial no currículo Waldorf, tanto pela novidade que isto foi para mim como aluna e professora, quanto pela mera curiosidade que me fora despertada. Portanto, esta categoria foi a mais evidente antes mesmo da categorização e, assim, continuamos por notar que havia muitos episódios relatados no Diário de Campo que se referiam a estes enigmas, jogos e, até mesmo, leituras de textos e livros e que seu estudo poderia trazer maiores contribuições para o ensino da matemática.

Primeiramente, para compreendermos no que se constituem os enigmas matemáticos no ensino da matemática no âmbito desta pesquisa, nos utilizamos de Lima (2018). A autora interpreta os enigmas como sendo problemas não estruturados a serem resolvidos no contexto da Resolução de Problemas de Stenberg (2016) e Echeverria e Pozo (1998).

Se um problema é conceituado como o que o aluno não sabe fazer, mas que possui interesse em fazer (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011), em sala de aula,

> Um problema se configura na relação com o resolvedor, de tal modo que, se ele já conhece ou tem memorizados tais métodos de resolução ou não está interessado na atividade, não será para ele um problema. (ONUCHIC *et al*, 2014, p. 53).

Deste modo, diversos autores buscaram classificar os tipos de problemas que podemos encontrar. Dentre eles, para Sternberg (2016) e Echeverria e Pozo (1998), há dois tipos de problemas: os estruturados e os mal ou não-estruturados, dos quais "os problemas bem estruturados seguem uma forma constante de resolução, fazendo com que o aluno relembre estratégias resolvidas em outros problemas” (LIMA, 2018, p.32).

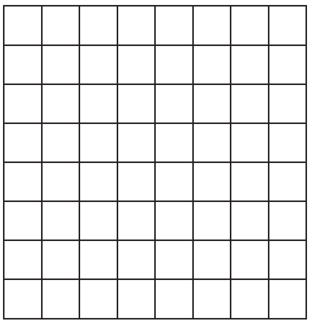
Já um problema mal estruturado ou mal definido, para Echeverría e Pozo (1998, p.21) citado por Lima (2018, p.21), “seria aquele no qual o ponto de partida ou as normas que estipulam quais são os passos necessários para resolver a tarefa são muito menos claros e específicos”. A formulação destes problemas não se repete e,

> Diferentemente dos problemas bem estruturados, o problema mal estruturado não reutiliza caminhos para sua solução e podem não ter algoritmos. Portanto, para este tipo de problema precisamos de solução, enquanto que para os problemas bem estruturados precisamos de re-solução, ou seja, resolver novamente da mesma forma. Nesse tipo de problema, a criança deve estabelecer relação entre os conceitos aprendidos e as situações propostas no mesmo. (LIMA, 2018, p. 33).

Com isso, é necessário um maior envolvimento e vontade do aluno em resolver um problema não estruturado, pois este não necessariamente necessita da utilização de algoritmos, ainda que não dispense conhecimentos prévios (LIMA, 2018, p. 34). Estas situações também são capazes de despertar a criatividade dos alunos na busca de diversos caminhos para se chegar à solução, mesmo que eles ainda necessitem de etapas a serem percorridas. Contudo, não há uma dicotomia entre os problemas bem ou mal resolvidos, mas um *continnum* (ECHEVERRÍA; POZO, 1998), a não ser pelos exercícios em que os alunos já foram apresentados e, portanto, sabem qual procedimento utilizar.

Por exemplo,

> No 10° ano, a turma recitou o poema de trás para frente como sugestão dos alunos. Na lousa, foi passado um enigma que haviam começado no dia anterior.



> Neste tabuleiro 8x8, deveriam colocar 8 rainhas de modo que elas não se comessem. (DC17).

Para este enigma, nota-se que não há uma fórmula ou algoritmo matemático a ser aplicado diretamente para que possamos resolvê-lo, principalmente se considerarmos os conteúdos pertencentes ao currículo do ensino básico. Logo, são necessárias tentativas e erros até o descobrimento da resposta que o aluno, ainda que a descubra, pode ser levado a questionar se ela é única.

Ainda, através dos enigmas é possível também desenvolver a capacidade de resolução de problemas por meio de técnicas que ainda não foram apresentadas formalmente. No livro "*Fun, Games and More!*" de Evans, Follari e York (2012), por exemplo, a partir do 4° ano do Ensino Fundamental há a sugestão de enigmas que exploram o método de "Soma e Produto" com os alunos que, futuramente, o irão utilizar para resolverem Equações de 2° Grau[14]. Como apresentado abaixo,

> 6. Produtos, somas e diferenças.
> a) Encontre dois números que multiplicados resultam em 36 e ...
> i) Somados resultam em 13.
> ii) Somados resultam em 15.
> iii) Somados resultam em 37. (EVANS; FOLLARI; YORK, 2012, p. 6, TRADUÇÃO DA AUTORA).

Conforme se avança os anos escolares, apresentam-se também variações do enigma.

> a) Encontre dois números cuja soma seja 210 e sua diferença seja 40. (EVANS; FOLLARI; YORK, 2012, p. 27, TRADUÇÃO DA AUTORA).

Outra máxima na sugestão dos enigmas para os alunos é de que eles deveriam tentar ao máximo antes de serem dadas as respostas pela professora ou, até mesmo, pelos colegas que já os tivessem descoberto. No 9° ano, por exemplo, foi passado o seguinte desafio em junho de 2022:

> O número 14 tem quatro fatores (incluindo 1 e ele mesmo), 60 tem doze fatores, e o número 48 tem dez fatores. Agora como podemos determinar o número de fatores de qualquer número grande? Por exemplo, podemos dizer que o número 1.103.350.248.000 tem 3360 fatores (Como podemos descobrir isso? Quantos fatores tem o número 9.489.150.000? (CONVERSA DE *WHATSAPP* COM A PROFESSORA).

Assim, não tendo a maioria da classe ainda o desvendado, eles permaneceram com a dúvida acerca do problema, até que no dia 12/08,

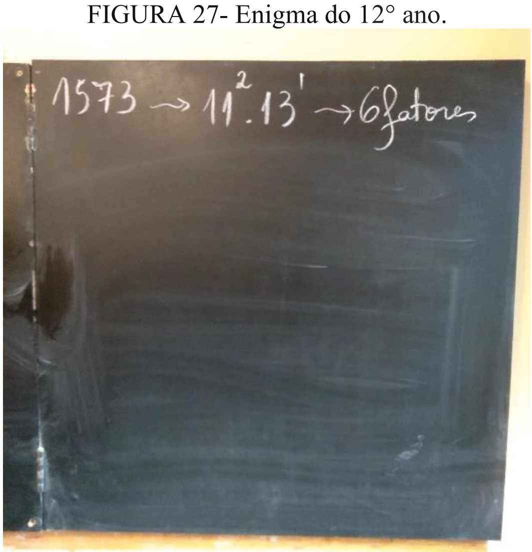
> Foi retomado o enigma proposto em junho, mas que muitos não descobriram. Em diálogo, os alunos se expressavam e a professora dava dicas na lousa. Muitos exemplos

14 Devido ao caráter dos episódios referentes exclusivamente ao 10° ano, estendemos a análise desta categoria a demais anos escolares de modo que a apresentação deste trabalho se tornar mais representativa do fenômeno estudado.

> numéricos foram feitos e os alunos que sabiam a resposta sugeriam mais exemplos. (DIÁRIO DE CAMPO, 9° ANO, 12/08/2021).

Estes momentos também possibilitavam que a turma fosse à lousa apresentar suas ideias em linguagem matemática e que compartilhassem informações com os outros colegas. Mais adiante, o mesmo enigma foi feito no 12° ano.

FIGURA 27- Enigma do 12° ano.



FONTE: A autora (2022).

Alguns enigmas também remetiam aos jogos de lógica conhecidos como Enigmas de Pensamento Lateral. Como no dia 24/09,

> No 10° ano, foi recitado o poema e realizado vários enigmas do tipo "sim, não e irrelevante". Alguns deles, já eram conhecidos por alguns alunos e outros não. Dentre eles, havia "Um homem dirige, passa o sinal verde, atropela um ciclista e o passageiro é preso" e "A mulher matou seu gato tentando ajudá-lo." (DC23).

Neste jogo, dado somente uma frase pelo professor, os estudantes precisavam desvendar toda a história. Para isso, podiam fazer à contadora da história somente perguntas cuja resposta pudesse ser "sim", "não" ou "irrelevante". De acordo com Onuchic *et al* (2014, p. 96), dentre as vantagens de se apresentar problemas em forma de jogos se tem a possibilidade de representação de desafios, a indução dos alunos à vontade de acertá-lo ou ganhá-lo e, ainda, o favorecimento do desenvolvimento de habilidades como a linguagem, a criatividade, o raciocínio lógico, a capacidade de perceber relações e analogias, etc.

Ao analisarmos o currículo apresentado por Jamie York (2015), de acordo com o autor, o currículo matemático atual possui uma grande ênfase no desenvolvimento de habilidades através de longas listas de conteúdos matemáticos. Com o ensino da matemática exclusivamente por meio destas listas, as experiências matemáticas dos alunos ficam reduzidas a resolver problemas repetitivos e sem sentidos, dos quais basta a aplicação de fórmulas ou realização de procedimentos previamente conhecidos para sua resolução. Assim,

> Com muita frequência, a repetição e o treino em resolver problemas sem fim de um livro didático pode matar o entusiasmo natural para aprender dos estudantes. Nós acreditamos que todos os estudantes deveriam ter a oportunidade de experienciar o entusiasmo matemático.
> O que é esse entusiasmo matemático? Ele é possivelmente melhor experienciado quando os estudantes encontram um desafio- comumente um desafio que inicialmente pareça extraordinário- em que eles perseveram e, finalmente, o resolvam com sucesso. Um bom enigma ou jogo matemático proporciona uma excelente oportunidade para este entusiasmo. (EVANS; FOLLARI; YORK, 2012, P. 1-2, TRADUÇÃO DA AUTORA).

Nota-se que o autor da coleção de livros didáticos defende que as aulas de matemática devem ser equilibradas entre os conteúdos e procedimentos da matemática tradicional, a fim de desenvolverem determinadas habilidades nos estudantes e os conteúdos, e os desafios da matemática não-convencional, para que eles se entusiasmem com verdadeiras experiências matemáticas e também desenvolvam sua criatividade, persistência, etc. Portanto, os professores devem buscar equilibrar suas aulas com listas de exercícios para o desenvolvimento de habilidades, mas também com experimentações, jogos e enigmas. Assim, estas atividades se tornam meios de desenvolverem um senso de maravilhamento nos alunos pela matemática além de estimularem a criatividade e o pensamento matemático nos mesmos.

Para isso, Evans, Follari e York (2012, p. 2, TRADUÇÃO DA AUTORA) consideram a diferença entre resolver problemas e a resolução de problemas na introdução feita para os professores em seu material.

> Usualmente, resolver problemas (isto é, dado como parte de uma tarefa de casa) equivale a seguir procedimentos que os estudantes foram previamente apresentados como fazer. (...)
> Há tons de cinza aqui, mas uma verdadeira resolução de problemas deve incluir uma experiência de incerteza. O estudante é inclinado a dizer a si mesmo "Eu nunca vi isso antes- eu não tenho ideia de como faço'.

Disto, se os enigmas e jogos matemáticos são desafiantes aos estudantes, então são meios de proporcionar a eles tais experiências em RP, uma vez que eles não sabem como resolvê-los e podem se sentir entusiasmados para isso.

Além das atividades anteriormente apresentadas, nesta primeira parte das aulas de Época também houve a leitura de uma obra de Agatha Christie.

> No dia 02/09, no 10° ano, houve transmissão da aula. Ao recitarem o poema de Steiner, novamente foi retomada a questão de trocar o "homem" por "humano". Isso significaria quebrar tradições, "mas vocês que sabem". E assim foi feito.
> Então recebi um caderno em espiral que era a impressão do livro "Testemunha de Acusação", da Agatha Christie. Durante cerca de meia hora, cada aluno lia as falas de um personagem e, assim, terminaram o 1° ato neste dia. (DC09).

Segundo resumo,

> Leonard Vole está sendo julgado pelo assassinato de Emily French, uma senhora rica que fez dele seu único herdeiro, sem saber que era casado. Ele alega inocência, mas o julgamento toma um rumo inesperado quando Romaine, a mulher de Leonard, se apresenta como testemunha de acusação. (PREFEITURA DE SANTO ANDRÉ, 2022)[15].

Com isso, perguntamos informalmente à professora sobre a finalidade desta leitura e ela me indicou que "era para desenvolver o julgamento deles." (DC11). Apesar de ela em si não fazer, contou que existem professores de Matemática Waldorf que levam seus alunos ao tribunal para acompanharem algum caso.

Assim, nota-se a consideração feita pela professora de matemática sobre como, através de sua disciplina, pode ajudar no desenvolvimento do pensar dos alunos do terceiro setênio. Segundo Richter (2002), na fase da adolescência, uma relação de contraposição entre o exterior e o interior do jovem é estabelecida pelo juízo. Necessita o jovem então vivenciar a validação e a verificação do seu pensar para além dos sentidos e no contexto escolar "o professor pode e deve ajudar, estimulando, com exemplos, a formação da capacidade julgadora" (RICHTER, 2002, p. 46), de forma que o estudante aprenda a lidar objetivamente com seus julgamentos sem cair em ceticismo ou pessimismo.

Ao observar o currículo prescrito por Richter (2002, p. 54) para o 10° ano,

> Personalidades individuais passam a destacar-se no trabalho da "massa". Devem ocorrer passos rumo à atividade própria, ao "encontrar-se", inicialmente no âmbito do pensar. A clareza do raciocínio e a crescente capacidade de julgar devem ajudar o aluno a desligar-se cada vez mais do domínio das simpatias e antipatias. Por isso é tão importante a abordagem analítica de leis naturais que podem ser captadas pelo raciocínio.

Além disso, suas metas são

> 1) Alcançar objetivamente clareza no pensar; deduções lógicas, casuais (julgamento racional- julgamento conceitual).

---

15 PREFEITURA DE SANTO ANDRÉ. Biblioteca Digital de Santo André. http://www.santoandre.sp.gov.br/pesquisa/con_detalhe.asp?ID=18518. Acessado em 25 nov. 2022.

> 2) Identificar analiticamente as leis que regem o mundo. Confrontar-se com o puramente material, com a realidade física sensorial. Tornar-se um cidadão plenamente consciente do mundo. Compreensão das leis que regem o mundo. O interesse começa a dirigir-se para o próprio interior. (Cf. H. Schirmer, *Op.* cit., p. 156).
> 3) Segurança no conhecer. O mundo é verídico.
> 4) Precisão no agir, práxis em questões relativas à vida.
> 5) Desenvolver progressivamente a responsabilidade sobre os próprios atos. (RICHTER, 2002, p. 57-58).

A partir disso, nota-se que a leitura de um livro de romance criminal nas aulas de matemática é amparada pelo currículo prescrito Waldorf e pelas considerações psicológicas dos alunos nesta faixa etária. Neste caso, a leitura deste gênero literário proporcionaria o desenvolvimento da capacidade de julgar destes indivíduos.

Além do currículo prescrito possibilitar a realização desta atividade, a rede de professores Waldorf no Brasil também compartilha suas experiências sobre como planejar atividades em que o julgamento dos alunos seja desenvolvido. Conforme fora dito pela professora, há colegas que trabalham, inclusive, com visitas a tribunais. De certo modo, estas situações demonstram que o ambiente escolar de uma escola Waldorf possibilita que atividades que desenvolvam o pensar e que não sejam diretamente atreladas ao resolver problemas matemáticos, tais como a leitura de um livro ou texto em uma aula de matemática, sejam não somente possíveis como também bem recebidas pela equipe escolar, alunos e pais.

De fato, já no primeiro contato com a professora, foi sinalizado que havia uma parte diferenciada das aulas e que proporcionaria aos alunos o entusiasmo com a matemática. O mesmo diferencial das aulas consta no Plano Escolar que, apesar de estar indicado formalmente apenas para o 12° ano, também é realizado com as outras turmas no Ensino Médio.

> **Curiosidades e Enigmas**
> • Diferentes Curiosidades e Enigmas da Matemática
>
> **Metodologia:**
> • Interligar os temas, trazer relações com temas de outros anos;
> • Realização de simulações até organização formal do conceito ou da regra geral;
> • Exercitação com listas de exercícios;
> • Instigar os alunos a um pensar autônomo e livre;
> • Permitir que os alunos conduzam as aulas de Curiosidades e Enigmas matemáticos. (PE12).

Deste modo, percebemos que a utilização de enigmas e jogos é indicada e influenciada pelos livros didáticos do meio Waldorf, assim como as leituras de livros e textos julgados pertinentes pelos docentes da disciplina são possíveis elementos constituintes do ensino de matemática no Ensino Médio de uma Escola Waldorf. De modo geral, estas atividades buscam desenvolver o entusiasmo e maravilhamento dos alunos pela matemática, trabalhando também com uma dimensão criativa da disciplina, em equilíbrio com as atividades mais mecanizadas e procedimentais que surgem ao se trabalhar os conteúdos mais convencionais do currículo.

Como estratégia de ação, estas atividades são realizadas em um primeiro momento de cada uma das aulas de Época. No caso de nossa pesquisa, a professora reservava cerca de 40 a 50 minutos de uma aula de 1 hora e 50 minutos de duração. Em seguida, desenvolviam-se os conteúdos de Equação do 2° Grau e Logaritmos, como demonstrados nas categorias anteriores.

7. CONCLUSÃO

Em busca de identificarmos como aspectos do currículo de matemática do Ensino Médio de uma Escola Waldorf se manifestam na prática docente, tanto as observações na escola quanto o referencial teórico de Sacristán (1998) nos permitiram aprofundar nas relações entre a teoria e o cotidiano de uma escola fundamentada na Pedagogia Waldorf. Deste modo, analisar o desenvolvimento deste currículo nos proporcionou a melhor compreensão de diversos aspectos da aprendizagem neste contexto escolar alternativo, considerando desde as prescrições antroposóficas e materiais didáticos nela inspirados até as condições estruturais, que condicionam e são construídas pela prática de uma destas escolas.

Conforme ressaltado ao longo deste trabalho, visualizamos, ainda que brevemente, as articulações entre os agentes curriculares, desde autores da PW até a docente e seus alunos. Entretanto, ao objetivarmos analisar os aspectos do ensino de modo mais geral, tomamos ciência de que muitos detalhes e pormenores não seriam, e, de fato, não foram aprofundados durante a coleta de dados como, por exemplo, o processo de planejamento individual e coletivo dos professores Waldorf, o processo de recuperação em uma EW, o papel dos plantões de matemática, etc. Do mesmo modo, se tornaria extenso analisar variados detalhes de todos os currículos simultaneamente, o que, de alguma maneira, Sacristán (1998) nos contribuiu para que a pesquisa ficasse mais organizada. Ainda assim, muitos dados foram constituídos ao longo da Pesquisa de Campo e, deste modo, veio a importância da categorização de episódios que fossem representativos de todo o repertório.

Devido a Pesquisa de Campo ter sido realizada em apenas uma escola, as informações e resultados apresentados nesta dissertação não podem ser induzidos a uma maior generalidade às demais EWs, sejam elas brasileiras ou estrangeiras. Sendo assim, os resultados deste estudo são algumas possibilidades de como a teoria curricular, com pressupostos da PW, tem sido transformada em prática em uma escola por ela fundamentada.

Mesmo assim, o contexto escolar pesquisado demonstrou uma filosofia educacional alternativa que possui suas particularidades, contemplando diferenciações em seu ambiente físico e pedagógico e, consequentemente, em sua prática. De fato, o currículo Waldorf indica considerar uma série de fatores no processo de ensino e aprendizagem, como o desenvolvimento psicológico dos alunos, a estruturação das aulas e da escola, os papéis do professor e da disciplina que ele leciona no desenvolvimento da liberdade dos indivíduos, etc. Em experiência de imersão, notamos que a escola possui características básicas que a torna Waldorf, como recitação do verso da manhã, ensino em Épocas, aulas diferenciadas, autogestão, etc. Mais especificamente, no EM, nota-se que a disposição dos alunos adolescentes molda o ambiente das aulas a níveis intelectuais e artísticos, principalmente quando estes estudam na escola há um longo tempo.

Já no âmbito da disciplina de matemática no EM, desde as prescrições até as aulas em si, notamos haver uma parte significativa de conteúdos matemáticos que são comuns às demais escolas, como equações, conceitos geométricos relacionados às figuras geométricas tradicionais, análise combinatória e probabilidade, etc. Por outro lado, observa-se a inserção de conteúdos matemáticos que não estão ou são relegados nos demais currículos brasileiros como, por exemplo, a Filosofia da Matemática, as Geometrias Não-Euclidianas e a Agrimensura.

Com a análise dos livros utilizados pela docente dentro do contexto Waldorf, podemos compreender melhor como seu currículo prescrito se transforma em atividades mais concretas. De modo geral, observa-se que a coleção utilizada pela docente indica que se deve buscar um equilíbrio entre os conteúdos e abordagens mais tradicionais e as experiências matemáticas mais diversificadas que estimulem o entusiasmo dos alunos pela disciplina e suas capacidades de investigação e de resolução de problemas.

No que diz respeito às metodologias empregadas na abordagem dos conteúdos, constamos aspectos da História da Matemática, Resolução de Problemas e Investigação Matemática. A respeito desta última, notamos influências da Fenomenologia de Goethe na adaptação de exercícios algorítmicos em exercícios com um caráter mais investigativo. Além disso, como apresentado nos livros didáticos Waldorf, havia a proposta de enigmas, jogos e, até mesmo, leituras de livros ou textos que os professores julgassem pertinentes ao desenvolvimento da capacidade matemática dos alunos.

Diante de tudo isso, algumas questões ainda continuaram em aberto e outras surgiram no decorrer desta pesquisa. A princípio, diante da concepção curricular de Sacristán (1998), pode ser interessante uma pesquisa cujo tema seja, especificamente, as relações que são estabelecidas entre as prescrições curriculares, os livros didáticos e a modelação dos professores no contexto Waldorf.

Outro ponto interessante a ser considerado é sobre como a PW no Brasil se encontra em um período de criação de sua própria identidade e como, a partir de nossas necessidades locais, suas práticas, vezes ou outras, se distinguem daquelas advindas de contextos predominantemente estadounidenses ou europeus. Citando, por exemplo, a utilização de livros de matemática estrangeiros, acreditamos ser fundamental pesquisas em torno da decolonialidade frente ao abrasileiramento curricular Waldorf. Portanto, uma vez que a PW não indica a utilização de apostilas padronizadas, um ponto a ser estudado em novas pesquisas é sobre como os professores Waldorf no Brasil se apropriam dos livros didáticos, Waldorf ou não, brasileiros ou não. Afinal, como estes professores buscariam enriquecer suas atividades para além dos materiais disponíveis ou sugeridos pela literatura Waldorf?

Em uma mesma linha de pensamento, de modo ousado me indago se e como ambas fundamentação teórica e estrutura escolar Waldorf possibilitam trabalhar a matemática através da Etnomatemática, da Filosofia e da História da Matemática com seus alunos. Idem para as demais disciplinas escolares.

Sendo assim, acreditamos que esta pesquisa é capaz de revelar as relações entre o currículo prescrito por Steiner e o currículo apresentado atualmente, além de como estes influenciam e são transformados em currículos modelados e em ação. Se também pensarmos em uma análise que busque realçar mais as diferenciações no currículo de matemática no Ensino Médio Waldorf, podemos com isso apresentar outros caminhos de desenvolvimento curricular quanto aos conteúdos e metodologia na educação matemática. Logo, a conclusão desta pesquisa ainda pode ser útil aos pesquisadores que se dedicam ao estudo e à compreensão de pedagogias alternativas, notadamente no âmbito da disciplina de matemática.

REFERÊNCIAS

3° ENCONTRO BRASILEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NAS ESCOLAS WALDORF, 2021, Federação das Escolas Waldorf no Brasil.

ALBINO, Thais Sena de Lanna**. Educação Financeira e o ensino de Matemática em uma escola Waldorf: currículo, professores e estudantes**. 2017. 132 f. Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas, Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, 2017.

ANDRÉ, M. E. D. A. **Etnografia da prática escolar.** Campinas/SP: Editora Papirus, 1995. – (Série Prática Pedagógica).

ARAGÃO, M. S. de. Currículo na escola e os desafios para ensinar. In: **Anais da III Semana de Línguas e Literaturas do Campus Campos Belos**. UEG, 2017. p.35-47.

BACH JUNIOR, J.; GUERRA, M. C. M. O Currículo Waldorf e o desafio da sua atualização. **Revista e-Curriculum**, São Paulo, v.16, p.857-878, jul./set. 2018.

BACH JUNIOR, J. A fenomenologia da natureza de Goethe: conexões à educação ambiental. **Rev. Eletrônica Mestr. Educ. Ambient**, v. 30, n. 1, p.140–158, jan./ jun. 2013.

BACH JUNIOR, J. **Fenomenologia de Goethe e educação:** a filosofia da educação de Steiner. Curitiba: Lohengrin, 2019.

BURKHARD, G. **Biográficos:** estudos da biografia humana. 2ª edição revisada. Editora Antroposófica. São Paulo, 2006.

BUTTS, Thomas. Formulando Problemas Adequadamente. In: KRULIK, S.; REYS, R.E. **A Resolução de Problemas na Matemática Escolar**. São Paulo: Atual, 1997, p.32-48.

CARLGREN, F.; KLINGBORG, A. **Educação para a liberdade:** a pedagogia de Rudolf Steiner. Escola Waldorf Rudolf Steiner. São Pulo, 2006.

CÔRTES, S. A. **A Organização e o Desenvolvimento Curricular pelo professor e sua relação com o processo de ensino e aprendizagem de matemática nos anos iniciais.** 2015. 300p. Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-Graduação da Faculdade de Educação, da Universidade de Brasília, Brasília, 2015.

CRESWELL, J. W. **Investigação Qualitativa e projeto de pesquisa [recurso eletrônico]:** escolhendo entre cinco abordagens. 3a ed. Porto Alegre: Penso, 2014.

ECHEVERRÍA, M. D. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. (org.). **A solução de problemas:** aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998, p. 13-42.

EVANS, R.; FOLLARI, M., YORK, J. **Making Math Meaningful:** Fun With Games, Puzzles, and More!. 3rd edition. Jamie York Press, 2012.

FEDERAÇÃO DAS ESCOLAS WALDORF NO BRASIL (FEWB). **Sobre a FEWB:** Histórico. Disponível em <http://www.fewb.org.br/sobre_fewb.html>. Acesso em 03 de dez. de 2021.

________. **Fórum Internacional para a Educação Waldorf/Rudolf Steiner (Círculo de Haia)**. Aprovada na versão revista pelo Fórum Internacional do Movimento de Pedagogia Waldorf – Círculo de Haia em 2015, Viena, Áustria. Aprovada na versão em português pela Seção Pedagógica da Sociedade Antroposófica no Brasil em 2018, São Paulo, SP. Disponível em .
<http://www.fewb.org.br/imagens/secao/documentos/3%20Caracteristicas%20Essenciais%20da%20Pedagogia%20Waldorf.pdf>. Acesso em 03 de dez.de 2021.

FIGUEIREDO, C. G. **Ensino de Ciências na pedagogia Waldorf:** intenções e ações. 2015. 128 f. Dissertação (Mestrado)- Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru, 2015.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. **Revista Zetetiké**, Campinas, Ano 3 - n.4/1995.

GARCIA,. H. C.; BACH, J. Perspectivas para o ensino de história no ensino médio das escolas waldorf. In: **Revista Triângulo**, v. 15, n.2, maio/agosto de 2022.

GONÇALVES, N. de B. **O ensino de frações inspirado na pedagogia Waldorf.** 86 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal de São Carlos, São Carlos : UFSCar, 2015.

IMPORTANCIA E INFLUENCIA DE LAS MATEMÁITCAS EM LA FORMACIÓN DEL SER HUMANO, 2021, Fundación Auramanto.

JARMAN, R. **Topics in Mathematics for Waldorf High Schools**: Volume 2 For Ages 14 to 18. Association of Waldorf Schools of North America, 2010.

LANZ, R. **A pedagogia Waldorf**: caminho para um ensino mais humano. Summus. São Paulo, 1979.

LEMONJE, S. de S. **O Ensino de História na Escola Waldorf Anabá:** Cultura Escolar e Saberes Docentes. 201 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Ciências da Educação, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2016.

LIMA, F. C. **Os enigmas como instrumento para o desenvolvimento de autoconfiança e de atitudes positivas em relação à matemática**. 100 f. Dissertação (Mestrado)– Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências, Bauru, 2018

LUCISANO, S. V. N. **Contexto Matemático inserido na vivência de Agrimensura**. 93p. Dissertação (Mestrado) - São Carlos : UFSCar, 2018.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. **Pesquisa em Educação:** Abordagens qualitativas. - [2. ed]. - Rio de Janeiro: E.P.U., 2015.

MARTINS, E.; CÂNDIDO, R.N. Práticas Pedagógicas na Pedagogia Waldorf: uma análise sobre a percepção de professores em formação. **Revista Pedagógica,** v. 23, p. 1-18, 2021.

NEVES, K. C. de F. **O papel da matemática no desenvolvimento do indivíduo na perspectiva da Pedagogia Waldorf.** 139 p. Dissertação (Mestrado- Programa de Pós-Graduação em Educação. Área de concentração: Ensino de Ciências e Matemática) - Universidade de São Paulo, Faculdade de Educação, 2016.

National Concil of Teachers of Mathematics (NCTM). **Procedural Fluency in Mathematics.** 2014. Disponível em https://www.nctm.org/uploadedFiles/Standards_and_Positions/Position_Statements/Procedural%20Fluency.pdf. Acesso em 15/11/2022.

OELHAF, R. C. **A Waldorf High School Mathematics Program.** Waldorf Publications at the Research Institute for Waldorf Education, 2015.

OLIVEIRA, F. M. C.; MACHADO, C. de A.; FILHO, O. S.; FRANCO, V. S. Ciência e Espiritualidade em Ação: O Legado de Rudolf Steiner**. South American Journal of Basic Education, Technical and Technological (SAJBETT)**, Rio Branco, UFAC, v. 7, n. 1, p. 583-606, jan./abr. 2020. (ET AL)

OLIVEIRA, M. J. G. M. De. **A disciplina de Geografia no contexto do Ensino Médio de Escolas Waldorf.** 118p. Dissertação (Mestrado- Programa de Pós-Graduação Formação, Currículo e Práticas Pedagógicas) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2021.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G.; NOGUTI, F. C. H.; JUSTULIN, A. M. (org). **Resolução de Problemas:** Teoria e Prática. Jundiaí, SP: Paco Editorial, 2014.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 25, n. 41, p. 73-98, dez. 2011.

PONTE, J. P. da; BROCADO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

RICHTER, T. **Objetivo pedagógico e método de ensino de uma escola Waldorf.** São Paulo: Federação das Escolas Waldorf do Brasil, 2002. (Original: Pädagogischer Aaaufrag und Unterrichtsziele einer Frein Waldorfschele, 1995).

ROCHA, D. L. de S. Concepções de liberdade na educação Waldorf: um estudo de caso. **Educação**, *[S. l.]*, v. 29, n. 3, 2006. Disponível em: https://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/faced/article/view/492. Acesso em: 1 dez. 2022.

RUSSELL, S. J. Developing computational fluency with whole numbers. In: **Teaching Children Mathematics** 7 no3 N 2000 WN: 0030600445004. p. 154- 158.

SACRISTÁN, J. G. **O Currículo**: uma reflexão sobre a prática. 3ª edição. Porto Alegre: Artmed, 1998.

________. **O Currículo**: uma reflexão sobre a prática [recurso eletrônico]. 3ª edição. Porto Alegre: Penso, 2020.

SANTOS, E. S. O. dos; GOMES, C. F. Pesquisas Brasileiras stricto sensu sobre a pedagogia waldorf: estudo exploratório. **Brazilian Journal of Development**, Curitiba, v.7, n.4, p. 38931-38943, 2021.

SANTOS, E. C. dos. **Formação de professores no contexto das propostas pedagógicas de Rudolf Steiner (pedagogia Waldorf), Maria Montessori e da experiência da Escola da Ponte.** 252 f. Tese - (doutorado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, 2015.

________. **Vivências espaciais e saberes em uma escola Waldorf:** um estudo etnomatemático. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010c.

SANTOS, L. A. dos. As significações curriculares e sua relação com o trabalho do professor de geografia. In: **14º ENCONTRO NACIONAL DE PRÁTICA DE ENSINO DE GEOGRAFIA POLÍTICAS, LINGUAGENS E TRAJETÓRIAS**, 2019, Universidade Estadual de Campinas. Anais de evento. Ateliê de Pesquisas e Práticas em Ensino de Geografia: 2019. p. 3590- 3603, 2019.

SETZER, V. W. **A Matemática Pode Ser Interessante… e Linda!:** Espirais, Fibonacci, Razão áurea, Crescimento Proporcional e a Natureza. Blucher, 2020.

______. **Os Surpreendentes Infinitos na Geometria, em Conjuntos De Números e no Mundo Físico**. Biblioteca 24horas, 2021.

STARZYNSKI, A.; YORK, J. **9th Grade Workbook**: Teacher´s Edition. Jamie York Press, 2015.

STOCKMEYER, K. **Currículo de Rudolf Steiner para as escolas Waldorf.** Reproduzido original para os professores das Escolas Livres Waldorf (1ª edição: 1976). Editado pelo Centro de Pesquisa Pedagógicas da Associação das Escolas Livres Waldorf, 2011.

ULLIN, B. **Finding The Path:** Themes and Methods for the Teaching of Mathematics in a Waldorf School. Association of Waldorf Schools of North America, 1991.

VIANNA, C. R. História da Matemática na Educação Matemática. In: **Anais VI Encontro Paranaense de Educação Matemática.** Londrina: Editora da UEL, 2000. pp. 15-19.

VIANNA, C. R. **Matemática e História:** algumas relações e implicações pedagógicas. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual Paulista. 1995.

YORK, J. **Making Math Meaningful:** A Source Book for Teaching High School Math. Jamie York Press, 2015.

APÊNDICE 1 - TERMO DE CONCORDÂNCIA DE COPARTICIPAÇÃO

[redacted]

CONCORDÂNCIA DE COPARTICIPAÇÃO

Piracicaba, 5 de julho de 2021.

Senhor Coordenador,

Declaramos que nós da [redacted] estamos de acordo com a condução do projeto de pesquisa **"O desenvolvimento da Matemática no 3º setênio (Ensino Médio) das Escolas Waldorf"** sob a responsabilidade do pesquisador responsável, Emerson Rolkouski e de sua orientanda de Mestrado, Thaís Alvarenga Basso, nas nossas dependências, sejam virtuais ou físicas, tão logo o projeto seja aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa do Setor de Ciências da Saúde da UFPR, até o seu final em dezembro de 2021.

O objetivo desta pesquisa consiste em observar e analisar os principais aspectos do ensino e da aprendizagem da Matemática no 3º setênio das Escolas Waldorf, que abrange o 9º ano e as séries do Ensino Médio da Educação Básica. Os objetivos específicos são observar e analisar os aspectos gerais do ensino e da aprendizagem de Matemática neste contexto, assim como são desenvolvidas estas aulas de Matemática, ou metodologia, e os conteúdos nelas desenvolvidos, ou currículo.

Para isso, haverá,

1. O acompanhamento da pesquisadora em
   a. aulas de matemática nas séries do Ensino Médio
   b. reuniões pedagógico-administrativas da escola;
   c. demais eventos internos da [redacted] a exemplo de festas comemorativas, gincanas, teatro, apresentações, escola aberta, etc.
2. Entrevista da pesquisadora com os professores de Matemática participantes.

Os instrumentos utilizados serão o Diário de Campo da pesquisadora, para anotações diárias, e o gravador de voz, para a entrevista e sua transcrição. É importante citar que, com o consentimento dos professores, materiais escolares como cadernos e livros didáticos utilizados pelos mesmos poderão ser fotografados para a complementação dos dados.

Devido à situação da pandemia do coronavírus ao longo deste período, é considerado o ajuste destas etapas da pesquisa ao seu ensino virtual ou híbrido. Outras responsabilidades da pesquisadora para redução de riscos são a responsabilidade ética no ambiente virtual. Sob a possível retomada de atividades presenciais, a pesquisadora verificará sua vacinação e se compromete com as normas sanitárias tomadas pela [redacted] incluindo, sob quaisquer enfermidades, suspender temporariamente a pesquisa presencial e a retomando somente após ordem médica.

[redacted]

[redacted]

As informações relacionadas ao estudo poderão ser conhecidas pelas pessoas autorizadas, o responsável pelo projeto, Emerson Rolkouski, e sua orientanda de Mestrado, Thaís Alvarenga Basso, sob forma de textualização, para que a identidade da Escola seja preservada e mantida a confidencialidade. Por reconhecer que estes dados possam afetar a Instituição e devido a este estudo pretender usar o nome da Escola durante a realização desta pesquisa,

( ) Permito a revelação do nome da Escola durante a fase de análise dos dados no decorrer da pesquisa;

(X) Não permito a revelação do nome da Escola durante a fase de análise dos dados no decorrer da pesquisa.

Assim, quando os dados/resultados obtidos com este estudo forem publicados,

( ) Permito a identificação do nome da Escola na publicação dos resultados da pesquisa;

(X) Não permito a identificação do nome da Escola na publicação dos resultados da pesquisa.

Mais informações da pesquisa poderão ser enviadas, ou reenviadas, somente entre os e-mails dos pesquisadores, rolkouski@uol.coom.br e **thaabasso@gmail.com**, e os e-mails institucionais da Escola ou dos professores participantes, assim como os trabalhos e a dissertação a serem publicadas.

Estamos cientes que os participantes da pesquisa serão os professores de Matemática da [redacted], bem como de que o trabalho proposto deve seguir a Resolução 466/2012(CNS) e complementares.

Da mesma forma, estamos cientes que os pesquisadores somente poderão iniciar a pesquisa pretendida após encaminharem, a esta Instituição, uma via do parecer de aprovação do estudo exarado pelo Comitê de Ética em Pesquisa do Setor de Ciências da Saúde da UFPR.

Atenciosamente

[redacted]

APÊNDICE 2 - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Nós, Emerson Rolkouski e Thaís Alvarenga Basso, professor e mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática (PPGECM), da Universidade Federal do Paraná, estamos convidando você, professor(a) de Matemática [redacted] a participar de um estudo intitulado "O desenvolvimento da Matemática no 3º setênio (Ensino Médio) das Escolas Waldorf". Espera-se com essa pesquisa contribuir para o desenvolvimento da educação matemática, da Pedagogia Waldorf e do Ensino Médio, ou período do 3º setênio da vida humana, das escolas fundamentadas na Pedagogia.

a) O objetivo desta pesquisa é observar e analisar os principais aspectos do ensino e da aprendizagem da Matemática no 3º setênio das Escolas Waldorf, que abrange o 9º ano e as séries do Ensino Médio da Educação Básica. Os objetivos específicos são observar e analisar os aspectos gerais do ensino e da aprendizagem de Matemática neste contexto, assim como são desenvolvidas estas aulas de Matemática, ou metodologia, e os conteúdos nelas desenvolvidos, ou currículo.

b) Caso você concorde em participar da pesquisa, entre os meses de junho a dezembro de 2021, serão necessárias

1. A presença da pesquisadora em
   a. suas aulas de matemática nas séries do Ensino Médio da escola participante;
   b. nas reuniões pedagógico-administrativas da mesma escola;
   c. e em demais eventos internos desta Instituição, a exemplo de festas comemorativas, gincanas, teatro, apresentações, escola aberta, etc.

Nas ocasiões acima, conforme sua disponibilidade, a pesquisadora realizará observações das atividades.

2. Realização de entrevista com a pesquisadora.

Os materiais utilizados na pesquisa são o Diário de Campo para anotações da pesquisadora, assim como gravador de aúdio na entrevista para sua posterior transcrição. Com seu consentimento, materiais escolares, como cadernos e livros didáticos utilizados por você em suas aulas poderão ser fotografados para complementação dos dados.

c) Para tanto, você deverá comparecer nas dependências físicas e virtuais da [redacted]

Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos do Setor de Ciências da Saúde da UFPR | CEP/SD Rua Padre Camargo, 285 | 1º andar |
Alto da Glória | Curitiba/PR | CEP 80060-240 | cometica.saude@ufpr.br – telefone (041) 3360-7259

[redacted] 1

[redacted] As observações e entrevistas citadas em **b)** ocorrerão em horário a serem combinados entre a pesquisadora e você no período entre novembro de 2021 e dezembro de 2021, sendo que a entrevista levará aproximadamente duas horas.

d) É possível que você experimente algum desconforto, principalmente relacionado a constrangimentos durante a entrevista ou observação das aulas. Também são considerados os incômodos em relação às atividades remotas, como as presenciais, considerando a situação sanitária.

e) Alguns riscos relacionados ao estudo podem ser relacionados ao item **d)**, como estar sujeito às emoções ocasionadas naturalmente pelo disparo de memórias afetivas e também à invasão de privacidade. Como medidas de minimização e proteção, a pesquisadora se responsabiliza pela confidencialidade dos encontros virtuais. Na entrevista, palavras-chave foram escolhidas, e as observações se darão sobre os aspectos profissionais, citados no objetivo geral, sendo que ambas as atividades também poderão ser interrompidas, caso tais situações ocorram. A pesquisadora participante também está consciente da gravidade do coronavírus e, por isso, se responsabiliza pelo cumprimento das normas sanitárias da Instituição, e garante que ela esteja vacinada para as atividades presenciais. Sob quaisquer sintomas de enfermidade da pesquisadora, a pesquisa presencial será suspensa, sendo retomada somente após ordens médicas.

f) Os benefícios esperados com essa pesquisa são contribuir para o desenvolvimento, em níveis teóricos e práticos, da educação matemática, da Pedagogia Waldorf e do Ensino Médio brasileiro. Com ela, serão analisados detalhes importantes de como a teoria que fundamenta a Pedagogia Waldorf se articula com a prática das escolas brasileiras fundamentadas nela. Além disso, você também pode ser beneficiado (a) com a troca de experiências e diálogos com a pesquisadora, além de nos apresentar seu trabalho e dedicação à docência.

g) O pesquisador Emerson Rolkouski, responsável por este estudo poderá ser localizado no Centro Politécnico, edifício da Administração – 4º andar – Jardim das

[redacted]

Américas, Curitiba/PR, CEP: 81531-970, CX 19081, [redacted] e-mail rolkouski@uol.com.br no horário de segunda a sexta-feira das 09h às 12h e segunda a sexta-feira das 13h às 17h, para esclarecer eventuais dúvidas que você possa ter e fornecer-lhes as informações que queira, antes, durante ou depois de encerrado o estudo. Estamos à disposição para esclarecer eventuais dúvidas que você possa ter e fornecer-lhe as informações que queira, antes, durante ou depois de encerrado o estudo. Em caso de emergência, você também pode contatar a pesquisadora Thaís Alvarenga Basso [redacted] ou por e-mail thaabasso@gmail.com, em qualquer horário.

h) A sua participação neste estudo é voluntária e se você não quiser mais fazer parte da pesquisa poderá desistir a qualquer momento e solicitar que lhe devolvam este Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) assinado. Seu trabalho escolar está garantido e não será interrompido caso você desista de participar

i) O material obtido através das observações e entrevistas, como imagens e voz, será utilizado para essa pesquisa e será destruído/descartado do computador dos pesquisadores e do grupo ao término do estudo, dentro de 10 anos.

m) As informações relacionadas ao estudo poderão ser conhecidas por pessoas autorizadas, que são o Pesquisador Responsável e orientador da pesquisadora, Emerson Rolkouski, e a Pesquisadora Colaboradora e Mestranda em Educação Matemática, Thaís Alvarenga Basso, sob forma codificada, para que a sua identidade seja preservada e mantida a confidencialidade. Portanto,

( ) Permito a revelação da minha identidade durante a fase de análise dos dados no decorrer da pesquisa;

( ) Não permito a revelação da minha identidade durante a fase de análise dos dados no decorrer da pesquisa .

n) Você terá a garantia de que quando os dados/resultados obtidos com este estudo forem publicados, não aparecerá seu nome, a menos que seja seu desejo ter sua

Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos do Setor de Ciências da Saúde da UFPR | CEP/SD Rua Padre Camargo, 285 | 1º andar |
Alto da Glória | Curitiba/PR | CEP 80060-240 | cometica.saude@ufpr.br – telefone (041) 3360-7259

Thaabasso [redacted]

identidade revelada . Portanto, em publicações de trabalhos e da dissertação,

(X) Permito a revelação da minha identidade na publicação dos resultados da pesquisa;

( ) Não permito a revelação da minha identidade na publicação dos resultados da pesquisa ;

o) As despesas necessárias para a realização da pesquisa, como transporte e materiais escolares para anotação da pesquisadora, não são de sua responsabilidade e você não receberá qualquer valor em dinheiro pela sua participação. Entretanto, caso seja necessário seu deslocamento até o local do estudo, os pesquisadores asseguram o ressarcimento dos seus gastos com transporte (Item II.21, e item IV.3, sub-item g, Resol. 466/2012).

p) Quando os resultados forem publicados, não aparecerá seu nome, e sim um código.

q) Se você tiver dúvidas sobre seus direitos como participante de pesquisa, você pode contatar também o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos (CEP/SD) do Setor de Ciências da Saúde da Universidade Federal do Paraná, pelo e-mail cometica.saude@ufpr.br e/ou telefone 41 -3360-7259, das 08:30h às 11:00h e das 14:00h.às 16:00h ou a [redacted], citada em **c)**. O Comitê de Ética em Pesquisa é um órgão colegiado multi e transdisciplinar, independente, que existe nas instituições que realizam pesquisa envolvendo seres humanos no Brasil e foi criado com o objetivo de proteger os participantes de pesquisa, em sua integridade e dignidade, e assegurar que as pesquisas sejam desenvolvidas dentro de padrões éticos (Resolução nº 466/12 Conselho Nacional de Saúde).

m) Caso você sinta necessidade de revisitar esse documento de maneira online, ele pode ser acessado através do seu e-mail institucional ou o da Escola, podendo ser

Comitê de Ética em Pesquisa com Seres Humanos do Setor de Ciências da Saúde da UFPR | CEP/SD Rua Padre Camargo, 285 | 1º andar |
Alto da Glória | Curitiba/PR | CEP 80060-240 | cometica.saude@ufpr.br – telefone (041) 3360-7259

[redacted]

requisitado o envio novamente. Recomendamos que você mantenha uma cópia desse documento eletrônico, disponível na pasta **Documentos da Pesquisa da Thaís**[1]. Demais documentos para publicações, como artigos e a dissertação, também estarão disponíveis a você.

Eu, [redacted] li esse Termo de Consentimento e compreendi a natureza e o objetivo do estudo do qual concordei em participar. A explicação que recebi menciona os riscos e benefícios da pesquisa para a educação. Eu entendi que sou livre para interromper minha participação a qualquer momento sem justificar minha decisão e sem qualquer prejuízo para mim e ao meu trabalho como docente. Estou ciente de que a pesquisa não me impõe custos.

Eu concordo, voluntariamente, em participar deste estudo.

[redacted], 5 de julho de 2021

[redacted]

Eu declaro ter apresentado o estudo, explicado seus objetivos, natureza, riscos e benefícios e ter respondido da melhor forma possível às questões formuladas.

____

Thaís Alvarenga Basso

[redacted]

APÊNDICE 3 - TERMO DE SOLICITAÇÃO DE USO DE IMAGEM E SOM DE VOZ PARA A PESQUISA

TERMO DE SOLICITAÇÃO DE USO DE IMAGEM E SOM DE VOZ PARA PESQUISA

Título do Projeto: O desenvolvimento da Matemática no 3º setênio (Ensino Médio) das Escolas Waldorf

O pesquisador, Emerson Rolkouski, responsável pelo projeto "O desenvolvimento da Matemática no 3º setênio (Ensino Médio) das Escolas Waldorf", e sua orientanda de Mestrado, Thaís Alvarenga Basso, solicitam a utilização das imagens de seus materiais didáticos e som de voz para este estudo, com garantia de proteção de identidade.

Tenho ciência que a guarda e demais procedimentos de segurança são de inteira responsabilidade dos pesquisadores. Os pesquisadores comprometem-se, igualmente, a fazer divulgação dessas informações coletadas somente de forma anônima com proteção de imagem do participante.

Este documento foi elaborado em duas (2) vias, uma ficará com o(s) pesquisador(a/es) e outra com o(a) participante da pesquisa. Ela também estará na pasta **Documentos da Pesquisa da Thaís**[1].

[redacted], 5 de julho de 2021.

Emerson Rolkouski
Pesquisador responsável

Autorizo o uso de minha (ou da criança/adolescente sob minha responsabilidade) imagem e voz exclusivamente para esta pesquisa.

[redacted]

Participante da pesquisa

[redacted]

APÊNDICE 4- O LAMENTO DE UM MATEMÁTICO

De Paul Lockhart

Um músico acorda de um pesadelo terrível. No sonho, vivia numa sociedade que tinha tornado o ensino de música obrigatório. “Ajudamos nossos alunos a competir melhor num mundo cada vez mais cheio de sons.” Educadores, escolas, e o governo assumem o comando desse projeto vital. Encomendam estudos, formam comissões, tomam decisões — tudo sem consultar um único músico ou compositor.

Ora, todos sabem que músicos põem suas ideias no papel na forma de partitura; logo, as linhas e pontinhos pretos devem servir de base para a “linguagem da música”. É imperativo, portanto, deixar os estudantes fluentes nessa linguagem — senão, como podem obter algum grau de competência musical? Seria ridículo esperar que uma criança cante uma canção ou toque um instrumento sem que antes tenha ótima base sobre a teoria e a notação musicais. As pessoas no comando do projeto vital consideram tocar e ouvir música tópicos avançadíssimos (sem falar de compor uma peça original), que devem ser adiados até a faculdade — quem sabe até a pós-graduação.

Quanto à escola primária e secundária, sua missão é treinar os estudantes no uso dessa linguagem — jogar os símbolos aqui e ali de acordo com um conjunto fixo de regras. “Na aula de música”, dizia um aluno, “tiramos nosso papel pautado, nosso professor coloca algumas notas na lousa, e nós as copiamos ou as transpomos para uma oitava diferente. Temos de nos certificar de que acertamos nas chaves e na tonalidade, e nosso professor verifica se nossas semínimas preenchem o compasso. Uma vez, ele nos deu um problema de escala cromática, e eu fiz tudo certinho, mas ganhei zero porque as hastes das minhas notas apontavam para o lado errado.”

Em sua sabedoria, os educadores logo percebem que podem dar esse tipo de instrução musical mesmo a criancinhas. Na verdade, se seu filho na terceira série ainda não decorou o círculo de quintas, isso é uma vergonha. “Vou ter de contratar um professor particular de música para meu filho. Ele simplesmente não se dedica à lição de casa. Diz que é chata. Fica lá, olhando pela janela, cantarolando musiquinhas para si mesmo, e compondo canções bobinhas.”

Nas séries mais avançadas, a pressão sobe muito mais. Afinal, os alunos devem se preparar para os exames padronizados e o vestibular. Precisam de aulas sobre escalas e tons, solfejo, harmonia, contraponto. “É muita coisa para estudar, mas mais tarde, na faculdade, quando finalmente começarem a ouvir tudo isso, vão apreciar todo o trabalho que tiveram até o ensino médio.” É óbvio que poucos estudantes se matriculam num curso que exija tanta música, de modo que só uns poucos vão ouvir os sons que os pontos pretos representam. Apesar disso, é importante que cada membro da sociedade reconheça um tom menor ou maior, ou uma passagem em fuga, independente do fato de que nunca ouvirão nada assim. “Para dizer a verdade, os alunos não são lá muito bons de música. Eles se entediam durante a aula, suas habilidades são péssimas, e mal consigo ler sua lição de casa. Quase todos não se interessam nem um pingo por música, e, para se livrar logo da chatice, se matriculam no menor número possível de cursos obrigatórios. Acho que há gente com dom para a música e gente sem nenhum dom. Eu tive uma aluna, contudo — cara, ela era sensacional! Suas páginas eram impecáveis: cada nota no lugar certo, caligrafia perfeita, sustenidos, bemóis, tudo lindo. Um dia, ela vai se transformar num baita músico.”

Ao acordar suando frio, o músico percebeu, com gratidão, que tudo aquilo era apenas um pesadelo louco. “É claro”, ele disse a si mesmo: “nenhuma sociedade reduziria uma forma de arte tão bonita e expressiva a algo tão estúpido e trivial; nenhuma cultura seria tão cruel com suas crianças a ponto de privá-las de um modo de expressão tão humano, tão natural, tão satisfatório. Que absurdo!”

* * *

Infelizmente, nosso sistema atual de educação matemática é precisamente esse tipo de pesadelo. Se me pedissem para criar um sistema cujo propósito expresso fosse o de destruir na criança sua curiosidade natural e seu amor pelos padrões, não conseguiria fazer trabalho melhor do que aquele que já vem sendo feito; não teria a imaginação necessária para inventar métodos tão bons de desanimar alguém como os que estão na base de nosso sistema atual de educação matemática.

Todo mundo sabe que algo está errado. Os políticos dizem: “Precisamos de diretrizes mais elevadas.” As escolas dizem: “Precisamos de mais dinheiro e equipamentos.” Pedagogos dizem uma coisa, e professores, outra. Estão todos errados. As únicas pessoas que entendem o que está acontecendo são as que levam a culpa e que nunca são ouvidas: os alunos. Eles dizem: “As aulas de matemática são estúpidas e chatas.” Na mosca!

Matemática e cultura. A primeira coisa a entender é que a matemática é uma arte. A diferença entre a matemática e as outras artes, como a música ou a pintura, é que nossa cultura não a reconhece como arte. Todo mundo entende que poetas, pintores, músicos criam obras de arte e se expressam com palavras, imagens, sons. Nossa sociedade é generosa com os que usam a criatividade: ela vê arquitetos, cozinheiros, e até mesmo diretores de TV como artistas profissionais. Por que não os matemáticos?

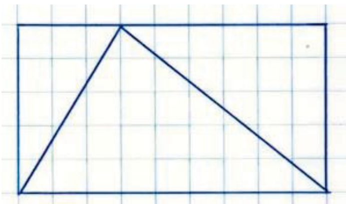
Parte do problema é que ninguém tem a menor ideia do que os matemáticos fazem. Muitos acham que o matemático está de algum modo conectado com o cientista: talvez ele o ajude com as fórmulas, ou quem sabe forneça aos computadores números enormes. Não tenho dúvida de que, se fosse preciso dividir os habitantes do mundo entre “sonhadores poéticos” e “pensadores racionais”, quase todos colocariam os matemáticos entre os pensadores racionais.

No entanto, não há nada mais sonhador ou poético, nada tão radical, subversivo, e psicodélico quanto a matemática. Ela é tão surpreendente quanto a cosmologia ou a física (matemáticos conceberam os buracos negros muito antes que algum astrônomo achasse um), e permite maior liberdade de expressão que a poesia, a pintura, ou a música (que dependem muito das propriedades do mundo físico). A matemática é a mais pura das artes, assim como a mais incompreendida.

Permita-me explicar, portanto, o que é a matemática e o que os matemáticos fazem. Nada melhor que começar com a excelente descrição de Godfrey Harold Hardy (1877-1947):

“Um matemático, assim como um pintor ou poeta, é um criador de padrões. Se seus padrões são mais permanentes que os deles é porque são feitos de *ideias*.”

Então, os matemáticos se acomodam no sofá para criar padrões com ideias. Que tipo de padrão? Que tipo de ideia? Ideias sobre rinocerontes? Não, essas deixamos aos biólogos. Ideias sobre a linguagem e a cultura? Em geral, não. Coisas assim são complicadas demais para o gosto da maioria dos matemáticos. Se existe um princípio estético unificador na matemática, é este: *simples é lindo*. Matemáticos adoram pensar nas coisas as mais simples possíveis, e as coisas mais simples são *imaginárias*.



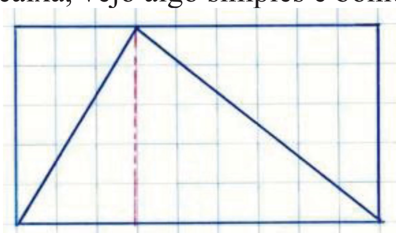
Por exemplo, se estou a fim de pensar sobre formas (como em geral estou), posso imaginar um triângulo dentro de uma caixa retangular.

Eu me pergunto: o triângulo ocupa quanto da caixa? Dois terços, talvez? É importante que entenda que não estou falando *desse desenho* de um triângulo numa caixa. Nem estou falando de um triângulo de metal, que faz parte das vigas numa ponte. Não tenho em mente nenhuma finalidade prática ulterior. Estou apenas *brincando*. Matemática é isso — querer saber, brincar, divertir-se com a própria imaginação. Basta dizer que essa questão, quanto da caixa o triângulo ocupa, nem faz muito sentido no caso de objetos palpáveis. Mesmo o triângulo mais bem construído do mundo ainda é uma coleção complicadíssima de átomos que não param quietos, e ele muda de tamanho de um minuto para o outro [conforme a temperatura aumenta ou diminui]. Talvez você queira falar de medidas aproximadas. É aí que entra a estética da matemática. Medições aproximadas são complicadas, e como consequência a questão fica feia, pois depende de mil detalhes do mundo real. Que tal deixá-la para cientistas? Nossa questão matemática é sobre um triângulo imaginário dentro duma caixa imaginária. As bordas são perfeitas porque queremos que sejam perfeitas — é sobre esse tipo de objeto que prefiro refletir. Esse é um dos grandes temas da matemática: as coisas são o que você quer que elas sejam. Você tem infinitas opções, pois não há nenhuma realidade para atrapalhar.

Por outro lado, depois que faz suas escolhas (eu, por exemplo, posso optar por um triângulo simétrico, ou não), daí suas criações se comportam do modo como se comportam, quer goste disso ou não. Essa é a coisa mais extraordinária sobre criar padrões imaginários: eles conversam com você! O triângulo vai ocupar certa parcela da caixa, e eu não tenho nenhum controle sobre o tamanho da parcela. Existe um número nesse reino da imaginação; talvez seja dois terços, talvez não seja, mas não posso prefixar tal número. Tenho de *descobrir* qual é.

Então você brinca, e imagina o que lhe der na telha, e constrói padrões, e faz perguntas sobre eles. Mas como pode respondê-las? Não falo de ciência de jeito nenhum. Não há experimentos que possa fazer com tubos de ensaio e equipamentos e outros acessórios, e que lhe digam a verdade sobre o que é puro fruto de sua imaginação. A única forma de descobrir a verdade sobre a imaginação é usando a imaginação, o que significa trabalhar duro.

No caso do triângulo numa caixa, vejo algo simples e bonito:



Se corto o triângulo em duas peças, como no desenho, posso ver que cada peça da caixa está cortada na diagonal por um dos lados do triângulo. Então, há tanto espaço dentro do triângulo quanto fora dele. Isso significa que o triângulo ocupa metade da caixa!

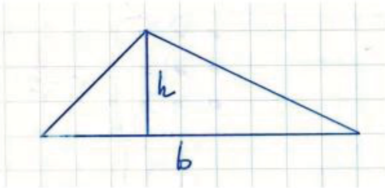
É com isso que um pedacinho de matemática se parece, e é essa a sensação que provoca. Essa breve narrativa é um exemplo da arte matemática: você faz perguntas simples e elegantes sobre suas criações imaginárias, e elabora explicações satisfatórias e bonitas. Não há nada como esse reino das ideias puras; ele é fascinante, é divertido, é grátis!

Agora, de onde tirei essa ideia? Como eu sabia desenhar aquela linha pontilhada? Como um pintor sabe onde colocar o pincel? Inspiração, experiência, tentativa e erro, pura sorte. Essa é a arte da coisa, a de criar esses belos poeminhas de pensamento, esses sonetos de pura razão. Há algo tão transformador nessa forma de arte! A relação entre o triângulo e o retângulo era um mistério, e em seguida uma linha pontilhada a tornou óbvia. A princípio eu não podia vê-la, mas de repente pude. De algum modo, fui capaz de criar algo belo e simples a partir do nada, e modifiquei a mim mesmo no processo. Não é isso o que é a arte em todo lugar?

É por isso que acho tão triste ver o que fazem com a matemática na escola. Essa aventura da imaginação, tão rica e fascinante, tem sido reduzida a um conjunto estéril de “fatos” a memorizar e procedimentos a seguir. Em lugar de uma pergunta simples e natural sobre formas, e de um processo criativo e gratificante de invenção e de descoberta, os alunos são tratados assim:

A fórmula da área do triângulo

$$A = \frac{1}{2}bh$$



"A área do triângulo é igual à base vezes a altura, tudo isso dividido por dois." Os estudantes têm de memorizar essa fórmula, para depois aplicá-la de novo e de novo em "exercícios". Lá se foi a emoção, a alegria, e até mesmo a dor e a frustração do ato criativo. Não há mais nem mesmo um *problema*. A pergunta foi feita e respondida ao mesmo tempo, e para o aluno não sobrou nada a fazer.

Eu gostaria de deixar claro ao que estou me contrapondo. Não me contraponho às fórmulas, ou à memorização de fatos interessantes. No contexto certo, isso é bom, e cumpre seu papel, assim como estudar o vocabulário nos deixa mais capazes de criar poemas ricos e sutis. Mas não importa o fato de que os triângulos ocupem metade da caixa retangular na qual estão inscritos. O que importa é a bela ideia de cortar a caixa em duas com a linha pontilhada, e como essa ideia pode levar a outras realizações e inspirar outras ideias em outros problemas — coisas que a mera afirmação de um fato jamais lhe dará.

Ao retirar o processo criativo e mostrar apenas os resultados do processo, na prática eu garanto que ninguém vai se comprometer de verdade com a matéria. É como se te dissesse que Michelangelo criou uma bela escultura, mas não o deixasse vê-la. Como pode se inspirar com algo assim? (Claro, na matemática a situação é bem pior que essa, pois pelo menos entende que existe a arte da escultura, e que eu te impedi de apreciar uma escultura específica.)

Ao se concentrar no quê, e deixar de fora o por quê, reduzem a matemática a uma concha vazia. A arte não está na "verdade", mas na explicação, no argumento. Você usa o próprio argumento para determinar a verdade conforme o contexto, e determinar o que está dizendo e o que pretende dizer. *A matemática é a arte de dar explicações*. Se você nega aos alunos a oportunidade de se envolver nessa atividade, de propor seus próprios problemas, de produzir suas próprias conjecturas e fazer suas próprias descobertas, de errar, de se frustrar com o processo criativo, e de remendar e editar suas próprias explicações e demonstrações, daí nega aos estudantes a matemática em si. Então, não, não estou reclamando da presença de fatos e fórmulas nas aulas de matemática: estou reclamando da falta de matemática nas aulas de matemática.

Talhados para a arte. Caso seu professor de artes plásticas lhe dissesse que pintar significa preencher as regiões numeradas com as cores certas, você saberia que algo está errado. A cultura te diz o contrário — há museus e galerias, e há arte também na sua casa. A sociedade vê a pintura como um meio de expressão. Da mesma forma, se seu professor de ciências tenta convencê-lo de que a astronomia significa prever o futuro de uma pessoa com base na data de nascimento, você saberia que ele está doido — a ciência se infiltrou na cultura a tal ponto que quase todo mundo sabe um pouco sobre átomos e galáxias e as leis da natureza. Mas caso seu professor de matemática te dê a impressão de que a matemática trata de fórmulas e definições e decoreba de algoritmos (de forma expressa ou por omissão), quem pode ajudá-lo a ver o erro?

Esse problema cultural é um monstro que se autoperpetua: os alunos estudam matemática com seus professores, que a estudaram com seus professores, de modo que os mal-entendidos sobre ela se reproduzem indefinidamente. Pior, ao perpetuar essa pseudomatemática, ao enfatizar essa manipulação acurada mas sem sentido de símbolos, o sistema cria sua própria cultura e seu próprio conjunto de valores. Aqueles que se tornaram hábeis em pseudomatemática obtêm grande prazer com o próprio sucesso. A última coisa que querem ouvir é que a matemática tem tudo a ver com criatividade crua e com sensibilidade estética. Muito estudante de pós-graduação se sente fracassado quando descobre, depois de dez anos ouvindo que é "bom de matemática", que não tem nenhum talento matemático real, e que na verdade era bom de seguir instruções. A matemática não tem nada a ver com seguir regras, mas com a criação de novas regras.

E ainda nem mencionei a falta de crítica à matemática na escola. Em nenhum momento a escola permite que os estudantes descubram que a matemática, como qualquer outro tipo de literatura, é criada por seres humanos para sua própria diversão; que eles submetem seus trabalhos de matemática à avaliação de outros seres humanos; que uma pessoa pode ter bom gosto matemático, e que pode desenvolvê-lo. Uma composição matemática é como um poema, e podemos perguntar se ela satisfaz nossos critérios estéticos: O argumento é sólido? Faz sentido? É simples e elegante? Me faz chegar perto do cerne da questão? É claro que não há nenhuma crítica acontecendo na escola — não há nenhuma arte sendo feita para criticar!

Por que não querem que nossas crianças aprendam a fazer matemática? Será porque não confiam nelas, ou porque acham a tarefa difícil demais? Pois acham que elas são capazes de elaborar argumentos e de chegar a conclusões sobre Napoleão — por que não sobre triângulos? Penso que nossa civilização (todos nós) não sabe o que é a matemática. Dão-nos a impressão de que é fria e altamente técnica, de que ninguém a pode entender — e isso é uma profecia autorrealizável, se é que já existiu alguma.

Já seria ruim o bastante se a cultura fosse apenas ignorante de matemática, mas a situação é pior: a cultura pensa que sabe o que a matemática é — e vive o equívoco grosseiro de que a matemática, de alguma forma, é útil para a sociedade! Isso já é uma enorme diferença entre a matemática e as outras artes. A cultura vê a matemática como um tipo de ferramenta para o cientista e o engenheiro. Todo mundo sabe que o poeta e o músico fazem poesia e música pelo prazer que elas lhes proporcionam, e para enriquecer e enobrecer o espírito humano (e daí sua virtual eliminação do currículo da escola pública). Mas não pode ser assim com a matemática — a matemática é *importante*.

Simplício: Você está tentando afirmar que a matemática não serve a nenhuma utilidade ou aplicação prática na sociedade?

Salviati: É claro que não. Estou sugerindo que, só porque algo resulta em consequências práticas, não significa que se resume a isso. Pode usar a música para conduzir exércitos para a batalha, mas não é por isso que as pessoas escrevem sinfonias. Michelangelo decorou o teto de uma capela, mas tenho a certeza de que ele tinha coisas mais elevadas em mente.

Simplício: Mas não precisamos que as pessoas estudem essas consequências úteis da matemática? Não precisamos de contadores e de carpinteiros e tudo o mais?

Salviati: Quantas pessoas realmente usam alguma dessa "matemática prática" que elas veem na escola? Você acha que os carpinteiros estão lá fora usando trigonometria? Quantos adultos se lembram de como dividir frações, ou resolver uma equação quadrática? Obviamente o atual método de adestramento prático não está funcionando, e por uma boa razão: ele é terrivelmente chato, e ninguém o usa de qualquer jeito. Então por que as pessoas pensam que esse método é tão importante? Não vejo qual bem está fazendo à sociedade, se seus membros andam por aí com vagas memórias de fórmulas algébricas e diagramas geométricos e claras memórias de as terem odiado. Poderia fazer algum bem, contudo, mostrar-lhes algo bonito e lhes dar a oportunidade de desfrutar o pensamento criativo, flexível, aberto. É o tipo de coisa que uma educação matemática verdadeira pode proporcionar.

Simplício: Mas as pessoas precisam da capacidade de calcular o saldo na conta-corrente, não é mesmo?

Salviati: Tenho a certeza de que a maioria das pessoas usa uma calculadora para a aritmética do dia a dia. E por que não usaria? É mais fácil e confiável. Mas o meu ponto não é que o sistema atual é terrivelmente ruim, e sim que poderia ser admiravelmente bom! A matemática deveria ser ensinada como uma arte pela própria arte. Os aspectos mundanos "úteis" surgiriam naturalmente, como um subproduto sem importância. Beethoven poderia facilmente escrever um jingle publicitário, mas quando estudava música sua motivação era criar algo bonito.

Simplício: Mas nem todo mundo é talhado para ser artista. E quanto às crianças que não são "gente de matemática"? Como elas se encaixariam no seu esquema?

Salviati: Se o sistema expusesse a todos à matemática em seu estado natural, com todos os desafios divertidos e as surpresas que isso implica, acho que haveria uma mudança dramática tanto na atitude dos alunos com relação à matemática quanto no significado da expressão "ser bom de matemática". Estamos perdendo tantos matemáticos talentosos — gente inteligente e criativa, que corretamente rejeita o que lhes parece um assunto sem sentido e estéril. Essa gente é inteligente demais para desperdiçar seu tempo com baboseiras.

Simplício: Mas não acha que, se as aulas de matemática se parecessem mais com aulas de arte, muitas crianças simplesmente não aprenderiam nada?

Salviati: Mas elas já não aprendem nada! É melhor não haver aulas de matemática do que haver as aulas que conhecemos hoje. Pelo menos assim algumas pessoas teriam a chance de descobrir algo bonito por conta própria.

Simplício: Então você removeria a matemática do currículo escolar?

Salviati: Já foi removida! A questão é o que fazer com a casca insípida e oca que sobrou. É claro que eu preferiria substituí-la por um engajamento ativo e alegre com ideias matemáticas.

Simplício: Mas quantos professores de matemática sabem a matéria bem o bastante para ensiná-la desse jeito?

Salviati: Poucos, e isso é apenas a ponta do iceberg.

A matemática na escola. Não há jeito mais confiável de matar o entusiasmo e o interesse num assunto do que torná-lo parte obrigatória do currículo escolar. Classifique o assunto como componente importante de testes padronizados e do vestibular e espere um pouco: o sistema de ensino vai sugar a vida dele. Comitês escolares não entendem o que é a matemática, nem educadores, autores de livros didáticos, editoras nem, infelizmente, a maioria dos professores de matemática. A abrangência do problema é tão grande que mal consigo pensar por onde começo.

Que tal começar com o desastre da "reforma da matemática"? Há muitos anos cresce a consciência de que algo está podre no reino da educação matemática. Já encomendaram estudos, montaram conferências e formaram centenas de comitês de professores, pedagogos e editores de livros didáticos para "resolver o problema". Sem levar em consideração o interesse próprio da indústria livreira (ela lucra sempre que há uma flutuação mínima na política, pois pode vender edições "novas" de suas monstruosidades ilegíveis), tais reformadores sempre se enganam. Ninguém precisa reformar o currículo de matemática, pois ele tem de ser *demolido*.

Toda essa agitação e arrumação em torno de quais "tópicos" ensinar, ou qual notação usar, ou qual marca e modelo de calculadora os alunos devem comprar — pelo amor de Deus! Isso é como reorganizar as cadeiras no convés do Titanic! *A matemática é a música da razão*. Fazer matemática é se engajar num ato de descoberta e de conjectura, de intuição e inspiração; é estar num estado de confusão — não porque ela não faz sentido, mas porque você lhe deu sentido e ainda não entendeu como sua criação reagirá no fim das contas; é ter uma ideia inovadora; é se sentir um artista frustrado; é se sentir reverente, esmagado por uma beleza quase dolorosa; maldição — é estar vivo! Tire isso tudo da matemática e poderá organizar quantas conferências quiser: não fará nenhuma diferença. Doutores, passem o bisturi onde bem entender: seu paciente já está morto.

A parte mais triste dessas reformas todas são as tentativas de “tornar a matemática interessante” e de torná-la “relevante na vida das crianças”. Ninguém precisa tornar a matemática interessante — ela já é mais interessante do que podemos suportar! E sua glória é sua completa irrelevância na nossa vida cotidiana. É por isso que é tão divertida!

As tentativas de apresentar a matemática como relevante para a vida cotidiana inevitavelmente parecem forçadas e artificiais: “Vejam, crianças, vocês já sabem álgebra, então podem descobrir a idade de Maria se nós sabemos que ela está dois anos mais velha que duas vezes a idade que tinha há sete anos!” (Como se alguém teria acesso a esse ridículo fragmento de informação, e não à idade logo duma vez.) A álgebra não trata da vida cotidiana, mas de números e simetrias — o que a torna uma busca válida por si mesma:

“Suponha que me dão a soma e a diferença entre dois números. Como posso descobrir que números são esses?”

Eis uma pergunta simples e elegante, que não requer nenhuma edição para que pareça atraente. Os antigos babilônios gostavam de trabalhar com tais problemas, assim como nossos alunos. (E eu espero que também goste de pensar sobre ele!) Não precisamos nos desdobrar para dar relevância à matemática. Ela tem a mesma relevância da arte: a de ser uma experiência humana vívida.

De qualquer forma, você acha que as crianças querem coisas relevantes para a vida cotidiana? Realmente acha que algo prático como juro composto vai deixá-las excitadas? As pessoas gostam de *fantasia*, e isso é exatamente o que a matemática lhes pode prover — um alívio ao dia a dia, um paliativo à carga imposta pelo mundo cotidiano.

Um problema semelhante ocorre quando professores e autores sucumbem ao “bonitinho”. É quando, numa tentativa de combater a chamada “ansiedade à matemática” (uma das muitas doenças causadas pela própria escola), tentam transformar a matemática numa coisa “amigável”. Para ajudar os alunos a memorizar as fórmulas com as quais calcular a área e a circunferência do círculo, por exemplo, talvez invente essa história de cantar a musiquinha “o círculo é roda, não fica parado/ e o raio que parte do centro ele tem/ calculo sua área e fico ligado/ que é pi vezes o raio elevado ao quadrado”, ou alguma bobagem como essa. Mas por que não contar a história real? Por que não falar da luta da humanidade com o problema de medir curvas? De Eudoxo e Arquimedes e o método da exaustão? Da transcendência de π? O que é mais interessante: medir as dimensões aproximadas de um desenho em forma de círculo, usando uma fórmula que alguém lhe forneceu de antemão (e o fez memorizá-la e praticá-la de novo e de novo), ou ouvir a história do problema mais belo e fascinante de todos, e a história da ideia mais brilhante e poderosa na história da humanidade? Pelo amor de Deus! Estão matando nas pessoas o interesse pelos círculos!

Por que não damos a nossos alunos nem mesmo a chance de ouvir sobre essas coisas, sem mencionar a chance de realmente fazer um pouco de matemática e chegar a ter suas próprias ideias, opiniões, reações? Que outro assunto é ensinado sem qualquer menção à sua história, filosofia, desenvolvimento temático, critérios estéticos e estado atual? Que outro assunto evita suas fontes primárias — belas obras de arte escritas por algumas das pessoas mais criativas na história da humanidade — em troca dos abastardamentos contidos em livros didáticos de terceira categoria?

Sem problema. O principal problema da matemática na escola é que não há *problemas*. Ah, eu sei o que passa por problema numa aula de matemática — os insípidos exercícios. “Eis aqui um tipo de problema. Eis aqui uma receita para resolvê-lo. Sim, cairá na prova. Façam os exercícios ímpares de 1 a 35 como lição de casa.” Que jeito triste de estudar matemática: como um chimpanzé adestrado.

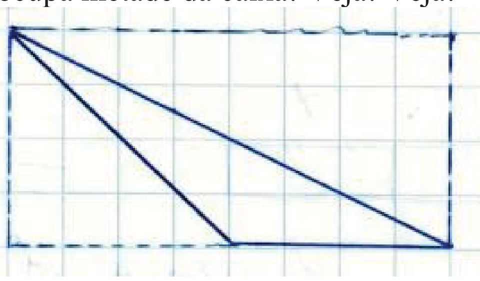
Mas um problema, uma questão humana e honesta, é outra coisa. Qual é o comprimento da diagonal de um cubo? Os números primos continuam para sempre? O infinito é um número? De quantas maneiras posso usar simetrias para pavimentar uma superfície? A história da matemática é a história de gente que se engajou com perguntas desse tipo, e não a regurgitação estúpida de fórmulas e algoritmos (mais os exercícios inventados especialmente para que possam ser usados).

Um bom problema é algo que você não sabe como resolver. É isso o que o torna um bom quebra-cabeça, e uma boa oportunidade. Um bom problema não fica lá sentado, quietinho em isolamento: ele serve de trampolim para outras questões interessantes. Um triângulo ocupa metade da caixa. E quanto a uma pirâmide dentro de uma caixa tridimensional? Será que podemos lidar com esse problema de um jeito similar?

Entendo a ideia de adestrar os alunos para que dominem certas técnicas. Eu também faço isso, mas nunca como um fim em si mesmo. Na matemática, assim como em qualquer arte, as técnicas devem ser estudadas conforme o contexto. Os grandes problemas, sua história, o processo criativo — eis o cenário adequado. Dê a seus estudantes um bom problema, deixe-os lutar com ele, deixe-os gemer de frustração. Veja o que inventam. Espere até que estejam morrendo de vontade de conhecer uma ideia, e só então lhes dê algumas técnicas, mas não muitas.

Então guarde seus planos de aula e seu retroprojetor, seus livros didáticos coloridos e abomináveis, seus CD-ROMs e todo o circo itinerante das coisas grotescas que hoje compõem a educação, e simplesmente faça matemática com seus alunos! Professores de arte não perdem seu tempo com livros didáticos e com a decoreba de técnicas específicas. Eles fazem o que é natural na matéria a qual ensinam: põem as crianças para pintar. Andam pela sala de cavalete em cavalete, e dão sugestões e orientação:

— Eu estava pensando no nosso problema do triângulo, e notei uma coisa. Se o triângulo for realmente inclinado, ele não ocupa metade da caixa! Veja! Veja!



— Mas que observação excelente! Nosso argumento pressupõe que um dos lados do triângulo coincide com um dos lados da caixa. Agora precisamos de uma ideia nova.

— Devo tentar cortá-lo de maneira diferente?

— Claro que sim. Deve tentar todo tipo de ideia. Me diga depois em que pensou!

Contemplação lenta. Então, como vamos ensinar nossos alunos a fazer matemática? Que tal escolher problemas envolventes, que surjam naturalmente, adequados ao gosto de cada um, assim como à sua personalidade e grau de experiência? Que tal dar-lhes tempo para descobrir coisas e formular conjecturas? Depois, devemos ajudá-los a refinar seus argumentos e a criar uma atmosfera matemática na qual haja críticas saudáveis e reveladoras. Seremos flexíveis, abertos a mudanças bruscas de direção provocadas pela curiosidade deles. Em resumo, tendo um relacionamento intelectual honesto com nossos alunos e nossa matéria.

Evidente: o que estou sugerindo é impossível por causa de um monte de razões. Mesmo que eu coloque de lado o fato de que o currículo estatal e o vestibular na prática eliminam a autonomia do professor, duvido que a maioria dos professores queira uma relação tão intensa com seus alunos. Tal relação implica muita vulnerabilidade e responsabilidade — em suma, muito trabalho!

É mais fácil ser um canal passivo dos "materiais" de alguma editora e seguir a instrução "dê aulas, dê provas, repita" do que pensar, profunda e cuidadosamente, no significado da matemática e no melhor jeito de transmiti-lo direta e honestamente aos alunos. Nos encorajam a renunciar à difícil tarefa de tomar decisões com base na nossa própria sabedoria e consciência, para "cumprir o cronograma". Esse é simplesmente o caminho mais fácil:

EDITORES DE LIVROS DIDÁTICOS : PROFESSORES ::
A) empresas farmacêuticas : médicos
B) gravadoras : DJs
C) corporações : congressistas
D) todas as anteriores

O problema é que a matemática, assim como a pintura e a poesia, é trabalho criativo árduo. Isso a torna difícil de ensinar. A matemática é um processo contemplativo e lento. O praticante precisa de tempo para produzir uma obra de arte e precisa de um professor qualificado, que saiba reconhecer a arte quando a vê. É claro que é mais fácil divulgar um conjunto de regras do que orientar jovens artistas, do mesmo modo que é mais fácil escrever o manual de operação de um videocassete do que um livro de verdade, com ponto de vista e tudo o mais.

A matemática é uma arte, e toda arte deve ser ensinada por artistas na ativa ou, senão, pelo menos por pessoas que sabem apreciá-la e reconhecer uma obra de arte quando veem uma. Você não precisa estudar música com um compositor profissional, mas gostaria de tomar aulas com alguém que jamais tocou um único instrumento na vida? Aceitaria como professor de artes plásticas alguém que nunca pegou num lápis ou nunca pisou num museu? Por que então aceitamos professores de matemática que nunca produziram uma obra original, não sabem nada da história e da filosofia da matemática, nada sobre os avanços mais recentes — que não sabem nada além do que o sistema de ensino espera que ensinem a seus infelizes alunos? Que tipo de professor é esse? Como alguém pode ensinar algo que ele mesmo não sabe? Eu não sei dançar, e consequentemente nunca me passaria pela cabeça dar aulas de dança (poderia tentar, mas os resultados seriam bizarros). A diferença é que eu sei que não sei dançar. Não há ninguém me dizendo que sou bom de dança só porque conheço um monte de palavras técnicas.

Ora, não estou dizendo que um professor de matemática precisa ser um matemático profissional — longe disso. Mas será que ele não deveria pelo menos entender o que a matemática é, ser bom de matemática, e gostar do que faz?

ÓVNIS e alienígenas. Se reduzimos o ensino à mera transmissão de informações, se não compartilhamos a excitação e a surpresa, se os próprios professores são receptores passivos de informação e não criadores de novas ideias, que esperança há para os alunos? Se para o professor a adição de frações é um conjunto arbitrário de regras, e não o resultado de um processo criativo em que houve escolhas estéticas e desejos, então é claro que o pobre aluno vai se sentir como o recipiente de um conjunto arbitrário de regras.

Ensinar não tem nada a ver com informações. Tem a ver com um relacionamento honesto com os alunos. Não requer nenhum método, nenhuma ferramenta e nenhuma formação — requer apenas a habilidade de ser verdadeiro. E se você não consegue ser verdadeiro, não tem o direito de se impor às crianças inocentes.

Ninguém consegue ensinar alguém a ensinar. Escolas de educação são uma enganação completa. Ah, você pode tomar aulas sobre as fases da criança na primeira infância e tudo o mais, e pode tomar aulas sobre "métodos eficazes" de usar a lousa, ou sobre como preparar um "plano de aula" (que, por sinal, assegura que suas aulas serão planejadas de antemão, e portanto falsas), mas você nunca será um professor de verdade se não estiver disposto a ser uma pessoa de verdade. Ensinar exige abertura e honestidade, a capacidade de ficar excitado com a excitação de seus alunos, e amor ao ato de estudar. Sem tais qualidades, todos os diplomas do mundo não podem ajudá-lo, e com tais qualidades, eles são desnecessários.

É tudo perfeitamente simples: os estudantes não são alienígenas. Eles se interessam por beleza e por padrões, e são curiosos como todo mundo. Apenas converse com eles! E mais importante: ouça o que dizem em resposta!

Simplício: Tudo bem, vejo que existe arte na matemática, e que não estamos fazendo um bom trabalho ao expor as pessoas à arte. Mas isso não é uma coisa esotérica demais, e intelectual demais, para esperá-lo do sistema escolar? Não estamos tentando produzir filósofos; queremos apenas cidadãos com conhecimentos razoáveis de aritmética, para que possam cumprir suas funções na sociedade.

Salviati: Mas isso não é verdade! A matemática escolar inclui muita coisa que não tem nada a ver com a capacidade de cumprir suas funções na sociedade — por exemplo, álgebra e trigonometria. Tais assuntos são irrelevantes na vida cotidiana. Estou apenas sugerindo que, se vamos incluir assuntos assim no currículo, pelo menos que o façamos de modo mais natural. Além disso, como eu já disse antes, só porque um assunto tem alguma utilidade prática não significa que devamos transformá-la no foco das aulas e de nossos estudos. É verdade que você precisa saber ler para preencher os formulários do imposto de renda, mas não é para isso que ensinamos as crianças a ler. Nós as ensinamos a ler para lhes dar acesso a ideias bonitas e importantes. Não apenas seria uma crueldade ensiná-las a ler desse jeito (forçá-las a preencher formulários), seria também inútil, pois não funcionaria! Nós nos dedicamos aos estudos porque eles nos interessam *agora*, e não porque podem ser úteis mais tarde. Mas estamos exigindo das crianças algo assim quando ensinamos matemática.

Simplício: Mas não precisamos de crianças capazes de fazer contas?

Salviati: Para quê? Você quer adestrá-las para calcular 427 mais 389? Não é o tipo de pergunta que as crianças de oito anos costumam fazer. Falando nisso, muito adulto não entende bem a aritmética feita com notação decimal posicional, e você espera que crianças tenham boa ideia disso? Ou não se importa se elas vão entender ou não? É cedo demais para que recebam esse tipo de treinamento técnico. É claro que é possível implementar tal treinamento, mas acho que, em última instância, ele faz mais mal que bem. É muito melhor esperar que elas, movidas pela própria curiosidade, se interessem pelos números.

Simplício: Então, o que deveríamos fazer com as crianças durante as aulas de matemática?

Salviati: Jogue! Ensine xadrez e damas, gamão e dominó, jogo da velha e 21 — qualquer jogo. Invente jogos. Crie quebra-cabeças. Exponha as crianças a situações nas quais elas precisem de raciocínio dedutivo. Não se preocupe com notação e técnicas operatórias, mas ajude-as a se transformar em pensadores matemáticos ativos e criativos.

Simplício: Acho que desse jeito assumiríamos um risco terrível. E se tiramos a ênfase da aritmética e terminamos com alunos incapazes de somar e de subtrair?

Salviati: Acho que o risco maior é o de criar escolas onde não haja criatividade de jeito nenhum, nas quais a função dos alunos é memorizar datas, fórmulas, e listas de palavras, para regurgitá-las em testes padronizados. "Preparando hoje a força de trabalho de amanhã!"

Simplício: Mas certamente existe um conjunto de fatos matemáticos que uma pessoa educada deve conhecer.

Salviati: Sim, e o mais importante desses fatos é que a matemática é uma forma de arte, praticada por seres humanos para seu próprio prazer! OK, sim, seria muito bom se as pessoas soubessem alguns fatos básicos sobre, por exemplo, os números e as formas. Mas isso nunca virá de decorebas, adestramento, palestras, exercícios. Você só aprende coisas fazendo coisas, e só se lembra do que é importante para você. Temos milhões de adultos caminhando pelo mundo e murmurando "menos *b* mais ou menos raiz quadrada de *b* ao quadrado menos quatro vezes *a* vezes *c*, tudo isso sobre dois vezes *a*", sem ter contudo nenhuma ideia do que isso de fato significa. E a razão é que elas nunca tiveram a oportunidade de descobrir ou de inventar essas coisas por si mesmas. Elas nunca tiveram um problema interessante no qual pensar, com o qual se frustrar, e que fizesse surgir nelas o desejo de uma técnica ou de um algoritmo. Nunca ninguém lhes contou a história de como o homem tem se relacionado com os números — não sabem nada dos tabletes babilônicos antigos, do papiro de Rhind, do *Liber Abaci*, do *Ars*

Magna. Mais importante, nunca lhes deram a oportunidade de ficar curiosas sobre uma questão: ela foi respondida antes que pudessem elaborar a pergunta.

Simplício: Mas não temos tempo para esperar que todos os alunos reinventem a matemática por conta própria! Levou séculos para que o homem descobrisse o teorema de Pitágoras. Como pode esperar que uma criança comum o invente de novo?

Salviati: Eu não espero. Quero deixar isso claro. Estou reclamando da completa falta de arte e criatividade, de história e filosofia, de contexto e perspectiva no currículo de matemática. Isso não significa que a notação, as técnicas operatórias e o desenvolvimento de um conjunto de conhecimentos básicos não tenham seu lugar. É claro que têm. Deveríamos ter tudo isso. Se eu me oponho a um pêndulo afastado demais numa das pontas, não quer dizer que o quero afastado demais na outra ponta. Mas é fato que as pessoas aprendem melhor quando os resultados surgem do processo de aprendizagem. Para apreciar de verdade a poesia, ninguém deve decorar um monte de poemas, mas sim escrever os próprios poemas.

Simplício: Tudo bem, mas antes que possa escrever seus próprios poemas, precisa estudar o alfabeto. O processo tem de começar em algum lugar. Precisamos andar antes que possamos correr.

Salviati: Não, você precisa ter alguma coisa *na direção da qual* queira correr. As crianças podem escrever poemas e histórias conforme aprendem a ler e a escrever. O texto de uma criança de seis anos é uma coisa maravilhosa, e os erros de ortografia e de pontuação não vão torná-lo menos maravilhoso. Mesmo criancinhas muito novas podem inventar canções, e elas não têm a menor ideia do que é uma clave ou que tipo de compasso estão usando.

Simplício: Mas a matemática não é diferente? Ela não é uma linguagem toda própria, com todo tipo de símbolo que deve ser estudado antes que possa ser usado?

Salviati: De jeito nenhum. A matemática não é uma linguagem, mas uma aventura. Os músicos falam outra língua simplesmente porque escolheram abreviar suas ideias com pontinhos pretos? Se falam, isso não é obstáculo à criancinha e à sua canção. Sim, certo conjunto de abreviações matemáticas se desenvolveu ao longo dos séculos, mas ele não é essencial. A maior parte da matemática pode ser feita tomando um café com um amigo, com um diagrama desenhado num guardanapo. A matemática é e sempre foi uma coisa de ideias, e uma ideia valiosa transcende os símbolos com os quais você decide representá-la no papel. Gauss uma vez disse isso: “Precisamos é de noções, e não de notações.”

Simplício: Mas um dos propósitos da educação matemática não é ajudar os alunos a pensar de modo mais preciso e lógico, e de desenvolver sua “habilidade de raciocínio quantitativo”? Essas definições e símbolos não aguçam a mente de nossos alunos?

Salviati: Não, não aguçam. Se têm algum efeito, é o oposto, o de entorpecer a mente. Toda acuidade mental surge da mesma situação, que é resolver problemas por si mesmo; ela não surge de ouvir alguém dizer como um problema deve ser resolvido.

Simplício: Acho justo. Mas e quanto aos estudantes que gostariam de seguir carreira na ciência ou na engenharia? Eles não precisam do treinamento que o currículo convencional proporciona? Não é por isso que ensinamos matemática na escola?

Salviati: Quantos alunos nas aulas de literatura querem um dia se transformar em escritores? Não é para isso que ensinamos literatura, e não é por isso que os alunos se matriculam em cursos de literatura. Nós ensinamos para esclarecer todo mundo, e não apenas para adestrar os futuros profissionais. Seja como for, a habilidade mais valiosa para um cientista ou engenheiro é a capacidade de pensar por conta própria e de modo criativo. A última coisa de que alguém precisa é ser adestrado.

O currículo de matemática. A coisa verdadeiramente dolorosa sobre a maneira como ensinam matemática na escola nem é o que está faltando (o fato de que ninguém faz matemática de verdade durante as aulas de matemática), mas sim o que ocupou o lugar do que falta: a pilha confusa de desinformações destrutivas conhecida como “o currículo de matemática”. Chegou a hora de examinar mais de perto contra o que os alunos lutam em nome da matemática, e como são prejudicados no processo.

O que mais me impressiona no currículo de matemática é sua rigidez. Isso é especialmente verdadeiro nas séries mais avançadas. De escola para escola, de cidade para cidade, de estado para estado, todos dizem as mesmas coisas e fazem as mesmas coisas exatamente na mesma ordem. A maioria das pessoas, em vez de se perturbar e de se irritar com esse estado orwelliano de coisas, simplesmente aceitou esse currículo padrão como se fosse sinônimo da própria matemática.

Isso está intimamente ligado ao que chamo de "o mito da escada" — a ideia de que alguém pode organizar a matemática como uma sequência de assuntos, cada um deles mais avançado, ou "superior", que os assuntos anteriores. Como consequência, transformaram a matemática escolar numa corrida, na qual alguns alunos estão na frente e outros ficam para trás. E aonde mesmo essa corrida vai nos levar? O que nos espera na linha de chegada? É uma corrida triste na direção de lugar nenhum. No final, você é enganado, e posto para fora do reino da matemática sem que perceba.

A verdadeira matemática não vem em lata — não existe nenhuma ideia na matemática que possa ser rotulada com "álgebra II". Você vai aonde os problemas te levam. *Uma arte não é uma corrida*. O mito da escada dá uma falsa imagem da matéria, e o caminho percorrido pelo próprio professor ao longo do currículo o impede de ver a matemática como um todo orgânico. Como consequência, temos um currículo de matemática sem perspectiva histórica ou coerência temática; é uma coleção fragmentada de assuntos e técnicas os mais variados, unidos apenas pela facilidade com que se pode convertê-los em procedimentos passo a passo.

Em vez de descobertas e explorações, temos regras e regulamentos. Nunca ouvimos um estudante dizer: "Eu queria ver se faria algum sentido elevar um número a um expoente negativo, e descobri que posso chegar a um padrão bem legal se escolhesse, como sendo o significado, o recíproco do número elevado ao expoente positivo." No lugar disso, temos professores e livros didáticos que apresentam "a regra do expoente negativo" como fato consumado, sem mencionar a estética por trás dessa escolha, e mesmo sem mencionar que foi uma escolha.

No lugar de problemas emblemáticos, que podem nos levar a uma síntese de várias ideias, à discussão de territórios desconhecidos, e ao sentimento de unidade temática e de harmonia, temos no lugar exercícios redundantes e sem graça — desenhados especificamente para a técnica operatória em discussão, e tão desligados um do outro que nem os alunos nem o professor têm a menor ideia de como ou por que tal coisa veio a surgir em primeiro lugar.

No lugar de um ambiente no qual os alunos resolvem problemas e decidem que noções querem compilar, e o que suas palavras devem significar, eles estudam num ambiente no qual tudo lhes é apresentado de uma vez — uma sequência interminável e inexplicável de definições a priori. O currículo está cheio de jargão e nomenclatura, aparentemente sem nenhum outro propósito exceto o de dar aos professores matéria-prima para as provas. Nenhum matemático no mundo inteiro se daria ao trabalho de elaborar definições insensatas: $2\frac{1}{2}$ é uma "fração mista" e 5/2 é uma "fração imprópria". Meu Deus — elas são *iguais*. Representam exatamente o mesmo número, têm exatamente as mesmas propriedades. Quem usa tais palavras depois da quarta série?

É claro que é mais fácil verificar se alguém sabe o significado de uma definição inútil do que inspirar alguém a criar algo bonito e atribuir significado ao que criou. Mesmo que concordemos que um vocabulário técnico comum é valioso para os matemáticos, "fração mista" e "fração imprópria" não têm lugar nesse vocabulário. Como é triste ver crianças na quinta série dizendo "quadrilátero" em vez de "formas com quatro lados"; como é triste ver que nunca têm motivo para usar as palavras "conjectura" e "contraexemplo". Estudantes no ensino médio devem aprender a usar a função secante, $\sec(x)$, como abreviatura para o recíproco da função cosseno, $1/\cos(x)$, o que é uma abreviatura com tanto peso intelectual quando escolher entre "e" e "&". Essa abreviatura [$\sec(x)$] é um resquício das tabelas náuticas do século 15, e ainda está conosco; é um mero acidente histórico, e não tem mais nenhum valor numa época em que a navegação é feita com computadores de bordo. Assim, bagunçamos nossas aulas de matemática explicando uma nomenclatura inútil.

Na prática, o currículo não é nem mesmo uma sequência de assuntos ou ideias, pois é uma sequência de notações. Aparentemente, a matemática consiste de uma lista secreta de símbolos místicos e de regras pelas quais manejá-los. Damos às criancinhas o "+" e o "÷". Mais tarde, elas ganham o "√", e daí "x" e "y", além da alquimia dos parênteses. Finalmente, são doutrinadas a usar "sen", "log", "$f(x)$" e, se forem consideradas dignas, "d" e "∫". Tudo isso sem que tenham uma única experiência matemática convincente.

Esse programa está tão firmemente fixado no lugar que os professores e os autores de livros didáticos podem prever, com anos de antecedência, em que página do livro estarão. É fácil encontrar alunos de álgebra no ensino médio fazendo exercícios para calcular $[f(x + h) - f(x)]/h$ no caso de várias funções f, de modo que, anos depois, quando estiverem nas aulas de cálculo, tenham a impressão de que "Já vi isso antes." Naturalmente ninguém explica (e nenhum aluno espera uma explicação) por que tal combinação de operações seria de interesse, embora eu tenha a certeza de que muitos professores tentam explicar o que essa coisa significa, e acho que eles pensam que estão fazendo um favor à classe, quando, na verdade, para seus alunos é só mais um exercício chato de matemática a ser superado.

— O que eles querem que eu faça? Ah, é só plugar as coisas aqui e ali, assim e assado? OK.

Outro exemplo é o adestramento de estudantes para que expressem informações num formato desnecessariamente complicado, simplesmente porque, num futuro distante, ele terá sentido. Será que algum professor de álgebra no ensino médio tem a menor ideia de por que está pedindo que seus alunos reformulem "o número x está entre três e sete" como $|x – 5| < 2$? Será que esses autores de livros didáticos acreditam realmente que estão ajudando os alunos, ao prepará-los para o possível dia, anos à frente, no qual lutarão com problemas de geometria de dimensões mais altas ou de espaços métricos abstratos? Duvido. Espero que eles estejam simplesmente copiando uns aos outros década após década, talvez alterando o tipo de letra ou as cores dos enfeites, e ficando radiantes de orgulho quando uma rede de escolas escolhe seu livro e torna-se seu cúmplice involuntário.

Problemas em primeiro lugar. A matemática trata de problemas, e os problemas devem se transformar no centro da vida de um estudante de matemática. Por mais doloroso e frustrante que seja o processo de resolver problemas, tanto estudantes quanto seus professores deveriam se engajar no processo o tempo todo — ter ideias, não ter ideias, descobrir padrões, elaborar conjecturas, criar exemplos e contraexemplos, escrever argumentos, criticar o trabalho uns dos outros. Técnicas operatórias e algoritmos específicos devem surgir naturalmente desse processo, como aconteceu antes na história: não isolado de, mas organicamente ligado a, e como resultado de — um problema de fundo.

Professores de português sabem que os alunos aprendem melhor a ortografia e a pronúncia quando leem e escrevem. Professores de história sabem que nomes e datas não interessam quando removidos da história de como os eventos se desenrolaram. Por que a educação matemática permanece presa no século 19? Compare sua experiência ao estudar álgebra com as lembranças de Bertrand Russell [1872-1970]:

— Me fizeram aprender de cor: "O quadrado da soma de dois números é igual à soma de seus quadrados acrescida de duas vezes o seu produto." Eu não tinha a menor ideia do que isso significava, e quando não conseguia me lembrar das palavras, meu tutor jogava o livro na minha cabeça, o que não estimulou meu intelecto de modo nenhum.

Hoje as coisas estão muito diferentes disso?

Simplício: Não acho que esteja sendo justo. Certamente a didática melhorou desde aqueles dias.

Salviati: Você quer dizer os métodos de adestramento. Ensinar é se meter num relacionamento humano confuso; ninguém precisa de método. Ou melhor, devo dizer que, se você precisa dum método, provavelmente não é um bom professor. Se não domina sua matéria a ponto de conversar sobre ela com suas próprias palavras, de forma natural e espontânea, quão bem a entende? E por falar em ficar preso no século 19, não é chocante como o currículo em si ainda está preso no século 17? Pense nas descobertas surpreendentes e nas revoluções profundas no pensamento matemático que aconteceram nos últimos três séculos! Não mencionam nada disso na escola; é como se nada tivesse acontecido.

Simplício: Mas não está pedindo demais de nossos professores de matemática? Espera que eles deem atenção individual a dezenas de estudantes, que os guiem no seu próprio caminho na direção da descoberta e da iluminação, e que além disso conheçam a história recente da matemática?

Salviati: Você espera que seu professor de arte seja capaz de lhe dar conselhos sábios e individualizados sobre seu quadro? Você espera que ele saiba alguma coisa a respeito dos últimos 300 anos de história da arte? Falando sério, eu não espero nada desse tipo; eu apenas gostaria que fosse assim.

Simplício: Então você culpa os professores de matemática?

Salviati: Não, eu culpo a cultura que os produziu. Os pobres-diabos estão fazendo o melhor que podem, e estão fazendo o que foram adestrados para fazer. Tenho a certeza de que a maioria deles ama seus alunos e odeia o que está sendo obrigada a fazê-los passar. Ela sabe, no fundo, que esse tipo de ensino não tem sentido e degrada o aluno. Ela sente que foi transformada numa peça da grande máquina de esmagar almas, mas não está em posição de compreendê-la ou de lutar. A maioria só sabe que tem de deixar seus alunos "prontos para o próximo ano".

Simplício: Você realmente acha que a maioria dos estudantes é capaz de trabalhar nesse nível tão alto, a ponto de criar sua própria matemática?

Salviati: Se nós honestamente acreditamos que o raciocínio criativo é muito "alto" para nossos alunos, e que não podem lidar com ele, por que permitimos então que escrevam trabalhos de história ou ensaios sobre Shakespeare? O problema não é que os alunos não podem lidar com raciocínio criativo, mas que a maioria dos professores não pode. Eles nunca provaram nada por conta própria — como podem aconselhar um aluno? De qualquer modo, em cada classe os alunos variariam muito quanto às habilidade e ao grau de compreensão, como aliás ocorre em qualquer matéria, mas pelo menos os alunos detestariam matemática pelo que ela de fato é, e não por essa zombaria perversa dela.

Simplício: Mas certamente queremos que todos os nossos alunos aprendam um conjunto básico de fatos e de competências. É para isso que um currículo serve, e é por isso que é tão uniforme — há certos fatos básicos, frios e eternos, que nossos alunos precisam saber: um mais um é igual a dois, e os ângulos de um triângulo somam 180 graus. Não se trata de opiniões ou de sentimentos artísticos piegas.

Salviati: Ao contrário. Inventamos e aperfeiçoamos as estruturas matemáticas, úteis ou não, no contexto de um problema; e derivamos seu significado desse contexto. Às vezes queremos que "um mais um" seja igual a zero, como no caso da aritmética módulo 2; além disso, sobre uma esfera, os ângulos de um triângulo somam mais de 180 graus. Não existe nenhum "fato" por si só; tudo é relativo, tudo é relacional. É a história que interessa, e não apenas o final.

Simplício: Estou ficando cansado de todo esse nhe-nhe-nhém místico! Vamos lá: aritmética básica. Concorda ou não concorda que os alunos devem estudar isso?

Salviati: Depende do que você quer dizer com "isso". Quer dizer apreciar os problemas de contagem e de arranjos, as vantagens de agrupar e de dar nome a certos agrupamentos, a distinção entre a representação duma coisa e a coisa em si, a história do desenvolvimento dos sistemas numéricos? Então, sim. Quer dizer a decoreba de fatos aritméticos sem nenhum arcabouço conceitual subjacente? Então, não. Quer dizer explorar o fato, não de todo óbvio, de que cinco grupos de sete equivalem a sete grupos de cinco? Então, sim. Quer dizer criar uma regra pela qual $5 \times 7 = 7 \times 5$? Então, não. Fazer matemática deve sempre significar descobrir padrões e elaborar explicações eloquentes e bonitas.

A geometria do ensino médio: instrumento do demônio

Não há nada tão irritante para o autor de uma acusação mordaz como ter o principal alvo de seu veneno oferecido de volta à guisa de contraexemplo. Jamais existiu um tão pérfido lobo em pele de cordeiro nem um tão desleal amigo quanto a geometria do ensino médio. Precisamente porque a escola a usa para apresentar o aluno à arte da argumentação, a geometria escolar se tornou perigosa.

Fazendo-se passar como a arena na qual o aluno finalmente começará a se envolver com o verdadeiro pensamento matemático, esse vírus ataca a matemática em seu coração; ele destrói a própria essência do argumento racional criativo, e envenena o prazer que esse assunto belo e fascinante poderia provocar no aluno — esse vírus o impede de pensar a matemática de um jeito natural e criativo.

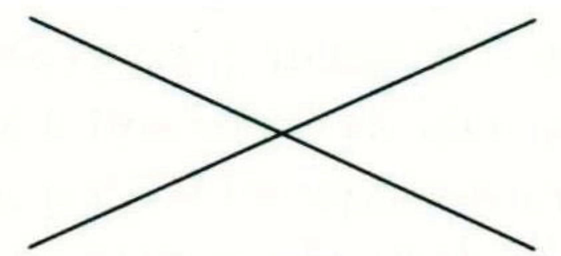
O mecanismo por trás disso tudo é sutil e labiríntico. Primeiro, o vírus paralisa o aluno-vítima com um assalto de definições, proposições, e notações inúteis; logo em seguida, lenta e meticulosamente o desacostuma de qualquer curiosidade natural ou de qualquer intuição a respeito das formas e de seus padrões. Faz isso por meio duma doutrinação sistemática numa linguagem empolada e artificial conhecida como "prova geométrica formal".

Qual tal deixar agora todas essas metáforas de lado? Entre todas as aulas no curso de matemática do ensino básico, as de geometria são as que melhor corrompem a mente e as emoções do estudante. Nas aulas sobre outros assuntos, talvez o professor esconda o pássaro tão lindo, ou talvez o mantenha numa jaula, mas nas aulas de geometria ele abertamente e cruelmente o tortura. (Como vê, sou incapaz de colocar minhas metáforas de lado.)

O que está acontecendo é que as aulas de geometria sistematicamente enfraquecem a intuição do aluno. Uma prova, isto é, um argumento matemático, é uma obra de ficção, é um poema. Seu objetivo é satisfazer. Uma bela prova deve explicar, e deve explicar com clareza, profundidade, elegância. Um argumento bem organizado e bem escrito deve se parecer com uma golfada de água fria, e deve ser um farol — ele precisa refrescar o espírito e iluminar a mente. E deve ser encantador.

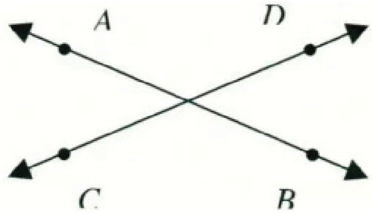
Não há nada de encantador no que, durante as aulas de geometria, explicam como sendo uma prova. Apresentam ao aluno um formato rígido e dogmático, segundo o qual suas "provas" devem ser editadas — um formato tão desnecessário e inapropriado quanto insistir, com as crianças que querem plantar um jardim, que se refiram a suas flores pelo gênero e a espécie.

Provas taciturnas. Que tal examinar alguns casos específicos dessa insanidade? Podemos começar com o exemplo de duas linhas cruzadas:



Agora, a primeira coisa que geralmente acontece é que o professor turva as águas ao recorrer a notação excessiva. Parece que é proibido falar simplesmente de duas linhas cruzadas;

temos de batizá-las com nomes complicados. Não basta dizer "linha 1" e "linha 2", ou mesmo "*a*" e "*b*". Devemos (de acordo com a geometria do ensino médio) escolher pontos aleatórios e irrelevantes nas duas linhas e daí nos referir a elas com a "notação especial de linha".

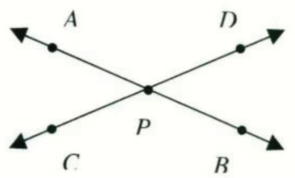


Como pode ver, agora temos de chamá-las de "reta *AB*" e de "reta *CD*". E Deus te perdoe se esquecer a palavra "reta" — pois *AB*, só *AB*, se refere ao comprimento entre os pontos *A* e *B* (ou pelo menos acho que é assim que esse trem funciona). E não importa o quão tudo isso é inutilmente complicado: é assim que devemos aprender geometria. Agora vem a afirmação que todos esperamos, em geral batizada com algum nome absurdo como:

PROPOSIÇÃO 2.1.1

Sejam *AB* e *CD* duas retas que se interceptam em *P*. Daí, como consequência:

$$\angle APC \cong \angle BPD$$



Em outras palavras, os ângulos de ambos os lados são os mesmos. Ora — dããã! A configuração de duas linhas cruzadas é simétrica, pelo amor de Deus! E como se isso não fosse ruim o bastante, essa afirmação tão óbvia sobre linhas e ângulos deve ser "provada".

Prova:

Afirmação	Motivo
1. $m\angle APC + m\angle APD = 180$ $m\angle BPD + m\angle APD = 180$	1. Postulado da adição de ângulos.
2. $m\angle APC + m\angle APD =$ $= m\angle BPD + m\angle APD$	2. Propriedade da substituição.
3. $m\angle APD = m\angle APD$	3. Propriedade reflexiva das igualdades.
4. $m\angle APC = m\angle BPD$	4. Propriedade das subtrações em igualdades.
5. $\angle APC \cong \angle BPD$	5. Postulado da medida de ângulos opostos pelo vértice.

No lugar de um argumento inteligente e agradável, escrito por um ser humano de verdade, e conduzido numa das línguas mais bonitas do mundo, conseguimos isso: essa prova taciturna, desalmada e disforme. E que montanha estão obrigando um montículo a parir!

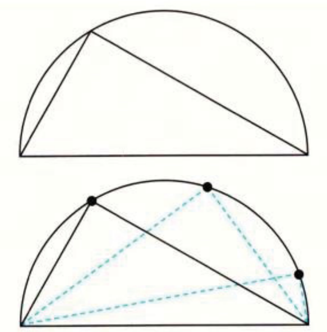
Queremos realmente sugerir que uma observação simples como essa requer um preâmbulo tão extenso? Seja honesto: você realmente leu a coisa toda? É claro que não. Quem leria?

O efeito de armarem um circo tão grande por causa de algo tão simples é fazer com que as pessoas duvidem da própria intuição. Ao pôr o óbvio à prova, e ao insistir que seja "rigorosamente provado" (como se a coisa acima valesse como uma prova formal), estamos dizendo o seguinte ao estudante: "Suspeite de seus sentimentos e de suas ideias. Você tem de pensar e de falar do nosso jeito."

Ora, sem dúvida há ocasião para as provas matemáticas formais. Mas essa ocasião não ocorre quando apresentamos o pensamento matemático ao aluno pela primeira vez. Pelo menos deixe o aluno se familiarizar com alguns objetos matemáticos, e aprenda o que pode esperar deles, antes de começar a formalizar tudo. Provas formais rigorosas só se tornam importantes quando há uma crise — quando alguém descobre que seus objetos matemáticos se comportam de maneira inesperada, ou quando aparece um paradoxo em algum lugar. Mas tal excesso de higiene preventiva é desnecessário aqui — ninguém ficou doente ainda! É claro que uma crise lógica surgirá em algum momento, e então o aluno deve investigá-la para deixar seu argumento mais claro, mas até esse processo pode ser conduzido de modo intuitivo e informal. Na verdade, a essência da matemática é conduzir esse tipo de diálogo com a prova que você mesmo escreveu.

Sendo assim, não só a maioria das crianças se confunde com tanto pedantismo (nada é mais mistificador que uma prova formal do óbvio), como também aquelas poucas cuja intuição permanece intacta devem traduzir suas ideias excelentes e bonitas para esse modelo absurdo e hieroglífico, ou caso contrário o professor não poderá considerá-las "corretas". E então o professor se lisonjeia com a ideia de que está afiando a mente de seus alunos.

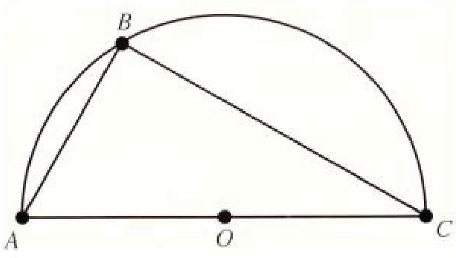
Canto e quina. À guisa de exemplo mais sério, vamos considerar o caso de um triângulo dentro de um semicírculo:



A bela verdade sobre esse padrão é que, não importa em que ponto do círculo você posicione a pontinha do triângulo, sempre obtém um ângulo reto. (Não tenho nenhuma objeção a termos técnicos como "reto" se eles são relevantes e tornam mais fácil a discussão do problema. Não me oponho aos termos técnicos em si, mas sim aos termos desnecessários ou inúteis. Em todo caso, ficaria contente de usar "canto" ou "quina" se o estudante preferisse.)

Eis um caso no qual duvidamos de nossa intuição. Não fica claro por que esse fato deveria ser verdade; ele até parece improvável — o ângulo não deveria mudar conforme eu movo o cantinho de lugar? O que temos aqui é um problema de matemática fantástico! Será verdade? Se sim, por que é verdade? Que grande projeto! Que excelente oportunidade de exercer a criatividade e a imaginação! É claro que tal oportunidade não é dada ao aluno, cuja curiosidade e interesse são imediatamente esvaziados por:

TEOREMA 9.5. Seja $\triangle ABC$ um triângulo inscrito num semicírculo de diâmetro AC. Daí $\angle ABC$ é um ângulo reto.



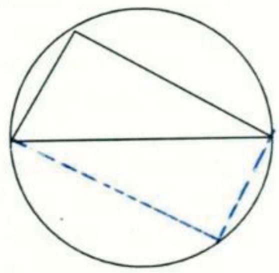
Prova:

Afirmação	Motivo
1. Desenhe o raio OB. Daí $OB = OC = OA$.	1. Dado.
2. $m\angle OBC = m\angle BCA$ $m\angle OBA = m\angle BAC$	2. Teorema do triângulo isósceles.
3. $m\angle ABC = m\angle OBA + m\angle OBC$	3. Postulado da soma de ângulos.
4. $m\angle ABC + m\angle BCA +$ $+ m\angle BAC = 180$	4. A soma dos ângulos internos dum triângulo é 180 graus.
5. $m\angle ABC + m\angle OBC +$ $+ m\angle OBA = 180$	5. Substituição (linha 2).
6. $2m\angle ABC = 180$	6. Substituição (linha 3).
7. $m\angle ABC = 90$	7. Propriedade da divisão dos termos duma igualdade.
$\angle ABC$ é um ângulo reto.	8. Definição de ângulo reto.

Será que alguma coisa poderia ser menos atraente e mais deselegante? Alguém conseguiria produzir argumento mais ofuscante e ilegível? Isso não é matemática! Uma prova deveria ser uma epifania dos deuses, e não uma mensagem cifrada do Pentágono! É isso o que obtemos com um senso mal colocado de rigor lógico: feiura. O espírito do argumento ficou enterrado debaixo dum monte de formalismo confuso.

Nenhum matemático trabalha dessa maneira. Nenhum matemático jamais trabalhou dessa maneira. Isso representa uma total e absoluta incompreensão da atividade matemática. A matemática não significa erguer barreiras entre nós mesmos e nossa intuição, e converter coisas simples em complicadas. A matemática significa remover obstáculos à nossa intuição, e manter simples as coisas simples.

Compare essa prova bagunçada e repugnante com o argumento a seguir, concebido por um de meus alunos da sétima série:



“Pegue o triângulo e o gire de modo a formar uma caixa de quatro lados dentro do círculo. Visto que girou o triângulo completamente, os lados da caixa têm de ser paralelos, de modo que ela forma um paralelogramo. Mas ela não pode ser uma caixa inclinada, porque ambas as diagonais são diâmetros do círculo, de modo que são iguais; isso significa que a caixa deve formar um retângulo de verdade. É por isso que o canto é sempre um ângulo reto.”

Isso não é delicioso? E a questão não é descobrir se essa ideia é melhor ou pior que a outra; a questão é que essa ideia surgiu. (Para dizer a verdade, a ideia contida na prova formal é bem bonita, embora a vejamos como que por um vidro esfumaçado.) Mais importante ainda, a ideia foi do próprio aluno. A classe teve um problema agradável no qual trabalhar, experimentou várias conjecturas, tentou várias provas, e foi isso o que um dos alunos me trouxe. É claro que levou vários dias, e que foi o fim de uma longa sequência de fracassos.

Para ser honesto, eu parafraseei bastante essa prova. O original ficou mais complicado, e contém muito palavreado desnecessário (além de erros de ortografia e de gramática). Mas acho que passei a sensação que o original me provocou. E os defeitos na versão original vieram todos para o bem: eles me deram algo para fazer na condição de professor. Fui capaz de apontar vários problemas no estilo e na lógica, e o aluno teve então tempo para melhorar o argumento. Por exemplo, não fiquei contente com o pedacinho sobre as duas diagonais serem diâmetros; não achei que esse fato estava completamente óbvio, mas isso significava que o aluno tinha mais em que pensar e tinha mais o que aprender com a situação. E, de fato, ele foi capaz de preencher a lacuna muito bem:

“Visto que girei o triângulo meia volta em torno do círculo, a pontinha teve de parar exatamente do lado oposto àquele em que começou a girar. É por isso que essa diagonal da caixa corresponde a um diâmetro.”

Eis um grande projeto e um belo pedaço de matemática. Não tenho certeza de quem ficou mais orgulhoso, se o aluno ou eu mesmo. Esse é exatamente o tipo de experiência que ambiciono para meus alunos.

Participante passivo. O problema com o currículo padrão de geometria é que a experiência pessoal de se esforçar como artista foi praticamente eliminada. A arte da prova foi substituída por um rígido modelo passo a passo para as deduções formais, no qual não há lugar para inspiração. O livro didático apresenta um conjunto de definições, teoremas e provas, que o professor copia na lousa, que os alunos copiam no caderno. Eles têm então de imitar esse modelo durante os exercícios. Aqueles que se adaptam rapidamente ao modelo são os “bons” alunos.

Como resultado, o aluno se transforma num participante passivo de um ato criativo. Ele compõe suas afirmações matemáticas para que se encaixem num formato preexistente de prova, e não para que elas reflitam o que realmente queria dizer. Ele foi treinado para macaquear argumentos, e não para planejá-los. Assim, ele não apenas não tem a menor ideia do que seu professor está falando, como também não tem a menor ideia do que ele mesmo está falando.

Mesmo o jeito tradicional de ensinar, no qual o professor apresenta primeiro as definições, é uma mentira. Num esforço para criar uma ilusão de "clareza" antes de embarcar numa típica sucessão de proposições e teoremas, ele apresenta um conjunto de definições para que suas afirmações e suas provas fiquem tão sucintas quanto possível. Num exame superficial, isso parece bem inócuo; afinal, por que não apresentar algumas abreviações, de modo que possa dizer as coisas de forma mais econômica? O problema é que as definições importam. Elas surgem de decisões estéticas sobre quais distinções você, na condição de jovem artista, considera importantes. E elas surgem dos problemas. Fazer uma distinção é chamar a atenção para uma característica ou propriedade estrutural. Historicamente, a definição surge depois que estamos trabalhando num problema, e não como um prelúdio ao problema.

O ponto é que você não começa com definições, mas começa com problemas. Ninguém jamais teve a ideia de que um número pudesse ser "irracional" até que Pitágoras tentou medir a diagonal de um quadrado e descobriu que não podia representá-la com uma fração. As definições têm sentido quando o matemático atinge um ponto no qual a distinção se torna necessária. Ao apresentar definições sem que haja motivo, é bem provável que o professor cause confusão.

Esse é mais um exemplo do modo como a escola blinda os alunos e os exclui do processo matemático. Eles precisam compor suas próprias definições conforme surge a necessidade — precisam dar forma ao debate por conta própria. Eu não quero meus alunos dizendo "a definição, o teorema, a prova"; eu os quero dizendo "minha definição, meu teorema, minha prova".

Mesmo que você me peça para colocar toda essa lamúria de lado, acho que o verdadeiro problema com esse tipo de apresentação é que ele é chato. Eficiência e economia simplesmente não combinam com boa pedagogia. Acho difícil acreditar que Euclides aprovaria o atual estado de coisas; sei que Arquimedes não aprovaria.

Simplício: Espere um minuto. Não sei sua história, mas eu realmente gostei das minhas aulas de geometria no ensino médio. Eu gostei da estrutura, e gostava de trabalhar com um formato rígido para cada demonstração.

Salviati: É claro que gostou. Você provavelmente teve a chance de trabalhar com alguns problemas legais de vez em quando. Um monte de gente gosta das aulas de geometria (embora mais gente as odeie). Mas isso não é um ponto a favor do regime atual. Ao contrário, serve de testemunho ao poderoso fascínio que a matemática exerce. É difícil arruinar completamente uma coisa tão bonita; mesmo esse fiapo de matemática pode entreter e satisfazer. Muita gente também gosta de pintar conforme os números, pois é uma atividade manual colorida e relaxante. Isso não a torna a coisa real, contudo.

Simplício: Mas eu estou te dizendo — eu gostei!

Salviati: Se tivesse tido uma experiência matemática mais natural, teria gostado ainda mais.

Simplício: Então, deveríamos partir para uma aventura matemática mais livre, e que os alunos aprendam o que quer que aprendam?

Salviati: Precisamente. Os problemas conduzirão a outros problemas, e as técnicas e métodos surgirão sozinhos quando se tornarem necessários, e os novos temas também surgirão naturalmente. E se um problema nunca aparecer em treze anos de escola, quão interessante ou importante ele deve ser?

Simplício: Você ficou completamente louco.

Salviati: Talvez sim. Mas mesmo trabalhando dentro da estrutura convencional, um bom professor pode orientar a discussão e o fluxo de problemas, de modo que seus alunos consigam descobrir e inventar matemática por si mesmos. O problema real é que a burocracia não permite que um professor sozinho faça nada disso. Com um currículo predeterminado a seguir, o professor não consegue liderar. Não deveria haver nenhum padrão e nenhum currículo. Deveria haver apenas indivíduos dando aulas a seus alunos do modo como acham melhor.

Simplício: Mas como então as escolas garantiriam que todos os seus alunos saberiam o mesmo conjunto de conhecimentos básicos? Como nós poderíamos medir com precisão o valor de cada aluno?

Salviati: Elas não garantiriam, nem nós poderíamos. Exatamente como na vida real. Em última análise, temos de encarar o fato de que as pessoas são diferentes, e que isso é bom. E não há pressa. Assim, se uma pessoa com diploma de ensino médio não conhece as fórmulas para as diferenças de arcos trigonométricos (como se alguém soubesse isso agora) — e daí? Pelo menos essa pessoa teria saído da escola com uma boa ideia do que a matemática realmente é, e teria conhecido muita coisa bonita.

[*Trecho suprimido, no qual o autor mostra um resumo das matérias do ensino básico norte-americano do modo como ele as vê — como aberrações*.]

Nessa forma de arte tão antiga há tanta beleza comovente, tanta profundidade de tirar o fôlego. É tão irônico que as pessoas rejeitem a matemática como sendo a antítese da criatividade. Estão desperdiçando uma forma de arte mais velha que todos os livros, mais profunda que todos os poemas, mais abstrata que todas as abstrações. E é a escola quem faz isso! Que triste ciclo de professores inocentes a infligir dano a estudantes inocentes. Todos nós poderíamos estar nos divertindo muito mais.

Simplício: OK, estou completamente deprimido. E agora?

Salviati: Bem, acho que tive uma ideia muito legal sobre uma pirâmide dentro dum cubo… {**FIM**}

APÊNDICE 5 – CATEGORIZAÇÃO DOS DADOS

1. CURRÍCULO PRESCRITO

CODIFI-CAÇÃO	UNIDADES DE TEXTO APROPRIADAS	UNIDADE DE CONTEXTO	CATEGORIA
TR01	O cerne da atividade matemática é a solução de problemas. O essencial é **como** se resolve um problema e não aquilo que se consegue como “resposta”. Com tal critério, a matemática ensinada nas escolas se baseia em dois fundamentos matemáticos: a fantasia (indução) na fase inicial e a conclusão lógica (dedução) numa fase posterior da atividade matemática. A meta mais importante consiste em desenvolver a capacidade de pensar dos alunos, num leque amplo que vai do “adivinhar” até a conclusão pela lógica, dando-lhes auto-confiança, isto é, a confiança na própria capacidade de raciocinar.	Introdução do currículo prescrito de matemática	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
TR02	Outra meta justificada consiste em capacitar os alunos para aplicar métodos de cálculos na vida diária e fornecer as bases necessárias para um estudo pós-escolar. Torna-se valioso, para a tarefa principal, colocar certos problemas em novos contextos: em vez da divisão em matérias como álgebra, teoria das funções, etc., é preferível dividir os problemas de acordo com diferentes métodos **heurísticos**, a fim de dividir um problema em seus diversos elementos.	Introdução do currículo prescrito de matemática	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
TR03	Quando se trata de investigar e de elaborar uma teoria, os alunos devem ser livres para adivinhar, para experimentar, para tentar várias possibilidades. Para buscar uma solução, pode-se simplificar o problema, formar uma analogia ou generalizar a pergunta- é necessário intuir qual a atitude mais promissora. Nessa fase evolutiva dos alunos, a matemática-oferecendo, de modo criativo, várias alternativas de solução-, pode ter um significado existencial. Os alunos têm a possibilidade de observar, sob vários ângulos, a sua própria maneira de raciocinar, de procurar vários pontos de partida, de escolher exemplos-ou exemplos contrários- de fazer uma investigação sistemática e de demonstrar os resultados obtidos. Eles aprendem a analisar e a julgar condições e pressupostos.	Introdução do currículo prescrito de matemática	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

TR04	É importante que os alunos possam fazer conquistas íntimas quanto à validade geral das suas idéias. A maior satisfação resulta de algo que eles primeiro supunham existir, ou que adivinharam, e que, depois, eles conseguiram demonstrar.	Introdução do currículo prescrito de matemática	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA
TR05	**Álgebra** **Equações de 2° grau** • Completar a forma quadrática. • O desenvolvimento das fórmulas para a solução e sua aplicação. • Desenvolvimento e demonstração do teorema da raiz de Viëta. • A estrutura de uma equação de 2° grau. • O significado do discriminante. Eventualmente: -> inequações lineares e de 2° grau. **Potências com expoentes de números inteiros e racionais, logaritmos** • Revisão das regras relativas à expoentes naturais. • Progressões geométricas dos números 2 e 3. • Ampliação de expoentes para os conjuntos dos números Inteiros, Racionais e Irracionais (Z, Q e R). • Desenvolvimento dos Logaritmos e cálculo de alguns valores de tabelas (com as bases 2, 3 e 10). • Cálculo com tabelas de logaritmos (como exemplo para o uso de tabelas em geral). • Propriedades: comutativa, associativa e distributiva. • Regras de cálculo relativas aos logaritmos. • Solução de equações exponenciais. • Solução de equações logarítmicas. • As curvas logarítmicas e exponenciais (primeiro contato com o conceito de função). Eventualmente: Escalas logarítmicas nas ciências naturais Espiral de Arquimedes e logarítmica (exemplos morfológicos na natureza), evolutas. Biografia: Euler.	Prescrições dos conteúdos do 10° ano	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

2. CURRÍCULO APRESENTADO

MMMSB01	Gosto de enfatizar um saudável equilíbrio entre o desenvolvimento de habilidades matemáticas e a existência de experiências matemáticas, e este livro é sobre oferecer aos estudantes estas incríveis experiências matemáticas.	Introdução aos professores	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ....
MMMSB02	Certamente, qualquer estudante que está se formando no Ensino Médio deve estar preparado para qualquer que seja o próximo passo em sua vida. Enquanto muitos estudantes vão para a universidade, alguns deles não vão nunca mais vão cursar aulas de matemática depois da escola. Mas para aqueles que tem problemas com a matemática, eu acredito que a matemática pode ser a parte mais importante de sua educação - não por causa do conteúdo que eles estão aprendendo, mas das lições de vida (isto é, como eles perseveram perante as dificuldades, etc.).	Introdução aos professores	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ....
MMMSB03	Generalizando, nosso currículo matemático consiste em duas áreas: “a convencional” e “a não-convencional”. Ambas são importantes. A convencional é o que estamos mais familiarizados - os conteúdos que sempre aparecem em qualquer livro de algebra, algebra II ou pré-cálculo. A matemática convencional é bastante orientada pelas técnicas. O que estou me referindo à matemática não-tradicional é a matemática que está em meu currículo e que é desconhecida por muitos professores de matemática. É uma combinação de conteúdos de matemática do currículo Waldorf e outros conteúdos que buscam desenvolver o pensamento matemático, a capacidade de resolver problemas e um sentimento de encanto pela matemática. Este livro tem uma grande ênfase nos conteúdos não convencionais. Isso pode passar ao leitor a impressão de que maior parte de minhas aulas é gasta na matemática não-tradicional e que eu estaria negligenciando as habilidades da matemática convencional. Isso não é verdade. Meus estudantes estão expostos a um equilíbrio entre a matemática convencional e a não-tradicional.	Introdução aos professores	INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL .... FLUÊNCIA MATEMÁTICA
MMMSB04	O melhor jeito de saber como eu ensino a matemática convencional é lendo os “workbook´s”.	Introdução aos professores	FLUÊNCIA MATEMÁTICA

MMM2SB	Geralmente, as aulas de Época tendem a ser mais sobre a visão geral e menos sobre o desenvolvimento de habilidades técnicas. Aulas de Época não são divididas de acordo com as habilidades. Aulas de Épocas requerem a escrita dos alunos. Minhas aulas de Época frequentemente são uma integração entre história, filosofia, escrita e matemática. Os estudantes não têm um livro didático para as aulas de Época; eles mesmos criam seu "caderno de Época", que consiste em uma coleção de dissertações que resumem a experiência da Época. Aulas Avulsas são mais orientadas para as habilidades. É nas aulas Avulsas que nossos alunos utilizam nossos "workbook´s".	Introdução aos professores	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA FLUÊNCIA MATEMÁTICA
MMMSB06	Os livros a seguir da coleção "Making Math Meaningful" estão disponíveis no Jamie York Press: "WORKBOOK´s" para os 6ª aos 12º anos. Nossos workbook´s para os Ensinos Fundamental e Médio são uma parte indispensável do nosso currículo de matemática. Enquanto nosso workbook´s focam no desenvolvimento das técnicas padrões, eles também proporcionam experiências matemáticas aos estudantes e os dão um sentimento de descoberta. As edições para os professores para os workbook´s do Ensino Médio incluem comentários para cada unidade, o workbook do estudante e os gabaritos. "FUN WITH PUZZLES, GAMES AND MORE!" Nosso livro de enigmas e jogos matemáticos é pretendido como um recurso a fim de suplementar o material das aulas normais de matemática e eles possibilitam "algo diferente". "SOURCE BOOKS" para professores de matemática: para os 1° ao 5° anos, Ensino Fundamental II e Ensino Médio.	Introdução aos professores	PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL .... FLUÊNCIA MATEMÁTICA
MMMSB07	Eu também acredito que há muito mais a se fazer com a matemática do que aprender habilidades. Com essa grande ênfase em direção ao domínio de uma longa lista de habilidades, alguns dos aspectos mais interessantes da matemática acabam sendo negligenciados.	Introdução aos professores	PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ....
MMSB08	Com frequência no mundo atual, estudantes que se formaram no Ensino Médio e Universidade são incapazes de pensar por si mesmos. Mesmo quando cursam matemática, seus pensamentos são em grande parte imitativos. Eles conseguem resolver problemas matemáticos contudo se já viram algo similar antes. Nós frequentemente ouvimos dos professores universitários e pessoas na indústria que a educação de hoje não está	Introdução aos professores	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

	habilidade para formar graduados que são bons em resolver problemas e pensar criativamente. Como educadores, nosso objetivo é ter nossos estudantes formados do Ensino Médio capazes de pensar flexivelmente, criativamente e independentemente.		
MMMSB09	Maioria das pessoas pensam que matemática é uma coleção de procedimentos cegos que são usados para resolver problemas insignificantes. Em contraste, acredito que é criticamente importante que os estudantes compreendam a matemática por detrás da matemática, que percebam que a matemática não é algo que "está por aí", mas que a matemática é uma das coisas que nos fazem seres humanos. Nós queremos que os estudantes experenciem a matemática como uma aventura, e que sintam que a matemática é um profundo esforço humano.	Introdução aos professores	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
MMMSB10	Matemática fenomenológica e o caminho da descoberta Comumente, quando um novo tópico é introduzido, os livros de matemática começam com o produto final- com a apresentação de um teorema, uma formula ou um procedimento para resolver um novo tipo de problema. Seguindo isso, exemplos do novo conceito são apresentados, os estudantes são esperados para praticar vários destes novos problemas e os deixam com a impressão de que a matemática é magicamente arrancada da cartola. Essa é essência da abordagem da matemática através de "procedimentos cegos" que é tão prevalente atualmente. Eu tenho intencionalmente invertido o processo nesse livro e em nossos workbook´s. Com uma abordagem fenomenológica, nós começamos as coleções com exemplos e através das observações próprias dos estudantes, eles discernem um padrão escondido ou uma qualidade em comum. Com a abordagem do caminho da descoberta, nós servimos como guias aos estudantes- tendo o cuidado de não revelarmos muito. Com ambas destas abordagens, os estudantes formulam a afirmação de uma regra, propriedade, ou teorema por eles mesmos. Eles criam a matemática (em algum nível) ao invés de terem o conteúdo dado a eles.	Introdução aos professores	INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

MMMSB11	Pode ser útil considerar que os tópicos matemáticos possam ser divididos em duas categorias: habilidades (isto é, conteúdos que necessitam ser dominados) e experiências matemáticas. Habilidades (tópicos que necessitam ser dominados). Aqui o professor precisa criar uma dança entre introduzir, aprofundar, praticar, adormecer e revisar. Quanto mais extenso for o conteúdo, maior o número de vezes que ele precisa ser colocado “para o sono” e então revisado mais tarde. É bastante comum a introdução de um conteúdo em um ano, mas não ter os estudantes o dominando até o próximo ano ou no próximo ano. Experiências matemáticas. Enquanto os nossos workbooks concedem aos estudantes um tempo adequado para praticar habilidades essenciais, eles também criam oportunidades para a descoberta. Esse processo de descoberta é parte de uma categoria mais ampla de experiências matemáticas – algo que é crítico para o desenvolvimento de uma verdadeira capacidade de pensar matemático, ainda tão negligenciado em nossas aulas de matemáticas atualmente. Experiências matemáticas incluem descobertas, puzzles, jogos e resolução de problemas. Nós ensinamos esses tópicos porque eles esticam a mente de nossos estudantes, eles ensinam o pensamento matemático e eles geram entusiasmo e maravilhamento pela matemática. Esse livro e nossos workbooks podem fazer muitas coisas. No final das contas, é responsabilidade do professor em criar oportunidades para experiências matemáticas. Como uma referência, eu recomendo que entre 25% e 50% das aulas sejam gastos em experiências matemáticas.	Introdução aos professores	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL .... FLUÊNCIA MATEMÁTICA
MMMSB12	Apenas o professor pode fazer a matemática ser significativa e inspirar os estudantes. Aqui há algumas ideias que ajudam a fazer a matemática ser significante: (...) Desafie os estudantes. Cada estudante deveria ser desafiado adequadamente. O professor precisa garantir que o nível dos desafios são maleáveis e permitem os estudantes se sentirem bem sucedidos. (...)	Introdução aos professores	FLUÊNCIA MATEMÁTICA

	Ofereça conteúdos interessantes. Engajar os estudantes com o conteúdo é uma parte importante da arte de ensinar. Aplicações práticas podem fazer o material se tornar interessante aos estudantes. Mas ainda assim um bom enigma ou um novo tipo de problema pode prender o interesse dos estudantes também. Forneça o contexto histórico. Se torna bastante significativo para os estudantes perceberem que eles estão vivendo e respirando os mesmos pensamentos que as maiores mentes da história um dia também se sentiram desafiados.		PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ....
MMMSB3	Isso tudo muda no nono ano quando a álgebra é o principal conteúdo do ano. Dado a sequência natural da álgebra (e do currículo depois dela), se faz necessário dividir as aulas Avulsas (começando no nono ano) em grupos mais rápidos e mais lentos- ou o que eu chamo de grupo regular e avançado.	Introdução aos professores	FLUÊNCIA MATEMÁTICA
MMMSB14	Em minhas aulas Avulsas, eu coloco de lado um bom tempo de minha aula (em média 50% de todo o período da aula) para os estudantes trabalharem em suas tarefas. Isso também me permite responder a maioria de suas questões. Os estudantes mais fortes raramente precisam levar suas tarefas para casa. Qualquer lição de casa que nós demos tem que ter um propósito real. Talvez a questão norteadora deva ser "Essa tarefa de casa mais estimula seu amor e entusiasmo por aprender?". Quando a tarefa de casa vai muito longe- e eu acredito que para o Ensino Médio isso não deva ser mais que a média de 90 minutos por noite (no total, para todas as disciplinas) - então isso inevitavelmente reduzem o natural entusiasmo para aprender dos estudantes.	Introdução aos professores	FLUÊNCIA MATEMÁTICA
MMMSB15	Quais são as habilidades matemáticas essenciais? Educadores matemáticos muitas vezes concordam que há muita ênfase em habilidades procedimentais na educação matemática atualmente. Eles dizem que nós precisamos encontrar mais tempo para desenvolver habilidades de resolução de problemas e capacidade de pensar criativamente. Ainda assim, muitos professores reclamam que nunca há tempo suficiente para estes "extras. Nós podemos começar a sentir que há uma esmagadora quantidade de conteúdo que os estudantes devem aprender e, se eles não aprendem tudo, então eles não estarão prontos para seus estudos futuros matemáticos. Como mencionado acima (Veja "A	Introdução aos professores	FLUÊNCIA MATEMÁTICA

	LISTA" embaixo de Desafios atuais, acima) a real lista de habilidades necessárias é relativamente curta.		

EQ2L1	No final da unidade de *Fatoração* você encontrou a seguinte equação de 2º grau para resolver: $x^2 + 6x = 3$. Entretanto, neste momento, você não tinha ferramentas para resolver esse problema. (Você consegue perceber o porque?) Um dos objetivos dessa unidade e aprender a solucionar problemas como este, e desenvolver uma formula, conhecida como a *Fórmula de Bhaskara* (nome dado em homenagem a um matemático indiano), que nos auxilia a resolver esse tipo de problema com facilidade. Daremos nosso primeiro passo nessa direção.	Trabalho em grupo	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA
EQ2L1	*Quebra-Cabeças Geométricos Gregos* 8) Um retângulo tem um comprimento de 8 centímetros e uma altura igual ao comprimento do lado de um quadrado. Encontre a medida do lado do quadrado, sabendo que a soma das áreas das duas figuras e igual a 65 centímetros quadrados.	Trabalho em grupo	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS FLUÊNCIA MATEMÁTICA
EQ2L1	**Problemas dissertativos** 20) A soma de dois números e igual a 32. O maior numero e 12 unidades maior que o dobro do menor número. Encontre os números. 21) A soma de dois números e igual a 13, e a diferença dos seus quadrados e igual a 39. Encontre os números.	Excercitando	FLUÊNCIA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
EQ2L3	Observe o seguinte exemplo e tenha certeza de que o compreendeu: Exemplo: $x^2 + 10x - 24 = 0$ $x^2 + 10x = 24$ $x^2 + 10x + 25 = 24 + 25$ $(x + 5)^2 = 49$ $\sqrt{(x + 5)^2} = \sqrt{49}$ $\lvert x + 5 \rvert = 7$ $x + 5 = \pm 7$ $x = -12$ ou $x = 2$ 4) Seria mais fácil resolver essa equação por fatoração. Por que será que esse novo método é importante?	Trabalho em grupo	FLUÊNCIA MATEMÁTICA
EQ2L3	5) Resolva completando quadrado (como demonstrado anteriormente) $x^2 + 8x + 12 = 0$	Trabalho em grupo	FLUÊNCIA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
EQ2L3	**Exercitando** **Resolva** isolando o termo quadrado e então tirando a raiz dos dois lados, como na lista anterior. 6) $(x - 2)^2 = 100$	Exercitando	FLUÊNCIA MATEMÁTICA

	7) $(x+9)^2 = 1$ 8) $(x+5)^2 = 7$ 9) $(x-3)^2 = -4$ 10) $(x-\frac{3}{8})^2 = \frac{9}{4}$ 11) $(x-\frac{1}{3})^2 = \frac{5}{9}$		RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
EQ2L4	**Problemas dissertativos** 10) Sete vezes o menor número é 4 a mais do que o dobro do numero maior, e a soma dos dois números e igual a 16. Quais são os números? 11) O salário do Gabriel é 2/3 do salário da Alice. Juntos eles recebem R$ 600 por semana. Quanto é o salário de cada um?	Exercitando	FLUÊNCIA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
EQ2L5	**Discussão em Grupo** Por volta de 825 d.C., Mohammed ib'n Musa Al-Khwarizmi escreveu *Hisab al-jabr wal-muqabala.* A maior parte do livro contempla a aritmética, a mensuração, a matemática financeira e problemas de negócios. Mas foi o seu o primeiro capítulo que tornou o livro famoso, e iniciou o estudo formal de álgebra. Iremos agora ler o primeiro capítulo do livro.	Discussão em grupo	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA
EQ2L6	**Discussão em Grupo** Na seção IV, Al-Khwarizmi resolve $x^2 + 10x = 39$.	Discussão em grupo	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
EQ2L6	**Trabalho em Grupo** 1) Essencialmente, Al-Khwarizmi desvendou a equação para solucionar qualquer equação quadrática. Considere o número de raízes (no caso o coeficiente do termo x) como b, e a constante como c. Agora leia novamente a Seção IV para derivar a fórmula de x dada em termos de b e c.	Trabalho em grupo	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
EQ2L7	**Discussão em Grupo** Na seção V Al-Khwarizmi demonstra uma solução para resolver *Quadrados e Números Iguais à Raízes* ($10x = x^2 + 21$). A seção VI ele fornece uma solução para resolver *Raízes e Números Iguais a Quadrados* ($3x + 4 = x^2$). Estamos pulando essas duas seções. Vamos agora prosseguir com o último parágrafo da seção VI, que diz o seguinte:	Discussão em grupo	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
EQ2L7	Seção VII. UMA DEMONSTRAÇÃO DO CASO *"Um quadrado e dez raízes são iguais a 39."* Primeiro, construímos um quadrado ab de lados desconhecidos. Este quadrado representa o quadrado que, junto com sua raiz, você deseja encontrar. Qualquer lado deste quadrado representa uma das raízes que desejamos	Discussão em grupo	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

	conhecer. Agora pegaremos um quarto do número de raízes, ou seja, um quarto de dez, para obter 2½ . Combinando isso com o lado do quadrado nos dá quatro novos retângulos (c, d, e, f), que colocaremos nas laterais do quadrado [como mostrado no desenho abaixo]. Agora temos um quadrado novo e maior, exceto que faltam pequenos pedaços quadrados em seus quatro cantos. Cada um desses quatro cantos tem uma área de 2 ½ vezes 2 ½ .Quando adicionamos esses quatro cantos à nossa figura [como mostrado no desenho inferior], aumentamos a área em quatro vezes o quadrado de 2 ½ , que é 25. A partir da afirmação original, sabemos que o quadrado ab combinado com quatro retângulos, que juntos representam dez raízes, devem ser iguais a um total de 39. A isso adicionamos 25 (a área dos quatro cantos pequenos) para obter um total de 64, que é a área do grande quadrado GH. O lado desse grande quadrado deve ser oito. Se subtrairmos duas vezes um quarto de dez, que é cinco, desse oito, obteremos três - a raiz do quadrado que buscamos. Deve-se observar que aqui pegamos um quarto do número de raízes, multiplicamos esse resultado por si mesmo e, em seguida, multiplicamos isso por quatro, que é o equivalente a pegar a metade do número de raízes e então multiplicar esse número por ele mesmo [que é o que foi feito na seção IV].		RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
EQ2L7	**Trabalho em Grupo** 1) Expresse a seguinte afirmação *Um quadrado e 8 raízes são iguais a 65.* a) Como uma equação de álgebra moderna. b) Como um quebra-cabeça geométrico grego. 2) Resolva o problema 8 da lista 1 usando: a) Método geométrico de Al-Khwarizmi (como visto na seção VII) b) Fórmula de Al-Khwarizmi (como visto na seção IV) c) Completando quadrado.	Trabalho em grupo	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
EQ2L8	**Trabalho em Grupo** 1) Resolva o problema 3 da lista 3 usando... a) Método geométrico de Al-Khwarizmi b) Fórmula de Al-Khwarizmi c) Método de completar quadrado. 2) Considere o problema 2 da lista 3. Resolva utilizando o método mais fácil dos 3 métodos acima. 3) *Desafio!* Considere o problema 1 da lista 3. a) Como Al-Khwarizmi escreveria este problema? b) Demonstre como ele resolveria o problema geometricamente. c) Escreva uma fórmula que ele poderia ter dado para resolver esse problema.	Trabalho em grupo	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
EQ2L9	**Trabalho em Grupo** **Resolva** completando quadrado. 1) $3x^2 + 11x + 5 = 0$	Trabalho em grupo	FLUÊNCIA MATEMÁTICA

	(Deixe sua resposta em forma de raiz quadrada) 2) $ax^2 + bx + c = 0$ (Sua resposta é a “fórmula de Bhaskara”)		RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
EQ2L10	**Trabalho em Grupo** **Resolva as equações** usando cada um dos 3 métodos: a) Fatoração b) Completando quadrado c) Fórmula de Bhaskara 1) $x^2 + 9x + 20 = 0$ 2) $6x^2 + 7x - 10 = 0$	Trabalho em grupo	FLUÊNCIA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
EQ2L10	**Exercitando** **Resolva** usando cada um dos três métodos: 3) $x^2 + 6x - 16 = 0$ **Resolva** usando a fórmula de Bhaskara 4) $3x^2 - 8x + 4 = 0$ **Resolva** usando o método mais fácil: 5) $x^2 + 9x + 14 = 0$ 6) $x^2 + 5x - 11 = 0$ 7) $3x^2 + 10x + 8 = 0$ 8) $5x^2 + 7x - 10 = 0$ 9) $x^2 + 6x = 3$	Exercitando	FLUÊNCIA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
EQ2L11	**Exercitando** 1) Escreva a fórmula de Bhaskara. 2) A fórmula de Bhaskara é a solução para qual equação? 3) Redija a prova da fórmula de Bhaskara	Exercitando	FLUÊNCIA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
EQ2L12	*Lista 12* **Exercitando** 1) Escreva a Fórmula da Equação Quadrática. 2) A Fórmula da Equação Quadrática é a solução para qual equação?	Exercitando	FLUÊNCIA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
EQ2L13	13) (Teorema 11, do Livro II, De Euclides's *The Elements*) a) Onde você pode cortar uma linha reta de 10 cm de comprimento de forma que o retângulo formado pela linha inteira e um dos segmentos formados seja igual ao quadrado segmento restante? b) Qual é a razão (na forma decimal) dos comprimentos dos dois segmentos encontrados acima.	Exercitando Último problema dissertativo	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

FATL3	Fatore 1) $x^2 + 9x + 20$ 2) $x^2 + 14x + 45$ 3) $x^2 - 14x + 45$ 4) $x^2 + 8x - 20$ 5) $x^2 - 8x - 20$ 6) $x^2 + 15x + 54$ 7) $x^2 + 15x + 54$ 8) $x^2 + 15x - 54$ 9) $x^2 - 15x - 54$ 10) Use os problemas acima para formular Regras de Fatoração de Trinômios.	Trabalho em grupo	FLUÊNCIA MATEMÁTICA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA
FATL4	Multiplique 15) (x + 3)(x – 4) 16) (x – 3)(x + 4) 17) (x – 3)(x – 4) 18) (x + 3)(x + 4)	Exercitação	FLUÊNCIA MATEMÁTICA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

DC19/08	Enquanto isso, eu e a professora conversávamos e ela disse que o correto seria “gosto de matematicar”, ao invés de ‘gosto de matemática”. Conversamos também sobre o fazer, exercitar, descobrir da matemática que ela buscava nas aulas dela e, inclusive, disse (à ela) que isso me remetia à Resolução de Problemas e Investigação Matemática. Ela perguntou o que eram e disse brevemente sobre problemas abertos e fechados. Ela também me mostrou alguns enigmas do livro e como alguns (foto) tinham sido antes respondidos por alunos mais rápidos que ela.	Conversa informal durante aula virtual	PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ... RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA
DC19/00	Encontrei, no 4thgrade, na pág. 6, “7. Produtos, somas e diferenças a) Encontre dois números cujo produto seja 36 e i) soma seja 13. ii) soma seja 15. iii) soma seja 37.” Para a 5th grade, na página 13, havia algo similar, com “ i) Soma seja 13. ii) Soma seja 11. iii) Soma seja 17. iv) Subtração seja 1. v) Subtração seja 13.” Idem na página 21, para o 6th grade. Na introdução, pg, 1, “mastry of skills in mathematics curricula” levam a “kill the students natural enthusiasm for learning”. Com isso, ‘what is this thrill of math?”, já que é indicado os alunos “experience the thrill of mathematics?”. Assim, “It is pehaps best experienced When students encounter a challenge that at first seems formidable and They perservere and emerge sucessful. A good puzzle or game provides and excelente opportunity for such a thrill’. Ainda assim, “skills are important”. Na página 2, “the art os teaching math is, at least partly, how to balance this.” Sobre “the art of problem solving”, é que “solving problems” envolve “following procedures” e “previously shown how to do”, enquanto “problem solving” “include na experience os uncertainity” e os alunos podem dizer ‘I have never seen this before’.	Descrição geral do livro “Fun, games and more!”	PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...

	O livro é dividido ano a ano, do 4° ao 8°. Para o ‘high school’, no sumário “High school puzzles Geoemtric puzzles Algebraic puzzles Logic puzzles Brain Teasers Problem solving exercises” O 1°, por exemplo, na pág. 40, “127. How can a hexagon be cut into 4 pieces such that those pieces form two equilateral triangles?” O 2°, na pág. 46, “136. Clock hands When are the minute and hour hand of a clock exactly together between four and five o´clock?” Sobre o 3°, podemos ver o exemplo dos chapéus vermelho e azul já passados no 9° ano na Época de junho. No 4°, podemos pegar o problema dos pontos para formar triângulos e a diagonal da estrela e sua soma, ambos já vistos no 9° ano em junho. Ainda no sumário, temos, à parte, “Games Math and tricks Classroom activities” Sobre games, há exemplo disso também na Época do 9° ano, em que duas pessoas jogavam números e ganhava o primeiro cuja soma fosse um certo número. São jogos de ganhar ou perder. Sobre o 3°, para o 7th grade, há o experimento de achar o valor aproximado de pi com barbante e como sendo a razão D/C (p.95) e no 8th grade há sobre achar a área do círculo planificando-o em retângulo. Estes já são mais típicos. Na entrada dos capítulos dos anos de fundamental há “Try taking puzzles from na earlier age. Many of the puzzles listed as grades 5-8 can be quite fun for high school students as well’, na pág. 40. Na pág. 32. Ainda no fundamental, no 8° ano, ‘the intention, however, is to solve them without the use of álgebra. In this way, the process is likely to be less		

	mechanical and will allow the students to enter more fully into a pure problem solving experience”. No 8° ano, na página 35, há “112. A soma de dois números é 32. O maior é 12 a mais que o dobro do menor. Encontre os números.”		
	Cito que Malba Tahan com “O homem que calculava” estava nas referências do livro.	Descrição geral do livro “Fun, games and more!”	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...

3. CURRÍCULO MODELADO

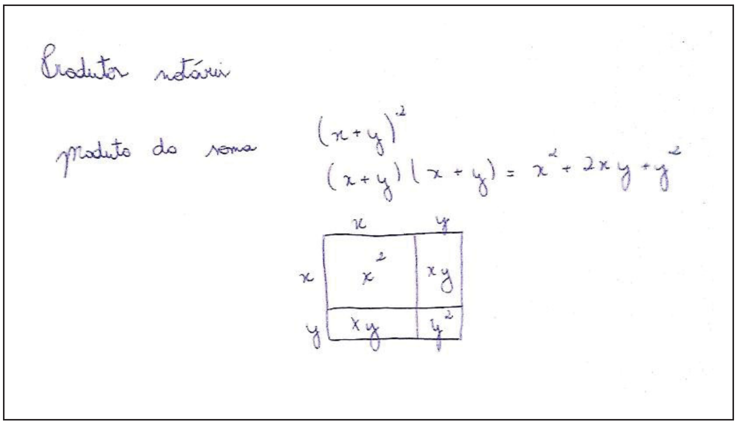
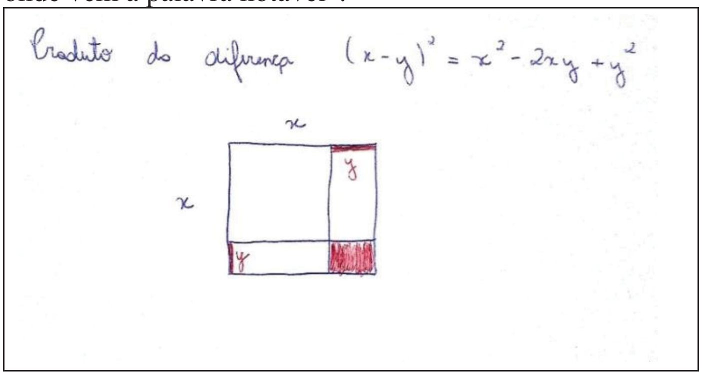
PE10	**Objetivos:** • Reconhecer leis e padrões tanto na Álgebra quanto na Geometria, de forma a entender como as coisas funcionam.	Indicações do conteúdo do 10° ano no Plano Escolar	INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA
PE10	**Metodologia:** • Cada tema é apresentado inicialmente com experimentos científicos, os quais devem ser contemplados; • Realização de simulações até organização formal do conceito ou da regra geral; • Exercitação com listas de exercícios. • Observar as curvas, procurando caracterizá-las; • Compreender o padrão geométrico de sua gênese; • Construir com exatidão e limpeza as curvas com utilização de instrumentos de desenho geométrico; • Ligar os pontos encontrados das curvas à mão livre, experimentando o movimento das mesmas.	Metodologia da Educação Matemática do 10° ano no Plano Escolar	INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA FLUÊNCIA MATEMÁTICA
PE11	**Objetivos:** • O trabalho é menos induzido e o aluno deve adquirir a capacidade de dedução; • As aulas acontecem de forma cada vez mais investigativa e detalhista, com o objetivo de um desenvolvimento do pensar objetivo e livre; • Conhecer as leis e padrões tanto na Álgebra quanto na Geometria, de forma a entender porque as coisas funcionam como funcionam. • Ampliar a consciência do aluno sobre leis geométricas não representáveis, livrando assim o pensar do concreto. • Desenvolvimento de habilidades como a precisão e apresentação artística dos desenhos geométricos.	Objetivos da Educação Matemática do 11° ano no Plano Escolar	INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA
PE11	**Metodologia:** **Matemática** • Cada tema é apresentado inicialmente com experimentos científicos, os quais devem ser contemplados; • Realização de simulações até organização formal do conceito ou da regra geral; • Exercitação com listas de exercícios.	Metodologia da Educação Matemática do 11° ano no Plano Escolar	INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA FLUÊNCIA MATEMÁTICA
PE12	**Curiosidades e Enigmas** • Diferentes Curiosidades e Enigmas da Matemática **Metodologia:** • Interligar os temas, trazer relações com temas de outros anos; • Realização de simulações até organização formal do conceito ou da regra geral;	Enigmas no 12° ano do Plano Escolar	PARA ALÉM DA MATEM[ÁTICA CONVENCIONAL ... FLUÊNCIA MATEMÁTICA

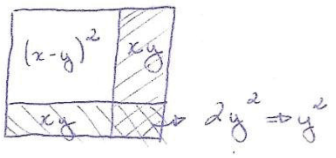
	• Exercitação com listas de exercícios; • Instigar os alunos a um pensar autônomo e livre; • Permitir que os alunos conduzam as aulas de Curiosidades e Enigmas matemáticos.		INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

4. CURRÍCULO EM AÇÃO

DC01	Foram distribuídas listas impressas de explicações breves, exemplos e exercícios. Elas iniciavam com um texto sobre equação de 2º grau que fora lido em voz alta. Em seguida, um aluno foi a lousa explicar sobre um dos exemplos que constava na lista sobre módulo. $7 \to 7$ $\quad x + 3 = 7$ $-7 \to 7$ $\quad x + 3 = -7$	Apresentação dos conteúdos	FLUÊNCIA MATEMÁTICA
DC01	Assim seguiram fazendo a lista do modo como preferiam. Vez ou outra a professora resolvia algum exemplo na lousa com a interação de alguns alunos. 1) $x = -5$ ou $x = 13$ 2) $x = 4$ ou $x = -20$ 3) $x = 7$ ou $x = -11$ $(x+5)^2 = (x+5)(x+5)$ $= x^2 + \underbrace{5x + 5x}_{} + 25$ $= x^2 + 10x + 25$ $\begin{array}{c\|c\|c} & x & 5 \\ \hline x & x^2 & 5x \\ \hline 5 & 5x & 25 \end{array}$ $(x-5)^2 = (x-5)(x-5)$ $= x^2 \underbrace{- 5x - 5x}_{} + 25$ $= x^2 - 10x + 25$	Apresentação dos conteúdos	FLUÊNCIA MATEMÁTICA
DC01	Ao final, foram indicados os exercícios 9 até 19 da lista a serem feitos.	Tarefas dos alunos	FLUÊNCIA MATEMÁTICA

DC02	Com a lista dada pela professora em mãos, foi anunciado que eles iriam estudar trinômios quadrados perfeitos. Seguiu então a correção da tarefa de casa, dos itens 9 ao 19. Na cor branca, alunos e professora foram interagindo. 9) x^2+4x+4 10) $x^2+8x+81$ 11) x^2-2x+1 12) $x^2+5x+\frac{25}{4}$ Assim, se prosseguiu sobre módulo. 14) $\|3x+5\|=2$ $\vdots$ $x=-7/3$ $x=-2\frac{1}{3}$ 15) $\|3x\|+5=2$ $\|3x\|=-3$	Correção dos exercícios	FLUÊNCIA MATEMÁTICA
DC02	Por fim, foi citada a fatoração como a "transformação de um número em multiplicação" e a solução de um exercício que começou com a professora, passou por um aluno indo à lousa e terminou com a apresentação da soma e produto como procedimento para resolver equações de 2° grau.	Correção dos exercícios Apresentação dos conteúdos	FLUÊNCIA MATEMÁTICA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
DC04	Foi dito que a Época seria dividida entre um bloco de álgebra e outro de provas matemáticas, onde eles vão "desenvolver o pensamento dos matemáticos", citando a soma dos ângulos internos dos triângulos.	Início da aula Desenvolvimento do conteúdo	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

DC04-DC06	Discutiram começar a aula virtual mais tarde *(que o horário da aula presencial)* e a estrutura da avaliação da Época. Ficou estabelecido o sábado avaliativo + caderno + listas. Uma aluna explicou a outra no caderno ou material de consulta “vai destacando algumas coisas e criamos um material de consulta, onde a gente quiser, pode ser no caderno ou na folha. A gente anota o que é importante a gente lembrar”. A professora planejou corrigir uma lista por semana. Os pesos não ficaram definidos. Na lousa digital do Zoom, foi feito um “resumão” a ser colocado no material de consulta.  Todos já estavam sem câmera e a professora falou “não sei de onde vem a palavra notável”.  Com isso, os alunos ficaram com dúvidas que foram sendo explicadas pela docente e pelos próprios alunos entre si. Com novos desenhos de quadrados utilizando cores diversas do recurso da lousa digital, foram dados exemplos numéricos. $= 4^2 = 16$ $(10-6)^2 = 100 - 2.10.6 + 36$ $100 - 60 - 60 = -20$ $+36$ 16 Com isso, descobri o “porque menos com menos dá mais”. Isso se dá pelo fato de $x^2 - xy - xy = x^2 - 2xy$ e, assim, $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$.	Apresentação dos conteúdos	FLUÊNCIA MATEMÁTICA



Produto da soma pela diferença

$$(x+y)(x-y) = x^2 + xy - xy - y^2$$

Pedindo para eles fazerem a distributiva acima e retornando para anotá-la, a professora disse que "todo mundo anotou? Posso apagar? Lembrando que vai no material de consulta".
No número 1 da lista 4, já iniciada nas aulas Avulsas, foi feita pela professora na lousa.

1) $x^2 + 8x - 20 = 0$

$x^2 + 8x = 20 \longrightarrow 8 : 2 = 4$

$x^2 + 8x + 16 = 36 \qquad 4^2 = 16$

	x	4
x	x^2	4x
4	4x	16

$(x+4)^2 = 36$

$x + 4 = 6 \qquad x + 4 = -6$

$x = 2 \qquad x = -10$

$2^2 + 8.2 - 20 = 0$

$4 + 16 - 20 = 0$

<table>
<tr>
<td>DC06</td>
<td>Às 8:47, os alunos fizeram grupos. Observei um deles e notei erros procedimentais em uma questão que, curiosamente, foi feita certa depois. Na lousa deles,

$x^2 - 4x = 32$
$x^2 - 4x + 4 = 36$
$(x - 4)^2 = 36$

$x^2 + 6x + 9 = 12$
$(x + 3)^2 = 12$

Ao chegarem no resultado $x = \sqrt{12} - 13$ ou $x = -\sqrt{12} - 13$, perguntei se eles sabiam fazer a prova real da resposta e eles sinalizaram que arredondariam o $\sqrt{12}$ e fariam na calculadora. Na 4, havia de $x^2 + 3x - 28 = 0$. Uma aluna sinalizou que sabia fazer por Báskara, mas ela sabia que não era o que a professora queria. Afinal, ela havia mostrado outro procedimento e, tecnicamente, não foi abordado Báskara ainda. Nisso, outro aluno sugeriu fazerem por frações, que deveria ser isso que ela queria na sequência.

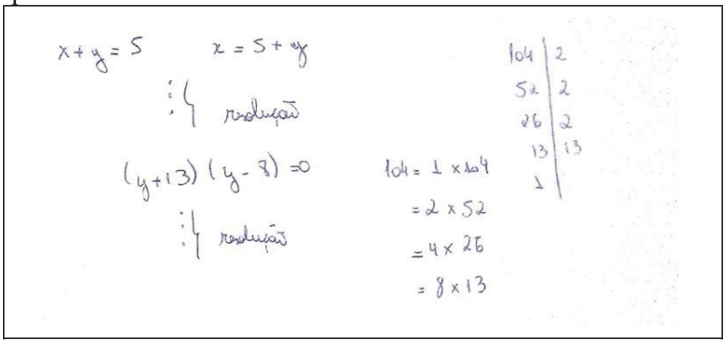
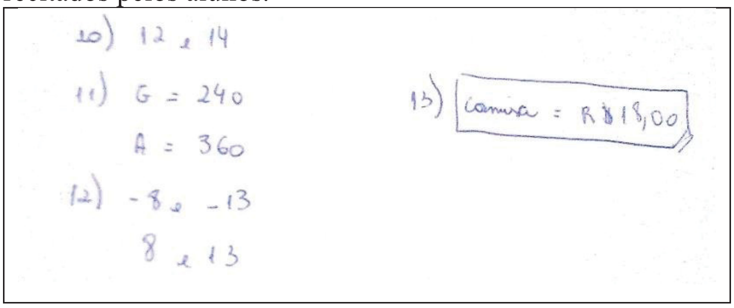
$x^2 + 3x + 9/4 = 121/4$
$(x + 3/2)^2 = 121/4$
$(x + 3/2) = 11/2$
$x = -7$ ou $x = 4$

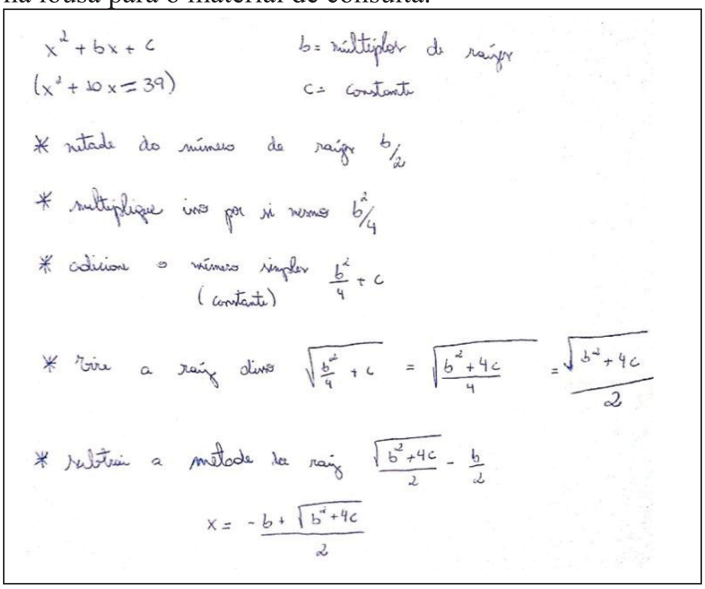
É curioso notar que, a partir do que a professora escreveu, notei um padrão no modo de escrever a resolução, do tipo

$ax^2 + bx + c = 0$
$ax^2 + bx = -c$
$ax^2 + b/2\,x + (b/2)^2 = -c + (b/2)^2$
$(a + b/2\,x)^2 = -c + (b/2)^2$
$x =$ ou $x =$

A resposta da 4 foi conferida pela aluna que sabia Báskara e o fez. Eles conferiram a resposta por ela.</td>
<td>Tarefas dos alunos</td>
<td>FLUÊNCIA MATEMÁTICA</td>
</tr>
<tr>
<td>DC06</td>
<td>De volta à sala principal, a professora sinalizou fazerem os exercícios 6 até 9 em casa, que consistiam em isolarem o x.</td>
<td>Correção dos exercícios</td>
<td>FLUÊNCIA MATEMÁTICA</td>
</tr>
</table>

DC07	Uma aluna fez a **retrospectiva** e falou dos métodos de fatoração, de completar quadrado e completar quadrado com a fatoração para o material de consulta. Ontem eles também corrigiram os exercícios de 1 a 5 da lista. Havia a tarefa de 7 até 9 para corrigir. Listas foram entregues. Foram corrigidos os itens, com alunos indo à lousa digital, inclusive.	Início da aula Correção dos exercícios	FLUÊNCIA MATEMÁTICA
DC07	Disso, um aluno escolheu o exercício 14 dissertativo para fazerem como exemplo para os exercícios 10 até 13. Nesta parte, muitos se juntaram à discussão de como fazia o sistema de equações. $14)\begin{cases} c = 2B + 10 \\ c + 2 = 3B \end{cases}$ $14)\begin{cases} c = 2B + 10 \\ c + 2 = 3(B+2) \end{cases}$ Neste momento, a professora me digitou no chat privado “parte mais linda da aula”. De fato, já havia notado o quanto eles colaboram entre si.	Apresentação dos conteúdos	FLUÊNCIA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
DC07-DC08	Por volta das 8:15 eles foram enviados aos quartos. Passei por vários grupos (3) e poucas interações entre os alunos. Percebi que as salas eram os melhores momentos de eu interagir com os alunos e nem a sala era tão propícia assim para tais observações. Em um grupo que passei, vi eles pulando lista e fazendo outras adiantadas. Eles completavam quadrados nos exercícios e percebi que colocavam a resposta de modo incompleto devido ao recurso digital. $X + 3/2 = R\,29/2$ $X = R\,29 - 3/2$	Tarefa dos alunos	FLUÊNCIA MATEMÁTICA

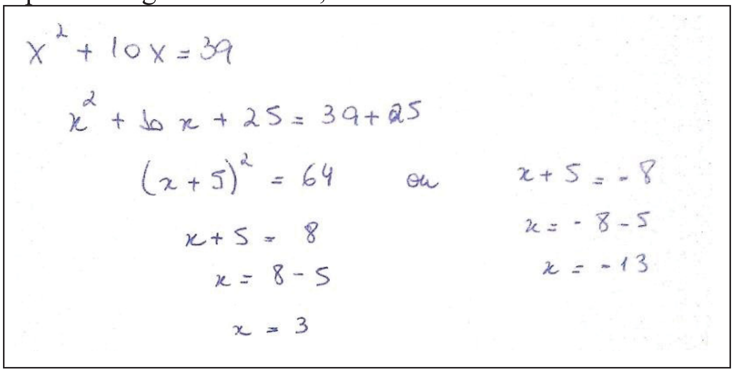
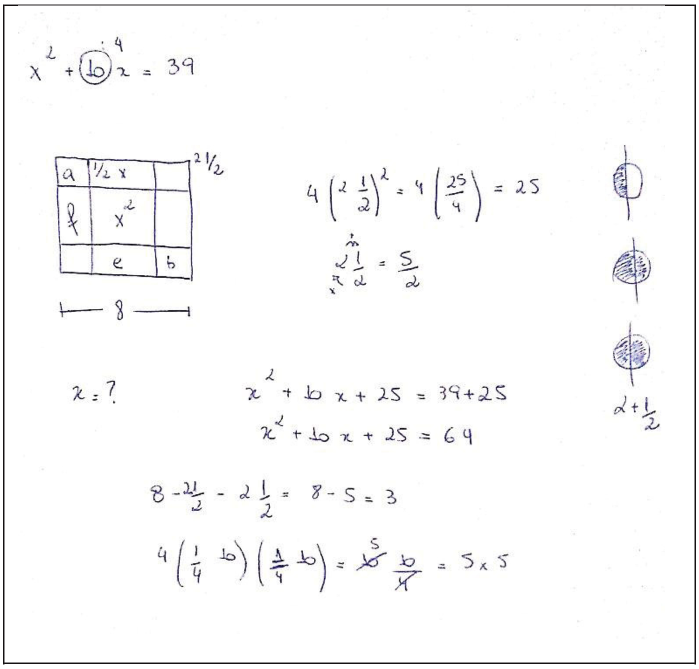
<table>
<tr>
<td></td>
<td>Voltei a outro grupo e a professora fazia uma das questões com as alunas.

$x + y = 5$ $x = 5 + y$
⋮ resolução
$(y+13)(y-8)=0$
⋮ resolução
$104 = 1 \times 104$
$= 2 \times 52$
$= 4 \times 26$
$= 8 \times 13$
104 | 2
52 | 2
26 | 2
13 | 13
1</td>
<td></td>
<td>RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS</td>
</tr>
<tr>
<td>DC08</td>
<td>Para o dia seguinte, deveriam terminar as questões. Para a tarde, eles iriam ler as novas listas. Foi combinado o horário do plantão para sexta às 15:30. Os gabaritos de hoje foram recitados pelos alunos.

10) 12 e 14
11) G = 240
A = 360
12) −8 e −13
8 e 13
13) $\boxed{\text{camisa} = \text{R\$ } 18{,}00}$</td>
<td>Correção dos exercícios</td>
<td>FLUÊNCIA MATEMÁTICA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS</td>
</tr>
<tr>
<td>DC09</td>
<td>Na lousa estavam contidos os passos para descobrir a “fórmula de x em termos de b e c” e que resultava na Fórmula de Bhaskara.
Eles já haviam lido as listas 5 e 6 anteriormente e nesta aula continuaram a lista 6. Em interação com os alunos, foi passado na lousa para o material de consulta.

$x^2 + bx + c$ b = multiplos de raízes
$(x^2 + 10x = 39)$ c = constante
* metade do número de raízes $b/2$
* multiplique isso por si mesmo $b^2/4$
* adicione o número simples (constante) $\frac{b^2}{4} + c$
* tire a raiz disso $\sqrt{\frac{b^2}{4} + c} = \sqrt{\frac{b^2+4c}{4}} = \frac{\sqrt{b^2+4c}}{2}$
* subtraia a metade da raiz $\frac{\sqrt{b^2+4c}}{2} - \frac{b}{2}$
$x = \frac{-b + \sqrt{b^2+4c}}{2}$

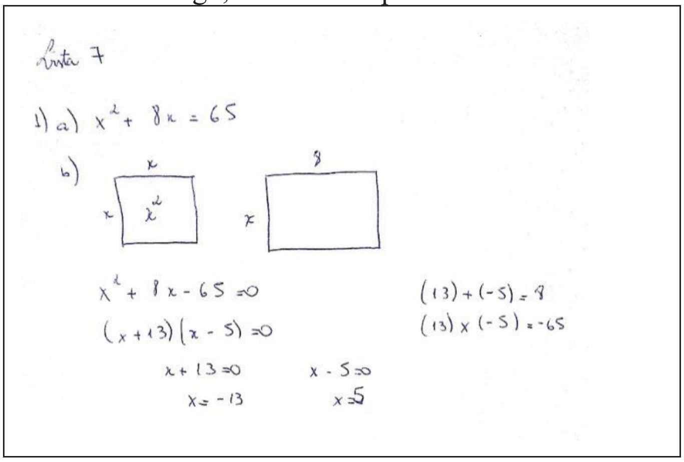
A professora ressaltou que o “a” foi retirado pois se tratava de uma equação reduzida.</td>
<td>Apresentação dos conteúdos</td>
<td>HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

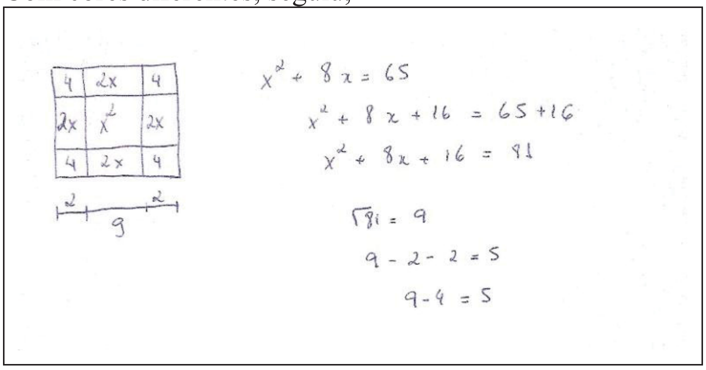
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS</td>
</tr>
</table>

DC10	Deu-se sequência então para os alunos fazerem o resto da lista 6 para entregá-la. Na lousa, foi feito um exercício.  	Tarefa dos alunos	RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA FLUÊNCIA MATEMÁTICA
DC10	Enquanto os alunos faziam as listas, conversamos sobre os livros Waldorf trazerem bastante a história da matemática e ela disse que "traz o que é feito pelo homem". Antes, ela fazia apenas a introdução algébrica de Báskara e hoje ela inclui a geometria também.	Conversa informal	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS
DC11	Após darem continuidade na leitura de Agatha Christie, por volta das 8:20, A professora perguntou se queriam fazer exercícios ou tentarem engatar a leitura da lista 7. Assim, seguiram a lista 7. Conforme liam o texto em voz alta, rabiscos e esquemas iam sendo passados na lousa. 	Início da aula Apresentação dos conteúdos	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...
DC11	Por volta das 8:40, os alunos começaram a voltar para os exercícios. Enquanto a docente auxiliava um grupo de alunos na mesa do meio, andei pelas mesas e notei uma dupla fazendo a lista 10 e deixando as contas no caderno e o resultado final na lista de papel.	Tarefa dos alunos	FLUÊNCIA MATEMÁTICA

<table>
<tr>
<td>DC12</td>
<td>Foi orientado que entregariam a lista 6 neste dia e a lista 7 futuramente. Logo, deveriam copiar o exercício a ser feito.



A docente citou que eles estavam vendo vários métodos de “como foi desenvolvido na humanidade para resolver um mesmo problema”.
Com cores diferentes, seguiu,

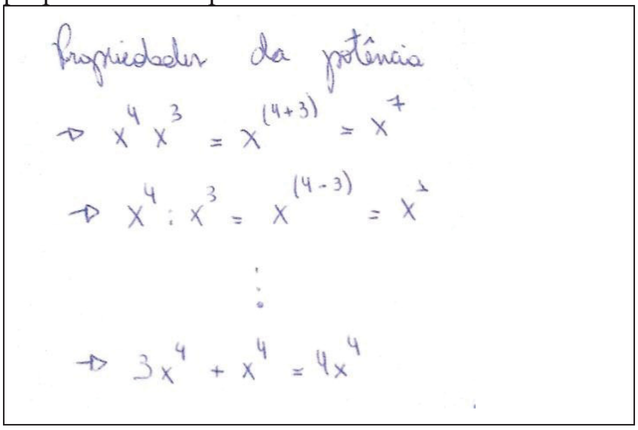
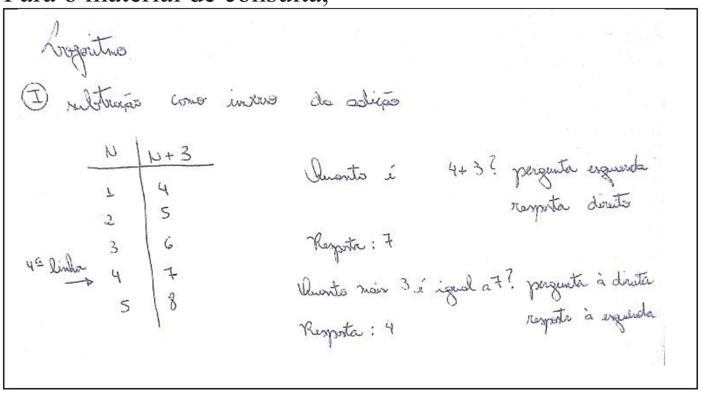


Um aluno perguntou como deveriam responder a questão no *Classroom* e a professora circulou na tela toda esta parte que coloquei acima.</td>
<td>Apresentação dos conteúdos</td>
<td>HISTÓRIA DA MATEMÁTICA

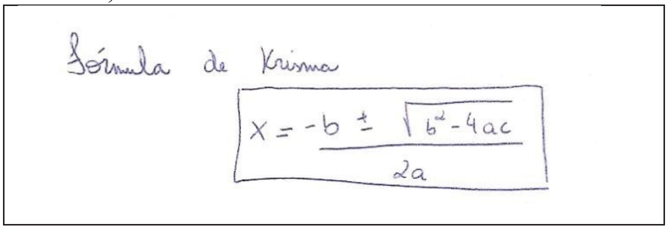
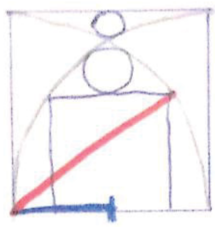
RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS</td>
</tr>
<tr>
<td>DC12</td>
<td>Depois de terminarem a 2) c), foram separados os quartos e grupos de alunos. Eles deveriam continuar nas listas.
Nos grupos, presenciei alunos tentando identificar onde haviam começado a ver a fórmula de Báskara. Havia frases como “a gente começou a ver essa fórmula na lista 5, questão 1, e na 6. Então é daí pra frente”.
A dupla de alunos mais adiantada estava fazendo a lista 11 e só colocavam a resposta final na tela projetada.</td>
<td>Tarefa dos alunos</td>
<td>FLUÊNCIA MATEMÁTICA</td>
</tr>
<tr>
<td>DC12-DC13</td>
<td>De volta a sala comum, a questão 5 foi feita e, depois, a questão 1 da lista 6.</td>
<td>Correção dos exercícios</td>
<td>FLUÊNCIA MATEMÁTICA</td>
</tr>
</table>

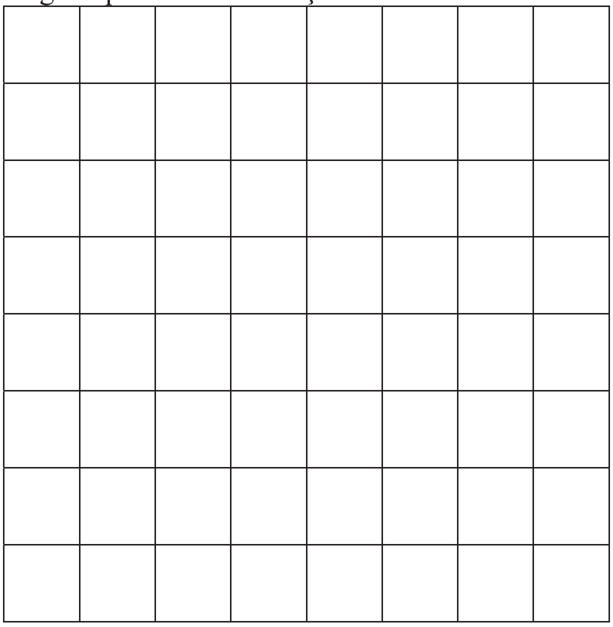
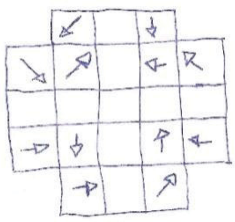
	5) $-c+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\frac{b}{2}=0$ $\vdots$ $=\sqrt{\frac{-4c+b^2}{4}}-\frac{b}{2}$ $\boxed{=\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}}$ lista 6 questão 1 ↳ $x^2+bx=c \longrightarrow \frac{-b+\sqrt{b^2+4c}}{2}$ $x^2+bx+c=0$ ↳ $x^2+bx-c=0 \qquad \frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2}$ Foi dito que ainda faltava “a” na fórmula e que veriam esta nova fórmula com ”a” no dia seguinte.		RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA HISTÓRIA DA MATEMÁTICA
DC14	Na lousa, Fórmula de Krisma $\boxed{x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$ Descobri, em conversa informal, que no dia anterior eles haviam lido “O homem que calculava”, de Malba Tahan, na sala e haviam apelidado a fórmula com tal nome. Houve uma breve retrospectiva do dia anterior, em que leram a Agatha Christie, fizeram questões para o material de consulta e descobriram a fórmula “com letras, sem números”. Eles me perguntaram se eu já havia utilizado Baskara para algo útil e eu disse que não lembrava, somente em casos ideais da Física ou de custos e lucro. Uma aluna disse que não é tão prático, mas serve para desenvolvermos outras coisas em nós.	Apresentação dos conteúdos na aula de Época do 10° ano	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...
DC14	Partindo para a lista 8, a professora começou a engatar pelo exercício mais difícil. Ela perguntava “Como Alkarism redigira esse problema?”. Tendo resolvido os exercícios 3ª, b e c, disse que era para entregarem a lista 8 menos o exercício 5.	Apresentação dos conteúdos Tarefa dos alunos	HISTÓRIA DA MATEMÁTICA FLUÊNCIA MATEMÁTICA

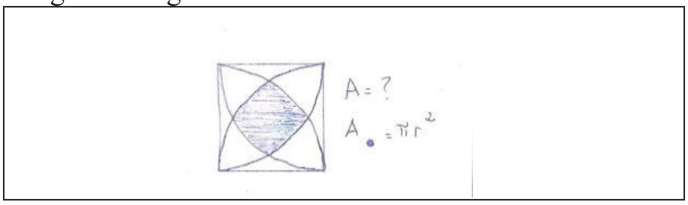
DC15-DC16	Nisso, ela pediu para verificarem as atividades e notas postadas e corrigidas no *Classroom*. Eram três listas e mais a lista 8 que deveria ser entregue ainda naquele dia. Os alunos então deveriam identificar os erros e corrigirem eles nas salas. Para começar, a professora corrigiu 2 exercícios “simples, mas que vários erraram”. Alunos ditavam os passos da correção. 8) $ax - b^2 = d$ $ax = d + b^2$ $x = \frac{d + b^2}{a}$ 9) $a(x+b) = c$ $ax + ab = c$ $ax = c - ab$ $x = \frac{c - ab}{a}$ $x = \frac{c}{a} - \frac{ab}{a}$ $\boxed{x = \frac{c}{a} - b}$ A professora foi perguntada se $x = \frac{c}{a} - \frac{ab}{a}$ está errado e ela disse que “tá deselegante, mas não tá errado” e então fez de outra forma. $a(x+b) = c$ $x + b = \frac{c}{a}$ $\boxed{x = \frac{c}{a} - b}$	Correção dos exercícios	INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS FLUÊNCIA MATEMÁTICA
DC16	Quem já tivesse terminado a correção, poderia seguir nas listas seguintes. Algumas atividades seriam selecionadas para serem entregues ainda nesta semana no *Classroom*.	Tarefa dos alunos	FLUÊNCIA MATEMÁTICA
DC16	Nos 20 minutos finais, a docente decidiu fazer as mais difíceis com eles. Ela desfez os grupos. Era o exercício 2 da lista 10 em que eles deveriam resolver $6x^2 + 7x - 100 = 0$ por fatoração, completando quadrado e por Báskara. Os alunos interagiam com a professora. Nestes momentos, foi pulado o método de completar quadrado por questão de tempo e foi pedido aos alunos para tirarem print para copiarem pois teria que entregar os exercícios.	Correção dos exercícios	FLUÊNCIA MATEMÁTICA

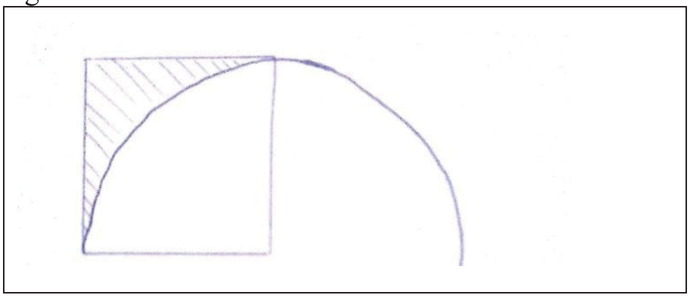
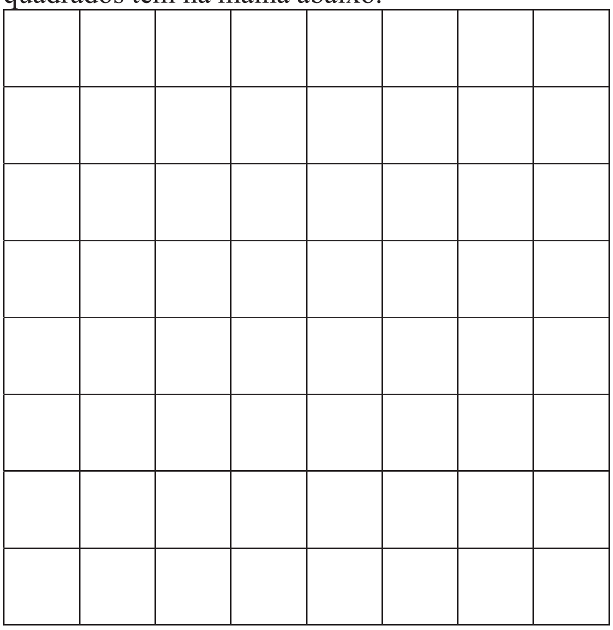
	No final da aula, foi dito que continuariam as listas no dia seguinte e que sexta teria conteúdo novo. Por *whatsapp*, a docente disse que eles precisavam de exercitação de algo que eles ainda não viram, que é logaritmo. Assim, ela mudou de ideia sobre as demonstrações.		
DC17-DC18	Para o material de consulta, a professora fez uma revisão das propriedades das potências.  	Apresentação dos conteúdos	INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA FLUÊNCIA MATEMÁTICA
DC18	Depois da revisão com exemplos, foi decidido que os alunos terminariam as listas 12 ou 13 de equação do 2° grau ou já avançariam em log com a lista passada para eles. Os alunos iam fazendo, sozinhos ou em grupos, e eu ia andando pela sala com a professora. Alguns faziam as listas 12 ou 13 e outros, a de log.	Tarefa dos alunos	FLUÊNCIA MATEMÁTICA
DC19-DC20	Para o material de consulta,  Foi dada continuidade então para II) divisão como inverso da multiplicação; III) raíz como inverso da potência; IV) logaritmo como inverso da potência. Nos exemplos, faziam a tabela e formulavam e respondiam às 2 perguntas, sempre com relação à 4ª linha.	Apresentação dos conteúdos	INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA
DC20	Em seguida, foi reservado tempo para fazerem da 44 até a 57 da lista de logaritmo. Faltando 10 minutos, foi feita a 58 na lousa pela professora.	Tarefa dos alunos Correção dos exercícios	FLUÊNCIA MATEMÁTICA

DC21	Foram feitas as questões abaixo para o caderno da Época e explicado, através destes exercícios, os procedimentos. 72) $\log_5 (1/25) = x$ 77) $\log_{125} 5 = x$	Apresentação dos conteúdos	FLUÊNCIA MATEMÁTICA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA
DC21	Seguiu o restante da aula os alunos fazendo as listas em grupos, cada um em seu tempo e com a professora e eu auxiliando. Uns faziam direto na lista, outros em cadernos diferentes, ou ainda no de Época.	Tarefa dos alunos	FLUÊNCIA MATEMÁTICA
DC23	Por volta das 8:20, após várias rodadas de adivinhação das histórias, foram feitos os exercícios 41) e 42) sobre notação científica. No 41), foi retomado o modelo de escrita da notação e adicionado, como curiosidade, a número $(10)^{100}$, chamado Gugol.	Apresentação dos conteúdos	FLUÊNCIA MATEMÁTICA INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA
DC23	Para segunda, os alunos deveriam entregar a lista 2 e o material de consulta.	Tarefa dos alunos	FLUÊNCIA MATEMÁTICA
DC04	No dia 30/08, no virtual, foi aberta a Época do 10° ano. Com 11 alunos, houve recitação do poema de Steiner. Estes alunos foram chegando aos poucos.	Leituras, enigmas e desafio matemáticos	PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...
DC07	No dia 01/09, após não ter ido à escola no dia 31/08, a aula virtual do 10° ano começou com o poema recitado por um aluno e a professora dizendo que iriam fazer desafios apenas no presencial.	Leituras, enigmas e desafio matemáticos	PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...
DC09	No dia 02/09, no 10° ano, houve transmissão da aula. Ao recitarem o poema de Steiner, novamente foi retomada a questão de trocar o “homem” por “humano”. Isso significaria quebrar tradições, “mas vocês que sabem”. E assim foi feito. Então recebi um caderno em espiral que era a impressão do livro “Testemunha de Acusação”, da Agatha Christie. Durante cerca de meia hora, cada aluno lia as falas de um personagem e, assim, terminaram o 1° ato neste dia.	Leituras, enigmas e desafio matemáticos	PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...
DC11	No dia 03/09, no 10° ano, houve transmissão da aula. Após darem continuidade na leitura de Agatha Christie, por volta das 8:20, a docente perguntou se queriam fazer exercícios ou tentarem engatar a leitura da lista 7.	Leituras, enigmas e desafio matemáticos	PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...
DC11	Perguntei à professora sobre o livro e ela disse que era para desenvolver o julgamento deles.	Conversa informal	PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...

DC14	No dia 10/09, na aula do 10° ano, foi terminada a leitura do livro da Agatha Christie. Apesar de ainda faltar uma cena para terminar, a professora cedeu e decidiu terminar o livro ainda na sexta. Após terminarem, foi dado 5 minutos de pausa e a docente me disse que um professor de matemática de outra escola Waldorf brasileira levava os alunos ao tribunal. Na lousa,  Descobri, em conversa informal, que no dia anterior eles haviam lido “O homem que calculava”, de Malba Tahan, na sala e haviam apelidado a fórmula com tal nome. Houve uma breve retrospectiva do dia anterior, em que leram a Agatha Christie, fizeram questões para o material de consulta e descobriram a fórmula “com letras, sem números”.	Leituras, enigmas e desafio matemáticos	PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...
DC15	No dia 15/09, em aula virtual com o 10° ano, foi recitado o verso com as palavras fauna e flora. A professora perguntou se o enigma de ontem foi difícil e assim introduziu um novo, dizendo que este eles poderiam terminar quando, mas que era tão difícil quanto o anterior. Em uma foto projetada no Zoom, Nesse desenho, o lado do quadrado maior tem o comprimento igual a 1 e os dois arcos têm o tamanho de 1 quarto de círculo. Encontre o comprimento do lado do quadrado menor e o raio dos dois círculos.  Comecei a me envolver com o problema e logo foi dada a dica de que daria para resolver com o Teorema de Pitágoras. Logo cheguei no raio da circunferência superior. Tempos depois, ela deu outras duas dicas, tracejando as linhas coloridas acima. Com isso, os alunos mandavam a resposta pelo *whatsapp* e ela já dizia se estava correto ou não. Uma aluna, por exemplo, foi encorajada a continuar no seu roteiro para chegar na resposta. Notei que a professora sinalizava ser necessário chegar primeiro no valor do quadrado, o que não foi o meu caso e, acredito eu, dessa aluna acima. Outros disseram que haviam chegado numa resposta deselegante e não sabiam se estavam errados. Por volta das 8: 20, o enigma foi deixado para o dia seguinte.	Leituras, enigmas e desafio matemáticos	PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...

DC17	No dia 16/09, no 10° ano, a turma recitou o poema de trás para frente como sugestão dos alunos. Na lousa, foi passado um enigma que haviam começado no dia anterior.  Neste tabuleiro 8x8, deveriam colocar 8 rainhas de modo que elas não se comessem. Um enigma dito como mais fácil foi passado como sugestão também.  Neste, deveriam caminhar por toda a malha colocando setas nos lugares em branco. Ao final do percurso, deveria ter passado apenas 1 vez em cada lugar e ter chegado ao ponto inicial.	Leituras, enigmas e desafio matemáticos	PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...
DC18	No intervalo, a professora disse que o enigma não conta ponta e ela os deixa fazerem. Para a avaliação, conta mais as listas, o caderno, a prova do sábado avaliativo e a participação na aula, as entregas.	Conversa informal	PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...

<table>
<tr>
<td>DC19</td>
<td>No dia 21/09, no 10° ano, após recitarem o poema, foi passado o seguinte enigma.


Conforme eu fazia o desafio e os alunos também, foram dadas as dicas e sugestões como descobrir a área hachurada e brincar com a geometria mais do que com a álgebra.
</td>
<td>Leituras, enigmas e desafio matemáticos</td>
<td>PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...</td>
</tr>
<tr>
<td>DC21</td>
<td>No dia 23/09, no 10° ano, a filha da professora estava dedilhando violão no início da aula. Assim, fizeram o poema de trás para a frente e, em seguida, foi perguntado quantos quadrados tem na malha abaixo.


Os alunos estavam sentados em duplas nas mesas e duas duplas descobriram um padrão e chegaram na resposta. A docente perguntou quem queria ir à lousa e uma aluna foi explicar o raciocínio dos colegas, desenhando na malha e fazendo contas na lousa.</td>
<td>Leituras, enigmas e desafio matemáticos</td>
<td>PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...</td>
</tr>
</table>

DC21	Foram feitos 10 minutos de cálculo mental com eles e foi fazendo perguntas simples como $(11)^2$, $(13-24)$, $(13\%\ de\ 4)$, (3^6). Quem soubesse a resposta deveria levantar a mão para responder.		PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...
DC23	No 10° ano, foi recitado o poema e realizado vários enigmas do tipo "sim, não e irrelevante". Alguns deles, já eram conhecidos por alguns alunos e outros não. Dentre eles, havia "Um homem dirige, passa o sinal verde, atropela um ciclista e o passageiro é preso" e "A mulher matou seu gato tentando ajudá-lo."	Leituras, enigmas e desafio matemáticos	PARA ALÉM DA MATEMÁTICA CONVENCIONAL ...