UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

JOÃO LUCAS ESPÍNDOLA MAHLMANN

CONTAGEM DE SOLUÇÕES INTEIRAS DE EQUAÇÕES LINEARES DE COEFICIENTES UNITÁRIOS

CURITIBA

2021

JOÃO LUCAS ESPÍNDOLA MAHLMANN

CONTAGEM DE SOLUÇÕES INTEIRAS DE EQUAÇÕES LINEARES DE COEFICIENTES UNITÁRIOS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná, como exigência parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, Setor de Exatas da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Luiz Antônio Ribeiro Santana, DMAT

CURITIBA

2021

TERMO DE APROVAÇÃO

JOÃO LUCAS ESPÍNDOLA MAHLMANN

CONTAGEM DE SOLUÇÕES INTEIRAS DE EQUAÇÕES LINEARES DE COEFICIENTES UNITÁRIOS

Trabalho de Conclusão de Curso de Graduação em Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Paraná, como exigência parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, Setor de Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Luiz Antônio Ribeiro Santana, DMAT
Orientador

Cristian Schmidt
PUCPR

Curitiba, 22 de Dezembro de 2021 .

Dedico este trabalho a Bruno Cláudio Espíndola e Maria Christina Espíndola, meu avô e minha mãe; ao meu tio Jorge; e à Belinha, minha companheira de quatro patas que deixou nosso plano neste ano.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a meu avô, por ter feito de tudo para que eu tivesse a melhor educação na ausência de meu pai e por ter me permitido estar aqui hoje

Agradeço à minha mãe, por ter dado continuidade ao que seu pai começou, me fornecendo as melhores oportunidades e me apoiando em todas as minhas decisões, por mais arriscadas e sem sentido que pudessem ser

Agradeço aos todos os meus amigos que, com sua companhia e amizade, me ajudaram a continuar em frente, mas, especialmente: Nathaly, que sempre esteve como companhia nas disciplinas, trabalhos e me dando suporte sempre que necessário; Camila, que com vários almoços e jantas me fez, muitas vezes, esquecer dos meus problemas e de momentos ruins e estressantes da faculdade; e também à Amanda, que foi sempre uma companhia importante e alguém por quem tenho muito carinho. Todas estiveram comigo sempre que possível, nos altos e baixos, tornando os últimos anos mais alegres.

Agradeço ao professor Luiz Antônio, “Luizão”, por ter me acolhido desde o início da faculdade, mesmo sem ter sido meu professor diretamente e, principalmente, por ter aceitado orientar este trabalho em um momento em que estava perdido, me dando a força que eu precisava para encerrar este ciclo.

Agradeço à UFPR e ao DMAT que me permitiram uma boa formação e me proporcionaram a oportunidade de conhecer pessoas incríveis, mesmo que também tenha conhecido certas pessoas desagradáveis.

Agradeço à minha equipe, *Team Execution* e à minha comunidade na *Twitch*, por me ajudarem a encontrar um caminho e motivação em momentos que me faltava, o que indiretamente me deu forças para realizar este trabalho para que possa me dedicar completamente a isso no futuro.

Por fim, agradeço ao Dr. Cristian Schmidt por aceitar fazer parte da banca da minha defesa, me permitindo encerrar essa etapa.

Fazer o que você gosta é liberdade. Gostar do que você faz é felicidade. (Frank Tyger)

RESUMO

Equações lineares, sobretudo as de primeiro grau, são corriqueiras ao longo dos anos de estudo, desde o Ensino Fundamental ao Ensino Superior, e não apenas em Matemática, mas também em Física e Química. No entanto, em todas essas ocasiões, a prioridade, quando se fala em equações lineares, são suas soluções de maneira qualitativa, ou seja, quais são. Nesse trabalho abordamos esse assunto de maneira quantitativa, contando as soluções de equações lineares (no caso, as de coeficientes unitários), com diversas condições. Ao final, percebemos que esse cálculo nada mais é do que uma aplicação de alguns conceitos de contagem e combinatória, se mostrando um exemplo bem interessante da área.

Palavras-chave: Contagem;Equações lineares; Soluções de equações lineares.

ABSTRACT

Linear equations, mainly those of first degree, are commonplace in the years of study, since elementary school all the way to the University, and not only in Mathematics, but also in Physics and Chemistry. Nonetheless, in all those instances, the priority when talking about linear equations are the qualitative aspects of it. In other words, what are these solutions. In this work we approach this subject in a quantitative way, counting the solutions of linear equations (in this case, those with unit coefficients), with various conditions applied. At the end, we realize this procces is nothing more than an application of some basic concepts of combinatorics, showing itself as a really interesting example of the subject.

Key-words: Combinatorics. Linear equations. Linear equations solutions.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O trabalho com equações lineares é comum durante todo o estudo da matemática, desde o Ensino Fundamental, até o Ensino Superior, sendo uma ferramenta extremamente importante para diversos ramos da área como Cálculo e Álgebra, e ramos do conhecimento externos à mesma, como Física e Química. No entanto, a abordagem desse conteúdo é sempre focada em quais são e como calcular as soluções dessas equações, em todas as suas formas e graus. Neste trabalho, damos um enfoque diferente a essas equações: a contagem de suas soluções. Ao realizarmos essa análise quantitativa das soluções de equações lineares de coeficientes unitários, vemos que esse problema nada mais é do que um problema de contagem que pode ser resolvido com ferramentas básicas dessa área da matemática, bem como com algumas noções simples de expansão de séries. Trabalhamos ao todo com quatro tipos de problemas, além de dois extras, sendo um deles caso especial de um dos quatro, e outro que se reduz, fundamentalmente, a esse caso especial. Por fim, fazemos um comentário sobre outros possíveis problemas que não foram abordados por não serem úteis ou serem análogos aos que estudamos durante o trabalho.

A motivação principal desse trabalho é o artigo "*Counting the Integer Solutions of a Linear Equation With Unit Coefficients*" (MURTY, 1981). Para apresentarmos alguns conceitos básicos de contagem e combinatória, bem como noções sobre funções geradoras, usamos como base o livro "Introdução à Análise Combinatória" (SANTOS et al., 2007) e o livro "Prelúdio à Análise Combinatória" (TAVARES et al., 1975). Ainda, como material de apoio para algumas definições na seção sobre funções geradoras, usamos o livro "*Introduction to Real Analysis*" (BARTLE; SHERBERT, 2000) e um arquivo com notas de aula sobre o assunto no MIT (GOEMANS, 2015).

No primeiro capítulo, apresentamos ao leitor conceitos de contagem, como princípio multiplicativo e aditivo, e alguns conceitos de combinatória como permutação, arranjo e combinação. Além disso, na seção final, falamos sobre funções geradoras de sequências. Os conceitos dessa sessão são essenciais para que o assunto principal do trabalho, a ser discutido no capítulo seguinte, seja compreendido, além de servir como um bom resumo sobre contagem e combinatória para quem quiser estudá-lo. Nesse capítulo, em suas duas primeiras seções, seguimos fielmente a ordem do capítulo 2 de (SANTOS et al., 2007), enquanto que a última seção segue o capítulo 5. O restante da literatura citada serve de apoio para algumas definições que não estavam suficientemente claras no livro de Santos et al. (2007)

Já no segundo capítulo, abordamos diretamente a contagem de soluções de equações lineares de coeficientes unitários. Começamos definindo essas equações e, em seguida, abordamos cada problema apresentado em (MURTY, 1981), na mesma ordem do artigo, apresentando primeiro uma visão mais simples como a mostrada em (SANTOS et al., 2007), que usa diretamente contagem e combinatória e, posteriormente, tratamos do mesmo problema da maneira que Murty faz em seu artigo, porém com mais detalhes, ajudando o leitor a compreender melhor alguns passos que o autor oculta. Para os problemas apresentados no texto de Murty que não são abordados no livro de Santos, tentamos fazer uma abordagem inicial análoga à que o autor fez para os outros casos para, em seguida, tratarmos da abordagem de Murty. A penúltima seção traz alguns casos citados como exemplos motivadores no capítulo 5 de (SANTOS et al., 2007) sobre funções geradoras, mas que são relacionados ao tema do trabalho, portanto nos são interessantes. Por fim, na última seção, fazemos uma breve discussão sobre outros casos que não foram trabalhados no texto, justificando sua ausência.

No último capítulo, fazemos as considerações finais do trabalho, relatando quais foram os resultados que atingimos, o que mais poderia ser feito e estimulando, eventualmente, que esse trabalho seja estendido futuramente para abordar alguns desses tópicos.

2 CONCEITOS INTRODUTÓRIOS

Neste capítulo trabalharemos alguns dos conceitos introdutórios de contagem e combinatória necessários para que possamos, de fato, resolver o problema proposto. Vale ressaltar que neste capítulo evitaremos ao máximo justificar o que está sendo mostrado, pois, em geral, são definições amplamente conhecidas e, acima de tudo, não são o foco deste trabalho.

2.1 PRINCÍPIOS BÁSICOS DA CONTAGEM

Nesta seção, definiremos os dois princípios básicos da contagem, extremamente importantes e necessários para o início de nosso estudo: o Princípio Aditivo e o Princípio Multiplicativo.

Definição 1 (Princípio aditivo)**.** Dados dois conjuntos A e B disjuntos (ou seja, $A \cap B = \emptyset$), com, respectivamente, p e q elementos, temos que $\#(A \cup B) = p + q$. Em linguagem combinatória: Se dois eventos distintos A e B puderem ocorrer, respectivamente, de p e q maneiras, então a quantidade de maneiras de ocorrer o evento união é $p + q$.

Definição 2 (Princípio Multiplicativo)**.** Dados dois conjuntos A e B, com, respectivamente, m e n elementos, temos que $\#(A \times B) = m \cdot n$. Em linguagem combinatória: Se um evento A pode ocorrer de m maneiras diferentes, e para cada uma dessas m vezes que A pode ocorrer, puder ocorrer um evento B de n maneiras, então a quantidade de maneiras de ocorrer o evento A seguido de B é $m \cdot n$.

Observação. O Princípio apresentado na definição 2 é também chamado em algumas referências de Princípio Fundamental da Contagem.

Observação. É comum se apresentar as definições anteriores por meio dos conectivos que as representam. No caso do Princípio Aditivo, costuma-se dizer que é representado pelo conectivo “ou”, ou seja, “A quantidade de maneiras de ocorrer A ou B”; Já para o Princípio Multiplicativo, é usado comumente o conectivo “e”, ou seja, “A quantidade de maneiras de ocorrer A e B”. Esse raciocínio nos é útil para entender em quais situações é aplicável cada princípio.

É claro de se ver que estas definições são um tanto quanto rasas, no sentido de que só as apresentamos para dois eventos. Apresentaremos a seguir as maneiras de se estender estes princípios para um número finito de eventos:

Definição 3. As definições a seguir se seguem das anteriores por indução:

- **Extensão do Princípio Aditivo:** Dados os conjuntos $A_i, i = 1, 2, \ldots, n$, disjuntos dois a dois (ou seja, $A_i \cap A_j = 0 \forall i, j$), tal que A_i tem cardinalidade $a_i, i = 1, 2, \ldots, n$, então, a cardinalidade de $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ é $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Em linguagem combinatória: Dados $A_i, i = 1, 2, \cdots, n$ eventos distintos dois a dois, ocorrendo de $a_i, i = 1, 2, \ldots, n$ maneiras, temos que o total de maneiras que pode ocorrer o evento união é $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

- **Extensão do Princípio Multiplicativo:** Dados os conjuntos $A_i, i = 1, 2, \ldots n$ tal que A_i tem cardinalidade $a_i, i = 1, 2, \ldots, n$ então a cardinalidade de $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ é $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n = \prod_{i=1}^{n} a_i$.Em linguagem combinatória: se um evento A_i pode ocorrer de m_i maneiras distintas, $i = 1, 2, \ldots, n$, então esses n eventos podem ocorrer, em sucessão, de $m_1 \cdot m_2 \cdot \cdots \cdot m_n$ maneiras.

Desta forma, dado qualquer número de eventos distintos, podemos aplicar qualquer um dos princípios que seja aplicável na situação problema.

Apesar destes princípios serem matematicamente simples, eles são necessários para desenvolver definições mais complexas no campo da combinatória, bem como fazem parte do raciocínio da resolução de uma parte considerável de problemas na área.

Para chegarmos no que desejamos, precisamos ainda definir certos conceitos de Combinatória.

2.2 CONCEITOS DE COMBINATÓRIA

Definiremos agora alguns conceitos que nos serão úteis no objetivo do trabalho, tais que são dependentes dos princípios apresentados na seção anterior. Estes são: permutação, arranjo e combinação.

Definição 4 (Permutações Simples)**.** Dados n objetos distintos, a permutação destes n objetos é qualquer agrupamento ordenado dos mesmos.

A quantidade de permutações de n objetos é representada por $P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$.

Observação. Definimos por convenção que $P_0 = 0! = 1$.

Trabalhamos com permutações quando temos apenas um grupo de objetos e queremos ordená-los, como por exemplo as letras de uma palavra ou as cadeiras de uma mesa. No entanto, na maioria dos problemas, nosso objetivo será pegar uma quantidade n de objetos e colocá-los em mais de um grupo e ordenar (ou não) os elementos nestes grupos. Vale ressaltar também que existem outros tipos de permutação, como a permutação com repetição, que apesar de interessante e útil em muitos contextos, não será útil em nosso trabalho. Portanto não definiremos.

Quando se tem a situação citada anteriormente, de vários objetos que queremos distribuir em grupos, o que irá diferenciar a ferramenta que utilizaremos é a importância da ordenação. Por exemplo, se queremos pegar um número n de estudantes e separá-los em duplas, a ordem interna destas duplas não importa, pois a dupla formada por João e Maria é a mesma dupla formada por Maria e João. Já se estamos sorteando estes mesmos n alunos para receber dois prêmios distintos da escola, selecionar João e depois Maria é completamente diferente de selecionar Maria e depois João.

Definimos, primeiramente, o conceito de arranjo simples:

Definição 5 (Arranjos Simples)**.** Definimos o arranjo de n elementos p a p, $p \leq n$, como todos os grupos distintos formados por p elementos distintos dentre estes n. Estes grupos são distintos pela natureza dos p elementos e pela ordem dos mesmos.

Denotaremos a quantidade de n elementos p a p como A_n^p.

Portanto, fazendo analogia ao exemplo anterior, se tivermos uma turma com n alunos e tivéssemos que sortear p destes alunos para receber prêmios distintos, teríamos que fazer um arranjo de n, p a p, ou seja, A_p^n. No entanto, não nos basta saber o signficado matemático desta expressão. Precisamos também de um valor para representar o total de grupos distintos que podemos formar.

Teorema 2.2.1. *O número de arranjos simples de n, p a p é dado por $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$.*

Demonstração. Para esta demonstração, usaremos o Princípio Multiplicativo. Note que, escolher p elementos dentre n é equivalente a preencher p espaços com n objetos. Pela lógica, o primeiro espaço pode ser preenchido de n maneiras diferentes, pois qualquer objeto pode ser escolhido.

Uma vez escolhido o primeiro espaço, teremos $n-1$ objetos para ocupar o segundo espaço, pois não há nenhuma reposição. Seguindo este raciocínio sucessivamente, obteremos que o p-ésimo espaço poderá ser preenchido com $(n-p-1)$ objetos.

Note agora que estamos escolhendo o objeto do primeiro espaço e a partir desta escolha, escolhendo o do segundo espaço, e em seguida fazendo as outras escolhas, sempre dependendo da anterior. Ou seja, o princípio multiplicativo é aplicável nesse caso, de forma que:

$$A_n^p = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-p-1).$$

Porém esta expressão pode ser simplificada. Veja:

$$
\begin{aligned}
n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-p-1) &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots (n-p+1) \cdot (n-p) \dots 2 \cdot 1}{(n-p) \cdot (n-p-1) \dots 2 \cdot 1} \\
&= \frac{n!}{(n-p)!}.
\end{aligned}
$$

Logo, temos:

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}.$$

■

Agora, resta-nos apenas saber como lidar quando queremos separar objetos em grupos, porém sem nos importarmos com a ordenação.

Definição 6 (Combinações simples)**.** Definimos a combinação de n elementos p a p, com $n > 1$ e $p \leq n$ como o grupo não-ordenado com p elementos distintos destes n. Ou, dito de outra forma, a escolha de p elementos dentre n, sem importar a ordem.

Denotaremos a quantidade de combinações de n elementos tomados p a p como C_n^p.

No entanto, assim como o arranjo, não nos basta apenas saber o que significa uma combinação. Queremos saber como associar para cada n e p a quantidade de combinações possíveis.

Note que, se tomamos um arranjo A_n^p, estamos contando não só os grupos com seus elementos distintos, mas também cada possível permutação dos elementos em cada um destes grupos.

Por exemplo, se tomarmos os grupos de 3 formados pelas letras A,B, e C, teríamos ABC,ACB,BAC,BCA,CAB,CBA como possíveis resultados. No entanto, para descobrirmos quais eram estes grupos, bastou mudar a ordem das letras, ou seja, permutar. O número de elementos seria fácil de descobrir, também, pela fórmula anterior:

$$A_3^3 = \frac{3!}{0!} = \frac{6}{1} = 6.$$

Agora note que, se a pergunta fosse somente sobre quais são os grupos com elementos distintos, ou seja, os grupos que formamos sem nos importarmos com a ordem, iríamos de seis possibilidades para apenas uma, por exemplo, ABC. Neste caso, estaríamos descontando as permutações nos grupos. Usaremos esta ideia para definir um valor para a quantidade de combinações possíveis.

Teorema 2.2.2. *A quantidade de combinações de n, p a p, C_n^p, é dada por:*

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Demonstração. Esta demonstração será unicamente dedutiva.

Usando a ideia citada anteriormente, temos que, ao escolher os grupos, sempre estamos contando com as permutações. Considere, então, que temos n objetos dos quais serão escolhidos p. Se determinarmos que somente pode existir uma escolha para cada p objetos escolhidos, ou seja, a primeira ordem em que forem escolhidos estes objetos é a definitiva, estamos indiretamente insinuando que não nos interessa permutar esses p objetos. Ou seja, estamos fazendo um arranjo de n objetos, p a p, porém estamos dividindo o valor por $p!$, para que não sejam contadas as permutações de p.

Desta forma:

$$\frac{A_n^p}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{(n-p)} \cdot \frac{1}{p!} = \frac{n!}{(n-p) \cdot p!}.$$

■

Observação. É comum denotar a quantidade de combinações por meio de números binomais, tal que

$$C_n^p = \binom{n}{p}.$$

Corolário 2.2.2.1.

$$p!C_n^p = A_n^p.$$

Demonstração. Demonstrado em meio à prova do teorema.

■

Corolário 2.2.2.2.

$$C_n^p = C_n^{(n-p)}.$$

Demonstração. A demonstração é trivial.

■

A este último corolário é dado o nome de **Combinação Complementar**, pois trata dos conjuntos complementares de cada escolha feita em C_n^p, ou seja, para cada conjunto escolhido com p elementos, existem $(n-p)$ elementos fora dele.

2.3 FUNÇÕES GERADORAS

Uma ferramenta muito útil dentro da contagem são as Funções Geradoras. Elas nos permitem transferir os dados de um problema para um ambiente algébrico de simples manipulação. Portanto, nessa seção, definiremos esse tipo de função e, posteriormente, entenderemos algumas propriedades da mesma.

Definição 7. Séries infinitas

Dada uma sequência $X = (x_n)$ em $\mathbb{R}$, então a série infinita gerada por X é a sequência $S = (S_k)$ definida por:

$$S_1 = x_1.$$

$$S_2 = x_1 + x_2.$$

$$\vdots$$

$$S_k = x_1 + x_2 + \cdots + x_k = S_{k-1} + x_k.$$

$$\vdots$$

Em geral, denotamos a série S por $\sum X_n$ ou $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$.

Observação. Cada S_i é chamado de soma parcial da série.

Observação. Em geral, quando estudamos séries, nos interessamos no estudo de $\lim S$. Se este existe, a série é chamada convergente; se não existe, a série é chamada divergente. No entanto, o problema da convergência de séries não nos interessa, como será explicado nas próximas definições.

Definição 8. Séries de Potências

Uma série de potências é uma série infinita da forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \cdots$, onde a_i para $i = 1, 2, 3, ...$ são números reais e x uma variável.

Observação. Qualquer polinômio é, por definição, uma série de potências.

Definição 9. Dadas duas séries de potências $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ e $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots$, então a soma dessas duas séries é a série cujo coeficiente de x_r é $a_r + b_r$ e o produto dessas duas séries é a série cujo coeficiente de x_r é $a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} \cdots + a_rb_0$.

Definição 10. Função Geradora

Dada uma sequência $(a_n)_{n\geq 0}$, a função geradora ordinária associada a essa sequência é a série de potências

$$A(x) = \sum_{n\geq 0} a_n x^n.$$

Observação. Se tomarmos uma classe $\mathcal{A}$ de objetos a serem enumerados, a mesma série pode ser considerada a função geradora da classe, onde a_n é o número de objetos de tamanho n na classe.

Observação. Nesta definição, o valor de x é irrelevante. Esse termo é usado apenas para conseguirmos observar os coeficientes a_n.

Definição 11. Se a_r, para $r = 0, 1, 2, \cdots$ é o número de soluções de um problema de combinatória, a função geradora ordinária deste problema é

$$A(x) = \sum_{r \geq 0} a_r x^r.$$

Definição 12. Dados n objetos distintos, o número de maneiras de retirarmos r deste conjunto, com $r \leq n$ é dada por C_n^r. Então, para este problema, a função geradora ordinária é:

$$f(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^r x^r + \cdots C_n^m x^m = (1+x)^n.$$

Para o capítulo seguinte, precisamos saber como calcular os coeficientes de funções geradoras, pois esses serão os objetos de nosso estudo.

Observação. A partir de agora, não estaremos preocupados com problema da convergência das funções geradoras, pois como dito na observação anterior, o x é apenas um *placeholder* para podermos observar os coeficientes. Quando trabalhamos com este tipo de série, costumamos chamá-la de Série Formal.

Observação. Vale ressaltar: apesar da convergência não ser nosso foco ao longo deste trabalho, sobretudo no que diz respeito às funções geradoras, necessariamente precisaremos considerar a convergência de algumas séries específicas para demonstrar alguns resultados.

Apresentaremos agora alguns teoremas relacionados a funções geradoras e seus coeficientes:

Teorema 2.3.1. *Resultados sobre Funções Geradoras*

Sendo $f(x)$ e $g(x)$ funções geradoras das sequências (a_r) e (b_r) respectivamente, considerando que os valores de x sejam tais que as séries a seguir são bem definidas e supondo que os valores de x são tais que as séries convergem, temos:

(i) $Af(x) + Bg(x)$ *é a função geradora da sequência* $A(a_r) + B(b_r)$, $A, B \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x)g(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (\sum\limits_{k=0}^{n} (a_k b_{n-k}))x^n$;

(iii) *A função geradora para* $(a_0 + a_1 + \cdots + a_r)$ *é igual a* $(1 + x + x^2 + \cdots)f(x)$;

(iv) A função para (ra_r) *é* $xf'(x)$*, onde* $f'(x)$ *é a derivada de* f *em relação a* x

(v) $\int f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$*.*

Demonstração. Vamos provar cada item separadamente:

(i) Como $f(x)$ e $g(x)$ são funções geradoras, temos:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \cdots$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \cdots$$

e, portanto,

$Af(x) + Bg(x)$

$= Aa_0 + Aa_1x + Aa_2x^2 + \cdots + Bb_0 + Bb_1x + Bb_2x^2 + \cdots$

$= (Aa_0 + Bb_0) + (Aa_1 + Bb_1)x + (Aa_2 + Bb_2)x^2 + \cdots,$

o que prova ser $Af(x) + Bg(x)$ a função geradora de $(Aa_r + Bb_r)$.

(ii) Temos que

$f(x)g(x) = (a_0b_0) + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots$

$+(a_0b_n + a_1b_{n-1} + a_2b_{n-2} + \cdots + a_nb_0)x^n + \cdots$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}(a_kb_{n-k}))x^n.$

(iii) Basta tomar $b_r = 1$, isto é, $g(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$, em (ii).

Assim, temos:

$f(x)g(x) = f(x)(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots)$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}(a_k \cdot 1))x^n$

$= \sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}(a_k))x^n.$

Que é a série de potências relativa à série (a_r).

(iv) Tome $b_r = r$ em (ii), temos:

$\sum_{n=0}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n}(a_k \cdot k))x^n$

$= (a_0 \cdot 0) + (a_1 \cdot 1)x + (a_2 \cdot 2)x^2 + (a_3 \cdot 3)x^3 \cdots$

$= 0 + a_1x + (2a_2)x^2 + (3a_3)x^3.$

Colocando x em evidência, obtemos:

$x(0 + a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2)$

$= xf'(x).$

(v) Temos:

$$\int f(x)dx = \int \sum_{n\geq 0} a_n x^n dx$$
$$= \sum_{n\geq 0} \int a_n x^n dx$$
$$= \sum_{n\geq 0} a_n \int x^n dx$$
$$= \sum_{n\geq 0} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$
$$= \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

■

Observação. Na demonstração anterior, tivemos que considerar a convergência dessas séries para que esses itens fizessem sentido, sobretudo o item (v).

Os resultados a seguir são relacionados a coeficientes em séries de potências, os quais estão diretamente relacionados com o assunto principal deste trabalho.

Teorema 2.3.2. *Teorema Binomial*

Dado $|x| < 1$ *e* u *um número real arbitrário, com a seguinte notação:*

$$\binom{u}{v} = \begin{cases} \dfrac{u(u-1)\cdots(u-v+1)}{v!}, & v > 0; \\ 1, & v = 0. \end{cases}$$

Temos que:

$$(1+x)^u = \sum_{v=0}^{\infty} \binom{u}{v} x^v.$$

Observação. Note que, originalmente, pela Expansão de Taylor, temos:

$$(1+x)^u = 1 + ux + \frac{u(u-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{u(u-1)\cdots(u-r+1)}{r!}x^r + \cdots$$

O que justifica a criação das binomiais para simplificar os coeficientes.

Observação. O coeficiente $\binom{u}{v}$ é chamado de coeficiente binomial generalizado.

Não apresentaremos aqui a demonstração desse teorema por ser amplamente conhecida e não ser nosso foco. Porém, o leitor interessado pode conferir a demonstração em (TAVARES et al., 1975), no capítulo ix, para o caso $(x+a)^n, n \in \mathbb{N}$.

Vale ressaltar que o teorema 2.3.2 é válido somente para $|x| < 1$, como supusemos no mesmo. No entanto, como já foi dito, não estamos interessados no problema da convergência e no valor de x. Dessa forma, podemos apenas ignorar esse fato.

Teorema 2.3.3. *Dados u, v inteiros positivos, $v \neq 0$, pode-se fazer a seguinte associação:*

$$\binom{u}{v} = C_u^v.$$

Demonstração. Dada a notação de binomial criada no teorema 2.3.2, se $v \neq 0$

$$\binom{u}{v} = \frac{u(u-1)\cdots(u-v+1)}{v!} = \frac{u(u-1)\cdots(u-v+1)}{v!}$$

$$= u(u-1)\cdots(u-v+1)\cdot\frac{1}{v!} = \frac{u!}{(u-v)!}\frac{1}{v!}$$

$$= \frac{u!}{(u-v)!v!} = C_u^v.$$

Pois u, v são inteiros positivos. ■

Teorema 2.3.4. *O coeficiente de x^p na expansão de $(1+x+x^2+\dots)^n$ é igual a $C_{n+p+1}^p, n, p \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Basta aplicar o teorema 2.3.2, já que:

$$(1+x+x^2+\dots)^n = \left(\frac{1}{1-x}\right)^n = (1-x)^{-n}.$$

Trocando x por $-x$ e u por $-n$ na fórmula do teorema binomial, temos:

$$(1-x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty}\binom{-n}{r}(-1)^r x^r.$$

Para encontrarmos o coeficiente de x^p, basta substituirmos u por $-n$ e r por p na fórmula do coeficiente binomial generalizado:

$$\binom{-n}{p}(-1)^p = \frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-p+1)(-1)^p}{p!}$$

$$= \frac{(-1)^p(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)(-1)^p}{p!}$$

$$= \frac{(n)(n+1)(n+2)\cdots(n+p-1)}{p!}$$

$$= \frac{(n+p-1)(n+p-2)(n+p-3)\cdots(n+1)n(n-1)!}{p!(n-1)!}$$

$$= \binom{n+p-1}{p}$$

$$= C^p_{n+p-1}.$$

Como queríamos demonstrar. ■

Observação. Note que, na demonstração, usamos o seguinte resultado simples sobre coeficientes binomiais:

$$\binom{-n}{r} = (-1)^r\binom{n+r-1}{r}.$$

Vale ressaltar, porém, que este coeficiente $\binom{-n}{r}$ não tem interpretação combinatória.

Observação. Este número é também equivalente ao número de maneiras de escolhermos p objetos dentre n distintos, podendo cada objeto ser repetido até p vezes. No entanto, esse conceito de combinação com repetição não nos será diretamente útil, por isso não iremos defini-lo.

Em combinatória, a função geradora ordinária, por se associar diretamente com a combinação, fornece-nos as possíveis escolhas, porém sem dar importância à ordem das mesmas. Existe outro tipo de função geradora, a função geradora exponencial, que se associa com situações onde a ordem importa. No entanto, como não a usaremos no trabalho, não a definiremos.

Com o que foi desenvolvido neste capítulo, temos o suficiente para começarmos a lidar com o foco principal deste trabalho: contar o número de soluções de equações lineares de coeficientes unitários.

3 CONTAGEM DE SOLUÇÕES INTEIRAS DE EQUAÇÕES LINEARES COM COEFICIENTES UNITÁRIOS

Com o uso da contagem podemos contar o número de soluções inteiras de equações diferenciais com coeficientes unitários, mas antes vamos definir quais são estas equações com as quais trabalharemos.

Definição 13. É chamada Equação Linear de Coeficientes Unitários (ELCU), toda equação da forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = m, a_i; m \in \mathbb{Z}, \forall i.$$

Onde $a_1 = a_2 = \cdots a_n = 1$.

Não nos interessa, neste trabalho, saber exatamente quais são e como calcular as soluções desse tipo de equação. O que nos interessa é saber quantas são as soluções em números inteiros e como calcular essa quantia.

Para este capítulo, adotaremos um *modus operandi* que é mais agradável ao leitor: estudaremos cada caso, trabalhando primeiro a abordagem mais intuitiva, apresentada em (SANTOS et al., 2007), usando conceitos simples de contagem e combinatória; posteriormente, apresentaremos a maneira de fazer este cálculo como é abordado em (MURTY, 1981) (que é a motivação desse trabalho), ou seja, por meio de funções geradoras. Nosso objetivo, além de, claramente, apresentar o método de cálculo da quantidade de soluções de equações lineares de coeficientes unitários, é desenvolver o assunto de maneira mais detalhada do que a apresentada comumente na literatura.

3.1 CONTAGEM DE SOLUÇÕES INTEIRAS POSITIVAS

Nessa seção, estamos interessados em, dada uma ELCU, conhecer a quantidade de soluções inteiras estritamente positivas, ou seja, maiores do que 0.

Para desenvolvermos a ideia, usemos uma equação simples, tal como $x_1 + x_2 = 7$. Podemos facilmente encontrar algumas soluções para essa equação sem fazer contas, como por exemplo $S = \{3, 4\}$.

Para essa equação, caso quiséssemos encontrar a quantidade de soluções da mesma, da maneira mais simples possível, bastaria criar uma tabela e ir colocando todas as soluções possíveis, como a seguir:

x_1	x_2
1	6
2	5
3	4
4	3
5	2
6	1

TABELA 1 – Possíveis soluções da equação $x_1 + x_2 = 7$.

Assim, obteríamos rapidamente que temos 6 soluções para essa equação e, de fato, para equações lineares com poucas variáveis, esse processo é simples e rápido, no entanto, ao fazermos esse processo com equações de mais variáveis e/ou com um m maior (13), esse processo se torna cada vez mais ineficiente e cansativo.

Uma maneira mais eficiente de fazermos esse cálculo seria a seguinte:

Temos que $7 = 1+1+1+1+1+1+1$. Calcular uma solução da equação $x_1 + x_2 = 7$ nada mais é do que dividir esses números 1 em dois grupos separados. Ou seja, coloquemos uma barra vertical entre um 1 e um sinal de $+$, representando essa divisão:

$$7 = 1+1+1|+1+1+1+1.$$

Dessa forma, temos, em outras palavras:

$$7 = (1+1+1) + (1+1+1+1).$$

Que nada mais é que a solução $S = \{3, 4\}$.

Ou seja, cada solução desta equação é uma escolha de posição dessa barra vertical. Dessa forma, calcular a quantidade de soluções dessa equação nada mais é que calcular a quantidade de escolhas para a posição dessa barra, dentre as disponíveis. Note que a barra vertical sempre será posicionada antes de um sinal de $+$, e temos um total de 6 sinais nessa soma. Portanto, o total de escolhas possíveis é a escolha de uma dentre 6 posições, ou seja: $C_6^1 = 6$. Mas, seria esse método eficiente? Testemos um exemplo um pouco mais complexo, tal como $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$.

Da mesma forma que antes, conseguimos deduzir uma solução dessa equação sem esforço: $S = \{5, 5, 5, 5\}$. O método de montar uma tabela com as possíveis soluções, apesar de não ser impossível, seria muito cansativo nesse caso. Portanto não iremos fazê-lo. Vamos direto para esse que chamaremos de “método das barras”:

$$20 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1.$$

Agora, como temos 4 variáveis, devemos dividir esses 1 em 4 grupos, ou seja, usaremos três barras, por exemplo:

$$20 = 1+1+1+1+1|+1+1+1+1+1|+1+1+1+1+1|+1+1+1+1+1.$$

Que nada mais é que:

$$20 = (1+1+1+1+1)+(1+1+1+1+1)+(1+1+1+1+1)+(1+1+1+1+1).$$

Ou seja, $S = \{5, 5, 5, 5\}$.

Note que estamos escolhendo 3 dentre 19 espaços antes de um $+$ para posicionar as barras. Dessa forma, o total de possíveis soluções positivas é: $C_{19}^{3} = 969$.

Claramente, o resultado nos mostra que o método de tabelas teria nos feito gastar muito tempo sem necessidade, mas o método das barras se mostrou extremamente eficiente e rápido. Agora, nos falta chegar a uma fórmula geral que nos permita calcular essa quantidade sem termos que, necessariamente, desenhar as barras.

Teorema 3.1.1. *Método das barras (para soluções positivas)*

A equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m, m > 0$$

Tem C_{m-1}^{r-1} *soluções positivas.*

Demonstração. Temos que

$$m = \underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{m \text{ vezes}}.$$

Onde temos $m-1$ sinais de $+$. Pelo "método das barras", devemos dividir esses m números 1 em r grupos usando barras verticais. Como são r grupos, usamos $r-1$ barras verticais, que podem ser posicionadas em qualquer uma das $m-1$ posições entre um $+$ e um 1.

Cada solução terá como valor de cada x_i o valor da soma de todos os 1 entre a barra $i-1$ e i. Para obtermos todas as soluções possíveis, fazemos uma escolha de $r-1$ posições dentre $m-1$ possíveis para as barras verticais, ou, algebricamente C_{m-1}^{r-1}.

∎

Observação. Note que, nesse caso, usamos combinação (e não arranjo), pois a ordem em que são colocadas as barras não altera a solução.

Apesar do método acima se provar bem eficiente, podemos obter um resultado ainda mais amplo fazendo uso de funções geradoras:

Tomemos a equação $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m, m > 0$. E tomemos a seguinte série infinita:

$$(\sum_{i=1}^{\infty} x^i)^r.$$

Note que, tomando uma solução qualquer dessa equação, podemos encontrar x^{x_i} na expansão da série

$$(\sum_{i=1}^{\infty} x^i).$$

Sendo x_i um dos elementos dessa solução.

A série que estamos trabalhando, no entanto, consiste de r fatores iguais à série acima. Dessa forma, dada uma solução qualquer, poderíamos encontrar, para cada i fator dessa potência, o valor x_i correspondente a essa solução em x^{x_i}.

Tomando, exclusivamente, esses fatores, obtemos ao final um termo

$$x^{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r}.$$

Agora suponha que, para cada solução possível dessa equação, obtivemos um $x^{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r}$ que, por conta do contexto que estamos lidando, são todos termos diferentes. É simples inferir que, se contarmos a quantidade de termos dessa forma que obtivemos, temos a quantidade de soluções positivas dessa equação. No entanto, obviamente, essa conta seria exaustiva por exigir que expandíssimos essa série e localizássemos esses termos específicos.

Porém, na mesma expansão da série inicial, ou seja $(\sum_{i=1}^{\infty} x^i)^r$, podemos obter também uma potência que gere o termo x^m. Porém, pela equação inicial, $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m$.

Ou seja, todos os fatores $x^{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r}$, são, na verdade x^m. Desta forma, somando todos esses fatores $x^{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r}$, obtemos kx^m, sendo k o número de fatores $x^{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r}$ que obtivemos na expansão da série.

Vamos formalizar tudo que foi desenvolvido nesses últimos parágrafos:

Teorema 3.1.2. *Para cada série da forma*

$$(\sum_{i=1}^{\infty} x^i)^r,$$

Se associam todas as equações da forma $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m, \forall m > 0$ *onde* $r \leq m$

Demonstração. Dado um r qualquer, a equação $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m, m > 0$ e a série $(\sum_{i=1}^{\infty} x^i)^r$, conseguimos encontrar os fatores x^{x_1}, x^{x_2}, ..., até o x^{x_r}, visto que $r \leq m$ e $x_i < m, \forall i = 1, \ldots, r$, para cada possível solução dessa equação que, ao serem multiplicados, geram vários fatores $x^{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r}$.

Agora note que o processo seguinte era localizar o termo x^m e afirmar que a soma de todos os fatores $x^{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_r}$ gera kx^m, sendo k o coeficiente, devido à equação original. Mas, veja que, nesse processo, não faz diferença qual o valor de m, visto que essa equivalência vem da equação linear original. Logo, para qualquer m, pode-se localizar um x^m expandindo a série $(\sum_{i=1}^{\infty} x^i)^r$, ou seja, podemos associar toda equação $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m, m > 0$, independentemente do m, com essa série, desde que $r \leq m$, pois estamos trabalhando somente com soluções inteiras e positivas da equação.

■

Teorema 3.1.3. *Para cada equação* $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m, m > 0$ *associa-se uma, e somente uma, série da forma:*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} x^i\right)^r.$$

Demonstração. Trivial. Como $(\sum_{i=1}^{\infty} x^i)^r$ é função geradora ordinária da equação apresentada, ela só pode ser uma devido ao valor de r ser um único inteiro positivo definido.

■

Teorema 3.1.4. *Contagem de soluções positivas de uma ELCU*

O número total de soluções positivas de $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m, m > 0$ *é dado pelo coeficiente de* x^m *na expansão de* $(\sum_{i=1}^{\infty} x^i)^r, r \geq 1$*.*

Demonstração. A demonstração foi dada anteriormente à escrita do teorema.

■

Observação. Portanto, a função geradora para este tipo de problema é dada por $(\sum_{i=1}^{\infty} x^i)^r$, onde r é o número de variáveis da equação linear.

Tal como fizemos no “método das barras”, queremos uma fórmula que, dada somente a ELCU, possamos calcular diretamente o número de soluções inteiras positivas, sem passar pelo processo de expansão de séries. A seguir, desenvolveremos o necessário para isso, utilizando-nos de alguns conceitos sobre séries.

Teorema 3.1.5.
$$\sum_{i=1}^{\infty} x^i = x(1-x)^{-1}, |x| < 1.$$

Demonstração. Considere inicialmente a série:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x^i.$$

Multiplicando ambos os membros por x:

$$xS_n = \sum_{i=1}^{n} x^{i+1}.$$

Agora, subtraindo esse novo termo por S_n:

$$xS_n - S_n = \sum_{i=1}^{n} x^{i+1} - \sum_{i=1}^{n} x^i.$$

$$xS_n - S_n = \sum_{i=1}^{n} (x^{i+1} - x^i).$$

$$xS_n - S_n = x^{n+1} - x.$$

Colocando S_n em evidência:

$$S_n(x-1) = x^{n+1} - x.$$

$$S_n = \frac{x^{n+1} - x}{x-1}.$$

Agora, tomemos o limite desta função para $n \to \infty$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1} - x}{x-1}.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(x^n - 1)}{x-1}.$$

$$\frac{x}{x-1}\lim_{n\to\infty} x^n - 1.$$

Note que o limite acima somente converge para $|x| < 1$, como supusemos de início. Nesse caso:

$$\lim_{n\to\infty} x^n - 1 = \lim_{n\to\infty} x^n - \lim_{n\to\infty} 1.$$

$$\lim_{n\to\infty} x^n - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Logo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}-x}{x-1} = \frac{-x}{x-1} = -x(x-1)^{-1} = x(1-x)^{-1}.$$

■

Observação. Vale lembrar que, apesar de usarmos $|x| < 1$ na demonstração, estamos tratando essa série como uma série formal, ou seja, sem nos preocuparmos com o valor que x pode assumir, pois ele atua apenas como um *placeholder*.

Dado esse resultado, temos que:

$$(\sum_{i=1}^{\infty} x^i)^r = x^r(1-x)^{-r}.$$

Porém, usando o Teorema 2.3.2, temos:

$$(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k}(-1)^k x^k.$$

E segundo a observação 2.3, temos

$$\binom{-r}{k} = (-1)^k \binom{r+k-1}{k}.$$

Onde $r + k = m$, ou $k = m - r$.

Assim:

$$(\sum_{i=1}^{\infty} x^i)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} x^{r+k}.$$

Ou seja, para $k = m - r$, encontramos o coeficiente de x^m:

$$\binom{m-1}{m-r} x^m.$$

Pelo resultado de combinações complementares, obtemos que, dado um coeficiente binomial qualquer:

$$\binom{u}{v} = \binom{u}{u-v}.$$

Dessa forma, obtemos:

$$\binom{m-1}{r-1}x^m.$$

Ou seja, o coeficiente de x^m é dado por $\binom{m-1}{r-1}$ e, assim, a quantidade de soluções positivas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m, m > 0$, para qualquer m e r é dado por $\binom{m-1}{r-1}$ que, pelo teorema 2.3.3, é C_{m-1}^{r-1}, como já havíamos concluído anteriormente. No entanto, somente soluções positivas são um escopo um tanto raso para contabilizarmos. Queremos expandir isso a um nível que ainda seja contável, porém mais abrangente.

Observação. Note que temos uma condição de existência implícita para essas soluções: $m \geq r + 1 em, r \geq 1$. Isso se dá pelo fato de $k = m - r$, e k não pode ser menor que 1, além de que $m - 1$ e $r - 1$ não podem ser menores que 1 também.

No caso de $m = 0$, não faria sentido usar esta fórmula, pois não teríamos soluções unicamente positivas para a equação. Para $r = 0$, a equação não estaria definida, pois não teria variáveis.

3.2 CONTAGEM DE SOLUÇÕES INTEIRAS NÃO-NEGATIVAS

Aqui, além das soluções positivas que calculamos na seção anterior, estaremos interessados nas soluções que contém 0 em, pelo menos, uma de suas entradas.

De início, recorramos novamente ao que apelidamos de “método das barras”, que nesse caso ainda se mostra suficientemente eficiente:

Tomemos de exemplo o mesmo da seção anterior, $x_1 + x_2 = 7$. Poderíamos, da mesma forma, montar uma tabela com todas as possíveis soluções, mas como já notamos que é um método desnecessariamente cansativo e pouco eficiente, não perderemos tempo com ele.

Pelo “método das barras”, teremos o mesmo processo que anteriormente, no entanto, agora, podemos colocar barras antes do primeiro $+$, depois do último 1 e podemos colocar duas barras no mesmo lugar, representando um espaço vazio. Por exemplo:

$$7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Disso, podemos ter, por exemplo:

$7 = |1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$

ou

$7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1|$

Essas opções representam, respectivamente, $S = \{0, 7\}$ e $S = \{7, 0\}$.

Ou seja, antes, tinhamos que escolher uma dentre 6 posições. Agora, com essa nova possibilidade de incluir o zero, devemos escolher 1 entre 8 posições, ou seja, $C_8^1 = 8$.

Tomemos agora um exemplo mais complexo para compreendermos a situação de duas ou mais barras seguidas. Novamente, repetiremos um exemplo da seção anterior: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$.

$20 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1.$

Agora, veja algumas possibilidades:

$20 = 1+1+1+1+1+1+1+||1+1+1+1+1+1+1|+1+1+1+1+1+1.$

ou

$20 = |1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1||.$

ou

$20 = 1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+1+|||1+1+1+1+1+1.$

Que representam $S = \{7, 0, 7, 6\}$, $S = \{0, 20, 0, 0\}$ e $S = \{15, 0, 0, 5\}$, respectivamente. Ou seja, pensamos no espaço entre duas barras, ou entre uma barra e o sinal de igual, ou entre uma barra e o fim da expressão como 0. Mas note que, nesse caso, não é tão intuitivo contar quantas são as possíveis distribuições destas barras para definirmos, unicamente por este método, qual seria a combinação que nos traria o resultado correto de possíveis soluções não-negativas. Porém, não precisamos pensar muito além desse contexto para achar uma forma simples de chegar a essa resposta. Façamos uma mudança de variáveis em $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$, tal que $y_i = x_i + 1, i = 1, \ldots, 4$.

Note também que, realizando essa mudança de variáveis, temos:

$$(y_1 - 1) + (y_2 - 1) + (y_3 - 1) + (y_4 - 1) = 20 \iff y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 24.$$

E, por fim, temos que cada solução não-negativa de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ é diretamente equivalente a uma solução positiva de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 24$, pois com essa mudança de variáveis, todo x_i que seria neutro em alguma solução não negativa, torna-se, necessariamente, um y_i positivo. Ou seja, devido a essa equivalência, o número de soluções não-negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ é exatamente igual ao número de soluções positivas de $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 24$, o qual calculamos da forma vista na seção anterior. Porém, com isso, conseguimos determinar uma combinação que explicite esse valor sem precisarmos fazer a mudança de variáveis toda vez:

Aplicando o Teorema 3.1.1 a $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 24$ (chame 24 de n), temos C_{n-1}^{r-1} possíveis soluções. Mas note que $n = m + 4$, onde $4 = r$, ou seja, $n = m + r$, então podemos substituir C_{n-1}^{r-1} por C_{m+r-1}^{r-1}.

Usando o corolário 2.2.2.2, temos que $C_{m+r-1}^{r-1} = C_{m+r-1}^{m}$ como o número de soluções não-negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20.$

Para efeitos de comparação, temos $C_{19}^{3} = 969$ soluções positivas e $C_{23}^{3} = 1771$ soluções não-negativas.

Teorema 3.2.1. *Método das barras para soluções não negativas*

A equação $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m, m > 0$ *tem* C_{m+r-1}^{r-1} *soluções não-negativas.*

Demonstração. Façamos uma mudança de variáveis tal que $y_i = x_i + 1, \forall i = 1, \ldots, r$. Obteremos, assim, uma nova equação:

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_r = m + r.$$

Nessa nova equação, chamando $m + r = n$ e aplicando o Teorema 3.1.1, temos:

$$C_{n-1}^{r-1} = C_{m+r-1}^{r-1}.$$

Tomando a combinação complementar:

$$C_{m+r-1}^{r-1} = C_{m+r-1}^{m}.$$

■

Apesar desse método ser bem eficiente e rápido, podemos nos utilizar aqui de funções geradoras, tal como na seção passada.

Tome a ELCU genérica $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m, m > 0$ e, tome agora, a seguinte série:

$$(\sum_{i=0}^{\infty} x^i)^r.$$

Note que esta série permite que, caso tenhamos uma solução onde algum $x_i = 0$, x^{x_i} é um elemento da série. Assim, podemos intuir o mesmo que na seção anterior, concluindo assim que o coeficiente de x^m nesta série é o número de soluções não-negativas da equação. Veja também que, devido às similaridades, podemos assumir resultados análogos aos de anteriormente, ou seja:

Teorema 3.2.2. *Para cada série da forma*

$$(\sum_{i=0}^{\infty} x^i)^r.$$

Se associam todas as equações da forma $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m, \forall m > 0$ *onde* $r \leq m$.

Teorema 3.2.3. *Para cada equação* $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m, m > 0$*, se associa uma, e somente uma, série da forma:*

$$(\sum_{i=0}^{\infty} x^i)^r, r \geq 1.$$

Demonstração. A prova de ambos os teoremas se segue da mesma forma que seus análogos na seção anterior, assumindo que x^0 é possível para essa série.

■

Teorema 3.2.4. *Contagem de soluções não-negativas de uma ELCU*

O número total de soluções não negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m, m > 0$ *é dado pelo coeficiente de* x^m *na expansão de* $(\sum_{i=0}^{\infty} x^i)^r$.

Demonstração. A demonstração é análoga à da seção anterior, porém assumindo que, nessa série, é possível assumirmos x^0.

■

Agora, da mesma forma que fizemos na seção anterior, vamos encontrar uma fórmula associada a essas funções que nos permita calcular diretamente o número de soluções inteiras não-negativas sem necessitar que expandamos a série sempre.

Teorema 3.2.5.

$$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = (1-x)^{-1}, |x| < 1, x \neq 0.$$

Demonstração. Provaremos esta convergência usando resultados da prova do Teorema 3.1.5.

Tome a seguinte série:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} x^i.$$

Multiplicando-a por x:

$$xS_n = \sum_{i=0}^{n} x^{i+1}.$$

Note que

$$\sum_{i=0}^{n} x^{i+1} \equiv \sum_{i=i}^{n} x^i.$$

Agora, note que pelo teorema 3.1.5, temos que, nessas condições:

$$\lim_{n\to\infty} xS_n = x(1-x)^{-1}.$$

$$x(\lim_{n\to\infty} S_n) = x(1-x)^{-1}.$$

Como $x \neq 0$, podemos dividir ambos os lados dessa expressão por x, assim:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = (1-x)^{-1}.$$

■

Observação. Ressaltamos, novamente, que apesar de necessitarmos da convergência da série para os próximos resultados e isso implicar em restrições para x, estamos tratando a série como série formal. Então essas restrições não farão diferença nos resultados a seguir.

Pelo resultado do último teorema, temos:

$$(\sum_{i=0}^{\infty} x^i)^r = (1-x)^{-r}.$$

Porém, pelo Teorema 2.3.2, da mesma forma que na seção anterior temos, tomando a mudança de variável $k = m - r$:

$$(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-r}{k} (-1)^k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{r+k-1}{k} (-1)^k x^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} x^k.$$

$$(\sum_{i=0}^{\infty} x^i)^r = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{r+k-1}{k} x^k.$$

Para $k = m$, encontramos:

$$\binom{r+m-1}{m} x^m.$$

Ou seja, $\binom{r+m-1}{m}$ é o coeficiente de x^m, portanto, é o número de soluções não-negativas de $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m, m > 0$.

Ainda vale mencionar que:

$$\binom{r+m-1}{m} = C^m_{m+r-1}.$$

Como já havíamos concluído pelo "método das barras".

Observação. Note que, novamente temos uma condição de existência implicita: $m \geq 1, r + m \geq 2$. Da mesma forma que na última observação da seção anterior, $m = 0$ não faria sentido, pois a única solução possível nesse caso seria $x_i = 0, \forall i$. Já $r + m \geq 2$ se dá pela parte superior do binomial, que não pode ser menor que 1 para estar bem definido. Isso fica claro, pois, se m é, no mínimo, 1, pelo motivo citado anteriormente, e r também, para que a equação seja definida, então o valor da soma é, no mínimo, 2.

Nessas duas primeiras seções, abordamos o problema em sua maneira mais abrangente: apenas contamos o número de soluções inteiras da equação, e nossa única restrição foi que, inicialmente, essas soluções deveriam ser positivas, e depois apenas não-negativas. A seguir, vamos lidar com três casos que restringem o problema: soluções inteiras satisfazendo uma restrição da forma $x_i > c_i$, onde $c_i, i = 1, 2, \ldots, r$ são inteiros positivos quaisquer; soluções inteiras positivas não excedendo dado inteiro e soluções inteiras positivas cujas quais pertencem, cada uma, a um conjunto específico. Ou seja, ao fim deste capítulo teremos métodos para abordar qualquer problema envolvendo as ELCU e a quantidade de suas soluções não-negativas ou positivas.

3.3 CONTAGEM DE SOLUÇÕES INTEIRAS SATISFAZENDO UMA RESTRIÇÃO DA FORMA $x_i > c_i$

Lidaremos agora com um problema bem específico:

Suponha que tenhamos as mesmas equações que usamos anteriormente:

$$x_1 + x_2 = 7.$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20.$$

Na primeira equação, suponha que queiramos apenas as soluções onde $x_1 > 3$ e $x_2 > 1$. Assim, temos: $x_1 \geq 4, x_2 \geq 2$.

Pelo método das barras, conseguimos encontrar facilmente essas soluções, colocando a barra somente onde a relação de ordem acima vale, ou seja:

$7 = 1 + 1 + 1 + 1| + 1 + 1 + 1$ e $7 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1| + 1 + 1$.

No entanto, não conseguimos pensar em uma maneira de relacionar uma combinação com essa escolha. Foi apenas tentativa e erro.

Consideremos agora o seguinte:

$$x_1 \geq 4, x_2 \geq 2 \implies x_1 - 4 \geq 0, x_2 - 2 \geq 0.$$

Fazendo uma mudança de variáveis tal $y_1 = x_1 - 4$ e $y_2 = x_2 - 2$. Obtemos a seguinte equação:

$$y_1 + y_2 + 6 = 7.$$

$$y_1 + y_2 = 1.$$

Calculando o número de soluções dessa equação nova, temos $C_2^1 = 2$. Mas note que essa equação é equivalente a $x_1 + x_2 = 7$, pois apenas fizemos uma mudança de variáveis. Dessa forma, $C_2^1 = 2$ também representa o número de soluções inteiras dessa equação.

Suponha agora que queremos contar as soluções não negativas da segunda equação, porém com a seguinte restrição: $x_1 > 1, x_2 > 2, x_3 > 3, x_4 > 4$.

Note que: $x_1 > 1, x_2 > 2, x_3 > 3, x_4 > 4 \implies x_1 \geq 2, x_2 \geq 3, x_3 \geq 4, x_4 \geq 5$.

Poderíamos tentar apelar para o método das barras, porém, já vimos que sua aplicação nessa equação em específico não é tão eficiente. Nesse caso, muito menos, pois teríamos que fazer muitas tentativas para chegarmos a um número certo e também não conseguimos definir diretamente uma combinação dessas barras que nos dê a resposta, tal como no exemplo anterior. Tomemos agora a seguinte mudança de variáveis:

$$y_1 = x_1 - 2, y_2 = x_2 - 3, y_3 = x_3 - 4, y_4 = x_4 - 5$$

.

Temos, então:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + 14 = 20$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 20 - 10 - 4$$
$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$$

E essa equação tem exatamente o mesmo número de soluções inteiras não-negativas que a equação original com a restrição imposta, ou seja $C_6^4 = 15$.

A seguir, trataremos da generalização desse problema, bem como daremos justificativa sobre essa mudança de variáveis.

Considere o seguinte problema: Seja a equação:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m, m > 0.$$

Quantas são as soluções inteiras não-negativas dessa equação, sendo $x_1 > c_1, x_2 > c_2, \ldots, x_r > c_r$, onde $c_i \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, 2, \ldots, r$?

A partir da restrição imposta, podemos afirmar facilmente o seguinte:

$$x_i > c_i \implies x_i \geq c_i + 1.$$

Visto que $x_i, c_i \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, 2, \ldots, r$. Portanto:

$$x_i - c_i - 1 \geq 0.$$

Ou seja, tomando $y_i = x_i - c_i - 1$, temos:

$$y_1 + y_2 + y_3 + \cdots + y_r = m - \sum_{i=0}^{r}(c_i) - r, m > 0.$$

Tal que $y_i \geq 0, \forall i = 1, 2, \ldots, r$. Ou seja, $S = \{y_1, y_2, \ldots, y_r\}$ são, necessariamente, soluções não-negativas dessa equação.

Usando do método que já apresentamos para calcular soluções não-negativas de uma ELCU e chamando $m - \sum\limits_{i=0}^{r}(c_i) - r = n$:

Número de soluções = $C_{n+r-1}^{n} = C_{m-\sum_{i=0}^{r}(c_i)-r+r-1}^{m-\sum_{i=0}^{r}(c_i)-r} = C_{m-\sum_{i=0}^{r}(c_i)-1}^{m-\sum_{i=0}^{r}(c_i)-r}$.

Ou, em binomiais:

$$\binom{m - \sum_{i=0}^{r}(c_i) - 1}{m - \sum_{i=0}^{r}(c_i) - r} = \binom{m - \sum_{i=0}^{r}(c_i) - 1}{r - 1}.$$

Teorema 3.3.1. *Seja*

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m, m > 0$$

O número de soluções inteiras não-negativas nas quais $x_i > c_i, i = 1, 2, \ldots, r$, *sendo* $c_i \in \mathbb{Z}, \forall i = 1, 2, \ldots, r$ *é* C_{m-s-1}^{r-1}, $s = \sum_{i=0}^{r} c_i$.

Demonstração. Provado anteriormente. O resultado final se dá da associação entre binomiais e combinações apresentada no teorema 2.3.3

■

Observação. Não faremos aqui todo o desenvolvimento envolvendo séries como nas seções anteriores, visto que, após a mudança de variáveis, sucede-se o mesmo que na seção 3.2.

Observação. Vale notar algumas restrições para esse caso que não impusemos, mas que se fazem necessárias para que possamos, de fato, calcular a quantidade de soluções:

(i) $c_i \leq m, \forall i = 1, 2, \ldots, r$;

(ii) $s = \sum_{i=0}^{r} c_i \leq (m-1), \forall i = 1, 2, \ldots, r$.

Note que, se o item (i) não se satisfaz, não teremos soluções que se enquadrem nesse problema, visto que a soma final dos elementos da solução seria maior que m. Em relação ao item (ii), é necessário para que a combinação esteja definida, visto que, caso não se cumprísse, teríamos uma combinação com um número negativo.

Esse caso nos dá uma restrição bem específica, pois restringe cada variável a um intervalo pequeno. Mas, como seria o processo caso quiséssemos soluções que não excedem um inteiro c? É disso que iremos tratar na seção seguinte.

3.4 CONTAGEM DE SOLUÇÕES INTEIRAS POSITIVAS NÃO EXCEDENDO DADO INTEIRO

Novamente, vamos utilizar os exemplos das seções anteriores como motivação.

Seja a equação $x_1 + x_2 = 7$ e suponhamos agora que queremos soluções x_1, x_2 tais que $x_1, x_2 \leq 4$. Pensando primeiramente no "método das barras", não seria, nesse caso, nem um pouco complicado pensarmos nessas soluções:

$7 = 1 + 1 + 1| + 1 + 1 + 1 + 1$ e $7 = 1 + 1 + 1 + 1| + 1 + 1 + 1$.

Porém, tal como na seção anterior, não conseguimos fazer uma associação direta entre a escolha do posicionamento dessa barra e alguma combinação. É somente uma tentativa e erro. Note que também não temos uma substituição de variáveis muito óbvia nesse caso, sem que entremos em números negativos. A única conclusão a que podemos chegar nesse exemplo é que, caso a restrição fosse para um c menor do que 4, não teríamos soluções que se encaixariam na restrição.

Agora, para fins de comparação, façamos a mesma análise em nossa equação mais complexa de exemplo, $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ e suponhamos uma restrição $x_1, x_2, x_3, x_4 \leq 6$.

Veja que, nesse caso, tal como em outras seções, o "método das barras" se mostra ineficiente, pois temos uma quantidade razoável de soluções e teríamos que fazer no processo de tentativa e erro que, nesse exemplo, é muito cansativo. Porém, também não conseguimos associar diretamente esse processo a nenhuma combinação que facilite o trabalho.

No entanto, note que podemos chegar a uma conclusão similar à do exemplo anterior: se o c da restrição fosse um inteiro menor do que 5, não teríamos soluções que se encaixariam nessa restrição. Mas, antes de qualquer análise ou conclusão sobre esses casos, devemos ser capazes de chegar a uma generalização sobre a quantidade de soluções de uma equação qualquer dada essa restrição. Para isso, temos que, tal como nas seções anteriores, utilizar-nos de funções geradoras.

Seja uma ELCU $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m$. Queremos encontrar todas as soluções positivas que não excedem dado inteiro c, ou seja, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_r \leq c, c \in \mathbb{Z}$.

Vamos assumir os teoremas 3.1.2 e 3.1.3. Desta forma, sem considerarmos a restrição, podemos associar diretamente a essa equação, a série:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} x^i \right)^r .$$

Mas note que, dada a restrição imposta temos, necessariamente:

$$ir \leq c, \forall i.$$

Para que ir seja uma das soluções desta equação.

Portanto, como r é inteiro positivo, podemos limitar essa série a c, visto que:

$$i \leq c \implies ir \leq c.$$

Portanto, podemos utilizar, ao invés da série acima, a seguinte série para ser associada a equações onde colocamos essa restrição:

$$\left(\sum_{i=1}^{c} x^i\right)^r.$$

Observação. Observe que valem resultados análogos a 3.1.3 e 3.1.2 para esse caso, porém não há necessidade de formalizá-los.

Teorema 3.4.1. *Dado* $c \in \mathbb{Z}$*:*

$$\sum_{i=1}^{c} x_i = x(1-x^c)(1-x)^{-1}, x \neq 1.$$

Demonstração. Para este caso, usaremos um resultado do Teorema 3.1.5.

Na prova deste teorema, apresentamos o seguinte fato:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_i \Leftrightarrow S_n = \frac{x^{n+1}-x}{x-1}.$$

Dessa forma, tomando $n = c$:

$$S_c = \frac{x^{c+1}-x}{x-1}$$

$$= \frac{x(x^c-1)}{x-1} = \frac{x}{x-1}(x^c-1).$$

Para chegarmos ao resultado na exata disposição do problema, vamos multiplicar ambos os membros da fração por -1:

$$\left(\frac{-1}{-1}\right)\frac{x(x^c-1)}{(x-1)} = \frac{x(1-x^c)}{1-x} = x(1-x^c)(1-x)^{-1}.$$

■

Dessa forma, temos então:

$$\left(\sum_{i=1}^{c} x^i\right)^r = x^r(1-x^c)^r(1-x)^{-r}.$$

Queremos agora encontrar o coeficiente de x^m na expansão dessa série. Utilizando do teorema 2.3.2:

$$(1-x)^{-r} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k-1}{k}x^k.$$

$$x^r(1-x^c)^r = \sum_{l=0}^{r}(-1)^l\binom{r}{l}x^{lc+r}.$$

Dessa forma:

$$\left(\sum_{i=1}^{c}x^i\right)^r = x^r(1-x^c)^r(1-x)^{-r} = \left[\sum_{l=0}^{r}(-1)^l\binom{r}{l}x^{r+lc}\right]\left[\sum_{k=0}^{\infty}\binom{r+k-1}{k}x^k\right].$$

Onde

$lc+r+k=m$ e $k \geq 0$, $0 \leq l \leq r$.

Devemos, no entanto, apresentar esse produto de forma a encontrarmos o coeficiente de x^m.

Tomando $lc+r+k=m$ e $k \geq 0$, $0 \leq l \leq r$, temos:

$lc+r+k=m \implies m-r=lc+k \implies m-r \geq lc \implies \frac{m-r}{c} \geq l \geq 0$.

Portanto, este novo somatório deve variar l dentro deste intervalo.

Agora, com esse novo somatório, temos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{m-r}{c}\rfloor}(-1)^l\binom{r}{l}\binom{r+k-1}{k}x^{r+k+lc}\right).$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{m-r}{c}\rfloor}(-1)^l\binom{r}{l}\binom{r+k-1}{r-1}x^{r+k+lc}\right).$$

Para $r+k+lc=m$, temos que, dado $l \in \mathbb{Z}, k=m-r-lc$. Ou seja, cada l implica um k, portanto, podemos concluir que o coeficiente de x^m é:

$$\sum_{l=0}^{\lfloor\frac{m-r}{c}\rfloor}(-1)^l\binom{r}{l}\binom{m-lc-1}{r-1}.$$

Que é o número de soluções positivas de $x_1+x_2+\cdots+x_r=m$ não excedendo c.

Observação. Note que temos algo interessante a observar sobre esse coeficiente:

Como $\dfrac{m-r}{c}$ deve ser um inteiro positivo para fazer sentido na notação de somatório, temos que:

$$c \leq (m-r).$$

Necessariamente, para podermos calcular esse número de soluções.

Observação. Note que c também tem um valor mínimo.

Se $c \leq \frac{m}{r}$:

$$cr \leq m \implies c(r-1) \leq r \implies c \leq \frac{r}{r-1}.$$

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r}{r-1} = 1.$$

e se $r = 2$, que é o valor mínimo que assumimos de r, visto que r é inteiro e se $r = 1$ temos apenas uma solução na equação, temos $\frac{r}{r-1} = 2$

Logo, isso implicaria que $1 \leq c \leq 2$. No entanto, vimos que $c \leq m - r$ e $m - r$ pode ser facilmente maior do que 2 em muitos casos.

Portanto, necessariamente, $c \geq \frac{m}{r}$.

Caso contrário, o número de soluções atendendo a essa restrição é zero.

Corolário 3.4.1.1. *Dada uma equação $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m$, só é possível definir uma quantidade não-nula de soluções tais que não excedem um inteiro c caso:*

$$(m - r) \geq c \geq \frac{m}{r}.$$

Para $c \geq (m - r)$ e $c \leq \frac{m}{r}$, o total de soluções atendendo essa regra é zero.

Demonstração. Já demonstrado nas duas observações anteriores ao teorema.

■

Aqui encerramos a análise dos casos apresentados em (MURTY, 1981) para cálculo de soluções inteiras positivas ou não-negativas de ELCU. No entanto, essas não são os únicos casos existentes.

As próximas seções serão apenas dedicadas a comentar brevemente outros casos que não são citados no artigo, porém sem apego a detalhes.

3.5 CASOS EXTRAS DE CONTAGEM DE SOLUÇÕES INTEIRAS DE ELCU

Até a seção anterior, seguimos fielmente a ordem apresentada em (MURTY, 1981), detalhando mais os casos mencionados no artigo. Existem, no entanto, duas outras situações tratadas no capítulo 5 de (SANTOS et al., 2007), que valem uma breve análise, por serem uma extensão do que trabalhamos até aqui.

Como nosso foco nesse trabalho é analisar, principalmente, o artigo de Murty, não faremos nesta seção um trabalho tão detalhado quanto nas outras.

O primeiro caso apresentado nesse capítulo em questão trata de soluções inteiras positivas de ELCU onde cada x_i pertence a um conjunto A_i específico. Vejamos:

Tomemos o exemplo de uma equação $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, onde temos a seguinte restrição: $x_1 \in \{1, 2, 3\}$, $x_2 \in \{2, 3, 4\}$ e $x_3 \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Lembremos que, em todos os casos que estudamos anteriormente, recorremos a um polinômio, que apresentamos no formato de uma série de potências, e buscávamos, indiretamente, os elementos $x^{x_1}, x^{x_2}, \ldots, x^{x_r}$.

Nesse caso, não precisamos da série de potências, pois temos de maneira discreta quem são os possíveis x^{x_i}. Portanto, podemos usar o seguinte método: Sejam p_1, p_2, p_3 polinômios tais que:

$$p_1(x) = x + x^2 + x^3;$$

$$p_2(x) = x^2 + x^3 + x^4;$$

$$p_3(x) = x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}.$$

Agora, tomemos o polinômio $p(x)$, tal que $p(x) = p_1(x)p_2(x)p_3(x)$:

$$p(x) = (x + x^2 + x^3)(x^2 + x^3 + x^4)(x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}).$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p(x) = (x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 2x^6 + x^7)(x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10}).$$

$$\Leftrightarrow$$

$$p(x) = x^8 + 3x^9 + 6x^{10} + 8x^{11} + 9x^{12} + 9x^{13} + 8x^{14} + 6x^{15} + 3x^{16} + x^{17}.$$

Analogamente ao que fizemos em todo esse capítulo, o número de soluções inteiras positivas de $x_1 + x_2 + x_3 = 10$ seguindo a restrição imposta é o coeficiente de x^{10}, ou seja, 6.

Note também que, da mesma forma que anteriormente, $p(x)$ se associa a todas as equações $x_1 + x_2 + x_3 = m$, onde x_1, x_2, x_3 seguem essas restrições e isso implica necessariamente que $m \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17\}$.

Generalizando:

Teorema 3.5.1. *Dada a equação*

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m.$$

Onde $x_i \in A_i$*, sendo* A_i *é conjunto de inteiros tal que* $c \in A_i \Leftrightarrow c \leq m$.

E dados os polinômios

$$p_i(x) = \sum_{j \in A_i} x^j.$$

O número de soluções inteiras positivas é dado pelo coeficiente de x^m no polinômio:

$$p(x) = \prod_{i=1}^{r} p_i(x).$$

Demonstração. Note que $p(x)$ nada mais é do que uma forma parcial de

$$(\sum_{i=1}^{\infty} x^i)^r.$$

Pois $p_i(x)$ é, por si próprio, uma restrição de $\sum_{i=1}^{\infty} x^i$.

Dessa forma, $p(x)$ tem todas as propriedades de $(\sum_{i=1}^{\infty} x^i)^r$, o que implica que o coeficiente de x^m também indica o número de soluções positivas de $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m$, porém seguindo a restrição imposta.

■

Observação. O polinômio

$$p_i(x) = \sum_{j \in A_i} x^j.$$

tem as mesmas propriedades em seu domínio que $\sum_{i=1}^{\infty} x^i$, incluindo sua associação direta a equações da forma $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m$, aplicadas as devidas restrições.

Corolário 3.5.1.1. *Para esse tipo de problema ter quantidade de soluções não-nulas, devemos ter, necessariamente*

$$\sum_{i=1}^{r} (\min A_i) \leq m \leq \sum_{i=1}^{r} (\max A_i).$$

Demonstração. Note que, ao desenvolver $p(x)$, temos que o menor expoente i de x^i é, necessariamente, $\sum_{i=1}^{r} (\min A_i)$, devido puramente à propriedade de multiplicação de potências, e o mesmo vale para o maior expoente, que será $\sum_{i=1}^{r}(\max A_i)$. Logo, se m não está entre esses dois valores, ele não aparece como expoente no desenvolvimento de $p(x)$ e, consequentemente, não existe solução que se enquadre na restrição imposta.

■

O segundo caso trabalhado no capítulo 5 de (SANTOS et al., 2007) é o de equações lineares de coeficientes não-unitários. Apesar de sair do foco do trabalho, que são as ELCU, o método de resolução apresentado no livro utiliza de ELCU e o método do caso anterior da seção atual de nosso trabalho. Por conta disso, faremos uma breve análise desse caso, porém evitando detalhamentos que nos façam divergir do foco desse trabalho.

Analisemos um exemplo:

Seja a equação $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$.

Claramente, não sabemos como calcular diretamente o número de soluções para essa equação, pois ela não é uma ELCU. No entanto, podemos fazer uma mudança de variáveis que resolve esse problema:

Sejam, então:

$$y_1 = x_1, y_2 = 2x_2, y_3 = 3x_3.$$

Dessa forma, obtemos uma nova equação:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 7.$$

Mas note que, essa mudança de variáveis implica restrições: y_2 é, necessariamente, um múltiplo inteiro positivo de 2 e y_3 é um múltiplo inteiro positivo de 3. Por conta disso, podemos utilizar o mesmo método do caso anterior, visto que essas restrições implicam que cada y_i pertence a um conjunto específico.

Vamos descrever agora os polinômios $p_i(x)$:

$$p_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x^i;$$

$$p_2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x^{2i};$$

$$p_3(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x^{3i}.$$

No entanto, dessa vez, não iremos descrever o polinômio $p(x)$, pois seria extremamente trabalhoso e nos faria fugir muito do foco do trabalho. Porém, nesse ponto já podemos notar que a resolução se segue da mesma forma que no caso anterior: localizamos o elemento x^7 de $p(x)$ e seu coeficiente representa o número de soluções inteiras positivas de $y_1 + y_2 + y_3 = 7$.

No entanto, o passo para encontrar o número total de soluções positivas de $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$ exige mais desenvolvimento, pois o único método que poderíamos adotar neste momento, sem desenvolver mais a teoria, seria localizar a partir de quais x^i de cada $p_i(x)$ é formado o elemento x^7 em $p(x)$ e substituí-los na fórmula da mudança de variáveis, para que, então, confirmássemos quais são diretamente correspondentes com soluções inteiras positivas de $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7$ e, então, contarmos essas soluções. Mesmo assim, é interessante notarmos que a contagem de soluções de equações lineares de coeficientes não-unitários parte, fundamentalmente, da contagem de soluções de ELCU, o que permitiria que algum leitor interessado desse sequência a esse trabalho com esse foco.

A seção seguinte é uma breve discussão sobre um ponto que não foi mencionado nesse capítulo.

3.6 UM BREVE COMENTÁRIO SOBRE SOLUÇÕES NÃO-POSITIVAS, NEGATIVAS E MISTAS

Para encerrarmos o capítulo, vamos discorrer brevemente sobre um ponto que vale discussão: fizemos um estudo sobre as soluções positivas e não-negativas de ELCU, e sempre consideramos $m > 0$. Mas o que podemos dizer de outros tipos de ELCU e outros tipos de soluções?

(i) Mantendo o mesmo modelo de equação $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_r = m, m > 0$, não faz sentido definirmos soluções negativas ou não-positivas. As negativas, pois não há como uma soma de números negativos gerar um número positivo no conjunto dos inteiros e, por motivo similar, não temos soluções não-positivas para esse tipo de equação;

(ii) Se definirmos $m < 0$, toda a teoria que desenvolvemos nesse capítulo é válida para, em sequência, soluções negativas, soluções não-positivas, soluções tais que $x_i < c_i$ e soluções não atingindo determinado inteiro negativo c;

(iii) Se tomarmos $m = 0$, supondo que nossas soluções sejam unicamente positivas ou negativa, não obteremos nenhuma solução, pois é impossível que tenhamos uma soma de números inteiros positivos ou de números inteiros negativos resultando em 0. Nesse caso, teríamos só a solução nula;

(iv) Para um m inteiro qualquer, se não nos restringimos somente a soluções positivas, negativas e não-negativas, obtemos uma quantidade infinita de soluções. Se m é positivo, as soluções contendo pelo menos um termo negativo carecem de um limitante Analogamente, se m é negativo, as soluções contendo pelo menos um termo positivo carecem de limitante. Se $m = 0$, basta que os termos da solução se anulem dois a dois, faltando, assim, qualquer limitante para o módulo desses termos.

Dessa forma, encerramos o capítulo citando, mesmo que brevemente, a maior quantidade de casos possíveis de contagem de soluções envolvendo ELCU.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

No decorrer desse texto analisamos a contagem de soluções de equações lineares de coeficientes unitários a partir de combinações e expansões de séries, tratando de suas soluções positivas, não-negativas e algumas possíveis restrições para essas soluções, que nos permitiam chegar a fórmulas específicas para o cálculo de cada um desses casos. No final do último capítulo, demos uma breve prévia sobre a contagem de soluções de equações lineares de coeficientes não-unitários, porém não nos aprofundamos no assunto por falta de conhecimento.

O trabalho desenvolvido em (MURTY, 1981), apesar de ser essencial para este trabalho, tratou do assunto com pouco apego a detalhes, o que poderia dificultar a compreensão para alguém que não seja familiarizado com o assunto. Nosso maior objetivo nesse trabalho, que foi cumprido com sucesso, foi desenvolver com mais detalhe esse assunto, bem como trazer uma contextualização na área de contagem para que o leitor estivesse devidamente preparado para compreendê-lo plenamente.

Em trabalhos futuros, pode-se usar esse texto como base para trabalhar a contagem de soluções de equações com coeficientes não-unitários. Isso foi algo que começamos a discutir brevemente no final do capítulo 3, porém, chegamos a um ponto onde não tínhamos o embasamento de como chegar a um resultado de maneira rápida e eficiente, sem utilizar de tentativa e erro. Outra possibilidade que pode ser abordada em um trabalho futuro são os coeficientes negativos, e até, quem sabe, chegar a uma conclusão sobre a contagem de soluções de uma equação linear qualquer. Além disso, também pode ser trabalhada a contagem de soluções de equações lineares de grau maior que um. Basicamente, qualquer caso que adicione um elemento que não consideramos nesse trabalho pode ser desenvolvido a partir do que foi escrito aqui.

Com esse texto, pudemos trazer uma abordagem diferenciada para equações lineares, as quais sempre são pensadas de maneira qualitativa, ou seja, quais exatamente são suas soluções, enquanto trabalhamos com a abordagem quantitativa, de quantas são suas soluções, sem nos importarmos com quais fossem exatamente. O assunto trabalhado aqui, além de trazer essa nova perspectiva, é um ótimo exemplo de associação entre o ramo da análise e da contagem, que em muitos cursos (sobretudo no Ensino Fundamental e Médio) parecem ser áreas completamente distintas, e poderia inclusive ser tratado, de maneira mais breve, como uma aplicação do assunto de contagem. Na escola, precisa ser trabalhado de maneira mais simples, evitando o uso de séries, tal como o "método das barras" usado frequentemente nesse texto. Este método seria, inclusive, muito apelativo para abordar um assunto tal como este (que é um tanto complexo) no Ensino Básico, funcionando também como uma ferramenta para mostrar que as áreas da Matemática não são tão segregadas como parecem na escola; Porém no Ensino Superior, seria um assunto facilmente entendido por um estudante que já possuísse uma base em análise e soubesse os conceitos básicos de contagem, servindo como uma aplicação muito interessante e útil. Por fim, esse texto fornece embasamento para o assunto ser abordado nos mais diversos contextos com qualquer tipo de estudante, desde que feito da forma correta, além de servir como um exemplo de aplicação para qualquer estudioso da área de contagem e ainda podendo servir como motivação para o estudo da mesma.

REFERÊNCIAS

BARTLE, R. G.; SHERBERT, D. R. **Introduction to real analysis**. 3. ed. [S.l.]: Wiley, 2000.

GOEMANS, M. **Generating Functions Lecture Notes**. [S.l.: s.n.], mar. 2015. Disponível em: https://math.mit.edu/~goemans/18310S15/generating-function-notes.pdf. Acesso em: 26 nov. 2021.

MURTY, V. N. Counting the Integer Solutions of a Linear Equation with Unit Coefficients. **Mathematics Magazine**, v. 54, p. 79–81, mar. 1981. DOI: 10.1080/0025570x.1981.11976902. Disponível em: https://www.jstor.org/stable/2690441. Acesso em: 11 nov. 2021.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à análise combinatória**. [S.l.]: Ed. Ciencia Moderna, 2007.

TAVARES, R. N.; POPPE, L. M. B.; BACHX, A. d. C. **Preludio À Análise Combinatória**. [S.l.]: Companhia Editora Nacional, 1975. Disponível em: https://kupdf.net/download/preludio-agrave-an-aacute-lise-combinat-oacute-ria-raymundo-n-o-tavares_590dd49adc0d60962f959e9a_pdf#. Acesso em: 11 nov. 2021.