

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SETOR PALOTINA

RENAN ROBERTO DE MARCHI

FORMA CANÔNICA DE JORDAN APLICADA AO CONTROLE DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS VIA EXPONENCIAL DE MATRIZES

PALOTINA

2023

RENAN ROBERTO DE MARCHI

FORMA CANÔNICA DE JORDAN APLICADA AO CONTROLE DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS VIA EXPONENCIAL DE MATRIZES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à disciplina TCC II do Curso de Licenciatura
em Ciências Exatas da Universidade Federal do
Paraná, como exigência parcial para obtenção
do grau de Licenciado em Ciências Exatas.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Andre Schulz

PALOTINA

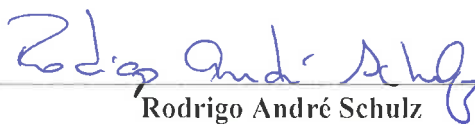
2023

TERMO DE APROVAÇÃO

RENAN ROBERTO DE MARCHI

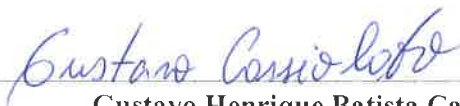
FORMA CANÔNICA DE JORDAN APLICADA AO CONTROLE DE EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS VIA EXPONENCIAL DE MATRIZES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Licenciatura em Ciências Exatas na Universidade Federal do Paraná como requisito para a obtenção de Licenciatura em Ciências Exatas com habilitação em matemática e aprovado pela seguinte banca avaliadora:



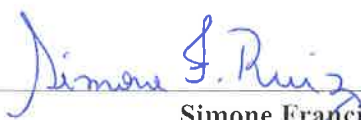
Rodrigo André Schulz

Orientador



Gustavo Henrique Batista Cassiolato

Membro da banca



Simone Francisco Ruiz

Membro da banca

RESUMO

A possibilidade de conduzir um sistema até um estado desejado é o que torna a teoria de controle essencial em inúmeros campos da engenharia e ciência. Este trabalho tem por objetivo demonstrar a existência da Forma Canônica de Jordan para um operador linear em um espaço vetorial complexo de dimensão finita, sendo esta, uma grande ferramenta no estudo de controles lineares autônomos de dimensão finita, dentre outras aplicações. Apresentamos alguns resultados acerca de operadores nilpotentes, subespaços invariantes, exponenciais de matrizes e controles lineares autônomos, buscando ter em mãos uma base bem fundamentada para estruturar e enriquecer as discussões a respeito do objetivo proposto. O texto foi produzido a partir da pesquisa qualitativa baseada em literaturas clássicas de Álgebra Linear e Equações Diferenciais que nos forneceram materiais teóricos suficientes para apresentarmos e lidarmos com a aplicação da Forma Canônica de Jordan dentro da Teoria de Controles Lineares Autônomos de dimensão finita.

Palavras-chaves: Forma Canônica de Jordan; Exponencial de matrizes; Teoria de Controles Lineares Autônomos.

ABSTRACT

The ability to drive a system to a desired state is what makes control theory essential in several fields of engineering and science. This work aims to demonstrate the existence of the Jordan Canonical Form for a linear operator in a finite dimensional complex vector space, which is a great tool in the study of finite dimensional autonomous linear controls, among other applications. We present some results about nilpotent operators, invariant subspaces, matrix exponentials and autonomous linear controls, seeking to have a well-founded basis to structure and enrich discussions about the established objective. The text was produced from qualitative research based on classical literature of Linear Algebra and Differential Equations that provided us with enough theoretical materials to present and deal with the application of the Jordan Canonical Form within the theory of finite dimensional autonomous linear controls.

Key-words: Jordan Canonical Form; Matrix Exponential; Autonomous Linear Control Theory.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	5
2	PRELIMINARES	6
2.1	TRANSFORMAÇÕES LINEARES, AUTOVALORES E AUTOVETORES	6
2.2	SOMA DIRETA E SUBESPAÇO INVARIANTE	8
2.3	EXPONENCIAL DE MATRIZES	8
2.4	CONTROLES LINEARES AUTÔNOMOS	10
2.5	OPERADORES NILPOTENTES	12
3	A FORMA CANÔNICA DE JORDAN	19
4	APLICAÇÕES - CONTROLES LINEARES AUTÔNOMOS	26
4.1	PÊNDULO SIMPLES PRESO A UM CARRO	26
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	33
	REFERÊNCIAS	34

1 INTRODUÇÃO

Álgebra linear é uma das áreas fundamentais da matemática devido a sua aplicação em inúmeros campos. Muitas vezes está presente em aplicações na forma de transformações lineares, ou ainda, equivalentemente, matrizes ou formas quadráticas. A escolha entre uma destas formas se dá por questão de necessidade ou interesse. Neste trabalho, enfatizaremos o lado matricial, pois saber lidar com matrizes é algo de grande importância ao trabalhar com assuntos relacionados à Equações Diferenciais Lineares, afinal, inúmeras vezes se faz necessário o uso de manipulações algébricas para realização de uma análise ou obtenção de soluções dos problemas que as envolvem.

Dentre algumas técnicas possíveis, tem-se a opção de escrever a matriz sob a Forma Canônica de Jordan, nome este em homenagem a Marie Ennemond Camille Jordan, um matemático francês nascido em Lyon no ano de 1838, e que ficou conhecido por trabalhos em Análise e Teoria de Grupos.

A Forma Canônica de Jordan consiste na representação mais simples de um operador linear em um espaço vetorial de dimensão finita, seja ele real ou complexo. Sendo ela uma matriz diagonal por blocos.

Com isso, o foco deste texto está voltado, inicialmente, para a construção da Forma Canônica de Jordan de um operador linear e, posteriormente, sua aplicação no controle de equações diferenciais lineares de dimensão finita.

A estrutura teórica escolhida foi baseada no estudo de clássicos a respeito do tema. Assim, primeiramente apresentaremos todas as propriedades da Forma Canônica de Jordan que necessitarmos para o cálculo de exponenciais de matrizes e, finalmente, trabalharemos com controles de equações lineares, afim de apresentarmos uma utilização prática para a Forma Canônica de Jordan.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo descreveremos alguns tópicos de Álgebra Linear, exponencial de matrizes e controles lineares que caracterizam a parte fundamental dos resultados utilizados no texto.

2.1 TRANSFORMAÇÕES LINEARES, AUTOVALORES E AUTOVETORES

Seja E um espaço vetorial e β uma de suas bases. O número n de elementos de β é chamado *dimensão* de E . Indicaremos a dimensão de um espaço vetorial E por $\dim E$.

Sejam E e F espaços vetoriais sobre um corpo \mathbb{K} . Dizemos que $T : E \rightarrow F$ é uma *transformação linear* do espaço vetorial E no espaço vetorial F , quando associa a cada vetor $v \in E$ um vetor $Tv \in F$ satisfazendo

$$T(w + v) = Tw + Tv,$$

$$T(\alpha v) = \alpha Tv$$

para cada $w, v \in E$ e cada $\alpha \in \mathbb{K}$.

O vetor $u = Tv \in F$ chama-se *imagem* (ou o transformado) de v pela transformação T . O conjunto de todos os vetores $u = Tv \in F$ será denotado por $Im(T)$. Já o *núcleo* de uma transformação linear $T : E \rightarrow F$ é o conjunto de todos vetores $v \in E$ que são transformados em $0 \in F$. Denotaremos este conjunto por $Nuc(T)$.

Um dos resultados fundamentais acerca das transformações lineares, é o Teorema do Núcleo e da Imagem.

Teorema (Núcleo e da Imagem): Sejam E, F espaços vetoriais de dimensão finita. Em uma transformação linear $T : E \rightarrow F$ tem-se $\dim(E) = \dim Nuc(T) + \dim Im(T)$.

Demonstração. Ver [5], páginas 65-66. □

Nos espaços vetoriais de dimensão finita as transformações lineares comumente são representadas por matrizes, afinal, dado uma transformação linear $T : E \rightarrow F$, uma base β de E e outra base β' de F , se $\dim E = n$ e $\dim F = m$, $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ e $\beta' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ teremos que a transformação linear do espaço E na base β para o espaço F na base β' é uma matriz de ordem $m \times n$, onde cada coluna é determinada pelas coordenadas das imagens dos vetores de β em relação à base β' .

Nosso interesse aqui está voltado para as transformações lineares, que são operadores lineares, isto é, que associam todos os vetores $v \in E$ a vetores $Tv \in E$. Em outras palavras, um operador linear A é uma transformação linear $A : E \rightarrow E$.

Seja E um espaço vetorial definido sobre um corpo \mathbb{K} e $A : E \rightarrow E$ um operador linear. Dizemos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um autovalor de A se existe um vetor não nulo $v \in E$ tal que

$$Av = \lambda v.$$

Neste caso, dizemos que v é *autovetor* associado ao autovalor λ .

Note que, se o espaço vetorial E possui dimensão finita n , então o operador linear é representado por uma matriz $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$. Assim,

$$\begin{aligned} Av &= \lambda v \\ \Rightarrow Av - \lambda v &= 0 \\ \Rightarrow (A - \lambda I)v &= 0 \end{aligned}$$

ou, de maneira equivalente,

$$\begin{aligned} -(\lambda I - A)v &= 0 \\ \Rightarrow (\lambda I - A)v &= 0. \end{aligned}$$

Observe que um operador linear de ordem n possui exatamente n autovalores (não necessariamente distintos). De fato, tomando a equação $(A - \lambda I)v = 0$, note que $v = 0$ é uma solução deste sistema, e se $\det(A - \lambda I) \neq 0$, esta será a única solução. Como estamos interessados em vetores diferentes de 0, exigimos que $\det(A - \lambda I) = 0$. Neste caso, teremos uma equação polinomial, pois as operações envolvidas no cálculo de $\det(A - \lambda I)$ são de soma e multiplicação. Definimos então o *polinômio característico* de A como

$$p_A(\lambda) := \det(A - \lambda I).$$

As raízes de p_A são denominadas autovalores de A . E, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, p_A possui n raízes (não necessariamente distintas). Logo, A possui exatamente n autovalores. A multiplicidade de uma raiz λ' de $p_A(\lambda)$ é chamada multiplicidade algébrica do autovalor λ' .

Os autovalores e os autovetores de uma matriz podem ser utilizados para representá-la como uma matriz diagonal em um processo chamado diagonalização de operadores. Isso pois, a versão geral do Teorema Espectral¹ nos diz que toda matriz

¹ Veja [5], páginas 292-293

A em um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo \mathbb{C} , tal que $AA^* = A^*A$ (em que A^* é a adjunta de A), pode ser representada por uma relação de equivalência da seguinte forma

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

$$P = [v_1 | v_2 | \dots | v_n],$$

em que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores de A e v_1, \dots, v_n são os autovetores correspondentes aos autovalores de mesmo índice. Esta representação diagonal é a forma mais simples na qual se pode escrever uma matriz.

Entretanto nem todas as matrizes atendem a propriedade $AA^* = A^*A$. Nestes casos podemos utilizar a representação de uma matriz sob a Forma Canônica de Jordan, representando-a por uma matriz aproximadamente diagonal, a qual é composta por autovalores ao longo de sua diagonal principal (elementos a_{ii}), e por 0 ou 1 abaixo ou acima da diagonal principal, respectivamente formadas pelos elementos $a_{(i+1)(i)}$ ou $a_{(i)(i+1)}$. A escolha da diagonal abaixo ou acima é uma questão que não interfere nos cálculos, uma vez que há resultados equivalentes para as duas representações. Neste trabalho optamos por fixar a diagonal abaixo da principal.

2.2 SOMA DIRETA E SUBESPAÇO INVARIANTE

Nas demonstrações que serão apresentadas posteriormente, estarão presentes de maneira indispensável as propriedades advindas das definições de Soma Direta e Subespaço Invariante. Diante a isto, apresentaremos aqui suas respectivas definições.

Soma Direta: Sejam E um espaço vetorial e F_1, \dots, F_r subespaços de E de modo que qualquer $v \in E$ possa ser escrito da forma $v = v_1 + \dots + v_r$, $v_i \in F_i$. Quando $F_1 \cap \dots \cap F_r = \{0\}$, escrevemos $F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ e dizemos que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ é a soma direta de F_1, \dots, F_r .

Subespaço Invariante: Seja $A : E \rightarrow E$ um operador linear. Um subespaço vetorial $F \subset E$ é dito invariante pelo operador A quando $A(F) \subset F$, isto é, quando dado $u \in F$, temos que $Au \in F$.

2.3 EXPONENCIAL DE MATRIZES

A seguir definiremos a exponencial de uma matriz que utilizaremos posteriormente.

Definição 1: Seja $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ uma matriz. Definimos uma outra matriz pela série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

esta é chamada a exponencial da matriz A e representada por e^A ou $\exp(A)$.

Note que, para toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, a série estabelecida converge. Isto é uma consequência, da desigualdade

$$\|e^A\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|^k \leq e^{\|A\|},$$

que é obtida da relação $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$, que nos permite concluir que a série converge absolutamente e, portanto, é uma série convergente.

No cálculo da exponencial de matrizes, nem sempre a série formada pela matriz A é finita, uma vez que envolve potências de A . A série só é finita se A for nilpotente, pois neste caso $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $A^n = 0$. Mas é possível tornar o cálculo viável se representarmos a matriz A sob a Forma Canônica de Jordan.

A seguir destacaremos como lema algumas propriedades algébricas possíveis ao operar exponenciais de matrizes, afim de ganhar tempo nos cálculos posteriores.

Lema 1: Sejam A e B matrizes, 0 a matriz identicamente nula, I a matriz identidade e M uma matriz inversível, tais que $A, B, 0, I, M$ são de ordem $n \times n$. As seguintes propriedades da exponencial de matrizes são válidas:

- 1) $e^0 = I$;
- 2) $e^{A+B} = e^A e^B$, se $AB = BA$;
- 3) $e^{-A} = (e^A)^{-1}$;
- 4) $e^{MAM^{-1}} = M e^A M^{-1}$;
- 5) $A e^A = e^A A$.

Demonstração. Decorrem imediatamente da Definição 1. □

Apresentamos a seguir, outro resultado que nos interessa destacando-o como um lema.

Lema 2: Sejam A uma matriz de ordem $n \times n$ e A^* sua adjunta. Então, vale que $e^{A^*} = (e^A)^*$.

Demonstração. Note que,

$$\begin{aligned}
 \langle e^{A^*} x, y \rangle &= \left\langle \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^{*k} \right) x, y \right\rangle \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \langle A^{*k} x, y \rangle \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \langle x, A^k y \rangle \\
 &= \left\langle x, \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k y \right) \right\rangle \\
 &= \langle x, e^A y \rangle
 \end{aligned}$$

e isso implica que $e^{A^*} = (e^A)^*$. □

2.4 CONTROLES LINEARES AUTÔNOMOS

No que segue, descreveremos brevemente a Teoria de Controles Lineares, afim de contextualizar o que faremos posteriormente.

Dado um intervalo de tempo $[t_0, t_1]$, sendo t_0 o tempo inicial e t_1 o tempo final, considere um sistema linear descrito pela equação diferencial

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), & t \in [t_0, t_1], \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (2.1)$$

em que A é uma matriz de ordem $n \times n$, B é uma matriz de ordem $n \times m$, $x(t)$ é o *vetor das variáveis de estado* e $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ é a função de controle do sistema pertencente a $L([t_0, t_1]; \mathbb{R}^m)$ (caso o leitor não tenha familiaridade com a integral de Lebesgue, é suficiente interpretar $u(t)$ como uma função contínua em $[t_0, t_1]$ com valores em \mathbb{R}^m).

De maneira breve, um controle visa conduzir um sistema de um *estado inicial* $x(t_0) = x_0$ para um *estado final* desejado $x(t_1) = x_1$. Aqui, trataremos do controle de um sistema linear autônomo. Este sistema possui as matrizes A e B constantes.

A respeito da modelagem dos sistemas, é importante destacar, que um sistema em si tem seu comportamento descrito pela equação $x'(t) = Ax(t)$. A equação $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$ é obtida ao modelarmos o sistema sob a presença de um controle ou alguma outra força externa atuando. Por exemplo, é possível modelar um sistema massa-mola considerando apenas a oscilação de um bloco preso a uma mola e descrever tal sistema por uma equação do tipo $x'(t) = Ax(t)$, considerando $B = 0$, pois não há um controle explícito. Mas, se desejarmos inserir uma força sob o bloco deste

mesmo sistema, de modo a pará-lo abruptamente ou amortecer-lo, então podemos interpretar essa força como um tipo de controle, e a representação dessa perturbação no sistema é caracterizada por $B \neq 0$, introduzindo, assim, $Bu(t)$ à equação, obtendo por fim $x'(t) = Ax(t) + Bu(t)$.

Sobre a solução do sistema (2.1), temos o resultado a seguir.

Teorema 1: O problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t), t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possui como única solução a função

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0.$$

No caso em que $B \neq 0$, temos que a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bu(t), t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possui como única solução a função

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 + \int_{t_0}^t e^{(t-\sigma)A}Bu(\sigma)d\sigma$$

Demonstração. Ver páginas 331 e 336 de [1]. □

Veja que ao tratarmos dos sistemas lineares de controle autônomos, temos a presença de exponenciais de matrizes em sua solução e, portanto, será conveniente reescrevê-las de modo a tornar o cálculo viável. Faremos isso reescrevendo-as sob a Forma Canônica de Jordan.

Afim de facilitarmos algumas notações, nos referiremos ao sistema da equação (2.1), simplesmente, por (A, B) .

Para lidar com aplicações dentro da teoria de controle, ainda é necessário enunciar o seguinte resultado:

Teorema 2: Seja (A, B) um sistema de controle autônomo. As seguintes afirmações são equivalentes:

- 1) O sistema (A, B) é controlável em $[t_0, t_1]$ para algum $t_1 > t_0$.
- 2) O sistema (A, B) é controlável em $[t_0, t_1]$, para todo $t_1 > t_0$.
- 3) A matriz $W_{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\sigma A}BB^*e^{-\sigma A^*}d\sigma$ é não singular para algum $t_1 > t_0$.
- 4) A matriz $W_{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} e^{-\sigma A}BB^*e^{-\sigma A^*}d\sigma$ é não singular para todo $t_1 > t_0$.
- 5) A matriz de controlabilidade definida como a matriz $\mathbb{R}^{n \times mn}$ dada por:

$$M_c(A, B) := [B|AB|\dots|A^{n-1}B]$$

possui posto pleno, isto é, todas as linhas da matriz de controlabilidade são linearmente independentes, resultando em *posto* $M_c = n$.

Demonstração. Ver página 44 de [1]. □

As matrizes A^* e B^* citadas no teorema anterior são as adjuntas das matrizes A e B , respectivamente.

A importância deste teorema decorre do fato que ele nos garante que um sistema linear autônomo é controlável se o posto da matriz de controlabilidade definida no item (5) satisfaz a condição imposta e, ainda, nos garante que a matriz W_{t_1} definida no item (3) é não singular. Esta última afirmação garante que se o sistema for controlável, W_{t_1} possui inversa $W_{t_1}^{-1}$. Veremos a seguir que esta matriz denotada por $W_{t_1}^{-1}$ está presente na construção do controle de um sistema linear autônomo.

Por questões de praticidade, como os sistemas abordados neste trabalho são lineares, sem perda de generalidade, vamos considerar que $t_0 = 0$. Com isso em mente, a função de controle $u(t)$ é dada pelo teorema a seguir:

Teorema 3: Sejam (A, B) um sistema controlável autônomo e $t_1 > 0$. Sabendo que a matriz $W_{t_1} := \int_0^{t_1} e^{\sigma A^*} B B^* e^{\sigma A} d\sigma$, definindo a função $u(t)$ como

$$u(t) := B^* e^{(t_1-t)A^*} W_{t_1}^{-1} (x_1 - e^{t_1 A} x_0) \in [0, t_1]$$

o sistema será controlado, isto é, será possível conduzirmos o sistema (A, B) do estado inicial x_0 ao estado final x_1 desejado.

Demonstração. Ver página 51 de [1]. □

O objetivo de se estabelecer um controle, é conduzir um sistema de um estado inicial até um estado final desejado. Posteriormente, veremos exemplos da Forma Canônica de Jordan aplicada ao Controle de Equações Diferenciais via exponencial de matrizes.

2.5 OPERADORES NILPOTENTES

Um operador linear $A : E \rightarrow E$ é chamado nilpotente quando, para algum $k \in \mathbb{N}$, tem-se $A^k = 0$. O índice de um operador nilpotente é o menor valor k para o qual temos $A^k = 0$. E, claramente, temos que $A^{k-1} \neq 0$.

Um exemplo clássico e simples de uma matriz nilpotente é dado pelo operador $A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, definido por $Aa_1 = e_2, \dots, Aa_{k-1} = e_k, Aa_k = 0$, em que os vetores

Aa_j ($j = 1, \dots, k$) são as colunas da matriz A e os e_i ($i = 1, \dots, k$) são os vetores da base canônica de \mathbb{R}^k . Para $k = 3$, por exemplo, a matriz deste operador nilpotente tem a forma:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A^3 = 0$$

Logo, o índice do operador nilpotente A é igual a 3.

Alguns resultados sobre os operadores nilpotentes são imprescindíveis para os objetivos deste trabalho. Afim de abordarmos tais resultados, inicialmente introduzimos o seguinte lema:

Lema 3: Se $\{Au_1, \dots, Au_p\}$ é uma base da imagem do operador $A : E \rightarrow E$ e $\{v_1, \dots, v_q\}$ é uma base do núcleo de A , então $\{u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q\}$ é uma base de E .

Demonstração. Considere a combinação linear

$$\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p + \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_q v_q = 0. \quad (2.2)$$

Mostraremos inicialmente que todos vetores em (2.2) são linearmente independentes. Note que é possível multiplicarmos ambos os membros da combinação linear pelo operador A , obtendo

$$\alpha_1 Au_1 + \dots + \alpha_p Au_p + \gamma_1 Av_1 + \dots + \gamma_q Av_q = 0.$$

Como os vetores v_1, \dots, v_q formam uma base do núcleo de A , temos que $Av_i = 0, \forall v_i \{i = 1, \dots, q\}$. Logo, a expressão se reduz a

$$\alpha_1 Au_1 + \dots + \alpha_p Au_p = 0$$

Mas os vetores Au_1, \dots, Au_p são linearmente independentes, pois formam uma base da imagem de A . Portanto, $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$. Deste modo, (2.2) se reduz a $\gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_q v_q = 0$. Como os vetores v_1, \dots, v_q são linearmente independentes, pois formam uma base do núcleo, temos que $\gamma_1 = \dots = \gamma_q = 0$. Isso mostra que (2.2) é linearmente independente.

Agora, mostraremos que (2.2) gera o espaço vetorial E . Para isso, considere $w \in E$. Como $Aw \in Im(E)$, podemos escrever

$$Aw = \alpha_1 Au_1 + \dots + \alpha_p Au_p,$$

pois $\{Au_1, \dots, Au_p\}$ é uma base da imagem de A . A igualdade anterior pode ser reescrita como

$$A[w - (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p)] = 0$$

Assim, $w - (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p) \in \text{Nuc}(A)$, logo pode ser expresso como combinação linear dos elementos da base $\{v_1, \dots, v_q\}$. Temos então

$$w - (\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p) = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_q v_q,$$

ou seja, $w = \alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_p u_p + \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_q v_q$. Isso mostra que os vetores $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q$ geram E e, portanto, constituem uma base de E . \square

Com o Lema 3 estabelecido, provaremos o teorema a seguir com especial interesse em um de seus corolários, que nos assegura que o índice de um operador nilpotente é menor ou igual que a dimensão do espaço.

Teorema 4: Seja E um espaço vetorial definido sobre um corpo \mathbb{K} . Dado o operador $A : E \rightarrow E$, seja $u \in E$ um vetor tal que $A^{k-1}u \neq 0$ e $A^k u = 0$. Então os vetores $u, Au, \dots, A^{k-1}u$ são linearmente independentes.

Demonstração. Seja

$$\alpha_1 u + \alpha_2 Au + \dots + \alpha_k A^{k-1}u = 0.$$

Aplicando o operador A^{k-1} à esquerda de ambos os membros da igualdade (ou ainda, aplicando o operador A em ambos os membros da igualdade $k-1$ vezes), obtemos que $\alpha_1 A^{k-1}u = 0$. Como $A^{k-1}u \neq 0$, temos que $\alpha_1 = 0$. Consequentemente, a combinação linear considerada se reduz a

$$\alpha_2 Au + \dots + \alpha_k A^{k-1}u = 0.$$

Agora, aplicando o operador A^{k-2} , obtemos $\alpha_2 A^{k-1}u = 0$, logo $\alpha_2 = 0$. Prosseguindo de maneira análoga para os demais, tem-se, por fim, $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. Portanto os vetores $u, Au, \dots, A^{k-1}u$ são *L.I.* \square

Corolário 1: Em um espaço vetorial E de dimensão n definido sobre um corpo \mathbb{K} , o índice de um operador nilpotente A é menor ou igual a n .

Demonstração. Seja E um espaço vetorial de dimensão finita n . Suponhamos, por contradição um operador nilpotente de índice k , sendo $k > n$. Então, pelo teorema anterior obteríamos um conjunto linearmente independente com mais de n elementos em um espaço vetorial de dimensão n . Ora, isso é uma contradição, pois em um espaço vetorial de dimensão n , só é possível formar conjuntos linearmente independentes com n elementos ou menos. Logo, $k \leq n$. \square

Corolário 2: Seja $A : E \rightarrow E$ um operador nilpotente de índice n e E um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo \mathbb{K} . Existe uma base de E na qual a matriz de A tem a forma abaixo:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Não faremos explicitamente a demonstração do Corolário 2, pois a notação é verdadeiramente complicada. Entretanto, após o próximo teorema, faremos uma breve discussão para justificar que sua afirmação de fato se verifica.

Se o índice do operador nilpotente $A : E \rightarrow E$ for menor do que a dimensão do espaço E , mostraremos a seguir que existe uma base de E na qual a matriz de A é formada por blocos tais como o mostrado no Corolário 2, dispostos ao longo da diagonal.

Teorema 5: Seja $A : E \rightarrow E$ um operador nilpotente. Se o índice de A for menor que a dimensão do espaço E , então existe uma base de E na qual a matriz de A é formada por blocos do tipo

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

dispostos ao longo da diagonal.

Novamente, não demonstraremos este resultado, pois a notação também torna-se difícil, mas apresentaremos a ideia nos casos de índice 2 e 3, sendo análogos para demais valores.

Inicialmente, seja $A : E \rightarrow E$ nilpotente de índice 2. Então, $A^2 = 0$. Seja $\{Au_1, \dots, Au_p\}$ uma base de $Im(A)$. Note que $Im(A) \subset Nuc(A)$, logo existem vetores v_1, \dots, v_q tais que

$$\{Au_1, \dots, Au_p, v_1, \dots, v_q\}$$

é uma base de $Nuc(A)$. Pelo Lema 3,

$$U = \{u_1, Au_1, \dots, u_p, Au_p, v_1, \dots, v_q\}$$

é uma base de E .

Ora, podemos representar a matriz do operador linear através das coordenadas das imagens dos vetores da base U em relação a ela própria. Assim, temos

$$\begin{aligned}
 Au_1 &= 0.u_1 + 1.Au_1 + 0.u_2 + 0.Au_2 + \cdots + 0.u_p + 0.Au_p + 0.v_1 + \cdots + 0.v_q \\
 A^2u_1 &= 0 = 0.u_1 + 0.Au_1 + 0.u_2 + 0.Au_2 + \cdots + 0.u_p + 0.Au_p + 0.v_1 + \cdots + 0.v_q \\
 Au_2 &= 0.u_1 + 0.Au_1 + 0.u_2 + 1.Au_2 + \cdots + 0.u_p + 0.Au_p + 0.v_1 + \cdots + 0.v_q \\
 A^2u_2 &= 0 = 0.u_1 + 0.Au_1 + 0.u_2 + 0.Au_2 + \cdots + 0.u_p + 0.Au_p + 0.v_1 + \cdots + 0.v_q \\
 &\vdots \\
 Au_p &= 0.u_1 + 0.Au_1 + 0.u_2 + 0.Au_2 + \cdots + 0.u_p + 1.Au_p + 0.v_1 + \cdots + 0.v_q \\
 A^2u_p &= 0 = 0.u_1 + 0.Au_1 + 0.u_2 + 0.Au_2 + \cdots + 0.u_p + 0.Au_p + 0.v_1 + \cdots + 0.v_q \\
 Av_1 &= 0 = 0.u_1 + 0.Au_1 + 0.u_2 + 0.Au_2 + \cdots + 0.u_p + 0.Au_p + 0.v_1 + \cdots + 0.v_q \\
 &\vdots \\
 Av_q &= 0 = 0.u_1 + 0.Au_1 + 0.u_2 + 0.Au_2 + \cdots + 0.u_p + 0.Au_p + 0.v_1 + \cdots + 0.v_q
 \end{aligned}$$

Observe que, para o operador nilpotente de índice 2, temos ao longo da diagonal os blocos da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Note também que a matriz do operador é formada por p blocos seguidos de q colunas nulas, e $\dim(E) = 2p + q$.

Agora, suponhamos $A : E \rightarrow E$ nilpotente de índice 3. A restrição $A^3 = 0$, nos da $Im(A^2) \subset Nuc(A)$. Assim, uma base da imagem de A é da forma

$$\{Au_1, A^2u_1, \dots, Au_p, A^2u_p, Av_1, \dots, Av_q\}$$

Logo, temos

$$\{A^2u_1, \dots, A^2u_p, Av_1, \dots, Av_q, w_1, \dots, w_r\}$$

uma base de $Nuc(A)$. Pelo Lema 3, o conjunto

$$\{u_1, Au_1, A^2u_1, \dots, u_p, Au_p, A^2u_p, v_1, Av_1, \dots, v_q, Av_q, w_1, \dots, w_r\}$$

é uma base de E .

Prosseguindo para encontrarmos as coordenadas dos vetores da base, temos

$$\begin{aligned}
Au_1 &= 0.u_1 + 1.Au_1 + 0.A^2u_1 + \cdots + 0.u_p + 0.Au_p + 0.A^2u_p + 0.v_1 + 0.Av_1 + \cdots + 0.v_q + \\
&\quad 0.Av_q + 0.w_1 + \cdots + w_r \\
A^2u_1 &= 0.u_1 + 0.Au_1 + 1.A^2u_1 + \cdots + 0.u_p + 0.Au_p + 0.A^2u_p + 0.v_1 + 0.Av_1 + \cdots + 0.v_q + \\
&\quad 0.Av_q + 0.w_1 + \cdots + w_r \\
A^3u_1 &= 0 \\
&\quad \vdots \\
Au_p &= 0.u_1 + 0.Au_1 + 0.A^2u_1 + \cdots + 0.u_p + 1.Au_p + 0.A^2u_p + 0.v_1 + 0.Av_1 + \cdots + 0.v_q + \\
&\quad 0.Av_q + 0.w_1 + \cdots + w_r \\
A^2u_p &= 0.u_1 + 0.Au_1 + 0.A^2u_1 + \cdots + 0.u_p + 0.Au_p + 1.A^2u_p + 0.v_1 + 0.Av_1 + \cdots + 0.v_q + \\
&\quad 0.Av_q + 0.w_1 + \cdots + w_r \\
A^3u_p &= 0 \\
Av_1 &= 0 \\
A^2v_1 &= 0 \\
&\quad \vdots \\
Av_q &= 0 \\
A^2v_q &= 0 \\
Aw_1 &= 0 \\
&\quad \vdots \\
Aw_r &= 0
\end{aligned}$$

Note que o operador nilpotente de índice 3 possui p blocos ao longo da diagonal os blocos da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, teremos $q + r$ colunas nulas e $2p + q + r = \dim(E)$.

O processo segue análogo para operadores nilpotentes de índices maiores, mas como já mencionado, a notação torna-se trabalhosa e enfadonha. Além disso, veja que a demonstração do Corolário 2 segue de maneira análoga, mas com índice do operador nilpotente igual a n . A seguir apresentaremos a definição de subespaço cíclico, afim de utilizá-la posteriormente.

Definição 2: Seja $A : E \rightarrow E$. Dizemos que um subespaço vetorial $F \subset E$ é cíclico (em relação a A) quando existe um vetor $u \in F$ tal que $A^m u = 0$ e $\{u, Au, \dots, A^{m-1}u\}$

é uma base de F . Isto significa que $F \subset E$ é um subespaço vetorial de dimensão m , invariante por A , e que a restrição de A ao subespaço F é um operador nilpotente de índice m .

O próximo teorema é o resultado fundamental que nos interessa a respeito de operadores nilpotentes, sua afirmação será essencial nas seções seguintes.

Teorema 6: Seja $A : E \rightarrow E$ um operador nilpotente de índice k num espaço vetorial de dimensão n . Existem inteiros $k_1 = k \geq k_2 \geq \dots \geq k_r > 0$, tais que $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ onde cada F_i é um subespaço cíclico de dimensão k_i .

Demonstração. Pelo Teorema 6, veja que é possível obtermos uma base na qual a matriz de A é formada por r blocos A_i de ordem k_i que percorrem a diagonal. É válida a decomposição de $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_r$ pela definição de soma direta. E ainda, é imediato que $\dim(F_1) + \dots + \dim(F_i) = \dim(E)$. Sendo $\dim(F_i) = k_i$ ($i = 1, \dots, r$), tem-se que $0 < k_r \leq \dots \leq k_2 \leq k_1 = k$ e $k_1 + \dots + k_r = n$. Basta selecionarmos, em cada F_i , ($i = 1, \dots, r$) uma base

$$V_i = \{u_i, Au_i, \dots, A^{k_i-1}u_i\},$$

e obtemos uma base $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_r$ que satisfaz o que queríamos. \square

3 A FORMA CANÔNICA DE JORDAN

Dado um operador linear $A : E \rightarrow E$ em um espaço vetorial complexo de dimensão finita, provaremos que existe uma base em E na qual a matriz de A tem a Forma Canônica de Jordan, ou seja, é triangular inferior, os autovalores que formam sua diagonal são repetidos consecutivamente de acordo com suas multiplicidades algébricas e, além disso, os elementos imediatamente abaixo da diagonal são iguais a 0 ou 1 e todos os demais elementos são nulos. Para isso, será necessário abordarmos alguns resultados, afim de garantir a existência da Forma Canônica de Jordan para um operador linear A em um espaço vetorial de dimensão finita.

Afim de prosseguirmos nas demonstrações, introduziremos a seguir três teoremas que nos fornecerão auxílio para justificarmos a Forma Canônica de Jordan.

Teorema 7: Seja $A : E \rightarrow E$ um operador linear em um espaço vetorial (real ou complexo) de dimensão finita. Existe uma decomposição $E = F \oplus G$, como soma direta de subespaços invariantes F, G tais que A é nilpotente em F e invertível em G .

Demonstração. Como a dimensão de E é finita, a sequência de subespaços invariantes

$$E \supset Im(A) \supset Im(A^2) \supset \dots$$

não pode ser estritamente decrescente para sempre. Então, seja k o menor número natural tal que $Im(A^k) = Im(A^{k+1})$. Note que $Im(A^{k+1}) = Im(A^{k+2})$. Uma vez que

$$Im(A^{k+2}) = A [Im(A^{k+1})] = A [Im(A^k)] = Im(A^{k+1}).$$

Semelhantemente, segue-se que $Im(A^{k+2}) = Im(A^{k+3})$, e assim por diante.

Também é possível afirmarmos que

$$N(A) \subset N(A^2) \subset \dots \subset N(A^k) = N(A^{k+1}) = N(A^{k+2}) = \dots$$

De fato, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos:

$$\dim N(A^{k+1}) = \dim E - \dim Im(A^{k+1}) = \dim E - \dim Im(A^k) = \dim N(A^k).$$

Sejam $F = N(A^k)$ e $G = Im(A^k)$. Evidentemente, F e G são invariantes por A e a restrição $A : F \rightarrow F$ é nilpotente. Além disso, a restrição $A : G \rightarrow G$ é um operador sobrejetivo pois

$$A(G) = A [Im(A^k)] = Im(A^{k+1}) = Im(A^k) = G.$$

Como G tem dimensão finita e $A : G \rightarrow G$ é sobrejetivo, temos que A também é injetivo e, portanto, é invertível.

Mostraremos agora que $E = F \oplus G$. Dado $v \in E$, como $\text{Im}(A^k) = \text{Im}(A^{2k})$, existe $x \in E$ tal que $A^k v = A^{2k} x$. Então, se escrevermos

$$v = (v - A^k x) + A^k x,$$

veremos que $A^k(v - A^k x) = A^k v - A^{2k} x = 0$, logo $v - A^k x \in F$ e, obviamente, $A^k x \in G$. Assim, todo elemento $v \in E$ é soma de um vetor de F com um vetor de G , ou seja, $E = F + G$. Para concluir que $E = F \oplus G$, resta apenas mostrar que $F \cap G = \{0\}$. Ora, sabemos que

$$\dim F + \dim G = \dim(F + G) + \dim(F \cap G) = \dim E + \dim(F \cap G)$$

Por outro lado, o Teorema do Núcleo e da Imagem, aplicado ao operador $A^k : E \rightarrow E$, nos fornece que

$$\dim E = \dim F + \dim G.$$

Segue-se então que $\dim(F \cap G) = 0$, isto é, $F \cap G = \{0\}$. □

Lema 4. Seja $F \subset E$ um subespaço invariante pelo operador $A : E \rightarrow E$. Se A_F representa a restrição $A : F \rightarrow F$ de A ao subespaço F , então o polinômio característico de A_F , representado por p_{A_F} , é um divisor do polinômio característico de A representado por p_A . Portanto, p_A é um múltiplo de p_{A_F} .

Demonstração. Sejam \mathbf{a}' a matriz de A_F numa base $\beta' \subset F$ e \mathbf{a} a matriz de A numa base $\beta \supset \beta'$ tal que $\beta \subset E$. Então

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}' & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} \end{bmatrix}; \mathbf{a} - \lambda I_n = \begin{bmatrix} \mathbf{a}' - \lambda I_r & \mathbf{b} \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} - \lambda I_{n-r} \end{bmatrix},$$

onde $r = \dim(F)$ e $n = \dim(E)$. É possível escrever

$$p_A(\lambda) = \det(\mathbf{a} - \lambda I_n) = \det(\mathbf{a}' - \lambda I_r) \cdot \det(\mathbf{c} - \lambda I_{n-r}) = p_{A_F}(\lambda) \cdot q(\lambda),$$

onde

$$q(\lambda) = \det(\mathbf{c} - \lambda I_{n-r}).$$

Portanto $p_A(\lambda)$ é um múltiplo de $p_{A_F}(\lambda)$. □

Teorema 8: Seja $A : E \rightarrow E$ um operador linear com $E = F \oplus G$ tal que F, G são invariantes, com A nilpotente em F e invertível em G . Se n_0 é a multiplicidade algébrica do autovalor 0 do operador $A : E \rightarrow E$, então a dimensão do subespaço F é igual a

n_0 . Além disso, F é o núcleo e G é a imagem de $A^{n_0} : E \rightarrow E$. Segue-se daí que a decomposição $E = F \oplus G$, como descrito no Teorema 7, é única.

Demonstração. Sejam $A_F : F \rightarrow F$ e $A_G : G \rightarrow G$ as restrições do operador A aos subespaços invariantes F e G . Como A_F é nilpotente e A_G é invertível, o polinômio característico de A_F é $p_{A_F}(\lambda) = (-\lambda)^n$, $n = \dim F$, e o de A_G cumpre a condição $p_{A_G}(0) \neq 0$, pois é não singular. A demonstração do Lema 4 nos garante

$$p_A = p_{A_F} \cdot p_{A_G}.$$

Por outro lado,

$$p_A(\lambda) = \lambda^{(n_0)} \cdot q(\lambda),$$

pois a multiplicidade do autovalor 0 é n_0 , e temos $q(0) \neq 0$. Assim,

$$\lambda^{n_0} \cdot q(\lambda) = \lambda^n \cdot p_{A_G}(\lambda),$$

com $p_{A_G}(0) \neq 0$ e $q(0) \neq 0$. Segue-se que $n = n_0$ e, sendo A nilpotente no subespaço F de dimensão n_0 , tem-se $F \subset \text{Nuc}(A^{n_0})$, pois $A^{n_0}v = 0, \forall v \in F$. Reciprocamente, se $u \in \text{Nuc}(A^{n_0})$, escrevemos $u = v + w$, com $v \in F$ (logo $A^{n_0}v = 0$) e $w \in G$. Então $0 = A^{n_0}v + A^{n_0}w$. Assim $A^{n_0}w = 0$. Sendo A invertível em G , de $A^{n_0}w = 0$ conclui-se que $w = 0$, logo $u = v \in F$. Assim, $F = \text{Nuc}(A^{n_0})$. Para provar que $G = \text{Im}(A^{n_0})$, observemos primeiro que, sendo A invertível em G , o operador $A^{n_0} : G \rightarrow G$ também é invertível, logo $G \subset \text{Im}(A^{n_0})$. Por outro lado, para todo $u \in E$, escrevendo $u = v + w$ com $v \in F$ e $w \in G$, temos $A^{n_0}u = A^{n_0}w \in G$ (pois G é invariante por A). Logo $\text{Im}(A^{n_0}) \subset G$. Assim, $\text{Im}(A^{n_0}) = G$. \square

Para uso na demonstração do próximo teorema, notemos aqui se

$$E = F_1 + \cdots + F_r \text{ e } \dim E = \dim F_1 + \cdots + \dim F_r,$$

então $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$. De fato, tomando em cada subespaço F_i uma base β_i ($i = 1, \dots, r$), o conjunto $\beta = \beta_1 \cup \cdots \cup \beta_r$ gera E e o número de elementos de β é menor ou igual à dimensão de E . Logo β é uma base de E . Assim, todo vetor $v \in E$ se exprime, de modo único, como soma $v = v_1 + \cdots + v_r$, com $v_1 \in F_1, \dots, v_r \in F_r$. Isso nos diz que $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_r$.

Teorema 9: Sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ os autovalores distintos do operador $A : E \rightarrow E$, num espaço vetorial complexo de dimensão finita. Para cada $i = 1, \dots, r$, sejam n_i a multiplicidade algébrica de λ_i e $E_i = N[(A - \lambda_i I)^{n_i}]$. Então $\dim E_i = n_i$ e $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_r$.

Demonstração. Mostraremos inicialmente que n_i é também a multiplicidade algébrica do autovalor 0 do operador $A_i = A - \lambda_i I$. Note que,

$$\begin{aligned} p_{A_i}(\lambda) &= \det [(A - \lambda_i I) - \lambda I] \\ &= \det [A - (\lambda + \lambda_i)I] = p_A(\lambda + \lambda_i). \end{aligned}$$

E ainda, $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^{n_i} q(\lambda)$ com $q(\lambda_i) \neq 0$. Com estas expressões, é possível escrever $p_{A_i} = P_A(\lambda + \lambda_i) = \lambda^{n_i} r(\lambda)$, onde $r(\lambda) = q(\lambda + \lambda_i)$, portanto $r(0) \neq 0$. Isto estabelecido, o Teorema 8 nos assegura que $\dim E_i = n_i$. Em particular, $\dim E_1 + \dots + \dim E_r = \dim E$. Pela observação que precede este teorema, resta-nos apenas provar que $E = E_1 + \dots + E_r$. Ora, o polinômio característico do operador A se decompõe na forma

$$p_A(\lambda) = \prod_{j=1}^r (\lambda - \lambda_j)^{n_j}.$$

Se pusermos

$$q_i(\lambda) = \prod_{j \neq i} (\lambda - \lambda_j)^{n_j},$$

obteremos os polinômios $q_1(\lambda), \dots, q_r(\lambda)$, primos entre si. Do Teorema de Bezout, existem polinômios $m_1(\lambda), \dots, m_r(\lambda)$ tais que

$$m_1(\lambda)q_1(\lambda) + \dots + m_r(\lambda)q_r(\lambda) = 1.$$

Segue-se que

$$m_1(A)q_1(A) + \dots + m_r(A)q_r(A) = I.$$

Assim, para todo $v \in E$, tem-se

$$v = v_1 + \dots + v_r, v_i = m_i(A)q_i(A)v.$$

Pelo Teorema de Cayley-Hamilton¹, temos

$$A_i^{n_i} \cdot q_i(A) = (A - \lambda_i I)^{n_i} \cdot \prod_{j \neq i} (A - \lambda_j I)^{n_j} = \prod_{j=1}^r (A - \lambda_j I)^{n_j} = p_A(A) = 0.$$

Logo $A_i^{n_i} v_i = 0$, ou seja, $v_i \in E_i$ pra todo $i = 1, \dots, r$. Isto conclui a demonstração do teorema. \square

Teorema 10 Os subespaços $E_i = N [(A - \lambda_i I)^{n_i}]$ definidos no Teorema 9 são invariantes por qualquer operador $B : E \rightarrow E$ que comute com A .

Demonstração. Seja A o operador em questão. Consideremos um operador qualquer $B : E \rightarrow E$. Supomos então, que $AB = BA$. Disto, obtemos que

$$\begin{aligned} AB = BA &\Rightarrow (A - \lambda_i I)B = B(A - \lambda_i I) \\ &\Rightarrow [(A - \lambda_i I)^{n_i}]B = B[(A - \lambda_i I)^{n_i}] \end{aligned}$$

¹ Ver [5], página 289.

Seja $u \in E_i = Nuc[(A - \lambda_i I)^{n_i}]$. Veja que

$$\begin{aligned} [(A - \lambda_i I)^{n_i}] Bu &= B[(A - \lambda_i I)^{n_i}] u = B(0) = 0 \\ \Rightarrow Bu &\in Nuc[(A - \lambda_i I)^{n_i}] Bu = E_i. \end{aligned}$$

Logo, $E_i = Nuc[(A - \lambda_i I)^{n_i}]$ são invariantes por qualquer operador B que comute com A . \square

Corolário 3: Os subespaços E_1, \dots, E_r são invariantes por A .

Demonstração. De fato, pelo Teorema 10 os subespaços E_i são invariantes por qualquer operador que comute com A , em particular, o próprio A . \square

Um bloco de Jordan é uma matriz triangular inferior de ordem k da forma

$$J(\lambda; k) = \begin{bmatrix} \lambda & & & & & \\ 1 & \lambda & & & & \\ & 1 & \ddots & & & \\ & & \ddots & \lambda & & \\ & & & & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

onde os elementos da diagonal são todos iguais, os elementos imediatamente abaixo da diagonal são todos iguais a 1 e os demais elementos são zeros. Diz-se que uma matriz está na Forma Canônica de Jordan quando ela é triangular inferior, com blocos de Jordan ao longo da diagonal e os demais elementos iguais a zero. Os blocos de Jordan devem estar agrupados consecutivamente em listas do tipo

$$J(\lambda_i; k_1), J(\lambda_i; k_2), \dots, J(\lambda_i; k_{s_i}),$$

nos quais k_{s_i} representa a multiplicidade algébrica do autovalor λ_i da matriz dada. Por exemplo, dispondo os blocos $J_1(\lambda_1; 3)$, $J_2(\lambda_2; 1)$ e $J_3(\lambda_3; 2)$ ao longo da diagonal, obtemos uma matriz 6×6 na Forma Canônica de Jordan:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Teorema 11: Para todo operador $A : E \rightarrow E$ em um espaço vetorial complexo de dimensão finita, existe uma base na qual a matriz de A tem a Forma Canônica de Jordan.

Demonstração. Seja $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_r$ a decomposição assegurada pelo Teorema 9. O Teorema 6 prova a existência da Forma Canônica de Jordan para operadores nilpotentes. Ora, para cada $i = 1, \dots, r$, a restrição $A - \lambda_i I : E_i \rightarrow E_i$ é nilpotente. Logo existe uma base $\beta_i \subset E_i$ na qual a matriz de $A - \lambda_i I : E_i \rightarrow E_i$ tem a Forma Canônica de Jordan (com zeros na diagonal). Logo a matriz da restrição $A = (A - \lambda_i I) + \lambda_i I : E_i \rightarrow E_i$ também tem a Forma Canônica de Jordan (com os elementos da diagonal todos iguais a λ_i). Segue-se que $\beta_1 \cup \cdots \cup \beta_r$ é uma base de E na qual a matriz de A tem a Forma Canônica de Jordan. \square

Conforme mencionado anteriormente, dizemos que uma matriz J está sob a Forma Canônica de Jordan quando é formada por blocos de Jordan

$$J_1(\lambda_1; k_1), J_2(\lambda_2; k_2), \dots, J_i(\lambda_i; k_{s_i}),$$

colocados sob forma diagonal da seguinte maneira:

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_i \end{bmatrix}$$

e todos os demais elementos da matriz J são zeros.

A seguir, apresentaremos a definição de autovetor generalizado. Esta, nos é útil, pois fornece informações sobre como obter todos os autovetores de um operador linear A que possui autovalores de multiplicidade algébrica maior que um, e ainda, uma maneira prática de encontrarmos uma base na qual o operador linear tem a Forma Canônica de Jordan.

Definição 3: Um vetor v_m é um autovetor generalizado de grau m da matriz A e correspondente ao autovalor λ se $(A - \lambda I)^m v_m = 0$, com $(A - \lambda I)^{m-1} v_m \neq 0$

Definição 4: Seja v_m um autovetor generalizado de grau m correspondente à matriz A e o autovalor λ . A cadeia gerada por v_m é um conjunto de vetores $\{v_m, v_{m-1}, \dots, v_1\}$ dado por

$$\begin{aligned} v_{m-1} &= (A - \lambda I)v_m, \\ v_{m-2} &= (A - \lambda I)^2 v_m = (A - \lambda I)v_{m-1}, \\ v_{m-3} &= (A - \lambda I)^3 v_m = (A - \lambda I)v_{m-2}, \\ &\vdots \\ v_1 &= (A - \lambda I)^{m-1} v_m = (A - \lambda I)v_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

Assim, em geral

$$v_j = (A - \lambda I)^{m-j} v_m = (A - \lambda I) v_{j+1}, (j = 1, 2, \dots, m-1)$$

O vetor v_j dado pela equação (3.2) é um autovetor generalizado de grau j correspondente ao autovalor λ . Uma cadeia é um conjunto linearmente independente de vetores.

Com isso, temos os resultados suficientes para encontrar uma matriz mudança de base em um espaço vetorial E de dimensão finita, na qual um operador linear A tem a forma canônica de Jordan. De fato, seja $E = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_r$ a decomposição assegurada pelo Teorema 9. Para cada $E_i, i = 1, \dots, r$, selecionemos a base

$$\beta_i = \{v_m, (A - \lambda I)v_m, (A - \lambda I)^2 v_m, \dots, (A - \lambda I)^{m-1} v_m\},$$

isto é,

$$\beta_i = \{v_m, v_{m-1}, v_{m-2}, \dots, v_1\}.$$

Note que esta base é formada pelos autovetores generalizados associados a λ_i . Segue do Teorema 11 que $\beta = \beta_1 \cup \dots \cup \beta_r$ é uma base de E , em que cada β_i é uma base formada por autovetores generalizados associados a λ_i e, conseqüentemente, β é uma base de E formada por todos os autovetores generalizados de A .

Matricialmente, temos que qualquer operador linear A de um espaço vetorial de dimensão finita pode ser representado por uma identidade do tipo

$$P^{-1}AP = J,$$

ou ainda,

$$A = PJP^{-1},$$

em que P é a matriz da base na qual o operador A é representado sob a forma canônica de Jordan J . Esta base é chamada base de Jordan e é composta pelos autovetores generalizados do operador A .

4 APLICAÇÕES - CONTROLES LINEARES AUTÔNOMOS

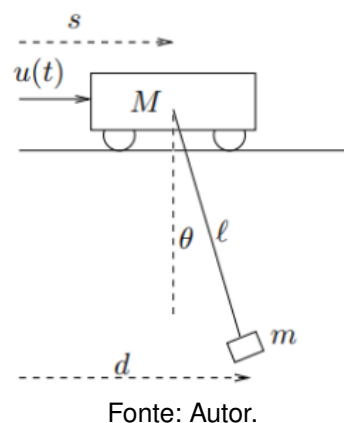
Neste capítulo discorreremos sobre a aplicação da Forma Canônica de Jordan no controle de uma equação diferencial por meio da exponencial de matrizes.

4.1 PÊNULO SIMPLES PRESO A UM CARRO

Imagine um carro com uma corda presa ao seu centro. Suponha que na outra extremidade da corda foi anexado um objeto com outra massa. Tem-se então, um pêndulo fixo a um carro como ilustrado na Figura 1. Essa representação também pode ser visualizada como uma garra portuária utilizada para carregamento de containers em portos, como é mostrado na Figura 2. O carrinho é conduzido por um motor que no instante t exerce uma força $u(t)$ tomada como controle. Assumimos que todo movimento ocorre num plano, ou seja, o carrinho se move ao longo de uma linha reta.

Sejam M a massa do carrinho, m a massa do pêndulo, que supomos estar concentrada na extremidade da corda, l o comprimento da corda, s o deslocamento do centro do carrinho em relação a algum ponto fixo, d o deslocamento horizontal da ponta do pêndulo ao mesmo ponto fixo, θ o ângulo que o pêndulo forma com a vertical e g a aceleração da gravidade.

FIGURA 1 – PÊNULO PRESO A UM CARRO



Desprezando atritos no sistema e escolhendo o deslocamento do centro do carrinho s em relação a algum ponto fixo, o deslocamento horizontal da ponta do pêndulo d em relação ao mesmo ponto fixo, a velocidade do carro s' , e a velocidade do pêndulo d' , estabelecemos o vetor das variáveis de estado como $x = (s, s', d, d')$. A representação matricial da equação do sistema obtido é:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

FIGURA 2 – GARRA DE PORTO



Fonte: Google.

ou ainda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} s' \\ s'' \\ d' \\ d'' \end{bmatrix}}_{x'(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g}{l} & 0 & -\frac{g}{l} & 0 \end{bmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{bmatrix} s \\ s' \\ d \\ d' \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=:B} u(t). \quad (4.1)$$

Esta modelagem é feita de tal modo que, ao realizarmos todas as operações de soma e multiplicação entre as matrizes obtemos em cada uma das linhas, exatamente as mesmas equações estabelecidas para descrever cada parte do sistema.

Utilizando o item (5) do Teorema 2, vemos que este sistema é de fato controlável, pois

$$M_c(A, B) = [B|AB|A^2B|A^3B] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{M} & 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{g}{lM} \\ 0 & 0 & \frac{g}{lM} & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que $\text{posto } M_c(A, B) = 4$. Note que neste caso o número de linhas e colunas da matriz A na equação (4.1) é $n = 4$. Então, como descrito no Teorema 3, existe um controle para o sistema (4.1) dado por

$$u(t) = B^* e^{A^*(t_1-t)} W_{t_1}^{-1} (x_1 - e^{At_1} x_0).$$

em que x_0 e x_1 são as variáveis de estado e

$$W_{t_1} = \int_0^{t_1} e^{A\sigma} B B^* e^{A^*\sigma} d\sigma.$$

Como $B^* = \overline{B}^T$, precisamos calcular as exponenciais das matrizes, para em seguida proceder com as demais operações de modo a encontrar o controle $u(t)$.

Conforme descrito na Definição 1, a exponencial da matriz $e^{\sigma A}$, presente no controle do sistema, é escrita como:

$$e^{\sigma A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^k A^k}{k!}.$$

Afim de enfatizarmos alguns passos no cálculo, inicialmente nos focaremos apenas em e^A . Veja que, é possível escrever qualquer operador $A = PJP^{-1}$ em que J é a Forma Canônica de Jordan da matriz A e P é a matriz da base de Jordan. Assim, temos que

$$e^A = e^{PJP^{-1}}.$$

Pelo item (4) no Lema 1, temos

$$e^A = Pe^JP^{-1}.$$

Deste modo, temos que calcular e^J sendo J a forma canônica de Jordan da matriz A . E além disso, temos

$$e^J = \begin{bmatrix} e^{J_1} & & & & \\ & e^{J_2} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & e^{J_r} \end{bmatrix},$$

observe que para obter e^J calculamos a exponencial em cada um dos blocos $J_i(\lambda_i; k_{s_i})$ ($i = 1, \dots, r$) de J uma vez que os demais elementos são iguais a zero, isto é

$$e^J = \text{diag} [\exp\{J_1(\lambda_1, k_1)\}, \exp\{J_2(\lambda_2, k_2)\}, \dots, \exp\{J_i(\lambda_i, k_{s_i})\}].$$

Temos que cada bloco é escrito como uma matriz da seguinte forma:

$$J_i(\lambda_i, k_{s_i}) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Note que é possível reescrever o bloco J_i como uma soma entre uma matriz diagonal D_i e uma matriz nilpotente N_i , isto é,

$$J_i = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}}_{=:D_i} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{=:N_i}.$$

Isso implica que $e^{J_i} = e^{D_i + N_i}$, sendo N_i uma matriz nilpotente e D_i uma diagonal (cuja diagonal é composta pelos autovalores λ_i). Veja que D_i e N_i comutam, pois

$$D_i N_i = N_i D_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_i & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, pelo item (2) do Lema 1, temos que $e^{D_i + N_i} = e^{D_i} e^{N_i}$.

Concluimos que

$$\begin{aligned} e^A &= P e^J P^{-1} = P \operatorname{diag} [\exp\{J_1(\lambda_1, k_1)\}, \dots, \exp\{J_i(\lambda_i, k_{s_i})\}] P^{-1} \\ &= P \operatorname{diag} [\exp\{D_1\} \exp\{N_1\}, \dots, \exp\{D_i\} \exp\{N_i\}] P^{-1}. \end{aligned}$$

A respeito da relação $J_i = D_i + N_i$, cabe destacar que se o bloco J_i for o bloco do autovalor 0, então D_i é a matriz nula. Logo, pelo item (1) do Lema 1, temos $e^0 = I$. Deste modo, estaríamos lidando com a exponencial de uma matriz nilpotente. Caso seja algum autovalor λ não nulo, temos $e^D = \operatorname{diag} [\exp\{\lambda\}, \dots, \exp\{\lambda\}]$.

Prosseguindo nos cálculos da exponencial, inicialmente buscando encontrar a Forma Canônica de Jordan e a base de Jordan da matriz A , precisamos de seus autovalores que são $\lambda_1 = i\sqrt{\frac{g}{l}}$, $\lambda_2 = -i\sqrt{\frac{g}{l}}$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$, sendo 0 um autovalor de multiplicidade algébrica igual a dois e i a unidade imaginária.

Na equação $(A - \lambda_1 I)v_1 = 0$ encontramos os autovetores de λ e escolhemos o representante $v_1 = (0, 0, i, -\sqrt{\frac{g}{l}})$ como autovetor associado a λ_1 . Procedendo analogamente, temos que $v_2 = (0, 0, i, \sqrt{\frac{g}{l}})$ é um autovetor associado a λ_2 .

Para λ_3 , ao resolvermos $(A - 0I)v_3 = 0$ é possível definir $v_3 = (1, 0, 1, 0)$. E para λ_4 , tem-se a cadeia $(A - 0I)v_4 = v_3$, sendo possível definir o autovetor generalizado relacionado a λ_4 como $v_4 = (0, 1, 0, 1)$.

Com isso, ficam estabelecidos os blocos de Jordan

$$J_1(0; 2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, J_2(i\sqrt{\frac{g}{l}}; 1) = [i\sqrt{\frac{g}{l}}], J_3(-i\sqrt{\frac{g}{l}}; 1) = [-i\sqrt{\frac{g}{l}}].$$

Assim, é possível escrever

$$P \sigma J P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & i \\ 1 & 0 & -\sqrt{\frac{g}{l}} & \sqrt{\frac{g}{l}} \end{bmatrix} \sigma \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{\frac{g}{l}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i\sqrt{\frac{g}{l}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2i} & \frac{\sqrt{l}}{2\sqrt{g}} & \frac{1}{2i} & -\frac{\sqrt{l}}{2\sqrt{g}} \\ -\frac{1}{2i} & -\frac{\sqrt{l}}{2\sqrt{g}} & \frac{1}{2i} & \frac{\sqrt{l}}{2\sqrt{g}} \end{bmatrix}.$$

Da maneira como foi descrito anteriormente, temos que $e^{\sigma J}$ é a exponencial calculada em cada bloco separadamente. Deste modo, obtemos

$$e^{\sigma J_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma^k J_1^k}{k!} = \frac{\sigma^0 J_1^0}{0!} + \frac{\sigma^1 J_1^1}{1!} + 0,$$

pois $\forall k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \geq 2$ tem-se $J_1^k = 0$. Então,

$$e^{\sigma J_1} = I + \sigma \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Note que $e^{J_2} = e^{(i\sigma\sqrt{g/l})}$, $e^{J_3} = e^{(-i\sigma\sqrt{g/l})}$. Logo, $e^{\sigma A}$ é escrita de maneira equivalente como

$$\begin{aligned} e^{\sigma A} &= P e^{\sigma J} P^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i & i \\ 1 & 0 & -\sqrt{g/l} & \sqrt{g/l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{(\sigma i \sqrt{g/l})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{(-\sigma i \sqrt{g/l})} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2i} & \frac{\sqrt{l}}{2\sqrt{g}} & \frac{1}{2i} & -\frac{\sqrt{l}}{2\sqrt{g}} \\ -\frac{1}{2i} & -\frac{\sqrt{l}}{2\sqrt{g}} & \frac{1}{2i} & \frac{\sqrt{l}}{2\sqrt{g}} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Temos então

$$e^{\sigma A} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - \frac{e^{(i\sigma\sqrt{g/l})} + e^{-(i\sigma\sqrt{g/l})}}{2} & \sigma + \frac{-ie^{-(i\sigma\sqrt{g/l})} + ie^{(i\sigma\sqrt{g/l})}}{2\sqrt{g/l}} & \frac{e^{(i\sigma\sqrt{g/l})} + e^{-(i\sigma\sqrt{g/l})}}{2} & \frac{-ie^{(i\sigma\sqrt{g/l})} + ie^{-(i\sigma\sqrt{g/l})}}{2\sqrt{g/l}} \\ \frac{-i\frac{g}{l}e^{(i\sigma\sqrt{g/l})} + i\frac{g}{l}}{2} & 1 + \frac{e^{(i\sigma\sqrt{g/l})} - e^{-(i\sigma\sqrt{g/l})}}{2} & \frac{i\sqrt{g/l}e^{(i\sigma\sqrt{g/l})} - i\frac{g}{l}e^{-(i\sigma\sqrt{g/l})}}{2} & \frac{e^{(i\sigma\sqrt{g/l})} + e^{-(i\sigma\sqrt{g/l})}}{2} \end{bmatrix}.$$

Para lidar com a parte imaginária, de modo que tenhamos apenas números reais, podemos recorrer a fórmula de Euler: $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Veja que $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$. Assim, $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta)$ e $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i \sin(\theta)$ implica em

$$\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos(\theta) \text{ e } i \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} = \sin(\theta).$$

Utilizando essas relações, obtemos que

$$e^{\sigma A} = \begin{bmatrix} 1 & \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 - \cos(\sigma\sqrt{g/l}) & \sigma - \frac{\sin(\sigma\sqrt{g/l})}{\sqrt{g/l}} & \cos(\sigma\sqrt{g/l}) & \frac{\sin(\sigma\sqrt{g/l})}{\sqrt{g/l}} \\ \sqrt{g/l} \sin(\sigma\sqrt{g/l}) & 1 - \cos(\sigma\sqrt{g/l}) & -\sqrt{g/l} \sin(\sigma\sqrt{g/l}) & \cos(\sigma\sqrt{g/l}) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Da maneira como calculamos $e^{\sigma A}$, é fácil ver que basta substituir σ em (4.2) por t para obtermos e^{tA} . Do Lema 2, $e^{\sigma A^*} = (e^{\sigma A})^*$, obtemos e^{A^*t} simplesmente substituindo

t em σ . Com estas matrizes em mãos, podemos, por fim, determinar o controle $u(t)$ para a equação (4.1).

Os cálculos restantes se resumem a multiplicações entre matrizes e integrais de matrizes. Afim de reduzir o trabalho computacional dos cálculos, definiremos a partir de agora $g = 10m/s^2$, $l = 10m$, $t_1 = 30s$, $M = 20000g$. Os vetores de estado inicial x_0 e estado final x_1 serão $x_0 = (0, 0, 0, 0)$ e $x_1 = (10, 0, 10, 0)$, ou seja, estabeleceremos que o carro e o pêndulo inicialmente estarão parados em uma posição inicial 0, e os conduziremos até uma posição final 10, de modo que, após 30s, o pêndulo e o carro parem simultaneamente atingindo-a.

A partir deste ponto, cabe mencionar que as igualdades obtidas podem se tratar de pequenas aproximações dos resultados, isso devido a erros em arredondamento de decimais. Deste modo, teremos

$$W_{30} = \begin{bmatrix} 2,25 \cdot 10^{-5} & 1,125 \cdot 10^{-6} & 2,2514 \cdot 10^{-5} & 1,20122 \cdot 10^{-6} \\ 1,125 \cdot 10^{-6} & 7,5 \cdot 10^{-8} & 1,12289 \cdot 10^{-6} & 7,74701 \cdot 10^{-8} \\ 2,2514 \cdot 10^{-5} & 1,12289 \cdot 10^{-6} & 2,25658 \cdot 10^{-5} & 1,20032 \cdot 10^{-6} \\ 1,20122 \cdot 10^{-6} & 7,74701 \cdot 10^{-8} & 1,20032 \cdot 10^{-6} & 1,1725 \cdot 10^{-7} \end{bmatrix}$$

e sua inversa

$$W_{30}^{-1} = \begin{bmatrix} 2,74656 \cdot 10^7 & -7,21859 \cdot 10^6 & -2,70713 \cdot 10^3 & 5,23117 \cdot 10^5 \\ -7,21859 \cdot 10^6 & 7,74802 \cdot 10^7 & 4,68957 \cdot 10^6 & -2,52479 \cdot 10^7 \\ -2,70713 \cdot 10^7 & 4,68957 \cdot 10^6 & 2,68578 \cdot 10^7 & -7,05914 \cdot 10^5 \\ 5,23117 \cdot 10^5 & -2,52479 \cdot 10^7 & -7,05914 \cdot 10^5 & 2,70782 \cdot 10^7 \end{bmatrix}$$

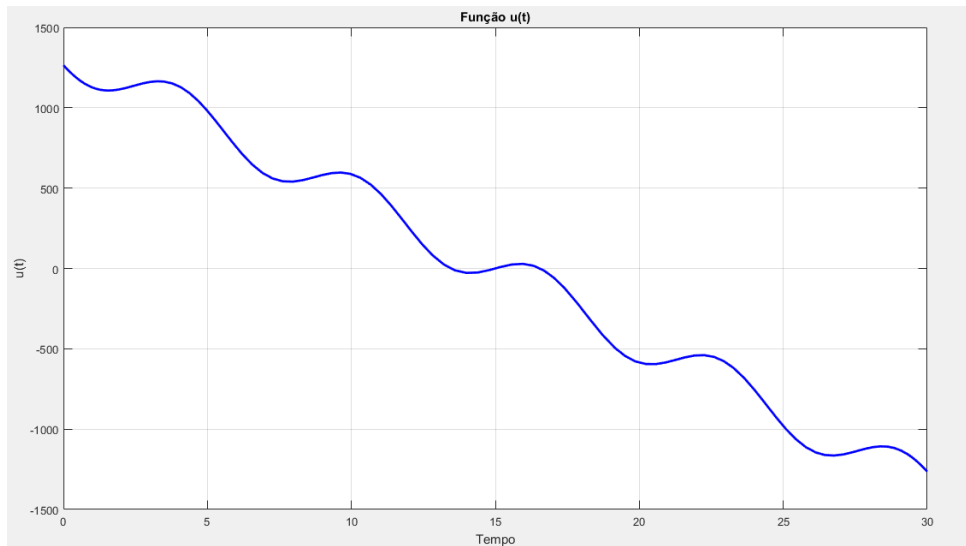
Por fim, temos o controle $u(t)$ descrito pela equação

$$u(t) = \frac{1}{2000}(2712183 + 182797 \cos(30 - t) + 213500 \sin(30 - t) - 180800t)$$

Na Figura 3 é possível visualizar graficamente a variação da função $u(t)$ durante o intervalo de tempo definido.

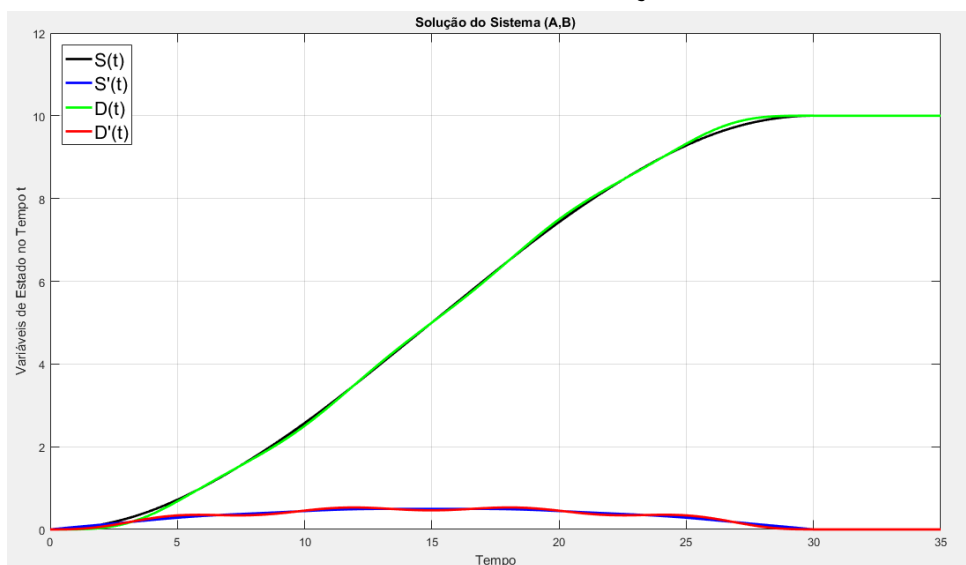
Ademais, a Figura 4 possibilita a análise gráfica do comportamento do sistema com a presença do controle $u(t)$.

Assim, vemos que de fato, é possível conduzir um sistema controlável, de um estado inicial a um estado final desejado.

FIGURA 3 – CONTROLE $u(t)$ 

Fonte: Autor.

FIGURA 4 – SISTEMA COM A PRESENÇA DO CONTROLE



Fonte: Autor.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sabemos que conceitos matemáticos sofisticados como a Forma Canônica de Jordan, possuem aplicações relevantes e que vão além do estudo a respeito de sua teoria e propriedades. Entretanto, nem sempre nos são conhecidas especificamente quais são essas aplicações. Claro que, muitas vezes, devido a necessidade de se fundamentar outros conceitos. Mas, diante da possibilidade de apresentarmos a integração entre o ente teórico e sua utilização prática, este trabalho visou descrever matematicamente a Forma Canônica de Jordan e os resultados que são necessários para sua construção, e posteriormente apresentar sua aplicação no controle de Equações Diferenciais lineares que, por sua vez, possuem abrangente utilidade em situações diversas, tais como as neste trabalho descritas. Deste modo, enfatizamos a relevância do estudo a respeito de operadores lineares como conceito matemático abstrato e denso tal qual a Forma Canônica de Jordan e suas aplicações. E, que além destas mostradas aqui, ainda se estendem a outras mais complexas.

REFERÊNCIAS

- [1] BAUMEISTER, Johann e LEITÃO, Antonio. *Introdução à teoria de controle e programação dinâmica*. IMPA, 2008.
- [2] HIRSCH, Morris W. and SMALE, Stephen. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic Press, INC., California, 1974.
- [3] HOFFMAN, K. e KUNZE, R. *Linear Algebra*. Prentice Hall, New Jersey, 1971.
- [4] JOHNSON, Dale M. *The Correspondence of Camille Jordan*. *Historia Mathematica*, Academic Press, vol. 4, no. 2, 1977, pp. 210.
- [5] LIMA, Elon L. *Álgebra Linear, Projeto Euclides*. IMPA, Rio de Janeiro, 1996.
- [6] OGATA, K. *Modern Control Engineering*. Prentice-Hall, 4th edition, 2001.