

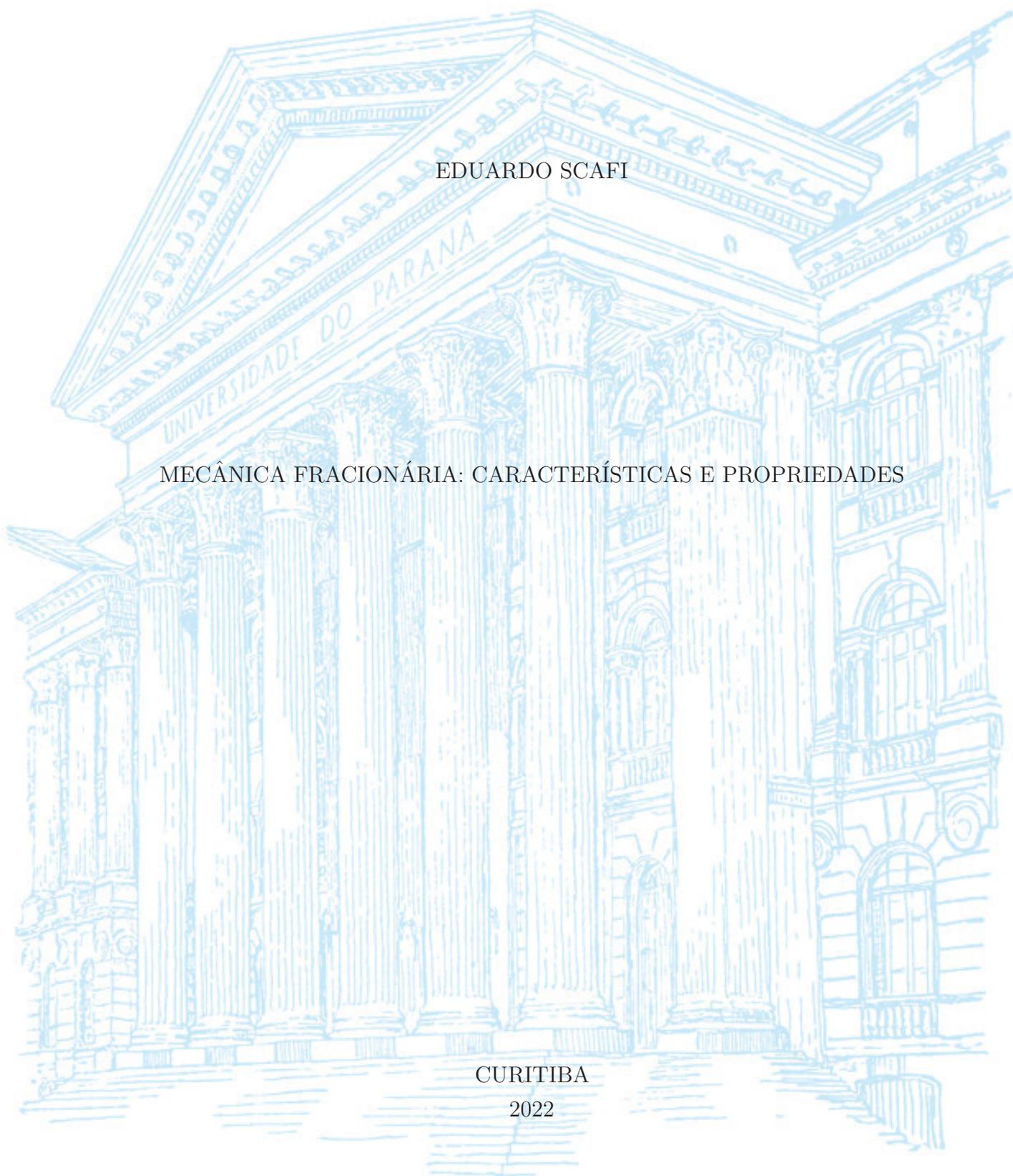
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EDUARDO SCAFI

MECÂNICA FRACIONÁRIA: CARACTERÍSTICAS E PROPRIEDADES

CURITIBA

2022



EDUARDO SCAFI

MECÂNICA FRACIONÁRIA: CARACTERÍSTICAS E PROPRIEDADES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Marcus Werner Beims.

CURITIBA

2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Scafi, Eduardo  
Mecânica fracionária : características e propriedades / Eduardo Scafi. –  
Curitiba, 2022.  
1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências  
Exatas, Programa de Pós-Graduação em Física.

Orientador: Marcus Werner Beims

1. Cálculo fracionário. 2. Fractais. 3. Mecânica fracionária. I. Universidade  
Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Física. III. Beims,  
Marcus Werner. IV. Título.

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **EDUARDO SCAFI** intitulada: "**Mecânica fracionária: características e propriedades**", sob orientação do Prof. Dr. MARCUS WERNER BEIMS, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 06 de Dezembro de 2022.

Assinatura Eletrônica  
06/12/2022 18:02:51.0  
MARCUS WERNER BEIMS  
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica  
07/12/2022 09:11:20.0  
CESAR MANCHEIN  
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA)

Assinatura Eletrônica  
06/12/2022 18:00:13.0  
RICARDO LUIZ VIANA  
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica  
06/12/2022 21:39:10.0  
FERNANDO ALBUQUERQUE DE OLIVEIRA  
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA)

---

# Agradecimentos

---

Agradeço a todos e todas que estiverem presentes durante os anos de desenvolvimento desse trabalho.

Agradeço em particular ao meu orientador Prof. Dr. Marcus Beims pelo acompanhamento ao longo desses anos e por todo o apoio nessa pandemia que enfrentamos.

Agradeço em especial à Tallyta pela constante companhia e suporte.

Agradeço à minha família e amigos pelo carinho e ajuda.

Agradeço ainda ao programa de pós-graduação em Física da UFPR pela oportunidade.

Por fim, agradeço a CAPES pelo suporte financeiro necessário para o desenvolvimento desse trabalho.

*“Time and Space . . . It is not nature which imposes them upon us, it is we who impose them upon nature because we find them convenient.”*

- Jules Henri Poincaré (1905)

# RESUMO

Esse trabalho trata da investigação das propriedades de sistemas clássicos fracionários. Tais sistemas são construídos a partir da introdução e implementação de operadores do cálculo diferencial e integral de ordem não-inteira na descrição de sistemas físicos. Em particular, abordaremos duas distintas formulações propostas, presentes na literatura, para a mecânica clássica fracionária. A primeira, é construída a partir de uma generalização fracionária das derivações exteriores e gera equações de movimento no formalismo hamiltoniano cujas derivadas das variáveis canônicas são operadores fracionários. A partir dessa formulação, propomos generalizações dos parênteses de Poisson, buscando investigar a condição para constantes de movimento em sistemas hamiltonianos fracionários. Os efeitos dos parênteses de Poisson propostos foram averiguados a partir de sua implementação de uma função hamiltoniana do oscilador harmônico linear bidimensional relacionada a uma constante de movimento conhecida para esse sistema. A segunda formulação trata-se de uma generalização das integrais de caminho de Feynman para a dinâmica quântica. Nessa abordagem, foram selecionados caminhos tipo voos de Lévy para as integrações, levando à construção de uma mecânica quântica e clássica fracionária. Essa formulação é caracterizada por uma função hamiltoniana fracionária. A partir dessa proposta, esse trabalho constrói uma representação de massa inercial para o sistema fracionário, conceito não estabelecido na formulação original em questão. Exploramos ainda o problema de força central clássico dentro dessa proposta, a partir da construção das equações de movimento no formalismo lagrangeano, levando a interpretação de uma versão fracionária da segunda lei de Kepler e efeitos de diferentes fractalidades na dinâmica do sistema. Além disso, utilizamos as descrições de energia cinética e momento linear do sistema fracionário para investigar os efeitos de diferentes fractalidades em sistemas conservativos. Para tal, investigamos colisões elásticas unidimensionais no formalismo fracionário. Conseguimos conceber uma condição parcial para a fractalidade do sistema, a qual fornece novas relações entre as velocidades das partículas em colisão. Além disso, exploramos outras características para a fractalidade do sistema, utilizando expansões em série de Taylor, para valores de fractalidade não contemplados pela condição encontrada.

**Palavras-chave:** Formalismo fracionário. Cálculo fracionário. Fractalidade.

# ABSTRACT

This work is about the investigation of the properties of classical fractional systems. Such systems are built from the introduction and implementation of non-integer order differential and integral calculus operators in the description of physical systems. In particular, we will approach two distinct proposed formulations, present in the literature, for fractional classical mechanics. The first is constructed from a fractional generalization of the exterior derivations and generates equations of motion in the hamiltonian formalism whose derivatives of the canonical variables are fractional operators. From this formulation, we propose generalizations of Poisson's brackets, seeking to investigate the condition for motion constants in fractional hamiltonian systems. The effects of Poisson's brackets proposed were examined from its implementation on a Hamiltonian function of the two-dimensional linear harmonic oscillator related to a known motion constant for this system. The second formulation is a generalization of Feynman path integrals for quantum dynamics. In this approach, Lévy flight-like paths were selected for the integrations paths, leading to the construction of a fractional quantum and classical mechanics. This formulation is characterized by a fractional hamiltonian function. From this proposal, this work builds a representation of inertial mass for the fractional system, a concept not established in the original formulation in question. We also explore the classic central force problem in this proposal, from the construction of the equations of motion in the Lagrangian formalism, leading to the interpretation of a fractional version of Kepler's second law and effects of different fractalities on the system dynamics. In addition, we use the descriptions of kinetic energy and linear momentum of the fractional system to investigate the effects of different fractalities in conservative systems. To do so, we investigate one-dimensional elastic collisions in the fractional formalism. We were able to devise a partial condition for the fractality of the system that provides new relations between the velocities of the colliding particles. In addition, we explored other characteristics for the fractality of the system, using Taylor series expansions, for contemplating fractality values not covered by the condition found.

**Keywords:** Fractional formalism. Fractional calculus. Fractality.

---

# Lista de ilustrações

---

Figura 1 – Espaço de fase considerando a expressão (4.23) ( $ \dot{q}  = v, q$ ) para diferentes valores de fractalidade $\alpha$ . O painel (a) considera um potencial central repulsivo ( $V(q) = 1/q$ ). O painel (b) considera um potencial central atrativo ( $V(q) = -1/(q+a)$ ). Para ambos os casos, $q = 1, E = 5$ e $D_\alpha = 1/2$ . Para o caso atrativo $a = 0.2$ . . . . .	52
Figura 2 – Imagem indicando a relação entre as velocidades final da partícula 2 e inicial da partícula 1 considerando a expressão (5.16). O painel esquerdo indica o caso sem fractalidade $\xi = 0$ , enquanto o painel direito indica o caso com fractalidade $\xi = 1/2$ . . . . .	68
Figura 3 – Regiões A, B e C para as configurações de colisão das partículas considerando fator de fractalidade $\xi = 0$ (vermelho) e $\xi = 1/2$ (azul). . . . .	69
Figura 4 – Interpretação das configurações iniciais das partículas antes e depois da colisão para cada região. . . . .	70
Figura 5 – Representação numérica das velocidades $v_{2f} \times v_{1i}$ das partículas em colisão para diferentes $\xi$ , sendo (a) $\xi = 2/3$ , (b) $\xi = 3/4$ , (c) $\xi = 7/8$ e (d) $\xi = 8/9$ . Para todos, $v_{2i} = 2$ . . . . .	71
Figura 6 – Representação numérica das velocidades $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de $\xi$ até 1 <sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2 <sup>a</sup> ordem. Para todos, $\xi = 1/2$ e $v_{2i} = 2$ . . . . .	72
Figura 7 – Representação numérica das velocidades $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de $\xi$ até 1 <sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2 <sup>a</sup> ordem. Para todos, $\xi = 7/8$ e $v_{2i} = 2$ . . . . .	73
Figura 8 – Representação numérica das velocidades $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de $\xi$ até 1 <sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2 <sup>a</sup> ordem. Para todos, $\xi = 1/4$ e $v_{2i} = 2$ . . . . .	73
Figura 9 – Representação numérica das velocidades $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de $\xi$ até 1 <sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2 <sup>a</sup> ordem. Para todos, $\xi = 2/5$ e $v_{2i} = 2$ . . . . .	74

Figura 10 – Representação numérica das velocidades $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de $\xi$ até 1 <sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2 <sup>a</sup> ordem. Para todos, $\xi = \sqrt{2} - 1$ e $v_{2i} = 2$ . . . . .	74
Figura 11 – Representação numérica das velocidades $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de $\xi$ até 1 <sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2 <sup>a</sup> ordem. Para todos, $\xi = \text{golden ratio}$ e $v_{2i} = 2$ . . . . .	75
Figura 12 – Representação numérica das velocidades $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de $\xi$ até 1 <sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2 <sup>a</sup> ordem. Para todos, $\xi = 1/100$ e $v_{2i} = 2$ . . . . .	76
Figura 13 – Representação numérica das velocidades $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de $\xi$ até 1 <sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2 <sup>a</sup> ordem. Para todos, $\xi = 1/10$ e $v_{2i} = 2$ . . . . .	76
Figura 14 – Representação numérica das velocidades $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de $\xi$ até 1 <sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2 <sup>a</sup> ordem. Para todos, $\xi = 1/5$ e $v_{2i} = 2$ . . . . .	77
Figura 15 – Representação numérica das velocidades $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de $\xi$ até 1 <sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2 <sup>a</sup> ordem. Para todos, $\xi = 2/25$ e $v_{2i} = 2$ . . . . .	88
Figura 16 – Representação numérica das velocidades $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de $\xi$ até 1 <sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2 <sup>a</sup> ordem. Para todos, $\xi = 11/50$ e $v_{2i} = 2$ . . . . .	89
Figura 17 – Representação numérica das velocidades $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de $\xi$ até 1 <sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2 <sup>a</sup> ordem. Para todos, $\xi = \pi/11$ e $v_{2i} = 2$ . . . . .	89
Figura 18 – Representação numérica das velocidades $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de $\xi$ até 1 <sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2 <sup>a</sup> ordem. Para todos, $\xi = \sqrt{2}/3$ e $v_{2i} = 2$ . . . . .	90

Figura 19 – Representação numérica das velocidades  $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de  $\xi$  até 1<sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2<sup>a</sup> ordem. Para todos,  $\xi = \sqrt{3} - 1$  e  $v_{2i} = 2$ . . . . . 90

---

# Lista de símbolos

---

${}_a I_x^\alpha$	Integração fracionária de Riemann-Liouville à esquerda
$\Gamma(z)$	Função Gama
$D^n$	Derivação de ordem inteira
${}_a D_x^\alpha$	Derivação fracionária de Riemann-Liouville à esquerda
${}_a^C D_x^\alpha$	Derivação fracionária de Caputo à esquerda
$\mathbb{R}$	Conjunto de números reais
$\mathbb{N}$	Conjunto de números naturais
$\mathbb{C}$	Conjunto de números complexos
$d^\alpha$	Derivação exterior fracionária
$d_{frac}$	Dimensão fractal
$H_\alpha$	Hamiltoniano fracionário
$K_\alpha$	Energia cinética fracionária
$L_\alpha$	Lagrangeana fracionária
$S_\alpha$	Ação fracionária
$m_\alpha$	Massa inercial fracionária
$\xi$	Parâmetro de fractalidade

---

# Sumário

---

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>MECÂNICA FRACIONÁRIA</b>	<b>18</b>
2.1	Cálculo fracionário	18
2.1.1	Integração fracionária de Riemann-Liouville	18
2.1.2	Derivação fracionária de Riemann-Liouville	20
2.1.3	Derivação fracionária de Caputo	22
2.1.4	Derivação fracionária de Riesz	24
2.2	Características essenciais das derivações fracionárias	25
2.3	Dinâmica clássica fracionária	27
2.3.1	Dinâmica com derivação fracionária de Riemann-Liouville e Caputo	27
2.3.2	Dinâmica fracionária com derivação exterior	30
<b>3</b>	<b>MECÂNICA FRACIONÁRIA DE LASKIN</b>	<b>33</b>
3.1	Caminhos Brownianos, voos de Lévy e dimensão fractal	33
3.2	Integrais de caminho com voos de Lévy	35
3.3	Formalismo de Laskin	37
3.4	Mecânica clássica fracionária	39
3.4.1	Formulação Lagrangeana	39
3.4.2	Formulação Hamiltoniana	41
3.4.3	Formulação de Hamilton-Jacobi	42
<b>4</b>	<b>INTERPRETAÇÃO FÍSICA DOS FORMALISMOS FRACIONÁRIOS</b>	<b>45</b>
4.1	Fractalidade de diferentes objetos	45
4.2	Propostas de massa para a mecânica fracionária de Laskin	46
4.2.1	Segunda lei de Newton fracionária	46
4.2.2	Definição de massa a partir da massa efetiva	47
4.2.3	Definição de $D_\alpha$ considerando suas unidades	50
4.3	Problema de força central no formalismo fracionário	50
4.4	Conservação de energia de sistemas fracionários	54
4.5	Integrabilidade de um sistema clássico fracionário	55
<b>5</b>	<b>COLISÕES FRACIONÁRIAS</b>	<b>64</b>
5.1	Colisões elásticas fracionárias com massa inercial	64
5.2	Colisões elásticas fracionárias pelo formalismo de Laskin	65
5.2.1	Sistemas com parâmetro de fractalidade	67
5.2.2	Colisões com fator de fractalidade	67
5.2.2.1	Partículas idênticas	68
5.2.2.2	Colisões com expansão de Taylor	71

---

<b>6 CONSIDERAÇÕES FINAIS E PASSOS FUTUROS . . . . .</b>	<b>78</b>
<b>Referências . . . . .</b>	<b>81</b>
<b>Apêndices</b>	<b>84</b>
<b>APÊNDICE A Cálculo fracionário . . . . .</b>	<b>85</b>
<b>APÊNDICE B Colisões fracionárias - gráficos . . . . .</b>	<b>88</b>

---

# 1. INTRODUÇÃO

---

A mecânica fracionária, construída a partir da formulação do cálculo fracionário desenvolvido desde o século XVII [1][2][3], combinado com as formulações convencionais da mecânica clássica e quântica no estudo do movimento [4][5], sofreu diversos avanços significativos na compreensão de suas características e propriedades nas últimas décadas. A incorporação de derivações e integrações de ordem não-inteira nas equações que regem o movimento de corpos e suas interações serviu como passo inicial na interpretação desse formalismo. Com a introdução da proposta de Mandelbrot [6] acerca da presença de dimensões espaciais fracionárias na natureza, a compreensão da mecânica fracionária se expandiu rapidamente, particularmente após a compreensão do movimento Browniano como o primeiro exemplo de objeto físico fracionário, cujas trajetórias possuem dimensão espacial diferente da dimensão topológica [7]. Seus avanços foram observados em diversas áreas da física, como mecânica quântica, eletrodinâmica, mecânica estatística, sistemas dinâmicos, entre outros [8].

Em destaque, modelos físicos construídos utilizando operadores matemáticos de ordem não-inteira se mostraram muito eficientes na investigação de sistemas físicos com efeitos de memória e não-localidade [9]. Essa é uma consequência direta das propriedades de tais operadores fracionários nas suas definições. Efeitos de não-localidade, temporal e/ou espacial, são características inerentes às principais e amplamente aceitas propostas de derivação fracionária. Sendo assim, novas propostas de operadores fracionários que não cumprem tal característica, podem ser desclassificados como operadores fracionários [10]. O mesmo se estende para outros aspectos do cálculo fracionário, como regra de Leibniz e regra da cadeia, cujas propriedades usuais não são mantidas no formalismo fracionário [11][12]. Dessa forma, nos ateremos nesse trabalho a três propostas de derivação fracionária amplamente aceitas e utilizadas pela comunidade científica. Sejam elas a derivação fracionária de Riemann-Liouville, a de Caputo e de Riesz [13], que diferem entre si em algumas de suas propriedades e limitações, como explorado nos capítulos seguintes.

Estamos interessados nesse trabalho na investigação dos efeitos do formalismo fracionário em sistemas físicos no âmbito da mecânica clássica. Abordaremos amplamente duas distintas propostas fracionárias introduzidas por Tarasov [14] e Laskin [15], construídas a partir de concepções bem diferentes. O formalismo de Tarasov possui um viés matemático primordial, adotando a concepção de derivação exterior fracionária introduzida por Cottrill-Shepherd e Naber [16], para gerar as equações de movimento clássicas fracionárias no formalismo hamiltoniano com derivações fracionárias espaciais. O autor opta por utilizar

a derivação fracionária de Riemann-Liouville no seu formalismo. Laskin, por outro lado, constrói um formalismo fracionário pautado nos trabalhos de Feynman e Hibbs [17] de integração de caminhos na dinâmica quântica. O autor implementa uma generalização dos caminhos de integração do método de Feynman, reconhecidos como trajetórias Brownianas, adotando caminhos de voos de Lévy [18]. Tal generalização leva a construção de uma mecânica quântica fracionária [19], que sustenta sua descrição fracionária na introdução da derivação fracionária de Riesz no âmbito quântico. É introduzido pelo autor uma contraparte clássica para esse formalismo fracionário [20].

Dessa forma, esse trabalho irá propor a construção e implementação de parênteses de Poisson fracionários, pautados nas equações de movimento provenientes do formalismo hamiltoniano fracionário de Tarasov. Tais parênteses são construídos utilizando tanto a derivação fracionária de Riemann-Liouville, quanto a de Caputo. Para verificar o efeito dessas propostas, consideramos a função hamiltoniana de um oscilador harmônico linear bidimensional. Sendo assim, testamos os parênteses de Poisson sugeridos para um constante de movimento conhecida desse sistema [21], explorando a relação entre essas variáveis dinâmicas no formalismo fracionário.

Considerando o formalismo fracionário de Laskin, exploramos nesse trabalho a interpretação de massa inercial no âmbito da mecânica clássica fracionária, uma vez que a função hamiltoniana fracionária desse modelo não possui uma representação direta de massa da partícula, mas sim um fator inercial. Para isso, abordamos a concepção de massa inercial a partir de duas propostas: massa inercial como uma constante de proporcionalidade indicada na segunda lei de Newton e a interpretação de massa efetiva, utilizada no tratamento de partículas em movimento em cristais, como uma alternativa para definir massa inercial [22]. Ao fim dessa análise, geramos uma representação para o fator inercial da hamiltoniana fracionária de Laskin em termos da massa inercial, e investigamos os efeitos dessa definição nas representações de energia cinética e momento linear do sistema. Exploramos a seguir o problema de força central da mecânica clássica no formalismo fracionário de Laskin, a partir da construção e análise das equações de movimento desse sistema no formalismo lagrangeano fracionário. Por fim, adotamos as definições de energia cinética e momento linear concebidas na mecânica clássica fracionária de Laskin para investigar os efeitos de diferentes fractalidades em sistemas conservativos. Como modelo, implementamos tais definições nas equações de conservação de energia e momento linear para duas partículas unidimensionais pontuais colidindo elasticamente. Essa investigação nos leva a construção de uma condição parcial para os valores de fractalidade do sistema, que forneçam novas relações entre as velocidades das partículas.

O capítulo (2) fornece uma introdução e revisão acerca das principais propostas para o cálculo fracionário, assim como apresenta algumas representações de sistemas clássicos descritos por operadores não-inteiros. O capítulo (3) fornece a construção do

formalismo fracionário de Laskin, passando pelo âmbito quântico e clássico de sua teoria. O capítulo (4), nas duas primeiras seções, abrange a construção do conceito de massa inercial para o sistema fracionário de Laskin. A seção seguinte explora o problema de força central fracionário. As últimas seções desse capítulo são dedicadas a investigação do modelo fracionário de Tarasov e a concepção e implementação de parênteses de Poisson fracionários. Por fim, o capítulo (5) descreve a implementação do formalismo fracionário de Laskin em colisões elásticas unidimensionais.

---

## 2. MECÂNICA FRACIONÁRIA

---

Esse capítulo trata da concepção, formulação e implementação do formalismo do cálculo fracionário em sistemas físicos. É apresentada uma introdução concisa às principais e mais utilizadas definições de operações fracionárias, integração e derivação, além de apresentar os efeitos de tal formalismo fracionário na descrição de sistemas clássicos, explorando suas características e implicações da implementação de tal tratamento.

### 2.1 Cálculo fracionário

A concepção do cálculo fracionário e operadores de ordem não inteira tem um longo histórico que iniciou com a troca de cartas entre Leibniz e L'Hospital em 1695, nas quais se discutiram interpretações acerca do operador de derivação  $d^{1/2}x$  decorrente do cálculo diferencial e integral. Ainda que iniciada no século XVII, a tentativa de interpretação dos resultados e aplicações do cálculo fracionário vem se desenvolvendo cada vez mais intensamente nos últimos anos [2][3][13], gerando importantes trabalhos que fornecem um entendimento amplo das características e propriedades de tais formulações. A incorporação de integrações e derivações fracionárias em equações permeia diversas áreas da física, tendo particular destaque no estudo de movimento em meio fractal, mecânica estatística e mecânica quântica [8]. O estudo de efeitos de não-localidade e memória, dissipação e não-hermeticidade são consequências naturais do formalismo fracionário na descrição dos fenômenos físicos e suas interações. Trataremos nessa seção de algumas das principais propostas de integração e derivação fracionária, além de algumas de suas aplicações em sistemas físicos, assim como as propriedades e características que compõem esse tratamento.

#### 2.1.1 Integração fracionária de Riemann-Liouville

A formulação do cálculo fracionário possui uma continuidade distinta da construção do cálculo diferencial e integral. A generalização de uma integração fracionária foi o primeiro aspecto desse formalismo a ser desenvolvido e até mesmo faz parte da definição fundamental de algumas das principais propostas para derivações fracionárias, como a formulação de Riemann-Liouville e de Caputo [2]. A noção de integração fracionária parte da fórmula de integral de Cauchy, que trata de uma integração em repetição num intervalo finito ao longo de uma linha real, por vezes chamada de integral por camadas, expressa por

$${}_a I_x^n [f(x)] = \int_a^x \int_a^{x_1} \dots \int_a^{x_{n-1}} f(x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-z)^{n-1} f(z) dz. \quad (2.1)$$

A integração é feita no intervalo  $[a, x]$  com  $a < x$ , sendo usualmente chamada de integração à esquerda. O mesmo pode ser descrito no intervalo  $[x, b]$  com  $b > x$ , gerando uma integração à direita. A generalização dessa integração em camadas é feita pela substituição do índice inteiro  $n$ , que se trata de um número natural ( $n \in \mathbb{N}$ ), por um índice  $\alpha$ , que pode ser qualquer número real não-negativo ou imaginário com parte real não-negativa ( $\Re(\alpha) > 0$ ). Além disso, destaca-se a utilização da função gama [23], definida por

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad (2.2)$$

que possibilita a eliminação do caráter discreto do fatorial na integral de Cauchy, uma vez que consegue representar o fatorial por

$$\Gamma(n) = (n-1)!. \quad (2.3)$$

Essa generalização leva a chamada integral fracionária de Riemann-Liouville. No intervalo  $[a, x]$ , expressa-se a integral de Riemann-Liouville à esquerda na forma

$${}_a I_x^\alpha [f(x)] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-z)^{\alpha-1} f(z) dz. \quad (2.4)$$

Adotando o limite  $\alpha \rightarrow 0$ , gera-se a identidade  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} {}_a I_x^\alpha [f(x)] = f(x)$ , assim como ocorre na integração usual.

Dentre as propriedades da integração de Riemann-Liouville, iremos destacar sua propriedade de semigrupo, seu efeito em funções de potência e em constantes, entre outros. Para mais detalhes, basta consultar [2] ou [13]. Os operadores de integração  ${}_a I_x^\alpha$  e  ${}_x I_b^\beta$  formam um semigrupo, onde, se  $\alpha, \beta > 0$ , então a expressão

$$({}_a I_x^\alpha {}_a I_x^\beta)[f(x)] = ({}_a I_x^{\alpha+\beta})[f(x)] \quad (2.5)$$

é válida para qualquer ponto do intervalo  $[a, b]$  se  $\alpha + \beta > 0$  ou  $f$  contínua em  $[a, b]$ . Além disso, a integração de Riemann-Liouville produz uma generalização apropriada para integrações de ordem inteira de funções do tipo  $f(x) = (x-a)^\lambda$  com  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda > -1$  e  $\alpha \geq 0$ , na forma

$${}_a I_x^\alpha [(x-a)^\lambda] = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)} (x-a)^{\lambda+\alpha}. \quad (2.6)$$

Para mais detalhes, vale consultar o apêndice A. Dessa forma, funções descritíveis por séries de potências em  $x = a$  podem ser integradas termo a termo. Considerando funções

exponenciais na forma  $f(x) = e^{\lambda x}$ , utilizam-se as exponenciais de Miller-Ross e de Mittag-Leffler nas representações, assim como a função Gama incompleta. Isso ocorre também em funções cosseno, seno e logarítmica [2]. Considerando a expressão (2.6), a integração fracionária de Riemann-Liouville aplicada a uma constante passa a gerar resultados na forma

$${}_a I_x^\alpha C = \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)}(x - a)^\alpha. \quad (2.7)$$

Essas propriedades descritas também são válidas para a integração à direita, a menos da mudança de alguns sinais nas expressões.

Por fim, evidenciamos que os operadores de integração de Riemann-Liouville, seja à esquerda ou à direita, obedecem a seguinte identidade de integração por partes,

$$\int_a^b f(x) {}_a I_x^\alpha [g(x)] dx = \int_a^b {}_x I_b^\alpha [f(x)] g(x) dx, \quad (2.8)$$

com índice de integração  $\alpha$  com parte real positiva  $\Re(\alpha) > 0$  [3].

### 2.1.2 Derivação fracionária de Riemann-Liouville

Diferente da integração fracionária, o operador de derivação fracionária possui diversas definições, algumas delas decorrentes da integral fracionária de Riemann-Liouville e outras obtidas independentemente. A derivação fracionária de Riemann-Liouville (à esquerda) [2] é construída a partir da definição

$${}_a D_x^\alpha [f(x)] := \left( \frac{d}{dx} \right)^n ({}_a I_x^{n-\alpha} [f(x)]), \quad (2.9)$$

sendo  $n$  é o menor valor inteiro maior que a ordem de derivação  $\alpha$  e o operador  ${}_a I_x^n$  é a integração de camadas de Cauchy expressa em (2.1). O operador de derivação à direita  ${}_x D_b^\alpha$  é construído da mesma forma, a não ser pela alteração de alguns sinais nas expressões. Podemos então representar a derivação fracionária de Riemann-Liouville à esquerda como

$${}_a D_x^\alpha [f(x)] = \frac{1}{\Gamma(n - \alpha)} \left( \frac{d}{dx} \right)^n \int_a^x \frac{f(z) dz}{(x - z)^{\alpha - n + 1}}, \quad (2.10)$$

onde  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $n - 1 < \Re(\alpha) < n$  com  $n \in \mathbb{N}$ . Adotando o limite  $\alpha \rightarrow n$ , recaímos na derivação usual de ordem inteira

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}_a D_x^\alpha [f(x)] = \dots = D^n [f(x)]. \quad (2.11)$$

A partir da expressão (2.10) podemos interpretar a derivação fracionária de Riemann-Liouville como uma derivação inteira de uma integral fracionária, caracterizada por

depender de um intervalo numérico, tornando-a assim uma operação **não-local**. Podemos relacionar ainda a derivação e integração fracionárias de Riemann-Liouville nas formas

$${}_a D_x^\alpha \{ {}_a I_x^\beta [f(x)] \} = {}_a D_x^{\alpha-\beta} [f(x)] \quad \text{para} \quad \alpha \geq \beta \geq 0 \quad (2.12)$$

e

$${}_a D_x^\alpha \{ {}_a I_x^\beta [f(x)] \} = {}_a I_x^{\beta-\alpha} [f(x)] \quad \text{para} \quad \beta \geq \alpha \geq 0. \quad (2.13)$$

Exploraremos a seguir algumas propriedades da derivação fracionária de Riemann-Liouville. Para mais detalhes ou propriedades não abordadas nesse trabalho, consultar [2].

Assim como os operadores de integração fracionária de Riemann-Liouville, a derivação fracionária é uma operação linear para qualquer ordem. Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  funções deriváveis, então

$${}_a D_x^\alpha [f(x) + g(x)] = {}_a D_x^\alpha [f(x)] + {}_a D_x^\alpha [g(x)] \quad (2.14)$$

e

$${}_a D_x^\alpha [k f(x)] = k {}_a D_x^\alpha [f(x)], \quad (2.15)$$

onde  $k$  é uma constante complexa. Essa linearidade e as outras propriedades a serem apresentadas também são válidas para o operador à direita  ${}_x D_b^\alpha$ .

Caso as derivações  ${}_a D_x^\alpha [f(x)]$  e  ${}_a D_x^{\alpha+n} [f(x)]$  existam, então a lei dos expoentes é válida e os operadores derivativos de Riemann-Liouville obedecem à expressão

$$(D_a^n D_x^\alpha)[f(x)] = ({}_a D_x^{\alpha+n})[f(x)]. \quad (2.16)$$

Considerando funções na forma  $f(x) = (x-a)^\lambda$ , com  $\lambda \geq -1$  no intervalo  $[a, x]$ , a derivação fracionária de Riemann-Liouville gera

$${}_a D_x^\alpha [(x-a)^\lambda] = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} (x-a)^{\lambda-\alpha}. \quad (2.17)$$

Para mais detalhes, consultar o apêndice A. No caso particular onde a função possui a forma  $f(x) = (x-a)^{\alpha-j}$ , com  $j = 1, 2, \dots, [\mathbb{R}(\alpha)] - 1$ , seja  $[\mathbb{R}(\alpha)]$  a parte inteira real de  $\alpha$ , então

$${}_a D_x^\alpha [(x-a)^{\alpha-j}] = 0. \quad (2.18)$$

Podemos notar a partir da expressão (2.17) que a derivação para  $\lambda = 0$  não é nula, ou seja, a derivação fracionária de Riemann-Liouville não é zero para constantes. Esse pode ser um fator determinante na escolha de qual proposta de derivação fracionária adotar no tratamento do seu sistema físico.

Podemos ainda considerar funções na forma  $f(x) = e^{\lambda(x-a)}$ , onde a derivação fracionária gera uma descrição em termos da exponencial de Mittag-Leffler [13]. Convém ainda indicarmos a construção de uma derivação fracionária de Riemann-Liouville parcial. Em particular, considerando o limite  $0 < \alpha < 1$ , a derivação fracionária parcial em relação à variável  $x$  de um função  $f(x, y)$  de duas variáveis é expressa por

$${}_a D_x^\alpha [f(x, y)] = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x \frac{f(z, y) dz}{(x-z)^\alpha}, \quad (2.19)$$

com  $x > a$  e  $t \in [a, b]$ .

Se considerarmos equações diferenciais ordinárias construídas com derivações de Riemann-Liouville, teremos então sistemas que apresentam uma dependência nas condições iniciais com derivação fracionária. Isso pode ser evidenciado a partir da utilização da transformada de Laplace  $F(s) = L\{f(x)\}$ . Seja a transformada de Laplace de uma função  $f(x)$  definida por [23]

$$F(s) = \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx, \quad (2.20)$$

ao considerarmos a derivada de Riemann-Liouville nos limites  $[0, x]$  do eixo real ( $a = 0$ ), gera-se

$$L\{{}_0 D_x^\alpha f(x)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^n s^k [{}_0 D_x^{\alpha-k-1} f(x)]|_{x=0}. \quad (2.21)$$

Ou seja, o sistema possui  $n$  condições iniciais fracionárias expressas por  ${}_0 D_x^{\alpha-k-1} f(x)$  em  $x = 0$ .

### 2.1.3 Derivação fracionária de Caputo

Apesar de mais restrita que a de Riemann-Liouville devido aos limites de sua definição, a derivada de Caputo admite a mesma interpretação para as condições iniciais que a formulação clássica de ordem inteira e utiliza da mesma estrutura de integração fracionária de Riemann-Liouville para definir a derivação fracionária (2.4). Seja  $[a, b]$  um intervalo finito no eixo real e considerando o limite de derivação fracionária  $\alpha$  limitado na forma  $n-1 < \Re(\alpha) < n$  com  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $\alpha \notin \mathbb{N}_0$ , onde  $n$  provém da integral por camadas de Cauchy (2.1) e pode ser interpretado como a seguinte ordem de derivação inteira maior que  $\alpha$ , define-se a derivada fracionária de Caputo à esquerda na forma [13][24]

$${}_a^C D_x^\alpha [f(x)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^x \frac{f^{(n)}(z) dz}{(x-z)^{\alpha-n+1}}, \quad (2.22)$$

onde  $f^{(n)}(z)$  indica uma derivação de ordem inteira  $\frac{d^n f(z)}{dz^n}$ . O índice  $C$  surge para diferenciarmos o operador de derivação de Caputo do de Riemann-Liouville. A derivação de Caputo pode ser relacionada à integração fracionária de Riemann-Liouville na forma

$${}_a^C D_x^\alpha [f(x)] = ({}_a I_x^{n-\alpha}) D^n [f(x)], \quad (2.23)$$

enquanto a derivação de Riemann-Liouville se relaciona com a de Caputo na forma

$${}_a D_x^\alpha [f(x)] = {}_a^C D_x^\alpha [f(x)] + \sum_{k=0}^n \frac{D^k [f(a)] (x-a)^{k-1}}{\Gamma(k-\alpha+1)}. \quad (2.24)$$

A derivada fracionária de Caputo difere da de Riemann-Liouville pela ordem das operações, ou seja, trata-se de uma integração fracionária de uma derivada de ordem inteira, enquanto a derivação de Riemann-Liouville trata-se de uma derivação de ordem inteira de uma integração fracionária (visto equação 2.9).

Assim como a derivação de Riemann-Liouville, a derivação fracionária de Caputo é um operador linear. Sejam  $f(x)$  e  $g(x)$  funções cujas derivadas existam e  $k$  uma constante, então

$${}_a^C D_x^\alpha [f(x) + g(x)] = {}_a^C D_x^\alpha [f(x)] + {}_a^C D_x^\alpha [g(x)] \quad (2.25)$$

e

$${}_a^C D_x^\alpha [k f(x)] = k {}_a^C D_x^\alpha [f(x)]. \quad (2.26)$$

Essas e as seguintes propriedades do operador de Caputo à esquerda também são válidas para o operador derivativo à direita  ${}_x^C D_b^\alpha$ . A derivação fracionária de Caputo é descontínua para os limites de  $\alpha$ , apresentando limites laterais distintos. Para o limite  $\alpha \rightarrow n$ , então

$$\lim_{\alpha \rightarrow n} {}_a^C D_x^\alpha [f(x)] = {}_a^C D_x^n [f(x)] - {}_a^C D_x^n [f(x)]|_{x=a}, \quad (2.27)$$

enquanto o limite  $\alpha \rightarrow (n-1)$  leva a

$$\lim_{\alpha \rightarrow (n-1)} {}_a^C D_x^\alpha [f(x)] = {}_a^C D_x^{(n-1)} [f(x)]. \quad (2.28)$$

Ao considerarmos funções na forma  $f(x) = (x-a)^\lambda$ , com  $\lambda > n$ , a derivação fracionária de Caputo à esquerda gera

$${}_a^C D_x^\alpha [(x-a)^\lambda] = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} (x-a)^{\lambda-\alpha}. \quad (2.29)$$

É possível observar uma verificação desse efeito no apêndice A. Casos onde o expoente  $\lambda$  está no intervalo  $0 \leq \lambda \leq n$ , com  $\lambda \in \mathbb{N}$ , a derivação fracionária de Caputo é nula,

tornando derivações de constantes ( $\lambda = 0$ ) também nulas, diferente do formalismo de Riemann-Liouville. Isso pode tornar a derivação de Caputo bastante atraente na sua implementação na descrição de sistemas físicos e suas interações. Para os demais casos fora dessas condições, tal derivação não existe.

Considerando equações diferenciais ordinárias descritas por derivações fracionárias de Caputo, obtemos condições iniciais descritas por derivações de ordem inteira. Aplicando a transformada de Laplace (2.20) em uma equação diferencial composta por derivações de Caputo no intervalo  $[0, x]$ , obtemos

$$L\{ {}_0^C D_x^\alpha \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^n s^{\alpha-k-1} D^k f(x)|_{x=0}. \quad (2.30)$$

Com isso, identificamos as  $n$  condições iniciais do sistema como descritas pelo termo  $D^k f(x)$ , derivações de ordem inteira  $k$  em  $x = 0$ .

### 2.1.4 Derivação fracionária de Riesz

As derivadas fracionárias de Riesz são operações de diferenciação no espaço Euclidiano  $n$ -dimensional  $\mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), caracterizadas pelo operador Laplaciano com potência fracionária  $(-\nabla^2)^{\alpha/2}$ . Para  $\alpha = 2$ , o operador fracionário de Riesz recai no operador Laplaciano convencional,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}. \quad (2.31)$$

Para  $\alpha \in \mathbb{C}$  e funções  $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$  suficientes, a derivação fracionária de Riesz é definida em termos da transformada de Fourier [2][23],

$$(-\nabla^2)^{\frac{\alpha}{2}} f = \mathcal{F}^{-1} |x|^\alpha \mathcal{F} f = D^\alpha f. \quad (2.32)$$

Considerando  $\alpha > 0$ , a derivação de Riesz pode ser descrita na forma de uma *integral hiper-singular* [13], definida por

$$D^\alpha [f(x)] := \frac{1}{d_n(m, \alpha)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\nabla_z^m)[f(z)]}{|z|^{n+\alpha}} dz, \quad (2.33)$$

onde  $(\nabla_z^m)[f(x)]$  é uma diferença finita de ordem  $m$  ( $m > \alpha$ ), com um vetor de passo  $z \in \mathbb{R}^n$  e centralizado no ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , definido por

$$(\nabla_t^m)[f(z)] := \sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} [f(x - kz)]. \quad (2.34)$$

A constante  $d_n(m, \alpha)$  é definida por

$$d_n(m, \alpha) = \frac{\pi^{1+n/2} A_m(\alpha)}{2^\alpha \Gamma(1 + \alpha/2) \Gamma(n/2 + \alpha/2) \sin(\pi\alpha/2)}, \quad (2.35)$$

onde

$$A_m(\alpha) = \sum_{j=0}^m (-1)^{j-1} \binom{m}{j} j^\alpha. \quad (2.36)$$

A integral hiper-singular em  $D^\alpha[f(x)]$  não depende da escolha de  $m > \alpha$ . Ressaltamos que a derivada fracionária de Riesz pode ser representada em termos das derivadas de Riemann-Liouville [8], definidas em (2.10)

$$D^\alpha[f(x)] = \frac{1}{2 \cos(\pi\alpha/2)} ({}_x D_a^\alpha[f(x)] + {}_b D_x^\alpha[f(x)]). \quad (2.37)$$

Exploraremos algumas características e propriedades da derivação fracionária de Riesz no capítulo 4. Para mais detalhes desse formalismo, basta consultar [2][8].

## 2.2 Características essenciais das derivações fracionárias

Após o importante trabalho de Mandelbrot [6] que introduziu uma interpretação física mais consistente às derivações fracionárias, surgiram na literatura novas e diferentes propostas para o formalismo fracionário. Muitos desses novos trabalhos buscam fornecer alternativas às já estabelecidas definições de cálculo fracionário, outras buscam gerar simplificações quanto às complicadas propriedades que tais definições costumam apresentar [25][26][27][28]. Todavia, algumas características são inertes aos conceitos de cálculo fracionário e não podem ser mantidas independentemente do formalismo adotado. Em particular, iremos exaltar quatro características fundamentais das derivações fracionárias: violação da regra de Leibniz, não validade da regra da cadeia convencional, não-localidade e integração por partes.

É demonstrado no trabalho de 2013 que a regra de Leibniz [11], expressa na forma

$$D^n(fg) = (D^n f)g + f(D^n g), \quad (2.38)$$

não é mantida para o formalismo fracionário ( $n \rightarrow \alpha$ ). Nos formalismos de ordem não-inteira, sejam o de Riemann-Liouville, Caputo, entre outros, esse regra passa a ser representada numa forma generalizada. Como exemplo, a regra de Leibniz para a derivação de Riemann-Liouville (2.10) é expressa na forma de uma série infinita [2]

$$D^\alpha(fg) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{\Gamma(k + 1) \Gamma(\alpha - k + 1)} (D^{\alpha-k} f)(D^k g) \quad (2.39)$$

para funções analíticas no intervalo  $[a,b]$ . Dessa forma, na referência [11] é apresentado um teorema que declara a necessidade da quebra da regra de Leibniz na derivação fracionária.

**Teorema.** *Se um operador  $D_x^\alpha$  pode ser aplicado em funções do  $C^2(U)$ , onde  $U \subset \mathbb{R}^1$  é a vizinhança do ponto  $x_0$ , e a regra de Leibniz é satisfeita, então o operador  $D_x^\alpha$  é a derivação inteira de primeira ordem  $D_x^1$ .* (traduzido livremente de [11]).

Ou seja, operadores  $D_x^\alpha$  que satisfaçam a regra de Leibniz não podem ser considerados operadores de derivação fracionária e sim operadores de derivação de ordem inteira. A regra de Leibniz generalizada é amplamente explorada em [2].

Assim como a regra de Leibniz, a regra da cadeia convencional, definida pela fórmula de Faá di Bruno [29], não é mantida para derivações de ordem não-inteira

$$D_x^n f(g(x)) = n! \sum_{m=1}^n (D_g^m f(g))_{g=g(x)} \sum \prod_{r=1}^n \frac{1}{a_r!} \left( \frac{D_x^r g(x)}{r!} \right)^{a_r}. \quad (2.40)$$

Um trabalho de 2015 esclarece que propostas de derivações fracionárias que mantêm a estrutura usual da regra da cadeia são, na realidade, reestruturações das derivações de ordem inteira, ou seja, geram o mesmo efeito que tais operadores de ordem inteira nas funções aplicadas [12]. Uma representação válida e geral da fórmula de Faá di Bruno para derivações de ordem fracionário está presente em [3]

$$D_x^\alpha f(g(x)) = \frac{x^\alpha f(g(x))}{\Gamma(1-\alpha)} + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \frac{k! x^{k-\alpha}}{\Gamma(k-\alpha+1)} \sum_{m=1}^k (D_g^m f(g))_{g(x)} \sum \prod_{r=1}^k \frac{1}{a_r!} \left( \frac{(D_x^r)g(x)}{r!} \right)^{a_r}, \quad (2.41)$$

onde  $x > 0$ , e a soma se estende sobre todas as combinações dos inteiros não-negativos  $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ , de forma que  $\sum_{r=1}^k r a_r$  e  $\sum_r a_k = m$ .

A característica das derivações fracionárias que iremos abordar nessa etapa é a não-localidade. As derivações usuais de ordem inteira são caracterizadas pela diferenciação de funções somente em uma vizinhança infinitesimal do ponto considerado. Considerando as formulações apresentadas anteriormente, é notável que as derivações de ordem fracionária consideram em suas definições um efeito significativo do intervalo de derivação. Isso levou a esses formalismos serem amplamente utilizados para descrever efeitos de não-localidade (derivação espacial) e memória (derivação temporal) em diversos sistemas físicos [9]. Enquanto isso, sistemas descritos por equações diferenciais com derivações finitas de ordem inteira não podem descrever não-localidade ou efeitos de memória. Um trabalho de 2018 comprova que algumas das mais recentes propostas de derivação fracionária, como a derivação M-diferencial, a derivação de Caputo-Fabrizio, entre outras, não podem ser consideradas derivações fracionárias, pois apresentam somente os efeitos presentes em operações de ordem inteira [10].

Por fim, ressaltamos as restrições ao implemento da regra de integração por partes na presença de operadores do cálculo fracionário. Trabalhos que empregam a integração por partes convencional [30][31], expressa na forma

$$\int_a^b f(x) {}_a D_x^\alpha [g(x)] dx = \int_a^b {}_x D_b^\alpha [f(x)] g(x) dx, \quad (2.42)$$

estão fadados a um conjunto de restrições. As relações de condições a serem preservadas são

$$\sum_{j=0}^{n-1} (-D)^j f(x) \{ {}_a D_x^{\alpha-1-j} [g(x)] \} \Big|_{x=a}^b = 0 \quad (2.43)$$

e

$$(-D)^n [f(x)] {}_a I_x^{n-\alpha+1} [g(x)] \Big|_{x=a}^b = 0. \quad (2.44)$$

Uma implementação da regra de integração por partes mais adequada, sem restrições de uso, é explorada em [32], mas evitaremos explorá-la nesse trabalho, pois foge ao escopo do projeto.

A escolha na implementação das regras de integração por partes levam à construção de diferentes modelos físicos que utilizem formalismo fracionário. Na próxima seção apresentaremos algumas características de implementações das derivações fracionárias no tratamento de sistemas dinâmicos clássicos.

## 2.3 Dinâmica clássica fracionária

Ao longo das últimas décadas surgiram diversas propostas para sistemas dinâmicos no formalismo do cálculo fracionário [8]. As diferentes concepções de derivação fracionárias existentes, incluindo algumas que mostramos nesse trabalho, indicam a vasta gama de possibilidades que podem ser empregadas na hora de incorporar esse tratamento. Nessa seção abordaremos algumas propostas para a dinâmica fracionária, que tenham utilizado algumas das derivações fracionárias que apresentamos nas seções anteriores. Com isso, buscamos mostrar as diferentes implicações e possibilidades que o formalismo fracionário proporciona à descrição de sistemas físicos e suas interações.

### 2.3.1 Dinâmica com derivação fracionária de Riemann-Liouville e Caputo

Iremos apresentar as principais características de alguns formalismos para a dinâmica fracionária propostos nas últimas décadas que utilizem a derivação fracionária de Riemann-Liouville. Riewe [30] propôs a construção de um formalismo lagrangeano e hamiltoniano fracionário, que conduzem às equações fracionárias de Euler-Lagrange e

Hamilton. Essa proposta parte da concepção das coordenadas generalizadas no âmbito do cálculo fracionário. Considerando  $R$  coordenadas generalizadas  $q_{0,r}(t) = q_{0,1}(t), \dots, q_{0,R}(t)$  e os conjuntos de ordem de derivação  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$  e  $\{\beta_1, \dots, \beta_{N'}\}$ , definem-se as coordenadas generalizadas

$$q_{i,r,a} = {}_a D_t^{\alpha_i} [q_{0,r}(t)] \quad , \quad q_{j,r,b} = (-1)^{\beta_j} {}_t D_b^{\beta_j} [q_{0,r}(t)], \quad (2.45)$$

onde  $r = 1, \dots, R$  e  $i = 1, \dots, N$  e  $j = 1, \dots, N'$ . É importante ressaltar que, ao adotar o intervalo à direita  $[t, b]$ , pode haver dependência complexa nas coordenadas generalizadas, o que é uma característica importante dessa proposta. A função lagrangeana desse sistema depende de todas as  $R$  coordenadas  $q_{0,r}$ , todas as  $RN$  variáveis  $q_{i,r,a}$  e todas as  $RN'$  variáveis  $q_{j,r,b}$ , além do parâmetro temporal  $t$ . Sendo assim, a partir do método variacional e princípio de mínima ação, obtém-se as  $R$  equações de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q_{0,r}} + \sum_{i=1}^{N'} {}_t D_b^{\alpha_i} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{i,r,a}} \right) + \sum_{j=1}^N (-1)^{\beta_j} {}_a D_t^{\beta_j} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{j,r,b}} \right) = 0. \quad (2.46)$$

Os momentos generalizados são definidos nessa proposta e são expressos como

$$p_{i,r,a} = \sum_{k=0}^{N'-i-1} {}_t D_b^{\alpha_{k+i+1}-\alpha_{i+1}} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{k+i+1,r,a}} \right), \quad (2.47)$$

considerando os  $RN$  momentos generalizados com  $i = 0, \dots, N-1$  no intervalo à esquerda  $[a, t]$  e

$$p_{j,r,b} = \sum_{k=0}^{N-j-1} (-1)^{\beta_{k+j+1}-\beta_{j+1}} {}_a D_t^{\beta_{k+j+1}-\beta_{j+1}} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{k+i+1,r,b}} \right), \quad (2.48)$$

considerando os  $RN'$  momentos generalizados com  $j = 0, \dots, N'-1$  no intervalo à direita  $[t, b]$ . Em seguida, o autor define para essa proposta uma função hamiltoniana que mantém sua forma usual em relação à função lagrangeana

$$H = \sum_{j=0}^{N-1} q_{j+1,r,b} p_{j,r,b} + \sum_{i=0}^{N'-1} q_{i+1,r,a} p_{i,r,a} - L. \quad (2.49)$$

Essa função hamiltoniana é escrita em termos das  $R$  coordenadas generalizadas  $q_{0,r}$ , das  $R(N-1)$  variáveis  $q_{i,r,a}$ , das  $R(N'-1)$  variáveis  $q_{j,r,b}$  e dos momentos generalizados. Com isso, para obter as equações de movimento de Hamilton, basta utilizar o método variacional novamente, gerando

$$\frac{\partial H}{\partial q_{i,r,a}} = {}_t D_b^{\alpha_{i+1}-\alpha_i} (p_{i,r,a}) \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_{i,r,a}} = q_{i+1,r,a}, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_{j,r,b}} = (-1)^{\beta_{j+1}-\beta_j} {}_a D_t^{\beta_{j+1}-\beta_j} (p_{j,r,b}) \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_{j,r,b}} = q_{j+1,r,b}, \quad (2.51)$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.52)$$

A proposta de Riewe não trata das limitações da integração por partes, supondo que as derivações de Riemann-Liouville e de Caputo utilizam da mesma relação expressa em (2.42), partindo do princípio equivalente de integração por partes com integrais fracionárias. Nesse formalismo, a função  $H$  não é mais uma constante de movimento.

Em 2002, Agrawal [31] propõem um formalismo fracionário para a mecânica clássica que difere da de Riewe a partir das definições para as coordenadas generalizadas. Considere  $R$  coordenadas generalizadas  $q_{0,r}$ ,  $N$  e  $N'$  ordens de derivação, na forma  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$  no intervalo  $[a, t]$  e  $\{\beta_1, \dots, \beta_{N'}\}$  no intervalo  $[t, b]$ . As coordenadas generalizadas do sistema são propostas na forma

$$q_{i,r,a} = {}_a D_t^{\alpha_i} [q_{0,r}(t)] \quad , \quad q_{j,r,b} = {}_t D_b^{\beta_j} [q_{0,r}(t)]. \quad (2.53)$$

Por meio do princípio variacional, geram-se as equações de Euler-Lagrange, expressas na forma

$$\frac{\partial L}{\partial q_{0,r}} + \sum_{i=1}^N {}_t D_b^{\alpha_i} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{i,r,a}} \right) + \sum_{j=1}^{N'} {}_a D_t^{\beta_j} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{j,r,b}} \right) = 0, \quad (2.54)$$

considerando válida a definição atribuída de integração por partes (2.42). Agrawal não prossegue nesse trabalho para uma descrição do formalismo Hamiltoniano, mas o mesmo pode ser feito seguindo os passos de forma análoga ao trabalho de Riewe descrito anteriormente.

Agrawal em 2007 [33] propõem uma construção do formalismo lagrangeano e hamiltoniano clássico com operadores fracionários, construindo o formalismo da mesma forma que Riewe (2.3.1), porém com derivações fracionárias de Caputo. Para isso, são definidas coordenadas generalizadas de derivação direta. Considere um sistema com  $R$  coordenadas generalizadas  $(q_{0,1}, \dots, q_{0,R})$ ,  $N$  derivações fracionárias das coordenadas no intervalo  $[a, t]$ , com expoentes de derivação  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_N\}$ , defina-se

$$q_{i,r,a} = {}_a^C D_t^{\alpha_i} q_{0,r} \quad (2.55)$$

e

$$q_{j,r,b} = {}_t^C D_b^{\beta_j} q_{0,r}, \quad (2.56)$$

no intervalo  $[t, b]$  com expoentes de derivação  $\{\beta_1, \dots, \beta_{N'}\}$ . A letra  $i$  representa o  $i$ -ésimo expoente de derivação e  $r$  a  $r$ -ésima coordenada generalizadas que está sendo derivada.

Partindo da função lagrangeana descrita em termos de todas as coordenadas generalizadas e utilizando o método variacional, Agrawal então expressa as  $R$  equações de Euler-Lagrange na forma

$$\frac{\partial L}{\partial q_0} + \sum_{i=1}^N {}^C D_b^{\alpha_i} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{i,a}} \right) + \sum_{j=1}^{N'} {}^C D_t^{\beta_j} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{j,b}} \right) = 0. \quad (2.57)$$

Os momentos canônicos generalizados são definidos de forma análoga aos trabalhos já citados

$$p_{i,r,a} = \sum_{k=0}^{N-i-1} {}^C D_b^{\alpha_{k+i+1}-\alpha_{i+1}} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{k+i+1,r,a}} \right), \quad p_{j,r,b} = \sum_{k=0}^{N'-j-1} {}^C D_t^{\beta_{k+j+1}-\beta_{j+1}} \left( \frac{\partial L}{\partial q_{k+j+1,r,b}} \right). \quad (2.58)$$

A função hamiltoniana do sistema é construída de forma relacionada à função lagrangeana na forma

$$H = \sum_{n=0}^{N-1} p_{n,r,a} q_{n+1,r,a} + \sum_{n=0}^{N'-1} p_{n,r,b} q_{n+1,r,b} - L. \quad (2.59)$$

Partindo do princípio variacional, as equações de movimento são deduzidas por Agrawal e são expressas na forma

$$\frac{\partial H}{\partial q_{i,r,a}} = {}^C D_b^{\alpha_{i+1}-\alpha_i} (p_{i,r,a}), \quad (n \geq 1) \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_{i,r,a}} = q_{i+1,r,a}, \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_{j,r,b}} = {}^C D_t^{\beta_{j+1}-\beta_j} (p_{j,r,b}), \quad (n \geq 1) \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial p_{j,r,b}} = q_{j+1,r,b} \quad (2.61)$$

e

$$\frac{\partial H}{\partial q_{0,r}} = {}^C D_b^{\alpha_1} p_{0,r,a} + {}^C D_t^{\beta_1} p_{0,r,b} \quad , \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.62)$$

### 2.3.2 Dinâmica fracionária com derivação exterior

Por fim, abordaremos o trabalho desenvolvido por Tarasov em 2005 [14], que constrói uma generalização fracionária do formalismo hamiltoniano, partindo de uma abordagem diferente das que Riewe, Agrawal e demais utilizaram. Partindo das noções de generalização fracionária de cálculo exterior propostas em [34], esse trabalho constrói as equações de movimento clássicas utilizando operadores de ordem não-inteira. Visto que a derivação exterior é definida como  $d = dx_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ , assume-se uma ordem fracionária  $\alpha$  para o operador, na forma

$$d^\alpha = (dx_i)^\alpha {}_a D_{x_i}^\alpha, \quad (2.63)$$

onde  ${}_a D_{x_i}^\alpha$  é a derivação fracionária de Riemann-Liouville (2.10). Considerando as características da derivação de Riemann-Liouville, a derivada exterior fracionária possui propriedades semelhantes, como a derivação de potências na forma apresentada em (2.17), e conseqüentemente o seu efeito não nulo em constantes.

Considerando um sistema dinâmico hamiltoniano no espaço de fase  $\mathbb{R}^{2n}$ , tal sistema é definido pela função hamiltoniana  $H = H(q, p)$ . Para sistemas fechados com forças internas potenciais, podemos descrever o movimento desse sistema a partir das equações de Hamilton, expressas na forma

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_i}, \quad \text{com } i = 1, \dots, n. \quad (2.64)$$

Sistemas hamiltonianos descritos pelas equações acima são denominados sistemas fechados se a derivada exterior da função Hamiltoniana é nula  $dH = 0$ , onde  $dH$  é expressa por

$$dH = \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i. \quad (2.65)$$

Sendo assim, em tais sistemas hamiltoniano fechados os estados estacionários do sistema são expressos por

$$H(q, p) - C = 0, \quad (2.66)$$

onde  $C$  é uma constante que define os estados estacionários do sistema hamiltoniano globalizado.

Dessa forma, o autor propõe a definição de sistemas hamiltonianos fracionários. Um sistema dinâmico no espaço de fase  $\mathbb{R}^{2n}$  é chamado sistema hamiltoniano fracionário se a forma diferencial fracionária (derivada exterior) da função hamiltoniana  $H = H(q, p)$  é expressa na forma

$$d^\alpha H = D_{p_i}^\alpha H (dp_i)^\alpha + D_{q_i}^\alpha H (dq_i)^\alpha, \quad (2.67)$$

onde os operadores  $D_{p_i}^\alpha$  e  $D_{q_i}^\alpha$  são as derivações fracionárias de Riemann-Liouville. Sendo assim, esse trabalho propõe sistemas hamiltonianos fracionários descritos pelas equações de Hamilton na forma

$$\frac{dq}{dt} = D_p^\alpha H, \quad \frac{dp}{dt} = -D_q^\alpha H, \quad (2.68)$$

com ordem fracionária no intervalo  $0 < \alpha \leq 1$ . Se a forma diferencial em  $\alpha$  da função Hamiltoniana é nula ( $d^\alpha H = 0$ ), os estados estacionários do sistema Hamiltoniano fracionário são definidos por

$$H(q, p) - \left| \sum_{i=1}^n q_i p_i \right|^{\alpha-m} \sum_{k_1=0, l_1=0}^{m-1} \cdots \sum_{k_n=0, l_n=0}^{m-1} C_{k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n} \prod_{i=1}^n (q_i)^{k_i} (p_i)^{l_i} = 0, \quad (2.69)$$

onde  $C_{k_1, \dots, k_n, l_1, \dots, l_n}$  são constantes,  $m$  é o próximo número inteiro maior que  $\alpha$  e  $n$  a dimensão do sistema.

Esse capítulo foi dedicado a introdução dos aspectos fundamentais da mecânica fracionária. Para isso, nas primeiras seções apresentamos algumas das principais definições de derivação fracionária presentes na literatura, assim como algumas de suas propriedades mais importantes. O restante do capítulo é pautado em alguns dos primeiros modelos de dinâmica fracionária desenvolvidos e a apresentação do formalismo fracionário de Tarasov que é amplamente explorado nesse trabalho.

---

## 3. MECÂNICA FRACIONÁRIA DE LASKIN

---

Os trabalhos desenvolvidos por Feynman no âmbito da mecânica quântica foram responsáveis por uma reinterpretação da abordagem da dinâmica quântica. Em específico, Feynman consolidou uma relação direta entre as descrições antes estabelecidas por Schrödinger e Heisenberg para a mecânica quântica, com conceitos provenientes da mecânica clássica, como a ação mecânica e o princípio de mínima ação, baseando-se continuamente nos trabalhos desenvolvidos por Dirac [35]. A partir das integrais de caminho de Feynman, desenvolveram-se descrições fracionárias para essa formulação de dinâmica quântica, partindo da escolha de caminhos de integração com dimensões fractais diferentes da usual. Sendo assim, esse capítulo descreve as principais características dos caminhos Brownianos e de Lévy na aplicação à dinâmica quântica, fornecendo um fator de dimensão fractal explícita. Isso é feito considerando os trabalhos desenvolvidos por Laskin na formulação de uma mecânica quântica fracionária. Além disso, explora-se a proposta de Laskin no âmbito da mecânica clássica, adotando as formulações desenvolvidas por Lagrange, Hamilton e Jacobi.

### 3.1 Caminhos Brownianos, voos de Lévy e dimensão fractal

Após os valiosos trabalhos desenvolvidos por Feynman na formulação da mecânica quântica utilizando integrais de caminho [17], compreendeu-se posteriormente que seu tratamento utiliza nas integrações caminhos pertencentes ao movimento Browniano, bastando simplesmente substituir a variável temporal  $t$  por uma variável temporal imaginária  $(-i\tau)$  [7]. Isso leva a uma compreensão mais ampla das técnicas de Feynman para sua teoria. Ou seja, o método de integrais de caminho de Feynman pode ser estendido como uma abordagem de dinâmica quântica complexa através de caminhos tipo-Browniano.

Os caminhos Brownianos são bons exemplos de geometria fractal. Fractais são, pela definição de Mandelbrot [6], um objeto de auto-semelhança, onde todo o objeto é igual a qualquer uma de suas partes em qualquer escala. Fractais podem ser determinísticos ou randômicos e possuem uma dimensão fractal  $\alpha$ . As trajetórias do movimento Browniano são curvas auto-similares, sendo então considerados fractais randômicos. A dimensão fractal é definida a partir da análise do comprimento de um caminho qualquer

$$l(\Delta x) \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} l_0(\Delta x)^{-\delta}, \quad (3.1)$$

onde  $\delta$  é um índice de escala com  $\delta \geq 0$ . Temos que  $\Delta x$  representa um caminho reto,  $l$  o

comprimento do caminho analisado ( $l = N\Delta x$ ),  $N$  é o número de  $\Delta x$  contidos em  $l$  e  $l_0$  é um fator dimensional. A dimensão fractal é definida a partir do índice de escala  $\delta$ , por

$$\delta = d_{frac} - 1, \quad (3.2)$$

sendo  $d_{frac}$  a dimensão fractal do caminho em questão. Para  $\delta = 0$ , a expressão (3.1) recai no conceito fundamental de comprimento.

O movimento Browniano trata de um modelo matemático descoberto pelo biólogo Brown em 1827, a partir do estudo de partículas de pólen flutuando em água, observadas por microscópio. Todavia, foi Einstein, em 1905, que estabeleceu uma teoria para o movimento Browniano, a partir de uma análise cinética do movimento de fluidos [36]. O movimento Browniano trata-se formalmente de um processo randômico de Wiener, com função de distribuição probabilística condicionada a uma forma Gaussiana. A sua dimensão fractal parte da expressão para a densidade de probabilidade do processo de Wiener,

$$(\omega - \omega_0) \propto (\sigma(t - t_0))^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3)$$

onde  $\omega$  indica o processo de Wiener e  $\sigma$  é um coeficiente de difusão. Sejam  $\Delta\omega = \omega - \omega_0$  e  $\Delta t = t - t_0$ , ao considerar um caminho difusor entre dois pontos no espaço-tempo, gera-se um intervalo de tempo  $T = N\Delta t$  e um comprimento de espaço  $L = N\Delta\omega = \sigma T(\Delta\omega)^{-1}$ . A dimensão fractal é introduzida como

$$L \propto (\Delta\omega)^{1-d_{frac}}, \quad (3.4)$$

onde  $\Delta\omega \rightarrow 0$ . Dessa forma, ao comparar a expressão (3.4) com  $L = N\Delta\omega = \sigma T(\Delta\omega)^{-1}$ , a dimensão fractal do movimento Browniano é expressa em  $1 - d_{frac} = -1$ , gerando  $d_{frac}^{browniano} = 2$ .

Os voos de Lévy tratam de uma generalização natural do movimento Browniano. Partindo da constatação de que a soma de  $N$  distribuições Gaussianas geram uma Gaussiana com  $N$  vezes a variância original, Lévy e Khintchine [37] descobriram uma classe de distribuições de probabilidade não-Gaussianas estáveis em  $\alpha$ . Essa distribuição  $\alpha$  resulta de somas de variáveis aleatórias independentes distribuídas de forma idêntica, com função distribuição de probabilidade  $p(x) \sim x^{-1-\alpha}$ , sendo que  $x \rightarrow \infty$  se assemelha à distribuição Gaussiana resultante da soma de variáveis aleatórias independentes distribuídas de forma idêntica com função de distribuição de probabilidade  $p(x) \sim \exp\{-\frac{x^2}{2}\}$ . Cada distribuição  $\alpha$  possui um índice  $\alpha$  com intervalo  $(0,2]$ . Os voos de Lévy também são trajetórias auto-similares, assim como o movimento Browniano. Partindo da expressão da densidade de probabilidade dos voos de Lévy,

$$(x - x_0) \sim (\sigma_\alpha(t - t_0))^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (3.5)$$

com  $1 < \alpha \leq 2$ , ao considerar difusão anômala (com relação não-linear ao tempo). Partindo do mesmo procedimento para o caminho Browniano, definindo  $T = N\Delta t$  e  $L = N\Delta x = \sigma_\alpha T(\Delta x)^{1-\alpha}$ , defini-se a dimensão fractal do caminho de Lévy como

$$d_{\text{frac}}^{\text{Levy}} = \alpha. \quad (3.6)$$

Dessa forma, a proposta de Laskin para uma mecânica quântica fracionária surge como uma interpretação de um novo paradigma físico não-Gaussiano, baseada na profunda relação entre a estrutura das equações física fundamentais e as dimensões fractais dos sistemas físicos, como será visto a seguir.

## 3.2 Integrais de caminho com voos de Lévy

Feynman e Hibbs [17] reformularam a mecânica quântica não-relativística como integrais sobre todos os possíveis caminhos da evolução da partícula quântica. Em 1948 [38] eles propuseram um desenvolvimento alternativo na mecânica quântica usual, adotando o conceito clássico de ação mecânica. Laskin [15] observou nesses resultados a possibilidade de tratar a estrutura da energia cinética de uma forma mais ampla, não contradizendo os princípios fundamentais da mecânica clássica.

Dada uma partícula na posição inicial  $x_a$  no tempo  $t_a$  que se desloca à posição final  $x_b$  no tempo  $t_b$ , tratamos que  $x(t)$  é a trajetória (caminho) da partícula do ponto **a** ao **b**. Na mecânica quântica, essa trajetória é representada por uma amplitude, ou kernel, descrita por  $K_F(x_b t_b | x_a t_a)$ , que leva a partícula quântica do ponto **a** ao **b**. Esse kernel trata-se de uma contribuição de todos os possíveis caminhos entre os pontos iniciais e finais da trajetória. Caso a partícula quântica esteja se movimento em um potencial  $V(x)$ , o kernel pode ser definido por

$$K_F(x_b t_b | x_a t_a) = \int_{x(t_a)=x_a}^{x(t_b)=x_b} \mathcal{D}_{\text{Feynman}} x(\tau) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} d\tau V(x(\tau)) \right\}, \quad (3.7)$$

onde  $V(x(\tau))$  é a energia potencial como um funcional do caminho da partícula  $x(\tau)$ . O funcional de Feynman é definido como

$$\int_{x(t_a)=x_a}^{x(t_b)=x_b} \mathcal{D}_{\text{Feynman}} x(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \left( \frac{2\pi i \hbar \varepsilon}{m} \right)^{-\frac{N}{2}} \prod_{j=1}^N \exp \left\{ \frac{im}{2\hbar \varepsilon} (x_j - x_{j-1})^2 \right\}, \quad (3.8)$$

sendo  $m$  a massa da partícula quântica,  $x_0 = x_a$ ,  $x_N = x_b$  e  $\varepsilon = (t_b - t_a)/N$ .

O funcional de Feynman é gerado pelo processo do movimento Browniano, ou seja, o método de integrais de caminho de Feynman pode ser estendido como uma abordagem

de dinâmica quântica complexa ( $t \rightarrow i\tau$ ), surgindo assim manifestações do tipo Browniano nos caminhos de integração. A equação (3.8) implica na típica relação entre o deslocamento espacial e escala temporal do caminho Browniano, proveniente do processo de Wiener (3.3)

$$(x_j - x_{j-1}) \propto \left(\frac{\hbar}{m}\right)^{1/2} (\Delta t)^{1/2}. \quad (3.9)$$

Dessa forma, podemos indicar que os caminhos da integração do método de Feynman possuem dimensão fractal  $d_{\text{frac}} = 2$ , assim como as trajetórias do movimento Browniano.

Laskin [15] propõem uma extensão do conceito de fractalidade na física quântica. O autor constrói um novo caminho de integração fracionário nas integrais de caminho de Feynman, utilizando dos voos de Lévy (3.5) na sua representação. Dessa forma, é proposta uma generalização fracionária da amplitude (kernel) da contribuição dos caminhos de integração, agora com características fractais de dimensão  $\alpha$ , com  $1 < \alpha \leq 2$ , na forma

$$K_L(x_b t_b | x_a t_a) = \int_{x(t_b)=x_b}^{x(t_a)=x_a} \mathcal{D} x(\tau) \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_a}^{t_b} d\tau V(x(\tau)) \right\}, \quad (3.10)$$

onde  $V(x(\tau))$  é a energia potencial com um funcional dos caminhos de Lévy da partícula. O funcional dessa generalização pode ser representado como

$$\int_{x(t_a)=x_a}^{x(t_b)=x_b} \mathcal{D} x(\tau) = \lim_{N \rightarrow \infty} \int dx_1 \cdots dx_{N-1} \hbar^{-N} \left( \frac{iD_\alpha \varepsilon}{\hbar} \right)^{-N/\alpha} \prod_{j=1}^N L_\alpha \left\{ \frac{1}{\hbar} \left( \frac{\hbar}{iD_\alpha \varepsilon} \right)^{1/\alpha} |x_j - x_{j-1}| \right\}, \quad (3.11)$$

onde  $D_\alpha$  é o coeficiente de difusão fracionária generalizado, com dimensões  $[D_\alpha] = \text{erg}^{1-\alpha} \cdot \text{cm}^\alpha \cdot \text{sec}^{-\alpha}$ ,  $x_0 = x_a$ ,  $x_N = x_b$  e  $\varepsilon = (t_b - t_a)/N$ . A função de distribuição de Lévy  $L_\alpha$  é definida na forma

$$L_\alpha(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \exp\{iz\zeta - |\zeta|^\alpha\}, \quad (3.12)$$

que no limite  $\alpha = 2$  recai na distribuição presente na expressão (3.8) do funcional de Feynman. Assim como o funcional de Feynman, o funcional proposto por Laskin pode ser associado à relação de comprimento e tempo nos voos de Lévy, expressos em (3.5), onde se entende o processo de Lévy na forma

$$|x_j - x_{j-1}| \propto (\hbar^{\alpha-1} D_\alpha)^{1/\alpha} (\Delta t)^{1/\alpha}, \quad (3.13)$$

indicando que a dimensão fractal dos caminhos dessa proposta de dinâmica quântica é  $\alpha$ , sendo  $1 < \alpha \leq 2$ .

Considerando as propriedades da distribuição de Lévy  $L_\alpha$  [15], podemos representar as amplitudes de Feynman e Laskin para a partícula livre, a fim de indicar uma interpretação

para algumas de suas componentes. Considerando  $V(x) = 0$ , o kernel de Feynman da partícula livre, no espaço de momentos, é expresso por

$$K_F^{(0)}(x_b t_b | x_a t_a) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp \exp \left\{ i \frac{p(x_b - x_a)}{\hbar} - i \frac{p^2(t_b - t_a)}{2m\hbar} \right\}, \quad (3.14)$$

enquanto o kernel de Laskin da partícula livre no espaço de momentos é expresso por

$$K_L^{(0)}(x_b t_b | x_a t_a) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dp \cdot \exp \left\{ i \frac{p(x_b - x_a)}{\hbar} - i \frac{D_\alpha(t_b - t_a)|p|^\alpha}{\hbar} \right\}. \quad (3.15)$$

A partir da comparação entre as amplitudes acima, define-se que a energia de uma partícula quântica livre é expressa em termos do momento na forma

$$E = D_\alpha |p|^\alpha. \quad (3.16)$$

Além disso, fica claro que para o limite  $\alpha = 2$ , o parâmetro de difusão  $D_\alpha$  é aproximado para  $D_2 = 1/2m$ , sugerindo uma interpretação de fator inercial a esse parâmetro, levando à energia não-relativística usual da mecânica  $E_2 = p^2/2m$ . Uma forma mais geral de  $D_\alpha$  é discutida mais adiante nesse trabalho.

### 3.3 Formalismo de Laskin

O desenvolvimento proposto por Laskin [39] considera a forma Hamiltoniana utilizada no desenvolvimento tanto da mecânica clássica quanto da mecânica quântica como

$$\hat{H}(\hat{p}, \hat{q}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{q}), \quad (3.17)$$

onde  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$  são considerados operadores na mecânica quântica, assim como a função hamiltoniana. É introduzido um novo operador hamiltoniano fracionário, caracterizado pela nova interpretação da energia cinética do movimento (3.16), descrito na forma

$$\hat{H}_\alpha(\hat{p}, \hat{q}) = D_\alpha |\hat{p}|^\alpha + V(\hat{q}), \quad (3.18)$$

onde o índice  $\alpha$  reforça o caráter fracionário do tratamento dado por Laskin. Além disso,  $D_\alpha$  é interpretado como um coeficiente de escala, associado à inércia do movimento. Para  $\alpha = 2$ , o operador hamiltoniano volta à sua forma usual, ao adotar  $D_2 = \frac{1}{2m}$ . Enquanto as integrais de caminho de Feynman (caminho Browniano) levam à equação de Schrödinger usual, ao utilizar caminhos tipo-Lévy, gera-se a chamada equação de Schrödinger fracionária. Para tal, a generalização da amplitude de Feynman para um modelo fracionário corresponde

a reinterpretar o termo cinético da equação de Schrödinger usual ( $K = \hat{p}^2/2m$ ) pelo termo cinético fracionário ( $K_\alpha = D_\alpha|\hat{p}|^\alpha$ ), considerando  $\hat{p}$  o mesmo operador momento da mecânica quântica usual, gerando

$$i\hbar \frac{\partial \psi(q,t)}{\partial t} = D_\alpha (-\hbar^2 \nabla^2)^{\frac{\alpha}{2}} \psi(q,t) + V(q)\psi(q,t), \quad (3.19)$$

com ( $1 < \alpha \leq 2$ ). Essa representação é possível devido à introdução da derivação fracionária de Riesz [40], explorada na seção (2.1.4), descrevendo assim a forma da derivação espacial na abordagem fracionária de Laskin por

$$(-\hbar^2 \nabla^2)^{\frac{\alpha}{2}} \psi(q,t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \int d^3p e^{i\frac{pq}{\hbar}} |p|^\alpha \phi(p,t), \quad (3.20)$$

onde as funções de onda  $\psi(q,t)$  e  $\phi(p,t)$  estão relacionadas por transformações de Fourier. Sendo assim, pode-se expressar a equação de Schrödinger fracionária no formato

$$i\hbar \frac{\partial \psi(q,t)}{\partial t} = \hat{H}_\alpha \psi(q,t), \quad (3.21)$$

mantendo-se as definições dos operadores  $\hat{q}$  e  $\hat{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$  usuais. Considerando-se o limite  $\alpha = 2$ , gera-se a equação de Schrödinger usual

$$i\hbar \frac{\partial \psi(q,t)}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(q,t) + V(q)\psi(q,t). \quad (3.22)$$

O operador Hamiltoniano fracionário  $\hat{H}_\alpha(\hat{p}, \hat{q})$  mantém importantes propriedades vigentes na mecânica quântica usual, como hermeticidade, conservação de paridade, relações de comutação e conservação de probabilidade [39].

Uma característica particularmente importante nesse trabalho é a descrição da velocidade fracionária  $v$ , que será muito utilizada no âmbito clássico. Contudo, na mecânica quântica usual, a relação válida é  $\frac{\hat{p}}{m} = \frac{d\hat{q}}{dt}$ , onde  $\hat{q}$  é o operador de coordenadas e  $\hat{p}$  o operador momento linear. Sendo assim, utiliza-se da regra geral de diferenciação para operadores da mecânica quântica (equação de Heisenberg), para gerar uma relação entre a evolução temporal do operador  $\hat{q}$  e o operador hamiltoniano fracionário  $\hat{H}_\alpha$ , na forma

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \frac{i}{\hbar} (\hat{H}_\alpha \hat{q} - \hat{q} \hat{H}_\alpha). \quad (3.23)$$

Recorrendo à descrição do operador hamiltoniano fracionário em (3.18), obtém-se o operador velocidade fracionária

$$\frac{d\hat{q}}{dt} = \alpha D_\alpha \hat{p}^{\alpha-1}. \quad (3.24)$$

Quando migrarmos para o formalismo clássico, interpretaremos  $\vec{v} = \frac{d\vec{q}}{dt}$ , visto que  $\hat{p}$  e  $\hat{q}$  deixam de ser operadores, gerando a expressão

$$\vec{v} = \alpha D_\alpha(\vec{p})^{\alpha-1}. \quad (3.25)$$

Essa expressão indica uma importante diferença entre a relação usual de momento e velocidade  $\vec{p} = m\vec{v}$  e a decorrente dos trabalhos de Laskin (eq. 3.25). Podemos ainda expressar o momento linear clássico em uma forma mais conveniente por

$$\vec{p} = \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} (\vec{v})^{\frac{1}{\alpha-1}}, \quad (3.26)$$

gerando uma representação da função hamiltoniana fracionária clássica em termos da velocidade

$$H_\alpha = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} |\vec{v}|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + V(q). \quad (3.27)$$

### 3.4 Mecânica clássica fracionária

O modelo fracionário de Laskin é ainda expandido a uma contraparte clássica da mecânica quântica fracionária, abrangendo os tratamentos de Lagrange, Hamilton e Hamilton-Jacobi [20]. Primeiro, é necessário considerar as descrições fracionárias clássicas de algumas grandezas fundamentais. A ação canônica clássica  $S_\alpha(p, q)$  é descrita a partir de sua relação com a função Hamiltoniana, de forma que

$$S_\alpha(p, q) = \int_{t_a}^{t_b} d\tau \left( \sum_{i=1}^n p_i(\tau) \dot{q}_i(\tau) - H_\alpha(p(\tau), q(\tau)) \right), \quad (3.28)$$

onde  $1 < \alpha \leq 2$  e que difere da abordagem quântica, visto que  $p(\tau)$ ,  $q(\tau)$  e  $H_\alpha(p(\tau), q(\tau))$  não são operadores e sim grandezas clássicas de movimento. A função hamiltoniana fracionária clássica surge a partir da definição proposta por Laskin (3.18) substituindo  $\hat{p} \rightarrow p(\tau)$  e  $\hat{q} \rightarrow q(\tau)$ .

#### 3.4.1 Formulação Lagrangeana

A Lagrangeana fracionária é definida a partir de sua relação canônica com a função Hamiltoniana [4], adotando-se a Hamiltoniana fracionária expressa em (3.18), gerando

$$L_\alpha(\dot{q}, q) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H_\alpha(p, q), \quad (3.29)$$

onde a definição usual de momento canônico é mantida  $p_i = \frac{\partial L_\alpha(\dot{q}, q)}{\partial \dot{q}_i}$ . É importante ressaltar que a Hamiltoniana fracionária proposta por Laskin não possui dependência explícita do

tempo, permitindo interpretá-la como energia total conservada do sistema (autônomo). Podemos, ao expressar a função Lagrangeana fracionária na forma

$$L_\alpha(\dot{q}, q) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - [D_\alpha |p_i|^\alpha + V(q)], \quad (3.30)$$

simplificá-la recorrendo à relação entre os operadores  $\hat{v}$  e  $\hat{p}$  da mecânica quântica fracionária (3.25), em uma representação clássica ( $\hat{v}$  e  $\hat{p}$  não são operadores e a substituição  $v \rightarrow \dot{q}$  foi empregada). Dessa forma, tem-se

$$L_\alpha(\dot{q}, q) = \sum_{i=1}^n \left( \frac{|\dot{q}_i|}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \dot{q}_i - D_\alpha \left( \frac{|\dot{q}_i|}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - V(q). \quad (3.31)$$

A partir de alguma álgebra, é possível expressar a função Lagrangeana fracionária evidenciando o termo cinético e o tempo potencial

$$L_\alpha(\dot{q}, q) = \sum_{i=1}^n |\dot{q}_i|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right) - V(q), \quad (3.32)$$

com  $1 < \alpha \leq 2$ . Apesar de Laskin não explorar em seus trabalhos, a estrutura usual da função Lagrangeana como a diferença das energias cinética e potencial ( $L = K - V$ ) não é mantida no formalismo fracionário. A partir da expressão acima, utilizando a notação de Einstein daqui em diante, podemos indicar que a energia cinética no formalismo lagrangeano fracionário clássico é

$$K_\alpha^{L_\alpha} = |\dot{q}_i|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right), \quad (3.33)$$

onde empregamos o índice  $L_\alpha$  para indicar o formalismo. Todavia, a função hamiltoniana proposta por Laskin introduz um termo cinético na forma  $K_\alpha = D_\alpha |p_i|^\alpha$ , que ao ser manipulado utilizando-se da expressão (3.26), pode ser expresso na forma

$$K_\alpha = |\dot{q}_i|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (3.34)$$

Ou seja, é necessária uma reinterpretação da forma da função Lagrangeana na abordagem fracionária ao ser expressa em termos energéticos. Comparando as expressões de energia cinética  $K_\alpha^{L_\alpha}$  e  $K_\alpha$ , temos que a função lagrangeana fracionária pode ser representada por

$$L_\alpha = (\alpha - 1)K_\alpha - V, \quad (3.35)$$

seja  $K_\alpha$  expressa por (3.34). O termo numérico  $(\alpha - 1)$  também se manifesta em passagens seguintes desse trabalho.

A dinâmica lagrangeana é representada na mecânica clássica usual, considerando-se forças conservativas, pelas equações de Euler-Lagrange [4], representadas na forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L(q, \dot{q})}{\partial q_k} = 0. \quad (3.36)$$

Sendo assim, utilizando a função lagrangeana fracionária expressa em (3.32), pode-se representar as equações de Euler-Lagrange fracionária, substituindo-a na expressão acima, gerando assim

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{\alpha-1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} |\dot{q}_i|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right] + \frac{\partial V(q)}{\partial q_k} = 0. \quad (3.37)$$

Essa expressão, ao ser manipulada, gera a equação do movimento do formalismo lagrangeano, representada por

$$\left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \ddot{q}_i \left( \frac{1}{\alpha-1} \right) |\dot{q}_i|^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} + \frac{\partial V(q)}{\partial q_k} = 0, \quad (3.38)$$

cujas condições iniciais são na forma  $q(t=0) = q_0$  e  $\dot{q}(t=0) = \dot{q}_0$ . Ao adotar o limite  $\alpha = 2$ , com  $D_2 = \frac{1}{2m}$ , tem-se

$$m\ddot{q}_i + \frac{\partial V(q)}{\partial q_k} = 0, \quad (3.39)$$

que é a equação do movimento da mecânica clássica usual.

### 3.4.2 Formulação Hamiltoniana

A formulação hamiltoniana clássica fracionária pode ser elaborada partindo do emprego do princípio variacional, assim como na mecânica clássica usual. Seja o funcional ação definido na forma, lembrando que estamos utilizando a notação de Einstein, temos

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt, \quad (3.40)$$

considerando dois tempos  $t_i$  e  $t_f$  de um movimento. O princípio variacional de Hamilton declara que a variação desse funcional para a movimento de um corpo transitar de um ponto no tempo  $t_i$  até um ponto no tempo  $t_f$  deve ser nula [4]

$$\delta S = 0. \quad (3.41)$$

Esse princípio, na mecânica clássica usual, permite construir as equações de Lagrange e de Hamilton.

Sendo assim, considerando o princípio variacional de Hamilton e a ação fracionária expressa em (3.28), podemos expressar esse princípio no âmbito fracionário, na forma

$$\delta S_\alpha(p, q) = \int_{t_a}^{t_b} d\tau \left( \delta p_i \dot{q}_i + p_i \delta \dot{q}_i - \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i} \delta p_i - \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i \right) = 0. \quad (3.42)$$

A partir de uma integral por partes no termo  $p_i \delta \dot{q}_i$ , gera-se

$$\delta S_\alpha(p, q) = \int_{t_a}^{t_b} d\tau \delta p_i \left[ \dot{q}_i - \frac{\partial H_\alpha}{\partial p_i} \right] + p_i \delta q_i \Big|_{t_a}^{t_b} - \int_{t_a}^{t_b} d\tau \delta q_i \left[ \dot{p}_i + \frac{\partial H_\alpha}{\partial q_i} \right] = 0, \quad (3.43)$$

onde se assume não haver variação nos pontos extremos da trajetória  $\delta q_i(t_a) = \delta q_i(t_b) = 0$ . Dessa forma, a expressão acima indica que o princípio variacional de Hamilton é somente satisfeito perante às condições

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H_\alpha(p, q)}{\partial p_i} \quad e \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H_\alpha(p, q)}{\partial q_i}, \quad (3.44)$$

que são as equações de Hamilton. Considerando o Hamiltoniano fracionário (3.18), as equações de Hamilton podem ser expressas como

$$\dot{q}_i = \frac{\partial}{\partial p_i} (D_\alpha |p_i|^\alpha + V(q)) \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_i = \alpha D_\alpha |p_i|^{\alpha-1} \text{sgn}(p_i) \quad (3.45)$$

e

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial}{\partial q_i} (D_\alpha |p_i|^\alpha + V(q)) \quad \Rightarrow \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial V(q)}{\partial q_i}, \quad (3.46)$$

sendo  $\text{sgn}(p_i) = \frac{p_i}{|p_i|}$  uma função sinal de  $p_i$ . As equações acima são denominadas equações de Hamilton fracionárias para sistemas mecânicos. Em particular, destacamos a relação entre as variáveis  $p_i$  e  $\dot{q}_i$  proveniente do formalismo fracionário, que pode ser expressa por

$$|p_i| = \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} |\dot{q}_i|^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (3.47)$$

### 3.4.3 Formulação de Hamilton-Jacobi

Seja a Lagrangeana fracionária expressa por (3.32), pode-se representar a ação fracionária, partindo de sua definição usual (3.40), na forma

$$S_\alpha(\dot{q}, q) = \int_{t_a}^{t_b} d\tau \left[ \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{\alpha-1}{\alpha} |\dot{q}_i|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - V(q) \right], \quad (3.48)$$

com  $1 < \alpha \leq 2$ . Tratando a ação como função da posição generalizada e do limite superior de integração  $S_\alpha(q, t_b)$ , a evolução de sua variação  $\delta S_\alpha(q, t_b)$  parte da comparação com ela mesma, com trajetórias partindo do mesmo ponto inicial, mas com diferentes  $q_i(t_b)$ . Sendo assim, escreve-se

$$\delta S_\alpha(q, t_b) = \int_{t_a}^{t_b} d\tau \delta L_\alpha(\dot{q}, q) = \int_{t_a}^{t_b} d\tau \frac{\partial L_\alpha}{\partial q_i} \delta q_i + \int_{t_a}^{t_b} \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i. \quad (3.49)$$

Aplicando-se integração por partes no segundo termo de integração, logo obtém-se

$$\delta S_\alpha(q, t_b) = \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \Big|_{t_a}^{t_b} + \int_{t_a}^{t_b} d\tau \delta q_i \left[ \frac{\partial L_\alpha}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{q}_i} \right) \right]. \quad (3.50)$$

Uma vez que as trajetórias partem do mesmo ponto, temos que  $\delta q_i(t_a) = 0$ . Identifica-se ainda a presença das equações de Euler-Lagrange (3.36) no segundo termo da expressão acima, permitindo escrever que

$$\delta S_\alpha(q, t_b) = p_i \delta q_i(t_b), \quad (3.51)$$

onde se empregou a definição de momento canônico usual. É importante perceber que a expressão acima fornece ainda a interpretação do momento canônico expresso pela variável ação na forma

$$p_i = \frac{\partial S_\alpha(q, t)}{\partial q_i}. \quad (3.52)$$

Pode-se agora explorar a taxa de variação temporal da variável dinâmica ação. Ao adotar-se a mudança de notação  $t_b \rightarrow t$  e  $\delta q_i(t_b) \rightarrow \delta q_i$ , a derivação temporal total da ação é expressa por

$$\frac{dS_\alpha(q, t)}{dt} = \left( \frac{\partial S_\alpha}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} \right) = \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + p_i \dot{q}_i. \quad (3.53)$$

Recorrendo à relação entre a função lagrangeana e a variável ação (3.40), expressa na forma  $L_\alpha = \frac{dS_\alpha}{dt}$ , tem-se que

$$\frac{\partial S_\alpha}{\partial t} = L_\alpha - p_i \dot{q}_i, \quad (3.54)$$

ou seja, gera-se a equação de Hamilton-Jacobi, na forma

$$\frac{\partial S_\alpha(q, t)}{\partial t} + H_\alpha \left( \frac{\partial S_\alpha(p, t)}{\partial q}, q \right) = 0, \quad (3.55)$$

recorrendo à relação (3.29). Essa equação incorpora a variável dinâmica ação como função geradora, chamada aqui de função principal de Hamilton. Ao utilizar a função Hamiltoniana fracionária proposta por Laskin (3.18), gera-se

$$\frac{\partial S_\alpha(q, t)}{\partial t} + D_\alpha \left| \frac{\partial S_\alpha(q, t)}{\partial q_i} \right|^\alpha + V(q) = 0, \quad (3.56)$$

chamada equação de Hamilton-Jacobi fracionária.

Para sistemas Hamiltonianos independentes do tempo, é possível empregar uma separação de variáveis nas variáveis  $q$  e  $t$ , gerando uma solução para a equação acima na forma

$$S_\alpha(q, t, E) = S_\alpha^{(0)}(q, E) - Et, \quad (3.57)$$

onde  $S_\alpha^{(0)}$  é a chamada função característica de Hamilton. A constante  $E$  surge como uma constante de integração, interpretada como energia total do sistema. Dessa forma, pode-se gerar

$$D_\alpha \left| \frac{\partial S_\alpha^{(0)}(q, E)}{\partial q_i} \right|^\alpha + V(q) = E, \quad (3.58)$$

como a equação de Hamilton-Jacobi independente do tempo.

Como exemplo, podemos considerar a partícula livre, onde se adota  $V(q) = 0$ . A partir da expressão (3.56), gera-se

$$\frac{\partial S_\alpha(q, t)}{\partial t} + D_\alpha \left| \frac{\partial S_\alpha(q, t)}{\partial q_i} \right|^\alpha = 0. \quad (3.59)$$

A partir da solução (3.57), a solução para a função característica de Hamilton é descrita na forma  $S_\alpha^{(0)}(q, E) = \left(\frac{E}{D_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} q_i$ , fornecendo a solução geral expressa por

$$S_\alpha(q, t, E) = \left(\frac{E}{D_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} q_i - Et. \quad (3.60)$$

Diferenciando-se em relação à energia  $E$  e igualando-se a uma nova constante  $\delta$ , gera-se

$$\frac{\partial S_\alpha(q, t, E)}{\partial E} = \frac{1}{\alpha D_\alpha} \left(\frac{E}{D_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}-1} q_i - t = \delta, \quad (3.61)$$

de forma que, utilizando-se da definição (3.52), são expressas as trajetórias de uma partícula livre na mecânica clássica fracionária

$$q_i = \alpha D_\alpha \left(\frac{E}{D_\alpha}\right)^{1-\frac{1}{\alpha}} (t + \delta) \quad , \quad p_i = \left(\frac{E}{D_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (3.62)$$

com  $E > 0$  e  $1 < \alpha \leq 2$ .

Esse capítulo apresenta uma descrição completa do formalismo fracionário proposto por Laskin. Partimos da proposta inicial desse formalismo pautado inserido no âmbito da mecânica quântica e migramos para a contraparte clássica, a qual é de maior interesse para esse trabalho.

---

## 4. INTERPRETAÇÃO FÍSICA DOS FORMALISMOS FRACIONÁRIOS

---

Trataremos nesse capítulo da investigação e averiguação de algumas das características decorrentes da implementação do formalismo do cálculo fracionário em sistemas físicos. Em particular, abordaremos a interpretação de fractalidade em sistemas com múltiplos corpos, a conservação de energia em sistemas clássicos fracionários, seguindo particularmente os modelos de Laskin e Tarasov (2.3.2 e 3.3), as características da implementação de fractalidade espacial e/ou temporal no formalismo de Laskin e por fim a concepção de uma interpretação de integrabilidade para sistemas clássicos fracionários.

### 4.1 Fractalidade de diferentes objetos

A compreensão do significado prático e aplicável da dimensão fractal de um sistema é essencial na aplicabilidade dos formalismos fracionários indicados nesse trabalho. A alteração no valor de  $\alpha$ , em um primeiro momento, pode ser interpretada como uma mudança na característica da evolução dos estados/configurações do sistema. Com isso estaríamos assumindo que a análise de um sistema contendo mais de uma partícula ou objeto possui um único valor para  $\alpha$ , que contém toda a contribuição da fractalidade da evolução desse sistema. Todavia, ressaltamos que a construção do conceito de dimensão fractal é elaborado a partir da interpretação do comprimento  $L$  de um caminho fractal randômico [6], como indicamos na seção (3.1), o qual serve de base na construção da mecânica quântica fracionária de Laskin (seção 3.3). Sendo assim, visto que o método de integrais de caminho de Feynman engloba integração por todos os caminhos físicos possíveis para um dado objeto/estado físico ir de um ponto  $a$  para um ponto  $b$ , poderíamos então assumir que a dimensão fractal/fractalidade trata-se de uma característica do objeto físico evoluindo, imerso em um meio que possua propriedades fractais, como, por exemplo, o movimento Browniano.

Dessa forma, adotaremos no decorrer desse trabalho, independente do formalismo, uma distinção da fractalidade para diferentes objetos físicos interagindo (por exemplo,  $\alpha_1$  para a partícula 1 e  $\alpha_2$  para a partícula 2), buscando indicadores das consequências resultantes ao assumir a fractalidade como uma característica proveniente de alguma propriedade do objeto físico. Em particular, nos atentamos ao coeficiente  $D_\alpha$  (termo inercial) do formalismo de Laskin, que possui características massivas do objeto físico, mas não possui expressão geral para sua estrutura, exceto pela aproximação  $\alpha = 2$ . Com

isso, propomos a seguir sugestões para a interpretação e representação do parâmetro  $D_\alpha$ , visando indicar a contribuição da fractalidade de tal termo na descrição do sistema físico.

## 4.2 Propostas de massa para a mecânica fracionária de Laskin

Como a proposta de Laskin para a função Hamiltoniana fracionária reestrutura a energia cinética, reescrevendo-a em termos do momento, de um parâmetro inercial  $D_\alpha$  e em termos da dimensão fractal  $\alpha$ , obedecendo aos limites  $1 < \alpha \leq 2$  e à aproximação  $D_2 = \frac{1}{2m}$ , temos que a função hamiltoniana na mecânica clássica fracionária é expressa, considerando a equação (3.18), como

$$H_\alpha = D_\alpha |\vec{p}|^\alpha + V(q). \quad (4.1)$$

Propomos, então, formas alternativas de representar a dimensão fractal e o parâmetro  $D_\alpha$  do sistema. Para isso buscamos na literatura representações “gerais” da massa de entes físicos em diferentes contextos físicos, assumindo as limitações das interpretações do parâmetro  $D_\alpha$  como desconhecidas.

### 4.2.1 Segunda lei de Newton fracionária

As equações de Hamilton geradas no formalismo fracionário de Laskin para a mecânica clássica são expressas em (3.45) e (3.46). A partir da equação (3.25), representamos o momento linear do sistema fracionário considerando o formalismo Hamiltoniano, descrito em (3.47) e expresso por

$$|\vec{p}| = \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} |\dot{q}|^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (4.2)$$

Podemos assumir que a segunda lei de Newton mantém sua forma usual, uma vez que o formalismo fracionário de Laskin está contido na derivação espacial indicada pela derivada de Riesz (3.20), e não por um operador temporal. Dessa forma, indicamos, para um sistema unidimensional, que a segunda lei de Newton é dada por

$$F = \frac{dp}{dt}. \quad (4.3)$$

Sendo assim, utilizamos a expressão (4.2) para gerar uma forma diferente para a segunda lei de Newton no formalismo fracionário

$$F = \frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{\dot{q}}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \right] = \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{\dot{q}^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha-1} \ddot{q}. \quad (4.4)$$

A partir da expressão acima podemos assumir uma interpretação para um termo de massa  $f(m)$  no formalismo fracionário de Laskin, uma vez que a segunda lei de Newton

é expressa na sua forma para massa constante por  $F = m\ddot{q}$ . Assim, interpretamos a massa como uma constante de proporção entre força e aceleração, assumindo que a segunda lei de Newton seja estruturada, unidimensionalmente, na forma  $F = m_\alpha \ddot{q}$  para o formalismo fracionário. Teremos então para a mecânica fracionária que

$$m_\alpha = \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{\dot{q}^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}}{\alpha-1}. \quad (4.5)$$

Para o limite  $\alpha = 2$ , a massa  $m_\alpha$  passa ser representada por  $m_2 = m$ , levando à segunda lei de Newton convencional. A partir dessa manipulação, introduzimos uma representação do parâmetro inercial  $D_\alpha$ . Para tal, basta isolá-lo na expressão (4.5), gerando

$$D_\alpha = \frac{1}{\alpha} \left( \frac{1}{\alpha-1} \right)^{\alpha-1} m_\alpha^{1-\alpha} (\dot{q})^{2-\alpha}, \quad (4.6)$$

onde o limite  $\alpha = 2$  leva a  $D_2 = 1/2m$ . Dessa forma, podemos agora representar as grandezas energia cinética (3.34) e momento linear (4.2), por

$$K_\alpha = m_\alpha \left( \frac{\alpha-1}{\alpha} \right) (\dot{q})^2. \quad (4.7)$$

e

$$p = (\alpha-1)m_\alpha \dot{q}. \quad (4.8)$$

Como esperado, adotando o limite  $\alpha = 2$ , as equações de energia cinética e momento linear recaem nas suas formas usuais. A escolha em manter a massa do ente físico como  $m_\alpha$  é mantida, uma vez que optamos por não afirmar que a massa  $m_\alpha$  trata-se da massa inercial do objeto físico. Nas seções adiante, expandiremos a noção de massa inercial do sistema.

#### 4.2.2 Definição de massa a partir da massa efetiva

Em áreas da física onde as expressões de momento e energia assumem formas diferentes da mecânica clássica usual, podemos recorrer à chamada relação de dispersão, que expressa a relação entre a energia e momento do sistema. A partir dela, podemos definir outras grandezas físicas importantes, como, por exemplo, massa [22]. Visto que a relação de dispersão proposta por Laskin para a mecânica fracionária não fornece uma representação direta para a massa, utilizaremos da estratégia da massa efetiva, utilizada no âmbito da física do estado sólido para investigar, por exemplo, o movimento de um elétron sobre a influência de uma força externa em um cristal. Essa estratégia parece adequada ao formalismo fracionário, uma vez que visa esclarecer os efeitos do meio no movimento da partícula.

Considerando os trabalhos e teorias desenvolvidas por De Broglie e Planck no âmbito da física quântica [5] em concordância com a dualidade onda-partícula da mecânica

quântica, partiremos da definição de velocidade de grupo do elétron interpretado como um pacote de onda

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}. \quad (4.9)$$

Essa velocidade se refere à velocidade de propagação de um pacote de onda ou onda de matéria, sendo  $\omega$  a frequência angular e  $k$  o número de onda. Assumindo que a relação de energia de Einstein  $E = \hbar\omega$  é válida e corresponde à energia da partícula, passamos a representar a velocidade, abrindo mão do índice  $g$ , na forma

$$v = \hbar^{-1} \frac{dE}{dk}. \quad (4.10)$$

Sendo assim, podemos representar a aceleração dessa partícula  $a = dv/dt$  por

$$a = \hbar^{-1} \frac{d^2 E}{dk^2} \frac{dk}{dt}, \quad (4.11)$$

utilizando a regra da cadeia na derivação.

Assumindo o sistema como sendo conservativo, recorreremos ao teorema energia-trabalho, expresso na forma  $dE = dW$  e passamos a representar o elemento de trabalho infinitesimal  $dW$  como  $Fdr$ , para um força atuante  $F$  e um elemento de deslocamento  $dr$ . Com isso, o teorema energia-trabalho pode ser expresso por  $dE = Fdr = Fvdt$ , utilizando a definição  $v = dr/dt$ . Utilizando a expressão (4.10), chegamos então a

$$F \left( \hbar^{-1} \frac{dE}{dk} \right) dt = \frac{dE}{dk} dk. \quad (4.12)$$

Dessa forma, podemos agora expressar a força resultante atuante na partícula como

$$F = \hbar \frac{dk}{dt}. \quad (4.13)$$

O seguimento usual dessa elaboração é utilizar a noção de massa a partir da consideração da proporcionalidade entre força e aceleração, descritos pela segunda lei de Newton:  $m \sim \frac{F}{a}$ . Todavia, no formalismo fracionário, assumiremos que a constante de proporção entre força e aceleração será a massa  $m_\alpha$  indicada anteriormente, interpretada como massa inercial no limite  $\alpha = 2$ . Sendo assim, seja  $m_\alpha \sim \frac{F}{a}$ , temos que

$$m_\alpha = \hbar^2 \left( \frac{d^2 K_\alpha}{dk^2} \right)^{-1}, \quad (4.14)$$

onde substituímos a energia  $E$  por  $K_\alpha$  ( $K_\alpha = D_\alpha |p|^\alpha$ ). Por fim, utilizando o momento de De Broglie, definido por  $p = \hbar k$ , passamos a representar a massa  $m_\alpha$  do sistema fracionário por

$$m_\alpha = \left( \frac{d^2 K_\alpha}{dp^2} \right)^{-1}. \quad (4.15)$$

Dessa forma, assumindo a definição acima, podemos indicar uma representação para o fator inercial  $D_\alpha$  do sistema fracionário. Para tal, basta calcular  $m_\alpha$ , começando pela derivação

$$\frac{d^2 K_\alpha}{dp^2} = \frac{d^2}{dp^2} (D_\alpha |p|^\alpha) = \alpha D_\alpha \frac{d}{dp} |p|^{\alpha-1} \text{sgn}(p) = \alpha D_\alpha |p|^{\alpha-2} (\alpha - 1). \quad (4.16)$$

Por fim, utilizando a definição de  $m_\alpha$  (4.15) e isolando  $D_\alpha$ , temos

$$D_\alpha = \frac{|p|^{2-\alpha}}{\alpha(\alpha - 1)m_\alpha}. \quad (4.17)$$

Com essa expressão podemos agora reestruturar a energia cinética da mecânica fracionária de Laskin ( $K_\alpha = D_\alpha |p|^\alpha$ ) na forma

$$K_\alpha = \frac{p^2}{\alpha(\alpha - 1)m_\alpha}, \quad (4.18)$$

onde abrimos mão do módulo em  $p$  devido ao expoente, e a relação momento e velocidade (4.2) na forma

$$p = (\alpha - 1)m_\alpha \dot{q}. \quad (4.19)$$

Sendo assim, fica evidente a equivalência entre as duas abordagens de massa e fator inercial propostos. As equações (4.6) e (4.17) são equivalentes e levam às mesmas representações de energia cinética e momento linear do formalismo fracionário de Laskin. Além disso, podemos identificar o fator numérico  $(\alpha - 1)$  como sendo o fator em comum em ambas as abordagens que é o responsável pela contribuição fracionária no sistema. Essa fator também é contemplado no formalismo fracionário lagrangeano, explorado anteriormente (3.32), onde a reinterpretção da função lagrangeana no formalismo fracionário clássico necessita dessa correção (3.35). Todavia, seja na abordagem da segunda lei de Newton ou na de massa efetiva, assumimos que esse formalismo fracionário em questão não possui outros operadores fracionários em seu tratamento, sendo a contribuição fracionária inteira contida na função hamiltoniana fracionária (3.44). Assim, seria prudente não excluir a possibilidade de a utilização da segunda lei de Newton na forma  $F = dp/dt$  estar incorreta e ser necessária, de alguma forma, a inclusão de uma derivação temporal fracionária nesse tratamento. Em particular, nos atentamos a essa possibilidade devido à contribuição fracionária desse formalismo estar todo contido em um único fator numérico atrelado à energia cinética e ao momento linear do sistema.

Na próxima seção, olharemos para o fator inercial  $D_\alpha$  de um ponto de vista mais amplo, sugerindo e coletando da literatura estruturas gerais para descrever a massa do sistema fracionário.

### 4.2.3 Definição de $D_\alpha$ considerando suas unidades

Em 2007, Dong e Xu publicaram um trabalho no qual é explorada a solução da equação de Schrödinger fracionária (3.19) com diferentes potenciais na representação dos momentos [41]. Com a intenção de indicar a contribuição de diferentes fractalidades  $\alpha$  do sistema, os autores, a partir de uma análise dimensional e considerando uma partícula (elétron) não relativística, é proposto que os valores de  $D_\alpha$  obedecem à relação

$$D_\alpha \propto \frac{c^{2-\alpha}}{(\alpha m^{\alpha-1})}, \quad (4.20)$$

visto que a dimensão de  $D_\alpha$  é, de forma geral,  $[D_\alpha] = M^{1-\alpha}(L/T)^{2-\alpha} = M^{1-\alpha}C^{2-\alpha}$ , onde  $M$ ,  $L$  e  $T$  são as unidades fundamentais de massa, comprimento e tempo, respectivamente, e  $C$  é a dimensão de velocidade, com  $c$  sendo a velocidade característica de um sistema quântico não-relativístico e  $m$  a massa da partícula.

As duas propostas de representação para o fator inercial  $D_\alpha$  sugeridas nas seções anteriores (4.6 e 4.17) obedecem à relação acima, pois são equivalentes, de forma que indicamos o fator numérico presente na equação (4.6) como uma constante de proporcionalidade que ajuda a definirmos  $D_\alpha$  a partir da expressão (4.20). Sendo assim, introduzimos a definição do fator inercial fracionário como

$$D_\alpha = \left( \frac{1}{\alpha - 1} \right)^{\alpha-1} \frac{(\dot{q})^{2-\alpha}}{(\alpha m_\alpha^{\alpha-1})}, \quad (4.21)$$

onde  $\dot{q}$  indica a velocidade característica da partícula e  $m_\alpha$  sua massa fracionária.

## 4.3 Problema de força central no formalismo fracionário

Buscando investigar os efeitos do formalismo fracionário em sistemas físicos, exploraremos nessa seção o tratamento de um sistema de partículas sujeitas a uma força central. Em particular, consideramos o movimento de dois corpos sobre o efeito de uma força central, que pode ser reduzido a um sistema equivalente de somente um corpo [4]. Nesse contexto, estamos nos referindo a uma partícula sujeita a uma força  $\vec{F}$  que depende somente da distância a um ponto fixo. Tomaremos que tal partícula está situada na origem do sistema de coordenadas e empregaremos coordenadas esféricas (reduzidas a polares em 2D) na descrição do movimento. Esse tipo de sistema físico, caracterizado por um potencial central, é usualmente associado a sistemas sobre o efeito de potenciais

gravitacionais, de forma que indicaremos nesse trabalho uma versão fracionária da segunda lei de Kepler. Para tal, consideraremos o formalismo fracionário de Laskin, descrito na seção (3.3).

Primeiramente, consideraremos o caso unidimensional, de forma que as representações da função hamiltoniana (4.1) e do momento linear (4.2) são utilizadas desconsiderando a presença do módulo das variáveis. Para tal, partimos da representação da energia total do sistema físico no formalismo fracionário considerando a função hamiltoniana como a energia total do sistema, de forma que

$$E = D_\alpha \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} |\dot{q}|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} + V(q). \quad (4.22)$$

A solução dessa expressão para  $|\dot{q}|$  é descrita como

$$|\dot{q}| = \alpha D_\alpha^{\frac{1}{\alpha}} [E - V(q)]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}. \quad (4.23)$$

Buscando uma melhor interpretação da expressão acima, utilizamos uma expansão por série de Taylor [23] ao redor de  $\alpha = 2$  (caso usual) até primeira ordem. Considerando que a série de Taylor é expressa por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \quad \text{com} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad (4.24)$$

representaremos a variável  $\dot{r}$  na forma

$$|\dot{q}| = 2D_\alpha^{\frac{1}{2}} (E - V(q))^{\frac{1}{2}} \left\{ 1 + \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{E - V(q)}{D_\alpha} \right) \right] (\alpha - 2) \right\}. \quad (4.25)$$

O primeiro termo da expansão do lado direito da expressão se refere a expressão usual de velocidade  $\dot{q} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - V(q))}$ , considerando a aproximação  $D_2 = 1/2m$ . Nos demais termos da expansão, podemos identificar no segundo termo uma contribuição linear decorrente do formalismo fracionário, enquanto o termo seguinte indica uma contribuição exponencial. Considerando o limite assintótico  $V(q) \rightarrow 0$ , a contribuição fracionária para a velocidade  $|\dot{q}|$  é indicada por

$$|\dot{q}_{\text{frac}}| = \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{E}{D_\alpha} \right) \right] (\alpha - 2). \quad (4.26)$$

No caso onde  $E > D_\alpha e^2$ , essa contribuição é positiva, no caso contrário negativa. A figura (1) indica o espaço de fase para esse sistema considerando diferentes valores de  $\alpha$ .

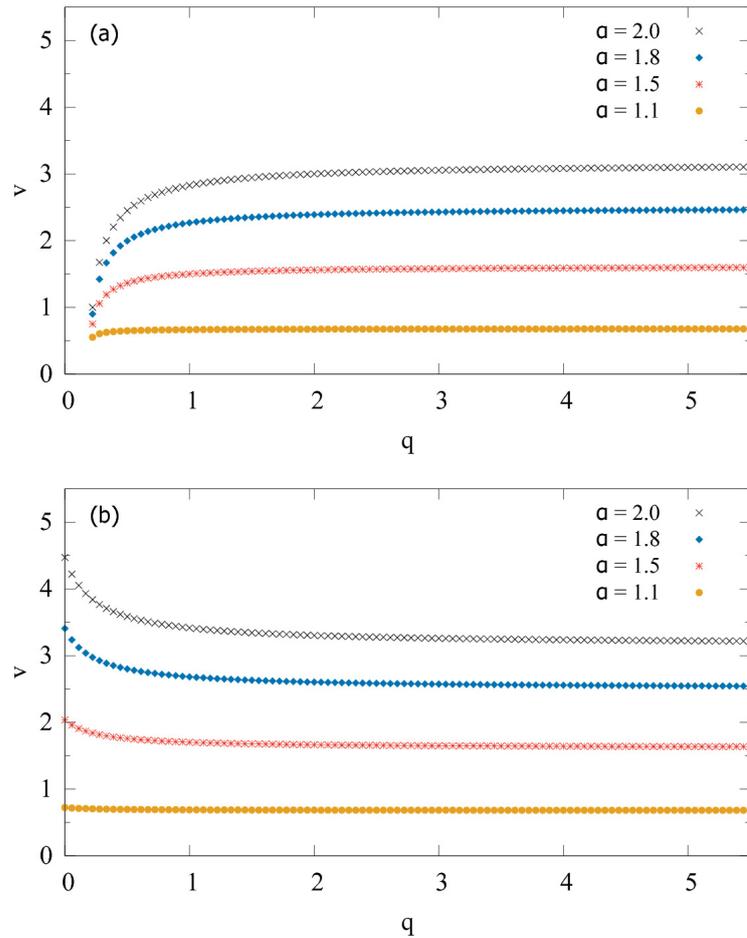


Figura 1 – Espaço de fase considerando a expressão (4.23) ( $|\dot{q}| = v$ ,  $q$ ) para diferentes valores de fractalidade  $\alpha$ . O painel (a) considera um potencial central repulsivo ( $V(q) = 1/q$ ). O painel (b) considera um potencial central atrativo ( $V(q) = -1/(q+a)$ ). Para ambos os casos,  $q = 1$ ,  $E = 5$  e  $D_\alpha = 1/2$ . Para o caso atrativo  $a = 0.2$ .

O painel (a) da figura (1) representa a dinâmica no espaço de fase considerando distintos valores de  $\alpha$  a partir da expressão (4.23) com potencial do tipo repulsivo ( $V(q) = 1/q$ ), enquanto o painel (b) está representado o espaço de fase considerando potenciais atrativos ( $V(q) = -1/(q+a)$ ). Podemos averiguar que a medida que  $\alpha$  é menor, a partícula sente menos o efeito do potencial central. Ou seja, fractalidades menores que a usual ( $\alpha = 2$ ) levam a um efeito menor da força atuante sobre a partícula.

Passaremos agora ao tratamento do problema de força central considerando o caso bidimensional. Partimos da representação da função lagrangeana no formalismo fracionário de Laskin, expressa em (3.32), onde adotamos a mudança de variável  $q \rightarrow r$ . Contudo, devido à simetria do problema de força central ser esférica, adotaremos uma representação por coordenadas esféricas (simplificado em 2D para coordenadas polares). Sendo assim, considerando que o vetor velocidade em coordenadas polares é expresso por  $\vec{v} = d\vec{r}/dt = dr/dt \hat{r} + r d\theta/dt \hat{\theta}$ , temos a função lagrangeana escrita como

$$L_\alpha = \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{(\alpha-1)}{\alpha} \left( \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} - V(r). \quad (4.27)$$

Podemos adiante representar os momentos canônicos do sistema, para as coordenadas  $r$  e  $\theta$  respectivamente

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{r}} = \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \dot{r} \left[ \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} \right]^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}, \\ p_\theta &= \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{\theta}} = \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} r^2 \dot{\theta} \left[ \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} \right]^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Visto que no problema de força central estamos assumindo um potencial radial  $V(r)$ , compreende-se  $\theta$  como uma variável cíclica, de forma que a equação de Lagrange, expressa em (3.36) por coordenadas polares, é simplificada a

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial L_\alpha}{\partial \dot{\theta}} \right] = \dot{p}_\theta = 0. \quad (4.28)$$

Dessa forma, geramos a representação de uma variável fracionária conservativa ( $l_\alpha$ ), expressa por

$$l_\alpha = \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} r^2 \dot{\theta} \left[ \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} \right]^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}}, \quad (4.29)$$

que pode ser reescrita em termos da energia cinética do sistema (3.34), na forma

$$l_\alpha = \frac{r^2 \dot{\theta}}{\alpha D_\alpha} \left( \frac{K_\alpha}{D_\alpha} \right)^{\frac{(2-\alpha)}{\alpha}}. \quad (4.30)$$

Para o caso usual ( $\alpha = 2$ ), a equação acima é reduzida a expressão usual de magnitude do momento angular para o problema de força central  $l_2 = mr^2 \dot{\theta}$ , que leva a interpretação da segunda lei de Kepler para movimento planetário ( $dA/dt = r^2 \dot{\theta}/2 = 0$ ) [4]. No formalismo fracionário, a constante de movimento  $l_\alpha$  trata-se de um termo semelhante ao momento angular multiplicado por uma potência da energia cinética do sistema.

Construiremos também a equação de movimento considerando a coordenada  $r$ . Partindo da equação de Euler-Lagrange expressa em (3.36), temos que  $\dot{p}_r - \frac{\partial L_\alpha}{\partial r} = 0$ . Sendo assim, expressamos a equação de movimento na forma

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left[ \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \dot{r} \left( \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} \right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \right] - \\ &\frac{\partial}{\partial r} \left[ \left( \frac{1}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \frac{(\alpha-1)}{\alpha} \left( \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \right] + \frac{\partial V}{\partial r} = 0, \end{aligned} \quad (4.31)$$

que leva a expressarmos

$$\left(\frac{1}{\alpha D_\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} \left\{ (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \left[ \left( \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} \right)^{\frac{2-\alpha}{\alpha-1}} \right] + \frac{\partial V}{\partial r} \right. \\ \left. + \frac{(2-\alpha)}{(\alpha-1)} \dot{r}(\dot{r}\ddot{r} + r\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}\ddot{\theta}) \left[ \left( \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} \right)^{\frac{4-3\alpha}{\alpha-1}} \right] \right\} = 0. \quad (4.32)$$

A equação de movimento acima é complicada de ser resolvida analiticamente, de forma que foge ao escopo desse trabalho uma exploração mais detalhada acerca de suas características. Contudo, visamos em trabalhos futuros ampliar a análise do problema de força central fracionário, considerando gerar soluções para as equações de movimento geradas nessa seção, além de também explorar outras constantes de movimento do sistema como energia total.

#### 4.4 Conservação de energia de sistemas fracionários

Nessa seção, nos atentamos ao conceito de conservação de energia ao adotar formalismos fracionários na descrição de sistemas físicos. Considerando sistemas físicos hamiltonianos usuais, a classificação do sistema como conservativo é dada a partir da derivação temporal da função hamiltoniana. Um sistema físico clássico descrito por uma função hamiltoniana  $H(p, q)$  é dito conservativo caso não haja dependência explícita no tempo, ou seja,

$$\frac{dH}{dt} = 0. \quad (4.33)$$

De maneira geral, considerando operadores de derivação de ordem inteira, a análise da evolução temporal do sistema é feita utilizando a regra da cadeia de derivações (2.40), onde, considerando uma função hamiltoniano  $H(p, q, t)$ , expressamos

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (4.34)$$

Sendo assim, utilizando as equações de Hamilton convencionais,  $\frac{\partial H}{\partial q_i} = \dot{p}_i$  e  $\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i$ , e não havendo dependência explícita do tempo  $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$ , então o sistema hamiltoniano é dito conservativo.

Todavia, visto que as operações de derivação fracionária não cumprem a regra da cadeia convencional, mas sim formas mais gerais de tal propriedade (2.41), a construção de derivação temporal de ordem fracionária da função Hamiltoniana não é uma tarefa simples. Sendo assim, podemos identificar o formalismo fracionário proposto por Tarasov (seção 2.3.2) como uma proposta de sistemas Hamiltonianos fracionários que indicam a condição de estados estacionários ao invés da condição de conservação de energia, utilizando a

derivada exterior fracionária (2.67). Sendo assim, abordaremos na próxima seção alguns aspectos que podem ser explorados considerando as derivadas exteriores fracionárias, como integrabilidade e constantes de movimento.

Indicamos ainda que o formalismo fracionário construído por Laskin (seção 3.4), por possuir o aspecto fracionário somente na sua função hamiltoniana fracionária  $H_\alpha$  (3.18) e manter as equações de Hamilton iguais às usuais da mecânica clássica (3.44), está sujeito ao mesmo procedimento indicado no início dessa seção na investigação da conservação de energia, bastando somente que não haja dependência explícita do tempo, ou seja,  $\frac{\partial H_\alpha}{\partial t} = 0$ .

## 4.5 Integrabilidade de um sistema clássico fracionário

Sistemas clássicos hamiltonianos são caracterizados por uma função hamiltoniana expressa em termos das variáveis canônicas do sistema  $H(q, p, t)$ . Além disso, tais sistemas são descritos pelas equações de Hamilton, descritas por

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{e} \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}. \quad (4.35)$$

Contudo, é possível, na mecânica clássica usual, expressar suas equações de movimento para sistemas hamiltonianos utilizando os parênteses de Poisson. Sejam  $u(q, p, t)$  e  $v(q, p, t)$  variáveis arbitrárias de um sistema dinâmico. Os parênteses de Poisson são definidos por

$$\{u, v\} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right). \quad (4.36)$$

Considerando-se a derivação temporal de uma dessas variáveis dinâmicas e fazendo-se uso das equações de Hamilton (4.35), escreve-se

$$\frac{du}{dt} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial u}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial u}{\partial t}, \quad (4.37)$$

de forma que

$$\frac{du}{dt} = \{u, H\} + \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (4.38)$$

Sendo assim, podemos expressar as equações de Hamilton utilizando os parênteses de Poisson ao assumir  $u = q_i$  e, em seguida,  $u = p_i$ . Dessa forma, passamos a representar as equações de movimento de um sistema hamiltoniano clássico usual por

$$\frac{dq_i}{dt} = \{q_i, H\}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\{p_i, H\}. \quad (4.39)$$

Os parênteses de Poisson são beneficiários na sua aplicabilidade, uma vez que são usualmente utilizados para investigar integrabilidade e constantes de movimento do sistema dinâmico e ainda são invariantes sobre transformações canônicas [4]. Variáveis de um dado sistema dinâmico são classificadas como constantes de movimento, uma vez que a seguinte relação seja satisfeita

$$\{u, H\} = \frac{\partial u}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial u}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial q} = 0. \quad (4.40)$$

Tais constantes de movimento são consequência direta da simetria do sistema. Sistemas com simetria de rotação conservam seu momento angular, de forma que tal é uma constante de movimento. Para sistemas conservativos (autônomos), a energia  $E$  é uma constante de movimento, pois é conservada na evolução temporal. Sistemas autônomos, com  $n$  constantes de movimento, podem ser classificados como integráveis. Para tal, essas constantes de movimento devem ser independentes entre si, de forma que

$$\{u_j, u_k\} = 0. \quad (4.41)$$

Essa condição delimita a dinâmica do sistema no espaço de fase a uma superfície de topologia toroidal [42]. Sendo assim, buscamos a seguir explorar o conceito de integrabilidade e condição para constante de movimento considerando as propostas de mecânicas fracionárias exploradas nesse trabalho.

Primeiramente, partimos das equações de movimento propostas por Tarasov (2.68) para sistemas hamiltoniano clássicos fracionários. Visamos propor uma representação dos parênteses de Poisson no formalismo fracionário utilizando como base as equivalência nas formas das equações de movimento do formalismo de Tarasov com as da mecânica clássica usual escritas com os parênteses de Poisson (4.39). Para isso, basta igualarmos as derivações temporais de  $q_i$  (em seguida de  $p_i$ ), gerando

$$\{q_i, H\} = D_{p_i}^\alpha H, \quad \{p_i, H\} = D_{q_i}^\alpha H. \quad (4.42)$$

Sejam os parênteses de Poisson usuais em sistemas Hamiltonianos no espaço de fase  $R^{2n}$  expressos por (4.36)

$$\{f, H\}_{q,p} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad (4.43)$$

essa definição é insuficiente para o formalismo fracionário, visto que não gera as equações de movimento desejadas (4.42) por não conterem nenhuma forma de derivação fracionária. Com isso, podemos sugerir duas distintas generalizações para os parênteses de Poisson que atendam ao formalismo fracionário adotado.

Visto que a generalização fracionária se manifesta nas equações de movimento somente na derivação fracionária da função Hamiltoniana, podemos indicar que os parênteses de Poisson sejam descritos, abrindo mão dos índices nas chaves, por

$$\{f, H\} = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j} D_{p_j}^\alpha H - \frac{\partial f}{\partial p_j} D_{q_j}^\alpha H. \quad (4.44)$$

Todavia, convém interpretar que todas as derivações presentes nessa abordagem em relação às variáveis canônicas  $q_j$  e  $p_j$  estejam na forma fracionária, concebendo, portanto, uma generalização direta dos parênteses de Poisson com derivações fracionárias

$$\{f, H\} = \sum_j \left( D_{q_j}^\alpha f D_{p_j}^\alpha H - D_{p_j}^\alpha f D_{q_j}^\alpha H \right). \quad (4.45)$$

Contudo, ressalta-se que essa simples generalização dos parênteses de Poisson no formalismo fracionário não leva ao resultado desejado, visto que para  $f = q_i$  as derivações  $D_{q_j}^\alpha q_i \neq \delta_{ij}$  e  $D_{p_j}^\alpha q_i \neq 0$  não fornecem os valores adequados (o mesmo acontece quando escolhemos  $f = p_i$ ). Ainda que a derivação  $D_{p_j}^\alpha q_i = 0$  seja fornecida ao usarmos a derivação fracionária de Caputo, o mesmo não acontece com o outro termo. Com isso, além de considerarmos a generalização proposta em (4.44) para os parênteses de Poisson fracionários, conduziremos ainda a manipulação da expressão (4.45) para uma segunda proposta.

Podemos utilizar o efeito da derivação fracionária de Riemann-Liouville e Caputo em funções de potência (2.17) e (2.29), uma vez que têm o mesmo efeito em funções de potências, para expandir os detalhes da proposta de parênteses de Poisson fracionário expressa em (4.45), visto que essa expressão não possui os resultados necessários para suas derivações, em particular, nos termos de forma  $(D_{q_j}^\alpha f)$  e  $(D_{p_j}^\alpha f)$ . Sendo assim, para que a definição de parênteses de Poisson sugerida seja adequada, ela precisa gerar os termos na forma  $(D_{p_i}^\alpha H)$  e  $(D_{q_i}^\alpha H)$ . Visando acrescentar os termos necessários para cumprir esse formato, partimos do efeito das derivações fracionárias em potências e expressamos o termo  $(D_{q_j}^\alpha q_i)$ , como exemplo, na forma

$$D_{q_j}^\alpha q_i = \sum_j \frac{q_j^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \delta_{ij}. \quad (4.46)$$

Ressalta-se que ao utilizarmos a definição da derivação fracionária de Caputo, temos que a derivação de uma constante permanece como nula, ao contrário da derivação fracionária de Riemann-Liouville, visto seus diferentes limites para o expoente de funções de potência (2.29). Ao utilizarmos  $f = p_i$ , a expressão acima assume a mesma forma, levando à interpretação da correção da expressão (4.45) como

$$\{f, H\} = \left( \frac{\Gamma(2-\alpha)}{f^{1-\alpha}} \right) \sum_j \left( D_{q_j}^\alpha f D_{p_j}^\alpha H - D_{p_j}^\alpha f D_{q_j}^\alpha H \right). \quad (4.47)$$

Naber e Cottrill-Shepherd, em seu trabalho de 2001 [16], propõem uma versão geral de integrabilidade sem considerar necessariamente sistemas Hamiltonianos, mas para funcionais na forma  $F(\alpha, m, n)$ , onde  $\alpha$  é a ordem fracionária de derivação,  $m$  o inteiro seguinte à  $\alpha$  e  $n$  a dimensão do sistema. O diferencial do funcional  $F(\alpha, 1, n)$ , representado pelos autores por  $g$ , é expresso na forma

$$g = \sum_{i=1}^n D_j^\alpha f dx_i^\alpha, \quad (4.48)$$

A integrabilidade do sistema, para os autores, é definida a partir da condição

$$\frac{\partial^m}{\partial x_i^m} \left( \frac{D_j^\alpha f - \partial_j^\alpha (\partial_i^{-\alpha} (D_i^\alpha f))}{(x_i)^{\alpha-m}} \right) = 0, \quad (4.49)$$

utilizando a derivação fracionária de Riemann-Liouville (2.10). Considerando  $\alpha = m = 1$ , a condição acima recai na condição usual de integrabilidade em sistemas diferenciais construídos por derivação exterior [43]. Ainda que referida por integrabilidade, a condição proposta pelos autores está inserida no formalismo de derivações exteriores, e não concorda necessariamente com o conceito de integrabilidade descrita pelos parênteses de Poisson (4.41). Foge ao escopo desse trabalho a investigação acerca das características de sistemas integráveis construídos por derivações exteriores, visto que não sabemos se se trata de uma integrabilidade de Liouville, associada à evolução de sistemas dinâmicos no espaço de fase, ou integrabilidade de Frobenius, que relaciona integrabilidade à foliação (relações de equivalência entre classes em um espaço diferencial), ou outras possíveis interpretações [44][45].

Buscando testar as condições de integrabilidade propostas, consideraremos, como exemplo, o oscilador harmônico linear bidimensional, que possui função hamiltoniana na forma

$$H(p,q) = c_1(p_x^2 + p_y^2) + V(x,y), \quad (4.50)$$

com potencial expresso por  $V(x,y) = c_2(x^2 + y^2)$  e  $c_1$  e  $c_2$  sendo constantes. É compreendido na literatura [21] que tais sistemas possuem invariante linear ou constante de movimento  $I$  na forma  $I = yp_x - xp_y$ . Como mencionado no início dessa seção, para averiguar essa constatação, basta que  $\{I, H\}_{p,q} = 0$ . Ou seja, verificarmos se

$$\{I, H\} = \sum_i \frac{\partial I}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial I}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} = \left( \frac{\partial I}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial I}{\partial p_x} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \left( \frac{\partial I}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial I}{\partial p_y} \frac{\partial H}{\partial y} \right) = 0. \quad (4.51)$$

As derivações parciais indicadas acima fornecem  $\frac{\partial I}{\partial x} = (-p_y)$ ,  $\frac{\partial H}{\partial p_x} = 2c_1 p_x$ ,  $\frac{\partial I}{\partial p_x} = y$ ,  $\frac{\partial H}{\partial x} = 2c_2 x$ ,  $\frac{\partial I}{\partial y} = p_x$ ,  $\frac{\partial H}{\partial p_y} = 2c_1 p_y$ ,  $\frac{\partial I}{\partial p_y} = (-x)$  e  $\frac{\partial H}{\partial y} = 2c_2 y$ . Sendo assim, averiguamos que  $I$  trata-se de uma constante de movimento do sistema descrito pela hamiltoniana (4.50)

$$\{I, H\} = 2c_1 p_x p_y - 2c_1 p_y p_x + 2c_2 x y - 2c_2 y x = 0. \quad (4.52)$$

Portanto,  $I$  é uma constante de movimento do sistema Hamiltoniano em questão.

Sendo assim, agora testaremos se a variável dinâmica  $I$  ainda é uma constante do movimento, considerando os parênteses de Poisson propostos anteriormente (4.44 e 4.47) provenientes do formalismo fracionário sugerido por Tarasov. Começando pela definição de integrabilidade (4.44), temos que

$$\{I, H\} = \left( \frac{\partial I}{\partial x} D_{p_x}^\alpha H - \frac{\partial I}{\partial p_x} D_x^\alpha H \right) + \left( \frac{\partial I}{\partial y} D_{p_y}^\alpha H - \frac{\partial I}{\partial p_y} D_y^\alpha H \right). \quad (4.53)$$

Utilizaremos nesse tratamento tanto a derivação fracionária de Riemann-Liouville quanto a de Caputo, visto que possuem o mesmo efeito sobre funções de potência, mas não sobre constantes (2.17) e (2.29). Dessa forma, calculamos as derivações parciais de ordem inteira, gerando  $\frac{\partial I}{\partial x} = (-p_y)$ ,  $\frac{\partial I}{\partial p_x} = y$ ,  $\frac{\partial I}{\partial y} = p_x$  e  $\frac{\partial I}{\partial p_y} = (-x)$ , enquanto as fracionárias, para Riemann-Liouville, são

$$D_{p_x}^\alpha H = c_1 \left[ \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} p_x^{2-\alpha} + \frac{p_x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right] + \frac{2c_2 p_x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (4.54)$$

$$D_{p_y}^\alpha H = c_1 \left[ \frac{p_y^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} p_y^{2-\alpha} \right] + \frac{2c_2 p_y^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}, \quad (4.55)$$

$$D_x^\alpha H = \frac{2c_1 x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + c_2 \left[ \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} x^{2-\alpha} + \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \right] \quad (4.56)$$

e

$$D_y^\alpha H = \frac{2c_1 y^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + c_2 \left[ \frac{y^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} + \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(3-\alpha)} y^{2-\alpha} \right]. \quad (4.57)$$

Então, podemos agora representar os parênteses de Poisson (4.44) por

$$\begin{aligned} \{I, H\} = & \frac{c_1}{\Gamma(1-\alpha)} [p_x p_y^{-\alpha} - p_y p_x^{-\alpha} + 2xy^{-\alpha} - 2yx^{-\alpha}] + \\ & \frac{c_2}{\Gamma(1-\alpha)} [2p_x p_y^{-\alpha} - 2p_y p_x^{-\alpha} + xy^{-\alpha} - yx^{-\alpha}] + \\ & \frac{c_1}{\Gamma(3-\alpha)} [2p_x p_y^{2-\alpha} - 2p_y p_x^{2-\alpha}] + \frac{c_2}{\Gamma(3-\alpha)} [2xy^{2-\alpha} - 2yx^{2-\alpha}]. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Podemos, a fim de simplificar a expressão, assumir as constantes  $c_1 = c_2 = c$ , visto que no tratamento usual elas não influenciam na manipulação das equações. Sendo assim, simplificamos os parênteses de Poisson fracionários para

$$\{I, H\} = \frac{3c}{\Gamma(1-\alpha)} [p_x p_y^{-\alpha} - p_y p_x^{-\alpha} + x y^{-\alpha} - y x^{-\alpha}] + \frac{2c}{\Gamma(3-\alpha)} [p_x p_y^{2-\alpha} - p_y p_x^{2-\alpha} + x y^{2-\alpha} - y x^{2-\alpha}]. \quad (4.59)$$

Se considerarmos a derivação fracionária de Caputo ao invés da de Riemann-Liouville no tratamento dos parênteses de Poisson, a expressão é muito simplificada, uma vez que as derivações de constantes são nulas (dois primeiros termos da expressão (4.58)). Dessa forma, por Caputo (acrescentamos um índice  $C$  para diferenciar o tratamento), temos que a condição de integrabilidade (4.44) é expressa por

$$\{I, H\}_C = \frac{2c_1}{\Gamma(3-\alpha)} [p_x p_y^{2-\alpha} - p_y p_x^{2-\alpha}] + \frac{2c_2}{\Gamma(3-\alpha)} [x y^{2-\alpha} - y x^{2-\alpha}]. \quad (4.60)$$

Diferente da abordagem utilizando Riemann-Liouville, por Caputo a condição de integrabilidade zera para  $\alpha \rightarrow 1$ . devido ao seu efeito em constante ser nulo. Nesse caso, a definição de integrabilidade recai na definição usual. A partir dessa constatação, podemos afirmar que, na forma proposta em (4.44),  $I$  não é uma constante de movimento do sistema clássico fracionário em questão. Contudo, devemos considerar que a utilização dos parênteses de Poisson fracionários relacionados à função hamiltoniana pode estar incorreto quando investigamos integrabilidade, devido às propriedades do sistema hamiltoniano fracionário proposto por Tarasov (seção 2.3.2) ainda não terem sido devidamente exploradas. Ou seja, devemos a seguir investigar algumas propriedades da função hamiltoniana em tal formalismo, para então podermos afirmar algo quanto à condição de integrabilidade do sistema, que depende de diversos fatores: o sistema ser conservativos, a função hamiltoniana ser uma constante de movimento, entre outros. Ainda assim, a partir do resultado acima, podemos afirmar que a representação dos parênteses de Poisson no formalismo fracionário fornece informações acerca da relação entre a dinâmica do sistema hamiltoniano e a dinâmica da variável dinâmica testada (momento angular no exemplo acima) e tal relação difere do formalismo usual para o fracionário.

A seguir, testaremos a segunda proposta de representação dos parênteses de Poisson para sistemas hamiltonianos fracionários (4.47). Nesse tratamento, utilizaremos somente a derivação fracionária de Caputo, visto que a correção da expressão (4.44) utilizou das propriedades particulares da derivação de Caputo, como derivação de constantes. Dessa forma, indicamos que as derivações presentes na expressão (4.47) para a função hamiltoniana são as mesmas que as da derivação de Riemann-Liouville feitas anteriormente (o efeito em funções de potência é o mesmo que na de Caputo), exceto pelas derivações em constantes. Indicamos apenas as derivações fracionárias da variável dinâmica  $I$  como

$${}^C D_x^\alpha I = -\frac{x^{1-\alpha} p_y}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad (4.61)$$

$${}^C D_y^\alpha I = \frac{y^{1-\alpha} p_x}{\Gamma(2-\alpha)}, \quad (4.62)$$

$${}^C D_{p_x}^\alpha I = \frac{y p_x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \quad (4.63)$$

e

$${}^C D_{p_y}^\alpha I = -\frac{x p_y^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}. \quad (4.64)$$

Com isso, podemos representar a condição (4.47), utilizando derivações de Caputo por

$$\{I, H\}_C = \frac{2}{\Gamma(3-\alpha)} \left[ \frac{p_x^{-\alpha} p_y^{-\alpha} x^{-\alpha} y^{-\alpha} (c_1 p_x p_y + c_2 x y) (p_x p_y^\alpha x y^\alpha - p_x^\alpha p_y x^\alpha y)}{y p_x - x p_y} \right]. \quad (4.65)$$

Assim como a expressão (4.60), a expressão acima recai na condição usual de integrabilidade para  $\alpha \rightarrow 1$ . Isso deve ser uma consequência do acrescento manual de um fator de correção para o formalismo fracionário (4.45).

Por fim, indicamos que oferecemos nesse trabalho três diferentes propostas de representações dos parênteses de Poisson para um formalismo fracionário clássico descrito pelas equações de movimento (2.68). A proposta expressa em (4.44) pode ser adotada utilizando diferentes definições de derivação fracionária. Nas expressões (4.58) e (4.60) estão escritas as formas de tal tratamento utilizando a derivação de Riemann-Liouville e Caputo, respectivamente, em um oscilador harmônico clássico bidimensional. Nesse caso, somente a derivação por Caputo leva a uma equivalência direta com a condição para constantes de movimento usual. A segunda representação dos parênteses de Poisson está descrita em (4.45), sido construída utilizando um fator de compensação ao adotar derivações fracionárias de Caputo nos parênteses de Poisson usuais. Tal definição, adotada na investigação de um oscilador harmônico clássico bidimensional (4.65), apresenta também um paralelo direto com a condição para constantes de movimento da mecânica clássica usual ao adotar  $\alpha \rightarrow 1$ . Consideraremos adiante a existência de uma nova variável dinâmica que substitui a função hamiltoniana como referência na investigação das constantes de movimento do sistema dado a forma dos estados estacionários do formalismo clássico fracionário de Tarasov.

Como visto na seção (2.3.2), o trabalho de Tarasov [14] expressa os estados estacionários de sistemas Hamiltonianos fracionários que obedeçam às equações de movimento expressas em (2.68). Tais estados estacionário são provenientes da condição  $d^\alpha H = 0$  para o sistema fracionário. Podemos construir os estados estacionários do sistema a partir da expressão (2.69). Considerando um sistema Hamiltoniano bidimensional, com  $m = 1$  sendo o valor inteiro seguinte à ordem de derivação  $\alpha$ , temos que os estados estacionários de tal sistema são expressos por

$$H(q,p) - |xp_xyp_y|^{\alpha-1}C = 0. \quad (4.66)$$

Podemos assumir que, uma vez que os estados estacionários de sistema hamiltonianos clássicos usuais são representados por  $H(q,p) - C = 0$ , então o formalismo fracionário de Tarasov para sistemas hamiltonianos não estabelece a função hamiltoniana como uma constante de movimento e sim uma nova variável dinâmica  $H_\alpha$ , expressa por

$$H_\alpha(q,p) = |xp_xyp_y|^{\alpha-1}H(q,p). \quad (4.67)$$

Sendo assim, deixamos indicado nesse trabalho a possibilidade de investigação das consequências da implementação da variável dinâmica  $H_\alpha$  quando adotada as propostas de parênteses de Poisson fracionário indicados em (4.44) e (4.47). Contudo, como discutido na seção (2.2), o emprego da regra de Leibniz em derivações fracionárias não é permitido, tornando a implementação de derivações de produto no âmbito fracionário um complicado problema (ver equação (2.39) como exemplo). Sendo assim, indicamos que foge ao escopo desse trabalho a investigação da variável dinâmica  $H_\alpha$  como a substituta da função hamiltoniana na investigação da condição de constantes de movimento e integrabilidade de sistemas clássicos fracionários.

Por fim, encerramos esse capítulo com a verificação dos parênteses de Poisson usuais, expressos em (4.36), utilizando a função hamiltoniana fracionária proposta no formalismo fracionário de Laskin (3.18), expressa por

$$H_\alpha(q,p) = D_\alpha|p|^\alpha + V(q). \quad (4.68)$$

Considerando um oscilador harmônico bidimensional, onde  $V(x,y) = c(x^2 + y^2)$ , em que  $c$  é uma constante, utilizamos a mesma constante de movimento  $I$  já explorada anteriormente  $I = yp_x - xp_y$ . Sendo assim, temos que os parênteses de Poisson entre  $H_\alpha$  e  $I$  são expressos por

$$\{I, H_\alpha\} = \alpha D_\alpha [p_x |p_y|^{\alpha-1} \text{sgn}(p_y) - p_y |p_x|^{\alpha-1} \text{sgn}(p_x)]. \quad (4.69)$$

Assim como as propostas antecessoras, o formalismo fracionário de Laskin, ainda que descrito por uma função hamiltoniana fracionária ao invés de derivações fracionárias, não respeita a condição para constante de movimento da mecânica clássica usual, ainda que seja identificado como um sistema conservativo (4.4), diferentemente do formalismo de Tarasov. Essa característica recorrente em formalismos clássicos fracionários indicam que constantes de movimentos podem estar fadadas a condições de verificação significativamente distintas das fornecidas pelos parênteses de Poisson. Ou ainda, poderíamos assumir que a relação entre as dinâmicas da função hamiltoniana e uma variável dinâmica qualquer não

é mais suficiente para verificar e classificar constantes de movimento em sistemas clássicos fracionários.

Esse capítulo apresenta os primeiros resultados desse trabalho. Referente ao formalismo fracionário de Laskin, indicamos uma proposta de massa inercial nas primeiras seções, pautada em diferentes definições presentes na literatura. Ainda no formalismo de Laskin, investigamos o problema de força central e destacamos algumas de suas características quando dotado de fractalidade não usual. Por fim, dedicamos as últimas seções a exploração e concepção de representações dos parênteses de Poisson para o formalismo fracionário de Tarasov, buscando gerar uma condição adequada para constantes de movimento nesse formalismo.

---

## 5. COLISÕES FRACIONÁRIAS

---

Nesse capítulo trataremos da implementação do formalismo fracionário proposto por Laskin (seção 3.3) em colisões elásticas unidimensionais. Abordaremos as implicações em adotar as definições de massa fracionária exploradas no capítulo anterior (4.5 e 4.15), assim como a implementação de uma representação da fractalidade do sistema a partir de modelos para sistemas com baixa fractalidade. Por fim, investigaremos a contribuição do formalismo fracionário através da análise da relação entre as velocidades das partículas em colisão, considerando diferentes valores para a fractalidade do sistema. Adotaremos nesse capítulo a representação das velocidade das partículas como  $v$  ao invés de  $\dot{q}$ , buscando simplificar visualmente o entendimento das expressões de conservação.

### 5.1 Colisões elásticas fracionárias com massa inercial

Consideraremos um sistema unidimensional com duas partículas pontuais colidindo de forma elástica. Assumiremos que, no âmbito da mecânica clássica fracionária, a energia e momento linear do sistema são conservados, assim como na mecânica clássica usual. Além disso, implementaremos nessa seção a proposta de massa fracionária explorada na seção (4.2), introduzindo uma definição para o fator inercial  $D_\alpha$  na forma

$$D_\alpha = \left( \frac{1}{\alpha - 1} \right)^{\alpha-1} \frac{(v)^{2-\alpha}}{(\alpha m_\alpha^{\alpha-1})}. \quad (5.1)$$

Sendo assim, consideraremos as conservações de energia e momento linear do sistema como

$$\begin{cases} K_{1i} + K_{2i} = K_{1f} + K_{2f} \\ p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2f}. \end{cases} \quad (5.2)$$

Utilizaremos as expressões de energia cinética e momento linear expressas por

$$K_\alpha = m_\alpha \left( \frac{\alpha - 1}{\alpha} \right) v^2 \quad \text{e} \quad p = (\alpha - 1)m_\alpha v, \quad (5.3)$$

que são geradas a partir da implementação da definição de  $D_\alpha$  indicada anteriormente com as expressões de energia cinética (3.34) e momento linear (4.2) do formalismo fracionário de Laskin. Dessa forma, temos que as equações de conservação são representadas por

$$\frac{m_1}{\alpha_1} \left( \frac{1}{\alpha - 1} \right) [v_{1i}^2 - v_{1f}^2] = \frac{m_2}{\alpha_2} \left( \frac{1}{\alpha_2 - 1} \right) [v_{2f}^2 - v_{2i}^2], \quad (5.4)$$

para a energia total do sistema e

$$m_1(\alpha_1 - 1)[v_{1i} - v_{1f}] = m_2(\alpha_2 - 1)[v_{2f} - v_{2i}] \quad (5.5)$$

para o momento linear. Semelhantemente ao procedimento usual para a análise de colisões elásticas [46], investigaremos se a velocidade relativa entre as partículas é conservada, assim como na mecânica clássica convencional. Sendo assim, combinando as equações de conservação acima, temos que

$$\frac{\alpha_2}{(\alpha_1 - 1)^2}[v_{1i} + v_{1f}] = \frac{\alpha_1}{(\alpha_2 - 1)^2}[v_{2f} + v_{2i}], \quad (5.6)$$

ou seja, não há conservação de velocidade relativa há menos que  $\alpha_1 = \alpha_2$ . Tal limite pode ser assumido considerando partículas idênticas ou a partir da interpretação de que um dado sistema fracionário, com múltiplas partículas, possui uma fractalidade  $\alpha$  ( $\alpha \neq 2$ ) igual para todas as suas partículas, como discutido na seção (4.1). Então, considerando partículas distinguíveis e considerando fractalidade como uma característica do efeito do meio no ente físico, não há conservação de velocidade relativa para colisões elásticas unidimensionais no formalismo fracionário de Laskin utilizando a definição de  $D_\alpha$  proposta em (5.1).

A implementação da proposta de representação de  $D_\alpha$  indicada em (5.1) pode ser considerada uma aproximação para massa inercial da partícula fracionária, ignorando alguns aspectos decorrentes do formalismo fracionário. Essa interpretação está pautada nas expressões de energia cinética e momento linear da partícula (5.3) assumirem apenas um fator numérico isolado na sua descrição, enquanto o formalismo de Laskin completo leva a representações mais complexas de energia cinética e momento (3.34) e (4.2). Exploraremos adiante as características de colisões elásticas fracionárias desconsiderando uma forma para  $D_\alpha$ , buscando indicar as contribuições provenientes de diferentes valores de  $\alpha$ .

## 5.2 Colisões elásticas fracionárias pelo formalismo de Laskin

Considerando um sistema unidimensional onde duas partículas pontuais se colidem elasticamente, pela mecânica clássica usual há conservação de energia cinética e momento linear totais do sistema, onde as equações de conservação estão expressas em (5.2). Utilizaremos as representações de energia cinética e momento linear, descritas anteriormente em (3.34) e (4.2), na forma

$$K_\alpha = D_\alpha \left( \frac{v}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} \quad \text{e} \quad p = \left( \frac{v}{\alpha D_\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}. \quad (5.7)$$

Então, representamos a conservação de energia do sistema por

$$D_{\alpha_1}^{(1)} \left[ \left( \frac{v_{1i}}{\alpha_1 D_{\alpha_1}^{(1)}} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}} - \left( \frac{v_{1f}}{\alpha_1 D_{\alpha_1}^{(1)}} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}} \right] = D_{\alpha_2}^{(2)} \left[ \left( \frac{v_{2f}}{\alpha_2 D_{\alpha_2}^{(2)}} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}} - \left( \frac{v_{2i}}{\alpha_2 D_{\alpha_2}^{(2)}} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}} \right], \quad (5.8)$$

enquanto a conservação de momento linear é expressa como

$$\left( \frac{v_{1i}}{\alpha_1 D_{\alpha_1}^{(1)}} \right)^{\frac{1}{\alpha_1-1}} - \left( \frac{v_{1f}}{\alpha_1 D_{\alpha_1}^{(1)}} \right)^{\frac{1}{\alpha_1-1}} = \left( \frac{v_{2f}}{\alpha_2 D_{\alpha_2}^{(2)}} \right)^{\frac{1}{\alpha_2-1}} - \left( \frac{v_{2i}}{\alpha_2 D_{\alpha_2}^{(2)}} \right)^{\frac{1}{\alpha_2-1}}. \quad (5.9)$$

Na mecânica clássica usual, as conservações de energia cinética e momento linear são expressas em termos das velocidades inicial e final na forma  $[m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)]$  e  $[m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})]$ , respectivamente. Essas expressões, quando combinadas, permitem expressar a conservação de velocidade relativa do sistema, indicada pela expressão

$$v_{1i} - v_{2i} = v_{2f} - v_{1f}. \quad (5.10)$$

Uma vez que temos a conservação de velocidade relativa, podemos facilmente fornecer expressões para as velocidades finais das partículas, descritas em termos das velocidades iniciais. Para tal, utiliza-se da expressão de velocidade relativa para eliminar uma das velocidades finais, permitindo expressar

$$v_{1f} = \left( \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left( \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad (5.11)$$

quando escolhermos eliminar a velocidade final da partícula 2  $v_{2f}$  e

$$v_{2f} = \left( \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left( \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad (5.12)$$

quando eliminamos  $v_{1f}$ . Se considerarmos partículas idênticas (mesma massa nesse caso), as equações acima provêm a soluções  $v_{1f} = v_{2i}$  e  $v_{2f} = v_{1i}$ . Contudo, se utilizarmos somente as equações de conservação, elas provêm ainda, matematicamente, soluções para quando não houve colisão  $v_{1f} = v_{1i}$  e  $v_{2f} = v_{2i}$ .

Para as leis de conservação na abordagem fracionária, a combinação das expressões indicam não haver conservação de velocidade relativa no sistema, partindo de um procedimento semelhante ao indicado para a mecânica clássica habitual ao combinar as expressões de conservação de energia (5.8) e conservação de momento (5.9). Isso é esperado visto que nem mesmo o caso onde adotamos uma massa inercial para o sistema fracionário há conservação de velocidade relativa (5.6).

Todavia, ainda podemos combinar as expressões de conservação de energia e momento linear, indicadas em (5.8) e (5.9) para gerar relações entre as velocidades finais e

iniciais das partículas em colisão. Escolhendo eliminar a componente de velocidade  $v_{1f}$ , temos as relação entre as velocidade na forma

$$D_{\alpha_1}^{(1)} \left( \frac{v_{1i}}{\alpha_1 D_{\alpha_1}^{(1)}} \right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1-1}} + D_{\alpha_2}^{(2)} \left( \frac{v_{2i}}{\alpha_2 D_{\alpha_2}^{(2)}} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}} - D_{\alpha_2}^{(2)} \left( \frac{v_{2f}}{\alpha_2 D_{\alpha_2}^{(2)}} \right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_2-1}} = D_{\alpha_1}^{(1)} \left[ \left( \frac{v_{1i}}{\alpha_1 D_{\alpha_1}^{(1)}} \right)^{\frac{1}{\alpha_1-1}} + \left( \frac{v_{2i}}{\alpha_2 D_{\alpha_2}^{(2)}} \right)^{\frac{1}{\alpha_2-1}} - \left( \frac{v_{2f}}{\alpha_2 D_{\alpha_2}^{(2)}} \right)^{\frac{1}{\alpha_2-1}} \right]^{\alpha_1}. \quad (5.13)$$

Considerando  $\alpha = 2$  e adotando o limite  $D_2 = 1/2m$ , a equação acima recai na versão usual de relação entre as velocidades, considerando conservação de velocidade relativa. A seguir indicaremos uma representação mais intuitiva da expressão acima.

### 5.2.1 Sistemas com parâmetro de fractalidade

Introduziremos uma diferente representação nessa seção para a fractalidade  $\alpha$  do sistema físico fracionário, destacando um fator de fractalidade aparte da fractalidade total do sistema. Em 2006, foi introduzido [47] uma representação da ordem de derivações fracionárias  $\alpha$  como uma expansão na forma

$$\alpha = n - \xi, \quad (5.14)$$

visando assim investigar os efeitos do formalismo fracionário em sistemas com baixa fractalidade ( $\xi \ll 1$ ). Nessa abordagem,  $n$  indica a dimensão fractal da mecânica convencional (não-fracionário) com valor fixo, enquanto a constante  $\xi$  indica a contribuição do formalismo fracionário. Nesse trabalho, os autores utilizam da condição de baixa fractalidade para reestruturar e simplificar as mais conhecidas definições de derivação fracionárias, como a de Riemann-Liouville, Caputo, entre outras. Todavia, nesse trabalho, iremos apenas incorporar a nomenclatura e motivação dessa expansão, representando a dimensão fractal  $\alpha$  do formalismo de Laskin em termos do fator de fractalidade  $\xi$ .

Considerando o intervalo da dimensão  $\alpha$  do formalismo de Laskin (3.3), o parâmetro  $\xi$  possui valores no intervalo  $0 < \xi \leq 1$ , onde  $\xi = 0$  representa a aproximação à mecânica usual, assim como  $\alpha = 2$ . Além disso, o fator inercial  $D_\alpha$  é representado por  $D_\xi$ , onde a aproximação  $D_2 = 1/2m$  é indicada por  $D_0$ .

### 5.2.2 Colisões com fator de fractalidade

Considerando a expansão  $\alpha = n - \xi$  introduzido na seção anterior, adaptaremos a expressão combinada de conservação de energia e momento linear (5.13) descrita em termos de  $\xi$  e  $D_\xi$ , por

$$\begin{aligned}
 D_{\xi_1}^{(1)} \left( \frac{v_{1i}}{(2-\xi_1)D_{\xi_1}^{(1)}} \right)^{\frac{2-\xi_1}{1-\xi_1}} + D_{\xi_2}^{(2)} \left( \frac{v_{2i}}{(2-\xi_2)D_{\xi_2}^{(2)}} \right)^{\frac{2-\xi_2}{1-\xi_2}} - D_{\xi_2}^{(2)} \left( \frac{v_{2f}}{(2-\xi_2)D_{\xi_2}^{(2)}} \right)^{\frac{2-\xi_2}{1-\xi_2}} = \\
 D_{\xi_1}^{(1)} \left[ \left( \frac{v_{1i}}{(2-\xi_1)D_{\xi_1}^{(1)}} \right)^{\frac{1}{1-\xi_1}} + \left( \frac{v_{2i}}{(2-\xi_2)D_{\xi_2}^{(2)}} \right)^{\frac{1}{1-\xi_2}} - \left( \frac{v_{2f}}{(2-\xi_2)D_{\xi_2}^{(2)}} \right)^{\frac{1}{1-\xi_2}} \right]^{2-\xi_1}, \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

onde o limite  $\xi = 0$  e adotando  $D_0 = 1/2m$ , a expressão recai, considerando conservação de velocidade relativa, nas expressões usuais para partículas em colisão elástica.

### 5.2.2.1 Partículas idênticas

A partir da expressão acima (5.15), podemos representar graficamente a relação entre as velocidades  $v_{2f}$  e  $v_{1i}$  do sistema. Ao considerar partículas idênticas no formalismo fracionário, estamos assumindo que o fator inercial  $D_\xi$  para a respeitar  $D_{\xi_1}^{(1)} = D_{\xi_2}^{(2)} = D_\xi$  e o parâmetro de fractalidade  $\xi$  passa a ser  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ . Dessa forma, a equação (5.15) pode ser simplificada a

$$(v_{1i})^{\frac{2-\xi}{1-\xi}} + (v_{2i})^{\frac{2-\xi}{1-\xi}} - (v_{2f})^{\frac{2-\xi}{1-\xi}} = \left( v_{1i}^{\frac{1}{1-\xi}} + v_{2i}^{\frac{1}{1-\xi}} - v_{2f}^{\frac{1}{1-\xi}} \right)^{2-\xi}. \quad (5.16)$$

Na mecânica usual ( $\xi = 0$ ), a expressão acima é simplificada à forma

$$v_{1i}^2 + v_{2i}^2 - v_{2f}^2 = (v_{1i} + v_{2i} - v_{2f})^2. \quad (5.17)$$

Tal relação sugere duas soluções possíveis para  $v_{2f}$ , sendo elas  $v_{2f} = v_{1i}$  e  $v_{2f} = v_{2i}$ , sendo a última um resultado para quando não ocorre colisão entre as partículas. Na figura (2) indicamos a relação entre as velocidades, considerando partículas idênticas, com diferentes valores do fator de fractalidade  $\xi$  na expressão (5.15).

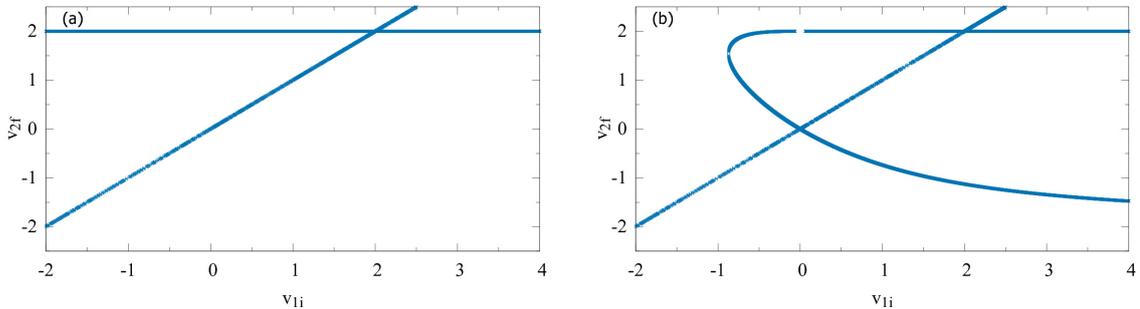


Figura 2 – Imagem indicando a relação entre as velocidades final da partícula 2 e inicial da partícula 1 considerando a expressão (5.16). O painel esquerdo indica o caso sem fractalidade  $\xi = 0$ , enquanto o painel direito indica o caso com fractalidade  $\xi = 1/2$ .

No gráfico à esquerda na figura (2) estão indicados os valores esperados das velocidades  $v_{2f}$  e  $v_{1i}$  para um sistema com fator de fractalidade  $\xi = 0$ . No gráfico à direita,

ao considerar um fator de fractalidade  $\xi = 1/2$ , surgem diversos novos valores para as velocidades. A fim de interpretar as configurações inicial e final das partículas em colisão, indicaremos três diferentes regiões no gráfico da direita considerando somente a curva proeminente da contribuição fracionária (figura 3). A região A é representada pelo valores positivos de  $v_{2f}$ , no intervalo  $[0, 2]$  e negativos de  $v_{1i}$ , no intervalo  $[-1, 0]$ . A região B indica os valores de  $v_{2f}$  negativos, no intervalo  $[-2, 0]$  e valores positivos de  $v_{1i}$ , no intervalo  $[0, 2]$ . Podemos ainda indicar uma região C com valores negativos de  $v_{2f}$  e positivos de  $v_{1i}$  maior que 2.

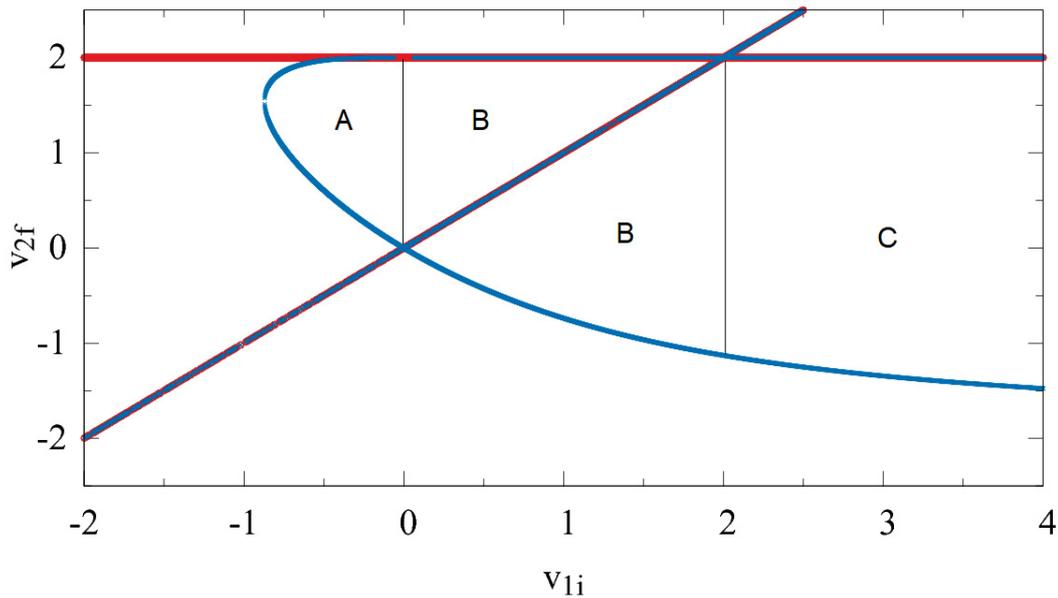


Figura 3 – Regiões A, B e C para as configurações de colisão das partículas considerando fator de fractalidade  $\xi = 0$  (vermelho) e  $\xi = 1/2$  (azul).

Considerando necessário investigar se os valores de velocidades no sistema com fator de fractalidade diferente de zero possuem interpretação física, determinaremos as diferentes configurações para cada região indicada na figura (3). A região A representa valores onde as partículas colidem a partir de sentidos opostos para então seguirem no mesmo sentido. A região B sugere uma configuração onde antes da colisão as partículas estão no mesmo sentido, mas depois da colisão passam a se mover em sentidos opostos. A região C, diferente da região B, possui valores de  $v_{1i}$  maiores que os valores de  $v_{2i}$  adotado. Ou seja, a região C apresenta uma interpretação física impossível para os valores de  $v_{2f}$ . Contudo, visto a simetria entre os lados das expressões de conservação de energia e momento, assim como o processo de eliminação de uma das velocidades finais é o mesmo, podemos considerar que a expressão (5.15) é idêntica quando optamos por eliminar a variável  $v_{2f}$  ao invés de  $v_{1f}$ . Ou seja, as figuras indicadas acima (2 e 3) são iguais para o gráfico ( $v_{1f}$  versus  $v_{2i}$ ). Sendo assim, podemos assumir que a região C na figura (3) indica os valores adequados para a velocidade  $v_{1f}$  do sistema, e não  $v_{2f}$ . Sendo assim, podemos

indicar que a configuração das partículas em colisão na região C é igual à da região B, mas com a posição das partículas invertida. A figura (4) indica visualmente as configurações para cada região.

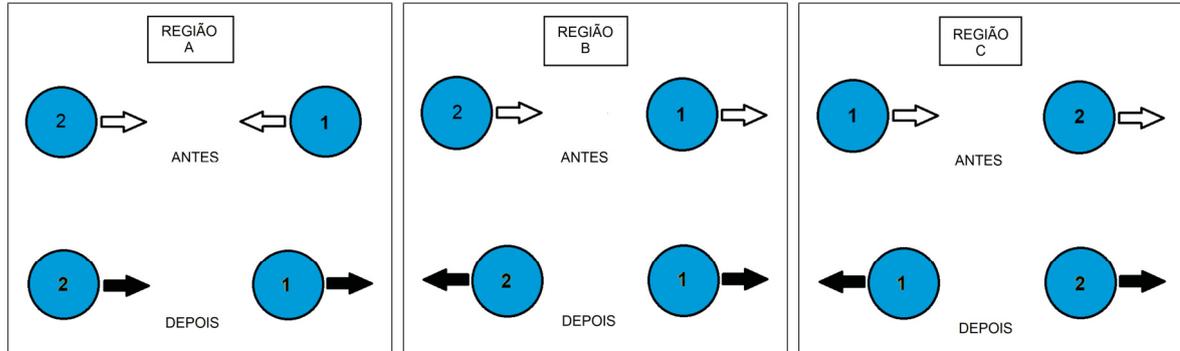


Figura 4 – Interpretação das configurações iniciais das partículas antes e depois da colisão para cada região.

A partir da expressão (5.16), podemos constatar que se trata de uma equação que assume a condição de polinômio somente para valores de  $\xi$  que levam a seus expoentes serem números inteiros. Dessa constatação podemos investigar algum critério de escolha dos valores de  $\xi$ , visto as infinitas possibilidades no intervalo  $0 \leq \xi < 1$ . Dada que a expressão (5.16) possui expoentes bem definidos no lado esquerdo, mas no lado direito a identificação fica mais complicada. A princípio, investigaremos uma condição para o expoente  $R = \frac{2-\xi}{1-\xi}$ . Mais adiante, investigaremos a equação completa.

Impondo a condição de que  $R$  seja um número inteiro, introduziremos a condição para  $\xi$  na forma de número racional, por  $\xi = p/q$ , onde  $p, q \in \mathbb{Z}$ . Considerando o intervalo de  $0 \leq \xi < 1$ , é necessário que  $0 \leq p < q$ . A solução geral para essa condição é  $q = p + 1$ , que leva a representarmos  $R$  como  $R = p + 2$ . Sendo assim, para  $R$  inteiro, o fator de fractalidade  $\xi$  do sistema deve obedecer à condição

$$\xi = \frac{p}{p + 1}. \tag{5.18}$$

Sendo assim, é possível introduzir uma condição (parcial) para os valores de  $\xi$  que levem a novos valores de velocidades para colisões no formalismo fracionário. Pela condição (5.18), temos os seguintes valores para  $\xi$

$$\xi = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{p}{p + 1} \right\}. \tag{5.19}$$

Dessa análise, para a condição (5.18), as soluções “novas” surgem para um valor, mas não para seu seguinte, seguindo dessa forma até o infinito, como indicado na figura (5). Esse comportamento pode estar associado aos expoentes resultantes do lado direito da expressão (5.16), ou ainda estarem associadas ao comportamento específico de funções com expoentes fracionários.

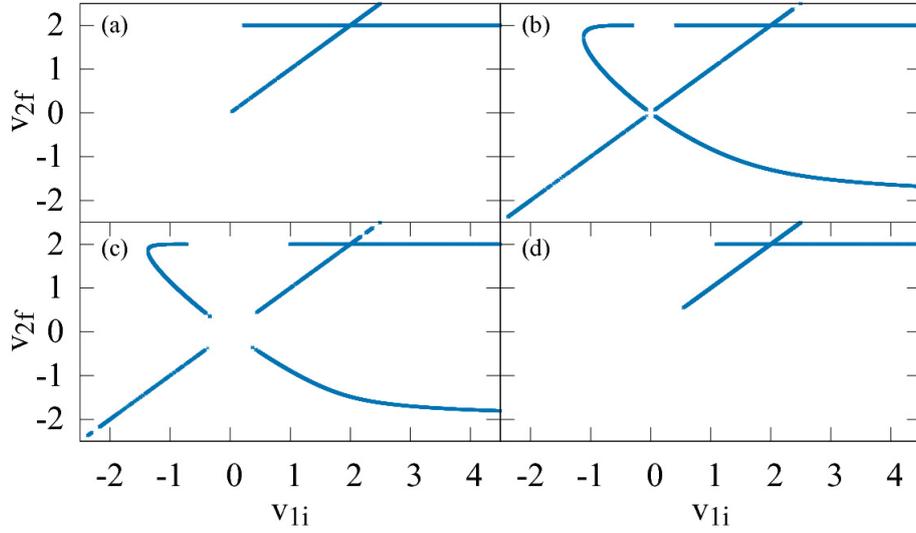


Figura 5 – Representação numérica das velocidades  $v_{2f} \times v_{1i}$  das partículas em colisão para diferentes  $\xi$ , sendo (a)  $\xi = 2/3$ , (b)  $\xi = 3/4$ , (c)  $\xi = 7/8$  e (d)  $\xi = 8/9$ . Para todos,  $v_{2i} = 2$ .

Outras representações gráficas estão presentes no apêndice (B).

### 5.2.2.2 Colisões com expansão de Taylor

O lado direito da expressão para partículas idênticas (5.16) torna a interpretação das condições para valores de  $\xi$  que levem a “novas” soluções de velocidade complicado. Para fazer tal análise, utilizaremos a série de Taylor para expandir a expressão (5.16) em torno de  $\xi$ . A série de Taylor é expressa por [23]

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n, \quad (5.20)$$

onde,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \quad (5.21)$$

Com isso, a partir da expansão até segunda ordem de  $\xi$ , podemos investigar a contribuição do formalismo fracionário, considerando qualquer valor de  $\xi$  no intervalo  $0 \leq \xi < 1$ . Indicamos a expansão até primeira ordem expressa por

$$\begin{aligned} (v_{1i}^2 + v_{2i}^2 - v_{2f}^2) + [v_{1i}^2 \ln(v_{1i}) + v_{2i}^2 \ln(v_{2i}) - v_{2f}^2 \ln(v_{2f})] \xi + \mathcal{O}[\xi]^2 &= (v_{1i} + v_{2i} - v_{2f})^2 + \\ (v_{1i} + v_{2i} - v_{2f})^2 \left[ \frac{2(v_{1i} \ln(v_{1i}) + v_{2i} \ln(v_{2i}) - v_{2f} \ln(v_{2f}))}{v_{1i} + v_{2i} - v_{2f}} - \ln(v_{1i} + v_{2i} - v_{2f}) \right] \xi + \mathcal{O}[\xi]^2. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Geramos os gráficos de relação entre as velocidades final e inicial das partículas em colisão para a expressão não expandida (5.16) e considerando expansão até segunda ordem. As figuras (6) e (7) indicam essas velocidades para  $\xi$  iguais a  $\xi = 1/2$  e  $\xi = 7/8$ . Esses valores fazem parte das soluções propostas para  $\xi$  em (5.18).

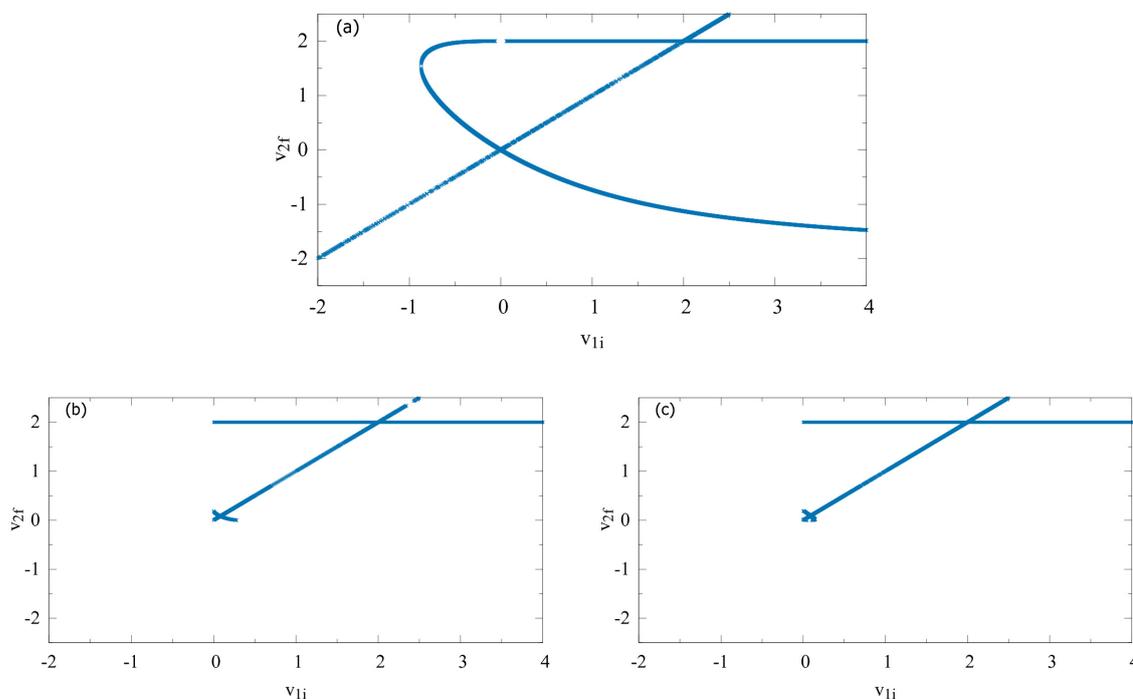


Figura 6 – Representação numérica das velocidades  $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de  $\xi$  até 1<sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2<sup>a</sup> ordem. Para todos,  $\xi = 1/2$  e  $v_{2i} = 2$ .

Nas figura (6), enquanto a expressão (5.16) gera novos valores de velocidade, a expansão em primeira ordem gera soluções presentes em  $\xi = 0$ , indicadas pelas retas horizontal e diagonal, que não estão presentes na expressão não-expandida, mas também perde alguns desses valores. Para expansão em segunda ordem, as soluções de  $\xi = 0$  se tornam ainda mais presentes. Considerando a figura (7), as expressões expandidas em primeira e segunda ordem fornecem resultados não presentes na expressão não-expandida (5.16), mas perdem alguns dos valores de velocidade que existiam antes. Ambas as imagens indicam que a expansão evidencia, em primeira ou segunda ordem, contribuições omitidas no caso não-expandido.

Exploraremos agora valores de  $\xi$  fora da solução expressa em (5.18). Nesse caso, adotamos valores de  $\xi$  menores que  $1/2$ , dois deles racionais ( $\xi = 1/4$  e  $\xi = 2/5$ ) nas figuras (8) e (9) e dois irracionais ( $\xi = \sqrt{2} - 1$  e  $\xi = GM = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ) nas figuras (10) e (11), respeitando o intervalo  $0 \leq \xi < 1$ . O número GM indica o *golden ratio*, o número mais irracional.

A partir das figuras (7), (8), (9) e (10) não há indicação de algum critério aparente

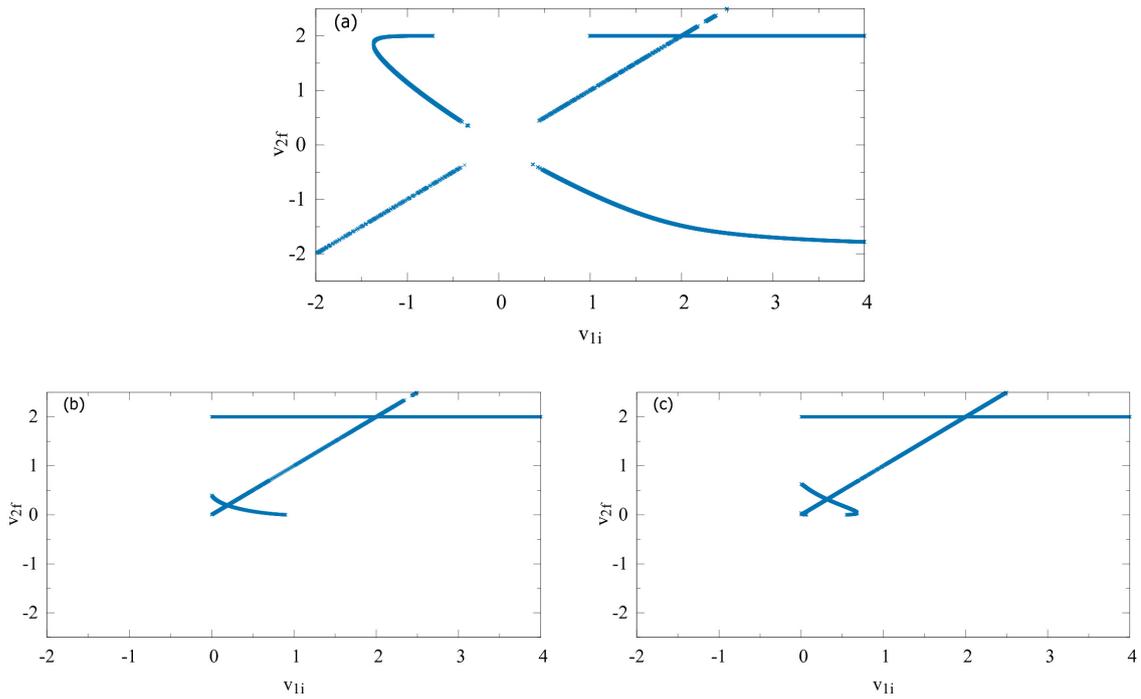


Figura 7 – Representação numérica das velocidades  $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de  $\xi$  até 1<sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2<sup>a</sup> ordem. Para todos,  $\xi = 7/8$  e  $v_{2i} = 2$ .

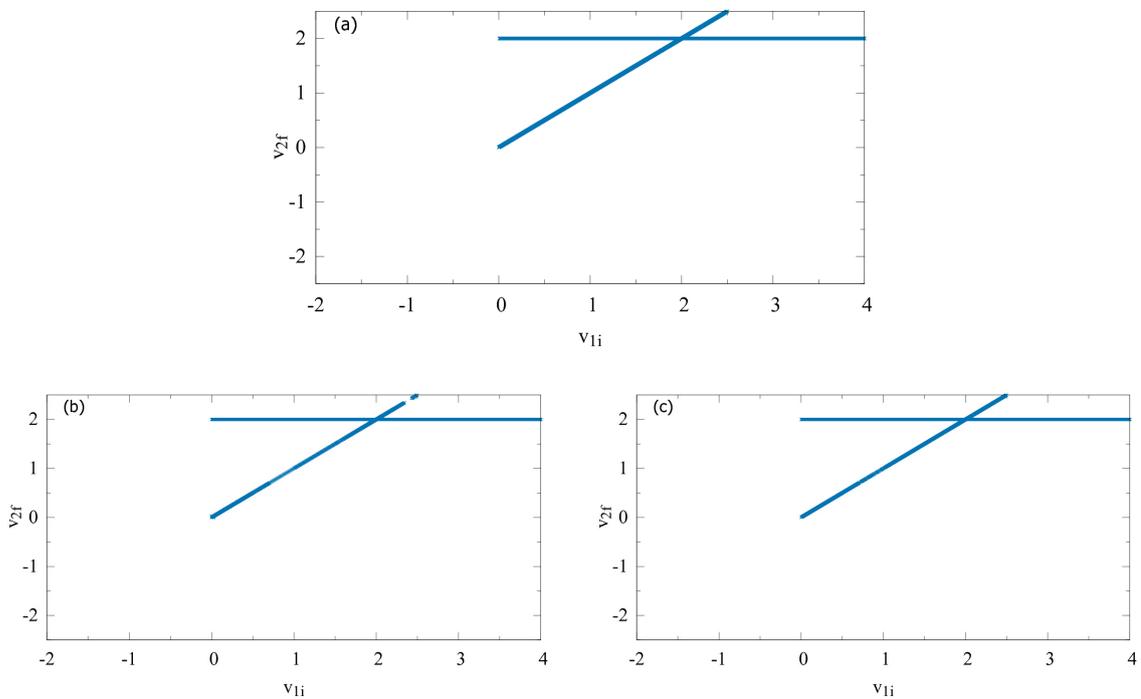


Figura 8 – Representação numérica das velocidades  $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de  $\xi$  até 1<sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2<sup>a</sup> ordem. Para todos,  $\xi = 1/4$  e  $v_{2i} = 2$ .

de valores de  $\xi$  para o sistema fracionário quanto a sua racionalidade. A figura (7) com

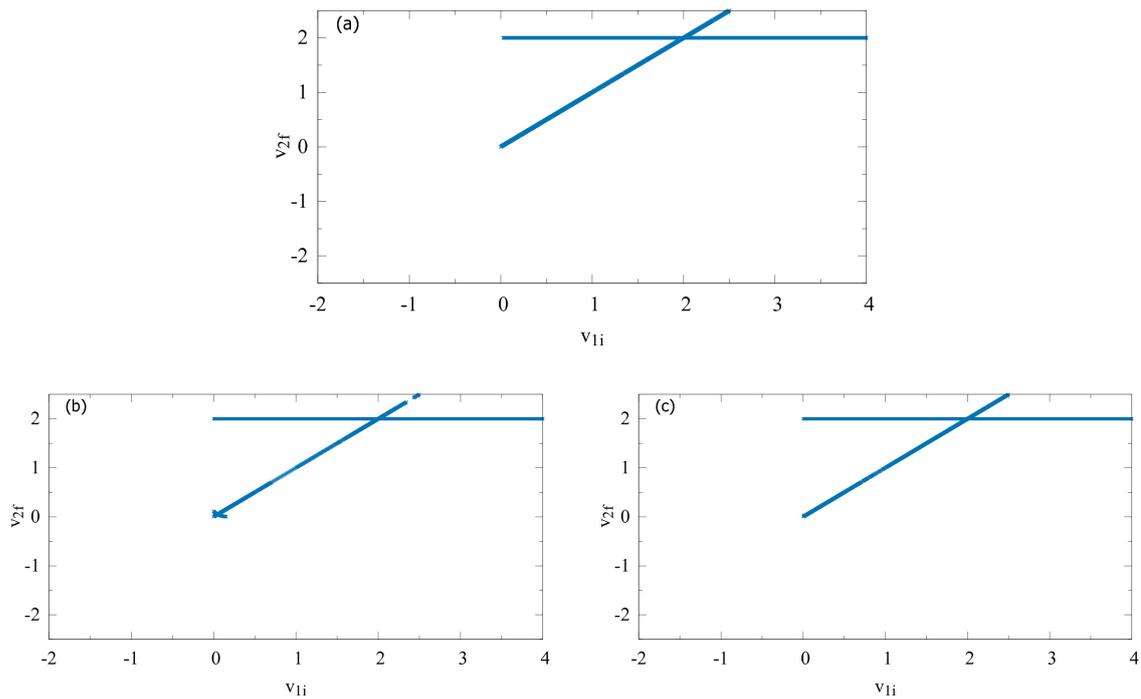


Figura 9 – Representação numérica das velocidades  $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de  $\xi$  até 1<sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2<sup>a</sup> ordem. Para todos,  $\xi = 2/5$  e  $v_{2i} = 2$ .

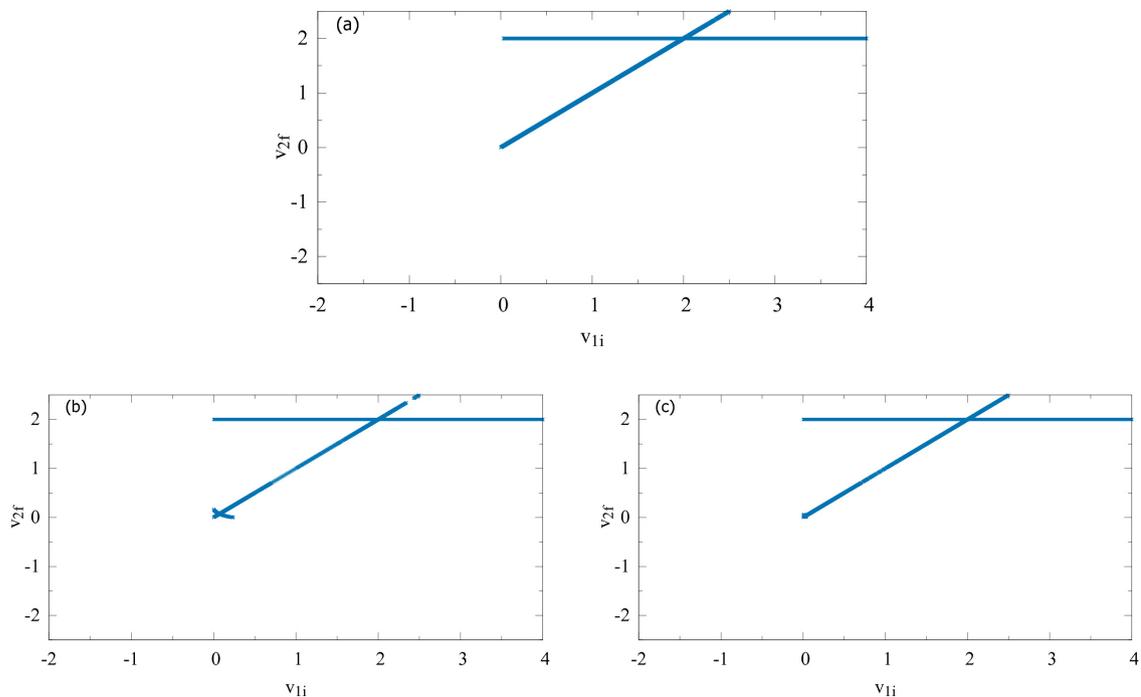


Figura 10 – Representação numérica das velocidades  $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de  $\xi$  até 1<sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2<sup>a</sup> ordem. Para todos,  $\xi = \sqrt{2} - 1$  e  $v_{2i} = 2$ .

$\xi = 1/4$  não demonstra diferentes valores de relação entre as velocidades das partículas em

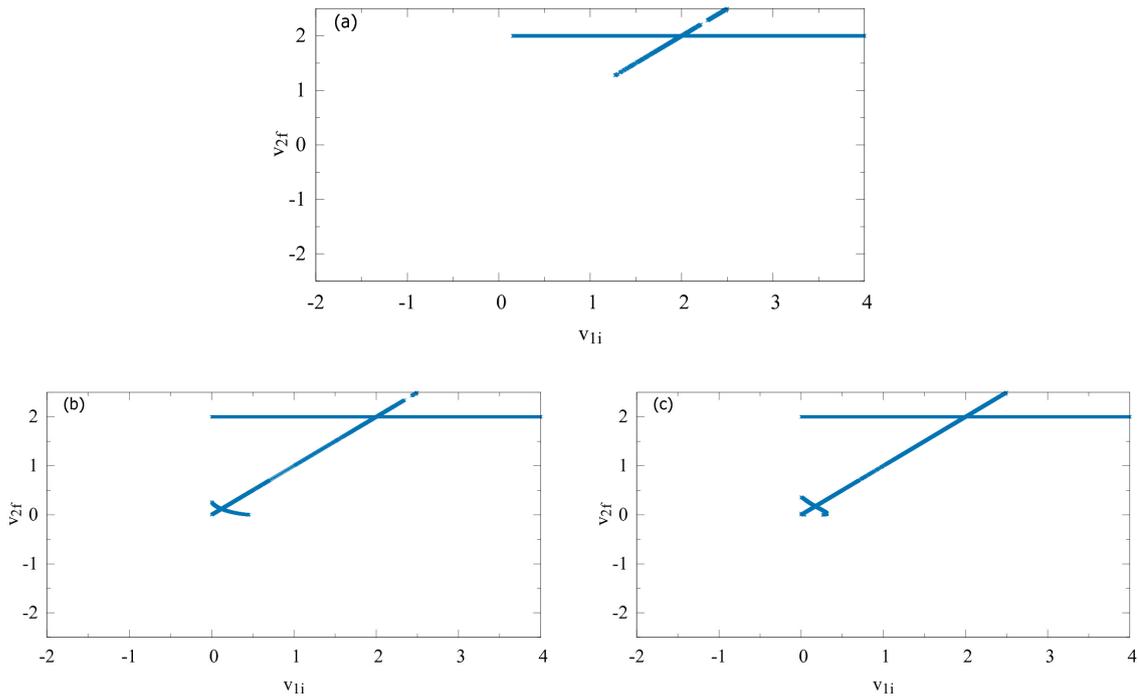


Figura 11 – Representação numérica das velocidades  $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de  $\xi$  até 1<sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2<sup>a</sup> ordem. Para todos,  $\xi = \text{golden ratio}$  e  $v_{2i} = 2$ .

comparação com a equação (5.16) não expandida. A figura (8) com  $\xi = 2/5$  indica novos valores de velocidade somente na expansão até primeira ordem. O mesmo não ocorre na expansão até segunda ordem. A figura (9) com  $\xi = \sqrt{2} - 1$ , perde muitas soluções em comparação com a expressão não expandida, mas surgem novos valores característicos da contribuição fracionária, comportamento semelhante ao da figura (8). A figura (10) possui um comportamento semelhantes às figuras anteriores.

A partir desses gráficos, podemos indicar duas aparentes características: a expansão em série de Taylor até primeira ordem manifesta novas contribuições fracionárias para  $\xi$  que não exibiam tal comportamento anteriormente. Outro aspecto identificado é quanto ao tamanho de  $\xi$ . Valores de  $\xi$  cada vez menores e mais distantes das soluções indicadas em (5.18) permanecem sem gerar novos valores para as velocidades. Essas constatações são reforçadas nas figuras (12), (13) e (14), geradas para  $\xi$  iguais a  $\xi = 1/100$ ,  $\xi = 1/10$  e  $\xi = 1/5$ . Alguns outros valores de  $\xi$  estão indicados nas figuras do apêndice (B).

Sendo assim, é ilustrado nesse capítulo que o formalismo fracionário de Laskin, quando empregado em colisões elásticas unidimensionais, gera expressões de relação entre as velocidades pouco intuitivas. Considerando expressões como (5.15) e (5.16), reconhecemos que elas fazem parte de uma classe de equações muito pouco explorada na literatura, visto que seus expoentes assumem majoritariamente valores não inteiros para  $\xi$  no intervalo  $0 \leq \xi < 1$  e não podem ser classificados como polinômios. As exceções

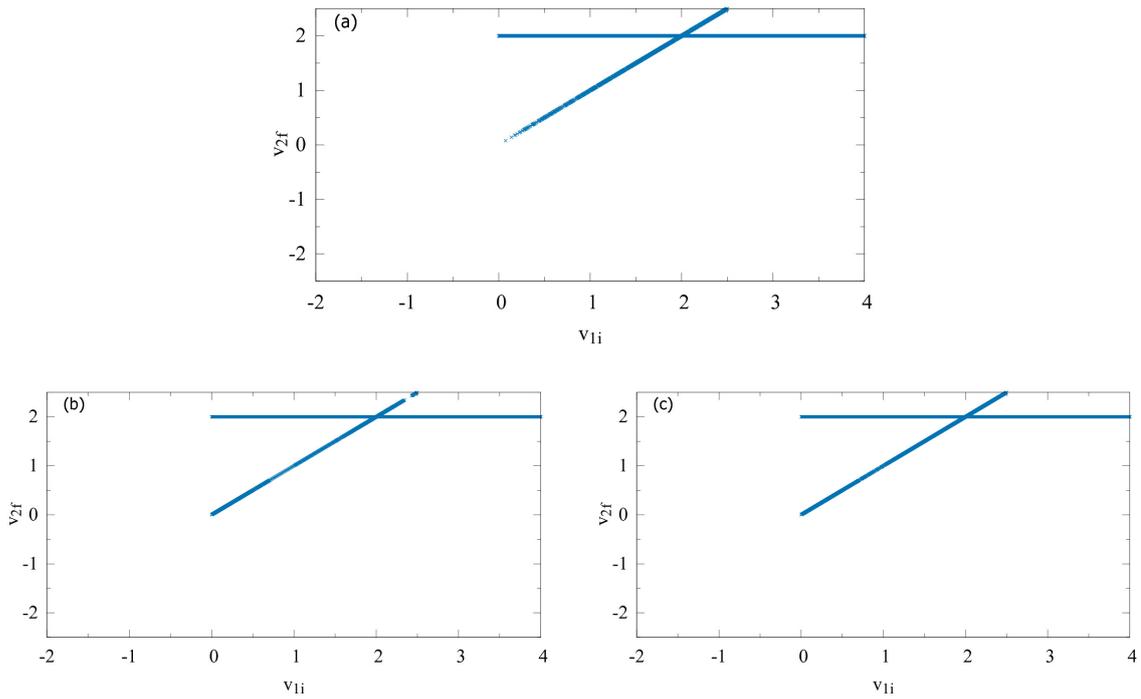


Figura 12 – Representação numérica das velocidades  $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de  $\xi$  até 1<sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2<sup>a</sup> ordem. Para todos,  $\xi = 1/100$  e  $v_{2i} = 2$ .

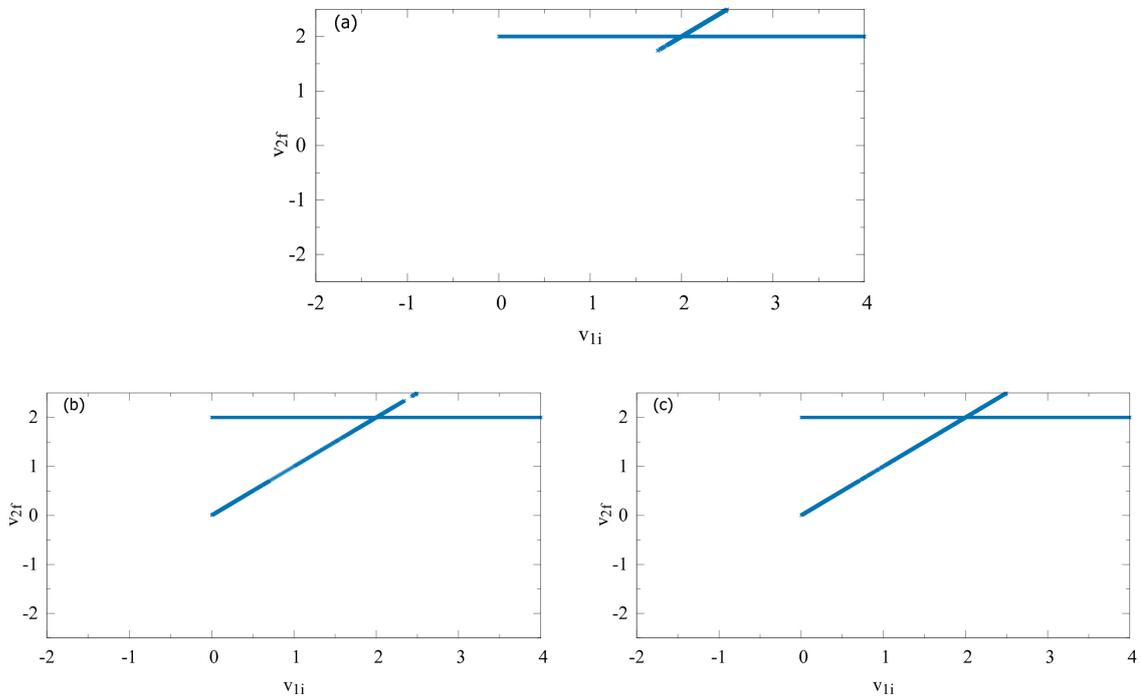


Figura 13 – Representação numérica das velocidades  $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de  $\xi$  até 1<sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2<sup>a</sup> ordem. Para todos,  $\xi = 1/10$  e  $v_{2i} = 2$ .

a essa característica nos permitiu construir a condição (5.18) para valores de  $\xi$ , que

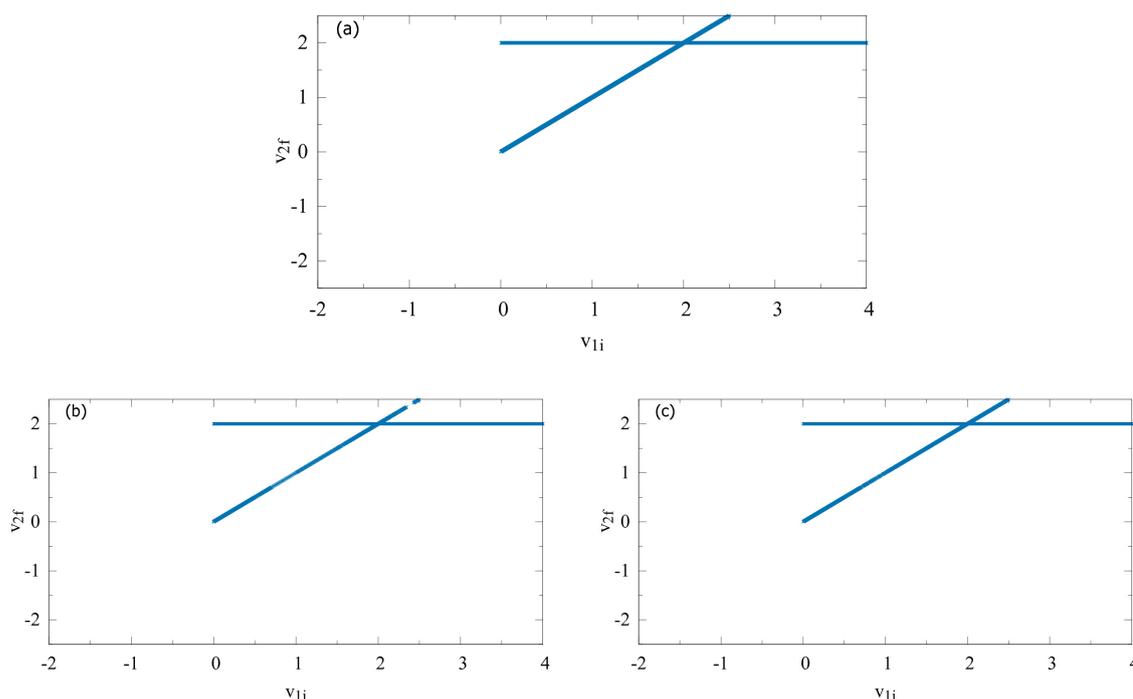


Figura 14 – Representação numérica das velocidades  $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de  $\xi$  até 1<sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2<sup>a</sup> ordem. Para todos,  $\xi = 1/5$  e  $v_{2i} = 2$ .

parcialmente, classifica valores de  $\xi$  que geram polinômios de relação entre as velocidades das partículas em colisão. Essa condição, parcialmente, classifica valores de  $\xi$  que fornecem novas soluções no âmbito da mecânica fracionária. Todavia, a partir das seções finais desse capítulo, adotamos a expansão por série de Taylor até segunda ordem da equação (5.16). A partir disso, conseguimos indicar que valores pequenos de  $\xi$  não geram novos valores de velocidades provenientes da fractalidade do sistema. Contudo, verificamos que a expansão por Taylor manifesta contribuições fracionárias não presentes no caso não expandido. Ou seja, a fractalidade do sistema gera novas relações numéricas entre as velocidades quando consideramos somente  $\xi$  de primeira ou, em alguns casos, segunda ordem. Pretendemos em trabalhos futuros expandir essa análise para ordens superiores de  $\xi$ , ou a utilização de outras formas de expansão.

Nesse capítulo investigamos algumas das características do formalismo fracionário de Laskin a partir de sua implementação na descrição de colisões elásticas unidimensionais. Com isso, considerando a conservação de energia e momento linear nesse sistema, indicamos valores de fractalidade do sistema responsáveis pelo surgimento de novos valores de velocidade das partículas em colisão. Além disso, exploramos essa mesma descrição expandida por série de Taylor.

---

## 6. CONSIDERAÇÕES FINAIS E PASSOS FUTUROS

---

Abordamos nesse trabalho uma ampla exploração das características e propriedades de sistemas clássicos fracionários. Partimos de duas propostas diferentes de formalismo fracionário para sistemas hamiltonianos. A primeira delas concebida por Tarasov [14], que possui equações de movimento compostas por derivações fracionárias e utiliza a função hamiltoniana convencional (seção 2.3.2). A segunda é a de Laskin, desenvolvida no âmbito da dinâmica quântica por integrais de caminho e que leva à elaboração de uma mecânica quântica e clássica fracionária (seção 3.3), caracterizada por uma função hamiltoniana fracionária.

Primeiramente, nesse trabalho, partimos dos aspectos do formalismo fracionário de Tarasov para introduzir propostas para representar os parênteses de Poisson de forma fracionária, construindo-os a partir da introdução de derivações de ordem não-inteira em sua estrutura e mediados pela relação entre as equações de movimento usuais e as providas pelo formalismo de Tarasov (2.68). No capítulo (4), geramos três diferentes concepções para os parênteses de Poisson. As duas primeiras estão descritas na expressão (4.44) e diferem quanto a escolha da proposta de derivação fracionária a ser adotada. Utilizamos nessa análise as derivações fracionárias de Riemann-Liouville e de Caputo.

A concepção dos parênteses de Poisson em (4.44) foi averiguada considerando um oscilador harmônico linear bidimensional, descrito pela função hamiltoniana em (4.50). A partir de uma constante de movimento conhecida desse sistema  $I$ , utilizamos, primeiro, a derivação de Riemann-Liouville e em seguida a de Caputo na investigação dessa proposta. Diferentemente dos sistemas hamiltonianos usuais, ambas as implementações não averiguaram uma condição de constante de movimento para a variável dinâmica testada. A abordagem utilizando derivação de Caputo leva à condição usual  $\{I, H\} = 0$  somente para ordem de derivação  $\alpha \rightarrow 1$ . O mesmo não acontece para derivações por Riemann-Liouville.

A última proposta para os parênteses de Poisson está expressa em (4.47) e utiliza somente a derivação fracionária de Caputo no seu tratamento, visto que foi construída a partir de suas propriedades. O procedimento de verificação dessa proposta foi o mesmo que as anteriores, a partir da aplicação para uma constante de movimento conhecida do oscilador harmônico linear bidimensional. Nesse caso, a condição  $\{I, H\} = 0$  também não foi atendida. Ainda que as expressões de para  $\{I, H\}$  diverjam entre as propostas, as que utilizaram Caputo levam a condição usual no limite  $\alpha \rightarrow 1$ . Apesar de não ficar estabelecida

uma condição para constante de movimento em sistemas clássicos fracionários, podemos afirmar que a relação entre as variáveis dinâmicas  $H$  e  $I$  não permanece a mesma no sistema em questão. Podemos assumir alternativas que justifiquem esses comportamentos: os parênteses de Poisson não são mais condições suficientes para averiguar constantes de movimento;  $I$  não é uma constante de movimento do sistema em questão no formalismo fracionário; ou ainda, a função hamiltoniana  $H$  não é mais a variável dinâmica a ser investigada na condição de constantes de movimento do sistema. Para a última alternativa, indicamos na expressão (4.67) uma “nova” variável dinâmica que poderia atender os requisitos necessários. Tal variável não foi testada, pois contornar as limitações quanto à regra de Leibniz para derivações fracionárias fogem do escopo desse trabalho. O mesmo acontece na investigação da conservação de energia no formalismo de Tarasov, que necessita de uma investigação aprofundada da implementação da regra da cadeia no formalismo fracionário e não cabe a esse trabalho. Essas duas limitações estão indicadas na seção (2.2).

Quanto à investigação do modelo fracionário proposto por Laskin, exploramos seu formalismo no âmbito da mecânica clássica, a partir de uma função hamiltoniana fracionária (3.18). Essa função engloba a massa da partícula do sistema em um fator inercial  $D_\alpha$ , caracterizado pelo limite  $D_2 = 1/2m$ , onde  $\alpha$  é a fractalidade do sistema e  $m$  a massa inercial. Em um primeiro momento, na seção (4.5), conduzimos a implementação de uma concepção de massa inercial para o sistema fracionário. Utilizamos as equações de movimento do formalismo de Laskin (3.44) para construir uma segunda lei de Newton fracionária e utilizamos a concepção de massa inercial a partir da proporção  $m = \frac{F}{a}$ , expressa na equação (4.5). O mesmo foi feito considerando o conceito de massa efetiva, utilizada na física do estado sólido para o cálculo da massa inercial de partículas em cristais, para gerar uma expressão para massa inercial no sistema fracionário. Tal análise culminou na elaboração da expressão (4.15) para massa inercial. Por fim, considerando as unidades de  $D_\alpha$  indicadas pelo autor, concebemos uma representação geral para o fator  $D_\alpha$  em termos da massa inercial da partícula e sua velocidade (equação 4.21). Tal definição para  $D_\alpha$  leva a interpretarmos a contribuição fracionária do formalismo de Laskin estar todo contido em apenas um fator numérico  $(\alpha - 1)$ .

No tratamento do problema de força central, considerando o formalismo fracionário de Laskin, descrevemos, primeiramente em um sistema unidimensional, os efeitos de diferentes fractalidades  $\alpha$ . Conseguimos averiguar que, a partir da figura (1), fractalidades menores que a usual ( $\alpha = 2$ ) diminuem o efeito do potencial central sobre o movimento da partícula. E ainda, quanto mais distante do valor usual de fractalidade, menor o efeito do potencial central. No tratamento do sistema bidimensional, geramos as equações de movimento do sistema, considerando o formalismo lagrangeano fracionário. A equação de movimento construída considerando a variável cíclica  $\theta$  (4.30) leva a interpretação da segunda lei de Kepler fracionária, caracterizada por uma potência da energia cinética da partícula. A equação de movimento construída considerando a variável  $r$  se mostrou

complicada de se analisar analiticamente e deve ser explorada melhor em trabalhos futuros.

A seguir, utilizamos o formalismo fracionário de Laskin para investigar os efeitos de diferentes fractalidades em sistemas conservativos, explorando colisões elásticas fracionárias unidimensionais, desconsiderando a definição de  $D_\alpha$  proposta em (4.21). No capítulo (5), descrevemos as equações de conservação das partículas em colisão utilizando as representações de momento linear (3.47) e energia cinética (3.34) do formalismo de Laskin. A fim de facilitar o entendimento da contribuição fracionária no sistema, utilizamos a expansão da fractalidade do sistema  $\alpha$  em termos de um fator de fractalidade  $\xi$ . O limite  $\xi \rightarrow 0$  leva à física clássica convencional. Investigamos os efeitos de diferentes  $\xi$  na relação entre as velocidades iniciais e finais das partículas, considerando partículas indistinguíveis. A expressão (5.16) indica o carácter complicado de tal análise, visto que seus expoentes são majoritariamente não-inteiros, considerando o intervalo de  $\xi$ ,  $0 \leq \xi < 1$ .

A partir das representações gráficas da expressão (5.16), constatou-se que somente alguns valores de  $\xi$  fornecem novos valores de relação entre as velocidades das partículas, enquanto o restante gera um porção limitada do caso usual ( $\xi = 0$ ). Sendo assim, propusemos uma condição para  $\xi$  baseada no aspecto dos expoentes da expressão (5.16). A condição proposta em (5.18) se mostrou coesa em categorizar valores de  $\xi$  que fornecem novas quantidades numéricas para as velocidades das partículas, consequentes da fractalidade do sistema. Todavia, devemos evidenciar a limitação de tal condição visto que somente gera novos valores alternadamente para valores de  $\xi \geq 1/2$ . Propusemos uma tentativa de correção dessa característica, através da expansão por série de Taylor da expressão (5.16) em torno de  $\xi$ , até segunda ordem. Tal metodologia indicou novas soluções de velocidades para valores de  $\xi$  que não se manifestavam nas análises anteriores considerando a expressão não expandida (5.16). Contudo, isso não acontece para valores de  $\xi \ll 1$  sugerindo um limite mínimo para  $\xi$ . Em trabalhos futuros, temos intenção de explorar valores de  $\xi$  expandidos em ordem superiores, considerando outras formas de expansão além da por séries de Taylor.

A partir das constatações acima, foram fornecidas diversas sugestões de expansão para a mecânica clássica fracionária. Inicialmente, pela inserção de parênteses de Poisson fracionários. Contudo, ainda são necessárias mais investigações a respeito das variáveis dinâmicas que devem ser sujeitas à esses parênteses, visto que as usuais são, aparentemente, insuficientes. Além disso, a sugestão de uma massa inercial no formalismo fracionário de Laskin indicou uma simplificação significativa nas suas expressões de energia cinética e momento linear, nos levando a considerar as definições usuais de massa inerciais como limitantes para o formalismo fracionário, ou mesmo um caso particular. Por fim, a investigação utilizando colisões elásticas unidimensionais nos levou a gerar um conjunto de valores de  $\xi$  que levam a contribuições para fractalidades diferentes das usuais. Todavia, não foi encontrada uma condição geral para todos os  $\xi$  no intervalo  $0 \leq \xi < 1$ .

---

## Referências

---

- 1 OLDHAM, K.; SPANIER, J. *The fractional calculus theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order*. [S.l.]: Elsevier, 1974.
- 2 SAMKO, S. G. et al. *Fractional integrals and derivatives*. [S.l.]: Gordon and Breach science publishers, Yverdon Yverdon-les-Bains, Switzerland, 1993. v. 1.
- 3 PODLUBNY, I. Fractional differential equations. *Mathematics in science and engineering*, Academic Press, v. 198, p. 41–119, 1999.
- 4 GOLDSTEIN, H.; POOLE, P. C.; SAFKO, J. L. *Classical Mechanics*. [S.l.]: Pearson, 2002.
- 5 COHEN-TANNOUJJI, C. et al. *Quantum mechanics*. New York, NY [u.a.]: Wiley [u.a.], 1977. (A Wiley-Interscience publication).
- 6 MANDELBROT, B.; FREEMAN, W.; COMPANY. *The Fractal Geometry of Nature*. [S.l.]: Henry Holt and Company, 1983. (Einaudi paperbacks).
- 7 KAC, M. On some connections between probability theory and differential and integral equations. In: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*. Berkeley, Calif.: University of California Press, 1951. p. 189–215.
- 8 TARASOV, V. E. *Fractional Dynamics - Applications of fractional calculus to dynamics of particles, field and media*. Heidelberg: Springer, 2016.
- 9 TARASOV, V. E. Review of some promising fractional physical models. *International Journal of Modern Physics B*, v. 27, n. 09, p. 1330005, 2013.
- 10 TARASOV, V. E. No nonlocality. no fractional derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 62, p. 157–163, 2018.
- 11 TARASOV, V. E. No violation of the leibniz rule. no fractional derivative. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 18, n. 11, p. 2945–2948, 2013.
- 12 TARASOV, V. E. On chain rule for fractional derivatives. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 30, n. 1-3, p. 1–4, 2016.
- 13 KILBAS, A. A.; SRIVASTAVA, H. M.; TRUJILLO, J. J. *Theory and applications of fractional differential equations*. [S.l.]: Elsevier, 2006. v. 204.
- 14 TARASOV, V. E. Fractional generalization of gradient and hamiltonian systems. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, IOP Publishing, v. 38, n. 26, p. 5929–5943, jun 2005.
- 15 LASKIN, N. Fractional quantum mechanics and Levy path integrals. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, v. 268, n. 4-6, 2000. ISSN 03759601.

- 16 COTTRILL-SHEPHERD, K.; NABER, M. Fractional differential forms. *Journal of Mathematical Physics*, v. 42, n. 5, p. 2203–2212, 2001.
- 17 FEYNMAN, R.; HIBBS, A. *Quantum Mechanics and Path Integrals*. [S.l.]: McGraw-Hill, 1965.
- 18 LÉVY, P. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. [S.l.]: Gauthier-Villars, 1954. v. 1.
- 19 LASKIN, N. Fractional schrödinger equation. *Phys. Rev. E*, American Physical Society, v. 66, p. 056108, Nov 2002.
- 20 LASKIN, N. Generalized classical mechanics. *The European Physical Journal Special Topics*, Springer, v. 222, n. 8, p. 1929–1938, 2013.
- 21 HIETARINTA, J. Direct methods for the search of the second invariant. *Physics Reports*, v. 147, n. 2, p. 87–154, 1987. ISSN 0370-1573.
- 22 JAMMER, M. *Concepts of mass in contemporary physics and philosophy*. [S.l.]: Princeton University Press, 2009.
- 23 ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. *Mathematical methods for physicists*. [S.l.]: American Association of Physics Teachers, 1999.
- 24 CAPUTO, M. Linear models of dissipation whose  $q$  is almost frequency independent—ii. *Geophysical Journal International*, Blackwell Publishing Ltd Oxford, UK, v. 13, n. 5, p. 529–539, 1967.
- 25 JUMARIE, G. Modified riemann-liouville derivative and fractional taylor series of nondifferentiable functions further results. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 51, n. 9-10, p. 1367–1376, 2006.
- 26 KHALIL, R. et al. A new definition of fractional derivative. *Journal of computational and applied mathematics*, Elsevier, v. 264, p. 65–70, 2014.
- 27 CAPUTO, M.; FABRIZIO, M. A new definition of fractional derivative without singular kernel. *Progress in Fractional Differentiation & Applications*, v. 1, n. 2, p. 73–85, 2015.
- 28 SOUSA, J.; OLIVEIRA, E. C. de. A new truncated  $m$ -fractional derivative type unifying some fractional derivative types with classical properties. *ArXiv arXivLabs*, 2017.
- 29 ENCINAS, L. H.; MASQUE, J. M. A short proof of the generalized faà di bruno's formula. *Applied mathematics letters*, Elsevier, v. 16, n. 6, p. 975–979, 2003.
- 30 RIEWE, F. Nonconservative lagrangian and hamiltonian mechanics. *Physical Review E*, APS, v. 53, n. 2, p. 1890, 1996.
- 31 AGRAWAL, O. P. Formulation of euler–lagrange equations for fractional variational problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, Elsevier, v. 272, n. 1, p. 368–379, 2002.
- 32 AGRAWAL, O. P. Generalized variational problems and euler–lagrange equations. *Computers & Mathematics with Applications*, Elsevier, v. 59, n. 5, p. 1852–1864, 2010.

- 33 AGRAWAL, O. P. Generalized euler—lagrange equations and transversality conditions for fvps in terms of the caputo derivative. *Journal of Vibration and Control*, Sage Publications Sage UK: London, England, v. 13, n. 9-10, p. 1217–1237, 2007.
- 34 COTTRILL-SHEPHERD, K.; NABER, M. Fractional differential forms. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, v. 42, n. 5, p. 2203–2212, 2001.
- 35 DIRAC, P. The lagrangian in quantum mechanics. *Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion*, v. 3, p. 312–320, 1933.
- 36 EINSTEIN, A. On the theory of the brownian movement. *Ann. Phys*, v. 19, n. 4, p. 371–381, 1906.
- 37 LEVY, P. Theorie de l’addition des variables (gauthier-villiers, paris, 1937); ay khintchine and p. levy. *CR Hebd. Seances Acad. Sci*, v. 202, p. 374, 1936.
- 38 FEYNMAN, R. P. Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics. *Reviews of Modern Physics*, v. 20, n. 2, 1948. ISSN 00346861.
- 39 LASKIN, N. *Fractional quantum mechanics*. [S.l.]: World Scientific Publishing Company, 2018.
- 40 LASKIN, N. Fractional quantum mechanics. *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, v. 62, n. 3 A, 2000. ISSN 1063651X.
- 41 DONG, J.; XU, M. Some solutions to the space fractional schrödinger equation using momentum representation method. *Journal of mathematical physics*, American Institute of Physics, v. 48, n. 7, p. 072105, 2007.
- 42 OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002.
- 43 BRYANT, R. L. et al. *Exterior differential systems*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 18.
- 44 DUBROVIN, B. A.; KRICHEVER, I. M.; NOVIKOV, S. P. Integrable systems.i. In: \_\_\_\_\_. *Dynamical Systems IV: Symplectic Geometry and its Applications*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2001. p. 177–332. ISBN 978-3-662-06791-8.
- 45 FLANDERS, H. *Differential Forms with Applications to the Physical Sciences (New York: Academic)*. [S.l.]: reprinted by Dover Publications, Minneola, NY, 1989.
- 46 SYMON, K. *Mechanics*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1971. v. 1. 971 p.
- 47 TARASOV, V. E.; ZASLAVSKY, G. M. Dynamics with low-level fractionality. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, v. 368, n. 2, p. 399–415, 2006. ISSN 0378-4371.

# Apêndices

---

## A. Cálculo fracionário

---

- Integração fracionária de funções de potência

Considerando uma função de forma  $f(x) = (x - a)^\lambda$ . Partindo da definição de integração fracionária de Riemann, expressa em (2.4), escreve-se que

$${}_a I_x^\alpha [(x - a)^\lambda] = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x - z)^{\alpha-1} (z - a)^\lambda dz, \quad (\text{A.1})$$

sendo essa a integração de Riemann à esquerda. Adotando a substituição  $t = \frac{z-a}{x-a}$ , temos que a integração fracionária passa a ser expressa como

$${}_a I_x^\alpha [(x - a)^\lambda] = \frac{(x - a)^{\alpha+\lambda}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 (1 - t)^{\alpha-1} t^\lambda dt. \quad (\text{A.2})$$

Agora, faz-se uso da função beta  $B(p, q)$ , expressa em termos da função gama [23], definida por

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}, \quad (\text{A.3})$$

onde  $p, q > 0$ . essa função também é definida em formas integrais como

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^{q-1} dx. \quad (\text{A.4})$$

Sendo assim, temos que a integração fracionária de função com potência pode ser expressa por

$${}_a I_x^\alpha [(x - a)^\lambda] = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda + \alpha + 1)} (x - a)^{\alpha+\lambda}. \quad (\text{A.5})$$

Sendo assim, a expressão acima é a indicada em (2.6).

- Derivação fracionária de Riemann-Liouville de funções de potência

Considerando funções na forma  $f(x) = (x - a)^\lambda$ , partindo da definição da derivação fracionária de Riemann-Liouville (2.9), temos que a derivação fracionária pode ser expressa por

$${}_a D_x^\alpha [(x - a)^\lambda] = \frac{d^n}{dx^n} [{}_a I_x^{n-\alpha} (x - a)^\lambda]. \quad (\text{A.6})$$

Considerando a integração fracionária de funções de potência (2.6), então

$${}_a D_x^\alpha [(x-a)^\lambda] = \frac{d^n}{dx^n} \left[ \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda+n+1-\alpha)} (x-a)^{\lambda+n-\alpha} \right]. \quad (\text{A.7})$$

Seja o efeito de derivações de ordem inteira em série de potências representada de maneira geral por [23]

$$D^n [(x-a)^\lambda] = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-p+1)} (x-a)^{\lambda-p}, \quad (\text{A.8})$$

onde  $p$  é um número natural, basta utilizá-lo para simplificar a expressão (A.7), gerando

$${}_a D_x^\alpha [(x-a)^\lambda] = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} (x-a)^{\lambda-\alpha}. \quad (\text{A.9})$$

- Derivação fracionária de Caputo de funções de potência

Abordaremos uma forma alternativa da explorada na derivação de Riemann-Liouville para verificar o efeito da derivação de Caputo em funções de potência. Considerando a definição da derivação fracionária de Caputo expressa em (2.22), em um intervalo  $[0, x]$ . Podemos representar a derivação de uma função na forma  $f(x) = (x)^\lambda$ , com  $\lambda \geq 0$ , na forma

$$D_x^\alpha [x^\lambda] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(z^\lambda)}{(x-z)^{\alpha-n+1}} dz, \quad (\text{A.10})$$

então basta expandirmos a derivação de ordem inteira expressa por  $f^{(n)}(z^\lambda)$  para chegarmos na representação na forma

$$D_x^\alpha = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{\lambda(\lambda-1) \cdots (\lambda-n+1) z^{\lambda-n}}{(x-z)^{\alpha-n+1}} dz. \quad (\text{A.11})$$

Considerando as definições e propriedades da função Gama [23], podemos expressar

$$D_x^\alpha [x^\lambda] = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\lambda-n+1)} \int_0^x \frac{z^{\lambda-n}}{(x-z)^{\alpha-n+1}} dz. \quad (\text{A.12})$$

Podemos a seguir reestruturar o integrando na forma

$$D_x^\alpha [x^\lambda] = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\lambda-n+1)} \int_0^x x^{n-\alpha-1} z^{\lambda-n} \left(1 - \frac{z}{x}\right)^{n-\alpha-1} dz. \quad (\text{A.13})$$

Adotando a mudança de variáveis  $\tau/x = y$ , obtêm-se

$$D_x^\alpha [x^\lambda] = \frac{\Gamma(\lambda+1)x^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\lambda-n+1)} \int_0^1 y^{\lambda-n} (1-y)^{n-\alpha-1} dy. \quad (\text{A.14})$$

Com isso, a partir da função beta expressa em (A.4), podemos representar a derivação como

$$D_x^\alpha[x^\lambda] = \frac{\Gamma(\lambda + 1)x^{\lambda-\alpha}}{\Gamma(n - \alpha)\Gamma(\lambda - n + 1)}\beta(\lambda - n + 1, n - \alpha). \quad (\text{A.15})$$

Partindo da representação da função beta em termos da função gama (A.3), chega-se no efeito da derivação de Caputo em função de potência

$$D_t^\alpha[t^\lambda] = \frac{\Gamma(\lambda + 1)}{\Gamma(\lambda - \alpha + 1)}t^{\lambda-\alpha}. \quad (\text{A.16})$$

---

## B. Colisões fracionárias - gráficos

---

- Gráficos de relação entre velocidades nas colisões fracionárias a partir da expressão (5.16) e da expansão dessa expressão até 2<sup>a</sup> ordem.

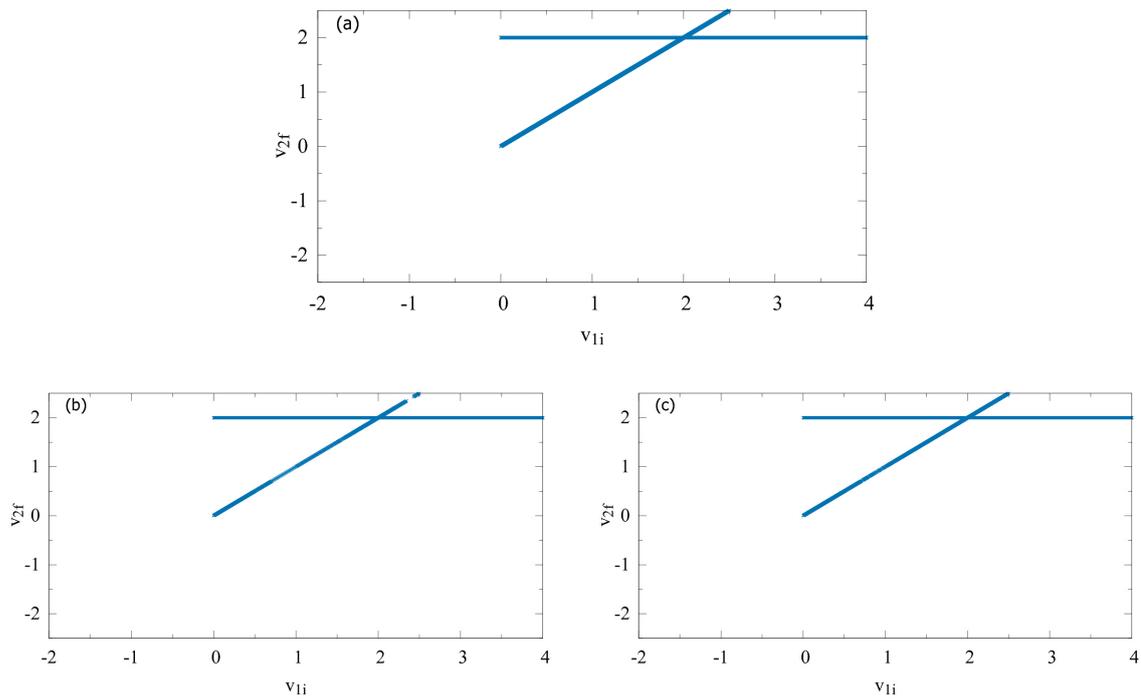


Figura 15 – Representação numérica das velocidades  $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de  $\xi$  até 1<sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2<sup>a</sup> ordem. Para todos,  $\xi = 2/25$  e  $v_{2i} = 2$ .

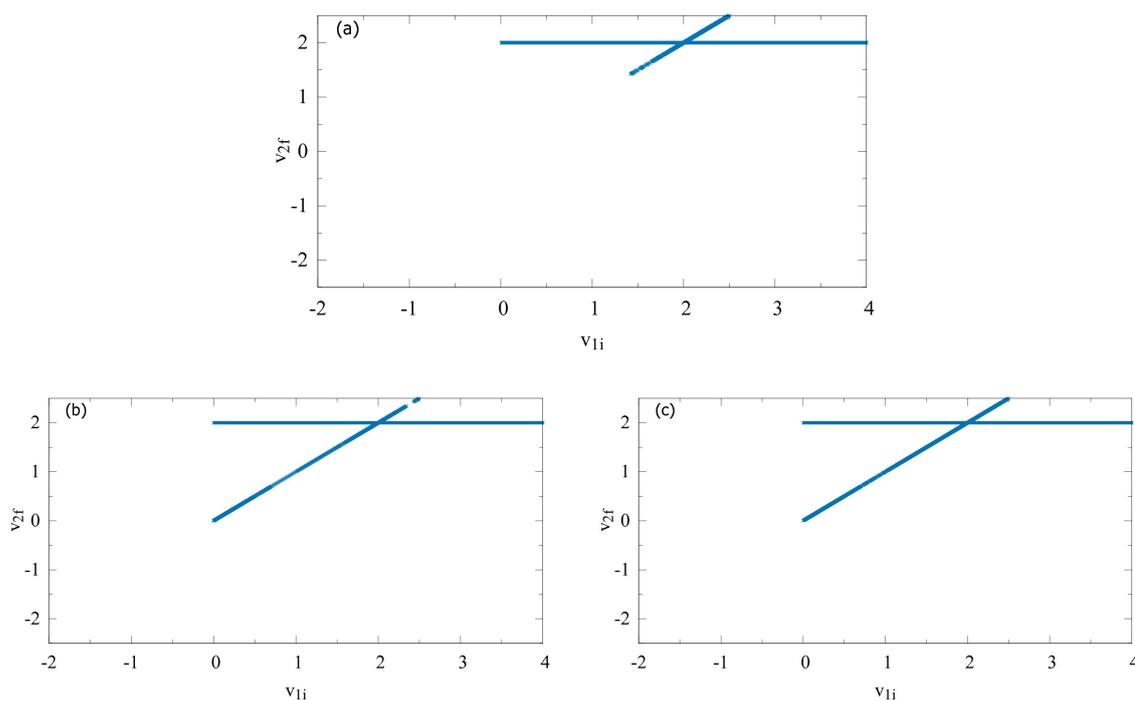


Figura 16 – Representação numérica das velocidades  $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de  $\xi$  até 1<sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2<sup>a</sup> ordem. Para todos,  $\xi = 11/50$  e  $v_{2i} = 2$ .

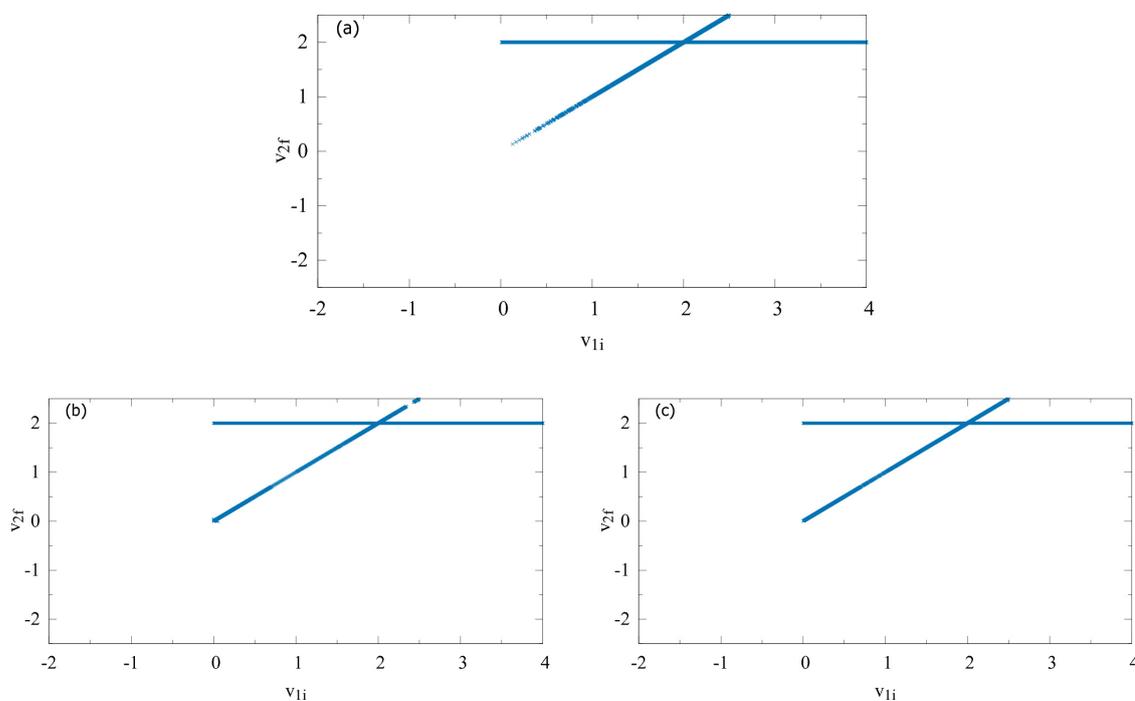


Figura 17 – Representação numérica das velocidades  $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de  $\xi$  até 1<sup>a</sup> ordem e painel (c) até 2<sup>a</sup> ordem. Para todos,  $\xi = \pi/11$  e  $v_{2i} = 2$ .

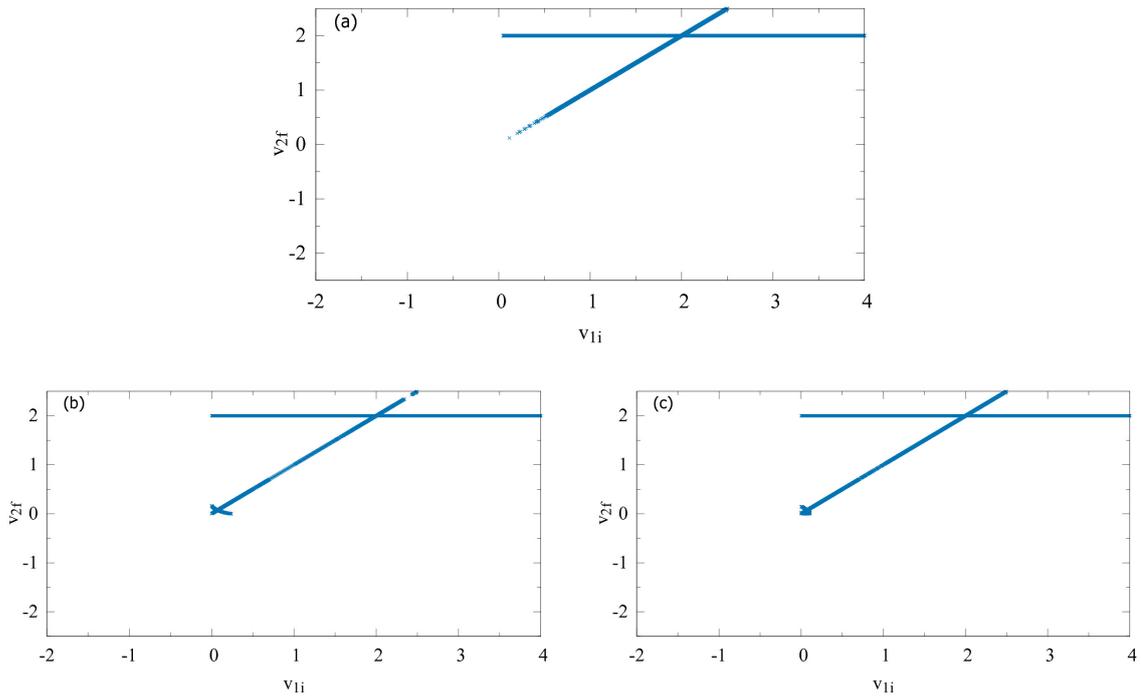


Figura 18 – Representação numérica das velocidades  $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de  $\xi$  até 1ª ordem e painel (c) até 2ª ordem. Para todos,  $\xi = \sqrt{2}/3$  e  $v_{2i} = 2$ .

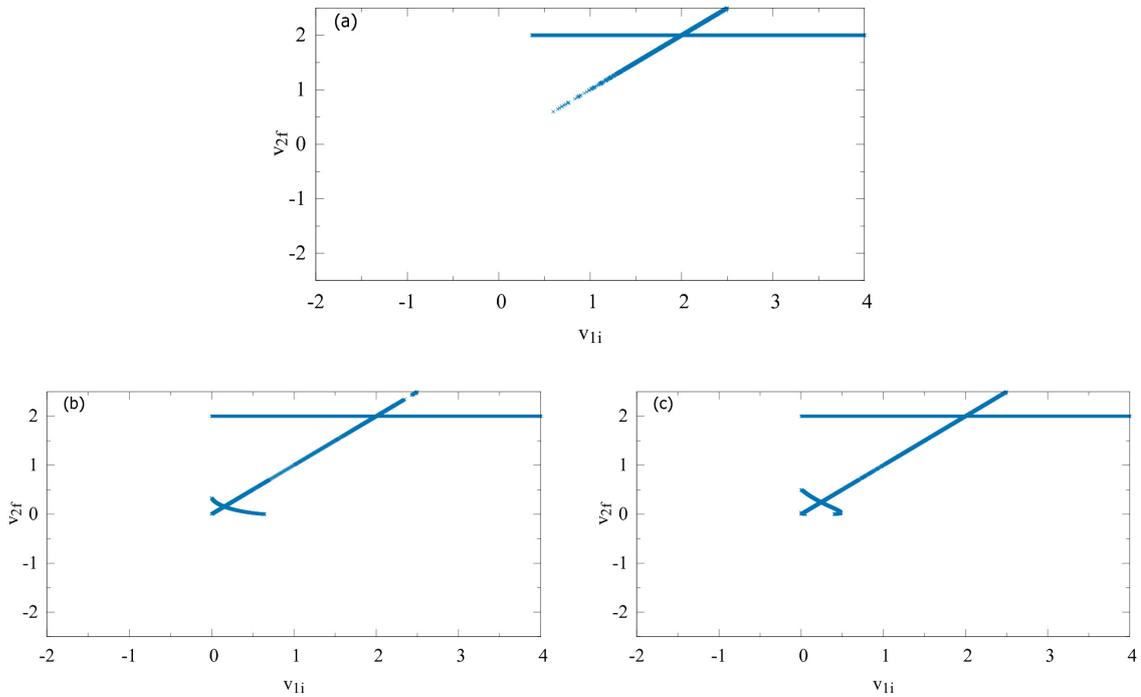


Figura 19 – Representação numérica das velocidades  $v_{2f} \times v_{1i}$ . Painel (a) considera a expressão (5.16). O painel (b) considera a expressão (5.16) expandida em Taylor ao redor de  $\xi$  até 1ª ordem e painel (c) até 2ª ordem. Para todos,  $\xi = \sqrt{3} - 1$  e  $v_{2i} = 2$ .