

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

THIAGO KERR PADILHA

**Estudo do efeito RTM em anomalias de altura nas estações IHRF no Brasil  
usando diferentes abordagens e um modelo de densidades lateral**

CURITIBA/PR

2022

THIAGO KERR PADILHA

Estudo do efeito RTM em anomalias de altura nas estações IHRF no Brasil usando diferentes abordagens e um modelo de densidades lateral

TCC apresentado ao curso de Engenharia Cartográfica e de Agrimensura, Setor de Ciências da Terra, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Cartográfica e de Agrimensura.

Orientador: Prof. Dr. Tiago Lima Rodrigues.

CURITIBA/PR  
2022

**MANTENHA ESSA PÁGINA EM BRANCO PARA INCLUSÃO DA FICHA  
CATALOGRÁFICA APÓS A CONCLUSÃO DO TRABALHO**



Universidade Federal do Paraná  
Setor de Ciências da Terra  
Engenharia Cartográfica e de Agrimensura

## TERMO DE APROVAÇÃO

THIAGO KERR PADILHA

ESTUDO DO EFEITO RTM EM ANOMALIAS DE ALTURA NAS ESTAÇÕES IHRF NO BRASIL  
USANDO DIFERENTES ABORDAGENS E UM MODELO DE DENSIDADES LATERAL

O Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Cartográfica e de Agrimensura, Setor de Ciências da Terra da Universidade Federal do Paraná, foi APROVADO como requisito à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Cartográfica e de Agrimensura.

Prof Dr. Thiago Lima Rodrigues  
Orientador(a) – Departamento de Geomática, UFPR

Dr.ª. Andrea Galudht Santacruz Jaramillo

Prof Dr. Daniel Arana  
Departamento de Geomática, UFPR

Prof.ª Dr.ª. Regiane Dalazoana  
Departamento de Geomática, UFPR

Curitiba, 20 de setembro de 2022.

Em memória dos meus avôs James Kerr e Besmar Padilha...

## AGRADECIMENTOS

- Primeiramente à minha família, por todo incentivo e colaboração ao longo de todos estes anos. Um agradecimento especial à minha mãe Irma Kristina Kerr, por toda a ajuda para permitir a realização dos meus estudos e todo carinho e ensinamentos.
- Ao meu professor orientador, Tiago Lima Rodrigues, pelos ensinamentos, apoio e disposição para me ajudar na elaboração deste trabalho. Também agradeço aos demais professores que contribuíram para minha formação.
- Aos meus amigos que fiz em minha cidade Rio Grande-RS, por todo companheirismo e bons momentos que com certeza serviram de incentivo para minha formação.
- Às minhas amigas feitas na graduação e na cidade de Curitiba, por passar por todas estas etapas da graduação ao meu lado, em momentos bons, momentos ruins, em trabalhos, festas e conversas que sempre serviram de apoio e incentivo.
- À minha namorada Brenda Miranda por todo incentivo, toda ajuda, carinho e ensinamentos de física que contribuíram até mesmo para realização deste trabalho.
- Aos meus animais de estimação Frida, Tyrion, Fritz, Sophia (*in memorian*), Nero (*in memorian*), Latifa (*in memorian*) por todos ensinamentos, e contribuição para formação do meu caráter desde minha infância até o presente momento.
- À Universidade Federal do Paraná, pelo acolhimento e ambiente amigável.

## RESUMO

A modelagem dos curtos comprimentos de onda do campo gravitacional pode ser obtida através da Modelagem Residual do Terreno (RTM - do inglês Residual Terrain Modeling), conhecida como técnica RTM, sendo atualmente um problema em aberto para a implementação do IHRS no mundo. No Brasil, os estudos direcionados à determinação do valor do geopotencial não levaram em conta os efeitos da topografia residual. Diante disso, o presente trabalho buscou avaliar os resultados obtidos por diferentes abordagens da técnica RTM, sendo estas, a abordagem dos Prismas, Tesseroides, Poliedros e Ponto-Massa, definindo a mais vantajosa em termos de exatidão e tempo de processamento, e apontando os fatores que podem influenciar nestes resultados para uma futura padronização desta técnica na implementação do IHRS. Para isto, foram utilizados Modelos Digitais de Superfície (MDS) MERIT, com correção de altitude de copas de árvores, e no caso das estações costeiras, houve a complementação dos dados continentais com dados batimétricos. Adicionalmente para a densidade, a fim de se utilizar valores mais realísticos do que o valor constante de  $2670 \text{ kg/m}^3$  para a rocha cristalina proposto por Harkness, o modelo global de densidades lateral "UNB TopoDensT", foi utilizado. Para o cálculo do potencial gravitacional em cada abordagem RTM, foram utilizadas rotinas em ambiente MATLAB. As regiões de estudo foram em torno das estações que irão compor o IHRF no Brasil, sendo estas, BRAZ, PPTE, CUIB, MABA, CEFT e IMBT. Para análise de exatidão, com exceção da estação IMBT, foram utilizados valores de anomalia de altura relacionados ao Sistema Geodésico Brasileiro (SGB). Como resultados, foi verificado que para as estações BRAZ, PPTE, CUIB e MABA as abordagens apresentaram valores próximos, com discordância máxima ao nível do décimo do milímetro. Para as estações CEFT e IMBT houve maior variação, sendo que as abordagens de poliedro e ponto-massa apresentaram valores mais concordantes, e no caso da estação CEFT, foram verificados mais acurados. Em virtude disso, a abordagem de ponto-massa se mostrou a mais vantajosa, uma vez que o tempo computacional para o processamento é significativamente menor em relação às demais abordagens. No contexto do uso do modelo de densidades, comparação entre o modelo global de densidades da UNB e a constante de Harkness apresentou divergências de até 5 milímetros no resultado final. Isto evidencia a importância da utilização e padronização de um modelo de densidades adequado para a aplicação desta técnica.

Palavras-chave: Geodésia. Anomalia de altura. IHRS. IHRF. Modelagem Residual do Terreno.

## Lista de ilustrações

Figura 1 – Contribuição de diferentes comprimentos de onda na anomalia de altitude. . . . .	7
Figura 2 – Espectro da gravidade e sua fonte de dados. . . . .	8
Figura 3 – Técnica RTM ilustrada. . . . .	10
Figura 4 – Geometria do tesseróide. . . . .	11
Figura 5 – Geometria do prisma. . . . .	13
Figura 6 – Geometria do poliedro. . . . .	13
Figura 7 – Não paralelismo das superfícies equipotenciais. . . . .	16
Figura 8 – Estações IHRF no mundo. . . . .	17
Figura 9 – Estações IHRF no Brasil. . . . .	19
Figura 10 – Buffers delimitando as regiões de estudo. . . . .	20
Figura 11 – Mosaicagem entre MDT MERIT e dados batimétricos SRTM15+ para a estação IMBT. . . . .	21
Figura 12 – MDS de referência (4000 metros de resolução) X MDS Detalhado (90 metros de resolução). . . . .	23
Figura 13 – Dados prontos para uso da técnica RTM. . . . .	23
Figura 14 – Fluxograma metodológico. . . . .	24
Figura 15 – Correção Harmônica. . . . .	25
Figura 16 – Valores de altura RTM em um raio de 210 km em torno cada estação IHRF. . . . .	28
Figura 17 – Histogramas da altura RTM de cada estação IHRF. . . . .	30
Figura 18 – Valores de densidades extraídos do modelo UNB TopoDensT em um raio de 210 km em torno de cada estação IHRF. . . . .	31
Figura 19 – Contribuição da anomalia de altura RTM para um raio de 210 km em torno de cada estação IHRF. . . . .	33
Figura 20 – Tempo de processamento médio demandado. . . . .	34
Figura 21 – Diferença entre valores obtidos com modelo de densidades UNB e a constante de Harkness. . . . .	35
Figura 22 – Acurácias absolutas das anomalias de altura RTM a cada quilômetro de raio de integração até 210 km, para as estações BRAZ, CUIB e PPTE, utilizando as densidades extraídas do modelo UNB TopoDesnT. . . . .	37
Figura 23 – Acurácias absolutas das anomalias de altura RTM a cada quilômetro de raio de integração até 210 km, para as estações CEFT e MABA, utilizando as densidades extraídas do modelo UNB DesnT. Para o caso da estação IMBT tem-se a acurácia relativa. . . . .	38

## Lista de tabelas

Tabela 1 – Densidade média do terreno de estudo em torno de cada estação	
IHRF . . . . .	32
Tabela 2 – Anomalias de altura finais e acurácias . . . . .	40

## LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

DVBI	-Datum Vertical Brasileiro de Imbituba
GGOS	-Global Geodetic Observing System
GNSS	-Global Navigation Satellite System
IAG	-International Association of Geodesy
ICGEM	-International Centre for Global Earth Models
ICRS	-International Celestial Reference System
IGFS	-International Gravity Field Service
IHRF	-International Height Reference Frame
IHRS	-International Height Reference System
ITRF	-International Terrestrial Reference Frame
ITRS	-International Terrestrial Reference System
JWG	-Joint Working Group
MDS	-Modelo Digital de Superfície
MDT	-Modelo Digital do Terreno
MERIT	-Multi-Error-Removed Improved-Terrain
MGG	-Modelo Global do Geopotencial
MGGA	-Modelos Globais do Geopotencial Adaptados
MGGC	-Modelos Globais do Geopotencial Combinados
MGGS	-Modelo global do Geopotencial apenas com dados de satélites
NMM	-Nível Médio dos Mares
PVC	-Problema Do Valor de Contorno
PVCG	-Problema Do Valor de Contorno da Geodésia
RR	-Remover-Restaurar
RTM	-Residual Terrain Modeling
SGB	-Sistema Geodésico Brasileiro
SRTM	-Shuttle Radar Topography Mission
UNB	-Universidade de New Brunswick

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\vec{g}$	- Vetor gravidade
$\vec{F}$	- Força Gravitacional Específica
$\vec{C}$	- Força Centrífuga
$W$	- Geopotencial
$V$	- Potencial Gravitacional
$\phi$	- Potencial Centrífugo
$U$	- Esferopotencial
$V_N$	- Potencial Gravitacional da Terra Normal
$G$	- Constante Gravitacional;
$\rho$	- Densidade das massas
$T$	- Potencial Perturbador
$\Delta\vec{g}$	- Anomalia da gravidade
$\delta\vec{g}$	- Distúrbio da gravidade
$\vec{\gamma}$	- Vetor gravidade normal
$N$	- Altitude Geoidal
$\phi$	- Latitude Geodésica
$\lambda$	- Longitude Geodésica
$h$	- Altitude Elipsoidal
$C$	- Número Geopotencial
$\zeta$	- Anomalia de altura;

# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>1</b>
<b>1.1</b>	<b>OBJETIVOS</b>	<b>2</b>
1.1.1	Objetivo Geral	2
1.1.2	Objetivos específicos	2
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>3</b>
<b>2.1</b>	<b>INTRODUÇÃO À TEORIA DO POTENCIAL</b>	<b>3</b>
<b>2.2</b>	<b>PROBLEMA DO VALOR DE CONTORNO DA GEODÉSIA (PVCG)</b>	<b>4</b>
<b>2.3</b>	<b>TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL</b>	<b>7</b>
2.3.1	TÉCNICA RR (REMOVER - RESTAURAR)	9
2.3.2	MODELAGEM DA TOPOGRAFIA RESIDUAL (RTM)	10
<b>2.4</b>	<b>MODELOS GLOBAIS DO GEOPOTENCIAL (MGG)</b>	<b>14</b>
<b>2.5</b>	<b>ALTITUDES</b>	<b>15</b>
<b>2.6</b>	<b>IHRs E IHRF</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>MATERIAIS E MÉTODOS</b>	<b>20</b>
3.1	COLETA E PREPARO DOS DADOS	20
3.2	PROCESSAMENTO DOS DADOS	25
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÃO</b>	<b>28</b>
<b>5</b>	<b>CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES</b>	<b>42</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>44</b>

# 1 INTRODUÇÃO

O principal objetivo da Geodésia é a determinação da forma e das dimensões do planeta Terra, além do campo da gravidade e suas variações temporais. Isto exige com que se realize diversos levantamentos definindo pontos na superfície para que se tenha valores conhecidos sobre a grandeza estudada, assim, permitindo sua determinação para as diferentes regiões através de métodos de interpolação ou via transporte de coordenadas (GEMAEL, 1999).

A IAG (*International Association of Geodesy*) define que a Geodésia pode ser subdividida em três áreas fundamentais, sendo estas, a geodinâmica, a rotação, e o campo da gravidade da Terra, conhecidas também, como os três pilares da Geodésia (SAHAGIAN et al., 2009). As redes geodésicas de referência suportam as atividades relacionados a estes três pilares pois servem de vínculo para as observações e para a implementação de um Sistema de Referência Geodésico Global (GGRS - *Global Geodetic Reference System*).

Os dois primeiros pilares encontram-se suportados através do ITRS (*International Terrestrial Reference System*) e do ICRS (*International Celestial Reference System*), enquanto o terceiro pilar, que está relacionado com o conhecimento do campo gravitacional terrestre, ainda não se encontra adequadamente suportado e padronizado (IAG, s.d) (SÁNCHEZ et al., 2021).

No ano de 2015, a IAG propôs na resolução No.01/2015 a definição e realização do IHRS (*International Height Reference System*), com o objetivo de propor um sistema global e unificado de altitudes relacionadas ao campo da gravidade, permitindo a padronização das altitudes com parâmetros físicos, sendo de grande importância para as pesquisas e obras que envolvam diferentes países, já que todos estariam utilizando o mesmo sistema de altitudes.

Além do fato de auxiliar obras e pesquisas envolvendo diferentes países, o IHRS também será importante para as pesquisas que envolvem a determinação e investigação de mudanças globais no planeta Terra, detecção do nível do mar, etc. Assim, desde 2011 o GGOS (*Global Geodetic Observing System*) criou grupos de trabalho com o objetivo de desenvolver métodos e investigações para a definição e realização do IHRS, a partir de diversas convenções que serão abordadas no referencial teórico deste trabalho.

De acordo com SÁNCHEZ (2017), a modelagem do campo gravitacional pode ser subdividida em baixas, médias e altas frequências, onde as baixas e médias frequências estão associadas com os efeitos globais do campo da gravidade, e as altas frequências com efeitos locais, relacionados à topografia do terreno.

Segundo Sánchez et al. (2021), a modelagem do campo gravitacional das altas frequências ainda é um problema em aberto atualmente, dada as várias possibilidades

para o provimento destes valores. Adicionalmente no Brasil, nos estudos direcionados à determinação do valor do geopotencial para as estações que irão compor o IHRF, não foram levados em conta os efeitos da topografia residual (BLITZKOW; MATOS, 2022). Diante disto, este trabalho se propõe a contribuir com estudos no sentido de avaliar estratégias para a elaboração desta modelagem através da técnica RTM (*Residual Terrain Modeling*). Isto se dá especialmente com o uso de diferentes abordagens, no contexto do método espacial da solução da Integral de Newton para o potencial, e o uso de um modelo global de densidades lateral (2D) desenvolvido pela Universidade de New Brunswick, denominado "UNB TopoDensT" (SHENG et al., 2019), com intuito de proporcionar valores mais realísticos de densidades da crosta terrestre em relação ao valor da constante de Harkness para as rochas cristalinas.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo principal deste trabalho é modelar o efeito das altas frequências do campo gravitacional nas futuras estações IHRF no Brasil, a partir da técnica RTM, testando diferentes abordagens e valores de densidade da crosta terrestre provenientes de um modelo global de densidades lateral (2D), contribuindo para a implementação do IHRF no país.

### 1.1.2 Objetivos específicos

Dentre os objetivos específicos se encontram:

- Calcular valores de potencial e transforma-los em anomalias de altura RTM para cada uma das futuras estações IHRF no Brasil, utilizando as abordagens de poliedro, prisma, tesseróide e ponto-massa;
- Analisar a variação das anomalias de altura a cada 1 km até um raio máximo de 210 km;
- Analisar as diferenças de resultados com o uso do valor constante de densidade proposto por Harkness e o uso de valores provenientes do modelo UNB;
- Comparar os resultados obtidos com àqueles dados pelo Sistema Geodésico Brasileiro;
- Analisar a acurácia e o tempo de processamento de cada abordagem utilizada na técnica RTM para cada estação, definindo a mais vantajosa para este tipo de trabalho;

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nos próximos tópicos, serão abordados os principais conceitos que vão servir de embasamento teórico para a compreensão da metodologia apresentada no presente trabalho, desde abordagens sobre o campo da gravidade e a teoria do potencial, até as abordagens utilizadas para analisar a influência das massas topográficas nas estações IHRF a partir da técnica RTM.

### 2.1 INTRODUÇÃO À TEORIA DO POTENCIAL

Este tópico tem como objetivo abordar os elementos básicos que irão servir de base para todo o desenvolvimento metodológico. Assim, os principais componentes que compõem a teoria do potencial gravitacional que serão conceituados a seguir são o geopotencial, o esferopotencial e o potencial anômalo ou perturbador.

A gravidade é a resultante da ação gravitacional e o efeito centrífugo causado pelo efeito de rotação da Terra, sendo expressa na Equação (1) abaixo (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006), no qual  $\vec{g}$  é o Vetor gravidade,  $\vec{F}$  é o vetor força gravitacional específica e  $\vec{C}$  é o vetor força centrífuga específica. Na Geodésia, o conhecimento do campo da gravidade é muito importante para que se possa obter informações sobre os efeitos das massas do planeta Terra onde a medição sobre determinado ponto é realizada:

$$\vec{g} = \vec{F} + \vec{C}. \quad (1)$$

A gravidade pode ser expressa em termos de geopotencial, que, de forma análoga a equação do campo da gravidade, se dá através da soma do potencial de atração (potencial gravitacional) em um determinado ponto e o potencial centrífugo (HEISKANEN; MORITZ, 1967), como pode-se ver na Equação (2):

$$W = V + \phi, \quad (2)$$

onde  $W$  é o geopotencial,  $V$  é o potencial gravitacional e  $\phi$  é o potencial centrífugo.

Devido às dificuldades existentes em se obter o valor do geopotencial em um ponto na superfície física da terra, como por exemplo, a variação das densidades de

massa no interior do planeta, utilizou-se de um modelo de terra atribuído à um elipsoide de referência homogêneo, com a mesma massa e velocidade de rotação da terra real, com uma superfície equipotencial (mesmo valor de potencial gravitacional para qualquer ponto em sua superfície). Este modelo é chamado de terra normal (GEMAEL, 1999).

Analogamente ao geopotencial na terra real, existe o esferopotencial na terra normal, que é descrito pela soma entre o potencial normal e o potencial centrífugo como mostra a Equação (3):

$$U = V_N + \phi, \quad (3)$$

onde  $U$  é o esferopotencial,  $V_N$  é o potencial gravitacional na terra normal e  $\phi$  é o potencial centrífugo.

Com isso, a diferença entre o geopotencial e o esferopotencial em um mesmo ponto é chamado de potencial anômalo ou perturbador ( $T$ ). Através da Equação (4) e devido ao fato de que como tanto o geopotencial quanto o esferopotencial possuem o mesmo potencial centrífugo, o potencial perturbador pode ser descrito como a diferença entre o potencial gravitacional na terra real e o potencial gravitacional na terra normal:

$$T = W - U = (V + \phi) - (V_N + \phi) = V - V_N. \quad (4)$$

O potencial perturbador  $T$  descreve as variações entre as grandezas físicas da Terra Real e as grandezas físicas e geométricas na Terra Normal, devido a distribuição heterogênea de massas no interior da Terra, assim, com o desenvolvimento da Equação (4), o potencial centrífugo acaba sendo eliminado e o potencial perturbador é uma equação harmônica no exterior da Terra, satisfazendo a equação de Laplace (6).

Isto permite com que haja uma decomposição harmônica desta grandeza, permitindo o desenvolvimento em harmônicos esféricos, que são base dos atuais modelos globais de geopotencial que serão abordados posteriormente neste trabalho (SILVA, 2017).

## 2.2 PROBLEMA DO VALOR DE CONTORNO DA GEODÉSIA (PVCG)

Para o interior das massas atrativas, a partir do Laplaciano do potencial gravitacional, chega-se na equação de Poisson (5). Quando a densidade de um ponto é igual a zero, a equação de Poisson torna-se a equação de Laplace (6), onde  $\Delta$  é o operador

laplaciano,  $G$  é a constante gravitacional e  $\rho$  é a densidade das massas. Isto é útil para o estudo do potencial perturbador  $T$  no exterior das massas que está relacionado ao problema do valor de contorno da Geodésia (PVCG):

$$\Delta V = -4\pi G\rho, \quad (5)$$

$$\Delta T = 0. \quad (6)$$

A determinação do campo de gravidade externo à superfície física da terra com dados de observação terrestres contribui para o PVCG. O PVCG é definido de forma geral como a determinação de uma função harmônica no exterior da superfície de contorno  $S$ , a partir de funcionais do geopotencial, como anomalias da gravidade e distúrbio da gravidade, o que resulta na integral (7) (HEISKANEN; MORITZ, 1967):

$$-2\pi T + \iint_S \left[ T \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{l} - \frac{1}{l} \frac{\partial T}{\partial n} \right] dS = 0, \quad (7)$$

onde  $l$  é a distância entre o elemento que produz um campo gravitacional e o ponto onde se está realizando o cálculo.

Referente às funcionais do geopotencial, conceitua-se como anomalia da gravidade a diferença entre o vetor gravidade em um ponto  $P$  no geoide e o vetor gravidade normal em um ponto  $Q$  no elipsoide de referência (EQUAÇÃO 8). Já o distúrbio da gravidade conceitua-se como a diferença entre o vetor gravidade e o vetor gravidade normal em um mesmo ponto  $P$  (EQUAÇÃO 9) (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006), onde  $\Delta\vec{g}$  é a anomalia da gravidade,  $\delta\vec{g}$  é o distúrbio da gravidade e  $\vec{\gamma}_P$  é o vetor gravidade normal em  $P$ :

$$\Delta\vec{g} = \vec{g}_P - \vec{\gamma}_Q, \quad (8)$$

$$\delta\vec{g} = \vec{g}_P - \vec{\gamma}_P. \quad (9)$$

Antes de abordar diretamente o PVCG, é necessário conceituar o Problema do Valor de Contorno (PVC), onde, o mesmo se divide em três problemas que são abordados mais detalhadamente em Gemael (1999).

O primeiro problema, conhecido como problema de Dirichlet, busca determinar uma função harmônica, dentro ou fora de uma determinada superfície de contorno  $S$  quando são conhecidos os valores que a função assume sobre esta superfície.

O segundo problema (problema de Neumann), consiste em determinar a função harmônica com conhecimento da derivada normal dos valores conhecidos sobre a superfície. E, por fim, o terceiro problema, chamado de problema de Hilbert, tem como objetivo determinar a função harmônica a partir da combinação linear entre os valores assumidos sobre a superfície e a derivada normal destes.

Segundo Delgado (2021), os PVC's abordados são de grande importância para a Geodésia na busca de uma função que determine o potencial gravitacional no exterior da superfície  $S$ . Assim como os três problemas do PVC abordados anteriormente, para o PVCG, estes mesmos problemas são aplicados, porém, desta vez, utilizando o potencial gravitacional como valor assumido sobre a superfície, e a própria superfície de contorno  $S$ , como sendo a superfície física da Terra.

O Problema do Valor de Contorno da Geodésia (PVCG) consiste em determinar o campo da gravidade externo às massas da superfície física da Terra (FERREIRA, 2011). Segundo Gemael (1999), o PVCG pode ser abordado em duas etapas, onde, conhecendo os valores do geopotencial e sua derivada normal sobre a superfície física, pode-se determinar a superfície de referência e o campo gravítico externo. Devido ao fato de que os PVC's já citados pressupõem que a superfície seja conhecida e a função harmônica, a primeira etapa não pode ser comparada a nenhum destes, enquanto a segunda etapa se enquadra tanto no problema de Dirichlet, quanto nos problemas de Neumann ou Hilbert.

A caracterização do PVCG pode ser dada de forma livre ou fixada. Na forma livre, a superfície de contorno  $S$  não é conhecida, enquanto na forma fixada, têm-se este conhecimento a priori (HOFMANN-WELLENHOF; MORITZ, 2006). O primeiro PVCG, análogo ao problema de Dirichlet, busca determinar a função do potencial gravitacional  $V$  harmônica tanto no interior quanto no exterior da superfície  $S$ , assumindo os valores da função estabelecida nesta superfície. No caso de a superfície  $S$  ser uma esfera, o problema pode ser resolvido em termos de harmônicos esféricos. Esta solução caracteriza a teoria de Molodensky e pode ser encontrada detalhadamente em Moreira (2015) e em Hofmann-Wellenhof e Moritz (2006).

No segundo PVCG, é utilizada a derivada normal  $\frac{\partial V}{\partial n}$ , ao invés da própria função de  $V$ , onde a direção da derivada se dá para o exterior da superfície  $S$ , onde  $V$  é harmônico. O problema de Neumann pode ser contextualizado por três métodos, o primeiro, método fixado geral, onde a geometria da superfície é considerada conhecida (coordenadas geodésicas  $\phi, \lambda, h$ ) e tem-se como incógnita o geopotencial  $W$ .

No método fixado linearizado, onde a superfície de contorno é a superfície física da Terra, conhece-se as coordenadas geodésicas e a gravidade  $g$  e tem como incógnita

o geopotencial  $W$ . E, por fim, o fixado simples, onde adota-se como superfície de contorno, uma superfície esférica e são conhecidas as coordenadas geodésicas, o valor da gravidade e a incógnita também é o geopotencial  $W$  (MOREIRA, 2015).

No problema de Hilbert análogo ao PVCG (terceiro PVCG), é realizada uma combinação linear da função  $V$  com sua derivada normal sobre a superfície  $S$ , determinando esta função de modo que a mesma seja harmônica tanto no interior quanto no exterior de  $S$  (DELGADO, 2021). No presente trabalho, não haverá preocupação quanto a resolução do PVCG na prática, tendo em vista que o mesmo encontra-se solucionado por meio dos modelos globais de geopotencial, que serão abordados nos tópicos a seguir, ou a partir de soluções regionais do campo da gravidade (SÁNCHEZ et al., 2021).

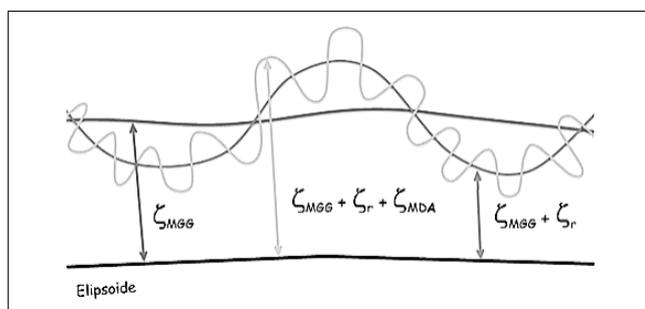
### 2.3 TÉCNICA DE DECOMPOSIÇÃO ESPECTRAL

A recuperação do campo da gravidade, ou de alguma grandeza associada ao mesmo, pode ser dividida no domínio das frequências (componentes espectrais), como baixa, média, alta e altíssima, ou, em relação aos comprimentos de onda como longos, médios, curtos e curtíssimos (SCHWARZ, 1984). Assim, diferentes grandezas podem ser obtidas através da decomposição e soma destas componentes espectrais (10):

$$f = f_l + f_m + f_h + f_v, \quad (10)$$

onde  $f$  é a grandeza que se deseja encontrar e  $l, m, h, v$  são as baixas, médias, altas e altíssimas frequências respectivamente. A figura 1 feita por Jamur (2012) ilustra muito bem o comportamento e a contribuição dos diferentes comprimentos de onda para a modelagem de determinada grandeza do campo gravitacional.

Figura 1 – Contribuição de diferentes comprimentos de onda na anomalia de altitude.



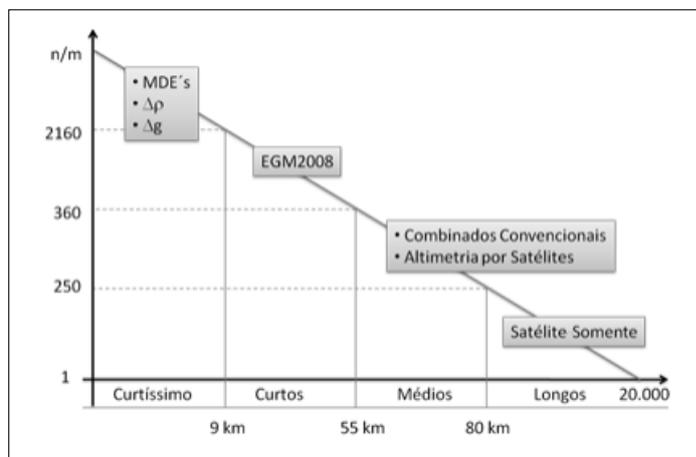
Fonte: Jamur (2012).

Sansò (1995) aborda a divisão do espectro do campo da gravidade em três mo-

delagens, sendo estas, a modelagem global, local e topográfica, sendo esta separação, de grande importância para a solução numérica do PVCG.

Atualmente, há diversas técnicas e métodos de aquisição de informações, como missões de gravimetria por satélite ou a técnica RTM, que permitem a solução destas componentes com um erro de omissão cada vez menor ao longo dos anos, permitindo um desenvolvimento do cálculo dos harmônicos esféricos em graus cada vez maiores (JAMUR, 2012). A figura 2 mostra como estas técnicas tem colaborado para a modelagem do campo gravitacional.

Figura 2 – Espectro da gravidade e sua fonte de dados.



Fonte: Jamur (2012).

A técnica de decomposição espectral consiste inicialmente no uso de componentes de ordem baixa da modelagem do campo da gravidade em harmônicos esféricos, para remover a tendência global deste campo, como anomalias da gravidade (longos comprimentos de onda ou baixa frequência), resultando em uma componente residual menor e mais irregular (11):

$$Q_r = Q - Q_{MGG}, \quad (11)$$

onde  $Q$  é a grandeza observada,  $Q_{MGG}$  é a informação vinda dos satélites (Longos comprimentos de onda) e  $Q_r$  é o resíduo da grandeza  $Q$ . Em  $Q_r$  existem informações associadas aos curtos comprimentos de onda (altas frequências) que estão associados à topografia do terreno, assim, na prática, pode-se utilizar um Modelo Digital do Terreno (MDT) ou um Modelo Digital de Superfície (MDS) para obter estas informações, sendo removido da grandeza  $Q$ . Assim, a quantidade  $Q_r$  fica mais suavizada e proporciona

melhoras na solução do PVCG, como maior acurácia nas interpolações e a minimização de erros de aproximação esférica:

$$Q_r = Q - Q_{MGG} - Q_{MDT}. \quad (12)$$

Para obter as informações associadas aos curtos comprimentos de onda, a técnica RTM (*Residual Terrain Model*) está entre as mais adequadas. Em relação a modelagem do campo gravitacional, a partir da decomposição espectral, a técnica RR (remover-restaurar) é de grande importância e possui diversas referências abordando sobre suas vantagens. Ambas as técnicas são abordadas nos próximos tópicos deste trabalho.

### 2.3.1 TÉCNICA RR (REMOVER - RESTAURAR)

A partir de toda a conceituação da técnica de decomposição espectral, chega-se em uma aplicação prática chamada técnica remover-restaurar. Esta técnica consiste em extrair de uma determinada grandeza do campo gravitacional, informações referentes aos longos e curtos comprimentos de onda, com base em MGG's e MDT's abordados no subitem anterior, ocasionando em um resíduo (EQUAÇÃO 12).

Ao abordar esta grandeza como sendo a anomalia da gravidade  $\Delta g$ , e a anomalia da gravidade está relacionada com a altitude geoidal  $N$ , a componente residual  $N_r$  pode ser calculada a partir da fórmula de Stokes pelas anomalias da gravidade residuais  $\Delta g_r$ . Assim, com a componente residual bem definida,  $N$  pode ser calculado restaurando as componentes residuais que foram subtraídas na etapa de remoção (SÁNCHEZ, 2017). A etapa de restauração pode ser visualizada na Equação (13). Vale ressaltar que este mesmo princípio pode também ser utilizado para o cálculo da anomalia de altura:

$$N = N_r + N_{MGG} + N_{MDT}. \quad (13)$$

Barthelmes (2009) aborda que a técnica remover-restaurar possui apenas 2 requisitos, sendo estes:

- as grandezas removidas devem ser harmônicas, pré-computáveis e obedecer ao princípio de que, o que foi removido na primeira etapa, deve ser restaurado ao final;
- duas ou mais grandezas auxiliares podem ser usadas simultaneamente;

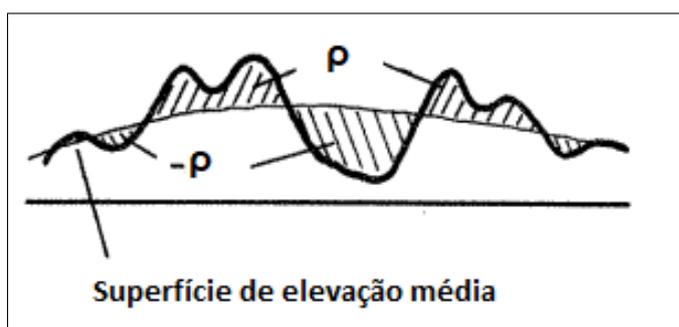
Por fim, [Castro \(2011\)](#) resume a técnica Remover-Restaurar como sendo a remoção da topografia e o sinal da gravidade de baixo grau antes do cálculo do residual desta grandeza, restaurando estes efeitos posteriormente através da integral de Stokes.

### 2.3.2 MODELAGEM DA TOPOGRAFIA RESIDUAL (RTM)

De acordo com [Sánchez et al. \(2021\)](#), para a determinação e avaliação da precisão das coordenadas do IHRF, existem três recursos principais, dentre eles, Modelos Globais de Geopotencial de alta resolução, Modelos Regionais do Campo da Gravidade e sistemas de altitudes físicas existentes. Nos dois primeiros casos, afim de reduzir os erros de omissão ou propor um aumento ou extensão espectral nas soluções dos modelos globais e regionais citados, uma modelagem em pequena escala do campo da gravidade com a técnica RTM pode ser utilizada, obtendo os efeitos dos curtos comprimentos de onda do campo gravitacional ([FORSBERG, 1984](#)).

Segundo [Yang \(2020\)](#), a técnica RTM fornece as quantidades relacionadas aos curtos comprimentos de onda das funcionais do campo gravitacional, a partir de uma superfície de elevação de referência, podendo ser um MDT ou MDS, juntamente com a remoção ou preenchimento das massas sobre esta superfície. Esta técnica é muito utilizada para contribuir com os dados de altas frequências para realização da técnica *Remove-Restore*, onde, através da superfície de referência, as massas topográficas acima da superfície são removidas e abaixo são preenchidas ([FORSBERG, 1984](#)).

Figura 3 – Técnica RTM ilustrada.

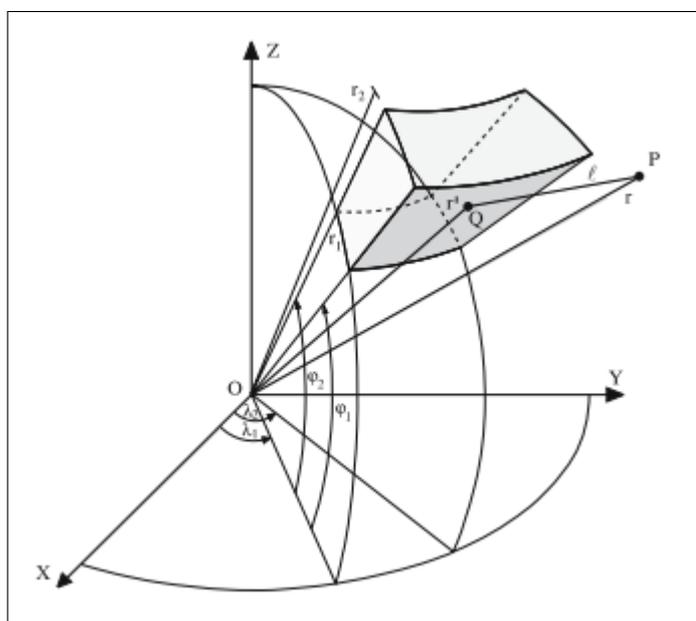


Fonte: Adaptado de [Forsberg \(1984\)](#).

Para a realização destes preenchimentos e remoções, existem diversos métodos que permitem o cálculo da influência do potencial gravitacional da terra sobre um determinado ponto na superfície. Com isto, a superfície de estudo é dividida em relação às linhas geográficas ou em uma grade regular, podendo ser referente a uma grade de pixels de um MDT ou MDS e de um modelo global de densidades, sendo as alturas topográficas já obtidas pelo MDT.

Segundo Heck e Seitz (2007), os corpos delimitados pelas altitudes elipsoidais e por uma grade de linhas geográficas são denominados tesseroides (figura 4), e os mesmos podem ser substituídos por outros corpos como prismas, poliedros ou por ponto-massa. A utilização de cada um destes corpos para a utilização da técnica RTM define a abordagem que será empregada para sua realização. O artigo publicado por Heck e Seitz (2007), faz a comparação entre a abordagem dos prismas, tesseroides e por ponto massa. No presente trabalho, além da comparação utilizando estas três abordagens, também será utilizada a abordagem dos poliedros.

Figura 4 – Geometria do tesseróide.



Fonte: Heck e Seitz (2007).

As quatro abordagens têm como princípio avaliar a integral de Newton, dentro do contexto do domínio espacial, permitindo calcular o potencial gravitacional que cada um dos corpos dentro da área de integração exerce sobre um determinado ponto de computação. No caso das abordagens de Tesseroides e Ponto-Massa, não se tem solução analítica. Neste caso, as séries de Taylor podem ser utilizadas, como proposto por Heck e Seitz (2007). No caso das abordagens de poliedro e prismas, ambas possuem soluções analíticas, como visto em Tsoulis (2012) e Nagy, Papp e Benedek (2000).

Vale ressaltar que a forma da integral de Newton varia de acordo com a geometria do corpo utilizado para o cálculo. Na abordagem dos tesseroides, onde sua geometria já foi apresentada na figura 4, seu corpo é delimitado por duas superfícies esféricas com altitudes elipsoidais constantes  $h_1$  e  $h_2$ , dois planos meridianos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  e

dois cones circulares coaxiais  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . Usando as séries de Taylor utilizando seu ponto no centro geométrico do tesseróide  $(r_o, \phi_o, \lambda_o)$ , negligenciando termos de ordem quatro e superiores em  $\Delta_r$ ,  $\Delta_\varphi$  e  $\Delta_\lambda$ , e levando em consideração a elipticidade da Terra, o potencial gravitacional de um tesseróide é expresso pela equação [14](#), proposta por [Heck e Seitz \(2007\)](#):

$$V_{RTM_i}(r, \lambda, \varphi) = G\rho\Delta\lambda\Delta\varphi\Delta r \left[ K_{000} + \frac{1}{24}(K_{002}\Delta\lambda^2 + K_{020}\Delta\varphi^2 + K_{200}\Delta r^2) + O(\Delta^4) \right], \quad (14)$$

onde:

$$\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1, \quad (15)$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1, \quad (16)$$

$$\Delta r = r_2 - r_1 = (N_2 + h_2) - (N_1 + h_1), \quad (17)$$

$$\lambda_o = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}, \varphi_o = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, r_o = \frac{r_1 + r_2}{2}. \quad (18)$$

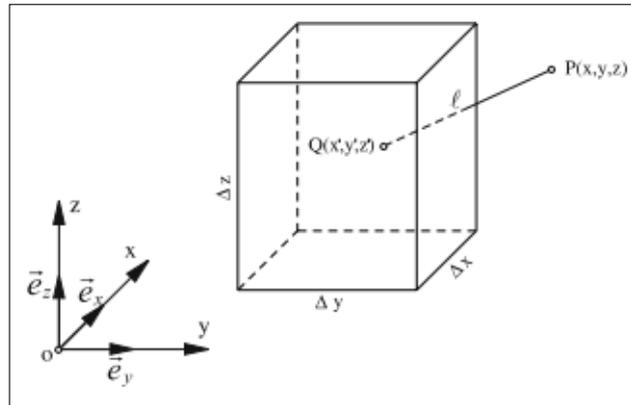
No caso dos prismas ([FIGURA 5](#)) com latitudes geodésicas ( $\varphi$ ), longitudes ( $\lambda$ ), densidades ( $\rho$ ) e dimensões ( $\Delta X$ ,  $\Delta Y$ ,  $\Delta Z$ ), com seus eixos de coordenadas paralelos aos limites dos prismas, a integral de Newton é dada através da equação [19](#), proposta por [Nagy, Papp e Benedek \(2000\)](#):

$$\begin{aligned} V_{RTM_i} = & G\rho(\lambda, \varphi) \left[ (x_p - x)(y_p - y) \ln(z_p - z + l) + (y_p - y)(z_p - z) \ln(x_p - x + l) \right. \\ & + (x_p - x)(z_p - z) \ln(y_p - y + l) - \frac{(x_p - x)^2}{2} \arctan \frac{(y_p - y)(z_p - z)}{(x_p - x)l} \\ & \left. - \frac{(y_p - y)^2}{2} \arctan \frac{(x_p - x)(z_p - z)}{(y_p - y)l} - \frac{(z_p - z)^2}{2} \arctan \frac{(x_p - x)(y_p - y)}{(H_p - z)l} \right]_{x_1_i}^{x_2_i} \Big|_{y_1_i}^{y_2_i} \Big|_{z_1_i}^{z_2_i}, \quad (19) \end{aligned}$$

onde:

$$l = \sqrt{(x_p - x)^2 + (y_p - y)^2 + (z_p - z)^2}. \quad (20)$$

Figura 5 – Geometria do prisma.



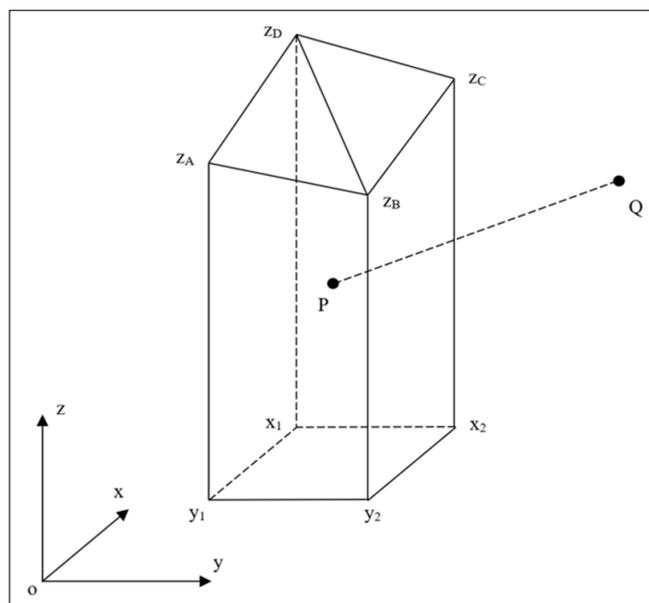
Fonte: Heck e Seitz (2007).

Para o cálculo do potencial gravitacional na abordagem do ponto-massa, a ideia é concentrar a massa total do tesseróide em  $P_0$ , assim, somente o termo de grau-zero das expansões de Taylor são considerados, resultando na equação 21 (HECK; SEITZ, 2007):

$$V_{RTM}(r, \lambda, \varphi) = G\rho\Delta\lambda\Delta\varphi\Delta r [K_{000} + O(\Delta^2)]. \quad (21)$$

Para a abordagem do poliedro, sua figura geométrica, diferente dos prismas e tesseróides, não é plana em seu topo, buscando descrever melhor a topografia do terreno, o poliedro possui em seu topo desníveis entre os vértices (FIGURA 6).

Figura 6 – Geometria do poliedro.



Fonte: Yang (2020).

Para esta abordagem, foi utilizada a solução da integral de Newton proposta por Tsoulis (2012). Para isso um código Fortran (polyhedron.f) escrito por este autor foi acessado pelo ambiente Matlab para utilização desta abordagem.

A técnica RTM, através de conceitos computacionais, se resume em preencher e remover regiões acima ou abaixo da superfície de referência com o corpo escolhido (tesseroide, prisma, poliedro ou ponto-massa), e calcular o potencial gravitacional que cada um destes corpos utilizados no preenchimento exerce sobre determinado ponto na superfície física da Terra. Assim, a somatória de todos os potenciais encontrados para cada corpo representa o potencial gravitacional que a região estudada exerce sobre o ponto. Esta técnica permite a modelagem do campo gravitacional associado à topografia do terreno, equivalente aos curtos comprimentos de onda.

## 2.4 MODELOS GLOBAIS DO GEOPOTENCIAL (MGG)

Com a evolução das técnicas geodésicas e da tecnologia computacional foi possível a solução de problemas clássicos da Geodésia, principalmente com o surgimento da tecnologia e métodos oriundos dos satélites como o sistema GNSS. Isto proporcionou a elaboração de modelos globais do campo da gravidade, que permitem a determinação das altitudes geoidais com uma maior acurácia, onde, a evolução destes modelos permitiu o desenvolvimento dos MGG's (Modelos Globais do Geopotencial) (DELGADO, 2021).

Segundo Junior (2017), os MGG's são constituídos por um conjunto de parâmetros terrestres e coeficientes do potencial anômalo através de harmônicos esféricos, determinado através de técnicas terrestres e espaciais. Estes modelos permitem a representação do potencial gravitacional em todo o planeta, podendo-se derivar valores da gravidade e suas funcionais. Basicamente um MGG é constituído por:

- Conjunto de valores numéricos para certos parâmetros;
- Estatísticas dos erros associados (matriz variância-covariância);
- Coleção de expressões matemáticas;

O MGG pode ser expresso através de harmônicos esféricos até um determinado grau  $n$  e ordem  $m$  que pode ser descrito como o menor comprimento de onda ( $\lambda$ ) solucionável na superfície da terra e a resolução deste comprimento de onda é dada através da Equação (22). Em muitos casos, considera-se a metade do comprimento de onda para esta resolução (SEEBER, 2003):

$$\lambda = \frac{360^\circ}{n}. \quad (22)$$

Adaptando a Equação (22) para se ter uma resolução métrica do modelo global do geopotencial, chega-se na equação (23), onde o valor de 20000km refere-se à semicircunferência terrestre:

$$Res = \frac{20000km}{n}. \quad (23)$$

De acordo com Barthelmes (2014), os MGG's podem ser divididos em Modelos Globais do Geopotencial apenas com dados de satélites (MGGS's), Modelos Globais do Geopotencial combinados (MGGC's), que possuem outras fontes de dados para compor o mesmo, e Modelos Globais do Geopotencial Adaptados (MGGAs's), a partir da combinação de modelos ou melhorias de um modelo pela introdução de novas observações em determinada região.

O ICGEM (*International Centre for Global Earth Models*) é o serviço que tem como objetivo realizar a padronização dos MGG's e sua disponibilização, sendo coordenado pela IGFS (*International Gravity Field Service*), subordinada a IAG (*International Association of Geodesy*). Um exemplo de um MGG é o EGM2008 que possui seu grau e ordem até 2159 com coeficientes adicionais até 2190, o que corresponde a uma resolução de 9 km (EQUAÇÃO 23).

Como foi abordado no tópico da técnica de decomposição espectral, o MGG tem como utilidade contribuir para a solução dos longos e médios comprimentos de onda do campo gravitacional. Tendo em vista que o objetivo desta pesquisa é analisar a influência das massas topográficas nas estações IHRF do Brasil, apenas os curtos comprimentos de onda serão abordados na metodologia, não sendo necessário a utilização de um MGG para este trabalho.

## 2.5 ALTITUDES

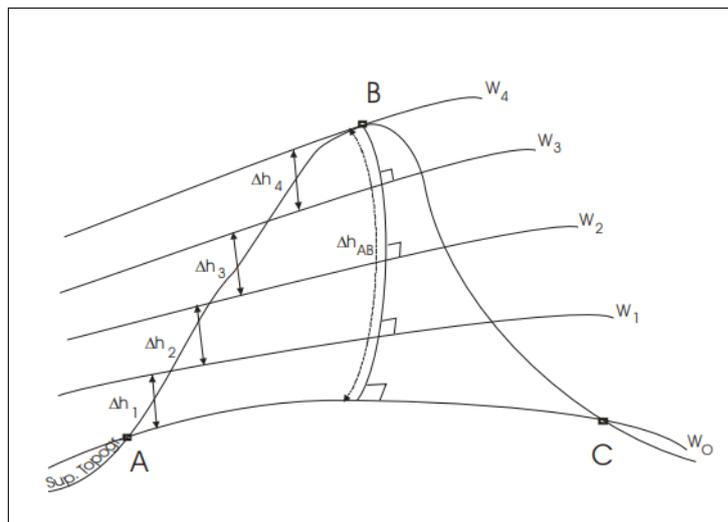
A altitude de um ponto pode ser obtida através de métodos como nivelamento geométrico, nivelamento trigonométrico, posicionamento GNSS, etc. Para determinar a altitude de um ponto é necessário definir a superfície de referência e a linha ao longo da qual a altitude será considerada. As características da superfície e desta linha caracterizam os diferentes tipos de altitudes existentes (SÁNCHEZ, 2017).

Atualmente com o GNSS, a altitude de um ponto é obtida utilizando como superfície de referência o elipsoide de revolução, medida ao longo da normal à superfície do elipsoide. A distância entre determinado ponto e o elipsoide de referência ao longo desta linha é conhecida como altitude elipsoidal ( $h_p$ ). No entanto, a utilização deste tipo de altitude com significado puramente geométrico acaba acarretando em diversos erros em aplicações de agrimensura e engenharia, nas quais haja dependência de

correlação com o desnível gravimétrico, como projetos de condutos livres, vias e linhas de transmissão. Por conta disso, é necessário realizar a vinculação desta altitude com alguma componente física, sendo esta, a força da gravidade (JUNIOR, 2017).

Para isto, adotou-se como superfície de referência o geóide, definido, de forma clássica, por operações maregráficas que determinaram esta superfície como sendo o nível médio dos mares (NMM). Ainda segundo Junior (2017), nivelamentos geométricos e trigonométricos ainda continuam acarretando em erros para a determinação geodésica da altitude de um ponto. Este erro ocorre devido ao fato de que a distribuição heterogênea das massas no interior do planeta faz com que as superfícies equipotenciais não sejam paralelas, fazendo com que desníveis entre os mesmos pontos, medidos por caminhos diferentes, obtenham resultados divergentes (figura 7).

Figura 7 – Não paralelismo das superfícies equipotenciais.



Fonte: Blitzkow, Campos e Freitas (2004).

Blitzkow, Campos e Freitas (2004) abordam que para resolver este problema é necessário a utilização do número geopotencial do ponto associado ao nivelamento. O número geopotencial  $C_p$  é definido como sendo a diferença entre a superfície equipotencial de referência  $W_o$  e o geopotencial de um determinado ponto  $W_p$  (EQUAÇÃO 24):

$$C_p = W_o - W_p. \quad (24)$$

Assim, a utilização do número geopotencial caracteriza uma medida natural de altitude que independe do caminho percorrido, sendo, atualmente, preceito básico para a definição do IHRs. A partir deste número geopotencial, pode-se determinar coordenadas verticais e adotar diferentes hipóteses e valores para definições de

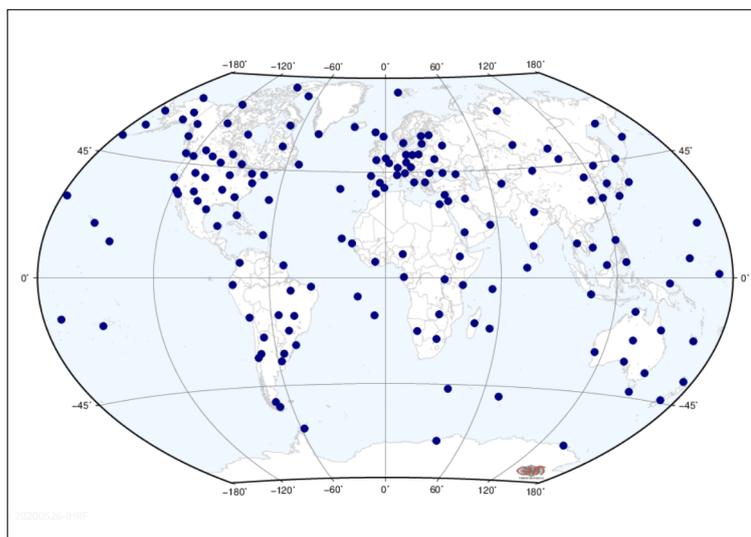
unidades métricas, já que o mesmo por si só não possui dimensão de comprimento. Estas diferentes hipóteses e valores, definem diferentes tipos de altitudes físicas, como a altitude dinâmica, altitude ortométrica e altitude normal (JUNIOR, 2017).

Uma conceituação mais detalhada sobre as diferentes altitudes com características físicas associadas pode ser vista em Castro (2011).

## 2.6 IHRS E IHRF

A IAG (2015) define o IHRS (*International Height Reference System*) como sendo um sistema de altitudes globais unificado que tem sua origem em uma superfície equipotencial  $W_0$ , e a coordenada vertical de cada ponto na superfície terrestre é definida a partir desta superfície equipotencial. Em julho de 2015, a IAG publicou a resolução para definição do IHRS. A realização do IHRS é chamada de IHRF (*International Height Reference Frame*) que é a materialização mediante um conjunto de estações distribuídas pelo mundo (FIGURA 8) com os números geopotenciais e valores de altitudes referentes ao IHRS.

Figura 8 – Estações IHRF no mundo.



Fonte: Sánchez et al. (2021).

Até a data do presente trabalho, não existem estações do IHRF implementadas e operando pelo mundo, isto se dá pelo fato da dificuldade em satisfazer os requisitos dados pelo GGOS (*Global Geodetic Observing System*) para a implementação do IHRF. Entre estes requisitos, se encontram a definição de uma rede de referência com uma ordem de acurácia maior que a magnitude dos efeitos que serão observados (precisão milimétrica), consistência e homogeneidade das estações ao redor do mundo (mesma

acurácia ao longo do planeta), e uma estabilidade a longo prazo (mesma acurácia ao longo dos anos) (SÁNCHEZ et al., 2015).

Esta dificuldade ocorre pois uma materialização do IHRS seria similar a uma materialização do ITRS (*International Terrestrial Reference System*), sendo uma rede global com coordenadas verticais precisas monitoradas continuamente, apoiada por densificações nacionais e regionais, necessitando de uma integração e transformação entre sistemas de altura existentes (JUNIOR, 2017). Além disto, a necessidade de se obter medições gravimétricas na quantidade recomendada é umas das principais dificuldades para implementação do IHRF.

Segundo a IAG (2015), a definição do IHRS envolve aspectos como, uma superfície de referência equipotencial do campo da gravidade  $W_o$ , necessidade de estar no sistema de maré média com as unidades em metro e segundo (SI), ter suas coordenadas verticais associadas ao número geopotencial e a sua posição precisa estar referenciada ao ITRS. Com isto, a Ihde et al. (2017) definiram as principais convenções para a concretização do IHRF, sendo estas:

- O valor de referência do geopotencial  $W_o$  deve ser documentado em convenções e guias. Na resolução N° 1 da IAG, foi definido  $W_o = 62.636.853,4 \text{ m}^2\text{s}^{-2}$ ;
- O elemento central do IHRF deve ser um MGG (Modelo Global do Geopotencial), pois possibilita o cálculo direto do geopotencial em um ponto ao inserir as coordenadas do ITRF através de harmônicos esféricos;
- A diferença de potencial  $\Delta W_P$  em relação a  $W_o$  deve ser conhecida por meio de uma rede de estações geodésicas de maior precisão;
- A rede de referência deve seguir a mesma hierarquia da rede ITRF, com densificações nacionais e regionais dispostas com marégrafos de referência, principais pontos nodais de redes de nivelamento, pontos limítrofes conectando vizinhanças de datum vertical, estações ITRF e observáveis geodésicas fundamentais;

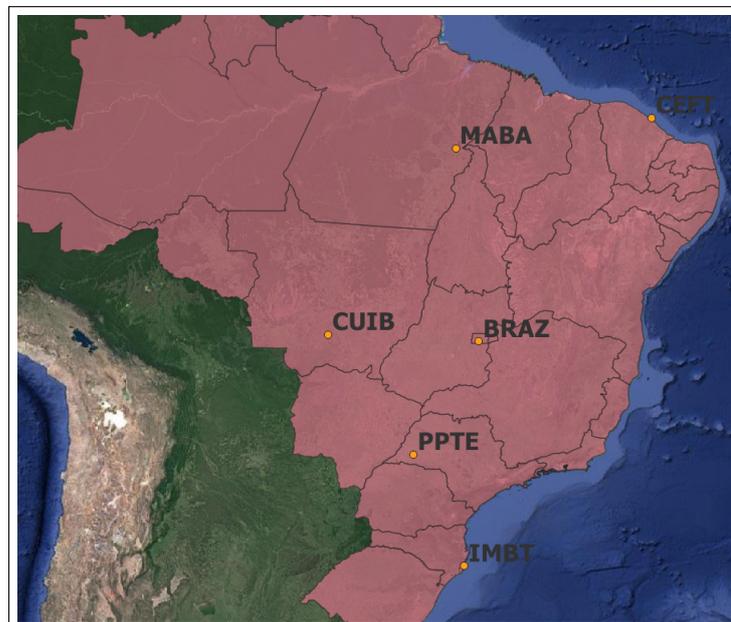
Para o estabelecimento do IHRF, a IAG (2019) define alguns objetivos, como a instalação de estações de referência IHRF a nível nacional, levantamentos gravimétricos para a determinação precisa dos valores potenciais, disponibilização de dados em acesso aberto, contribuição para estratégias de análise para melhorar a estimativa dos dados e a descrição, armazenamento e fornecimento de produtos geodésicos associados ao IHRF.

Com isto, o GGOS coordena grupos de trabalho JWG (*Joint Working Group*) com o foco nesta área de unificação do sistema de altitudes mundial. Dentre estes grupos, existem o "JWG 0.1.1", que teve como objetivo a definição e realização do IHRS, onde já foi mencionado e se encontra em IAG (2015). Com objetivo de estabelecer

o IHRF, criou-se o "JWG 0.1.2", onde foi desenvolvida a resolução No. 3 também já mencionada em IAG (2019). E, por fim, para a implementação do IHRF e que ainda se encontra em desenvolvimento, foi criado o grupo "JWG 0.1.3", onde seus objetivos podem ser vistos mais detalhadamente em Sánchez et al. (2021).

No Brasil, existem 6 estações do ITRF que serão vinculadas ao IHRF, sendo elas, as estações CEFT, MABA, CUIB, IMBT, BRAZ, PPTE (figura 9). Estas estações são as regiões de estudo do presente trabalho. Nos próximos tópicos será abordado todo o procedimento metodológico que foi empregado para realização desta pesquisa.

Figura 9 – Estações IHRF no Brasil.



Fonte: Autor.

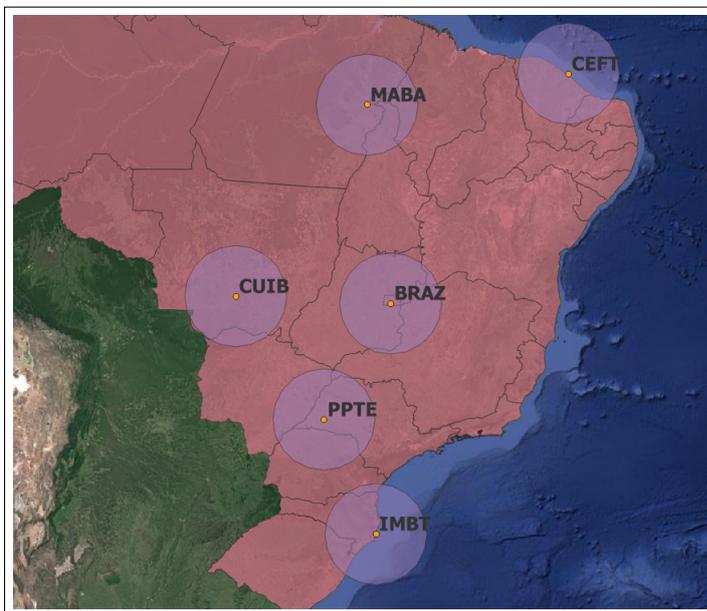
### 3 MATERIAIS E MÉTODOS

A abordagem metodológica deste trabalho será subdividida em 2 etapas principais, sendo estas, coleta de dados e preparativos para aplicação da técnica RTM, e o processamento principal, onde será aplicada esta técnica, gerando gráficos e os resultados finais deste estudo. A figura 14 ilustra toda a etapa metodológica através de um fluxograma.

#### 3.1 COLETA E PREPARO DOS DADOS

Para realização deste trabalho foram necessários dados de um MDS, modelo digital de densidades lateral e batimetria para cada uma das estações que irão compor o IHRF no Brasil. Foram criados arquivos vetoriais contendo a localização de cada uma das 6 estações (FIGURA 9), e, a partir destes pontos, foram gerados buffers com um raio de 300 km em torno de cada estação, para atender com uma margem de erro as regiões de estudo em um raio de 210 km em torno de cada estação IHRF no Brasil (FIGURA 10).

Figura 10 – Buffers delimitando as regiões de estudo.



Fonte: Autor.

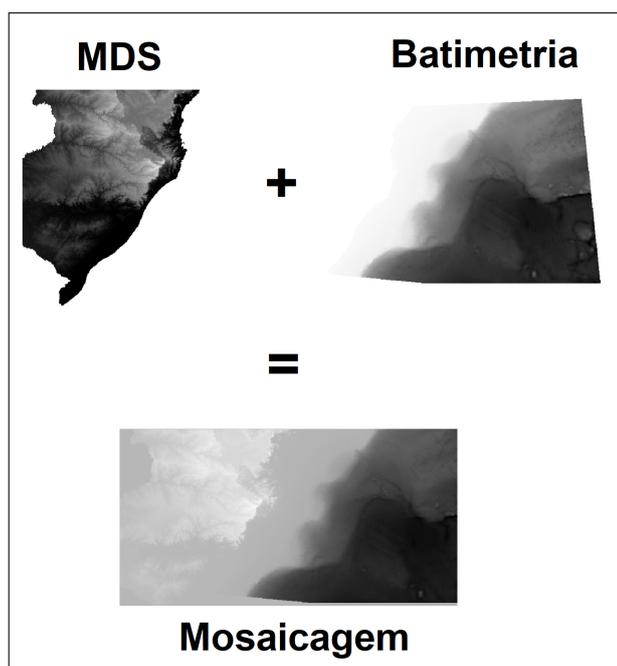
Com a criação dos buffers, adquiriu-se dados de altitudes nas regiões de estudo através do MDS MERIT (*Multi-Error-Removed Improved-Terrain DEM*). Este modelo possui uma resolução de aproximadamente 90 metros e foi desenvolvido com a eliminação de alguns erros principais de MDS's existentes, dentre eles, o mais importante para

elaboração deste estudo, a eliminação da altura de árvores no terreno, permitindo uma melhor análise do terreno da região. Para mais informações sobre este MDS, consultar (YAMAZAKI, 2018).

As estações IMBT e CEFT se situam em regiões costeiras onde há parte da área de estudo no mar da costa brasileira e outra parte em área continental, assim, não há dados do MDS MERIT para se obter as profundidades. Para resolver este problema, foram utilizados dados batimétricos SRTM15+ para a região faltante através do *OpenTopography*. O SRTM15+ é um MDS com a adição de dados de batimetria através de sondagens a bordo de navio e dados de satélite. Este dado possui uma resolução de aproximadamente 500 metros e pode ser estudado mais detalhadamente em (TOZER et al., 2019).

Com os dados batimétricos adquiridos, foi necessário realizar a mosaicagem dos mesmos com o MDS da parte continental da área de estudo das estações IMBT e CEFT (FIGURA 11). Antes do processo de mosaicagem, foi necessário reamostrar o tamanho do pixel de 500 metros dos dados de batimetria para 90 metros, para que se tenha o mesmo tamanho do pixel do MDS MERIT. Este processo foi realizado com a utilização do software "Qgis", pelo método do vizinho mais próximo. Vale ressaltar que este processo não melhora a resolução espacial do dado, apenas realiza a padronização do tamanho do pixel entre as duas imagens que serão mosaicadas.

Figura 11 – Mosaicagem entre MDT MERIT e dados batimétricos SRTM15+ para a estação IMBT.



Fonte: Autor.

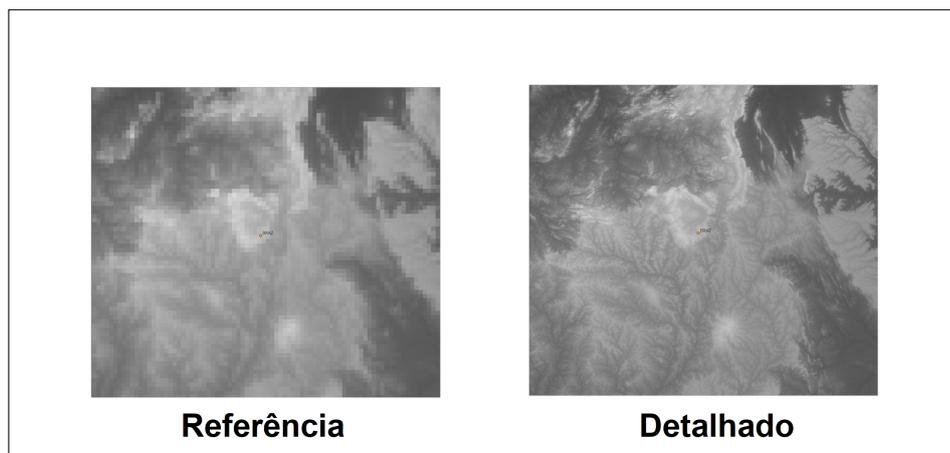
Por fim, o último dado necessário para a realização da técnica RTM são dados da crosta terrestre na área de estudo. A UNB (Universidade de New Brunswick) fornece um modelo global de densidades lateral com uma resolução espacial de aproximadamente 900 metros. Este modelo é denominado "UNB TopodensT". As informações do modelo são fornecidas em formato ". grd", e precisam ser convertidas para o formato ".txt", onde estarão contidas informações de latitude, longitude e de densidade.

Para a aquisição e conversão deste dado para arquivo de texto, utilizou-se o software "GMT", desenvolvido pela própria Universidade de New Brunswick. Novamente no software "Qgis", inseriu-se o arquivo de texto como uma nuvem de pontos onde cada ponto contém um valor de densidade associado, assim, convertendo esta nuvem de pontos para dados matriciais através da ferramenta "rasterização", obteve-se o modelo de densidades em um formato apropriado para os processamentos. Para manter a padronização do tamanho e número de pixels de cada dado, realizou-se o mesmo processo de reamostragem com os dados de densidades, onde, transformou o tamanho do pixel de 900 metros para 90 metros pelo método do vizinho mais próximo.

Para o processamento dos dados, são utilizados 3 tipos de dados principais, sendo estes, o MDS detalhado, o MDS de referência e o modelo de densidades. O MDS detalhado é o próprio MDS MERIT na resolução de 90 metros em que o mesmo já se encontra, não sendo necessário a realização de mais processos sobre este dado. O modelo de densidades, após a reamostragem, foi adequado para os processamentos.

Para a obtenção do MDS de referência, foi realizada a reamostragem do MDS detalhado de 90 metros para 4000 metros (FIGURA 3), degradando a resolução espacial do dado e aumentando o tamanho do pixel. Isso com o objetivo de garantir consistência espectral com o cenário futuro de 4 km em resolução espacial para dados gravimétricos ao redor das estações, conforme recomendado por Sánchez (2019). Posteriormente, houve a reamostragem de 4000 metros para 90 metros novamente, para que se tivesse o mesmo número e tamanho dos pixels entre os dados (FIGURA 12).

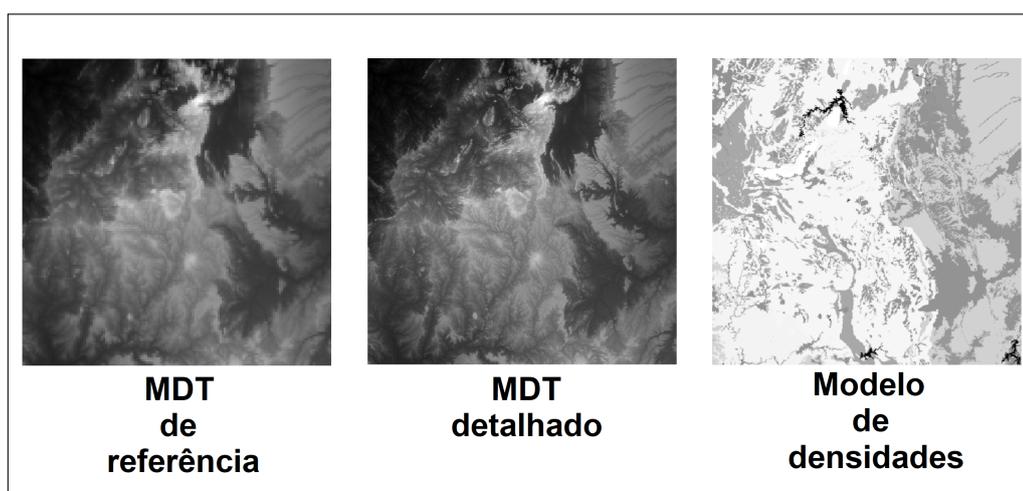
Figura 12 – MDS de referência (4000 metros de resolução) X MDS Detalhado (90 metros de resolução).



Fonte: Autor.

Com os 3 dados adquiridos e reamostrados, para realizar o processamento, foi necessário que os mesmos apresentassem a mesma extensão geográfica, permitindo processamentos pixel-a-pixel posteriormente. Com isso, recortou-se cada dado pela extensão do buffer de 300 km de cada estação IHRF, e referenciou os dados do MDS de referência e do modelo de densidades com a extensão do MDS detalhado, obtendo, assim, 3 dados diferentes com o mesmo número de pixels, situados exatamente na mesma região de estudo (FIGURA 13).

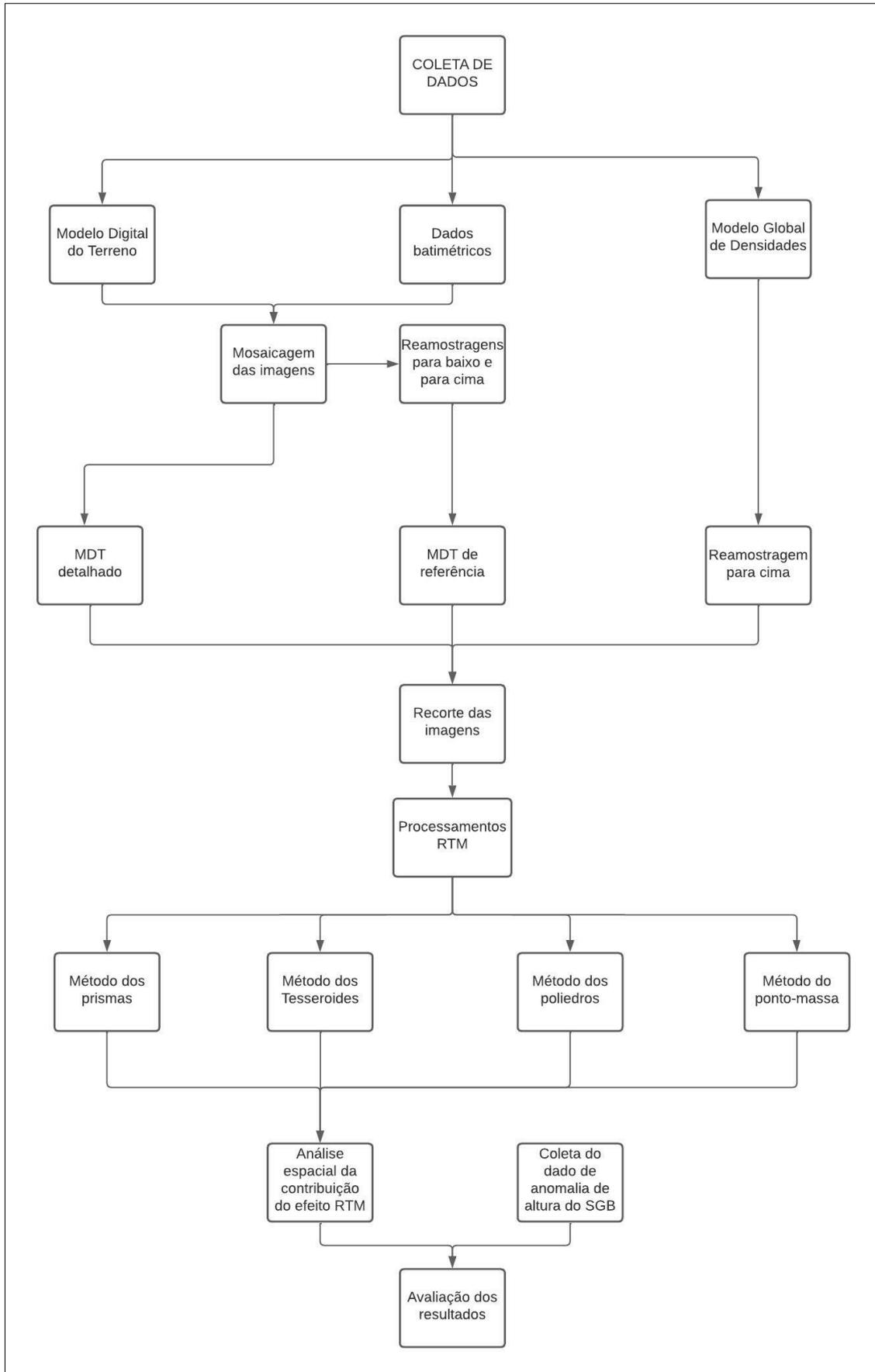
Figura 13 – Dados prontos para uso da técnica RTM.



Fonte: Autor.

Após a finalização destes processos, deu-se prosseguimento para a etapa de processamento que será abordada nos próximos tópicos.

Figura 14 – Fluxograma metodológico.



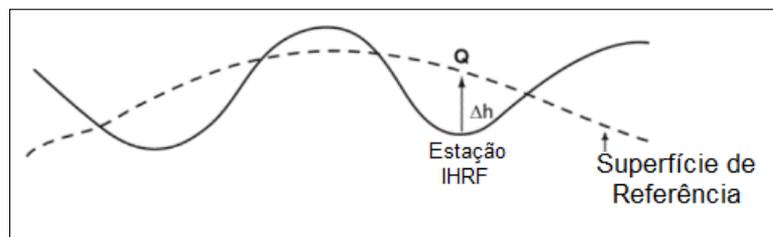
Fonte: Autor.

### 3.2 PROCESSAMENTO DOS DADOS

Com os dados necessários para cada estação de estudo, deu-se prosseguimento para etapa de processamento, aplicando a técnica RTM. Com exceção da abordagem dos poliedros, os processamentos foram feitos através de rotinas em ambiente "MatLab", já validada para a região de Zugspitze na Alemanha com os resultados obtidos por [Hirt, Featherstone e Marti \(2010\)](#), muito semelhantes ao utilizado na rotina do presente trabalho. A abordagem dos poliedros foi feita utilizando um código "Fortran", que foi acessado pelo ambiente Matlab para o processamento.

Dentro do código, além dos cálculos do potencial gravitacional que cada metodologia possui, e que foi abordado no referencial teórico deste estudo, foram realizados alguns processos para uma melhor exatidão dos resultados. O primeiro processo se refere a correção harmônica de pontos que se situam abaixo da superfície de referência, onde não é satisfeita a equação de Laplace (6). Neste caso, foram utilizados os métodos dados por [Omang, Tscherning e Forsberg \(2012\)](#) para a aplicação desta correção harmônica utilizando a equação de Poisson (5), considerando o gradiente horizontal do potencial nulo. Este processo foi realizado somente para os casos em que a estação utilizada se encontrasse abaixo da superfície de referência (FIGURA 15).

Figura 15 – Correção Harmônica.



Fonte: Adaptado de [Omang, Tscherning e Forsberg \(2012\)](#).

Para as estações CEFT e IMBT, que se encontram na costa brasileira, onde grande parte da área de estudo se encontra na região oceânica e o modelo de densidades não possui dados para esta região, foi adotado o método da topografia equivalente de rocha que pode ser visto mais detalhadamente em [Yang et al. \(2018\)](#).

Para o processamento foi necessário inserir no código o modelo de densidades utilizado, o MDS detalhado e o MDS de referência que foram gerados seguindo a metodologia abordada anteriormente. Também foram inseridas as coordenadas geodésicas de latitude e longitude mínima e máxima das imagens que estão sendo utilizadas, por isso a necessidade de todos os dados utilizados estarem com a mesma extensão geográfica. O processamento foi realizado para cada abordagem e estação

de estudo. Com a intenção de realizar uma comparação dos resultados obtidos utilizando diferentes valores de densidades, cada abordagem e cada estação também foram processadas utilizando o valor de densidades constante dado por Harkness como sendo  $2670 \text{ kg/m}^3$ .

Como resultados dos processamentos nas rotinas, obteve-se os valores de anomalias de altura RTM que a topografia residual da região de interesse exerce sobre a estação, e a anomalia de altura acumulada por raios de 1 km a partir da estação, até um total de 210 km. O valor de 210 km se dá em função do raio de integração para a solução do PVCG, definido para as estações IHRF, conforme indicado por [Sánchez \(2019\)](#). Para isso são calculados os potenciais gravitacionais que cada pixel exerce sobre a estação através da integral de Newton abordada anteriormente, e, através da equação de Bruns [\(25\)](#), pode-se transformar os potenciais gravitacionais em anomalias de altura:

$$\zeta_P = \frac{V_P}{\gamma_P}, \quad (25)$$

onde  $\zeta_P$  é a anomalia de altura em P,  $V_P$  é o potencial gravitacional em P,  $\gamma_P$  é a gravidade normal em P no geóide.

Após aplicar o código em cada estação e para cada abordagem, foram gerados gráficos representando a altura RTM em um raio de 210 km de cada estação, sendo esta altura, a diferença da altitude entre o MDS de referência e o MDS detalhado, onde é calculado o efeito RTM. Esta altura está representada nas regiões tracejadas na figura [3](#). Outro gráfico gerado é referente ao modelo de densidades adotado, e como se dá o mapa de densidades no entorno de cada estação.

Em relação aos resultados principais, foram gerados gráficos referentes a anomalia de altura no entorno de cada estação, podendo-se analisar visualmente quanto cada região do entorno contribui gravitacionalmente na estação de estudo e gráficos informando a diferença nos resultados utilizando o modelo de densidades da UNB e a constante de Harkness. Todos estes gráficos serão apresentados no capítulo 4 deste trabalho.

Para a análise da acurácia dos resultados, obteve-se o valor de anomalia de altura do SGB (Sistema Geodésico Brasileiro) como valor de referência. Para obter este valor, as altitudes elipsoidais do SGB no sistema de maré-livre foram transformadas para o sistema maré-média, e subtraiu-se esta altitude elipsoidal de cada estação pela sua altitude normal referenciada ao DVBI (Datum Vertical Brasileiro de Imbituba). Tendo em vista que a altitude normal  $H^N$  é dada pela diferença entre a altitude elipsoidal  $h$  e anomalia de altura  $\zeta$ , pode-se obter o valor de anomalia de altura através da subtração

entre a altitude elipsoidal  $h$  e a altitude normal  $H^N$  (EQUAÇÃO 26):

$$\zeta = h - H^N. \quad (26)$$

Vale ressaltar que a anomalia de altura obtida pelo SGB apresenta todo o espectro do campo gravitacional em seu resultado (longos, médios e curtos comprimentos de onda), enquanto no presente trabalho, obteve-se somente os curtos comprimentos de onda pelo método RTM. Assim, subtraiu-se todo o espectro de anomalia de altura do SGB dos curtos comprimentos de onda da técnica RTM, resultado em uma anomalia de altura residual obtida pela subtração dos curtos comprimentos de onda SGB e os curtos comprimentos de onda RTM, com longos e médios comprimentos de onda do SGB agregados ao resultado (EQUAÇÃO 27):

$$\Delta\zeta = (\zeta_c)_{RTM} - (\zeta_l + \zeta_m + \zeta_c)_{SGB} = (\zeta_c)_{Residual} - (\zeta_l + \zeta_m)_{SGB}, \quad (27)$$

onde  $\zeta_l$ ,  $\zeta_m$ ,  $\zeta_c$  é a anomalia de altura em P dos longos, médios e curtos comprimentos de onda e  $\zeta_{cResidual}$  é subtração do dado de anomalia de altura SGB dos curtos comprimentos de onda pelo obtido na técnica RTM.

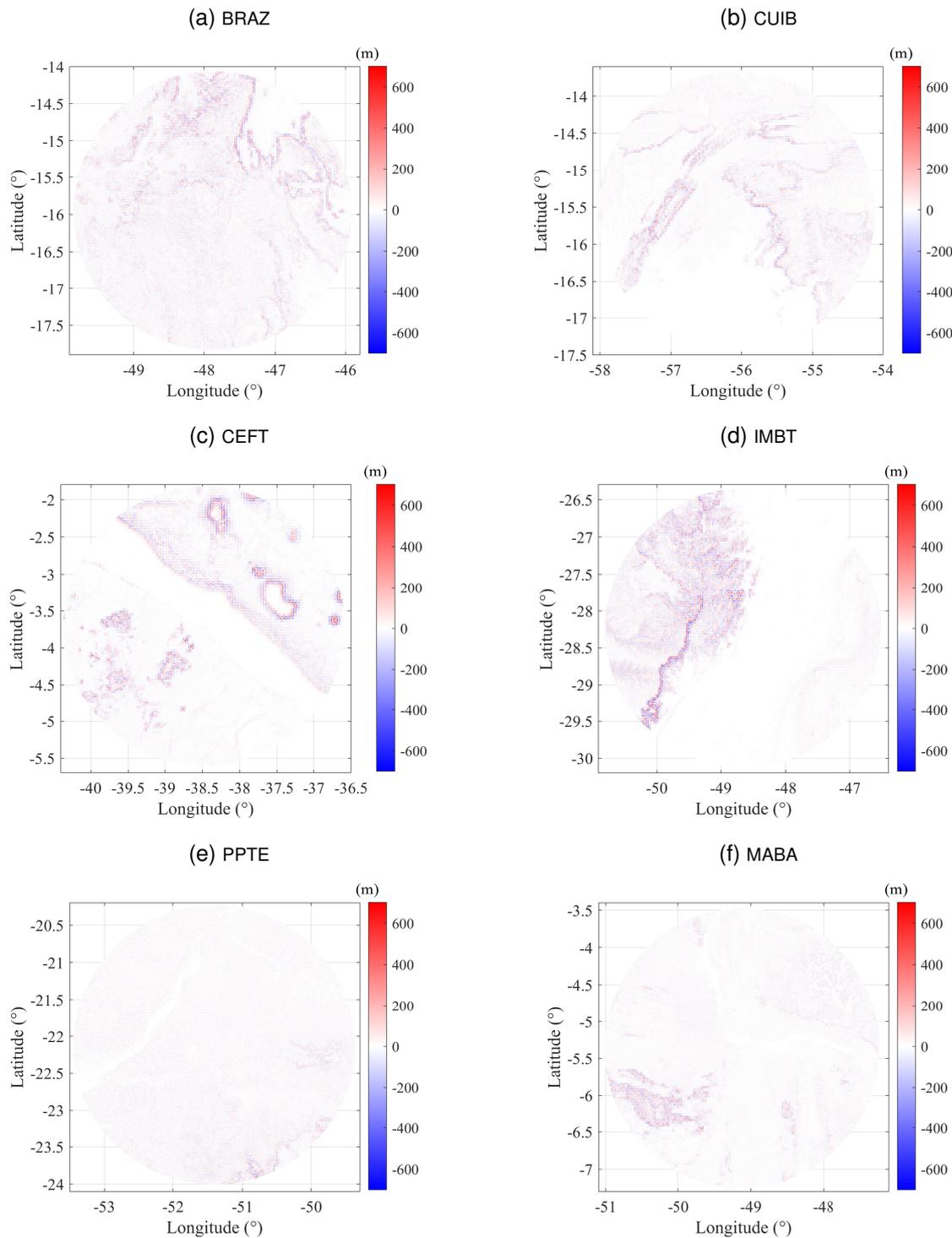
É importante ressaltar que não se utilizou soluções de longos e médios comprimentos de onda de um MGG no trabalho, para que não se tenha uma terceira fonte de dados com seu erro próprio neste estudo e interferir nas análises de qualidade dos resultados das abordagens RTM. Além disso, a partir dos valores obtidos pela Equação (27) é possível fazer a análise de acurácia, onde quanto mais próximo de zero for o resultado da subtração, mais acurado é o valor de anomalia de altura RTM calculado, esta análise de acurácia foi recomendada por [Sánchez et al. \(2021\)](#). Os resultados não irão chegar em valores muito próximos de zero, devido ao fato de ser ter os longos e médios comprimentos de onda agregados ao resultado.

A análise de exatidão para os resultados na estação IMBT não foi possível, uma vez que não se tem valor de altitude normal vinculado ao DVBI na estação, somente a altitude elipsoidal, não sendo possível obter o valor de anomalia de altura do SGB para esta estação. No tópico de resultados e discussão serão analisados estes gráficos e os resultados obtidos, buscando apontar qual abordagem apresentou melhores resultados baseado na precisão obtida e no tempo de processamento, com intuito de concluir qual a mais adequada para uma possível futura utilização para a implementação do IHRF.

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Inicialmente, foi feita uma análise da topografia residual no entorno de cada estação estudada através da diferença do MDS detalhado e o de referência, resultando nas alturas RTM (FIGURA 16).

Figura 16 – Valores de altura RTM em um raio de 210 km em torno cada estação IHRF



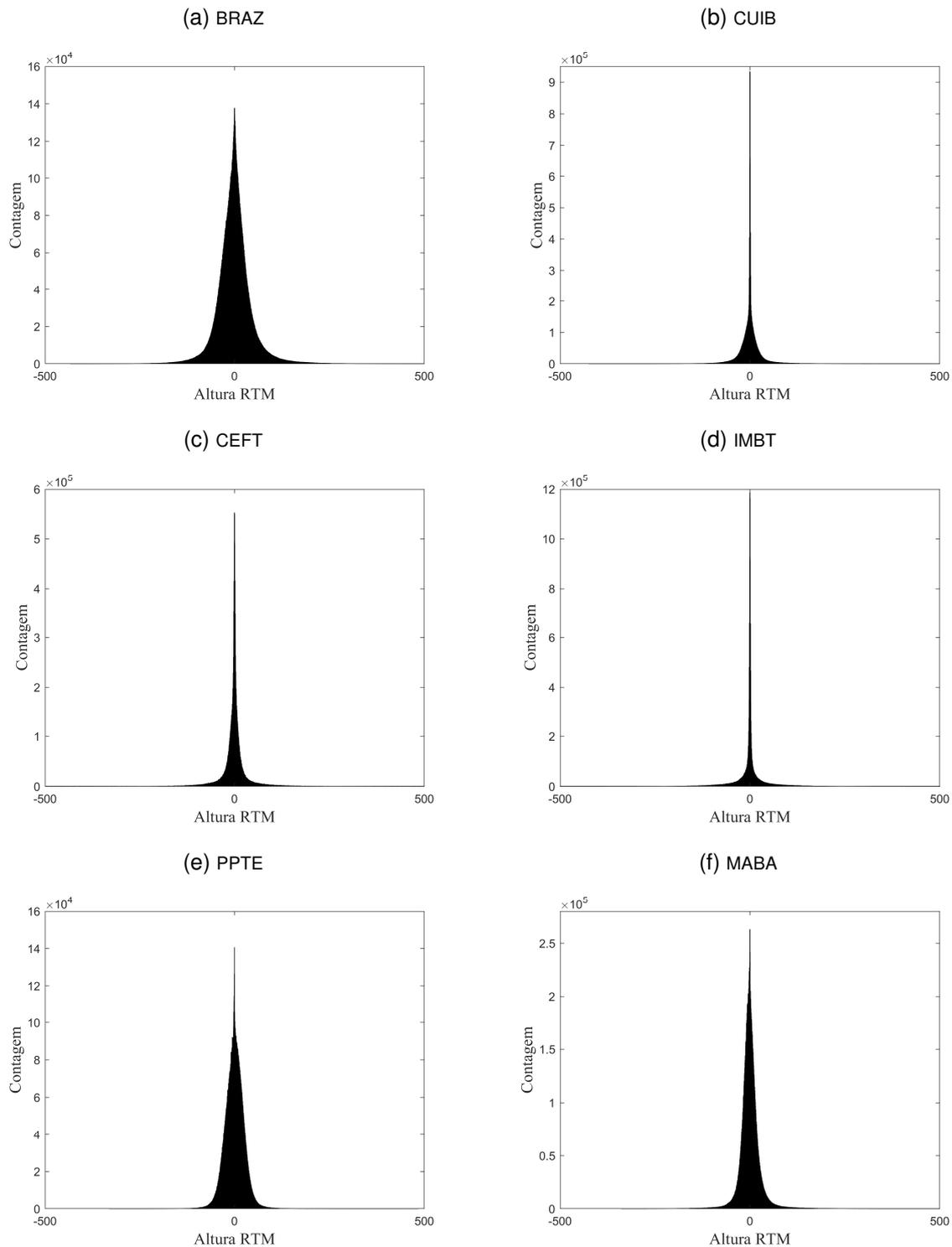
Conforme visto na figura 16, as estações CEFT e IMBT apresentaram sua linha de costa bem delimitada pelo gráficos das alturas RTM, provavelmente devido a degradação da resolução espacial do MDS de referência em comparação com o MDS detalhado, e a mudança de altitude mais brusca que ocorre devido a transição da região continental para a região marítima, também vale ressaltar que a resolução de 500 metros do dado batimétrico possa ter influenciado neste quesito.

Outros corpos hídricos e regiões com maior declividade como rios e vales também ficam bem delimitados através deste tipo de gráfico, podendo ser visto com maior clareza na estação PPTE (FIGURA 16e). Vale lembrar que o MDS MERIT não possui dados de batimetria associados, assim, estas delimitações dos corpos hídricos nas alturas RTM podem ter ocorrido devido à omissão de informação nestas regiões. A estação BRAZ, devido as grandes variações de altitudes pelo contraste entre planaltos e de chapadas, apresentou variações significativas de alturas RTM, que podem ser visualizadas pela rugosidade apresentada em seu gráfico (FIGURA 16a).

Também pode-se observar irregularidades nas regiões à oeste da estação IMBT, onde tem-se uma área de relevo mais acidentado à oeste da Lagoa do Imaruí. Observou-se irregularidades à leste da estação CUIB, onde se situa a Chapada dos Guimarães, e, à nordeste da estação CEFT, na área oceânica, onde se situa o Platô do Ceará e o Guyot Iracema, os quais são bem definidos nos gráficos.

Buscando realizar uma análise quantitativa da distribuição das alturas RTM ao longo das estações, foram gerados histogramas de frequências apontando quais valores de altura RTM mais foram obtidos. Os resultados são apresentados na figura 17.

Figura 17 – Histogramas da altura RTM de cada estação IHRF

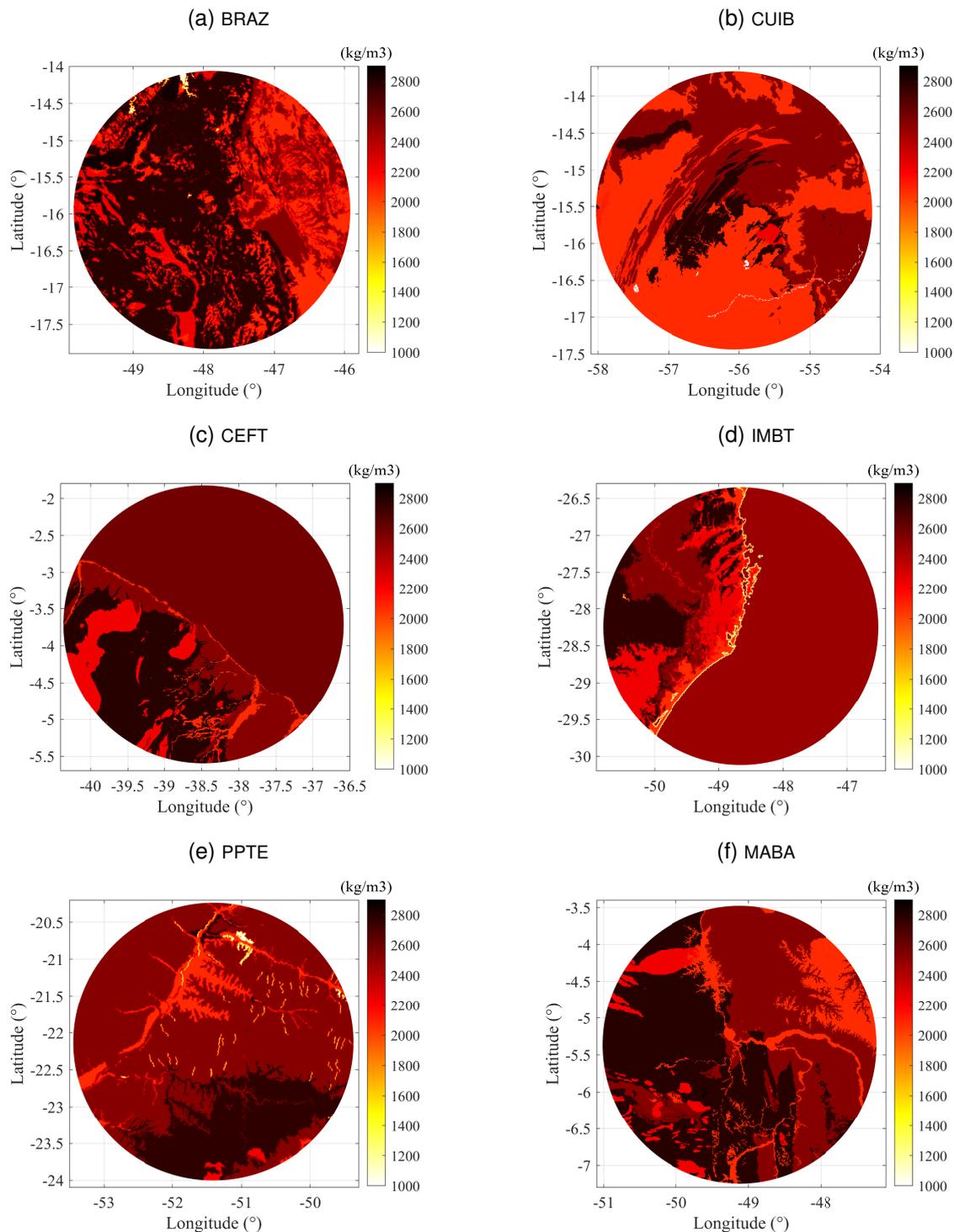


Nos presentes gráficos, ficou ainda mais evidente que a estação BRAZ apresentou irregularidades mais significativas em comparação com as outras estações no seu terreno, com um histograma variando em alturas RTM de aproximadamente -200 metros até aproximadamente 200 metros, diferente das demais estações que variaram entre aproximadamente -150 metros até 150 metros.

Vale ressaltar que as estações IMBT, CEFT e CUIB apresentaram muitos valores de altura RTM zerados, dando indícios de que há pouca variação topográfica nestas regiões. Para as estações IMBT e CEFT isto pode ser explicado pela região litorânea em que estas estações se encontram, nas quais em grande parte tem-se áreas oceânicas com dados batimétricos SRTM15+ com uma resolução espacial de 500 metros, o que propõe menos variações do que nas regiões continentais onde o MDS MERIT possui uma resolução de 90 metros.

Após as análises de alturas RTM nas regiões de estudo, também foram verificadas as distribuições espaciais bidimensionais dos valores de densidades da crosta terrestre, extraídos do modelo UNB TopoDensT, em torno de cada estação (FIGURA 18). Nas regiões oceânicas tem-se valores constantes médios das densidades das regiões continentais, os quais foram utilizados no contexto da abordagem de conteúdo equivalente de rocha.

Figura 18 – Valores de densidades extraídos do modelo UNB TopoDensT em um raio de 210 km em torno de cada estação IHRF



O valor das densidades variou entre aproximadamente 1000 até 2800 kg/m<sup>3</sup> para todas as estações, sendo o valor 1000 kg/m<sup>3</sup> associado para corpos d'água, com exceção dos oceanos que tiveram sua densidade dada pelo método da topografia equivalente de rocha. Também pode ser verificado que há variações maiores que 400 kg/m<sup>3</sup> em relação ao valor constante de 2670 kg/m<sup>3</sup> proposto por Harkness, para

mais ou para menos. Isso em decorrência da presença principalmente de rochas metamórficas, sedimentares e ígneas, ao invés de cristalinas, como pode ser visto em [Medeiros et al. \(2021\)](#).

A região de estudo em torno da estação BRAZ foi a que apresentou maiores variações dos valores de densidade ao longo dos 210 km de raio, dando indícios de uma composição mais heterogênea na crosta terrestre em relação as demais áreas de estudo. Na Tabela [1](#) são apresentados os valores médios de densidade obtidos nas regiões de estudo em torno de cada estação, considerando o raio de 210 km.

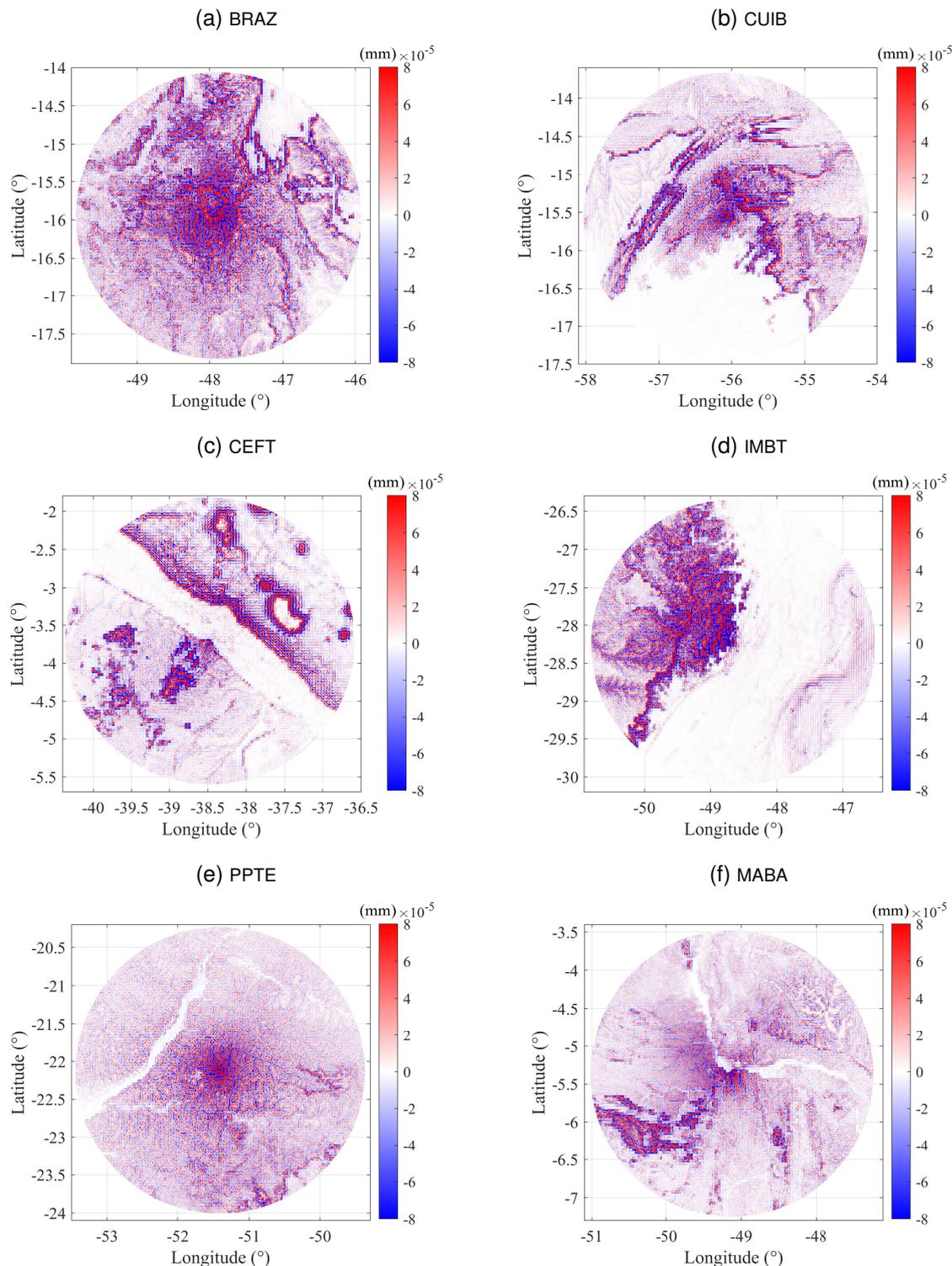
ESTAÇÃO	DENSIDADE (kg/m <sup>3</sup> )
CEFT	2581,4
POTE	2535,7
MABA	2533,4
BRAZ	2518,7
IMBT	2474,8
CUIB	2315,1

Tabela 1 – Densidade média do terreno de estudo em torno de cada estação IHRF

A região de estudo em torno da estação CEFT apresentou a maior densidade média das estações de estudo, na qual, a partir do gráfico apresentado na figura [18c](#), nota-se densidades de até 2800 kg/m<sup>3</sup> na parte continental e valores também altos na parte oceânica após a adoção da topografia equivalente de rocha para definir o valor de densidade nesta região. As estações POTE e MABA foram as próximas a apresentar os maiores valores de densidade média, enquanto a estação CUIB apresentou o menor valor.

Após realizar os processamentos para os cálculos das anomalias de altura RTM para cada uma das estações, as distribuições espaciais das contribuições do efeito RTM ao longo dos 210 km de raio foram analisadas. Isso a fim de verificar a contribuição de cada elemento volumétrico (pixel) para o valor de anomalia de altura RTM em cada estação, e assim analisar mais detalhadamente como a região contribuiu para o resultado final. Uma vez que a mudança na distribuição dos valores não possui uma discrepância significativa com o uso das diferentes abordagens, na Figura [19](#) são apresentados somente os resultados para a abordagem por tesseroides.

Figura 19 – Contribuição da anomalia de altura RTM para um raio de 210 km em torno de cada estação IHRF



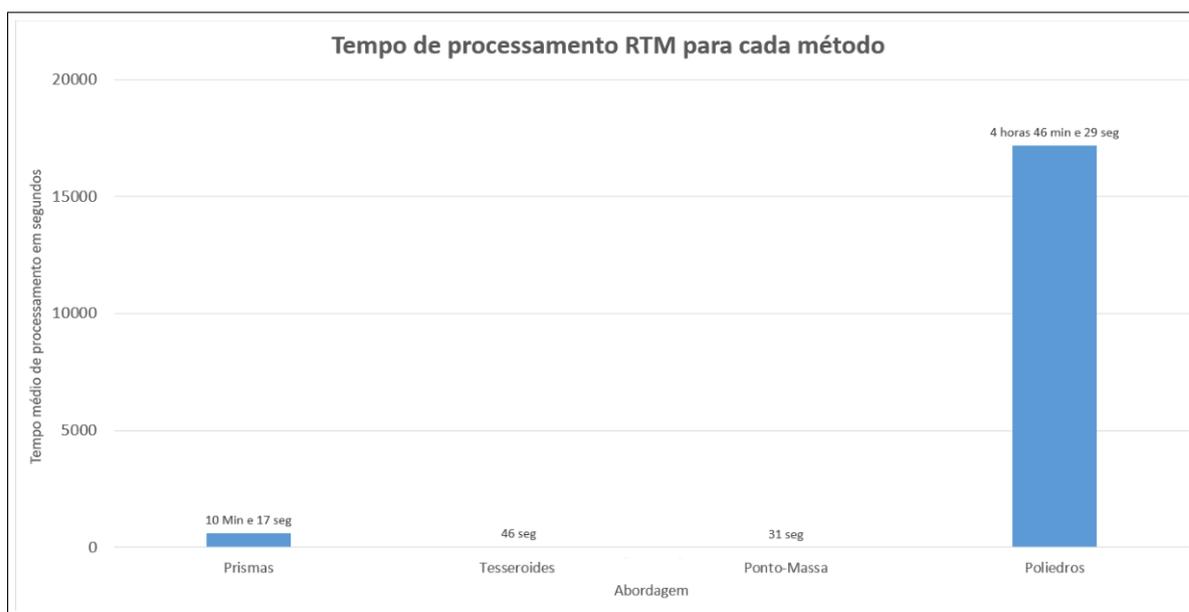
Conforme pode ser verificado, as regiões que se encontram na vizinhança imediata dos locais das estações, foram as que mais contribuíram em termos de anomalia de altura e, conseqüentemente, em termos de potencial gravitacional, isto se dá devido ao fato de que o potencial gravitacional é inversamente proporcional à

distância entre o ponto de computação e o elemento volumétrico. Assim, elementos mais próximos exercem uma maior contribuição gravitacional do que os mais afastados. Além disso, também é possível observar que nas regiões nas quais se tem maiores valores de altura RTM, associadas a relevos mais acidentados, as contribuições também foram encontradas maiores.

Na região de estudo em torno da estação BRAZ foi verificada uma maior predominância de valores negativos da anomalia de altura, isto significa que a superfície topográfica de referência se encontra acima da superfície detalhada nestas regiões. Também se notou uma baixa influência gravitacional dos corpos hídricos nas regiões continentais em torno das estações. Isto pode ser observado nos gráficos pelos valores próximos de 0 que se encontram exatamente nas regiões onde eles estão situados.

Em relação ao tempo de processamento que cada abordagem demandou, na Figura 20 são apresentados os valores para posterior discussão.

Figura 20 – Tempo de processamento médio demandado.



Fonte: Autor.

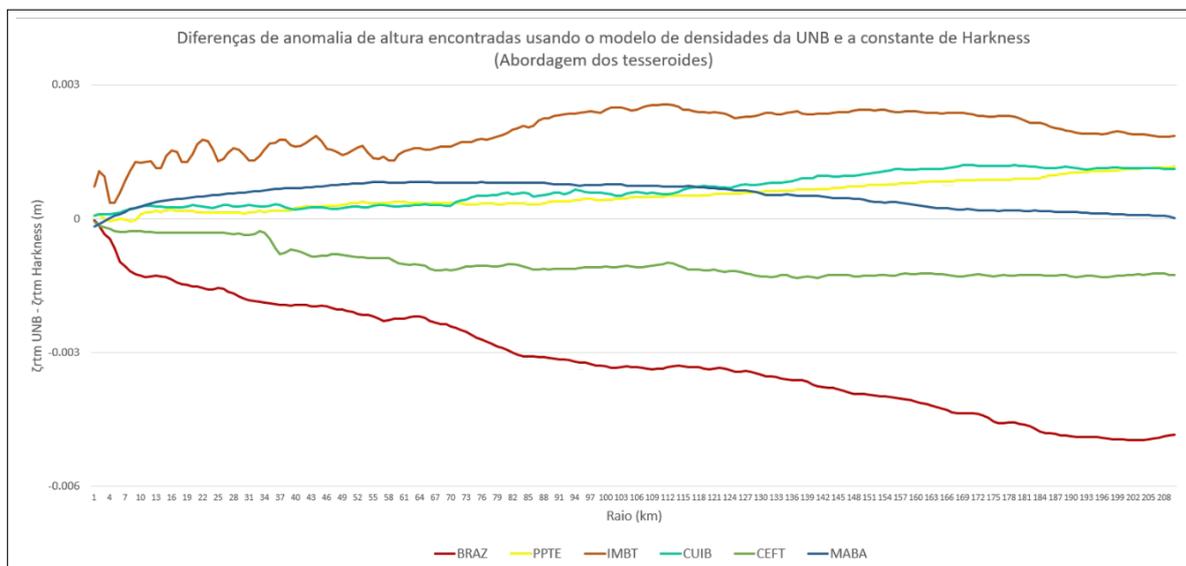
Considerando o raio de integração de 210 km, as abordagens mais vantajosas em relação ao tempo de processamento foram as dos tesseroides e ponto-massa, com 46 e 31 segundos de tempo de processamento respectivamente, sendo o ponto-massa a abordagem com o menor tempo de processamento. A abordagem dos prismas teve um tempo de aproximadamente 10 minutos.

No caso da abordagem de poliedros, o tempo de processamento é aumentado consideravelmente, sendo a abordagem mais demorada para uso da técnica RTM, com quase 5 horas para apenas 50 km de raio de integração. Conforme será apresentado mais adiante, os resultados utilizando-se a abordagem de poliedro se apresentaram

próximos, ao nível submilimétrico, dos resultados obtidos com o uso das demais abordagens, desde os menores valores de raio de integração, onde se tem as maiores contribuições. Por isso, para a abordagem de poliedros foi considerado apenas 50 km de raio de integração para as análises.

Em relação às diferenças nos valores de anomalia de altura utilizando-se o valor de densidade constante de Harkness e os valores de densidade extraídos do modelo UNB TopoDensT, tem-se os resultados apresentados no gráfico da Figura 21. Uma vez que as diferenças obtidas a partir do uso das diferentes abordagens se apresentaram próximas ao nível submilimétrico, como exemplo, apresenta-se somente os resultados para a abordagem de tesseroides. Para cada estação apresenta-se o resultado acumulado a cada quilômetro de raio de integração até 210 km.

Figura 21 – Diferença entre valores obtidos com modelo de densidades UNB e a constante de Harkness.



Fonte: Autor.

Como pode ser visto, para os primeiros raios de integração, a diferença entre os 2 modelos de densidades foi muito baixa, mas a medida que o raio de integração foi aumentando, notou-se diferenças maiores, chegando em torno de 5 milímetros para o caso da estação BRAZ. Isso em virtude do acúmulo de diferenças nos somatórios. A estação MABA obteve a menor diferença nos resultados, com valores de diferenças abaixo de 1 milímetro, enquanto as demais estações alcançaram diferenças de mais de 1 milímetro em 210 km.

A partir do gráfico apresentado, torna-se evidente que a adoção de um modelo de densidade, mesmo que lateral (2D), pode influenciar nos resultados de trabalhos deste tipo, e como a adoção de modelos mais simplificados, como a utilização do valor de densidade constante de Harkness, pode comprometer a acurácia dos resultados.

Isto pode ser observado na tabela 1, onde o maior valor de densidade média foi de 2581,4 kg/m<sup>3</sup>, abaixo da constante de Harkness de 2670 kg/m<sup>3</sup>, dando indícios de que a adoção da densidade das rochas cristalinas não é a adoção mais correta para ser feita em estudos no Brasil e apontando a importância de se ter um modelo de densidades confiável para aplicação deste método.

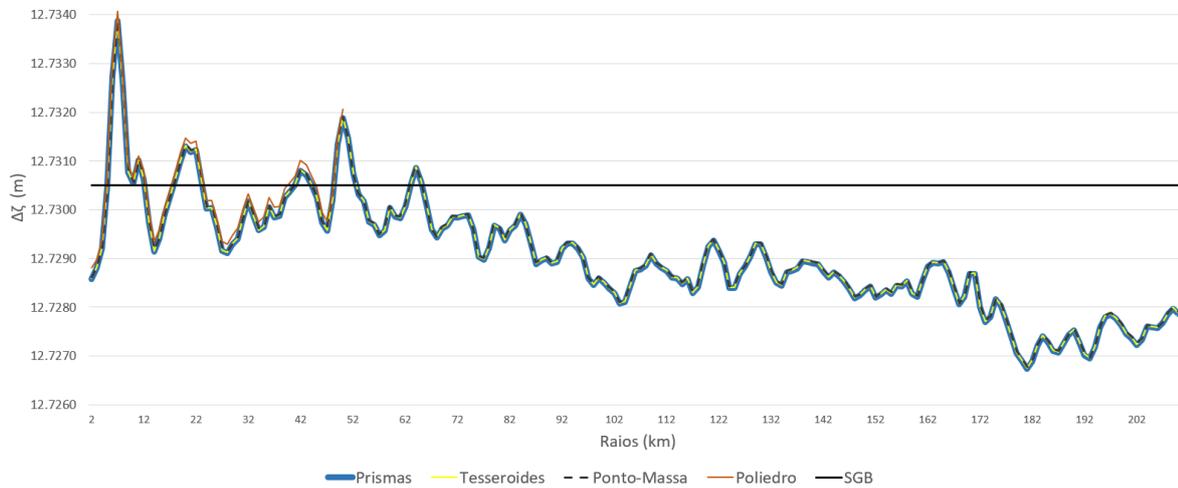
As correções harmônicas dos pontos que se situavam abaixo da superfície de referência, como a estação BRAZ, obtiveram resultados muito baixos, na ordem do centésimo do milímetro, conforme o esperado e indicado por Omang, Tscherning e Forsberg (2012) e Yang et al. (2022). Portanto, os mesmos podem ser desconsiderados sem prejuízo para as anomalias de altura RTM.

Assumindo o valores de anomalia de altura provenientes do SGB como verdade para o presente trabalho, nos gráficos presentes nas figuras 22 e 23, são apresentados os resultados de acurácia para cada abordagem, utilizando as densidades extraídas do modelo UNB TopoDensT. Conforme anteriormente mencionado, quanto mais próximo de zero os resultados de  $\Delta\zeta$ , mais acurada é a anomalia de altura RTM calculada. Isso indica que o valor de anomalia de altura obtido pela técnica RTM chegou o mais próximo possível do valor obtido do SGB para os curtos comprimentos de onda. Em outras palavras, tem-se que o resíduo entre os curtos comprimentos de onda SGB e RTM ( $\zeta_{Residual}$ ) foi menor. De forma adicional, a partir dos gráficos também é possível analisar as diferenças de resultados com o uso das diferentes abordagens. Isto é, o resultado relativo das abordagens.

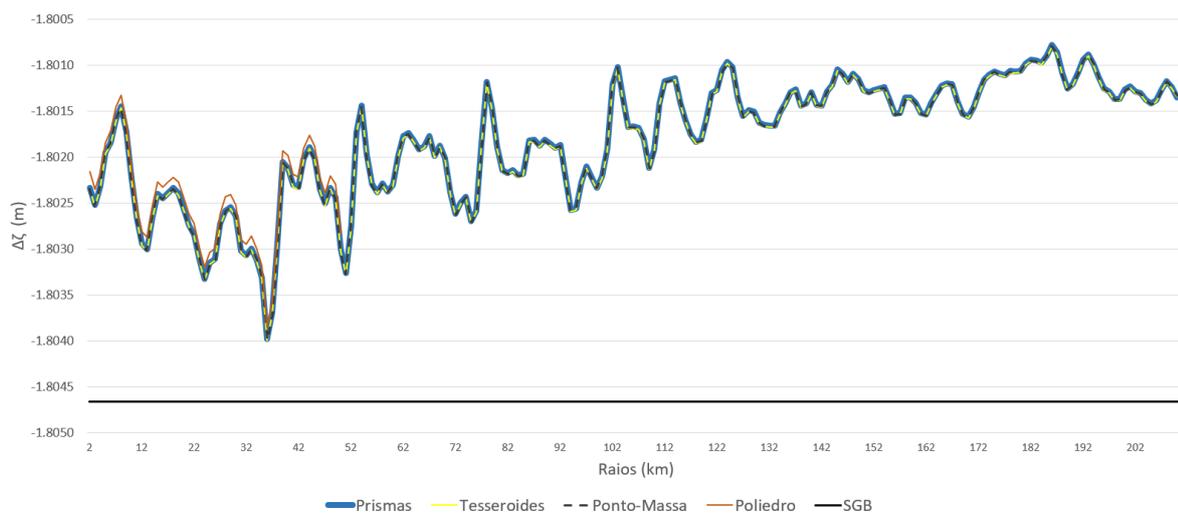
Vale ressaltar que as estações CEFT e IMBT não possuem valores de altitude normal referenciados ao DVBI para que se possa obter o valor da anomalia de altura SGB. Isto é, não são vértices de conexão RN/GPS do SGB. No caso da estação CEFT há valor de altitude normal na base do pilar, na RN 4336R. Neste caso, foi adotado um valor aproximado de altitude normal para a estação CEFT somando-se a altura do pilar que é de 1,400 m, de acordo com o indicado na monografia da estação, ao valor de altitude normal da RN 4336R. Assim sendo, tem-se uma aproximação que permite a realização do cálculo de uma acurácia aproximada. Em relação a estação IMBT, não foram encontrados dados de altitude normal referenciada ao DVBI, não sendo possível a análise de acurácia sobre esta estação. Diante disso, o valor de anomalia SGB foi considerada igual a zero. Isso apenas para mostrar o resultado relativo das abordagens.

Figura 22 – Acurácias absolutas das anomalias de altura RTM a cada quilômetro de raio de integração até 210 km, para as estações BRAZ, CUIB e PPTE, utilizando as densidades extraídas do modelo UNB TopoDesnT.

(a) BRAZ



(b) CUIB



(c) PPTE

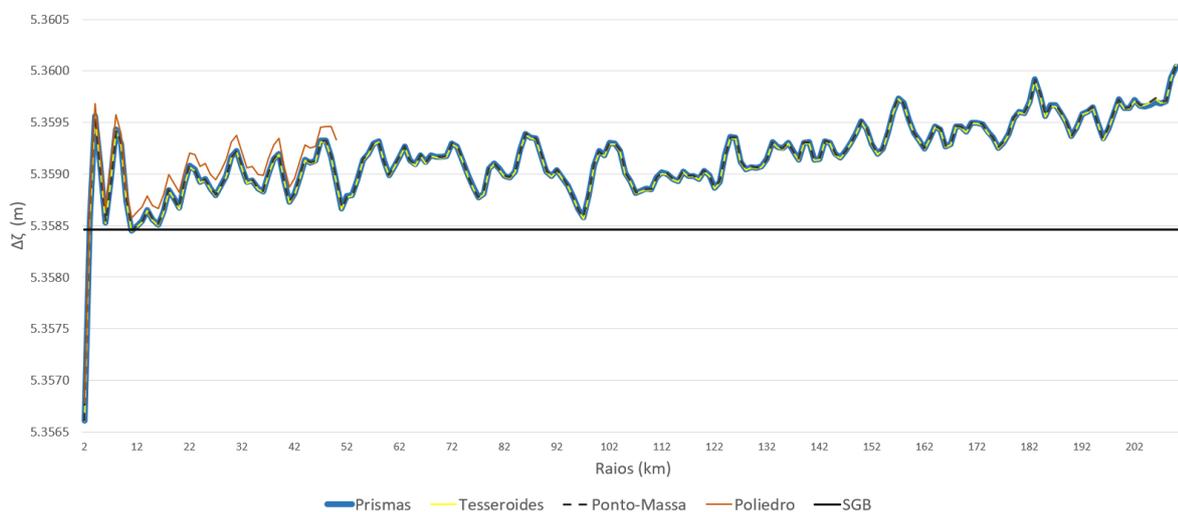
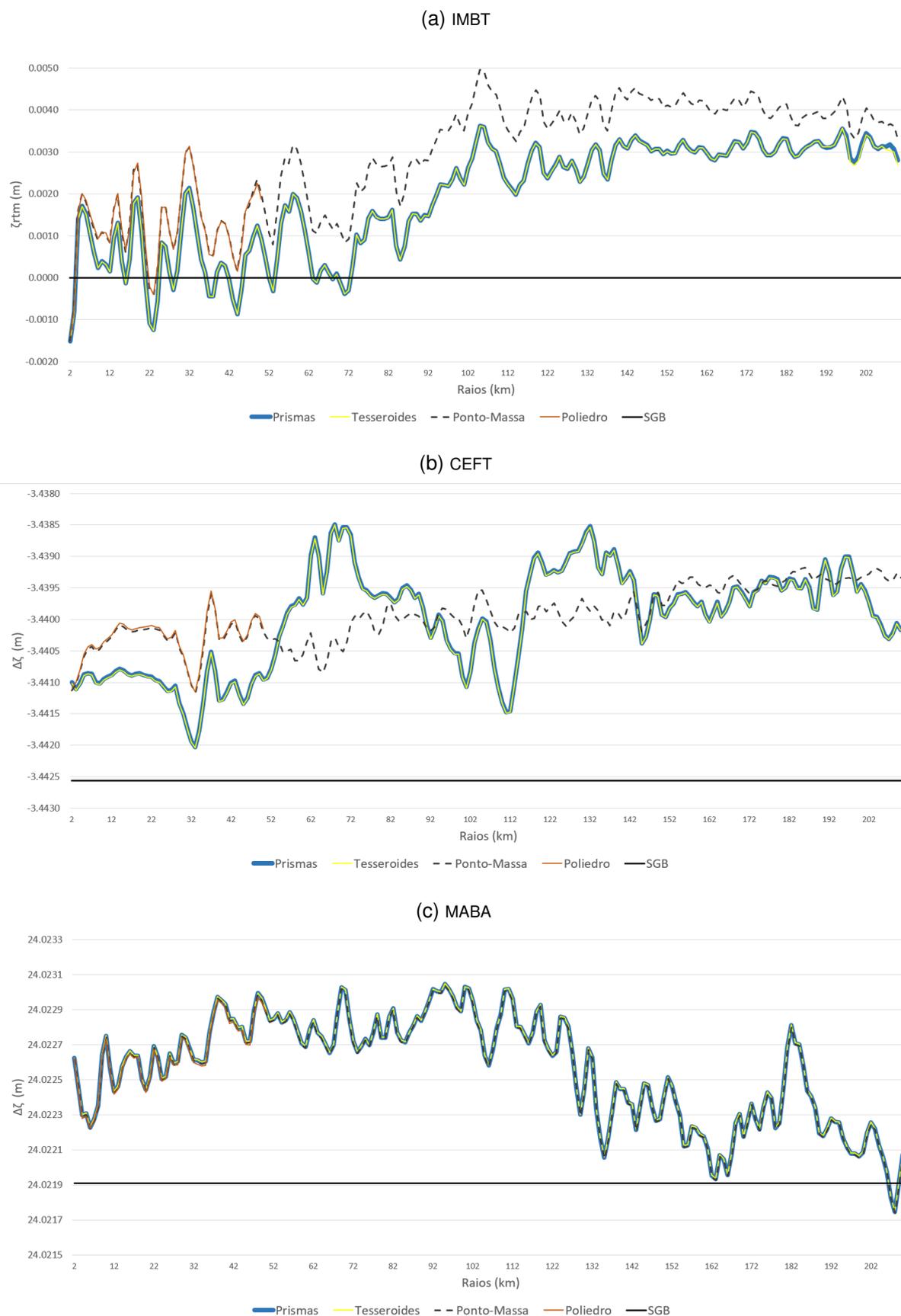


Figura 23 – Acurácias absolutas das anomalias de altura RTM a cada quilômetro de raio de integração até 210 km, para as estações CEFT e MABA, utilizando as densidades extraídas do modelo UNB DesnT. Para o caso da estação IMBT tem-se a acurácia relativa.



A partir da análise dos gráficos é possível verificar que a diferença dos resultados das abordagens nas estações BRAZ, CUIB, PPT e MABA se apresentou no máximo com ordem de grandeza de décimo de milímetro. No caso das diferenças nos resultados obtidos utilizando-se as abordagens de prisma, tesseróide e ponto massa tem-se ordem de grandeza de centésimo de milímetro. Para as estações CEFT e IMBT, a abordagem ponto-massa passou a divergir das demais, e obteve resultados semelhantes a abordagem dos poliedros.

Na análise individual de cada abordagem, a proximidade dos resultados pode estar relacionada às características das alturas RTM nas regiões de estudo. Como pode ser visto nos gráficos de histograma, a maioria das alturas RTM tem valores inferiores a 50 m em todas as estações. Isto também pode ser visto na Figura 16. Deve-se notar que os valores de anomalia de altura RTM ao nível do milímetro também estão relacionados a isso.

Outra questão que pode ter contribuído para a proximidade dos resultados é a resolução espacial do MDS residual de 90 metros para toda a área de integração. Neste caso, as diferenças de geometria entre os elementos prisma, tesseróide e poliedro podem não ter sido significativas.

Uma observação importante é que o poliedro é um corpo de massa prismático com dois topos triangulares inclinados. Além disso, os cantos coincidem com os centros de pixel do MDS residual. Consequentemente, os cantos superiores possuem alturas diferentes, enquanto os cantos inferiores são calculados a partir da média dos quatro valores de altura extraídos do MDS de referência (YANG et al., 2022). No entanto, como as alturas RTM possuem pouca variação nas zonas de integração próximas aos pontos de computação (Figura 16), as mudanças de geometria de prismas para poliedros são pequenas. Isso também pode ter contribuído para a proximidade dos resultados.

Na tabela 2, são apresentados os dados de anomalia de altura que cada abordagem e estação obtiveram com o raio de integração de 210 km, juntamente com a diferença de anomalia de altura SGB pela anomalia de altura RTM, caracterizando a acurácia destes resultados. Vale ressaltar que a abordagem dos poliedros, uma vez que não foi até 210 km em seu raio de integração, torna inadequada a comparação da acurácia de seus resultados com os demais por não estar sujeita a mesma área de estudo, assim, não foi abordada na análise da acurácia final. Os resultados apresentados na Figuras 22 e 23 já demonstram a proximidade nos resultados com as demais abordagens e o tempo de processamento apresentado na Figura 20, mostra a desvantagem desta abordagem em relação às demais.

Tabela 2 – Anomalias de altura finais e acurácias

UNB	TESSEROIDE		PRISMA		PONTO-MASSA	
	$\zeta_{RTM}$ (m)	$\Delta\zeta$ (m)	$\zeta_{RTM}$ (m)	$\Delta\zeta$ (m)	$\zeta_{RTM}$ (m)	$\Delta\zeta$ (m)
<b>BRAZ</b>	-0,0027	12,7279	-0,0027	12,7279	-0,0027	12,7279
<b>PPTE</b>	0,0016	5,3601	0,0016	5,3600	0,0016	5,3601
<b>IMBT</b>	0,0026	0,0026	0,0027	0,0027	0,0032	0,0032
<b>CEFT</b>	0,0024	-3,4402	0,0024	-3,4402	0,0032	-3,4393
<b>CUIB</b>	0,0033	-1,8013	0,0033	-1,8014	0,0033	-1,8013
<b>MABA</b>	0,0002	24,0221	0,0002	24,0221	0,0002	24,0221
Harkness	TESSEROIDE		PRISMA		PONTO-MASSA	
	$\zeta_{RTM}$ (m)	$\Delta\zeta$ (m)	$\zeta_{RTM}$ (m)	$\Delta\zeta$ (m)	$\zeta_{RTM}$ (m)	$\Delta\zeta$ (m)
<b>BRAZ</b>	0,0022	12,7327	0,0022	12,7327	0,0022	12,7327
<b>PPTE</b>	0,0004	5,3589	0,0004	5,3589	0,0004	5,3589
<b>IMBT</b>	0,0007	0,0007	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007
<b>CEFT</b>	0,0036	-3,4389	0,0036	-3,4389	0,0036	-3,4389
<b>CUIB</b>	0,0022	-1,8025	0,0022	-1,8025	0,0022	-1,8025
<b>MABA</b>	0,0002	24,0221	0,0002	24,0221	0,0001	24,0220

Para a estação BRAZ os resultados obtidos foram idênticos até o décimo do milímetro com as outras abordagens, obtendo a mesma acurácia para todas as abordagens. As estações PPTE, CUIB e MABA também apresentaram resultados semelhantes aos obtidos pela estação BRAZ. Todas estas estações obtiveram valores e acurácias idênticos para as abordagens de Tesseroides, Prismas e Ponto-Massa.

A estação CEFT apresentou resultados idênticos entre as abordagens dos Prismas e Tesseroides, porém, houve uma divergência de 0,8 milímetros entre estas abordagens e a abordagem de Ponto-Massa, que se mostrou mais acurada no resultado, com o  $\Delta\zeta$  de -3,4393 metros para a abordagem de Ponto-Massa e -3,4402 metros para as demais abordagens.

Em relação a estação IMBT, cada abordagem obteve resultados diferentes, mas ainda concordantes entre si ao nível submilimétrico. Devido ao fato de que não foram encontrados vértices de conexões que permitam o cálculo da anomalia de altura SGB desta estação, não foi possível realizar nenhuma análise de exatidão absoluta sobre a mesma.

No contexto dos valores de densidade, pode ser verificado que o uso do modelo UNB TopoDensT propôs valores mais acurados dos que os obtidos a partir do uso do valor de densidade constante de Harkness para as estações BRAZ e CUIB. Para as estações PPTE, CEFT e MABA o uso do valor constante de densidade de Harkness propôs resultados mais acurados.

A partir disso, notou-se os seguintes padrões nos resultados com o uso da Equação (27). Quando a anomalia de altura SGB de referência é negativa e há uma diminuição no valor de anomalia de altura RTM, tem-se melhores resultados com a densidade 2670 kg/m<sup>3</sup>. Assim como no caso de se ter valores de anomalia de referência positivos e aumento nos valores de anomalia RTM. No primeiro caso quando se tem uma região de estudo com predominância de valores de densidade maiores que 2670 kg/m<sup>3</sup>, é evidente que o uso da densidade constante proporá valores menores de anomalia de altura RTM, e, portanto, mais acurados. No segundo caso, valores mais

acurados serão obtidos com o valor de  $2670 \text{ kg/m}^3$  quando se tem uma região de estudo com predominância de valores de densidades menores. Em ambos os casos, tem-se uma tendenciosidade no cálculo da acurácia.

Em vista disso, vale a pena realizar esta análise de acurácia novamente após a combinação dos longos e médios comprimentos de onda, provenientes da solução do PVCG nos resultados obtidos. Desta forma, ter-se-ão análises mais completas que podem evidenciar as melhorias em acurácia com o uso do modelo de densidades UNB TopoDensT. De qualquer forma, o uso deste modelo propõe mais proximidade com as realidades físicas nas modelagens.

## 5 CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

Com base nos dados e nas abordagens utilizadas e apresentados no presente trabalho, chega-se a conclusão de que a abordagem Ponto-Massa foi indicada como a melhor solução para cálculo dos curtos comprimentos de onda do campo gravitacional pelo método RTM para as estações IHRF do Brasil. Isto é justificado pelo fato de que os resultados obtidos foram muito semelhantes, com diferenças de no máximo 0,5 milímetros entre estas abordagens. Com isto, devido ao processamento da abordagem Ponto-Massa ser menos complexo e mais rápido, concluiu-se que esta é a mais adequada.

A abordagem dos poliedros, apresentou resultados discrepantes em comparação com os demais métodos, porém, isto é justificado devido ao fato de que este método apresentou o tempo de processamento mais longo (aproximadamente 4 horas e 46 minutos) e foi processado somente para 50 km de raio de integração, não sendo justa a comparação da acurácia dos seus resultados com as demais abordagens. Com isto, devido ao seu tempo de processamento, o mesmo não é vantajoso para este tipo de estudo.

Para as estações CEFT e IMBT, onde foram utilizados dados batimétricos para a região oceânica, a abordagem do ponto-massa obteve resultados diferentes das demais, com uma melhor acurácia para a estação CEFT, tendo em vista que a estação IMBT não tem dado de referência para a análise de acurácia. Isto gera a hipótese de que a região oceânica possui uma influência gravitacional diferente de outras regiões, fazendo com que a abordagem ponto-massa seja mais sensível a esta influência. Vale ressaltar que os testes de acurácia realizado nestas estações foram diferentes dos demais testes, pois não havia valores de altitude normal referenciada ao DVBI para cálculo da anomalia de altura. Com isto, é indicado que se faça estudos mais detalhados sobre o método RTM nessas regiões com dados diferentes dos utilizados neste trabalho, para que se tenha uma comparação destes resultados.

Em comparação com os resultados obtidos utilizando como modelo de densidades a densidade constante de rocha cristalina dada por Harkness, houveram diferenças de até 5 milímetros nos resultados, apontando a sensibilidade de variação dos resultados com relação ao modelo de densidades utilizado, o que sugere uma padronização dos dados utilizados para implantação do IHRS, dando preferência para o uso de modelos de densidades, mesmo que laterais. Em relação a acurácia entre estes dois modelos, notou-se uma tendenciosidade na análise devido aos resultados apresentados pela constante dada por Harkness, assim, optou-se pela utilização do modelo de densidades UNB que se encontra mais próximo da realidade em relação às densidades no Brasil, conforme indicado em [Medeiros et al. \(2021\)](#).

A abordagem do Ponto-Massa e dos tesseroides obtiveram os menores tempos

de processamento, ambos abaixo de 1 minuto, indicando desvantagens na utilização da abordagem dos prismas ou dos poliedros para a técnica RTM. Para trabalhos futuros, pode-se realizar uma comparação entre estas duas abordagens para outras regiões ou outras estações IHRF.

Por fim, com estas conclusões, alguns trabalhos futuros podem ser realizados, investigando a influência das regiões oceânicas no método RTM para as estações IMBT e CEFT. A comparação entre a abordagem Ponto-Massa com a abordagem dos tesseroides para outras estações IHRF, analisando se realmente a abordagem Ponto-Massa é a mais vantajosa. A análise de acurácia entre o modelo de densidades da UNB e a constante de rocha cristalina dada por Harkness após a combinação dos curtos comprimentos de onda RTM com os longos e médios comprimentos de onda obtidos através da solução do PVCG.

Como últimas recomendações, cálculo da técnica RTM para as estações no Brasil com a utilização de diferentes fontes de dados como MDT's, Modelos de densidades nacionais ou regionais. E, por fim, comparar o cálculo dos curtos comprimentos de onda obtidos pela técnica RTM com o programa TGF (*Terrain Gravity Field*), desenvolvido por [Yang, Hirt e Pail \(2020\)](#), o qual permite realizar o cálculo dos curtos comprimentos de onda RTM combinando as 4 abordagens utilizadas neste trabalho (poliedros, prismas, tesseroides e ponto-massa).

## Referências

BARTHELMES, F. Definition of functionals of the geopotential and their calculation from spherical harmonic models: theory and formulas used by the calculation service of the international centre for global earth models (icgem), <http://icgem.gfz-potsdam.de>. Deutsches GeoForschungsZentrum GFZ, 2009.

BARTHELMES, F. Global models. *Encyclopedia of Geodesy, Springer International Publishing*, p. 1–9, 2014.

BLITZKOW, D.; CAMPOS, I. d. O.; FREITAS, S. Altitude: O que interessa e como equacionar. *Anais do I Simpósio de Ciências Geodésicas e Tecnologia da Geoinformação, Recife*, 2004.

BLITZKOW, D.; MATOS, A. *Gravimetria y Geoide en la región SIRGAS*. 2022. Webinar. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=Hrakntp6Srl>.

CASTRO, H. M. Proposta de alternativas para conexão dos data verticais brasileiros de imbituba e santana. 2011.

DELGADO, R. E. *Avaliação do uso de GNSS e de dados refinados de um modelo global do geopotencial para determinação de altitudes normais referenciadas aos data verticais brasileiros e ao IHRF*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, 2021.

FERREIRA, V. G. Solução do tipo brovar para o segundo problema de valor de contorno da geodésia com vistas à modernização de sistemas de altitudes. 2011.

FORSBERG, R. *A study of terrain reductions, density anomalies and geophysical inversion methods in gravity field modelling*. [S.l.], 1984.

GEMAEL, C. Introdução à geodésia física. *Curitiba: Editora da UFPR*, 1999.

HECK, B.; SEITZ, K. A comparison of the tesseroid, prism and point-mass approaches for mass reductions in gravity field modelling. *Journal of Geodesy*, Springer, v. 81, n. 2, p. 121–136, 2007.

HEISKANEN, W. A.; MORITZ, H. *Physical geodesy*(book on physical geodesy covering potential theory, gravity fields, gravimetric and astrogeodetic methods, statistical analysis, etc). 1967.

HIRT, C.; FEATHERSTONE, W.; MARTI, U. Combining egm2008 and srtm/dtm2006. 0 residual terrain model data to improve quasigeoid computations in mountainous areas devoid of gravity data. *Journal of Geodesy*, Springer, v. 84, n. 9, p. 557–567, 2010.

HOFMANN-WELLENHOF, B.; MORITZ, H. *Physical geodesy*. Springer Science & Business Media, 2006.

IAG. Resolution (no. 1) for the definition and realization of an international height reference system (ihrs). München, Alemanha, 2015.

IAG. Resolution (no. 3): Establishment of the international height reference frame (ihrf). Montreal, Canadá, 2019.

IAG. *Geodesy*. s.d. Disponível em: <<https://www.iag-aig.org/geodesy>>.

IHDE, J.; SÁNCHEZ, L.; BARZAGHI, R.; DREWES, H.; FOERSTE, C.; GRUBER, T.; LIEBSCH, G.; MARTI, U.; PAIL, R.; SIDERIS, M. Definition and proposed realization of the international height reference system (ihrs). *Surveys in geophysics*, Springer, v. 38, n. 3, p. 549–570, 2017.

JAMUR, K. P. *Análise de alternativas para a determinação dos efeitos gravitacionais de massas anômalas na Região do DVB*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2012.

JUNIOR, E. L. N. *Alternativa para determinação de altitudes normais-ortométricas na Amazônia Legal Brasileira*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, 2017.

MEDEIROS, D. F. de; MAROTTA, G. S.; YOKOYAMA, E.; FRANZ, I. B.; FUCK, R. A. Developing a lateral topographic density model for brazil. *Journal of South American Earth Sciences*, Elsevier, v. 110, p. 103425, 2021.

MOREIRA, R. D. M. *Conexão de sistemas verticais de referência locais ao sistema geodésico brasileiro com base em um sistema vertical de referência global*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Paraná, 2015.

NAGY, D.; PAPP, G.; BENEDEK, J. The gravitational potential and its derivatives for the prism. *Journal of Geodesy*, Springer, v. 74, n. 7, p. 552–560, 2000.

OMANG, O. C.; TSCHERNING, C. C.; FORSBERG, R. Generalizing the harmonic reduction procedure in residual topographic modeling. In: SPRINGER. *VII Hotine-Marussi Symposium on Mathematical Geodesy*. [S.l.], 2012. p. 233–238.

SAHAGIAN, D.; ALSDORF, D.; KREEMER, C.; MELACK, J.; PEARLMAN, M.; PLAG, H.-P.; POLI, P.; REID, S.; RODELL, M.; THOMAS, R. et al. Earth observation: Serving the needs of an increasingly global society. In: *Global Geodetic Observing System*. [S.l.]: Springer, 2009. p. 153–196.

SÁNCHEZ, L. The international height reference system (ihrs) and its realisation, the international height reference frame (ihrf). In: *Workshop for the Implementation of the GGRF in Latin America*. [S.l.: s.n.], 2019.

SÁNCHEZ, L.; ÅGREN, J.; HUANG, J.; WANG, Y. M.; MÄKINEN, J.; PAIL, R.; BARZAGHI, R.; VERGOS, G. S.; AHLGREN, K.; LIU, Q. Strategy for the realisation of the international height reference system (ihrs). *Journal of Geodesy*, Springer, v. 95, n. 3, p. 1–33, 2021.

SÁNCHEZ, L.; IHDE, J.; BARZAGHI, R.; DREWES, H. et al. Establishment of an international height reference system in the frame of ggos. In: *Symposium SIRGAS 2015, Santo Domingo, Dominican Republic*. [S.l.: s.n.], 2015.

SANSÒ, F. The long road from measurements to boundary value problems in physical geodesy. *Manuscripta geodaetica*, Springer Science and Media, v. 20, n. 5, p. 326–326, 1995.

SCHWARZ, K. Data types and their spectral properties. *Local gravity field approximation, Beijing International Summer School*, 1984.

SEEBER, G. Satellite geodesy: foundations, methods and applications. *INTERNATIONAL HYDROGRAPHIC REVIEW*, v. 4, n. 3, p. 92–93, 2003.

SHENG, M.; SHAW, C.; VANÍČEK, P.; KINGDON, R.; SANTOS, M.; FOROUGH, I. Formulation and validation of a global laterally varying topographical density model. *Tectonophysics*, Elsevier, v. 762, p. 45–60, 2019.

SILVA, L. M. D. *Análise da evolução temporal do Datum Vertical Brasileiro de Imbituba*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2017.

SÁNCHEZ, J. L. C. *Vínculo do Datum Vertical Equatoriano ao International Height Reference System - IHRS*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Paraná, 2017.

TOZER, B.; SANDWELL, D. T.; SMITH, W. H.; OLSON, C.; BEALE, J.; WESSEL, P. Global bathymetry and topography at 15 arc sec: Srtm15+. *Earth and Space Science*, Wiley Online Library, v. 6, n. 10, p. 1847–1864, 2019.

TSOULIS, D. Analytical computation of the full gravity tensor of a homogeneous arbitrarily shaped polyhedral source using line integrals. *Geophysics*, Society of Exploration Geophysicists, v. 77, n. 2, p. F1–F11, 2012.

YAMAZAKI, D. *MERIT DEM: Multi-Error-Removed Improved-Terrain DEM*. University of Tokyo: [s.n.], 2018. Disponível em: [http://hydro.iis.u-tokyo.ac.jp/~yamadai/MERIT\\_DEM/](http://hydro.iis.u-tokyo.ac.jp/~yamadai/MERIT_DEM/).

YANG, M. *Investigation of the residual terrain modelling (RTM) technique for high-frequency gravity calculations*. Tese (Doutorado) — Technische Universität München, 2020.

YANG, M.; HIRT, C.; PAIL, R. Tgf: A new matlab-based software for terrain-related gravity field calculations. *Remote sensing*, MDPI, v. 12, n. 7, p. 1063, 2020.

YANG, M.; HIRT, C.; TENZER, R.; PAIL, R. Experiences with the use of mass-density maps in residual gravity forward modelling. *Studia Geophysica et Geodaetica*, Springer, v. 62, n. 4, p. 596–623, 2018.

YANG, M.; HIRT, C.; WU, B.; DENG, X. L.; TSOULIS, D.; FENG, W.; WANG, C. Q.; ZHONG, M. Residual terrain modelling: The harmonic correction for geoid heights. *Surveys in Geophysics*, Springer, p. 1–31, 2022.