UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

GABRIEL CORDEIRO CHILEIDER

UM ESTUDO SOBRE AÇÕES E REPRESENTAÇÕES PARCIAIS

CURITIBA

2023

GABRIEL CORDEIRO CHILEIDER

UM ESTUDO SOBRE AÇÕES E REPRESENTAÇÕES PARCIAIS

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Matemática, no Curso de Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves.

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Chileider, Gabriel Cordeiro
Um estudo sobre ações e representações parciais. / Gabriel Cordeiro Chileider. – Curitiba, 2023.
1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Muniz Silva Alves.

1. Álgebra. 2. Representações de álgebra. I. Alves, Marcelo Muniz Silva. II. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE CIENCIAS EXATAS
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO MATEMÁTICA - 40001016041P1

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **GABRIEL CORDEIRO CHILEIDER** intitulada: **UM ESTUDO SOBRE AÇÕES E REPRESENTAÇÕES PARCIAIS**, sob orientação do Prof. Dr. MARCELO MUNIZ SILVA ALVES, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 28 de Fevereiro de 2023.

Assinatura Eletrônica
01/03/2023 10:22:37.0
MARCELO MUNIZ SILVA ALVES
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
07/03/2023 14:13:51.0
MYKOLA KHRYPCHENKO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA)

Assinatura Eletrônica
01/03/2023 10:12:56.0
JOHN WILLIAM MACQUARRIE
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS)

Assinatura Eletrônica
01/03/2023 10:05:01.0
MATHEUS BATAGINI BRITO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Agradecimentos

À minha família e amigos, por toda a ajuda e compreensão durante essa jornada. Em especial à minha mãe, que sempre me deu suporte para que meus sonhos fossem realizados e minha irmã que manteve minha sanidade.

Aos meus amigos e colegas de mestrado, não só pelas revisões, ajudas e choros compartilhados durante o período de provas e exames de qualificação. Mas pelas longas conversas no R.U naquelas jantas pós seminários obrigatórios, pelas boas risadas e pelo companheirismo de pessoas que entendem muito bem a rotina que vivi.

Aos professores do Programa de Pós Graduação em Matemática, pela qualidade de ensino e pela dedicação e comprometimento durante a pandemia para ministrar as matérias. Quero deixar um agradecimento especial ao meu orientador que me apresentou um tema interessante para que essa dissertação fosse concretizada, agradeço também as inúmeras revisões, tanto matemáticas quanto ortográficas.

À CAPES, pelo apoio financeiro que viabilizou a produção deste trabalho.

À todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a produção deste material.

RESUMO

Neste trabalho investigamos ações e representações parciais de grupos, com maior ênfase no estudo de representações parciais H-globais. O estudo de ações parciais de um grupo G está ligado ao das ações de um semigrupo inverso $S(G)$, o qual gera uma álgebra que também é originada através das relações de representações parciais de G, a álgebra $K_{par}(G)$. Além disso, estudar representações parciais de G é equivalente a estudar módulos sobre esta álgebra. Mostramos também que $K_{par}(G)$ é isomorfa à álgebra de um grupoide, o que permite verificar que $K_{par}(G)$ é semissimples e determinar sua dimensão. Em seguida restringimos o estudo a representações parciais que são representações usuais quando restritas a um subgrupo H fixo, chamadas de representações parciais H-globais. Mostramos que resultados análogos aos anteriores continuam válidos, isto é, que essas representações parciais correspondem aos módulos sobre uma álgebra $\mathbb{C}_{par}^{H}(G)$ e que esta é isomorfa à álgebra de um grupoide. Por fim, ao estudar as representações irredutíveis desta última surge um par de funtores oriundos da restrição e indução de representações; mostramos que estes funtores formam um par adjunto, estendendo para representações parciais o resultado conhecido como Reciprocidade de Frobenius.

Palavras-chave: Representações parciais, ações parciais, Álgebra parcial de grupo.

ABSTRACT

In this dissertation we investigate actions and partial representations of groups, with greater emphasis on the study of H-global partial representations. The study of partial actions of a group G is linked to that of the actions of an inverse semigroup $S(G)$, which generates an algebra that is also originated through the relations of partial representations of G, namely $K_{par}(G)$. Furthermore, studying partial representations of G is equivalent to studying modules on this algebra. We also show that $K_{par}(G)$ is isomorphic to the algebra of a groupoid, which allows us to verify that $K_{par}(G)$ is semisimple and determine its dimension. Then we restrict the study to partial representations that are usual representations when restricted to a fixed H subgroup, called H-global partial representations. We show that similar results to the previous ones remain valid, that is, that these partial representations correspond to the modules over an algebra $\mathbb{C}_{par}^{H}(G)$ and that this is isomorphic to the algebra of a groupoid. Finally, when studying the irreducible representations of the latter, a pair of functors arises from the restriction and induction of representations; we show that these functors form an adjoint pair, extending to partial representations the result known as Frobenius Reciprocity

Keywords: Partial representations, Partial actions, Partial Group Algebra.

SUMARIO

INTRODUÇÃO

Uma das motivações no estudo de representações parciais surge no estudo de ações globais e ações parciais. Apenas para recordar o leitor, fixado um grupo G e uma álgebra A, uma ação global de G em A nada mais é do que um homomorfismo de grupos entre G e o grupo de automorfismos de A. Então, ao considerar um grupo G, uma álgebra unital $\mathcal{A}$ e uma ação global α de G em $\mathcal{A}$, uma *representação covariante* da ação global de $\mathcal{A}$ em uma álgebra B é um par (f, π), onde $f : \mathcal{A} \to B$ é um homomorfismo de álgebras e $\pi : G \to B$ é uma representação global de G em B tal que

$$\pi(g)f(a)\pi(g^{-1}) = f(\alpha_g(a)), \forall g \in G, a \in \mathcal{A}.$$

Um bom exemplo de representação covariante pode ser construído da seguinte maneira: tomando uma álgebra unital $\mathcal{A}$ e uma ação global θ de G em $\mathcal{A}$, é possível construir uma nova álgebra denotada por $\mathcal{A}[G]$, a qual os elementos são da forma $\sum\limits_{g \in G} a_g\delta_g$ (aqui os δ_g são utilizados apenas para marcar a posição g), a multiplicação é dada por

$$(a_g\delta_g)(b_h\delta_h) = \theta_g(\theta_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}. \tag{1}$$

Por consequência a unidade é dada por $1\delta_e$, onde e é o elemento neutro de G.

Agora observe que a função $v : G \to \mathcal{A}[G]$, $g \to 1\delta_g$ é uma representação global de G, pois $v_{gh} = v_g v_h, g, h \in G$. Além disso, podemos tomar a inclusão canônica $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}[G]$, $a \mapsto a\delta_e$, assim

$$v_g f(a) v_{g^{-1}} = f(\theta_g(a)), \forall g \in G, a \in \mathcal{A}.$$

Mais do que um exemplo, temos a seguinte propriedade universal: dada uma representação covariante $(\overline{f}, \overline{\pi})$ de $\mathcal{A}$ em uma álgebra unital B, existe um único homomorfismo de álgebras $\phi : \mathcal{A}[G] \to B$, descrito por $\phi(a\delta_g) = \overline{f}(a)\overline{\pi}(g)$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A}[G] \arrow[dd, dashed, "\exists!\phi"'] & \\
\mathcal{A} \arrow[ur, hook, "f"] \arrow[dr, "\overline{f}"'] & & G \arrow[ul, "v"'] \arrow[dl, "\overline{\pi}"] \\
 & B &
\end{tikzcd}$$

De maneira natural, é interessante questionar o que acontece se no início do processo tomarmos uma ação parcial, em vez de uma ação global. Uma ação parcial de G na álgebra $\mathcal{A}$ é uma coleção de ideais D_g de $\mathcal{A}$ e uma coleção de aplicações lineares, bijetoras e multiplicativas $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ que satisfazem condições tais que, quando $\alpha_g(\alpha_h(a))$ está definido, então $\alpha_{gh}(a)$ também está definido e $\alpha_g(\alpha_h(a)) = \alpha_{gh}(a), \forall a \in \mathcal{A}$.

O que mudaria na definição de representação covariante e como seria feita a construção de $A[G]$ e da propriedade universal no contexto das ações parciais? Nesse sentido, observe que se a ação θ for parcial ainda sim é possível construir uma álgebra em que os elementos são da forma $\sum_{g\in G} a_g\delta_g$, a multiplicação e a unidade funcionam de maneira análoga à (1), essa álgebra é denotada por $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$.

No entanto, a função v não está bem definida, pois a expressão $v_g = 1\delta_g$ não faz sentido, a menos que cada D_g seja um ideal com unidade, assim podemos redefinir $u : G \to \mathcal{A} \rtimes_\theta G$ como sendo $u_g = 1_g\delta_g$.

Veremos neste trabalho que a função u é, na verdade, uma representação parcial de G em $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$, isto é, ainda temos que $u(1) = 1\delta_e$, mas em vez de $u(g)u(h) = u(gh)$, u satisfaz igualdades mais fracas, a saber, $u(g^{-1})u(g)u(h) = u(g^{-1})u(gh)$ e $u(g)u(h)u(h^{-1}) = u(gh)u(h^{-1})$. Além disso, ao adaptar a definição de representação covariante para representações parciais, em vez de globais, o par (f, u) satisfaz a igualdade $u_g f(a)u_{g^{-1}} = f(\theta_g(a))$, para todo $g \in G$ e $a \in D_g$. Além de ser universal.

Por dizer, dada uma representação covariante $(\overline{f}, \overline{u})$ de $\mathcal{A}$ em uma álgebra B, isto é, $\overline{f} : \mathcal{A} \to B$ é homomorfismo de álgebras e $\overline{u} : G \to B$ é representação parcial, tal que $\overline{u}_g f(a)\overline{u}_{g^{-1}} = f(\theta_g(a))$, para todo $g \in G$ e $a \in D_g$, então existe um único homomorfismo de álgebras $\psi : \mathcal{A} \rtimes_\theta G \to B$ dado por $\psi(a\delta_g) = \overline{f}(a)\overline{u}_g$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{A} \rtimes_\theta G \arrow[d, dashed, "\exists!\psi"] & \\
\mathcal{A} \arrow[ur, hook, "f"] \arrow[r, "\overline{f}"'] & B & G \arrow[ul, "u"'] \arrow[l, "\overline{u}"]
\end{tikzcd}$$

A construção desses resultados pode ser vista com detalhes no capítulo 9 de [8].

Diante da motivação apresentada acima, este trabalho tem como principais objetos de estudos as ações e representações parciais de um grupo finito qualquer. A partir disso, surgem algumas boas propriedades a respeito desse tema, por exemplo, no primeiro capítulo será mostrado que existe uma correspondência biunívoca entre ações parciais de um grupo G e ações de um certo semigrupo inverso, o qual chamaremos de $S(G)$. Esse semigrupo inverso é construído por meio de três relações que geram uma equivalência, as quais estão intimamente ligadas a representações parciais de G. Para realizar esse estudo, tomamos como referência o artigo [7] de Ruy Exel, intitulado "Partial actions of groups and actions of inverse semigroups".

O segundo capítulo será dedicado ao estudo da álgebra $K_{par}(G)$, denominada *Álgebra Parcial de G*. Começamos introduzindo as representações parciais de G, assim, a álgebra $K_{par}(G)$ é a álgebra universal gerada pelas relações oriundas da definição de representação parcial. Diante disso, da mesma maneira que estudar representações de KG é equivalente a estudar as representações de G, o mesmo acontece com $K_{par}(G)$, isto é, mostraremos que estudar as representações parciais de G equivale a estudar as representações de $K_{par}(G)$.

No entanto, em termos práticos temos poucas informações sobre $K_{par}(G)$, bem como descrever uma base, se é de dimensão finita e se é ou não semissimples. Nesse sentido, mostraremos que $K_{par}(G)$ é isomorfa a álgebra de um grupoide construído a partir do grupo G, o qual denotaremos por $\Gamma(G)$. Transladar o problema para a álgebra $K\Gamma(G)$ mostra-se muito mais prático, já que a base será dada pelos elementos do grupoide, o que nos permite calcular sua dimensão, além disso, provaremos que é semissimples.

Para finalizar o capítulo, provaremos que $K_{par}(G)$ é isomorfa a $\mathcal{A} \rtimes G$, onde $\mathcal{A}$ é uma álgebra comutativa com algumas condições, as quais serão apresentadas mais tarde.

Nessa parte do trabalho utilizamos duas referências, a primeira delas é o artigo "Partial representations and partial group algebras" [6], utilizado para estudar a relação entre a álgebra $K_{par}(G)$ e a álgebra $K\Gamma(G)$. Para o provar o isomorfismo entre $K_{par}(G)$ e $\mathcal{A} \rtimes G$, utilizamos o artigo [4] " Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations".

O capítulo seguinte será dividido em duas partes, primeiramente mostraremos que para toda ação parcial de G em um conjunto X existe, a menos de isomorfismo, uma única globalização (uma ação global em um conjunto associado a X, com algumas condições a mais). Naturalmente, dada uma representação parcial (V, π), existe, a menos de isomorfismo, uma única globalização (U, ρ) (uma representação global, também com algumas condições a mais), a qual (V, π) é sua restrição.

Na segunda parte, o estudo é voltado as representações parciais H globais, isto é, dado um subgrupo H de G, representações parciais $H-$globais são representações em que a restrição a H é uma representação global. Apresentamos algumas propriedades e relações que são satisfeitas por representações $H-$globais, além de apresentar uma construção geral de exemplos de representações $H-$globais, originadas a partir da restrição da representação induzida de G.

O capítulo quatro é uma generalização do capítulo dois, com respeito a álgebra $\mathbb{C}_{par}^{H}(G)$. Essa que por sua vez é gerada pelas relações definidoras das representações parciais $H-$ globais, descritas no capítulo três. Sendo assim, provaremos que $\mathbb{C}_{par}^{H}(G)$ surge por meio de um quociente da álgebra $\mathbb{C}_{par}(G)$. Os resultados são análogos, ou seja, estudar representações parciais $H-$globais equivale a estudar os módulos sobre a álgebra $\mathbb{C}_{par}^{H}(G)$. Mais além, assim como $K_{par}(G)$ é semissimples por ser isomorfa à álgebra semissimples $K\Gamma(G)$, o mesmo ocorre com $\mathbb{C}_{par}^{H}(G)$, a qual é isomorfa à álgebra semissimples $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$, onde $\Gamma_H(G)$ é um grupoide criado através das representações parciais $H-$globais de G. Por fim, a álgebra $\mathbb{C}_{par}^{H}(G)$ é isomorfa ao produto cruzado $\mathcal{A} \rtimes_\theta G$, mas aqui as condições sobre a álgebra $\mathcal{A}$ são distintas das que serão apresentadas no capítulo 2.

Assim como o capítulo três, o último capítulo possui duas partes. A primeira delas consiste em descrever quais são as representações irredutíveis de $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$. Para isso, a primeira seção é um estudo voltado a irredutibilidade de álgebras semissimples, assim, aplicando na álgebra $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$, concluímos que as representações irredutíveis dessa álgebra estão ligadas à construção geral de exemplos apresentada no capítulo três, isto é, a restrições de representações induzidas.

Finalizamos o capítulo cinco mostrando uma adjunção entre os funtores $\mathrm{Res}_H^G : \mathrm{PRep}_G^H \to \mathrm{Rep}_H$ e PInd_H^G.

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{PInd}_H^G W, U) \cong \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G U).$$

O funtor Res_H^G que nada mais é do que tomar a restrição de uma $G-$representação parcial $H-$global à H, formando por definição uma representação global de H. Já o funtor PInd_H^G toma uma representação global de H e associa a uma $G-$representação parcial $H-$global, a qual é chamada de *Indução parcial*. Esse resultado é conhecido como *Reciprocidade de Frobenius*.

Para os capítulos três, quatro e cinco nos baseamos no ótimo artigo [3] "Partial and Global Representations of Finite Groups".

Capítulo 1

AÇÕES PARCIAIS DE GRUPOS E AÇÕES DE SEMIGRUPOS INVERSOS

Neste capítulo iremos construir, através de um grupo G fixado, um semigrupo inverso $S(G)$. A partir disso, mostraremos que as ações de $S(G)$ estão em uma correspondência biunívoca com as ações parciais de G. Nesse sentido, estudar a teoria de representações de G é equivalente a estudar a teoria de representações de $S(G)$. Essa construção pode ser encontrada com mais detalhes em [7].

1.1 Ações parciais de grupos

Definição 1.1.1. Dado um conjunto X e um grupo G, uma função $\alpha : G \times X \to X$ é uma ação global do grupo G no conjunto X se

1. $\alpha(e, x) = x, \forall x \in X$, onde e é o elemento neutro de G.

2. $\alpha(g \cdot h, x) = \alpha(g, \alpha(h, x))$, para quaisquer $g, h \in G$ e $x \in X$.

Observação 1.1.2. Note que é possível definir, de maneira equivalente, uma ação global de G em X como um homomorfismo de grupos $\beta : G \to \mathrm{Sym}(X)$, onde $\mathrm{Sym}(X)$ é o grupo das bijeções de X com a operação dada pela composição, e ainda, para cada g em G definimos $\beta(g) : X \to X$ por $\beta(g)(x) = \alpha(g, x)$.

Definição 1.1.3. Sejam G um grupo e X um conjunto, uma *ação parcial* de G em X é um par

$$\Theta = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\theta_t\}_{t \in G}),$$

onde, para cada $t \in G$, D_t é um subconjunto de X e $\theta_t : D_{t^{-1}} \to D_t$ é uma função bijetora, satisfazendo, para todos r e s em G,

i) $D_e = X$ e $\theta_e = id_X$.

ii) $\theta_r(D_{r^{-1}} \cap D_s) = D_r \cap D_{rs}$,

iii) $\theta_r(\theta_s(x)) = \theta_{rs}(x), \qquad x \in D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}r^{-1}}$.

Observação 1.1.4. Em algumas referências, a condição ii) é substituída por $\theta_r^{-1}(D_r \cap D_{s^{-1}}) \subseteq D_{(rs)^{-1}}$. Como também, a condição iii) é substituída por $\theta_r(\theta_s(x)) = \theta_{rs}(x)$, sempre que $x \in {\theta_s}^{-1}(D_s \cap D_{r^{-1}})$, pois $D_{s^{-1}} \cap D_{s^{-1}r^{-1}} = {\theta_s}^{-1}(D_s \cap D_{r^{-1}})$. A prova dessas equivalências podem ser consultada em [4].

Exemplo 1.1.5. Toda ação global β de um grupo G em um conjunto X é uma ação parcial $\beta = (\{D_t\}_{t\in G}, \{\beta_t\}_{t\in G})$, com $D_t = X$ e $\beta_t = \beta$, para todo $t \in G$.

Exemplo 1.1.6. Dada uma ação global $\beta : G \to \text{Sym}(X)$ e $Y \subseteq X$, podemos induzir uma ação parcial $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ em Y, onde $D_g = Y \cap \beta_g(Y)$ e α_g é a restrição de β_g a $D_{g^{-1}}$.

De fato, observe que para cada $g \in G$ temos $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ bem definida e sobrejetora, pois

$$\begin{aligned}\alpha_g(D_{g^{-1}}) &= \alpha_g(Y \cap \beta_{g^{-1}}(Y)) = \beta_g(Y \cap \beta_{g^{-1}}(Y))\\ &= \beta_g(Y) \cap \beta_g(\beta_{g^{-1}}(Y)) = \beta_g(Y) \cap Y = D_g.\end{aligned}$$

Além de ser injetora, por ser restrição de β_g, a qual é injetora.

Agora vejamos que assim definida $\alpha = (\{D_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ satisfaz as três condições para ser uma ação parcial de G em Y.

i) $D_e = \beta_e(Y) \cap Y = Y \cap Y = Y$ e $\alpha_e = \beta_e = id_Y$.

ii) sejam $g, h \in G$, então

$$\begin{aligned}\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) &= \beta_e(Y \cap \beta_{g^{-1}}(Y) \cap Y \cap \beta_h(Y)) = \beta_g(Y) \cap Y\beta_g(Y) \cap \beta_g\beta_h(Y)\\ &= \beta_g(Y) \cap Y \cap \beta_{gh}(Y) = Y \cap \beta_g(Y) \cap Y\beta_{gh}(Y) = D_g \cap D_{gh}.\end{aligned}$$

iii) seja $y \in D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$ então $\alpha_g(\alpha_h(y))$ está bem definido, pois $\alpha_h(y) \in Y \cap \beta_h(Y)\beta_{g^{-1}}(Y) \subseteq D_{g^{-1}}$, assim,

$$\alpha_g(\alpha_h(y)) = \beta_g(\beta_h(y)) = \beta_{gh}(y) = \alpha_{gh}(y),$$

como queríamos.

Portanto, temos uma ação parcial de G em Y.

1.2 O semigrupo inverso associado a um grupo

A partir daqui, fixado um grupo finito G, nosso objetivo é construir um semigrupo inverso $S(G)$ tal que as ações parciais de G em um conjunto X formam uma correspondência biunívoca com os ações de $S(G)$.

Definição 1.2.1. Um semigrupo S é dito um **semigrupo inverso** se para todo $x \in S$, existe um único elemento $x^* \in S$ tal que

i) $x(x^*x) = x$

ii) $(x^*x)x^* = x^*$.

Definição 1.2.2. Seja X um conjunto não-vazio. Uma função parcialmente bijetora em X é uma função bijetora $\phi : A \to B$ onde A e B são subconjuntos de X. O conjunto de todas as funções parcialmente bijetoras em X será denotado por $\mathcal{I}(X)$.

Exemplo 1.2.3. O conjunto $\mathcal{I}(X)$ é um semigrupo inverso. A operação em $\mathcal{I}(X)$ é a composição no maior domínio possível, isto é, se ϕ e $\psi \in \mathcal{I}(X)$ então

$$\mathrm{dom}(\phi\psi) = \psi^{-1}(\mathrm{ran}(\psi) \cap \mathrm{dom}(\phi)) \text{ e } \mathrm{ran}(\phi\psi) = \phi(\mathrm{ran}(\psi) \cap \mathrm{dom}(\phi)),$$

e para $x \in \mathrm{dom}(\phi\psi)$ define-se $(\phi\psi)(x) = \phi(\psi(x))$.

Pode-se verificar que esta operação é associativa. O elemento ϕ^* correspondente à bijeção $\phi : A \to B$ é sua inversa $\phi^{-1} : B \to A$. Como $\phi\phi^{-1} = id_B$ e $\phi^{-1}\phi = id_A$, fica claro que as igualdades $\phi\phi^{-1}\phi = \phi$ e $\phi^{-1}\phi\phi^{-1} = \phi^{-1}$ são satisfeitas; pode-se provar também que se γ é uma função parcialmente bijetora e $\phi\gamma\phi = \phi$, $\gamma\phi\gamma = \gamma$, então $\gamma = \phi^{-1}$.

Um resultado fundamental envolvendo semigrupos inversos é o Teorema de representação de Wagner-Preston, que diz que todo semigrupo inverso é isomorfo a um subsemigrupo de $\mathcal{I}(X)$. Este resultado pode ser consultado em [9].

Definição 1.2.4. Uma *ação* do semigrupo inverso S em um conjunto X é um homomorfismo $\pi : S \to \mathcal{I}(X)$.

Definição 1.2.5. Seja G um grupo, denotaremos por $S(G)$ o semigrupo definido a partir dos geradores e das relações conforme segue. Para cada elemento $t \in G$, considere o gerador $[t]$. Para cada par de elementos t, s em G, considere as relações

i) $[s^{-1}][s][t] = [s^{-1}][st]$,

ii) $[s][t][t^{-1}] = [st][t^{-1}]$,

iii) $[s][e] = [s]$.

$S(G)$ é o semigrupo obtido como quociente do semigrupo livre gerado pelo conjunto $\{[t]; t \in G\}$ pela congruência gerada pelas relaçoes (i), (ii) e (iii).

Observação 1.2.6. Note que de i) e iii) temos que $[t][t^{-1}][t] = [t]$, o que nos dá uma pista de que $S(G)$ pode ser visto como um semigrupo inverso. Outra observação é que prova-se facilmente a partir dos axiomas ii) e i) que $[e][s] = [s]$, por dizer

$$[e][s] = [ss^{-1}][s] = [s][s^{-1}][s] = [s].$$

Proposição 1.2.7. *Dados um semigrupo S e uma função $f : G \to S$ satisfazendo* *i)* $f(s^{-1})f(s)f(t) = f(s^{-1})f(st)$,

ii) $f(s)f(t)f(t^{-1}) = f(st)f(t^{-1})$,

iii) $f(s)f(e) = f(s)$,

existe um único homomorfismo $\tilde{f} : S(G) \to S$ tal que $\tilde{f}([t]) = f(t)$.

Demonstração. Segue da Definição 1.2.5. Mais detalhes podem ser vistos em [9]. □

Proposição 1.2.8. *Existe uma involução $* : S(G) \to S(G)$ tal que para todo $t \in G$ vale $[t]^* = [t^{-1}]$.*

Demonstração. Seja $S(G)^{op}$ o semigrupo oposto, ou seja, $S(G)^{op}$ é o mesmo conjunto que $S(G)$, mas a multiplicação de dois elementos α, β é dada por

$$\alpha \bullet \beta = \beta\alpha,$$

onde $\beta\alpha$, do lado direito, corresponde à multiplicação usual em $S(G)$.

Agora considere $f : G \to S(G)^{op}$ dada por $f(t) = [t^{-1}]$. Dessa maneira, como $S(G)$ satisfaz a Definição 1.2.5, segue que f satisfaz para todo $s, t \in G$ as condições da Proposição 1.2.7.

Assim, existe um homomorfismo $* : S(G) \to S(G)^{op}$, que em geradores é dado por $[t]^* = [t^{-1}]$. Observe que $*$ pode ser visto como um anti-homomorfismo de $S(G)$ para $S(G)$, em vez de $S(G)^{op}$. Essa aplicação é na verdade uma involução, pois em geradores temos $([t]^*)^* = [t]$ e, como $*$ é um anti-homomorfismo, segue que $(v^*)^* = v$ para todo $v \in S(G)$.

□

Para provar que $S(G)$ é, de fato, um semigrupo inverso, precisamos utilizar elementos especiais, tais elementos são chamados de idempotentes. A saber, um elemento ε em um semigrupo é dito idempotente se $\varepsilon^2 = \varepsilon$.

Proposição 1.2.9. *Para todo $t \in G$ defina $\varepsilon_t = [t][t^{-1}] \in S(G)$. Então, para todo $t, s \in G$ valem as seguintes propriedades:*

i) *ε_t é idempotente auto-adjunto, isto é, $\varepsilon_t^* = \varepsilon_t = \varepsilon_t^2$.*

ii) $[t]\varepsilon_s = \varepsilon_{ts}[t]$.

iii) *ε_t e ε_s comutam.*

Demonstração.

i) Utilizando o fato de que $*$ é anti-morfismo temos que $\varepsilon_t^* = ([t][t^{-1}])^* = [t^{-1}]^*[t]^* = [t][t^{-1}] = \varepsilon_t$. Por outro lado, $\varepsilon_t^2 = [t][t^{-1}][t][t^{-1}] = [t][t^{-1}t][t^{-1}] = [t][t^{-1}] = \varepsilon_t$.

Assim, vale que $\varepsilon_t^* = \varepsilon_t = \varepsilon_t^2$.

ii) Lembrando que $[ts] = [ts][(ts)^{-1}][ts]$ e, utilizando i) e ii) da Definição 1.2.5, obtemos

$$[t]\varepsilon_s = [t][s][s^{-1}] = [ts][s^{-1}] = [ts][s^{-1}t^{-1}][ts][s^{-1}] = [ts][s^{-1}t^{-1}][t] = \varepsilon_{ts}[t].$$

iii) Por fim, temos

$$\varepsilon_t\varepsilon_s = [t][t^{-1}]\varepsilon_s = [t]\varepsilon_{t^{-1}s}[t^{-1}] = \varepsilon_s[t][t^{-1}] = \varepsilon_s\varepsilon_t$$

□

Proposição 1.2.10. *Todo elemento $\alpha \in S(G)$ admite uma decomposição $\alpha = \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]$, onde $n \geq 0$ e $r_1, \ldots, r_n, s$ são elementos de G. Além disso, podemos assumir que*

i) $r_i \neq r_j$, para todo $i \neq j$.

ii) $r_i \neq s$ e $r_i \neq e$ para todo i.

Demonstração. Seja S o subconjunto de $S(G)$ consistindo de todos os elementos $\alpha \in S(G)$ que admitem uma decomposição como acima. Note que cada $[s] \in S$, pois basta tomar $n = 0$. Então, para provar a afirmação é suficiente provar que S é um subsemigrupo de $S(G)$, já que os $[s]'s$ geram $S(G)$.

Dito isso, seja $\alpha = \varepsilon_{r_1}\ldots\varepsilon_{r_n}[s]$, basta provar que $\alpha[t] \in S$, pois dessa maneira provamos que S é um ideal à direita e portanto um subsemigrupo. Nesse sentido, perceba que

$$[s][t] = [s][s^{-1}][s][t] = [s][s^{-1}][st] = \varepsilon_s[st],$$

logo,

$$\alpha[t] = \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[s][t] = \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_s[st] \in S.$$

Com isso, resta-nos provar i) e ii). Para i), note que como os ε_{r_j} comutam e são idempotentes, podemos eliminar as repetições. Agora para ii), se existe $r_i = s$ então $\varepsilon_{r_i} = [s][s^{-1}]$, assim,

$$\alpha = \varepsilon_{r_1}\cdots\widehat{\varepsilon_{r_i}}\cdots\varepsilon_{r_n}[s][s^{-1}][s] = \varepsilon_{r_1}\cdots\widehat{\varepsilon_{r_i}}\cdots\varepsilon_{r_n}[s],$$

ou seja, ε_{r_i} pode ser eliminado da decomposição. □

Definição 1.2.11. A decomposição $\alpha = \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]$ satisfazendo as condições i) e ii) da Proposição 1.2.10 é chamada de *forma padrão*.

A forma padrão de um elemento $\alpha \in S(G)$ será de fundamental importância para provar que $S(G)$ é um semigrupo inverso. A proposição a seguir nos dá uma boa dica de como isso será feito.

Proposição 1.2.12. *Para cada $\alpha \in S(G)$, temos que $\alpha\alpha^*\alpha = \alpha$ e $\alpha^*\alpha\alpha^* = \alpha^*$.*

Demonstração. Seja $\alpha \in S(G)$, escrevamos $\alpha = \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]$, então

$$\alpha^* = (\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[s])^* = [s^{-1}]\varepsilon_{r_n}\cdots\varepsilon_{r_1}.$$

Assim,

$$\alpha\alpha^*\alpha = \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[s][s^{-1}]\varepsilon_{r_n}\cdots\varepsilon_{r_1}\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[s] = \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_s\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]$$
$$= \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}\varepsilon_s[s] = \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[s][s^{-1}][s] = \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[s] = \alpha.$$

O caso $\alpha^*\alpha\alpha^* = \alpha^*$ é análogo ao anterior. □

Diante do que foi dito, para provar que $S(G)$ é, de fato, um semigrupo inverso resta-nos garantir que para cada α em $S(G)$ o elemento α^* é único. Para tal, iremos estudar as representações de $S(G)$, conforme segue na próxima seção.

1.3 Representações de S(G)

É importante deixar claro que a expressão "representação de $S(G)$" aqui será utilizada apenas para se referir a um homomorfismo de $S(G)$ para algum semigrupo. Essas representações são frequentemente obtidas através de funções que satisfazem a Proposição 1.2.7.

Um exemplo que será útil nesse texto é a representação $\partial : S(G) \to G$ dada por $\partial([t]) = t$, obtida através da função identidade $id : G \to G$. Se $\alpha \in S(G)$, chamaremos $\partial(\alpha)$ de *grau* de α

Observação 1.3.1. Note que ao escrever $\alpha = \varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]$, temos $\partial(\alpha) = \partial(\varepsilon_{r_1}\cdots\varepsilon_{r_n}[s]) = s$, pois $\partial(\varepsilon_{r_i}) = e, \forall i = 1,\ldots,n$.

Agora construiremos outra representação um pouco mais elaborada. Seja $\mathcal{P}_e(G)$ o conjunto de todos os subconjuntos finitos de G que contém e. Então, G e $\{e\}$ são, respectivamente, o maior e o menor elemento de $\mathcal{P}_e(G)$. Dito isso, considere $\mathcal{F}(\mathcal{P}_e(G))$ o semigrupo consistindo de todas as funções com valores em $\mathcal{P}_e(G)$, com a regra da composição.

Assim, defina para cada $t \in G$ a função $\phi_t : \mathcal{P}_e(G) \to \mathcal{P}_e(G)$ dada por $\phi_t(E) = tE \cup \{e\}$ paa cada $E \in \mathcal{P}_e(G)$, onde tE é o conjunto $tE = \{ts : s \in E\}$. Por praticidade, note que como $e \in E$, podemos escrever $\phi_t(E) = tE \cup \{t, e\}$.

Proposição 1.3.2. *A função $f : G \to \mathcal{F}(\mathcal{P}_e(G))$ dada por $f(t) = \phi_t$ satisfaz as propriedades i) - iii) da Proposição 1.2.7, nesse sentido, existe uma única representação $\Lambda : S(G) \to \mathcal{F}(\mathcal{P}_e(G))$ tal que $\Lambda([t]) = \phi_t$.*

Demonstração. Sejam $t, s \in G$ e $E \in \mathcal{P}_e(G)$ qualquer, então temos

i) $f(s^{-1})f(s)f(t)(E) = \phi_{s^{-1}}(\phi_s(\phi_t(E))) = \phi_{s^{-1}}(\phi_s(tE\cup\{t,e\})) = \phi_{s^{-1}}(stE\cup\{st,s,e\}) = tE\cup\{t,e,s^{-1}\}$,

   por outro lado,

   $f(s^{-1})f(st)(E) = \phi_{s^{-1}}((\phi_{st})(E)) = \phi_{s^{-1}}(stE \cup \{st, e\}) = tE \cup \{t, s^{-1}, e\}$.

   Assim, temos $f(s^{-1})f(s)f(t)(E) = f(s^{-1})f(st)(E)$.

ii) é completamente análogo ao item i). Provaremos abaixo o item iii).

iii) $f(s)f(e)(E) = \phi_s(\phi_e(E)) = \phi_s(eE \cup \{e\}) = \phi_s(E) = f(s)(E)$.

Portanto, como i),ii) e iii) são válidos, segue da Proposição 1.2.7 que existe uma representação $\Lambda : S(G) \to \mathcal{F}(\mathcal{P}_e(G))$, onde $\Lambda([t]) = \phi_t$. $\square$

Observação 1.3.3. Note que, se $r \in G$ e $E \in \mathcal{P}_e(G)$ então

$$\Lambda(\varepsilon_r)(E) = \Lambda([r][r^{-1}])(E) = \Lambda([r])(\Lambda(r^{-1})(E)) = \Lambda([r])(r^{-1}E \cup \{e\}) = E \cup \{r\}.$$

Além disso, se $\alpha = \varepsilon_{r_1} \ldots \varepsilon_{r_n}[s]$, então $\Lambda(\alpha)(\{e\}) = \{r_1, \ldots, r_n, s, e\}$.

A partir das duas representações apresentadas anteriormente podemos, finalmente, provar a unicidade da decomposição padrão de um elemento qualquer $\alpha \in S(G)$, conforme segue.

Proposição 1.3.4. *Se $\alpha \in S(G)$ então α admite uma única decomposição padrão*

$$\alpha = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[s],$$

a menos de reordenação dos $\varepsilon_r' s$.

Demonstração. Supondo que α admita outra decomposição dada por $\alpha = \varepsilon_{t_1} \cdots \varepsilon_{t_m}[u]$, então $\partial(\alpha) = u$. Mas, $\alpha = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[s]$, assim, $\partial(\alpha) = s$. Logo, podemos concluir que $s = u$.

Da Observação 1.3.3, temos $\Lambda(\alpha)(\{e\}) = \{r_1, \ldots, r_n, s, e\}$, por outro lado, $\Lambda(\alpha)(\{e\}) = \{t_1, \ldots, t_m, u, e\}$. Daí,

$$\{r_1, \ldots, r_n\} \setminus \{s, e\} = \{t_1, \ldots, t_m\} \setminus \{u, e\},$$

o que nos leva a

$$\{r_1, \ldots, r_n\} = \{t_1, \ldots, t_m\},$$

como queríamos. $\square$

Teorema 1.3.5. *Se G é um grupo finito de ordem n então $S(G)$ possui $2^{n-2}(n+1)$ elementos.*

Demonstração. De fato, como $\varepsilon_e = e$ então existem 2^{n-1} elementos da forma $\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_k}[e]$ e $n-1$ escolhas possíveis para $s \neq e$, sendo assim, existem 2^{n-2} elementos da forma $\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_k}[s]$. Portanto, a quantidade de elementos em $S(G)$ é dada por $2^{n-1} + (n-1)2^{n-2} = 2^{n-2}(n+1)$. $\square$

Teorema 1.3.6. *Para todo grupo G, $S(G)$ é um semigrupo inverso.*

Demonstração. Já vimos na Proposição 1.2.12 que α^* satisfaz as condições de "inverso". Suponha que existe um elemento $\beta \in S(G)$ tal que $\alpha\beta\alpha = \alpha$ e $\beta\alpha\beta = \beta$. Escrevendo na forma padrão temos

$$\alpha = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[s]$$

e

$$\beta^* = \varepsilon_{t_1} \cdots \varepsilon_{t_m}[u].$$

Assim, $\beta = [u^{-1}]\varepsilon_{t_1} \cdots \varepsilon_{t_m}$ e então $s = \partial(\alpha) = \partial(\alpha\beta\alpha) = \partial(\alpha)\partial(\beta)\partial(\alpha) = su^{-1}s$, segue que $u = s$. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
\alpha\beta\alpha &= \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[s][s^{-1}]\varepsilon_{t_1} \ldots \varepsilon_{t_m}\varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[s] \\
&= \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}[s]\varepsilon_s\varepsilon_{t_1} \ldots \varepsilon_{t_m}[s] = \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}\varepsilon_{t_1} \cdots \varepsilon_{t_m}\varepsilon_s[s] \\
&= \varepsilon_{r_1} \cdots \varepsilon_{r_n}\varepsilon_{t_1} \cdots \varepsilon_{t_m}[s] = \alpha.
\end{aligned}$$

Da unicidade da decomposição padrão, temos que

$$\{r_1, \ldots, r_n\} \cup \{t_1, \ldots, t_m\} = \{r_1, \ldots, r_n\},$$

ou seja, $\{t_1, \ldots, t_m\} \subset \{r_1, \ldots, r_n\}$.

Utilizando o fato de que $\beta^*\alpha^*\beta^* = \beta^*$ e fazendo um processo análogo ao acima temos que $\{r_1, \ldots, r_n\} \subset \{t_1, \ldots, t_m\}$.

Portanto, $\beta = \alpha^*$. □

1.4 Ações de semigrupos inversos vs ações parciais de grupos

Lembre que uma ação parcial de um grupo G em um conjunto X é uma função $\theta : G \to \mathcal{I}(X)$ satisfazendo as condições de 1.1.3. O objetivo desta seção é mostrar que existe uma correspondência biunívoca entre as ações parciais de um grupo G em um conjunto X e as ações de $S(G)$ em X.

Proposição 1.4.1. *Sejam G um grupo e X um conjunto. Uma função $\theta : G \to \mathcal{I}(X)$ nos dá uma ação parcial de G em X se, e somente se, para todo $s, t \in G$, valerem as condições a seguir*

i) $\theta_s\theta_t\theta_{t^{-1}} = \theta_{st}\theta_{t^{-1}}$;

ii) $\theta_e = id_X$;

iii) $\theta_{s^{-1}}\theta_s\theta_t = \theta_{s^{-1}}\theta_{st}$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$: suponha que $\theta : G \to \mathcal{I}(X)$ nos dá uma ação parcial de G em X. Mostraremos que as condições i),ii) e iii) são satisfeitas.

i)Seja $x \in D_t$, afirmamos que $\theta_s\theta_t\theta_{t^{-1}}(x) = \theta_{st}\theta_{t^{-1}}(x)$. Uma vez que a composição $\theta_s\theta_t\theta_{t^{-1}}(x)$ precisa estar bem definida, temos que $\theta_t(\theta_{t^{-1}}(x)) \in D_t \cap D_{s-1}$. Por se tratar de bijeções, segue que $\theta_{t^{-1}}(x) \in \theta_t^{-1}(D_t \cap D_{s^{-1}})$. Mas se $\theta_{t^{-1}}(x) \in \theta_t^{-1}(D_t \cap D_{s^{-1}})$, segue da Definição 1.1.3, item iii) (e da Observação 1.1.4), que $\theta_s\theta_t(\theta_{t^{-1}}(x)) = \theta_{st}(\theta_{t^{-1}}(x))$.

ii) Segue diretamente da condição i) da Definição 1.1.3.

iii) Como já provamos i), vale que $\theta_{t^{-1}}\theta_{s^{-1}}\theta_s = \theta_{t^{-1}s^{-1}}\theta_s$ e $\theta_t^* = \theta_t^{-1}$, temos

$$\theta_{s^{-1}}\theta_s\theta_t = (\theta_{t^{-1}}\theta_{s^{-1}}\theta_s)^* = (\theta_{t^{-1}s^{-1}}\theta_s)^* = \theta_{s^{-1}}\theta_{st}.$$

($\Leftarrow$) : assumindo que as condições i),ii) e iii) são válidas para todo $s, t \in G$, em particular para $s = t^{-1}$, temos

$$\theta_{t^{-1}}\theta_t\theta_{t^{-1}} = \theta_{t^{-1}t}\theta_{t^{-1}} = \theta_e\theta_{t^{-1}} = \theta_{t^{-1}}.$$

Pelo mesmo processo, mas substituindo t e t^{-1}, temos também $\theta_t\theta_{t^{-1}}\theta_t = \theta_t$. Então, pela unicidade dos inversos no semigrupo inverso $\mathcal{I}(X)$, concluímos que $\theta_t^* = \theta_{t^{-1}}$. Defina $D_t = \mathrm{ran}(\theta_t)$, então

$$\mathrm{dom}(\theta_t) = \mathrm{ran}(\theta_t^*) = \mathrm{ran}(\theta_{t^{-1}}) = D_{t^{-1}},$$

ou seja, θ_t é uma função de $D_{t^{-1}}$ para D_t, como queríamos. Agora, para quaisquer $s, t \in G$, temos

$$\theta_{t^{-1}}\theta_{s^{-1}} = \theta_{t^{-1}}\theta_{s^{-1}}\theta_s\theta_{s^{-1}} = \theta_{t^{-1}s^{-1}}\theta_s\theta_{s^{-1}}.$$

Em particular, o domínio dessas duas composições devem coincidir. Do lado esquerdo temos

$$\mathrm{dom}(\theta_{t^{-1}}\theta_{s^{-1}}) = \theta_s(D_{s^{-1}} \cap D_t).$$

Agora note que $\theta_s\theta_{s^{-1}}$ é a função identidade em D_s, então, do lado direito temos

$$\mathrm{dom}(\theta_{t^{-1}s^{-1}}\theta_s\theta_{s^{-1}}) = D_s \cap D_{st}.$$

A condição iii) da Definição 1.1.3 vem da condição i) da nossa hipótese.

$\square$

Teorema 1.4.2. *Para todo grupo G e todo conjunto X, existe uma correspondência biunívoca entre*

a) Ações parciais de G em X

b) Ações de $S(G)$ em X.

Demonstração. Pela Proposição 1.2.7, existe uma correspondência biunívoca entre os homomorfismo de $S(G)$ para $\mathcal{I}(X)$ e as funções de G para $\mathcal{I}(X)$ satisfazendo as condições i),ii) e iii) de 1.2.7. Além disso, vimos na Proposição 1.4.1 que essas funções correspondem biunivocamente com as ações parciais de G em X. $\square$

Capítulo 2

REPRESENTAÇÕES PARCIAIS E A ÁLGEBRA PARCIAL DE GRUPO

Este capítulo será dividido em duas partes: primeiramente abordaremos as representações parciais de um grupo G e mostraremos que, sob certas condições, existe uma correspondência com as representações parciais isométricas. Na segunda parte mostraremos que também há uma correspondência entre as representações parciais de um grupo G e as representações de um álgebra chamada $K_{par}(G)$. Além disso, podemos descrever essa álgebra como soma direta de álgebras de matrizes. Este capítulo tem como base a referência [6].

2.1 Representação parcial de um grupo

Definição 2.1.1. Sejam G um grupo finito, K um corpo e $\mathcal{A}$ uma $K-$álgebra. Uma *representação parcial* de G em $\mathcal{A}$ (ou uma $G-$representação parcial) é uma função $\pi : G \to \mathcal{A}$ satisfazendo, para todo $s, t \in G$, as condições a seguir

a) $\pi(s)\pi(t)\pi(t^{-1}) = \pi(st)\pi(t^{-1})$.

b) $\pi(s^{-1})\pi(s)\pi(t) = \pi(s^{-1})\pi(st)$.

c) $\pi(e) = 1_{\mathcal{A}}$.

Uma representação parcial de G em um espaço vetorial V é uma representação parcial $\pi : G \to \operatorname{End} V$.

Exemplo 2.1.2. Observe que toda representação linear de um grupo G é uma representação parcial. Além disso, se H é um subgrupo de G e $\pi : H \to \operatorname{End}(V)$ é uma representação parcial de H então ao definir $\tilde{\pi} : G \to \operatorname{End}(V)$ por

$$\tilde{\pi}(g) = \begin{cases} \pi(g), & \text{se} \quad g \in H; \\ 0, & \text{se} \quad g \notin H, \end{cases}$$

temos uma representação parcial em G. Logo, a Definição 2.1.1 também faz sentido para grupos infinitos.

Definição 2.1.3. Dado um conjunto X, seja $K[X]$ o espaço vetorial com base X. Para todo subconjunto $Y \subset X$, seja $P_Y : K[X] \to K[Y]$ a projeção cujo núcleo é $K[X \setminus Y]$. Dada uma ação parcial $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ de um grupo G em um conjunto X, a função $\hat{\alpha} : G \to \operatorname{End} K[X]$ definida por

$$\hat{\alpha}(g)(x) := \alpha_g(P_{X_{g^{-1}}}(x)) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \notin X_{g^{-1}}; \\ \alpha_g(x), & \text{se} \quad x \in X_{g^{-1}}. \end{cases}$$

é chamada de linearização de (X, α).

Proposição 2.1.4. *A linearização $(K[X], \hat{\alpha})$ definida anteriormente é uma representação parcial de G em $K[X]$.*

Demonstração. Sejam $g, h \in G$ e $x \in K[X]$. Se $x \notin X_g$ então $\hat{\alpha(h)}\hat{\alpha(g)}\hat{\alpha}(g^{-1})(x) = \hat{\alpha(hg)}\hat{\alpha}(g^{-1})(x) = 0$, pois $\hat{\alpha}(g^{-1})(x) = 0$. Supondo agora que $x \in X_g$, temos

$$\hat{\alpha}(h)\hat{\alpha}(g)\hat{\alpha}(g^{-1})(x) = \hat{\alpha}(h)\hat{\alpha}(g)(\alpha_{g^{-1}}(x)) = \hat{\alpha}(h)(\alpha_g\alpha_{g^{-1}}(x)) = \hat{\alpha}(h)(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \notin X_g \cap X_{h^{-1}}; \\ \alpha_h(x), & \text{se} \quad x \in X_g \cap X_{h^{-1}}. \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\hat{\alpha}(hg)\hat{\alpha}(g^{-1})(x) = \hat{\alpha}(hg)\alpha_{g^{-1}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad \alpha_{g^{-1}}(x) \notin X_{g^{-1}} \cap X_{hg^{-1}}; \\ \alpha_{hg}(\alpha_{g^{-1}}(x)), & \text{se} \quad \alpha_{g^{-1}}(x) \in X_{g^{-1}} \cap X_{hg^{-1}}. \end{cases}$$

Mas se $\alpha_{g^{-1}}(x) \in X_{g^{-1}} \cap X_{hg^{-1}}$ então $\alpha_{hg}\alpha_{g^{-1}}(x) = \alpha_h\alpha_g\alpha_{g^{-1}}(x) = \alpha_h(x)$, assim, podemos rescrever

$$\hat{\alpha}(hg)\hat{\alpha}(g^{-1})(x) = \hat{\alpha}(hg)\alpha_{g^{-1}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad \alpha_{g^{-1}}(x) \notin X_{g^{-1}} \cap X_{hg^{-1}}; \\ \alpha_h(x), & \text{se} \quad \alpha_{g^{-1}}(x) \in X_{g^{-1}} \cap X_{hg^{-1}}. \end{cases}$$

Além disso, como $X_{g^{-1}} \cap X_{hg^{-1}} = \alpha_g^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}})$, temos

$$\hat{\alpha}(hg)\hat{\alpha}(g^{-1})(x) = \hat{\alpha}(hg)\alpha_{g^{-1}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad \alpha_{g^{-1}}(x) \notin \alpha_g^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}}); \\ \alpha_h(x), & \text{se} \quad \alpha_{g^{-1}}(x) \in \alpha_g^{-1}(X_h \cap X_{g^{-1}}), \end{cases}$$

ou seja,

$$\hat{\alpha}(hg)\hat{\alpha}(g^{-1})(x) = \hat{\alpha}(hg)\alpha_{g^{-1}}(x) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \notin X_h \cap X_{g^{-1}}; \\ \alpha_h(x), & \text{se} \quad x \in X_h \cap X_{g^{-1}}, \end{cases}$$

o que implica na igualdade $\hat{\alpha}(hg)\hat{\alpha}(g^{-1})(x) = \hat{\alpha}(h)\hat{\alpha}(g)\hat{\alpha}(g^{-1})(x)$, para todo $x \in K[X]$. De maneira análoga prova-se que $\hat{\alpha}(g^{-1})\hat{\alpha}(gh) = \hat{\alpha}(g^{-1})\hat{\alpha}(g)\hat{\alpha}(h)$.

Por fim, $\hat{\alpha}(e)(x) = \alpha_e(x)$, pois $x \in X_e = K[X]$ e como α é ação parcial, segue que $\alpha_e(x) = x$, ou seja, $\hat{\alpha}(e) = id_{K[X]}$ $\square$

Observação 2.1.5. Assim como no caso de representações lineares de grupo, duas representações parciais $\pi_i : G \to \mathrm{End}(V_i), i = 1, 2$, são equivalentes se existe um isomorfismo linear $\phi : V_1 \to V_2$ tal que $\phi \circ \pi_i(g) = \pi_2(g) \circ \phi, \forall g \in G$. Além disso, se H é um espaço munido de um produto interno então uma *representação unitária* é uma representação π que vai de G no espaço de operadores limitados $B(H)$, tal que $\pi(g)^* = \pi(g)^{-1}, \forall g \in G$, onde $*$ denota o operador adjunto em $B(H)$.

Lembrando que para existir adjunto é preciso que o espaço seja Hilbert, ou seja, H é completo. Ao leitor mais curioso a respeito desse tema, sugerimos a referência [10]

Sabe-se que uma representação de um grupo finito em um espaço com produto interno é equivalente a uma representação unitária [12]. Mostraremos no que segue que o mesmo vale para representações parciais de um grupo finito.

Definição 2.1.6. Uma *Representação parcial isométrica* de G em um espaço de Hilbert complexo H é uma função $\pi : G \to B(H)$ tal que para todo $s, t \in G$, vale que

a) $\pi(s)\pi(t)\pi(t^{-1}) = \pi(st)\pi(t^{-1})$.

b) $\pi(t^{-1}) = \pi(t)^*$.

c) $\pi(e) = 1$.

Após definir representações parciais e representações parciais isométricas, vejamos que essas definições são equivalentes. Começamos mostrando que se $\pi : G \to B(H)$ é uma representação parcial isométrica então π é uma representação parcial. De fato, se $s, t \in G$ então por a) e b) da Definição 2.1.6 temos

$$\pi(s^{-1})\pi(s)\pi(t) = (\pi(t^{-1})\pi(s^{-1})\pi(s))^* = (\pi(t^{-1}s^{-1})\pi(s))^* = \pi(s^{-1})\pi(st).$$

Com isso, a condição b) da Definição 2.1.1 é satisfeita. Uma vez que a) e c) são herdadas da definição de representação parcial isométrica, temos que π é uma representação parcial. Reciprocamente, dada uma representação parcial π, então é possível construir uma representação parcial isométrica, a qual é equivalente a π, conforme a proposição a seguir.

Proposição 2.1.7. *Seja $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dada uma representação parcial $\pi : G \to \mathrm{End}(V)$, existe uma representação parcial isométrica π_1 de G, a qual é equivalente a π.*

Demonstração. Provaremos que dada uma representação parcial qualquer $\pi : G \to \mathrm{End}(V)$, com V um $\mathbb{C}-$espaço vetorial, então existe um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em V tal que

$$\langle \pi(g)\xi, \eta \rangle = \langle \xi, \pi(g)^{-1}\eta \rangle, \forall g \in G, \forall \xi, \eta \in V. \tag{2.1}$$

Para todo $t \in G$, defina $\epsilon(t) := \pi(t)\pi(t^{-1})$. Afirmamos que os $\epsilon(t)'s$ são idempotentes que comutam em $\mathrm{End}(V)$. Com efeito,

$$\epsilon(t)^2 = \pi(t)\pi(t^{-1})\pi(t)\pi(t^{-1}) = \pi(t)\pi(e)\pi(t^{-1}) = \epsilon(t), \forall t, s \in G.$$

Para ver que comutam, note que

$$\begin{aligned}
\pi(t)\epsilon(s) &= \pi(t)\pi(s)\pi(s^{-1}) = \pi(ts)\pi(s^{-1}) \\
&= \pi(ts)\pi(s^{-1}t^{-1})\pi(ts)\pi(s^{-1}) \\
&= \pi(ts)\pi(s^{-1}t^{-1})\pi(t) = \epsilon(ts)\pi(t),
\end{aligned} \tag{2.2}$$

assim,

$$\begin{aligned}
\epsilon(t)\epsilon(s) &= \pi(t)\pi(t^{-1})\epsilon(s) = \pi(t)\epsilon(t^{-1}s)\pi(t^{-1}) \\
&= \epsilon(s)\pi(t)\pi(t^{-1}) = \epsilon(s)\epsilon(t).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Agora, seja $S \subset G$ um subconjunto, denote por P_S o elemento em $\mathrm{End}(V)$ dado por

$$P_S = \prod_{s \in S} \epsilon(s) \prod_{s \notin S} (1 - \epsilon(s)). \tag{2.4}$$

Segue de (2.2) a seguinte igualdade

$$\pi(t)P_S = P_{tS}\pi(t). \tag{2.5}$$

Além disso, uma vez que $\epsilon(e) = 1$, temos que se $e \notin S$ então P_S é o operador nulo, Além disso, se $t \notin S$ então $P_S\pi(t) = 0$, pois $\epsilon(t)\pi(t) = \pi(t)$. A partir disso, afirmamos que vale a identidade a seguir

$$\sum_{S \subseteq G} P_S = 1, \tag{2.6}$$

onde a soma é tomada sobre todos os subconjuntos de G, inclusive o conjunto vazio.

De fato, temos

$$1 = \prod_{s \in G} 1 = \prod_{s \in G} (1 - \epsilon(s) + \epsilon(s)) = \sum_{S \subseteq G} \left(\left[\prod_{t \in S} \epsilon(t) \right] \cdot \left[\prod_{t \notin S} (1 - \epsilon(t)) \right] \right) = \prod_{S \subseteq G} P_S.$$

Considere $[\cdot, \cdot]$ um produto interno em V, então podemos construir um novo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em V da seguinte forma

$$\langle \xi, \eta \rangle := \sum_S \sum_{t \in G} [P_S\pi(t)\xi, P_S\pi(t)\eta]. \tag{2.7}$$

Como os termos são lineares e $[\cdot, \cdot]$ é produto interno, é suficiente provar que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é positivo definido. Supondo $\langle \xi, \xi \rangle = 0$, temos que cada termo da soma $\sum_S \sum_{t \in G} [P_S\pi(t)\xi, P_s\pi(t)\xi]$ é nulo. Em particular, temos $P_S\xi = 0$ para cada $S \subseteq G$, mas da identidade (2.6) obtemos

$$\xi = Id(\xi) = \sum_{S \subseteq G} P_s(\xi) = 0.$$

Portanto, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ define um produto interno.

Finalmente provaremos a igualdade (2.1). Para tal, note que para todo $S \subseteq G, t, r \in G$ e $\xi, \eta \in V$, a identidade a seguir é válida

$$[P_S\pi(t)\pi(r)\xi, P_S\pi(t)\eta] = [P_S\pi(tr)\xi, P_S\pi(t)\eta], \tag{2.8}$$

e, analogamente

$$[P_S\pi(t)\xi, P_S\pi(t)\pi(r)\eta] = [P_S\pi(t)\xi, P_S\pi(tr)\eta]. \tag{2.9}$$

De fato, se $t \notin S$, então conforme dito anteriormente $P_S\pi(t) = 0$ e ambos os lados de (2.8) são nulos e portanto faz-se válida. Por outro lado, se $t \in S$, então $P_S\epsilon(t) = P_S$, assim,

$$P_S\pi(t)\pi(r) = P_S\epsilon(t)\pi(t)\pi(r) = P_S\epsilon(t)\pi(tr) = P_S\pi(tr),$$

o que prova (2.8).

Por fim, utilizando (2.8) e (2.9), temos para $g \in G$ e $\xi, \eta \in V$

$$\begin{aligned}
\langle \pi(g)\xi, \eta\rangle &= \sum_{S\subseteq G}\sum_{t\in G}[P_S\pi(t)\pi(g)\xi, P_S\pi(t)\eta] \\
&= \sum_{S\subseteq G}\sum_{t'\in G}[P_S\pi(t')\xi, P_S\pi(t'g^{-1})\eta] \\
&= \sum_{S\subseteq G}\sum_{t'\in G}[P_S\pi(t')\xi, P_S\pi(t')\pi(g^{-1})\eta] \\
&= \langle \xi, \pi(g^{-1})\eta\rangle,
\end{aligned}$$

o que conclui o resultado.

□

2.2 Representações de $K_{par}(G)$ vs representações parciais de um grupo

Assim como estudar as representações de KG é equivalente a estudar as representações lineares do grupo G, existe uma equivalência entre as representações parciais de um grupo G e uma certa álgebra chamada *álgebra parcial de* G, denotada por $K_{par}(G)$. Esta seção tratará sobre o tema.

Definição 2.2.1. Seja G um grupo finito e K um corpo. A $K-$álgebra parcial de grupo $K_{par}(G)$ é a álgebra universal gerada por $\{[g] : g \in G\}$, seguindo as relações abaixo

1) $[e] = 1$,

2) $[s^{-1}][s][t] = [s^{-1}][st]$,

3) $[s][t][t^{-1}] = [st][t^{-1}]$,

para todo $s, t \in G$.

Observação 2.2.2. Note que se $\mathcal{A}$ é uma $K-$álgebra com unidade e $\pi : G \to \mathcal{A}$ é uma representação parcial de G em $\mathcal{A}$ então π se estende por linearidade, de forma única, a um homomorfismo de K-álgebras $\phi : K_{par}(G) \to \mathcal{A}$ tal que $\phi([g]) = \pi(g)$.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "proj"'] & \mathcal{A} \\ K_{par}(G) \arrow[ur, dashed, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

Reciprocamente, se $\phi : K_{par}(G) \to A$ é um homomorfismo de $K-$álgebras, então $\pi(t) = \phi([t])$ nos dá uma representação parcial de G em $\mathcal{A}$. A saber,

a)

$$\begin{aligned} \pi(s)\pi(t)\pi(t^{-1}) &= \phi([s])\phi([t])\phi([t^{-1}]) = \phi([s][t][t^{-1}]) \\ &= \phi([st][t^{-1}]) = \phi([st])\phi([t^{-1}]) \\ &= \pi(st)\pi(t^{-1}), \quad \forall s, t \in G. \end{aligned}$$

b) Análogo ao item a)

c) $\pi(e) = \phi([e]) = \phi(1) = 1$.

Portanto, como os axiomas a),b) e c) da Definição 2.1.1 são satisfeitos, segue que π é representação parcial de G em $\mathcal{A}$.

Do modo como definimos, a álgebra parcial de grupo $K_{par}(G)$ é a álgebra do semigrupo $S(G)$.

No entanto, é possível caracterizá-la de uma maneira que seja mais fácil estudar a correspondência entre as representações parciais de G e as representações de $K_{par}(G)$. Essa caracterização será feita por meio de um isomorfismo com outra álgebra, a qual será apresentada adiante, mas para isso precisaremos definir o que é um grupoide, conforme segue.

2.2.1 Grupoides

Um grupoide é simplesmente uma categoria pequena $\mathcal{C}$, na qual seus morfismos são invertíveis, ou seja,

- A classe de objetos $\mathcal{C}_0$ e e a classe de morfismos $\hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ são conjuntos, para todo $X, Y \in \mathcal{C}_0$.
- Para todo $f \in \hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$, existe um morfismo $g \in \hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$ tal que $fg = id_Y$ e $gf = id_X$.

No entanto, utilizaremos neste texto a definição a seguir, a qual pode ser consultada em [11]. Além disso, mostraremos que ambas são equivalentes.

Definição 2.2.3. Um grupoide G pode ser descrito por um conjunto de flechas (ou morfismos) G_1, um conjunto de objetos G_0 e o diagrama a seguir

$$\begin{tikzcd} G_2 \arrow[r, "m"] & G_1 \arrow[d, "i"] \arrow[r, shift left=2, "r"] \arrow[r, shift right=2, "s"'] & G_0 \arrow[l, "u"'] \\ & G_1 & \end{tikzcd}$$

onde G_2 é o conjunto $G_1 \times_{G_0} G_1$ de pares de flechas em que faz sentido a composição, por dizer,

$$G_2 = \{(f, g) \in G_1 \times G_1 : s(f) = r(g)\}.$$

O mapa m é chamado multiplicação (ou composição), por praticidade, se dados f, g tais que $s(f) = r(g)$ então denotaremos $m(f, g) \in G_1$ simplesmente por fg; s é o mapa fonte (ou domínio); r é o mapa alvo (ou imagem); i é o mapa inverso; e u é o mapa unidade. Assim, temos os seguintes axiomas

Axiomas categóricos:

$$s(u(x)) = x \qquad \text{fonte da unidade}$$
$$r(u(x)) = x \qquad \text{alvo da unidade}$$
$$s(fg) = s(g) \qquad \text{fonte do composição}$$
$$r(fg) = r(f) \qquad \text{alvo da composição}$$
$$(fg)h = f(gh) \qquad \text{associatividade}$$
$$u(r(f))f = f \qquad \text{lei da unidade à esquerda}$$
$$fu(s(f)) = f \qquad \text{lei da unidade à direita}$$

Axiomas de inverso:

$$s(i(f)) = r(f) \qquad \text{fonte do inverso}$$
$$r(i(f)) = s(f) \qquad \text{alvo do inverso}$$
$$fi(f) = u(r(f)) \qquad \text{lei do inverso à esquerda}$$
$$i(f)f = u(s(f)) \qquad \text{lei do inverso à direita}$$

Teorema 2.2.4. *G é um grupoide segundo a Definição 2.2.3 se, e somente se, G é uma categoria pequena na qual seus morfismos são invertíveis.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$:

Suponha que G é um grupoide segundo a Definição 2.2.3. Então vejamos que G pode ser visto como uma categoria $\mathcal{C}$, onde seus objetos são os elementos de G_0 e, dados dois objetos $x, y \in G_0$, temos $\hom_{\mathcal{C}}(x, y) =$

$\{f \in G_1 : s(f) = x, r(f) = y\}$. A composição é dada pela multiplicação em m em G, por dizer,

$$\begin{aligned} \circ : \hom_{\mathcal{C}}(y,z) \times \hom_{\mathcal{C}}(x,y) &\to \hom_{\mathcal{C}}(x,z) \\ (f,g) &\mapsto m(f,g) = fg \end{aligned}$$

que está bem definida pelos axiomas da fonte da composição e alvo da composição. Além disso, ela é associativa, pelo axioma de associatividade em G. Além disso, dado um objeto $x \in G_0$ então $u(x)$ é o morfismo identidade, isto pelos axiomas da lei da unidade à esquerda e à direita em G.

Por fim, a categoria é pequena porque G_0 e G_1 são conjuntos e, Além disso, todo morfismo f possui o inverso $i(f)$ (isto decorre dos axiomas da lei do inverso à esquerda e à direita).

$(\Leftarrow)$:

Considere agora uma categoria $\mathcal{C}$, a qual é pequena e seus morfismos possuem inverso. Assim, como $\mathcal{C}$ é pequena então defina G_0 como sendo o conjunto dos objetos de $\mathcal{C}$ e $G_1 = \bigcup_{x,y \in \mathcal{C}_0} Hom_{\mathcal{C}}(x,y)$.

Como $\mathcal{C}$ é categoria então as funções as funções $s : G_1 \to G_0$ por $s(f : x \to y) = x$ e $r : G_1 \to G_0$ por $r(f : x \to y) = y$ estão bem definidas. Assim, podemos definir G_2 como sendo o conjunto $G_2 = \{(f,g) \in G_1 \times G_1 : s(f) = r(g)\}$.

A partir disso, podemos definir os seguintes morfismos

$$\begin{aligned} m : G_2 &\to G_1 \\ (f,g) &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

onde $\circ$ é a composição de morfismos em $\mathcal{C}$;

$$\begin{aligned} i : G_1 &\to G_1 \\ f &\mapsto f^{-1} \end{aligned}$$

onde f^{-1} é o inverso de f em $\mathcal{C}$; e

$$\begin{aligned} u : G_0 &\to G_1 \\ x &\mapsto id_x \end{aligned}$$

onde id_x é o morfismo identidade do objeto x em $\mathcal{C}$.

Dito isso, com alguns cálculos rotineiros mostra-se que os morfismos s, r, m, i, u cumprem os axiomas categóricos e de inversão da Definição 2.2.3. Portanto G é um grupoide.

□

Observação 2.2.5. Neste texto usaremos uma versão da segunda definição em que identificamos cada objeto com sua identidade, e assim $G_0 \subset G_1$.

Definição 2.2.6. Seja G um grupo finito. A este grupo associamos o grupoide finito $\Gamma = \Gamma(G)$, cujos elementos são pares (A, g), onde $g \in G$ e A é subconjunto de G contendo a identidade e e o elemento g^{-1}.

A multiplicação de dois pares (A, g) e (B, h) em Γ é definida apenas quando $A = hB$, ela é dada por

$$(hB, g) \cdot (B, h) = (B, gh).$$

Dessa maneira, o inverso de (A, g) é (gA, g^{-1}). A fonte e o alvo em Γ são, respectivamente, $s(A, g) = (A, e)$ e $r(A, g) = (gA, e)$. O conjunto de unidades de Γ é denotado por $\Gamma^{(0)}$. A composição de morfismos em Γ está ilustrada a seguir.

$$\begin{tikzcd}
(ghB, e) & (hB, e) \arrow[l, bend right, "{(A,g)}"'] & (B, e) \arrow[l, bend right, "{(B,h)}"'] \arrow[ll, bend right=40, "{(B,gh)}"']
\end{tikzcd}$$

Exemplo 2.2.7. Seja $G = \mathbb{Z}_3$, então o grupoide $\Gamma\mathbb{Z}_3$ é dado por:

$$\begin{tikzcd}
\{0\} \arrow[r, bend left, "0"] & \{0\}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\{0,1\} \arrow[r, bend left, "1"] \arrow[d, bend right, "0"'] & \{0,2\} & & \mathbb{Z}_3 & \\
\{0,1\} & \{0,2\} \arrow[l, bend left, "2"] \arrow[u, bend right, "0"'] & \mathbb{Z}_3 \arrow[ur, bend left, "1"] \arrow[rr, bend right, "2"'] & & \mathbb{Z}_3 \arrow[ul, bend right, "0"']
\end{tikzcd}$$

Definição 2.2.8. Dado um grupoide Γ, denote por $\Gamma^{(2)} \subset \Gamma \times \Gamma$ o conjunto de todos os pares em Γ em que é possível fazer essa composição. A álgebra de grupoide $K\Gamma$ é o $K-$espaço vetorial gerado pelos elementos de Γ, a multiplicação é dada por

$$\gamma_1 \cdot \gamma_2 = \begin{cases} \gamma_1\gamma_2, & \text{se} \quad (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma^{(2)}; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Observação 2.2.9. Mais geralmente pode-se definir, da mesma maneira, a K-álgebra de uma categoria pequena $\mathcal{C}$.

Proposição 2.2.10. *Seja $K\Gamma(G)$ a K-álgebra do grupoide $\Gamma(G)$, a dimensão dessa álgebra é igual a cardinalidade de $\Gamma(G)$. Se $|G| = n$ então*

$$\dim(K\Gamma(G)) = \sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\binom{n-1}{k} = 2^{n-2}(n+1). \tag{2.10}$$

Demonstração.

Uma vez que a dimensão de $K\Gamma(G)$ é igual a cardinalidade de $\Gamma(G)$, basta estudarmos a cardinalidade de $\Gamma(G)$. O grupoide $\Gamma(G)$ é composto por pares (A, g), com $A \subset G$ e $e, g^{-1} \in A$.

Primeiro vejamos quantos pares (A, g) podemos escrever com A tendo $k+1$ elementos, onde $0 \leq k \leq n-1$. Assim, fixando um conjunto A tal que $|A| = k+1$ satisfazendo as condições $e, g^{-1} \in A$, podemos reescreve-lo como $A = A' \cup \{e\}$, com $A' \subset G \setminus \{e\}$. Diante disso, como $|A'| = k$, existem $\binom{n-1}{k}$ maneiras de tomar um conjunto A'. Para a segunda coordenada, como A tem $k+1$ elementos, existem $k+1$ possibilidades. Logo, existem $\binom{n-1}{k}(k+1)$ possíveis pares (A, g) com A tendo $k+1$ elementos.

Finalmente, somando sobre todas as possíveis cardinalidades de A, obtemos que a quantidade de pares (A, g) será

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\binom{n-1}{k}.$$

□

Observação 2.2.11. Note que o lado direito de (2.10) é uma função estritamente crescente em n. Em particular, se G e H são grupos finitos tal que $K\Gamma(G)$ é isomorfa a $K\Gamma(H)$ então $|G| = |H|$.

Proposição 2.2.12. *Os elementos da forma (A, e) são dois a dois ortogonais, idempotentes em $K\Gamma(G)$ e a unidade de $K\Gamma(G)$ é dada pela soma de todos os elementos dessa forma.*

Demonstração. É claro que os elementos da forma (A, e) são idempotentes, pois

$$(A, e)(A, e) = (eA, e)(A, e) = (A, ee) = (A, e).$$

Ainda, pelo modo como a multiplicação foi definida em $K\Gamma(G)$, temos que $(A, e)(B, e) = 0$, sempre que $A \neq B$.

Por fim, observe que

$$\sum_{A \ni e}(A, e)(B, g) = (gB, e)(B, g) = (B, eg) = (B, g),$$

e,

$$(B, g)\sum_{A \ni e}(A, e) = (B, g)(g^{-1}B, e) = (B, g).$$

Segue que a unidade da álgebra é justamente essa soma.

□

Proposição 2.2.13. *Defina $\lambda_p : G \to K\Gamma(G)$ por $\lambda_p(g) = \sum_{A \ni g^{-1}}(A, g)$. Afirmamos que λ_p é uma representação parcial de G.*

Demonstração. Com efeito, sejam $g, h \in G$, então

$$\begin{aligned}
\lambda_p(g^{-1})\lambda_p(g)\lambda_p(h) &= \sum_{\substack{g\in A\\ g^{-1}\in C\\ h^{-1}\in B}} (A,g^{-1})(B,g)(C,h)\\
&= \sum_{\substack{h^{-1}\in C\\ g^{-1}\in hC}} (ghC,g^{-1})(hC,g)(C,h)\\
&= \sum_{\substack{h^{-1}\in C\\ h^{-1}g^{-1}\in C}} (C,h).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\lambda_p(g^{-1})\lambda_p(gh) &= \sum_{\substack{g\in A\\ h^{-1}g^{-1}\in C}} (A,g^{-1})(C,gh)\\
&= \sum_{\substack{h^{-1}\in C\\ h^{-1}g^{-1}\in C}} (C,h).
\end{aligned}$$

Logo, $\lambda_p(g^{-1})\lambda_p(g)\lambda_p(h) = \lambda_p(g^{-1})\lambda_p(gh)$. Analogamente, $\lambda_p(g)\lambda_p(h)\lambda_p(h^{-1}) = \lambda_p(gh)\lambda_p(h^{-1})$. Por fim, temos que $\lambda_p(e) = \sum\limits_{A\ni e}(A,e)$, a qual é a unidade de $K\Gamma(G)$. □

Teorema 2.2.14. *Existe uma correspondência biunívoca entre as representações parciais de G e as representações de $K\Gamma(G)$. Mais precisamente, se $\mathcal{A}$ é uma $K-$álgebra com unidade, então $\pi : G \to \mathcal{A}$ é uma representação parcial de G se, e somente se, existe um homomorfismo $\tilde{\pi} : K\Gamma(G) \to \mathcal{A}$ tal que $\pi = \tilde{\pi} \circ \lambda_p$. Além disso, o homomorfismo $\tilde{\pi}$ é único.*

Demonstração.

Supondo que $\tilde{\pi} : K\Gamma(G) \to \mathcal{A}$ é homomorfismo de $K-$álgebras, então $\pi = \tilde{\pi} \circ \lambda_p : G \to \mathcal{A}$ é uma representação parcial de G em $\mathcal{A}$, isto pois vimos na Proposição 2.2.13 que λ_p é representação parcial e $\tilde{\pi}$ preserva produto por ser homomorfismo.

Reciprocamente, suponha que $\pi : G \to \mathcal{A}$ é uma representação parcial de G. Defina $\tilde{\pi} : \Gamma(G) \to \mathcal{A}$ por

$$\tilde{\pi}(A,g) = \pi(g)\left(\prod_{r\in A}\epsilon(r)\right)\left(\prod_{s\notin A}(1-\epsilon(s))\right).$$

Vejamos que $\tilde{\pi}$ é multiplicativa, para isso, sejam (A,g) e (B,h) em $\Gamma(G)$ então

$$\tilde{\pi}(A,g)\pi(\tilde{B},h) = \pi(g)\prod_{r\in A}\epsilon(r)\cdot\prod_{s\notin A}(1-\epsilon(s))\cdot\pi(h)\prod_{t\in B}\epsilon(t)\cdot\prod_{v\notin B}(1-\epsilon(v))$$

Agora lembre que por (2.2), temos $\pi(s)\epsilon(r) = \epsilon(sr)\pi(s)$. Analogamente, vale que $\epsilon(r)\pi(s) = \pi(s)\epsilon(s^{-1}r)$.

Assim, podemos reescrever a igualdade acima da seguinte forma

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(A,g)\pi(\tilde{B},h) =&\pi(g)\pi(h)\prod_{r\in A}\epsilon(h^{-1}r)\prod_{s\notin A}(1-\epsilon(h^{-1}s))\cdot\prod_{t\in B}\epsilon(t)\prod_{v\notin B}(1-\epsilon(v))\\ =&\pi(g)\pi(h)\prod_{r\in h^{-1}A}\epsilon(r)\prod_{s\notin h^{-1}A}(1-\epsilon(v)).\end{aligned}$$

A partir daqui, separamos a demonstração em dois casos, vejamos:

1) se $h^{-1}A \neq B$, então ou existe um $r \in h^{-1}A$ tal que $r \notin B$ ou existe um $r \in B$ tal que $r \notin h^{-1}A$. Em ambos os casos o produto $\tilde{\pi}(A,g)\tilde{\pi}(B,h)$ contem o fator $\epsilon(r)(1-\epsilon(r)) = 0$ e portanto o produto é nulo. Da mesma forma que $(A,g)(B,h) = 0$ em $K\Gamma(G)$ e temos $\tilde{\pi}((A,g)(B,h)) = 0$.

2) se $h^{-1}A = B$, então, como $h^{-1} \in h^{-1}A$, pois $e \in A$, temos

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(A,g)\tilde{\pi}(B,h) &= \pi(g)\pi(h)\prod_{r\in h^{-1}A}\epsilon(r)\prod_{s\notin h^{-1}A}(1-\epsilon(s))\\ &= \pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1})\pi(h)\prod_{\substack{r\in h^{-1}A\\ r\neq h^{-1}}}\epsilon(r)\prod_{s\notin h^{-1}A}(1-\epsilon(s))\\ &= \pi(gh)\prod_{r\in h^{-1}A}\epsilon(r)\prod_{s\notin h^{-1}A}(1-\epsilon(s)) = \tilde{\pi}((A,g)\cdot(B,h)).\end{aligned}$$

Com isso, provamos que $\tilde{\pi}$ é multiplicativa em $\Gamma(G)$, logo, podemos estender de forma linear a um homomorfismo de $K\Gamma(G)$ em $\mathcal{A}$, o qual também chamaremos de $\tilde{\pi}$ por praticidade. Além disso, veja que $\tilde{\pi}$ preserva unidade:

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(1) = \tilde{\pi}(\sum_{A\ni e}(A,e)) = \sum_{A\ni e}\tilde{\pi}(A,e) = \sum_{A\ni e}\prod_{r\in A}\epsilon(r)\prod_{s\notin A}(1-\epsilon(s))\\ = \sum_{A\ni e}P_A = \sum_{A\subseteq G}P_A = 1.\end{aligned}$$

Mais além, temos

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}\circ\lambda_p(g) &= \tilde{\pi}\left(\sum_{A\ni g^{-1}}(A,g)\right) = \sum_{A\ni g^{-1}}\tilde{\pi}(A,g)\\ &= \pi(g)\sum_{A\ni g^{-1}}\prod_{r\in a}\epsilon(r)\sum_{s\notin A}(1-\epsilon(s))\\ &= \pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g)\sum_{A\in g^{-1}}1\prod_{r\in A\setminus\{g^{-1}\}}\epsilon(r)\prod_{s\notin A}(1-\epsilon(s))\\ &= \pi(g)\sum_{A\ni g^{-1}}(\epsilon(g^{-1})+1-\epsilon(g^{-1}))\\ &\cdot\prod_{r\in A\setminus\{g^{-1}\}}\epsilon(r)\prod_{s\notin A}(1-\epsilon(s))\\ &= \pi(g)\tilde{\pi}\left(\sum_B(B,e)\right) = \pi(g)\tilde{\pi}(1) = \pi(g).\end{aligned}$$

Finalmente, resta provar a unicidade do homomorfismo $\tilde{\pi}$ satisfazendo $\tilde{\pi}\circ\lambda_p = \pi$. Diante disso, é suficiente provar que o conjunto $\lambda_p(G)$ gera toda a álgebra $K\Gamma(G)$. Para tal, seja (B,h) um elemento qualquer de $K\Gamma(G)$, com $B = \{b_1^{-1}, b_2^{-1}, \ldots, b_{k-1}^{-1}, h^{-1}\}$. Considere $g_1, g_2, \ldots, g_k$ tais que

$$g_1 = b_1, g_2g_1 = b_2, g_3g_2g_1 = b_3, \ldots, g_kg_{k-1}\cdots g_1 = h,$$

e seja $\mathcal{A}$ a subálgebra de $K\Gamma(G)$ gerada pela família $\{g_1, g_2, \ldots, g_k\}$. Considere agora o elemento em $\mathcal{A}$ dado pelo produto $\lambda_p(g_k)\lambda_p(g_{k-1})\cdots\lambda_p(g_1)$,temos

$$\lambda_p(g_k)\lambda_p(g_{k-1})\cdots\lambda_p(g_1) = \sum_{\substack{A_1\ni g_1^{-1}\\ A_2\ni g_2^{-1}\\ \vdots \\ A_k\ni g_k^{-1}}} (A_k, g_k)\cdot(A_{k-1}, g_{k-1})\cdots(A_1, g_1).$$

Usando a multiplicação em $\Gamma(G)$, podemos rescrever a expressão acima como

$$\sum_{\substack{A_1\ni g_1^{-1}\\ g_1A_1\ni g_2^{-1}\\ \vdots \\ g_{k-1}g_{k-2}\cdots g_1A_k\ni g_k^{-1}}} = \sum_{A_1\supseteq B}(A_1, h)$$

Portanto, para todo par $(B,h)\in\Gamma(G)$, $\mathcal{A}$ contém o elemento $\sum\limits_{A\supseteq B}(A,h)$. Agora suponha que $G\setminus B = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$. Temos

$$\sum_{A\supseteq B}(A,h) - \sum_{A\supseteq B\cup\{x_1\}}(A,h) = \sum_{\substack{A\supseteq B\\ x_1\notin A}}(A,h),$$

o que significa que, para cada (B,h) em $\Gamma(G)$ e para todo $x\in B$, $\mathcal{A}$ contem todos os elementos da forma $\sum\limits_{\substack{A\supseteq B\\ x\notin A}}(A,h)$.

Seguindo esse raciocínio,

$$\sum_{\substack{A\supseteq B\\ x_1\notin A}}(A,h) - \sum_{\substack{A\supseteq B\cup\{x_1\}\\ x_2\notin A}}(A,h) = \sum_{\substack{A\supseteq B\\ x_1,x_2\notin A}}(A,h),$$

temos que, para todo $x_1, x_2\notin B$, $\mathcal{A}$ contém o elemento $\sum\limits_{\substack{A\supseteq B\\ x_1,x_2\notin A}}(A,h)$.

Repetindo esse processo por indução temos que $\mathcal{A}$ contém todos os elementos da forma $\sum\limits_{\substack{A\supseteq B\\ x_1,x_2,\ldots,x_N\notin A}}(A,h) = (B,h)$. O que nos prova que $\mathcal{A} = K\Gamma(G)$ e temos o resultado.

□

Corolário 2.2.15. *A álgebra do grupoide $K\Gamma(G)$ é isomorfa a álgebra parcial de grupo $K_{par}(G)$.*

Demonstração. A função $[\ \ ] : G\to K_{par}(G)$, dada por $g\mapsto[g]$, é representação parcial de G, então pelo Teorema 2.2.14 existe um homomorfismo $\tilde{\pi} : K\Gamma(G)\to K_{par}(G)$ tal que $\tilde{\pi}(\lambda_p(g)) = [g]$. Além disso, pela propriedade universal de $K_{par}(G)$, existe um unico homomorfismo $\phi : K_{par}(G) \to K\Gamma(G)$ dada por $\phi([g]) = \lambda_p(g)$. Dito isso, temos

$$\tilde{\pi} \circ \phi([g]) = \tilde{\pi}\lambda_p(g) = [g],$$

e,

$$\phi \circ \tilde{\pi}(\lambda_p(g)) = \phi([g]) = \lambda_p(g).$$

Portanto, como $\tilde{\pi} \circ \phi$ e $\phi \circ \tilde{\pi}$ são identidades em seus respectivos domínios, temos um isomorfismo $K\Gamma(G)$ e $K_{par}(G)$. $\square$

2.3 A estrutura da álgebra parcial de grupo

Vimos anteriormente que a álgebra parcial de grupo $K_{par}(G)$ é isomorfa a $K\Gamma(G)$. Agora nesta seção o objetivo é mostrar que a álgebra de grupo $K\Gamma(G)$ é isomorfa a uma soma direta de álgebras de matrizes com entradas em KH, onde H é subgrupo de G, ou seja, quando a característica do corpo não divide $|G|$, $K\Gamma(G)$ é semissimples. Para tal, introduziremos o grupoide Γ_m^H, conforme segue.

Dado um grupo finito H e um inteiro positivo m, então Γ_m^H denota o grupoide onde os elementos são triplas (h, i, j), com $h \in H$ e $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$. A fonte e o alvo em Γ_m^H são dadas por $s(h, i, j) = j$ e $r(h, i, j) = i$, o produto é definido da seguinte maneira

$$(g, i, j) \cdot (h, j, k) = (gh, i, k).$$

$$\begin{tikzcd}
i & j \arrow[l, bend right, "{(g,i,j)}"'] & k \arrow[l, bend right, "{(h,j,k)}"'] \arrow[ll, bend left, "{(gh,i,k)}"]
\end{tikzcd}$$

As unidades de Γ_m^H são elementos da forma (e, i, i), $i = 1, 2, \dots, m$.

Observação 2.3.1. As vezes é útil representar um grupoide Γ como um grafo orientado E_Γ, onde os vértices são as unidades do grupoide e cada elemento $\gamma \in \Gamma$ representa uma flecha orientada de E_Γ partido do vértice $s(\gamma)$ para o vértice $r(\gamma)$. Uma componente conexa de E_Γ nos dá um subgrupoide de Γ.

Nesse sentido, o grupoide Γ_m^H corresponde a um grafo $E_{\Gamma_m^H}$, que possui m vértices e, entre dois vértices, temos $|H|$ flechas orientadas (em cada direção), indexadas pelos elementos de H.

Definição 2.3.2. Sejam Γ um grupoide e x um vértice qualquer de E_Γ. O grupo de isotropia H de x é

$$H = \{\gamma \in \Gamma : s(\gamma) = r(\gamma) = x\}.$$

Proposição 2.3.3. *Seja Γ um grupoide tal que E_Γ é conexo e $m = |\Gamma^{(0)}|$ é finito. Seja x_1 um vértice qualquer de E_Γ e seja H seu grupo de isotropia. Então,* *a)* $\Gamma \simeq \Gamma_m^H$

b) $K\Gamma \simeq M_m(KH)$.

Demonstração. Sejam $x_1, \ldots, x_m$ as unidades de Γ, para todo $i, j = 1, \ldots, m$ defina $\mathcal{E}_{i,j}$ como

$$\mathcal{E}_{i,j} = \{\gamma \in \Gamma : s(\gamma) = x_i, r(\gamma) = x_j\}.$$

Uma vez que Γ é conexo, segue que $\mathcal{E}_{i,j}$ é não vazio para todo i, j. Fixe uma família de elementos $\gamma_i \in \mathcal{E}_{1,i}$, com $i = 1, \ldots, m$. Então, para cada elemento $\gamma \in \Gamma$, $\gamma_j^{-1}\gamma\gamma_i = h \in H$ e γ pode ser escrito de forma única como $\gamma = \gamma_j h \gamma_i^{-1}$, com $h \in H$, onde $s(\gamma) = x_i$ e $r(\gamma) = x_j$. Por outro lado, todo elemento da forma $\gamma_j h \gamma_i^{-1}$, com $h \in H$, pertence a $\mathcal{E}_{i,j}$. Observe que, em particular, $|\mathcal{E}_{i,j}| = |H|$.

Para provar a), vejamos que há um isomorfismo funtorial entre Γ e Γ_m^H:

Dado dois objetos $x_i, x_j \in \Gamma$, um morfismo γ tal que $s(\gamma) = x_i$ e $r(\gamma) = x_j$, existe único $h \in H$ tal que $\gamma = \gamma_j h \gamma_i^{-1}$. Assim, defina $F : \Gamma \to \Gamma_m^H$, onde $F(x_i) = i$ e, $F(\gamma) = (h, j, i)$. Afirmamos que F assim definido é funtor.

De fato, dados dois morfismos $\gamma, \delta \in \Gamma$ tais que a composição $\delta\gamma$ faça sentido, isto é, são da forma $\delta = \gamma_k g \gamma_j^{-1}$ e $\gamma = \gamma_j h \gamma_i^{-1}$, para $g, h \in H$, temos

$$F(\delta\gamma) = F((\gamma_k g \gamma_j^{-1})(\gamma_j h \gamma_i^{-1})) = F(\gamma_j g 1_{x_1} g h \gamma_i^{-1}) = F(\gamma_j g h \gamma_i^{-1}) = (gh, k, i),$$

por outro lado,

$$F(\delta)F(\gamma) = (g, k, j)(h, j, i) = (gh, k, i).$$

Além disso, temos $F(1_{x_i}) = F(\gamma_i e \gamma_i^{-1}) = (e, i, i)$. Logo, F é funtor.

Agora dado dois objetos $i, j \in \Gamma_m^H$ e um morfismo (h, j, i), definimos $G : \Gamma_m^H \to \Gamma$ dado por $G(i) = x_i$ e $G(h, j, i) = \gamma_j h \gamma_i^{-1}$. Por um processo análogo ao que foi feito para F, prova-se que G também funtor. Mais do que isso, temos que $FG = I_{d_{\Gamma_m^H}}$ e $GF = I_{d_\Gamma}$. Portanto, obtemos um isomorfismo entre as categorias Γ e Γ_m^H.

Para provar b), observe que pelo item a) temos $K\Gamma \simeq K\Gamma_m^H$. Assim, basta mostrar que as álgebras $K\Gamma_m^H$ e $M_m(KH)$ são isomorfas. Para isso, utilizaremos o fato de que $M_m(KH)$ e $KH \otimes_K M_m(K)$ são isomorfas, logo, resta nos mostrar que $K\Gamma_m^H \simeq KH \otimes_K M_m(K)$, conforme segue:

Defina uma aplicação K-linear $\psi : K\Gamma_m^H \to KH \otimes_K M_m(K)$ na base por $\psi(h, i, j) = h \otimes E_{i,j}$, onde $\{E_{i,j}\}_{i,j=1,2,\ldots,m}$ são as matrizes elementares em $M_m(K)$. Note que $\{(h, i, j) : h \in H, i, j = 1, 2, \ldots, m\}$ forma uma base para $K\Gamma_m^H$ e, como $\{E_{i,j}\}_{i,j=1,2,\ldots,m}$ forma uma base para $M_m(K)$, então $\{h \otimes E_{i,j} : h \in H, i, j = 1, 2, \ldots, m\}$ forma uma base para $KH \otimes_K M_m(K)$. Assim, veja que ψ é multiplicativa nos elementos da base e portanto é multiplicativa, a saber

$$\psi((g, i, j) \cdot (h, j, k)) = \psi(gh, i, k) = gh \otimes E_{i,k} = gh \otimes E_{i,j}E_{j,k} = (g \otimes E_{i,j})(h \otimes E_{j,k}) = \psi(g, i, j) \cdot \psi(h, j, k)$$

Assim, podemos concluir que ψ é um morfismo de álgebras.

Por outro lado, $\varphi : KH \otimes_K M_m(K) \to K\Gamma_m^H$ dada por $\varphi(h \otimes E_{i,j}) = (h, i, j)$ é também um morfismo de álgebras, e ainda, $\psi\varphi = id_{K\Gamma_m^H}$ e $\varphi\psi = id_{KH\otimes_K M_m(K)}$. Portanto, temos $K\Gamma_m^H \simeq KH \otimes_K M_m(K)$ e o resultado $b)$ segue. $\square$

Observação 2.3.4. Note que na Proposição 2.3.3 não utilizamos em nenhum momento a hipótese de que H é finito, ou seja a proposição também é válida para grupos não finitos.

Teorema 2.3.5. *A álgebra de grupoide $K\Gamma(G)$ é da forma*

$$K\Gamma(G) = \bigoplus_{\substack{H \leq G \\ 1 \leq m \leq [G:H]}} c_m(H) M_m(KH), \tag{2.11}$$

onde $c_m(H)M_m(KH)$ é a soma direta de $c_m(H)$ copias de $M_m(KH)$. Além disso, a seguinte formula recursiva é valida

$$c_m(H) = \frac{1}{m}(G : N_G(H)) \left(\binom{[G:H]-1}{m-1} - \sum_{\substack{H < B \leq G \\ [B:H] \mid m}} \frac{m/(B:H) c_{m/[B:H]}(B)}{(G : N_G(B))} \right). \tag{2.12}$$

Demonstração. A prova deste teorema pode ser consultada em [5]. $\square$

Exemplo 2.3.6. Analisando as componentes conexas do grupoide $\Gamma\mathbb{Z}_3$ visto no exemplo 2.2.7, temos que

$$K\Gamma(\mathbb{Z}_3) = K \oplus M_2(K) \oplus K\mathbb{Z}_3.$$

2.4 A álgebra parcial e o produto cruzado

Definição 2.4.1. Uma ação parcial de um grupo G em uma álgebra comutativa $\mathcal{A}$ é uma ação parcial $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g\}_{g \in G}$ tal que D_g é ideal da álgebra e α_g é linear e multiplicativa, para todo $g \in G$.

Antes de prosseguir, denotaremos por $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ o produto cruzado (ou álgebra parcial de grupo skew) associado a uma ação parcial α de um grupo G em uma álgebra comutativa $\mathcal{A}$. Essa álgebra é o espaço vetorial

$$\mathcal{A} \rtimes G := \bigoplus_{g \in G} D_g \delta_g,$$

onde os elementos δ_g são apenas símbolos para indexar a posição dos elementos, como a multiplicação dada por

$$(a_g \delta_g)(b_h \delta_h) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g) b_h) \delta_{gh}.$$

O objetivo desta seção é mostrar que a álgebra parcial de um grupo $K_{par}(G)$ é isomorfa, sob certas condições, ao produto cruzado $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, onde $\mathcal{A}$ é uma álgebra que especificaremos mais adiante. Essa construção pode ser consultada em [4].

A álgebra $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$ nem sempre é associativa. O resultado a seguir, de [4], dá condições suficientes para a associatividade do produto. Observamos que um ideal I de $\mathcal{A}$ é não-degenerado se, dado $a \in I, a \neq 0$, existe $b \in I$ tal que $ab \neq 0$ e $ba \neq 0$; e um ideal I é idempotente se $I^2 = I$.

Proposição 2.4.2. *Se $\mathcal{A}$ é uma ação parcial de um grupo G em uma álgebra $\mathcal{A}$ tal que todo ideal $\mathcal{D}_g$ é idempotente ou não-degenerado, então $G \rtimes \mathcal{A}$ é associativa.*

Demonstração. A prova dessa proposição pode ser consultada em [4]. □

Lema 2.4.3. *Seja $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g, g \in G\}$ uma ação parcial de G em uma álgebra $\mathcal{A}$ tal que para cada $D_g, g \in G$ é uma álgebra com unidade 1_g. Então a função $\pi_\alpha : G \to \mathcal{A} \rtimes G$, dada por $g \to 1_g\delta_g$ é uma representação parcial.*

Demonstração. Primeiramente, segue da definição que $\pi_\alpha(e) = 1_e\delta_e$, o qual é a unidade de $\mathcal{A} \rtimes G$. Vejamos que $\pi_\alpha(g^{-1})\pi_\alpha(g)\pi_\alpha(h) = \pi_\alpha(g^{-1})\pi_\alpha(gh)$. Para tal, note que $\alpha_g(1_{g^{-1}}) = 1_g$ (segue do fato de α_g ser bijetora e multiplicativa, para todo $g \in G$), assim, por um lado temos

$$\begin{aligned}
\pi_\alpha(g^{-1})\pi_\alpha(g)\pi_\alpha(h) &= (1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} \cdot 1_g\delta_g) \cdot 1_h\delta_h = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(1_{g^{-1}})1_g)\delta_e \cdot 1_h\delta_h \\
&= \alpha_{g^{-1}}(1_g^2)\delta_e \cdot 1_h\delta_h = \alpha_{g^{-1}}(1_g)\delta_e \cdot 1_h\delta_h \\
&= 1_{g^{-1}}\delta_e \cdot 1_h\delta_h = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(1_{g^{-1}})1_h)\delta_h = 1_{g^{-1}}1_h\delta_h
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\pi_\alpha(g^{-1})\pi_\alpha(gh) = 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} \cdot 1_{gh}\delta_{gh} = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_g(1_{g^{-1}})1_{gh})\delta_h = \alpha_{g^{-1}}(1_g1_{gh})\delta_h = 1_{g^{-1}}1_h\delta_h.$$

Logo, $\pi_\alpha(g^{-1})\pi_\alpha(g)\pi_\alpha(h) = \pi_\alpha(g^{-1})\pi_\alpha(gh)$, para todos $g, h \in G$. De maneira análoga, verifica-se que $\pi_\alpha(g)\pi_\alpha(h)\pi_\alpha(h^{-1}) = \pi_\alpha(gh)\pi_\alpha(h^{-1})$.

Portanto, $\pi_\alpha : G \to \mathcal{A} \rtimes G$ é uma representação parcial. □

A seguir, faremos o caminho contrário da proposição anterior, isto é, construiremos uma ação parcial do grupo G, vinda de uma representação parcial fixada.

Considere $\pi : G \to B$ uma representação parcial de um grupo G em uma álgebra com unidade B. Vimos que os elementos $\epsilon_g = \pi(g)\pi(g^{-1})$ são idempotentes que comutam (demonstração da Proposição 2.1.7). Além disso, valem as seguintes igualdades

$$\pi(g)\epsilon_h = \epsilon_{gh}\pi(g), \qquad \epsilon_h\pi(g) = \pi(g)\epsilon_{g^{-1}h}.$$

Seja $\mathcal{A}$ a subálgebra de B gerada pelos $\epsilon_g, g \in G$ e para um elemento fixado $g \in G$, defina $D_g := \epsilon_g\mathcal{A}$.

Lema 2.4.4. *Os mapas $\alpha_g^\pi : D_{g^{-1}} \to D_g, g \in G$, definidos por $\alpha_g^\pi(a) = \pi(g)a\pi(g^{-1})$ são isomorfismos de $K-$álgebras, os quais determinam uma ação parcial α^π de G em $\mathcal{A}$.*

Demonstração. Por simplicidade, denote $\alpha^\pi = \alpha$. Agora observe que $\mathcal{A}$ é invariante com respeito as funções α_g, pois $\mathcal{A}$ é gerado pelos elementos $a = \epsilon_{h_1} \cdots \epsilon_{h_s}$, com $h_1, \dots, h_s \in G$. Por dizer,

$$\pi(g)\epsilon_{h_1} \cdots \epsilon_{h_s}\pi(g^{-1}) = \pi(g)\pi(g^{-1})\epsilon_{gh_1} \cdots \epsilon_{gh_s} = \epsilon_g\epsilon_{gh_1} \cdots \epsilon_{gh_s} \in \mathcal{A}.$$

Além disso, α_g associa $\epsilon_{g^{-1}}$ a ϵ_g, pois

$$\pi(g)\epsilon_{g^{-1}}\pi(g^{-1}) = \pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(g^{-1}) = \epsilon_g\epsilon_g = \epsilon_g.$$

Então α_g está bem definida, para todo $g \in G$.

Para ver que as funções α_g são homomorfismos de álgebras, sejam $a, b \in D_{g^{-1}}$, então

$$\alpha_g(a)\alpha_g(b) = \pi(g)a\pi(g^{-1})\pi(g)b\pi(g^{-1}) = \pi(g)a\epsilon_{g^{-1}}b\pi(g^{-1}) = \pi(g)ab\pi(g^{-1}) = \alpha_g(ab),$$

pois $\epsilon_{g^{-1}}$ é a unidade de D_g^{-1}.

Então α_g é homomorfismo de álgebras, para todo $g \in G$. Além disso, fixado $g \in G$, temos que α_g é isomorfismo de álgebras, pois sua inversa é $\alpha_{g^{-1}}$.

Agora vejamos que $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g : g \in G\}$ define uma ação parcial. Sejam $g, h \in G$ e $a \in D_h \cap D_{g^{-1}}$, então $a = \epsilon_h\epsilon_{g^{-1}}b$, com $b \in \mathcal{A}$. Então,

$$\alpha_h^{-1}(a) = \pi(h^{-1})\epsilon_h\epsilon_{g^{-1}}b\pi(h) = \pi(h^{-1})\epsilon_h\pi(h)\epsilon_{h^{-1}g^{-1}}b' = \epsilon_{h^{-1}}\epsilon_{h^{-1}g^{-1}}b' \in D_{(gh)^{-1}},$$

com $b' \in \mathcal{A}$. Logo, $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subseteq D_{(gh)^{-1}}$, o que equivale a condição ii) da Definição 1.1.3.

Finalmente, para $a \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$, temos que $\epsilon_{h^{-1}}a = a\epsilon_{h^{-1}} = a$, como $a \in D_{h^{-1}}$ e, então,

$$\begin{aligned}
\alpha_g \circ \alpha_h(a) &= \pi(g)\pi(h)a\pi(h^{-1})\pi(g^{-1}) = \pi(g)\pi(h)a\epsilon_{h^{-1}}\pi(h^{-1})\pi(g^{-1}) \\
&= \pi(g)\pi(h)a\pi(h^{-1})\pi(h)\pi(\pi^{-1})\pi(g^{-1}) = \pi(g)\pi(h)a\pi(h^{-1})\pi(h)\pi(h^{-1}g^{-1}) \\
&= \pi(g)\pi(h)a\epsilon_{h^{-1}}\pi(h^{-1}g^{-1}) = \pi(g)\pi(h)\epsilon_{h^{-1}}a\pi(h^{-1}g^{-1}) \\
&= \pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1})\pi(h)a\pi(h^{-1}g^{-1}) = \pi(gh)\pi(h^{-1})\pi(h)a\pi(h^{-1}g^{-1}) \\
&= \pi(gh)\epsilon_{h^{-1}}a\pi(h^{-1}g^{-1}) = \pi(gh)a\pi((gh)^{-1}) = \alpha_{gh}(a),
\end{aligned}$$

o que nos dá a condição iii) de 1.1.3. Uma vez que $D_e = \mathcal{A}$ e $\alpha_e = id_{\mathcal{A}}$, segue que $\alpha^\pi = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g : g \in G\}$ define uma ação parcial de G em $\mathcal{A}$.

□

Proposição 2.4.5. *Seja $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g : g \in G\}$ uma ação parcial de G em uma álgebra $\mathcal{A}$ tal que cada $D_g, g \in G$ é uma álgebra com unidade 1_g. Seja $\mathcal{A}'$ a subálgebra de $\mathcal{A} \rtimes G$ gerada pelos $1_g\delta_e, g \in G$. Então o mapa $\varphi_\alpha : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ dado por $1_g\delta_e \mapsto 1_g$ é um monomorfismo tal que $\varphi_\alpha \circ \alpha_g^{\pi_\alpha} = \alpha_g \circ \varphi_\alpha$, para todo $g \in G$. Em particular, se $\mathcal{A}$ é gerada pelos elementos $1_g, g \in G$, então as ações parciais α^{π_α} e α são equivalentes.*

Demonstração. Primeiramente, observe que φ_α é a restrição do isomorfismo $\psi : \mathcal{A}\delta_e \to \mathcal{A}$, dado por $a\delta_e \mapsto a$, logo é um monomorfismo de $\mathcal{A}'$ em $\mathcal{A}$.

Agora, de acordo com o Lema 2.4.3 temos que $\pi_\alpha : G \to \mathcal{A} \rtimes G$, onde $g \mapsto 1_g\delta_e$ é representação parcial. Ainda, pelo Lema 2.4.4, π_α induz uma ação parcial na subálgebra de $\mathcal{A} \rtimes G$, gerada pelos elementos $\pi_\alpha(g)\pi_\alpha(g^{-1})$. Além disso,

$$\pi_\alpha(g)\pi_\alpha(g^{-1}) = 1_g\delta_g 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(1_g)1_{g^{-1}})\delta_e = 1_g\delta_e,$$

ou seja, essa subálgebra é justamente $\mathcal{A}'$.

Um elemento qualquer de $\mathcal{A}'$ pode ser escrito como $a'\delta_e$, onde $a' \in Im\varphi_\alpha$. A ação parcial α^{π_α} é dada pelos isomorfismos $\alpha^{\pi_\alpha} : D'_{g^{-1}} \to D'_g$, onde $a'\delta_e \mapsto 1_g\delta_g \cdot a' \cdot 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}$ e D'_g é o ideal de $\mathcal{A}'$ gerado por $1_g\delta_e$. Para $a'\delta_e \in D'_{g^{-1}}$, temos

$$\begin{aligned}\varphi_\alpha(\alpha_g^{\pi_\alpha}(a'\delta_e)) &= \varphi_\alpha(1_g\delta_g a' 1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}}) = \varphi_\alpha(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(1_g)a'1_{g^{-1}})\delta_e) \\ &= \varphi_\alpha(\alpha_g(a'1_{g^{-1}})\delta_e) = \alpha_g(a') = \alpha_g(\varphi_\alpha(a'\delta_e)),\end{aligned}$$

ou seja, $\varphi_\alpha \circ \alpha_g^{\pi_\alpha} = \alpha_G \circ \varphi_\alpha, \forall g \in G$.

Por fim, se $\mathcal{A}$ é gerada pelos elementos $1_g, g \in G$, então claramente $\varphi_\alpha : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$ é um isomorfismo, o que nos dá a equivalência das ações parciais α e α^{π_α}. $\square$

Proposição 2.4.6. *Seja $\pi : G \to B$ uma representação parcial e suponha que a subálgebra $\mathcal{A} \subseteq B$ e a ação parcial α^π de G em $\mathcal{A}$ são como no Lema 2.4.4. Então o mapa $\phi_\pi : \mathcal{A} \rtimes G \to B$, definido por $\phi_\pi(\sum_{g\in G} a_g\delta_g) = \sum_{g\in g} a_g\pi(g)$ é um homomorfismo de $K-$ álgebras tal que $\phi_\pi \circ \pi_{\alpha^\pi} = \pi$. Em particular, se ϕ_π é um isomorfismo, então as representações parciais π e π_{α^π} são equivalentes.*

Demonstração. Uma vez que os elementos $a_g\delta_g$ geram $\mathcal{A} \rtimes G$, temos

$$\begin{aligned}\phi_\pi(a_g\delta_g \cdot b_h\delta_h) &= \phi_\pi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}) = \phi_\pi(\pi(g)\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h\pi(g^{-1})\delta_{gh}) \\ &= \phi_\pi(\pi(g)\pi(g^{-1})a_g\pi(g)b_h\pi(g^{-1})\delta_{gh}) = \pi(g)\pi(g^{-1})a_g\pi(g)b_h\pi(g^{-1})\pi(gh) \\ &= \epsilon_g a_g\pi(g)b_h\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(h) = \epsilon_g a_g\pi(g)b_h\epsilon_{g^{-1}}\pi(h) \\ &= a_g\epsilon_g\pi(g)\epsilon_{g^{-1}}b_h\pi(h) = a_g\pi(g)\epsilon(g^{-1})b_h\pi(h) \\ &= a_g\pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g)b_h\pi(h) = a_g\pi(g)b_h\pi(h) \\ &= \phi_\pi(a_g\delta_g)\phi_\pi(b_h\delta_h),\end{aligned}$$

ou seja, $\phi_\pi : \mathcal{A} \rtimes G \to B$ é homomorfismo de álgebras. Além disso, temos que $\phi_\pi \circ \phi_{\alpha^\pi}(g) = \phi_\pi(e_g\delta_g) = \epsilon_g\pi(g) = \pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g) = \pi(g)$, para todo $g \in G$, o que prova a igualdade $\phi_\pi \circ \phi_{\alpha^\pi} = \pi$.

Por fim, se ϕ_π é um isomorfismo, segue que π e π_{α^π} são equivalentes. $\square$

Teorema 2.4.7. *Seja $\mathcal{A}$ a subálgebra de $K_{par}(G)$ gerada pelos elementos $\varepsilon_g = \pi_0(g)\pi_0(g^{-1}) = [g][g^{-1}]$. Então o homomorfismo $\phi_{\pi_0} : \mathcal{A} \rtimes_{\alpha^{\pi_0}} G \to K_{par}(G)$ associado à representação parcial $\pi_0 : G \to K_{par}(G)$, dado por $\pi_0(g) = [g]$, é na verdade um isomorfismo.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.4.6 que $\phi_{\pi_0} : \mathcal{A} \rtimes G \to K_{par}(G)$ é um homomorfismo. Pela Propriedade Universal 2.2.2, a representação parcial $\pi_{\alpha^{\pi_0}} : G \to \mathcal{A} \rtimes G$, dada por $\pi_{\alpha^{\pi_0}}(g) = \varepsilon_g$, nos dá um homomorfismo $\psi : K_{par}(G) \to \mathcal{A} \rtimes_{\alpha^{\pi_0}} G$ tal que $\psi([g]) = \varepsilon_g \delta_g$.

Por um lado, temos que $\phi_{\pi_0} \circ \psi([g]) = \phi_{\pi_0}(\varepsilon_g \delta_g) = \varepsilon_g \phi_{pi_0}(\delta_g) = \varepsilon_g [g] = [g][g^{-1}][g] = [g]$, para todo $g \in G$, então $\phi_{pi_0} \circ \psi$ é o mapa identidade. Por outro lado, como D_g é gerado por elementos da forma $\varepsilon_g \cdot \varepsilon_{h_1} \cdot \dots \cdot \varepsilon_{h_s}$ e como $\varepsilon_g \delta_g \varepsilon_{g^{-1}} \delta_{g^{-1}} = \varepsilon_g \delta_e$, temos que

$$\begin{aligned}
\psi \circ \phi_{\pi_0}((\varepsilon_g \cdot \varepsilon_{h_1} \cdot \dots \cdot \varepsilon_{h_s})\delta_g) = \psi((\varepsilon_g \cdot \varepsilon_{h_1} \cdot \dots \cdot \varepsilon_{h_s})[g]) &= \psi([g][g^{-1}][h_1][h_1^{-1}] \dots [h_s][h_s^{-1}][g]) \\
&= (\varepsilon_g \delta_g \varepsilon_{g^{-1}} \delta_{g^{-1}})(\varepsilon_{h_1} \delta_{h_1} \varepsilon_{h_1^{-1}} \delta_{h_1^{-1}}) \dots (\varepsilon_{h_s} \delta_{h_s} \varepsilon_{h_s^{-1}} \delta_{h_s^{-1}}) \varepsilon_g \delta_g \\
&= \varepsilon_g \delta_e \varepsilon_{h_1} \delta_e \dots \varepsilon_{h_s} \delta_e \varepsilon_g \delta_g = \varepsilon_g^2 \varepsilon_{h_1} \dots \varepsilon_{h_s} \delta_g = \varepsilon_g \varepsilon_{h_1} \dots \varepsilon_{h_s} \delta_g.
\end{aligned}$$

Portanto, $\psi \circ \phi_{\pi_0}$ é o mapa identidade e consequentemente ψ é a inversa de ϕ_{π_0}, como queríamos. □

Capítulo 3

AÇÕES E REPRESENTAÇÕES H-GLOBAIS

Apesar do título envolvendo ações e representações $H-$globais esse capítulo será dividido em duas partes. Na primeira parte será introduzido o conceito de globalização, tanto para ações parciais quanto para representações parciais. No caso de uma ação parcial de um grupo G em um conjunto X uma globalização nada mais é do que uma ação global de G em X, com algumas condições a mais. Analogamente, no caso de representações parciais, uma globalização é uma representação global a qual a restrição é a representação parcial inicial, sob algumas condições que serão especificadas. Nesse sentido, provaremos que toda ação parcial e, analogamente, toda representação parcial possui uma única globalização (a menos de isomorfismo, é claro).

Na segunda parte do capítulo, o estudo é voltado às representações parciais $H-$globais. Uma representação parcial $H-$global nada mais é do que uma representação parcial de G em que a restrição a um subgrupo H é uma representação global. Esse tipo de representação possui algumas propriedades e relações interessantes, além disso, apresentaremos uma construção geral de exemplos de representações $H-$globais, originadas a partir da restrição da representação induzida de G, o que está relacionado com a primeira parte do capítulo. Este capítulo é baseado no artigo [3], mas com algumas consultas no artigo [8], que serão mencionadas no texto.

3.1 Globalização (ações parciais)

Definição 3.1.1. Dada uma ação global (Y, β) de um grupo G, isto é, um homomorfismo $\beta : G \to \mathrm{Sym}(Y)$, e um subconjunto $X \subset Y$, definimos a restrição $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ de (Y, β) em X por

R1) $X_g := X \cap \beta_g(X), \forall g \in G.$

R2) $\alpha_g : X_{g^{-1}} \to X_g, \alpha_g(x) = \beta_g(x), \forall x \in X_{g^{-1}}$

Lembre que a restrição de uma ação global de G em (Y, β) em um subconjunto $X \subset Y$ é na verdade uma ação parcial de G em X, conforme a Definição 1.1.3 e Exemplo 1.1.6. O objetivo agora é mostrar que toda ação parcial é uma restrição de uma ação global.

Definição 3.1.2. Uma globalização de uma ação parcial α de um grupo G em um conjunto X é uma tripla (Y, β, φ) na qual

G1) Y é um conjunto e $\beta : G \to \mathrm{Sym}(Y)$ é uma ação de G em Y;

G2) $\varphi : X \to Y$ é uma função injetora;

G3) Para todo $g \in G$, $\varphi(X_g) = \varphi(X) \cap \beta_g(\varphi(X))$;

G4) $\forall x \in X_{g^{-1}}$, temos $\varphi(\alpha(x)) = \beta_g(\varphi(x))$;

G5) $Y = \bigcup\limits_{g \in G} \beta_g(\varphi(X))$.

Teorema 3.1.3. *Para toda ação parcial α de um grupo G em um conjunto X existe uma única globalização (a menos de isomorfismo).*

Demonstração. A demonstração da existência dessa globalização pode ser consultada em [8, Teorema 3.5], no entanto, daremos alguns detalhes dessa construção a seguir.

Dada uma ação parcial $\alpha = (\{D_t\}_{t \in G}, \{\alpha_t\}_{t \in G})$ de G em X, podemos definir uma relação de equivalência em $G \times X$ dada por

$$(g, x) \sim (h, y) \iff x \in D_{g^{-1}h} \text{ e } \alpha_{h^{-1}g}(x) = y.$$

Agora seja $Y = (G \times X)/\sim$ e denote por $[g, x]$ a classe de equivalência de cada $(g, x) \in G \times X$. A função $\varphi : X \to Y$ dada por $x \mapsto [e, x]$ é injetiva, assim, podemos identificar X como a sua imagem $X' = \varphi(X)$. Além disso, é possível obter uma ação global de G em Y descrita por

$$\beta_g([h, x]) = [gh, x], \forall g, h \in G, \forall x \in X,$$

a qual satisfaz $\varphi(D_g) = \beta_g(\varphi(X)) \cap \varphi(X)$. Assim, a tripla (Y, β, φ) é a globalização de α.

Quanto a unicidade, suponha que existe outra globalização (Y', β', φ') e defina $\psi : Y \to Y'$ por $\psi(\beta_g(\varphi(x))) := \beta'_g(\varphi'(x))$, para todo $g \in G$ e $x \in X$.

Observe que ψ está bem definida:

De fato, se $\beta_g(\varphi(x)) = \beta_h(\varphi(y))$, para $g, h \in G$ e $x, y \in X$, então aplicando $\beta_{h^{-1}}$ em ambos os lados e utilizando o fato de que β é homomorfismo de grupos, obtemos

$$\beta_{h^{-1}g}(\varphi(x)) = \varphi(y),$$

mas por 3.1.2 G4), temos que $\varphi(\alpha_{h^{-1}g}(x)) = \varphi(y)$. Além disso, por G2), concluímos que $\alpha_{h^{-1}g}(x) = y$. Diante disso, temos

$$\beta'_{h^{-1}}\beta'_g(\varphi'(x)) = \beta'_{h^{-1}g}(\varphi'(x)) = \varphi'(\alpha_{h^{-1}g}(x)) = \varphi'(y),$$

o que nos dá $\beta'_g(\varphi'(x)) = \beta'_h(\varphi'(y))$.

Por fim, de G5) temos que ψ é unicamente determinada e, por G4), temos que $\psi \circ \varphi = \varphi'$. O resultado segue.

□

3.2 Globalização (representações parciais)

Observação 3.2.1. Note que dada uma representação parcial (V, π) de G, definindo $V_g := \epsilon(g)(V)$ e $\alpha_g := \pi(g)|_{V g^{-1}} : V_{g^{-1}} \to V_g$, para todo $g \in G$, temos uma ação parcial $\alpha = (\{V_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ de G em V.

O resultado a seguir é inspirado na chamada "$T-$condition" apresentada na Definição 3.1 e na Proposição 3.3 de [2], bem como no artigo [1].

Proposição 3.2.2. *Seja (U, ρ) uma representação global de um grupo G em um espaço vetorial U e $T : U \to U$ uma transformação linear satisfazendo $T^2 = T$ e*

$$T \circ T_g = T_g \circ T, \qquad \forall g \in G, \tag{3.1}$$

onde $T_g = \rho(g)T\rho(g^{-1})$. Então o par $(\pi, T(U))$, onde $\pi : G \to \operatorname{End} T(U)$ é dada por $\pi(g)(v) = T(\rho(g)(v))$, para todo $g \in G$ e $v \in V$ é uma representação parcial de G.

Demonstração. Primeiramente, como $T^2 = T$ então $T(v) = v$, para todo $v \in T(U)$. Com efeito, se $v \in T(U)$, existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$. Aplicando T em ambos os lados, obtemos $T^2(u) = T(v)$, mas $T^2(u) = T(u) = v$. Segue que $T(v) = v$, para todo $v \in V$. Diante disso, obtemos

$$\pi(e)(v) = (T \circ \rho(e))(v) = (T \circ id_U)(v) = T(v) = v,$$

ou seja, $\pi(e) = id_{T(U)}$.

Agora sejam $g, h \in G$ e $v \in T(V)$, então

$$\begin{aligned}
\pi(h)\pi(g)\pi(g^{-1})(v) &= \pi(h)\pi(g)(T\circ\rho(g^{-1})(v))\\
&= \pi(h)((T\circ\rho(g))(T(\rho(g^{-1})(v)))\\
&= (T\circ\rho(h))\circ(T(\rho(g))\circ T(\rho(g^{-1})(v))\\
&= T\circ\rho(h)(T\circ T_g)(v)\\
&= T\circ\rho(h)(T_g\circ T)(v)\\
&= T\circ\rho(h)(\rho(g)T\rho(g^{-1})\circ T)(v)\\
&= T\circ\rho(hg)(T(\rho(g^{-1})T(v))\\
&= T\circ\rho(hg)\pi(g^{-1})(T(v))\\
&= T\circ\rho(hg)\pi(g^{-1})(v)\\
&= \pi(hg)\pi(g^{-1})(v).
\end{aligned}$$

De modo análogo obtemos que $\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(h) = \pi(g^{-1})\pi(gh)$. Portanto, π é uma representação parcial de G, como queríamos. $\square$

Observação 3.2.3. Analisando a demonstração da proposição anterior, note que a condição (3.1) só precisa ser satisfeita na imagem de T e não em todo o espaço U. Essa observação é uma boa motivação para a definição a seguir.

Definição 3.2.4. Seja (U,ρ) uma representação global de um grupo G em um espaço vetorial U, e sejam $\varphi : V \to U$ e $\tau : U \to V$ duas transformações lineares tais que $\tau\circ\varphi = id_V$. Considere a função $\pi : G \to \operatorname{End} V$ definida por

$$\pi(g)(v) := \tau(\rho(g)(\varphi(v))),$$

para todo $v \in V$ e para todo $g \in G$. Dizemos que (V,π) é a restrição da representação global (U,ρ) em V via φ e τ se

RR1) (V,π) é uma representação parcial de G;

RR2) para todo $g \in G$ e $v \in V_{g^{-1}} := \pi(g^{-1})\pi(g)(V)$ temos que

$$\varphi(\pi(g)(v)) = \rho(g)(\varphi(v)).$$

Segundo o artigo [3], Observação 2.16, é dito que ao tomar $T = \varphi\circ\tau : U \to U$, as condições $RR1)$ e $RR2)$ são equivalentes a igualdade (3.1) ser satisfeita para todos os elementos em $\varphi(V) \subseteq U$. Baseado nisso, demonstramos a proposição a seguir. No entanto, percebemos que é possível enfraquecer tais hipóteses, conforme segue.

Proposição 3.2.5. *Considere a transformação linear $T : U \to U$, dada por $T = \varphi \circ \tau$. Afirmamos que as condições $RR1$) e $RR2$) da Definição 3.2.4 são válidas se, e somente se, T satisfazer a igualdade (3.1), para todo $g \in G$ e para todo $v \in Im\varphi$.*

Demonstração. Primeiramente, observe que $T^2 = T$, já que $\tau \circ \varphi = id$. Agora, seja $v \in Im\varphi$, então existe $u \in V$ tal que $v = \varphi(u)$. Assim,

$$
\begin{aligned}
(T \circ T_g)(v) &= (\varphi \circ \tau) \circ (\rho(g) \circ (\varphi \circ \tau) \circ \rho(g^{-1}))(\varphi(u)) \\
&= (\varphi \circ \tau) \circ (\rho(g) \circ \varphi \circ \pi(g^{-1}))(u) \\
&\overset{RR1)}{=} (\varphi \circ \tau) \circ (\rho(g) \circ \varphi) \circ (\pi(g^{-1}) \circ \pi(g) \circ \pi(g^{-1}))(u) \\
&\overset{RR2)}{=} (\varphi \circ \tau) \circ (\rho(g) \circ \rho(g^{-1}) \circ \varphi) \circ (\pi(g^{-1}) \circ \pi(g) \circ \pi(g^{-1}))(u) \\
&= (\varphi \circ \tau \circ \varphi) \circ (\pi(g) \circ \pi(g^{-1}))(u) \\
&= (\varphi \circ \pi(g) \circ \pi(g^{-1}))(u) \\
&= (\rho(g) \circ \rho(g^{-1}) \circ (\varphi \circ \pi(g) \circ \pi(g^{-1}))(u) \\
&\overset{RR2)}{=} (\rho(g) \circ \varphi) \circ (\pi(g^{-1}) \circ \pi(g) \circ \pi(g^{-1}))(u) \\
&\overset{RR1)}{=} (\rho(g) \circ \varphi \circ \pi(g^{-1}))(u) \\
&= \rho(g) \circ (\varphi \circ \tau \circ \rho(g^{-1}) \circ \varphi)(u) \\
&= (\rho(g) \circ (\varphi \circ \tau) \circ \rho(g^{-1})) \circ (\varphi \circ \tau \circ \varphi)(u) \\
&= (T_g \circ T)(v).
\end{aligned}
$$

Logo, T satisfaz a igualdade (3.1).

Reciprocamente, suponha que $T = \varphi \circ \tau$ satisfaz a condição (3.1), para todo $v \in Im\varphi$. Afirmamos que $\pi : G \to \operatorname{End} V$ definida por $\pi(g)(v) := \tau(\rho(g)(\varphi(v)))$ satisfaz RR1) e RR2).

Com efeito, uma vez que $\pi(e)(v) = \tau(\rho(e)(\varphi(v))) = \tau(id_U(\varphi(v))) = \tau(\varphi(v)) = v$, segue que $\pi(e) = id_V$.

Agora sejam $g, h \in G$ e $v \in V$, temos

$$
\begin{aligned}
\pi(h)\pi(g)\pi(g^{-1})(v) &= (\pi(h)\circ\pi(g))\circ(\tau\circ\rho(g^{-1}))(\varphi(v))\\
&= (\pi(h)\circ\tau)\circ(\rho(g)\circ\varphi)\circ(\tau\circ\rho(g^{-1}))(\varphi(v))\\
&= (\tau\circ\rho(h))\circ(\varphi\circ\tau)\circ(\rho(g)\circ\varphi)\circ(\tau\circ\rho(g^{-1}))(\varphi(v))\\
&= (\tau\circ\rho(h))\circ(T\circ\rho(g)\circ T)\circ(\rho(g^{-1})\circ\varphi)(v)\\
&= (\tau\circ\rho(h))\circ(T\circ T_g)(\varphi(v))\\
&= (\tau\circ\rho(h))\circ(T_g\circ T)(\varphi(v))\\
&= (\tau\circ\rho(h))\circ(\rho(g)\circ T)\circ(\rho(g^{-1})\circ\varphi)(v)\\
&= (\tau\circ\rho(hg))\circ(\varphi\circ\tau)\circ(\rho(g^{-1})\circ\varphi)(v)\\
&= \pi(hg)\circ(\tau\circ\rho(g^{-1})\circ\varphi)(v)\\
&= \pi(hg)\pi(g^{-1})(v).
\end{aligned}
$$

Analogamente, temos $\pi(g^1)\pi(g)\pi(h)(v) = \pi(g^{-1})\pi(gh)(v)$, para todo $v \in V$ e portanto π é uma G-representação parcial, isto é, satisfaz RR1).

Por fim, vejamos que π satisfaz RR2), isto é, $\varphi(\pi(g)(v)) = \rho(g)(\varphi(v))$, para todo $v \in V_{g^{-1}} := \pi(g^{-1})\pi(g)(V)$.

De fato, seja $v \in V_{g^{-1}} := \pi(g^{-1})\pi(g)(V)$, então existe $u \in V$ tal que $v = \pi(g^{-1})(\pi(g)(u))$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\rho(g)(\varphi(v)) &= (\rho(g)\circ\varphi)\circ(\pi(g^{-1})\circ(\pi(g))(u)\\
&= (\rho(g)\circ\varphi)\circ(\pi(g^{-1})\circ\tau)\circ(\rho(g)\circ\varphi)(u)\\
&= \rho(g)\circ(\varphi\tau)\circ(\rho(g^{-1})\circ\varphi\circ\tau\circ\rho(g))(\varphi)(u)\\
&= \rho(g)\circ(T\circ T_{g^{-1}})(\varphi(u))\\
&= \rho(g)\circ(T_{g^{-1}}\circ T)(\varphi(u))\\
&= (\rho(g)\circ T_{g^{-1}})(\varphi(u))\\
&= (\rho(g)\circ\rho(g^{-1}))\circ(T\circ\rho(g))(\varphi(u))\\
&= T(\rho(g)(\varphi(u)))\\
&= (\varphi\circ\tau)\circ(\rho(g)(\varphi(u)))\\
&= \varphi(\pi(g)(u)).
\end{aligned}
$$

No entanto, $\pi(g)(u) = \pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g)(u) = \pi(g)(v)$, assim segue que $\varphi(\pi(g)(u)) = \varphi(\pi(g)(v))$ e portanto, vale que

$$\rho(g)(\varphi(v)) = \varphi(\pi(g)(v)),$$

para todo $v \in V_{g^{-1}}$ e a propriedade RR2) é satisfeita. □

Observação 3.2.6. Para provar a veracidade da igualdade (3.1), assumimos que as condições RR1) e RR2) são válidas. No entanto, observe que na demonstração apresentada não foi necessário assumir a condição RR1), basta pedir que $\pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g) = \pi(g)$, para todo $g \in G$. Por outro lado, vimos que se vale a identidade (3.1) então são válidas RR1) e RR2), em particular vale que $\pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g) = \pi(g)$, para todo $g \in G$. Nesse sentido, temos o seguinte diagrama de implicações:

$$\begin{tikzcd}
RR2) + \pi(g)\pi(g^{-1})\pi(g) = \pi(g), \forall g \in G \arrow[rr, leftrightarrow] \arrow[dr] & & T_g \circ T = T \circ T_g, \forall g \in G \arrow[dl] \\
& RR1) &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 3.2.7. Seja (Y, β) uma ação global de um grupo G em um conjunto Y. Seja $X \subset Y$ um subconjunto, e seja (X, α) a restrição de (Y, β) para X. Relembrando a definição 2.1.3, vamos mostrar que a linearização $(\mathbb{C}[X], \hat{\alpha})$ de (X, α) é na verdade a restrição da linearização $(\mathbb{C}[Y], \hat{\beta})$ de (Y, β) via a inclusão $\varphi : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[Y]$ e a projeção $\tau := P_X : \mathbb{C}[Y] \to \mathbb{C}[X]$.

Fixando $g \in G$, para todo $x \in X$,

$$\hat{\alpha}(g)(x) = \alpha_g(P_{X_{g^{-1}}}(x)) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \notin X_{g^{-1}}; \\ \alpha_g(x), & \text{se} \quad x \in X_{g^{-1}}. \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad x \in X_{g^{-1}}; \\ \beta_g(x), & \text{se} \quad x \in X_{g^{-1}}. \end{cases}$$

Por outro lado,

$$\tau(\hat{\beta}(g)(\varphi(x))) = \tau(\beta_g(x)) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad \beta_g(x) \notin X; \\ \beta_g(x), & \text{se} \quad \beta_g(x) \in X. \end{cases}$$

Mas, $\beta_g(x) \in X$ se, e somente se, $x \in X \cap \beta_g^{-1}(X) = X_{g^{-1}}$. Portanto,

$$\hat{\alpha}(g) = \tau \circ \hat{\beta}(g) \circ \varphi, \forall g \in G.$$

Uma vez que a função $\hat{\alpha} : G \to \operatorname{End} \mathbb{C}[X]$ dada por $\hat{\alpha}(g) := \tau \circ \hat{\beta}(g) \circ \varphi$ é linearização, segue da Proposição 2.1.4 que $\hat{\alpha}$ é representação parcial de G em $\mathbb{C}[X]$. Além disso, para todo g em G, temos

$$\mathbb{C}[X]_{g^{-1}} = \hat{\alpha}(g^{-1})\hat{\alpha}(g)(\mathbb{C}[X]) = \hat{\alpha}(g^{-1})(\mathbb{C}[X \cap \beta_g(X)]) = \mathbb{C}[\beta_{g^{-1}}(X) \cap X] = C[X_{g^{-1}}]$$

e para todo $x \in X_{g^{-1}}$, $\varphi(\hat{\alpha}(g)(x)) = \hat{\alpha}(g)(x) = \alpha_g(x) = \beta_g(x) = \hat{\beta}(g)(x) = \hat{\beta}(g)(\varphi(x))$, então $(\mathbb{C}[X], \hat{\alpha})$ é na verdade a restrição de $\hat{\beta}$ para $\mathbb{C}[X]$ via φ e τ.

Definição 3.2.8. Uma globalização de uma representação parcial (V, π) de um grupo G é uma quádrupla (U, ρ, φ, τ), onde

GR1) (U, ρ) é uma representação global de G,

GR2) (V, π) é a restrição de (U, ρ) via φ e τ,

GR3) Para toda quádrupla $(U', \rho', \varphi', \tau')$ satisfazendo $(GR1)$ e $(GR2)$ existe um único $G-$homomorfismo $\psi : U \to U'$ (isto é, ψ é linear e $\psi \circ \rho(g) = \rho'(g) \circ \psi)$ para todo $g \in G$) tal que $\psi \circ \varphi = \varphi'$ e $\tau' \circ \psi = \tau$.

Teorema 3.2.9. *Toda $G-$representação parcial (V,π) tem uma única globalização (U,ρ,φ,τ) a menos de um isomorfismo canônico, isto é, se $(U',\rho',\varphi',\tau')$ é outra globalização, então existe um único $G-$isomorfismo $\psi : U \to U'$ tal que $\psi\circ\varphi = \varphi'$ e $\tau'\circ\psi = \tau$.*

Demonstração. Seja (V,π) uma $G-$representação parcial. Definindo $V_g := \pi(g)\pi(g^{-1})$ para todo $g \in G$. Considere, no $\mathbb{C}-$espaço vetorial $\mathbb{C}[G]\otimes V$, o subespaço Z gerado pelos vetores da forma $\{g\otimes v - h\otimes\pi(h^{-1}g)(v) : g,h \in G, v \in V_{g^{-1}h}\}$ e seja $U := (\mathbb{C}[G]\otimes V)/Z$.

De maneira natural, temos que $\mathbb{C}[G]\otimes V$ é uma representação global. Isso induz uma estrutura de representação global (U,ρ) de G em U dada por $\rho : G \to \mathrm{GL}(U)$, com $\rho(g)(\overline{h\otimes v}) = \overline{gh\otimes v}$ para todos $g,h \in G$ e $v \in V$, onde $\bar{t}$ denota a classe de $t \in \mathbb{C}[G]\otimes V$ em U.

Para checar que ρ está bem definida, é suficiente notar que Z é uma $G-$subrepresentação: dados $g,h,k \in G$ e $v \in V_{h^{-1}k}$, temos

$$gh\otimes v - gk\otimes\pi(k^{-1}h)(v) = gh\otimes v - gk\otimes\pi(k^{-1}g^{-1}gh)(v) = (gh)\otimes v - (gk)\otimes\pi((gk)^{-1}(gh))(v) \in Z,$$

o que prova que ρ está bem definida.

Note ainda que as funções $\rho(g)$ são, de fato, invertíveis, pois $\rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1})$.

Considere agora as funções $\varphi : V \to U$ e $\tau : U \to V$ definidas por $\varphi(v) := \overline{e\otimes v}$ e $\tau(\overline{g\otimes v}) := \pi(g)(v)$ para todo $v \in V$. Para mostrar que τ está bem definida, observe que é suficiente mostrar que $Z \subset \ker\tilde{\tau}$, onde $\tilde{\tau} : \mathbb{C}[G]\otimes V \to V$ é dada por $\tilde{\tau}(g\otimes v) = \pi(g)(v)$.

Sejam $h,k \in G$ e $v \in V_{h^{-1}k} = \pi(h^{-1}k)\pi(k^{-1}h)(V)$, temos, utilizando o fato de que (V,π) é representação parcial, que

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}(h\otimes v) &= \pi(h)(v) = \pi(h)\pi(h^{-1}k)\pi(k^{-1}h)(v) = \pi(h)\pi((k^{-1}h)^{-1})\pi(k^{-1}h)(v)\\ &= \pi(h(k^{-1}h)^{-1})\pi(k^{-1}h)(v) = \pi(k)\pi(k^{-1}h)(v) = \tilde{\tau}(k\otimes\pi(k^{-1}h)(v)),\end{aligned}$$

ou seja, $\tilde{\tau}(h\otimes v - k\otimes\pi(k^{-1}h)(v)) = 0$. Como os geradores de Z são da forma $h\otimes v - k\otimes\pi(k^{-1}h)(v)$, segue que $Z \subset \ker\tilde{\tau}$ e então existe uma única função linear de U para V que satisfaz $\overline{g\otimes v} \mapsto \tilde{\tau}(g\otimes v)$ e esta função é justamente τ.

Diante do que foi dito, afirmamos que (U,ρ,φ,τ) é uma globalização de (V,π).

De fato, já provamos que (U,ρ) é representação global de G, logo GR1) da Definição 3.2.8 está provado. Para provar GR2), primeiramente observe que por hipótese já temos que (V,π) é representação parcial de G e que $\tau\circ\varphi = id_V$, pois

$$(\tau\circ\varphi)(v) = \tau(e\otimes v) = \pi(e)(v) = v, \qquad \forall v \in V.$$

Além disso, por construção temos $\tau(\rho(g))(\varphi(v)) = \pi(g)(v)$, assim, para todo $v \in V_{g^{-1}}$, temos

$$\varphi(\pi(g)(v)) = \overline{e\otimes\pi(g)(v)} = \overline{g\otimes v} = \rho(g)\overline{e\otimes v} = \rho(g)(\varphi(v)).$$

Logo, (V, π) é a restrição de (U, ρ) via φ e τ, o que prova GR2).

Para provar GR3), seja $(U', \rho', \varphi', \tau')$ outra quádrupla satisfazendo GR1) e GR2). Se existir uma aplicação linear $\psi : U \to U'$ satisfazendo GR3), então ela é unicamente determinada pela propriedade de que $\psi(\varphi(v)) = \varphi'(v)$, para todo $v \in V$. Então, $\psi(\overline{e \otimes v}) = \psi(\varphi(v)) = \varphi'(v)$. Além disso, $\varphi(\rho(g)(u)) = \rho'(g)(\psi(u))$, para todo $u \in U$ e $g \in G$, então

$$\psi(\overline{g \otimes v}) = \psi(\rho(g)(\overline{e \otimes v})) = \psi(\rho(g)(\varphi(v))) = \rho'(g)(\psi(\varphi(v))) = \rho'(g)(\varphi'(v)).$$

Isso mostra a unicidade de ψ e sugere uma maneira de defini-la: seja $\tilde{\psi} : \mathbb{C}[G] \otimes V \to U'$ dada por $\tilde{\psi}(g \otimes v) = \rho'(g)(\varphi'(v))$, para todo $g \in G$ e para todo $v \in V$. Afirmamos que essa função leva geradores de Z para 0.

De fato, se $g, h \in G$ e $v \in V_{g^{-1}h}$, então

$$\tilde{\psi}(g \otimes v) = \rho'(g)(\varphi'(v)) = \rho'(h)\rho'(h^{-1}g)(\varphi'(v)) = \rho'(h)(\varphi'(\pi'(h^{-1}g)(v))) = \tilde{\psi}(h \otimes \pi'(h^{-1}g)(v)).$$

Portanto, a função $\psi : U \to U'$ dada por $\psi(\overline{g \otimes v}) = \rho'(g)(\varphi'(v))$ está bem definida. Note ainda que por construção ψ é um $G-$homomorfismo e $\psi \circ \varphi = \varphi'$.

Finalmente, a propriedade de que $\tau' \circ \psi = \tau$ segue do fato de que $U = \sum_{g \in G} \rho(g)(\varphi(V))$ e de

$$\tau(\rho(g)(\varphi(v))) = \pi(g)(v) = \tau'(\rho'(g)\varphi'(v)) = \tau'(\rho'(g)(\psi(\varphi(v)))) = \tau'(\psi(\rho(g)(\varphi(v)))),$$

o que prova a existência de ψ, completando a prova de GR3).

□

Corolário 3.2.10. *A globalização (U, ρ, φ, τ) de uma representação parcial (V, π) satisfaz*

GR3') $U = \sum_{g \in G} \rho(g)(\varphi(V))$;

GR4') *Para toda quádrupla $(U', \rho', \varphi', \tau')$ satisfazendo $(GR1)$ e $(GR2)$, a aplicação*

$$\psi(\rho(g)(\varphi(v))) := \rho'(g)(\varphi'(v)), \forall g \in G, \forall v \in V$$

nos dá uma transformação linear bem definida $\psi : U \to U'$.

GR5') *ψ satisfaz $\tau' \circ \psi = \tau$.*

Além disso, uma quádrupla (U, ρ, φ, τ) satisfazendo $(GR1), (GR2), (GR3')$ e $(GR4')$ é uma globalização.

3.3 $G-$representações parciais $H-$globais

Definição 3.3.1. Seja H um subgrupo de um grupo G. Então

- Uma $G-$ação parcial $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ em um conjunto X é chamada $H-$global se $X_h = X$ para todo $h \in H$.
- Uma $G-$representação parcial (V, π) é $H-$global se a restrição de π a H é uma representação global de H.

Exemplo 3.3.2. Seja G um grupo e H um subgrupo de G. Existem pelo menos duas $G-$representações parciais $H-$globais.

(a) Qualquer $G-$representação global é obviamente $G-$ representação parcial H-global.

(b) Seja (W, ρ) uma representação global de H. Então construímos uma G-representação parcial $H-$global $(W, \overline{\rho})$ da seguinte maneira: defina

$$\overline{\rho}(g) := \begin{cases} 0, & \text{se} \quad g \in G \setminus H; \\ \rho(g), & \text{se} \quad g \in H. \end{cases}$$

.

Lema 3.3.3. *Seja (V, π) uma G-representação parcial $H-$global. Então para todo $g \in G$ e $h \in H$, temos*

$$\pi(gh) = \pi(g)\pi(h) \quad e \quad \pi(hg) = \pi(h)\pi(g). \tag{3.2}$$

Demonstração. Com efeito, dado $g \in G$ e $h \in H$

$$\pi(gh) = \pi(gh)\pi(e) = \pi(gh)\pi(h^{-1})\pi(h) = \pi(gh^{-1}h)\pi(h) = \pi(g)\pi(h).$$

Analogamente, temos que $\pi(hg) = \pi(h)\pi(g), \forall g \in G, h \in H$. $\square$

Corolário 3.3.4. *Seja (V, π) uma G-representação parcial $H-$global. Então para todo $g \in G$ e $h \in H$, temos*

$$\pi(gh)\pi((gh)^{-1}) = \pi(g)\pi(g^{-1}) \tag{3.3}$$

Demonstração. Dados $g \in H$ e $h \in H$, então

$$\pi(gh)\pi((gh)^{-1}) = \pi(gh)\pi(h^{-1}g^{-1}) = \pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1})\pi(g^{-1}) = \pi(g)\pi(g^{-1}).$$

$\square$

Definição 3.3.5. Sejam G um grupo e (V, π) uma $G-$representação parcial. Definimos o globalizador $H(V) = H(V, \pi)$ de V como sendo

$$H(V) := \{g \in G : \pi(g) \text{ é invertível}\}.$$

Proposição 3.3.6. *$H(V)$ é subgrupo de G.*

Demonstração. É claro, pois dados $g, h \in H(V)$ então

$$\pi(gh^{-1}) = \pi(gh^{-1})\pi(h)\pi(h^{-1}) = \pi(gh^{-1}h)\pi(h^{-1}) = \pi(g)\pi(h^{-1}).$$

Como $\pi(gh^{-1})$ é composição de transformações lineares invertíveis então $\pi(gh^{-1})$ é invertível, logo, $gh^{-1} \in H(V)$.

Portanto $H(V)$ é subgrupo de G. $\square$

Proposição 3.3.7. *Sejam G um grupo, (V, π) uma $G-$ representação parcial e H subgrupo de G então (V, π) é $H-$global se, e somente se, H é subgrupo de $H(V)$.*

Demonstração. Se (V, π) é $H-$global então a restrição de π a H é uma representação global de H, isto é, $\pi(h)$ é invertível para todo $h \in H$. O que nos mostra que $H \subset H(V)$ e como H é grupo com a mesma operação de $H(V)$, segue que H é subgrupo de $H(V)$. Reciprocamente, se H é subgrupo de $H(V)$ então $\pi(h)$ é invertível para todo $h \in H$, o que implica na restrição de π a H ser uma representação global, logo, (V, π) é $H-$global. $\square$

Observação 3.3.8. A proposição anterior nos diz que $H(V)$ é o maior subgrupo de G que age globalmente em V via (V, π).

Exemplo 3.3.9. Seja K um subgrupo de G e considere a ação de G nas classes laterais à esquerda G/K de K dada pela multiplicação à esquerda, isto é, $\beta : G \to \mathrm{Sym}(G/K)$, onde $\beta(g)(hK) = (gh)K$. Seja $A \subset G/K$ um conjunto de classes à esquerda e seja α a restrição de β em A, o que nos dá uma $G-$ação parcial, por dizer, $\alpha = (\{A_g\}_{g \in G}, \{\alpha_g\}_{g \in G})$, com

- $A_g = A \cap \beta_g(A) = A \cap gA$,para todo $g \in G$
- $\alpha_g : A_{g^{-1}} \to A_g$ dada por $\alpha_g(x) = \beta_g(x)$, para todo $x \in A_{g^{-1}}$.

Definindo o subgrupo $K_A := \{g \in G : gA = A\} \subseteq G$, afirmamos que a $G-$ ação parcial α é $H-$global se, e somente se, H é subgrupo de K_A.

De fato, se α é $H-$global então $A_g = A$, para todo $g \in H$. Mas por definição $A_g = A \cap gA$, logo, $A = A \cap gA$, ou seja, $A \subset gA$. Por outro lado, uma vez que o grupo G é finito então G/K é finito, logo, A é finito e assim gA tem a mesma cardinalidade de A. Dito isso, como $A \subset gA$, segue que $A = gA$.

Reciprocamente se H é subgrupo de K_A então $gA = A$ para todo $g \in H$. Assim, $A_g = A \cap gA = A \cap A = A$, para todo $g \in H$, o que mostra que α é $H-$global.

Exemplo 3.3.10. Considere agora a linearização $(\mathbb{C}[A], \hat{\alpha})$ de α. Afirmamos que o globalizador $H(\mathbb{C}[A])$ dessa $G-$representação parcial é o grupo K_A.

De fato, seja $g \in H(\mathbb{C}[A])$, como $\hat{\alpha}(g)$ é invertível, segue que $\ker \hat{\alpha}(g) = \{0\}$. Mas se $\hat{\alpha}(g)$ é injetora então $P_{A_{g^{-1}}}$ também é injetora e isso ocorre se, e somente se, $A = g^{-1}A$, logo, $A = gA$. Assim, $g \in K_A$.

Por outro lado, se $g \in K_A$ então $gA = A$. Assim, vale que $A_{g^{-1}} = A \cap g^{-1}A = A \cap A = A$, então $\hat{\alpha}(g)(x) = \alpha_g(x), \forall x \in A$. Logo, $\hat{\alpha}(g)$ é invertível e sua inversa é dada pela função $\hat{\alpha}(g)^{-1} = \alpha_g^{-1}$. Assim, $g \in H(\mathbb{C}[A])$.

Portanto, segue que $H(\mathbb{C}[A]) = K_A$.

Antes de iniciar o próximo exemplo, vamos fixar algumas notações. Para cada natural n, denote $[n] := \{1, 2, \ldots, n\}$, e para cada $I \subseteq [n]$, seja

$$S_n^I := \{\sigma \in S_n : \sigma(I) = I\},$$

então por exemplo, $S_n^\emptyset = S_n^{[n]}$ e $S_n^{[1]} = S_n^{[n]\setminus[1]} \simeq S_1 \times S_{n-1} \simeq S_{n-1} \subset S_n$.

Mais geralmente, para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, considere $S_k \times S_{n-k} \simeq S_n^{[k]} = S_n^{[n]\setminus[k]}$. Queremos descrever as ações de S_n nas classes à esquerda de $S_n/(S_k \times S_{n-k})$. Para tal, observe que, dado $\sigma \in S_n$ e $I \subset [n]$, temos $\sigma S_n^I = \{\theta \in S_n : \theta(I) = \sigma(I)\}$.

De fato, se $\tau \in \sigma S_n^I$ então $\tau = \sigma\tau'$, para alguma $\tau' \in S_n^I$. Como $\tau' \in S_n^I$ então $\tau'(I) = I$, aplicando σ, temos $\tau(I) = \sigma\tau'(I) = \sigma(I)$. Por outro lado, se $\tau \in S_n$ e satisfaz $\tau(I) = \sigma(I)$, então aplicando σ^{-1} em ambos os lados, obtemos $\sigma^{-1}\tau(I) = I$, logo, $\tau \in \sigma S_n^I$, pois $\tau = \sigma(\sigma^{-1}\tau)$.

Portanto, para cada $\rho \in S_n$, vale que

$$\rho(\sigma S_n^I) = \tau S_n^I \iff \rho\sigma(I) = \tau(I),$$

se, e somente se, ρ associa o subconjunto $\sigma(I) \subseteq [n]$ ao subconjunto $\tau(I) \subseteq [n]$. Assim, podemos identificar as ações de S_n nas classes à esquerda de $S_n^{[k]}$ com as ações de S_n em

$$\binom{[n]}{k} := \{A \subset [n] : |A| = k\},$$

via $\sigma S_n^{[k]} \iff \sigma([k])$. Note que ao considerar $k = 1$, podemos identificar as ações de S_n nas classes S_n/S_{n-1} como sendo a ação de S_n no conjunto $\binom{[n]}{1} = [n]$.

Exemplo 3.3.11. Neste exemplo, defina $Y := \{A \in \binom{[n]}{2} : 1 \in A\} \subsetneq \binom{[n]}{2}$ e denote por α a S_n-ação parcial em Y que é obtida da restrição da S_n- ação global em $\binom{[n]}{2}$. Por exemplo, para $n = 4$, temos

$$\binom{[4]}{2} = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}, \qquad Y = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}\},$$

logo,

$Y_{(12)} = Y \cap (12) \cdot Y = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}\} \cap \{\{1,2\}, \{2,3\}, \{2,4\}\} = \{1,2\}$, enquanto que, $Y_{(234)} = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}\} \cap \{\{1,3\}, \{1,4\}, \{1,2\}\} = Y$.

Agora que já estamos acostumados com a ação de S_n em Y, afirmamos, na notação do Exemplo 3.3.10, que $K_Y = S_n^{[1]}$.

De fato, primeiramente escreva $Y = \{\{1, j\}, j \in [n] \setminus \{1\}\}$ e seja $\sigma \in S_n^1$, isto é, $\sigma(1) = 1$. Assim, temos

$$\sigma \cdot Y = \{\{\sigma(1), \sigma(j)\}, j \in [n] \setminus \{1\}\} = \{\{1, \sigma(j)\}, j \in [n] \setminus \{1\}\} \stackrel{(*)}{=} \{\{1, k\}, k \in [n] \setminus \{1\}\} = Y.$$

$(*)$ Segue do fato de que $S_n^{[1]} = S_n^{[n]\setminus\{1\}}$ e σ é uma bijeção. Logo, $S_n^{[1]} \subseteq K_Y$.

Por outro lado, seja $\tau \in K_Y$ então $\tau \cdot Y = Y$. Nesse sentido, seja $\{1, j\} \in Y$ então existe um $k \in [n] \setminus \{1\}$ tal que $\tau(\{1, j\}) = \{1, k\}$. Mas $\tau(\{1, j\}) := \{\tau(1), \tau(j)\}$, logo, temos que $\tau(1) = 1$ ou $\tau(1) = k$.

Suponha por absurdo que $\tau(1) = k$, então obrigatoriamente temos $\tau(j) = 1$. Agora seja $l \in [n] \setminus \{1\}$ diferente de j, aplicando τ em $\{1, l\} \in Y$ obtemos $\tau \cdot \{1, l\} = \{\tau(1), \tau(l)\} = \{k, \tau(l)\}$. Como $\tau \in K_Y$ então $\{k, \tau(l)\} \in Y$, ou seja, $\tau(l) = 1$, mas isso é uma contradição, pois $\tau(j) = 1$ e τ é bijeção.

Concluímos que $\tau(1) = 1$ e $\tau \in S_n^{[1]}$, segue da arbitrariedade de $\tau \in K_Y$ que $K_Y \subseteq S_n^{[1]}$ e portanto $S_n^{[1]} = K_Y$. Assim, o globalizador da linearização $(\mathbb{C}[Y], \hat{\alpha})$ dessa S_n- ação parcial α é S_n^1.

3.4 Uma construção geral de exemplos

O objetivo desta seção é dar uma construção geral de uma classe de exemplos de $G-$ representações parciais $H-$globais. Para tal, considere um grupo finito G e dois subgrupos fixados H e K. Escreva $G = \bigsqcup_{i=1}^{n} g_i K$ como uma união disjunta de classes à esquerda de K e seja $A \subseteq G$ tal que $hA = A$ e $Ak = A$, para todo $k \in K$ e $h \in H$. Denote por A/K o conjunto de classes à esquerda de K contida em A e seja (W, ρ) uma representação global de K. A partir disso, podemos construir uma $G-$representação parcial , a qual é $H-$global, conforme segue.

Primeiramente considere a representação induzida $(\operatorname{Ind}_K^G W, \theta)$, onde $\operatorname{Ind}_K^G W \simeq \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[K]} W$, ou seja, $\theta : G \to \operatorname{End} \operatorname{Ind}_K^G W$ é dada por $\theta(g)(h \otimes w) = gh \otimes w$. Decompondo $\operatorname{Ind}_K^G W$ como um espaço vetorial obtemos

$$\operatorname{Ind}_K^G W \simeq \bigoplus_{g_i K \in G/K} W^{g_i},$$

onde W^{g_i} é o subespaço $\mathbb{C}_{g_i} K \otimes_{\mathbb{C}[K]} W$ correspondente à classe $g_i K$.

Para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, seja $\phi_i : W \to W_{g_i}$ o $\mathbb{C}$-isomorfismo linear definido por $\phi_i(w) := g_i \otimes_{C[K]} w$, para todo $w \in W$. Considerando o subespaço $W_A := \bigoplus_{g_i K \in A/K} W^{g_i}$ podemos definir $\pi : G \to \operatorname{End} W_A$ da seguinte maneira: para todo $g_i K \in A/K$ e para cada $x \in W^{g_i}$, definimos

$$\pi(g)(x) := \begin{cases} \phi_j(\rho(k)(\phi_i^{-1}(x))), & \text{se} \quad g g_i = g_j k, k \in K, \text{ e } \quad g_j K \in A/K, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.4}$$

Proposição 3.4.1. *O par* (W_A, π) *é restrição da representação* $G-$*global* $\operatorname{Ind}_K^G W$ *ao subespaço* W_A*, via inclusão* φ *e a projeção* $\tau : \operatorname{Ind}_K^G W \to W_A$*, onde* $\ker \tau = \bigoplus_{g_iK \notin A/K} W^{g_i}$.

Demonstração. Sejam $\varphi : W_A \to \operatorname{Ind}_K^G W$ a inclusão e $\tau : \operatorname{Ind}_K^G W \to W_A$ a projeção, onde $\ker \tau = \bigoplus_{g_iK \notin A/K} W^{g_i}$. Mostraremos que $\pi(g)(x) = \tau(\theta(g)\varphi(x))$, para todo $g \in G$ e $x \in W_A$, conforme Definição 3.2.4. Além disso, mostraremos que $T \circ T_g = T_g \circ T$, onde $T = \varphi \circ \tau$ e $T_g = \theta(g)T\theta(g^{-1})$. Assim, o resultado segue da Proposição 3.2.5.

Uma vez que τ, φ e θ são lineares, é suficiente mostrarmos que a igualdade $\pi(g)(x) = \tau(\theta(g)\varphi(x))$ é válida para x da forma $g_ir \otimes w \in W_A$. Dito isso, seja $g \in G$, temos

$$\tau(\theta(g)(\varphi(x))) = \tau(\theta(g)(x)) = \tau(\theta(g)(g_ir \otimes w)) = \tau(gg_ir \otimes w) = \begin{cases} gg_ir \otimes w, & \text{se} \quad gg_ir \in A/K, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por outro lado, note que podemos escrever $x = g_i \otimes \rho(r)w$, assim

$$\begin{aligned} \pi(g)(x) &= \pi(g)(g_i \otimes \rho(r)w) = \phi_j((\rho(k)(\phi_i^{-1}(g_i \otimes \rho(r)w))) \\ &= \phi_j((\rho(k)(\rho(r)w)) = g_j \otimes \rho(k)\rho(r)w = g_jkr \otimes w \\ &= \begin{cases} gg_ir \otimes w, & \text{se} \quad gg_ir \in A/K, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, é válido que $\pi(g)(x) = \tau(\theta(g)\varphi(x))$, para todo $x \in W_A$ e $g \in G$.

Agora vejamos que $(T \circ T_g)(x) = (T_g \circ T)(x)$, para todo $g \in G$ e $x \in Im\varphi$. De fato, seja x da forma $g_ik \otimes w$, então

$$\begin{aligned} (T \circ T_g)(x) = T(\theta_g(T(\theta_{g^{-1}}(x))) &= T(\theta_g(T(\theta_{g^{-1}}(g_ik \otimes w))) \\ &= T(\theta_g(T(g^{-1}g_ik \otimes w)) \\ &= \begin{cases} x, & \text{se} \quad g_ik \in A, g^{-1}g_iK \in A/K, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (T_g \circ T)(x) = \theta_g(T(\theta_{g^{-1}}(T(x))) &= \theta_g(T(\theta_{g^{-1}}(T(g_ik \otimes w)))) \\ &= \begin{cases} x, & \text{se} \quad g_ik \in A, g^{-1}g_iK \in A/K, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto, $T \circ T_g = T_g \circ T$ e o resultado segue. $\square$

Proposição 3.4.2. *A função* $\pi : G \to \operatorname{End} W_A$ *definida anteriormente é uma* $G-$*representação parcial* $H-$*global.*

Demonstração. Pela proposição anterior, o par (W_A, π) é restrição, logo, vale $RR1)$ e portanto $\pi : G \to \operatorname{End} W_A$ é $G-$representação parcial . Resta-nos mostrar que π é $H-$global.

Seja $h \in H$, veremos que $\pi(h)$ é invertível.

De fato, como para cada $x \in W_A$, existe $i = 1, 2, \ldots, n$ tal que $g_iK \in A/K$ e $x = \phi_i(w)$, para algum (único) $w \in W$. Além disso, como $hA = A$, para $h \in H$, vale que $hg_i = a$, para algum $a \in A$. Mas, $A = Ak$, sempre que $k \in K$, logo existe $j = 1, 2, \ldots, n$ tal que $g_j \in A$ tal que $a = g_jk$.

Diante do que foi dito, temos $hg_i = g_jk$, $k \in K$ e $g_j \in A/K$. Nesse sentido, obtemos que a expressão para $\pi(h)(x)$ é dada por $\phi_j(\rho(k)((\phi_i^{-1})(x)))$. Ora, mas então $\pi(h)$ é invertível e sua inversa é dada por $\phi_i \circ \rho(k^{-1}) \circ \phi_j^{-1}$.

Portanto, concluímos que π é uma $G-$representação parcial $H-$global. □

3.5 Algumas propriedades sobre representações parciais

Esta seção tem como objetivo complementar e generalizar algumas propriedades vistas na seção 2.1 sobre $G-$representações parciais. No entanto, daremos ênfase as propriedades voltadas a $G-$representações parciais $H-$globais. Os resultados que serão apresentados a seguir podem ser consultados em [3].

Sejam G um grupo, V um espaço vetorial, $\pi : G \to \operatorname{End} V$ uma $G-$representação parcial e $A \subseteq G$. Vimos no capítulo 2, especificamente a partir de 2.4, que o operador definido por

$$P_A := \prod_{g \in A} \pi(g)\pi(g^{-1}) \cdot \prod_{g \in G \setminus A} (1 - \pi(g)\pi(g^{-1}))$$

satisfaz as seguintes propriedades:

1. Os elementos do conjunto $\{P_A\}_{A \subseteq G}$ são idempotentes ortogonais.
2. $\displaystyle\sum_{A \in \mathcal{P}_e(G)} P_A = 1.$

Dito isso, definindo $V^A = P_A(V)$, então teremos a decomposição

$$V = \bigoplus_{A \in \mathcal{P}_e(G)} V^A. \tag{3.5}$$

Observe também que se, além disso, tivermos um homomorfismo $\varphi \in Hom_G(V, U)$ entre duas $G-$representações parciais (V, π) e (U, η) (por dizer, $\eta(g)\varphi(v) = \varphi(\pi(g)(v)), \forall g \in G$), então

$$P_A^\eta(\varphi(v)) = \varphi(P_A^\pi(v)), v \in V.$$

Assim, definindo $V^A := P_A^\pi(V)$ e $U^A := P_A^\eta(U)$, temos as decomposições

$$V = \bigoplus_{A \in \mathcal{P}_e(G)} V^A \qquad \text{e} \qquad U = \bigoplus_{A \in \mathcal{P}_e(G)} U^A$$

e $\varphi(V^A) \subseteq U^A$, para todo A.

Notação: No paragráfo anterior, utilizamos a notação P_A^η para denotar o operador P_A, mas correspondente a uma $G-$representação parcial $\eta : G \to \operatorname{End} U$, isto é,

$$P_A^\eta = \prod_{g\in A} \eta(g)\eta(g^{-1}) \cdot \prod_{g\in G\setminus A} (1 - \eta(g)\eta(g^{-1})).$$

No entanto, essa notação será apenas para evitar confusão, ou seja, resultados em que são mencionadas mais do que uma $G-$representação parcial e o operador P_A correspondente a elas.

Lema 3.5.1. *Seja (V, π) uma $G-$representação parcial $H-$global. Então $P_{Ah} = P_A$, para todo $A \in \mathcal{P}_e(G)$ e $h \in H$.*

Demonstração. Fixando $A \in P_e(G)$ e $h \in H$, temos que para todo $t \in Ah$, existe um $g \in A$ tal que $t = gh$. Daí,

$$\begin{aligned}
P_{Ah} :&= \prod_{t\in Ah} \pi(t)\pi(t^{-1}) \cdot \prod_{t\in G\setminus Ah} (1 - \pi(t)\pi(t^{-1})) \\
&= \prod_{g\in A} \pi(gh)\pi(h^{-1}g^{-1}) \cdot \prod_{t\in G\setminus Ah} (1 - \pi(t)\pi(t^{-1})) \\
&\overset{3.3.3}{=} \prod_{g\in A} \pi(g)\pi(h)\pi(h^{-1})\pi(g^{-1}) \cdot \prod_{t\in G\setminus Ah} (1 - \pi(t)\pi(t^{-1})) \\
&\overset{(3.3)}{=} \prod_{g\in A} \pi(g)\pi(g^{-1}) \cdot \prod_{t\in G\setminus Ah} (1 - \pi(t)\pi(t^{-1})) \\
&\overset{(*)}{=} \prod_{g\in A} \pi(g)\pi(g^{-1}) \cdot \prod_{s\in G\setminus A} (1 - \pi(sh)\pi((sh)^{-1})) \\
&\overset{3.3.3}{=} \prod_{g\in A} \pi(g)\pi(g^{-1}) \cdot \prod_{s\in G\setminus A} (1 - \pi(s)\pi(h)\pi(s^{-1})\pi(h^{-1})) \\
&= \prod_{g\in A} \pi(g)\pi(g^{-1}) \cdot \prod_{s\in G\setminus A} (1 - \pi(s)\pi(s^{-1})) \\
&= P_A
\end{aligned}$$

A igualdade $(*)$ vem do fato de que para todo $t \in G \setminus Ah$ existe um $s \in G \setminus A$ tal que $t = sh$. Então basta aplicar uma mudança de variável. Assim, o resultado segue. □

Proposição 3.5.2. *Se $A \in \mathcal{P}_e(G)$ é tal que $P_A \neq 0$, então A é uma união das classes à esquerda de H e $H \subseteq A$.*

Demonstração. Suponha por absurdo que $Ah \neq A$, para algum $h \in H$. Uma vez que o conjunto dos operadores $\{P_A\}_{A\subseteq G}$ são idempotentes ortogonais, temos

$$0 = P_A P_{Ah} \overset{3.5.1}{=} P_A P_A = P_A^2 = P_A.$$

Contradição! Pois supomos que $P_A \neq 0$.

Segue que $Ah = A$. Além disso, como $A \in \mathcal{P}_e(G)$, isto é, $e \in A$, segue que $H \subseteq A$. $\square$

Notação: Generalizando a notação $P_e(G) = \{A \subseteq G : e \in A\}$ vista no capítulo 1, denotaremos $\mathcal{P}_H(G/H) := \{A \subseteq G : H \subseteq A \quad \text{e} \quad Ah = A, \forall h \in H\}$.

Observação 3.5.3. Como consequência da proposição anterior, a decomposição em (3.5) de uma $G-$representação parcial $H-$global (V, π) é dada por

$$V = \bigoplus_{A \in \mathcal{P}_H(G/H)} V^A.$$

Em particular, se $w \in V^A = P_A(V)$, então para cada $g \in G$, temos

$$\pi(g)(w) = \pi(g)P_A(w) = P_{gA}\pi(g)(w),$$

então,

$$\pi(g)(w) \in V^{gA} = P_{gA}(V).$$

Proposição 3.5.4. *Um par (V, π), onde V é um espaço vetorial e $\pi : G \to \operatorname{End} V$, é uma $G-$representação parcial $H-$global se, e somente se,*

GPR1) $\pi(e) = id_V$;

GPR2) $\pi(\overline{g})\pi(g)\pi(h) = \pi(\overline{g})\pi(gh)$, *para todo* $\overline{g}, g, h \in G$, *tal que* $\overline{g}g \in H$;

GPR3) $\pi(g)\pi(h)\pi(\overline{h}) = \pi(gh)\pi(\overline{h})$, *para todo* $g, h, \overline{h} \in G$, *tal que* $h\overline{h} \in H$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$

Suponha que o par (V, π) é uma $G-$representação parcial $H-$global e seja $\overline{g}, g, h \in G$ tal que $\overline{g}g \in H$. Então $GPR1)$ segue diretamente do fato de que π é representação parcial. Vejamos que $GPR2)$ também é válido, por dizer,

$$\begin{aligned}
\pi(\overline{g})\pi(g)\pi(h) =& \pi(\overline{g}gg^{-1})\pi(g)\pi(h) \overset{3.3.3}{=} \pi(\overline{g}g)\pi(g^{-1})\pi(g)\pi(h) \\
\overset{2.1.1}{=}& \pi(\overline{g}g)\pi(g^{-1})\pi(gh) \overset{3.3.3}{=} \pi(\overline{g}gg^{-1})\pi(gh) \\
=& \pi(\overline{g})\pi(gh).
\end{aligned}$$

Analogamente, vale $GPR3)$.

$(\Leftarrow)$ Supondo que $GPR1), GPR2)$ e $GPR3)$ são válidas, fazendo $\overline{g} = g^{-1}$ e $\overline{h} = h^{-1}$, segue que (V, π) é uma $G-$representação parcial . Por fim, fazendo $\overline{g} = e = \overline{h}$, segue que $\pi(h)$ é invertível, para todo $h \in H$, logo, (V, π) é $H-$global.

$\square$

Proposição 3.5.5. *Seja (V, π) uma $G-$ representação $H-$global. Então a aplicação $G \to \operatorname{End} V : g \mapsto \pi(g)\pi(g^{-1})$ é constante nas classes à esquerda de H em G. Em particular, se $g_1, \ldots, g_r$ é uma família de representantes de classes à esquerda de H em G, isto é, se $G = \dot{\cup}_{i=1}^{r} g_i H$, então*

$$P_A^{\pi} = \prod_{g_k H \subseteq A} \pi(g_k)\pi(g_k^{-1}) \cdot \prod_{g_i H \subseteq G \setminus A} (1 - \pi(g_i)\pi(g_i^{-1})) \tag{3.6}$$

para todo $A \in \mathcal{P}_H(G/H)$ e a expressão (3.6) não depende da escolha dos representantes.

Demonstração. Vimos em (3.3) que a igualdade $\pi(gh)\pi((gh)^{-1}) = \pi(g)\pi(g^{-1})$ é verdadeira, para todo $g \in G$ e $h \in H$. A primeira parte segue, isto é, a aplicação é constante nas classes à esquerda de H em G. Para verificar que (3.6) é valida, observe que para cada representante g_k existe um $t_k \in G$ e um $h_k \in H$ tal que $t_k = g_k h_k$, para todo $k = 1, \ldots, r$. Assim,

$$\begin{aligned} P_A^{\pi} &= \prod_{t_k \in A} \pi(t_k)\pi(t_k{}^{-1}) \cdot \prod_{t_k \in G \setminus A} (1 - \pi(k_i)\pi(k_i{}^{-1})) \\ &= \prod_{g_k H \subseteq A} \pi(g_k h_k)\pi((g_k h_k)^{-1}) \cdot \prod_{g_k H \in G \setminus A} (1 - \pi(g_k h_k)\pi((g_k h_k)^{-1})) \\ &= \prod_{g_k H \subseteq A} \pi(g_k)\pi(g_k{}^{-1}) \cdot \prod_{g_k H \in G \setminus A} (1 - \pi(g_k)\pi((g_k)^{-1})) \end{aligned}$$

o que prova a veracidade da igualdade (3.6). Para provar a unicidade, suponha outra escolha de representantes, digamos, g'_j. Então para cada j existe $h_j \in H$ tal que $g'_j = g_j h_j$, e pela igualdade anterior teremos

$$\pi(g_j)\pi(g_j^{-1}) = \pi(g'_j)\pi(g'_j{}^{-1}),$$

o que encerra a prova dessa proposição.

$\square$

Capítulo 4

REPRESENTAÇÕES PARCIAIS VISTAS COMO MÓDULOS

4.1 Representações parciais e módulos sobre $\mathbb{C}_{par}^{H}(G)$

Conforme visto anteriormente em 2.2.1, a álgebra $\mathbb{C}_{par}G$ é a $\mathbb{C}-$álgebra gerada por $\{[g] : g \in G\}$, onde são satisfeitas às relações

$$[e] = 1, \quad [h^{-1}][h][g] = [h^{-1}][hg], \quad [g][h^{-1}][h] = [gh^{-1}][h], \quad \forall g, h \in G. \tag{4.1}$$

Agora restringindo um pouco mais as relações em termos de um subgrupo $H \subseteq G$ surge uma outra álgebra, a qual definiremos a seguir.

Definição 4.1.1. A $\mathbb{C}$-álgebra $\mathbb{C}_{par}^{H}(G)$ é a $\mathbb{C}-$ álgebra gerada por $\{[g] : g \in G\}$, sujeita às relações

$$[e] = 1, \quad [\overline{h}][h][g] = [\overline{h}][hg] \quad [g][\overline{h}][h] = [g\overline{h}][h], \quad \forall g, h, \overline{h} \in G, \text{com} \quad \overline{h}h \in H. \tag{4.2}$$

Proposição 4.1.2. *A álgebra $\mathbb{C}_{par}^{H}(G)$ é isomorfa ao quociente de $\mathbb{C}_{par}(G)$ pelo ideal gerado por $\{[h][h^{-1}] - [e] : h \in H\}$.*

Demonstração. Por simplicidade, denote por R a álgebra livre gerada por $\{[g] : g \in G\}$, I o ideal de R gerado pelas relações (4.1) e J o ideal de R gerado pelas relações (4.2). Afirmamos que $J = \overline{I} := I + \langle [h][h^{-1}] - [e] : h \in H \rangle$.

De fato, por um lado temos

$$[h][h^{-1}] - [e] = (1 - [e])[h][h^{-1}] + [e][h][h^{-1}] - [e][hh^{-1}]) + [e]([e] - 1) \in J,$$

para todo $h \in H$, pois $eh = h \in H$, e portanto $\overline{I} \subseteq J$. Por outro lado, note que podemos deduzir de (4.1) as seguintes relações

$$[\overline{h}h][h^{-1}\overline{h}^{-1}][\overline{h}][hg] = [\overline{h}h][h^{-1}\overline{h}^{-1}\overline{h}][hg] = [\overline{h}][h][h^{-1}][hg] = [\overline{h}][h][h^{-1}hg] = [\overline{h}][h][g].$$

Logo, para todo $g, h, \overline{h} \in G$ tal que $\overline{h}h \in H$, temos

$$[\overline{h}][hg] - [\overline{h}][h][g] = (1 - [\overline{h}h][h^{-1}\overline{h}^{-1}])[\overline{h}][hg] + ([\overline{h}h][h^{-1}\overline{h}^{-1}][\overline{h}][hg] - [\overline{h}][h][g]) \in \overline{I}.$$

Pelas relações em (4.2) e um argumento análogo, prova-se que $J \in \overline{I}$.

Agora se J é o ideal gerado por $\{[h][h^{-1}] - [e] : h \in H\}$ em $\mathbb{C}_{par}G$, então $J/I = (I + \langle [h][h^{-1}] - [e] : h \in H\rangle)/I = \overline{J}$, assim,

$$\mathbb{C}_{par}^{H}(G) = R/J \cong \frac{R/I}{J/I} = \mathbb{C}_{par}G/\overline{J}.$$

□

Teorema 4.1.3. *Dada uma $G-$representação parcial $H-$global $\pi : G \to \operatorname{End} V$, existe um único morfismo de $\mathbb{C}-$álgebras $\phi_\pi : \mathbb{C}_{par}^{H}(G) \to \operatorname{End} V$ tal que $\phi_\pi([g]) = \pi(g)$, para todo $g \in G$. Isso faz com que V seja visto como um $\mathbb{C}_{par}^{H}(G)-$módulo à esquerda. Reciprocamente, dado V um $\mathbb{C}_{par}^{H}(G)-$módulo à esquerda com ação $\mu : \mathbb{C}_{par}^{H}(G) \times V \to V$, a função $\pi_\mu : G \to \operatorname{End} V$ dada por $g \mapsto [v \mapsto \mu([g], v)]$ é uma $G-$representação parcial $H-$global.*

Demonstração. Seja (V, π) uma $G-$representação parcial $H-$global. Considere o único morfismo de álgebra $\psi_\pi : \mathbb{C}_{par}G \to \operatorname{End} V$ tal que $\psi_\pi([g]) = \pi(g)$, para todo $g \in G$. Claramente, $\langle [h][h^{-1}] - [e] : h \in H\rangle \subseteq \ker \psi_\pi$, pois $\psi_\pi([h][h^{-1}] - [e]) = \psi_\pi([h])\psi_\pi([h^{-1}]) - \psi_\pi([e]) = \pi(h)\pi(h^{-1}) - \pi(e) = id_v - id_v = 0$. Então, pela propriedade universal do quociente, ψ_π induz um morfismo de álgebras $\phi_\pi : \mathbb{C}_{par}^{H}(G) \to \operatorname{End} V$, dado por $\phi_\pi([g]) = \pi(g)$, o qual é único. Reciprocamente, assuma que V é um $\mathbb{C}_{par}^{H}(G)-$módulo com a ação $\mu : \mathbb{C}_{par}^{H}(G) \times V \to V$e considere a aplicação $\pi_\mu : G \to \operatorname{End} V$ dada por $g \mapsto [v \mapsto \mu([g], v)]$.

Nesse sentido, $\pi_\mu(e)(v) = \mu([e], v) = \mu(1, v) = v$, para todo $v \in V$, logo, $\pi_\mu([e]) = id_v$. Além disso,

$$\begin{aligned} \pi_\mu(\overline{g})\pi_\mu(g)\pi_\mu(h)(v) &= \mu([\overline{g}], \mu([g], \mu([h], v))) = \mu([\overline{g}][g][h], v) \\ &\overset{4.2}{=} \mu([\overline{g}][gh], v) = \pi_\mu(\overline{g})\pi_\mu(gh)(v), \end{aligned}$$

para todo $v \in V$ e $\overline{g}, g, h \in G$ tal que $\overline{g}g \in H$, então $\pi_\mu(\overline{g})\pi_\mu(g)\pi_\mu(h) = \pi_\mu(\overline{g})\pi_\mu(gh)$. De maneira análoga, checamos que $\pi_\mu(h)\pi_\mu(\overline{g})\pi_\mu(g) = \pi_\mu(h\overline{g})\pi_\mu(g)$, assim, segue da Proposição 3.5.4 que π_μ é $G-$representação parcial $H-$global. □

Observação 4.1.4. Essa correspondência vista no teorema acima induz um isomorfismo de categorias

$$\Phi : \mathrm{PRep}_G^H \to \mathbb{C}_{par}^{H}(G) - \mathrm{Mod}$$

entre a categoria PRep_G^H das $G-$representações parciais $H-$globais e a categoria $\mathbb{C}_{par}^{H}(G)-$Mod dos $\mathbb{C}_{par}^{H}(G)-$módulos.

De fato, assuma que $f : V \to W$ é um morfismo entre $G-$representações $H-$globais (V, π_V) e $(W), \pi_W)$, isto é, $f(\pi_V(g)(v)) = \pi_W(g)(f(v))$, para todo $v \in V$ e $g \in G$. Assim,

$$f(\phi_{\pi_V}([g])(v)) = f(\pi_V(g)(v)) = \pi_W(g)(f(v)) = \phi_{\pi_W}([g])(f(v)),$$

ou seja, f é $\mathbb{C}_{par}^H(G)-$linear. De fato, pela definição da ação de $\mathbb{C}_{par}^H(G)$ em V, f é $\mathbb{C}_{par}^H(G)-$linear se, e somente se, $f \circ \pi_V(g) = \pi_W(g) \circ f$. Note também que se (V, π) é uma $G-$representação parcial $H-$global, então

$$\pi_{\mu_\pi}(g)(v) = \mu_\pi([g], v) = \phi_\pi([g])(v) = \pi(g)(v),$$
$$\mu_{\pi_\mu}([g], v) = \phi_{\pi_\mu}([g])(v) = \pi_\mu(g)(v) = \mu([g], v),$$

para todo $g \in G$ e $v \in V$, logo, $\pi_{\mu_\pi} = \pi$ e $\mu_{\pi_\mu} = \mu$. Portanto, as aplicações

$$\mathrm{PRep}_G^H \longleftrightarrow \mathbb{C}_{par}^H G - \mathrm{Mod}$$

$$(V, \pi) \longleftrightarrow (V, \mu_\pi)$$

$$[f : (V\ \pi_V) \to (W, \pi_W)] \longrightarrow [f : (V, \mu_{\pi_V}) \to (W, \mu_{\pi_W})]$$

são funtores bem definidos entre PRep_G^H e $\mathbb{C}_{par}^H(G) - \mathrm{Mod}$, que formam um isomorfismo entre as categorias.

4.2 $\mathbb{C}_{par}^H(G)$ visto como produto cruzado

Vimos na Seção 2.4 que a Álgebra parcial de grupo $K_{par}(G)$ é isomorfa ao produto cruzado $\mathcal{A} \rtimes_\alpha G$, onde α é uma ação parcial de G em uma certa álgebra $\mathcal{A}$. Nesta seção, mostraremos que existe um resultado semelhante quando trabalhamos com representações parciais $H-$globais e a álgebra parcial $H-$global de um grupo $\mathbb{C}_{par}^H(G)$. Para tal, denote $\tilde{\epsilon_g} := [g][g^{-1}]$ em $\mathbb{C}_{par}^H(G)$. Então, para cada elemento $h \in H$, temos

$$\tilde{\epsilon_{gh}} = [gh][h^{-1}g^{-1}] = [gh][e][h^{-1}g^{-1}] \overset{4.1.2}{=} [g][h][h^{-1}][g^{-1}] \overset{4.2}{=} [g][g^{-1}] = \tilde{\epsilon_g}.$$

Por consequência, podemos associar exatamente um idempotente $\tilde{\epsilon_g}$ a cada classe lateral esquerda de H. Seja A a subálgebra de $\mathbb{C}_{par}^H(G)$ gerada por esses idempotentes. Então temos o seguinte resultado.

Proposição 4.2.1. *O grupo G age parcialmente na álgebra A gerada pelos idempotentes $\tilde{\epsilon_g}$ de modo que a ação restrita a H é global. Além disso, $\mathbb{C}_{par}^H(G)$ é isomorfa a $A \rtimes_\alpha G$.*

Demonstração. Seja $g \in G$, então os domínios da ação parcial são dados por $A_g = A\tilde{\epsilon}_g$. A ação parcial será dada por $\alpha = \{\alpha_g : A_{g^{-1}} \to A_g : g \in G\}$, onde $\alpha_g(\tilde{\epsilon}_{g_1} \cdots \tilde{\epsilon}_{g_n} \cdot \tilde{\epsilon}_{g^{-1}}) = \tilde{\epsilon}_{gg_1} \cdots \tilde{\epsilon}_{gg_n} \cdot \tilde{\epsilon}_g$.

De fato, $A_e = A\tilde{\epsilon}_e = A[e][e^{-1}] = A$ e $\alpha_e = id_A$. Além disso, se $a \in A_g \cap A_{h^{-1}}$, então existem $b, l \in A$ tais que $a = b\tilde{\epsilon}_g$ e $a = l\tilde{\epsilon}_{h^{-1}}$. Ora, se $a = b\tilde{\epsilon}_g$, como $\tilde{\epsilon}_{h^{-1}}$ é idempotente, então $a\tilde{\epsilon}_{h^{-1}} = a = b\tilde{\epsilon}_g\tilde{\epsilon}_{h^{-1}}$, assim,

$$\alpha_g{}^{-1}(a) = \alpha_g{}^{-1}(b\tilde{\epsilon}_g\tilde{\epsilon}_{h^{-1}}) = \alpha_g^{-1}(b\tilde{\epsilon}_{h^{-1}}\tilde{\epsilon}_g) = b'\tilde{\epsilon}_{g^{-1}h^{-1}}\tilde{\epsilon}_{g^{-1}} = b'\tilde{\epsilon}_{g^{-1}}\tilde{\epsilon}_{(hg)^{-1}} \in A_{(hg)^{-1}}.$$

Então, $\alpha_g^{-1}(A_g \cap A_{h^{-1}}) \subseteq A_{(hg)^{-1}}$ e α compre a condição ii) de 1.2.4. Para provar a condição iii), seja $x \in \alpha_g^{-1}(A_g \cap A_{h^{-1}})$, conforme visto acima, x é da forma $x = b\tilde{\epsilon}_{g^{-1}}\tilde{\epsilon}_{(hg)^{-1}}$. Daí, como b é da forma $b = \tilde{\epsilon}_{s_1}\cdots\tilde{\epsilon}_{s_k}$, temos

$$\begin{aligned}
\alpha_h \circ \alpha_g(x) &= \alpha_h \circ \alpha_g(b\tilde{\epsilon}_{g^{-1}}\tilde{\epsilon}_{(hg)^{-1}}) = \alpha_h \circ \alpha_g(\tilde{\epsilon}_{s_1}\cdots\tilde{\epsilon}_{s_k}\tilde{\epsilon}_{g^{-1}}\tilde{\epsilon}_{(hg)^{-1}}) \\
&= \alpha_h \circ \alpha_g(\tilde{\epsilon}_{s_1}\cdots\tilde{\epsilon}_{s_k}\tilde{\epsilon}_{(hg)^{-1}}\tilde{\epsilon}_{g^{-1}}) = \alpha_h(\tilde{\epsilon}_{gs_1}\cdots\tilde{\epsilon}_{gs_k}\tilde{\epsilon}_{h^{-1}}\tilde{\epsilon}_g) \\
&= \alpha_h(\tilde{\epsilon}_{gs_1}\cdots\tilde{\epsilon}_{gs_k}\tilde{\epsilon}_g\tilde{\epsilon}_{h^{-1}}) = \tilde{\epsilon}_{hgs_1}\cdots\tilde{\epsilon}_{hgs_k}\tilde{\epsilon}_{hg}\tilde{\epsilon}_h.
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\alpha_{hg}(x) &= \alpha_{hg}(b\tilde{\epsilon}_{g^{-1}}\tilde{\epsilon}_{(hg)^{-1}}) = \alpha_{hg}(\tilde{\epsilon}_{s_1}\cdots\tilde{\epsilon}_{s_k}\tilde{\epsilon}_{g^{-1}}\tilde{\epsilon}_{(hg)^{-1}}) \\
&= \tilde{\epsilon}_{hgs_1}\cdots\tilde{\epsilon}_{hgs_k}\tilde{\epsilon}_{hgg^{-1}}\tilde{\epsilon}_{(hg)} = \tilde{\epsilon}_{hgs_1}\cdots\tilde{\epsilon}_{hgs_k}\tilde{\epsilon}_h\tilde{\epsilon}_{hg} \\
&= \tilde{\epsilon}_{hgs_1}\cdots\tilde{\epsilon}_{hgs_k}\tilde{\epsilon}_{hg}\tilde{\epsilon}_h,
\end{aligned}$$

ou seja $\alpha_h \circ \alpha_g(x) = \alpha_{hg}(x)$, para todo $x \in \alpha_g^{-1}(A_g \cap A_{h^{-1}})$. Segue que $\alpha = \{\alpha_g : A_{g^{-1}} \to A_g : g \in G\}$ é ação parcial de G em $\mathcal{A}$.

Uma vez que para cada $h \in H$, temos que $\tilde{\epsilon}_h = 1$, o domínio A_h é toda a álgebra A, logo, a ação parcial α é $H-$global.

Para provar o isomorfismo, vejamos que a aplicação $\pi_{\alpha^\pi} : G \to A \rtimes_\alpha G$, dada por $g \mapsto \tilde{\epsilon}_g\delta_g$ é $G-$parcial $H-$global. Para tal, mostraremos que são válidas as igualdades da Proposição 3.5.4.

Primeiramente, por simplicidade denote $\pi_{\alpha^\pi} = \tilde{\pi}$. Dito isso, é claro que $\tilde{\pi}(e) = \tilde{\epsilon}_e\delta_e$, o qual é a unidade de $A \rtimes G$. Além disso, sejam $\overline{g}, g, h \in G$, tais que $\overline{g}g \in H$, assim

$$\begin{aligned}
\tilde{\pi}(\overline{g})\tilde{\pi}(g)\tilde{\pi}(h) &= (\tilde{\epsilon}_{\overline{g}}\delta_{\overline{g}})(\tilde{\epsilon}_g\delta_g)(\tilde{\epsilon}_h\delta_h) = \tilde{\epsilon_{\overline{g}}}\delta_{\overline{g}}(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\tilde{\epsilon}_g)\tilde{\epsilon}_h)\delta_{gh}) \\
&= \alpha_{\overline{g}}(\alpha_{\overline{g}^{-1}}(\tilde{\epsilon}_{\overline{g}}\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\tilde{\epsilon}_g))\tilde{\epsilon_h})\delta_{\overline{g}gh} \\
&= \alpha_{\overline{g}}(\tilde{\epsilon}_{\overline{g}^{-1}}\alpha_g(\tilde{\epsilon}_{g^{-1}}\epsilon_h))\delta_{\overline{g}gh} = \alpha_{\overline{g}}(\epsilon_{\overline{g}^{-1}}\epsilon_g\epsilon_{gh})\delta_{\overline{g}gh} \\
&= (\tilde{\epsilon}_{\overline{g}})(\tilde{\epsilon}_{\overline{g}gh}\delta_{\overline{g}gh}) \overset{\overline{g}g \in H}{=} \tilde{\epsilon}_{\overline{g}}\tilde{\epsilon}_h\delta_{\overline{g}gh} = \alpha_{\overline{g}}(\alpha_{\overline{g}^{-1}}(\tilde{\epsilon}_{\overline{g}})\tilde{\epsilon}_{gh})\delta_{\overline{g}gh} \\
&= (\tilde{\epsilon}_{\overline{g}}\delta_{\overline{g}})(\tilde{\epsilon}_{gh}\delta_{gh}) = \tilde{\pi}(\overline{g})\tilde{\pi}(gh).
\end{aligned}$$

□

De modo análogo, segue que $\tilde{\pi}(h)\tilde{\pi}(g)\tilde{\pi}(\overline{g}) = \tilde{\pi}(hg)\tilde{\pi}(\overline{g})$. Logo, segue que $\tilde{\pi}$ é uma $G-$representação parcial $H-$global.

Assim, segue da propriedade universal que existe um homomorfismo $\psi : \mathbb{C}^H_{par}(G) \to A \rtimes_\alpha G$, dado por $[g_1][g_2]\cdots[g_n] \mapsto \tilde{\epsilon}_{g_1g_2\cdots g_n}\cdots\tilde{\epsilon}_{g_1g_2}\tilde{\epsilon}_{g_1}\delta_{g_1\cdots g_n}$. Por outro lado, defina o morfismo $\phi : A \rtimes_\alpha G \to \mathbb{C}^H_{par}(G)$ dado por $\tilde{\epsilon}_g\tilde{\epsilon}_{g_1}\cdots\tilde{\epsilon}_{g_k}\delta_g \mapsto \tilde{\epsilon}_g\tilde{\epsilon}_{g_1}\cdots\tilde{\epsilon}_{g_k}[g]$.

Uma vez que $\psi \circ \phi = id_{A\rtimes_\alpha G}$ e $\phi \circ \psi = id_{\mathbb{C}^H_{par}(G)}$, o isomorfismo segue.

4.3 A Álgebra de grupoide $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$

No capítulo 2, seção 2.2 vimos que existe uma correspondência biunívoca entre as representações parciais de G e as representações de $K_{par}(G)$, para isso provamos que existe tal correspondência com a álgebra $K\Gamma(G)$ de um grupoide $\Gamma(G)$, a qual é isomorfa a $K_{par}(G)$. Nesse sentido, esse processo se repete quando trabalhamos com as representações $H-$globais de G, Além disso, se tomarmos $H = \{e\}$ teremos o caso que já foi estudado. Nessa seção introduziremos um novo grupoide $\Gamma_H(G)$, o qual é associado a G e H. Após isso, mostraremos que a álgebra $\mathbb{C}^H_{par}(G)$ é isomorfa a $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$, essa construção pode ser consultada em [3].

Seja $\alpha = (\{X_g\}_{g\in G}, \{\alpha_g\}_{g\in G})$ uma ação parcial de G em X e defina

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathcal{G}, X, \alpha) := \{(x, g) \in X \times G : x \in X_{g^{-1}}\}.$$

Então $\mathcal{G}$ é um grupoide com o conjunto de objetos $\mathcal{G}_0 := X$, fonte $s(x, g) = x$, alvo $r(x, g) = \alpha_g(x)$, unidades (x, e), para $x \in X$ (lembrando que aqui estamos considerando a unidade como sendo um morfismo, conforme a Definição 2.2.3) e composição $(x, g)\cdot(y, h) = (y, gh)$ sempre que $x = \alpha_h(y)$.

Considere a ação parcial $\alpha^{\mathcal{P}}$ de G em $X = \mathcal{P}_H(G/H)$ (ver notação 3.5) dada por

$X_g = \{A \in \mathcal{P}_H(G/H) : gH \subseteq A\}$ e $\alpha^{\mathcal{P}}_g : X_{g^{-1}} \to X_g$, $A \mapsto gA$, para todo $g \in G$.

Definição 4.3.1. Definindo $\Gamma_H(G) := \mathcal{G}(G, \mathcal{P}_H(G/H)), \alpha^{\mathcal{P}})$, a composição é dada por

$$(A, g)\cdot(B, h) := \begin{cases} (B, gh), & \text{se} \quad A = hB; \\ \text{não definido}, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

a fonte é dada por $s(A, g) = A$, o alvo é dado por $r(A, g) = gA$ e as unidades são os pares (A, e), para $A \in \mathcal{P}_H(G/H)$. O inverso de (A, g) é dado por (gA, g^{-1}).

Observação 4.3.2. No caso particular em que $H = \{e\}$, temos o grupoide $\Gamma(G)$, visto em 2.2.6.

Lema 4.3.3. *Sejam $A \in \mathcal{P}_H(G/H)$ e $K_A := \{g \in G : gA = A\}$ o estabilizador de A em G (ou seja, o grupo de isotropia de A em $\Gamma_H(G)$). Se $A = \bigsqcup_{j=1}^m K_At_j$ é como união disjunta de classes à esquerda de K_A, então o conjunto de objetos distintos na componente conexa de $\Gamma_H(G)$ contendo em A é $\{t_j^{-1}A : j = 1, 2 \ldots, m\}$.*

Demonstração. Seja Γ a componente conexa do grupoide $\Gamma_H(G)$ contendo A. Qualquer objeto em Γ tem imagem $r(A, g^{-1}) = g^{-1}A$ de um elemento $(A, g^{-1}) \in \Gamma_H(G)$, para algum $g \in A$. Se $g \in A$, então $g = kt_j$ para algum $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ e para algum $k \in K_A$ e então $g^{-1}A = t_j^{-1}k^{-1}A = t_k^{-1}A$ é um dos objetos em Γ. Além disso, $t_j^{-1}A = t_l^{-1}A$ implica $t_lt_j^{-1} \in K_A$, então $K_At_j = K_At_l$, logo, $j = l$. Portanto, os objetos $t_j^{-1}A$ são distintos. $\square$

De maneira natural, podemos considerar a álgebra de grupoide $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$, correspondente ao grupoide $\Gamma_H(G)$ e, assim como em 2.2.10, é possível calcular a dimensão de $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$, conforme a proposição a seguir.

Proposição 4.3.4. *A igualdade a seguir é verdadeira.*

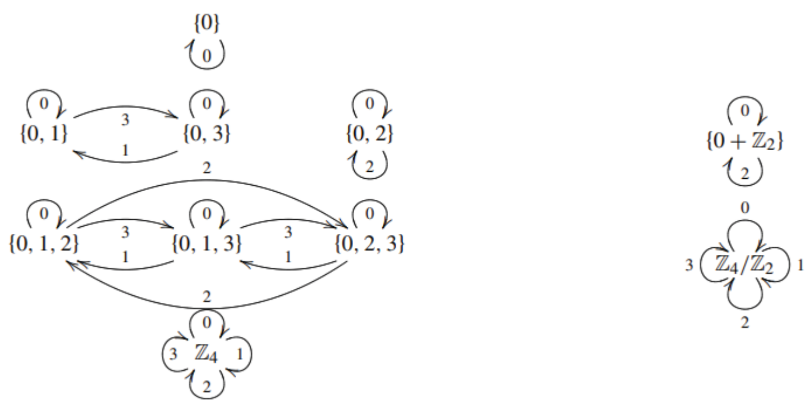
$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\Gamma_H(G)) = 2^{|G/H|}(|G| + |H|).$$

Demonstração. A dimensão de $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$ sobre $\mathbb{C}$ é igual à cardinalidade do grupoide $\Gamma_H(G)$. Mas para calcular essa cardinalidade, basta seguir um raciocínio análogo a demonstração da Proposição 2.2.10. Assim,

$$|\Gamma_H(G)| = 2^{|G/H|-2}(|G| - |H|) + 2^{|G/H|-1}|H| = 2^{|G/H|-2}(|G| + |H|).$$

□

Exemplo 4.3.5. As figuras abaixo representam $\Gamma_{\{0\}}\mathbb{Z}_4$ (a esquerda) e $\Gamma_{\mathbb{Z}_2}\mathbb{Z}_4$ (a direita).



Lema 4.3.6. *A função $\mu_p : G \to \mathbb{C}\Gamma_H(G)$ definida por*

$$\mu_p(g) := \sum_{A \ni g^{-1}} (A, g), \forall g \in G \tag{4.3}$$

satisfaz as seguintes propriedades:

$$\mu_p(g)(e) = 1_{\mathbb{C}\Gamma_H(G)}, \tag{4.4}$$

$$\mu_p(\overline{g})\mu_p(g)\mu_p(h) = \mu_p(\overline{g})\mu_p(gh), \tag{4.5}$$

$$\mu_p(h)\mu_p(\overline{g})\mu_p(g) = \mu_p(h\overline{g})\mu_p(g) \tag{4.6}$$

para todo $\overline{g}, g, h \in G$ tal que $\overline{g}g \in H$. Em particular, a função $L_{\mu_p} : G \to \operatorname{End} \mathbb{C}\Gamma_H(G)$ definida por

$$L_{\mu_p}(g)(x) := \mu_p(g) \cdot x, \forall g \in g, \forall x \in \mathbb{C}\Gamma_H(G)$$

nos dá uma $G-$representação parcial $H-$global.

Demonstração. Primeiramente, a igualdade (4.4) é válida, isto pois, $\mu_p(e) = \sum_A (A, e) = 1_{\mathbb{C}\Gamma_H(G)}$. Agora note que, como

$$\left(\sum_{A\ni g^{-1}} (A, g)\right)(B, h) = \begin{cases} (B, gh), & \text{se} \quad (gh)^{-1} \in B; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então

$$\mu_p(g)\mu_p(h) = \left(\sum_{A\ni g^{-1}} (A, g)\right)\left(\sum_{B\ni h^{-1}} (B, h)\right) = \sum_{B\supseteq\{(gh)^{-1},h^{-1}\}} . \tag{4.7}$$

Assumindo que $\overline{g}g \in H$, temos

$$\begin{aligned}
&\mu_p(\overline{g})\mu_p(g)\mu_p(h) = \\
&\quad = \sum_{A\ni\overline{g}^{-1}} (A, \overline{g}) \sum_{B\ni g^{-1}} (B, g) \sum_{C\ni h^{-1}} (C, h) \overset{(4.7)}{=} \sum_{A\ni\overline{g}^{-1}} (A, \overline{g}) \sum_{C\supseteq\{(gh)^{-1},h^{-1}\}} (C, gh) \\
&\quad \overset{(4.7)}{=} \sum_{C\supseteq\{(\overline{g}gh)^{-1},(gh)^{-1},h^{-1}\}} (C, \overline{g}gh) \overset{\overline{g}g\in H}{=} \sum_{C\supseteq\{(gh)^{-1},h^{-1}\}} (C, \overline{g}gh).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mu_p(\overline{g})\mu_p(gh) &= \sum_{A\ni\overline{g}^{-1}} (A, \overline{g}) \sum_{B\ni(gh)^{-1}} (B, gh) \overset{(4.7)}{=} \sum_{B\supseteq\{(\overline{g}gh)^{-1},(gh)^{-1}\}} (B, \overline{g}gh) \\
&\overset{\overline{g}g\in H}{=} \sum_{B\supseteq\{h^{-1},(gh)^{-1}\}} (B, \overline{g}gh),
\end{aligned}$$

logo, $\mu_p(\overline{g})\mu_p(g)\mu_p(h) = \mu_p(\overline{g})\mu_p(gh)$ e a igualdade (4.5) é válida. A demonstração da identidade (4.6) é análoga.

A última afirmação segue da Proposição 3.5.4. □

Lema 4.3.7. *Seja $H \subset G$ um subgrupo. As relações*

$$(A, e) = \prod_{g\in A} \mu_p(g)\mu_p(g^{-1}) \prod_{\overline{g}\in G\setminus A} (1_{\mathbb{C}\Gamma_H(G)} - \mu_p(\overline{g})\mu_p(\overline{g}^{-1})) \tag{4.8}$$

e,

$$(A, g') = \mu_p(g') \prod_{g\in A} \mu_p(g)\mu_p(g^{-1}) \prod_{\overline{g}\in G\setminus A} (1_{\mathbb{C}\Gamma_H(G)} - \mu_p(\overline{g})\mu_p(\overline{g}^{-1})) \tag{4.9}$$

são válidas em $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$, para todo $A \in \mathcal{P}_H(G/H)$ e para todo $g'^{-1} \in A$.

Demonstração. Por (4.7), temos

$$\mu_p(g)\mu_p(g^{-1}) = \sum_{B\ni g} (B, e), \tag{4.10}$$

para todo $g \in G$. Agora relembre que

$$(A,e)(B,e) = \begin{cases} (B,e), & \text{se} \quad A = B; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{4.11}$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\mu_p(g_1)\mu_p(g_1^{-1})\mu_p(g_2)\mu_p(g_2^{-1})\cdots\mu_p(g_t)\mu_p(g_t^{-1}) = \\ &\overset{(4.10)}{=} \left(\sum_{B\ni g_1}(B,e)\right)\left(\sum_{B\ni g_2}(B,e)\right)\cdots\left(\sum_{B\ni g_t}(B,e)\right) \\ &\overset{(4.11)}{=} \sum_{B\supseteq\{g_1,\dots,g_t\}}(B,e). \end{aligned} \tag{4.12}$$

Diante disso, temos

$$\prod_{\overline{g}\in G\setminus A}\mu_p(g)\mu_p(g^{-1}) \overset{(4.12)}{=} \sum_{B\supseteq A}(B,e)$$

e,

$$\prod_{\overline{g}\in G\setminus A}(1_{\mathbb{C}\Gamma_H(G)} - \mu_p(\overline{g})\mu_p(\overline{g}^{-1})) \overset{(4.10)}{=} \prod_{\overline{g}\in G\setminus A}\left(\sum_{\overline{g}\notin B}(B,e)\right) \overset{(4.11)}{=} \sum_{B\subseteq A}(B,e)$$

Então,

$$\prod_{g\in A}\mu_p(g)\mu_p(g^{-1})\prod_{\overline{g}\in G\setminus A}(1_{\mathbb{C}\Gamma_H(G)} - \mu_p(\overline{g})\mu_p(\overline{g}^{-1})) = \left(\sum_{B\supseteq A}(B,e)\right)\left(\sum_{C\subseteq A}(C,e)\right) \overset{(4.11)}{=} (A,e). \tag{4.13}$$

Por fim, se $g'^{-1} \in A$, então

$$\mu_p(g')\prod_{g\in A}\mu_p(g)\mu_p(g^{-1})\prod_{\overline{g}\in G\setminus A}(1_{\mathbb{C}\Gamma_H(G)} - \mu_p(\overline{g})\mu_p(\overline{g}^{-1})) \overset{(4.13)}{=} \left(\sum_{B\ni g'^{-1}}(B,g')\right)(A,e) \overset{(4.11)}{=} (A,g').$$

□

Teorema 4.3.8. *A função $\mu_p : G \to \mathbb{C}\Gamma_H(G)$ induz um isomorfismo de $\mathbb{C}-$álgebras*

$$\begin{aligned} \mathbb{C}^H_{par}G &\longrightarrow \mathbb{C}\Gamma_H(G) \\ [g] &\longmapsto \sum_{A\ni g^{-1}}(A,g) \\ [g]\cdot[P_A] &\longleftarrow (A,g) \end{aligned}$$

onde $[P_A] := \prod_{g\in A}[g][g^{-1}]\prod_{\overline{g}\in G\setminus A}(1-[\overline{g}][\overline{g}^{-1}])$.

Demonstração. Uma vez que a função $\mu_p : G \to \mathbb{C}\Gamma_H(G)$ é $G-$representação parcial $H-$global, segue da propriedade universal que existe um único morfismo de álgebras bem definido $\mu : \mathbb{C}^H_{par}(G) \to \mathbb{C}\Gamma_H(G)$ tal que $\mu([g]) = \mu_p(g)$, ou seja,

$\mu : \mathbb{C}^H_{par}(G) \to \mathbb{C}\Gamma_H(G)$, tal que $[g] \mapsto \sum_{A \ni g^{-1}} (A, g)$ está bem definida.

Na direção contrária, considere a aplicação $\psi : \mathbb{C}\Gamma_H(G) \to \mathbb{C}^H_{par}(G)$, dada por $(A, g) \mapsto [g] \cdot [P_A]$. Assim, para $g'^{-1} \in A$, temos

$$\begin{aligned}\mu(\psi(A, g')) &= \mu([g'] \cdot [P_A]) \\ &= \mu_p(g') \prod_{g \in A} \mu_p(g)\mu_p(g^{-1}) \prod_{\overline{g} \in G \setminus A} (1 - \mu_p(\overline{g})\mu_p(\overline{g}^{-1})) \\ &\overset{(4.8)}{=} (A, g').\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\psi(\mu([g])) = \psi\left(\sum_{A \ni g^{-1}} (A, g)\right) = \sum_{A \ni g^{-1}} [g] \cdot [P_A] &\overset{(*)}{=} \sum_{\substack{A \ni g^{-1} \\ A \in \mathcal{P}_H(G/H)}} [g] \cdot [P_A] \\ &\overset{(**)}{=} [g] \left(\sum_{A \in \mathcal{P}_H(G/H)} [P_A]\right) = [g],\end{aligned}$$

onde $(*)$ segue do fato de que $[P_A] = 0$ se A não é uma união de classes à esquerda de H ou se $H \nsubseteq A$ e $(**)$ segue do fato de que $[g][P_A] = 0$ se $g^{-1} \notin A$. □

Corolário 4.3.9. *As $G-$representações parciais $H-$globais de G estão em uma correspondência biunívoca com as representações (globais) de $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$. Essa correspondência é um isomorfismo de categorias. Mais precisamente, dado um isomorfismo de álgebra $\tilde{\pi} : \mathbb{C}\Gamma_H(G) \to \operatorname{End} V$, isso determina uma $G-$representação parcial $H-$global (V, π), com $\pi := \tilde{\pi} \circ \mu_p$; reciprocamente, dada uma $G-$representação parcial $H-$global (V, π), existe um único morfismo de álgebras $\tilde{\pi} : \mathbb{C}\Gamma_H(G) \to \operatorname{End} V$ tal que $\pi = \tilde{\pi} \circ \mu_p$.*

Demonstração. Segue dos Teoremas 4.1.3 e 4.3.8 □

4.4 $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$ é semissimples

O objetivo dessa seção é estudar as representações da álgebra $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$, bem como suas representações irredutíveis. Vimos em 2.3.5 que $K\Gamma_{\{e\}}(G) = K\Gamma(G)$ é produto direto de álgebras de matrizes com entradas em álgebras de grupo de subgrupos de G, logo, $K\Gamma(G)$ é semissimples quando K tem característica zero. Aqui usaremos alguns argumentos similares para mostrar que $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$ também é semissimples. Esses detalhes foram retirados de [3].

Observação 4.4.1. Seja $A_i \in \mathcal{P}_H(G/H)$ um objeto na componente conexa Γ_i do grupoide $\Gamma_H(G)$ e seja $K_i = K_{A_i}$ seu estabilizador. Pelo Lema 4.3.3, o número de objetos $m = m_{A_i}$ na componente conexa Γ_i coincide com $|A_i|/|K_i|$. Por fim, pela Proposição 2.3.3, item b), temos $\mathbb{C}\Gamma_i \cong M_{m_i}(\mathbb{C}[K_i])$.

Observação 4.4.2. Conforme visto no Exemplo 4.3.5, em geral $\Gamma_H(G)$ não é conexo. Uma vez que qualquer objeto $A \in \Gamma_H(G)$ é união de classes de H em G, podemos escrever $\Gamma_H(G)$ como a união disjunta de suas componentes conexas e diferenciar com um índice os objetos de mesma cardinalidade. A saber, escreva $\Gamma_H(G) = \bigsqcup_{i=1}^{[G:H]} \bigsqcup_{j=1}^{c_i} \Gamma_{i,j}$, onde $\Gamma_{i,j}$ são componentes conexas de $\Gamma_H(G)$, um objeto $A_{i,j}$ em $\Gamma_{i,j}$ tem cardinalidade $i \cdot |H|$ para todo $j = 1, 2, \ldots, c_i$ e c_i é exatamente o número de componentes conexas cujos objetos tem cardinalidade $i \cdot |H|$.

Teorema 4.4.3. *Seja $\Gamma_H(G) = \bigsqcup_{i=1}^{[G:H]} \bigsqcup_{j=1}^{c_i} \Gamma_{i,j}$ a decomposição em componentes conexas de $\Gamma_H(G)$. Seja $A_{i,j}$ um objeto de $\Gamma_{i,j}, K_{i,j} := k_{A_{i,j}}$ e $m_{i,j} := m_{A_{i,j}}$, para todo i e j. Então temos os seguintes isomorfismos de álgebras*

$$\mathbb{C}\Gamma_H(G) \cong \prod_{i=1}^{[G:H]} \prod_{j=1}^{c_i} M_{m_{i,j}}(\mathbb{C}[K_{i,j}]) \cong \prod_{i=1}^{[G:H]} \prod_{J=1}^{c_i} \prod_{k=1}^{e_{i,j}} M_{m_{i,j} d_k(i,j)}(\mathbb{C}), \tag{4.14}$$

onde $\mathbb{C}[K_{i,j}] \cong \prod_{k=1}^{e_{i,j}} M_{d_k(i,j)}(\mathbb{C})$ é a decomposição de Wedderburn-Artin de $\mathbb{C}[K_{i,j}]$. Em particular, $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$ é um anel semissimples.

Exemplo 4.4.4. Seja H um subgrupo de um grupo finito G tal que $[G : H] = 2$. Neste caso, existem apenas dois objetos em $\Gamma_H(G)$ de cardinalidades diferentes: H e G. Então, pelo Teorema 4.4.3 e por 4.3.4, segue que $\mathbb{C}\Gamma_H(G) \cong \mathbb{C}[H] \times \mathbb{C}[G]$.

Capítulo 5

REPRESENTAÇÕES IRREDUTÍVEIS DE $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$ E ALGUMAS PROPRIEDADES

5.1 Módulos irredutíveis de uma Álgebras Semissimples

Ainda com o objetivo de entender a Teoria de Representações de $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$, iremos estudar em modo "diagonal" como as representações de uma álgebra associativa e semissimples A, de dimensão finita e com unidade são recuperadas através das representações de álgebras eAe, para idempotentes $e \in A$.

Seja A uma $\mathbb{C}$-álgebra associativa, de dimensão finita, semissimples e com unidade, com $A \neq \mathbb{C}$. Então, pela teoria de Wedderburn, A é produto direto de álgebras de matrizes. Seja $e \in A$ um idempotente não trivial, isto é, $0 \neq e \neq 1$ (existe, pois $A \neq \mathbb{C}$). O espaço vetorial Ae é um $(A, eAe)-$bimódulo e portanto induz um funtor $Ae \otimes_{eAe} - : eAe - \mathrm{Mod} \to A - \mathrm{Mod}$.

Notação: seja e um idempotente não trivial de A, se W é um $eAe-$módulo, denote por $\mathrm{Ind}_e W$ o $A-$módulo dado por $\mathrm{Ind}_e W := Ae \otimes_{eAe} W$. Por outro lado, dado um $A-$módulo V, denote por $\mathrm{Res}_e V$ o $eAe-$módulo dado por $\mathrm{Res}_e V := eV$.

Observação 5.1.1. Observe que para qualquer $eAe-$módulo W, temos de maneira natural os seguintes isomorfismos

$$\mathrm{Res}_e(\mathrm{Ind}_e W) = e(Ae \otimes_{eAe} W) = eAe \otimes_{eAe} W \cong eAe \otimes_{eAe} W \cong W.$$

Além disso,

$$Ae \, \mathrm{Ind}_e W = Ae(Ae \otimes_{eAe} W) = Ae(eAe) \otimes_{eAe} W = Ae \otimes_{eAe} W = \mathrm{Ind}_e W.$$

Proposição 5.1.2. *Se V é um $A-$módulo tal que* $\operatorname{Res}_e V = eV$ *é um $eAe-$módulo irredutível e $AeV = V$, então V é irredutível.*

Demonstração. Suponha que $V = V_1 \oplus V_2$ como $A-$módulo. Então $eV = eV_1 \oplus eV_2$; mas eV é irredutível, logo, $eV_1 = 0$ ou $eV_2 = 0$. Suponha sem perda de generalidade que $eV_2 = 0$, assim

$$V = AeV = AeV_1 \oplus AeV_2 = AeV_1 \subseteq V_1,$$

o que implica em $V = V_1$. Segue que V é irredutível. $\square$

Corolário 5.1.3. *Se W é um $eAe-$módulo irredutível, então* $\operatorname{Ind}_e W$ *é irredutível.*

Demonstração. Basta tomar $V = \operatorname{Ind}_e W$ na Proposição 5.1.2. $\square$

Proposição 5.1.4. *Se V é um A módulo irredutível e* $\operatorname{Res}_e V = eV \neq 0$, *então* $\operatorname{Res}_e V = eV$ *é um $eAe-$módulo irredutível.*

Demonstração. Para qualquer $0 \neq v \in eV$ temos

$$eAev = eAv = eV,$$

onde $Av = V$, pois V é irredutível. $\square$

Teorema 5.1.5. *Todo $A-$módulo irredutível V é isomorfo a* $\operatorname{Ind}_e W$, *para algum idempotente $e \in A$ não trivial e algum $eAe-$módulo irredutível W.*

Demonstração. Seja V um $A-$módulo irredutível. Como A é semissimples, existe um idempotente não trivial $e \in A$ tal que $eV \neq 0$ (caso contrário, teríamos que 1 agiria como zero, pois é soma de idempotentes não triviais). Então eV é um $eAe-$módulo irredutível pela Proposição 5.1.4, pelo Corolário 5.1.3 $\operatorname{Ind}_e(eV)$ é um $A-$módulo irredutível. Então temos o seguinte mapa de $A-$módulos

$$\operatorname{Ind}_e(eV) = Ae \otimes_{eAe} eV \to V, \qquad ae \otimes ev \mapsto aev,$$

que é claramente não nulo e portanto um isomorfismo pelo Lema de Schur. $\square$

Teorema 5.1.6. *Se W é um $eAe-$módulo irredutível, então Ind_eW é um $A-$módulo irredutível. Todo $A-$módulo irredutível V é isomorfo a* $\operatorname{Ind}_e W$ *para algum idempotente não trivial $e \in A$ e para algum $eAe-$módulo irredutível W.*

Demonstração. Segue de 5.1.2,5.1.3,5.1.4 e 5.1.5. $\square$

5.2 Representações irredutíveis de $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$.

Afim de descrever as representações irredutíveis de $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$, aplicaremos os resultados da seção anterior na nossa álgebra $\mathbb{C}\Gamma_H(G)$. Nesse caso, os idempotentes são os pares (A, e), com $A \in \mathcal{P}(G/H)$. Além disso, note que da definição de produto no grupoide $\Gamma_H(G)$, temos

$$(A, e)\mathbb{C}\Gamma_H(G)(A, e) = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{(A, g) : gA = A\}.$$

Então, se definirmos $K := K_A = \{g \in G : gA = A\}$, podemos obter que $(A, e)\mathbb{C}\Gamma_H(G)(A, e) \cong \mathbb{C}[K]$. De fato, isso vem do morfismo $\psi : (A, e)\mathbb{C}\Gamma_H(G)(A, e) \to \mathbb{C}[K]$, dado por $(A, g) \mapsto g$, o qual é um isomorfismo.

Dito isso, a aplicação $V \mapsto \operatorname{Ind}_A V := \operatorname{Ind}_{(A,e)} V = \mathbb{C}\Gamma_H(G)(A, e) \otimes_{\mathbb{C}[K]} V$ induz um funtor $\operatorname{Ind}_A : \operatorname{Rep}_K \to \operatorname{PRep}_G^H$. Agora dada uma representação irredutível (W, ρ) de K, vamos entender como se comportam os $\mathbb{C}\Gamma_H(G)-$módulos. Temos

$$\operatorname{Ind}_A W := \operatorname{Ind}_{(A,e)} W = \mathbb{C}\Gamma_H(G)(A, e) \otimes_{\mathbb{C}[K]} W. \tag{5.1}$$

Mas, note que

$$\mathbb{C}\Gamma_H(G)(A, e) = \operatorname{span}\{(A, g) : g^{-1} \in A\} = \operatorname{span}\{(A, g) : g \in A^{-1}\},$$

então,

$$\operatorname{Ind}_A W = \operatorname{span}\{(A, g) : g \in A^{-1}\} \otimes_{\mathbb{C}[K]} W.$$

Por fim, note que $A^{-1} = \{a^{-1} : a \in A\}$ é $H-$invariante à esquerda e $K-$invariante à direita (pois A é $H-$invariante à direita e $K-$ invariante à esquerda). Em particular, pelo Lema 4.3.3, temos

$$A^{-1} = \bigsqcup_{i=1}^{m_A} t_i^{-1} K.$$

Além disso, um cálculo similar ao que foi feito na demonstração do Lema 4.8 mostra que se $g = t_i^{-1} k \in A^{-1}$ então

$$(A, g) = \left(A, t_i^{-1} k\right) = (A, t_i^{-1})(A, e)(A, k)(A, e) = (A, t_i^{-1}) \cdot k,$$

onde identificamos $\mathbb{C}[K]$ como $(A, e)\mathbb{C}\Gamma_H(G)(A, e)$. Portanto,

$$\operatorname{Ind}_A W = \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\{(A, g) : g \in A^{-1}\} \otimes_{\mathbb{C}[K]} W = \bigoplus_{i=1}^{m_A} \mathbb{C}(A, t_i^{-1}) \otimes_{\mathbb{C}[K]} W \tag{5.2}$$

como espaço vetorial.

Proposição 5.2.1. *Para* $A \in \mathcal{P}(G/H)$, $K = \{g \in G : gA = A\}$ *e* W *uma* $K-$*representação global, temos que* $\operatorname{Ind}_A W \cong W_{A^{-1}}$, *onde* $W_{A^{-1}}$ *é a restrição, conforme a construção 3.4 e a Proposição 3.4.1, da representação* $G-$*global* $\operatorname{Ind}_K^G W$ *ao subespaço*

$$\bigoplus_{t_i^{-1}K \in A^{-1}/K} W^{t_i^{-1}} \subseteq \operatorname{Ind}_K^G W,$$

onde $W^{t_i^{-1}} = \mathbb{C}_{t_i}^{-1} K \otimes_{\mathbb{C}[K]} W \cong W$, *como espaço vetorial.*

Demonstração. Por definição, A^{-1} é $H-$invariante à esquerda e $K-$invariante à direita, então segue da Proposição 3.4.2 que $W_{A^{-1}}$ é uma $G-$representação parcial $H-$global. A aplicação linear $\varphi : \operatorname{Ind}_A W \to \operatorname{Ind}_K^G W$ unicamente determinada por

$$\bigoplus_{i=1}^{m_A} \mathbb{C}(A, t_i^{-1}) \otimes_{\mathbb{C}[K]} W \to \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[K]} W, \qquad (A, t_k^{-1}) \otimes_{\mathbb{C}[K]} w \mapsto t_k^{-1} \otimes_{\mathbb{C}[K]} w \tag{5.3}$$

nos dá uma bijeção entre $\operatorname{Ind}_A W$ e $W_{A^{-1}}$. Além disso, se denotarmos por $\pi : G \to \operatorname{End} W_{A^{-1}}$ e por $\pi' : G \to \operatorname{End}(\operatorname{Ind}_A W)$ as estruturas correspondentes de $G-$representação parcial , então por um lado temos

$$\varphi\left(\pi'(g)\left((A, t_k^{-1}) \otimes_{\mathbb{C}[K]} w\right)\right) = \varphi\left(\left(\left(\sum_{g^{-1} \in B} (B, g)(A, t_k^{-1})\right) \otimes_{\mathbb{C}[K]} w\right)\right) = g t_k^{-1} \otimes_{\mathbb{C}[K]} w$$

se, e somente se, $g^{-1} \in t_k^{-1} \in A$, e

$$\varphi\left(\pi'(g)\left((A, t_k^{-1}) \otimes_{\mathbb{C}[K]} w\right)\right) = 0$$

caso contrário. Por outro lado, (3.4) pode ser reescrita como

$$\pi(g)(t_k^{-1} \otimes_{\mathbb{C}[K]} w) := \begin{cases} g t_k^{-1} \otimes_{\mathbb{C}[K]} w, & \text{se} \quad g t_k^{-1} K \in A^{-1}/K, \text{e} g_j K \in A/K \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{5.4}$$

Ora, mas $g t_k^{-1} K \in A^{-1}/K$ se, e somente se, $g^{-1} \in t_k^{-1} A$, logo, $\operatorname{Ind}_A W \cong W_{A^{-1}}$ como $G-$representação parcial $H - global$.

□

Lema 5.2.2. *A menos de isomorfismo, a* $G-$*representação parcial* $H-$*global* $\operatorname{Ind}_A W$ *depende somente da componente conexa de* $\Gamma_H(G)$ *contendo* (A, e) *e não de um vértice escolhido. Sejam* A_i *e* A_j *dois elementos da mesma componente conexa de* $\Gamma_H(G)$ *e sejam* K_i *e* K_j *seus globalizadores (isomorfos). Se* W_i *é uma representação irredutível de* K_i, *então existe uma representação irredutível* W_j *de* K_j *tal que* $\operatorname{Ind}_{A_i} W_i \cong \operatorname{Ind}_{A_j} W_j$.

Demonstração. Por simplicidade, sejam $A := A_i$, $K = K_i$ e $\rho : K_i \to \operatorname{End} W$ uma $G-$representação parcial $H-$global irredutível. Pelo Lema 4.3.3, qualquer outro elemento A_j na componente conexa de A é da forma $A_j = t_j^{-1} A$. Assim, o globalizador de $A_j = t_j^{-1} A$ é dado por $t_j^{-1} K t_j = \{g \in G : g t_j^{-1} A = t_j^{-1} A\}$, o qual é isomorfo ao estabilizador K de A (basta definir $\psi_j : K \to t_j^{-1} K t_j$, onde $\psi(g) = t_j^{-1} g t_j$).

Agora considerando o mesmo espaço W, defina $\rho_j : t_j^{-1}Kt_j \to \operatorname{End} W$ com $\rho_j(x) = \rho(t_j x t_j^{-1})$, para todo $x \in t_j^{-1}Kt_j$, então (W, ρ_j) é uma representação irredutível de $t_j^{-1}Kt_j$.

De fato, suponha que ρ_j é redutível então existem representações não nulas tais que ρ_{j_1} e ρ_{j_2} tais que $\rho_j = \rho_{j_1} \oplus \rho_{j_2}$, com ρ_{j_1} e ρ_{j_2} não nulas.

No entanto, podemos construir duas sub-representações de K, não nulas, dadas por $\rho_{j_1}\psi$ e $\rho_{j_2}\psi$, tais que $\rho_{j_1}\psi \oplus \rho_{j_2}\psi = \rho$. Mas ρ é irredutível, uma contradição. Diante disso, pela expressão (5.2), vale que $\operatorname{Ind}_A W \cong \operatorname{Ind}_{t_j^{-1}A} W_j$ (como $G-$representações parciais $H-$globais). □

Teorema 5.2.3. *Seja $\Gamma_H(G) = \bigsqcup_{i=1}^{[G:H]} \bigsqcup_{j=1}^{c_i} \Gamma_{i,j}$ a decomposição em componentes conexas de $\Gamma_H(G)$, conforme Observação 4.4.2. Fixado um objeto $A_{i,j}$ de $\Gamma_{i,j}$ para todo i e j seja $K_{i,j} := K_{A_{i,j}}$ e $m_{i,j} := m_{A_{i,j}}$. Então as representações induzidas $\operatorname{Ind}_{A_{i,j}} W's$, com W percorrendo todas as representações irredutíveis não equivalentes de $K_{i,j}$ para todo i e j formam uma lista completa de todas as G-representações parciais $H-$globais irredutíveis.*

Demonstração. Vimos que $\operatorname{Ind}_{A_{i,j}} W's$ são $G-$representações parciais $H-$globais. Além disso, pelo Lema 5.2.2, toda $G-$representação parcial $H-$global irredutível é da dessa forma.

Por (5.2), temos que $\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{Ind}_{A_{i,j}} W) = m_{i,j} \dim_{\mathbb{C}} W$, então fixando i e j,

$$\sum_W [\dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{Ind}_{A_{i,j}} W)]^2 = \sum_W (m_{i,j} \dim_{\mathbb{C}} W)^2 = m_{i,j}^2 \sum_W (\dim_{\mathbb{C}} W)^2 \overset{(*)}{=} m_{i,j}^2 |K_{i,j}|,$$

onde todas as somas são sobre as representações irredutíveis W não equivalentes de $K_{i,j}$.

Em $(*)$ foi utilizado o fato de que $\sum_W (\dim_{\mathbb{C}} W)^2 = |K_{i,j}|$ (Teorema de Wedderburn- Artin).

Somando sobre i e j, e comparando com a igualdade do Teorema 4.4.3, temos que não há repetições entre as representações irredutíveis que encontramos. □

Observação 5.2.4. É notável que para o caso em que $i = 1$ o Teorema 5.2.3 corresponde às $G-$representações parciais $H-$globais onde qualquer $g \in G \setminus H$ age como 0 (ver Exemplo 3.3.2). Isto pois, se $i = 1$ temos $H = K$, nesse sentido, basta reescrever a igualdade 5.4. Agora se $i = [G : H]$ temos que $H = G = K$ e assim $\operatorname{Ind}_A W = \mathbb{C}[G] \otimes_{C[K]} W = \mathbb{C}[G] \otimes_{C[G]} W \cong W$, o que corresponde às $G-$representações globais.

Exemplo 5.2.5. Seja H subgrupo de um grupo finito G tal que $[G : H] = 2$. Vimos que $\mathbb{C}\Gamma_H(G) = \mathbb{C}[H] \times \mathbb{C}[G]$. O fator $\mathbb{C}[G]$ corresponde às $G-$representações globais irredutíveis, enquanto que o fator $\mathbb{C}[H]$ corresponde às representações $H-$globais às quais os elementos de $G \setminus H$ agem como zero. Ambos os casos vem da construção que foi feita anteriormente, então pelo Teorema 5.2.3, descobrimos todas G-representações parciais $H-$globais irredutíveis nesse caso.

5.3 Restrição a $H-$representações irredutíveis

Seja H um subgrupo finito do grupo G e seja (V, π) uma $G-$representação parcial $H-$global. Por definição, a restrição de π a H nos dá uma representação global de H, denotada por $\operatorname{Res}_H^G V$. Isso nos dá um funtor $\operatorname{Res}_H^G : \operatorname{PRep}_G^H \to \operatorname{Rep}_H$. Nessa seção vamos descrever essa restrição para as $G-$representações parciais $H-$globais irredutíveis.

Relembrando o que foi feito até aqui: começamos com um conjunto $A \in \mathcal{P}(G/H)$ e consideramos uma representação irredutível (W, ρ) do subgrupo $K = K_A := \{g \in G : gA = A\}$ de G. Então vimos que as $G-$representações parciais $H-$globais correspondentes são dadas por $\operatorname{Ind}_A W$, ou seja, pela restrição das $G-$representações globais $\operatorname{Ind}_K^G W$ ao subespaço $\bigoplus_{t_j^{-1}k \in A^{-1}/K} W^{t_i^{-1}} \subseteq \operatorname{Ind}_K^G W$ via inclusão e projeção.

Queremos entender a restrição de $\operatorname{Ind}_A W$ a H. Para tal, precisamos fixar algumas notações. Seja A e K fixados, temos

Notação: Seja S um conjunto de representantes da $(H, K)-$classes duplas de A^{-1}, isto é, $A^{-1} = \bigsqcup_{s \in S} HsK$. Para $s \in S$, seja $K_s := sKs^{-1} \cap H$, o qual é subgrupo de H. Ao definirmos

$$\rho^s(x) = \rho(s^{-1}xs), \qquad \text{para} \qquad x \in K_s,$$

obtemos uma representação $\rho^s : K_s \to GL(W)$ de K_s, denotada por W_s. Como K_s é subgrupo de H, podemos considerar a representação induzida $\operatorname{Ind}_{K_s}^H W_s$.

Teorema 5.3.1. *A representação induzida* $\operatorname{Ind}_G^K W := \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[K]} W$ *é isomorfa a* $V = \bigoplus_{t \in G/K} tW$.

Demonstração. Lembrando que $\mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[K]} W \cong \bigoplus_{g_iK \in G/K} W^{g_i}$, onde $W^{g_i} = g_iK \otimes_{C[K]} W$ e rescrevendo $V = \bigoplus_{g_iK \in G/K} g_iKW$, temos o isomorfismo $\phi : \bigoplus_{g_iK \in G/K} W^{g_i} \to \bigoplus_{g_iK \in G/K} g_iKW$, dado por $g_iK \otimes_{\mathbb{C}[K]} w \mapsto g_iKw$. □

Teorema 5.3.2. *A representação* $\operatorname{Res}_H^G(\operatorname{Ind}_A W)$ *de H é isomorfa a soma direta das representações* $\operatorname{Ind}_{K_s}^H W_s$, *para $s \in S$.*

Demonstração. Temos que V é soma direta das imagens tW, com $t \in A^{-1}/K$. Seja $s \in S$, denote por $V(s)$ o subespaço gerado pelas imagens uW, com $u \in HsK$, isto é, $V(s) = \sum_{u \in HsK} uW$. Claramente, $V(s)$ é invariante por H, então resta provar que $V(s)$ é isomorfo a $\operatorname{Ind}_{K_s}^H W_s$. No entanto, note que o subgrupo de H consistindo nos elementos j tais que $jsW = sW$ é K_s.

De fato, se $j \in H$ é tal que $jsW = sW$, para todo $u \in HsK$ então em particular é válido para a classe do elemento neutro de H, isto é, $jsK = sK$, mas isto é equivalente a dizer que $s^{-1}js \in K$, ou seja, $j \in sKs^{-1}$. Logo, $j \in K_s$.

Por outro lado, se $j \in K_s$, então $j \in H$, assim, $js = jHsK = HsK = u$. Diante do que foi dito, temos que $V(s) = \sum_{j \in H/Ks} j(sW)$, o qual é isomorfo a $\operatorname{Ind}_{K_s}^H sW$ (Teorema 5.3.1). Por fim, note que sW é isomorfo a W_s, basta tomar a função $\psi_s : W_s \to sW$.

□

Exemplo 5.3.3. Nas notações estabelecidas, suponha que $A = KH$, então $A^{-1} = HK = He_gK$. Então $S = \{e_G\}$, $K_{e_G} = K \cap H$ e ρ^{e_G} é apenas a restrição de ρ a $K \cap H$, então

$$\mathrm{Res}^G_H(\mathrm{Ind}_{KH} W) \cong \mathrm{Ind}^H_{K\cap H}(\mathrm{Res}^K_{K\cap H} W).$$

5.4 Globalização de representações irredutíveis

Provamos no Teorema 3.2.9 que toda $G-$representação parcial admite uma única globalização (a menos de isomorfismo). Em particular, a construção da globalização induz um funtor $\mathrm{PRep}^H_G \to \mathrm{Rep}_G$. Nessa parte da seção o enfoque será na globalização das $G-$representações parciais $H-$globais irredutíveis. Sejam $A \in \mathcal{P}_H(G/H)$ e (W, ρ) uma representação irredutível do subgrupo $K = K_A := \{g \in G : gA = A\}$ de G. A $G-$representação parcial $H-$global irredutível correspondente é dada por

$$\mathrm{Ind}_A W \cong \bigoplus_{t_i^{-1}K \in A^{-1}/K} \mathbb{C}t_i^{-1} \otimes_{\mathbb{C}[K]} W \subseteq \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[K]} W \cong \bigoplus_{g_iK \in G/K} W^{g_i}.$$

A seguir, provaremos que a globalização de Ind_A é, na verdade, Ind^G_K. Mas, para tal precisamos da reciprocidade de Frobenius, a qual mencionaremos abaixo.

Fixada uma representação W de H, ao considerar a indução $\mathrm{Ind}^G_H W$ e o morfismo $\eta_W : W \to \mathrm{Ind}^G_H W$, temos uma propriedade universal , por dizer, para cada $H-$homomorfismo $f : W \to \mathrm{Res}^G_H U$, onde U é uma representação $G-$global, existe um único $G-$homomorfismo $\overline{f} : \mathrm{Ind}^G_H W \to U$ tal que $f = \overline{f} \circ \eta_W$, isto é, o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}^G_H W \arrow[drr, dashed, "\exists!\overline{f}"] & & \\
W \arrow[u, "\eta_W"] \arrow[rr, "f"'] & & \mathrm{Res}^G_H U = U.
\end{tikzcd}$$

Equivalentemente, existe uma bijeção

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}^G_H W, U) & \longleftrightarrow & \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}^G_H U) \\
 & & \\
f' & \longmapsto & f' \circ \eta_W \\
 & & \\
\tilde{f} & \longleftarrow\!\!\shortmid & f
\end{array}$$

a qual é conhecida como *Reciprocidade de Frobenius.* Em termos categóricos, os funtores Ind^G_H e Res^G_H são funtores adjuntos.

Teorema 5.4.1. *Para qualquer representação W de K, a globalização de $\mathrm{Ind}_A W$ é isomorfa a $\mathrm{Ind}^G_K W$, isto é, temos que o diagrama de funtores a seguir comuta*

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{Rep}_G & \\
\mathrm{Rep}_K \arrow[ur, "\mathrm{Ind}_K^G"] \arrow[rr, "\mathrm{Ind}_A"'] & & \mathrm{PRep}_G^H \arrow[ul, "glob"']
\end{tikzcd}$$

Em particular, a globalização das $G-$*representações* $H-$*globais irredutíveis* $\mathrm{Ind}_A W$ *é dada por* $\mathrm{Ind}_K^G W$ *com os mapas inclusão e projeção.*

Demonstração. Denote $U := \mathrm{Ind}_K^G W$ e $V := \mathrm{Ind}_A W$. Assim, (U, ρ) é uma representação global de G e, pela Proposição 5.2.1, (V, π) é restrição de (U, ρ) via inclusão φ e a projeção τ, conforme Proposição 3.4.1. Isso prova as propriedades GR1) e GR2) da Definição 3.2.8 de globalização. Em vez de provar $(GR3)$, provaremos as propriedades $(GR3')$ e $(GR4')$ do Corolário 3.2.10. A propriedade $(GR3')$, isto é, $U = \sum_{g \in G} \rho(g)(V)$ é obvia. Para checar a propriedade $(GR4')$, seja $(U', \rho', \varphi', \tau')$ outra quádrupla satisfazendo $GR1)$ e $GR2)$. Considere a composição $\theta : W \to U'$ dada por

$$\begin{array}{ccccc}
W & \longrightarrow & \mathrm{Ind}_A W & \longrightarrow & U' \\
w & \longmapsto & (A, e) \otimes_{\mathbb{C}[K]} w & \longmapsto & \varphi'((A, e) \otimes_{\mathbb{C}[K]} w)
\end{array}$$

Isso satisfaz

$$\begin{aligned}
\theta(\rho(k)w) =& \varphi'((A, e) \otimes_{\mathbb{C}[K]} \rho(k)(w)) \\
=& \varphi'((A, k) \otimes_{\mathbb{C}[K]} w) = \varphi'\left(\left(\left(\sum_{k^{-1} \in B} (B, k)\right)(A, e)\right) \otimes_{\mathbb{C}[K]} w\right) \\
=& \varphi'(\pi(k)((A, e) \otimes_{\mathbb{C}[K]} w)) \overset{RR2)}{=} \rho'(k)(\varphi'((A, e) \otimes_{\mathbb{C}[K]} w)) \\
=& \rho'(k)\theta(w),
\end{aligned}$$

o que prova que θ é $\mathbb{C}[K]-$linear e então, pela propriedade universal de $\mathrm{Ind}_K^G W$ (Reciprocidade de Frobenius), existe uma única aplicação $G-$linear $\psi : U \to U'$ tal que

$$\psi(e \otimes_{\mathbb{C}[K]} w) = \varphi'((A, e) \otimes_{\mathbb{C}[K]} w), \tag{5.5}$$

o que completa a prova.

□

5.5 Indução de $H-$global para $G-$representação parcial $H-$global (Reciprocidade de Frobenius)

Definição 5.5.1. A indução parcial de uma representação global W de $H \subseteq G$ para G é uma $G-$representação parcial $H-$global $\mathrm{PInd}_H^G W$ munida com um $H-$homomorfismo $\eta_W : W \to \mathrm{PInd}_H^G W$, tal que para todo $H-$homomorfismo $f : W \to \mathrm{Res}_H^G U \equiv U$ de W para uma $G-$representação parcial $H-$global U, existe um único morfismo de $G-$representações parciais $\tilde{f} : \mathrm{PInd}_H^G W \to U$ tal que $\tilde{f} \circ \eta_W = f$.

Nesta seção provaremos a existência dessa representação a qual chamamos de indução parcial por uma construção explicita. Note que, através da propriedade universal, se uma indução parcial existe então ela é necessariamente única a menos de isomorfismo. Portanto, iremos nos referir a essa representação parcial apenas como a representação parcial induzida.

Considere um subgrupo H de um grupo finito G, e seja $G = \bigsqcup_{i=1}^{r} g_i H$, com $g_1 = e$. Dada uma representação $H-$global (W, ρ), definimos o espaço vetorial

$$\overline{\mathrm{PInd}}_H^G W := \bigoplus_{A \in \mathcal{P}_H(G/H)} \bigoplus_{g_i H \in A/H} W^{A,i},$$

onde os $W^{A,i}$ são espaços vetoriais munidos de isomorfismos lineares $\phi_{A,i} : W \to W^{A,i}$.

Definimos $\tilde{\rho} : G \to \mathrm{End}\,\overline{\mathrm{PInd}}_H^G W$, como sendo, para todo $g \in G$, $w \in W$, $A \in \mathcal{P}_H(G/H)$ e $g_i H \subset A$

$$\tilde{\rho}(g)(\phi_{A,i}(w)) := \begin{cases} \phi_{gA,j}(\rho(h)(w)), & \text{se} \quad g^{-1}H \subseteq A, \quad gg_i = g_j h, \quad \text{com} \quad h \in H \\ 0, & \text{se} \quad g^{-1}H \not\subseteq A. \end{cases} \tag{5.6}$$

Proposição 5.5.2. *O par $(\overline{\mathrm{PInd}}_H^G W, \tilde{\rho})$ é uma $G-$representação parcial $H-$global.*

Demonstração. A função $\tilde{\rho}$ é uma pequena variação de (3.4), a qual demonstramos ser $G-$representação parcial $H-$global na Proposição 3.4.2. A demonstração para o par $(\overline{\mathrm{PInd}}_H^G W, \tilde{\rho})$ é análoga.

Uma outra maneira de provar o resultado é notar que para cada A a componente $\oplus_{g_i H \in A/H} W^{A,i}$ é exatamente a representação parcial H-global obtida em (3.4), mas com com $H = K$. Assim, $(\overline{\mathrm{PInd}}_H^G W, \tilde{\rho})$ é soma direta de $G-$representações parciais $H-$globais, e portanto é também uma $G-$representação $H-$global. $\square$

Observação 5.5.3. Para qualquer conjunto $A \in \mathcal{P}_H(G/H)$, considere o idempotente ortogonal $P_A := P_A^{\tilde{\rho}}$, isto é,

$$P_A = P_A^{\tilde{\rho}} = \prod_{g_k H \subseteq A} \tilde{\rho}(g_k)\tilde{\rho}(g_k^{-1}) \prod_{g_i H \subseteq G \setminus A} (1_{\overline{\mathrm{PInd}}_H^G W} - \tilde{\rho}(g_i)\tilde{\rho}(g_i^{-1})).$$

Assim, temos que $\bigoplus_{g_i H \subseteq A} W^{A,i} = P_A(\overline{\mathrm{PInd}}_H^G W)$.

Lema 5.5.4. *A função*

$$\eta_W : W \to \mathrm{PInd}_H^G W, \qquad\qquad w \mapsto \sum_{A \in \mathcal{P}_H(G/H)} \phi_{A,e}(w) \tag{5.7}$$

é um $H-$homomorfismo. Além disso, o diagrama a seguir comuta

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[rrr, "\phi_{A,i}"] \arrow[d, "\phi_{A,i}"] & & & W^{A,i} & \\
W^{A,i} \arrow[dr, "\tilde{\rho}(g_i^{-1})"'] & & & & W^{g_i^{-1}A,e} \arrow[ul, "\tilde{\rho}(g_i)"'] \\
& W^{g_i^{-1}A,i} \arrow[r, "\phi^{-1}_{g_i^{-1}A,e}"'] & W \arrow[rr, "\eta_W"'] & & \mathrm{PInd}_H^G W \arrow[u, "P_{g_i^{-1}A}"']
\end{tikzcd}$$

ou seja,

$$\phi_{A,i}(w) = \tilde{\rho}(g_i) P_{g_i^{-1}A} \eta_W \left(\phi^{-1}_{g_i^{-1}A,e} \tilde{\rho}(g_i^{-1})(\phi_{A,i}(w)) \right) \tag{5.8}$$

para todo $w \in W$, $A \in \mathcal{P}_H(G/H)$ e para todo $i = 1, \ldots, r$ tal que $g_i H \subseteq A$.

Demonstração. Primeiro provaremos que η_W é $H-$homomorfismo. Para tal, seja $h \in H$, então

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(h)(\eta_W(w)) &= \tilde{\rho}(h) \left(\sum_{A \in \mathcal{P}_H(G/H)} \phi_{A,e}(w) \right) = \sum_{A \in \mathcal{P}_H(G/H)} \tilde{\rho}(h)(\phi_{A,e}(w)) \\
&= \sum_{A \in \mathcal{P}_H(G/H)} \phi_{hA,e}(\rho(h)(w)) = \sum_{B \in \mathcal{P}_H(G/H)} \phi_{B,e}(\rho(h)(w)) \\
&= \eta_W(\rho(h)(w)),
\end{aligned}$$

o que prova que η_W é $H-$linear. Vejamos agora que (5.8) é verdadeira, isto é, o diagrama a seguir comuta

De fato,

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(g_i) P_{g_i^{-1}A} \eta_W \left(\phi^{-1}_{g_i^{-1}A,e} \tilde{\rho}(g_i^{-1})(\phi_{A,i}(w)) \right) &= \tilde{\rho}(g_i) P_{g_i^{-1}A} \eta_W \left(\phi^{-1}_{g_i^{-1}A,e}((\phi_{g_i^{-1}A,e})(w)) \right) \\
&= \tilde{\rho}(g_i) P_{g_i^{-1}A} \eta_W(w) \\
&= \tilde{\rho}(g_i) \left(\phi_{g_i^{-1}A,e}(w) \right) \\
&= \phi_{A,i}(w).
\end{aligned}$$

□

Queremos provar $(\overline{\mathrm{PInd}}_H^G W, \tilde{\rho})$ e η_W dada por (5.7) satisfaz a propriedade universal da representação parcial induzida.

Observação 5.5.5. Por (5.6), para todo $h \in H$ vale que $\tilde{\rho} \circ \phi_{A,e} = \phi_{hA,e} \circ \rho(h)$, então,

$$\phi^{-1}_{hA,e} \circ \tilde{\rho}(h) = \rho(h) \circ \phi^{-1}_{A,e}. \tag{5.9}$$

Seja (U, α) uma $G-$representação parcial $H-$global e seja $f : W \to \mathrm{Res}^G_H U \equiv U$ um $H-$homomorfismo. Primeiramente, observe que se $F : \overline{\mathrm{PInd}}^G_H W \to U$ é um morfismo qualquer de representações G-parciais tal que $F \circ \eta_W = f$, então para todo $x \in \phi_{A,i}(w)$, onde $A \in \mathcal{P}_H(G/H)$ e $g_i H \subseteq A$, temos

$$\begin{aligned}
F(x) = F(\phi_{A,i}(w)) &= F\left(\tilde{\rho}(g_i) P^{\tilde{\rho}}_{g_i^{-1}A} \eta_W \left(\phi^{-1}_{g_i^{-1}A,e} \tilde{\rho}(g_i^{-1})(x)\right)\right) \\
&= \alpha(g_i) P^{\alpha}_{g_i^{-1}A}\left(F\left(\eta_W\left(\phi^{-1}_{g_i^{-1}A,e}\tilde{\rho}(g_i^{-1})(x)\right)\right)\right) \\
&= \alpha(g_i) P^{\alpha}_{g_i^{-1}A}\left(f\left(\phi^{-1}_{g^{-1}A,e}\tilde{\rho}(g_i^{-1})(x)\right)\right).
\end{aligned}$$

Portanto, defina $\hat{f} : \overline{\mathrm{PInd}}^G_H W \to U$ como sendo, para $x = \phi_{A,i}(w) \in W^{A,i}$,

$$\hat{f}(x) := \alpha(g_i) P^{\alpha}_{g_i^{-1}A} f\left(\phi^{-1}_{g^{-1}A,e}\tilde{\rho}(g_i^{-1})(x)\right).$$

Lema 5.5.6. *A função $\hat{f}$ está bem definida, isto é, não depende da escolha dos representantes $\{g_1, \ldots, g_r\}$.*

Demonstração. Dado $h \in H$, substituindo g_i por $g_i h$ temos

$$\begin{aligned}
\alpha(g_i h) P^{\alpha}_{h^{-1}g_i^{-1}A} f\left(\phi^{-1}_{h^{-1}g^{-1}A,e}\tilde{\rho}(h^{-1}g_i^{-1})(x)\right) &\overset{3.3.3}{=} \alpha(g_i)\alpha(h) P^{\alpha}_{h^{-1}g_i^{-1}A} f\left(\phi^{-1}_{h^{-1}g^{-1}A,e}\tilde{\rho}(h^{-1}g_i^{-1})(x)\right) \\
&\overset{(2.5)}{=} \alpha(g_i) P^{\alpha}_{h^{-1}g_i^{-1}A}\alpha(h) f\left(\phi^{-1}_{h^{-1}g^{-1}A,e}\tilde{\rho}(h^{-1}g_i^{-1})(x)\right) \\
&= \alpha(g_i) P^{\alpha}_{h^{-1}g_i^{-1}A} f\left(\rho(h)\phi^{-1}_{h^{-1}g^{-1}A,e}\tilde{\rho}(h^{-1}g_i^{-1})(x)\right) \\
&\overset{(5.9)}{=} \alpha(g_i) P^{\alpha}_{h^{-1}g_i^{-1}A} f\left(\phi^{-1}_{g_i^{-1}A,e}\tilde{\rho}(h)\tilde{\rho}(h^{-1}g_i^{-1})(x)\right) \\
&= \alpha(g_i) P^{\alpha}_{h^{-1}g_i^{-1}A} f\left(\phi^{-1}_{g_i^{-1}A,e}\tilde{\rho}(g_i^{-1})(x)\right).
\end{aligned}$$

□

Lema 5.5.7. *A função $\hat{f}$ é um morfismo de representações $G-$parciais.*

Demonstração. Dado $g \in G$, seja $gg_i = g_j h$, com $h \in H$. Assuma inicialmente que $g^{-1} \in A$ e tome $0 \neq x = \phi_{A,i}(w)$. Temos que

(a) $g_i H \subseteq A$, e $g_i^{-1} \in g_i^{-1}A$;

(b) $g_j^{-1} g g_i = h$ e $g^{-1} g_j H = g_i h^{-1} H \subseteq A$;

(c) $g_j^{-1} g_j = g_1$ e $g_j H \subseteq gA$;

(d) $gg_i = g_j h$ e $g^{-1} H \subseteq A$, e portanto,

$$
\begin{aligned}
\alpha(g)\hat{(f)}(x) &= \alpha(g_j h g_i^{-1})\alpha(g_i)P^{\alpha}_{g_i^{-1}A} f\left(\phi^{-1}_{g^{-1}A,e}\tilde{\rho}(g_i^{-1})(x)\right)\\
&\overset{3.3.3}{=} \alpha(g_j)\alpha(h)\alpha(g_i^{-1})\alpha(g_i)P^{\alpha}_{g_i^{-1}A} f\left(\phi^{-1}_{g^{-1}A,e}\tilde{\rho}(g_i^{-1})(x)\right)\\
&\overset{(a)}{=} \alpha(g_j)\alpha(h)P^{\alpha}_{g_i^{-1}A} f\left(\phi^{-1}_{g^{-1}A,e}\tilde{\rho}(g_i^{-1})(x)\right)\\
&\overset{(2.5)}{=} \alpha(g_j)P^{\alpha}_{hg_i^{-1}A}\alpha(h) f\left(\phi^{-1}_{g^{-1}A,e}\tilde{\rho}(g_i^{-1})(x)\right)\\
&= \alpha(g_j)P^{\alpha}_{g_j^{-1}gA} f\left(\rho(h)\phi^{-1}_{g^{-1}A,e}\tilde{\rho}(g_i^{-1})(x)\right)\\
&\overset{(5.9)}{=} \alpha(g_j)P^{\alpha}_{g_j^{-1}gA} f\left(\phi^{-1}_{hg_i^{-1}A,e}\tilde{\rho}(h)\tilde{\rho}(g_i^{-1})(x)\right)\\
&= \alpha(g_j)P^{\alpha}_{g_j^{-1}gA} f\left(\phi^{-1}_{g_j^{-1}gA,e}\tilde{\rho}(g_j^{-1}g)(x)\right)\\
&= \alpha(g_j)P^{\alpha}_{g_j^{-1}gA} f\left(\phi^{-1}_{g_j^{-1}gA,e}\tilde{\rho}(g_j^{-1}g)(\phi_{A,i}(w))\right)\\
&\overset{(b)}{=} \alpha(g_j)P^{\alpha}_{g_j^{-1}gA} f\left(\phi^{-1}_{g_j^{-1}gA,e}\phi_{g_j^{-1}gA,e}(\rho(h)(w))\right)\\
&\overset{(c)}{=} \alpha(g_j)P^{\alpha}_{g_j^{-1}gA} f\left(\phi^{-1}_{g_j^{-1}gA,e}\tilde{\rho}(g_j^{-1})\phi_{gA,j}(\rho(h)(w))\right)\\
&= \hat{f}(\phi_{gA,j}(\rho(h)(w))) \overset{(d)}{=} \hat{f}(\tilde{\rho}(g)(\phi_{A,i}(w))) = \hat{f}(\tilde{\rho}(g)(x)).
\end{aligned}
$$

Se, por outro lado, $g^{-1} \notin A$, então por definição $\tilde{\rho}(x) = 0$, mas também $\alpha(g_j)P^{\alpha}_{g_j^{-1}gA} = 0$, pois $g_j^{-1} \notin g_j^{-1}gA$. Então $\alpha(g)\hat{f}(x) = 0$ segue das primeiras linhas do mesmo cálculo. $\square$

Por construção $\hat{f}$ o único morfismo de representações tais que $\hat{f} \circ \eta_W = f$. Isso prova que o par $(\overline{\mathrm{PInd}}_H^G W, \tilde{\rho})$ é a indução parcial de W, como queriamos.

Teorema 5.5.8 (Reciprocidade de Frobenius)**.** *Sejam U uma G-representação parcial H-global e W uma representação global de H. O seguinte isomorfismo é válido:*

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{PInd}_H^G W, U) \cong \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G U).$$

CONCLUSÃO FINAL

Neste trabalho estudamos ações e representações parciais de grupos, especificamente as representações parciais H-globais. Com isso, podemos perceber que o estudo de ações parciais de um grupo G está ligado ao das ações de um semigrupo inverso $S(G)$, conforme nosso primeiro capítulo. Esse semigrupo inverso gera uma álgebra, a qual também vem das relações de representações parciais de G, a álgebra $K_{par}(G)$. Além disso, como é de se esperar, vimos que estudar representações parciais de G é equivalente a estudar módulos sobre esta álgebra.

Afim de conhecer a estrutura de $K_{par}(G)$, estudamos um pouco as definições de grupoide e suas equivalências, assim, mostramos que $K_{par}(G)$ é isomorfa à álgebra de um grupoide, o que permite verificar que ela semissimples, sempre que K tem característica zero, além de determinar sua dimensão.

Na segunda parte do trabalho restringimos o estudo a representações parciais que são representações usuais quando restritas a um subgrupo H fixo, chamadas de representações parciais H-globais. Mostramos que resultados análogos aos anteriores continuam válidos, isto é, que essas representações parciais correspondem aos módulos sobre uma álgebra $\mathbb{C}^H_{par}(G)$ e que esta é isomorfa à álgebra de um grupoide, o qual é criado a partir do subgrupo H. Por fim, ao estudar as representações irredutíveis desta última surge um par de funtores oriundos da restrição e indução de representações; concluímos que estes funtores formam um par adjunto, estendendo para representações parciais o resultado conhecido como Reciprocidade de Frobenius, conforme a igualdade abaixo

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{PInd}_H^G W, U) \cong \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_H^G U).$$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Abadie, Fernando. *Dilations of interaction groups that extend actions of Ore semigroups*. Journal of the Australian Mathematical Society 104.2 (2018): 145-161.

[2] Alves, Marcelo Muniz S. Batista, Eliezer and Vercruysse, Joost. *Dilations of partial representations of Hopf algebras.* Journal of the London Mathematical Society 100.1 (2019): 273-300.

[3] D'Adderio, Michele. Hautekiet, William. Saracco, Paolo and Vercruysse, Joost. *Partial and global representations of finite groups*. Algebras and Representation Theory (2022): 1-44.

[4] Dokuchaev, Michael., Exel, Ruy. *Associativity of crossed products by partial actions, enveloping actions and partial representations. Transactions of the American Mathematical Society*, v. 357, n. 5, p. 1931-1952, 2005.

[5] Dokuchaev, Michael, and Polcino Milies, Cezar. *Isomorphisms of partial group rings*. Glasgow Mathematical Journal 46.1 (2004): 161-168.

[6] Dokuchaev, Michael. Exel, Ruy, and Paolo, Piccione. *Partial representations and partial group algebras.* Journal of Algebra 226.1 (2000): 505-532.

[7] Exel, Ruy. *Partial actions of groups and actions of inverse semigroups.* Proceedings of the American Mathematical Society 126, no. 12 (1998): 3481-3494.

[8] Exel, Ruy. *Partial dynamical systems, Fell bundles and applications.* Vol. 224. American Mathematical Soc. 2017.

[9] Howie, John Mackintosh. *An introduction to semigroup theory.* Vol. 7. Academic press, 1976.

[10] Kreyszing, Erwin. *Introductory functional analysis with applications.* Vol. 17. John Wiley e sons, 1991.

[11] Resende, Pedro. *Lectures on étale groupoids, inverse semigroups and quantales.* Lecture notes for the GAMAP IP Meeting, Antwerp. 2006.

[12] Serre, J. P.. *Linear representations of finite groups*, Springer (GTM, volume 42), 1977.