

Geraldo Takachi Kubo

Variabilidade da Dimensão Instável no Rotor Duplo Pulsado

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física da *Universidade Federal do Paraná*, como requisito à obtenção do grau de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana

Curitiba - PR

2007

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana,

Ao Prof. Dr. Sérgio Roberto Lopes,

Ao depto. de Física da UFPR,

Aos amigos da pós-graduação em Física,

Aos amigos do grupo de dinâmica,

Ao grupo Petroleum & Precisa,

À minha família.

Resumo

Sistemas dinâmicos caóticos podem apresentar uma propriedade denominada por “crise”, onde atratores caóticos são destruídos ou fundem-se numa banda caótica única. Sistemas dinâmicos multidimensionais ditos “*não-hiperbólicos*” apresentam outra propriedade conhecida por “*Variabilidade da Dimensão Instável*” (VDI), quando órbitas periódicas instáveis mergulhadas no atrator caótico apresentam diferentes quantidades de direções instáveis, ocasionando a perda da confiabilidade nas trajetórias geradas numericamente. Estudaremos estes dois fenômenos no sistema mecânico 4-dimensional denominado “Rotor Duplo Pulsado” (RDP), onde, a partir de seu mapa denominado “*Mapa do Rotor Duplo Pulsado*” (MRDP), detalharemos a crise que ocorre nesse sistema, e acompanharemos a evolução paramétrica da VDI no MRDP. Temos como objetivo fazer uma conexão entre crise e VDI, comparando os respectivos parâmetros críticos.

Abstract

Chaotic dynamical systems can show a property called “*crisis*”, where chaotic attractors are destroyed or merge to form a chaotic attractor. Non-hyperbolic high-dimensional systems show other property known as “*Unstable Dimension Variability*” (UDV), when periodic unstable orbits embedded in a chaotic attractor have different numbers of unstable eigendirections, causing the loss of confidence of numerically generated orbits. We will study these phenomena in the mechanical 4-dimensional system called “*Kicked Double Rotor*” (KDR), on the “*Kicked Double Rotor Map*” (KDRM). We will detail when the crisis occur, and follow the parametric evolution of the UDV. We want to do a connection between crisis and UDV, comparing the critical parameters for these phenomena to occur.

Conteúdo

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract	iii
Lista de Figuras	vi
1 Introdução	1
2 Fundamentos	3
2.1 Sistemas dinâmicos	3
2.2 Sistemas dinâmicos a tempo contínuo - Fluxos	3
2.3 Sistemas dinâmicos a tempo discreto - Mapas	4
2.3.1 Parâmetro de controle	4
2.3.2 Ponto fixo e estabilidade	5
2.3.3 Órbita periódica	6
2.3.4 Classificação dos pontos fixos e das órbitas periódicas	8
2.3.5 Bifurcações	9
2.4 Caos	11
2.5 Atrator	12
2.6 Expoentes de Lyapunov	12
2.6.1 Expoentes de Lyapunov a Tempo Finito	14
2.7 Crise	14
2.8 VDI	14
3 Rotor Duplo Pulsado e seus Resultados	16
3.1 Rotor Duplo Pulsado - RDP	16
3.2 Mapa do Rotor Duplo Pulsado - MRDP	17
3.2.1 Função Lagrangeana	18
3.2.2 Função de dissipação de Rayleigh	20
3.2.3 Resolvendo as equações de movimento	20
3.2.4 Obtendo o mapa do rotor duplo pulsado (MRDP)	24

3.3	Parâmetro de Controle do MRDP	25
3.4	Matriz Jacobiana	25
3.5	Diagramas de Bifurcações	26
3.6	Pontos Fixos do MRDP	30
3.7	Órbitas Periódicas do MRDP	34
3.8	Estabilidade das Órbitas Periódicas do MRDP	38
3.9	Bifurcações	40
3.10	Expoentes de Lyapunov a Tempo Infinito	42
3.11	Crise	43
3.12	VDI	48
3.13	Análise dos resultados	55
4	Conclusões e Trabalhos Futuros	58
	Referências Bibliográficas	60

Lista de Figuras

2.1	Exemplos de pontos fixos no espaço de fase 2-dimensional.	9
2.2	Exemplos de bifurcações supercríticas.	10
3.1	Esquema do rotor duplo pulsado.	17
3.2	Diagrama de bifurcação $x_1 \times f_0$	27
3.3	Diagrama de bifurcação $x_2 \times f_0$	27
3.4	Diagrama de bifurcação $y_1 \times f_0$	28
3.5	Diagrama de bifurcação $y_2 \times f_0$	28
3.6	Seqüência de iteradas com $ \vec{f}_A < 4,28$ (antes da 1ª bifurcação).	29
3.7	Seqüência de iteradas com $4,28 < \vec{f}_B < 6,42$ (após a 1ª bifurcação).	29
3.8	Autovalores do ponto fixo $(\pi; \pi; 0; 0)$ com $ \xi_1 \geq \xi_2 \geq \xi_3 \geq \xi_4 $	39
3.9	Detalhe da bifurcação sela-nó de período-4.	41
3.10	Expoentes de Lyapunov a tempo infinito do MRDP com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$	42
3.11	Espaço de fase de $x_1 \times x_2$, com: a) $f_0 = 6,8542515$; b) $f_0 = 6,8545515$; c) $f_0 = 6,8552515$; d) $f_0 = 6,8562515$	44
3.12	Série temporal de x_2 com: a) $f_0 = 6,8542515$; b) $f_0 = 6,8575515$; c) $f_0 = 6,8592515$	45
3.13	Lei de potência do tempo médio da crise com: $f_{0c} = 6,85425150$ e $\gamma = 1,358$	45
3.14	Espaço de fase $x_1 \times x_2$ e órbitas instáveis até período-8, com $f_0 = 6,85325150$	46
3.15	Espaço de fase $x_1 \times x_2$ e órbitas instáveis até período-8, com $f_0 = 6,85425150$	47
3.16	Espaço de fase $x_1 \times x_2$ e órbitas instáveis até período-8, com $f_0 = 6,85625150$	47
3.17	Autovalores do ponto fixo $(0; 0; 0; 0)$ com $ \xi_1 \geq \xi_2 \geq \xi_3 \geq \xi_4 $	48
3.18	Autovalores do ponto fixo $(0; \pi; 0; 0)$ com $ \xi_1 \geq \xi_2 \geq \xi_3 \geq \xi_4 $	49
3.19	Autovalores do ponto fixo $(\pi; 0; 0; 0)$ com $ \xi_1 \geq \xi_2 \geq \xi_3 \geq \xi_4 $	49
3.20	Autovalores do ponto fixo $(0; \pm \arcsen(\frac{2\pi}{f_0}); \pm 5,81964; \pm 16,19396)_{(n_1=\pm 1; n_2=\pm 2)}$	50
3.21	Estabilidade dos pontos fixos em $f_0 = 9,0$, para diversos pares de n_1 e n_2	50
3.22	Distribuições de probabilidades de $\lambda_2(15)$	52
3.23	Fração dos valores positivos de $\lambda_2(15)$	53
3.24	Localização dos parâmetros $f_{0(Caos)}$ e $f_{0(Hipercaos)}$ no diagrama de bifurcação $x_2 \times f_0$	55
3.25	Localização do parâmetro $f_{0(Crise)}$ no diagrama de bifurcação $x_2 \times f_0$	56
3.26	Localização dos parâmetros $f_{0(VDI)}$ e $f_{0(VDI_{max})}$ no diagrama de bifurcação $x_2 \times f_0$	56

Capítulo 1

Introdução

Caos é entendido, dentro da teoria matemática dos sistemas dinâmicos, como um comportamento aperiódico que apresenta sensibilidade extrema às condições iniciais. Duas trajetórias caóticas, que originam-se de condições iniciais ligeiramente diferentes, afastam-se exponencialmente com o passar do tempo, obstruindo a capacidade de prever o estado futuro do sistema, dado o estado presente. Como nosso conhecimento sobre as propriedades das trajetórias caóticas provém da utilização de técnicas numéricas computacionais, e como estas sempre introduzem pequenos erros (de truncamento, arredondamento, etc), poderíamos imaginar que trajetórias caóticas assim geradas nunca poderiam corresponder a trajetórias “*reais*” do sistema dinâmico estudado.

No entanto, essa visão é por demais restritiva. Para sistemas dinâmicos ditos “*hiperbólicos*”, pode-se mostrar rigorosamente que uma trajetória caótica gerada por computador (ou, teoricamente falando, uma “*pseudo-trajetória*”) é sombreada, ou seja, permanece uniformemente próxima a uma trajetória caótica real do sistema dinâmico. Em outras palavras, a trajetória caótica obtida pelo computador pode não ser aquela que procuramos, mas é tão próxima quanto se queira de uma trajetória caótica real do sistema. Como nós usualmente utilizamos conjuntos de trajetórias (em cálculos envolvendo invariantes dinâmicos), essa distinção não é, de fato, relevante [1].

Os sistemas dinâmicos que modelam problemas de interesse físico, químico, biológico, econômico, etc, não são, em geral, hiperbólicos. Por esse motivo não podemos garantir de antemão a validade desta importante propriedade de sombreamento de trajetórias caóticas ([2],[3],[4]). Uma das causas que podem levar um sistema dinâmico a ser não-hiperbólico é a propriedade denominada “*Variabilidade da Dimensão Instável*” (VDI). Toda trajetória caótica tem um número infinitamente grande de órbitas periódicas instáveis nela imersa. Quando há VDI, parte destas órbitas periódicas tem um valor da dimensão instável, e parte tem outro. Dimensão instável é a dimensão do subespaço invariante gerado pelos autovalores da “*matriz Jacobiana*” do sistema que possuem as seguintes propriedades: se o sistema for um fluxo (a tempo contínuo) os autovalores têm parte real positiva, caso o sistema seja um mapa (a tempo discreto), os autovalores têm módulo maior que 1 [5].

A VDI foi descrita pela primeira vez em 1970 pelos matemáticos Abraham e Smale, no estudo de um sistema dinâmico abstrato [6]. Apenas em 1994 a VDI foi identificada num sistema dinâmico de interesse físico [7]: “*O Rotor Duplo Pulsado*” (RDP), descrito por um mapa quadri-dimensional

dito “*Mapa do Rotor Duplo Pulsado*” (MRDP). Este dispositivo fora estudado inicialmente em 1992 por F. J. Romeiras et. al. [8]. Desde então a VDI foi identificada em uma variedade de sistemas dinâmicos de interesse físico, como redes de osciladores acoplados [4]. Num sistema com VDI, a propriedade de sombreamento da trajetória caótica pode ser considerada válida por um tempo muito curto, na medida do que chamamos de “*intensidade da VDI*”.

Em trabalhos anteriores ([9-14]), pesquisadores do grupo de “*Caos*” da “*Universidade Federal do Paraná*”-**UFPR**, foram capazes de descrever dois aspectos centrais da VDI em sistemas dinâmicos, onde um parâmetro é variado: o início (“onset”) da VDI e o ponto onde a VDI é mais intensa, no sentido de que a propriedade de sombreamento das trajetórias caóticas não é válida para qualquer intervalo de tempo. No entanto, esse estudo no MRDP é bastante difícil, por dois motivos básicos: a dimensão do sistema dinâmico é alta (4), e há um número muito grande de órbitas periódicas instáveis. Até o trabalho de doutorado de José Renato Ramos Barbosa [15], a VDI no MRDP só tinha sido estudada para um conjunto restrito de valores do parâmetro variável (no caso, a intensidade da força externa aplicada sobre o rotor). No trabalho de Barbosa et. al. [15], o ponto onde a VDI é mais intensa foi identificado como uma bifurcação do tipo duplicação de período. Entretanto, a questão do início da VDI no MRDP permaneceu em aberto.

A contribuição principal que é dada nessa dissertação vem a ser o estudo do início da VDI no MRDP, bem como uma revisão do processo de evolução paramétrica da VDI, até o ponto em que esta é mais intensa.

No capítulo 2 introduzimos alguns tópicos teóricos utilizados neste trabalho, onde pretendemos dar uma noção à respeito dos temas abordados. Alguns tópicos foram somente relacionados, pois uma explicação mais ampla fugiria do intuito deste trabalho.

No capítulo 3 está o conteúdo principal de nosso trabalho, onde começamos descrevendo o mecanismo do RDP, e a obtenção do MRDP. Analisamos os pontos fixos e suas estabilidades, e as bifurcações, através dos diagramas de bifurcações. Utilizando os “*expoentes de Lyapunov a tempo infinito*”, estudamos o caos e o hipercaos. Explorando recursos computacionais, analisamos também a “*crise*”. Estudamos em seguida a VDI, utilizando como ferramenta principal a análise da flutuação do “*segundo expoente de Lyapunov a tempo finito*” em torno de zero. No final do capítulo temos a análise geral dos resultados obtidos.

No capítulo 4 estão as nossas conclusões, onde destacamos os objetivos alcançados. Relacionamos itens para trabalhos futuros.

Os gráficos obtidos neste trabalho foram gerados pelo software “*Grace*”, e os dados necessários para gerar estes gráficos foram obtidos numericamente, por meio de programas em linguagem “*C*” e “*fortran*”. Para cálculos gerais, utilizamos o software matemático “*Maple*”.

Capítulo 2

Fundamentos

Neste capítulo apresentaremos conceitos relacionados com o estudo de sistemas dinâmicos, os quais utilizamos para desenvolver este trabalho. Relacionamos os tópicos relevantes para uma melhor compreensão dos temas abordados, com alguns itens descritos superficialmente mas com a devida citação para consultas, pois uma abordagem mais refinada fugiria do intuito deste trabalho.

2.1 Sistemas dinâmicos

Um *sistema dinâmico* é definido como sendo um conjunto de elementos interdependentes, sob a ação de forças externas, com algumas grandezas que caracterizam o sistema variando no tempo. Para entender como um sistema dinâmico evolui no tempo, devemos caracterizá-lo por meio de expressões matemáticas. Sistemas dinâmicos onde o tempo evolui continuamente chamamos de *fluxos*, e quando o tempo decorre de maneira discreta chamamos de *mapas*.

2.2 Sistemas dinâmicos a tempo contínuo - Fluxos

Em certos sistemas dinâmicos a evolução do tempo é tratada de forma contínua, isto é, o tempo t pode variar num intervalo infinitesimal. Sistemas a tempo contínuo são chamados de “*fluxos*”, e são representados por meio de equações diferenciais. Como exemplo, para um sistema N -dimensional, podemos obter:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1(t)}{dt} = f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)) \\ \vdots \\ \frac{dx_N(t)}{dt} = f_N(x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t)) \end{array} \right. , \quad (2.1)$$

onde f é uma função de correlação, x é a variável de posição. Em notação vetorial:

$$\frac{d}{dt} \vec{X}(t) = \vec{F}(\vec{X}(t)) , \quad (2.2)$$

onde $\vec{X}_{(t)}$ é um vetor N -dimensional, e \vec{F} é um vetor função N -dimensional.

2.3 Sistemas dinâmicos a tempo discreto - Mapas

Ocorrem sistemas onde o tempo evolui discretamente, isto é, o tempo¹ n assume somente valores inteiros positivos. Estes sistemas são chamados de “*mapas*”, e são representados matematicamente por equações de diferenças. Um exemplo para um sistema N -dimensional:

$$\begin{cases} x_{1(n+1)} = g_1(x_{1(n)}, x_{2(n)}, \dots, x_{N(n)}) \\ x_{2(n+1)} = g_2(x_{1(n)}, x_{2(n)}, \dots, x_{N(n)}) \\ \vdots \\ x_{N(n+1)} = g_N(x_{1(n)}, x_{2(n)}, \dots, x_{N(n)}) \end{cases}, \quad (2.3)$$

Em notação vetorial:

$$\vec{X}_{n+1} = \vec{G} [\vec{X}_n], \quad (2.4)$$

onde \vec{X}_n e \vec{X}_{n+1} são vetores N -dimensionais, e \vec{G} é um vetor função N -dimensional. Neste sistema, partindo das condições iniciais² com $n = 0$, temos o próximo estado com $n = 1$, o estado seguinte com $n = 2$, e assim sucessivamente.

Concentraremos nossas discussões no que se refere a mapas, tendo em vista que nosso sistema têm dinâmica a tempo discreto. Muitos sistemas dinâmicos são representados por equações de diferenças, quando certas grandezas destes sistemas variam periodicamente. Como exemplo podemos citar o “rotor duplo pulsado”, que recebe uma força periódica.

Para uma melhor compreensão de nossas discussões, vamos analisar um sistema unidimensional:

$$x_{n+1} = g(x_n, \mu) \quad , \quad (2.5)$$

e concluiremos então expandindo para o caso N -dimensional:

$$\vec{X}_{n+1} = \vec{G} [\vec{X}_n, \mu] \quad . \quad (2.6)$$

Na expressão (2.5) se a função g for linear, dizemos que o mapa é linear, caso contrário, o mapa será não-linear. O termo μ representa o *parâmetro de controle* presente no sistema.

2.3.1 Parâmetro de controle

Nos sistemas dinâmicos estudamos como certas grandezas, variáveis dependentes, evoluem no tempo. Existem porém grandezas que não evoluem no tempo, mas alterações em seus valores geram mudanças de comportamento do sistema. A estas grandezas chamamos de *parâmetros de controle*.

No estudo de sistemas dinâmicos pretendemos conhecer não somente o comportamento deste sistema na evolução do tempo, mas principalmente conhecer a dependência deste sistema quanto aos

¹Nos mapas o tempo será representado por n .

²São os valores das variáveis dependentes em $t = 0$ (ou $n = 0$)

parâmetros de controle. Em geral, elege-se somente um parâmetro de controle para o sistema. Como exemplo citamos o rotor duplo pulsado, cujo módulo da força aplicada será o parâmetro de controle.

2.3.2 Ponto fixo e estabilidade

Partindo de uma condição inicial x_0 , obtemos a seqüência aplicando em (2.5):

$$x_1 = g(x_0) \Rightarrow x_2 = g(x_1) \Rightarrow x_3 = g(x_2) \cdots ,$$

Vamos supor que em (2.5), aplicando x_n obtivéssemos novamente x_n , ou seja:

$$x_{n+1} = g(x_n) = x_n = x^* ,$$

então temos que :

$$x^* = g(x^*) . \quad (2.7)$$

Chamamos x^* de “*ponto fixo*”. Aplicando x^* no mapa (2.5), retorna-se o próprio x^* , e nas próximas iterações³ obteremos x^* para $n \rightarrow \infty$. Para o mapa N -dimensional, temos :

$$\vec{X}^* = \vec{G} [\vec{X}^*] . \quad (2.8)$$

onde \vec{X}^* é o vetor do ponto fixo N -dimensional. Aqui iremos imaginar um vetor apontando para o ponto fixo no espaço N -dimensional.

Vamos analisar a estabilidade do ponto fixo x^* . Sabemos então que, para um ponto fixo x^* , as iterações sucessivas permanecerão inalteradas em x^* . Vamos supor que o ponto x_n esteja agora ligeiramente afastado de x^* . Se o ponto fixo for estável, as próximas iterações aproximar-se-ão de x^* . Seja o ponto x_n tal que:

$$x_n = x^* + \eta_n , \quad (2.9)$$

onde η_n é um pequeno deslocamento, tal que : $|\eta_n| \ll 1$. Desta forma:

$$x_{n+1} = g(x_n) = g(x^* + \eta_n) = x^* + \eta_{n+1} . \quad (2.10)$$

Observando as duas expressões, temos que se $x_{n+1} < x_n$, a iteração aproxima-se de x^* , então o ponto fixo x^* será estável. Conclui-se então :

Para: $|\eta_{n+1}| < |\eta_n| \Rightarrow x^*$ é *estável* ,

Para: $|\eta_{n+1}| > |\eta_n| \Rightarrow x^*$ é *instável* .

Expandindo (2.10) em série em torno de x^* :

$$g(x_n) = g(x^* + \eta_n) \approx g(x^*) + \eta_n \left(\frac{dg(x)}{dx} \Big|_{x=x^*} \right) + \mathcal{O}(\eta_n)^2 + \cdots ,$$

Como $|\eta_n|$ é um desvio muito pequeno, podemos desprezar termos de ordem superior a um. De (2.10) temos que : $g(x^* + \eta_n) = x^* + \eta_{n+1}$, e sendo $g(x^*) = x^*$, obtemos:

$$\eta_{n+1} = \eta_n \left(\frac{dg(x)}{dx} \Big|_{x=x^*} \right) \Rightarrow \frac{\eta_{n+1}}{\eta_n} = \left(\frac{dg(x)}{dx} \Big|_{x=x^*} \right) .$$

³Iterar o mapa significa obter uma aplicação do mapa.

Concluimos então:

$$\left| \frac{dg(x)}{dx} \Big|_{x=x^*} \right| < 1 \quad \Rightarrow \quad x^* \text{ é estável ,} \quad (2.11)$$

$$\left| \frac{dg(x)}{dx} \Big|_{x=x^*} \right| > 1 \quad \Rightarrow \quad x^* \text{ é instável .} \quad (2.12)$$

Para o mapa N -dimensional, seja a matriz composta de derivadas parciais nas variáveis dependentes em (2.3):

$$DG(x^{(1)*}, x^{(2)*}, \dots, x^{(N)*}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial g_1}{\partial x^{(2)}} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x^{(N)}} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial g_2}{\partial x^{(2)}} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x^{(N)}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_N}{\partial x^{(1)}} & \frac{\partial g_N}{\partial x^{(2)}} & \dots & \frac{\partial g_N}{\partial x^{(N)}} \end{bmatrix}_{(x^{(1)*}, x^{(2)*}, \dots, x^{(N)*})} . \quad (2.13)$$

Chamamos esta matriz de “*Matriz Jacobiana*”, e ela é avaliada no ponto fixo N -dimensional \vec{X}^* . Seja ξ_i um autovalor da matriz Jacobiana, onde $i = (1, 2, \dots, N)$, com $\xi_i \in \mathbb{C}$ (conjunto dos números complexos). Para um sistema N -dimensional temos, em geral⁴, N autovalores reais e/ou complexos⁵. A estabilidade do ponto fixo \vec{X}^* é analisada pelos autovalores da matriz Jacobiana. Temos então que:

- Se “todos os autovalores têm módulos menores que **1**” : $|\xi_i| < 1 \Rightarrow \vec{X}^*$ é *estável* ;
- Se “um ou mais autovalores têm módulos maiores que **1**” : $|\xi_i| > 1 \Rightarrow \vec{X}^*$ é *instável* .

2.3.3 Órbita periódica

Retomamos o estudo do mapa unidimensional (2.5). Supondo que, dado uma condição inicial x_0 , obtivéssemos a seqüência :

$$\begin{aligned} x_1 &= g(x_0) , \\ x_2 &= g(x_1) = g(g(x_0)) = g^{(2)}(x_0) , \\ &\vdots \\ x_{P-1} &= g(x_{P-2}) = g(g(x_{P-3})) = \dots = g^{(P-1)}(x_0) , \\ x_P &= g(x_{P-1}) = g(g(x_{P-2})) = \dots = g^{(P)}(x_0) = x_0 . \end{aligned}$$

sendo : $x_0 \neq x_1 \neq \dots \neq x_{P-1}$.

A seqüência de iteradas, de x_0 até x_{P-1} , torna-se cíclica, e chamamos este ciclo de *órbita periódica de período- P* , formado por P pontos distintos $(x_0, x_1, \dots, x_{P-1})$ que se repetem ciclicamente.

⁴Pode ocorrer a existência de autovalores repetidos.

⁵Para autovalores complexos, teremos pares de complexos conjugados.

A representação $g^{(P)}(x_0)$ significa iterar o mapa P vezes partindo de x_0 . Os P pontos da órbita periódica são chamados também de *pontos fixos de período- P* , pois:

$$\begin{aligned} g^{(P)}(x_0) &= x_0 \Rightarrow g^{(P)}(x_0^*) = x_0^* , \\ g^{(P)}(x_1) &= x_1 \Rightarrow g^{(P)}(x_1^*) = x_1^* , \\ &\vdots \\ g^{(P)}(x_{P-1}) &= x_{P-1} \Rightarrow g^{(P)}(x_{P-1}^*) = x_{P-1}^* . \end{aligned}$$

Observa-se que pontos pertencentes a uma órbita periódica de *período- P* , serão pontos de órbitas periódicas de *período- kP* , com $k = 1, 2, 3, \dots$. Neste caso, os P pontos se repetirão ciclicamente k vezes, dentro de kP iteradas.

A estabilidade da órbita periódica é determinada usando o mesmo critério da estabilidade do ponto fixo (de *período-1*). Seja o autovalor ξ associado ao ponto fixo x_0^* de *período- P* , obtido em:

$$\begin{aligned} \xi = \frac{dg^{(P)}(x)}{dx} \Big|_{x=x_0^*} \quad (\text{usando a regra da cadeia}) \quad \xi &= \frac{dg(x)}{dx} \Big|_{x=x_0^*} \frac{dg(x)}{dx} \Big|_{x=x_1^*} \cdots \frac{dg(x)}{dx} \Big|_{x=x_{P-1}^*} , \\ \xi &= \prod_{j=0}^{P-1} \frac{dg(x)}{dx} \Big|_{x=x_j^*} , \end{aligned} \quad (2.14)$$

- Se : $|\xi| < 1 \Rightarrow$ A órbita de período- P é *estável* ;
- Se : $|\xi| > 1 \Rightarrow$ A órbita de período- P é *instável* .

Para o mapa N -dimensional, a órbita periódica é definida por:

$$\vec{X}_j^* = \vec{G}^{(P)} \left[\vec{X}_j^* \right] , \quad (j = 0, 1, 2, \dots, P-1) . \quad (2.15)$$

A estabilidade da órbita periódica de período- P é obtida de:

$$DG^{(P)} = \prod_{j=0}^{P-1} DG(\vec{X}_j^*) . \quad (2.16)$$

onde $DG^{(P)}$ é a matriz resultante do produto de P -matrizes Jacobianas avaliadas cada uma nos P -pontos fixos $(\vec{X}_0^*, \vec{X}_1^*, \dots, \vec{X}_{P-1}^*)$. Desta matriz, para um sistema N -dimensional, temos, em geral, N -autovalores reais e/ou complexos. Seja ξ_i um dos autovalores, onde $i = (1, 2, \dots, N)$, e $\xi_i \in \mathbb{C}$. Concluimos então que:

- Se “todos os autovalores têm módulos menores que $\mathbf{1}$ ” : $|\xi_i| < 1 \Rightarrow$ A órbita de período- P é *estável* ;
- Se “um ou mais autovalores têm módulos maiores que $\mathbf{1}$ ” : $|\xi_i| > 1 \Rightarrow$ A órbita de período- P é *instável* .

Como para cada autovalor temos uma autodireção associada, uma órbita terá então uma certa quantidade de direções estáveis e instáveis. Designaremos por “ d ” a quantidade de autodireções, onde:

- d^s - Quantidade de direções estáveis (associados aos autovalores com módulos menores que 1);
- d^u - Quantidade de direções instáveis (associados aos autovalores com módulos maiores que 1).

2.3.4 Classificação dos pontos fixos e das órbitas periódicas

Vimos que a estabilidade de um ponto fixo (ou de uma órbita periódica) é obtida via análise dos autovalores da matriz Jacobiana avaliada neste ponto fixo (autovalores do produto das Jacobianas avaliadas nos pontos periódicos). Classificamos os pontos fixos [5] (órbitas periódicas) em:

- *Hiperbólico*⁶ → Todos os autovalores com módulos diferentes de um ($|\xi_i| \neq 1$);
- *Não-hiperbólico* → Um autovalor com módulo igual a um ($|\xi_1| = 1$), e os restantes com módulos menores que um ($|\xi_{i \neq 1}| < 1$).

Classificamos também os pontos fixos quanto à sua topologia no espaço de fase⁷:

- Se todos os autovalores forem reais ($\xi_i \in \mathbb{R}$) e todos têm módulos maiores que um ($|\xi_i| > 1$), o ponto fixo é um “*nó instável*”. Se todos têm módulos menores que um ($|\xi_i| < 1$) o ponto fixo é um “*nó estável*”;
- Se todos os autovalores forem complexos conjugados ($\xi_i \in \mathbb{C}$) e todos têm módulos maiores que um ($|\xi_i| > 1$), o ponto fixo é um “*foco instável*”. Se todos têm módulos menores que um ($|\xi_i| < 1$) o ponto fixo é um “*foco estável*”;
- Se ao menos um autovalor tiver módulo maior que um ($|\xi_1| > 1$), o ponto fixo será um “*ponto de sela instável*”;
- Se o ponto fixo é *não-hiperbólico*, é chamado de “*centro*”.

Para facilitar a visualização das topologias, faremos a análise num mapa *2-dimensional*:

$$x_{n+1} = g(x_n, y_n), \quad y_{n+1} = h(x_n, y_n), \quad (2.17)$$

Fixando os parâmetros de controle, evoluímos este mapa partindo de diferentes condições iniciais x_0 e y_0 . O resultado é visto na Figura (2.1). Observa-se que o significado de *estável* indica que as variedades⁸ aproximam-se do ponto fixo, enquanto que *instável* indica afastamento do ponto fixo. O ponto de sela apresenta variedades instáveis e estáveis, representados pelas separatrizes das hipérboles, e, apesar da variedade estável, o ponto sela é um ponto instável. O ponto centro significa que as variedades nem se afastam e nem se aproximam do ponto fixo, e será tema de outra discussão, o surgimento de bifurcações.

⁶O termo hiperbólico está ligado à topologia do ponto de sela, onde as variedades no espaço de fase formam hipérboles, acabou sendo generalizado para outros pontos fixos estáveis ou instáveis.

⁷É a análise do contorno que as variáveis dependentes descrevem no espaço definido por estas variáveis.

⁸É o conjunto de pontos formados pelas variáveis dependentes.

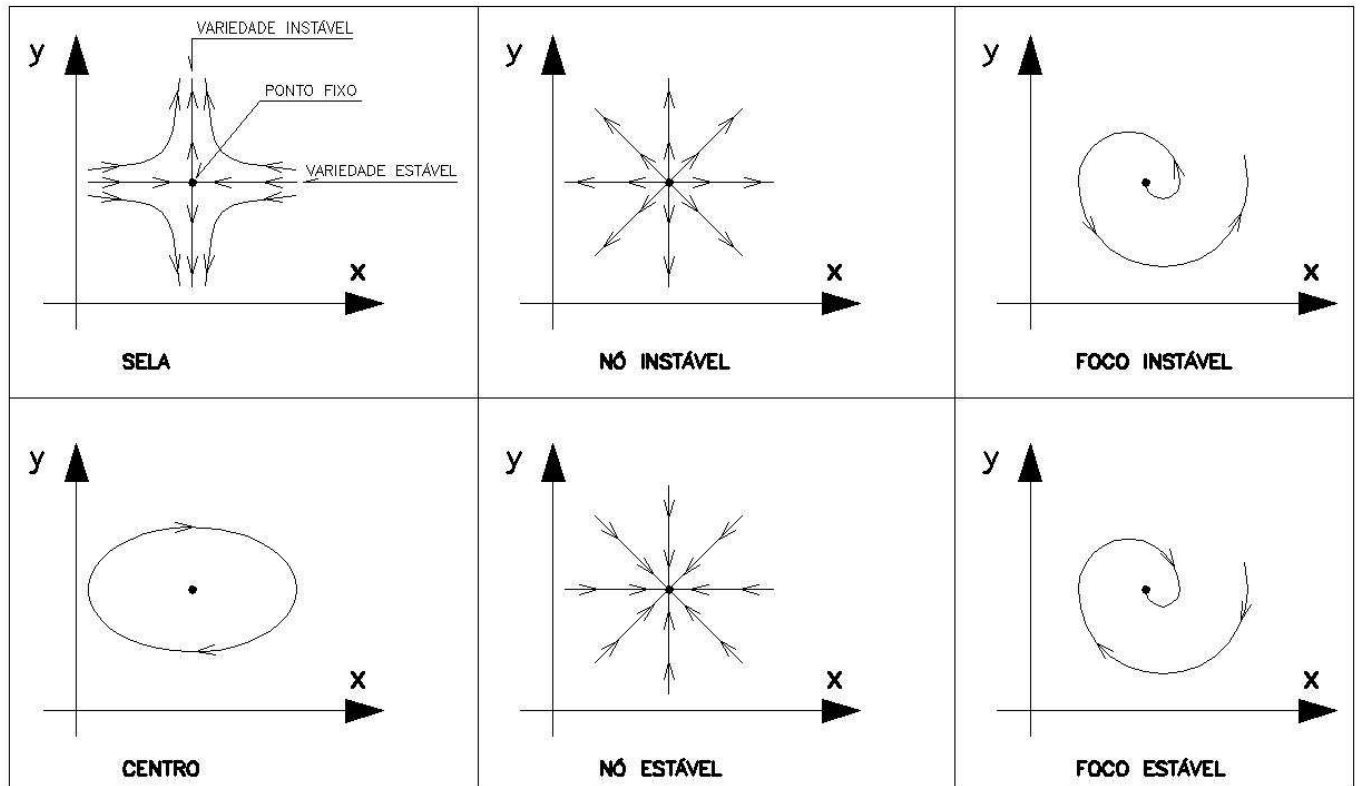


Figura 2.1: Exemplos de pontos fixos no espaço de fase 2-dimensional.

2.3.5 Bifurcações

Estudamos nos sistemas dinâmicos a influência do parâmetro de controle na evolução do sistema. Este estudo é feito utilizando o chamado *diagrama de bifurcação*. Neste diagrama, vemos como uma variável dinâmica evolui em função do parâmetro de controle. Temos, neste diagrama, as curvas referentes às órbitas estáveis (geralmente traçadas em linha cheia) e órbitas instáveis (geralmente em linha tracejada). Observa-se que a partir de um determinado valor de parâmetro, ocorre o nascimento e/ou destruição de órbitas, ocorrendo também mudanças de estabilidades. Dizemos então que as órbitas sofreram “bifurcações”.

Vimos que uma órbita será estável se todos os autovalores tiverem o seus módulos menores que um. Vamos supor, por exemplo, que estejamos analisando um sistema com uma órbita estável no parâmetro μ_j . Se incrementarmos este parâmetro de um pequeno valor δ ($\delta \ll 1$) tal que o próximo parâmetro seja $\mu_j + \delta$, verificamos que a órbita continua estável, mas um dos autovalores (ξ_1), têm um aumento de seu valor em módulo. Sucessivos incrementos implica que este autovalor aumenta gradativamente seu valor em módulo até que, para um dado μ_c , o módulo do autovalor será igual a um ($|\xi_1| = 1$). A órbita, até então hiperbólica, torna-se não-hiperbólica. Após este parâmetro μ_c ocorre a bifurcação, com a órbita hiperbólica estável tornando-se uma órbita hiperbólica instável (o módulo do autovalor em questão torna-se maior que um ($|\xi_1| > 1$)), e a possível ocorrência do nascimento de novas órbitas hiperbólicas a partir deste parâmetro. A bifurcação descrita acima

refere-se a uma bifurcação *Supercrítica*. Se esta bifurcação fosse precedida de uma órbita instável, teríamos uma bifurcação *Subcrítica*.

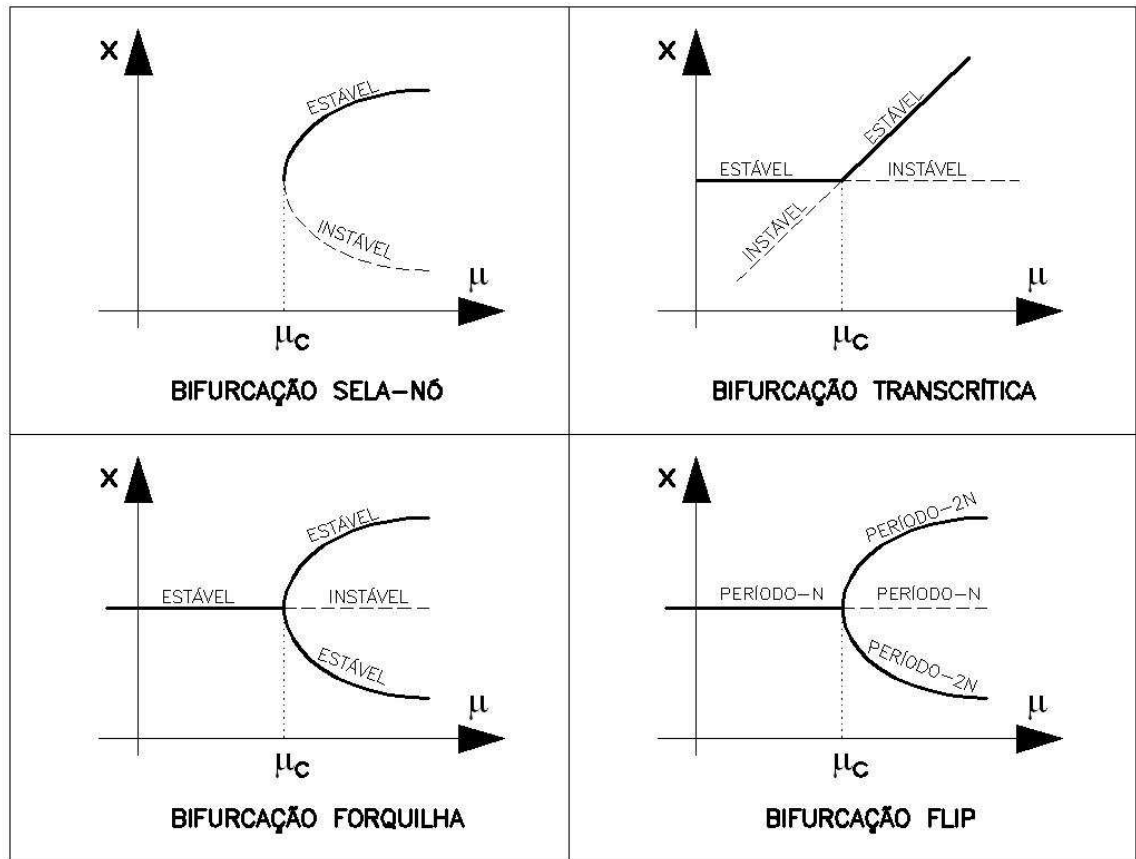


Figura 2.2: Exemplos de bifurcações supercríticas.

Temos então que, quando a órbita torna-se não-hiperbólica ocorre a bifurcação, e desta bifurcação temos novas órbitas hiperbólicas. Classificamos o tipo de bifurcação [5] de uma órbita de *período-P* analisando o autovalor responsável pela passagem de órbita hiperbólica para não-hiperbólica, ou seja, pelo autovalor cujo valor em módulo tornou-se igual a um:

- Se o autovalor for real e igual a um ($\xi_1 \in \mathbb{R}$ e $\xi_1 = 1$) teremos uma bifurcação supercrítica (subcrítica) do tipo:
 - *Sela-nó* : quando duas órbitas com estabilidades contrárias são criadas (destruídas);
 - *Transcrítica* : quando duas órbitas com estabilidades contrárias trocam suas estabilidades;
 - *Forquilha* : quando duas órbitas estáveis (instáveis) são criadas (destruídas).
- Se o autovalor for real e igual a um negativo ($\xi_1 \in \mathbb{R}$ e $\xi_1 = -1$) a bifurcação será do tipo *Flip* ou também chamado de *bifurcação de duplicação de período*. Semelhante à bifurcação forquilha, mas com a diferença de que as órbitas criadas são de *período-2P*, ou seja, de período duplicado.

- Se um par de autovalores for complexo conjugado⁹ com módulo igual a um ($\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$ com $|\xi_1| = |\xi_2| = 1$, onde $\xi_2 = \xi_1^*$) a bifurcação será do tipo *Neimark-Sacker* ou também chamado de *bifurcação Hopf para mapas*¹⁰;

Na Figura (2.2) temos alguns exemplos de bifurcação supercrítica¹¹.

2.4 Caos

Existem várias definições para “*caos*”, no que se refere ao estudo de sistemas dinâmicos. Isto se deve pela não existência de uma única rota que conduza ao caos. Descrevemos a seguir uma possível rota caótica.

Em certos mapas, verifica-se a existência de bifurcações do tipo *duplicação de período*. Como foi dito na seção anterior, numa bifurcação de duplicação de período uma órbita estável de *período- P* torna-se instável e em seguida nascem duas órbitas periódicas de *período- $2P$* , duplicando assim o número de órbitas estáveis. A partir de um determinado valor do parâmetro, começam a ocorrer sucessivas bifurcações de duplicação de período, quando esse parâmetro é incrementado de um pequeno valor. Temos então a ocorrência da *cascata de duplicação de período*, e nesta cascata, a cada duas órbitas estáveis criadas temos uma órbita instável oriunda da órbita anterior à bifurcação, além de outras órbitas instáveis remanescentes de outras bifurcações de duplicação de período, todas coexistindo numa região do espaço de fase. Ocorre que, em sucessivas bifurcações de duplicação de período, esta coexistência torna-se cada vez mais densa, com órbitas estáveis que pertencem a um mesmo período e órbitas instáveis de diferentes períodos. Como consequência, verifica-se que o sistema perde a periodicidade, ou seja, o sistema apresenta *aperiodicidade*.

Além da perda da periodicidade, observa-se que o sistema exibe *dependência sensível às condições iniciais*: Seja o mapa unidimensional $x_{n+1} = g(x_n, \mu)$, supondo x_0 uma condição inicial e x'_0 outra condição inicial ligeiramente afastada de x_0 , tal que $x'_0 = x_0 + \delta$, com $\delta > 0$ e $\delta \ll 1$. Dizemos que o sistema exibe dependência sensível às condições iniciais, para um parâmetro μ_c , se ao iterarmos o mapa k -vezes e $\|g^k(x_0, \mu_c) - g^k(x'_0, \mu_c)\| = \epsilon$, a distância entre as trajetórias ϵ aumentará exponencialmente no tempo. Isto significa que uma pequena mudança nas condições iniciais implica numa mudança substancial na trajetória, após k -iteradas.

Um sistema que, para um determinado parâmetro de controle, possui *aperiodicidade* e *dependência sensível às condições iniciais*, dizemos que apresenta “*caos*”. Quando um sistema têm comportamento caótico, não há convergência para um ponto fixo ou uma órbita periódica, teremos agora um conjunto de pontos no espaço de fase onde a dinâmica do sistema tende a convergir, que chamaremos de *atrator*.

⁹Soluções complexas sempre vêm aos pares de complexos conjugados.

¹⁰Maiores detalhes sobre bifurcação Neimark-Sacker vide [5] seção 3-2C

¹¹Como nosso sistema apresenta exclusivamente bifurcações supercrítica, não serão vistos em detalhes as subcríticas. Maiores detalhes vide [5] seção 3-2.

2.5 Atrator

Definimos um *atrator* com sendo um conjunto fechado de pontos no espaço de fase, que denominaremos por “ A ”, onde:

- A é um conjunto invariante, ou seja, iterando o mapa com um ponto pertencente a A , permanecerá em A por um tempo infinito ($g^k(x_0, \mu) \in A$ para $x_0 \in A$ e $k \rightarrow \infty$);
- A atrai um conjunto aberto B de condições iniciais, com A contido em B ($g^k(x_0, \mu) \in A$ para $x_0 \in B$ e $k \rightarrow \infty$). O maior conjunto B das condições iniciais, que satisfaça a relação, é chamado de *bacia de atração de A* ;
- A é o mínimo, ou seja, não existe um subconjunto de A que satisfaça as condições anteriores.

Se A for um conjunto que apresenta *dependência sensível às condições iniciais*, isto é, um atrator numa região caótica, chamamos de *atrator caótico*.

2.6 Expoentes de Lyapunov

Como foi dito anteriormente, uma das características da presença de caos num sistema está na *dependência sensível às condições iniciais*. Analisaremos o mapa unidimensional $x_{n+1} = g(x_n)$. Sejam x_0 e x'_0 , duas condições iniciais separadas por uma pequena distância δ_0 , tal que $\delta_0 > 0$ e $\delta_0 \rightarrow 0$, então temos $x'_0 - x_0 = \delta_0$. Vamos supor que após n iteradas, com $n \rightarrow \infty$, a separação entre as evoluções dos mapas seja $x'_n - x_n = \delta_n$. Vamos propor que δ_n tenha evoluído exponencialmente no tempo, em relação a δ_0 , ou seja:

$$|\delta_n| \approx |\delta_0| e^{\lambda n}, \quad (2.18)$$

onde λ é definido como *Expoente de Lyapunov*. Observe na expressão que se:

- $\lambda < 0 \Rightarrow |\delta_n| \rightarrow 0 \Rightarrow$ As iteradas de x_0 e x'_0 convergem exponencialmente no tempo;
- $\lambda > 0 \Rightarrow |\delta_n| > |\delta_0| \Rightarrow$ As iteradas de x_0 e x'_0 divergem exponencialmente no tempo.

Evoluindo a expressão, teremos:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{x'_n - x_n}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{g^{(n)}(x_0 + \delta_0) - g^{(n)}(x_0)}{\delta_0} \right|,$$

onde obtemos:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{dg^{(n)}(x)}{dx} \right|_{x=x_0}, \quad (2.19)$$

aplicando na derivada a regra da cadeia:

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_i},$$

Concluimos aplicando o limite em n :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left(\left| \frac{dg(x)}{dx} \right|_{x=x_i} \right) \right] . \quad (2.20)$$

Para um mapa N -dimensional, definimos:

$$DG^{(n)}(\vec{X}_0) = \prod_{i=0}^{n-1} DG(\vec{X}_i) , \quad (2.21)$$

onde $DG^{(n)}(\vec{X}_0)$ é a matriz resultante do produto de n -matrizes Jacobianas avaliadas cada uma nos n -pontos calculados pelo mapa, partindo da condição inicial $(\vec{X}_0, \vec{X}_1, \dots, \vec{X}_{n-1})$. Definimos a matriz \mathcal{DG} ¹² como sendo:

$$\mathcal{DG} = \left[DG_{(\vec{X}_0)}^{(n)} \cdot DG_{(\vec{X}_0)}^{(n)\mathbf{T}} \right]^{\frac{1}{2n}} . \quad (2.22)$$

onde $DG_{(\vec{X}_0)}^{(n)\mathbf{T}}$ é a matriz transposta de $DG^{(n)}(\vec{X}_0)$.

Obtemos então os expoentes de Lyapunov pela expressão:

$$\lambda_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \ln |\xi_k| \right) . \quad (2.23)$$

onde ξ_k é um autovalor da matriz \mathcal{DG} , e λ_k o expoente de Lyapunov associado a este autovalor, com $k = (1, 2, \dots, N)$. Temos então para um mapa N -dimensional, N autovalores da matriz \mathcal{DG} , portanto teremos N expoentes de Lyapunov. Em função do limite do tempo tendendo ao infinito, dizemos que são “*expoentes de Lyapunov a tempo infinito*”.

O estudo dos expoentes de Lyapunov fornece informações importantes à respeito do comportamento caótico de um sistema. No estudo de mapas, observamos como evolui os expoentes de Lyapunov conforme variamos o parâmetro de controle. Para um mapa N -dimensional, utilizaremos o seguinte critério de distinção do comportamento caótico, para um determinado parâmetro de controle:

- Se todos os $\lambda_k < 0$, o sistema apresenta-se estável;
- Se um dos os $\lambda_k > 0$, o sistema apresenta comportamento caótico.

Na análise dos expoentes de Lyapunov é comum ordená-los, de tal forma que:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \dots \lambda_{k-1} \geq \lambda_k .$$

e a análise dos expoentes de Lyapunov para mapas resume-se em:

- Se $\lambda_1 > 0$, o sistema é caótico;
- Se $\lambda_2 > 0$, o sistema apresenta uma segunda direção caótica e a denominamos de “*hipercaótica*”.

¹²A matriz \mathcal{DG} fornece os autovalores da matriz $DG^{(n)}(\vec{X}_0)$ em módulos (mesmo sendo números complexos).

2.6.1 Expoentes de Lyapunov a Tempo Finito

Vimos na expressão (2.23) o cálculo dos expoentes de Lyapunov a tempo infinito para um mapa N -dimensional. Podemos calcular os “*expoentes de Lyapunov a tempo finito*”, $\lambda_k(n)$, onde :

$$\lambda_k(n) = \left(\frac{1}{n} \ln |\xi_k| \right) . \quad (2.24)$$

sendo ξ_k um autovalor da matriz \mathcal{DG} , e $\lambda_k(n)$ o expoente de Lyapunov a tempo “ n ” associado a este autovalor, com $k = (1, 2, \dots, N)$. Redefinimos então os expoentes de Lyapunov a tempo infinito como sendo:

$$\lambda_k(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_k(n) . \quad (2.25)$$

Os expoentes de Lyapunov a tempo finito medem a taxa da convergência ou da divergência entre órbitas, a cada trecho de n tempos (ou n iteradas). Verifica-se que na ocorrência de VDI, o valor de um dos expoentes de Lyapunov a tempo finito flutua em torno de zero, onde utilizamos essa propriedade como indicação numérica da presença da VDI ([3],[4],[7],[16]).

2.7 Crise

Quando o sistema apresenta comportamento caótico, verificamos no diagrama de bifurcações a presença do atrator caótico. Ocorre que, para um determinado parâmetro, uma órbita instável colide com este atrator, provocando um súbito aumento da faixa caótica ou um súbito desaparecimento do atrator caótico . A esta colisão chamamos de *crise* [17]. Quando esta colisão ocorre com uma órbita instável localizada na fronteira da bacia de atração do atrator caótico, dizemos que temos uma *crise de fronteira*, e nesta crise temos a destruição do atrator caótico. Se a colisão ocorre com uma órbita instável dentro da bacia de atração do atrator, será uma *crise interior*, onde atratores caóticos fundem-se, formando uma única faixa caótica.

2.8 VDI

Vimos que para cada órbita periódica de um sistema N -dimensional existem N -autodireções associadas. Se destas autodireções, uma quantidade “ n ” são de autodireções *estáveis*, então $(N-n)$ representa as autodireções *instáveis*, ou seja: se uma órbita possui $d^S = n$, então ela tem $d^U = N - n$. Ocorre que, para certos sistemas, podemos ter órbitas periódicas mergulhadas no atrator caótico com o número de direções instáveis diferenciadas entre si, isto é, algumas órbitas com $d^U = 1$ e outras com $d^U = 2$. Chamamos este comportamento de “*Variabilidade da Dimensão Instável*” (“*Unstable Dimension Variability*”), abreviado por *VDI*.

Historicamente, a VDI foi descrita primeiramente em um trabalho matemático feito por Abraham e Smale [6], em 1970, sobre um sistema difeomorfismo¹³ $\mathcal{T}^2 \times \mathcal{S}^2$, cujo conjunto invariante possuía dois pontos fixos com diferentes dimensões instáveis. A primeira presença da VDI em sistemas

¹³ $f(x)$ é um difeomorfismo se $f(x)$ e $f^{-1}(x)$ forem diferenciáveis em todo o domínio de x .

dinâmicos foi no mecanismo chamado de “*rotor duplo pulsado*”, inicialmente estudado por F. J. Romeiras et. al. [8], em 1992, e devidamente identificado a presença da VDI por S. Dawson et. al.[7], em 1994. Este mesmo mecanismo será estudado em nosso trabalho.

Sabemos que se um sistema é caótico, o primeiro expoente de Lyapunov (λ_1) tornou-se positivo, conseqüentemente o sistema não possuirá órbitas estáveis, predominando agora órbitas instáveis com uma direção instável, $d^u = 1$. Como o conjunto caótico apresenta órbitas com quantidades de direções instáveis diferentes de um, por exemplo $d^u = 2$, uma trajetória gerada numericamente¹⁴ sofrerá a influência desta segunda direção instável, e como conseqüência esta trajetória gerada numericamente, na presença da VDI, perde a confiabilidade para uma previsão a longo tempo.

Podemos verificar a presença da VDI no sistema, analisando o comportamento do segundo expoente de Lyapunov (λ_2). Nesta análise, observamos o comportamento de λ_2 a tempo finito. Verificamos os λ_2 a curto tempo, e caso este expoente apresente flutuação em torno de zero, temos forte indício da presença de VDI no sistema. Esta flutuação em torno de zero implica λ_2 seja ora positivo, ora negativo, e como resultado teremos variação na direção instável, ora $d^u = 1$, ora $d^u = 2$.

¹⁴Trajétória gerada através de cálculos, com auxílio de computador.

Capítulo 3

Rotor Duplo Pulsado e seus Resultados

Descrevemos neste capítulo os estudos realizados bem como os resultados obtidos referentes ao sistema dinâmico adotado, o “Rotor Duplo Pulsado” (RDP). A motivação em estudar este sistema dinâmico está no fato de ter sido o primeiro sistema dinâmico a descrever a VDI (Variabilidade da Dimensão Instável)[7]. O rotor duplo pulsado começou a ser estudado por F. J. Romeiras et. al. [8], em seu trabalho sobre “*controle de caos em sistemas dinâmicos*”. Iniciamos o capítulo descrevendo o RDP, e em seguida deduzimos, por meio das equações de movimento, o “Mapa do Rotor Duplo Pulsado” (MRDP), onde obtemos os diagramas de bifurcações. Na seqüência, descrevemos os estudos referentes aos pontos fixos e órbitas periódicas, bifurcações, expoentes de Lyapunov, crise e VDI. No final do capítulo analisamos os resultados obtidos onde tiramos as conclusões finais.

3.1 Rotor Duplo Pulsado - RDP

Na Figura (3.1) vemos um esquema do rotor duplo pulsado. Ele é formado por duas hastes de massas desprezíveis, a *haste1* com comprimento l_1 , e a *haste2* com comprimento $2l_2$. Uma extremidade da *haste1* articula livremente sobre um pivô, definido no ponto P_0 . Na outra extremidade da *haste1*, denominado como ponto P_1 , é fixado uma massa m_1 . Neste mesmo ponto P_1 , a *haste2* é conectada no seu ponto médio, de forma que ela possa articular livremente sobre a massa m_1 . Da *haste2* temos então dois braços de comprimentos l_2 . Duas massas m_2 são fixadas nas extremidades da *haste2*, respectivamente nos pontos P_2 e P_3 . Toda dinâmica do RDP ocorre no espaço 2-D, e o efeito da força de gravidade sobre o sistema não será considerado, neste caso vamos imaginar que o RDP esteja montado numa mesa lisa, cujos coeficientes de atrito dos elementos do RDP com a mesa sejam nulos. Estudaremos então a dinâmica do RDP no plano $X-Y$, com a origem localizada no ponto P_0 . Monitoraremos o sistema pelos ângulos θ_1 , ângulo da *haste1*, e θ_2 , da *haste2*, portanto o RDP possui dois graus de liberdade. Os pontos de articulação, P_1 e P_2 , terão atritos do tipo viscoso, com coeficientes ν_1 e ν_2 , respectivamente, o que caracteriza o sistema como sendo dissipativo.

No ponto P_2 localizado numa das extremidades da *haste2*, sob a massa m_2 , será aplicada

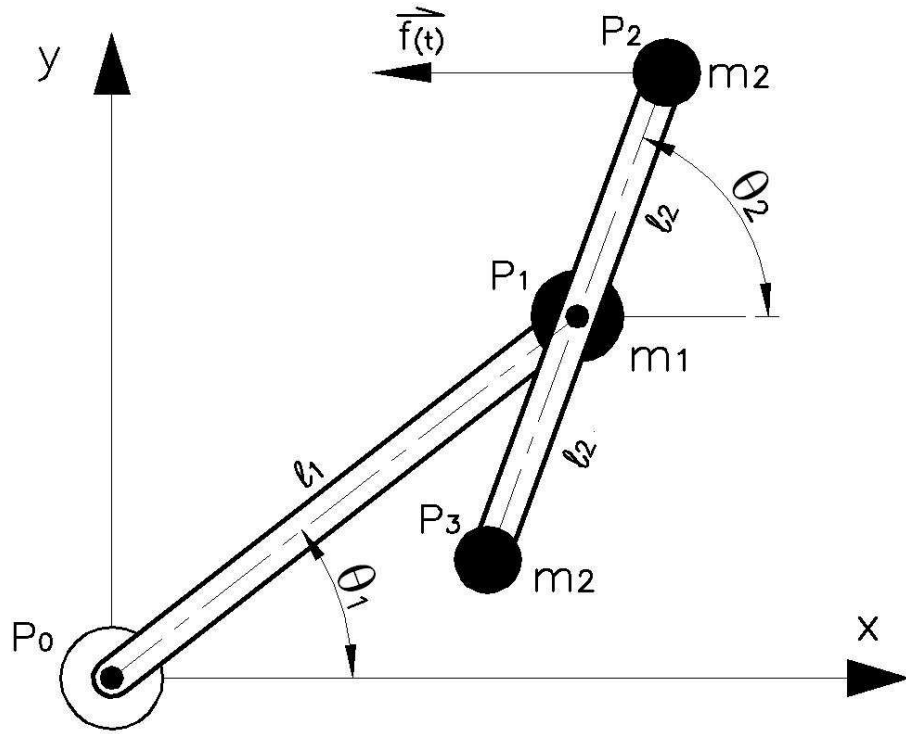


Figura 3.1: Esquema do rotor duplo pulsado.

uma força periódica, dado por:

$$f(t) = f_0 \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - kT), \quad (3.1)$$

com: $f_0 \geq 0$; T é o período e δ representa a função delta de Dirac. Temos então que: $f(t) = 0$ para $t \neq kT$, onde $k = 1, 2, \dots$.

Em termos vetoriais, a força periódica será dada por:

$$\vec{f}(t) = -f(t)\vec{i}, \quad (3.2)$$

ou seja, a força é aplicada na direção paralela ao eixo X , no sentido $-X$.

3.2 Mapa do Rotor Duplo Pulsado - MRDP

Vamos deduzir o mapa do rotor duplo pulsado (MRDP). Como foi citado, o RDP é um sistema dissipativo e com dois graus de liberdade. As equações de movimento deste sistema são dadas pela expressão ([21], capítulo 1-5):

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta_i} = 0 \quad (i=1,2), \quad (3.3)$$

onde:

- $\theta_i \rightarrow$ Ângulo da haste $_i$;
- $\dot{\theta}_i \rightarrow$ Velocidade angular da haste $_i$;

- $\mathcal{L} \rightarrow$ Função Lagrangeana do sistema;
- $\mathcal{F} \rightarrow$ Função de dissipação de Rayleigh.

3.2.1 Função Lagrangeana

A função Lagrangeana é definida como:

$$\mathcal{L} = K - U , \quad (3.4)$$

onde:

- $K \rightarrow$ Energia cinética;
- $U \rightarrow$ Energia potencial.

Iniciaremos escrevendo o sistema em função das coordenadas cartesianas (XY) , passando então para as coordenadas generalizadas (θ_i) . As posições das massas serão:

$$\begin{aligned} \text{massa } m_1 \text{ no ponto } P_1 & \begin{cases} x_1 = l_1 \cos \theta_1 , \\ y_1 = l_1 \sin \theta_1 , \end{cases} \\ \text{massa } m_2 \text{ no ponto } P_2 & \begin{cases} x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 , \\ y_2 = l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \theta_2 , \end{cases} \\ \text{massa } m_2 \text{ no ponto } P_3 & \begin{cases} x_3 = l_1 \cos \theta_1 - l_2 \cos \theta_2 , \\ y_3 = l_1 \sin \theta_1 - l_2 \sin \theta_2 . \end{cases} \end{aligned}$$

Derivando as posições em t temos as velocidades:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 , \\ \dot{y}_1 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 , \\ \dot{x}_2 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 , \\ \dot{y}_2 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 , \\ \dot{x}_3 &= -l_1 \dot{\theta}_1 \sin \theta_1 + l_2 \dot{\theta}_2 \sin \theta_2 , \\ \dot{y}_3 &= l_1 \dot{\theta}_1 \cos \theta_1 - l_2 \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 . \end{aligned}$$

Cálculo da energia cinética

A energia cinética é obtida pela expressão:

$$K = \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_3^2 + \dot{y}_3^2) ,$$

Obtemos então :

$$K = \frac{1}{2} (m_1 + 2m_2) l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} (2m_2) l_2^2 \dot{\theta}_2^2 , \quad (3.5)$$

Reescrevendo em termos das energias cinéticas de rotação das hastes, temos :

$$K = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2, \quad (3.6)$$

$$\text{onde : } \begin{cases} I_1 = (m_1 + 2m_2)l_1^2 & (\text{momento de inércia da haste1}) , \\ I_2 = (2m_2)l_2^2 & (\text{momento de inércia da haste2}) . \end{cases}$$

Cálculo da energia potencial

A energia potencial é definida pela força periódica $\vec{f}(t)$, aplicada no ponto P_2 , que obedece a expressão:

$$dU = -\vec{f}(t) \cdot d\vec{s},$$

$$\text{onde : } \begin{cases} \vec{f}(t) = -f(t)\vec{i} & (\text{força periódica do sistema}), \\ d\vec{s} = dx\vec{i} + dy\vec{j} . \end{cases}$$

Fazendo o produto escalar e integrando a expressão, temos:

$$U - U_0 = \int_0^{x_2} f(t)dx ,$$

$$\text{onde definimos : } \begin{cases} U_0 = 0 & \text{em } x = 0 , \\ x_2 = l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2 . \end{cases}$$

Obtemos então :

$$U = f(t) (l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \theta_2) . \quad (3.7)$$

Obtendo a função Lagrangeana

Vamos simplificar as expressões, tomando algumas igualdades:

$$m_1 = m , \quad (3.8)$$

$$m_2 = \frac{m_1}{2} = \frac{m}{2} , \quad (3.9)$$

$$l_2 = l , \quad (3.10)$$

$$l_1 = \frac{l_2}{\sqrt{2}} = \frac{l}{\sqrt{2}} , \quad (3.11)$$

$$I_1 = (m_1 + 2m_2)l_1^2 = ml^2 = I , \quad (3.12)$$

$$I_2 = (2m_2)l_2^2 = ml^2 = I . \quad (3.13)$$

Finalizamos a função Lagrangeana como :

$$\mathcal{L} = \frac{I}{2} (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - f(t)l \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta_1 + \cos \theta_2 \right) . \quad (3.14)$$

3.2.2 Função de dissipação de Rayleigh

A função de dissipação de Rayleigh está relacionada com a energia dissipada em virtude das forças resistivas, pela existência de atrito nos meios. No nosso sistema temos atrito nos pivôs dos pontos P_0 e P_1 , cujos coeficientes são, respectivamente, ν_1 e ν_2 . A função de Rayleigh será proporcional às velocidades angulares das hastes, conseqüentemente com as energias cinéticas das hastes.

No pivô do ponto P_1 , o atrito ν_1 retarda a *haste1*, temos então:

$$\mathcal{F}_1 = \nu_1 \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 ,$$

Já no pivô do ponto P_2 , o atrito ν_2 além de retardar a *haste2*, acelera a *haste1* por transferência de momento angular. Obtemos então:

$$\mathcal{F}_2 = \nu_2 \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 ,$$

Concluimos então que a função de dissipação de Rayleigh do sistema será dado por:

$$\mathcal{F} = \nu_1 \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}_1^2 + \nu_2 \frac{1}{2} I_2 (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F} = \nu_1 \frac{1}{2} I \dot{\theta}_1^2 + \nu_2 \frac{1}{2} I (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1)^2 . \quad (3.15)$$

3.2.3 Resolvendo as equações de movimento

Podemos agora resolver as equações de movimento dado em (3.3). Começamos fazendo as derivadas parciais:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_i} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = f(t) \frac{l}{\sqrt{2}} \text{sen } \theta_1 , \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = f(t) l \text{sen } \theta_2 , \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_i} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = I \dot{\theta}_1 , \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = I \dot{\theta}_2 , \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\theta}_i} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\theta}_1} = (\nu_1 + \nu_2) I \dot{\theta}_1 - \nu_2 I \dot{\theta}_2 , \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{\theta}_2} = -\nu_2 I \dot{\theta}_1 + \nu_2 I \dot{\theta}_2 . \end{cases} \quad (3.18)$$

Substituindo em (3.3), obtemos as equações diferenciais:

$$\frac{d\dot{\theta}_1}{dt} = -(\nu_1 + \nu_2) \dot{\theta}_1 + \nu_2 \dot{\theta}_2 + f(t) \frac{l}{I\sqrt{2}} \text{sen } \theta_1 , \quad (3.19)$$

$$\frac{d\dot{\theta}_2}{dt} = \nu_2 \dot{\theta}_1 - \nu_2 \dot{\theta}_2 + f(t) \frac{l}{I} \text{sen } \theta_2 , \quad (3.20)$$

Em formato matricial, teremos:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}_\nu \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{pmatrix} + f(t) \frac{l}{I} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } \theta_1(t) \\ \text{sen } \theta_2(t) \end{pmatrix} , \quad (3.21)$$

onde \mathbf{A}_ν é a matriz:

$$\mathbf{A}_\nu = \begin{pmatrix} -(\nu_1 + \nu_2) & \nu_2 \\ \nu_2 & -\nu_2 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

e lembrando que:

$$f(t) = f_0 \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - kT). \quad (3.23)$$

Solução para : $0 \leq t < T$ ($f(t) = 0$)

Como $f(t)$ é descontínua, devemos resolver (3.21) em etapas. Começaremos no intervalo $0 \leq t < T$, onde $f(t) = 0$. Neste intervalo, reduzimos (3.21) para um sistema de equações lineares. Obtemos então:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}_\nu \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \ddot{\Theta}(t) = \mathbf{A}_\nu \dot{\Theta}(t), \quad (3.24)$$

onde:

$$\dot{\Theta}(t) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{pmatrix}, \quad (3.25)$$

Resolveremos em termos de $\dot{\Theta}$. A solução para este sistema linear será:

$$\dot{\Theta}(t) = \psi e^{\zeta t}, \quad (3.26)$$

que substituindo em (3.24), resulta:

$$(\mathbf{A}_\nu - \zeta \mathbf{I}_2) \psi = 0. \quad (3.27)$$

onde:

- $\zeta \rightarrow$ Autovalores da matriz \mathbf{A}_ν . Como \mathbf{A}_ν é uma matriz 2×2 , teremos dois autovalores (ζ_1 e ζ_2);
- $\psi \rightarrow$ Autovetor associado ao autovalor ($\psi^{(1)}$ associado ao ζ_1 , e $\psi^{(2)}$ associado ao ζ_2);
- $\mathbf{I}_2 \rightarrow$ Matriz identidade 2×2 .

Resolvendo a expressão (3.27), obtemos os autovalores e os autovetores associados:

$$\zeta_1 = -\frac{1}{2}(\nu_1 + 2\nu_2 + \Delta), \quad (3.28)$$

$$\zeta_2 = -\frac{1}{2}(\nu_1 + 2\nu_2 - \Delta), \quad (3.29)$$

$$\psi^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{2\nu_2}{(\nu_1 - \Delta)} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

$$\psi^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{2\nu_2}{(\nu_1 + \Delta)} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

onde :

$$\Delta = \sqrt{\nu_1^2 + 4\nu_2^2} . \quad (3.32)$$

A solução geral de (3.26) será então a combinação linear dos autovalores e autovetores. Onde obtemos:

$$\dot{\Theta}(t) = C_1 \psi^{(1)} e^{\zeta_1 t} + C_2 \psi^{(2)} e^{\zeta_2 t} , \quad (3.33)$$

C_1 e C_2 são constantes, definidas pelas condições iniciais. Seja a condição inicial, em $t = 0$:

$$\dot{\Theta}(0) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(0) \\ \dot{\theta}_2(0) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(0) \\ \dot{\theta}_2(0) \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \frac{2\nu_2}{(\nu_1 - \Delta)} \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{2\nu_2}{(\nu_1 + \Delta)} \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (3.34)$$

Obtemos então :

$$C_1 = -\frac{\nu_2}{\Delta} \dot{\theta}_1(0) + \frac{1}{2\Delta} (\Delta - \nu_1) \dot{\theta}_2(0) , \quad (3.35)$$

$$C_2 = \frac{\nu_2}{\Delta} \dot{\theta}_1(0) + \frac{1}{2\Delta} (\Delta + \nu_1) \dot{\theta}_2(0) . \quad (3.36)$$

Substituindo em (3.33):

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\Delta} (\Delta + \nu_1) e^{\zeta_1 t} + \frac{1}{2\Delta} (\Delta - \nu_1) e^{\zeta_2 t} & -\frac{\nu_2}{\Delta} e^{\zeta_1 t} + \frac{\nu_2}{\Delta} e^{\zeta_2 t} \\ -\frac{\nu_2}{\Delta} e^{\zeta_1 t} + \frac{\nu_2}{\Delta} e^{\zeta_2 t} & \frac{1}{2\Delta} (\Delta - \nu_1) e^{\zeta_1 t} + \frac{1}{2\Delta} (\Delta + \nu_1) e^{\zeta_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(0) \\ \dot{\theta}_2(0) \end{pmatrix} . \quad (3.37)$$

definimos então as matrizes:

$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{W}_1 e^{\zeta_1 t} + \mathbf{W}_2 e^{\zeta_2 t} , \quad (3.38)$$

$$\mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\Delta} (\Delta + \nu_1) & -\frac{\nu_2}{\Delta} \\ -\frac{\nu_2}{\Delta} & \frac{1}{2\Delta} (\Delta - \nu_1) \end{pmatrix} , \quad (3.39)$$

$$\mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\Delta} (\Delta - \nu_1) & \frac{\nu_2}{\Delta} \\ \frac{\nu_2}{\Delta} & \frac{1}{2\Delta} (\Delta + \nu_1) \end{pmatrix} , \quad (3.40)$$

e a nossa solução, em termos de $\dot{\Theta}$, ficará:

$$\dot{\Theta}(t) = \mathbf{L}(t) \dot{\Theta}(0) . \quad (3.41)$$

Para obter a solução em termos de Θ , integramos a expressão (3.41):

$$\int_0^t \dot{\Theta}(\tau) d\tau = \int_0^t \mathbf{L}(\tau) \dot{\Theta}(0) d\tau \Rightarrow \Theta(t) - \Theta(0) = M(t) \dot{\Theta}(0) , \quad (3.42)$$

onde:

$$\Theta(t) = \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} , \quad \Theta(0) = \begin{pmatrix} \theta_1(0) \\ \theta_2(0) \end{pmatrix} ,$$

e a matriz $\mathbf{M}(t)$:

$$\mathbf{M}(t) = \int_0^t \mathbf{L}(\tau) d\tau = \mathbf{W}_1 \frac{(e^{\zeta_1 t} - 1)}{\zeta_1} + \mathbf{W}_2 \frac{(e^{\zeta_2 t} - 1)}{\zeta_2}. \quad (3.43)$$

Nossa solução, para Θ , no intervalo $0 \leq t < T$ será:

$$\Theta(t) = \mathbf{M}(t)\dot{\Theta}(0) + \Theta(0). \quad (3.44)$$

Podemos obter uma expressão que relacione a matriz $\mathbf{L}(t)$ com a $\mathbf{M}(t)$. Derivando as expressões (3.41) e (3.44), e substituindo os resultados na expressão (3.24), obtemos:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{L}(t) = \mathbf{A}_\nu \frac{d}{dt}\mathbf{M}(t), \quad (3.45)$$

integrando, resulta :

$$\mathbf{L}(t) - \mathbf{L}(0) = \mathbf{A}_\nu [\mathbf{M}(t) - \mathbf{M}(0)], \quad (3.46)$$

como :

$$\mathbf{L}(0) = \mathbf{W}_1 + \mathbf{W}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}_2, \quad \mathbf{M}(0) = 0,$$

concluimos então:

$$\mathbf{L}(t) - \mathbf{I}_2 = \mathbf{A}_\nu \mathbf{M}(t). \quad (3.47)$$

Solução para : $t = T$

Para $t = T$, integraremos (3.21) no intervalo em torno de T , de $T - \epsilon$ até $T + \epsilon$, onde $\epsilon \ll 1$. Denominaremos este intervalo de T^- (antes do pulso) a T^+ (após o pulso). Teremos então:

$$\int_{T^-}^{T^+} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{pmatrix} dt = \mathbf{A}_\nu \int_{T^-}^{T^+} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{pmatrix} dt + \int_{T^-}^{T^+} f_0 \frac{l}{I} \sum_{k=1}^{\infty} \delta(t - kT) \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } \theta_1(t) \\ \text{sen } \theta_2(t) \end{pmatrix} dt,$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(T^+) \\ \dot{\theta}_2(T^+) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(T^-) \\ \dot{\theta}_2(T^-) \end{pmatrix} = \mathbf{A}_\nu \left[\begin{pmatrix} \theta_1(T^+) \\ \theta_2(T^+) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \theta_1(T^-) \\ \theta_2(T^-) \end{pmatrix} \right] + f_0 \frac{l}{I} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } \theta_1(T) \\ \text{sen } \theta_2(T) \end{pmatrix}. \quad (3.48)$$

Neste intervalo, a velocidade angular é descontínua, isto é : $\dot{\Theta}(T^-) \neq \dot{\Theta}(T^+)$, mas as posições angulares são contínuas: $\Theta(T^-) = \Theta(T^+)$ para $\epsilon \rightarrow 0$. Com isso:

$$\begin{pmatrix} \theta_1(T^+) \\ \theta_2(T^+) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1(T^-) \\ \theta_2(T^-) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_1(T) \\ \theta_2(T) \end{pmatrix}. \quad (3.49)$$

Observamos que $\Theta(T^-)$ refere-se às posições antes do pulso, obedece então a expressão (3.44), com $t = T$, assim como $\dot{\Theta}(T^-)$ refere-se às velocidades antes do pulso, expresso em (3.41), com $t = T$.

Concluimos:

$$\begin{pmatrix} \theta_1(T) \\ \theta_2(T) \end{pmatrix} = \mathbf{M}(T) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(0) \\ \dot{\theta}_2(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_1(0) \\ \theta_2(0) \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(T^+) \\ \dot{\theta}_2(T^+) \end{pmatrix} = \mathbf{L}(T) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(0) \\ \dot{\theta}_2(0) \end{pmatrix} + f_0 \frac{l}{I} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } \theta_1(T) \\ \text{sen } \theta_2(T) \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Solução para : $t = (k + 1)T$

Para o intervalo $T \leq t < 2T$, as soluções serão as expressões (3.44) e (3.41), onde as condições iniciais $\dot{\Theta}(0)$ e $\Theta(0)$ serão substituídos por $\dot{\Theta}(T^+)$ e $\Theta(T^+)$. Repete-se então o processo, onde as variáveis atuais serão condições iniciais para a próxima etapa. O nosso interesse está numa solução geral logo após um pulso, ou seja, para $t = (k + 1)T$, onde k é um número inteiro. Pretendemos então calcular $\dot{\Theta}(T(k + 1))$ e $\Theta(T(k + 1))$, onde usaremos as expressões (3.50) e (3.51), com as condições iniciais $\dot{\Theta}(Tk)$ e $\Theta(Tk)$:

$$\begin{pmatrix} \theta_1(T(k + 1)) \\ \theta_2(T(k + 1)) \end{pmatrix} = \mathbf{M}(T) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(Tk) \\ \dot{\theta}_2(Tk) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \theta_1(Tk) \\ \theta_2(Tk) \end{pmatrix}, \quad (3.52)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(T(k + 1)) \\ \dot{\theta}_2(T(k + 1)) \end{pmatrix} = \mathbf{L}(T) \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(Tk) \\ \dot{\theta}_2(Tk) \end{pmatrix} + f_0 \frac{l}{I} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } \theta_1(T(k + 1)) \\ \text{sen } \theta_2(T(k + 1)) \end{pmatrix}. \quad (3.53)$$

3.2.4 Obtendo o mapa do rotor duplo pulsado (MRDP)

Vamos agora fazer algumas mudanças de variáveis e também fixar valores nas grandezas¹. Trabalharemos somente com um parâmetro de controle, o módulo da força f_0 .

Definimos então:

$$\begin{aligned} T &= 1s, & l &= 1m, \\ m &= 1kg \Rightarrow I &= 1kgm^2, \\ \nu_1 &= 1/s, & \nu_2 &= 1/s, \\ \theta_1(Tk) &= x_{1(n)}, & \theta_2(Tk) &= x_{2(n)}, \\ \dot{\theta}_1(Tk) &= y_{1(n)}, & \dot{\theta}_2(Tk) &= y_{2(n)}, \\ \theta_1(T(k + 1)) &= x_{1(n+1)}, & \theta_2(T(k + 1)) &= x_{2(n+1)}, \\ \dot{\theta}_1(T(k + 1)) &= y_{1(n+1)}, & \dot{\theta}_2(T(k + 1)) &= y_{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Fazendo as substituições, obtemos então as matrizes de constantes:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0,241427723978 & 0,272608937663 \\ 0,272608937663 & 0,514036661638 \end{pmatrix}, \quad (3.54)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,485963338360 & 0,213354400697 \\ 0,213354400697 & 0,699317739057 \end{pmatrix}. \quad (3.55)$$

Finalizamos então com o mapa do rotor duplo pulsado (MRDP):

$$x_{1(n+1)} = M_{11}y_{1(n)} + M_{12}y_{2(n)} + x_{1(n)}, \quad (3.56)$$

$$x_{2(n+1)} = M_{21}y_{1(n)} + M_{22}y_{2(n)} + x_{2(n)}, \quad (3.57)$$

$$y_{1(n+1)} = L_{11}y_{1(n)} + L_{12}y_{2(n)} + \frac{f_0}{\sqrt{2}} \text{sen } x_{1(n+1)}, \quad (3.58)$$

$$y_{2(n+1)} = L_{21}y_{1(n)} + L_{22}y_{2(n)} + f_0 \text{sen } x_{2(n+1)}. \quad (3.59)$$

¹Foram adotados nas grandezas T, l, m, I, ν_1 e ν_2 valores com o objetivo de minimizar as constantes resultantes nas equações do mapa, além de serem valores adotados em trabalhos anteriores [8].

M_{ij} e L_{ij} são os elementos das matrizes \mathbf{M} e \mathbf{L} .

$$\text{definimos : } \begin{cases} x_{1,2} \in \mathcal{S}^1, \\ y_{1,2} \in \mathbb{R}, \\ f_0 \in \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

onde \mathcal{S}^1 é o círculo definido em $\mathbb{R}(\text{mod } 2\pi)$.²

O MRDP é um mapa 4-*dimensional*, onde x_1 e x_2 são posições angulares das hastes 1 e 2 respectivamente, e y_1 e y_2 suas respectivas velocidades angulares. Observa-se que o MRDP é um mapa acoplado, e o termo de acoplamento está em $\text{sen } x_{1(n+1)}$ na expressão (3.58), e $\text{sen } x_{2(n+1)}$ na expressão (3.59). Representando o MRDP em forma de matrizes, obtemos:

$$\mathbf{X}_{(n+1)} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}_{(n)} + \mathbf{X}_{(n)}, \quad (3.60)$$

$$\mathbf{Y}_{(n+1)} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Y}_{(n)} + \mathbf{G}(\mathbf{X}_{(n+1)}). \quad (3.61)$$

onde :

$$\mathbf{X}_{(k)} = \begin{pmatrix} x_{1(k)} \\ x_{2(k)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Y}_{(k)} = \begin{pmatrix} y_{1(k)} \\ y_{2(k)} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}(\mathbf{X}_{(n+1)}) = f_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } x_{1(n+1)} \\ \text{sen } x_{2(n+1)} \end{pmatrix}.$$

3.3 Parâmetro de Controle do MRDP

Definimos como parâmetro de controle o módulo da força periódica f_0 . Estudaremos como o MRDP se comporta quando alteramos esse parâmetro, onde pretendemos encontrar os seguintes valores dos parâmetros críticos:

- $f_{0(Caos)}$ - Parâmetro do início do caos,
- $f_{0(Crise)}$ - Parâmetro do início da crise,
- $f_{0(VDI)}$ - Parâmetro do início da VDI,
- $f_{0(VDI_{max})}$ - Parâmetro da VDI máxima.

3.4 Matriz Jacobiana

Devemos agora calcular a *Matriz Jacobiana*. Ela será utilizada nos cálculos das estabilidades dos pontos fixos e órbitas periódicas, além dos cálculos dos expoentes de Lyapunov. A matriz Jacobiana é obtida pelas derivadas parciais nas variáveis dependentes, e para um mapa 4-*dimensional*,

²Ou seja: $\mathcal{S}^1 = \{x_{1,2} \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x_{1,2} < 2\pi\}$.

como é o caso do MRDP, obteremos uma matriz 4×4 . A matriz Jacobiana é definida como:

$$\mathbf{DG} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{1(n+1)}}{\partial x_{1(n)}} & \frac{\partial x_{1(n+1)}}{\partial x_{2(n)}} & \frac{\partial x_{1(n+1)}}{\partial y_{1(n)}} & \frac{\partial x_{1(n+1)}}{\partial y_{2(n)}} \\ \frac{\partial x_{2(n+1)}}{\partial x_{1(n)}} & \frac{\partial x_{2(n+1)}}{\partial x_{2(n)}} & \frac{\partial x_{2(n+1)}}{\partial y_{1(n)}} & \frac{\partial x_{2(n+1)}}{\partial y_{2(n)}} \\ \frac{\partial y_{1(n+1)}}{\partial x_{1(n)}} & \frac{\partial y_{1(n+1)}}{\partial x_{2(n)}} & \frac{\partial y_{1(n+1)}}{\partial y_{1(n)}} & \frac{\partial y_{1(n+1)}}{\partial y_{2(n)}} \\ \frac{\partial y_{2(n+1)}}{\partial x_{1(n)}} & \frac{\partial y_{2(n+1)}}{\partial x_{2(n)}} & \frac{\partial y_{2(n+1)}}{\partial y_{1(n)}} & \frac{\partial y_{2(n+1)}}{\partial y_{2(n)}} \end{pmatrix}. \quad (3.62)$$

Destas 16 derivadas parciais, devemos observar o termo de acoplamento do mapa em $\sin x_{1(n+1)}$ na expressão (3.58), e $\sin x_{2(n+1)}$ na expressão (3.59). Estas expressões ficarão:

$$y_{1(n+1)} = L_{11}y_{1(n)} + L_{12}y_{2(n)} + \frac{f_0}{\sqrt{2}} \sin (M_{11}y_{1(n)} + M_{12}y_{2(n)} + x_{1(n)}), \quad (3.63)$$

$$y_{2(n+1)} = L_{21}y_{1(n)} + L_{22}y_{2(n)} + f_0 \sin (M_{21}y_{1(n)} + M_{22}y_{2(n)} + x_{2(n)}). \quad (3.64)$$

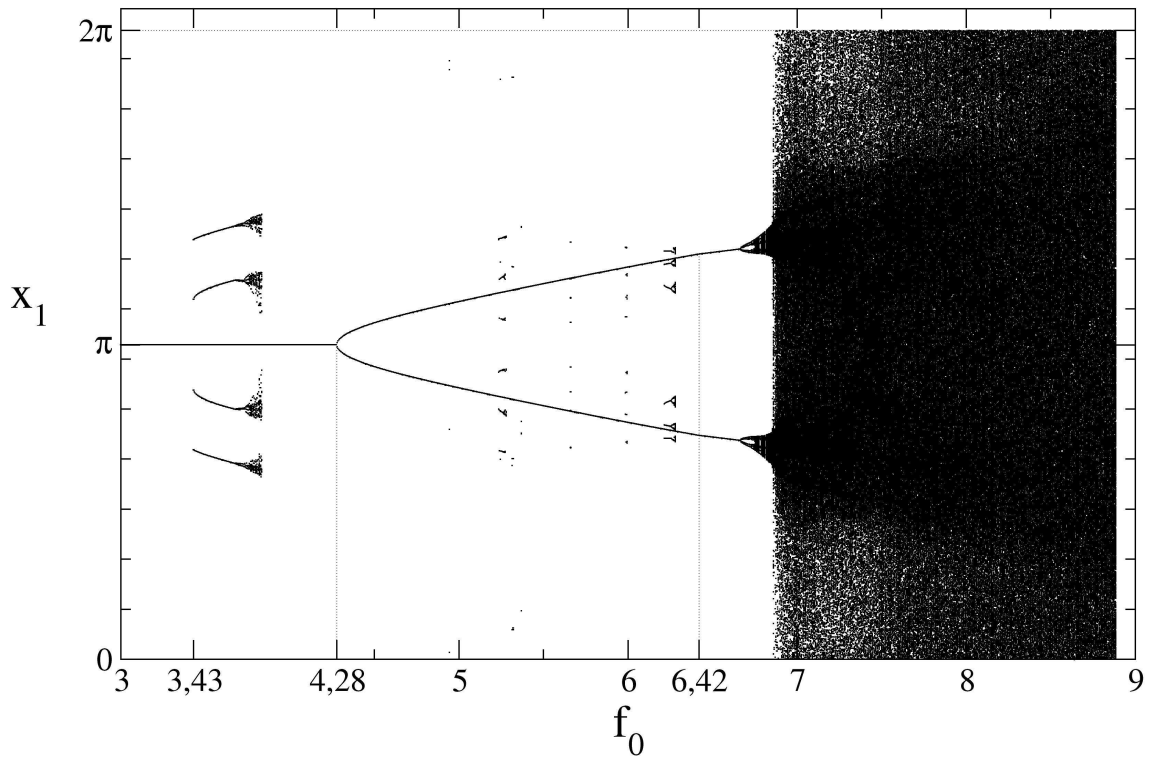
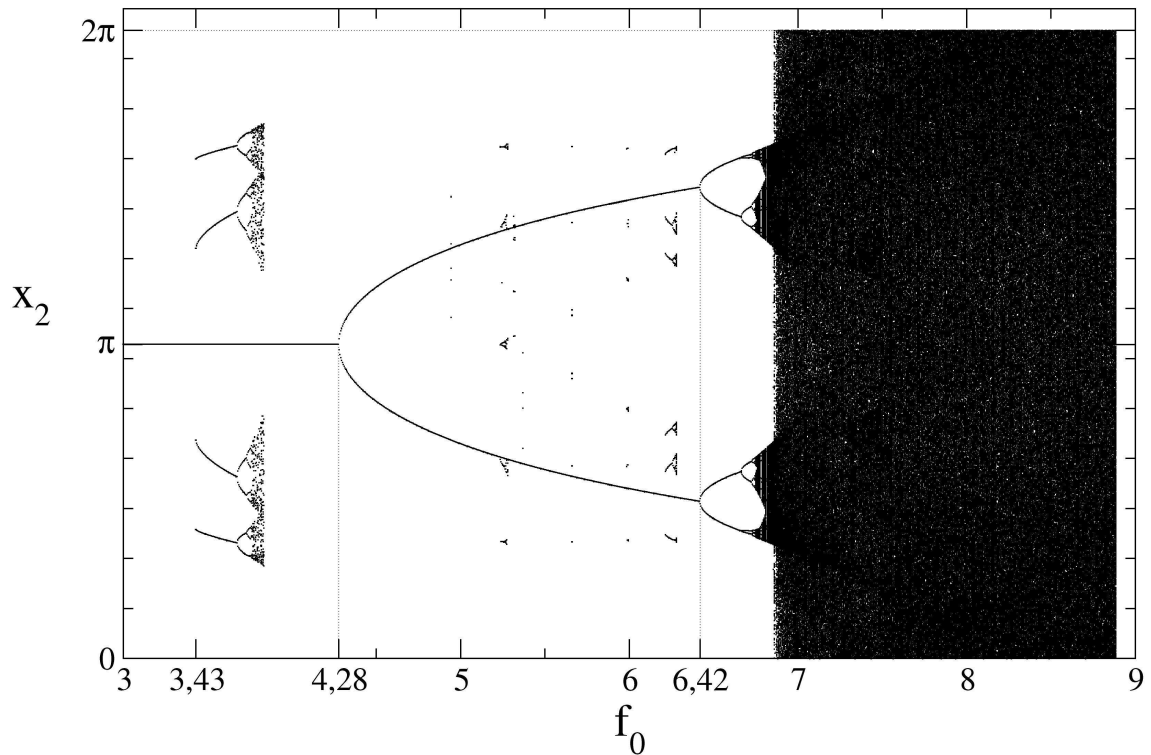
Fazendo as derivadas, obtemos então a matriz Jacobiana do MRDP:

$$\mathbf{DG} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & M_{11} & M_{12} \\ 0 & 1 & M_{21} & M_{22} \\ \frac{f_0}{\sqrt{2}} \cos x_{1(n+1)} & 0 & L_{11} + M_{11} \frac{f_0}{\sqrt{2}} \cos x_{1(n+1)} & L_{12} + M_{12} \frac{f_0}{\sqrt{2}} \cos x_{1(n+1)} \\ 0 & f_0 \cos x_{2(n+1)} & L_{21} + M_{21} f_0 \cos x_{2(n+1)} & L_{22} + M_{22} f_0 \cos x_{2(n+1)} \end{pmatrix}. \quad (3.65)$$

3.5 Diagramas de Bifurcações

Para uma visão geral da dinâmica do RDP, estudamos seu comportamento através dos “*Diagramas de Bifurcações*” do MRDP. Nesses diagramas, podemos visualizar as órbitas periódicas estáveis e a seqüência de bifurcações, conforme o parâmetro de controle é incrementado. Obtemos os diagramas de bifurcações com o auxílio do computador, para o cálculo e a armazenagem dos dados. Neste processo, para cada parâmetro f_0 , foram selecionados aleatoriamente 250 condições iniciais para $x_{1(0)}$ e $x_{2(0)}$, e com valores iniciais de $y_{1(0)} = 0$ e $y_{2(0)} = 0$. Para cada condição inicial iteramos o mapa por um tempo $n = 6000$, para eliminar o transiente³, sem armazenagem de dados neste intervalo. Após o transiente, iteramos mais 10 vezes, e destas iterações armazenamos os dados

³Queremos que a dinâmica do sistema seja atraída para uma órbita periódica estável ou um atrator.

Figura 3.2: Diagrama de bifurcação $x_1 \times f_0$.Figura 3.3: Diagrama de bifurcação $x_2 \times f_0$.

necessários $(f_0, x_1, x_2, y_1, y_2)$. Iniciamos o processo com o parâmetro $f_{0(\text{inicial})} = 3$, e finalizamos em $f_{0(\text{final})} = 8.9$, incrementando f_0 com passo de 0.005.

Como o MRDP é 4-dimensional, podemos ter 4 versões de diagramas: $x_1 \times f_0$, $x_2 \times f_0$, $y_1 \times f_0$ e $y_2 \times f_0$. Apesar destes diagramas apresentarem esboços das órbitas diferenciadas entre si,

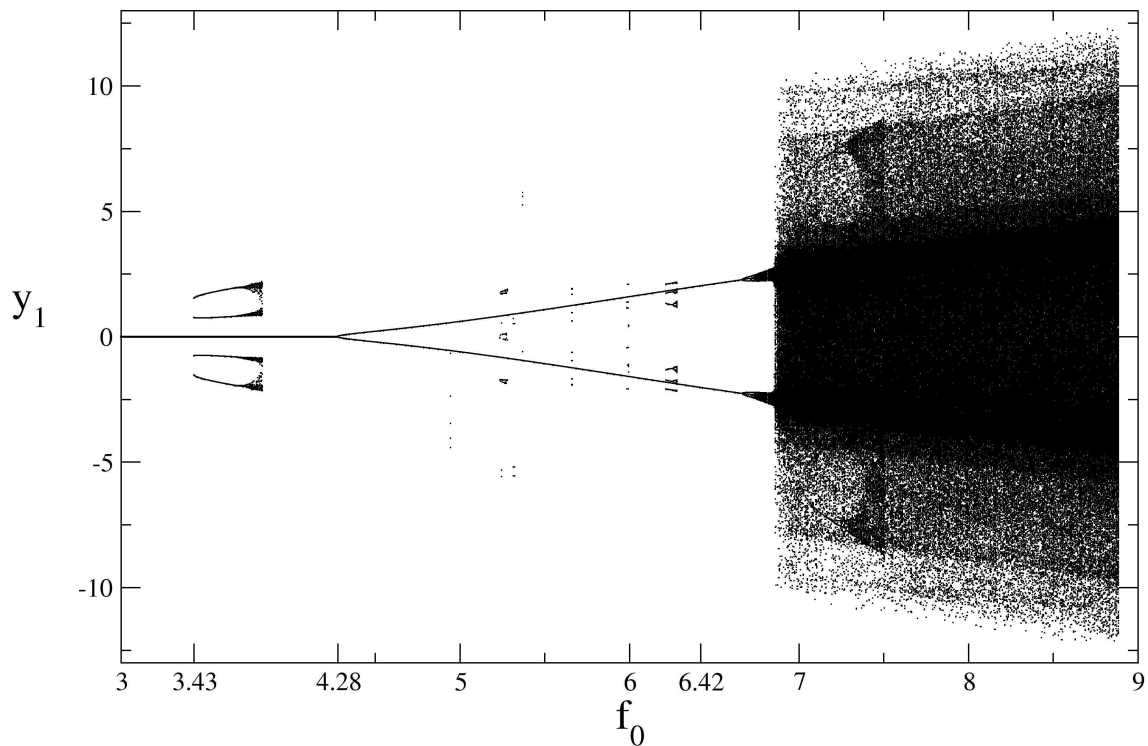


Figura 3.4: Diagrama de bifurcação $y_1 \times f_0$.

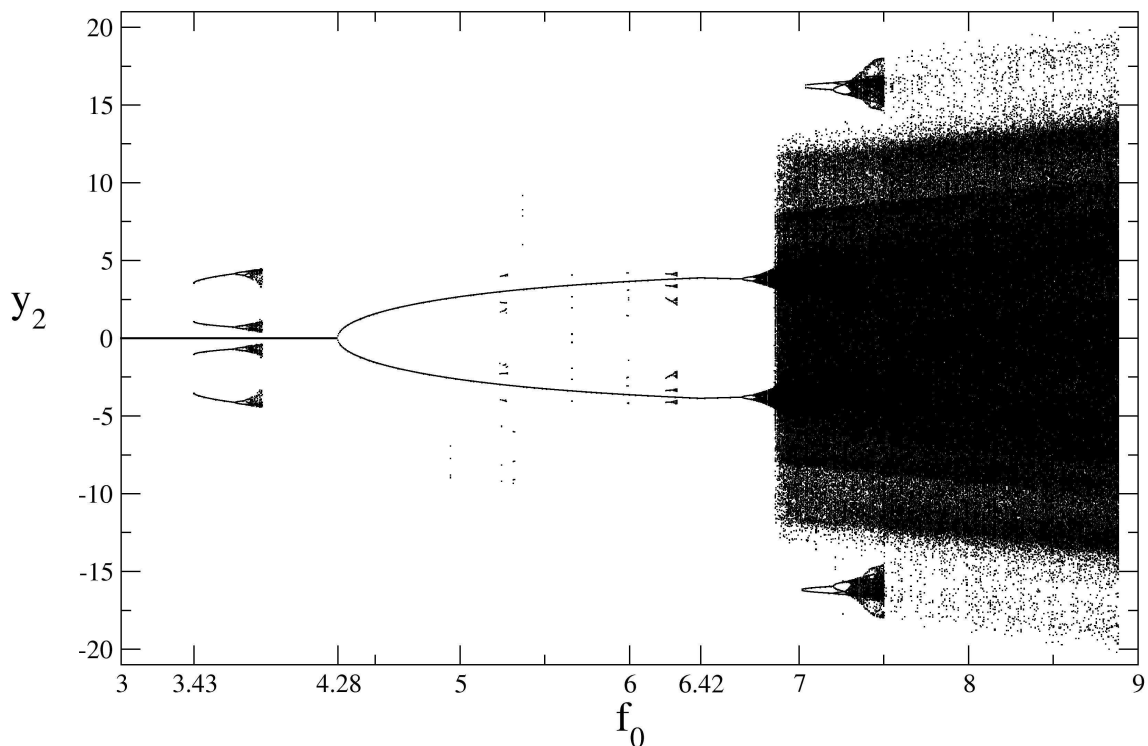


Figura 3.5: Diagrama de bifurcação $y_2 \times f_0$.

a dinâmica é a mesma, ou seja, as mudanças de comportamento que o RDP apresenta podem ser identificadas nos quatro diagramas, com os mesmos valores de parâmetros. Vemos estes diagramas nas Figuras (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5).

Observa-se nos diagramas que tanto x_1 como x_2 estão limitados no sub-espço \mathcal{S}^1 , isto é,

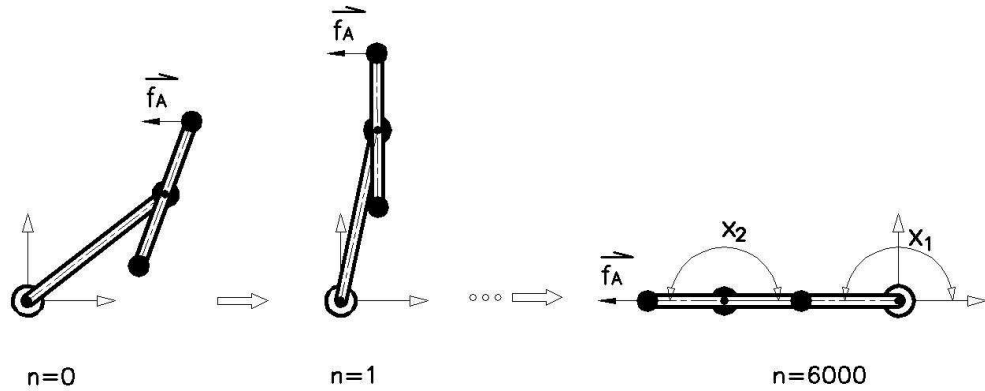


Figura 3.6: Seqüência de iteradas com $|\vec{f}_A| < 4,28$ (antes da 1ª bifurcação).

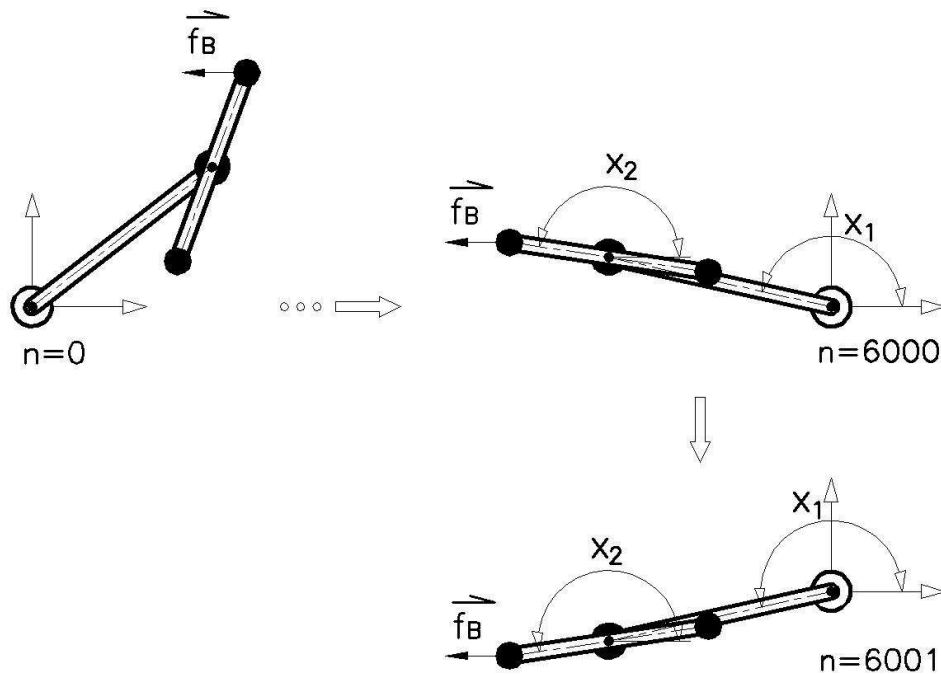


Figura 3.7: Seqüência de iteradas com $4,28 < |\vec{f}_B| < 6,42$ (após a 1ª bifurcação).

$0 \leq x_{1,2} < 2\pi$. Analisando os diagramas, vemos que x_1 e x_2 permanecem estacionários em π até o parâmetro $f_0 \approx 4,28$ ⁴, quando sofrem a primeira bifurcação, onde demonstraremos tratar-se de uma *bifurcação de duplicação de período*. Vemos nas Figuras (3.6) e (3.7) dois exemplos da dinâmica do RDP que representam estas fases. Na Figura 3.6, com o parâmetro f_0 inferior ao valor 4,28, partindo de uma condição inicial aleatória nas posições x_1 e x_2 , observa-se que, após um tempo de transiente, tanto x_1 quanto x_2 permanecerão estacionários no ângulo de π (180 graus), por um tempo infinito. Já na Figura (3.7), com f_0 entre 4,28 a 6,42, após um tempo de transiente, as hastes alternarão as posições em torno de π , ora $x_1 = (\pi - \Delta x_1)$ e $x_2 = (\pi - \Delta x_2)$, ora $x_1 = (\pi + \Delta x_1)$ e $x_2 = (\pi + \Delta x_2)$,

⁴Valores descritos nas análises dos diagramas foram obtidos diretamente dos gráficos, ampliando-se a escala da projeção.

onde Δx_1 e Δx_2 são as diferenças das aberturas de x_1 e x_2 em torno de π .

Vemos na seqüência, em $f_0 \approx 6,42$, uma segunda bifurcação, *forquilha* para o diagrama da Figura (3.3), e *transcrítica* para os diagramas das Figuras (3.2), (3.4) e (3.5), também serão demonstradas estas bifurcações. Logo após temos bifurcações de duplicação de período, que culminam numa *cascata de duplicação de período*, e em $f_0 \approx 6,75$ ocasionam o início do “*caos*”, onde identificamos as duas bandas do atrator caótico. Na primeira bifurcação de duplicação de período, em $f_0 \approx 4,28$, criou-se duas faixas de estabilidades, $(0 < x_{1,2} < \pi)$ e $(\pi < x_{1,2} < 2\pi)$, que podem ser identificadas pela Figura (3.7). Observa-se que as iterações, para valores de x_1 e x_2 , alternam-se entre as duas faixas. Na região caótica, observamos que as iterações continuam nesta alternância, o que leva à formação das duas bandas caóticas. Em $f_0 \approx 6,85$ vemos que as duas bandas subitamente se fundem, provocado pelo surgimento da “*crise*”.

Além do ramo principal, verifica-se nos diagramas, órbitas periódicas que nascem repentinamente, bifurcam em cascata de duplicação de período, tornam-se caóticas, entram em crise (colisão do atrator caótico com uma órbita periódica instável) e desaparecem repentinamente. Como exemplo, entre $f_0 \approx 3,43$ a $f_0 \approx 3,84$, vemos órbitas periódicas de período-4, que nascem de bifurcações sela-nó (Seção 2.3.5). Estas órbitas são oriundas da multiestabilidade que o MRDP apresenta, pois, para um sistema de alta dimensionalidade como o MRDP, podemos ter a coexistência de múltiplos atratores, e como geramos os diagramas de bifurcações usando muitas condições iniciais (250 condições iniciais aleatórias), certas condições iniciais são atraídas por estes atratores, onde órbitas periódicas estáveis nascem via bifurcação sela-nó. Estes atratores são destruídos em razão da “*crise*” (discutiremos sobre crise nas próximas seções). Verificamos a coexistência de outras órbitas periódicas que nascem em função desta multiestabilidade, mas com pequeno domínio nos diagramas de bifurcações (apresentam-se como aglomerados de pontos alinhados).

3.6 Pontos Fixos do MRDP

Vamos deduzir as expressões necessárias para obtermos os pontos fixos, ou órbitas periódicas de período-1. O ponto fixo no MRDP é definido por:

$$x_{1(n+1)} = x_{1(n)} = x_1^*,$$

$$x_{2(n+1)} = x_{2(n)} = x_2^*,$$

$$y_{1(n+1)} = y_{1(n)} = y_1^*,$$

$$y_{2(n+1)} = y_{2(n)} = y_2^*.$$

Aplicando no MRDP, na forma matricial, obtemos:

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{X}^* - 2\pi \mathbf{N}, \quad (3.66)$$

$$\mathbf{Y}^* = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{G}(\mathbf{X}^*), \quad (3.67)$$

onde :

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix},$$

é o vetor número de rotações da *haste1* e da *haste2*, respectivamente, onde $n_{1,2} \in \mathbb{Z}$. Acrescentamos este vetor para termos um múltiplo de 2π , que x_1^* e x_2^* estão incrementados, antes de serem colocados no intervalo $[0, 2\pi[$. Da expressão (3.66), obtemos:

$$\mathbf{Y}^* = 2\pi\mathbf{M}^{-1}.\mathbf{N}. \quad (3.68)$$

Calculando a matriz inversa de \mathbf{M} , teremos a expressão para y_1^* e y_2^* :

$$\begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{pmatrix} = 2\pi \begin{pmatrix} 2,376023935790 & -0,724899619371 \\ -0,724899619371 & 1,651124316420 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}. \quad (3.69)$$

Da expressão (3.67), temos:

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}^*) = (\mathbf{I}_2 - \mathbf{L}).\mathbf{Y}^*, \quad (3.70)$$

inserindo as expressões (3.47) e (3.69) na expressão (3.70), teremos:

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}^*) = -\mathbf{A}_\nu\mathbf{M}\mathbf{Y}^* = -2\pi\mathbf{A}_\nu\mathbf{N}. \quad (3.71)$$

A matriz \mathbf{A}_ν ficou definida como:

$$\mathbf{A}_\nu = \begin{pmatrix} -(\nu_1 + \nu_2) & \nu_2 \\ \nu_2 & -\nu_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{pois : } \nu_1 = \nu_2 = 1), \quad (3.72)$$

chegamos então à expressão para x_1^* e x_2^* :

$$\begin{pmatrix} \text{sen } x_1^* \\ \text{sen } x_2^* \end{pmatrix} = \frac{2\pi}{f_0} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix}. \quad (3.73)$$

como: $|\text{sen } x_{1,2}| \leq 1$, temos então que:

$$|2n_1 - n_2| \leq \frac{f_0}{2\pi\sqrt{2}}, \quad (3.74)$$

$$|n_2 - n_1| \leq \frac{f_0}{2\pi}. \quad (3.75)$$

Portanto n_1 e n_2 devem satisfazer às expressões (3.74) e (3.75). Analisando as expressões dos pontos fixos, observamos:

- Da expressão (3.69), vemos que as soluções para y_1^* e y_2^* são únicas e dependem diretamente de n_1 e n_2 , respectivamente.
- Da expressão (3.73), x_1^* e x_2^* não terão soluções únicas pois:

$$\text{sen } (\alpha) = \text{sen } (\pi - \alpha),$$

$$\text{sen } (\pi + \alpha) = \text{sen } (2\pi - \alpha) = -\text{sen } (\alpha),$$

para $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$.

- Das expressões (3.74) e (3.75), como n_1 e n_2 são números inteiros, as soluções restringem f_0 em intervalos com múltiplos de $2\pi\sqrt{2}$ ou 2π .

Pontos fixos para : $0 < f_0 < 2\pi$ ⁵

$$\begin{aligned} |2n_1 - n_2| < \frac{1}{\sqrt{2}} &\Rightarrow |2n_1 - n_2| = 0, \\ |n_2 - n_1| < 1 &\Rightarrow |n_2 - n_1| = 0, \end{aligned}$$

lembrando que n_1 e n_2 são números inteiros. Solução : $(n_1 = 0 ; n_2 = 0)$

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{n}_2 = \mathbf{0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \arcsen(0) \\ x_2^* = \arcsen(0) \\ y_1^* = 0 \\ y_2^* = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0, \pi \\ x_2^* = 0, \pi \\ y_1^* = 0 \\ y_2^* = 0 \end{cases},$$

portanto :

$$(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)(n_1 = 0 ; n_2 = 0) = \begin{cases} (0; 0; 0; 0) \\ (0; \pi; 0; 0) \\ (\pi; 0; 0; 0) \\ (\pi; \pi; 0; 0) \end{cases}. \quad (3.76)$$

Pontos fixos para : $2\pi \leq f_0 < 2\pi\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} |2n_1 - n_2| < 1 &\Rightarrow |2n_1 - n_2| = 0, \\ |n_2 - n_1| < \sqrt{2} &\Rightarrow |n_2 - n_1| = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}, \end{aligned}$$

Soluções : $(n_1 = 0 ; n_2 = 0)$ ⁶, $(n_1 = 1 ; n_2 = 2)$, $(n_1 = -1 ; n_2 = -2)$.

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 = \mathbf{1} \\ \mathbf{n}_2 = \mathbf{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \arcsen(0) \\ x_2^* = \arcsen\left(\frac{2\pi}{f_0}\right) \\ y_1^* = 5,819641402 \\ y_2^* = 16,19396145 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0, \pi \\ x_2^* = \arcsen\left(\frac{2\pi}{f_0}\right), \left(\pi - \arcsen\left(\frac{2\pi}{f_0}\right)\right) \\ y_1^* = 5,819641402 \\ y_2^* = 16,19396145 \end{cases},$$

⁵Como $f_0 < 2\pi$, o sinal de “menor ou igual” das expressões (3.74) e (3.75) foram trocados por “menor”.

⁶ $(n_1 = 0 ; n_2 = 0)$ será solução para qualquer intervalo, com $f_0 > 0$.

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 = -1 \\ \mathbf{n}_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \arcsen(0) \\ x_2^* = \arcsen\left(\frac{-2\pi}{f_0}\right) \\ y_1^* = -5,819641402 \\ y_2^* = -16,19396145 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = 0, \pi \\ x_2^* = -\arcsen\left(\frac{2\pi}{f_0}\right), \left(\pi + \arcsen\left(\frac{2\pi}{f_0}\right)\right) \\ y_1^* = -5,819641402 \\ y_2^* = -16,19396145 \end{cases},$$

teremos então:

$$(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)(n_1 = 1; n_2 = 2) = \begin{cases} [0; \arcsen\left(\frac{2\pi}{f_0}\right); 5,819641402; 16,19396145] \\ [0; \left(\pi - \arcsen\left(\frac{2\pi}{f_0}\right)\right); 5,819641402; 16,19396145] \\ [\pi; \arcsen\left(\frac{2\pi}{f_0}\right); 5,819641402; 16,19396145] \\ [\pi; \left(\pi - \arcsen\left(\frac{2\pi}{f_0}\right)\right); 5,819641402; 16,19396145] \end{cases},$$

$$(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)(n_1 = -1; n_2 = -2) = \begin{cases} [0; -\arcsen\left(\frac{2\pi}{f_0}\right); -5,819641402; -16,19396145] \\ [0; \left(\pi + \arcsen\left(\frac{2\pi}{f_0}\right)\right); -5,819641402; -16,19396145] \\ [\pi; -\arcsen\left(\frac{2\pi}{f_0}\right); -5,819641402; -16,19396145] \\ [\pi; \left(\pi + \arcsen\left(\frac{2\pi}{f_0}\right)\right); -5,819641402; -16,19396145] \end{cases}.$$

Pontos fixos para : $2\pi\sqrt{2} \leq f_0 < 4\pi$

$$|2n_1 - n_2| < \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad |2n_1 - n_2| = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},$$

$$|n_2 - n_1| < 2 \quad \Rightarrow \quad |n_2 - n_1| = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases},$$

$$\text{Soluções:} \quad \begin{cases} (n_1 = 0; n_2 = 0) & (n_1 = 1; n_2 = 2) & (n_1 = -1; n_2 = -2) \\ (n_1 = 0; n_2 = 1) & (n_1 = 1; n_2 = 1) & (n_1 = 2; n_2 = 3) \\ (n_1 = 0; n_2 = -1) & (n_1 = -1; n_2 = -1) & (n_1 = -2; n_2 = -3) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 = \mathbf{0} \\ \mathbf{n}_2 = \pm 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \arcsen\left(\mp \frac{2\pi\sqrt{2}}{f_0}\right) \\ x_2^* = \arcsen\left(\pm \frac{2\pi}{f_0}\right) \\ y_1^* = \mp 4,55678639 \\ y_2^* = \pm 10,37432004 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^* = \mp \arcsen\left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{f_0}\right), \left(\pi \pm \arcsen\left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{f_0}\right)\right) \\ x_2^* = \pm \arcsen\left(\frac{2\pi}{f_0}\right), \left(\pi \mp \arcsen\left(\frac{2\pi}{f_0}\right)\right) \\ y_1^* = \mp 4,55678639 \\ y_2^* = \pm 10,37432004 \end{cases},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}_1 = \pm 1 \\ \mathbf{n}_2 = \pm 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^* = \arcsen\left(\pm \frac{2\pi\sqrt{2}}{f_0}\right) \\ x_2^* = \arcsen(0) \\ y_1^* = \pm 10,37432004 \\ y_2^* = \pm 5,819641402 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^* = \pm \arcsen\left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{f_0}\right), \quad \left(\pi \mp \arcsen\left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{f_0}\right)\right) \\ x_2^* = 0, \pi \\ y_1^* = \pm 10,37432004 \\ y_2^* = \pm 5,819641402 \end{array} \right\},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{n}_1 = \pm 2 \\ \mathbf{n}_2 = \pm 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^* = \arcsen\left(\pm \frac{2\pi\sqrt{2}}{f_0}\right) \\ x_2^* = \arcsen\left(\pm \frac{2\pi}{f_0}\right) \\ y_1^* = \pm 16,19396145 \\ y_2^* = \pm 22,01360285 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1^* = \pm \arcsen\left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{f_0}\right), \quad \left(\pi \mp \arcsen\left(\frac{2\pi\sqrt{2}}{f_0}\right)\right) \\ x_2^* = \pm \arcsen\left(\frac{2\pi}{f_0}\right), \quad \left(\pi \mp \arcsen\left(\frac{2\pi}{f_0}\right)\right) \\ y_1^* = \pm 16,19396145 \\ y_2^* = \pm 22,01360285 \end{array} \right\}.$$

Segue-se a mesma análise para intervalos superiores.

Observando os diagramas de bifurcações das Figuras (3.2) e (3.3), vemos que a dinâmica do RDP fica restrita no intervalo $0 < f_0 < 2\pi\sqrt{2}$, estudaremos então o RDP neste intervalo. Para $n_1 = 0$ e $n_2 = 0$, não há restrição de intervalo para f_0 . No intervalo $2\pi < f_0 < 2\pi\sqrt{2}$, temos também como solução $n_1 = \pm 1$ e $n_2 = \pm 2$. Para este par de rotações, temos como solução em \mathbf{Y} :

$$\left(\begin{array}{c} y_1^* \\ y_2^* \end{array} \right)_{(n_1=\pm 1; n_2=\pm 2)} = \left(\begin{array}{c} \pm 5,81964140 \\ \pm 16,19396145 \end{array} \right). \quad (3.77)$$

Valores de y_1 e y_2 próximos dos expostos em (3.77), somente são verificados para f_0 após a crise (em torno de 6,85). Ocorre que, na geração dos dados para os diagramas de bifurcações, utilizamos como condições iniciais, $x_{1(0)}$ e $x_{2(0)}$ escolhidas aleatoriamente, e $y_{1(0)} = 0$ e $y_{2(0)} = 0$. Para estas condições iniciais, f_0 não consegue acelerar as hastes para valores de y_1 e y_2 próximos de (3.77). Para obtermos nos diagramas as órbitas referentes a $n_1 = \pm 1$ e $n_2 = \pm 2$, deveríamos ter como condições iniciais de $y_{1(0)}$ e $y_{2(0)}$ valores superiores, em módulo, aos dados em (3.77). Como optamos em fixar as condições iniciais em $y_{1(0)} = 0$ e $y_{2(0)} = 0$, podemos fixar o vetor \mathbf{N} para :

$$\mathbf{N} = \left(\begin{array}{c} n_1 \\ n_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right). \quad (3.78)$$

3.7 Órbitas Periódicas do MRDP

Queremos agora obter expressões que possibilitem encontrar as órbitas periódicas do MRDP de período qualquer (órbitas de período-P). Para isto, vamos deduzir expressões referentes às órbitas periódicas de período-1 (já obtidas), depois de período-2, e assim por diante, até podermos verificar uma possível coerência entre o período e as expressões encontradas. Neste estudo, não iremos considerar o vetor \mathbf{N} , isto é, $n_1 = 0$ e $n_2 = 0$. Vamos utilizar, à princípio, expressões em formato matricial.

Órbitas de Período-1

$$\mathbf{X}^* = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{X}^* , \quad (3.79)$$

$$\mathbf{Y}^* = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{G}(\mathbf{X}^*) . \quad (3.80)$$

Obtemos então, para **Período-1**⁷:

$$\mathbf{Y}^* = \mathbf{0} , \quad (3.81)$$

$$(\mathbf{L} - \mathbf{I}_2) \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{G}_1 = \mathbf{0} , \quad (3.82)$$

onde:

$$\mathbf{G}_1 = f_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } v_{(1)1} \\ \text{sen } v_{(1)2} \end{pmatrix} , \quad (3.83)$$

$$\mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} v_{(1)1} \\ v_{(1)2} \end{pmatrix} = \mathbf{X}^* . \quad (3.84)$$

Órbitas de Período-2

$$\mathbf{X}_{(1)} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{X}^* , \quad (3.85)$$

$$\mathbf{Y}_{(1)} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{G}(\mathbf{X}_{(1)}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{G}(\mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{X}^*) , \quad (3.86)$$

$$\mathbf{X}_{(2)} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}_{(1)} + \mathbf{X}_{(1)} = \mathbf{X}^* , \quad (3.87)$$

$$\mathbf{Y}_{(2)} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Y}_{(1)} + \mathbf{G}(\mathbf{X}_{(2)}) = \mathbf{L} \cdot \mathbf{Y}_{(1)} + \mathbf{G}(\mathbf{X}^*) = \mathbf{Y}^* , \quad (3.88)$$

Obtemos então, para **Período-2**:

$$(\mathbf{L} + \mathbf{I}_2) \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{G}_2 = \mathbf{0} , \quad (3.89)$$

$$(\mathbf{L}^2 - \mathbf{I}_2) \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{L} \cdot \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_1 = \mathbf{0} , \quad (3.90)$$

onde:

$$\mathbf{G}_2 = f_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } v_{(2)1} \\ \text{sen } v_{(2)2} \end{pmatrix} , \quad (3.91)$$

$$\mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} v_{(2)1} \\ v_{(2)2} \end{pmatrix} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{X}^* . \quad (3.92)$$

⁷Observe que as expressões para período-1 simplificaram com $n_1 = 0$ e $n_2 = 0$

Órbitas de Período-3

$$\mathbf{X}_{(2)} = \mathbf{M}.\mathbf{Y}_{(1)} + \mathbf{X}_{(1)} = \mathbf{M}.\mathbf{(L + I_2)}.Y^* + \mathbf{X}^* + \mathbf{M}.\mathbf{G}_2 , \quad (3.93)$$

$$\mathbf{Y}_{(2)} = \mathbf{L}.\mathbf{Y}_{(1)} + \mathbf{G}(\mathbf{X}_{(2)}) = \mathbf{L}^2.Y^* + \mathbf{L}.\mathbf{G}_2 + \mathbf{G}[\mathbf{M}.\mathbf{(L + I_2)}.Y^* + \mathbf{X}^* + \mathbf{M}.\mathbf{G}_2] , \quad (3.94)$$

$$\mathbf{X}_{(3)} = \mathbf{M}.\mathbf{Y}_{(2)} + \mathbf{X}_{(2)} = \mathbf{X}^* , \quad (3.95)$$

$$\mathbf{Y}_{(3)} = \mathbf{L}.\mathbf{Y}_{(2)} + \mathbf{G}(\mathbf{X}_{(3)}) = \mathbf{L}.\mathbf{Y}_{(2)} + \mathbf{G}(\mathbf{X}^*) = \mathbf{Y}^* . \quad (3.96)$$

Obtemos então, para **Período-3**:

$$(\mathbf{L}^2 + \mathbf{L} + \mathbf{I}_2).Y^* + (\mathbf{L} + \mathbf{I}_2).\mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_3 = \mathbf{0} , \quad (3.97)$$

$$(\mathbf{L}^3 - \mathbf{I}_2).Y^* + \mathbf{L}^2.\mathbf{G}_2 + \mathbf{L}.\mathbf{G}_3 + \mathbf{G}_1 = \mathbf{0} , \quad (3.98)$$

onde:

$$\mathbf{G}_3 = f_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } v_{(3)1} \\ \text{sen } v_{(3)2} \end{pmatrix} , \quad (3.99)$$

$$\mathbf{V}_3 = \begin{pmatrix} v_{(3)1} \\ v_{(3)2} \end{pmatrix} = \mathbf{M}.\mathbf{G}_2 + (\mathbf{L} + \mathbf{I}_2).\mathbf{M}.\mathbf{Y}^* + \mathbf{X}^* . \quad (3.100)$$

Órbitas de Período-4

$$(\mathbf{L}^3 + \mathbf{L}^2 + \mathbf{L} + \mathbf{I}_2).Y^* + (\mathbf{L}^2 + \mathbf{L} + \mathbf{I}_2).\mathbf{G}_2 + (\mathbf{L} + \mathbf{I}_2).\mathbf{G}_3 + \mathbf{G}_4 = \mathbf{0} , \quad (3.101)$$

$$(\mathbf{L}^4 - \mathbf{I}_2).Y^* + \mathbf{L}^3.\mathbf{G}_2 + \mathbf{L}^2.\mathbf{G}_3 + \mathbf{L}.\mathbf{G}_4 + \mathbf{G}_1 = \mathbf{0} , \quad (3.102)$$

onde:

$$\mathbf{G}_4 = f_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } v_{(4)1} \\ \text{sen } v_{(4)2} \end{pmatrix} , \quad (3.103)$$

$$\mathbf{V}_4 = \begin{pmatrix} v_{(4)1} \\ v_{(4)2} \end{pmatrix} = (\mathbf{L} + \mathbf{I}_2).\mathbf{M}.\mathbf{G}_2 + \mathbf{M}.\mathbf{G}_3 + (\mathbf{L}^2 + \mathbf{L} + \mathbf{I}_2).\mathbf{M}.\mathbf{Y}^* + \mathbf{X}^* . \quad (3.104)$$

Órbitas de Período-5

$$(\mathbf{L}^4 + \mathbf{L}^3 + \mathbf{L}^2 + \mathbf{L} + \mathbf{I}_2).Y^* + (\mathbf{L}^3 + \mathbf{L}^2 + \mathbf{L} + \mathbf{I}_2).\mathbf{G}_2 + (\mathbf{L}^2 + \mathbf{L} + \mathbf{I}_2).\mathbf{G}_3 + (\mathbf{L} + \mathbf{I}_2).\mathbf{G}_4 + \mathbf{G}_5 = \mathbf{0} , \quad (3.105)$$

$$(\mathbf{L}^5 - \mathbf{I}_2).Y^* + \mathbf{L}^4.\mathbf{G}_2 + \mathbf{L}^3.\mathbf{G}_3 + \mathbf{L}^2.\mathbf{G}_4 + \mathbf{L}.\mathbf{G}_5 + \mathbf{G}_1 = \mathbf{0} , \quad (3.106)$$

onde:

$$\mathbf{G}_5 = f_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } v_{(5)1} \\ \text{sen } v_{(5)2} \end{pmatrix} , \quad (3.107)$$

$$\mathbf{V}_5 = \begin{pmatrix} v_{(5)1} \\ v_{(5)2} \end{pmatrix} = (\mathbf{L}^2 + \mathbf{L} + \mathbf{I}_2).\mathbf{M}.\mathbf{G}_2 + (\mathbf{L} + \mathbf{I}_2).\mathbf{M}.\mathbf{G}_3 + \mathbf{M}.\mathbf{G}_4 + (\mathbf{L}^3 + \mathbf{L}^2 + \mathbf{L} + \mathbf{I}_2).\mathbf{M}.\mathbf{Y}^* + \mathbf{X}^* . \quad (3.108)$$

Órbitas de Período-P

Observando os resultados obtidos, vemos que, a partir do período-3, as expressões modificam de maneira padronizada, conforme aumentamos o período. Iniciamos definindo as matrizes:

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}, \quad (3.109)$$

$$\mathbf{Y}^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ y_2^* \end{pmatrix}, \quad (3.110)$$

$$\mathbf{G}_i = f_0 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{sen } v_{(i)1} \\ \text{sen } v_{(i)2} \end{pmatrix} \quad (i=1,2,3,\dots), \quad (3.111)$$

$$\mathbf{V}_i = \begin{pmatrix} v_{(i)1} \\ v_{(i)2} \end{pmatrix}. \quad (3.112)$$

Definimos a matriz \mathbf{V}_i como :

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{X}^*, \quad (3.113)$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{X}^*, \quad (3.114)$$

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{G}_2 + (\mathbf{L} + \mathbf{I}_2) \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{X}^*, \quad (3.115)$$

$$\mathbf{V}_i = \sum_{k=1}^{i-3} \left\{ \left[\left(\sum_{m=1}^{i-k-2} \mathbf{L}^m \right) + \mathbf{I}_2 \right] \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{G}_{(k+1)} \right\} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{G}_{(i-1)} + \left[\left(\sum_{j=1}^{i-2} \mathbf{L}^j \right) + \mathbf{I}_2 \right] \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{X}^*, \quad (3.116)$$

$$(i = 4, 5, 6, \dots) .$$

Por fim, obteremos as órbitas periódicas usando as expressões:

- Para período-1 ($P = 1$) :

$$\mathbf{Y}^* = \mathbf{0}, \quad (3.117)$$

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{0}, \quad (3.118)$$

- Para período-2 ($P = 2$) :

$$(\mathbf{L} + \mathbf{I}_2) \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{G}_2 = \mathbf{0}, \quad (3.119)$$

$$(\mathbf{L}^2 - \mathbf{I}_2) \cdot \mathbf{Y}^* + \mathbf{L} \cdot \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_1 = \mathbf{0}, \quad (3.120)$$

- Para período- P ($P > 2$) :

$$\left[\left(\sum_{i=1}^{P-1} \mathbf{L}^i \right) + \mathbf{I}_2 \right] \cdot \mathbf{Y}^* + \sum_{j=1}^{P-2} \left\{ \left[\left(\sum_{k=1}^{P-j-1} \mathbf{L}^k \right) + \mathbf{I}_2 \right] \cdot \mathbf{G}_{(j+1)} \right\} + \mathbf{G}_P = \mathbf{0} , \quad (3.121)$$

$$(\mathbf{L}^P - \mathbf{I}_2) \cdot \mathbf{Y}^* + \sum_{i=1}^{P-1} [\mathbf{L}^{(P-i)} \cdot \mathbf{G}_{(i+1)}] + \mathbf{G}_1 = \mathbf{0} . \quad (3.122)$$

Obtemos, analiticamente, os pontos fixos ou órbitas periódicas de período-1 na seção-3.6, com $n_1 = 0$ e $n_2 = 0$. Utilizamos, para isto, as expressões (3.117) e (3.118). Órbitas periódicas de período-2 em diante, representadas pelas expressões (3.119) até (3.122), somente são possíveis obtê-las utilizando *métodos numéricos*, onde pretendemos resolver um sistema de quatro equações com quatro incógnitas $(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)$, dado por:

$$\begin{aligned} f(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) &= 0 , \\ g(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) &= 0 , \\ h(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) &= 0 , \\ t(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*) &= 0 . \end{aligned}$$

Pretendemos então encontrar as raízes do problema. Como o sistema de equações envolve equações não lineares, o método mais recomendado para encontrar estas raízes é pelo “*método de Newton-Raphson*”. Outro método recomendado é o “*método de Broyden*”, também conhecido por *método da secante multidimensional* [18], o qual foi utilizado neste trabalho. Este método oferece algumas vantagens em relação ao *método de Newton-Raphson*, principalmente por não necessitar diretamente das derivadas das expressões e por ter uma rápida convergência.

3.8 Estabilidade das Órbitas Periódicas do MRDP

Para calcularmos a estabilidade de uma órbita periódica de período- P , utilizamos a expressão:

$$DG^{(P)} = \prod_{j=0}^{P-1} DG(x_{1(j)}, x_{2(j)}, y_{1(j)}, y_{2(j)}) . \quad (3.123)$$

sendo $DG^{(P)}$ a matriz resultante do produto de P -matrizes Jacobianas avaliadas nos pontos periódicos. Seja ξ_i um dos autovalores desta matriz, onde: $i = (1, 2, 3, 4)$, e $\xi_i \in \mathbb{C}$. A órbita periódica será:

- “*Estável*”: se todos os autovalores têm módulos menores que $\mathbf{1}$,
- “*Instável*”: se um ou mais autovalores têm módulos maiores que $\mathbf{1}$.

Definimos como “ d ” a quantidade de autodireções, então:

- d^s - Quantidade de direções estáveis (associados aos autovalores com módulos menores que 1),
- d^u - Quantidade de direções instáveis (associados aos autovalores com módulos maiores que 1).

Numa matriz 4×4 não simétrica, como é a matriz Jacobiana do MRDP descrita em (3.65), somente é possível obter os autovalores fazendo uso de métodos numéricos, como o “*Método de Hessenberg*” (vide [18]), ou por meio de software matemático, como o “*Maple*”.

Para órbitas de período-1, com $n_1 = 0$ e $n_2 = 0$, conseguimos obter analiticamente os pontos fixos:

$$(x_1^*, x_2^*, y_1^*, y_2^*)_{(período-1)} = \begin{cases} (0; 0; 0; 0) \\ (0; \pi; 0; 0) \\ (\pi; 0; 0; 0) \\ (\pi; \pi; 0; 0) \end{cases}. \quad (3.124)$$

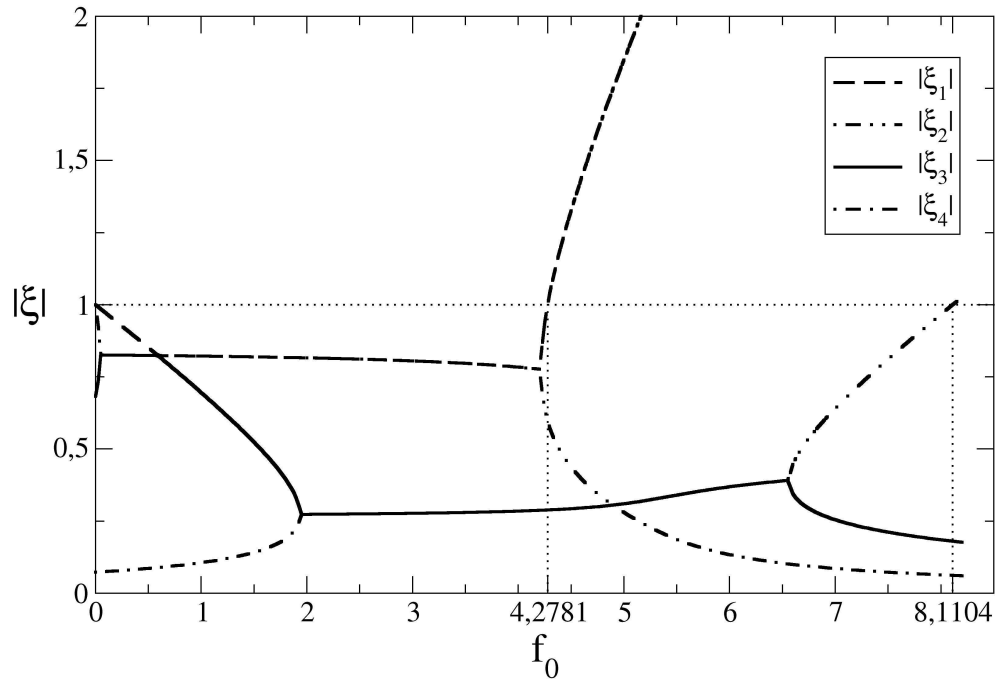


Figura 3.8: Autovalores do ponto fixo $(\pi; \pi; 0; 0)$ com $|\xi_1| \geq |\xi_2| \geq |\xi_3| \geq |\xi_4|$.

Destes pontos fixos, somente o ponto $(\pi; \pi; 0; 0)$ é estável. Na Figura (3.8) vemos como os autovalores do ponto $(\pi; \pi; 0; 0)$ evoluem quando incrementamos o parâmetro f_0 . Vemos que, em $f_0 \approx 4,2781$, o ponto fixo $(\pi; \pi; 0; 0)$ bifurca (um dos autovalores tem módulo igual a 1), e em seguida deixa de ser estável (um autovalor com módulo maior que 1). Em $f_0 \approx 8,1104$, o ponto fixo $(\pi; \pi; 0; 0)$ ganha uma segunda direção instável. Temos então:

- $0 < f_0 < 4,2781 : d^s=4, d^u=0,$
- $4,2781 < f_0 < 8,1104 : d^s=3, d^u=1,$
- $f_0 > 8,1104 : d^s=2, d^u=2.$

3.9 Bifurcações

Na secção 2.3.5 do capítulo 2 vimos que uma bifurcação de uma órbita periódica é classificada pela análise dos autovalores da matriz dada na expressão (3.123), quando o maior autovalor⁸, em módulo, vale um. Analisando os pontos referentes às bifurcações, vemos:

- $f_0 \approx 4,2781$: O autovalor ξ_1 da órbita de período-1, referente ao ponto fixo $(\pi; \pi; 0; 0)$, é: $\xi_1 \approx -1$. Isto significa que temos uma *bifurcação de duplicação de período*, o que pode ser verificado pela Figura (3.7), onde a seqüência de iteradas alternam em torno de $x_{1,2} = \pi$.
- $f_0 \approx 6,4188$: Da órbita de período-2, nos pontos :

$$(x_1 = 2,236116; x_2 = 1,556696; y_1 = 2,025529; y_2 = 3,874401),$$

$$(x_1 = 4,047069; x_2 = 4,698289; y_1 = -2,025529; y_2 = -3,874401).$$

temos: $\xi_1 \approx 1$. Nos diagramas $(x_1 \times f_0)$, $(y_1 \times f_0)$ e $(y_2 \times f_0)$, verificamos que neste ponto temos uma *bifurcação transcritical*, e em $(x_2 \times f_0)$ uma *bifurcação forquilha*. Podemos comprovar esta análise visualizando os diagramas de bifurcação. Na Figura (3.2), vemos que, em x_1 , a órbita, até então estável, é interrompida (torna-se instável), e uma nova órbita estável nasce, o que caracteriza uma bifurcação transcritical. Na Figura (3.3), em x_2 , vemos que a órbita, até então estável, é interrompida, e duas novas órbitas estáveis nascem. Tratam-se de órbitas periódicas de período-2, ou seja, período idêntico ao anterior à bifurcação, o que pode ser verificado iterando os pontos no MRDP, onde o ramo inferior que nasce em $x_2 = 4,698289$ faz par com o ramo inferior que nasce em $x_2 = 1,556696$, e um segundo par de órbitas é formado pelos ramos superiores.

- $f_0 \approx 6,6642$: Temos dois pares de pontos de órbitas de período-2:

$$(x_1 = 2,185354; x_2 = 1,273780; y_1 = 2,266751; y_2 = 3,800807),$$

$$(x_1 = 4,097831; x_2 = 4,415373; y_1 = -2,266751; y_2 = -3,800807).$$

e

$$(x_1 = 2,185354; x_2 = 1,867810; y_1 = 2,266751; y_2 = 3,800807),$$

$$(x_1 = 4,097831; x_2 = 5,009405; y_1 = -2,266751; y_2 = -3,800807).$$

Para ambos os pares, temos : $\xi_1 \approx -1$. Isto implica a ocorrência da *bifurcação de duplicação de período* associada aos pares. Temos então para o primeiro par quatro órbitas de período-4 e para o segundo par também quatro órbitas de período-4.

- Em seguida, teremos a *cascata de bifurcação de duplicação de período*, que culminará no *Caos*.

⁸Vamos considerar os autovalores ordenados pelos seus módulos, com: $|\xi_1| \geq |\xi_2| \geq |\xi_3| \geq |\xi_4|$.

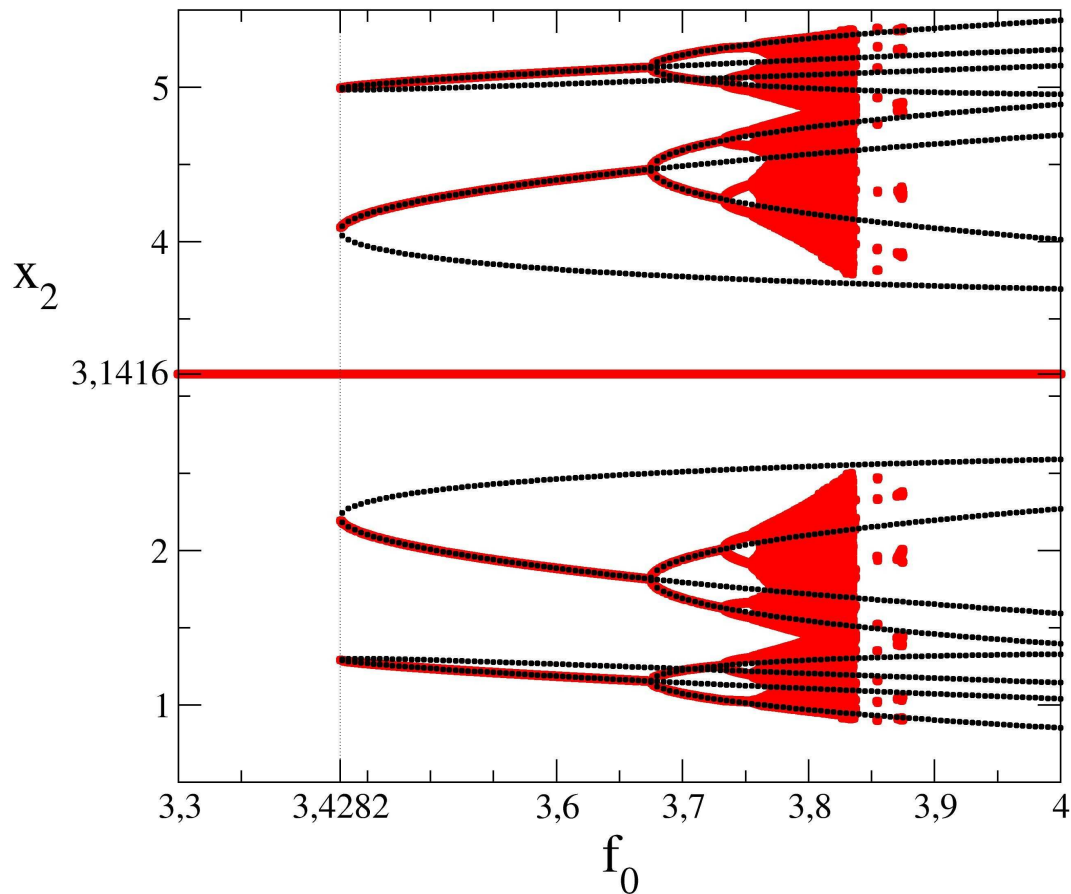


Figura 3.9: Detalhe da bifurcação sela-nó de período-4.

Sobre as órbitas que nascem repentinamente, vemos na Figura (3.9) uma parcela do diagrama de bifurcação $x_2 \times f_0$, em vermelho, sobreposto pela figura das órbitas periódicas de período-4, em preto, obtidas numericamente. As órbitas de período-4 em preto não foram distintas entre estáveis e instáveis, mas podemos verificar que onde ocorrem coincidências nos traçados das órbitas, tratam-se de órbitas estáveis, e onde temos somente as curvas em preto, tratam-se das órbitas instáveis. Visualizamos que em $f_0 \approx 3,4282$, nascem duas órbitas, uma estável e outra instável, temos então uma *bifurcação sela-nó*. Isto é comprovado calculando-se o maior autovalor, em módulo, referente à órbita periódica de período-4, nos pontos:

$$(x_1 = 4,187111; x_2 = 4,991454; y_1 = -0,772526; y_2 = -1,074048),$$

$$(x_1 = 3,582539; x_2 = 4,075532; y_1 = -1,513901; y_2 = -3,518862),$$

$$(x_1 = 2,096074; x_2 = 1,291731; y_1 = 0,772526; y_2 = 1,074048),$$

$$(x_1 = 2,700646; x_2 = 2,207654; y_1 = 1,513901; y_2 = 3,518862).$$

obtemos para esta órbita, nestes pontos: $\xi_1 \approx 1$, o que caracteriza a bifurcação sela-nó.

3.10 Expoentes de Lyapunov a Tempo Infinito

Apresentamos nesta secção os resultados obtidos estudando os *expoentes de Lyapunov a tempo infinito*. Para o MRDP, não é possível calcular os expoentes de Lyapunov analiticamente, fizemos então o uso de métodos numéricos, onde utilizamos o método desenvolvido por *A. Wolf et. al.* [19]. Este método, a princípio, foi desenvolvido para cálculos dos expoentes de Lyapunov para fluxos, mas com as devidas adaptações (foi considerado $\Delta t = 1$) feitas pelo professor Dr. Sérgio R. Lopes, da Universidade Federal do Paraná - UFPR, tornou-se possível calcular os expoentes de Lyapunov para mapas.

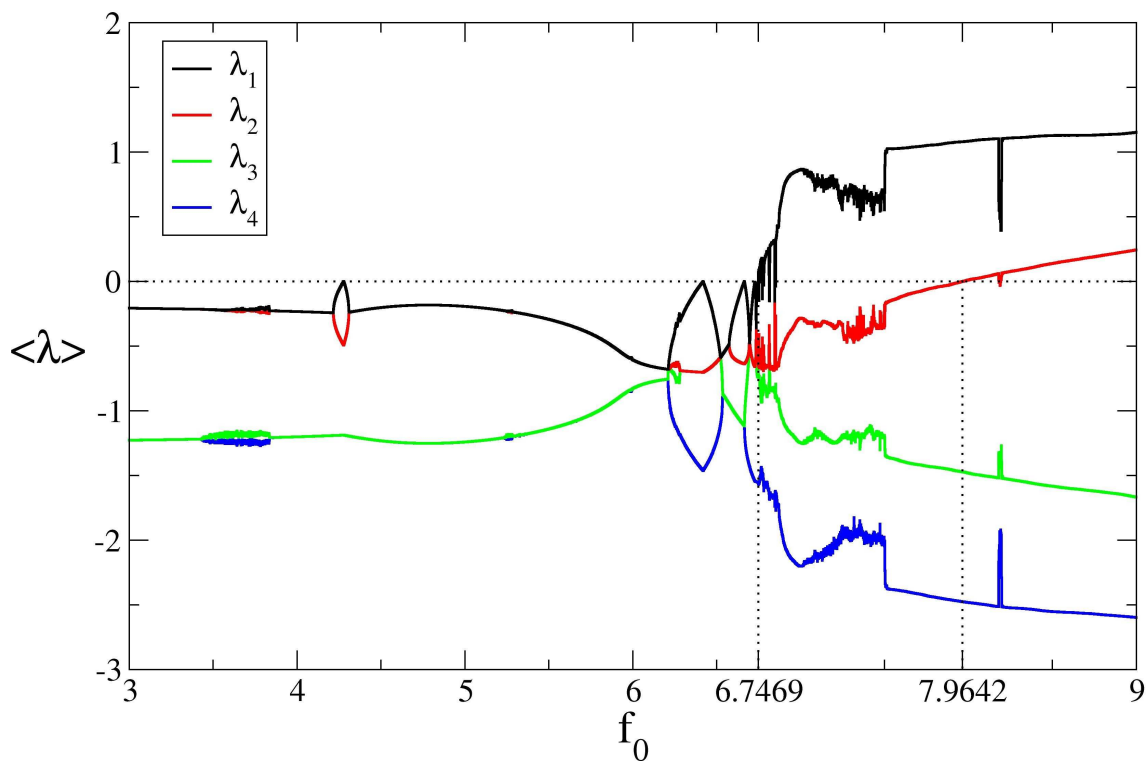


Figura 3.10: Expoentes de Lyapunov a tempo infinito do MRDP com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$.

Na secção 2.6 vimos a expressão (2.23) para o cálculo dos expoentes de Lyapunov de um sistema *N-dimensional*. Observamos na expressão que o tempo tende para o infinito ($n \rightarrow \infty$), onde, no cálculo numérico, usamos como alternativa iterar o mapa por um tempo longo. A Figura (3.10) foi obtida com 250 condições iniciais aleatórias para x_1 e x_2 , com $y_1 = 0$ e $y_2 = 0$, considerando um transiente de 2000 iteradas e calculando os expoentes para o tempo de $n = 50000$. Como resultado final obtivemos a média de cada expoente de Lyapunov, ordenados como se segue: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \lambda_4$. Repetimos este processo para cada valor de f_0 , de $f_{0(inicial)} = 3$ até $f_{0(final)} = 9$, com passo de 0,01. Do gráfico da Figura (3.10), observamos:

- $f_0 \approx 6,7469$: λ_1 torna-se positivo e o sistema apresenta-se caótico. Este parâmetro indica o início do *Caos*,
- $f_0 \approx 7,9642$: λ_2 torna-se positivo, e o sistema apresenta *Hipercaos*.

Definimos então dois parâmetros:

- $f_{0(Caos)} \approx 6,7469$: Parâmetro do “*início do caos*”,
- $f_{0(Hipercaos)} \approx 7,9642$: Parâmetro do “*hipercaos*”.

3.11 Crise

Vemos na Figura (3.9), um exemplo de “*crise de fronteira*”, quando o atrator caótico, oriundo da multiestabilidade que o MRDP apresenta, sofre a colisão com uma órbita instável, que nasceu de uma bifurcação sela-nó, colisão esta que ocorre na fronteira da bacia deste atrator. Observa-se nesta figura, que após a crise, o atrator deixa de existir, característica de uma crise de fronteira.

Analisando os ramos principais dos diagramas de bifurcações, Figuras (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5), vemos que em $f_0 \approx 6,85$ as duas bandas do atrator caótico subitamente se fundem, dando indício da presença de “*crise interior*”. Para encontrar o valor do parâmetro responsável pela crise, de maneira mais afinada, utilizamos o seguinte procedimento:

- Iniciamos com $f_0 = 6,855$, acima do valor aproximado da crise, e iteramos o MRDP,
- Usamos um transiente de 89000 iteradas, e eram consideradas as 1000 iteradas seguintes,
- Deste valor de f_0 , decrescemos com um passo inicial de 10^{-4} , a procura do parâmetro onde as iteradas ficassem restritas ao atrator, ou seja, fora da crise,
- Encontrado este parâmetro provisório, somamos ele com o passo adotado, ou seja, retornamos o parâmetro para a região da crise,
- Recomeçamos novamente a pesquisa, utilizando agora um passo dividido por dez (10^{-5}), até chegarmos ao passo final de 10^{-8} .

Adotamos um tempo de transiente suficiente para assegurar que as iteradas estivessem exclusivamente no atrator, o que nos motivou a escolha de um transiente alto. O valor encontrado do parâmetro responsável pela crise foi:

- $f_{0(Crise)} \approx 6,8542515$: Parâmetro do “*início da crise*”.

Podemos observar os efeitos da crise analisando o espaço de fase, com f_0 fixo. Vemos na Figura (3.11) o espaço de fase $x_1 \times x_2$ para diversos parâmetros f_0 , tendo como base 1000 condições iniciais, tempo de transiente de 79900, e 100 tempos captados, e com o parâmetro f_0 fixado em: a) $f_0 = 6,8542515$; b) $f_0 = 6,8545515$; c) $f_0 = 6,8552515$ e d) $f_0 = 6,8562515$. Em a), com o parâmetro do início da crise, observa-se somente a presença das duas bandas do atrator caótico. De b) até d), dentro da crise, vemos que o espaço de fase é crivado por órbitas não periódicas e que não pertencem ao atrator caótico, e a quantidade destas órbitas aumenta gradativamente conforme aumenta-se o

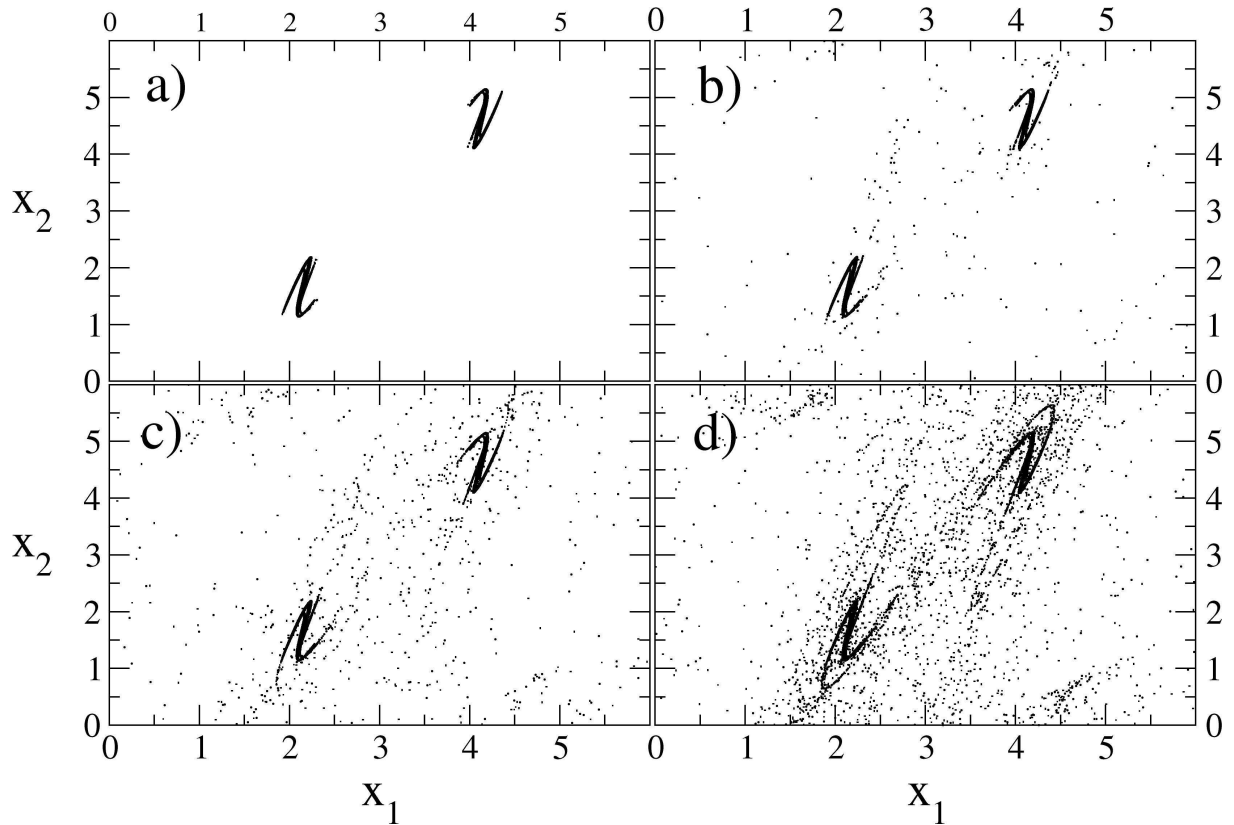


Figura 3.11: Espaço de fase de $x_1 \times x_2$, com: a) $f_0 = 6,8542515$; b) $f_0 = 6,8545515$; c) $f_0 = 6,8552515$; d) $f_0 = 6,8562515$.

parâmetro f_0 na crise. Nota-se que gradualmente o atrator caótico é incorporado por estas órbitas não periódicas, até não podermos mais distingui-lo no espaço de fase⁹.

Na Figura (3.12) vemos as séries temporais da variável x_2 . Estas séries foram rodadas de $n = 0$ até o tempo $n = 1000$, onde utilizamos uma condição inicial pertencente ao atrator caótico. Queremos analisar nestas séries o tempo de permanência do sistema no atrator. Foram analisadas séries para três parâmetros: a) $f_0 = 6,8542515$, b) $f_0 = 6,8572515$ e c) $f_0 = 6,8592515$. Na primeira série, com f_0 do início da crise, podemos verificar que as iteradas alternam entre as duas bandas do atrator caótico em x_2 , com a série exibindo um comportamento caótico único, onde as iteradas alternam exclusivamente entre as duas bandas. Já na segunda série, com f_0 na crise, observa-se que em um dado instante, $n \approx 170$, ocorrem iteradas fora do atrator, com a série caótica sendo interrompida por um “estouro” (“burst”), originando uma nova seqüência caótica, e, em $n \approx 260$, as iteradas retornam ao atrator, voltando também a série caótica anterior ao estouro. Vemos que na terceira série, aumentando o parâmetro na crise, os estouros são mais freqüentes, e observa-se que o intervalo entre os estouros não é fixo. A estes estouros aleatórios denominamos de “intermitência induzida pela crise” ([20], secção 8.3), que é uma característica da “crise interior”.

Nestas intermitências o tempo médio entre os estouros decai exponencialmente ([20], secção 8.3), conforme aumenta-se o parâmetro em relação ao parâmetro crítico da crise, ou seja, o tempo

⁹Existem certas faixas de parâmetros em que as órbitas não periódicas desaparecem, retornando a periodicidade. A estas faixas de parâmetros chamamos de janelas periódicas.

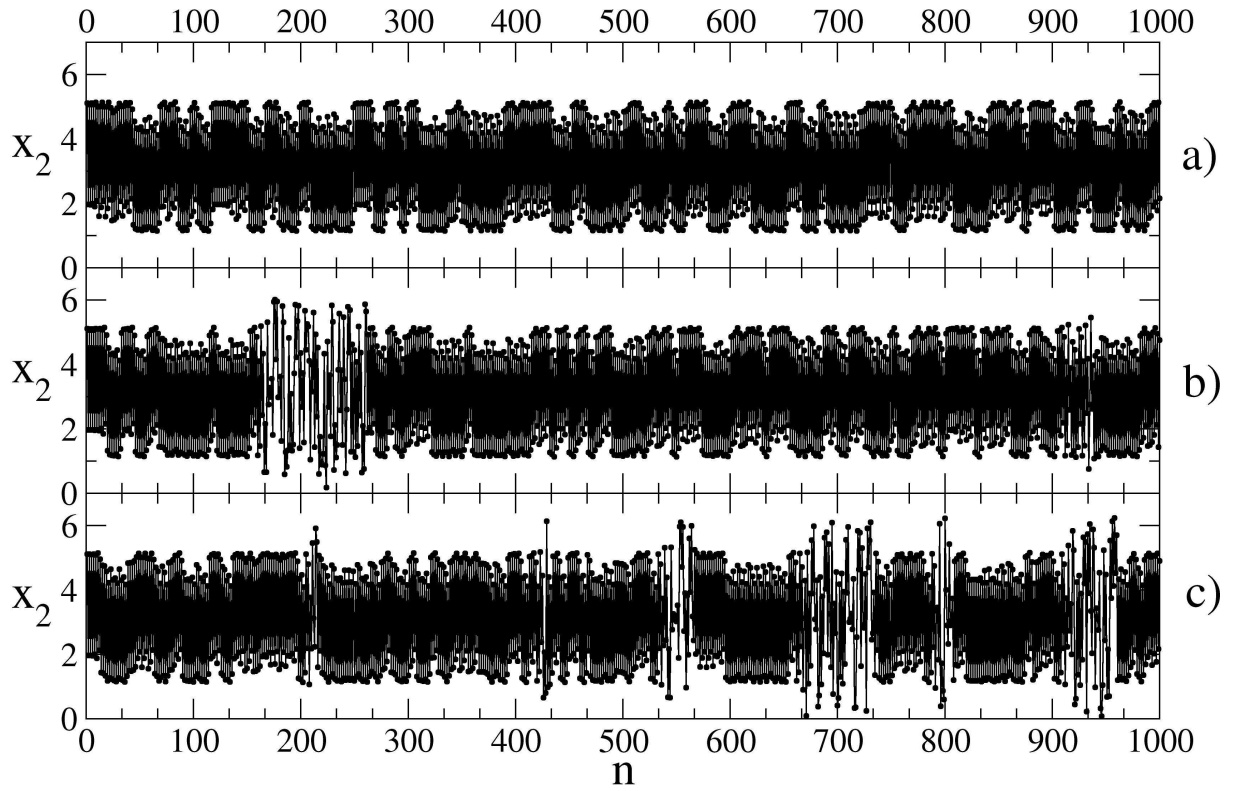


Figura 3.12: Série temporal de x_2 com: a) $f_0 = 6,8542515$; b) $f_0 = 6,8575515$; c) $f_0 = 6,8592515$.

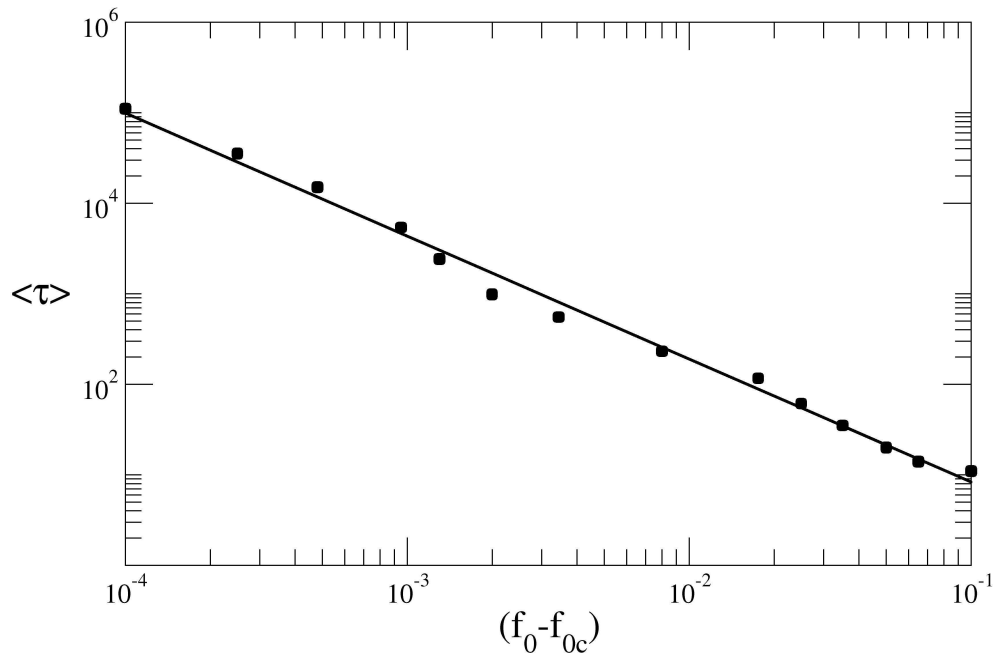


Figura 3.13: Lei de potência do tempo médio da crise com: $f_{0c} = 6,85425150$ e $\gamma = 1,358$

médio entre os estouros obedece a uma “lei de potência”, representada pela expressão:

$$\langle \tau \rangle \sim (f_0 - f_{0c})^{-\gamma} \implies \log_{10} \langle \tau \rangle = -\gamma \log_{10}(f_0 - f_{0c}) . \quad (3.125)$$

onde γ é chamado de *expoente crítico da crise*, e $f_{0c} = f_{0(\text{Crise})} = 6,85425150$. Vemos Na Figura

(3.13) o gráfico *log-log* do tempo médio entre os estouros, $\langle \tau \rangle$, versus $(f_0 - f_{0c})$. Obtemos como resultado:

- $\gamma = 1,358$: Expoente crítico.

Verificamos que a crise obedece uma lei de potência, com o expoente crítico de $\gamma = 1,358$. Sobre este valor, não encontramos nas literaturas específicas alguma indicação sobre o valor do expoente crítico, para um mapa 4-dimensional como é o MRDP. Em [20] secção 8.3, cita-se que, para um mapa unidimensional, temos $\gamma = 0,5$, e que mapas com dimensões superiores terão γ maior que este valor.

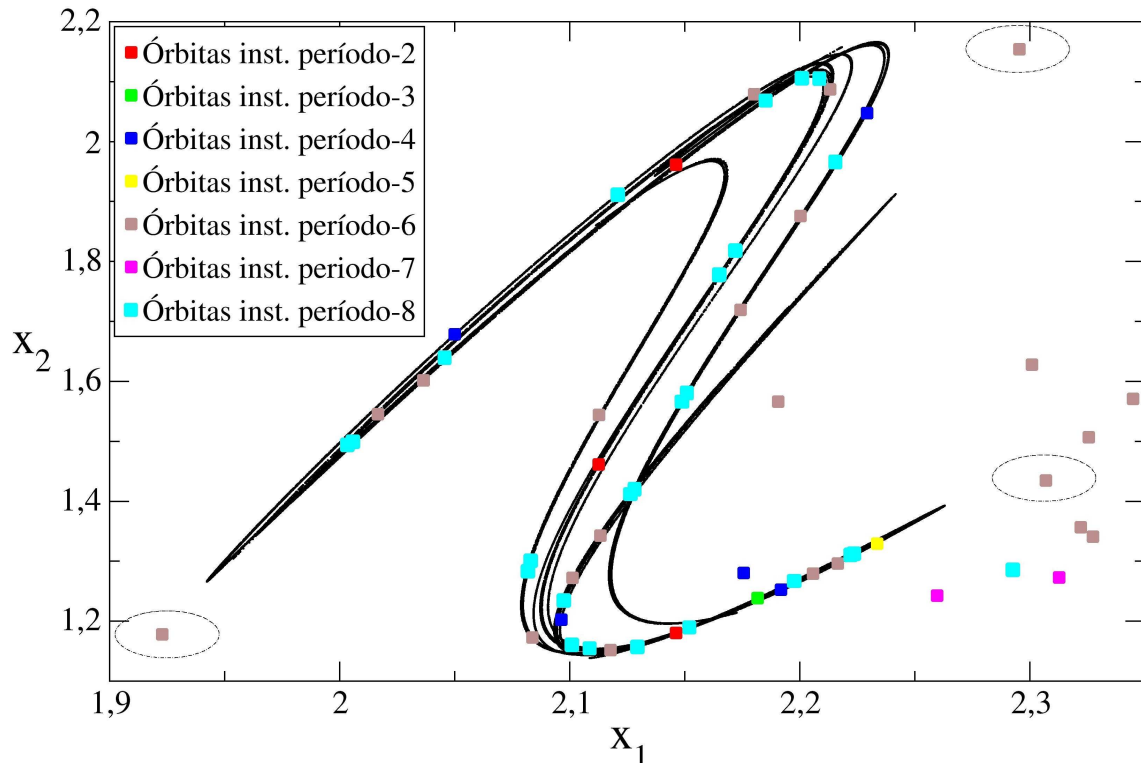


Figura 3.14: Espaço de fase $x_1 \times x_2$ e órbitas instáveis até período-8, com $f_0 = 6,85325150$.

Como vimos, a crise que ocorre em $f_0 = 6,85425150$ é uma *crise interior*, isto significa que existe uma órbita instável que colide com o atrator caótico dentro da bacia de atração. Mas ocorre que:

- Os diagramas de bifurcações mostram somente as órbitas estáveis e o atrator caótico, devemos então obter as órbitas instáveis por outros meios. Órbitas de período-1 podem ser obtidas analiticamente, mas para períodos superiores somente é possível obtê-las via cálculo numérico, fazendo uso das expressões (3.119) até (3.122). O problema é que estas expressões vão se tornando extensas com o aumento do período,
- Como o MRDP é um mapa 4-dimensional, analisar órbitas em diagramas de bifurcações torna-se uma tarefa não muito precisa, pois os diagramas fornecem informações da evolução de somente uma variável contra o parâmetro de controle, isto é, uma órbita que aparenta colidir com o atrator no diagrama $x_1 \times f_0$, pode não estar colidindo com o atrator no diagrama $x_2 \times f_0$.

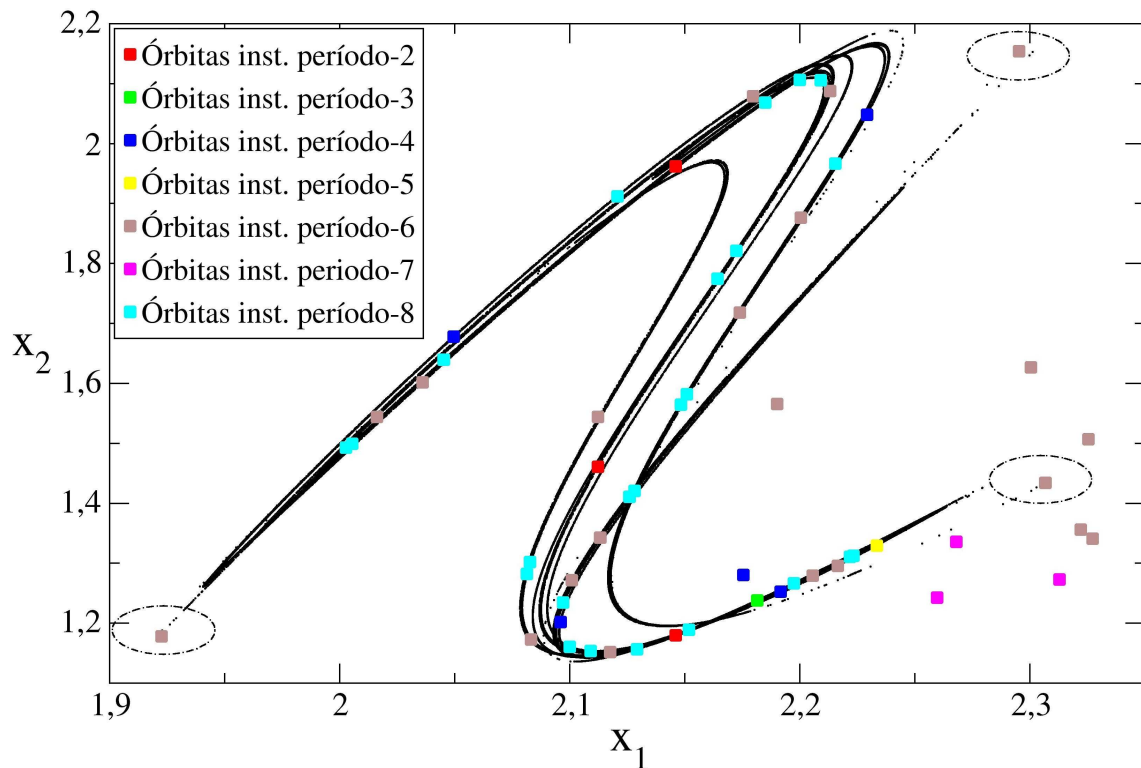


Figura 3.15: Espaço de fase $x_1 \times x_2$ e órbitas instáveis até período-8, com $f_0 = 6,85425150$.

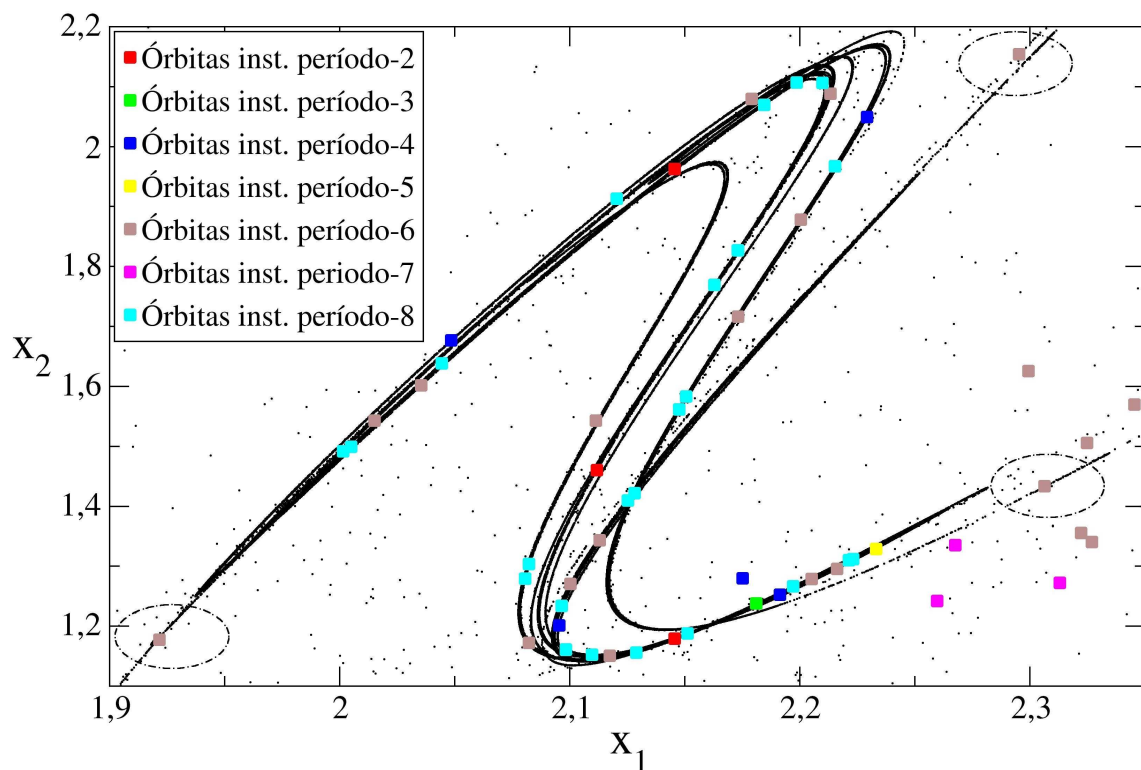


Figura 3.16: Espaço de fase $x_1 \times x_2$ e órbitas instáveis até período-8, com $f_0 = 6,85625150$.

A solução adotada foi gerar espaços de fase em $x_1 \times x_2$, fixando o parâmetro f_0 nos valores em torno da crise. Para os mesmos valores de f_0 , obtivemos os conjuntos das órbitas periódicas instáveis, de período-1 até período-8. Desta maneira, podemos observar a figura do atrator caótico no espaço

$x_1 \times x_2$, e as órbitas periódicas instáveis crivando este plano. Nas Figuras (3.14), (3.15) e (3.16) vemos uma das bandas do atrator caótico e as órbitas instáveis cortando o espaço de fase. Vemos que tanto o atrator como as órbitas instáveis evoluem com o aumento de f_0 . Destacamos nestas figuras a órbita que suspeitamos ser a responsável pela crise, onde observamos, em $f_0 = 6,85425150$, a colisão do atrator com esta órbita. É uma órbita de período-6, com três estágios desta órbita cortando o atrator da figura e outros três estágios cortando a segunda banda que não aparece nesta figura. Como dissemos, trata-se de uma suspeita pois não podemos afirmar com certeza absoluta ser esta a órbita responsável pela crise, mas, até o período-8, foi a órbita com maior indicativo de colisão com o atrator. Os pontos desta órbita, com $f_0 = 6,85425150$, são:

$$\begin{aligned} &(x_1 = 1,92252398; x_2 = 1,17775536; y_1 = 2,76765656; y_2 = 3,37606668), \\ &(x_1 = 3,98780228; x_2 = 4,12919038; y_1 = -2,04053603; y_2 = -3,23137124), \\ &(x_1 = 2,30674931; x_2 = 1,43407781; y_1 = 2,21878041; y_2 = 4,57297991), \\ &(x_1 = 4,36066063; x_2 = 5,10543035; y_1 = -2,76765671; y_2 = -3,37606579), \\ &(x_1 = 2,29538244; x_2 = 2,15399592; y_1 = 2,04053810; y_2 = 3,23136791), \\ &(x_1 = 3,97643515; x_2 = 4,84910660; y_1 = -2,21877989; y_2 = -4,57298189). \end{aligned}$$

Destacamos que esta órbita possui somente uma direção instável ($d^u = 1$), e este detalhe será importante na conclusão do estudo à respeito da “*Variabilidade da Dimensão Instável*”.

3.12 VDI

Sabemos que após o parâmetro do regime caótico, $f_{0(Caos)} = 6,7469$, temos um atrator caótico com órbitas periódicas instáveis nele imerso, onde identificamos que estas órbitas periódicas possuem uma direção instável, $d^u = 1$. Mas podemos verificar a existência de órbitas periódicas com duas direções instáveis, $d^u = 2$, fora deste atrator.

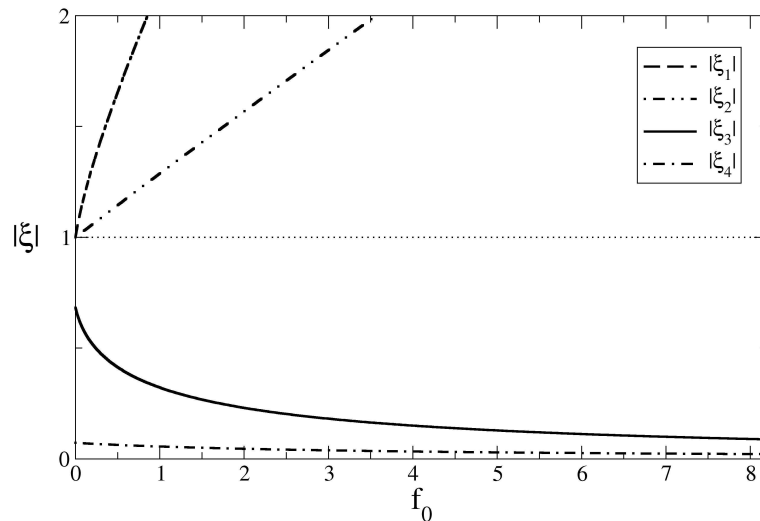


Figura 3.17: Autovalores do ponto fixo $(0; 0; 0; 0)$ com $|\xi_1| \geq |\xi_2| \geq |\xi_3| \geq |\xi_4|$.

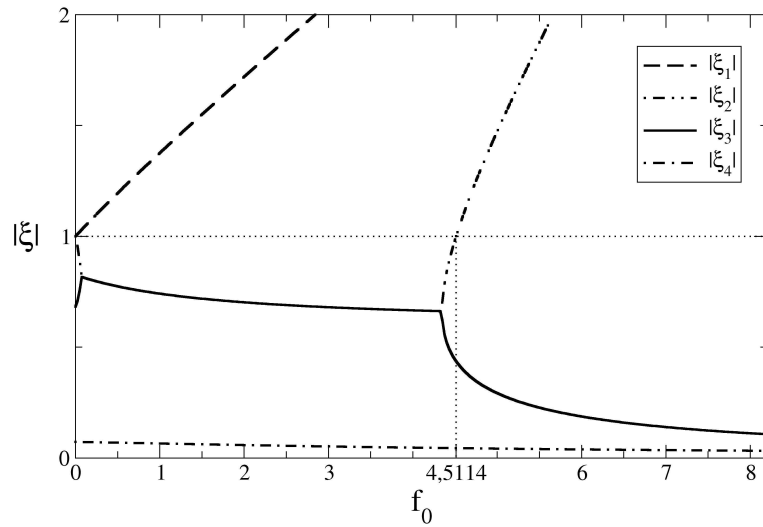


Figura 3.18: Autovalores do ponto fixo $(0; \pi; 0; 0)$ com $|\xi_1| \geq |\xi_2| \geq |\xi_3| \geq |\xi_4|$.

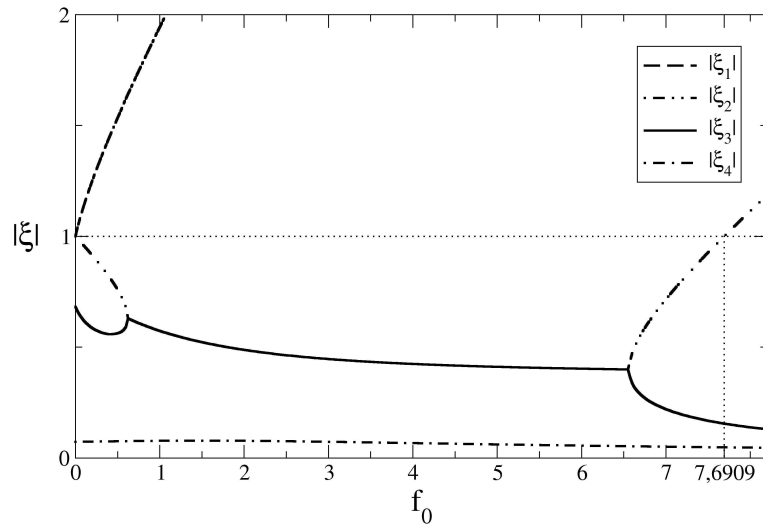


Figura 3.19: Autovalores do ponto fixo $(\pi; 0; 0; 0)$ com $|\xi_1| \geq |\xi_2| \geq |\xi_3| \geq |\xi_4|$.

Analisando os módulos dos autovalores da matriz Jacobiana de algumas órbitas, verificamos a existência de órbitas instáveis com $d^u = 2$. Vemos nas Figuras (3.17) e (3.18), que as órbitas $(0; 0; 0; 0)$ e $(0; \pi; 0; 0)$ possuem dois autovalores com módulo maior que um, portanto $d^u = 2$, antes mesmo da ocorrência do caos. Já na Figura (3.19), a órbita $(\pi; 0; 0; 0)$ terá $d^u = 2$ próximo do hipercaos. Na Figura (3.20) temos a órbita $(0; \pm \arcsen(\frac{2\pi}{f_0}); \pm 5, 81964; \pm 16, 19396)_{(n_1=\pm 1; n_2=\pm 2)}$ com duas direções instáveis antes da crise.

Reproduzimos na Figura (3.21), o espaço de fase $x_1 \times x_2$ com os pontos fixos para o parâmetro $f_0 = 9, 0$, onde vemos nos pontos em vermelho as órbitas instáveis com uma direção instável cortando o espaço de fase, e em preto as órbitas instáveis com duas direções instáveis, e ao lado do ponto a indicação do par de rotações n_1 e n_2 . Observa-se que, enquanto o atrator caótico para $f_0 = 9, 0$ tem dois expoentes de Lyapunov positivos, algumas órbitas instáveis mergulhadas no atrator tem somente uma direção instável [8]. Os pontos representados na Figura (3.21) estão descritos na tabela

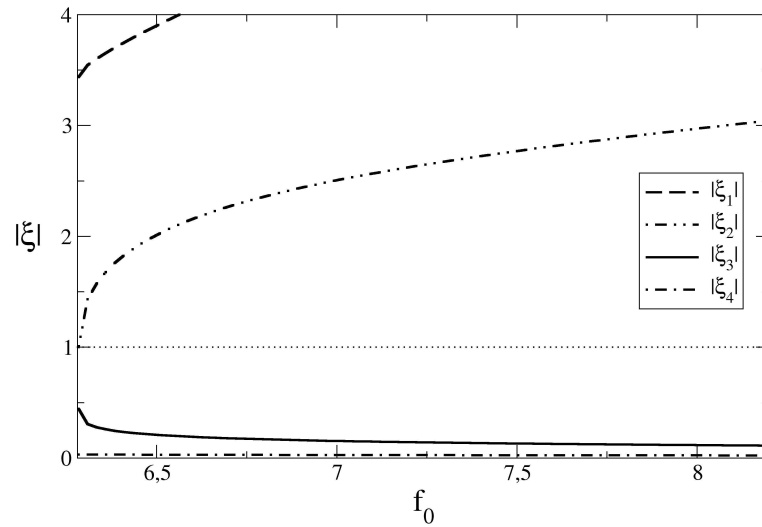


Figura 3.20: Autovalores do ponto fixo $(0; \pm \arcsen(\frac{2\pi}{f_0}); \pm 5, 81964; \pm 16, 19396)_{(n_1=\pm 1; n_2=\pm 2)}$.

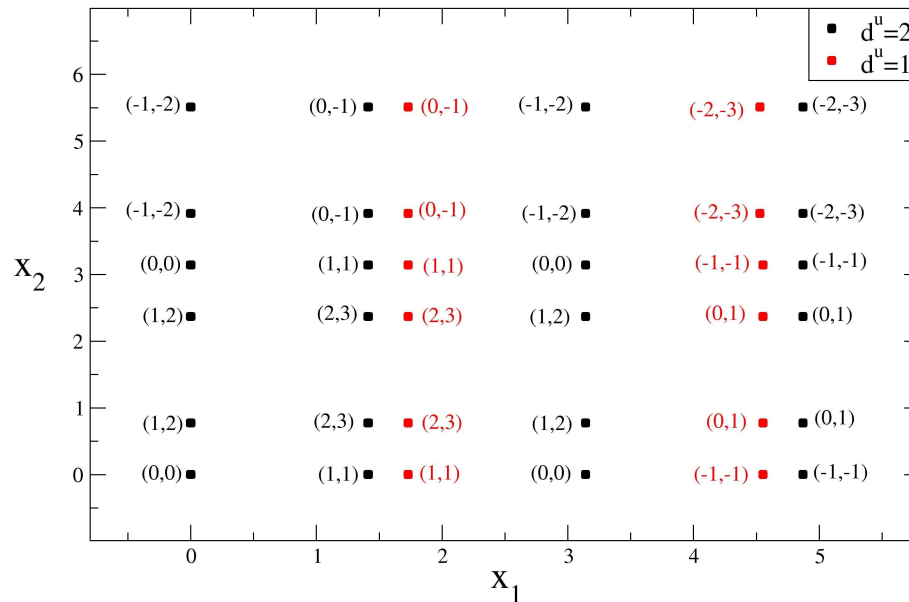


Figura 3.21: Estabilidade dos pontos fixos em $f_0 = 9, 0$, para diversos pares de n_1 e n_2 .

(3.1).

Vimos, na secção 2.8, a definição da “Variabilidade da Dimensão Instável”, VDI, onde destacamos que o melhor indicador da presença da VDI seria a análise do segundo expoente de Lyapunov a tempo “finito” ($\lambda_2(n)$). Caso este expoente, a tempo “finito”, apresente flutuações em torno de zero, a quantidade de direções instáveis variará entre $d^u = 1$ e $d^u = 2$.

Para obter os expoentes de Lyapunov a tempo finito, iniciamos iterando o mapa a partir da condição inicial $(x_{1(0)} = 0, 2; x_{2(0)} = 0, 2; y_{1(0)} = 0; y_{2(0)} = 0)$, e após um transiente de 1000 iteradas, calculamos os expoentes de Lyapunov a tempo finito a cada intervalo de n iteradas, mais especificamente, $\lambda_2(15)$ para $n = 15$ ¹⁰. No final, obtivemos um número grande de expoentes $\lambda_2(n)$.

¹⁰Escolhemos $n = 15$ por ser um valor próximo do utilizado em trabalhos anteriores (em [15] utilizou-se $n = 10$), e

n_1	n_2	x_1	x_2	y_1	y_2	d^u
0	0	0	0	0	0	2
0	0	π	0	0	0	2
0	0	π	π	0	0	2
0	0	0	π	0	0	2
1	2	0	0,77278470	5,81964141	16,19396145	2
1	2	π	0,77278470	5,81964141	16,19396145	2
1	2	π	2,36880796	5,81964141	16,19396145	2
1	2	0	2,36880796	5,81964141	16,19396145	2
-1	-2	0	5,51040061	-5,81964141	-16,19396145	2
-1	-2	π	5,51040061	-5,81964141	-16,19396145	2
-1	-2	π	3,91415927	-5,81964141	-16,19396145	2
-1	-2	0	3,91415927	-5,81964141	-16,19396145	2
0	1	4,87188583	0,77278470	-4,55467864	10,37432004	2
0	1	4,55289213	0,77278470	-4,55467864	10,37432004	1
0	1	4,55289213	2,36880796	-4,55467864	10,37432004	1
0	1	4,87188583	2,36880796	-4,55467864	10,37432004	2
0	-1	1,41129948	5,51040061	4,55467864	-10,37432004	2
0	-1	1,73029318	5,51040061	4,55467864	-10,37432004	1
0	-1	1,73029318	3,91437735	4,55467864	-10,37432004	1
0	-1	1,41129948	3,91437735	4,55467864	-10,37432004	2
1	1	1,41129948	0	10,37432004	5,81964141	2
1	1	1,73029318	0	10,37432004	5,81964141	1
1	1	1,73029318	π	10,37432004	5,81964141	1
1	1	1,41129948	π	10,37432004	5,81964141	2
-1	-1	4,87188583	0	-10,37432004	-5,81964141	2
-1	-1	4,55289213	0	-10,37432004	-5,81964141	1
-1	-1	4,55289213	π	-10,37432004	-5,81964141	1
-1	-1	4,87188583	π	-10,37432004	-5,81964141	2
2	3	1,41129948	0,77278470	16,19396145	22,01360285	2
2	3	1,73029318	0,77278470	16,19396145	22,01360285	1
2	3	1,73029318	2,36880796	16,19396145	22,01360285	1
2	3	1,41129948	2,36880796	16,19396145	22,01360285	2
-2	-3	4,87188583	5,51040061	-16,19396145	-22,01360285	2
-2	-3	4,55289213	5,51040061	-16,19396145	-22,01360285	1
-2	-3	4,55289213	3,91415927	-16,19396145	-22,01360285	1
-2	-3	4,87188583	3,91415927	-16,19396145	-22,01360285	2

Tabela 3.1: Estabilidade dos pontos fixos em $f_0 = 9,0$

Podemos extrair a média de $\lambda_2(n)$, onde definimos a *distribuição de probabilidade* de $\lambda_2(n)$ como $\mathcal{P}_{(\lambda_2(n))}$, tal que $\mathcal{P}_{(\lambda_2(n))}d\lambda_2(n)$ é a probabilidade de $\lambda_2(n)$ estar entre $\lambda_2(n)$ e $\lambda_2(n) + d\lambda_2(n)$:

$$\langle \lambda_2(n) \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_2(n) \mathcal{P}_{(\lambda_2(n))} d\lambda_2(n)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_{(\lambda_2(n))} d\lambda_2(n)} = \lambda_2(\infty) , \quad (3.126)$$

isto é, a média de $\lambda_2(n)$ nos fornece λ_2 para tempo infinito, onde temos também:

$$\lambda_2(\infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2(n) . \quad (3.127)$$

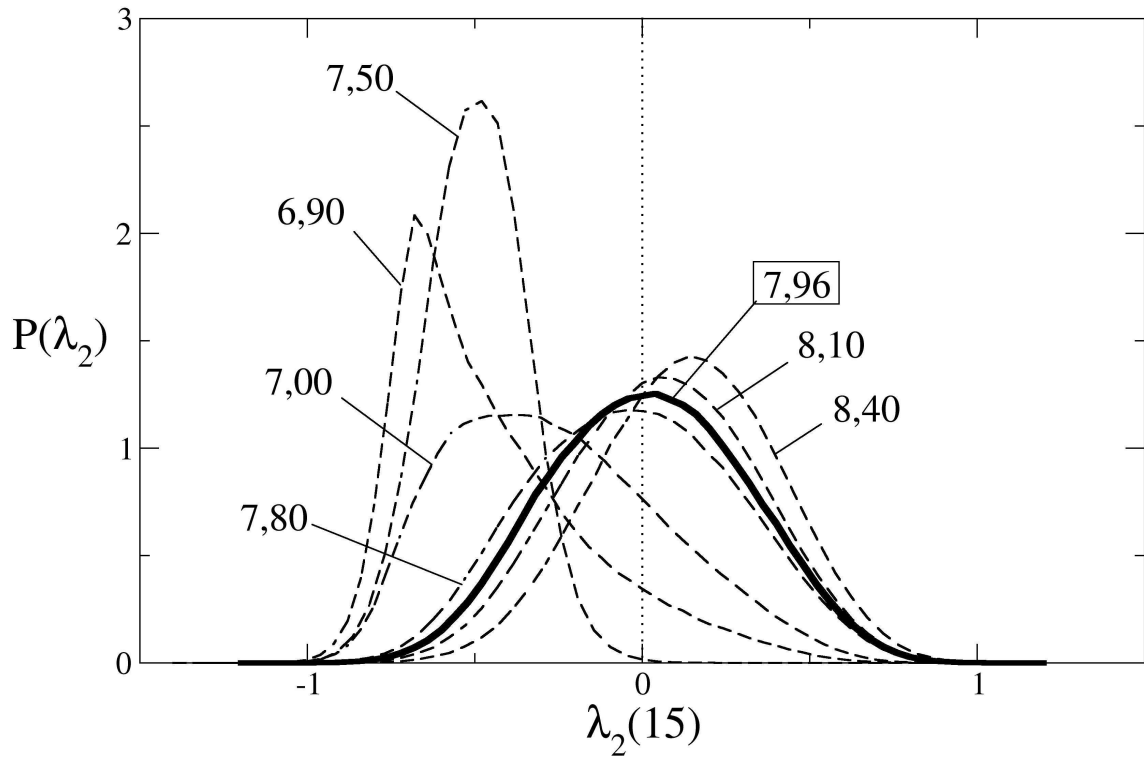


Figura 3.22: Distribuições de probabilidades de $\lambda_2(15)$.

Podemos aproximar a distribuição de probabilidade do expoente $\lambda_2(n)$, para um determinado f_0 , através de cálculo numérico, representando-o por meio de *histogramas*. Teremos nestes histogramas o eixo horizontal representando o valor de $\lambda_2(n)$, e no eixo vertical a distribuição de probabilidade $\mathcal{P}_{(\lambda_2(n))}$. Normalmente nos histogramas veríamos colunas localizadas no respectivo valor de $\lambda_2(n)$, cujas alturas simbolizam a sua distribuição de probabilidade, mas nos histogramas aqui gerados destacamos somente o contorno sobre as colunas, facilitando assim a visualização de diversos histogramas. A Figura (3.22) foi obtida para alguns valores de f_0 , utilizando 1200000 expoentes $\lambda_2(15)$. Observa-se que os parâmetros f_0 plotados estão após a crise, e todos apresentam parcelas positivas. O parâmetro $f_0 = 7,50$ tem pequena parcela positiva, isto porque este parâmetro está próximo de uma janela periódica. Vemos em destaque o parâmetro $f_0 = 7,96$, onde a sua distribuição de probabilidade tem o formato de sino, ou seja, uma curva gaussiana, e está centrado em zero. Uma

que fornecesse histogramas com suaves curvaturas (para $n > 30$ os histogramas são picos aguçados).

distribuição de probabilidade que possui uma curva gaussiana centrada em zero, representa igual probabilidade para a obtenção de $\lambda_2(n)$ com valores positivos como para valores negativos. Quando $\lambda_2(n)$ apresenta igual probabilidade para valores positivos e negativos, temos a “máxima flutuação” de $\lambda_2(n)$ em torno de zero, e associamos a essa máxima flutuação à ocorrência da chamada “VDI máxima”.

Explorando mais o expoente de Lyapunov $\lambda_2(n)$ a tempo finito, podemos calcular a “fração dos valores positivos de $\lambda_2(n)$ ” ([4], [13]), $\phi_{(\lambda_2(n))}$, a partir da expressão:

$$\phi_{(\lambda_2(n))} = \frac{\int_0^{+\infty} \mathcal{P}_{(\lambda_2(n))} d\lambda_2(n)}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}_{(\lambda_2(n))} d\lambda_2(n)}. \quad (3.128)$$

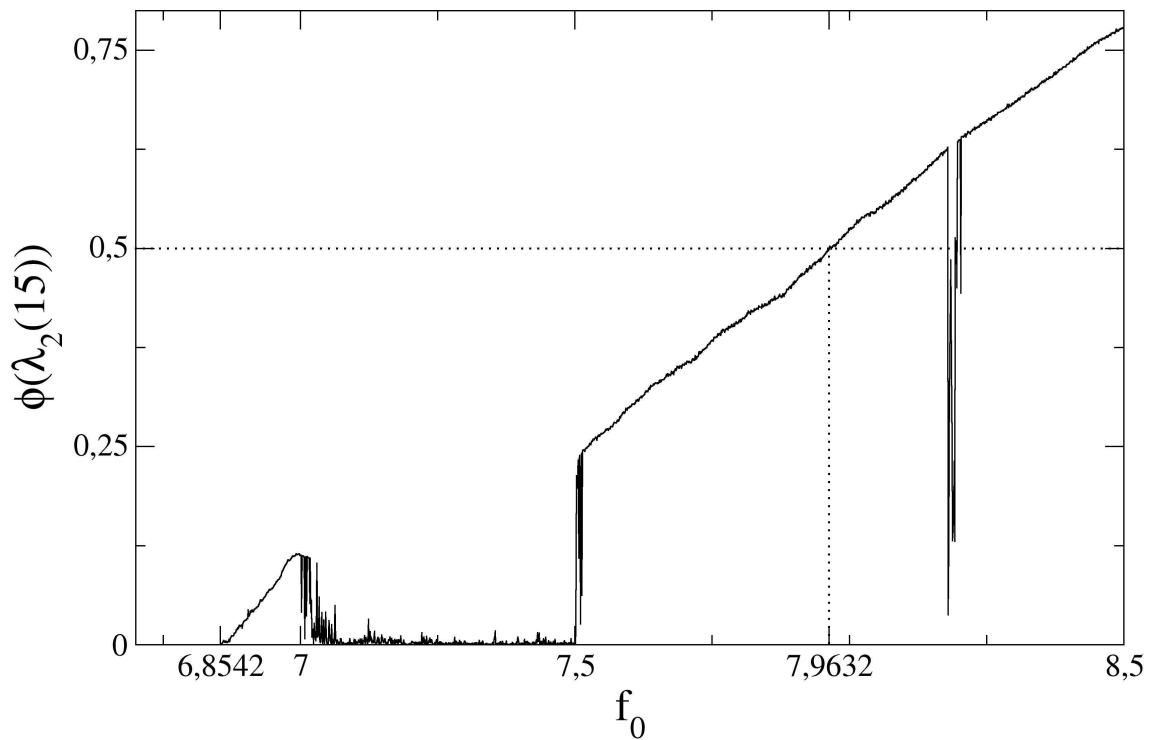


Figura 3.23: Fração dos valores positivos de $\lambda_2(15)$.

A Figura (3.23) representa a fração $\phi_{(\lambda_2(15))}$, obtida numericamente. Usamos o seguinte procedimento para gerar esta figura:

- Para um determinado f_0 , calculamos os expoentes de Lyapunov a tempo finito, e somamos os valores, em módulo, dos expoentes $\lambda_2(15)$;
- Numa segunda soma, somamos somente os valores dos expoentes $\lambda_2(15)$ positivos;
- A fração $\phi_{(\lambda_2(15))}$ para este f_0 será a divisão da soma total dos valores de $\lambda_2(15)$ positivos pela soma total dos valores dos módulos de todos os $\lambda_2(15)$ calculados.

A fração $\phi_{(\lambda_2(15))}$ fornece informações primordiais para a análise da VDI, cujo comportamento, com a evolução do parâmetro f_0 , implica:

- Se para um determinado valor do parâmetro f_0 obtermos $\phi_{(\lambda_2(15))} = 0$, significa que não houve ocorrência de $\lambda_2(15)$ positivos, ou as ocorrências foram praticamente nulas, o sistema então não apresenta VDI;
- O valor do parâmetro f_0 para o qual ocorre o limiar para valores de $\phi_{(\lambda_2(15))}$ (começa a surgir fração positiva), é o responsável pelo “*início da VDI*”, será o $f_{0(VDI)}$;
- Quando $0 < \phi_{(\lambda_2(15))} < 1$, significa que o sistema apresenta VDI;
- Quando $\phi_{(\lambda_2(15))} = 0,5$, implica que metade das ocorrências dos $\lambda_2(15)$ possuirá valores positivos, e como consequência, a outra metade com valores negativos, o que significa igual probabilidade de termos $d^u = 1$ ou $d^u = 2$. Temos então a máxima flutuação de $\lambda_2(15)$ em torno de zero, indicando que o sistema apresenta a “*VDI máxima*”, e o parâmetro responsável será $f_{0(VDI_{max})}$.

Analisando agora a Figura (3.23), vemos que:

- ★ - Em $f_0 \approx 6,8542$ começa a surgir expoentes positivos, onde concluímos ser este o valor do parâmetro do *início da VDI*;
- ★ - Após este valor do parâmetro, a fração $\phi_{(\lambda_2(15))}$ sobe gradualmente, e subitamente, entre 7,00 a 7,50, a fração começa a oscilar com valores próximos de zero, mas sempre acima de zero, onde observamos janelas periódicas;
- ★ - Em $f_0 \approx 7,51$, a fração tem uma subida abrupta, e após este valor do parâmetro, volta a crescer gradualmente;
- ★ - Em $f_0 \approx 7,9632$ temos $\phi_{(\lambda_2(15))} = 0,5$, o que significa VDI máxima, sendo então o valor do parâmetro $f_{0(VDI_{max})}$;
- ★ - Em $f_0 \approx 8,18$ temos uma queda seguida de uma subida abrupta de $\phi_{(\lambda_2(15))}$, o que leva a crer tratar-se de uma janela periódica.

Definimos então dois parâmetros:

- $f_{0(VDI)} \approx 6,8542$: Parâmetro do “*início da VDI*”,
- $f_{0(VDI_{max})} \approx 7,9632$: Parâmetro da “*VDI máxima*”.

3.13 Análise dos resultados

No início do desenvolvimento deste trabalho sobre a dinâmica do RDP, tínhamos proposto obter resultados à respeito dos valores relevantes à compreensão do comportamento deste sistema dinâmico. Obtivemos os seguintes valores de parâmetros:

- $f_{0(Caos)} \approx 6,7469$: Parâmetro do *início do caos*,
- $f_{0(Hipercaos)} \approx 7,9642$: Parâmetro do *hipercaos*,
- $f_{0(Crise)} \approx 6,8542515$: Parâmetro do *início da crise*,
- $f_{0(VDI)} \approx 6,8542$: Parâmetro do *início da VDI*,
- $f_{0(VDI_{max})} \approx 7,9632$: Parâmetro da *VDI máxima*.

Vemos nas Figuras (3.24), (3.25) e (3.26) a localização dos valores dos parâmetros críticos no diagrama de bifurcação $x_2 \times f_0$.

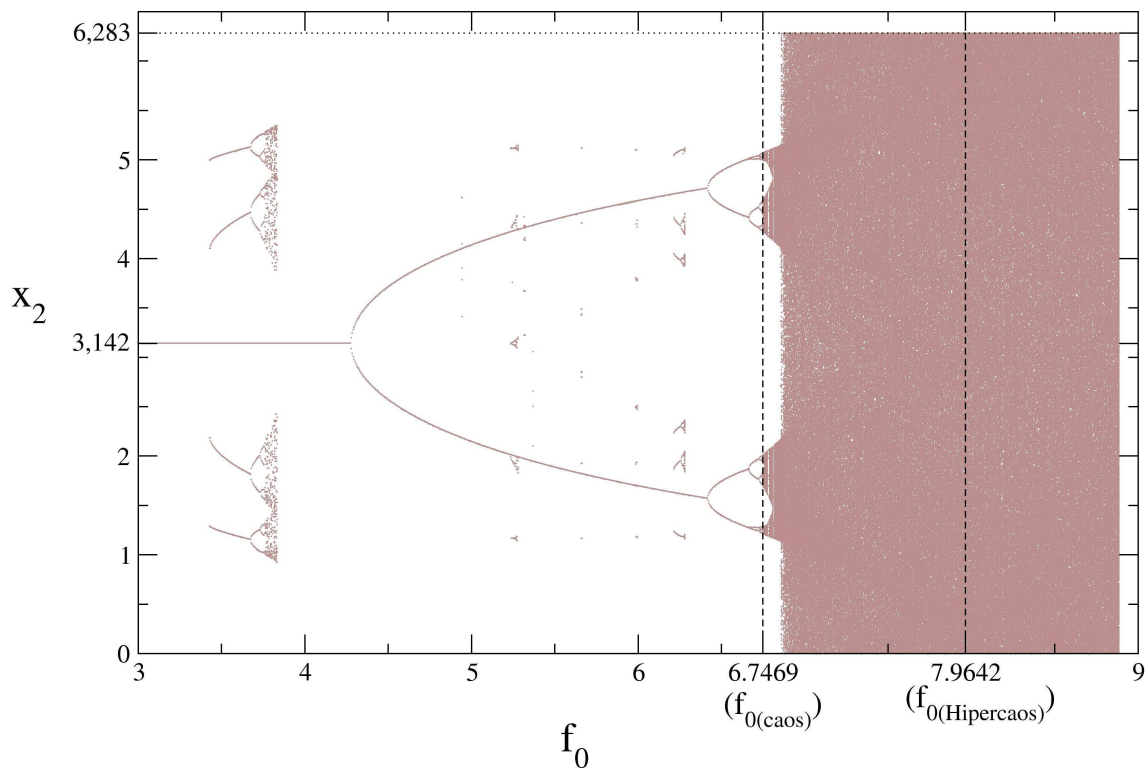


Figura 3.24: Localização dos parâmetros $f_{0(Caos)}$ e $f_{0(Hipercaos)}$ no diagrama de bifurcação $x_2 \times f_0$.

Observamos que o valor do parâmetro do início da crise apresenta um número de casas significativas maior que os valores dos outros parâmetros. Isto se justifica pelo fato de termos obtido este valor por cálculo numérico, variando o passo de incremento, conseguindo com isto um valor com sete casas após a vírgula. Os outros valores foram obtidos lendo diretamente os gráficos, e a precisão fica restrita à resolução gráfica, com o máximo de quatro casas após a vírgula.

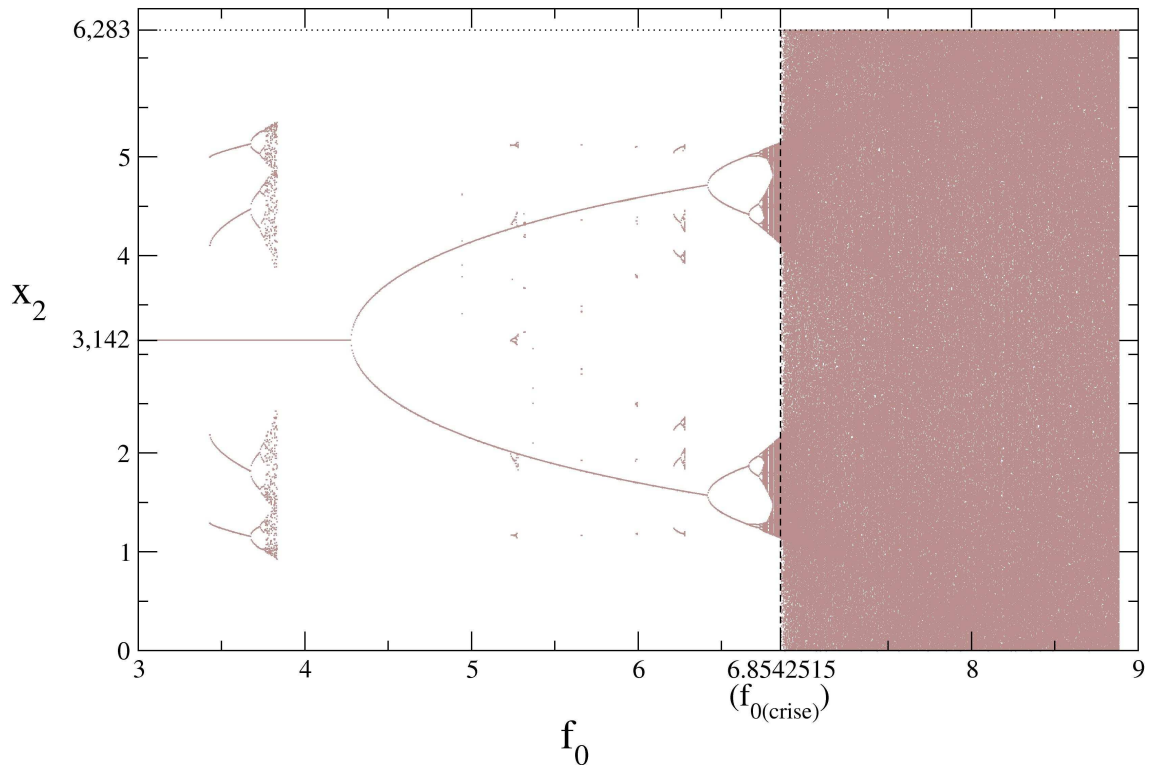


Figura 3.25: Localização do parâmetro $f_{0(\text{Crise})}$ no diagrama de bifurcação $x_2 \times f_0$.

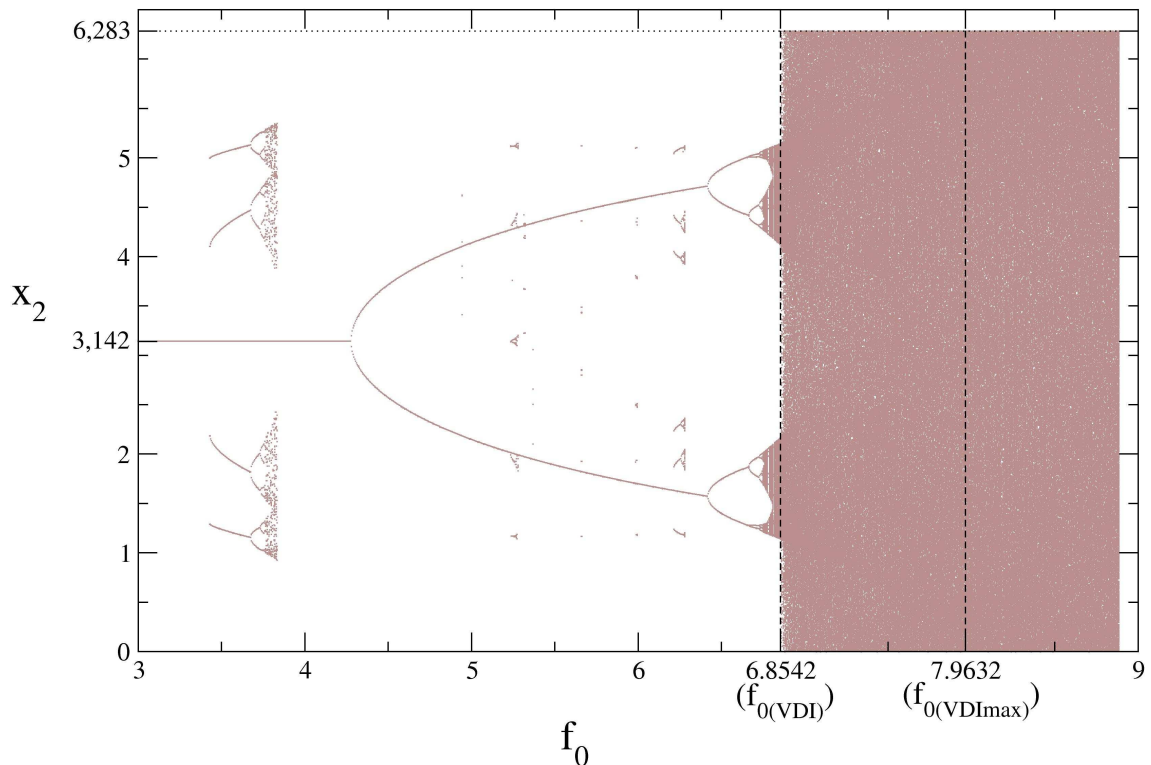


Figura 3.26: Localização dos parâmetros $f_{0(\text{VDI})}$ e $f_{0(\text{VDI}_{\text{max}})}$ no diagrama de bifurcação $x_2 \times f_0$.

Verificamos que, dentro da precisão numérica, o valor encontrado para o parâmetro do hipercaos é aproximadamente igual ao valor do parâmetro da VDI máxima. Analisando este resultado, vemos que, no hipercaos, o segundo expoente de Lyapunov a tempo infinito torna-se positivo, $\lambda_2(\infty) > 0$. Como no parâmetro da VDI máxima o segundo expoente de Lyapunov a tempo finito,

$\lambda_2(n)$ com $n = 15$, flutua em torno de zero com igual probabilidade para valores positivos e negativos (vide Figura 3.22), ou seja, em média, $\langle \lambda_2(n) \rangle \rightarrow 0$, se aplicarmos a expressão (3.127) teremos que, no parâmetro da VDI máxima, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2(n) = 0$, que é exatamente a transição do hipercaos.

Em outro resultado, verificamos que o valor do parâmetro responsável pelo início da crise é, dentro da precisão numérica, aproximadamente igual ao valor do parâmetro do início da VDI. Destacamos, porém, que a órbita instável de período-6 que colide com o atrator dentro da bacia de atração, e que suspeitamos ser a responsável pelo início da crise interior, possui somente uma direção instável ($d^u = 1$). Esta órbita, portanto, não é a responsável pelo início da VDI, pois para tal ocorrência ela deveria possuir duas direções instáveis ($d^u = 2$). Fica então em aberto a órbita instável que seja responsável pelo início da crise interior e do início da VDI.

Apesar de não termos encontrado a órbita que indique o início da crise e que possua duas direções instáveis, portanto seja responsável também pelo início da VDI, podemos explicar o fato da crise e VDI terem, dentro da precisão numérica, aproximadamente o mesmo parâmetro de nascimento, fazendo a seguinte dedução:

- A partir do parâmetro do início do caos, verificamos a existência de um atrator caótico com duas bandas, e órbitas instáveis com uma direção instável ($d^u = 1$) nele imerso;
- Verificamos também a existência de órbitas periódicas instáveis com duas direções instáveis ($d^u = 2$), que observando-as no espaço de fase, identificamos que elas não pertencem ao atrator caótico;
- No parâmetro responsável pelo início da crise, as bandas do atrator caótico fundem-se, e tornam todo espaço de fase uma banda caótica única;
- Como todo espaço de fase tornou-se um atrator caótico, as órbitas instáveis com duas direções instáveis estão agora mergulhadas neste novo atrator caótico (estamos supondo que o novo atrator caótico incorporou as órbitas instáveis com duas direções instáveis), provocando com isto o nascimento da VDI, neste mesmo parâmetro;
- Nessa análise, estamos supondo que o nascimento da crise induziu o nascimento da VDI.

Concluimos então que o MRDP apresenta VDI, e esta VDI leva a crer que nasce em virtude do nascimento da crise. Concluimos também que, quando o MRDP apresenta o hipercaos, temos a ocorrência da VDI máxima.

Capítulo 4

Conclusões e Trabalhos Futuros

Estudamos neste trabalho um sistema que apresentou complexidade na sua dinâmica. Verificamos a dificuldade em obter órbitas de alta periodicidade, onde nos limitamos até as órbitas periódicas de período-8. Por meio dos expoentes de Lyapunov a tempo infinito, obtivemos o parâmetro referente ao caos ($f_{0(Caos)} = 6,7469$), quando o primeiro expoente (λ_1) torna-se positivo. Utilizando ainda os expoentes de Lyapunov a tempo infinito, obtivemos o parâmetro do hipercaos ($f_{0(Hipercaos)} = 7,9642$), quando o segundo expoente (λ_2) torna-se positivo.

No estudo da crise, vimos fortes indícios de se tratar de uma crise interior, proveniente da colisão de uma órbita periódica instável dentro da bacia de atração do atrator caótico. Utilizando cálculos numéricos, obtivemos o parâmetro de transição para a crise ($f_{0(Crise)} = 6,8542515$). Verificamos que esta crise provoca uma intermitência, denominada por intermitência induzida pela crise, cujo tempo médio da fase laminar desta intermitência decai exponencialmente, obedecendo a uma lei de potência (expoente crítico $\gamma = 1,358$).

Identificamos no MRDP a presença da VDI, analisando o comportamento do segundo expoente de Lyapunov a tempo finito ($\lambda_2(n)$), onde observamos que o mesmo apresenta flutuação em torno de zero. Por meio da fração dos valores positivos do segundo expoente de Lyapunov a tempo finito, obtivemos o parâmetro do início da VDI ($f_{0(VDI)} = 6,8542$), quando a fração começa a apresentar valores positivos, e o parâmetro da VDI máxima ($f_{0(VDI_{max})} = 7,9632$), quando a fração tem valor 0,5 (igual probabilidade em obter expoentes positivos e negativos).

Analisando os resultados obtidos, verificamos que, dentro da precisão numérica, o parâmetro referente ao hipercaos está próximo ao valor encontrado para a VDI máxima. Este resultado de certa forma era esperado, pois, para o hipercaos, temos que o segundo expoente de Lyapunov a tempo infinito torna-se positivo, ou seja, o valor do parâmetro quando o segundo expoente de Lyapunov for igual a zero marca esta passagem (após este parâmetro, este expoente terá valor positivo), e para a VDI máxima, temos a flutuação máxima do segundo expoente de Lyapunov a tempo finito em torno de zero, ou seja, a média do segundo expoente a tempo finito será igual a zero (lembrando que a média de $\lambda_2(n)$ será o valor de $\lambda_2(\infty)$). Concluímos que, na presença da VDI, quando o sistema apresenta comportamento hipercaótico implica na ocorrência da VDI máxima.

Observando os parâmetros do início da crise e do início da VDI, identificamos que, dentro da

precisão numérica, ambos possuem parâmetros aproximadamente iguais. Em nossos estudos, identificamos uma órbita instável de período-6 como sendo suspeita de provocar a crise interior (esta órbita colide com o atrator caótico dentro da bacia de atração), mas no cálculo de sua estabilidade verificamos que a mesma possui somente uma direção instável, esta órbita portanto não é a responsável pelo início da VDI (para iniciar a VDI, esta órbita deveria ter duas direções instáveis). Numa análise paralela, observamos a existência de órbitas periódicas com duas direções instáveis que, vistos no espaço de fase, não pertencem ao atrator caótico, onde identificamos neste atrator, órbitas periódicas com uma direção instável. Mas no parâmetro do início da crise, todo espaço de fase torna-se o atrator caótico, incorporando com isto as órbitas periódicas com duas direções instáveis, sendo este o gatilho para o início da VDI (lembrando que para ocorrer VDI devemos ter órbitas periódicas mergulhadas no atrator caótico, com quantidades de direções instáveis diferentes). Nesta visão, estamos supondo que a VDI e a crise possam possuir o mesmo parâmetro de surgimento, dentro da precisão numérica, e que a VDI do MRDP ocorre em função da crise.

Destacamos que, neste trabalho, alguns cálculos e resultados foram obtidos para corroborar os trabalhos realizados anteriormente. Nestes casos, procuramos obter de forma mais precisa os valores até então conhecidos. Colaboramos neste trabalho com alguns resultados originais, onde destacamos o trabalho realizado para a obtenção das órbitas periódicas de período qualquer, descrito na secção 3.7. Outro trabalho original refere-se ao estudo detalhado da crise no MRDP (a obtenção do parâmetro de nascimento, o estudo da lei de potência do tempo médio da crise, e o estudo da órbita periódica responsável pela crise). Temos também, como trabalho original, a obtenção dos parâmetros referentes à VDI (início e flutuação máxima), onde fizemos uso do gráfico da fração dos valores positivos do segundo expoente de Lyapunov a tempo finito.

Para trabalhos futuros, podemos citar a possibilidade de obter órbitas periódicas instáveis de período superior a 8, e assim verificar outras órbitas pertencentes ao atrator caótico com dimensão instável igual a dois, entre o caos e o hipercaos. Neste trabalho procuramos propor uma relação entre a crise e a VDI, podemos então estudar outros sistemas dinâmicos para comparar tais resultados.

Referências Bibliográficas

- [1] D. V. Anosov; “*Geodesic Flows and Closed Riemannian Manifolds with Negative Curvature*”; Proc. Steklov Inst. Math. **90**, p. 1 (1967).
- [2] C. Grebogi, S. Hammel, J. A. Yorke e T. Sauer; “*Shadowing of Physical Trajectories in Chaotic Dynamics: containment and refinement*”; Physical Review Letters **vol.65**,1527-1530 (1990).
- [3] C. Grebogi, L. Poon, T. Sauer, J. A. Yorke e D. Auerbach; “*Shadowability of Chaotic Dynamical Systems*”; Handbook of Dynamical Systems, **vol.2**, Cap.7, Elsevier Science (2002).
- [4] R. L. Viana, S. E. S. Pinto, J. R. R. Barbosa e C. Grebogi; “*Pseudo-Deterministic Chaotic Systems*”; International Journal of Bifurcation and Chaos vol. **13**, no.**11** 3235-3253 (2003).
- [5] S. Wiggins; “*Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos*”, Springer-Verlag, NY (1990).
- [6] R. Abraham e S. Smale; “*Nongenericity of Ω -stability, global analysis I*”; Proc. Symp. Pure Math. (AMS) **14**, 5-8 (1970).
- [7] S. Dawson, C. Grebogi, T. Sauer e J. A. Yorke; “*Obstructions to Shadowing when a Lyapunov Exponent Fluctuates About Zero*”; Phys. Rev. Lett.**73**, 1927-1930 (1994).
- [8] F. J. Romeiras, C. Grebogi, E. Ott e W. P. Dayawansa; “*Controlling Chaotic Dynamical Systems*”; Physica D**58**, 165-192 (1992).
- [9] R. L. Viana e C. Grebogi; “*Unstable Dimension Variability and Synchronization of Chaotic Systems*”; Physical Review E Vol. **62**, 462-468 (2000).
- [10] R. L. Viana e C. Grebogi; “*Riddled Basins and Unstable Dimension Variability in Chaotic Systems with and without Symmetry*”; International Journal of Bifurcation and Chaos, **11**, 2689 (2001).
- [11] R. L. Viana, S. E. S. Pinto e C. Grebogi; “*Chaotic bursting at the onset of unstable dimension variability*”; Physical Review **E 66**, 046213 (2002).
- [12] R. L. Viana, C. Grebogi, S. E. S. Pinto, S. R. Lopes, A. M. Batista e J. Kurths; “*Validity of Numerical Trajectories in the Synchronization Transition of Complex Systems*”; Physical Review **E 68**, 067204 (2003).

- [13] R. L. Viana, J. R. R. Barbosa, C. Grebogi e A. M. Batista; “*Simulating a Chaotic Process*”; Brazilian Journal of Physics vol **35**, no. **1** 139-147 (2004).
- [14] R. L. Viana, C. Grebogi, S. E. S. Pinto, S. R. Lopes, A. M. Batista, e J. Kurths; “*Bubbling Bifurcations: Loss of Synchronization and Shadowing Breakdown in Complex Systems*”; Physica D**206**, 94-108 (2005).
- [15] J. R. R. Barbosa; “*Perda de Validade de Trajetórias Caóticas Numéricas a Partir do Limiar da Variabilidade de Dimensão Instável*”; tese de doutorado, Universidade Federal do Paraná, não publicada (2004).
- [16] E. Kostelich, C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke; “*Unstable Dimension Variability: a Source of Nonhyperbolicity in Chaotic Systems*”; Physica D**109**,81-90 (1997).
- [17] C. Grebogi, E. Ott e J. A. Yorke; “*Chaotic Attractors in Crisis*”; Physical Review Letters vol.**48**, no.**22**, 1507-1510 (1982).
- [18] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, B. P. Flannery; “*Numerical Recipes in F77*”; Vol. **1** 2^a ed., Cambridge Univ. Press (1992).
- [19] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney e J. A. Vastano; “*Determining Lyapunov Exponents From a Time Series*”; Physica D**16**, 285-317 (1985).
- [20] E. Ott; “*Chaos in Dynamical Systems*”; Cambridge University Press (1993).
- [21] H. Goldstein; “*Classical Mechanics*”; 2^aed. Addison-Wesley (1980).
- [22] S. H. Strogatz; “*Nonlinear Dynamics and Chaos*”; Westview Press (2000).
- [23] K. T. Alligood, T. D. Sauer e J. A. Yorke; “*Chaos - an Introduction to Dynamical Systems*”; Springer-Verlag, NY (1996).