UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

LUCAS PERES DE SOUZA

MÉTODO DO PONTO MATERIAL COM SUBDOMÍNIOS INTERPOLADOS EM PARTÍCULAS SUPERCONVERGENTES

CURITIBA

2022

LUCAS PERES DE SOUZA

MÉTODO DO PONTO MATERIAL COM SUBDOMÍNIOS INTERPOLADOS EM PARTÍCULAS SUPERCONVERGENTES

Trabalho apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil pelo Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Marco André Argenta

CURITIBA

2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Souza, Lucas Peres de
Método do ponto material com subdomínios interpolados em partículas superconvergentes / Lucas Peres de Souza. – Curitiba, 2022.
1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Orientador: Marco André Argenta

1. Análise estrutural (Engenharia). 2. Teorias não lineares. 3. Mecânica da fratura. 4. Partículas superconvergentes. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Argenta, Marco André. IV. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA CIVIL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **LUCAS PERES DE SOUZA** intitulada: **Método do ponto material com subdomínios interpolados em partículas superconvergentes**, sob orientação do Prof. Dr. MARCO ANDRE ARGENTA, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 17 de Outubro de 2022.

Assinatura Eletrônica
18/10/2022 08:02:46.0
MARCO ANDRE ARGENTA
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
17/10/2022 18:33:44.0
JOÃO ELIAS ABDALLA FILHO
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
18/10/2022 10:51:45.0
LUIZ ALKIMIN DE LACERDA
Avaliador Externo (INSTITUTO DE TECNOLOGIA PARA O DESENVOLVIMENTO)

Assinatura Eletrônica
18/10/2022 10:25:56.0
ROBERTO DALLEDONE MACHADO
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Documento assinado eletronicamente de acordo com o disposto na legislação federal Decreto 8539 de 08 de outubro de 2015.
Gerado e autenticado pelo SIGA-UFPR, com a seguinte identificação única: 227747
Para autenticar este documento/assinatura, acesse https://www.prppg.ufpr.br/siga/visitante/autenticacaoassinaturas.jsp e insira o codigo 227747

AGRADECIMENTOS

À Gabriela, por todo o amor, força e carinho recebidos a todo momento.

Aos meus pais, Alexandre e Alessandra, pelos ensinamentos valiosos e pelo suporte dado durante toda a minha trajetória.

Aos meus irmãos, Mateus, Tiago e Pedro, pela necessária descontração nos períodos difíces.

Ao meu orientador, professor Marco André Argenta, pelas incontáveis reuniões dedicadas ao trabalho e pelos conhecimentos compartilhados.

À CAPES e à Fundação Araucária, pelo suporte financeiro durante o período de doutorado.

À Universidade Federal do Paraná, por me acolher desde 2010, na graduação, no mestrado e no doutorado.

RESUMO

Este trabalho tem com objetivo geral a utilização do método do ponto material (MPM) na avaliação mecânica de estruturas em um procedimento dinâmico com não linearidades físicas e geométricas. Para isso, desenvolvem-se modificações na formulação original do MPM, consolidando o que aqui se denomina *superconvergent particle subdomain interpolation* (SPSI) material point method ou método do ponto material com subdomínios interpolados em partículas superconvergentes (MPM SPSI). Nessa nova abordagem, voltada para a análise plana, discretizam-se os corpos contínuos com uma malha Lagrangiana formada por subdomínios quadrilaterais de nove vértices, com interpolação interna quadrática. Com exceção das massas, guardadas nos centros de massa, as demais variáveis de estado (velocidades, tensões e deformações) são armazenadas nos pontos de Gauss - ou pontos superconvergentes - desses subdomínios. Essas informações são mapeadas até os nós de uma malha fixa Euleriana, onde a equação de balanço da energia mecânica é resolvida, com o auxílio de funções de interpolação, que podem ser lineares ou B-splines cúbicas. Como novas contribuições do MPM SPSI também estão: um procedimento de atualização das tensões baseado nas deformações finitas Lagrangianas e no segundo tensor de tensões de Piolla-Kirchhoff; uma formulação que permite tanto análises de estado plano de tensões quanto de deformações; e a possibilidade de se levar em conta um modelo de amortecimento local não viscoso. Além disso, dadas as potencialidades do método, propõe-se: a incorporação ao MPM SPSI do modelo de dano escalar isotrópico de Rankine com amolecimento linear na tração; um esquema de particionamento do domínio, permitindo a abertura de fraturas explícitas em função da danificação; e um método de cálculo de forças de contato entre subdomínios fundamentado no método de Hertz de contato entre cilindros de eixos paralelos, incluindo o atrito tangencial ao contato. Todas essas hipóteses são implementadas computacionalmente e, então, busca-se primeiramente uma análise de consistência frente a resultados experimentais. A comparação dos resultados demonstra que o MPM SPSI é capaz de reproduzir razoavelmente as não linearidades de um ensaio de flexão de três pontos de uma viga de concreto simples, apesar das limitações colocadas para a pesquisa. Também são processados dez diferentes modelos computacionais, cinco deles desconsiderando a danificação e o fraturamento e outros cinco levando isso em conta. Com os resultados, é possível validar de maneira satisfatória as hipóteses levantadas, bem como estabelecer vantagens e desvantagens do uso do MPM SPSI.

Palavras-chaves: análise não linear; dano; fratura; método do ponto material; partículas superconvergentes.

ABSTRACT

This work aims the application of the material point method (MPM) to mechanical structural analyses considering dynamics and geometric and physical nonlinearities. To accomplish this, changes on the original MPM formulation are purposed, resulting in the superconvergent particle subdomain interpolation material point method (SPSI MPM or MPM SPSI). In this new approach, focused on plane analysis, continuum bodies are discretized in nine-vertices quadrilateral subdomains with quadratic internal interpolation. Excepting the masses, which are stored in subdomains' centers of mass, other state variables (velocities, stresses and strains) are tracked in subdomains' Gauss points (or superconvergent points). Such information is mapped to Eulerian nodes, where mechanical energy balance equation is solved, using linear or cubic B-spline interpolation functions. Remarkable new contributions of MPM SPSI are: a stress update procedure based on Lagrangian finite strains and second Piola-Kirchhoff stress tensors; a formulation which enables both plane stress and plane strain analyses; and the possibility of taking non-viscous local damping into account. Besides that, considering MPM SPSI capacity, it is studied: the incorporation of Rankine's scalar damage method with linear softening in tension; a domain partitioning scheme, allowing explicit fracture opening according to damage model; and a method of contact forces calculation between subdomains, based on Hertz' contact between two parallel axes cylinders, including tangential friction. All hypotheses are computationally implemented, and a consistency analysis against experimental results is performed. The comparison of simulation results against experimental ones shows MPM SPSI ability to reasonably reproduce the nonlinearities inherent in a three-point bending test of a concrete beam, despite the established research limits. Ten different models are also processed, five of them without damage and fracture and five more with damage and fracture consideration. With the results, raised hypotheses are successfully validated and MPM SPSI vantages and disadvantages can be listed.

Key-words: damage. fracture. nonlinear analysis. material point method. superconvergent particles.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – MOVIMENTO DE UM CORPO CONTÍNUO E DEFORMAÇÕES INFINITESIMAIS. 31
FIGURA 2 – MUDANÇA DE VOLUME DE UM ELEMENTO INFINITESIMAL. . 33
FIGURA 3 – EQUILÍBRIO INTERNO NO CORPO CONTÍNUO DE DOMÍNIO Ω. 41
FIGURA 4 – DISCRETIZAÇÃO DO CORPO CONTÍNUO PELO MPM. 53
FIGURA 5 – FLUXOGRAMA GERALMENTE UTILIZADO NA IMPLEMENTAÇÃO DO MPM EM SEU FORMATO ORIGINAL. 67
FIGURA 6 – FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO LINEARES EM 2 DIMENSÕES. 69
FIGURA 7 – FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO B-SPLINES CÚBICAS EM 2 DIMENSÕES. 69
FIGURA 8 – ESQUEMA DE MONITORAMENTO DOS SUBDOMÍNIOS PELO CPDI. 75
FIGURA 9 – REPRESENTAÇÃO DO SUBDOMÍNIO Ω_P PELO ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO BILINEAR LAGRANGIANO. 75
FIGURA 10 – TENSÕES VERTICAIS DURANTE O COLAPSO DE UMA COLUNA DE SOLO. 82
FIGURA 11 – MODELO DE DANO DE RANKINE COM AMOLECIMENTO LINEAR. 84

FIGURA 12 – SUBDOMÍNIO Ω_P BIQUADRÁTICO LAGRANGIANO. 106
FIGURA 13 – B-SPLINES CÚBICAS UNIDIMENSIONAIS UTILIZADAS NA COMPOSIÇÃO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO NODAIS BIDIMENSIONAIS 109
FIGURA 14 – ESQUEMA GERAL DO MPM SPSI PROPOSTO 110
FIGURA 15 – ALGORITMO GERAL DO MPM SPSI. 121
FIGURA 16 – CONSIDERAÇÃO DE RUPTURA ENTRE OS PONTOS SUPERCONVERGENTES. 127
FIGURA 17 – CÁLCULO DAS FORÇAS DE CONTATO ENTRE SUBDOMÍNIOS. 129
FIGURA 18 – POSSÍVEIS CONTATOS ENTRE UM PONTO DE GAUSS E OUTROS PONTOS SUPERCONVERGENTES PRÓXIMOS DE OUTROS SUBDOMÍNIOS. 132
FIGURA 19 – CÁLCULO DAS FORÇAS DE CONTATO ENTRE PONTOS DE GAUSS DE SUBDOMÍNIOS DIFERENTES. 134
FIGURA 20 – FLUXOGRAMA GERAL DO SPSI ESTENDIDO COM DANO ISOTRÓPICO NA TRAÇÃO E FRATURA. 140

FIGURA 21 – PROCESSO A: PARTICIONAMENTO DOS SUBDOMÍNIOS EM DIFERENTES CAMPOS DE VELOCIDADES E CÁLCULO DAS FORÇAS DE CONTATO ENTRE SUBDOMÍNIOS. 142
FIGURA 22 – PROCESSO B: CÁLCULO DAS VARIÁVEIS NODAIS E ATUALIZAÇÃO DOS SUBDOMÍNIOS QUANDO HÁ DOIS CAMPO DE VELOCIDADES. 143
FIGURA 23 – PROCESSO C: CÁLCULO DO DANO E CORREÇÃO DOS TENSORES DE TENSÕES DE CAUCHY DOS PONTOS DE GAUSS. 144
FIGURA 24 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO EXPERIMENTAL. 145
FIGURA 25 – MALHA LAGRANGIANA DO MODELO DE COMPARAÇÃO COM TESTE EXPERIMENTAL. 146
FIGURA 26 – MALHA EULERIANA DO MODELO DE COMPARAÇÃO COM TESTE EXPERIMENTAL. 146
FIGURA 27 – EVOLUÇÃO DO CARREGAMENTO DO MODELO DE VALIDAÇÃO.147
FIGURA 28 – DEMAIS DADOS DE ENTRADA DO MODELO DE VALIDAÇÃO. . 147
FIGURA 29 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO A. . . . 148
FIGURA 30 – DADOS DE ENTRADA DOS SUBMODELOS A-8X2-8X2-4. . . . 150
FIGURA 31 – DADOS DE ENTRADA DOS SUBMODELOS A-8X2-8X2-9. . . . 151
FIGURA 32 – DADOS DE ENTRADA DOS SUBMODELOS A-8X2-32X8-4. . . . 152
FIGURA 33 – DADOS DE ENTRADA DOS SUBMODELOS A-8X2-32X8-9. . . . 153
FIGURA 34 – DADOS DE ENTRADA DOS SUBMODELOS A-16X4-16X4-4. . . 154
FIGURA 35 – DADOS DE ENTRADA DOS SUBMODELOS A-16X4-16X4-9. . . 155
FIGURA 36 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO B. . . . 155
FIGURA 37 – DADOS DE ENTRADA DO MODELO B. 156
FIGURA 38 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO C. . . . 156
FIGURA 39 – DADOS DE ENTRADA DO MODELO C. 157
FIGURA 40 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO D. . . . 158
FIGURA 41 – DADOS DE ENTRADA DO MODELO D. 159
FIGURA 42 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO E. . . . 160
FIGURA 43 – DADOS DE ENTRADA DOS SUBMODELOS E COM 4 PONTOS DE GAUSS POR SUBDOMÍNIO. 161
FIGURA 44 – DADOS DE ENTRADA DOS SUBMODELOS E COM 9 PONTOS DE GAUSS POR SUBDOMÍNIO. 162
FIGURA 45 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO F. . . . 163
FIGURA 46 – MALHA LAGRANGIANA DO MODELO F. 163
FIGURA 47 – MALHA EULERIANA DO MODELO F. 164
FIGURA 48 – EVOLUÇÃO DO CARREGAMENTO NOS MODELOS F, G, H, I E J.164
FIGURA 49 – DEMAIS DADOS DE ENTRADA DO MODELO F. 165

FIGURA 50 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO G. . . . 165
FIGURA 51 – MALHA LAGRANGIANA DO MODELO G. 166
FIGURA 52 – MALHA EULERIANA DO MODELO G. 166
FIGURA 53 – DEMAIS DADOS DE ENTRADA DO MODELO G. 167
FIGURA 54 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO H. . . . 167
FIGURA 55 – MALHA LAGRANGIANA DO MODELO H. 168
FIGURA 56 – MALHA EULERIANA DO MODELO H. 168
FIGURA 57 – DEMAIS DADOS DE ENTRADA DO MODELO H. 169
FIGURA 58 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO I. . . . 169
FIGURA 59 – MALHA LAGRANGIANA DO MODELO I. 169
FIGURA 60 – MALHA EULERIANA DO MODELO I. 170
FIGURA 61 – DEMAIS DADOS DE ENTRADA DO MODELO I. 170
FIGURA 62 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO J. . . . 171
FIGURA 63 – MALHA LAGRANGIANA DO MODELO J. 171
FIGURA 64 – MALHA EULERIANA DO MODELO J. 172
FIGURA 65 – DEMAIS DADOS DE ENTRADA DO MODELO J. 172

FIGURA 66 – MONITORAMENTO DA ABERTURA DA FRATURA CONFORME O TESTE EXPERIMENTAL. 173
FIGURA 67 – MONITORAMENTO DA ABERTURA DA FRATURA E DAS REAÇÕES DE APOIO DO MODELO DE VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL COM O MPM SPSI. 174
FIGURA 68 – COMPARAÇÃO ENTRE OS DIAGRAMAS ABERTURA DA FRATURA-CARREGAMENTO MEDIDOS EXPERIMENTALMENTE E COM O MPM SPSI. 175

FIGURA 69 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{XX} NOS SUBMODELOS A-8X2-8X2. 179
FIGURA 70 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{YY} NOS SUBMODELOS A-8X2-8X2. 180
FIGURA 71 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{XY} NOS SUBMODELOS A-8X2-8X2. 181
FIGURA 72 – INDICAÇÃO DOS PONTOS DE GAUSS À ESQUERDA (EM VERMELHO) E À DIREITA (EM AZUL) DA SEÇÃO CENTRAL PARA SUBMODELOS A-8X2-8X2. 181
FIGURA 73 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{XX} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-8X2-8X2. 182
FIGURA 74 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{YY} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-8X2-8X2. 183

FIGURA 75 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{XY} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-8X2-8X2. 184
FIGURA 76 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{XX} NOS SUBMODELOS A-8X2-32X8. 185
FIGURA 77 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{YY} NOS SUBMODELOS A-8X2-32X8. 186
FIGURA 78 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{XY} NOS SUBMODELOS A-8X2-32X8. 187
FIGURA 79 – INDICAÇÃO DOS PONTOS DE GAUSS À ESQUERDA (EM VERMELHO) E À DIREITA (EM AZUL) DA SEÇÃO CENTRAL PARA SUBMODELOS A-8X2-32X8. 187
FIGURA 80 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{XX} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-8X2-32X8. 188
FIGURA 81 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{YY} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-8X2-32X8. 189
FIGURA 82 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{XY} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-8X2-32X8. 190
FIGURA 83 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{XX} NOS SUBMODELOS A-16X4-16X4. 191
FIGURA 84 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{YY} NOS SUBMODELOS A-16X4-16X4. 192
FIGURA 85 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{XY} NOS SUBMODELOS A-16X4-16X4. 193
FIGURA 86 – INDICAÇÃO DOS PONTOS DE GAUSS À ESQUERDA (EM VERMELHO) E À DIREITA (EM AZUL) DA SEÇÃO CENTRAL PARA SUBMODELOS A-16X4-16X4. 193
FIGURA 87 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{XX} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-16X4-16X4. 194
FIGURA 88 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{YY} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-16X4-16X4. 195
FIGURA 89 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{XY} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-16X4-16X4. 196
FIGURA 90 – VARIAÇÕES DE ENERGIA MECÂNICA AO LONGO DA ANÁLISE DO MODELO B. 197
FIGURA 91 – DESLOCAMENTOS *VERSUS* CARGA AXIAL NO PONTO MÉDIO DA EXTREMIDADE LIVRE DA BARRA DO MODELO B. 199
FIGURA 92 – CONFIGURAÇÕES DO MODELO B NA SITUAÇÃO INDEFORMADA E NAS SITUAÇÕES DEFORMADAS DOS PONTOS VERMELHO, AZUL E LARANJA IDENTIFICADOS. 200

FIGURA 93 – VARIAÇÕES DE DESLOCAMENTO EM Y NO PONTO DE GAUSS DE GAUSS $G = 5$ DO SUBDOMÍNIO MAIS INFERIOR DA EXTREMIDADE LIVRE DA LAJE. 201
FIGURA 94 – VARIAÇÕES DA ENERGIA MECÂNICA POTENCIAL TOTAL E DO TRABALHO DAS FORÇAS DE CORPO DO MODELO C. . . 202
FIGURA 95 – CONFIGURAÇÕES DEFORMADAS DOS SUBMODELOS C-L E C-B AO LONGO DA ANÁLISE. 203
FIGURA 96 – CONFIGURAÇÕES DEFORMADAS PRODUZIDAS PELO MPM CPDI COM OS MESMOS DADOS DE ENTRADA DO MODELO C. 203
FIGURA 97 – VARIAÇÕES DE DESLOCAMENTO EM Y DO PONTO DE GAUSS $G = 5$ DO SUBDOMÍNIO IMEDIATAMENTE À ESQUERDA DO PONTO MÉDIO DA FACE INFERIOR DO BLOCO. 204
FIGURA 98 – VARIAÇÕES DA ENERGIA MECÂNICA POTENCIAL TOTAL E DO TRABALHO DAS FORÇAS DE CORPO DO MODELO D. . . 204
FIGURA 99 – CONFIGURAÇÕES DEFORMADAS DOS SUBMODELOS D-L E D-B AO LONGO DA ANÁLISE. 205
FIGURA 100–CONFIGURAÇÕES DEFORMADAS PRODUZIDAS PELO MPM CPDI COM OS MESMOS DADOS DE ENTRADA DO MODELO D. 205
FIGURA 101–VARIAÇÕES NO TEMPO DO CARREGAMENTO, DOS DESLOCAMENTOS E DAS VELOCIDADES NA EXTREMIDADE LIVRE E DA ENERGIA POTENCIAL MECÂNICA TOTAL DOS SUBMODELOS E-L-4. 207
FIGURA 102–VARIAÇÕES NO TEMPO DO CARREGAMENTO, DOS DESLOCAMENTOS E DAS VELOCIDADES NA EXTREMIDADE LIVRE E DA ENERGIA POTENCIAL MECÂNICA TOTAL DOS SUBMODELOS E-L-9. 208
FIGURA 103–VARIAÇÕES NO TEMPO DO CARREGAMENTO, DOS DESLOCAMENTOS E DAS VELOCIDADES NA EXTREMIDADE LIVRE E DA ENERGIA POTENCIAL MECÂNICA TOTAL DOS SUBMODELOS E-B-4. 209
FIGURA 104–VARIAÇÕES NO TEMPO DO CARREGAMENTO, DOS DESLOCAMENTOS E DAS VELOCIDADES NA EXTREMIDADE LIVRE E DA ENERGIA POTENCIAL MECÂNICA TOTAL DOS SUBMODELOS E-B-9. 210
FIGURA 105–LINHA DO TEMPO DAS CONFIGURAÇÕES MOSTRADAS NAS ALÍNEAS (a) A (j) DAS FIGURAS 106 a 135. 211
FIGURA 106–TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO F (kN/cm^2) - PARTE 1. 213

FIGURA 107–TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO F (kN/cm^2) - PARTE 2. 214
FIGURA 108–TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO F (kN/cm^2) - PARTE 1. 215
FIGURA 109–TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO F (kN/cm^2) - PARTE 2. 216
FIGURA 110–DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO F - PARTE 1. 217
FIGURA 111–DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO F - PARTE 2. 218
FIGURA 112–TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO G (kN/cm^2) - PARTE 1. 220
FIGURA 113–TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO G (kN/cm^2) - PARTE 2. 221
FIGURA 114–TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO G (kN/cm^2) - PARTE 1. 222
FIGURA 115–TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO G (kN/cm^2) - PARTE 2. 223
FIGURA 116–DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO G - PARTE 1. 224
FIGURA 117–DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO G - PARTE 2. 225
FIGURA 118–TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO H (kN/cm^2) - PARTE 1. 227
FIGURA 119–TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO H (kN/cm^2) - PARTE 2. 228
FIGURA 120–TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO H (kN/cm^2) - PARTE 1. 229
FIGURA 121–TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO H (kN/cm^2) - PARTE 2. 230
FIGURA 122–DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO H - PARTE 1. 231
FIGURA 123–DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO H - PARTE 2. 232
FIGURA 124–TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO I (kN/cm^2) - PARTE 1. 233
FIGURA 125–TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO I (kN/cm^2) - PARTE 2. 234

FIGURA 126–TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO I (kN/cm^2) - PARTE 1. 235
FIGURA 127–TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO I (kN/cm^2) - PARTE 2. 236
FIGURA 128–DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO I - PARTE 1. 237
FIGURA 129–DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO I - PARTE 2. 238
FIGURA 130–TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO J (kN/cm^2) - PARTE 1. 240
FIGURA 131–TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO J (kN/cm^2) - PARTE 2. 241
FIGURA 132–TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO J (kN/cm^2) - PARTE 1. 242
FIGURA 133–TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO J (kN/cm^2) - PARTE 2. 243
FIGURA 134–DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO J - PARTE 1. 244
FIGURA 135–DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO J - PARTE 2. 245

FIGURA 136–FRATURA DE TRAÇÃO QUE SURGE DO LAGO ESQUERDO NO MODELO F. 255
FIGURA 137–FRATURA VERTICAL PRINCIPAL QUE SURGE NO MODELO G. 256
FIGURA 138–FRATURA HORIZONTAL QUE SURGE NO MODELO G À DIREITA DO CENTRO DO DISCO. 257
FIGURA 139–AMPLIAÇÃO VISUAL DA REGIÃO SUPERIOR DO MODELO G PARA AVALIAÇÃO DA INTERPENETRAÇÃO ENTRE SUBDOMÍNIOS. 257
FIGURA 140–FRATURA PRINCIPAL INCLINADA QUE SURGE NO MODELO H. 259
FIGURA 141–AMPLIAÇÃO VISUAL DA REGIÃO INFERIOR ESQUERDA DO MODELO G PARA AVALIAÇÃO DA INTERPENETRAÇÃO ENTRE SUBDOMÍNIOS. 260
FIGURA 142–FRATURA VERTICAL DE FLEXÃO NA SEÇÃO MÉDIA DA VIGA DO MODELO I. 261
FIGURA 143–FRATURA HORIZONTAL DE FLEXÃO PRÓXIMA À BASE DO PILAR ESQUERDO DO MODELO I. 262
FIGURA 144–AMPLIAÇÃO VISUAL DA REGIÃO SUPERIOR DA SEÇÃO CENTRAL DO MODELO I PARA AVALIAÇÃO DA INTERPENETRAÇÃO ENTRE SUBDOMÍNIOS. 262

FIGURA 145–FRATURA VERTICAL DE FLEXÃO PRÓXIMA À SEÇÃO CENTRAL DA VIGA SUPERIOR DO MODELO J. 264
FIGURA 146–FRATURA VERTICAL DE TRAÇÃO NO LADO ESQUERDO DA CINTA INFERIOR DO MODELO J. 265
FIGURA 147–FRATURA VERTICAL DE FLEXÃO NA CONEXÃO ENTRE O PILAR ESQUERDO E A VIGA SUPERIOR DO MODELO J. . . . 265
FIGURA 148–AMPLIAÇÃO VISUAL DA REGIÃO SUPERIOR DA SEÇÃO CENTRAL DA VIGA SUPERIOR DO MODELO J PARA AVALIAÇÃO DA INTERPENETRAÇÃO ENTRE SUBDOMÍNIOS. 266

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – COMPARAÇÃO ENTRE ESQUEMAS USF E USL 70

TABELA 2 – ARESTAS DE CONTATO DOS PONTOS DE GAUSS PARA 4 PONTOS SUPERCONVERGENTES 133

TABELA 3 – ARESTAS DE CONTATO DOS PONTOS DE GAUSS PARA 9 PONTOS SUPERCONVERGENTES 133

TABELA 4 – SUBMODELOS A. 149

TABELA 5 – SUBMODELOS E. 160

TABELA 6 – CARGAS DE INÍCIO DA DANIFICAÇÃO E DE RUPTURA DOS MODELOS F A J. 212

LISTA DE ABREVIATURAS E DE SIGLAS

AMPLE *a material point method learning environment*/ambiente de aprendizado do método do ponto material

APIC *affine particle-in-cell method*/método partícula na célula com velocidade localmente afim

CMPM *composite material point method*/método do ponto material composto

CPDI *convected particle domain interpolation*/interpolação do domínio convectivo da partícula

EPD estado plano de deformações

EPT estado plano de tensões

GIMP *generalized interpolation material point method*/ método do ponto material com interpolação generalizada

MEF método de elementos finitos

MPM método do ponto material

MUSL *modified update-stress-last*/atualização modificada das tensões no final do passo de tempo

PIC *particle-in-cell method*/método partícula na célula

SGMPM *staggered grid material point method/método do ponto material com malha de fundo escalonada*

SPSI *superconvergent particle subdomain interpolation*/subdomínios interpolados em partículas superconvergentes

USF *update-stress-first*/atualização das tensões no início do passo de tempo

USL *update-stress-last*/atualização das tensões no final do passo de tempo

cpGIMP *contiguous particle* GIMP/GIMP com deformação volumétrica dos subdomínios

uGIMP *unchanged for all time* GIMP/GIMP sem alteração geométrica dos subdomínios

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO 22
1.1 PROBLEMA DE PESQUISA 24
1.2 HIPÓTESES 24
1.3 OBJETIVOS GERAL E ESPECÍFICOS 25
1.4 JUSTIFICATIVA 26
1.5 CONTRIBUIÇÕES CIENTÍFICAS 26
1.6 LIMITES DA PESQUISA 28
1.7 ESTRUTURA DO TRABALHO 28
2 REVISÃO DA LITERATURA 30
2.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO 30
2.1.1 Cinemática do contínuo 30
2.1.1.1 Gradiente material de deformações 31
2.1.1.2 Gradientes material e espacial de velocidades 33
2.1.1.3 Tensores taxa de deformação e taxa de rotação 33
2.1.1.4 Gradientes material e espacial de deslocamentos . . . 34
2.1.1.5 Tensor de deformações finitas de Green-Lagrange . . . 36
2.1.1.6 Tensor de pequenas deformações 36
2.1.1.7 Derivadas no tempo das variáveis cinemáticas 37
2.1.1.7.1 Derivada no tempo do tensor de deformações finitas de Green-Lagrange 37
2.1.1.7.2 Derivada no tempo do tensor de pequenas deformações 38
2.1.1.7.3 Derivada no tempo do determinante do gradiente material de deformações 38
2.1.2 Tensões 40
2.1.2.1 Tensor de tensões de Cauchy 40
2.1.2.2 Segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff 41
2.1.2.3 Relação entre as derivadas no tempo dos tensores de tensões 42
2.1.3 Relação constitutiva para materiais elásticos isotrópicos 43
2.1.4 Teorias de estado plano (tensões e deformações) 43
2.1.5 Equações fundamentais da mecânica do contínuo 44
2.1.5.1 Teorema de transporte de Reynolds 45
2.1.5.2 Conservação de massa 46
2.1.5.3 Conservação do momento linear 46
2.1.5.4 Conservação do momento angular 47
2.1.5.5 Conservação de energia 49
2.1.5.5.1 Derivada da energia cinética no tempo 49

2.1.5.5.2 Potência mecânica interna e externa 50
2.1.5.5.3 Equação de balanço da energia mecânica . . . 52
2.2 MÉTODO DO PONTO MATERIAL (MPM) 52
2.2.1 Interpolação espacial 52
2.2.2 Discretização da equação de balanço da energia mecânica em subdomínios 54
2.2.3 MPM original - Sulsky et al. (1994) 55
2.2.3.1 Cálculo das variáveis nodais 55
2.2.3.2 Atualização dos momentos lineares nodais 57
2.2.3.2.1 Integração temporal explícita 58
2.2.3.2.2 Integração temporal implícita 60
2.2.3.3 Imposição das condições de contorno essenciais 63
2.2.3.4 Atualização das variáveis de estado dos pontos materiais 64
2.2.3.4.1 Velocidades e posições 64
2.2.3.4.2 Gradientes materiais de deformações 64
2.2.3.4.3 Tensões 64
2.2.3.5 Ciclo convencional do MPM original 65
2.2.4 Funções de interpolação 66
2.2.5 Esquemas de atualização de tensões 69
2.2.6 Amortecimento local 71
2.2.7 Método do ponto material com interpolação do domínio convectivo da partícula (MPM CPDI) 72
2.2.7.1 Monitoramento dos subdomínios 74
2.2.7.2 Integrais de subdomínio 76
2.2.7.3 Cálculo das variáveis nodais 78
2.2.7.4 Atualização dos subdomínios 79
2.2.7.5 Vantagens e desvantagens do CPDI 80
2.2.8 Imprecisões nas tensões no MPM 80
2.3 MÉTODO DE HOMEL & HERBOLD (2016) PARA O PARTICIONAMENTO POR FRATURA NO MPM 83
2.3.1 Modelo de dano 83
2.3.2 Campo de dano escalar 85
2.3.3 Gradiente espacial do campo de dano escalar 86
2.3.4 Identificação de diferentes campos de velocidade em um nó . . . 87
2.3.5 Condição de separabilidade em um nó 88
2.3.6 Determinação das forças de contato em caso de separação . . . 89
2.3.6.1 Normais e tangentes de superfície dos campos de velocidade 89
2.3.6.2 Garantia da impenetrabilidade no início do passo de tempo 90
2.3.6.3 Garantia da impenetrabilidade no final do passo de tempo 91

2.3.7 Considerações sobre o Método de Homel e Herbold (2016) . . . 93
3 ESTADO DA ARTE . . . 94
3.1 COMENTÁRIOS . . . 104
4 METODOLOGIA . . . 105
4.1 SUBDOMÍNIOS INTERPOLADOS EM PARTÍCULAS SUPERCONVERGENTES (MPM SPSI) . . . 105
4.1.0.1 Subdomínios e interpolação interna biquadrática . . . 106
4.1.0.2 Interpolação nodal . . . 107
4.1.1 Cálculo das variáveis nodais . . . 109
4.1.1.1 Massas agrupadas . . . 110
4.1.1.2 Momentos lineares . . . 112
4.1.1.3 Forças internas . . . 113
4.1.1.4 Forças externas de corpo . . . 114
4.1.1.5 Forças externas de superfície . . . 114
4.1.1.6 Forças de amortecimento local não viscoso . . . 115
4.1.1.7 Forças nodais totais . . . 115
4.1.2 Aplicação das condições de contorno essenciais . . . 115
4.1.3 Atualização dos momentos lineares nodais por integração temporal explícita de Euler . . . 116
4.1.4 Mapeamento das variáveis nodais atualizadas de volta para a malha Lagrangiana . . . 116
4.1.4.1 Posições atualizadas dos vértices . . . 116
4.1.4.2 Velocidades atualizadas dos pontos de Gauss . . . 117
4.1.4.3 Gradientes espaciais de velocidades dos pontos de Gauss 117
4.1.4.4 Tensores taxa de deformação nos pontos de Gauss . . . 118
4.1.4.5 Gradientes de deformações atualizados nos pontos de Gauss . . . 118
4.1.4.6 Derivadas no tempo dos tensores de deformações finitas de Green-Lagrange nos pontos de Gauss . . . 118
4.1.4.7 Deformações finitas de Green-Lagrange atualizadas nos pontos de Gauss . . . 119
4.1.4.8 Tensores taxa de deformação e gradiente espacial de velocidades em 3 dimensões . . . 119
4.1.4.9 Gradientes materiais de deformações tridimensionais atualizados nos pontos de Gauss . . . 119
4.1.4.10 Tensões de Piola-Kirchhoff atualizadas nos pontos de Gauss . . . 120
4.1.4.11 Tensões de Cauchy atualizadas nos pontos de Gauss . 120
4.1.4.12 Dimensão fora do plano atualizada dos pontos de Gauss 120
4.1.4.13 Densidade de massa atualizada nos pontos de Gauss . 120

4.1.5 Fluxograma geral do MPM SPSI 120
4.2 MPM SPSI ESTENDIDO COM DANO ISOTRÓPICO NA TRAÇÃO E FRATURA 123
4.2.1 Dano nos pontos de Gauss 124
4.2.2 Correção do tensor de tensões de Cauchy nos pontos de Gauss pelo dano 124
4.2.3 Cálculo das tensões e direções principais dos tensores de Cauchy 125
4.2.4 Ruptura e particionamento dos subdomínios 126
4.2.5 Forças de contato 128
4.2.5.1 Forças de contato na direção que liga os centros de massa de dois subdomínios 128
4.2.5.2 Forças de contato entre pontos de Gauss de subdomínios diferentes 132
4.2.6 Variáveis nodais considerando 2 campos de velocidades 136
4.2.7 Atualização dos subdomínios por nós com 2 campos de velocidades 138
4.2.8 Fluxograma geral do MPM SPSI estendido com dano isotrópico na tração e fratura 139
4.3 MODELOS UTILIZADOS PARA A VERIFICAÇÃO DO MPM SPSI 144
4.3.1 Modelo para análise de consistência frente a resultados experimentais 145
4.3.2 Análises sem danificação e fratura 148
4.3.2.1 Modelo A - viga engastada-livre sob carregamento quase estático distribuído uniformemente 148
4.3.2.2 Modelo B - barra engastada-livre sob carregamento quase estático de compressão sofrendo instabilidade . 151
4.3.2.3 Modelo C - laje engastada-livre sob ação da gravidade 154
4.3.2.4 Modelo D - bloco sob a ação de gravidade extrema . . 158
4.3.2.5 Modelo E - viga engastada-livre com diferentes coeficientes de amortecimento 159
4.3.3 Análises com danificação e fratura 161
4.3.3.1 Modelo F - Tração simples 162
4.3.3.2 Modelo G - Compressão diametral 164
4.3.3.3 Modelo H - Consolo curto 165
4.3.3.4 Modelo I - Pórtico 167
4.3.3.5 Modelo J - Parede com abertura 170
5 ANÁLISE DE CONSISTÊNCIA FRENTE A RESULTADOS EXPERIMENTAIS 173
6 RESULTADOS 178
6.1 ANÁLISES SEM DANIFICAÇÃO E FRATURA 178
6.1.1 Modelo A - viga engastada-livre sob carregamento quase estático distribuído uniformemente 178

6.1.1.1 Submodelos A-8x2-8x2 178
6.1.1.2 Submodelos A-8x2-32x8 179
6.1.1.3 Submodelos A-16x4-16x4 179
6.1.2 Modelo B - barra engastada-livre sob carregamento quase estático de compressão sofrendo instabilidade 197
6.1.3 Modelo C - laje engastada-livre sob ação da gravidade 201
6.1.4 Modelo D - bloco sob a ação de gravidade extrema 201
6.1.5 Modelo E - viga engastada-livre com diferentes coeficientes de amortecimento 206
6.2 ANÁLISES COM DANIFICAÇÃO E FRATURA 211
6.2.1 Modelo F - Tração simples 212
6.2.2 Modelo G - Compressão diametral 219
6.2.3 Modelo H - Consolo curto 226
6.2.4 Modelo I - Pórtico 233
6.2.5 Modelo J - Parede com abertura 239
7 DISCUSSÕES 246
7.1 ANÁLISES SEM DANIFICAÇÃO E FRATURA 246
7.1.1 Modelo A - viga engastada-livre sob carregamento quase estático distribuído uniformemente 246
7.1.2 Modelo B - barra engastada-livre sob carregamento quase estático de compressão sofrendo instabilidade 248
7.1.3 Modelo C - laje engastada-livre sob ação da gravidade 249
7.1.4 Modelo D - bloco sob a ação de gravidade extrema 250
7.1.5 Modelo E - viga engastada-livre com diferentes coeficientes de amortecimento 251
7.1.6 Correlação entre as análises dos modelos A a E e as hipóteses . 252
7.2 ANÁLISES COM DANIFICAÇÃO E FRATURA 254
7.2.1 Modelo F - Tração simples 254
7.2.2 Modelo G - Compressão diametral 255
7.2.3 Modelo H - Consolo curto 258
7.2.4 Modelo I - Pórtico 259
7.2.5 Modelo J - Parede com abertura 263
7.2.6 Correlação entre as análises dos modelos F a J e as hipóteses . 265
8 CONCLUSÕES 268
REFERÊNCIAS 272

1 INTRODUÇÃO

Situações de análise que exigem a consideração efetiva de não linearidades são comuns na engenharia, o que torna a avaliação técnica bastante complexa. Casos como a perda de estabilidade de pilares, o colapso de solos e situações envolvendo impacto costumam requisitar soluções por métodos computacionais avançados, que vão além das simplificações delimitadas pelas teorias da Resistência dos Materiais.

O método do ponto material (MPM) - um método numérico de análise não linear dinâmica explícita - tem mostrado, por meio de pesquisas científicas que iniciaram com Sulsky et al. (1994) e continuam em pleno desenvolvimento atualmente, uma alta capacidade em tratar essas não linearidades. Resumidamente, no MPM discretizam-se: (a) os corpos contínuos Ω em um número finito de subdomínios Ω_p (malha Lagrangiana); (b) o domínio de análise em uma malha Euleriana fixa de fundo, formada por células delimitadas por nós e; (c) o domínio do tempo em um número finito de incrementos.

A malha Lagrangiana do MPM armazena as variáveis de estado (posições, massas, velocidades, deformações e tensões) ao longo do tempo de análise. Isso é feito, via de regra, nos centros de massa dos subdomínios, chamados de pontos materiais ou partículas. Pelo fato de se representar um subdomínio volumétrico como um ponto material, no MPM não monitora-se explicitamente a mudança de forma e, consequentemente, os contornos dos corpos analisados. Há apenas uma nuvem de pontos materiais, portadores das variáveis, que movem-se pela malha Euleriana.

Na malha Euleriana, que geralmente é regular, calculam-se os gradientes espaciais, resolvem-se as equações de equilíbrio e atualizam-se as variáveis. Em cada passo de tempo, cabe à funções de interpolação espaciais transferirem as informações dos pontos materiais até os nós Eulerianos e também o mapeamento contrário das variáveis atualizadas desde os nós até as partículas. Ao final do passo de tempo, as partículas permanecem com as variáveis atualizadas e, paralelamente, a malha Euleriana é reiniciada.

Embora a abordagem pelo MPM possa apresentar vantagens significativas, alguns problemas têm sido atestados no método, conforme a literatura. Um deles é a falta de delimitação do contorno dos subdomínios, dificultando a aplicação de forças externas e condições de apoio. Outro é a instabilidade de partículas na transição entre células (*cell-crossing error*), pela mudança abrupta no valor dos gradientes espaciais. A formulação original do MPM utiliza funções de interpolação lineares, para que se evite a interpolação de valores negativos de massa para os nós, já que essas funções possuem somente valores entre zero e um na área de influência de um nó euleriano. Contudo

essas mesmas funções possuem derivadas constantes, que mudam de valor de modo descontínuo na fronteira entre duas células, provocando a referida instabilidade.

Uma das estratégias desenvolvidas para solucionar tais problemas é a técnica de interpolação do domínio convectivo da partícula ou *convected particle domain interpolation* (CPDI), publicada por Sadeghirad et al. (2011, 2013). Ao longo do texto, essa técnica é referenciada como MPM CPDI ou apenas como CPDI. No MPM CPDI utiliza-se todo o arcabouço fundamental do MPM original, porém os subdomínios são monitorados explicitamente ao longo do tempo, como quadriláteros ou triângulos em duas dimensões ou como tetraedros ou hexaedros em três dimensões.

No MPM CPDI, armazenam-se as posições nos vértices dos subdomínios e as demais variáveis nos respectivos centros de massa. Já o mapeamento dessas informações para a malha Euleriana é feito com o acoplamento de duas funções: a função de interpolação nodal do MPM e a função de interpolação interna do subdomínio, ambas lineares.

Mostra-se, em 2.2.7, que a estratégia adotada por Sadeghirad et al. (2011, 2013) no MPM CPDI consegue evitar o *cell-crossing error*, além de facilitar a imposição de condições de contorno pelo monitoramento explícito da mudança de forma dos subdomínios. No entanto, um erro costumeiramente percebido tanto no MPM quanto no MPM CPDI é a distribuição espacial irregular das tensões. Conforme Andersen e Andersen (2009), o cálculo de incrementos de deformação e de acelerações errôneos acaba resultando em uma distribuição irreal de tensões.

Assim, visando a melhor aplicabilidade do MPM a análises planas (de tensão e deformação) não lineares de estruturas, com resultados de tensão mais precisos, propõe-se uma nova técnica no presente estudo: a técnica de subdomínios interpolados em partículas superconvergentes, ou *superconvergent particle subdomain interpolation* (SPSI).

Em suma, sugere-se, com o MPM SPSI, o monitoramento dos subdomínios como elementos quadrilaterais de interpolação interna quadrática, com informações de posição armazenadas nos vértices, massas armazenadas nos centros de massa e velocidades, tensões e deformações armazenadas nos pontos superconvergentes de tensão (pontos de Gauss). Propõe-se também uma interpolação nodal que possa ser feita tanto por funções lineares quanto por B-splines cúbicas.

Além disso, instigado pelo trabalho de Homel e Herbold (2016), apresenta-se a extensão do MPM SPSI a problemas envolvendo danificação isotrópica na tração, com possibilidade de formação de fraturas pela separação física dos subdomínios.

1.1 PROBLEMA DE PESQUISA

Levantam-se, nesta tese, os seguintes questionamentos que compõem o problema de pesquisa:

a) é possível o desenvolvimento de uma técnica aplicada ao MPM bidimensional em que a forma dos subdomínios das partículas seja explicitamente representada pelas posições dos vértices e na qual as variáveis de estado sejam armazenadas nos pontos superconvergentes de tensão desses subdomínios?

b) na referida técnica, a interpolação interna de informações nos subdomínios pode ser feita com funções quadráticas?;

c) essa técnica tem a capacidade de fornecer resultados confiáveis na análise não linear de estruturas, principalmente em relação à distribuição de tensões?

d) como comportam-se os resultados diante da utilização de funções de interpolação nodal do tipo linear e do tipo B-spline cúbica?

e) a atualização de tensões pode ser feita utilizando-se diretamente as deformações Lagrangianas e o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff?

f) a técnica pode ser utilizada tanto no estado plano de tensões quanto no estado plano de deformações?

g) pode-se estender o procedimento desenvolvido para materiais que apresentem danificação isotrópica com amolecimento linear?

h) há como implementar, para materiais que tenham a referida danificação, um algoritmo que permita a separação física entre subdomínios que possuam pontos totalmente danificados?

i) é possível estabelecer uma estratégia de mensuração da interpenetração não física entre subdomínios separados e, caso haja interpenetração, computar forças de contato que ajam para eliminar essa sobreposição?

j) esse cálculo de forças de contato pode ser baseado no método de Hertz de contato entre cilindros de eixos paralelos?

1.2 HIPÓTESES

Tendo em vista as perguntas que formam o problema de pesquisa apresentado, as hipóteses testadas no trabalho são:

a) a aplicação da técnica de subdomínios interpolados em partículas superconvergentes (SPSI), motivado pela resposta imprecisa das tensões no método do ponto material pela instabilidade das partículas que cruzam as bordas de células Eulerianas e pela geração de acelerações e incrementos de deformação não físicos que ocorrem no subdomínio Lagrangiano quando da utilização da variante CPDI;

b) a interpolação quadrática para o subdomínio Lagrangiano;

c) a interpolação nodal tanto por funções lineares quanto por B-splines cúbicas;

d) a elaboração de um procedimento de atualização das tensões no MPM SPSI utilizando a derivada no tempo das deformações Lagrangianas e o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff;

e) a incorporação do modelo de amortecimento local não viscoso aproximado à hipótese do MPM SPSI;

f) o desenvolvimento de uma formulação para a aplicação do estado plano de tensões ao MPM SPSI;

g) a extensão do MPM SPSI pela inserção do modelo de dano isotrópico de Rankine com amolecimento linear na tração;

h) a criação de uma estratégia de particionamento do domínio para abertura de fraturas conforme o modelo de dano, baseada na ruptura de conexões entre partículas superconvergentes;

i) a implementação uma formulação representativa para a avaliação da interpenetrabilidade dos subdomínios;

j) o uso do método de Hertz para o contato entre cilindros de eixos paralelos adaptado à determinação da força de contato entre subdomínios, considerando a existência de atrito tangencial ao contato.

1.3 OBJETIVOS GERAL E ESPECÍFICOS

Com base nas hipóteses inéditas a serem testadas, o objetivo geral deste estudo é a utilização do MPM na avaliação mecânica de estruturas em um procedimento dinâmico não linear (não linearidades física e geométrica) com formulação cinemática para a resolução de problemas envolvendo grandes deformações e grandes deslocamentos. Como objetivos específicos, têm-se:

a) promover a confiabilidade da aplicação do MPM para a análise mecânica de estruturas;

b) o desenvolvimento de modificações na formulação do MPM com foco no objetivo geral;

c) a consolidação de um algoritmo computacional para a solução dinâmica não linear de estruturas;

d) o teste e a validação das hipóteses levantadas.

1.4 JUSTIFICATIVA

A principal justificativa para a realização da pesquisa é técnica. Nesse quesito, vê-se que o objetivo geral definido concentra-se na utilização e melhoramento de um método cinemático que contempla grandes não linearidades físicas e geométricas e pode ser aplicado a análises quase estáticas e dinâmicas. Como será atestado nos próximos capítulos, o MPM é um método em processo de consolidação na análise de estruturas e o presente trabalho segue nessa direção.

Espera-se também que este trabalho seja um ponto de partida para vários outros estudos, pois o número de testes e possibilidades a serem avaliadas no âmbito do MPM SPSI é bastante significativo. Dentre tais possibilidades pode-se citar: a aplicação de técnicas mais robustas de integração temporal, o desenvolvimento de procedimentos de aplicação de diferentes tipos de condições de contorno, a utilização de outros modelos de dano, a ampliação das análises para três dimensões, a melhoria dos processos de particionamento para o surgimento de fraturas, dentre outros.

1.5 CONTRIBUIÇÕES CIENTÍFICAS

Como principal contribuição científica esperada, está a técnica de subdomínios interpolados em partículas superconvergentes (SPSI) aplicada ao contexto do MPM. Com base na investigação da literatura produzida até o momento, não identifica-se a publicação de alguma técnica relativa ao MPM que armazene as informações da análise nos pontos superconvergentes de tensão (pontos de Gauss) dos subdomínios da malha Lagrangiana. Em geral essas informações são carregadas pelos centros de massa, o que pode gerar algumas imprecisões nas tensões.

Além disso, a utilização de uma interpolação interna aos subdomínios com funções quadráticas também configura uma inovação no contexto do MPM, já que a técnica CPDI limita-se à interpolação interna com funções lineares. Uma interpolação interna quadrática pode suavizar a distribuição das variáveis de estado ao longo dos

subdomínios. Uma outra abordagem de caráter inédito diz respeito ao uso de B-splines cúbicas para o mapeamento de informações entre as malhas Lagrangiana e Euleriana em uma técnica do MPM na qual os subdomínios são representados explicitamente pela posição atualizada de seus vértices. No MPM CPDI, por exemplo, essas funções são lineares.

Identifica-se também uma contribuição relativa ao procedimento de atualização de tensões. Isso porque, em geral, os trabalhos sobre o MPM empregam a atualização do tensor de tensões de Cauchy baseada nos incrementos do tensor de pequenas deformações. Como os problemas resolvidos pelo MPM abrangem, na maioria das vezes, grandes deformações, busca-se, no algoritmo aqui proposto, calcular as derivadas temporais atualizadas dos tensores de grandes deformações de Green-Lagrange. Essas derivadas são aplicadas à relação constitutiva do material e obtém-se os incrementos de tensão referentes ao segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, que é atualizado. Então, os tensores de Cauchy atualizados são calculados pela transformação dos tensores de Piola-Kirchhoff atualizados, utilizando-se os gradientes de deformação.

Adicionalmente, percebe-se na literatura a ausência de trabalhos que tratem da análise plana pelo MPM empregando-se o estado plano de tensões. As pesquisas produzidas costumam limitar-se ao estado plano de deformações, que não exige o cálculo de deformações fora do plano. Portanto, aqui busca-se estabelecer um procedimento que permita empregar o MPM ao estado plano de tensões, com o cálculo do termo do gradiente de deformações que indica a variação da espessura da peça.

No contexto da aplicação de um modelo de dano ao MPM com possibilidade de formação de fraturas, toma-se o trabalho de Homel e Herbold (2016) como principal referência. Nesse estudo os autores aplicam o modelo de dano isotrópico de Rankine na tração ao MPM CPDI, medindo e comparando as direções do gradiente espacial de dano para permitir a separação física de subdomínios danificados em diferentes campos de velocidades. Após a separação, forças de contato entre esses campos são calculadas com base no modelo de Bardenhagen et al. (2000).

Alguns pontos de melhoramento, porém, são identificados em Homel e Herbold (2016): o particionamento pelo gradiente escalar de dano nem sempre permite que a fratura inicie nas regiões que danificam primeiro; e as forças de contato calculadas conforme Bardenhagen et al. (2000), embora cumpram seu papel na avaliação de materiais granulares, não conseguem evitar a interpenetração entre subdomínios de forma satisfatória quando os campos de velocidade são formados por grupos de subdomínios. Em vista disso, propõe-se nesta tese, com a extensão do MPM SPSI, uma nova técnica de particionamento de subdomínios, pautada na ruptura de ligações pré-estabelecidas entre pontos de Gauss de subdomínios diferentes. Quanto à estratégia de contato para evitar a interpenetração, sugere-se uma abordagem de contato individual

entre subdomínios, independentemente do campo de velocidades do qual fazem parte. Para isso, adapta-se a teoria de Hertz de contato entre cilindros de eixos paralelos.

1.6 LIMITES DA PESQUISA

As análises do presente estudo limitam-se às seguintes condições:

a) aplicabilidade aos estados planos de tensão e deformação;

b) aplicação explícita de condições de contorno essenciais de velocidades e acelerações e implícitas de deslocamento;

c) utilização de amortecimento local não viscoso aproximado;

d) idealização dos materiais como homogêneos e isotrópicos;

e) utilização de relação constitutiva para um material idealizado infinitamente elástico linear antes da tensão limite de início da danificação;

f) consideração de dano isotrópico com amolecimento linear na tração;

g) emprego da integração temporal explícita de Euler-Gauss;

h) forças externas aplicadas somente nos vértices dos subdomínios;

i) limitação do balanço energético a forças mecânicas;

j) tamanho fixo do domínio da malha Euleriana durante todo o tempo de análise, apenas desativando os nós não utilizados;

k) subdomínios de formato quadrilateral;

l) obrigatoriedade do monitoramento das espessuras pós abertura de fraturas para evitar espessuras não físicas menores ou iguais a zero, função de sua atualização indireta pelo uso do estado plano de tensões, limitando o tempo final de análise.

1.7 ESTRUTURA DO TRABALHO

A estrutura desta tese visa a construção linear do conhecimento que resulte no cumprimento dos objetivos indicados em 1.3. Dessa maneira, no capítulo 2, realiza-se uma revisão da literatura sobre conceitos fundamentais da mecânica do contínuo, com foco na equação de balanço da energia mecânica e, a partir disso, estuda-se a teoria envolvida no MPM, suas principais variantes e diferentes abordagens possíveis. Também dedica-se atenção especial ao método de Homel e Herbold (2016), que aplica o modelo de dano isotrópico na tração de Rankine em conjunto com o MPM CPDI.

No capítulo 3, elabora-se um levantamento cronológico das principais pesquisas referentes ao MPM, desde sua publicação original por Sulsky et al. (1994) até os estudos mais recentes. Isso é feito para se estabelecer o estado da arte sobre o tema. Em seguida, no capítulo 4, descreve-se o MPM SPSI proposto e sua extensão a modelos compostos por materiais com danificação isotrópica na tração e com possibilidade de separação entre subdomínios. Também no capítulo 4, detalham-se os modelos processados pelo algoritmo computacional desenvolvido, utilizados na validação experimental do código computacional e no teste das hipóteses listadas em 1.2.

Assim, no capítulo 5, realiza-se uma análise de consistência experimental do MPM SPSI frente a resultados experimentais, confrontando-se qualitativamente as respostas da simulação computacional com as de ensaios disponíveis na literatura. Então, no capítulo 6, apresentam-se os resultados obtidos com o processamento dos modelos mostrados no capítulo 4 com o MPM SPSI. Esses resultados são discutidos aprofundadamente no capítulo 7. Por fim, no capítulo 8, relatam-se as conclusões obtidas e sugerem-se possíveis abordagens que deem continuidade às pesquisas deste trabalho.

2 REVISÃO DA LITERATURA

Neste capítulo aborda-se, de forma sequencial e organizada, o embasamento técnico e científico necessário para o entendimento do MPM, da subvariante MPM CPDI e do método de Homel e Herbold (2016) para o particionamento por fratura no MPM utilizando o modelo de dano de Rankine com amolecimento linear. Os tópicos aqui tratados servem como ponto de partida para a fundamentação do MPM SPSI proposto nesta pesquisa.

Sendo assim, inicia-se pela dedução, pelos conceitos da mecânica do contínuo, da equação de balanço da energia mecânica, que dá origem à formulação de equilíbrio fundamental do MPM. Então, mostram-se as discretizações da equação de balanço energético promovidas pelo MPM, bem como todos os outros pormenores do método em sua forma original, publicada por Sulsky et al. (1994). Logo após, tratam-se os conceitos envolvidos no MPM CPDI, de Sadeghirad et al. (2011, 2013) - o qual é base para o desenvolvimento do MPM SPSI. Em seguida, descreve-se o método de Homel e Herbold (2016), que emprega o MPM em conjunto com a mecânica do dano para permitir fraturas em corpos inicialmente contínuos.

2.1 CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO

Para se chegar à equação de balanço da energia mecânica, é preciso definir alguns conceitos da cinemática do contínuo, principalmente no que se refere aos gradientes de velocidades, deslocamentos e deformações. Também é importante definir o tensor de tensões de Cauchy e o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, bem como as relações constitutivas que os relacionam com os tensores cinemáticos, considerando materiais elásticos lineares e isotrópicos. Com isso, podem-se deduzir as equações fundamentais da mecânica do contínuo, que são base para o entendimento do MPM. Os conceitos mostrados nesta seção são baseados em Chaves (2013), Lai et al. (2010) e Reddy (2013).

2.1.1 Cinemática do contínuo

Estuda-se, na cinemática do contínuo, a descrição do movimento de um corpo material com configuração Ω no tempo t e cuja configuração inicial é $\Omega^0 = \Omega(t = 0)$.

Na figura 1, onde os vetores $\mathbf{e}_i$ formam uma base ortogonal, observa-se que dois pontos A e B possuem vetores posição $\mathbf{X}_A$ e $\mathbf{X}_B$ na configuração indeformada Ω^0, sendo que o vetor que une o ponto A ao ponto B nesse caso é

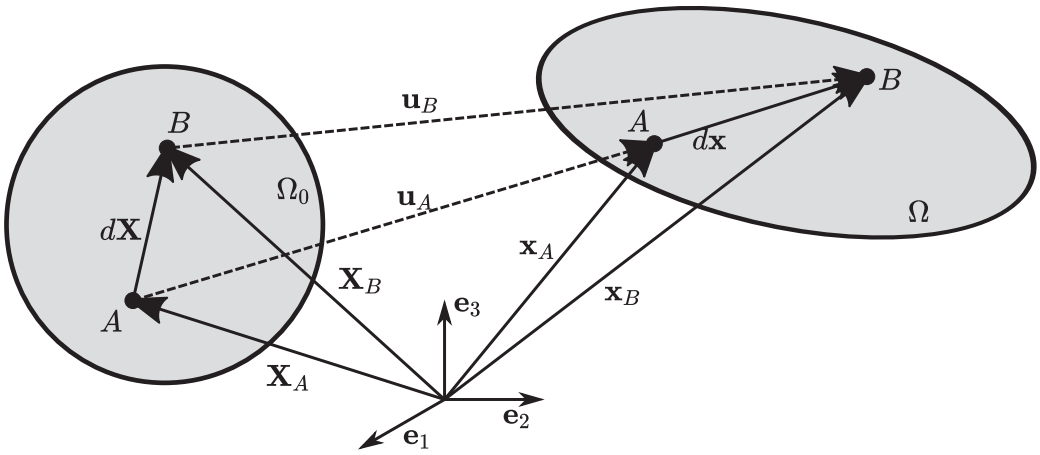
$$d\mathbf{X} = \mathbf{X}_B - \mathbf{X}_A \tag{2.1}$$

Quando ocorre o movimento, as novas posições desses pontos são $\mathbf{x}_A$ e $\mathbf{x}_B$ e o vetor que os une na configuração deformada Ω é

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A \tag{2.2}$$

Tais relações entre as posições dos pontos A e B nas configurações indeformada e deformada são o ponto de partida para a definição dos tensores da cinemática do contínuo. Nesse contexto, as coordenadas $\mathbf{X}$ representam uma descrição material ou Lagrangiana do movimento e que as coordenadas $\mathbf{x}$ fazem uma descrição espacial ou Euleriana.

FIGURA 1 – MOVIMENTO DE UM CORPO CONTÍNUO E DEFORMAÇÕES INFINITESIMAIS.



FONTE: adaptado de Chaves (2013).

2.1.1.1 Gradiente material de deformações

Considerando-se que $\mathbf{x}(\mathbf{X}_B, t) = \mathbf{x}_B = \mathbf{x}_A + d\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}_A + d\mathbf{X}, t)$, pode-se escrever a equação

$$\mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + d\mathbf{x}, \tag{2.3}$$

onde o termo à esquerda da igualdade pode ser expandido em uma série de Taylor em torno de $\mathbf{X}$, o que leva à equação

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(\mathbf{X}+d\mathbf{X},t) &= \mathbf{x}(\mathbf{X},t)+\frac{1}{1!}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}\left(\mathbf{X}+d\mathbf{X}-\mathbf{X}\right)^1+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}^2}\left(\mathbf{X}+d\mathbf{X}-\mathbf{X}\right)^2+\text{erro}(\|d\mathbf{X}\|^3)\\ &= \mathbf{x}(\mathbf{X},t)+\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}d\mathbf{X}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}^2}d\mathbf{X}^2+\text{erro}(\|d\mathbf{X}\|^3)\\ &= \mathbf{x}(\mathbf{X},t)+\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}d\mathbf{X}+\text{erro}(\|d\mathbf{X}\|^2)\end{aligned} \tag{2.4}$$

Sendo o vetor $d\mathbf{X}$ um vetor de pequena magnitude, é possível truncar o termo à direita da equação 2.4 e escrever

$$\mathbf{x}(\mathbf{X}+d\mathbf{X},t) = \mathbf{x}(\mathbf{X},t)+\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}d\mathbf{X} \tag{2.5}$$

Igualando-se as equações 2.3 e 2.5, define-se a relação

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}d\mathbf{X} = \mathbf{F}d\mathbf{X} \tag{2.6}$$

onde $\mathbf{F} = \dfrac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}$ é um tensor de segunda ordem, denominado gradiente material de deformações, cujos termos

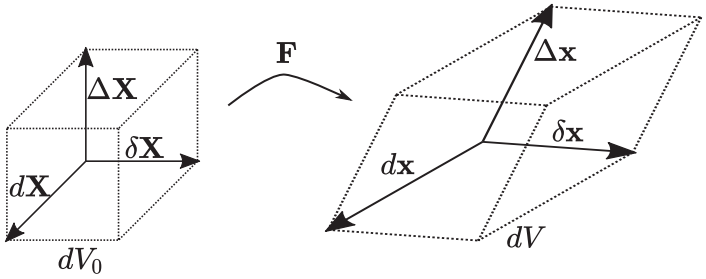
$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \tag{2.7}$$

medem a variação das componentes de posição na configuração deformada em relação à configuração indeformada.

Tendo em vista a equação 2.6, percebe-se que, para que o movimento seja inversível para quaisquer valores de $\mathbf{X}$ e t, deve-se ter $\det(\mathbf{F}) \neq 0$, onde o determinante $\det \mathbf{F})$ é uma medida importante no que se refere à mudança de volume de um corpo contínuo. Isso pode ser demonstrado analisando-se a figura 2, onde os vetores $d\mathbf{X}$, $\delta\mathbf{X}$ e $\Delta\mathbf{X}$ formam um elemento infinitesimal indeformado de volume dV_0. Esses vetores sofrem uma deformação provocada pelo gradiente de deformações $\mathbf{F}$ e são transformados em $d\mathbf{x}$, $\delta\mathbf{x}$ e $\Delta\mathbf{x}$. Como consequência, o volume infinitesimal deformado torna-se igual a

$$dV = \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ \delta x_1 & \delta x_2 & \delta x_3 \\ \Delta x_1 & \Delta x_2 & \Delta x_3 \end{vmatrix} = \det(\mathbf{F})dV_0 \tag{2.8}$$

FIGURA 2 – MUDANÇA DE VOLUME DE UM ELEMENTO INFINITESIMAL.



FONTE: adaptado de Zhang et al. (2017).

2.1.1.2 Gradientes material e espacial de velocidades

Se o gradiente material de deformações, definido na seção anterior, for derivado em relação ao tempo, obtém-se

$$\dot{\mathbf{F}} \equiv \frac{dF_{ij}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial x_i(\mathbf{X},t)}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j}\frac{dx_i(\mathbf{X},t)}{dt} = \frac{\partial v_i(\mathbf{X},t)}{\partial X_j} \equiv \nabla_X \mathbf{v}, \tag{2.9}$$

sendo que $\mathbf{v}(\mathbf{X},t)$ é o vetor velocidade descrito em coordenadas materiais e $\nabla_X \mathbf{v}$ é o tensor gradiente material de velocidades, o qual fornece uma medição pontual da taxa variação das velocidades na direção das coordenadas materiais.

Já quando a velocidade é escrita em função das coordenadas espaciais, pode-se reescrever a equação 2.9 como

$$\dot{\mathbf{F}} \equiv \frac{dF_{ij}}{dt} = \frac{\partial v_i(\mathbf{x},t)}{\partial X_j} = \frac{\partial v_i(\mathbf{x},t)}{\partial x_k}\frac{\partial x_k(\mathbf{X},t)}{\partial X_j} = \frac{\partial v_i(\mathbf{x},t)}{\partial x_k}F_{kj} \equiv \nabla_x \mathbf{v}\mathbf{F} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{x}}\mathbf{F}, \tag{2.10}$$

na qual surge o tensor gradiente espacial de velocidades

$$\nabla_x \mathbf{v} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1}, \tag{2.11}$$

responsável por fornecer uma medição pontual da taxa de variação das componentes do vetor velocidade nas diferentes direções das coordenadas Eulerianas. Esse tensor promove a transformação linear do vetor $d\mathbf{x}$ que equivale à sua derivação no tempo, ou seja,

$$\frac{d}{dt}d\mathbf{x} = \frac{d}{dt}\left(\mathbf{F}d\mathbf{X}\right) = \dot{\mathbf{F}}d\mathbf{X} + \mathbf{F}\underbrace{d\dot{\mathbf{X}}}_{\mathbf{0}} = \dot{\mathbf{F}}d\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{x}}\mathbf{F}d\mathbf{X} = \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{x}}d\mathbf{x} \tag{2.12}$$

2.1.1.3 Tensores taxa de deformação e taxa de rotação

Também pode-se decompor o tensor gradiente espacial de velocidades em uma soma de uma parcela simétrica e outra antissimétrica, conforme a equação

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{x}} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{x}}^{T}\right) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{x}}^{T}\right) = \mathbf{D} + \mathbf{W} \tag{2.13}$$

onde a parte simétrica

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{x}} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{x}}^{T}\right) \tag{2.14}$$

é denominada tensor taxa de deformação e a parte antissimétrica

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mathcal{L}}_{\mathbf{x}}^{T}\right) \tag{2.15}$$

é chamada de tensor taxa de rotação, tensor de vorticidade ou tensor *spin*. Pelo fato de $\mathbf{W}$ ser um tensor assimétrico, é possível definir um vetor

$$\mathbf{w} = \left\{ \begin{array}{c} -W_{23} \\ W_{13} \\ -W_{12} \end{array} \right\} \tag{2.16}$$

tal que

$$\mathbf{w} \times \mathbf{a} = \mathbf{W}\mathbf{a} \tag{2.17}$$

sendo $\mathbf{a}$ um vetor qualquer.

É importante ressaltar que o vetor $\mathbf{w}$ está diretamente relacionado ao rotacional espacial do campo de velocidades ou vetor de vorticidade $\mathrm{rot}_x(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\omega}$, como mostra a equação

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}_x(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\omega} = \nabla_x \times \mathbf{v} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\mathbf{e}_j \times (v_k \mathbf{e}_k) = \frac{\partial v_k}{\partial x_j}\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k = \epsilon_{ijk} v_{k,j}\mathbf{e}_i \\ = (v_{3,2} - v_{2,3})\,\mathbf{e}_1 + (v_{1,3} - v_{3,1})\,\mathbf{e}_2 + (v_{2,1} - v_{1,2})\,\mathbf{e}_3 \\ = -2W_{23}\mathbf{e}_1 + 2W_{13}\mathbf{e}_2 - 2W_{12}\mathbf{e}_3 \\ = 2(W_1\mathbf{e}_1 + W_2\mathbf{e}_2 + W_3\mathbf{e}_3) \equiv 2\boldsymbol{W} \\ \mathrm{rot}_x(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{w} \end{aligned} \tag{2.18}$$

2.1.1.4 Gradientes material e espacial de deslocamentos

Retomando-se a figura 1, percebe-se que a posição atualizada de um ponto cuja posição indeformada é $\mathbf{X} + d\mathbf{X}$ pode ser escrita como

$$\mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) + d\mathbf{x} = \mathbf{X} + d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) \tag{2.19}$$

onde $\mathbf{u}$ é o vetor deslocamento.

Sendo $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$, então pode-se reescrever a equação 2.19 como

$$d\mathbf{x} = d\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) \tag{2.20}$$

e, assim, isolar $\mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t)$ na equação 2.20, chegando-se à equação

$$\mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \tag{2.21}$$

Assim como a posição $\mathbf{x}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t)$ na equação 2.5, pode-se expandir $\mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t)$ em torno de $\mathbf{X}$, truncar a expansão nos termos de primeira ordem e, assim, estabelecer a equação

$$\mathbf{u}(\mathbf{X} + d\mathbf{X}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} \tag{2.22}$$

Então, substituindo-se 2.22 em 2.21, obtém-se a equação

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} &= \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) + d\mathbf{x} - d\mathbf{X} \\ d\mathbf{x} &= d\mathbf{X} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} \\ d\mathbf{x} &= \left(\mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right) d\mathbf{X} \\ d\mathbf{x} &= \left(\mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u} \right) d\mathbf{X} \end{aligned} \tag{2.23}$$

onde $\mathbf{I}$ é o tensor identidade de segunda ordem e $\nabla_X \mathbf{u} = \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}}$ é o tensor denominado gradiente material de deslocamentos, cujos termos valem

$$(\nabla_X u)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \tag{2.24}$$

e cuja relação com o gradiente material de deformações é dada por

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla_X \mathbf{u} \tag{2.25}$$

Já o tensor gradiente espacial de deslocamentos, por definição, é dado por

$$\nabla_x \mathbf{u} \equiv (\nabla_x u)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{2.26}$$

e pode ser calculado a partir do gradiente espacial de deformações, utilizando-se a regra da cadeia, pela equação

$$\begin{aligned}\nabla_x \mathbf{u} &\equiv \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial X_k}\frac{\partial X_k}{\partial x_j} \\ &\equiv (\nabla_X \mathbf{u})\mathbf{F}^{-1} \\ &= (\mathbf{F}-\mathbf{I})\,\mathbf{F}^{-1} \\ &= \mathbf{I}-\mathbf{F}^{-1} \\ &= \mathbf{I}-\mathbf{F}^{-1}\end{aligned} \tag{2.27}$$

2.1.1.5 Tensor de deformações finitas de Green-Lagrange

Uma forma de se medir a variação entre as magnitudes dos vetores $d\mathbf{X}$ e $d\mathbf{x}$ é pelo produto escalar da equação

$$\begin{aligned}\|d\mathbf{x}\|^2 &= d\mathbf{x}\cdot d\mathbf{x} \\ &= \mathbf{F}d\mathbf{X}\cdot\mathbf{F}d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X}\cdot\mathbf{F}^T\mathbf{F}d\mathbf{X} \\ &= d\mathbf{X}\cdot\mathbf{C}d\mathbf{X},\end{aligned} \tag{2.28}$$

na qual surge o tensor direito de Cauchy-Green

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\mathbf{F} \tag{2.29}$$

Nota-se que, se $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, então $\|d\mathbf{x}\|^2 = \|d\mathbf{X}\|^2$, o que corresponde a um movimento de corpo rígido. Quando substitui-se 2.25 em 2.29, escreve-se a equação

$$\begin{aligned}\mathbf{C} &= (\mathbf{I}+\nabla_X\mathbf{u})^T(\mathbf{I}+\nabla_X\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{I}+\nabla_X\mathbf{u}+(\nabla_X\mathbf{u})^T+\nabla_X\mathbf{u}\,(\nabla_X\mathbf{u})^T \\ &= \mathbf{I}+2\mathbf{E}\end{aligned} \tag{2.30}$$

onde

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left[\nabla_X\mathbf{u}+(\nabla_X\mathbf{u})^T+\nabla_X\mathbf{u}\,(\nabla_X\mathbf{u})^T\right] \tag{2.31}$$

é o tensor de deformações finitas de Green-Lagrange, que caracteriza as mudanças no meio contínuo devidas ao deslocamento dos pontos materiais.

2.1.1.6 Tensor de pequenas deformações

Há situações específicas em que os gradientes materiais e espaciais de deslocamentos são suficientemente pequenos, isto é, em que $|\nabla_X\mathbf{u}| << 1$ e $|\nabla_x\mathbf{u}| << 1$.

Nesses casos, é possível abdicar dos termos não lineares $\frac{1}{2}\nabla_X \mathbf{u}\,(\nabla_X \mathbf{u})^T$ do tensor de deformações finitas de Green-Lagrange, trabalhando-se com o tensor linearizado

$$\mathbf{E}_{\text{lin}} = \frac{1}{2}\left[\nabla_X \mathbf{u} + (\nabla_X \mathbf{u})^T\right] \tag{2.32}$$

Além disso, com os gradientes de deslocamentos muito pequenos, as configurações material e espacial ficam extremamente próximas e pode-se considerar que $\nabla_X \mathbf{u} \approx \nabla_x \mathbf{u}$. Logo, escreve-se

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{lin}} &= \frac{1}{2}\left[\nabla_X \mathbf{u} + (\nabla_X \mathbf{u})^T\right] \\ &\approx \frac{1}{2}\left[\nabla_x \mathbf{u} + (\nabla_x \mathbf{u})^T\right] \\ &= \boldsymbol{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{2.33}$$

sendo ε o tensor de pequenas deformações, uma aproximação comumente adotada em aplicações práticas no campo da engenharia, em estruturas rígidas onde os carregamentos provocam pequenos deslocamentos e pequenas deformações. Entretanto, mesmo em problemas que envolvem grandes deslocamentos e grandes deformações, é possível a utilização de ε, na forma do incremento $\Delta\varepsilon$, desde que o tempo seja discretizado em intervalos suficientemente pequenos, de modo que os gradientes de deslocamentos entre dois passos de tempo consecutivos sejam bem menores que a unidade.

2.1.1.7 Derivadas no tempo das variáveis cinemáticas

Em análises não lineares, costuma-se trabalhar com taxas no tempo dos tensores cinemáticos, exigindo-se o conhecimento prévio de suas derivadas no tempo. Sendo assim, mostram-se os cálculos das derivadas no tempo do tensor de deformações finitas de Green-Lagrange, $\frac{d\mathbf{E}}{dt}$, do tensor de pequenas deformações, $\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt}$ e do determinante do gradiente material de deformações, $\frac{d}{dt}\det(F)$.

2.1.1.7.1 Derivada no tempo do tensor de deformações finitas de Green-Lagrange

A derivada no tempo do tensor de deformações finitas de Green-Lagrange, utilizada na atualização de tensões em análises não lineares, é calculada pela expressão

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{E}}{dt} = \dot{\mathbf{E}} &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{F}}^T\mathbf{F} + \mathbf{F}^T\dot{\mathbf{F}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^T\boldsymbol{\mathcal{L}}_x^T\mathbf{F} + \mathbf{F}^T\boldsymbol{\mathcal{L}}_x\mathbf{F}\right) \\ &= \mathbf{F}^T\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{\mathcal{L}}_x + \boldsymbol{\mathcal{L}}_x^T\right)\mathbf{F} \\ &= \mathbf{F}^T\mathbf{D}\mathbf{F}\end{aligned} \tag{2.34}$$

2.1.1.7.2 Derivada no tempo do tensor de pequenas deformações

Da mesma forma que $\frac{d\mathbf{E}}{dt}$, a derivada de $\boldsymbol{\varepsilon}$ no tempo, calculada pela equação

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &\equiv \frac{d\varepsilon_{ij}}{dt} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{du_i}{dt} + \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{du_j}{dt}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) \\ &= D_{ij} \\ &\equiv \mathbf{D},\end{aligned} \tag{2.35}$$

também pode ser utilizada na atualização de tensões em análises não lineares.

2.1.1.7.3 Derivada no tempo do determinante do gradiente material de deformações

O valor da derivada no tempo de $\det(\mathbf{F})$ é importante na construção das equações fundamentais da mecânica do contínuo e, assim como $\frac{d\boldsymbol{\varepsilon}}{dt}$, possui relação direta com o tensor $\mathbf{D}$. Isso pode ser demonstrado escrevendo-se o determinante na forma indicial

$$\det(\mathbf{F}) = \epsilon_{IJK}F_{1I}F_{2J}F_{3K} = \epsilon_{IJK}x_{1,I}x_{2,J}x_{3,K}, \tag{2.36}$$

onde ϵ_{IJK} é o tensor de permutação, e derivando-o em relação ao tempo de acordo com a equação

$$\frac{d}{dt}\det(\mathbf{F}) = \epsilon_{IJK}\left(\dot{x}_{1,I}x_{2,J}x_{3,K} + x_{1,I}\dot{x}_{2,J}x_{3,K} + x_{1,I}x_{2,J}\dot{x}_{3,K}\right), \tag{2.37}$$

sendo que

$$\begin{aligned}
\dot{x}_{1,I} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial x_1}{\partial X_I} = \frac{\partial}{\partial X_I}\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial v_1}{\partial X_I} = \frac{\partial v_1}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial X_I} = v_{1,l}x_{l,I} \\
\dot{x}_{2,J} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial x_2}{\partial X_J} = \frac{\partial}{\partial X_J}\frac{dx_2}{dt} = \frac{\partial v_2}{\partial X_J} = \frac{\partial v_2}{\partial x_m}\frac{\partial x_m}{\partial X_J} = v_{2,m}x_{m,J} \\
\dot{x}_{3,K} &= \frac{d}{dt}\frac{\partial x_3}{\partial X_K} = \frac{\partial}{\partial X_K}\frac{dx_3}{dt} = \frac{\partial v_3}{\partial X_K} = \frac{\partial v_3}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial X_K} = v_{2,n}x_{n,K}
\end{aligned} \tag{2.38}$$

Substituindo-se 2.38 em 2.37, têm-se

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\det(\mathbf{F}) &= \epsilon_{IJK}\left(v_{1,l}x_{l,I}x_{2,J}x_{3,K} + v_{2,m}x_{1,I}x_{m,J}x_{3,K} + v_{3,n}x_{1,I}x_{2,J}x_{n,K}\right) \\
&= \underbrace{\epsilon_{IJK}v_{1,l}x_{l,I}x_{2,J}x_{3,K}}_{\text{termo 1}} + \underbrace{\epsilon_{IJK}v_{2,m}x_{1,I}x_{m,J}x_{3,K}}_{\text{termo 2}} + \underbrace{\epsilon_{IJK}v_{3,n}x_{1,I}x_{2,J}x_{n,K}}_{\text{termo 3}}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

e, quando se abre o somatório implícito em l do termo 1, percebe-se que

$$\begin{aligned}
\epsilon_{IJK}v_{1,l}x_{l,I}x_{2,J}x_{3,K} &= v_{1,1}\underbrace{\epsilon_{IJK}x_{1,I}x_{2,J}x_{3,K}}_{\det(\mathbf{F})} + v_{1,2}\underbrace{\epsilon_{IJK}x_{2,I}x_{2,J}x_{3,K}}_{0} + v_{1,3}\underbrace{\epsilon_{IJK}x_{3,I}x_{2,J}x_{3,K}}_{0} \\
&= v_{1,1}\det(\mathbf{F})
\end{aligned} \tag{2.40}$$

De forma análoga para os termos 2 e 3, têm-se

$$\begin{aligned}
\epsilon_{IJK}v_{2,m}x_{1,I}x_{m,J}x_{3,K} &= v_{2,1}\underbrace{\epsilon_{IJK}x_{1,I}x_{1,J}x_{3,K}}_{0} + v_{2,2}\underbrace{\epsilon_{IJK}x_{1,I}x_{2,J}x_{3,K}}_{\det(\mathbf{F})} + v_{2,3}\underbrace{\epsilon_{IJK}x_{1,I}x_{3,J}x_{3,K}}_{0} \\
&= v_{2,2}\det(\mathbf{F})
\end{aligned} \tag{2.41}$$

e

$$\begin{aligned}
\epsilon_{IJK}v_{3,n}x_{1,I}x_{2,J}x_{n,K} &= v_{3,1}\underbrace{\epsilon_{IJK}x_{1,I}x_{2,J}x_{1,K}}_{0} + v_{3,2}\underbrace{\epsilon_{IJK}x_{1,I}x_{2,J}x_{2,K}}_{0} + v_{3,3}\underbrace{\epsilon_{IJK}x_{1,I}x_{2,J}x_{3,K}}_{\det(\mathbf{F})} \\
&= v_{3,3}\det(\mathbf{F})
\end{aligned} \tag{2.42}$$

Sendo assim, pode-se substituir as equações 2.40 a 2.42 na equação 2.39 para que se obtenha

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\det(\mathbf{F}) &= \det(\mathbf{F})\left(v_{1,1}+v_{2,2}+v_{3,3}\right)\\ &= \det(\mathbf{F})v_{k,k}\\ &= \det(\mathbf{F})\frac{\partial v_k}{\partial x_k}\\ &= \det(\mathbf{F})\mathrm{tr}(\nabla_x \mathbf{v})\\ &= \det(\mathbf{F})\mathrm{tr}(\mathbf{D})\end{aligned} \tag{2.43}$$

2.1.2 Tensões

Conforme Chaves (2013), a ação de forças externas sobre um corpo modifica as posições dos átomos e moléculas para que o equilíbrio seja atingido. A resistência interna à tal reposicionamento é chamada de força interna e pode ser interpretada como uma variável macroscópica correspondente à média das forças interatômicas. Em cada ponto material de um corpo, a força interna é representada por um campo vetorial de tensões (força por unidade de área).

2.1.2.1 Tensor de tensões de Cauchy

Na figura 3, têm-se o corpo contínuo, de domínio Ω, submetido às forças $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$, $\mathbf{f}_3$ e $\mathbf{f}_4$. Esse corpo pode ser hipoteticamente seccionado em duas partes (I e II) pelo plano ζ, cujo vetor normal unitário no ponto B é $\mathbf{n}$.

Considerando-se a parte I como um corpo livre, surgem, de forma a equilibrar as forças internas com as forças externas, uma força $\Delta\mathbf{f}$, agindo na área ΔA, que contém o ponto B. Por definição, o vetor tensão no ponto B, calculado no plano com normal $\mathbf{n}$, será

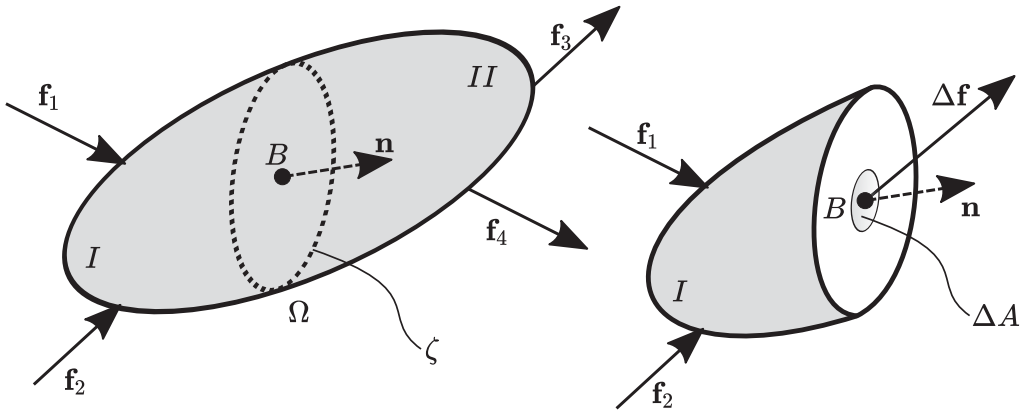
$$\mathbf{t}_\mathbf{n} = \lim_{\Delta A \to 0}\frac{\Delta \mathbf{f}}{\Delta A} = \frac{d\mathbf{f}}{dA} \tag{2.44}$$

Pela terceira lei de Newton, se a porção II for isolada como um corpo livre, surgirá no ponto B um vetor tensão $\mathbf{t}_{-\mathbf{n}} = -\mathbf{t}_\mathbf{n}$. Assim, como $\mathbf{t}_\mathbf{n}(\mathbf{x}, t)$ depende apenas do vetor normal $\mathbf{n}$, pode-se obtê-lo pela transformação linear

$$\mathbf{t}_\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n} \tag{2.45}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ é o tensor de tensões de Cauchy, o qual fornece medições de tensão em relação à configuração espacial.

FIGURA 3 – EQUILÍBRIO INTERNO NO CORPO CONTÍNUO DE DOMÍNIO Ω.



FONTE: adaptado de Lai et al. (2010).

2.1.2.2 Segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff

Em casos em que as tensões precisam ser escritas em relação às coordenadas Lagrangianas, convém relacionar o tensor de tensões de Cauchy com um tensor hipotético equivalente na configuração indeformada Ω_0.

Para isso, um dos possíveis artifícios é considerar que o ponto B, da configuração Ω na figura 3, é equivalente ao ponto B_0 em Ω_0, que dA_0 é a área diferencial dA indeformada, que $\mathbf{n}_0$ é o vetor normal a dA_0 no ponto B_0 e que

$$d\mathbf{f} = \mathbf{F}d\mathbf{f}_0 \tag{2.46}$$

é a força que age em ΔA_0.

Analogamente ao que é feito na equação (2.44), pode-se definir um vetor tensão hipotético na configuração indeformada

$$\mathbf{t}_{\mathbf{n}_0} = \lim_{\Delta A_0 \to 0} \frac{\Delta \mathbf{f}_0}{\Delta A_0} = \frac{d\mathbf{f}_0}{dA_0} \tag{2.47}$$

sendo $\mathbf{t}_{-\mathbf{n}_0} = -\mathbf{t}_{\mathbf{n}_0}$ e $\mathbf{t}_{\mathbf{n}_0}$ dependente apenas de $\mathbf{n}_0$ no ponto B_0, o que permite estabelecer a transformação linear

$$\mathbf{t}_{\mathbf{n}_0}(\mathbf{X}) = \mathbf{S}(\mathbf{X})\mathbf{n}_0, \tag{2.48}$$

na qual $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ é chamado de segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff. A correlação desse tensor com o tensor de tensões de Cauchy vem da equação (2.46), na qual substituem-se as equações (2.44) e (2.47), para que se obtenha

$$\mathbf{t}_{\mathbf{n}} dA = \mathbf{F}\mathbf{t}_{\mathbf{n}_0} dA_0 \tag{2.49}$$

Substituindo-se as equações (2.45) e (2.48) na equação (2.49), chega-se à relação

$$\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}dA = \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{n}_0 dA_0 \tag{2.50}$$

Além disso, da cinemática do contínuo, sabe-se que a relação entre as áreas dA e dA_0 é dada pela equação

$$dA\mathbf{n} = \det(\mathbf{F})\mathbf{F}^{-T}dA_0\mathbf{n}_0, \tag{2.51}$$

que também é substituída em (2.50) para que se escreva a relação final

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\det(\mathbf{F})}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T \tag{2.52}$$

entre o tensor de tensões de Cauchy e o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhof. Essa relação também constata que $\mathbf{S}$ é um tensor simétrico, assim como $\boldsymbol{\sigma}$.

2.1.2.3 Relação entre as derivadas no tempo dos tensores de tensões

Em análises não lineares, costuma-se trabalhar com taxas de tensão no tempo para a atualização dos tensores de tensões. Porém, como a derivada no tempo do tensor de tensões de Cauchy $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{dt} = \dot{\boldsymbol{\sigma}}$ não é um tensor objetivo do ponto de vista da mecânica do contínuo, esta geralmente não pode ser diretamente calculada a partir das relações constitutivas.

Uma opção para contornar o problema é trabalhar com a derivada no tempo do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff $\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \dot{\mathbf{S}}$, calculando-a com base na relação constitutiva corrente. Dessa forma, pode-se chegar ao valor de $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ de forma indireta, em função de $\dot{\mathbf{S}}$. Isso é feito derivando-se (2.52) no tempo, ou seja:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = -\frac{\frac{d}{dt}\left[\det(\mathbf{F})\right]}{\det^2(\mathbf{F})}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T + \frac{1}{\det(\mathbf{F})}\left[\dot{\mathbf{F}}\mathbf{S}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\mathbf{S}\dot{\mathbf{F}}^T\right] \tag{2.53}$$

Assim, substituindo-se (2.43) e (2.10) em (2.53), escreve-se a equação

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\sigma}} = -\frac{\det(\mathbf{F})\mathrm{tr}(\mathbf{D})}{\det^2(\mathbf{F})}\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T + \frac{1}{\det(\mathbf{F})}\left[\boldsymbol{\mathcal{L}}_x\mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\mathbf{S}\mathbf{F}^T\boldsymbol{\mathcal{L}}_x^T\right] \\ = -\boldsymbol{\sigma}\mathrm{tr}(\mathbf{D}) + \boldsymbol{\mathcal{L}}_x\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\mathcal{L}}_x^T + \frac{1}{\det(\mathbf{F})}\mathbf{F}\dot{\mathbf{S}}\mathbf{F}^T,\end{aligned} \tag{2.54}$$

que permite o cálculo de $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ em função de $\dot{\mathbf{S}}$.

2.1.3 Relação constitutiva para materiais elásticos isotrópicos

A relação constitutiva mais geral que pode ser utilizada para um material elástico, infinitamente linear e isotrópico é a da equação

$$\mathbf{S} = \lambda \mathrm{tr}(\mathbf{E})\mathbf{I} + 2\mu\mathbf{E}, \tag{2.55}$$

onde

$$\lambda = \frac{\mathrm{E}\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{2.56}$$

e

$$\mu = \frac{\mathrm{E}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \tag{2.57}$$

são as constantes de Lamé do material, sendo E o módulo de elasticidade longitudinal e ν o coeficiente de Poisson.

Todavia, quando se consideram materiais isotrópicos, elásticos e não lineares, convém atualizar as tensões em cada incremento de tempo com as taxas de tensões - derivadas no tempo dos tensores de tensões. Portanto, nesse caso a relação constitutiva utilizada é

$$\dot{\mathbf{S}} = \lambda \mathrm{tr}(\dot{\mathbf{E}})\mathbf{I} + 2\mu\dot{\mathbf{E}}, \tag{2.58}$$

sendo que a derivada temporal $\dot{\mathbf{E}}$ é calculada conforme a equação (2.34).

2.1.4 Teorias de estado plano (tensões e deformações)

Em análises bidimensionais não lineares, como é o caso deste trabalho, é necessário que as equações do estado plano sejam definidas considerando-se a teoria de deformações finitas. No estado plano de tensões (EPT), as variações da tensão fora do plano $\dot{S}_{13} = \dot{S}_{31}$, $\dot{S}_{23} = \dot{S}_{32}$ e $\dot{S}_{33}$ são nulas, bem como as variações de deformação cisalhante fora do plano $\dot{E}_{13} = \dot{E}_{31}$ e $\dot{E}_{23} = \dot{E}_{32}$. Sendo assim, considerando-se a equação (2.58), determina-se a variação no tempo da deformação E_{33} pela equação

$$\begin{aligned} \dot{S}_{33} = \lambda\left(\dot{E}_{11} + \dot{E}_{22}\right) + (\lambda + 2\mu)\dot{E}_{33} = 0 \\ \dot{E}_{33} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu}\left(\dot{E}_{11} + \dot{E}_{22}\right). \end{aligned} \tag{2.59}$$

Além disso, de acordo com (2.31) e (2.34), é possível afirmar que, no estado plano de tensões,

$$\begin{aligned} E_{33} &= \frac{1}{2}\left(F_{33}^2 - 1\right) \\ F_{33}^2 &= 1 + 2E_{33}, \end{aligned} \tag{2.60}$$

e que

$$\dot{E}_{33} = F_{33}^2 D_{33} \tag{2.61}$$

Então, substituindo-se (2.60) em (2.61), chega-se à equação

$$\begin{aligned} \dot{E}_{33} &= \left(1 + 2E_{33}\right) D_{33} \\ D_{33} &= \frac{\dot{E}_{33}}{1 + 2E_{33}}, \end{aligned} \tag{2.62}$$

a qual, combinada com (2.59), permite o cálculo dos componentes de deformação fora do plano $\dot{E}_{33}$, D_{33} e F_{33} no estado plano de tensões. É importante perceber que, no estado plano de tensões, o movimento só é válido enquanto

$$E_{33} > -\frac{1}{2} \tag{2.63}$$

e, consequentemente, enquanto

$$F_{33} > 0. \tag{2.64}$$

Se o estado plano de deformações (EPD) for adotado, então $\dot{E}_{13} = \dot{E}_{31} = \dot{E}_{23} = \dot{E}_{32} = \dot{E}_{33} = 0$ e $\dot{S}_{13} = \dot{S}_{31} = \dot{S}_{23} = \dot{S}_{32} = 0$. Como consequência, conclui-se também que $D_{13} = D_{31} = D_{23} = D_{32} = D_{33} = 0$ e que $F_{13} = F_{31} = F_{23} = F_{32} = 0$, com $F_{33} = 1$. A componente fora do plano da variação no tempo do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff, por sua vez, é determinada pela equação

$$\dot{S}_{33} = \lambda(\dot{E}_{11} + \dot{E}_{22}). \tag{2.65}$$

2.1.5 Equações fundamentais da mecânica do contínuo

Com o auxílio das definições feitas nas seções secundárias 2.1.1 e 2.1.2, estabelecem-se aqui os princípios da mecânica que culminam na equação de balanço da energia mecânica, que serve de base para a solução do equilíbrio no MPM. Esses princípios permitem que se escrevam relações matemáticas entre quantidades como deslocamentos, velocidades, tensões e deformações dos pontos que fazem parte do sistema considerado (REDDY, 2013).

2.1.5.1 Teorema de transporte de Reynolds

O teorema de transporte de Reynolds estabelece a lei da conservação na forma global para um campo escalar qualquer $\phi(\mathbf{x}, t)$, contínuo e diferenciável, que descreve uma certa quantidade física por unidade de volume. Para estabelecer matematicamente esse teorema, parte-se da variação no tempo da integral de $\phi(\mathbf{x}, t)$ no volume do domínio Ω

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\phi(\mathbf{x},t)dV = \int_{\Omega}\frac{d}{dt}\left[\phi(\mathbf{x},t)dV\right] \tag{2.66}$$

Considerando-se a regra da derivada do produto, pode-se reescrever (2.66) como

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\phi(\mathbf{x},t)dV = \int_{\Omega}\left[\frac{d\phi(\mathbf{x},t)}{dt}dV + \phi(\mathbf{x},t)\frac{d}{dt}(dV)\right], \tag{2.67}$$

equação na qual pode-se substituir (2.8), obtendo-se

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\phi(\mathbf{x},t)dV &= \int_{\Omega}\left\{\frac{d\phi(\mathbf{x},t)}{dt}dV + \phi(\mathbf{x},t)\frac{d}{dt}\left[\det(\mathbf{F})dV_0\right]\right\}\\ &= \int_{\Omega}\left\{\frac{d\phi(\mathbf{x},t)}{dt}dV + \phi(\mathbf{x},t)\frac{d}{dt}\left[\det(\mathbf{F})\right]dV_0\right\}\end{aligned} \tag{2.68}$$

Conforme já mostrado, a derivada no tempo do determinante do gradiente material de deformações é dada na equação (2.43), que pode ser substituída em (2.68), chegando-se à equação

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\phi(\mathbf{x},t)dV &= \int_{\Omega}\left[\frac{d\phi(\mathbf{x},t)}{dt}dV + \phi(\mathbf{x},t)\det(\mathbf{F})\mathrm{tr}(\mathbf{D})dV_0\right]\\ &= \int_{\Omega}\left[\frac{d\phi(\mathbf{x},t)}{dt}dV + \phi(\mathbf{x},t)\mathrm{tr}(\mathbf{D})dV\right]\\ &= \int_{\Omega}\left[\frac{d\phi(\mathbf{x},t)}{dt} + \phi(\mathbf{x},t)\mathrm{tr}(\mathbf{D})\right]dV\end{aligned} \tag{2.69}$$

Como $\mathrm{tr}(\mathbf{D}) = \mathrm{div}_x(\mathbf{v})$, sendo $\mathrm{div}_x(\mathbf{v})$ o divergente espacial do campo de velocidades, então pode-se reescrever (2.69) na forma da equação

$$\frac{d}{dt}\int_{\Omega}\phi(\mathbf{x},t)dV = \int_{\Omega}\left[\frac{d\phi(\mathbf{x},t)}{dt} + \phi(\mathbf{x},t)\mathrm{div}_x(\mathbf{v})\right]dV, \tag{2.70}$$

a qual é a formulação do teorema de transporte de Reynolds, utilizada na derivação das equações de conservação de massa e do momento linear, conforme exposto nas subseções a seguir.

2.1.5.2 Conservação de massa

Por definição, a massa total de um domínio Ω é

$$m = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) dV, \tag{2.71}$$

onde $\rho(\mathbf{x}, t)$ é a densidade do material. Para que haja conservação, a massa total não pode variar ao longo do tempo, ou seja,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) dV = 0 \tag{2.72}$$

Sendo assim, pode-se aplicar o teorema de transporte de Reynolds à (2.72), escrevendo-se a equação de conservação de massa

$$\int_{\Omega} \left[\frac{d\rho(\mathbf{x}, t)}{dt} + \rho(\mathbf{x}, t) \mathrm{div}_x(\mathbf{v}) \right] dV = 0, \tag{2.73}$$

a qual também deve ser satisfeita localmente com

$$\frac{d\rho(\mathbf{x}, t)}{dt} + \rho(\mathbf{x}, t) \mathrm{div}_x(\mathbf{v}) = 0 \tag{2.74}$$

2.1.5.3 Conservação do momento linear

O momento linear de um corpo cujo domínio é Ω é definido como

$$\boldsymbol{p} = \int_{\Omega} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dm = \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV \tag{2.75}$$

e o princípio de conservação envolvendo essa quantidade é baseado na segunda lei de Newton: a taxa de mudança do momento linear de uma parte arbitrária de um meio contínuo é igual à força resultante - de corpo e de superfície - agindo nessa parte, ou seja,

$$\int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) dA + \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) dV \tag{2.76}$$

sendo Γ_t o contorno de trações prescritas do domínio Ω, $\mathbf{t}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t)$ os vetores tensão de superfície e $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ o vetor de forças de corpo por unidade de massa.

Considerando-se que $\mathbf{t}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)\mathbf{n}$ e o teorema da divergência, pode-se reescrever o primeiro termo à esquerda da igualdade em (2.76) como

$$\int_{\Gamma_t} \mathbf{t}_{\mathbf{n}} dA = \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dA = \int_{\Omega} \mathrm{div}_x(\boldsymbol{\sigma}) dV \tag{2.77}$$

e então substituir (2.77) em (2.76), para que se obtenha

$$\int_{\Omega} \mathrm{div}_x(\boldsymbol{\sigma}) dV + \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} dV = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} dV \tag{2.78}$$

Já o desenvolvimento do termo à direita da igualdade em (2.78), com o auxílio teorema de transporte de Reynolds e da equação de conservação de massa, resulta na equação

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \mathbf{v} dV &= \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \left(\rho \mathbf{v} dV \right) \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{d}{dt} \left(\rho \mathbf{v} \right) + \rho \mathbf{v} \mathrm{div}_x(\mathbf{v}) \right] dV \\ &= \int_{\Omega} \left[\frac{d\rho}{dt} \mathbf{v} + \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \rho \mathbf{v} \mathrm{div}_x(\mathbf{v}) \right] dV \\ &= \int_{\Omega} \left[\underbrace{\left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \mathrm{div}_x(\mathbf{v}) \right)}_{=0} \mathbf{v} + \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right] dV \\ &= \int_{\Omega} \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV \end{aligned} \tag{2.79}$$

Substituindo-se (2.79) em (2.78), chega-se à equação de conservação do momento linear

$$\int_{\Omega} \left(\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathrm{div}_x(\boldsymbol{\sigma}) - \rho \mathbf{b} \right) dV = 0, \tag{2.80}$$

também válida localmente na forma

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \mathrm{div}_x(\boldsymbol{\sigma}) - \rho \mathbf{b} = 0 \tag{2.81}$$

2.1.5.4 Conservação do momento angular

O momento angular de um corpo Ω em relação à origem do sistema é

$$\mathbf{H}_O = \int_{\Omega} \left(\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} \right) dV \tag{2.82}$$

e, segundo seu princípio de conservação, a taxa de mudança do momento angular no tempo em relação a determinado ponto do espaço é igual ao momento resultante em relação a esse mesmo ponto. Matematicamente, tem-se que

$$\int_{\Gamma_t} \left(\mathbf{x} \times \mathbf{t}_{\mathbf{n}} \right) dA + \int_{\Omega} \left(\mathbf{x} \times \rho \mathbf{b} \right) dV = \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\mathbf{x} \times \rho \mathbf{v} \right) dV \tag{2.83}$$

Aplicando-se o teorema de transporte de Reynolds e a conservação de massa ao termo à direita da igualdade, obtém-se a equação

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\int_{\Omega}(\mathbf{x}\times\rho\mathbf{v})\,dV &= \int_{\Omega}\left[\frac{d}{dt}(\mathbf{x}\times\rho\mathbf{v})+(\mathbf{x}\times\rho\mathbf{v})\,\mathrm{div}_x(\mathbf{v})\right]dV \\
&= \int_{\Omega}\left[\frac{d\mathbf{x}}{dt}\times\rho\mathbf{v}+\mathbf{x}\times\left(\frac{d\rho}{dt}\mathbf{v}+\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)+(\mathbf{x}\times\rho\mathbf{v})\,\mathrm{div}_x(\mathbf{v})\right]dV \\
&= \int_{\Omega}\left[\underbrace{\mathbf{v}\times\rho\mathbf{v}}_{\mathbf{0}}+\mathbf{x}\times\mathbf{v}\underbrace{\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\mathrm{div}_x(\mathbf{v})\right)}_{0}+\mathbf{x}\times\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right]dV \\
&= \int_{\Omega}\left(\mathbf{x}\times\rho\frac{\mathbf{v}}{dt}\right)dV
\end{aligned} \tag{2.84}$$

que, quando substituída na equação (2.83), dá origem à equação

$$\int_{\Gamma_t}(\mathbf{x}\times\mathbf{t_n})\,dA+\int_{\Omega}(\mathbf{x}\times\rho\mathbf{b})\,dV=\int_{\Omega}\left(\mathbf{x}\times\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)dV \tag{2.85}$$

Além disso, considerando-se a equação (2.45), o teorema da divergência e a notação indicial, reescreve-se o primeiro termo à esquerda da igualdade em (2.85) como

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_t}\mathbf{x}\times\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}dA &\equiv \int_{\Gamma_t}\underbrace{\epsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl}}_{T_{il}}n_l dA \\
&= \int_{\Gamma_t}T_{il}n_l dA \\
&= \int_{\Omega}T_{il,l}dV \\
&= \int_{\Omega}\left(\epsilon_{ijk}x_j\sigma_{kl}\right)_{,l}dV \\
&= \int_{\Omega}\epsilon_{ijk}\left(\underbrace{x_{j,l}}_{\delta_{jl}}\sigma_{kl}+x_j\sigma_{kl,l}\right)dV \\
&= \int_{\Omega}\epsilon_{ijk}\left(\underbrace{\delta_{jl}\sigma_{kl}}_{\sigma_{kj}}+x_j\sigma_{kl,l}\right)dV \\
&= \int_{\Omega}\epsilon_{ijk}\left(\sigma_{kj}+x_j\sigma_{kl,l}\right)dV
\end{aligned} \tag{2.86}$$

sendo δ_{ij} o tensor delta de Kronecker.

Dessa forma, escrevendo-se a equação (2.85) de forma indicial, substituindo-se nela a equação (2.86) e levando-se em conta a conservação do momento linear,

chega-se à expressão

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \epsilon_{ijk} \left(\sigma_{kj} + x_j \sigma_{kl,l}\right) dV + \int_{\Omega} \epsilon_{ijk} x_j \rho b_k dV &= \int_{\Omega} \varepsilon_{ijk} x_j \rho \frac{dv_k}{dt} dV \\ \int_{\Omega} \left[\epsilon_{ijk}\sigma_{kj} + x_j \underbrace{\left(-\rho \frac{dv_k}{dt} + \sigma_{kl,l} + \rho b_k \right)}_{=0} \right] dV \\ \int_{\Omega} \epsilon_{ijk}\sigma_{kj} dV = 0,\end{aligned} \tag{2.87}$$

correspondente à equação de conservação do momento angular de um corpo contínuo.

2.1.5.5 Conservação de energia

A conservação da energia é baseada na primeira lei da termodinâmica e estabelece que a taxa de variação no tempo da energia total do sistema é igual à variação no tempo do trabalho das forças externas somado à mudança da quantidade de calor por unidade de tempo (REDDY, 2013). Isso é resumido matematicamente pela equação

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} + \frac{d\mathcal{U}}{dt} = \frac{d\mathcal{W}}{dt} + \frac{d\mathcal{Q}}{dt}, \tag{2.88}$$

onde $\mathcal{K}$ é a energia cinética, $\mathcal{U}$ é a energia interna de deformação, $\mathcal{W}$ é o trabalho das forças externas e $\mathcal{Q}$ é a energia térmica ou quantidade de calor do sistema.

Como os problemas a serem resolvidos nesta tese envolvem apenas a energia mecânica, então a equação de balanço energético considerada é

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} + \frac{d\mathcal{U}}{dt} = \frac{d\mathcal{W}}{dt} \tag{2.89}$$

2.1.5.5.1 Derivada da energia cinética no tempo

A energia cinética do sistema é dada por

$$\mathcal{K}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right) dV \tag{2.90}$$

e, assim, sua variação no tempo é

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{K}}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right) dV \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}\right) dV,\end{aligned} \tag{2.91}$$

a qual também pode ser reescrita, utilizando-se o teorema de transporte de Reynolds, como

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{K}}{dt} &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\frac{d}{dt}\left(\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\right)+\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\mathrm{div}_x(\mathbf{v})\right]dV \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\frac{d\rho}{dt}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}+2\rho\mathbf{v}\frac{d\mathbf{v}}{dt}+\rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\mathrm{div}_x(\mathbf{v})\right]dV \\ &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\mathrm{div}_x(\mathbf{v})\right)+2\rho\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right]dV\end{aligned} \tag{2.92}$$

Nesse contexto, substituindo-se a equação de conservação de massa em (2.92), obtém-se

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{K}}{dt} = \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\underbrace{\left(\frac{d\rho}{dt}+\rho\mathrm{div}_x(\mathbf{v})\right)}_{=0}+2\rho\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right]dV \\ = \int_{\Omega}\mathbf{v}\cdot\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt}dV\end{aligned} \tag{2.93}$$

2.1.5.5.2 Potência mecânica interna e externa

Se a equação de conservação do momento linear (2.81) for reescrita como

$$\rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathrm{div}_x(\boldsymbol{\sigma})+\rho\mathbf{b} \tag{2.94}$$

e substituída em (2.93), obtém-se a equação

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} = \int_{\Omega}\mathbf{v}\cdot\left[\mathrm{div}_x(\boldsymbol{\sigma})+\rho\mathbf{b}\right]dV = \int_{\Omega}\left[\mathbf{v}\cdot\mathrm{div}_x(\boldsymbol{\sigma})+\mathbf{v}\cdot\rho\mathbf{b}\right]dV, \tag{2.95}$$

na qual o termo $\mathbf{v}\cdot\mathrm{div}_x(\boldsymbol{\sigma})$, quando submetido à regra da derivação do produto, pode ser escrito como

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot\mathrm{div}_x(\boldsymbol{\sigma}) &\equiv v_i\sigma_{ij,j} \\ &= \left(v_i\sigma_{ij}\right)_{,j}-v_{i,j}\sigma_{ij} \\ &\equiv \mathrm{div}_x(\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{v})-\boldsymbol{\mathcal{L}}_x:\boldsymbol{\sigma} \\ &= \mathrm{div}_x(\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{v})-(\mathbf{D}+\mathbf{W}):\boldsymbol{\sigma} \\ &= \mathrm{div}_x(\boldsymbol{\sigma}^T\mathbf{v})-\mathbf{D}:\boldsymbol{\sigma}-\mathbf{W}:\boldsymbol{\sigma}\end{aligned} \tag{2.96}$$

Como $\mathbf{W}$ é um tensor antissimétrico e $\boldsymbol{\sigma}$ é um tensor simétrico, então $\mathbf{W}:\boldsymbol{\sigma}=0$ e, assim, pode-se afirmar que

$$\mathbf{v} \cdot \operatorname{div}_x(\boldsymbol{\sigma}) = \operatorname{div}_x(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}) - \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} \tag{2.97}$$

Substituindo-se (2.97) em (2.95), obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{K}}{dt} &= \int_\Omega \left[\operatorname{div}_x(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}) - \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{v} \cdot \rho \mathbf{b}\right] dV \\ &= \int_\Omega \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_\Omega \operatorname{div}_x(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}) dV - \int_\Omega \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} dV \end{aligned} \tag{2.98}$$

Além disso, o segundo termo à direita da igualdade em (2.98) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \int_\Omega \operatorname{div}_x(\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v}) dV &= \int_{\Gamma_t} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dA \\ &= \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dA \\ &= \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_\mathbf{n} dA, \end{aligned} \tag{2.99}$$

utilizando-se o teorema da divergência. Consequentemente, a equação (2.98) pode ser reescrita como

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} = \underbrace{\int_\Omega \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t} dA}_{\mathscr{P}_{\text{ext}}} - \underbrace{\int_\Omega \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} dV}_{\mathscr{P}_{\text{int}}} \tag{2.100}$$

ou então como

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} + \mathscr{P}_{\text{int}} = \mathscr{P}_{\text{ext}} \tag{2.101}$$

sendo

$$\mathscr{P}_{\text{int}} = \int_\Omega \mathbf{D} : \boldsymbol{\sigma} dV \tag{2.102}$$

a potência mecânica interna, isto é, a variação no tempo do trabalho realizado pelas forças internas e

$$\mathscr{P}_{\text{ext}} = \int_\Omega \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_\mathbf{n} dA \tag{2.103}$$

a potência mecânica externa, ou seja, a variação no tempo do trabalho realizado pelas forças externas.

2.1.5.5.3 Equação de balanço da energia mecânica

A equação (2.101), quando reescrita na forma

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV + \int_{\Omega} \boldsymbol{\mathcal{L}}_x : \boldsymbol{\sigma} dV = \int_{\Omega} \rho \mathbf{b} \cdot \mathbf{v} dV + \int_{\Gamma_t} \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}_{\mathbf{n}} dA \tag{2.104}$$

é, na verdade, a equação de balanço da energia mecânica, que é a equação a ser discretizada e resolvida pelo MPM na resolução do equilíbrio mecânico de um sistema.

2.2 MÉTODO DO PONTO MATERIAL (MPM)

O MPM, publicado pela primeira vez por Sulsky et al. (1994), é um método destinado à análise dinâmica não linear, que discretiza o domínio material Ω em um conjunto de partículas (pontos materiais), que movem-se por uma malha Euleriana de fundo, conforme mostra a figura 4. Cada partícula representa um subdomínio Ω_p, que carrega todas as informações da análise - como massa, velocidade, energia, deformação, tensão - ao longo do tempo. Já a malha Euleriana de fundo, que é fixa, permite o cálculo dos gradientes e divergentes espaciais, bem como a solução da equação de balanço da energia mecânica (ZHANG et al., 2017).

No início de cada passo de tempo, a informação é transferida dos pontos materiais para os nós da malha Euleriana, onde a solução incremental do momento linear é calculada. Então, no final do passo de tempo, essa solução é mapeada de volta para as partículas para atualizar suas informações. Com isso, a malha Euleriana é reiniciada, voltando à sua configuração inicial. Percebe-se que, pelo fato das partículas moverem-se ao longo da malha de fundo ao longo do tempo, os nós eulerianos podem tornar-se necessários ou desnecessários, dependendo das posições dos pontos materiais. Portanto, o número de graus de liberdade muda com o tempo durante a análise (AL KAFAJI, 2013).

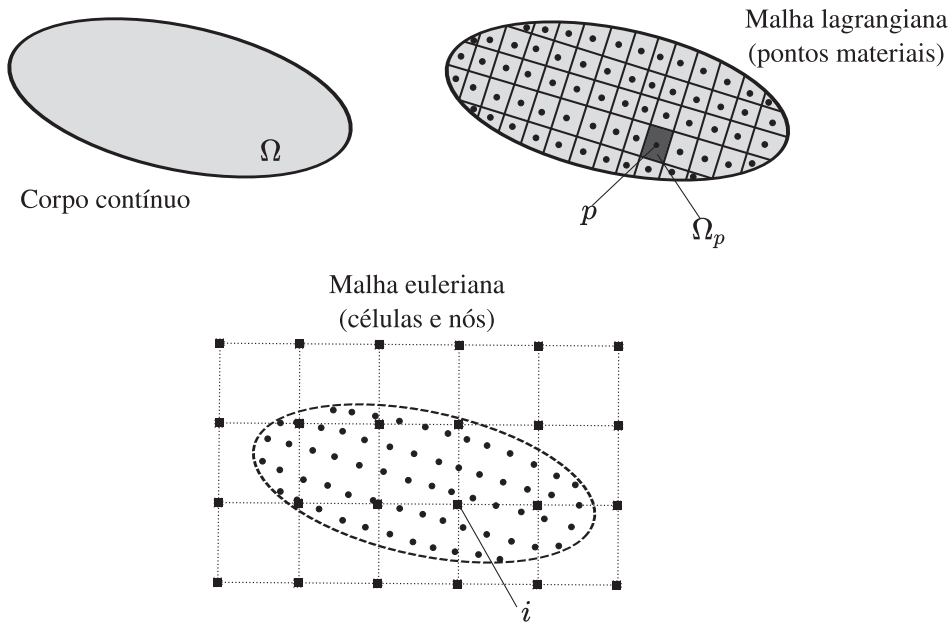
2.2.1 Interpolação espacial

De acordo com o MPM, a velocidade de um ponto de coordenada $\mathbf{x}$ é calculada em função das velocidades nodais da malha Euleriana pela equação

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_i N_i(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i, \tag{2.105}$$

onde i são os índices dos nós da malha de fundo, $\mathbf{v}_i$ são as velocidades desses nós e e $N_i(\mathbf{x})$ são as funções de interpolação nodais. Nesse mesmo contexto, o gradiente de velocidades no mesmo ponto de coordenada $\mathbf{x}$ é dado por

FIGURA 4 – DISCRETIZAÇÃO DO CORPO CONTÍNUO PELO MPM.



FONTE: adaptado de Zhang et al. (2017).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{L}}_x(\mathbf{x}) &= \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\sum_i N_i(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i \right) \\ &= \sum_i \mathbf{v}_i^T \frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}. \end{aligned} \tag{2.106}$$

Substituindo-se (2.105) e (2.106) na equação de balanço da energia mecânica (2.104), tem-se

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \left[\sum_i N_i(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i \right] \cdot \rho \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x})}{dt} dV + \int_\Omega \left[\sum_i \mathbf{v}_i^T \frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right] : \boldsymbol{\sigma} dV \\ &= \int_\Omega \rho \mathbf{b} \cdot \left[\sum_i N_i(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i \right] dV + \int_{\Gamma_t} \left[\sum_i N_i(\mathbf{x}) \mathbf{v}_i \right] \cdot \mathbf{t}_\mathbf{n} dA, \end{aligned} \tag{2.107}$$

expressão que pode ser manipulada para que se tenha

$$\begin{aligned} &\sum_i \mathbf{v}_i \cdot \int_\Omega \rho N_i(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) dV + \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \int_\Omega \boldsymbol{\sigma} \frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} dV \\ &= \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \int_\Omega N_i(\mathbf{x}) \rho \mathbf{b} dV + \sum_i \mathbf{v}_i \cdot \int_{\Gamma_t} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{t}_\mathbf{n} dA. \end{aligned} \tag{2.108}$$

Se a equação (2.108) for avaliada localmente em um nó i da malha Euleriana, eliminam-se as somas em i e o produto escalar com $\mathbf{v}_i$ em todos os termos. Desse

modo, escreve-se a equação nodal de balanço do momento linear do MPM

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \rho N_i(\mathbf{x})\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x})dV + \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}\frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}dV \\ = \int_{\Omega} N_i(\mathbf{x})\rho\mathbf{b}dV + \int_{\Gamma_t} N_i(\mathbf{x})\mathbf{t_n}dA.\end{aligned} \tag{2.109}$$

2.2.2 Discretização da equação de balanço da energia mecânica em subdomínios

Além da interpolação das velocidades nodais, no MPM também discretiza-se o domínio Ω em n_p subdomínios Ω_p. Sendo $V = \int_{\Omega} dV = \sum_p \int_{\Omega_p} dV$ e $A_t = \int_{\Gamma_t} dA = \sum_p \int_{\Gamma_{t_p}} dA$, as integrais da equação (2.109) podem ser representadas como somas de n_p integrais em Ω_p e em Γ_{t_p}, obtendo-se a equação

$$\begin{aligned}\sum_p \int_{\Omega_p} \rho(\mathbf{x}) N_i(\mathbf{x})\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x})dV + \sum_p \int_{\Omega_p} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}dV \\ = \sum_p \int_{\Omega_p} N_i(\mathbf{x})\rho\mathbf{b}(\mathbf{x})dV + \sum_p \int_{\Gamma_{t_p}} N_i(\mathbf{x})\mathbf{t_n}(\mathbf{x})dA,\end{aligned} \tag{2.110}$$

onde o primeiro termo à esquerda da igualdade

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \sum_p \int_{\Omega_p} \rho(\mathbf{x}) N_i(\mathbf{x})\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x})dV \tag{2.111}$$

é a derivada no tempo do momento linear nodal, o segundo termo à esquerda da igualdade

$$\mathbf{f}_{\sigma_i} = \sum_p \int_{\Omega_p} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}dV \tag{2.112}$$

é a força interna nodal, o primeiro termo à direita da igualdade

$$\mathbf{f}_{b_i} = \sum_p \int_{\Omega_p} N_i(\mathbf{x})\rho\mathbf{b}(\mathbf{x})dV \tag{2.113}$$

é a força externa de corpo nodal e o segundo termo à direita da igualdade

$$\mathbf{f}_{t_i} = \sum_p \int_{\Gamma_{t_p}} N_i(\mathbf{x})\mathbf{t_n}(\mathbf{x})dA \tag{2.114}$$

é a força externa de superfície nodal. Tendo isso em vista, pode-se escrever a equação do movimento simplificada do MPM

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i + \mathbf{f}_{\sigma_i} = \mathbf{f}_{b_i} + \mathbf{f}_{t_i} \tag{2.115}$$

que, quando avaliada em cada passo de tempo, permite a atualização do momento linear nodal e, por consequência, das variáveis de estado dos subdomínios.

2.2.3 MPM original - Sulsky et al. (1994)

Na versão original do MPM, publicada por Sulsky et al. (1994), assume-se que toda a massa do subdomínio Ω_p está concentrada em um ponto material representativo P, coincidente com o centro de massa de Ω_p. Isso significa que o campo de densidades em Ω_p é dado por

$$\rho(\mathbf{x}) = \rho_P \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P), \tag{2.116}$$

sendo, respectivamente, ρ_P e $\mathbf{x}_P$ a densidade de massa e a posição do ponto P e

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) = \begin{cases} 0 : \mathbf{x} \neq \mathbf{x}_P \\ \infty : \mathbf{x} = \mathbf{x}_P \end{cases} \tag{2.117}$$

a função delta de Dirac.

2.2.3.1 Cálculo das variáveis nodais

Quando substitui-se (2.116) em (2.111), chega-se à equação

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{p}}_i &= \sum_p \int_{\Omega_p} \rho_P \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) N_i(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}) dV \\ &= \sum_P \rho_P N_i(\mathbf{x}_P) \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_P) V_P \\ &= \sum_P N_i(\mathbf{x}_P) m_P \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}_P) \\ &= \sum_P \sum_j \underbrace{N_i(\mathbf{x}_P) N_j(\mathbf{x}_P) m_P}_{m_{ij}} \dot{\mathbf{v}}_j \\ &= \sum_P \sum_j m_{ij} \dot{\mathbf{v}}_j \end{aligned} \tag{2.118}$$

para a derivada no tempo do momento linear, onde

$$V_P = \int_{\Omega_p} dV \tag{2.119}$$

é o volume do ponto P, igual ao volume total do subdomínio Ω_p,

$$m_P = \int_{\Omega_p} \rho(\mathbf{x}) dV = \rho_P V_P \tag{2.120}$$

é a massa do ponto P, também igual à massa total de Ω_p e

$$m_{ij} = \sum_P N_i(\mathbf{x}_P) N_j(\mathbf{x}_P) m_P \tag{2.121}$$

é a expressão de cálculo dos termos da matriz de massa consistente dos nós da malha Euleriana. Contudo, na versão original do MPM (SULSKY et al., 1994), bem como na maioria das aplicações posteriores do mesmo método, trabalha-se com a massa

$$m_i = \sum_j m_{ij} = \sum_P N_i(\mathbf{x}_P) m_P, \tag{2.122}$$

agrupada em cada nó i, afim de se aumentar a eficiência computacional, simplificando-se (2.118) e escrevendo-se a equação

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \left[\sum_P N_i(\mathbf{x}_P) m_P \right] \dot{\mathbf{v}}_i = m_i \dot{\mathbf{v}}_i. \tag{2.123}$$

A utilização de m_i agrupada facilita a obtenção das acelerações nodais $\dot{\mathbf{v}}_i$, já que elimina-se a necessidade de inversão da matriz de massa, como ocorre com a matriz consistente. Entretanto, destaca-se que a aplicação da matriz de massa consistente garante a conservação total da energia cinética, do momento angular e do momento linear (BURGESS et al., 1992). Já a matriz agrupada tende a produzir certa dissipação numérica da energia cinética, embora reduza significativamente o custo computacional das análises (ZHANG et al., 2017).

A equação da força interna nodal (2.112), por sua vez, é reescrita como

$$\mathbf{f}_{\sigma_i} = \sum_p \int_{\Omega_p} \rho(\mathbf{x}) \frac{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})} \frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} dV, \tag{2.124}$$

onde substitui-se (2.116) para que se tenha

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{\sigma_i} &= \sum_p \int_{\Omega_p} \rho_P \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) \frac{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})}{\rho(\mathbf{x})} \frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} dV \\ &= \sum_P \rho_P \frac{\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}_P)}{\rho(\mathbf{x}_P)} \frac{\partial N_i(\mathbf{x}_P)}{\partial \mathbf{x}} V_P \\ &= \sum_P \boldsymbol{\sigma}_P \frac{\partial N_i(\mathbf{x}_P)}{\partial \mathbf{x}} V_P. \end{aligned} \tag{2.125}$$

A força externa de corpo nodal também é reformulada tendo a equação (2.116) como base. Assim, obtém-se

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{bi} &= \sum_p \int_{\Omega_p} \rho_P \delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}_P) N_i(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV \\ &= \sum_P \rho_P N_i(\mathbf{x}_P) \mathbf{b}(\mathbf{x}_P) V_P \\ &= \sum_P N_i(\mathbf{x}_P) m_P \mathbf{b}(\mathbf{x}_P) \\ &= \sum_P N_i(\mathbf{x}_P) m_P \mathbf{b}_P.\end{aligned} \tag{2.126}$$

Já o cálculo da força externa de superfície nodal a partir das trações de superfície é mantida na forma genérica da equação

$$\mathbf{f}_{t_i} = \sum_p \int_{\Gamma_{t_p}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{t}_\mathbf{n}(\mathbf{x}) dA, \tag{2.127}$$

uma vez que as distribuições de $\mathbf{t}_\mathbf{n}(\mathbf{x})$ nos contornos de trações prescritas Γ_{t_p} dos subdomínios Ω_p precisam ser conhecidas antes do tratamento matemático.

Logo, substituindo-se as equações da variação no tempo do momento linear nodal (2.123), da força interna nodal (2.125) e da força externa de corpo nodal (2.126) na equação (2.115), chega-se à equação do movimento nodal ou equação de balanço do momento linear nodal

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = -\sum_P \boldsymbol{\sigma}_P \frac{\partial N_i(\mathbf{x}_P)}{\partial \mathbf{x}} V_P + \sum_P N_i(\mathbf{x}_P) m_P \mathbf{b}_P + \sum_p \int_{\Gamma_{t_p}} N_i(\mathbf{x}) \mathbf{t}_\mathbf{n}(\mathbf{x}) dA \tag{2.128}$$

do MPM original, conforme as considerações de Sulsky et al. (1994).

2.2.3.2 Atualização dos momentos lineares nodais

Como (2.128) é uma equação diferencial ordinária de segunda ordem em relação ao tempo (em termos de deslocamentos), esta pode ser resolvida utilizando-se esquemas explícitos ou implícitos de integração. Simplificadamente, considerando-se uma variável de estado qualquer υ, entendem-se os métodos de integração explícita como aqueles que calculam $\upsilon(t^n + \Delta t^n) = \upsilon^{n+1}$ com base no valor de $\upsilon(t^n) = \upsilon^n$, sendo n o passo de tempo atual. Enquanto isso, os métodos de integração implícita encontram o valor de υ^{n+1} resolvendo-se uma equação $G(\upsilon^n, \upsilon^{n+1}) = 0$, que envolve tanto os valores atuais quanto aqueles do próximo passo de tempo (ZHANG et al., 2017).

2.2.3.2.1 Integração temporal explícita

As aplicações mais comuns do MPM utilizam esquemas de integração explícita, pois costumam ser mais fáceis de implementar, bem como mais eficientes e estáveis em problemas dinâmicos de curta duração (VAUCORBEIL et al., 2020). O método de integração explícita mais simples - conhecido como método de Euler-Gauss - assume que a aceleração tem valor constante durante o incremento de tempo Δt^n. A consequência da adoção dessa hipótese é que a velocidade varia linearmente e o deslocamento tem variação quadrática ao longo de Δt^n (CLOUGH; PENZIEN, 1995). Nesse método, a primeira etapa é o cálculo da aceleração inicial do passo de tempo pela equação

$$\dot{\mathbf{v}}_i^n = \dot{\mathbf{v}}_i(t^n) = \frac{-\mathbf{f}_{\sigma_i}^n + \mathbf{f}_{b_i}^n + \mathbf{f}_{t_i}^n}{m_i^n} = \frac{\mathbf{f}_i^n}{m_i^n} \tag{2.129}$$

e, então, determina-se a velocidade atualizada pela equação

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n + \dot{\mathbf{v}}_i^n \Delta t^n, \tag{2.130}$$

onde

$$\Delta t^n = t^{n+1} - t^n. \tag{2.131}$$

Uma outra opção utilizada, conforme Zhang et al. (2017), é o método da diferença central, no qual assume-se que

$$\mathbf{v}_i^{n+1/2} = \mathbf{v}_i(t^n + \Delta t^n/2) = \frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\Delta t^n} \tag{2.132}$$

é a velocidade nodal no tempo intermediário $t^n + \Delta t^n/2$, sendo $\mathbf{u}_i$ o deslocamento nodal, e que

$$\dot{\mathbf{v}}_i^n = \dot{\mathbf{v}}_i(t^n) = \frac{\mathbf{v}_i^{n+1/2} - \mathbf{v}_i^{n-1/2}}{\Delta t^{n-1/2}} \tag{2.133}$$

é a aceleração nodal no tempo t_n, com

$$\Delta t^{n-1/2} = t^{n+1/2} - t^{n-1/2}. \tag{2.134}$$

Isolando-se o deslocamento $\mathbf{u}_i^{n+1}$ na equação (2.132), obtém-se

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n + \Delta t^n \mathbf{v}_i^{n+1/2}. \tag{2.135}$$

Da mesma forma, isolando-se a velocidade $\mathbf{v}_i^{n+1/2}$ em (2.133), escreve-se a expressão

$$\mathbf{v}_i^{n+1/2} = \mathbf{v}_i^{n-1/2} + \dot{\mathbf{v}}_i^n \Delta t^{n-1/2}. \tag{2.136}$$

Sabendo-se que $\dot{\mathbf{v}}_i^n$ pode ser calculada pela equação de balanço do momento linear (2.129), o passo seguinte do método da diferença central - ou *leapfrog integration* - é calcular $\mathbf{v}_i^{n+1/2}$ pela equação (2.136). Após isso, calcula-se o deslocamento $\mathbf{u}^{n+1}$ pela equação (2.135). Como é percebido, o método da diferença central atualiza as posições nos passos de tempo inteiros e as velocidades em passos de tempo intermediários. Entretanto, quando for necessário conhecer o valor de $\mathbf{v}_i^{n+1}$, basta aplicar a equação

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^{n+1/2} + \frac{1}{2}\Delta t^{n+1/2} \frac{\mathbf{f}_i^{n+1}}{m_i^{n+1}} \tag{2.137}$$

Zhang et al. (2017) relatam, contudo, que as soluções numéricas obtidas pelo método da diferença central podem exibir oscilações espúrias ligadas à incapacidade da malha escolhida em representar modos de alta frequência. Além disso, Fern et al. (2019) ressaltam que os métodos de integração explícita são condicionalmente estáveis. Para materiais elásticos-lineares, o incremento de tempo crítico

$$\Delta t_{\text{crit}} = \frac{l}{c} = \frac{l}{\sqrt{\dfrac{\mathrm{E}\,(1-\nu)}{(1+\nu)\,(1-2\nu)\,\rho}}} \tag{2.138}$$

define o intervalo de tempo durante o qual uma onda com velocidade c atravessa uma célula de comprimento l, sendo E o módulo de elasticidade longitudinal e ρ a densidade do material. Portanto, Δt_{crit} é o incremento máximo de tempo que pode ser utilizado em uma análise estável. Em análises não lineares, na maioria das vezes não é possível calcular o incremento crítico e, por isso, torna-se necessário estimá-lo em função dos valores lineares. Esse ajuste é feito adicionando-se o fator multiplicador

$$0 < f_{\text{cour}} < 1, \tag{2.139}$$

denominado número de Courant, à equação (2.138), fazendo com que

$$\Delta t_{\max} = f_{\text{cour}} \Delta t_{\text{crit}}. \tag{2.140}$$

O número de Courant é um fator adimensional, que serve para avaliar os incrementos de tempo em uma análise transiente em função do tamanho da malha e da velocidade de propagação das informações através dessa malha. Valores de $f_{\text{cour}} > 1$

indicam que a informação se propaga por mais de uma célula da malha em um único passo de tempo. Quando isso ocorre, a solução geralmente torna-se imprecisa e há divergência na análise em certos esquemas de integração.

2.2.3.2.2 Integração temporal implícita

Os métodos implícitos possuem uma característica bastante relevante: são incondicionalmente estáveis. Isso faz com que os valores de Δt utilizados nas análises implícitas possam ser entre 10^2 a 10^4 vezes maiores que os valores exigidos nas análises explícitas. Logo, para muitos problemas em que somente a resposta de baixa frequência interessa, pode-se aplicar métodos de integração temporal implícita para se reduzir o custo computacional (ZHANG et al., 2017). Um método comumente utilizado em análises implícitas pelo MPM é o método de Newmark, no qual define-se a velocidade atualizada pela equação

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \mathbf{v}_i^n + \Delta t^n \left[(1-\gamma)\, \dot{\mathbf{v}}_i^n + \gamma \dot{\mathbf{v}}_i^{n+1} \right], \tag{2.141}$$

sendo $0 \leq \gamma \leq 1$, e o deslocamento atualizado pela equação

$$\mathbf{u}_i^{n+1} = \mathbf{u}_i^n + \Delta t^n \mathbf{v}_i^n + \frac{(\Delta t^n)^2}{2} \left[(1-2\beta)\, \dot{\mathbf{v}}_i^n + 2\beta \dot{\mathbf{v}}_i^{n+1} \right], \tag{2.142}$$

com $0 \leq \beta \leq \dfrac{1}{2}$. Conforme Zhang et al. (2017), considerando-se que $\mathbf{a}_i^{n+1} = \dot{\mathbf{v}}_i^{n+1}$ e isolando-se esse termo na equação (2.142), obtém-se a expressão

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_i^{n+1} = \frac{1}{\beta(\Delta t^n)^2} \left[\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n - \Delta t^n \mathbf{v}_i^n - \frac{(\Delta t^n)^2}{2} (1-2\beta)\, \mathbf{a}_i^n \right] \\ = \frac{1}{\beta(\Delta t^n)^2} \left[\mathbf{u}_i^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_i^n \right], \end{aligned} \tag{2.143}$$

sendo

$$\tilde{\mathbf{u}}_i^n = \mathbf{u}_i^n + \Delta t^n \mathbf{v}_i^n + \frac{(\Delta t^n)^2}{2} (1-2\beta)\, \mathbf{a}_i^n. \tag{2.144}$$

A equação (2.143) é então substituída na equação de balanço do momento linear (2.128), o que leva à equação

$$\begin{aligned} m_i^{n+1} \mathbf{a}_i^{n+1} &= -\mathbf{f}_{\sigma_i}^{n+1} + \mathbf{f}_{b_i}^{n+1} + \mathbf{f}_{t_i}^{n+1} \\ m_i^{n+1} \frac{1}{\beta(\Delta t^n)^2} \left[\mathbf{u}_i^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_i^n \right] &= -\mathbf{f}_{\sigma_i}^{n+1} + \mathbf{f}_{b_i}^{n+1} + \mathbf{f}_{t_i}^{n+1} \\ m_i^{n+1} \frac{1}{\beta(\Delta t^n)^2} \left[\mathbf{u}_i^{n+1} - \tilde{\mathbf{u}}_i^n \right] + \mathbf{f}_{\sigma_i}^{n+1} - \mathbf{f}_{b_i}^{n+1} - \mathbf{f}_{t_i}^{n+1} &= 0. \end{aligned} \tag{2.145}$$

Desse modo, tendo-se em vista que a equação (2.145) ocorre em todos os nós, pode-se recorrer à representação matricial

$$\frac{1}{\beta(\Delta t^n)^2}\mathbb{M}^{n+1}\left(\mathbb{U}^{n+1}-\tilde{\mathbb{U}}^n\right)+\mathbb{F}_\sigma(\mathbb{U}^{n+1})-\mathbb{F}_b^{n+1}(\mathbb{U}^{n+1})-\mathbb{F}_t^{n+1}(\mathbb{U}^{n+1})=\mathbf{0}, \tag{2.146}$$

onde $\mathbb{M}^{n+1}$ pode ser tanto a matriz de massa agrupada

$$\mathbb{M}^{n+1}=\begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^{n+1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_2^{n+1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{m}_i^{n+1} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{m}_{n_n}^{n+1} \end{bmatrix}, \tag{2.147}$$

com

$$\mathbf{m}_i^{n+1}=\begin{bmatrix} m_i^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & m_i^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & m_i^{n+1} \end{bmatrix} \tag{2.148}$$

, quanto a matriz de massa consistente

$$\mathbb{M}^{n+1}=\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{11}^{n+1} & \mathbf{m}_{12}^{n+1} & \mathbf{m}_{13}^{n+1} & \dots & \mathbf{m}_{1i}^{n+1} & \dots & \mathbf{m}_{1n_n}^{n+1} \\ \mathbf{m}_{21}^{n+1} & \mathbf{m}_{22}^{n+1} & \mathbf{m}_{23}^{n+1} & \dots & \mathbf{m}_{2i}^{n+1} & \dots & \mathbf{m}_{2n_n}^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{m}_{i1}^{n+1} & \mathbf{m}_{i2}^{n+1} & \mathbf{m}_{i3}^{n+1} & \dots & \mathbf{m}_{ij}^{n+1} & \dots & \mathbf{m}_{in_n}^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{m}_{n_n1}^{n+1} & \mathbf{m}_{n_n2}^{n+1} & \mathbf{m}_{n_n3}^{n+1} & \dots & \mathbf{m}_{n_ni}^{n+1} & \dots & \mathbf{m}_{n_nn_n}^{n+1} \end{bmatrix}, \tag{2.149}$$

com

$$\mathbf{m}_{ij}^{n+1}=\begin{bmatrix} m_{ij}^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{ij}^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & m_{ij}^{n+1} \end{bmatrix}. \tag{2.150}$$

Quanto aos demais vetores da equação (2.146), estes possuem os seguintes formatos:

$$\mathbb{U}^{n+1}=\begin{bmatrix} (\mathbf{u}_1^{n+1})^T & (\mathbf{u}_2^{n+1})^T & \dots & (\mathbf{u}_i^{n+1})^T & \dots & (\mathbf{u}_{n_n}^{n+1})^T \end{bmatrix}^T \tag{2.151}$$

$$\tilde{\mathbb{U}}^n = \left[\begin{array}{ccccccc} (\tilde{\mathbf{u}}_1^{n+1})^T & (\tilde{\mathbf{u}}_2^{n+1})^T & \dots & (\tilde{\mathbf{u}}_i^{n+1})^T & \dots & (\tilde{\mathbf{u}}_{n_n}^{n+1})^T \end{array} \right]^T \tag{2.152}$$

$$\mathbb{F}_\sigma^{n+1} = \left[\begin{array}{ccccccc} (\mathbf{f}_{\sigma_1}^{n+1})^T & (\mathbf{f}_{\sigma_2}^{n+1})^T & \dots & (\mathbf{f}_{\sigma_i}^{n+1})^T & \dots & (\mathbf{f}_{\sigma_{n_n}}^{n+1})^T \end{array} \right]^T \tag{2.153}$$

$$\mathbb{F}_b^{n+1} = \left[\begin{array}{ccccccc} (\mathbf{f}_{b_1}^{n+1})^T & (\mathbf{f}_{b_2}^{n+1})^T & \dots & (\mathbf{f}_{b_i}^{n+1})^T & \dots & (\mathbf{f}_{b_{n_n}}^{n+1})^T \end{array} \right]^T \tag{2.154}$$

$$\mathbb{F}_t^{n+1} = \left[\begin{array}{ccccccc} (\mathbf{f}_{t_1}^{n+1})^T & (\mathbf{f}_{t_2}^{n+1})^T & \dots & (\mathbf{f}_{t_i}^{n+1})^T & \dots & (\mathbf{f}_{t_{n_n}}^{n+1})^T \end{array} \right]^T \tag{2.155}$$

Percebe-se, assim, que (2.146) é, na verdade, um sistema não linear de equações, no qual o vetor de incógnitas é o vetor de deslocamentos nodais $\mathbb{U}^{n+1}$. Esse sistema é escrito de forma compacta pela equação

$$\mathbb{R}(\mathbb{U}^{n+1}, t^{n+1}) = \frac{1}{\beta(\Delta t^n)^2}\mathbb{M}^{n+1}\left(\mathbb{U}^{n+1} - \tilde{\mathbb{U}}^n\right) - \mathbb{F}(\mathbb{U}^{n+1}) = \mathbf{0}, \tag{2.156}$$

onde $\mathbb{R}$ é o vetor resíduo e $\mathbb{F}(\mathbb{U}^{n+1}) = \mathbb{F}_\sigma(\mathbb{U}^{n+1}) - \mathbb{F}_b^{n+1}(\mathbb{U}^{n+1}) - \mathbb{F}_t^{n+1}(\mathbb{U}^{n+1})$.

A solução desse sistema pode ser atingida de forma iterativa pela aplicação do método de Newton-Raphson. Nesse sentido, sendo k o contador de iterações de Newton-Raphson dentro do passo de tempo n, expande-se (2.156) em torno do valor de $\mathbb{U}_k^{n+1}$ utilizando-se a série de Taylor

$$\mathbb{R}(\mathbb{U}_{k+1}^{n+1}, t^{n+1}) = \mathbb{R}(\mathbb{U}_k^{n+1}, t^{n+1}) + \frac{\partial \mathbb{R}(\mathbb{U}_k^{n+1}, t^{n+1})}{\partial \mathbb{U}}\Delta\mathbb{U}_k^{n+1} + \text{erro}(\left[\Delta\mathbb{U}_k^{n+1}\right]^2) \tag{2.157}$$

e iguala-se essa expansão ao vetor nulo, ignorando-se os termos de alta ordem, ou seja,

$$\mathbb{R}(\mathbb{U}_{k+1}^{n+1}, t^{n+1}) = \mathbb{R}(\mathbb{U}_k^{n+1}, t^{n+1}) + \frac{\partial \mathbb{R}(\mathbb{U}_k^{n+1}, t^{n+1})}{\partial \mathbb{U}}\Delta\mathbb{U}_k^{n+1} = \mathbf{0}. \tag{2.158}$$

Então, quando isola-se $\Delta\mathbb{U}_k^{n+1}$, escreve-se a expressão de atualização iterativa

$$\begin{aligned} \Delta\mathbb{U}_k^{n+1} = \mathbb{U}_{k+1}^{n+1} - \mathbb{U}_k^{n+1} &= -\left[\frac{\partial \mathbb{R}(\mathbb{U}_k^{n+1}, t^{n+1})}{\partial \mathbb{U}}\right]^{-1}\mathbb{R}(\mathbb{U}_k^{n+1}, t^{n+1}) \\ &= -(\mathbb{K}_k^{n+1})^{-1}\mathbb{R}(\mathbb{U}_k^{n+1}, t^{n+1}), \end{aligned} \tag{2.159}$$

onde

$$\mathbb{K}_k^{n+1} = \frac{\partial \mathbb{R}(\mathbb{U}_k^{n+1}, t^{n+1})}{\partial \mathbb{U}} = \frac{1}{\beta(\Delta t^n)^2}\mathbb{M}^{n+1} + \mathbb{K}_{\sigma_k}^{n+1} - \mathbb{K}_{b_k}^{n+1} - \mathbb{K}_{t_k}^{n+1} \tag{2.160}$$

é a matriz de rigidez tangente, sendo

$$\mathbb{K}_{\sigma_k}^{n+1} = \frac{\partial \mathbb{F}_\sigma(\mathbb{U}_k^{n+1}, t^{n+1})}{\partial \mathbb{U}}, \tag{2.161}$$

$$\mathbb{K}_{b_k}^{n+1} = \frac{\partial \mathbb{F}_b(\mathbb{U}_k^{n+1}, t^{n+1})}{\partial \mathbb{U}} \tag{2.162}$$

e

$$\mathbb{K}_{t_k}^{n+1} = \frac{\partial \mathbb{F}_t(\mathbb{U}_k^{n+1}, t^{n+1})}{\partial \mathbb{U}}. \tag{2.163}$$

Como critério de parada das iterações, pode-se utilizar a magnitude do resíduo

$$\|\mathbb{R}(\mathbb{U}_k^{n+1}, t^{n+1})\|_{L_2} = \left\{ \sum_{q=1}^{3n_n} \left[\mathrm{R}_q(\mathbb{U}_k^{n+1}, t^{n+1}) \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \mathrm{tol}_{\mathbb{R}}, \tag{2.164}$$

sendo $\mathrm{R}_q(\mathbb{U}_k^{n+1}, t^{n+1})$ os termos de $\mathbb{R}(\mathbb{U}_k^{n+1}, t^{n+1})$ e $\mathrm{tol}_{\mathbb{R}}$ a tolerância máxima definida, ou então a magnitude dos incrementos de deslocamentos

$$\|\Delta\mathbb{U}_k^{n+1}\|_{L_2} = \left\{ \sum_{q=1}^{3n_n} \left[(\Delta\mathrm{U}_k^{n+1})_q \right]^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \mathrm{tol}_{\mathbb{U}}, \tag{2.165}$$

onde $(\Delta\mathrm{U}_k^{n+1})_q$ são os termos de $\Delta\mathbb{U}_k^{n+1}$ e $\mathrm{tol}_{\mathbb{U}}$ é a tolerância definida para os incrementos de deslocamentos.

O algoritmo computacional para o uso da integração implícita no MPM, bem como a determinação de $\mathbb{K}_k^{n+1}$, podem ser encontrados em Zhang et al. (2017) e em Guilkey e Weiss (2003).

2.2.3.3 Imposição das condições de contorno essenciais

Quando o contorno de deslocamentos prescritos de Ω, Γ_u, alinha-se com a malha Euleriana de fundo, a imposição de condições de contorno de deslocamento é direta. Isso ocorre desde que as funções de interpolação $N_i(\mathbf{x})$ satisfaçam a propriedade do delta de Kroenecker, ao menos em Γ_u. Em aplicações em que a integração temporal é explícita, basta sobrescrever, nos nós i em Γ_u, as velocidades calculadas $\mathbf{v}_i^{n+1}$ com

os valores prescritos $\overline{\mathbf{v}}_i$. Para análises com integração implícita no tempo, os artifícios utilizados comumente no método de elementos finitos (MEF) podem ser empregados (VAUCORBEIL et al., 2020).

2.2.3.4 Atualização das variáveis de estado dos pontos materiais

Uma vez atualizadas as velocidades dos nós da malha Euleriana, os valores de $\mathbf{v}_i^{n+1}$ são utilizados para atualizar as variáveis de estado dos pontos materiais, incluindo-se as posições, as velocidades, os volumes, os gradientes de deformações e as tensões (VAUCORBEIL et al., 2020). Todas as atualizações colocadas nesta seção terciária consideram a integração temporal explícita de Euler-Gauss.

2.2.3.4.1 Velocidades e posições

Sulsky et al. (1994) atualizam as velocidades das partículas pela equação

$$\mathbf{v}_P^{n+1} = \sum_i N_i(\mathbf{x}_P^n)\mathbf{v}_i^{n+1} \tag{2.166}$$

e as posições pela equação

$$\mathbf{x}_P^{n+1} = \mathbf{x}_P^n + \Delta t^n \sum_i N_i(\mathbf{x}_P^n)\mathbf{v}_i^{n+1}. \tag{2.167}$$

2.2.3.4.2 Gradientes materiais de deformações

Antes da atualização dos gradientes materiais de deformações, o cálculo dos gradientes espaciais de velocidades dos pontos materiais

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_P}^n = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}_P^n)}{\partial \mathbf{x}} = \sum_i \mathbf{v}_i^{n+1} \left\{ \frac{\partial N_i(\mathbf{x}_P^n)}{\partial \mathbf{x}} \right\}^T \tag{2.168}$$

é necessário. Então, utiliza-se o conceito da equação (2.11) para se calcular o gradiente de deformações atualizado

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_P^{n+1} &= \mathbf{F}_P^n + \Delta \mathbf{F}_P^n \\ &= \left(\mathbf{I} + \Delta t^n \boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_P}^n\right) \mathbf{F}_P^n. \end{aligned} \tag{2.169}$$

2.2.3.4.3 Tensões

Uma das maneiras de se atualizar as tensões tem início com o cálculo dos tensores taxa de deformação das partículas

$$\mathbf{D}_P^n = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_P}^n + (\boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_P}^n)^T\right], \tag{2.170}$$

para que, então, obtenham-se os incrementos de deformação

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^n = \Delta t^n \mathbf{D}_P^n \tag{2.171}$$

e, consequentemente, os incrementos de tensão

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_P^n = \Delta\boldsymbol{\sigma}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^n), \tag{2.172}$$

onde a função $\boldsymbol{\sigma}_P(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^n)$ varia com a equação constitutiva do material. Finalmente, computam-se os tensores de tensões de Cauchy atualizados

$$\boldsymbol{\sigma}_P^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_P^n + \Delta\boldsymbol{\sigma}_P^n. \tag{2.173}$$

Outra maneira utilizada - a depender do material com o qual se trabalha - é o cálculo direto

$$\boldsymbol{\sigma}_P^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_P^{n+1}(\mathbf{F}_P^{n+1}), \tag{2.174}$$

com base no gradiente de deformações atualizado. Para materiais hiperelásticos ou Neo-Hookeanos, costuma ser a opção empregada.

2.2.3.5 Ciclo convencional do MPM original

O fluxograma da figura 5 - que tem como premissas o esquema de integração explícito de Euler-Gauss, a matriz de massa agrupada e a atualização de tensões com base no incremento de deformações - representa o algoritmo computacional comumente aplicado em análises pelo MPM em seu formato original. Primeiramente, iniciam-se dois processos paralelos: a definição da malha Lagrangiana, pela divisão do subdomínio Ω em n_p subdomínios Ω_p e a posterior determinação das variáveis de estado iniciais dos pontos representativos P de Ω_p (posições $\mathbf{x}_P^0$, massas m_P, volumes V_P^0, velocidades $\mathbf{v}_P^0$, gradientes de deformações $\mathbf{F}_P^0$, tensões $\boldsymbol{\sigma}_P^0$); a definição da malha Euleriana, com as posições dos nós $\mathbf{x}_i$.

Ambos os processos confluem para a análise ao longo do tempo, cujo tempo inicial é $t_0 = 0$ e o primeiro passo de tempo é $n = 0$. Após essas declarações, inicia-se o laço computacional propriamente dito, verificando-se se o tempo atual t^n já atingiu ou não o tempo estipulado de análise t_{an}. Se t^n for menor que t_{an}, segue-se para o cálculo do incremento de tempo do passo atual Δt^n e, depois, para a interpolação das

massas dos pontos materiais para os nós, obtendo-se as massas nodais agrupadas m_i^n. Também calculam-se, nos nós, as velocidades $\mathbf{v}_i^n$, as forças internas $\mathbf{f}_{\sigma_i}^n$ e as forças externas de corpo $\mathbf{f}_{b_i}^n$ e de superfície $\mathbf{f}_{t_i}^n$. Com isso, computam-se as forças totais nos nós $\mathbf{f}_i^n$ e, logo adiante, as acelerações nodais $\mathbf{a}_i^n$. Então, os valores de $\mathbf{a}_i^n$ permitem a integração explícita da velocidade no tempo para que se tenham as velocidades atualizadas $\mathbf{v}_i^{n+1}$. No caso do nó i estar no contorno de deslocamentos/velocidades prescritos Γ_u, o vetor $\mathbf{v}_i^{n+1}$ é substituído pelo vetor prescrito $\overline{\mathbf{v}}_i$.

Desse modo, com as velocidades atualizadas nos nós, determinam-se, nos pontos materiais, as novas velocidades $\mathbf{v}_P^{n+1}$ e posições $\mathbf{x}_P^{n+1}$. Ainda com base nos valores de $\mathbf{v}_i^{n+1}$, calculam-se os gradientes espaciais de velocidades nas partículas $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_P}^n$, que servem tanto para a atualização dos gradientes materiais $\mathbf{F}_P^{n+1}$, quanto para o cálculo dos tensores taxa de deformações $\mathbf{D}_P^n$. Assim sendo, computam-se os incrementos de deformação $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^n$ por integração explícita, os quais estão associados aos incrementos de deformação $\Delta\boldsymbol{\sigma}_P^n$ pela lei constitutiva do material. Tais incrementos de tensões são somados aos tensores de tensões do passo $n+1$ e, logo, têm-se as tensões de Cauchy atualizadas $\boldsymbol{\sigma}_P^{n+1}$. Depois, atualizam-se os volumes, com o cálculo de $\mathbf{V}_P^{n+1}$ em função dos determinantes dos gradientes materiais de deformações atualizados e dos volumes iniciais. Por fim, evolui-se o passo de tempo n e volta-se à verificação $t_n < t_{\text{an}}$. Se a resposta for verdadeira, repete-se o ciclo e, se falsa, encerra-se a análise.

2.2.4 Funções de interpolação

As funções de interpolação utilizadas por Sulsky et al. (1994), trabalho entendido como a primeira publicação do MPM, são funções trilineares do tipo

$$N_i(\mathbf{x}) = \mathcal{R}_i(x)\mathcal{S}_i(y)\mathcal{T}_i(z), \tag{2.175}$$

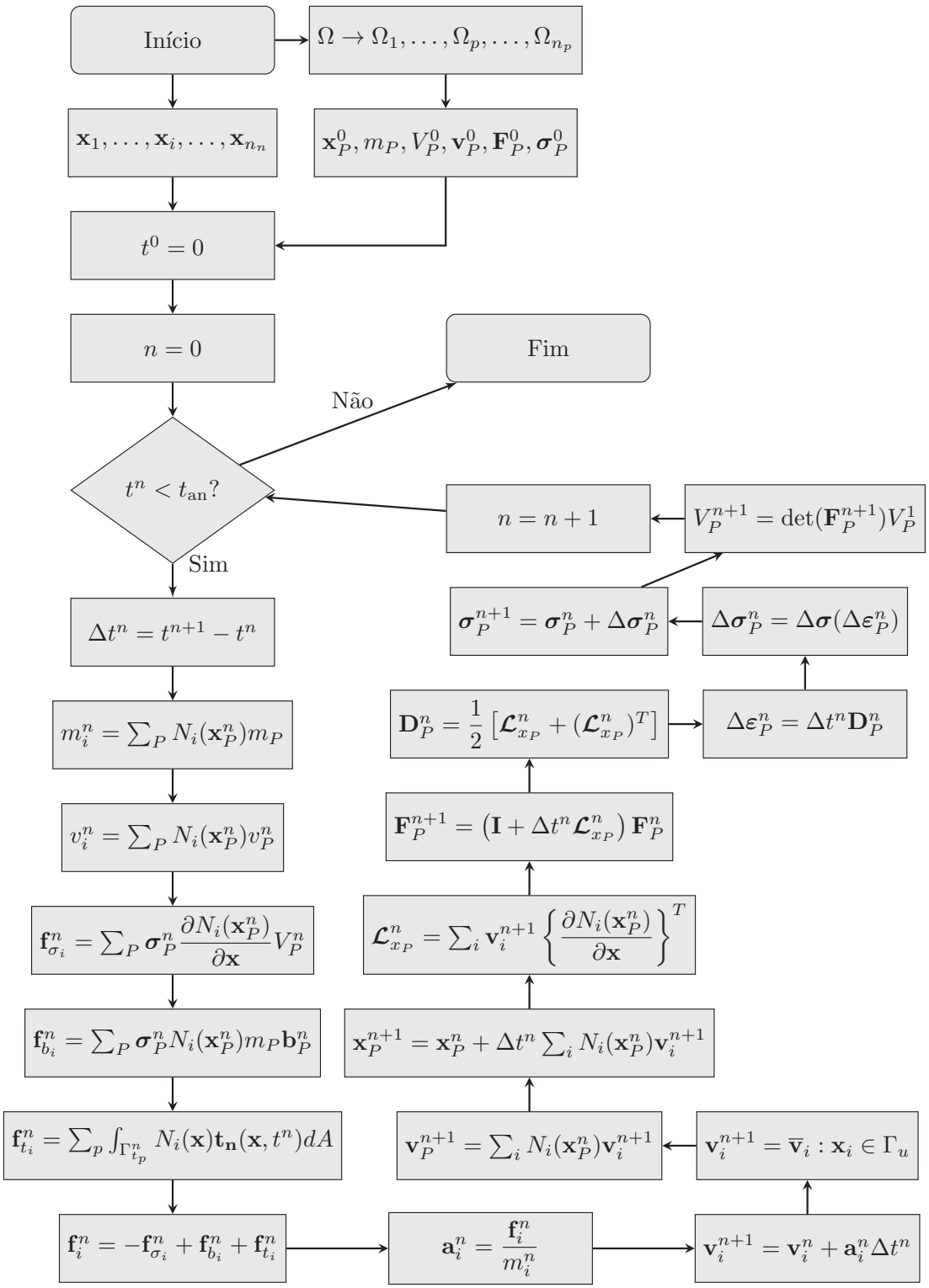
onde

$$\mathcal{R}_i(x) = \begin{cases} 1 + \mathrm{r}_i(x) : -1 \leq \mathrm{r}_i(x) < 0 \\ 1 - \mathrm{r}_i(x) : 0 \leq \mathrm{r}_i(x) \leq 1 \\ 0 : \mathrm{r}_i(x) < -1, \mathrm{r}_i(x) > 1 \end{cases}, \tag{2.176}$$

$$\mathcal{S}_i(y) = \begin{cases} 1 + \mathrm{s}_i(y) : -1 \leq \mathrm{s}_i(y) < 0 \\ 1 - \mathrm{s}_i(y) : 0 \leq \mathrm{s}_i(y) \leq 1 \\ 0 : \mathrm{s}_i(y) < -1, \mathrm{s}_i(y) > 1 \end{cases} \tag{2.177}$$

e

FIGURA 5 – FLUXOGRAMA GERALMENTE UTILIZADO NA IMPLEMENTAÇÃO DO MPM EM SEU FORMATO ORIGINAL.



FONTE: O autor (2022).

$$\mathcal{T}_i(z) = \begin{cases} 1 + \mathfrak{t}_i(z) : -1 \leq \mathfrak{t}_i(z) < 0 \\ 1 - \mathfrak{t}_i(z) : 0 \leq \mathfrak{t}_i(z) \leq 1 \\ 0 : \mathfrak{t}_i(z) < -1, \mathfrak{t}_i(z) > 1 \end{cases} . \tag{2.178}$$

As coordenadas relativas $\mathrm{r}(x)$, $\mathrm{s}(y)$ e $\mathfrak{t}(z)$, mostradas nas equações (2.176) a (2.178), são calculadas pelas equações

$$\mathrm{r}_i(x) = \frac{x - x_i}{l_{cx}}, \tag{2.179}$$

$$\mathrm{s}_i(y) = \frac{y - y_i}{l_{cy}}, \tag{2.180}$$

e

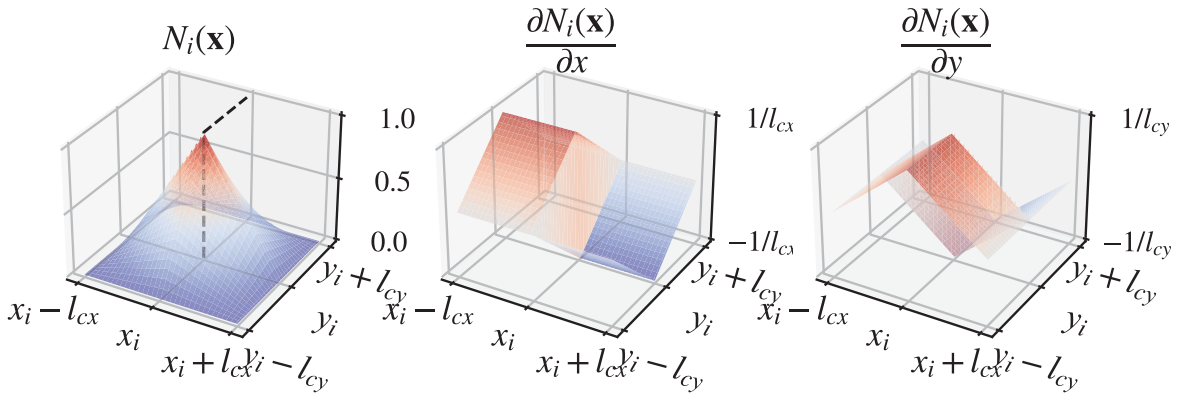
$$\mathfrak{t}_i(z) = \frac{z - z_i}{l_{cz}}, \tag{2.181}$$

Para uma melhor visualização, mostra-se, na figura 6, o comportamento de $N_i(\mathbf{x})$ em análises bidimensionais. Como pode-se perceber, as funções $N_i(\mathbf{x})$ possuem continuidade C^0, o que é a causa de uma instabilidade nas partículas que cruzam uma célula (*cell crossing instability*). Como as funções que formam $N_i(\mathbf{x})$ são lineares, suas derivadas são constantes, com uma grande descontinuidade - os valores mudam de sinal - na fronteira das células unidas pelo nó i. Isso pode gerar instabilidade nas partículas que atravessam essas fronteiras, pois os cálculos das forças internas nodais e dos gradientes de velocidades dos pontos materiais depende de $\frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$. O problema costuma ser mais crítico em análises dinâmicas implícitas e em análises estáticas, quando não há a componente de inércia. Nota-se que, quanto mais refinada a malha Euleriana, menor o tempo levado para que uma partícula cruze de uma célula para outra (VAUCORBEIL et al., 2020).

Conforme Vaucorbeil et al. (2020), uma das soluções é não reiniciar a malha Euleriana ao final de cada passo de tempo, porém isso pode resultar em distorções de malha e levar aos mesmos problemas conhecidos do MEF. Algumas outras opções são a utilização de funções de interpolação de ordem superior (B-splines) e o uso do método do ponto material com interpolação generalizada (GIMP) e suas variantes, como o CPDI (SADEGHIRAD et al., 2011), que será detalhado na seção secundária 2.2.7.

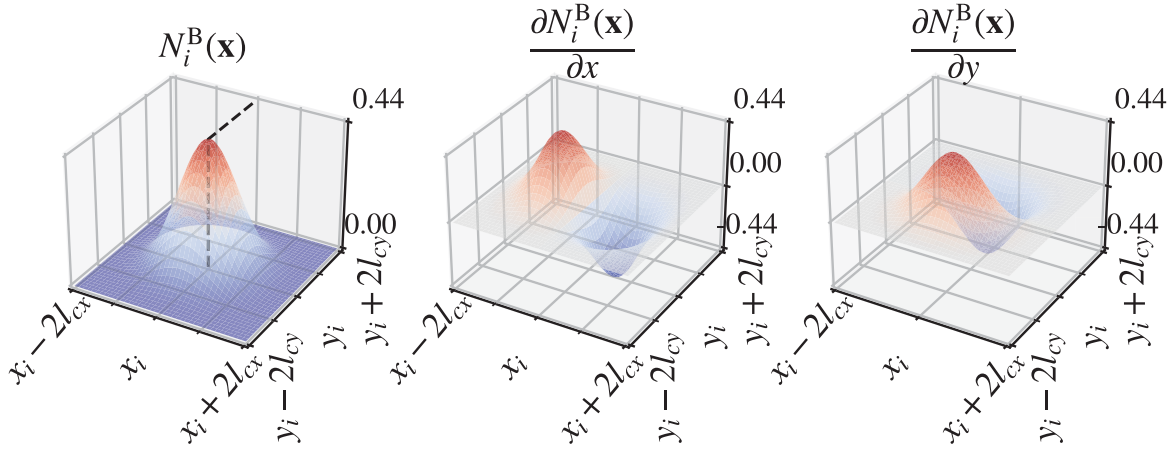
A figura 7 mostra como o emprego das B-splines cúbicas $N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$ pode melhorar as propriedades de convergência espacial do MPM, eliminando o erro de cruzamento das células. Tais funções possuem derivadas de primeira ordem contínuas, além do fato dos valores $N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$ serem sempre maiores ou iguais a zero, o que evita a interpolação de massas negativas para os nós. Stomakhin et al. (2013), por exemplo, utilizam essas funções para a simulação do comportamento da neve pelo MPM.

FIGURA 6 – FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO LINEARES EM 2 DIMENSÕES.



FONTE: O autor (2022).

FIGURA 7 – FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO B-SPLINES CÚBICAS EM 2 DIMENSÕES.



FONTE: O autor (2022).

2.2.5 Esquemas de atualização de tensões

No MPM explícito, as tensões podem ser atualizadas no início de cada passo de tempo - o que caracteriza o chamado esquema *update-stress-first* (USF) - ou no final do mesmo, o que qualifica o arranjo *update-stress-last* (USL) (ZHANG et al., 2017). O fluxograma da figura 5, por exemplo, utiliza o esquema USL. Na tabela 1 mostra-se a comparação entre as sequências de cálculo para USF e USL.

Há também a variante denominada *modified update-stress-last* (MUSL), de Sulsky et al. (1995) na qual atualizam-se os momentos lineares nodais pela equação

$$\boldsymbol{p}_i^{n+1} = (m\mathbf{v})_i^{n+1} + \Delta t^n \mathbf{f}_i^n, \tag{2.182}$$

TABELA 1 – COMPARAÇÃO ENTRE ESQUEMAS USF E USL

passo	USF	USL
1	Cálculo de m_i^n e de $\mathbf{v}_i^n$ a partir de m_P e de $\mathbf{v}_P^n$	Cálculo de m_i^n e de $\mathbf{v}_i^n$ a partir de m_P e de $\mathbf{v}_P^n$
2	Imposição das condições de contorno essenciais	Cálculo das forças nodais $\mathbf{f}_i^n$
3	Cálculo do gradiente de velocidades $\boldsymbol{\mathcal{L}}_P^n$ utilizando-se $\mathbf{v}_i^n$	Cálculo de $\mathbf{a}_i^n$
4	Cálculo dos incrementos de deformações das partículas $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^n$, atualização das tensões, obtendo-se $\boldsymbol{\sigma}_P^{n+1}$, atualização dos gradientes de deformações para $\mathbf{F}_P^{n+1}$ e atualização dos volumes para V_P^{n+1}	Cálculo de $\mathbf{v}_i^{n+1}$ por integração explícita no tempo
5	Cálculo das forças nodais $\mathbf{f}_i^n$	Imposição das condições de contorno essenciais
6	Cálculo de $\mathbf{a}_i^n$	Cálculo do gradiente de velocidades $\boldsymbol{\mathcal{L}}_P^n$ utilizando-se $\mathbf{v}_i^{n+1}$
7	Cálculo de $\mathbf{v}_i^{n+1}$ por integração explícita no tempo	Cálculo dos incrementos de deformações das partículas $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^n$ e atualização das tensões, obtendo-se $\boldsymbol{\sigma}_P^{n+1}$
8	Cálculo de $\mathbf{v}_i^{n+1}$ por integração explícita no tempo	Cálculo dos incrementos de deformações das partículas $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_P^n$, atualização das tensões, obtendo-se $\boldsymbol{\sigma}_P^{n+1}$, atualização dos gradientes de deformações para $\mathbf{F}_P^{n+1}$ e atualização dos volumes para V_P^{n+1}
9	Atualização das velocidades e posições das partículas para $\mathbf{v}_P^{n+1}$ e $\mathbf{x}_P^{n+1}$, respectivamente	Atualização das velocidades e posições das partículas para $\mathbf{v}_P^{n+1}$ e $\mathbf{x}_P^{n+1}$, respectivamente

FONTE: Adaptado de Zhang et al. (2017)

o que permite que as velocidades nodais atualizadas sejam dadas por

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \frac{\boldsymbol{p}_i^{n+1}}{m_i^n}. \tag{2.183}$$

Assim, as partículas têm suas posições atualizadas por

$$\mathbf{x}_P^{n+1} = \mathbf{x}_P^n + \Delta t^n \sum_i N_i(\mathbf{x}_P^n)\mathbf{v}_i^{n+1} \tag{2.184}$$

e suas velocidades por

$$\mathbf{v}_P^{n+1} = \mathbf{v}_P^n + \Delta t^n \sum_i N_i(\mathbf{x}_P^n) \frac{\mathbf{f}_i^n}{m_i^n}. \tag{2.185}$$

Contudo, a principal etapa do MUSL é a reinterpolação dos momentos lineares das partículas para os nós utilizando-se a equação

$$\tilde{\boldsymbol{p}}_i^{n+1} \sum_P N_i(\mathbf{x}_P^n) m_P \mathbf{v}_P^{n+1}. \tag{2.186}$$

Então, após uma nova consideração das condições de contorno essenciais, as velocidades nodais são recalculadas por

$$\tilde{\mathbf{v}}_i^{n+1} = \frac{\tilde{\boldsymbol{p}}_i^{n+1}}{m_i^n} \tag{2.187}$$

e empregadas no cálculo do gradiente espacial de velocidades

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_P^n = \sum_i \tilde{\mathbf{v}}_i^{n+1} \left[\frac{\partial N_i(\mathbf{x}_P^n)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \tag{2.188}$$

Bardenhagen (2002) estuda a dissipação de energia provocada pelos esquemas USF e USL em problemas de vibrações livres. O autor verifica que, embora ambos os métodos tenham reproduzido com precisão os períodos de vibração, o método USL é fortemente dissipativo, enquanto o USF mostra-se conservativo. Já Nairn (2003), em análise de vibrações elásticas bidimensionais, detecta instabilidades no método USL, além de concluir que o método USF tende a incrementar levemente a energia total do sistema. O autor, porém, também emprega o método MUSL e constata uma grande diminuição na dissipação de energia, se comparado ao uso do USL.

2.2.6 Amortecimento local

As formulações dinâmicas do MPM são geralmente desenvolvidas para resolver problemas que evoluem relativamente rápido e nos quais a inércia tem um papel importante. Entretanto, também aplica-se o método em processos em que o interesse recai sobre a solução estacionária. Assim, de forma a acelerar a convergência para o equilíbrio quase estático, pode-se incluir um amortecimento local artificial não viscoso, dissipando energia cinética (FERN et al., 2019). A consideração do amortecimento viscoso também pode ser feita para atingir a convergência desejada, mas isso introduz forças de corpo que retardam o colapso estacionário e pode interferir no modo de falha (AL KAFAJI, 2013).

Cundall (1987) descreve um tipo de amortecimento não viscoso que favorece a convergência para o equilíbrio quase estático. A proposta é incluir, na soma de forças nodais, uma força de amortecimento

$$\mathbf{f}_{d_i}^n = \left[\begin{array}{ccc} f_{d_{x_i}}^n & f_{d_{y_i}}^n & f_{d_{z_i}}^n \end{array} \right]^T, \tag{2.189}$$

cujas componentes direcionais valem

$$f_{d_{x_i}}^n = -\alpha |f_{b_{x_i}}^n + f_{t_{x_i}}^n - f_{\sigma_{x_i}}^n| \frac{(v_x)_i^n}{|(v_x)_i^n|}, \tag{2.190}$$

$$f_{d_{y_i}}^n = -\alpha |f_{b_{y_i}}^n + f_{t_{y_i}}^n - f_{\sigma_{y_i}}^n| \frac{(v_y)_i^n}{|(v_y)_i^n|} \tag{2.191}$$

e

$$f_{d_{z_i}}^n = -\alpha |f_{b_{z_i}}^n + f_{t_{z_i}}^n - f_{\sigma_{z_i}}^n| \frac{(v_z)_i^n}{|(v_z)_i^n|}, \tag{2.192}$$

sendo sempre orientadas na direção contrária do movimento, onde α é o coeficiente de amortecimento não viscoso, que varia de 0 - sem amortecimento - a 1 - amortecimento total da força nodal. Conforme Al Kafaji (2013), o uso do amortecimento local permite que simulações estáticas possam ser feitas com integração temporal explícita, mitigando os efeitos de ondas de tensão. Além disso, o coeficiente de amortecimento α pode ser relacionado à razão de amortecimento ζ_d pela equação

$$\alpha = \pi \zeta_d. \tag{2.193}$$

2.2.7 Método do ponto material com interpolação do domínio convectivo da partícula (MPM CPDI)

Conforme Sadeghirad et al. (2011), muitas das variantes do MPM diferenciam-se entre si pelo modo como é feita a interpolação de informações entre a malha Euleriana e a malha Lagrangiana. Entretanto, pode-se estabelecer uma formulação geral que é comum entre tais variantes, trabalhando-se com os pesos de interpolação

$$\phi_{ip} = \frac{\int_{\Omega_p} \chi_p \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\right) N_i(\mathbf{x}) dV}{\int_{\Omega_p} \chi_p \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\right) dV}, \tag{2.194}$$

entre o nó i e o subdomínio Ω_p, e com os respectivos gradientes

$$\nabla_x \phi_{ip} = \frac{\int_{\Omega_p} \chi_p \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\right) \dfrac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} dV}{\int_{\Omega_\chi} \chi_p \left(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P\right) dV}, \tag{2.195}$$

onde $\chi_p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)$ é chamada de função característica do subdomínio Ω_p. No MPM original, por exemplo, $\chi_p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_P)$, fazendo com que

$$\phi_{ip}^{\mathrm{MPM}} = N_i(\mathbf{x}_P) \tag{2.196}$$

e com que

$$\nabla_x \phi_{ip}^{\mathrm{MPM}} = \frac{\partial N_i(\mathbf{x}_P)}{\partial \mathbf{x}}. \tag{2.197}$$

Todavia, como já exposto na seção secundária 2.2.4, o MPM original - que utiliza funções de interpolação lineares - é sujeito à instabilidades pela mudança repentina do valor de $\dfrac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}$ quando uma partícula cruza de uma célula Euleriana para outra. Sendo assim, buscam-se alternativas para contornar o problema. Uma delas, denominada método *generalized interpolation material point* (GIMP) ou método do ponto material de interpolação generalizada, é obtida por Bardenhagen e Kober (2004) assumindo-se a função característica

$$\chi_p(\mathbf{x} - \mathbf{x}_p) = \begin{cases} 1 & \text{se } \mathbf{x} \in \Omega_p \\ 0 & \text{se } \mathbf{x} \notin \Omega_p \end{cases}. \tag{2.198}$$

Com isso, os pesos de interpolação do método GIMP são dados por

$$\phi_{ip}^{\mathrm{GIMP}} = \frac{1}{V_p} \int_{\Omega_p} N_i(\mathbf{x}) dV \tag{2.199}$$

e seus gradientes são calculados conforme a equação

$$\nabla_x \phi_{ip}^{\mathrm{GIMP}} = \frac{1}{V_p} \int_{\Omega_p} \frac{\partial N_i(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} dV. \tag{2.200}$$

Do GIMP surgem algumas estratégias diferentes para se monitorar os subdomínios Ω_p. A primeira delas é o *unchanged for all time* (uGIMP), cuja premissa é considerar que a geometria dos subdomínios permanece inalterada por todo o tempo de análise. Uma segunda estratégia é o *contiguous particle* GIMP (cpGIMP), no qual os subdomínios sofrem apenas deformações volumétricas ao longo do tempo, alterando-se as dimensões pelas componentes da diagonal principal dos respectivos gradientes materiais de deformações. No entanto, ambos os métodos são imprecisos na análise

de problemas com distorção e grandes rotações. Além disso, a integração no subdomínio Ω_p torna-se complicada, por exigir a divisão do mesmo nas bordas das células Eulerianas para se determinar ϕ_{ip} e $\nabla\phi_{ip}$ (SADEGHIRAD et al., 2011).

Uma possibilidade, então, é se trabalhar com funções de interpolação modificadas, que sejam contínuas em Ω_p, independentemente desse subdomínio estar dividido entre diferentes células ou inteiramente em uma única célula. Essa concepção caracteriza a variante do MPM chamada *convected particle domain interpolation*(CPDI) ou interpolação do domínio convectivo da partícula, desenvolvido por Sadeghirad et al. (2011, 2013), que permite um cálculo eficiente das integrais de subdomínio pelo monitoramento do movimento dos vértices de Ω_p.

Antes de uma abordagem do CPDI com maior profundidade, ressalta-se que todas as considerações colocadas nas seções terciárias a seguir referem-se à segunda versão do CPDI, contida em Sadeghirad et al. (2013). É uma versão melhorada em relação ao que é divulgado em Sadeghirad et al. (2011), pois há a preocupação em se evitar a formação de vazios (*gaps*) na malha Lagrangiana deformada. Os autores chamam essa versão de CPDI de segunda ordem ou CPDI2, porém, nesta tese, opta-se por chamá-la apenas de CPDI ou MPM CPDI.

Além disso, toda a exemplificação acontece tendo-se como premissas a análise bidimensional e subdomínios Ω_p quadrilaterais, inicialmente retangulares, embora o CPDI seja aplicável a análises 1D e 3D com diversos formatos de subdomínio, como mostrado do Nguyen et al. (2017).

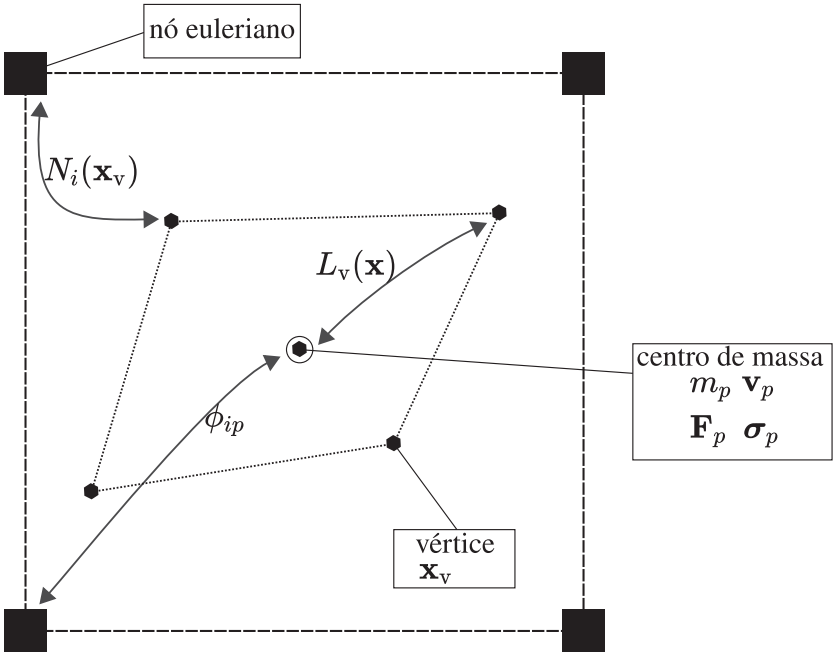
2.2.7.1 Monitoramento dos subdomínios

Conforme percebe-se na figura 8, no CPDI armazenam-se as massas, velocidades, gradientes de deformações e tensões no centro de massa do subdomínio Ω_p, da mesma forma que ocorre no MPM original. Há, porém, uma exceção: as posições, que são armazenadas nos vértices v de Ω_p.

Na figura 8 também observa-se que a interpolação espacial é composta por duas parcelas: uma externa e outra interna a Ω_p. A parcela externa é formada pelas próprias funções de interpolação lineares do MPM original $N_i(\mathbf{x})$. Já a composição da parcela interna é dada pelas funções $L_{\mathrm{v}}(\mathbf{x})$, também lineares, que promovem a interpolação das variáveis internas a Ω_p para os vértices v. Essas duas parcelas são consideradas no cálculo dos pesos de interpolação $\phi_{ip}^{\mathrm{CPDI}}$, que interpolam as variáveis concentradas no centro de massa de Ω_p para os nós.

No que se refere a $L_{\mathrm{v}}(\mathbf{x})$, tratam-se de funções bilineares lagrangianas que interpolam informações entre 4 vértices de um quadrilátero, mostrado na figura 9, que são escritas como

FIGURA 8 – ESQUEMA DE MONITORAMENTO DOS SUBDOMÍNIOS PELO CPDI.

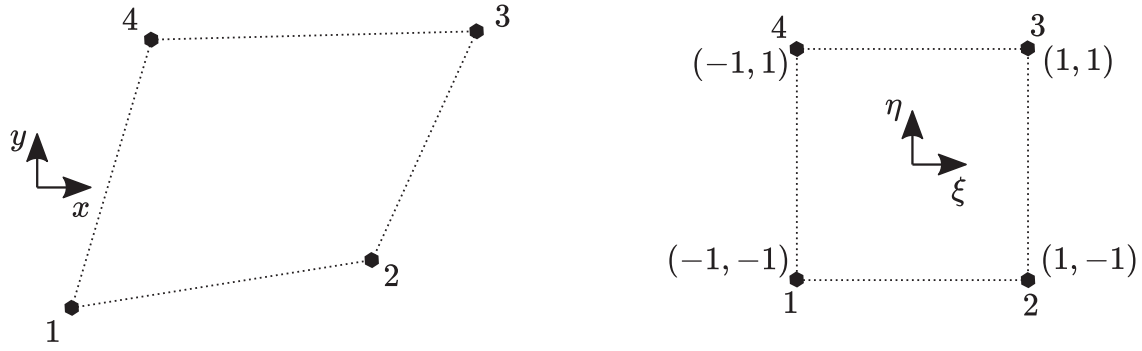


FONTE: O autor(2022).

$$
\begin{aligned}
L_1(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
L_2(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta) \\
L_3(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
L_4(\xi,\eta) &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)
\end{aligned}
\tag{2.201}
$$

quando se consideram coordenadas locais (ξ,η) variando de -1 a 1.

FIGURA 9 – REPRESENTAÇÃO DO SUBDOMÍNIO Ω_P PELO ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO BILINEAR LAGRANGIANO.



FONTE: Adaptado de Sadeghirad et al. (2013).

Essa composição entre $N_i(\mathbf{x})$ e $L_{\mathrm{v}}(\mathbf{x})$ gera as funções de interpolação genéricas do CPDI

$$N_i^{\mathrm{CPDI}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}) L_{\mathrm{v}}(\mathbf{x}), \tag{2.202}$$

que valem $N_i^{\mathrm{CPDI}}(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}) = N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}})$ nos vértices e continuam respeitando a partição da unidade. Sendo assim, substituindo-se (2.202) na equação de cálculo dos pesos de interpolação (2.199), escreve-se

$$\begin{aligned} \phi_{ip}^{\mathrm{CPDI}} &= \frac{1}{V_p} \int_{\Omega_p} N_i^{\mathrm{CPDI}}(\mathbf{x}) dV \\ &= \frac{1}{V_p} \int_{\Omega_p} \sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}) L_{\mathrm{v}}(\mathbf{x}) dV \\ &= \frac{1}{V_p} \sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}) \int_{\Omega_p} L_{\mathrm{v}}(\mathbf{x}) dV \end{aligned} \tag{2.203}$$

De forma análoga, escrevem-se os gradientes dos pesos de interpolação como

$$\begin{aligned} \nabla_x \phi_{ip}^{\mathrm{CPDI}} &= \frac{1}{V_p} \int_{\Omega_p} \frac{\partial N_i^{\mathrm{CPDI}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} dV \\ &= \frac{1}{V_p} \int_{\Omega_p} \sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}) \frac{\partial L_{\mathrm{v}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} dV \\ &= \frac{1}{V_p} \sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}) \int_{\Omega_p} \frac{\partial L_{\mathrm{v}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} dV. \end{aligned} \tag{2.204}$$

2.2.7.2 Integrais de subdomínio

A integral de subdomínio da equação (2.203) pode ser calculada como

$$\int_{\Omega_p} L_{\mathrm{v}}(\mathbf{x}) dV = \int_{A_p} L_{\mathrm{v}}(\mathbf{x}) l_z(\mathrm{x}) dA, \tag{2.205}$$

onde $l_z(\mathbf{x})$ é a dimensão de Ω_p no eixo z, fora do plano. Como as funções $L_{\mathrm{v}}(\mathbf{x})$ são lineares, os gradientes de deformações serão constantes em todo o subdomínio Ω_p. Consequentemente, também pode-se considerar $l_z(\mathbf{x}) = l_{z_p}$ constante.

Isso faz com que (2.205) seja reescrita como

$$\int_{\Omega_p} L_{\mathrm{v}}(\mathbf{x}) dV = l_{z_p} \int_{A_p} L_{\mathrm{v}}(\mathbf{x}) dA \tag{2.206}$$

ou então, considerando-se a relação entra as coordenadas globais $\mathbf{x}$ e locais $\boldsymbol{\xi}$, como

$$\int_{\Omega_p} L_{\mathrm{v}}(\mathbf{x})dV = l_{z_p}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} L_{\mathrm{v}}(\xi,\eta)\det(\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}(\xi,\eta))d\xi d\eta, \tag{2.207}$$

sendo

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}(\xi,\eta) &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \\ = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} (\eta-1)(x_1-x_2)+(\eta+1)(x_3-x_4) & (\xi-1)(x_1-x_4)+(\xi+1)(x_3-x_2) \\ (\eta-1)(y_1-y_2)+(\eta+1)(y_3-y_4) & (\xi-1)(y_1-y_4)+(\xi+1)(y_3-y_2) \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{2.208}$$

o jacobiano entre os sistemas (x,y) e (ξ,η), já que

$$\mathbf{x}(\xi,\eta) = \sum_{\mathrm{v}} L_{\mathrm{v}}(\xi,\eta)\mathbf{x}_{\mathrm{v}}. \tag{2.209}$$

Diante disso, levando-se em conta ainda que

$$\begin{aligned} V_p &= \int_{\Omega_p} dV \\ &= l_{z_p}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\det(\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}(\xi,\eta))d\xi d\eta, \end{aligned} \tag{2.210}$$

os pesos de interpolação do CPDI para subdomínios retangulares de 4 vértices são iguais a

$$\begin{aligned}\phi_{ip}^{\mathrm{CPDI}} = &\left[\frac{1}{48\left(x_1y_2-x_1y_4-x_2y_1+x_2y_3-x_3y_2+x_3y_4+x_4y_1-x_4y_3\right)}\right] \\ &\left[\left(1-\kappa_A-\kappa_B\right)N_i(\mathbf{x}_1)+\left(1-\kappa_A+\kappa_B\right)N_i(\mathbf{x}_2)+\left(1+\kappa_A+\kappa_B\right)N_i(\mathbf{x}_3)+\left(1+\kappa_A-\kappa_B\right)N_i(\mathbf{x}_4)\right],\end{aligned} \tag{2.211}$$

onde

$$\kappa_A = \left(x_4-x_1\right)\left(y_2-y_3\right)-\left(x_2-x_3\right)\left(y_4-y_1\right) \tag{2.212}$$

e

$$\kappa_B = \left(x_3-x_4\right)\left(y_1-y_2\right)-\left(x_1-x_2\right)\left(y_3-y_4\right). \tag{2.213}$$

Já os gradientes dos pesos de interpolação, após tratamento análogo ao dado a $\phi_{ip}^{\mathrm{CPDI}}$, possuem valor final igual a

$$\nabla_x \phi_{ip}^{\mathrm{CPDI}} = \left[\frac{1}{4\left(x_1y_2 - x_1y_4 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_4 + x_4y_1 - x_4y_3\right)}\right] \left[N_i(\mathbf{x}_1)\left\{\begin{array}{c} y_2 - y_4 \\ x_4 - x_2 \end{array}\right\} + N_i(\mathbf{x}_2)\left\{\begin{array}{c} y_3 - y_1 \\ x_1 - x_3 \end{array}\right\} + N_i(\mathbf{x}_3)\left\{\begin{array}{c} y_4 - y_2 \\ x_2 - x_4 \end{array}\right\} + N_i(\mathbf{x}_4)\left\{\begin{array}{c} y_1 - y_3 \\ x_3 - x_1 \end{array}\right\}\right]. \tag{2.214}$$

Enfatiza-se que os pesos de interpolação do CPDI também respeitam a partição da unidade, com

$$\sum_p \phi_{ip}^{\mathrm{CPDI}} = 1 \tag{2.215}$$

em qualquer nó i da malha Euleriana.

2.2.7.3 Cálculo das variáveis nodais

No CPDI, as massas nodais são obtidas pela equação

$$m_i^n = \sum_p \phi_{ip}^{\mathrm{CPDI},n} m_p, \tag{2.216}$$

sendo m_p a massa total do subdomínio (concentrada no centro de massa). Os momentos lineares nodais são mapeados pela equação

$$\boldsymbol{p}_i^n = \sum_p \phi_{ip}^{\mathrm{CPDI},n} m_p \mathbf{v}_p^n, \tag{2.217}$$

onde $\mathbf{v}_p$ é a velocidade do centro de massa de Ω_p. Sobre as forças internas nodais, são calculadas pela expressão

$$\mathbf{f}_{\sigma_i}^n = \sum_p \boldsymbol{\sigma}_p^n \nabla_x \phi_{ip}^{\mathrm{CPDI},n} V_p^n, \tag{2.218}$$

sendo $\boldsymbol{\sigma}_p^n$ a tensão no centroide de Ω_p, enquanto as forças de corpo são dadas por

$$\mathbf{f}_{b_i}^n = \sum_p \phi_{ip}^{\mathrm{CPDI},n} m_p \mathbf{b}_p^n, \tag{2.219}$$

onde $\mathbf{b}_p^n$ é a força de corpo média do subdomínio considerada em seu centro de massa. Adicionalmente, quando houverem apenas cargas concentradas aplicadas nos vértices

da malha Lagrangiana, calculam-se as forças externas de superfície com base na equação

$$\mathbf{f}_{t_i}^n = \sum_p \sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^n)\mathbf{f}_{\mathrm{v}}^n, \tag{2.220}$$

sendo $\mathbf{f}_{\mathrm{v}}^n$ a força aplicada no vértice local v do subdomínio Ω_p. Nota-se que, quando um vértice global corresponde ao vértice local de dois ou mais elementos, a força $\mathbf{f}_{\mathrm{v}}^n$ é a parcela da força total no vértice global que cabe ao vértice local de Ω_p.

2.2.7.4 Atualização dos subdomínios

Uma vez que a atualização dos momentos lineares nodais é feita da mesma forma que no MPM original explícito, cabe diferenciar aqui como as variáveis nodais atualizadas são remapeadas para os subdomínios. Considerando-se o esquema USL, inicia-se o processo pela atualização das posições dos vértices com a equação

$$\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^{n+1} = \mathbf{x}_{\mathrm{v}}^n + \Delta t^n \sum_i N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^n)\mathbf{v}_i^{n+1} \tag{2.221}$$

e com a atualização das velocidades dos centros de massa dos subdomínios pela equação

$$\mathbf{v}_p^{n+1} = \mathbf{v}_p^n + \Delta t^n \sum_i \phi_{ip}^{\mathrm{CPDI},n} \frac{\mathbf{f}_i^n}{m_i^n}. \tag{2.222}$$

Em seguida, calculam-se os gradientes espaciais de velocidades dos subdomínios

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_p}^n = \sum_i \mathbf{v}_i^{n+1} \left(\nabla_x \phi_{ip}^{\mathrm{CPDI},n}\right)^T, \tag{2.223}$$

os quais permitem o cálculo dos tensores taxa de deformação

$$\mathbf{D}_p^n = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_p}^n + (\boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_p}^n)^T\right] \tag{2.224}$$

que, por sua vez, servem para o cálculo dos incrementos de deformações

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p^n = \Delta t^n \mathbf{D}_p^n \tag{2.225}$$

e, consequentemente, dos incrementos de tensões

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_p^n = \Delta\boldsymbol{\sigma}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p^n), \tag{2.226}$$

os quais são somados às tensões atuais para que se tenha

$$\boldsymbol{\sigma}_p^{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_p^n + \Delta\boldsymbol{\sigma}_p^n. \tag{2.227}$$

Paralelamente a isso, os gradientes materiais de deformações dos subdomínios são atualizados pela equação

$$\mathbf{F}_p^{n+1} = \left[\mathbf{I} + \boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_p}^n \Delta t^n\right] \mathbf{F}_p^n \tag{2.228}$$

e, desse modo, os novos volumes

$$V_p^{n+1} = V_p^0 \det(\mathbf{F}_p^{n+1}) \tag{2.229}$$

são calculados.

2.2.7.5 Vantagens e desvantagens do CPDI

Conforme Sadeghirad et al. (2013), o monitoramento dos subdomínios como se fossem elementos realizado no CPDI incorpora ao MPM algumas características atrativas das formulações convencionais do MEF. Pode-se afirmar que uma delas é a maior facilidade na consideração das condições de contorno, principalmente as naturais (forças de superfície), já que todo o contorno dos subdomínios é controlado de forma explícita. Outra vantagem é a eliminação da instabilidade em subdomínios que atravessam os limites de uma célula Euleriana.

Vaucorbeil et al. (2020) destacam a capacidade do CPDI em lidar com deformações de alongamento extremas, por evitar a separação não física entre subdomínios com centros de massa distantes de mais de uma célula euleriana, e de representar fielmente geometrias complexas. Entretanto, não é um método livre de problemas. Primeiramente, as distorções de malha que podem surgir vão de encontro com a proposta do MPM original. Além disso, o sólido precisa ser discretizado e monitorado em elementos/subdomínios explícitos, algo que é computacionalmente mais custoso que o simples acompanhamento de pontos ao longo do tempo do MPM original.

2.2.8 Imprecisões nas tensões no MPM

Conforme Acosta et al. (2019), a acurácia dos resultados de tensões produzidos pelo MPM costuma ficar longe do nível desejado, sendo que muitas publicação não mostram resultados completos nesse sentido, focando apenas nas deformações dos modelos. Dos trabalhos que destacam o problema, a maioria atribui as oscilações e imprecisões nas tensões à descontinuidade dos gradientes das funções de interpolação nas bordas das células (*cell-crossing instability*).

Contudo, mesmo no CPDI, onde a instabilidade das partículas que cruzam as bordas de uma célula é evitada, o armazenamento das variáveis no centro de massa de Ω_p gera acelerações e incrementos de deformação não físicos no subdomínio (ANDERSEN; ANDERSEN, 2009). Acosta et al. (2019) também afirmam que a integração das forças internas no método GIMP - do qual o CPDI é uma subvariante - também gera perdas de precisão consideráveis nas tensões.

É possível afirmar que o MPM, quando analisado em um passo de tempo específico e relativamente à malha Euleriana, possui certa similaridade com o MEF. No entanto, a integração no MPM é feita em um conjunto de pontos materiais, em detrimento dos pontos de Gauss, gerando imprecisões de integração (ANDERSEN; ANDERSEN, 2009). As posições dos centros de massa dos subdomínios Ω_p não necessariamente correspondem aos pontos superconvergentes de tensão das células Eulerianas (pontos de Gauss). Então, quanto mais distantes os pontos materiais estiverem dos pontos de Gauss da célula Euleriana, menor a precisão dos valores de tensão obtidos (ACOSTA et al., 2019).

Essas oscilações e inconsistências são demonstradas em uma análise pelo MPM bidimensional, considerando o estado plano de deformações, do colapso de uma coluna de solo elastoplástico, feita por Andersen e Andersen (2009), cujos resultados são mostrados na figura 10. Percebe-se que, embora a deformação ocorra conforme o esperado, os resultados à esquerda, retirados diretamente das tensões $\boldsymbol{\sigma}_P$, medidas nos pontos materiais ao final da análise, possuem uma variação bastante irregular e errônea.

Então, afim de melhorar a visualização das tensões, Andersen e Andersen (2009) propõem uma suavização da distribuição. Primeiramente, os autores reinterpolam as tensões para os nós por meio da equação

$$\boldsymbol{\sigma}_i^n = \sum_P \frac{\boldsymbol{\sigma}_P^n N_i(\mathbf{x}_P^n) m_P}{m_i^n}, \tag{2.230}$$

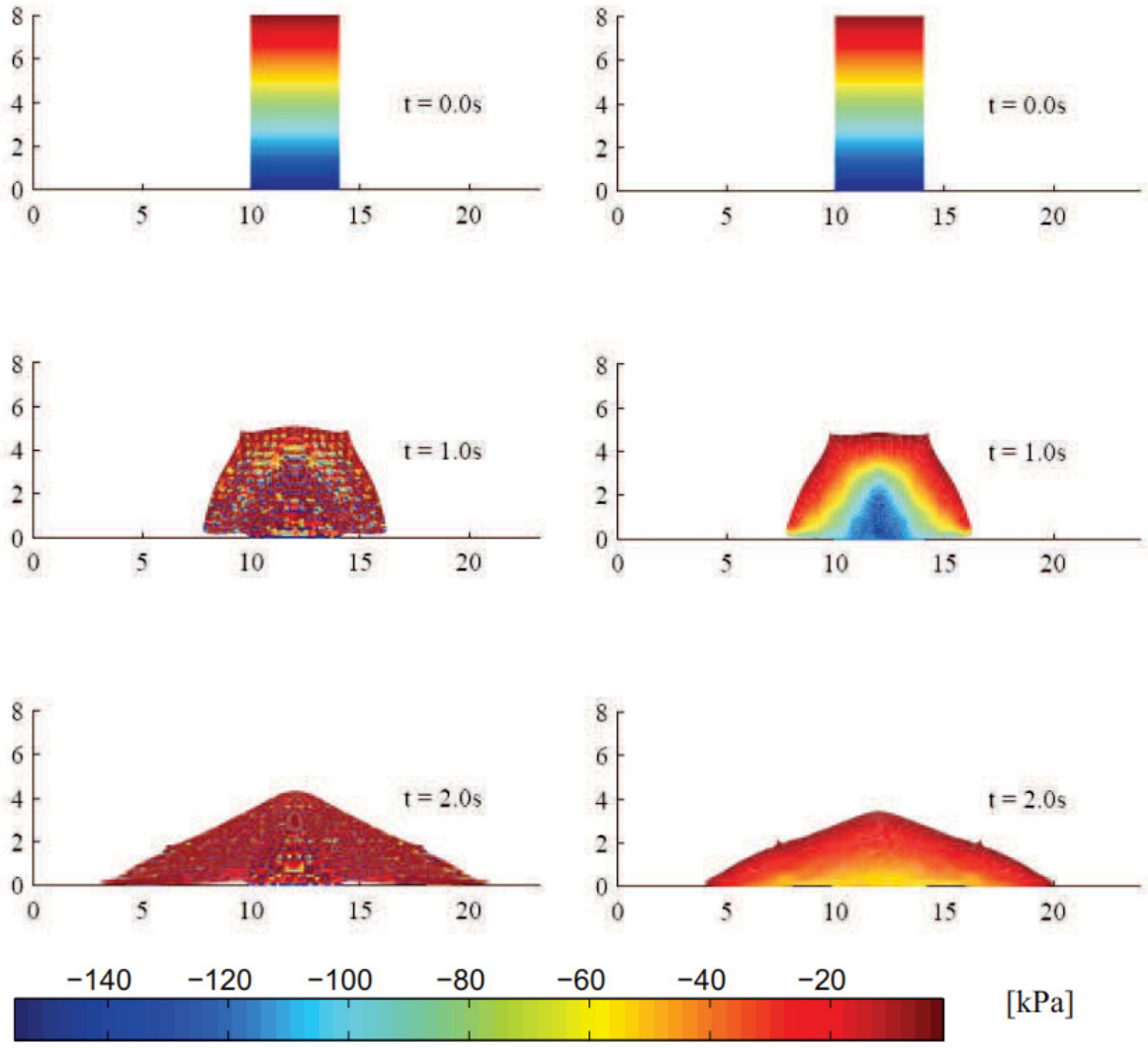
sendo $\boldsymbol{\sigma}_i^n$ o tensor de tensões associado ao nó i, o qual é novamente mapeado para as partículas utilizando-se a equação

$$\boldsymbol{\sigma}_P^{\mathrm{smooth},n} = \sum_i N_i(\mathbf{x}_P^n) \boldsymbol{\sigma}_i^n, \tag{2.231}$$

onde $\boldsymbol{\sigma}_P^{\mathrm{smooth},n}$ é o tensor de tensões suavizado do ponto material P, cujas componentes verticais são plotadas na coluna à direita na figura 10.

Andersen e Andersen (2009) concluem, após a análise, que as tensões, embora com distribuição errônea quando avaliadas individualmente nos pontos materiais,

FIGURA 10 – TENSÕES VERTICAIS DURANTE O COLAPSO DE UMA COLUNA DE SOLO.



FONTE: Andersen e Andersen (2009).
NOTA: À esquerda estão as tensões medidas individualmente nos pontos materiais. À direita encontram-se as tensões suavizadas conforme a equação 2.231.

são realistas nos nós da malha Euleriana, onde as equações do movimento são resolvidas. Além disso, campos de velocidades e de deslocamentos compatíveis com a realidade são verificados nas partículas. Todavia, essa distribuição de tensões irregular e incompatível nos pontos materiais representa um problema significativo, já que a suavização proposta pelas equações (2.230) e (2.231) dificilmente captará com precisão efeitos localizados.

Esse tipo de efeito tende a ser suavizado espacialmente ao longo do tempo, pelas características da integração explícita, algo que ainda permite a obtenção de resultados realísticos. Todavia, em problemas genéricos, os incrementos de tensões definidos individualmente nos pontos materiais acabam sendo irreais, por serem originários de incrementos individuais errôneos de deformações dessas partículas (ANDERSEN;

ANDERSEN, 2009).

Portanto, percebe-se a relevância da busca de soluções que eliminem ou amenizem essa desvantagem do MPM e suas subvariantes com relação às tensões, algo que faz parte dos objetivos desta tese.

2.3 MÉTODO DE HOMEL & HERBOLD (2016) PARA O PARTICIONAMENTO POR FRATURA NO MPM

Conforme já abordado na seção primária 2.2, uma das principais vantagens do MPM e suas subvariantes é a possibilidade de se trabalhar com grandes deslocamentos e grandes deformações, sem que problemas de distorção de malha ocorram. Pode-se ainda estender essas vantagens a problemas mais extremos, como os que envolvem fratura.

Nessa direção, Homel e Herbold (2016) apresentam um método de particionamento de domínios no MPM CPDI, utilizando o gradiente do campo de dano e o contato por atrito. Essa proposta é interessante por não requerer a determinação explícita de fraturas ou superfícies de contato, possibilitando análises que começam com corpos inicialmente indeformados e não danificados e chegam até a fase pós ruptura.

2.3.1 Modelo de dano

Homel e Herbold (2016) utilizam, exclusivamente para tensões de tração, o modelo de dano escalar de Rankine com amolecimento linear descrito por Cervera e Chiumenti (2006), dado pela equação

$$\mathscr{D}^{n+1} = \mathscr{D}(\sigma_I^{\mathrm{undam},n+1}) = \max \begin{cases} 1 - \dfrac{\sigma_{\mathrm{lim}}^{n+1}}{\sigma_I^{\mathrm{undam},n+1}} \\ \mathscr{D}^n \\ 0 \end{cases}, \tag{2.232}$$

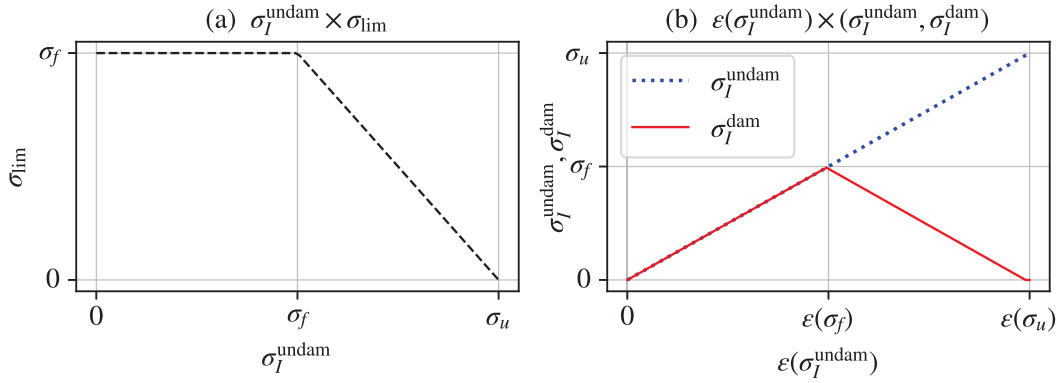
onde $0 \leq \mathscr{D}^{n+1} \leq 1$ é o dano escalar calculado em determinado ponto no passo de tempo $n+1$, $\sigma_I^{\mathrm{undam},n+1}$ é a máxima tensão principal do ponto avaliado no passo de tempo $n+1$, calculada pelas relações constitutivas sem considerar o dano, e

$$\sigma_{\mathrm{lim}}^{n+1} = \sigma_f - H_s(\sigma_I^{\mathrm{undam},n+1} - \sigma_f) \tag{2.233}$$

é a tensão limite para a determinação do dano, sendo σ_f a resistência do material à tração uniaxial e H_s o fator de fragilidade do elemento/subdomínio do qual o ponto faz parte. Ilustra-se a relação entre σ_{lim} e $\sigma_I^{\mathrm{undam}}$ na alínea (a) da figura 11, percebendo-se que, a partir do momento que o dano é maior que zero ($\sigma_I^{\mathrm{undam}} > \sigma_f$), a tensão limite

reduz segundo um coeficiente angular igual a $(-H_s)$, até zerar quando $\sigma_I^{\text{undam}} = \sigma_u = \sigma_f\,(1 + 1/H_s)$. Tal fenômeno caracteriza o amolecimento linear do material.

FIGURA 11 – MODELO DE DANO DE RANKINE COM AMOLECIMENTO LINEAR.



FONTE: o autor (2022).
NOTA: (a) máxima tensão principal de um ponto sem a consideração do dano *versus* tensão limite para o cálculo do dano; (b) relação tensão-deformação para modelos não danificado (azul) e danificado (vermelho).

Quanto ao fator H_s, este é uma medida da fragilidade do elemento/subdomínio em que determinado ponto tem seu dano avaliado. Também é chamado de taxa de amolecimento linear do elemento/subdomínio e é calculado em um subdomínio Ω_p pela equação

$$H_{s_p} = \frac{\overline{H}_s l_p}{1 - \overline{H}_s l_p}, \tag{2.234}$$

onde

$$\overline{H}_s = \frac{\sigma_f^2}{2\mathrm{E}G_f} \tag{2.235}$$

é a taxa de amolecimento linear do material, sendo E o módulo de elasticidade longitudinal e G_f a energia de fratura por unidade de área do material no modo I de fratura (modo de abertura ou trativo).

A variável l_p, denominada comprimento característico do subdomínio Ω_p, serve para compatibilizar a energia específica dissipada pelo dano no material e a correspondente energia dissipada pelo subdomínio. Para um subdomínio retangular bidimensional, Cervera e Chiumenti (2006) recomendam a utilização de

$$l_p = \sqrt{A_p^{n=0}}, \tag{2.236}$$

sendo $A_p^{n=0}$ a área indeformada de Ω_p. Para que (2.234) seja válida, deve-se ter um comprimento característico do subdomínio tal que

$$l_p < \frac{1}{\overline{\overline{H}}_s}. \tag{2.237}$$

Com essas definições, o comportamento tensão-deformação esperado para um ponto com tensão principal de tração é a linha sólida vermelha da alínea (b) da figura 11, representada matematicamente em um subdomínio Ω_p pela equação

$$\sigma_I^{\mathrm{dam},n+1} = \left(1 - \mathscr{D}^{n+1}\right) \sigma_{I_p}^{\mathrm{undam},n+1}, \tag{2.238}$$

na qual a tensão calculada para um estado sem danificação é escalada pelo dano para se chegar ao valor da tensão resistente do subdomínio no estado danificado. Caso existam outras tensões principais de tração em Ω_p além de $\sigma_{I_p}^{\mathrm{undam},n+1}$, a forma geral para a equação (2.238) é dada por

$$\sigma_{R_p}^{\mathrm{dam},n+1} = \begin{cases} \left(1 - \mathscr{D}_p^n\right) \sigma_{R_p}^{\mathrm{undam},n+1} : \sigma_{R_p}^{\mathrm{undam},n+1} > 0 \\ \sigma_{R_p}^{\mathrm{undam},n+1} : \sigma_{R_p}^{\mathrm{undam},n+1} \leq 0 \end{cases}, \tag{2.239}$$

onde $R = I, II, III$ representa os índices das tensões principais dos tensores $\boldsymbol{\sigma}_p^{\mathrm{undam},n+1}$ e $\boldsymbol{\sigma}_p^{\mathrm{dam},n+1}$. Assim, reconstroem-se os tensores de tensões dos subdomínios ajustados pelo dano, por meio do conceito de representação espectral de um tensor, conforme a equação

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_p^{n+1} = \sum_{R=I}^{III} \sigma_{R_p}^{\mathrm{dam},n+1} \boldsymbol{n}_{R_p}^{n+1} \otimes \boldsymbol{n}_{R_p}^{n+1}, \tag{2.240}$$

sendo $\boldsymbol{n}_{R_p}^{n+1}$ os autovetores unitários de $\boldsymbol{\sigma}_p^{\mathrm{undam},n+1}$.

2.3.2 Campo de dano escalar

De forma a transformar os valores de dano dos subdomínios, $\mathscr{D}_p^{n+1}$, em uma função espacialmente contínua e suave, Homel e Herbold (2016) utilizam a função kernel

$$\mathrm{f}_p^{\mathrm{kernel},n}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - 3[d_p^n(\mathbf{x})]^2 + 2[d_p^n(\mathbf{x})]^3 : 0 \leq d_p^n(\mathbf{x}) \leq 1 \\ 0 : d_p^n(\mathbf{x}) > 1 \end{cases}, \tag{2.241}$$

na qual, para análises bidimensionais, a distância entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{x}_p^n$, normalizada pelo tamanho da diagonal da célula Euleriana, vale

$$d_p^n(\mathbf{x}) = \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_p^n\|}{\sqrt{l_{cx}^2 + l_{cy}^2}}. \tag{2.242}$$

Com isso, a função de dano contínua no espaço é dada por

$$\mathscr{D}^n(\mathbf{x}) = \sum_p \mathscr{D}_p^n \mathrm{f}_p^{\mathrm{kernel},n}(\mathbf{x}), \tag{2.243}$$

ou seja, pela soma das influências dos danos localizados nos centroides dos subdomínios Ω_p em relação ao ponto de posição $\mathbf{x}$ onde se deseja calcular o dano. Entretanto, os autores ressaltam que a função definida em (2.243) costuma apresentar muitos efeitos de borda e, por isso, optam por utilizar a função

$$\overline{\mathscr{D}}^n(\mathbf{x}) = \frac{\mathscr{D}^n(\mathbf{x})}{\sum_p \mathrm{f}_p^{\mathrm{kernel},n}(\mathbf{x})}, \tag{2.244}$$

onde a função $\mathscr{D}^n(\mathbf{x})$ é normalizada pela soma das funções kernel no ponto de posição $\mathbf{x}$. Isso faz com que o dano normalizado $\overline{\mathscr{D}}^n(\mathbf{x})$ fique indefinido foram do domínio de suporte da função kernel. Contudo, como $\overline{\mathscr{D}}^n(\mathbf{x})$ e seu gradiente espacial apenas são calculados nos centroides dos subdomínios, isso não representa um problema. Na verdade, essa consideração permite que sejam capturados apenas os efeitos da geometria danificada (HOMEL; HERBOLD, 2016).

2.3.3 Gradiente espacial do campo de dano escalar

O gradiente espacial do campo de dano normalizado $\overline{\mathscr{D}}^n(\mathbf{x})$, em análises bidimensionais, é dado pelo vetor

$$\begin{aligned} \nabla_x \overline{\mathscr{D}}^n(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [\overline{\mathscr{D}}^n(\mathbf{x})] \\ &= \left[\begin{array}{cc} \dfrac{\partial}{\partial x}[\overline{\mathscr{D}}^n(\mathbf{x})] & \dfrac{\partial}{\partial y}[\overline{\mathscr{D}}^n(\mathbf{x})] \end{array} \right]^T, \end{aligned} \tag{2.245}$$

com a derivada parcial na direção x valendo

$$\frac{\partial}{\partial x}[\overline{\mathscr{D}}^n(\mathbf{x})] = \frac{\left[\dfrac{\partial \mathscr{D}^n(\mathbf{x})}{\partial x}\right] \left[\sum_p \mathrm{f}_p^{\mathrm{kernel},n}(\mathbf{x})\right] - \mathscr{D}^n(\mathbf{x}) \left[\sum_p \dfrac{\partial}{\partial x} \left(\mathrm{f}_p^{\mathrm{kernel},n}(\mathbf{x})\right)\right]}{\left[\sum_p \mathrm{f}_p^{\mathrm{kernel},n}(\mathbf{x})\right]^2} \tag{2.246}$$

e, na direção y, valendo

$$\frac{\partial}{\partial y}[\overline{\mathscr{D}}^n(\mathbf{x})] = \frac{\left[\dfrac{\partial \mathscr{D}^n(\mathbf{x})}{\partial y}\right]\left[\sum_p \mathrm{f}_p^{\mathrm{kernel},n}(\mathbf{x})\right] - \mathscr{D}^n(\mathbf{x})\left[\sum_p \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\mathrm{f}_p^{\mathrm{kernel},n}(\mathbf{x})\right)\right]}{\left[\sum_p \mathrm{f}_p^{\mathrm{kernel},n}(\mathbf{x})\right]^2}. \tag{2.247}$$

Nas equações (2.246) e (2.247),

$$\frac{\partial \mathscr{D}^n(\mathbf{x})}{\partial x} = \sum_p \mathscr{D}_p^n \frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{f}_p^{\mathrm{kernel},n}(\mathbf{x})\right] \tag{2.248}$$

e

$$\frac{\partial \mathscr{D}^n(\mathbf{x})}{\partial y} = \sum_p \mathscr{D}_p^n \frac{\partial}{\partial y}\left[\mathrm{f}_p^{\mathrm{kernel},n}(\mathbf{x})\right], \tag{2.249}$$

onde as derivadas espaciais da função kernel nas direções x e y valem, respectivamente,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{f}_p^{\mathrm{kernel},n}(\mathbf{x})\right] = 6\left(x - x_p^n\right)\left[\frac{d_p^n(\mathbf{x}) - 1}{l_{cx}^2 + l_{cy}^2}\right] \tag{2.250}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mathrm{f}_p^{\mathrm{kernel},n}(\mathbf{x})\right] = 6\left(y - y_p^n\right)\left[\frac{d_p^n(\mathbf{x}) - 1}{l_{cx}^2 + l_{cy}^2}\right]. \tag{2.251}$$

2.3.4 Identificação de diferentes campos de velocidade em um nó

A existência de uma fratura em determinada região de um corpo Ω pressupõe a ocorrência de diferentes campos de velocidade nessa região. No caso do método de Homel e Herbold (2016), a identificação dos campos de velocidade ao qual pertence cada subdomínio que contribui para um nó i da malha Euleriana é feita aos pares, utilizando-se o gradiente espacial do campo de dano normalizado $\nabla_x \overline{\mathscr{D}}^n(\mathbf{x})$.

O que se propõe é comparar a direção dos diferentes gradientes de dano $\nabla_x \overline{\mathscr{D}}^n(\mathbf{x}_p^n)$, nos centros de massa dos subdomínios Ω_p que contribuem para o nó i. Se gradientes opostos existem, então o nó i está potencialmente na superfície de contato (ou de fratura) e, ali, as possibilidades de deslizamento relativo por atrito e separação entre os campos de velocidade precisa ser considerada (HOMEL; HERBOLD, 2016).

De forma prática, primeiramente identifica-se, entre os subdomínios que contribuem para o nó i, qual o gradiente de dano que possui a máxima magnitude. Esse gradiente será atribuído como sendo o gradiente de dano do nó i, $\nabla_x \overline{\mathscr{D}}_i^n$. Matematicamente, isso é representado pela equação

$$\nabla_x \overline{\mathcal{D}}_i^n = \max_p(\|\nabla_x \overline{\mathcal{D}}_p^n\|) \tag{2.252}$$

Em seguida, comparam-se, por meio do produto escalar

$$\nabla_x \overline{\mathcal{D}}_p^n \cdot \nabla_x \overline{\mathcal{D}}_i^n, \tag{2.253}$$

os gradientes de dano dos subdomínios Ω_p que contribuem para i com o gradiente de dano do nó i. Se esse valor for maior ou igual a zero, considera-se que Ω_p faz parte do campo de velocidades $\psi = 1$ e, se menor que zero, o campo de velocidades de Ω_p com relação ao nó i é $\psi = 2$, ou seja:

$$\psi(p,i) = \begin{cases} 1 : \left(\nabla_x \overline{\mathcal{D}}_p^n \cdot \nabla_x \overline{\mathcal{D}}_i^n\right) \geq 0 \\ 2 : \left(\nabla_x \overline{\mathcal{D}}_p^n \cdot \nabla_x \overline{\mathcal{D}}_i^n\right) < 0 \end{cases} \tag{2.254}$$

2.3.5 Condição de separabilidade em um nó

Identificados os campos de velocidade $\psi(p,i)$ aos quais cada subdomínio pertence, a separação de tais campos, segundo Homel e Herbold (2016), ocorrerá quando as condições da equação

$$\begin{aligned} \min_{\psi}(\overline{\mathcal{D}}_{\psi i}^n) &> \overline{\mathcal{D}}^{\min} \\ \max_p[\overline{\mathcal{D}}(\mathbf{x}_p^n)] &= 1 \end{aligned} \tag{2.255}$$

forem atendidas simultaneamente, sendo

$$\overline{\mathcal{D}}_{\psi i} = \frac{\sum_{p_\psi} \phi_{ip}^{\mathrm{CPDI}} m_p \overline{\mathcal{D}}(\mathbf{x}_p^n)}{\sum_{p_\psi} \phi_{ip}^{\mathrm{CPDI}} m_p} \tag{2.256}$$

o dano normalizado médio do campo de velocidades ψ em relação ao nó i e $\overline{\mathcal{D}}^{\min}$ o dano normalizado médio mínimo dos campos de velocidades para ocorrer a separação, definido como dado de entrada do problema. Resumidamente, a equação (2.255) exige que, para haver separação dos campos em determinado nó, ao menos um subdomínio que contribui para esse nó precisa estar totalmente danificado ($\overline{\mathcal{D}}(\mathbf{x}_p^n) = 1$) e o dano médio dos campos de velocidade precisa ser maior que um valor mínimo estipulado.

Se a separação for constatada, então as forças de contato entre o par de campos de velocidade precisa ser computada e a contribuição de cada um deles para as variáveis nodais é acumulada de forma independente. Caso não exista separação, o mapeamento de variáveis para o nó i é feito de forma única, como em um corpo contínuo.

2.3.6 Determinação das forças de contato em caso de separação

O algoritmo de contato utilizado por Homel e Herbold (2016) segue a proposta de Bardenhagen et al. (2000), acrescido da modificação trazida por Huang et al. (2011), utilizada para o aumento da precisão, por meio de uma imposição mais rigorosa da condição de impenetrabilidade entre dois campos de velocidades.

A referida condição de impenetrabilidade é verificada em um nó i sempre que as equações

$$\sum_{\psi} \mathbf{n}_{\psi i}^{n} = \mathbf{0} \tag{2.257}$$

e

$$\sum_{\psi} \mathbf{v}_{\psi i}^{n} \cdot \mathbf{n}_{\psi i}^{n} = 0 \tag{2.258}$$

forem atendidas, sendo $\mathbf{n}_{\psi i}^{n}$ o vetor normal à superfície de contato do campo ψ, apontando para fora dessa superfície, e $\mathbf{v}_{\psi i}^{n}$ a contribuição da velocidade do centro de massa do campo ψ para o nó i. O cálculo dessas variáveis será mostrado nas seções terciárias subsequentes.

Quanto às forças de contato $\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{n}$, aplicadas aos campos $\psi = 1, 2$ por intermédio do nó i, devem seguir a terceira lei de Newton

$$\sum_{\psi} \mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{n} = \mathbf{0} \tag{2.259}$$

e possuir projeção sobre a respectiva normal de superfície igual a

$$f_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{\mathrm{nor},n} = \mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{n} \cdot \mathbf{n}_{\psi i}^{n} \leq 0, \tag{2.260}$$

ou seja, a força normal de contato não pode ser uma força de tração sobre o campo ψ.

2.3.6.1 Normais e tangentes de superfície dos campos de velocidade

A primeira estimativa das normais de superfície, considerando o MPM CPDI, pode ser feita pela equação

$$\mathbf{n}_{\psi i}^{\mathrm{est},n} = \frac{\sum_{p_\psi} \nabla_x \phi_{ip}^{\mathrm{CPDI},n} m_p}{\left\| \sum_{p_\psi} \nabla_x \phi_{ip}^{\mathrm{CPDI},n} m_p \right\|}, \tag{2.261}$$

o que não garante a colinearidade entre $\mathbf{n}_{1i}^{\mathrm{est},n}$ e $\mathbf{n}_{2i}^{\mathrm{est},n}$ e, por consequência, não assegura a conservação do momento linear (HUANG et al., 2011). Então, para solucionar esse problema, Homel e Herbold (2016) fazem o ajuste

$$\mathbf{n}_{1i}^{n} = -\mathbf{n}_{2i}^{n} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{n}_{1i}^{\mathrm{est},n} - \mathbf{n}_{2i}^{\mathrm{est},n}\right), \tag{2.262}$$

obtendo finalmente vetores normais com as mesmas direções e com sentidos opostos. A partir dos vetores normais, definem-se os vetores tangenciais de superfície $\mathbf{s}_{\psi i}^{n}$, obedecendo-se as condições

$$\mathbf{s}_{\psi i}^{n} \cdot \mathbf{n}_{\psi i}^{n} = 0 \tag{2.263}$$

e

$$\mathbf{s}_{1i}^{n} = -\mathbf{s}_{2i}^{n}. \tag{2.264}$$

2.3.6.2 Garantia da impenetrabilidade no início do passo de tempo

No início do passo de tempo n, as velocidades dos campos de velocidade $\psi = 1, 2$, que valem

$$\mathbf{v}_{\psi i}^{n} = \frac{\boldsymbol{p}_{\psi i}^{n}}{m_{\psi i}^{n}} = \frac{\sum_{p_\psi} \phi_{ip}^{\mathrm{CPDI},n} m_p \mathbf{v}_p^n}{\sum_{p_\psi} \phi_{ip}^{\mathrm{CPDI},n} m_p}, \tag{2.265}$$

precisam verificar a condição de impenetrabilidade

$$\left[\mathbf{v}_{\psi i}^{n} - \mathbf{v}_{(1,2)i}^{n}\right] \cdot \mathbf{n}_{\psi i}^{n} \leq 0, \tag{2.266}$$

onde

$$\mathbf{v}_{(1,2)i}^{n} = \frac{\boldsymbol{p}_{1i}^{n} + \boldsymbol{p}_{2i}^{n}}{m_{1i}^{n} + m_{2i}^{n}} \tag{2.267}$$

é a velocidade de centro de massa do par de campos $\psi = 1, 2$. No caso da condição (2.266) não ser verificada, então as velocidades dos campos precisam ser ajustadas pela equação

$$\hat{\mathbf{v}}_{\psi i}^{n} = \begin{cases} \mathbf{v}_{\psi i}^{n} - \left\{\left[\mathbf{v}_{\psi i}^{n} - \mathbf{v}_{(1,2)i}^{n}\right] \cdot \mathbf{n}_{\psi i}^{n}\right\} \mathbf{n}_{\psi i}^{n} : \text{ se houver deslizamento relativo} \\ \mathbf{v}_{(1,2)i}^{n} : \text{ se não houver deslizamento relativo} \end{cases}. \tag{2.268}$$

Para não haver deslizamento relativo entre os campos de velocidade, a equação

$$\sum_{\psi} \mathbf{v}_{\psi i}^{n} \cdot \mathbf{s}_{\psi i}^{n} = 0 \tag{2.269}$$

precisa ser satisfeita.

Após o cálculo das velocidades ajustadas e dos respectivos momentos lineares ajustados

$$\hat{\boldsymbol{p}}_{\psi i}^{n} = m_{\psi i}^{n} \hat{\mathbf{v}}_{\psi i}^{n}, \tag{2.270}$$

os mesmos são atualizados pela integração explícita no tempo

$$\hat{\boldsymbol{p}}_{\psi i}^{n+1} = \hat{\boldsymbol{p}}_{\psi i}^{n} + \mathbf{f}_{\psi i}^{n} \Delta t^{n}, \tag{2.271}$$

sendo $\mathbf{f}_{\psi i}^{n}$ a soma de forças externas de superfície e de corpo após deduzidas as forças internas, considerando as variáveis de estado dos subdomínios Ω_p que fazem parte do campo ψ em relação ao nó i. Percebe-se aqui que os campos $\psi = 1, 2$ são atualizados de maneira desacoplada entre si, o que caracteriza a separação.

As velocidades atualizadas associadas a $\hat{\boldsymbol{p}}_{\psi i}^{n+1}$ são

$$\hat{\mathbf{v}}_{\psi i}^{n+1} = \frac{\hat{\boldsymbol{p}}_{\psi i}^{n+1}}{m_{i}^{n+1}} \tag{2.272}$$

e também precisam ser corrigidas para assegurar a impenetrabilidade ao final do passo de tempo n. Esse ajuste é feito com a imposição das forças de contato $\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{n}$ (HUANG et al., 2011), como mostrado na seção terciária 2.3.6.3.

2.3.6.3 Garantia da impenetrabilidade no final do passo de tempo

Ao final do passo de tempo n, haverá interpenetração entre os campos $\psi = 1, 2$ se

$$\left[\hat{\mathbf{v}}_{\psi i}^{n+1} - \hat{\mathbf{v}}_{(1,2)i}^{n+1} \right] \cdot \mathbf{n}_{\psi i}^{n} > 0 \tag{2.273}$$

e, para os nós onde isso acontecer, necessita-se do ajuste das velocidades pela equação

$$\mathbf{v}_{\psi i}^{n+1} = \hat{\mathbf{v}}_{\psi i}^{n+1} + \frac{\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{n}}{m_{\psi i}^{n}} \Delta t^{n}, \tag{2.274}$$

utilizando-se as forças de contato $\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{n}$, cujas projeções sobre as normais de superfície são dadas por

$$f_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{\mathrm{nor},n} = \min \left\{ \begin{array}{c} m_{\psi i}^{n} \left[\dfrac{\hat{\mathbf{v}}_{(1,2)i}^{n+1} - \hat{\mathbf{v}}_{\psi i}^{n+1}}{\Delta t^{n}} \right] \cdot \mathbf{n}_{\psi i}^{n} \\ 0 \end{array} \right. . \tag{2.275}$$

Diante da inexistência de atrito entre os campos $\psi = 1, 2$, a força de contato vetorial é expressa simplesmente por

$$\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{n} = f_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{\mathrm{nor},n} \mathbf{n}_{\psi i}^{n}. \tag{2.276}$$

Já quando o atrito é considerado, a projeção da força de contato sobre o vetor tangente à superfície do campo precisa ser determinada. Nesse caso, se não houver deslizamento relativo, isto é, se

$$\sum_{\psi} \hat{\mathbf{v}}_{\psi i}^{n+1} \cdot \mathbf{s}_{\psi i}^{n} = 0, \tag{2.277}$$

então o valor da projeção da força de contato sobre $\mathbf{s}_{\psi i}^{n}$ é igual a

$$f_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{\mathrm{tan},n} = \min \left\{ \begin{array}{c} m_{\psi i}^{n} \left[\dfrac{\hat{\mathbf{v}}_{(1,2)i}^{n+1} - \hat{\mathbf{v}}_{\psi i}^{n+1}}{\Delta t^{n}} \right] \cdot \mathbf{s}_{\psi i}^{n} : f_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{\mathrm{nor},n} < 0 \\ 0 : f_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{\mathrm{nor},n} \geq 0 \end{array} \right. \tag{2.278}$$

e o vetor força de contato é dado por

$$\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{n} = f_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{\mathrm{nor},n} \mathbf{n}_{\psi i}^{n} + f_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{\mathrm{tan},n} \mathbf{s}_{\psi i}^{n}. \tag{2.279}$$

Por último, se houver interpenetração e deslizamento relativo, a força de contato é calculada pela expressão

$$\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{n} = f_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{\mathrm{nor},n} \mathbf{n}_{\psi i}^{n} + \min \left\{ \begin{array}{c} \mu_{(1,2)}^{\mathrm{at}} |f_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{\mathrm{nor},n}| \\ |f_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{\mathrm{tan},n}| \end{array} \right\} \frac{f_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{\mathrm{tan},n}}{|f_{\mathrm{ct}_{\psi i}}^{\mathrm{tan},n}|} \mathbf{s}_{\psi i}^{n}, \tag{2.280}$$

na qual utiliza-se o modelo de atrito de Coulomb e onde $\mu_{(1,2)}^{\mathrm{at}}$ é o coeficiente de atrito cinético entre os campos $\psi = 1, 2$.

Portanto, a depender da consideração do atrito e da existência de deslizamento relativo entre os campos $\psi = 1, 2$, a força de contato a ser utilizada na equação (2.274), para a obtenção das velocidades atualizadas corrigidas $\mathbf{v}_{\psi i}^{n+1}$, será aquela calculada por (2.276), (2.279) ou (2.280).

Os valores de $\mathbf{v}_{\psi i}^{n+1}$ e $\boldsymbol{p}_{\psi i}^{n+1} = m_{\psi i}^{n} \mathbf{v}_{\psi i}^{n+1}$ são então reinterpolados para os subdomínios correspondentes, de forma bastante similar ao que é feito no MPM CPDI

contínuo, porém considerando-se o desacoplamento dos campos no nó i no qual houver separação.

2.3.7 Considerações sobre o Método de Homel e Herbold (2016)

Como demonstrado por Homel e Herbold (2016), a utilização de modelos de dano associados ao MPM CPDI permite a simulação explícita de fraturas, por meio de modelos de particionamento e de contato devidamente estabelecidos. Entretanto, após algumas simulações com base nessa teoria, dois problemas significativos são percebidos:

a) o particionamento pelo produto escalar entre gradientes de dano acaba não atendendo a todas as situações possíveis. Um exemplo simples, de uma viga biapoiada sob carga distribuída uniforme, pode ilustrar isso: os gradientes de dano dos subdomínios mais solicitados (fibra inferior da viga na metade do comprimento) possuem gradientes de dano quase paralelos. Nesse caso, o algoritmo de particionamento de Homel e Herbold (2016) pelo produto escalar da equação (2.254) acaba não acusando a separação e o início da fissuração quando, na verdade, a região está totalmente danificada e deveria iniciar esse processo;

b) o modelo de contato da seção secundária 2.3.6, que avalia a interação entre os campos de velocidade $\psi = 1, 2$ em um nó, não é suficiente para evitar interpenetrações consideráveis entre subdomínios em algumas análises. Tal problema é causado por não haver avaliação de contato direta entre subdomínios, apenas entre campos de velocidade. Nessa perspectiva, os vetores normais e tangentes acabam não representando fielmente as superfícies de contato e, consequentemente, as forças de contato não atuam em uma direção efetiva para evitar a interpenetração.

Logo, tendo em vista as potencialidades do método de Homel e Herbold (2016) e suas oportunidades de melhoria, almeja-se uma solução ajustada que possa simular fraturas pelo MPM. A referida solução é buscada nesta pesquisa adaptando-se o que se demonstra nas seções 2.2 e 2.3, pela mudança na interpolação espacial, no armazenamento de informações e com o desenvolvimento de novos algoritmos de particionamento e de contato entre subdomínios.

3 ESTADO DA ARTE

Antes da apresentação do MPM SPSI no capítulo 4, aborda-se, de forma sucinta, a evolução cronológica das pesquisas científicas relacionadas ao objetivo desta tese. Os principais assuntos trazidos são aqueles relacionados ao MPM e suas variantes. Isso é feito afim de situar o presente trabalho na linha temporal de desenvolvimento do MPM, demonstrando sua importância e suas características frente a outros estudos envolvendo o tema.

A primeira versão conhecida do MPM é a proposta por Sulsky et al. (1994) e surge de uma extensão do método *particle-in-cell* (PIC) para a utilização em corpos deformáveis elásticos. Os autores utilizam uma malha de fundo fixa (Euleriana), onde as equações do movimento são solucionadas, e uma nuvem de pontos materiais representativos do corpo contínuo, que carregam as informações de massa, posição, velocidade, deformação e tensão ao longo do tempo. O mapeamento entre as partículas e os nós eulerianos é feito por funções de interpolação lineares, a atualização das variáveis nodais se dá por integração explícita no tempo e as deformações nos pontos materiais são obtidas pelos gradientes de velocidades, utilizando-se o método USL para a atualização das tensões.

Conforme os autores, com a malha de fundo fixa, que pode ser interpretada tanto como uma malha Euleriana quanto como uma malha Lagrangiana atualizada, evita-se a dissipação proveniente da avaliação numérica das derivadas convectivas da aceleração. O custo adicional do método, comparado MEF, diz respeito ao mapeamento entre os pontos materiais e a malha de fundo. Contudo, as distorções, comumente encontradas no MEF em análises com grandes deformações, não afetam as análises no MPM.

Outra vantagem apontada por Sulsky et al. (1994) recai sobre a aplicação das relações constitutivas diretamente nas partículas, não se exigindo tratamento especial em células que contém partículas de materiais diferentes. Além disso, os exemplos resolvidos pelos autores indicam que vibrações elásticas convencionais são reproduzidas pelo método e que a condição de não-deslizamento é automaticamente satisfeita pela formulação padrão do MPM.

Em continuação aos estudos sobre o MPM, Sulsky et al. (1995) aplicam a formulação desenvolvida especificamente a problemas da mecânica dos sólidos, acrescentando inclusive a plasticidade dos materiais aos modelos. Os exemplos numéricos resolvidos - impacto de corpos deformáveis sobre anteparos rígidos e deformáveis - são bidimensionais e assumem a condição de estado plano de deformações. Esse tra-

balho já permite conclusões a respeito do potencial do método em incluir várias outras extensões, como a anisotropia dos materiais e a consideração de atrito e deslizamento entre as partículas.

Seguindo a linha de evolução do MPM, Bardenhagen et al. (2000) utilizam o método em problemas envolvendo materiais granulares, aprofundando-se no tratamento do contato entre partículas. O deslizamento relativo com atrito (modelo de Coulomb) é acrescentado e formulações para o cálculo das forças de contato são propostas. O conceito chave do algoritmo trazido por Bardenhagen et al. (2000) está em não considerar interações de contato par a par entre as partículas, e sim interações entre as partículas e os nós da malha Euleriana, o que reduz consideravelmente o custo computacional.

Em uma outra abordagem, Bardenhagen (2002) avalia a conservação de energia no MPM, em problemas em que o trabalho das forças externas é nulo, no intuito de medir a dissipação provocada pelo mapeamento entre partículas e malha de fundo e vice-versa. Para isso, os autores comparam resultados numéricos obtidos com as atualizações de tensões do tipo USF e USL, aplicadas à vibração livre de um ponto material isolado e de uma barra elástica contínua, com resultados analíticos. Percebe-se, pelas análises, que ambos os tipos de atualizações de tensões - USF e USL - produzem resultados idênticos, com erro de dissipação de energia negligenciável, quando o comprimento de onda do modo de vibração é grande comparativamente ao tamanho da célula Euleriana. Quando isso não ocorre, ambos os algoritmos do MPM superestimam o período de vibração com erros parecidos, que aumentam ao passo que o comprimento de onda se aproxima do tamanho da célula Euleriana.

Já Cummins e Brackbill (2002) descrevem uma variação do MPM com integração temporal implícita, por meio do algoritmo de solução de Newton-Krylov, para simular o comportamento de materiais granulares. De acordo com os autores, a integração temporal implícita utilizada elimina instabilidades na malha Euleriana e impõe uma conservação de energia mais rigorosa ao MPM. Embora algumas restrições tenham sido impostos aos incrementos de tempo, valores que excedem os limites de estabilidade de Courant são utilizados e a precisão das análises é mantida, algo que não ocorre com os métodos de integração explícita.

Guilkey e Weiss (2003) também desenvolvem um esquema de integração temporal implícita pelo método de Newmark para o MPM e comparam os resultados de sua implementação com aqueles produzidos pelo MPM explícito e pelo MEF com integração implícita. Expressões explícitas para a rigidez tangente são deduzidas em função dos deslocamentos da malha Euleriana em um determinado passo de tempo. Assim como Cummins e Brackbill (2002), Guilkey e Weiss (2003) ressaltam os incrementos de tempo maiores necessários à integração implícita, na ordem de

cem vezes aos incrementos definidos pelos limites de Courant. Inclusive, os autores comentam que os incrementos de tempo obtidos (acréscimo de deformação de 0.5 por passo de tempo) são maiores que os incrementos utilizados por Cummins e Brackbill (2002) (acréscimo de deformação de 0.01 por passo de tempo).

Nairn (2003), por sua vez, estabelece um algoritmo bidimensional para a consideração de fraturas explícitas no MPM, permitindo a resolução de problemas que apresentam descontinuidades de velocidades e deslocamentos. As fraturas são representadas nos modelos como um conjunto de segmentos de linhas retas, que unem pontos materiais sem massa. Assim, a propagação de fraturas ao longo da análise é considerada pelo movimento desses pontos e pela adição de novos segmentos de reta. No entanto, o autor relata problemas com a previsão da propagação nas extremidades das fraturas, onde existem múltiplas normais de superfície.

Sulsky e Kaul (2004), assim como Cummins e Brackbill (2002), elaboram uma rotina de integração implícita para o MPM bidimensional baseada nos métodos de Newton-Krylov, utilizando gradientes conjugados para resolver equações implícitas lineares, o método de Newton associado aos gradientes conjugados para as equações implícitas não lineares e o método de Newton associado ao método do mínimo resíduo generalizado, também para casos não lineares. Em um teste extremo, em que um cilindro é comprimido até atingir 40% de sua altura original, verifica-se, para a integração implícita do tipo Newton-mínimo resíduo generalizado, a possibilidade de se usar incrementos de tempo aproximadamente $10,000$ vezes maiores que os necessários à integração explícita, a um custo computacional quase 100 vezes menor.

Bardenhagen e Kober (2004) introduzem uma família de métodos PIC chamada de método do ponto material com interpolação generalizada (GIMP), da qual o MPM tradicional pode ser derivado como um caso particular. Ao invés de funções de interpolação, trabalha-se com pesos de interpolação - resultantes da integração das funções de interpolação em subdomínios Ω_p - para se mapear as informações entre as malhas Euleriana e Lagrangiana. Uma notória vantagem de algumas subvariantes dos métodos GIMP é a eliminação da instabilidade em partículas que atravessam os limites de uma célula, característica do MPM original. Os autores, porém, verificam que surgem outras instabilidades com o GIMP, oriundas do monitoramento da forma dos subdomínios ao longo do tempo. A principal delas é o fraturamento numérico, decorrente da separação não física de subdomínios adjacentes.

Wieckowski (2004) propõe a atualização do campo de densidades do material utilizando as posições correntes das partículas, permitindo a utilização de relações constitutivas que dependem da densidade de massa. Problemas como o preenchimento de silos por materiais granulares, deslizamento de solo e extrusão de plásticos são analisados pelo método apresentado, no qual a integração temporal é explícita. A

principal ressalva feita pelo autor sobre o método diz respeito ao elevado consumo de tempo de processamento dos modelos.

Guo e Nairn (2006) desenvolvem um algoritmo de análise dinâmica com fratura pelo MPM, trazendo o conceito de mais de um campo de velocidades por nó da malha Euleriana. Essa consideração permite aos autores a implementação numérica de fraturas explícitas nos modos I, II e III, com a dissipação de energia pela fratura sendo calculada pela integral "J". Guo e Nairn (2006) também apresentam um esquema de forças de contato para evitar a interpenetração. No referido estudo, demonstra-se que o MPM é uma alternativa confiável para a análise de fraturas explícitas, tendo alta precisão computacional e eficiência. Além disso, o fato da superfície de fratura ser uma entidade independente da malha de fundo evita a necessidade de se refazer a malha a cada passo de tempo.

Steffen et al. (2008) apresentam um estudo sobre os erros de integração encontrados no cálculo das forças internas pelo MPM, propondo melhoras nesse sentido. Afirma-se nesse estudo, que a integração nodal das forças internas no volume das partículas é uma aproximação grosseira que pode levar a erros significativos e descontinuidades. Assim, os autores relatam que o simples uso de funções de interpolação nodais mais suaves, como as B-splines quadráticas e cúbicas, pode reduzir drasticamente esses erros.

Andersen e Andersen (2009) analisam oscilações e inconsistências na atualização de tensões pelo MPM bidimensional e percebem a distribuição espacial irregular dessa variável e consequentes imprecisões. Os referidos autores concluem que essa distribuição errônea acontece apenas individualmente nos pontos materiais e que os valores são mais coerentes quando avaliados nos nós Eulerianos. Entretanto, a irregularidade nas tensões dos pontos materiais indica um problema significativo, uma vez que tensões redistribuídas aos nós Eulerianos dificilmente captarão efeitos localizados de concentração de tensões.

Andersen e Andersen (2010) estudam a influência do tipo da função de interpolação espacial na resposta, pelo MPM, de uma viga elástica em balanço no estado plano de deformações sob pequenas deformações. As funções comparadas são as bilineares de Lagrange e as biquadráticas de Lagrange e Serendipity, bem como B-splines cúbicas. Os autores concluem que as funções biquadráticas promovem os resultados mais próximos da resposta analítica para um mesmo número de pontos materiais e de nós Eulerianos. Contudo, quando grandes deformações ocorrem, o sinal da massa interpolada para os nós pelas funções quadráticas pode ficar negativo, levando a resultados não físicos. Essa limitação, segundo os autores, faz com que a aplicação de B-Splines cúbicas seja uma boa alternativa para contornar o problema, mantendo uma representação suave dos campos escalares, vetoriais e tensoriais monitorados.

Lian et al. (2011) utilizam o MPM e o método de elementos finitos em conjunto na simulação do comportamento de elementos de concreto armado sob cargas de impacto. Pela dificuldade de discretização das barras de aço em pontos materiais, estas são representadas por elementos finitos tridimensionais de treliça, imersos em um conjunto de partículas representativas do concreto. Todos os nós dos elementos de barra movem-se segundo o mesmo campo de velocidades das partículas, monitorado por meio dos nós Eulerianos. A efetividade do algoritmo é comprovada por meio da simulação da perfuração de uma laje de concreto por um projétil.

Motivados pela necessidade de eliminar a instabilidade por partículas que atravessam uma célula Euleriana e o fraturamento numérico, Sadeghirad et al. (2011) apresentam a primeira versão do MPM CPDI (*convected particle domain interpolation*). A proposta consiste em monitorar o movimento do domínio das partículas de uma forma mais consistente e precisa. Assim, os autores utilizam subdomínios quadrilaterais de 4 vértices, com interpolação interna bilinear, em conjunto com funções bilineares de interpolação nodal. O mapeamento resultante é dado, então, por pesos de interpolação e seus gradientes, que levam e trazem informações entre as malhas Euleriana e Lagrangiana. Contudo, nessa primeira versão do CPDI, vazios (*gap*) ainda são verificados entre subdomínios que fazem parte de um corpo contínuo, pois o monitoramento da forma é feito pela aplicação do gradiente de deformações a dois vetores, inicialmente indeformados, que passam pelos centros de massa. Esses vetores apenas permitem que os subdomínios deformados assumam o formato de paralelogramos.

Huang et al. (2011) estudam o método de contato inicialmente proposto por Bardenhagen et al. (2000) para o MPM. Nesse contexto, os autores verificam a necessidade de assegurar a condição de impenetrabilidade entre dois corpos tanto no início quanto no final de cada passo de tempo em uma análise de integração explícita. Essa nova consideração permite, segundo Huang et al. (2011), que perturbações na energia total do sistema sejam evitadas, assim como a utilização de incrementos de tempo maiores na obtenção de soluções estáveis.

Em sua dissertação de mestrado, Serna (2012) desenvolve um estudo sobre as aplicações do MPM GIMP (interpolação generalizada) a problemas geotécnicos, mais especificamente o ensaio de cone de penetração por queda livre. Nas simulações, o autor emprega o código *NairNMPM*.

Nair e Roy (2012) trazem, em sua pesquisa, um novo esquema de integração implícita em conjunto com o método GIMP, como uma extensão do trabalho de Sulsky e Kaul (2004). A técnica de Newton-Krylov acoplada ao gradiente conjugado também é aplicada pelos autores e os resultados produzidos pelo algoritmo são comparados à respostas de análises hiperelásticas pelo método de elementos finitos.

Stomakhin et al. (2013) aplicam o MPM a simulações envolvendo o compor-

tamento mecânico da neve em animações visuais, desenvolvendo um método semi-implícito para tratar da extensa gama de rigidezes, colisões e mudanças topológicas que isso abrange. Nas análises, considerações de contato e fratura também são feitas.

Al Kafaji (2013) fazem uma extensa revisão teórica sobre o MPM e desenvolvem o método na modelagem de problemas geotécnicos. Os exemplos analisados incluem a instalação de ancoragens em rocha/solo, o deslizamento de taludes e o colapso de paredes de túneis escavados em rocha/solo. Todas essas aplicações consideram modelos constitutivos altamente não lineares. Outro foco do estudo é a extensão do MPM a análises em que tanto materiais líquidos quanto sólidos estejam presentes, fazendo-se o monitoramento da dissipação das pressões hidrodinâmicas através do solo.

Dois anos após a divulgação do MPM CPDI, Sadeghirad et al. (2013) publicam o CPDI2, com o monitoramento mais preciso da mudança de forma dos subdomínios. No CPDI2, as posições dos vértices são armazenadas em cada passo de tempo para que a forma exata deformada seja considerada ao longo da simulação. Dessa forma, os vazios (*gaps*) anteriormente constatados em Sadeghirad et al. (2013) são removidos, assim como qualquer sobreposição entre subdomínios. Além disso, os exemplos numéricos mostram a possibilidade de se usar uma distribuição de subdomínios em conformidade com os contornos do objeto de interesse, algo que não ocorre no MPM original.

Jassim et al. (2013), assim como Al Kafaji (2013), trabalham com a extensão do MPM a problemas em que as velocidades de duas fases (sólida e líquida) são monitoradas. Conforme os pesquisadores, o enriquecimento das deformações volumétricas desenvolvido permite a interpolação das pressões internas com funções uma ordem abaixo das funções de interpolação das velocidades. Também busca-se, nesse trabalho, a suavização da distribuição das tensões por uma técnica de redistribuição dessas variáveis, em conjunto com a quadratura de Gauss nos pontos superconvergentes das células Eulerianas. Entretanto, os exemplos simulados em Jassim et al. (2013) são limitados a pequenas deformações.

Em Jiang (2015) e Jiang et al. (2015), busca-se corrigir o efeito dissipativo inerente ao mapeamento de informações entre nós Eulerianos e partículas no MPM, e, com isso, apresenta-se o *affine particle-in-cell method* (APIC). Nessa variante do MPM, aumenta-se o número de variáveis carregadas pelas partículas, empregando-se uma descrição de velocidades que seja "localmente afim"e não "localmente constante". O que se faz é armazenar, nos pontos materiais, tensores de segunda ordem que contém informações de momento angular, evitando-se as dissipações. Outra contribuição de Jiang (2015) é um método de integração temporal implícita otimizado, aplicando o conceito de minimização.

Sanchez et al. (2015) utilizam o MPM de integração implícita em simulações

quase estáticas de falha de elementos de concreto e de materiais frágeis policristalinos. Comparações com ensaios físicos comprovam a validade do algoritmo utilizado nas análises.

Reinaldo (2015), em sua tese de doutorado, analisa o comportamento de fundações profundas com estacas de deslocamento utilizando o MPM. O autor implementa modificações no código *NairnMPM* para capacita-lo a resolver problemas envolvendo solo. Análises elásticas preliminares evidenciam que a aplicação de malhas Eulerianas refinadas, com poucas partículas por célula, é a melhor forma de discretização do meio contínuo. Por meio do MPM, o autor monitora todo o processo de cravação de estacas em diferentes tipos de solo, comparando-se deslocamentos e tensões com resultados disponíveis na literatura. Em geral, as validações indicam uma boa capacidade da ferramenta numérica em detectar as variações de tensões no contorno das estacas.

Utilizando a primeira versão MPM CPDI (SADEGHIRAD et al., 2011) e aplicando um modelo de dano escalar distribuído na tração, Homel et al. (2016), desenvolvem um esquema de controle do alongamento de subdomínios. Isso é feito com técnicas de subdivisão combinadas com o escalamento dos subdomínios, com foco principal na paralelização do MPM CPDI. Simulações em duas e três dimensões mostram o correto funcionamento do método proposto, mas os autores recomendam cuidado especial na análise com fraturamento, quando a dependência do refinamento da malha é expressivo.

Wang et al. (2016) implementam um algoritmo de análise computacional pelo MPM com integração temporal implícita, tanto para simulações dinâmicas quanto para quase estáticas. Os autores ressaltam, nesse trabalho, a maior capacidade do MPM, comparado ao método de elementos finitos, em resolver problemas com grandes deformações elastoplásticas. Também estudam-se vários detalhes do MPM como a influência do número de partículas por célula Euleriana, do tamanho do incremento de tempo, a captura do comportamento pós falha e a instabilidade de partículas que cruzam de uma célula Euleriana para outra vizinha.

Em trabalho já descrito detalhadamente na seção 2.3, Homel e Herbold (2016) demonstram um método de particionamento de subdomínios do MPM CPDI com a utilização do gradiente do campo escalar de dano. O modelo de dano isotrópico de Rankine na tração com amolecimento linear é utilizado. Assim, os valores pontuais de dano, constantes em cada subdomínio, são interpolados por uma função kernel e, então, um campo escalar de dano é obtido, bem como o respectivo campo gradiente de dano. Em cada passo de tempo, a direção dos gradientes de dano dos subdomínios é comparada com a direção predominante do gradiente da malha Euleriana. Em função dessa comparação, os subdomínios são endereçados para diferentes campos de velocidade, permitindo o surgimento de fraturas explícitas.

Charlton et al. (2017), assim como Nair e Roy (2012), implementam o GIMP com integração temporal implícita. Contudo, nesse caso os autores buscam a construção da matriz de rigidez global do sistema de uma forma similar ao que se tem no método de elementos finitos, com a combinação das contribuições individuais de cada célula Euleriana. Demonstra-se que o MPM GIMP implícito possui bom funcionamento tanto para pequenas deformações quanto para deformações finitas, obtendo-se boas correlações com resultados analíticos disponíveis e com resultados do método de elementos finitos.

Remmerswaal (2017), por sua vez, foca no estudo da aplicação de condições de contorno essenciais no MPM, principalmente em condições de contorno móveis ao longo do tempo. Dentro do contexto de análise de estabilidade de taludes, diferentes métodos de detecção de contornos e de imposição de restrições aos nós da malha de fundo são testados.

Sinaie et al. (2017) apresentam, com detalhes, a implementação computacional do MPM CPDI bidimensional e tridimensional por meio da linguagem de programação *Julia*. São utilizados subdomínios triangulares e quadrilaterais, assim como tetraédricos, na simulação de exemplos numéricos de impacto entre dois cilindros elásticos, de vibração de uma viga em balanço pela ação do peso próprio e de impacto de alta velocidade de uma esfera em um alvo com comportamento plástico.

Nguyen et al. (2017), também em estudo sobre o MPM CPDI, publicam formulações que estendem a aplicação do conceito de Sadeghirad et al. (2013) a subdomínios com diversos formatos. As categorias de subdomínios demonstradas englobam quadriláteros bilineares, triângulos lineares, polígonos e poliedros.

Acosta et al. (2017) investigam as causas oscilações e imprecisões nos resultados de tensão produzidos pelo MPM, além de desenvolver um método capaz de mitigar o problema. As principais causas detectadas pelos autores são: a integração das forças internas pelos valores pontuais de tensão das partículas; o cálculo das deformações a partir dos deslocamentos dos nós Eulerianos, interpolados para os pontos materiais pelos gradientes das funções de interpolação. Como solução principal, Acosta et al. (2017) apontam o uso de funções de interpolação de ordem mais alta, com as quais seja possível a suavização da transição de partículas entre células da malha de fundo. Essa solução é chamada pelos autores de *composite material point method* (CMPM) ou método do ponto material composto.

Cortis et al. (2018), da mesma forma que Remmerswaal (2017), estudam métodos de imposição de condições de contorno essenciais no MPM, particularmente em situações em que o contorno não coincide com a distribuição da malha de fundo. No método proposto pelos pesquisadores, os contornos são independentes da malha Euleriana e não são necessárias regiões artificialmente rígidas, estendendo a aplicação

do MPM a uma gama maior de problemas.

Wang et al. (2019) investiga os principais aspectos inerentes ao MPM CPDI (SADEGHIRAD et al., 2011, 2013) quando da aplicação a problemas com grandes deformações elastoplásticas e diferentes modos dominantes de deformação (alongamento, cisalhamento e torção). Confirma-se, na pesquisa, a capacidade do CPDI em aumentar a estabilidade do MPM, embora possa sofrer com alguns problemas de distorção da malha Lagrangiana, especialmente sob torção. Outra conclusão importante de Wang et al. (2019) é o aumento da convergência do MPM com o aumento do número de pontos materiais e do CPDI com o aumento de células na malha de fundo, para um mesmo número de pontos materiais.

Liang et al. (2019) desenvolvem o *staggered grid material point method* (SGMPM) ou método do ponto material com malha de fundo escalonada, com o objetivo de eliminar a instabilidade na transição de partículas entre células (*cell-crossing error*). O princípio incorporado ao MPM pelo SGMPM é a utilização de duas malhas de fundo alternadas entre si, uma principal e outra auxiliar. A malha auxiliar possui células com tamanho igual à metade do tamanho das células da malha principal. Tal procedimento facilita a reconstrução das informações no centro da malha principal. Assim, as integrais nas células são avaliadas em pontos de Gauss das malhas Eulerianas ao invés de serem calculadas com somas nas partículas. Os resultados do SGMP demonstram maior precisão que os produzidos pelo MPM, de acordo com os autores.

Wolper et al. (2019) aplicam modelos de dano contínuo ao MPM para a animação dinâmica de fraturas envolvendo deformações elastoplásticas. As análises são baseadas em formulações variacionais para a evolução das fissuras, mais especificamente na teoria de Ginzburg-Landau, posteriormente discretizada segundo as premissas do MPM.

Acosta et al. (2019) continuam os estudos feitos por Acosta et al. (2017) sobre imprecisão nas tensões no MPM, com foco particular nos métodos implícitos de integração no tempo. Mostra-se, nos resultados dessa pesquisa, que o MPM GIMP reduz fortemente a instabilidade na transição de partículas entre células, mas que erros de integração persistem, promovendo oscilações de rigidez. Já o CMPM (ACOSTA et al., 2017), segundo os autores, apresenta aumento de precisão nas tensões se comparado ao MPM e ao MPM GIMP. Outra alternativa, percebida no estudo, que aumenta a acurácia nas tensões, é a introdução de uma etapa de mapeamento de variáveis para os pontos de Gauss da malha Euleriana.

Moraes (2019) estuda, com a aplicação do MPM, o cálculo da força de impacto de massas de solo em movimento em uma parede de retenção. Modelos em duas e três dimensões são gerados, com a representação explícita das massas de solo e da parede de retenção. A autora destaca que imprecisões em relação a resultados experimentais

são observadas e as atribui a algumas dificuldades, como a impossibilidade de definição de atrito no contorno do problema.

Coombs e Augarde (2020) elaboram uma ferramenta computacional de análise de sólidos pelo MPM em problemas envolvendo grandes deformações, com o objetivo de criar uma plataforma de aprendizado do método, denominada *a material point method learning environment* (AMPLE). Nesse sentido, os autores afirmam que a aplicação satisfatória do MPM exige o conhecimento aprofundado de inúmeros aspectos como a mecânica do contínuo, os métodos de solução não linear, modelos constitutivos não lineares e aplicação de condições de contorno.

Coombs et al. (2020) fazem um estudo sobre a aplicação das formulações mecânicas Lagrangiana total e atualizada ao MPM. Esse tipo de abordagem é dificultado pela avaliação das funções de interpolações nodais ser geralmente feita com base nas posições dos pontos materiais no início do passo de tempo. Isso significa que assume-se, no MPM, que os cálculos são feitos com base na malha de fundo indeformada. O que Coombs et al. (2020) propõem é uma formulação em que as equações de equilíbrio são satisfeitas nos nós tanto no início quanto no final dos passos de tempo. Atenta-se, porém, à necessidade de utilização de novas medidas de tensão e de derivação de uma rigidez tangente compatível, já que os autores utilizam a integração temporal implícita.

Vaucorbeil et al. (2020) visam, em seu trabalho, desenvolver uma variante do MPM com formulação Lagrangiana total que seja tão efetivo quanto o CPDI, ao passo que exija menores esforço de implementação e de processamento computacional. Três diferentes tipos de funções de interpolação são avaliadas: funções lineares, B-splines cúbicas e funções polinomiais de Bernstein. O método é demonstrado em simulações de impacto e nenhum tipo de fratura numérica é verificada em problemas com grandes deformações de tração, da mesma forma que ocorre no CPDI. Destaca-se, no método proposto pelos autores, a alta ordem de convergência, se comparada àquela do MPM original.

Liu et al. (2020) realizam a simulação numérica do dano mesoscópico do concreto utilizando o MPM, por sua capacidade de geração de malha com o pixelamento de imagens e de tratamento de grandes deformações. Um modelo estocástico de dano é atribuído ao concreto nas análises e discretizam-se os agregados graúdos, miúdos e a pasta cimentícia, com a simulação de ensaios de tração e compressão bidimensionais. Conforme os pesquisadores, as simulações são capazes de capturar os principais mecanismos de falha do concreto em escala macroscópica, além de reproduzir o início da danifica ão e a propagação de fissuras em escala mesoscópica.

Fernández (2020) desenvolve um algoritmo computacional tridimensional para aproximar a solução do fenômeno de escoamento de massas de solo com grandes deformações utilizando o MPM. Diferentes modelos constitutivos são implementados

para contemplar a formação da superfície de ruptura e o escoamento do solo. Inclui-se também o efeito da presença da água, levando-se em conta o conceito de mistura. Além disso, o autor busca otimizar, com programação paralela, o tempo de processamento computacional de modelos com grande número de pontos materiais. Conclui-se que o MPM, embora não seja eficiente para o cálculo de fatores de segurança (alto custo computacional), é bastante competente no acompanhamento da evolução pós-ruptura das massas.

Acosta et al. (2021) testam a aplicação do MPM implícito associado à formulação de contato de Bardenhagen et al. (2000) em simulações geotécnicas. Verifica-se que o método consegue capturar interações solo-estrutura de modo realístico, incluindo-se o deslizamento e a rotação de estruturas empurradas pelo solo, a formação de mecanismos de falha passivos e ativos no solo e a combinação de falha rotacional e translacional em taludes.

3.1 COMENTÁRIOS

Percebe-se, pelo levantamento cronológico das pesquisas sobre o MPM, que trata-se de um método que tem atraído atenção científica significativa, principalmente no que se refere à aplicação em problemas de engenharia. Isso deve-se à possibilidade de tratamento de grandes deformações, principalmente.

Contudo, por ser um método de solução ainda recente, muitas variações de formulação ainda estão sendo encontradas, com diferentes técnicas de integração temporal, de integração de tensões, de monitoramento das partículas, de interpolação de informações entre as malhas Lagrangiana e Euleriana e de aplicação de condições de contorno. Cada uma das novas proposições apresentadas ao longo do tempo visam solucionar gargalos percebidos, sendo os principais a instabilidade na transição de pontos materiais entre células eulerianas, a aplicação de condições de contorno não alinhadas com a malha de fundo e os erros de integração de tensões para a determinação das forças internas. Além disso, ao passo que resultados satisfatórios são percebidos nas simulações, não linearidades de maior grau de complexidade vêm sendo acopladas ao MPM, como a danificação, o fraturamento e a consideração simultânea de mais de uma fase da matéria.

Nessa direção de construção do conhecimento científico sobre o tema, o MPM SPSI desta tese visa propor, no contexto do MPM, uma nova estratégia de armazenamento das informações na malha Lagrangiana, uma nova formas de integração e atualização das tensões e um esquema para o uso do MPM no estado plano de tensões. Também busca-se estender o método com a incorporação de um modelo de dano isotrópico na tração e com o particionamento de corpos contínuos para a formação de fraturas, avaliando-se a interpenetrabilidade e o contato entre as partes separadas.

4 METODOLOGIA

Buscando-se a melhoria da resposta dos modelos em termos de tensões e a eliminação da instabilidade de partículas que cruzam células Eulerianas, neste trabalho apresenta-se, para análises planas, uma nova perspectiva, aqui chamada de método do ponto material com subdomínios interpolados em partículas superconvergentes (MPM SPSI). Adicionalmente, propõe-se a incorporação de um modelo de dano escalar ao MPM SPSI, associado à possibilidade de particionamento/fratura e de consideração de contato entre subdomínios. Todas as propostas relatadas são descritas detalhadamente neste capítulo.

As formulações apresentadas são implementadas computacionalmente em linguagem *Python 3* (VAN ROSSUM; DRAKE, 2009). Então, o algoritmo computacional é empregado no processamento de um modelo já testado experimentalmente, buscando-se a validação do código. Em seguida processam-se modelos estruturais simples afim de se testar as hipóteses da pesquisa. Cinco modelos são processados sem a consideração do dano e do fraturamento e outros cinco são processados considerando-se tais fatores. Assim, neste capítulo também mostram-se todos os dados de entrada inerentes às simulações computacionais executadas com o MPM SPSI.

4.1 SUBDOMÍNIOS INTERPOLADOS EM PARTÍCULAS SUPERCONVERGENTES (MPM SPSI)

Conforme será abordado, o MPM SPSI caracteriza-se por ser um método cinemático de análise plana não linear em que:

a) tanto o estado plano de deformações quanto o estado plano de tensões pode ser representado;

b) a malha Lagrangiana é formada por subdomínios quadrilaterais de 9 vértices com interpolação interna biquadrática por funções $Q_{\mathrm{v}}(\mathbf{x})$;

c) o armazenamento da maioria das variáveis de estado é feito nos pontos de Gauss dos subdomínios, ou seja, nos pontos superconvergentes de tensão dos subdomínios. Por isso, a partir deste capítulo, os termos "ponto superconvergente"e "partícula superconvergente"serão utilizados no texto como sinônimos de "ponto de Gauss";

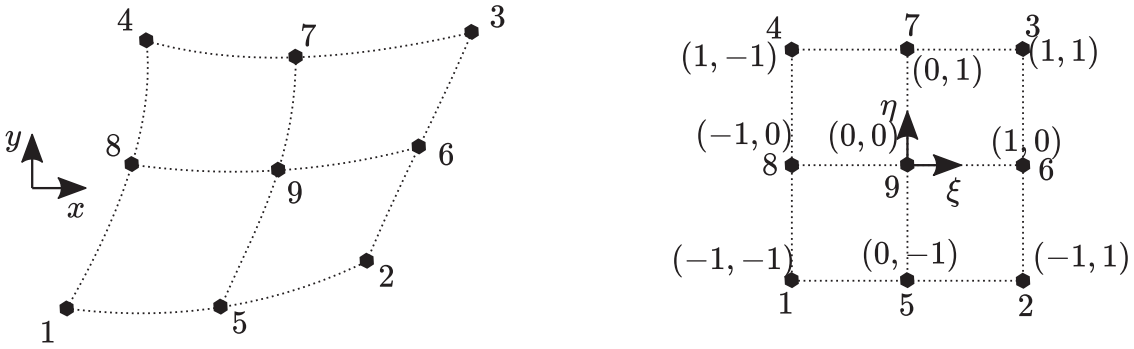
d) o mapeamento espacial de informações para os nós Eulerianos pode ser feito tanto por funções bilineares $N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$ quanto por B-splines cúbicas $N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$.

4.1.0.1 Subdomínios e interpolação interna biquadrática

Como já citado, a representação dos subdomínios é dada por quadriláteros Lagrangianos de 9 vértices, como aquele exemplificado na figura 12, cujas funções de interpolação internas, escritas em termos das coordenadas locais (ξ, η), são

$$Q_1(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\xi\eta\,(1-\xi)\,(1-\eta) \quad Q_2(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}\xi\eta\,(1+\xi)\,(1-\eta) \quad Q_3(\xi,\eta) = \frac{1}{4}\xi\eta\,(1+\xi)\,(1+\eta)$$
$$Q_4(\xi,\eta) = -\frac{1}{4}\xi\eta\,(1-\xi)\,(1+\eta) \quad Q_5(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}\eta\,(1-\xi^2)\,(1-\eta) \quad Q_6(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\xi\,(1+\xi)\,(1-\eta^2)$$
$$Q_7(\xi,\eta) = \frac{1}{2}\eta\,(1-\xi^2)\,(1+\eta) \quad Q_8(\xi,\eta) = -\frac{1}{2}\xi\,(1-\xi)\,(1-\eta^2) \quad Q_9(\xi,\eta) = (1-\xi^2)\,(1-\eta^2)\ . \tag{4.1}$$

FIGURA 12 – SUBDOMÍNIO Ω_P BIQUADRÁTICO LAGRANGIANO.



FONTE: O autor (2022).

Sendo Ω_p um subdomínio isoparamétrico, pode-se escrever, utilizando-se as funções de interpolação dos vértices, a equação que relaciona as coordenadas globais $\mathbf{x}$ e as coordenadas locais $\boldsymbol{\xi}$

$$\mathbf{x}(\boldsymbol{\xi}) = \left\{ \begin{array}{c} x(\xi,\eta) \\ y(\xi,\eta) \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} Q_1(\xi,\eta) \\ Q_2(\xi,\eta) \\ Q_3(\xi,\eta) \\ Q_4(\xi,\eta) \\ Q_5(\xi,\eta) \\ Q_6(\xi,\eta) \\ Q_7(\xi,\eta) \\ Q_8(\xi,\eta) \\ Q_9(\xi,\eta) \end{array} \right\}, \tag{4.2}$$

bem como o Jacobiano entre os dois sistemas de coordenadas

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{1,\xi}(\xi,\eta) & Q_{1,\eta}(\xi,\eta) \\ Q_{2,\xi}(\xi,\eta) & Q_{2,\eta}(\xi,\eta) \\ Q_{3,\xi}(\xi,\eta) & Q_{3,\eta}(\xi,\eta) \\ Q_{4,\xi}(\xi,\eta) & Q_{4,\eta}(\xi,\eta) \\ Q_{5,\xi}(\xi,\eta) & Q_{5,\eta}(\xi,\eta) \\ Q_{6,\xi}(\xi,\eta) & Q_{6,\eta}(\xi,\eta) \\ Q_{7,\xi}(\xi,\eta) & Q_{7,\eta}(\xi,\eta) \\ Q_{8,\xi}(\xi,\eta) & Q_{8,\eta}(\xi,\eta) \\ Q_{9,\xi}(\xi,\eta) & Q_{9,\eta}(\xi,\eta) \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

4.1.0.2 Interpolação nodal

Em combinação com as funções internas aos subdomínios $Q_{\mathrm{v}}(\mathbf{x})$, também são utilizadas as funções nodais $N_i(\mathbf{x})$ para que se tenham as funções de interpolação do SPSI

$$N_i^{\mathrm{SPSI}}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathrm{v}=1}^{9} N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}) Q_{\mathrm{v}}(\mathbf{x}). \tag{4.4}$$

As funções nodais $N_i(\mathbf{x})$ podem ser bilineares lagrangianas $N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$, já mostradas na equação (2.175) em 2.2.4, ou então do tipo B-spline cúbica

$$N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x}) = \mathcal{R}_i^{\mathrm{B}}(x) \mathcal{S}_i^{\mathrm{B}}(y), \tag{4.5}$$

onde $\mathcal{R}_i^{\mathrm{B}}(x)$ e $\mathcal{S}_i^{\mathrm{B}}(y)$ são B-splines cúbicas unidimensionais, divididas em quatro diferentes tipos, dependendo da posição do nó i em relação ao domínio de análise. Considerando-se um domínio de análise cartesiano retangular, em que as coordenadas mínimas e máximas nas direções x e y são $x_{\min}$, $x_{\max}$, $y_{\min}$ e $y_{\max}$, calcula-se $\mathcal{R}_i^{\mathrm{B}}(x)$ como

$$\mathcal{R}_i^{\mathrm{B}}(x) = \begin{cases} \mathcal{R}_i^{I,\mathrm{B}}(x) : x_i = x_{\min} \text{ ou } x_i = x_{\max} \\ \mathcal{R}_i^{II,\mathrm{B}}(x) : x_i = x_{\min} + l_{cx} \\ \mathcal{R}_i^{III,\mathrm{B}}(x) : x_{\min} + 2l_{cx} \leq x_i \leq x_{\max} - 2l_{cx} \\ \mathcal{R}_i^{IV,\mathrm{B}}(x) : x_i = x_{\max} - l_{cx} \end{cases}, \tag{4.6}$$

sendo l_{cx} o comprimento das células Eulerianas na direção x. As funções $\mathcal{R}_i^{I,\mathrm{B}}(x)$, $\mathcal{R}_i^{II,\mathrm{B}}(x)$, $\mathcal{R}_i^{III,\mathrm{B}}(x)$ e $\mathcal{R}_i^{IV,\mathrm{B}}(x)$, conforme Vaucorbeil et al. (2020), são dadas pelas equações

$$\mathcal{R}_i^{I,\mathrm{B}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}\mathrm{r}_i^3(x) + \mathrm{r}_i^2(x) + 2\mathrm{r}_i(x) + \frac{4}{3} : -2 \leq \mathrm{r}_i(x) < -1 \\ -\frac{1}{6}\mathrm{r}_i^3(x) + \mathrm{r}_i(x) + 1 : -1 \leq \mathrm{r}_i(x) < 0 \\ \frac{1}{6}\mathrm{r}_i^3(x) - \mathrm{r}_i(x) + 1 : 0 \leq \mathrm{r}_i(x) < 1 \\ -\frac{1}{6}\mathrm{r}_i^3(x) + \mathrm{r}_i^2(x) - 2\mathrm{r}_i(x) + \frac{4}{3} : 1 \leq \mathrm{r}_i(x) \leq 2 \\ 0 : \mathrm{r}_i(x) < -2 \text{ ou } \mathrm{r}_i(x) > 2 \end{cases}, \tag{4.7}$$

$$\mathcal{R}_i^{II,\mathrm{B}}(x) = \begin{cases} -\frac{1}{3}\mathrm{r}_i^3(x) - \mathrm{r}_i^2(x) + \frac{2}{3} : -1 \leq \mathrm{r}_i(x) < 0 \\ \frac{1}{2}\mathrm{r}_i^3(x) - \mathrm{r}_i^2(x) + \frac{2}{3} : 0 \leq \mathrm{r}_i(x) < 1 \\ -\frac{1}{6}\mathrm{r}_i^3(x) + \mathrm{r}_i^2(x) - 2\mathrm{r}_i(x) + \frac{4}{3} : 1 \leq \mathrm{r}_i(x) \leq 2 \\ 0 : \mathrm{r}_i(x) < -1 \text{ ou } \mathrm{r}_i(x) > 2 \end{cases}, \tag{4.8}$$

$$\mathcal{R}_i^{III,\mathrm{B}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}\mathrm{r}_i^3(x) + \mathrm{r}_i^2(x) + 2\mathrm{r}_i(x) + \frac{4}{3} : -2 \leq \mathrm{r}_i(x) < -1 \\ -\frac{1}{2}\mathrm{r}_i^3(x) - \mathrm{r}_i^2(x) + \frac{2}{3} : -1 \leq \mathrm{r}_i(x) < 0 \\ \frac{1}{2}\mathrm{r}_i^3(x) - \mathrm{r}_i^2(x) + \frac{2}{3} : 0 \leq \mathrm{r}_i(x) < 1 \\ -\frac{1}{6}\mathrm{r}_i^3(x) + \mathrm{r}_i^2(x) - 2\mathrm{r}_i(x) + \frac{4}{3} : 1 \leq \mathrm{r}_i(x) \leq 2 \\ 0 : \mathrm{r}_i(x) < -2 \text{ ou } \mathrm{r}_i(x) > 2 \end{cases}, \tag{4.9}$$

e

$$\mathcal{R}_i^{IV,\mathrm{B}}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}\mathrm{r}_i^3(x) + \mathrm{r}_i^2(x) + 2\mathrm{r}_i(x) + \frac{4}{3} : -2 \leq \mathrm{r}_i(x) < -1 \\ -\frac{1}{2}\mathrm{r}_i^3(x) - \mathrm{r}_i^2(x) + \frac{2}{3} : -1 \leq \mathrm{r}_i(x) < 0 \\ \frac{1}{3}\mathrm{r}_i^3(x) - \mathrm{r}_i^2(x) + \frac{2}{3} : 0 \leq \mathrm{r}_i(x) < 1 \\ 0 : \mathrm{r}_i(x) < -2 \text{ ou } \mathrm{r}_i(x) > 1 \end{cases}, \tag{4.10}$$

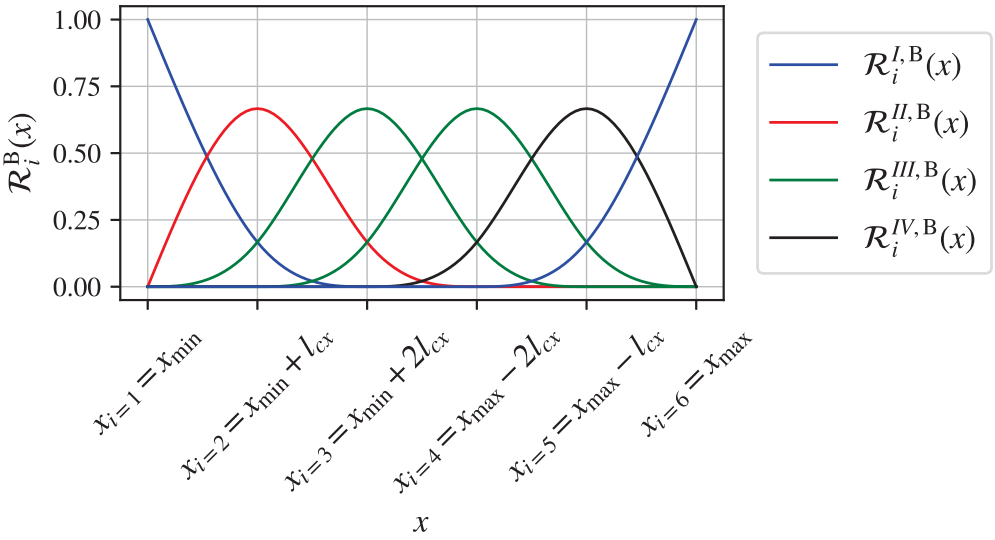
sendo

$$\mathrm{r}_i(x) = \frac{x - x_i}{l_{cx}}. \tag{4.11}$$

Para um melhor entendimento, exemplificam-se, na figura 13, as B-splines cúbicas unidimensionais $\mathcal{R}_i^{\mathrm{B}}(x)$ para um caso em que existem 6 nós Eulerianos na

direção x. É importante perceber que $\mathcal{R}_i^{\mathrm{B}}(x_i) = 1$ apenas nos nós extremos do domínio de análise, mas que $\sum_i \mathcal{R}_i^{\mathrm{B}}(x) = 1$ para todos os valores de x dentro desse domínio. Na direção y, as funções $\mathcal{S}_i^{\mathrm{B}}(y)$ são calculadas de forma análoga ao que é feito para a direção x.

FIGURA 13 – B-SPLINES CÚBICAS UNIDIMENSIONAIS UTILIZADAS NA COMPOSIÇÃO DAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO NODAIS BIDIMENSIONAIS



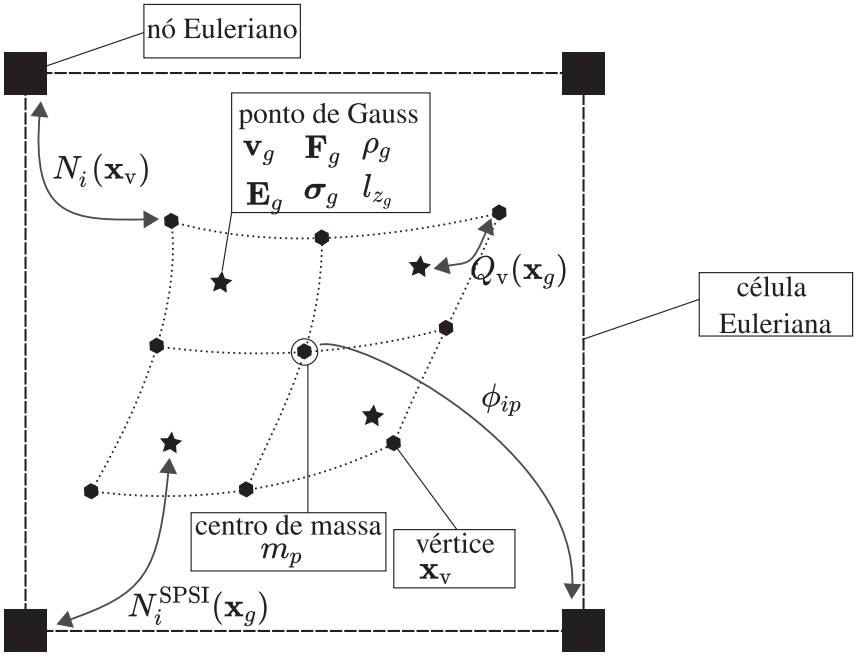
FONTE: Adaptado de Vaucorbeil et al. (2020).

Desse modo, tendo em vista os conceitos já definidos, a proposta do MPM SPSI é o que se tem na figura 14: armazenar as posições atuais $\mathbf{x}_{\mathrm{v}}$ nos vértices; armazenar velocidades $\mathbf{v}_g$, gradientes de deformações $\mathbf{F}_g$, deformações finitas de Green-Lagrange $\mathbf{E}_g$, tensões de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}_g$, densidades de massa ρ_g e espessuras em z l_{z_g} nos pontos de Gauss; armazenar massas dos subdomínios m_p nos seus respectivos centros de massa; utilizar os valores das funções $N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}})$ para mapear informações entre os vértices e os nós; utilizar os valores das funções $N_i^{\mathrm{SPSI}}(\mathbf{x}_g)$ para mapear informações entre os pontos de Gauss e os nós; utilizar as funções $Q_{\mathrm{v}}(\mathbf{x}_g)$ para descrever as variações internas dos subdomínios, relacionando os vértices com os pontos de Gauss.

4.1.1 Cálculo das variáveis nodais

Assim como no MPM CPDI, as variáveis interpoladas para os nós da malha Euleriana no MPM SPSI são as massas, os momentos lineares, as forças internas, as forças externas de corpo e as forças externas de superfície. Adicionalmente, se for o caso, calculam-se também as forças nodais de amortecimento local não viscoso.

FIGURA 14 – ESQUEMA GERAL DO MPM SPSI PROPOSTO



FONTE: O autor (2022).

4.1.1.1 Massas agrupadas

Para se evitar a interpolação de valores negativos para os nós, o que geraria resultados não físicos, as massas dos subdomínios são as únicas variáveis de estado mapeadas utilizando-se os pesos de interpolação

$$\begin{aligned} \phi_{ip}^{\mathrm{SPSI}} &= \frac{1}{V_p}\int_{\Omega_p} N_i^{\mathrm{SPSI}}(\mathbf{x})dV \\ &= \frac{1}{V_p}\sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}_\mathrm{v})\int_{\Omega_p} Q_\mathrm{v}(\mathbf{x})dV \end{aligned} \tag{4.12}$$

por meio da equação

$$m_i = \sum_p \phi_{ip}^{\mathrm{SPSI}} m_p \tag{4.13}$$

Porém, diferentemente do MPM CPDI proposto por Sadeghirad et al. (2013), a integral de subdomínio

$$\int_{\Omega_p} Q_\mathrm{v}(\mathbf{x})dV, \tag{4.14}$$

presente em (4.12), assim como todas as outras integrais de subdomínio necessárias, são calculadas de forma numérica, utilizando-se a quadratura de Gauss-Legendre. No

caso particular de (4.14), pode-se fazer

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_p} Q_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})dV &= \int_{A_p} Q_{\mathbf{v}}(\mathbf{x})l_z(\mathbf{x})dA \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} Q_{\mathbf{v}}(\xi,\eta)l_z(\xi,\eta)\det(\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}(\xi,\eta))d\xi d\eta \\ &= \sum_g Q_{\mathbf{v}}(\xi_g,\eta_g)l_z(\xi_g,\eta_g)\det(\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}(\xi_g,\eta_g))w_g,\end{aligned} \tag{4.15}$$

sendo A_p a área do subdomínio p, $l_z(\mathbf{x})$ a espessura em z (fora do plano) em determinado ponto, (ξ_g,η_g) são as coordenadas dos pontos de Gauss e w_g são os respectivos pesos de Gauss.

Substituindo-se (4.15) em (4.12), chega-se à equação de cálculo do peso de interpolação do subdomínio p para o nó i

$$\phi_{ip}^{\mathrm{SPSI}} = \frac{1}{V_p}\sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}})\sum_g Q_{\mathbf{v}}(\xi_g,\eta_g)l_z(\xi_g,\eta_g)\det(\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}(\xi_g,\eta_g))w_g, \tag{4.16}$$

na qual os volumes V_p também são calculados por integrais de subdomínio resolvidas por integração numérica, conforme a equação

$$\begin{aligned}V_p &= \int_{\Omega_p} dV \\ &= \int_{A_p} l_z(\mathbf{x})dA \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} l_z(\xi,\eta)\det(\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}(\xi,\eta))d\xi d\eta \\ &= \sum_g l_z(\xi_g,\eta_g)\det(\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}(\xi_g,\eta_g))w_g.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Quando são utilizados 4 pontos superconvergentes, suas coordenadas locais nos subdomínios são

$$[\xi_g,\eta_g] = \begin{bmatrix} -0.57735027 & -0.57735027 \\ 0.57735027 & -0.57735027 \\ -0.57735027 & 0.57735027 \\ 0.57735027 & 0.57735027 \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

e seus respectivos pesos são

$$\{w_g\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T. \tag{4.19}$$

No caso de uso de 9 pontos de Gauss por subdomínio, utilizam-se as coordenadas locais

$$[\xi_g, \eta_g] = \begin{bmatrix} -0.77459667 & -0.77459667 \\ 0 & -0.77459667 \\ 0.77459667 & -0.77459667 \\ -0.77459667 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.77459667 & 0 \\ -0.77459667 & 0.77459667 \\ 0 & 0.77459667 \\ 0.77459667 & 0.77459667 \end{bmatrix} \tag{4.20}$$

e os pesos

$$\{w_g\} = \begin{Bmatrix} 0.30864198 \\ 0.49382716 \\ 0.30864198 \\ 0.49382716 \\ 0.79012346 \\ 0.49382716 \\ 0.30864198 \\ 0.49382716 \\ 0.30864198 \end{Bmatrix}. \tag{4.21}$$

4.1.1.2 Momentos lineares

Seguindo-se o conceito da interpolação proposta, o cálculo dos momentos lineares nodais no MPM SPSI é feito de acordo com a equação

$$\begin{aligned} \boldsymbol{p}_i^n &= \sum_p \int_{\Omega_p^n} N_i^{\mathrm{SPSI}}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) dV \\ &= \sum_p \sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^n) \int_{\Omega_p^n} Q_{\mathrm{v}}(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \mathbf{v}(\mathbf{x}) dV, \end{aligned} \tag{4.22}$$

aplicando-se a quadratura de Gauss-Legendre na integral de subdomínio conforme a equação

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_p^n} Q_{\mathrm{v}}(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})dV &= \int_{A_p^n} Q_{\mathrm{v}}(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})l_z(\mathbf{x})dA \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} Q_{\mathrm{v}}(\xi,\eta)\rho(\xi,\eta)\mathbf{v}(\xi,\eta)l_z(\xi,\eta)\det(\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}(\xi,\eta))d\xi d\eta \\ &= \sum_g Q_{\mathrm{v}}(\xi_g,\eta_g)\rho^n(\xi_g,\eta_g)\mathbf{v}^n(\xi_g,\eta_g)l_z^n(\xi_g,\eta_g)\det(\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}^n(\xi_g,\eta_g))w_g,\end{aligned} \tag{4.23}$$

o que resulta na equação final

$$\boldsymbol{p}_i^n = \sum_p\sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^n)\sum_g Q_{\mathrm{v}}(\xi_g,\eta_g)\rho^n(\xi_g,\eta_g)\mathbf{v}^n(\xi_g,\eta_g)l_z^n(\xi_g,\eta_g)\det(\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}^n(\xi_g,\eta_g))w_g. \tag{4.24}$$

4.1.1.3 Forças internas

Já as forças internas nodais, provenientes das tensões nos subdomínios, são determinadas pela equação

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{\sigma_i}^n &= \sum_p \int_{\Omega_p^n} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\frac{\partial N_i^{\mathrm{SPSI}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}dV \\ &= \sum_p\sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^n)\int_{\Omega_p^n}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\frac{\partial Q_{\mathrm{v}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}dV \\ &= \sum_p\sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^n)\int_{\Omega_p^n}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}^{-T}(\mathbf{x})\frac{\partial Q_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}}dV,\end{aligned} \tag{4.25}$$

na qual a quadratura de gauss também é aplicada para a resolução da integral de subdomínio, como mostra a equação

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_p^n}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}^{-T}(\mathbf{x})\frac{\partial Q_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}}dV &= \int_{A_p^n}\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}^{-T}(\mathbf{x})\frac{\partial Q_{\mathrm{v}}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}}l_z(\mathbf{x})dA \\ &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\boldsymbol{\sigma}(\xi,\eta)\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}^{-T}(\xi,\eta)\frac{\partial Q_{\mathrm{v}}(\xi,\eta)}{\partial \boldsymbol{\xi}}l_z(\xi,\eta)\det(\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}(\xi,\eta))d\xi d\eta \\ &= \sum_g \boldsymbol{\sigma}(\xi_g,\eta_g)[\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}^n(\xi_g,\eta_g)]^{-T}\frac{\partial Q_{\mathrm{v}}(\xi_g,\eta_g)}{\partial \boldsymbol{\xi}}l_z^n(\xi_g,\eta_g)\det(\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}^n(\xi_g,\eta_g))w_g\end{aligned} \tag{4.26}$$

que, quando substituída em (4.25), dá origem à equação

$$\mathbf{f}_{\sigma_i}^n = \sum_p\sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^n)\sum_g \boldsymbol{\sigma}^n(\xi_g,\eta_g)[\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}^n(\xi_g,\eta_g)]^{-T}\frac{\partial Q_{\mathrm{v}}(\xi_g,\eta_g)}{\partial \boldsymbol{\xi}}l_z^n(\xi_g,\eta_g)\det(\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}^n(\xi_g,\eta_g))w_g. \tag{4.27}$$

4.1.1.4 Forças externas de corpo

O cálculo das forças externas de corpo em um nó i da malha Euleriana parte da equação

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{b_i} &= \sum_p \int_{\Omega_p^n} \rho(\mathbf{x}) N_i^{\mathrm{SPSI}}(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV \\ &= \sum_p \sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^n) \int_{\Omega_p^n} \rho(\mathbf{x}) Q_{\mathrm{v}}(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV,\end{aligned} \tag{4.28}$$

onde a integral em Ω_p, quando resolvida por integração numérica de Gauss-Legendre, torna-se

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_p^n} \rho(\mathbf{x}) Q_{\mathrm{v}}(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) dV &= \int_{A_p^n} \rho(\mathbf{x}) Q_{\mathrm{v}}(\mathbf{x}) \mathbf{b}(\mathbf{x}) l_z(\mathbf{x}) dA \\ &= \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \rho(\xi,\eta) Q_{\mathrm{v}}(\xi,\eta) \mathbf{b}(\xi,\eta) l_z(\xi,\eta) \det(\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}(\xi,\eta)) d\xi d\eta \\ &= \sum_g \rho^n(\xi_g,\eta_g) Q_{\mathrm{v}}(\xi_g,\eta_g) \mathbf{b}^n(\xi_g,\eta_g) l_z^n(\xi_g,\eta_g) \det(\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}^n(\xi_g,\eta_g)) w_g.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Então, substituindo-se (4.29) em (4.28), escreve-se a equação

$$\mathbf{f}_{b_i}^n = \sum_p \sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^n) \sum_g \rho^n(\xi_g,\eta_g) Q_{\mathrm{v}}(\xi_g,\eta_g) \mathbf{b}^n(\xi_g,\eta_g) l_z^n(\xi_g,\eta_g) \det(\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}^n(\xi_g,\eta_g)) w_g. \tag{4.30}$$

4.1.1.5 Forças externas de superfície

Por definição, as forças externas de superfície em um nó i são determinadas a partir da equação

$$\mathbf{f}_{t_i}^n = \sum_p \int_{\Gamma_{t_p}^n} N_i^{\mathrm{SPSI}}(\mathbf{x}) \mathbf{t}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) dA \tag{4.31}$$

Contudo, pelo fato de apenas forças externas aplicadas diretamente nos vértices dos subdomínios serem consideradas nos modelos deste trabalho, pode-se simplificar esse cálculo considerando-se a equação

$$\begin{aligned}\mathbf{f}_{t_i}^n &= \sum_p \sum_{\mathrm{v}} N_i^{\mathrm{SPSI}}(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^n) \mathbf{f}_{\mathrm{v}} \\ &= \sum_p \sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^n) \mathbf{f}_{\mathrm{v}}^n,\end{aligned} \tag{4.32}$$

onde $\mathbf{f}_{\mathrm{v}}^n$ é a força aplicada no vértice local v do subdomínio p no passo de tempo n.

4.1.1.6 Forças de amortecimento local não viscoso

Esse tipo de força nodal

$$\mathbf{f}_{d_i}^n = \left[\begin{array}{cc} f_{d_{x_i}}^n & f_{d_{y_i}}^n \end{array} \right]^T \tag{4.33}$$

é aquele proposto por Cundall (1987), já descrito na seção secundária 2.2.6. Sendo assim, a componente da força de amortecimento local não viscoso na direção x é dada por

$$f_{d_{x_i}}^n = -\alpha |f_{b_{x_i}}^n + f_{t_{x_i}}^n - f_{\sigma_{x_i}}^N| \frac{(v_x)_i^n}{|(v_x)_i^n|} \tag{4.34}$$

e, na direção y, é calculada como

$$f_{d_{y_i}}^n = -\alpha |f_{b_{y_i}}^n + f_{t_{y_i}}^n - f_{\sigma_{y_i}}^n| \frac{(v_y)_i^n}{|(v_y)_i^n|}, \tag{4.35}$$

onde α é o coeficiente de amortecimento não viscoso, que varia de 0 - sem amortecimento - a 1 - amortecimento total da força nodal.

4.1.1.7 Forças nodais totais

As forças nodais totais nada mais são do que a soma das forças nodais internas e externas da equação

$$\mathbf{f}_i^n = \mathbf{f}_{b_i}^n + \mathbf{f}_{t_i}^n - \mathbf{f}_{\sigma_i}^n + \mathbf{f}_{d_i}^n. \tag{4.36}$$

4.1.2 Aplicação das condições de contorno essenciais

Condições de contorno de deslocamento nulo são aplicadas aos nós eulerianos de forma bastante simples, anulando-se as forças e momentos lineares dos graus de liberdade restritos, ou seja, fazendo-se

$$\begin{aligned} f_{x_i}^n &= \left\{ \begin{array}{c} 0 : \overline{u}_{x_i}^n = 0 \\ f_{x_i}^n : \overline{u}_{x_i}^n \neq 0 \end{array} \right. \\ f_{y_i}^n &= \left\{ \begin{array}{c} 0 : \overline{u}_{y_i}^n = 0 \\ f_{y_i}^n : \overline{u}_{y_i}^n \neq 0 \end{array} \right. \\ (p_x)_i^n &= \left\{ \begin{array}{c} 0 : \overline{u}_{x_i}^n = 0 \\ (p_x)_i^n : \overline{u}_{x_i}^n \neq 0 \end{array} \right. \\ (p_y)_i^n &= \left\{ \begin{array}{c} 0 : \overline{u}_{y_i}^n = 0 \\ (p_y)_i^n : \overline{u}_{y_i}^n \neq 0 \end{array} \right. \end{aligned} \tag{4.37}$$

4.1.3 Atualização dos momentos lineares nodais por integração temporal explícita de Euler

Considerando-se a integração temporal explícita de Euler-Gauss, atualizam-se os momentos lineares nodais pela equação de conservação do momento linear

$$\boldsymbol{p}_i^{n+1} = \boldsymbol{p}_i^n + \mathbf{f}_i^n \Delta t^n \tag{4.38}$$

e as próprias velocidades nodais pela equação

$$\mathbf{v}_i^{n+1} = \frac{\boldsymbol{p}_i^{n+1}}{m_i^n} \tag{4.39}$$

4.1.4 Mapeamento das variáveis nodais atualizadas de volta para a malha Lagrangiana

Conforme já colocado, o armazenamento das variáveis de estado no MPM SPSI é feito nos pontos de Gauss dos subdomínios, sendo elas:

a) os vetores velocidade $\mathbf{v}_g^n = \mathbf{v}(\mathbf{x_g}^n)$;

b) os tensores gradiente de deformações na configuração tridimensional $(\mathbf{F}_g)_{3\times3}^n = \mathbf{F}_{3\times3}(\mathbf{x}_g^n)$;

c) os tensores de deformações finitas de Green-Lagrange na configuração tridimensional $(\mathbf{E}_g)_{3\times3}^n = \mathbf{E}_{3\times3}(\mathbf{x}_g^n)$;

d) os tensores de tensões de Cauchy na configuração tridimensional $(\boldsymbol{\sigma}_g^n)_{3\times3} = \boldsymbol{\sigma}_{3\times3}(\mathbf{x}_g^n)$;

e) as densidades de massa $\rho_g^n = \rho(\mathbf{x}_g^n)$;

f) as dimensões em z $l_{z_g}^n = l_z(\mathbf{x}_g^n)$.

As únicas exceções são as posições, que ficam armazenadas nos vértices dos subdomínios - na forma dos vetores $\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^n$ - e as massas m_p, que são armazenadas nos centros de massa. Tendo isso em vista, os modos com que as variáveis atualizadas são transferidas de volta para os subdomínios, sejam para os vértices ou para os pontos superconvergentes, são demonstrados nas seções terciárias 4.1.4.1 a 4.1.4.13.

4.1.4.1 Posições atualizadas dos vértices

As posições dos vértices são atualizadas com a aplicação da equação

$$\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^{n+1} = \mathbf{x}_{\mathrm{v}}^{n} + \Delta\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^{n}, \tag{4.40}$$

onde o incremento de posições entre o passo de tempo n e o passo $n+1$ é dado por

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^{n} &= \Delta t^{n} \sum_{i} N_{i}^{\mathrm{SPSI}}(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^{n}) \mathbf{v}_{i}^{n+1} \\ &= \Delta t^{n} \sum_{i} N_{i}(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^{n}) \mathbf{v}_{i}^{n+1}. \end{aligned} \tag{4.41}$$

4.1.4.2 Velocidades atualizadas dos pontos de Gauss

Atualizam-se as velocidades das partículas superconvergentes dos subdomínios pela equação

$$\mathbf{v}_{g}^{n+1} = \mathbf{v}_{g}^{n} + \Delta\mathbf{v}_{g}^{n}, \tag{4.42}$$

sendo que o incremento de velocidades é calculado pela equação

$$\Delta\mathbf{v}_{g}^{n} = \sum_{i} N_{i}^{\mathrm{SPSI}}(\mathbf{x}_{g}^{n}) \left(\mathbf{v}_{i}^{n+1} - \mathbf{v}_{i}^{n} \right). \tag{4.43}$$

4.1.4.3 Gradientes espaciais de velocidades dos pontos de Gauss

Utilizando-se os gradientes das funções de interpolação medidos nos pontos de Gauss

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{i}^{\mathrm{SPSI}}(\mathbf{x}_{g}^{n})}{\partial \mathbf{x}} &= \left[\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}^{n}(\xi_{g}, \eta_{g}) \right]^{-T} \frac{\partial N_{i}^{\mathrm{SPSI}}(\xi_{g}, \eta_{g})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \\ &= \left[\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}^{n}(\xi_{g}, \eta_{g}) \right]^{-T} \sum_{\mathrm{v}} N_{i}(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^{n}) \frac{\partial Q_{\mathrm{v}}(\xi_{g}, \eta_{g})}{\partial \boldsymbol{\xi}}, \end{aligned} \tag{4.44}$$

podem-se calcular os gradientes espaciais de velocidades desses pontos superconvergentes pela equação

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_g}^{n+1} &= \sum_{i} \mathbf{v}_{i}^{n+1} \left[\frac{\partial N_{i}^{\mathrm{SPSI}}(\mathbf{x}_{g}^{n})}{\partial \mathbf{x}} \right]^{T} \\ &= \sum_{i} \mathbf{v}_{i}^{n+1} \left\{ \left[\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}^{n}(\xi_{g}, \eta_{g}) \right]^{-T} \sum_{\mathrm{v}} N_{i}(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^{n}) \frac{\partial Q_{\mathrm{v}}(\xi_{g}, \eta_{g})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right\}^{T}. \end{aligned} \tag{4.45}$$

4.1.4.4 Tensores taxa de deformação nos pontos de Gauss

Conforme já abordado em 2.1.1.3, os tensores taxa de deformação nada mais são do que a parte simétrica dos tensores gradiente espacial de velocidades, o que, matematicamente, é dado pela equação

$$\mathbf{D}_g^{n+1} = \frac{1}{2}\left[\boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_g}^{n+1} + (\boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_g}^{n+1})^T\right]. \tag{4.46}$$

4.1.4.5 Gradientes de deformações atualizados nos pontos de Gauss

Os gradientes de deformação bidimensionais dos pontos de Gauss são atualizados de acordo com

$$\mathbf{F}_g^{n+1} = \left(\mathbf{I}_{2\times 2} + \Delta t^n \boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_g}^{n+1}\right)\mathbf{F}_g^n. \tag{4.47}$$

4.1.4.6 Derivadas no tempo dos tensores de deformações finitas de Green-Lagrange nos pontos de Gauss

As taxas de variação no tempo das deformações finitas de Green-Lagrange são determinadas com base na equação

$$\left(\frac{d\mathbf{E}_g}{dt}\right)^{n+1} = \dot{\mathbf{E}}_g^{n+1} = \begin{bmatrix} (\dot{E}_g^{n+1})_{xX} & (\dot{E}_g^{n+1})_{xY} \\ (\dot{E}_g^{n+1})_{yX} & (\dot{E}_g^{n+1})_{yY} \end{bmatrix} = (\mathbf{F}_g^{n+1})^T \mathbf{D}_g^{n+1} \mathbf{F}_g^{n+1}, \tag{4.48}$$

percebendo-se que, no caso de análises bidimensionais, os tensores $\left(\frac{d\mathbf{E}_g}{dt}\right)^{n+1}$ são de dimensão 2×2. Contudo, é importante considerar que esse mesmo tensor possui sua versão 3×3 explícita

$$\left(\frac{d\mathbf{E}_g}{dt}\right)_{3\times 3}^{n+1} = (\dot{\mathbf{E}}_g^{n+1})_{3\times 3} = \begin{bmatrix} (\dot{E}_g^{n+1})_{xX} & (\dot{E}_g^{n+1})_{xY} & 0 \\ (\dot{E}_g^{n+1})_{yX} & (\dot{E}_g^{n+1})_{yY} & 0 \\ 0 & 0 & (\dot{E}_g^{n+1})_{zZ} \end{bmatrix}, \tag{4.49}$$

que facilita a atualização das tensões, sendo que a componente fora do plano vale

$$(\dot{E}_g^{n+1})_{zZ} = 0 \tag{4.50}$$

no estado plano de deformações e

$$(\dot{E}_g^{n+1})_{zZ} = \frac{-\lambda}{\lambda + 2\mu}\left[(\dot{E}_g^{n+1})_{xX} + (\dot{E}_g^{n+1})_{yY}\right] \tag{4.51}$$

no estado plano de tensões, considerando-se um material elástico linear, homogêneo e isotrópico, do qual utilizam-se as constantes de Lamé λ e μ.

4.1.4.7 Deformações finitas de Green-Lagrange atualizadas nos pontos de Gauss

A atualização dos tensores de deformações finitas de Green-Lagrange é feita, com base integração temporal explícita de Euler-Gauss, por meio da equação

$$(\mathbf{E}_g^{n+1})_{3\times3} = (\mathbf{E}_g^{n})_{3\times3} + \Delta t^n (\dot{\mathbf{E}}_g^{n+1})_{3\times3}. \tag{4.52}$$

4.1.4.8 Tensores taxa de deformação e gradiente espacial de velocidades em 3 dimensões

As componentes fora do plano dos tensores taxa de deformação e gradiente espacial de velocidades são determinadas pela equação

$$(D_g^{n+1})_{zz} = (\mathcal{L}_{x_g}^{n+1})_{zz} = \frac{(\dot{E}_g^{n+1})_{zZ}}{1 + 2(E_g^{n+1})_{zZ}}, \tag{4.53}$$

o que permite a representação de tais tensores de forma tridimensional como

$$(\mathbf{D}_g^{n+1})_{3\times3} = \begin{bmatrix} (D_g^{n+1})_{xx} & (D_g^{n+1})_{xy} & 0 \\ (D_g^{n+1})_{yx} & (D_g^{n+1})_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & (D_g^{n+1})_{zz} \end{bmatrix} \tag{4.54}$$

e

$$(\boldsymbol{\mathcal{L}}_g^{n+1})_{3\times3} = \begin{bmatrix} (\mathcal{L}_g^{n+1})_{xx} & (\mathcal{L}_g^{n+1})_{xy} & 0 \\ (\mathcal{L}_g^{n+1})_{yx} & (\mathcal{L}_g^{n+1})_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & (\mathcal{L}_g^{n+1})_{zz} \end{bmatrix}. \tag{4.55}$$

4.1.4.9 Gradientes materiais de deformações tridimensionais atualizados nos pontos de Gauss

Os gradientes espaciais de velocidades $(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_g}^{n+1})_{3\times3}$ são usados na equação

$$(\mathbf{F}_g^{n+1})_{3\times3} = \left[\mathbf{I}_{3\times3} + (\boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_g}^{n+1})_{3\times3}\Delta t^n\right](\mathbf{F}_g^{n+1})_{3\times3} \tag{4.56}$$

para a obtenção dos gradientes materiais de deformações atualizados no formato 3×3.

4.1.4.10 Tensões de Piola-Kirchhoff atualizadas nos pontos de Gauss

Se utilizado um modelo de material elástico e isotrópico, os tensores taxa de variação no tempo do segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff são calculados, no formato 3×3, pela equação

$$\left(\frac{d\mathbf{S}_g}{dt}\right)_{3\times3}^{n+1} = (\dot{\mathbf{S}}_g^{n+1})_{3\times3} = \lambda \mathrm{tr}(\dot{\mathbf{E}}_g^{n+1})_{3\times3}\mathbf{I}_{3\times3} + 2\mu(\dot{\mathbf{E}}_g^{n+1})_{3\times3}. \tag{4.57}$$

Então, atualizam-se os tensores de tensões de Piola-Kirchhoff aplicando-se a expressão

$$(\mathbf{S}_g^{n+1})_{3\times3} = (\mathbf{S}_g^{n})_{3\times3} + \Delta t_n(\dot{\mathbf{S}}_g^{n+1})_{3\times3}. \tag{4.58}$$

4.1.4.11 Tensões de Cauchy atualizadas nos pontos de Gauss

Para a obtenção dos tensores de tensões de Cauchy atualizados nos pontos superconvergentes, simplesmente aplica-se a relação entre $\boldsymbol{\sigma}$ e S da equação

$$(\boldsymbol{\sigma}_g^{n+1})_{3\times3} = \frac{(\mathbf{F}_g^{n+1})_{3\times3}(\mathbf{S}_g^{n+1})_{3\times3}(\mathbf{F}_g^{n+1})_{3\times3}^T}{\det\left[(\mathbf{F}_g^{n+1})_{3\times3}\right]}. \tag{4.59}$$

4.1.4.12 Dimensão fora do plano atualizada dos pontos de Gauss

A dimensão paralela ao eixo z é atualizada, nas partículas superconvergentes, por meio da equação

$$\begin{aligned} l_{z_g}^{n+1} = l_z(\mathbf{x}_g^{n+1}) &= l_z(\xi_g, \eta_g, n+1) \\ &= (F_g^{n+1})_{zZ} l_{z_g}^{n=0}. \end{aligned} \tag{4.60}$$

4.1.4.13 Densidade de massa atualizada nos pontos de Gauss

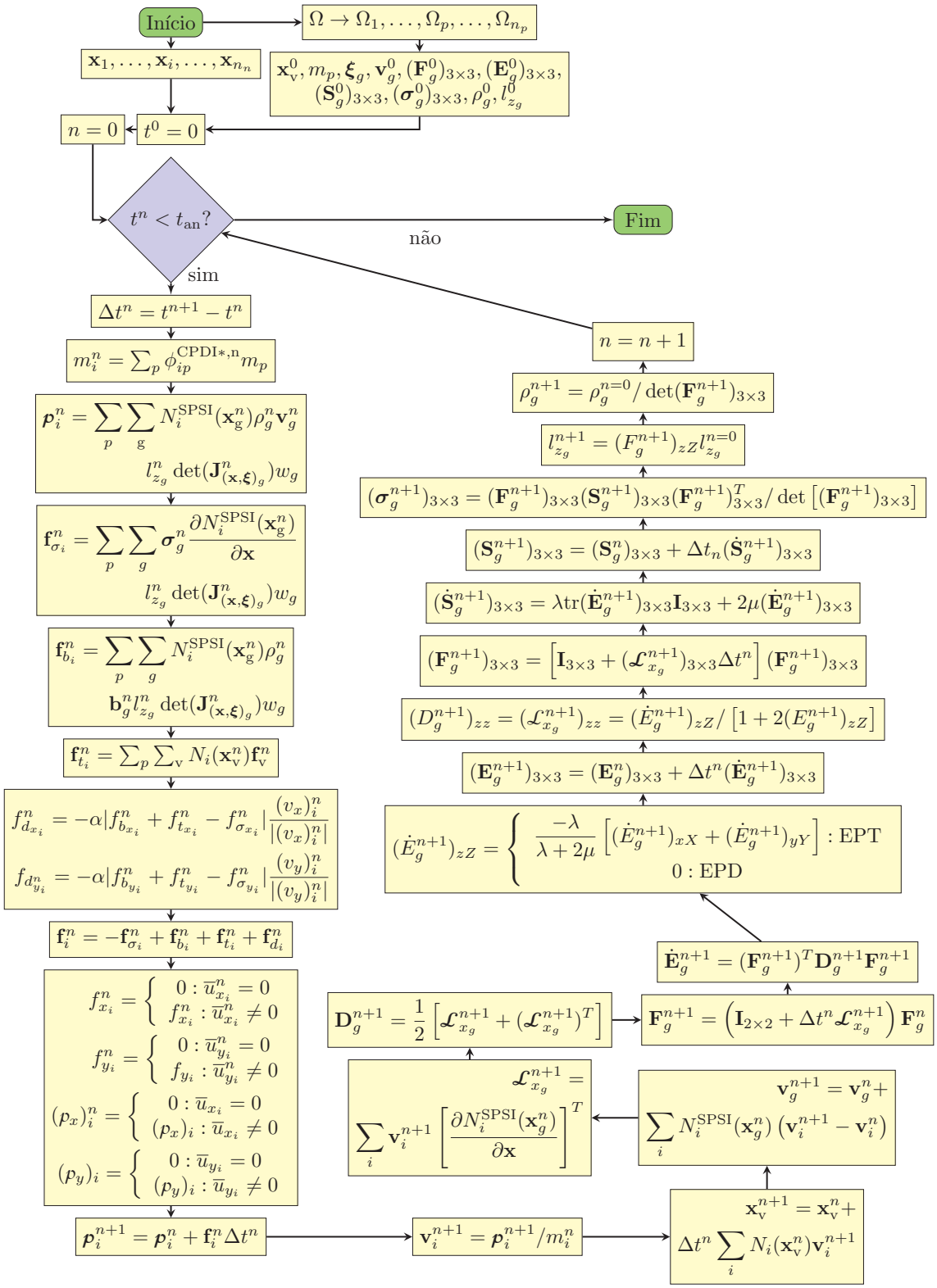
A nova densidade de massa de um ponto de gauss g de um subdomínio p no passo de tempo $n+1$ é dada por

$$\rho_g^{n+1} = \rho(\mathbf{x}_g^{n+1}) = \rho(\xi_g, \eta_g, n+1) = \frac{\rho_g^{n=0}}{\det(\mathbf{F}_g^{n+1})_{3\times3}}. \tag{4.61}$$

4.1.5 Fluxograma geral do MPM SPSI

Em função do que é descrito em 4.1.1 a 4.1.4, mostra-se, na figura 15, um fluxograma geral do MPM SPSI proposto. Essa sequência de processos representa

FIGURA 15 – ALGORITMO GERAL DO MPM SPSI.



FONTE: O autor (2022).

o algoritmo implementado computacionalmente, válido para análises de estado plano com materiais isotópicos, homogêneos, elásticos e lineares.

Inicia-se com a subdivisão do corpo contínuo Ω em subdomínios quadrilaterais Ω_p, com posições iniciais dos vértices $\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^0$ e massas m_p. Esses mesmos subdomínios possuem, nos pontos superconvergentes, posições locais $\boldsymbol{\xi}_g$, velocidades iniciais $\mathbf{v}_g^0$, gradientes de deformação iniciais $(\mathbf{F}_g^0)_{3\times3}$, deformações de Green-Lagrange iniciais $(\mathbf{E}_g^0)_{3\times3}$, tensões de Piola-Kirchhoff iniciais $(\mathbf{S}_g^0)_{3\times3}$ (segundo tensor), tensões de Cauchy iniciais $(\boldsymbol{\sigma}_g^0)_{3\times3}$, densidades iniciais ρ_g^0 e espessuras iniciais $l_{z_g}^0$. Em paralelo, também são definidas as coordenadas dos nós Eulerianos $\mathbf{x}_i$.

O tempo inicial da análise $t^0 = 0$ e o passo de tempo inicial $n = 0$ também são definidos antes do início do laço computacional que se repete enquanto o tempo atual t^n for menor que o tempo total de análise t_{an}. Em cada passo de tempo, começa-se com o cálculo do incremento de tempo Δt^n, entre o passo atual n e o próximo passo $n+1$. Em seguida interpolam-se as massas dos subdomínios m_p para os nós Eulerianos, por meio dos pesos de interpolação $\phi_{ip}^{\mathrm{SPSI,n}}$, obtendo-se as massas nodais m_i^n. Também calculam-se, por interpolação espacial, os momentos lineares nodais $\boldsymbol{p}_i^n$, as forças internas $\mathbf{f}_{\sigma_i}^n$, as forças de corpo nodais $\mathbf{f}_{b_i}^n$ e as forças de superfície $\mathbf{f}_{t_i}^n$. Caso o amortecimento local não viscoso seja considerado, determinam-se as componentes em x e y do vetor força de amortecimento $\mathbf{f}_{d_i}^n$, $f_{d_{x_i}}^n$ e $f_{d_{y_i}}^n$, com base nas componentes correspondentes das forças internas e externas e no sentido das velocidades nodais.

Então, somam-se as forças internas e externas com as forças de amortecimento e obtém-se as forças nodais totais $\mathbf{f}_i^n$. Após isso, impõem-se as condições de contorno essenciais, zerando-se as forças e momentos lineares nodais nos nós onde o deslocamento for nulo. Assim, atualizam-se na sequência os momentos lineares nodais, calculando-se $\boldsymbol{p}_i^{n+1}$ por integração temporal explícita. Dessa forma, calculam-se as velocidades nodais atualizadas $\mathbf{v}_i^{n+1}$, permitindo que o mapeamento de informações de volta aos subdomínios Ω_p^n seja iniciado.

O mapeamento de volta aos subdomínios é feito pela atualização das posições dos vértices $\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^{n+1}$ e das velocidades $\mathbf{v}_g^{n+1}$ e gradientes de velocidades dos pontos de Gauss $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_g}^{n+1}$. Em seguida, calculam-se os tensores taxa de deformação dessas partículas superconvergentes $\mathbf{D}_g^{n+1}$ e, posteriormente, atualizam-se seus tensores gradiente de deformações $\mathbf{F}_g^{n+1}$. Tanto $\mathbf{D}_g^{n+1}$ quanto $\mathbf{F}_g^{n+1}$ são então aplicados no cálculo das derivadas no tempo $\dot{\mathbf{E}}_g^{n+1}$ dos tensores de deformação de Green-Lagrange, ainda no formato 2×2. As componentes fora do plano das derivadas no tempo dos tensores de deformações finitas nos pontos de Gauss $(\dot{\mathbf{E}}_g^{n+1})_{zZ}$ são determinadas de acordo com o tipo de análise de estado plano - de tensões (EPT) ou de deformações (EPD).

Logo após o cálculo de $(\dot{\mathbf{E}}_g^{n+1})_{zZ}$, remontam-se os tensores de variação no tempo das deformações finitas no formato 3×3 $(\dot{\mathbf{E}}_g^{n+1})_{3\times3}$, utilizados na atualização das deformações finitas $(\mathbf{E}_g^{n+1})_{3\times3}$. Com as componentes fora do plano das deforma-

ções finitas atualizadas $(\dot{E}_g^{n+1})_{zZ}$, determinam-se as componentes fora do plano dos tensores taxa de deformações e gradiente de velocidades, $(D_g^{n+1})_{zz} = (\mathcal{L}_{x_g}^{n+1})_{zz}$, o que também permite escrever os tensores no formato 3×3 $(\mathbf{D}_g^{n+1})_{3\times3}$ e $(\boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_g}^{n+1})_{3\times3}$ e a consequente obtenção dos gradientes de deformação tridimensionais $(\mathbf{F}_g^{n+1})_{3\times3}$ por integração temporal explícita.

Dessa forma, continua-se o processo com o cálculo das derivadas temporais dos segundos tensores de tensões de Piola-Kirchhoff $\dot{\mathbf{S}}_g^{n+1}$ e com a posterior atualização dos tensores de tensões correspondentes $\mathbf{S}_g^{n+1}$ por integração explícita no tempo. Logo, por meio de uma relação regida pelos gradientes de deformações atualizados $(\mathbf{F}_g^{n+1})_{3\times3}$, calculam-se os tensores de tensões de Cauchy atualizados dos pontos superconvergentes $(\boldsymbol{\sigma}_g^{n+1})$ a partir dos tensores $\mathbf{S}_g^{n+1}$. Finalmente, atualizam-se as densidades de massa ρ_g^{n+1} e as espessuras $l_{z_g}^{n+1}$ dos pontos de Gauss e incrementa-se o passo de tempo fazendo-se $n = n + 1$, voltando-se à verificação do tempo total de análise. Se o tempo de análise for atingido, encerra-se o processo e, caso contrário, percorre-se novamente o laço computacional que determina um passo de tempo do método, conforme a figura 15.

4.2 MPM SPSI ESTENDIDO COM DANO ISOTRÓPICO NA TRAÇÃO E FRATURA

Como já ressaltado, os processos do MPM SPSI abordados em 4.1 aplicam-se a materiais elásticos lineares, homogêneos e isotrópicos. Entretanto, para se mostrar a aplicabilidade do MPM SPSI a materiais com comportamento não linear, acopla-se ao algoritmo um modelo de dano na tração, permitindo-se inclusive a separação de subdomínios no caso de apresentarem pontos totalmente danificados.

Sendo assim, o modelo de dano isotrópico na tração com amolecimento linear, mostrado por Cervera e Chiumenti (2006), utilizado por Homel e Herbold (2016) e já descrito em 2.3.1, é incorporado ao MPM SPSI, mais especificamente aos pontos superconvergentes dos subdomínios. Esses valores de dano são usados para avaliar a ruptura dos pontos de Gauss e, com isso, permitem o particionamento dos subdomínios em diferentes campos de velocidades e a consequente separação física, caracterizando uma fratura explícita.

Tendo em vista essa separação, forças de contato entre os subdomínios são calculadas pelo modelo de contato elástico de Hertz entre cilindros de eixos paralelos (WANG; ZHU, 2013). Essas forças de contato são interpoladas para os nós (aqueles com separação) e somadas às forças externas para a atualização das velocidades dos nós e, consequentemente, para a atualização das variáveis armazenadas nos pontos superconvergentes, conforme descrito nas próximas seções secundárias.

4.2.1 Dano nos pontos de Gauss

Seguindo-se o modelo de dano escalar isotrópico na tração de Rankine, descrito por Cervera e Chiumenti (2006) e já mostrado em 2.3.1, o dano em um ponto superconvergente g no passo de tempo $n+1$ é dado por

$$\mathscr{D}_g^{n+1} = \max \begin{Bmatrix} 1 - \dfrac{(\sigma_{\lim})_g^{n+1}}{(\sigma_I^{\text{undam}})_g^{n+1}} \\ \mathscr{D}_g^n \\ 0 \end{Bmatrix} \leq 1, \tag{4.62}$$

sendo que $(\sigma_I^{\text{undam}})_g^{n+1}$ é a máxima tensão principal no ponto de gauss g desconsiderando-se a danificação e

$$(\sigma_{\lim})_g^{n+1} = \sigma_f - (H_s)_g \left[(\sigma_I^{\text{undam}})_g^{n+1} - \sigma_f\right] \tag{4.63}$$

é a tensão limite no passo de tempo $n+1$, levando em conta o amolecimento linear e a máxima tensão de tração σ_f suportada pelo material. O fator de fragilidade do subdomínio Ω_p é calculado pela equação

$$H_{s_p} = \frac{\overline{H}_s l_p}{1 - \overline{H}_s l_p}, \tag{2.234 revisitada}$$

com o fator de fragilidade do material dado por

$$\overline{H}_s = \frac{\sigma_f^2}{2\mathrm{E}G_f}, \tag{2.235 revisitada}$$

onde G_f é a energia de fratura do material por unidade de área no modo I de fratura (de abertura ou trativo). Já o comprimento característico do subdomínio Ω_p é determinado pela expressão

$$l_p = \sqrt{A_p^{n=0}}, \tag{2.236 revisitada}$$

sendo $A_p^{n=0}$ a área indeformada de Ω_p.

4.2.2 Correção do tensor de tensões de Cauchy nos pontos de Gauss pelo dano

A correção das tensões de tração pelo dano escalar, realizada conforme 2.3.1, começa pela redução das tensões principais de tração no ponto g pela equação

$$(\sigma_R^{\text{dam}})_g^{n+1} = \begin{cases} \left(1 - \mathscr{D}_g^{n+1}\right)(\sigma_R^{\text{undam}})_g^{n+1} : (\sigma_R^{\text{undam}})_g^{n+1} > 0 \\ (\sigma_R^{\text{undam}})_g^{n+1} : (\sigma_R^{\text{undam}})_g^{n+1} \leq 0 \end{cases}, \tag{4.64}$$

com $R = I, II, III$ sendo os índices das tensões principais do tensor $\boldsymbol{\sigma}_g^{\mathrm{undam},n+1}$. Após a aplicação da equação (4.64), forma-se o tensor de tensões de Cauchy danificado

$$(\boldsymbol{\sigma}_g^{\mathrm{dam},n+1})_{3\times 3} = \sum_{R=I}^{III} (\sigma_R^{\mathrm{dam}})_g^{n+1} \boldsymbol{n}_{R_g}^{n+1} \otimes \boldsymbol{n}_{R_g}^{n+1} \tag{4.65}$$

pela representação espectral, sendo $\boldsymbol{n}_{R_g}^{n+1}$ os vetores unitários que formam as direções principais (autovetores) de $\boldsymbol{\sigma}_g^{\mathrm{undam},n+1}$ e $\otimes$ o produto diádico entre dois vetores.

4.2.3 Cálculo das tensões e direções principais dos tensores de Cauchy

Determinam-se as tensões e direções principais de um tensor $\boldsymbol{\sigma}_g^{\mathrm{undam},n+1}$ resolvendo-se um problema de autovalores e autovetores. As tensões máximas e mínimas $(\sigma_I)_g^{n+1}$ e $(\sigma_{II})_g^{n+1}$ resultam da solução da equação polinomial característica

$$\sigma^2 - \mathcal{I}_1 \sigma + \mathcal{I}_2 = 0, \tag{4.66}$$

sendo

$$\mathcal{I}_1 = (\sigma_{xx})_g^{\mathrm{undam},n+1} + (\sigma_{yy})_g^{\mathrm{undam},n+1} \tag{4.67}$$

e

$$\mathcal{I}_2 = (\sigma_{xx})_g^{\mathrm{undam},n+1} (\sigma_{yy})_g^{\mathrm{undam},n+1} - [(\sigma_{xy})_g^{\mathrm{undam},n+1}]^2 \tag{4.68}$$

os invariantes de tensão do tensor de Cauchy no plano xy.

Após calculadas as tensões principais $(\sigma_I)_g^{n+1}$ e $(\sigma_{II})_g^{n+1}$, calculam-se os autovetores correspondentes

$$\boldsymbol{n}_{I_g}^{n+1} = \begin{bmatrix} (n_x)_{I_g}^{n+1} & (n_y)_{I_g}^{n+1} \end{bmatrix}^T \tag{4.69}$$

e

$$\boldsymbol{n}_{III_g}^{n+1} = \begin{bmatrix} (n_x)_{III_g}^{n+1} & (n_y)_{III_g}^{n+1} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -(n_y)_{I_g}^{n+1} & (n_x)_{I_g}^{n+1} \end{bmatrix}^T. \tag{4.70}$$

O componente $(n_x)_{I_g}^{n+1}$ é determinado aplicando-se a equação

$$(\mathcal{n}_x)_{I_g}^{n+1} = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{(\sigma_{yy})_g^{\mathrm{undam},n+1} - (\sigma_I)_g^{n+1}}{(\sigma_{xx})_g^{\mathrm{undam},n+1} + (\sigma_{yy})_g^{\mathrm{undam},n+1} - 2(\sigma_I)_g^{n+1}}} : \begin{cases} (\sigma_{xx})_g^{\mathrm{undam},n+1} \neq (\sigma_I)_g^{n+1} \\ \text{e} \\ (\sigma_{yy})_g^{\mathrm{undam},n+1} \neq (\sigma_I)_g^{n+1} \end{cases} \\ 1 : (\sigma_{xx})_g^{\mathrm{undam},n+1} = (\sigma_I)_g^{n+1} \\ 0 : (\sigma_{yy})_g^{\mathrm{undam},n+1} = (\sigma_I)_g^{n+1} \end{cases}, \tag{4.71}$$

enquanto o componente $(\mathcal{n}_y)_{I_g}^{n+1}$ resulta da equação

$$(\mathcal{n}_y)_{I_g}^{n+1} = \begin{cases} \dfrac{-(\sigma_{xx})_g^{\mathrm{undam},n+1} + (\sigma_I)_g^{n+1}}{(\sigma_{xy})_g^{\mathrm{undam},n+1}} (\mathcal{n}_x)_{I_g}^{n+1} : \begin{cases} (\sigma_{xx})_g^{\mathrm{undam},n+1} \neq (\sigma_I)_g^{n+1} \\ \text{e} \\ (\sigma_{yy})_g^{\mathrm{undam},n+1} \neq (\sigma_I)_g^{n+1} \end{cases} \\ 0 : (\sigma_{xx})_g^{\mathrm{undam},n+1} = (\sigma_I)_g^{n+1} \\ 1 : (\sigma_{yy})_g^{\mathrm{undam},n+1} = (\sigma_I)_g^{n+1} \end{cases}. \tag{4.72}$$

4.2.4 Ruptura e particionamento dos subdomínios

O algoritmo de consideração da ruptura e de particionamento dos subdomínios em diferentes campos de velocidades segue o esquema da figura 16, exemplificada para o caso de 4 pontos superconvergentes por subdomínio. Na configuração indeformada, assume-se que todos os subdomínios pertencem a um mesmo campo de velocidades $\psi_i = 1$ em um nó i. Então, no decorrer da análise, sempre que ambos os pontos de Gauss ligados por uma conexão externa (azul) atingem dano $\mathcal{D}_g^n = 1$, considera-se essa ligação como rompida (em vermelho).

Tendo como referencial um nó i da malha Euleriana para o qual contribuem vários pontos de Gauss e conexões rompidos, faz-se necessário definir uma conexão rompida predominante. Tal predomínio é definido pela equação

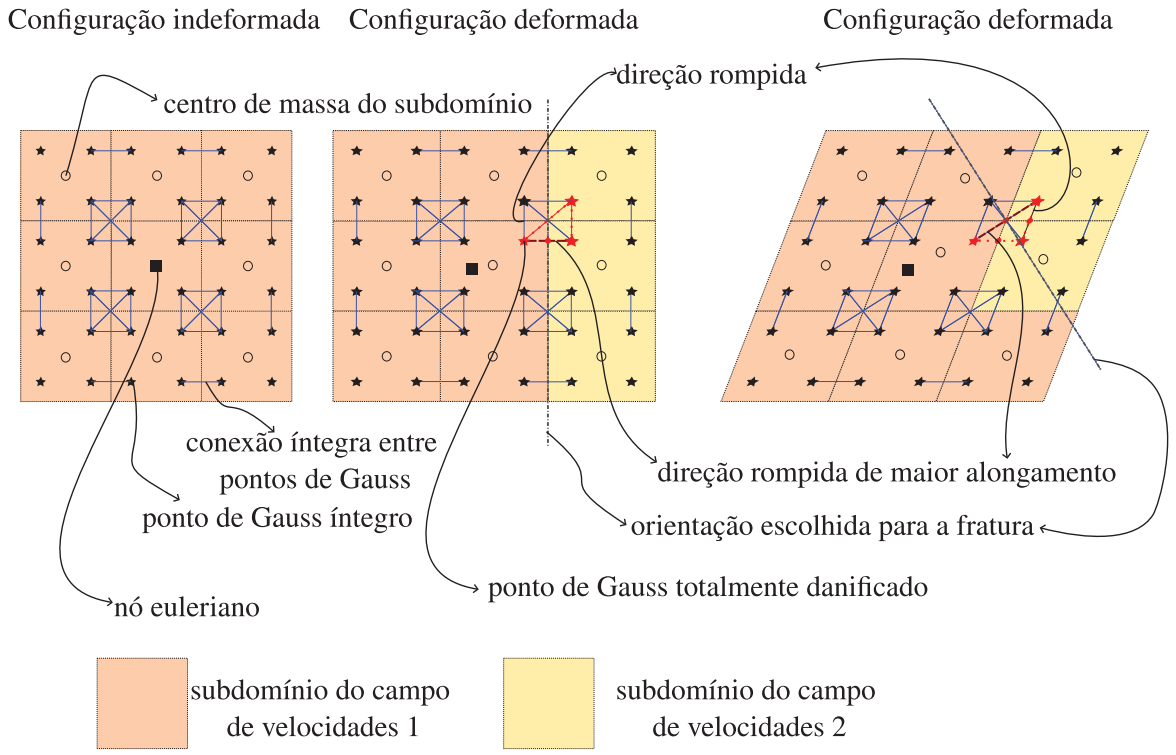
$$\mathbf{d}_i^n = \mathbf{d}_c^n : a_c^n = \max_c(a_c^n), \tag{4.73}$$

ou seja, o vetor que indica a direção rompida em relação ao nó i, $\mathbf{d}_i^n$, é o vetor que representa a conexão c, $\mathbf{d}_c^n$, de forma que o alongamento a_c^n medido em relação ao nó i seja máximo. O vetor $\mathbf{d}_c^n$ é calculado pela equação

$$\mathbf{d}_c^n = \mathbf{x}_{g_A}^n - \mathbf{x}_{g_B}^n, \tag{4.74}$$

onde $\mathbf{x}_{g_A}^n$ e $\mathbf{x}_{g_B}^n$ são, respectivamente, as posições dos pontos superconvergentes inicial e final da conexão c. Nesse caso, o alongamento da conexão c relativo à configuração indeformada é dado por

FIGURA 16 – CONSIDERAÇÃO DE RUPTURA ENTRE OS PONTOS SUPERCONVERGENTES.



FONTE: O autor (2022).

$$a_c^n = \frac{\|\mathbf{d}_c^n\| - \|\mathbf{d}_c^0\|}{\|\mathbf{d}_c^0\|}. \tag{4.75}$$

A posição do ponto médio da conexão rompida definida para o nó i também é calculada de forma que

$$\mathbf{x}_i^{\mathrm{rup},n} = \mathbf{x}_c^{\mathrm{rup},n} : a_c^n = \max_c(a_c^n), \tag{4.76}$$

com

$$\mathbf{x}_c^{\mathrm{rup},n} = \frac{\mathbf{x}_{g_A}^n + \mathbf{x}_{g_B}^n}{2} \tag{4.77}$$

sendo a posição do ponto médio da conexão c.

Então, com a direção de fratura em um nó $\mathbf{d}_i^n$ e seu respectivo ponto médio $\mathbf{x}_i^{\mathrm{rup},n}$ determinados, dividem-se os subdomínios contribuintes do nó i conforme a equação

$$\psi_{ip}^n = \begin{cases} 1 : \left(\mathbf{x}_p^n - \mathbf{x}_i^{\mathrm{rup},n}\right) \cdot \mathbf{d}_i^n > 0 \\ 2 : \left(\mathbf{x}_p^n - \mathbf{x}_i^{\mathrm{rup},n}\right) \cdot \mathbf{d}_i^n \leq 0 \end{cases}, \tag{4.78}$$

onde ψ_{ip}^n é o campo de velocidade ao qual pertence o subdomínio Ω_p (relativamente ao nó i) e

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p^n &= \frac{\int_{\Omega_p} \rho(\mathbf{x})\mathbf{x}dV}{m_p} \\ &= \frac{\sum_g \rho_g^n \mathbf{x}_g^n l_{z_g}^n \det(\mathbf{J}_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}^n(\xi_g,\eta_g))w_g}{m_p} \end{aligned} \tag{4.79}$$

é a posição do centro de massa do subdomínio Ω_p^n.

4.2.5 Forças de contato

A partir do momento em que existem pontos superconvergentes e conexões rompidos, a interpolação das variáveis da malha Lagrangiana para campos de velocidade separados na malha Euleriana pode fazer com que um processo não físico de interpenetração entre os subdomínios seja iniciado. Nessa situação, forças de contato, que agem contrariamente à interpenetração, devem ser calculadas. Dois tipos de forças de contato são computadas:

a) forças agindo na direção que liga os centros de massa de 2 subdomínios interpenetrados Ω_p^n e Ω_q^n, evitando interpenetrações de maior magnitude;

b) forças agindo na direção que liga dois pontos de Gauss de subdomínios diferentes, evitando interpenetrações locais nas regiões próximas aos vértices dos subdomínios.

Ambos os tipos de forças de contato utilizam a teoria de Hertz para o contato de cilindros de eixos paralelos (WANG; ZHU, 2013) na determinação da magnitude da força normal. Dessa forma, todos os procedimentos para a idealização da seção transversal circular dos cilindros de contato e para a determinação matemática das forças são descritos em 4.2.5.1 e 4.2.5.2.

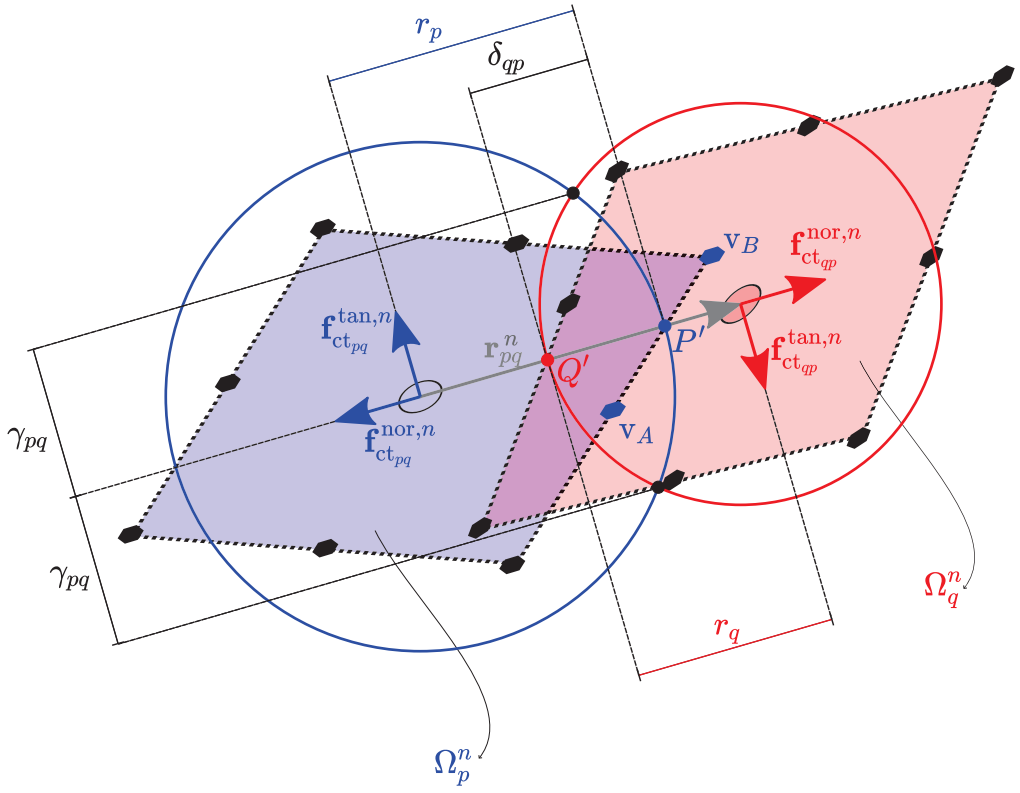
4.2.5.1 Forças de contato na direção que liga os centros de massa de dois subdomínios

Para determinar a força $\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^n$, correspondente à ação do subdomínio Ω_q^n sobre o subdomínio Ω_p^n da figura 17, primeiramente calculam-se as componentes do vetor

$$\mathbf{r}_{pq}^n = -\mathbf{r}_{qp}^n = \mathbf{x}_q^n - \mathbf{x}_p^n \tag{4.80}$$

sendo $\mathbf{x}_p^n$ e $\mathbf{x}_q^n$ as coordenadas dos centros de massa de Ω_p^n e Ω_q^n. Em seguida, calculam-se os vetores unitários normais

FIGURA 17 – CÁLCULO DAS FORÇAS DE CONTATO ENTRE SUBDOMÍNIOS.



FONTE: O autor (2022).

$$\mathbf{n}^n_{pq} = -\mathbf{n}^n_{qp} = \frac{\mathbf{r}^n_{pq}}{\|\mathbf{r}^n_{pq}\|} \tag{4.81}$$

e tangenciais

$$\mathbf{s}^n_{pq} = -\mathbf{s}^n_{qp} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{n}^n_{pq} \tag{4.82}$$

do contato entre Ω^n_p e Ω^n_q. Assim, com base em conceitos de geometria plana, determinam-se as coordenadas $\mathbf{x}^n_{P'}$ - do ponto de intersecção P' entre o vetor $\mathbf{r}^n_{pq}$ e uma das arestas de Ω^n_p - e $\mathbf{x}^n_{Q'}$ - do ponto de intersecção Q' entre o vetor $\mathbf{r}^n_{qp} = -\mathbf{r}^n_{pq}$ e uma das arestas de Ω^n_q. Tais valores permitem o cálculo dos raios dos círculos azul,

$$r^n_p = \|\mathbf{x}^n_{P'} - \mathbf{x}^n_p\|, \tag{4.83}$$

e vermelho,

$$r^n_q = \|\mathbf{x}^n_{Q'} - \mathbf{x}^n_q\|, \tag{4.84}$$

da figura 17. Dessa forma, a interpenetração entre Ω_p^n e Ω_q^n é calculada como

$$\delta_{pq}^n = \delta_{qp}^n = \max \left\{ \begin{array}{c} r_p^n + r_q^n - \|\mathbf{r}_{pq}^n\| \\ 0 \end{array} \right. , \tag{4.85}$$

ou seja, como a distância entre P' e Q' quando há intersecção entre os círculos azul e vermelho da figura 17. O comprimento da corda de intersecção entre Ω_p^n e Ω_q^n vale $2\gamma_{pq}^n = 2\gamma_{qp}^n$, sendo que

$$\gamma_{pq}^n = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{(r_p^n)^2 - \frac{1}{4}\left\{ \frac{(r_p^n)^2 - (r_q^n)^2}{\|\mathbf{r}_{pq}^n\|} + \|\mathbf{r}_{pq}^n\| \right\}^2} : \delta_{pq}^n > 0 \\ 0 : \delta_{pq}^n = 0 \end{array} \right. \tag{4.86}$$

é a dimensão aplicada na formulação de contato elástico de Hertz entre dois cilindros de eixos paralelos para o cálculo da magnitude da força normal de contato

$$\|\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^{\mathrm{nor},n}\| = \frac{(\gamma_{pq}^n)^2 \pi (l_z)_{pq}^n \mathrm{E}_{pq}}{4 r_{pq}^n}. \tag{4.87}$$

Em (4.87),

$$(l_z)_{pq}^n = \frac{1}{2}\left(\frac{V_p^n}{A_p^n} + \frac{V_q^n}{A_q^n} \right) \tag{4.88}$$

é a espessura média do contato,

$$\mathrm{E}_{pq} = \left(\frac{1-\nu_p^2}{\mathrm{E}_p} + \frac{1-\nu_q^2}{\mathrm{E}_q} \right)^{-1} \tag{4.89}$$

é o módulo de elasticidade combinado do contato e

$$\mathrm{r}_{pq}^n = \left(\frac{1}{\mathrm{r}_p^n} + \frac{1}{\mathrm{r}_q^n} \right)^{-1} \tag{4.90}$$

é o raio combinado do contato.

Então, a força normal vetorial aplicada por Ω_q^n em Ω_p^n será igual a

$$\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^{\mathrm{nor},n} = -\|\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^{\mathrm{nor},n}\| \mathbf{n}_{pq}^n. \tag{4.91}$$

Se houver atrito entre Ω_p^n e Ω_q^n, o modelo de Coulomb é utilizado para determinar a magnitude da força tangencial

$$\|\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^{\tan,n}\| = \begin{cases} \mu_{pq}^{\mathrm{static}}\|\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^{\mathrm{nor},n}\| : \jmath_{pq}^{\mathrm{slip},n} = 0 \\ \mu_{pq}^{\mathrm{kinetic}}\|\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^{\mathrm{nor},n}\| : \jmath_{pq}^{\mathrm{slip},n} = 1 \end{cases}, \tag{4.92}$$

onde $\mu_{pq}^{\mathrm{static}}$ e $\mu_{pq}^{\mathrm{kinetic}}$ são, respectivamente, os coeficientes de atrito estático e cinético entre Ω_p^n e Ω_q^n. Já $\jmath_{pq}^{\mathrm{slip},n}$ é uma variável que indica a existência ($\jmath_{pq}^{\mathrm{slip},n} = 1$) ou não ($\jmath_{pq}^{\mathrm{slip},n} = 0$) de deslizamento relativo entre Ω_p^n e Ω_q^n e seu valor é determinado pela equação

$$\jmath_{pq}^{\mathrm{slip},n} = \begin{cases} 0 : \left(\mathbf{v}_p^n \cdot \mathbf{s}_{pq}^n + \mathbf{v}_q^n \cdot \mathbf{s}_{qp}^n\right) = 0 \\ 1 : \left(\mathbf{v}_p^n \cdot \mathbf{s}_{pq}^n + \mathbf{v}_q^n \cdot \mathbf{s}_{qp}^n\right) \neq 0 \end{cases}, \tag{4.93}$$

onde $\mathbf{v}_p^n$ e $\mathbf{v}_q^n$ são as respectivas velocidades médias de Ω_p^n e Ω_q^n. Assim, a força tangencial de atrito vetorial exercida por Ω_q^n em Ω_p^n é calculada pela equação

$$\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^{\tan,n} = -\|\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^{\tan,n}\| \frac{\left(\mathbf{v}_p^n - \mathbf{v}_{pq}^n\right) \cdot \mathbf{s}_{pq}^n}{\left|\left(\mathbf{v}_p^n - \mathbf{v}_{pq}^n\right) \cdot \mathbf{s}_{pq}^n\right|} \mathbf{s}_{pq}^n, \tag{4.94}$$

sendo

$$\mathbf{v}_{pq}^n = \frac{m_p \mathbf{v}_p^n + m_q \mathbf{v}_q^n}{m_p + m_q} \tag{4.95}$$

a velocidade média do par de contato. Dessa forma, a força de contato total exercida por Ω_q^n sobre Ω_p^n é definida como

$$\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^n = \mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^{\mathrm{nor},n} + \mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^{\tan,n} \tag{4.96}$$

, aplicada no ponto P'. Da mesma forma, a força de contato exercida por Ω_p^n sobre Ω_q^n $\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{qp}}^n = -\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^n$ é aplicada no ponto Q'.

Entretanto, de forma a facilitar a interpolação para os nós, $\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^n$ é dividida, de forma linear, entre os vértices v_A e v_B, que formam a aresta à qual pertence P', conforme as equações

$$\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq\mathrm{v}_A}}^n = \frac{\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{v}_B}^n - \mathrm{x}_{P'}^n\right\|}{\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{v}_B}^n - \mathrm{x}_{\mathrm{v}_A}^n\right\|} \mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^n \tag{4.97}$$

e

$$\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq\mathrm{v}_B}}^n = \frac{\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{v}_A}^n - \mathrm{x}_{P'}^n\right\|}{\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{v}_B}^n - \mathrm{x}_{\mathrm{v}_A}^n\right\|} \mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^n. \tag{4.98}$$

O mesmo procedimento é feito, de forma análoga, para distribuir $\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{qp}}^n$ entre os vértices da aresta de Ω_q da qual o ponto Q' faz parte. Sendo assim, a força de contato

$\mathbf{f}_{\mathrm{ct_v}}^{\mathrm{cm},n}$, aplicada sobre um vértice v de um subdomínio Ω_p^n e originada do contato nas direções que ligam os centros de massa, é igual à soma de todas as forças de contato exercidas por todos os subdomínios Ω_q^n vizinhos a Ω_p^n, ou seja,

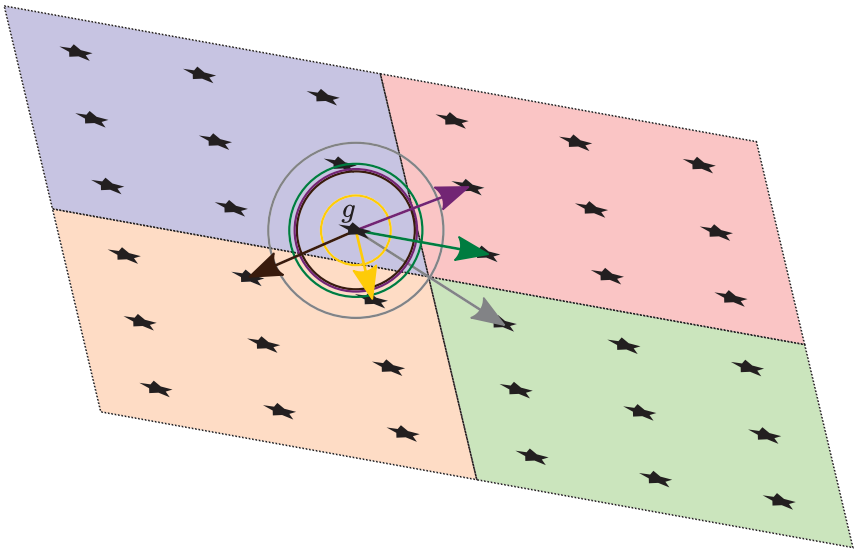
$$\mathbf{f}_{\mathrm{ct_v}}^{\mathrm{cm},n} = \sum_q \mathrm{f}_{\mathrm{ct}_{pq_\mathrm{v}}}^n. \tag{4.99}$$

4.2.5.2 Forças de contato entre pontos de Gauss de subdomínios diferentes

Embora as forças de contato calculadas em 4.2.5.1 sejam suficientes para combater a maior parte da interpenetração entre os subdomínios, ainda há a necessidade de mitigar algumas sobreposições de caráter localizado, nas regiões próximas aos vértices. Uma alternativa encontrada para essa finalidade é o cálculo de forças de contato entre pontos superconvergentes de subdomínios diferentes, também com base na teoria de contato elástico de Hertz entre dois cilindros de eixos paralelos.

Na figura 18, ilustram-se, para o caso de 9 pontos de Gauss por subdomínio, os possíveis contatos de um ponto superconvergente g com pontos de Gauss próximos. As diferentes cores indicam diferentes contatos, sendo todos eles avaliados e, se houver interpenetração detectada, forças de contato são computadas. Conforme indicado, apenas contatos entre pontos de Gauss de subdomínios diferentes são avaliados.

FIGURA 18 – POSSÍVEIS CONTATOS ENTRE UM PONTO DE GAUSS E OUTROS PONTOS SUPERCONVERGENTES PRÓXIMOS DE OUTROS SUBDOMÍNIOS.



FONTE: O autor (2022).

Além disso, outra restrição é imposta: apenas contatos feitos por meio de

arestas adjacentes aos pontos de Gauss são considerados. Tais arestas adjacentes são definidas na tabela 2 para 4 pontos superconvergentes e na tabela 3 para 9 pontos de Gauss. Nessas tabelas, a numeração dos vértices segue o esquema já apresentado na figura 12 e as partículas superconvergentes são numerados na sequência das equações (4.18) e (4.20).

TABELA 2 – ARESTAS DE CONTATO DOS PONTOS DE GAUSS PARA 4 PONTOS SUPERCONVERGENTES

g	arestas de contato (vértice inicial$\rightarrow$vértice final)
1	$8 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 5$
2	$5 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 6$
3	$7 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 8$
4	$6 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 7$

FONTE: O autor (2022).

TABELA 3 – ARESTAS DE CONTATO DOS PONTOS DE GAUSS PARA 9 PONTOS SUPERCONVERGENTES

g	arestas de contato (vértice inicial$\rightarrow$vértice final)
1	$8 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 5$
2	$1 \rightarrow 5$, $5 \rightarrow 2$
3	$5 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 6$
4	$4 \rightarrow 8$, $8 \rightarrow 1$
5	nenhuma aresta de contato
6	$2 \rightarrow 6$, $6 \rightarrow 3$
7	$7 \rightarrow 4$, $4 \rightarrow 8$
8	$3 \rightarrow 7$, $7 \rightarrow 4$
9	$6 \rightarrow 3$, $3 \rightarrow 7$

FONTE: O autor (2022).

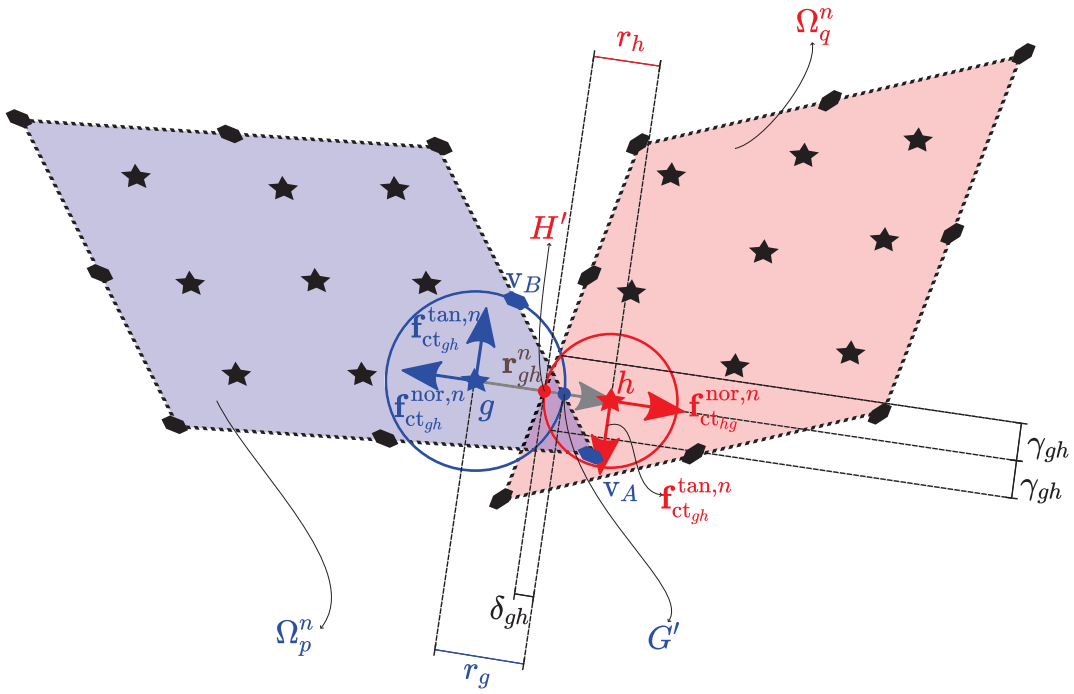
Tendo em vista as premissas colocadas, apresenta-se, na figura 19, o esquema de cálculo da força de contato exercida por um ponto de Gauss h, do subdomínio Ω_q^n, no ponto superconvergente g, do subdomínio Ω_p^n. Analogamente ao que é feito em 4.2.5.1, inicia-se o processo determinando-se o vetor que liga os pontos g e h

$$\mathbf{r}_{gh}^n = \mathbf{x}_g^n - \mathbf{x}_h^n, \tag{4.100}$$

representado na cor cinza na figura 19. Dessa maneira, calculam-se os vetores normais

$$\mathbf{n}_{gh}^n = -\mathbf{n}_{hg}^n = \frac{\mathbf{r}_{gh}^n}{\|\mathbf{r}_{gh}^n\|} \tag{4.101}$$

FIGURA 19 – CÁLCULO DAS FORÇAS DE CONTATO ENTRE PONTOS DE GAUSS DE SUBDOMÍNIOS DIFERENTES.



FONTE: O autor (2022).

e tangenciais

$$\mathbf{s}_{gh}^n = -\mathbf{s}_{hg}^n = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{n}_{gh}^n \tag{4.102}$$

de contato entre g e h. O vetor $\mathbf{r}_{gh}^n$ também permite o cálculo, por geometria plana, das coordenadas dos pontos G' e H', $\mathbf{x}_{G'}^n$ e $\mathbf{x}_{H'}^n$. Nesse caso, o ponto G' é o ponto de intersecção entre a reta representada por $\mathbf{r}_{gh}^n$ e uma das arestas de Ω_p^n e o ponto H' é o ponto de intersecção entre a reta representada por $\mathbf{r}_{gh}^n$ e uma das arestas de Ω_q^n. Com tais coordenadas, calculam-se os raios dos círculos azul,

$$r_g^n = \left\| \mathbf{x}_{G'}^n - \mathbf{x}_g^n \right\|, \tag{4.103}$$

e vermelho,

$$r_q^n = \left\| \mathbf{x}_{H'}^n - \mathbf{x}_h^n \right\|, \tag{4.104}$$

da figura 19. Então, o valor da interpenetração medida entre g e h valerá

$$\delta_{gh}^n = \delta_{hg}^n = \max \left\{ \begin{array}{c} r_g^n + r_q^n - \|\mathbf{r}_{gh}^n\| \\ 0 \end{array} \right. . \tag{4.105}$$

Já a dimensão $\gamma_{gh}^n = \gamma_{hg}^n$, correspondente à metade do comprimento da corda de intersecção entre os círculos azul e vermelho, é calculada pela equação

$$\gamma_{gh}^n = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{(r_g^n)^2 - \frac{1}{4}\left\{ \frac{(r_g^n)^2 - (r_h^n)^2}{\|\mathbf{r}_{gh}^n\|} + \|\mathbf{r}_{gh}^n\| \right\}^2} : \delta_{gh}^n > 0 \\ 0 : \delta_{gh}^n = 0 \end{array} \right. \tag{4.106}$$

e, consequentemente, a magnitude da força normal de contato entre g e h é dada por

$$\|\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{gh}}^{\mathrm{nor},n}\| = \frac{(\gamma_{gh}^n)^2 \pi l_{z_{gh}}^n \mathrm{E}_{pq}}{4 r_{gh}^n}, \tag{4.107}$$

sendo

$$l_{z_{gh}}^n = \frac{l_{z_g}^n + l_{z_h}^n}{2} \tag{4.108}$$

a espessura média do contato r E_{pq} o módulo de elasticidade combinado dos subdomínios Ω_p^n e Ω_q^n, já mostrado na equação (4.89). O raio combinado dos círculos azul e vermelho da figura 19 vale

$$r_{gh}^n = \left(\frac{1}{r_g^n} + \frac{1}{r_h^n} \right)^{-1}. \tag{4.109}$$

Assim, o vetor correspondente à força normal de contato entre g e h será igual a

$$\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{gh}}^{\mathrm{nor},n} = -\|\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{gh}}^{\mathrm{nor},n}\| \mathbf{n}_{gh}^n \tag{4.110}$$

e, mediante a existência de atrito, a magnitude da força tangencial valerá

$$\|\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{gh}}^{\tan,n}\| = \left\{ \begin{array}{l} \mu_{pq}^{\mathrm{static}} \|\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{gh}}^{\mathrm{nor},n}\| : \mathcal{s}_{gh}^{\mathrm{slip},n} = 0 \\ \mu_{pq}^{\mathrm{kinetic}} \|\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{gh}}^{\mathrm{nor},n}\| : \mathcal{s}_{gh}^{\mathrm{slip},n} = 1 \end{array} \right. , \tag{4.111}$$

sendo a variável de deslizamento relativo entre g e h calculada como

$$\mathcal{s}_{gh}^{\mathrm{slip},n} = \left\{ \begin{array}{l} 0 : \left(\mathbf{v}_g^n \cdot \mathbf{s}_{gh}^n + \mathbf{v}_h^n \cdot \mathbf{s}_{hg}^n \right) = 0 \\ 1 : \left(\mathbf{v}_g^n \cdot \mathbf{s}_{gh}^n + \mathbf{v}_h^n \cdot \mathbf{s}_{hg}^n \right) \neq 0 \end{array} \right. . \tag{4.112}$$

Vetorialmente, a força tangencial de contato por atrito é determinada de acordo com

$$\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{gh}}^{\mathrm{tan},n} = -\|\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{gh}}^{\mathrm{tan},n}\| \frac{\left(\mathbf{v}_{g}^{n} - \mathbf{v}_{gh}^{n}\right) \cdot \mathbf{s}_{gh}^{n}}{\left|\left(\mathbf{v}_{g}^{n} - \mathbf{v}_{gh}^{n}\right) \cdot \mathbf{s}_{gh}^{n}\right|} \mathbf{s}_{gh}^{n}, \tag{4.113}$$

onde

$$\mathbf{v}_{gh}^{n} = \frac{\mathbf{v}_{g}^{n} + \mathbf{v}_{h}^{n}}{2} \tag{4.114}$$

é a velocidade média do contato. Com as parcelas normal e tangencial devidamente calculadas, têm-se que a força total de contato exercida pelo ponto superconvergente h sobre o ponto de Gauss g da figura 19 é igual à soma

$$\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{gh}}^{n} = \mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{gh}}^{\mathrm{nor},n} + \mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{gh}}^{\mathrm{tan},n}. \tag{4.115}$$

Na distribuição de $\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{gh}}^{n}$ para os vértices de Ω_{p}^{n}, também utiliza-se o critério da distância do ponto G' até os vértices inicial e final da aresta de Ω_{p}^{n} interceptada por $\mathbf{r}_{gh}^{n}$ (v_A e v_B). Essa distribuição proporcional é feita conforme

$$\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{gh\mathrm{v}_A}}^{n} = \frac{\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{v}_B}^{n} - \mathrm{x}_{G'}^{n}\right\|}{\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{v}_B}^{n} - \mathrm{x}_{\mathrm{v}_A}^{n}\right\|} \mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{gh}}^{n} \tag{4.116}$$

$$\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{gh\mathrm{v}_B}}^{n} = \frac{\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{v}_A}^{n} - \mathrm{x}_{G'}^{n}\right\|}{\left\|\mathrm{x}_{\mathrm{v}_B}^{n} - \mathrm{x}_{\mathrm{v}_A}^{n}\right\|} \mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{gh}}^{n}. \tag{4.117}$$

Portanto, a força de contato, oriunda do contato entre pontos de Gauss, acumulada em um vértice v, pertencente a um subdomínio Ω_{p}^{n}, é igual a

$$\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{\mathrm{v}}}^{\mathrm{gauss},n} = \sum_{g} \sum_{h} \mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{gh\mathrm{v}}}^{n}, \tag{4.118}$$

tendo seu efeito acumulado com as forças de contato calculadas em 4.2.5.1 - equação (4.99) - para que se tenha a força total de contato no vértice v

$$\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{\mathrm{v}}}^{n} = \mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{\mathrm{v}}}^{\mathrm{cm},n} + \mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{\mathrm{v}}}^{\mathrm{gauss},n}. \tag{4.119}$$

4.2.6 Variáveis nodais considerando 2 campos de velocidades

Nos nós onde houver apenas um campo de velocidades, a interpolação das variáveis provenientes dos subdomínios é realizada de modo unificada, conforme 4.1.1.

Já para os nós em que dois campos de velocidade $\psi = 1, 2$ forem identificados, as informações são mapeadas de forma separada. Nesses casos, as massas nodais dos campos são dadas por

$$m^n_{\psi i} = \sum_{p_\psi} \phi^{\mathrm{SPSI},n}_{ip} m_p, \tag{4.120}$$

onde p_ψ é o índice do subdomínio p pertencente ao campo ψ em relação ao nó i. Os momentos lineares nodais, por sua vez, são interpolados pela equação

$$\boldsymbol{p}^n_{\psi i} = \sum_{p_\psi} \sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}^n_{\mathrm{v}}) \sum_g Q_{\mathrm{v}}(\xi_g, \eta_g) \rho^n(\xi_g, \eta_g) \mathbf{v}^n(\xi_g, \eta_g) l^n_z(\xi_g, \eta_g) \det(\mathbf{J}^n_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}(\xi_g, \eta_g)) w_g \tag{4.121}$$

e as forças internas conforme a equação

$$\mathbf{f}^n_{\sigma_{\psi i}} = \sum_{p_\psi} \sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}^n_{\mathrm{v}}) \sum_g \boldsymbol{\sigma}^n(\xi_g, \eta_g) \left[\mathbf{J}^n_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}(\xi_g, \eta_g)\right]^{-T} \frac{\partial Q_{\mathrm{v}}(\xi_g, \eta_g)}{\partial \boldsymbol{\xi}} l^n_z(\xi_g, \eta_g) \det(\mathbf{J}^n_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}(\xi_g, \eta_g)) w_g. \tag{4.122}$$

As forças externas, nessa situação, dividem-se em três categorias: as forças externas de corpo

$$\mathbf{f}^n_{b_{\psi i}} = \sum_{p_\psi} \sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}^n_{\mathrm{v}}) \sum_g \rho^n(\xi_g, \eta_g) Q_{\mathrm{v}}(\xi_g, \eta_g) \mathbf{b}^n(\xi_g, \eta_g) l^n_z(\xi_g, \eta_g) \det(\mathbf{J}^n_{\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}}(\xi_g, \eta_g)) w_g, \tag{4.123}$$

as forças externas de superfície

$$\mathbf{f}^n_{t_{\psi i}} = \sum_{p_\psi} \sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}^n_{\mathrm{v}}) \mathbf{f}^n_{\mathrm{v}} \tag{4.124}$$

e as forças de contato entre subdomínios

$$\mathbf{f}^n_{\mathrm{ct}_{\psi i}} = \sum_{p_\psi} \sum_{\mathrm{v}} N_i(\mathbf{x}^n_{\mathrm{v}}) \mathbf{f}^n_{\mathrm{ct}_{\mathrm{v}}}, \tag{4.125}$$

interpoladas desde os vértices. Na hipótese de consideração do amortecimento local não viscoso, também calculam-se as componentes em x e y das forças nodais de amortecimento

$$f^n_{d_{x_{\psi i}}} = -\alpha |f^n_{b_{x_{\psi i}}} + f^n_{t_{x_{\psi i}}} - f^n_{\sigma_{x_{\psi i}}} + f^n_{\mathrm{ct}_{x_{\psi i}}}| \frac{(v_x)^n_{\psi i}}{|(v_x)^n_{\psi i}|} \tag{4.126}$$

e

$$f^n_{d_{y_{\psi i}}} = -\alpha|f^n_{b_{y_{\psi i}}} + f^n_{t_{y_{\psi i}}} - f^n_{\sigma_{y_{\psi i}}} + f^n_{\mathrm{ct}_{x_{\psi i}}}|\frac{(v_y)^n_{\psi i}}{|(v_y)^n_{\psi i}|}, \tag{4.127}$$

que formam os vetores

$$\mathbf{f}^n_{d_{\psi i}} = \begin{bmatrix} f^n_{d_{x_{\psi i}}} & f^n_{d_{y_{\psi i}}} \end{bmatrix}^T. \tag{4.128}$$

Então, a força nodal dos nós com dois campos de velocidades, interpolada separadamente para cada campo, é determinada pela equação

$$\mathbf{f}^n_{\psi i} = \mathbf{f}^n_{b_{\psi i}} + \mathbf{f}^n_{t_{\psi i}} - \mathbf{f}^n_{\sigma_{\psi i}} + \mathbf{f}^n_{\mathrm{ct}_{\psi i}} + \mathbf{f}^n_{d_{\psi i}}. \tag{4.129}$$

Quanto à atualização das velocidades nodais em nós com dois campos de velocidades, isso é feito de forma idêntica ao procedimento padrão para nós com um campo único, já mostrado em 4.1.3.

4.2.7 Atualização dos subdomínios por nós com 2 campos de velocidades

Um subdomínio qualquer Ω_p da malha Lagrangiana é atualizado tanto por nós com um único campo de velocidades quanto por nós com campos de velocidades separados. Assim, assumindo-se que i é um índice representativo dos nós com apenas um campo e que j representa o índice de um nó com dois campos $\iota = 1, 2$, o incremento de velocidades em um ponto de Gauss g de Ω^n_p é calculado pela expressão

$$\Delta\mathbf{v}^{n+1}_g = \sum_i N^{\mathrm{SPSI}}_i(\mathbf{x}^n_g)\left(\mathbf{v}^{n+1}_i - \mathbf{v}^n_i\right) + \sum_j \sum_{\iota=1}^{2} f(\psi_{jp}, \iota) N^{\mathrm{SPSI}}_j(\mathbf{x}^n_g)\left(\mathbf{v}^{n+1}_{\iota j} - \mathbf{v}^n_{\iota j}\right) \tag{4.130}$$

sendo

$$f(\psi_{jp}, \iota) = \begin{cases} 0 : \psi_{jp} = \iota \\ 1 : \psi_{jp} \neq \iota \end{cases} \tag{4.131}$$

uma função que serve para se considerar, no ponto g de Ω^n_p, apenas a contribuição do campo $\iota = \psi_{jp}$ do nó j, ou seja, do campo de velocidades do qual Ω^n_p faz parte em relação ao nó j.

Em procedimento similar, calculam-se os incrementos de posição dos vértices v de Ω^n_p pela equação

$$\Delta \mathbf{x}_{\mathrm{v}}^{n+1} = \Delta t^{n+1} \left[\sum_i N_i(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^n) \mathbf{v}_i^{n+1} + \sum_j \sum_{\iota=1}^{2} f(\psi_{jp}, \iota) N_j(\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^n) \mathbf{v}_{\iota j}^{n+1} \right] \tag{4.132}$$

e os gradientes de velocidade dos pontos de Gauss g de Ω_p^n de acordo com a equação

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_g}^{n+1} = \sum_i \mathbf{v}_i^{n+1} \left[\frac{\partial N_i^{\mathrm{SPSI}}(\mathbf{x}_g^n)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T + \sum_j \sum_{\iota=1}^{2} f(\psi_{jp}, \iota) \mathbf{v}_{\iota j}^{n+1} \left[\frac{\partial N_j^{\mathrm{SPSI}}(\mathbf{x}_g^n)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T . \tag{4.133}$$

Após a atualização das posições dos vértices e das velocidades e gradientes de velocidades dos pontos de Gauss, executa-se a sequência já demonstrada em 4.1.4 para a atualização das demais variáveis de estado dos pontos de Gauss.

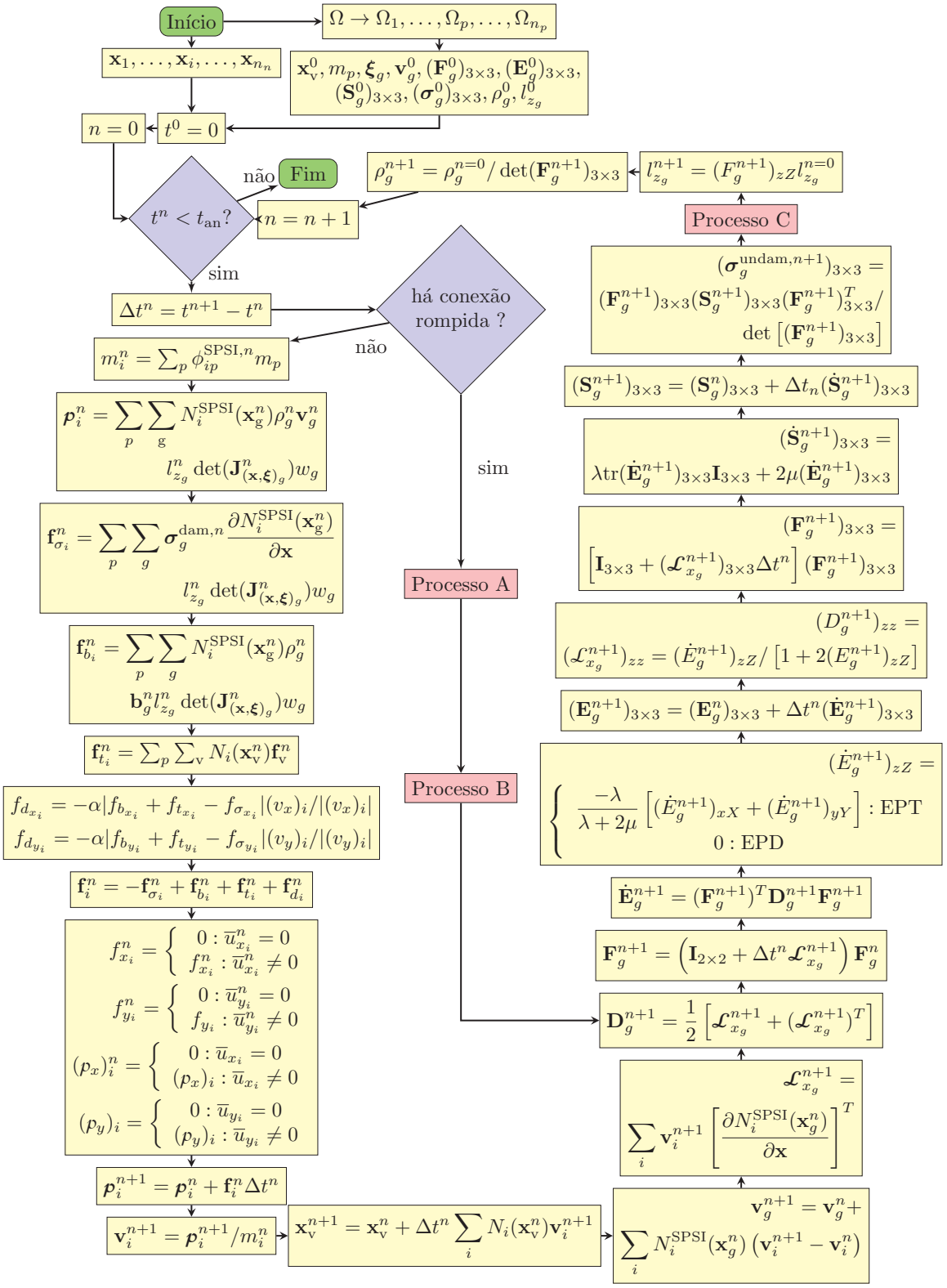
4.2.8 Fluxograma geral do MPM SPSI estendido com dano isotrópico na tração e fratura

Com a adição do modelo de dano, do particionamento dos subdomínios em diferentes campos de velocidades e das forças de contato entre subdomínios, o fluxograma geral do MPM SPSI da figura 15 é transformado no fluxograma da figura 20. Percebe-se, nessa figura, que a verificação de conexões rompidas entre os pontos superconvergentes, bem como os processos A, B e C, são acrescentados ao esquema relatado em 4.1 para contemplar todo o conteúdo descrito em 4.2. Outra modificação notada na figura 20 é o cálculo das forças internas nodais $\mathbf{f}_{\sigma_i}^n$ utilizando-se o tensor de tensões de Cauchy danificado, mesmo se ainda não houver ruptura entre pontos de Gauss.

O processo A, que começa logo após a identificação de conexões rompidas entre pontos superconvergentes, contempla os procedimentos descritos em 4.2.4 e 4.2.5 e tem seu fluxograma mostrado na figura 21. Nesse processo, parte-se da premissa que as conexões rompidas, ou seja, conexões que ligam dois pontos de Gauss com dano $\mathcal{D}_g^n = 1$ e que são identificadas pelo índice c, já foram determinadas em t^n. Então, a etapa subsequente é o cálculo dos vetores $\mathbf{d}_c^n$, que unem os pontos superconvergentes iniciais e finais das conexões c, assim como dos vetores posição dos pontos médios das conexões c, $\mathbf{x}_c^{\mathrm{rup},n}$. Também são calculadas as posições dos centros de massa dos subdomínios Ω_p^n, $\mathbf{x}_p^n$.

Então, calculam-se os alongamentos a_c^n das conexões rompidas, que servem de parâmetro para a determinação das direções de fratura nodais $\mathbf{d}_i^n$. Tais direções serão os vetores $\mathbf{d}_c^n$ tal que o alongamento a_c^n seja máximo entre as conexões que contribuem para o nó i. Da mesma forma, o ponto médio da fratura do nó i, $\mathbf{x}_i^{\mathrm{rup},n}$, será o ponto médio da conexão c com alongamento máximo. Conhecidas as posições dos

FIGURA 20 – FLUXOGRAMA GERAL DO SPSI ESTENDIDO COM DANO ISOTRÓPICO NA TRAÇÃO E FRATURA.



FONTE: O autor (2022).

centros de massa dos subdomínios e dos pontos médios de fratura nos nós, dividem-se

os subdomínios em dois campos de velocidades $\psi_{ip}^n = 1, 2$, a depender da posição em que se encontram relativamente à fratura.

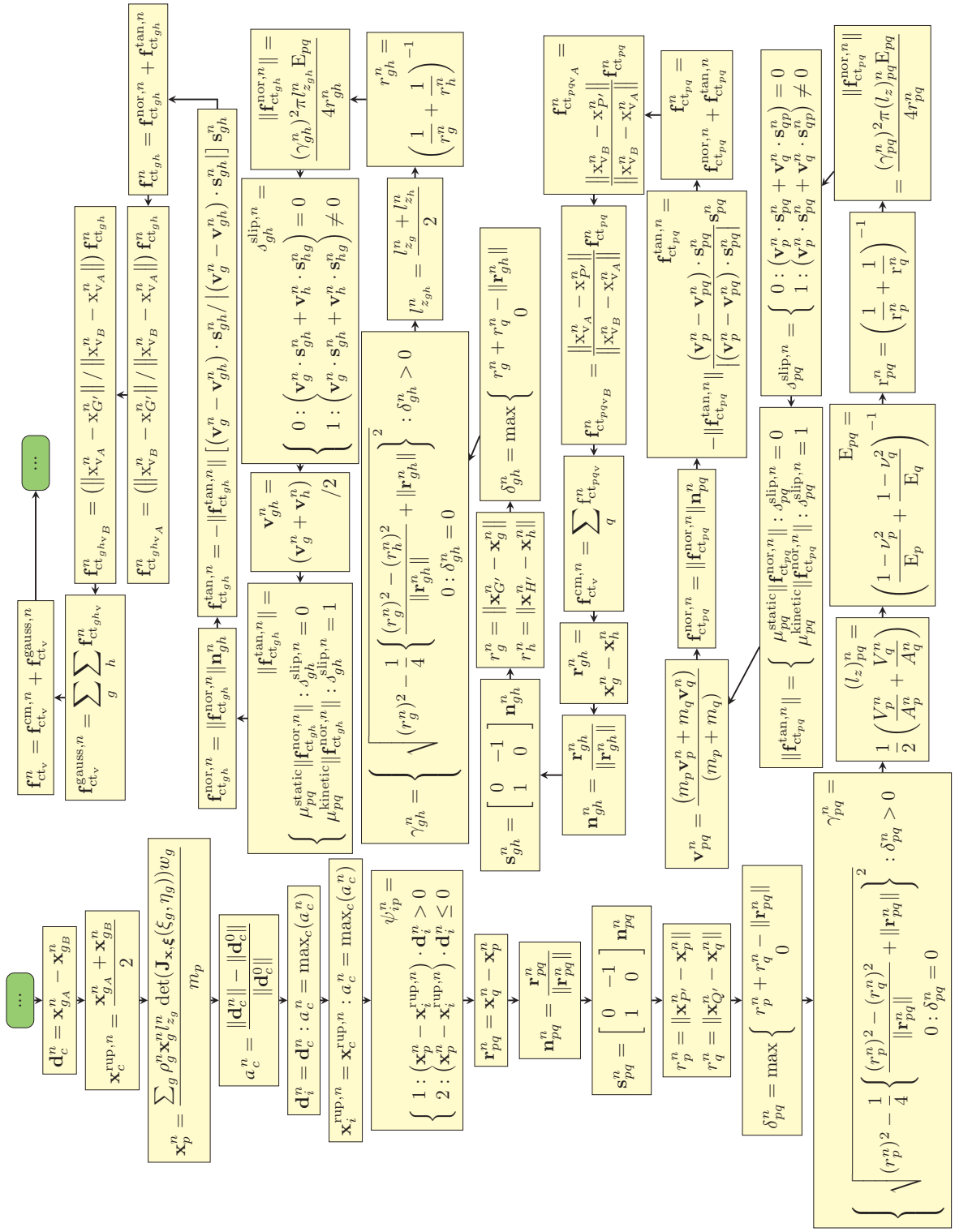
Finalizado o particionamento, inicia-se o cálculo das forças de contato entre subdomínios, mostrado em 4.2.5.1. Todos os subdomínios são avaliados par a par e o fluxograma da figura 21 exemplifica o cálculo da força de contato exercida por um subdomínio Ω_q^n em um subdomínio Ω_p^n. Sendo assim, primeiramente calcula-se o vetor que une os centros de massa dos subdomínios, $\mathbf{r}_{pq}^n$ e de seu vetor unitário correspondente $\mathbf{n}_{pq}^n$, o qual é o vetor normal de contato. Rotacionando-se $\mathbf{n}_{pq}^n$ em noventa graus, têm-se o vetor tangente de contato $\mathbf{s}_{pq}^n$. Na sequência, calculam-se os raios dos cilindros de contato r_p^n e r_q^n, com base nas posições dos pontos de intersecção P' e Q' entre a reta que liga os centros de massa de Ω_p^n e Ω_q^n com as arestas desses subdomínios.

O valor da interpenetração entre Ω_p^n e Ω_q^n, δ_{pq}^n ,é, então, determinado com base diferença entre as somas dos raios dos cilindros de contato e a distância entre os centros de massa. Se não houver sobreposição, então a interpenetração será nula e não existirão forças de contato. Caso contrário, determina-se o valor de γ_{pq}^n, correspondente à metade da corda de intersecção entre os cilindros de contato, assim como a espessura média de contato $(l_z^n)_{pq}$, o módulo de elasticidade combinado E_{pq} e o raio combinado r_{pq}^n, os quais são substituídos na equação de cálculo da magnitude da força normal de contato $\|\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^{\mathrm{nor},n}\|$.

No cálculo da magnitude força tangencial de contato por atrito $\|\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^{\mathrm{tan},n}\|$, verifica-se se há deslizamento relativo pelo fator $\jmath_{pq}^{\mathrm{slip},n}$ e, a depender desse valor, aplica-se o coeficiente de atrito estático ou cinético. A força normal de contato vetorial $\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^{\mathrm{nor},n}$ é calculada multiplicando-se a magnitude pelo vetor oposto ao vetor normal de contato. Já a força tangencial vetorial $\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^{\mathrm{tan},n}$ agirá no sentido contrário ao movimento relativo entre Ω_p^n e Ω_q^n. Desse modo, a força de contato total $\mathbf{f}_{\mathrm{ct}_{pq}}^n$ será a soma das parcelas normal e tangencial. Tais forças são distribuídas para os vértices inicial e final da aresta interceptada pela reta que liga os centros de massa dos subdomínios. Após o cálculo de todas as forças de contato entre subdomínios, a força de contato em um vértice v de um subdomínio Ω_p^n, $\mathbf{f}_{\mathrm{ct_v}}^{\mathrm{cm},n}$, será a soma total das parcelas distribuídas para esse vértice.

Similarmente ao que se faz no contato entre subdomínios, os pontos superconvergentes externos de um subdomínio Ω_p^n também têm seu contato avaliado em relação aos pontos de Gauss externos dos subdomínios Ω_q^n vizinhos, de acordo com as condições colocadas em 4.2.5.2. O resultado desse procedimento engloba as forças de contato nos vértices devidas à interação entre partículas superconvergentes, $\mathbf{f}_{\mathrm{ct_v}}^{\mathrm{gauss},n}$. Finalmente, somam-se as forças $\mathbf{f}_{\mathrm{ct_v}}^{\mathrm{cm},n}$ e $\mathbf{f}_{\mathrm{ct_v}}^{\mathrm{gauss},n}$ distribuídas aos vértices para que se tenham as forças totais de contato nos vértices $\mathbf{f}_{\mathrm{ct_v}}^n$. Assim, o processo A é finalizado no passo de tempo n e inicia-se o processo B, ilustrado na figura 22.

FIGURA 21 – PROCESSO A: PARTICIONAMENTO DOS SUBDOMÍNIOS EM DIFERENTES CAMPOS DE VELOCIDADES E CÁLCULO DAS FORÇAS DE CONTATO ENTRE SUBDOMÍNIOS.



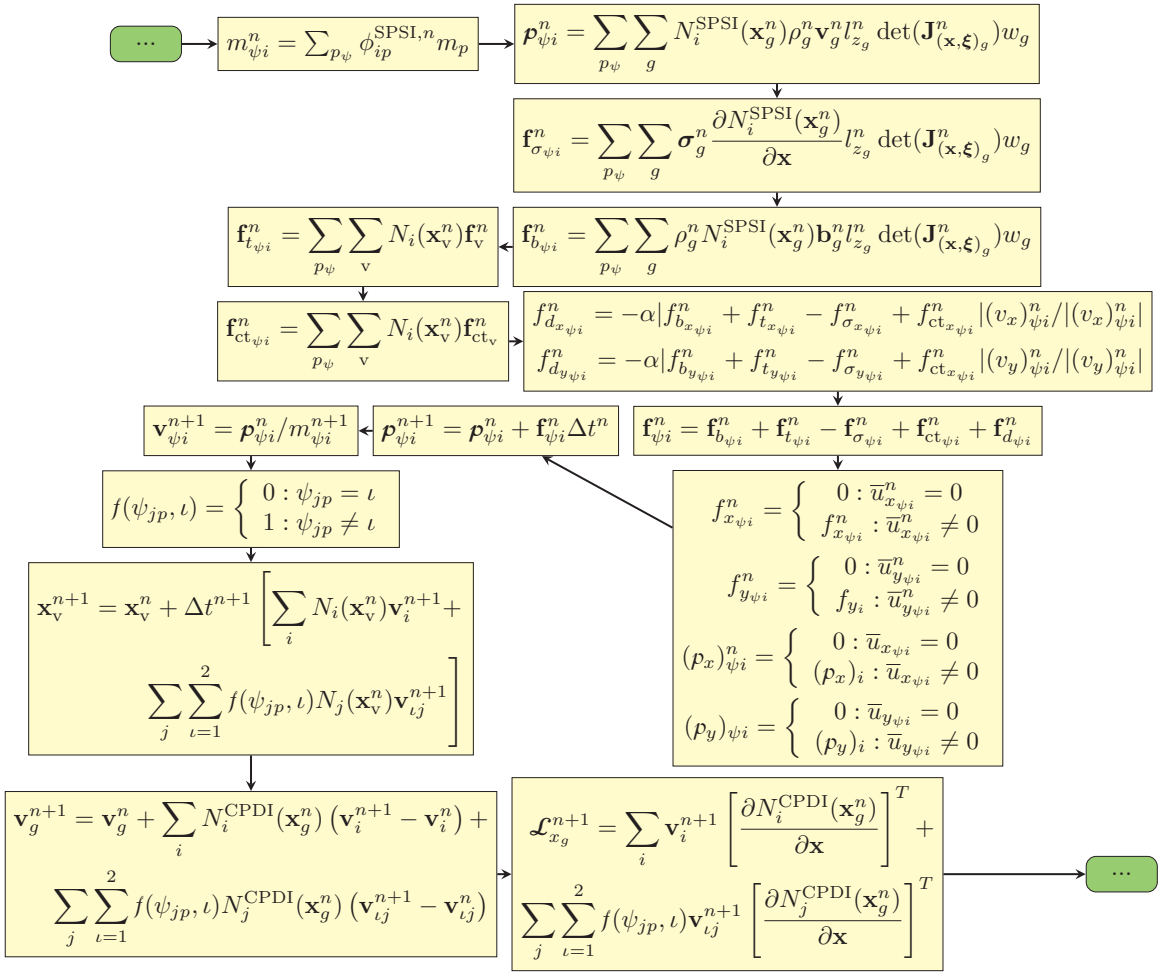
FONTE: O autor (2022).

O processo B diz respeito, nas situações em que houver mais de um campo de velocidades por nó, à interpolação das variáveis dos subdomínios para os nós,

à atualização das velocidades nodais e à reinterpolação das informações para os subdomínios. É uma sequência muito semelhante àquela mostrada na figura 15 para o MPM SPDI em que não há dano. A principal diferença, porém, está no mapeamento de informações de forma separada para cada campo $\psi = 1, 2$. Isso ocorre com as massas, momentos lineares e forças internas e externas, inclusive com as forças de contato, que agem nos vértices como as forças externas de superfície.

A atualização das velocidades também segue o esquema de integração explícita no tempo. No mapeamento de informações de volta para os subdomínios, percebe-se que a função $f(\psi_p, \iota)$ é, na verdade, um delta de Kronecker, que serve para que os vértices e pontos de Gauss de um subdomínio Ω_p^n só recebam informações do campo ψ_p ao qual Ω_p^n pertence. Como resultado final do processo B, obtém-se as posições atualizadas dos vértices e as velocidades e gradientes de velocidades dos pontos de Gauss atualizados.

FIGURA 22 – PROCESSO B: CÁLCULO DAS VARIÁVEIS NODAIS E ATUALIZAÇÃO DOS SUBDOMÍNIOS QUANDO HÁ DOIS CAMPO DE VELOCIDADES.

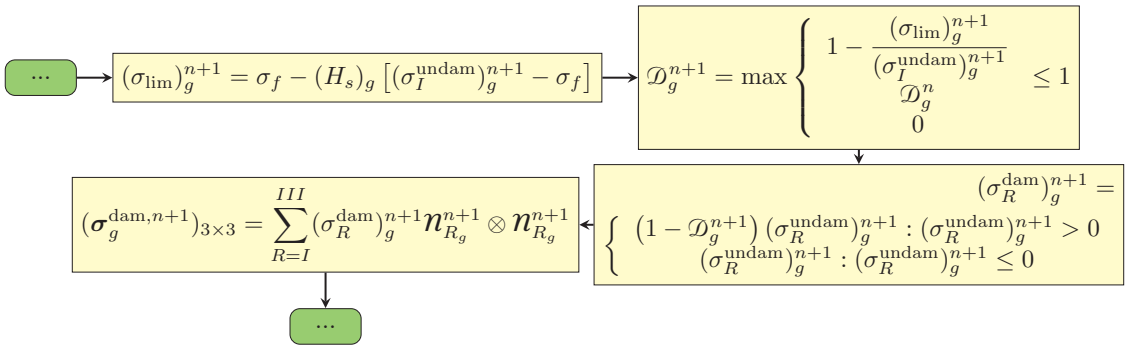


FONTE: O autor (2022).

Após a determinação de todos os valores de $\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^{n+1}$, $\mathbf{v}_g^{n+1}$ e $\boldsymbol{\mathcal{L}}_{x_g}^{n+1}$, seja pelo

processo B ou pela sequência convencional em que há apenas um campo $\psi = 1$ por nó, a atualização das tensões nos pontos de Gauss segue o processo convencional já mostrado na figura 15 e repetido na figura 20.

FIGURA 23 – PROCESSO C: CÁLCULO DO DANO E CORREÇÃO DOS TENSORES DE TENSÕES DE CAUCHY DOS PONTOS DE GAUSS.



FONTE: O autor (2022).

Ressalta-se, no entanto, que as tensões atualizadas $(\boldsymbol{\sigma}_g^{\text{undam},n+1})_{3\times3}$ são tensões de Cauchy sem a consideração do dano isotrópico na tração. Por isso, logo após o cálculo de $(\boldsymbol{\sigma}_g^{\text{undam},n+1})_{3\times3}$, insere-se o processo C na figura 20. Nessa etapa, cuja sequência de cálculos está na figura 23, calculam-se os valores de dano $\mathcal{D}_g^{n+1}$ em todos os pontos superconvergentes e aplicam-se tais valores na redução das tensões principais de tração desses pontos, conforme descrito em 4.2.1. Os tensores de Cauchy danificados $\boldsymbol{\sigma}_g^{\text{dam},n+1}$ são os tensores armazenados para o próximo passo de tempo, a serem aplicados no cálculo das forças internas nodais.

4.3 MODELOS UTILIZADOS PARA A VERIFICAÇÃO DO MPM SPSI

Antes de qualquer outra análise, escolhe-se um modelo experimental disponível na literatura que sirva como base de comparação para o MPM SPSI e para o código implementado computacionalmente. Todos os parâmetros considerados como *input* desse modelo são mostrados aqui, em 4.3.1. Já os resultados desse procedimento estão disponíveis no capítulo 5.

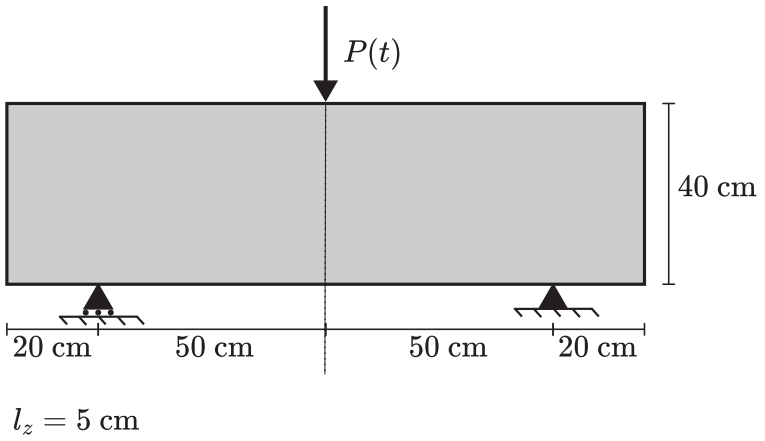
Além disso, visando-se o entendimento das principais características do MPM SPSI na avaliação mecânica de estruturas e o teste das hipóteses levantadas, utilizam-se alguns modelos como exemplos de aplicação do método. São avaliadas tanto situações que não envolvem danificação e fratura quanto as que levam em conta esse tipo de não linearidade do material. Os casos analisado também variam quanto ao tipo de análise plana (de tensões ou deformações), tipo de carregamento (forças externas ou forças de corpo) e tipo de solicitação predominante.

Sendo assim, nesta seção incluem-se também os dados de entrada aplicados aos modelos analisados, cujos resultados serão apresentados no capítulo em 6 e posteriormente discutidos no capítulo 7.

4.3.1 Modelo para análise de consistência frente a resultados experimentais

Opta-se pela comparação de resultados do MPM SPSI - obtidos com o algoritmo computacional da tese - com os de um modelo já testado experimentalmente por Grégoire et al. (2013). O esquema geral de carregamento e a geometria desse modelo encontram-se na figura 24. O teste de Grégoire et al. (2013) compreende o ensaio de flexão de três pontos de uma viga isostática biapoiada, feita de concreto simples e solicitada por um carregamento vertical aplicado no ponto médio da face superior.

FIGURA 24 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO EXPERIMENTAL.



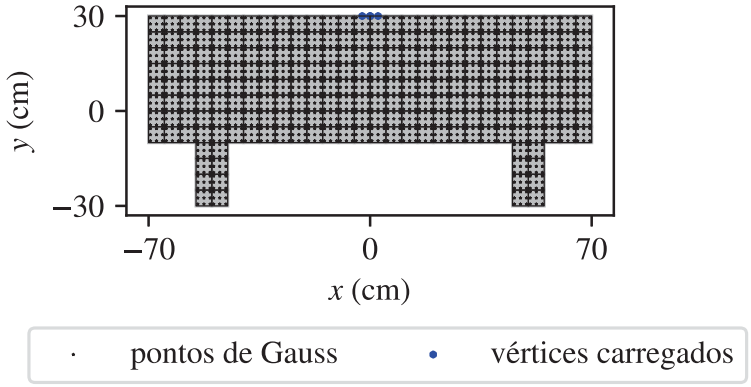
FONTE: Adaptado de Grégoire et al. (2013).

As simulações desse modelo pelo MPM SPSI utilizam a malha Lagrangiana definida na figura 25. Nela visualizam-se subdomínios de dimensão 5×5 cm discretizando a viga, com 9 pontos superconvergentes por subdomínio. Conforme indicado, a carga $P(t)$ é distribuída entre três vértices centrais da face superior da viga.

Há também a previsão de dois suportes servindo como apoio para a viga, com altura igual a 20 cm. Os subdomínios que formam tais elementos são definidos como não danificáveis, de forma a prevenir qualquer não linearidade ou falha do material ali. Esses suportes são incorporados à estrutura para permitir que a simulação computacional seja feita utilizando-se interpolação nodal com B-splines cúbicas. Isso facilita a aplicação das condições de contorno essenciais, já que as B-splines exigem que as restrições sejam impostas aos nós que estejam nos limites do domínio de análise.

A referida aplicação das condições de contorno essenciais é mostrada na figura 26, na qual os nós em verde representam aqueles em que as velocidades e acelerações

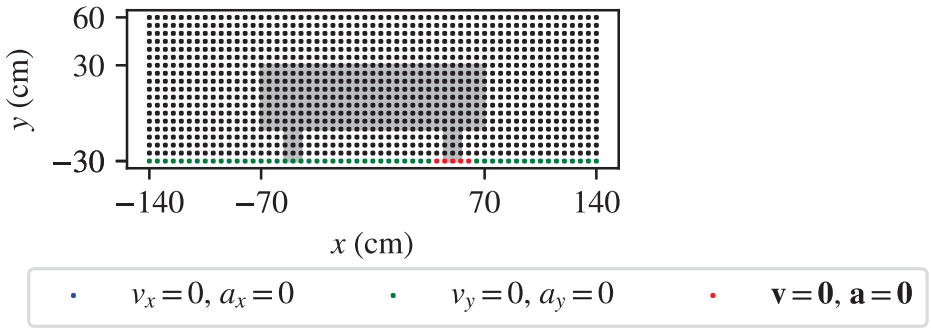
FIGURA 25 – MALHA LAGRANGIANA DO MODELO DE COMPARAÇÃO COM TESTE EXPERIMENTAL.



FONTE: O autor (2022).

são nulas na direção y. Em vermelho, constam os nós onde as direções x e y possuem restrição. A resolução da malha Euleriana é a mesma da malha Lagrangiana, com células de tamanho 5×5 cm.

FIGURA 26 – MALHA EULERIANA DO MODELO DE COMPARAÇÃO COM TESTE EXPERIMENTAL.

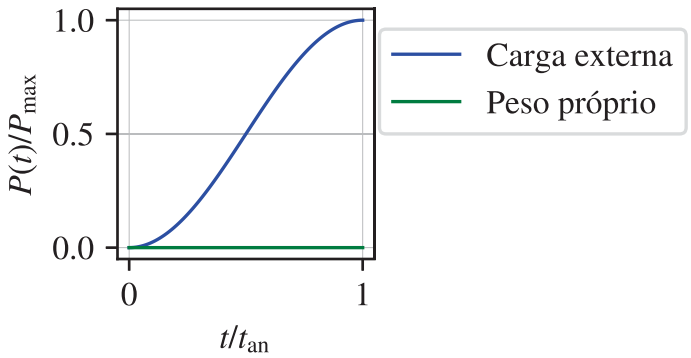


FONTE: O autor (2022).

Nos testes experimentais de Grégoire et al. (2013), evoluem-se os deslocamentos no ponto de aplicação da carga e mede-se o esforço correspondente aplicado com uma célula de carga. Para a simulação computacional com o MPM SPSI, escolhe-se evoluir o próprio carregamento externo de superfície com uma função senoidal, como ilustrado na figura 27. Com esse tipo de função, espera-se um comportamento quase estático da peça. Para correlacionar os resultados do MPM SPSI com os medidos na célula de carga de Grégoire et al. (2013), monitoram-se os valores das tensões nos pontos de Gauss da viga próximos aos suportes de apoio. Já a função de evolução das forças de corpo é mantida igual a zero em toda a análise, uma vez que os valores fornecidos pelos autores do trabalho experimental já levam em conta o peso próprio do modelo.

Os demais dados utilizados na simulação são trazidos na figura 28. Dentre

FIGURA 27 – EVOLUÇÃO DO CARREGAMENTO DO MODELO DE VALIDAÇÃO.



FONTE: O autor (2022).

outras especificações, indica-se o uso da análise de estado plano de tensões. Convém também ressaltar que o módulo de elasticidade, a tensão limite de tração, a energia de fratura e o carregamento são escalados por um fator de 10^7 em relação ao que se registra em Grégoire et al. (2013). Emprega-se esse mecanismo para reduzir a relação E/ρ^0 e, assim, os incrementos de tempo possam ser maiores, reduzindo o esforço computacional. Espera-se que, pelo fato do carregamento ser quase estático, os deslocamentos observados no modelo computacional tenham a mesma ordem de grandeza daqueles medidos experimentalmente. Logicamente, os carregamentos aplicados relatados por Grégoire et al. (2013) precisam ser multiplicados por 10^{-7} na análise dos resultados.

FIGURA 28 – DEMAIS DADOS DE ENTRADA DO MODELO DE VALIDAÇÃO.

$$\begin{gathered}
\text{análise: EPT} \\
E = 3.70e-04 \text{ kN/cm}^2 \\
\nu = 0.20 \\
\rho^0 = 2.40e-03 \text{ kg/cm}^3 \\
\sigma_{\text{lim}} = 3.50e-08 \text{ kN/cm}^2 \\
G_f = 9.00e-11 \text{ kN.cm/cm}^2 \\
P_{\max} = \{0.00e+00, -6.35e-06\} \text{ kN} \\
t_{\text{an}} = 60.00 \text{ s} \\
f_{\text{cour}} = 2.00e-03 \\
\mu^{\text{static}} = 0.40 \\
\mu^{\text{kinetic}} = 0.40
\end{gathered}$$

FONTE: O autor (2022).

O tempo máximo de análise estipulado é de 60 s, com fator de Courant igual a 2×10^{-3}. Também na figura 28, mostram-se os coeficientes de atrito considerados no cálculo das forças de contato. Tais coeficientes são adotados nesta tese, já que Grégoire et al. (2013) não disponibiliza nenhum parâmetro nesse sentido. Outro coeficiente adotado é o de amortecimento local não viscoso $\alpha = 0.1571$. Os valores assumidos são

uma média entre o que se observa em outros trabalhos da literatura.

4.3.2 Análises sem danificação e fratura

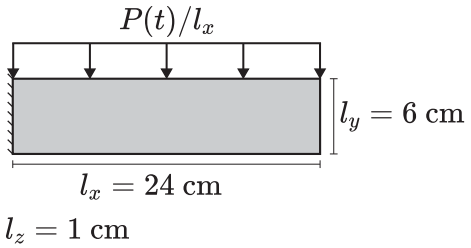
Cinco diferentes casos que não envolvem dano e fratura são processados computacionalmente pelo algoritmo implementado, conforme demonstrado nas seções terciárias a seguir.

4.3.2.1 Modelo A - viga engastada-livre sob carregamento quase estático distribuído uniformemente

A viga engastada-livre da figura 29, também analisada no trabalho de Piedade Neto (2013) utilizando-se o método de elementos finitos generalizado, é processada com o MPM SPSI. Ressalta-se, porém, que o módulo de elasticidade e o carregamento aplicados nas simulações realizadas aqui são 100 vezes menores que aqueles empregados por Piedade Neto (2013). Assim, espera-se obter deslocamentos com a mesma ordem de grandeza daqueles determinados pelo referido autor. Já as tensões esperadas são 100 vezes menores que aquelas de Piedade Neto (2013), uma vez que o carregamento equivale a 1% daquele utilizado pelo autor. Essa consideração é feita para se reduzir a demanda computacional do MPM SPSI, uma vez que o incremento máximo de tempo é inversamente proporcional a $\sqrt{\frac{\mathrm{E}(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)\rho}}$.

No modelo A, o objetivo é a verificação da distribuição de tensões na viga após a aplicação de um carregamento quase estático, distribuído uniformemente sobre a face superior da peça. Para isso, aplica-se um carregamento que evolui de zero até o valor máximo em um intervalo de 2.5 s, seguindo uma função senoidal para isso. Após $t = 2.5$ s, o carregamento é mantido com valor máximo até o final da análise, em $t = 5$ s.

FIGURA 29 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO A.



FONTE: O autor (2022).

O material que compõe a viga é elástico linear, a análise se dá segundo o estado plano de tensões (EPT) e não se utiliza o amortecimento local não viscoso ($\alpha = 0$) ou qualquer outro tipo de amortecimento. São processadas 3 diferentes combinações de tamanhos entre as malhas Lagrangiana e Euleriana, utilizando-se 4 e 9 pontos de

Gauss em cada uma delas. Variam-se também as funções de interpolação nodal $N_i(\mathbf{x})$ (lineares e B-splines cúbicas). Assim, têm-se os 12 submodelos da tabela 4, cujos dados de entrada são ilustrados nas figuras 30 a 35.

TABELA 4 – SUBMODELOS A.

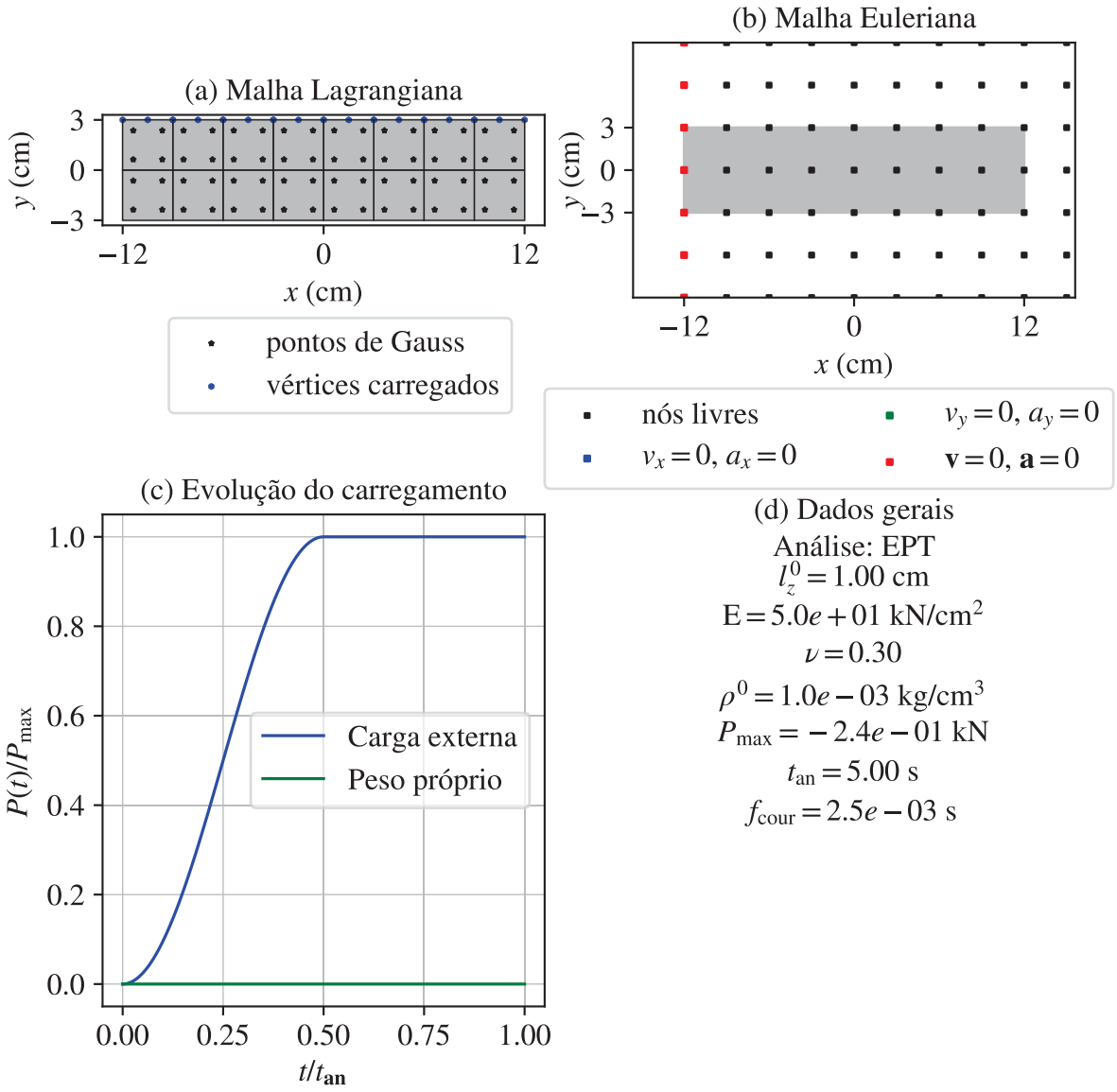
Submodelo	Malha Lagrangiana (subdomínios em x × subdomínios em y)	Malha Euleriana (células em x × células em y)	n_g	Função $N_i(\mathbf{x})$	Ilustração dos dados de entrada
A-8x2-8x2-4-L	8×2	8×2	4	$N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$	figura 30
A-8x2-8x2-4-B	8×2	8×2	4	$N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$	figura 30
A-8x2-8x2-9-L	8×2	8×2	9	$N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$	figura 31
A-8x2-8x2-9-B	8×2	8×2	9	$N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$	figura 31
A-8x2-32x8-4-L	8×2	32×8	4	$N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$	figura 32
A-8x2-32x8-4-B	8×2	32×8	4	$N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$	figura 32
A-8x2-32x8-9-L	8×2	32×8	9	$N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$	figura 33
A-8x2-32x8-9-B	8×2	32×8	9	$N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$	figura 33
A-16x4-16x4-4-L	16×4	16×4	4	$N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$	figura 34
A-16x4-16x4-4-B	16×4	16×4	4	$N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$	figura 34
A-16x4-16x4-9-L	16×4	16×4	9	$N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$	figura 35
A-16x4-16x4-9-B	16×4	16×4	9	$N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$	figura 35

FONTE: O autor (2022).

Na tabela 4, um submodelo com malha Lagrangiana 8×2 possui 8 subdomínios na direção x e 2 subdomínios na direção y. Da mesma forma, um submodelo com malha Euleriana 8×2 possui, na configuração indeformada, 8 células discretizando a viga na direção x e 2 células fazendo o mesmo na direção y. Lembra-se, no entanto, que esse é o número de células Eulerianas que estão sobre a projeção indeformada da peça. A malha Euleriana total é expandida para além da peça, de forma que hajam nós monitorando o processo de deformação ao longo de toda a análise.

Como percebe-se nas figuras 30 a 35, o carregamento é distribuído entre os vértices da face superior da viga - pontos em azul das alíneas (a) de cada figura. Nas alíneas (b) das figuras, têm-se as resoluções das malhas Eulerianas, onde os pontos em vermelho representam os nós com restrição de aceleração e velocidade tanto na direção x quanto na direção y (engaste da viga). As alíneas (c) indicam a evolução do valor do carregamento ao longo da análise, que é a mesma em todos os modelos.

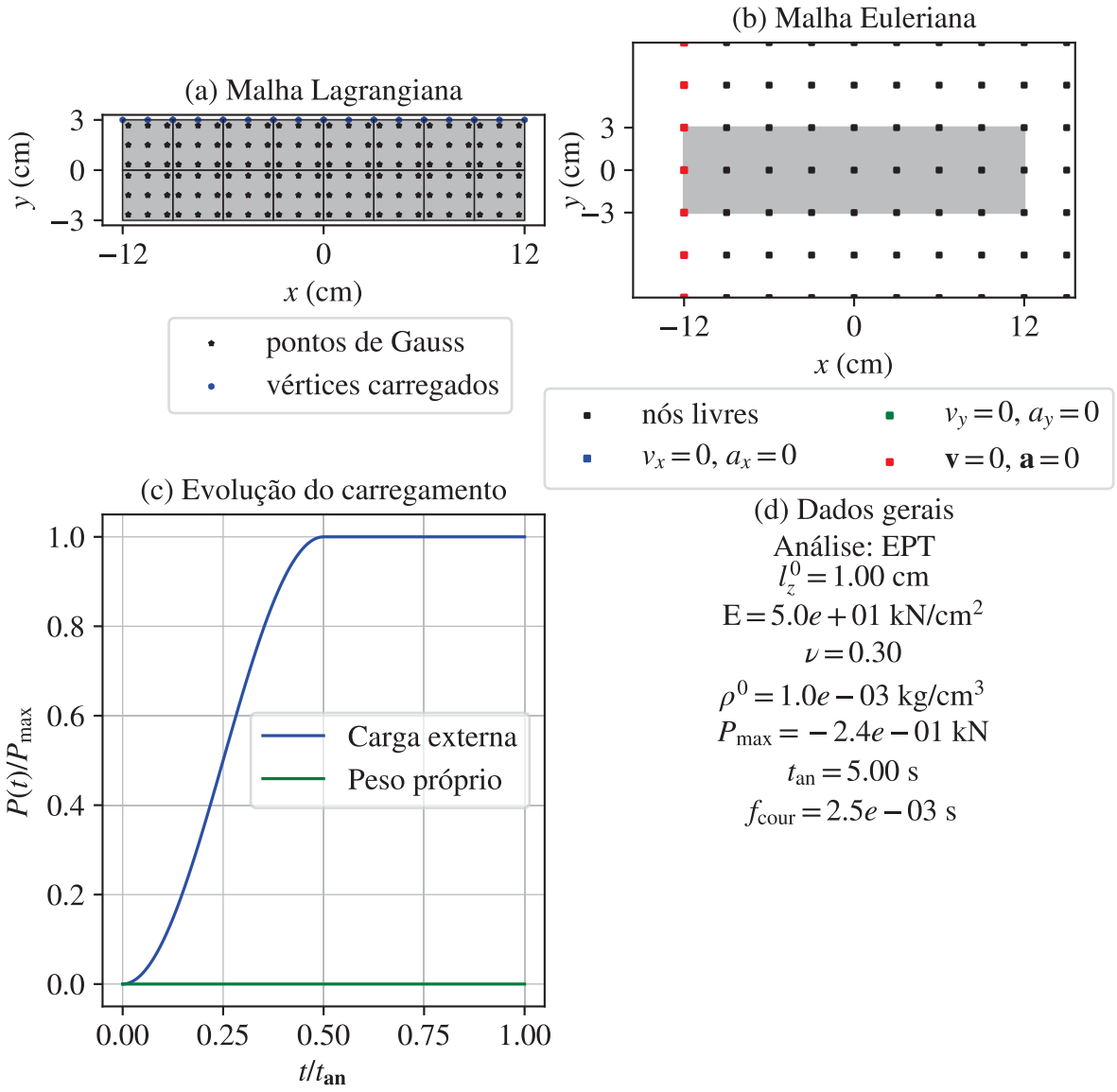
FIGURA 30 – DADOS DE ENTRADA DOS SUBMODELOS A-8X2-8X2-4.



FONTE: O autor (2022).

Mostra-se também que apenas o carregamento externo é considerado, pois não há influência do peso próprio. Os demais dados de entrada são indicados nas alíneas (d): tipo de análise plana, espessura inicial da peça, módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e densidade inicial do material, valor máximo do carregamento aplicado, tempo total de análise e fator de Courant utilizado na determinação dos incrementos de tempo.

FIGURA 31 – DADOS DE ENTRADA DOS SUBMODELOS A-8X2-8X2-9.



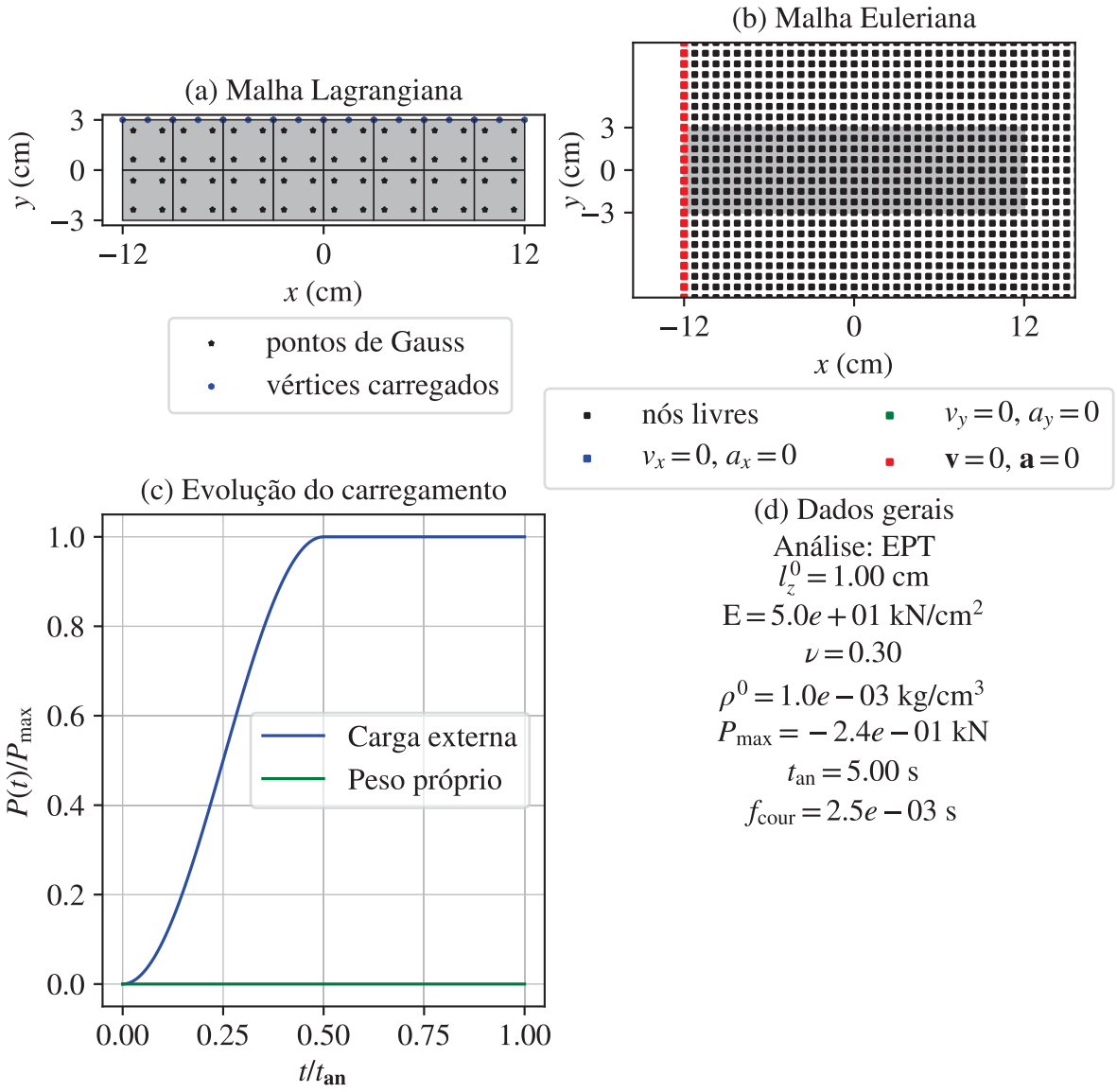
FONTE: O autor (2022).

4.3.2.2 Modelo B - barra engastada-livre sob carregamento quase estático de compressão sofrendo instabilidade

No modelo B, visa-se acompanhar, pelo MPM SPSI, o processo de perda de estabilidade de uma barra engastada-livre sob carregamento axial quase estático aplicado em sua extremidade livre, conforme a figura 36. Uma carga transversal, correspondente a uma perturbação mínima (10^4 vezes menor que a carga axial), também é aplicada na extremidade livre, de forma a direcionar o deslocamento durante a flambagem.

Mostra-se, na alínea (a) da figura 37, que uma malha Lagrangiana com 60 subdomínios na direção x e 4 subdomínios na direção y é utilizada para discretizar a

FIGURA 32 – DADOS DE ENTRADA DOS SUBMODELOS A-8X2-32X8-4.

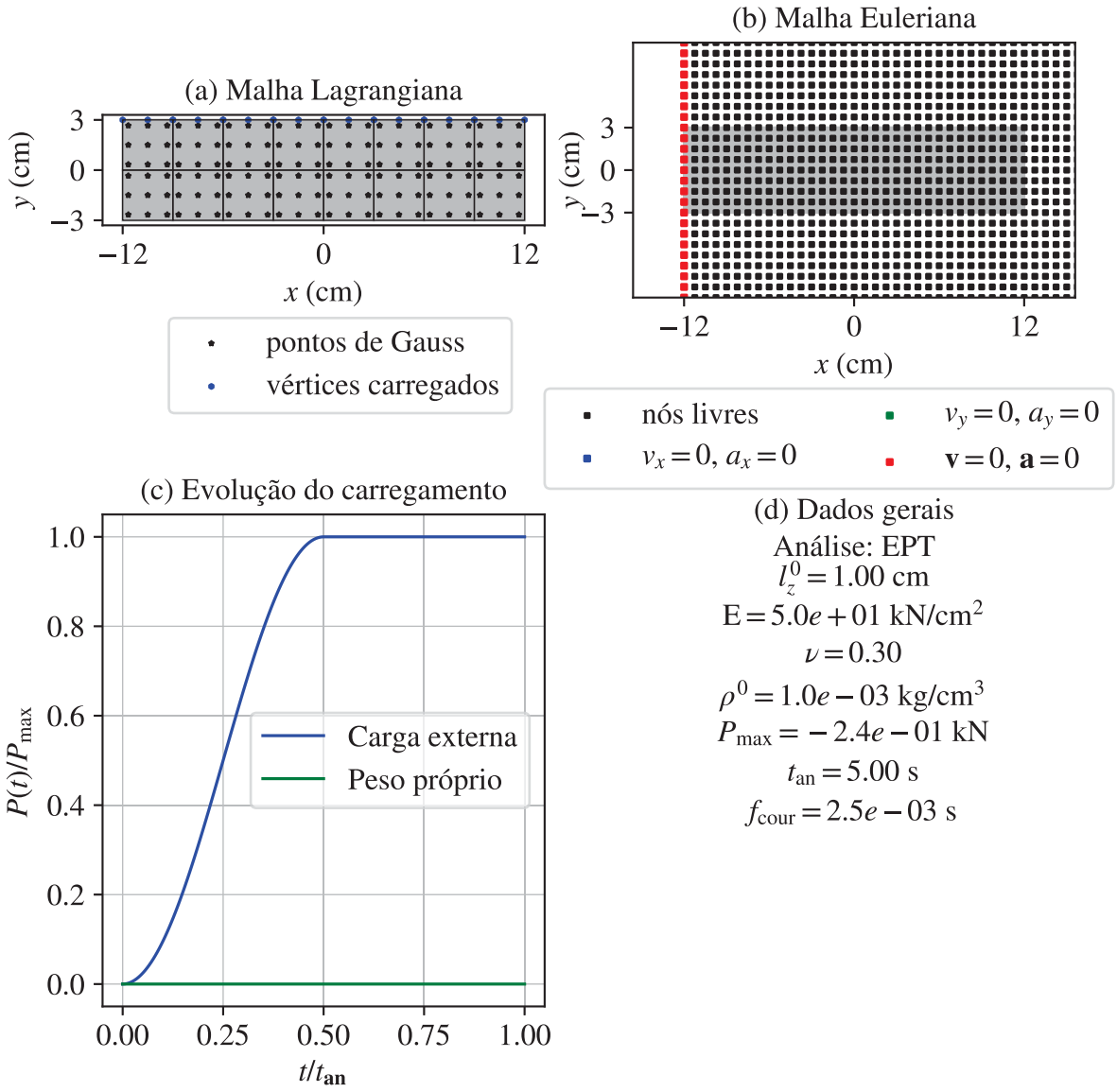


FONTE: O autor (2022).

peça. Também indicam-se, em azul, os vértices carregados pela força externa. Embora não ilustrados, utilizam-se 9 pontos de Gauss por subdomínio. Na malha Euleriana, indicada na alínea (b), têm-se a mesma resolução da malha Lagrangiana: 60×4 células sobre a projeção indeformada da barra. Aos nós coincidentes com a extremidade engastada (em vermelho), são impostas velocidades e acelerações nulas nas duas direções de deslocamento.

O carregamento evolui, conforme a alínea (c) da figura 37, segundo uma função senoidal, começando com valor nulo e atingindo o valor $P_{\max}$ ao final do tempo de análise. O valor do carregamento máximo $P_{\max} = 1.4987$ kN equivale ao dobro da primeira carga crítica de Euler da barra P_{E}, ou seja, $P_{\max} = 2P_{\mathrm{E}}$.

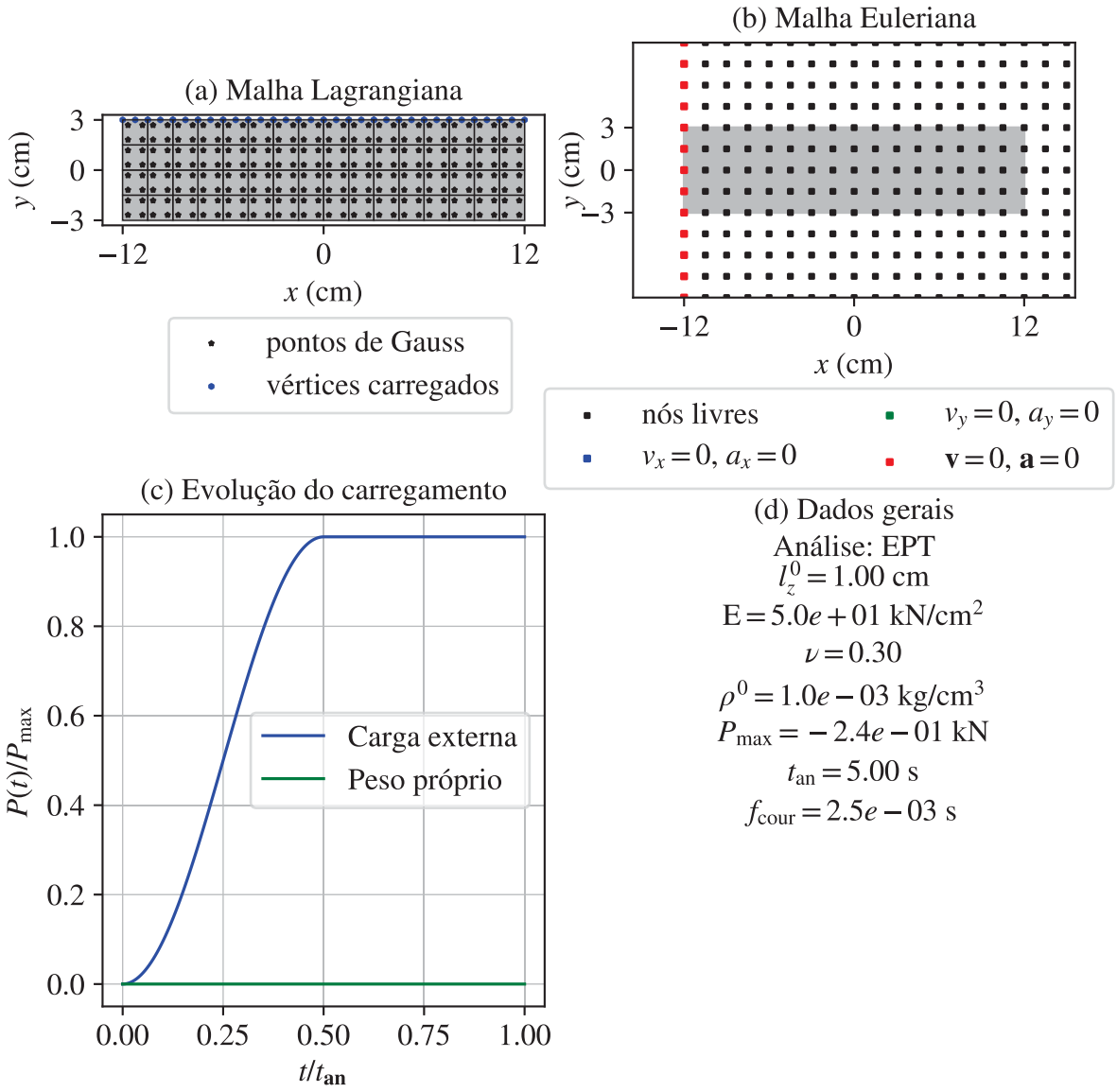
FIGURA 33 – DADOS DE ENTRADA DOS SUBMODELOS A-8X2-32X8-9.



FONTE: O autor (2022).

Na alínea (d) da figura 37, indica-se que a análise segue o estado plano de tensões, bem como a espessura inicial da peça, o módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson e a densidade inicial do material, os valores máximos do carregamento axial e do carregamento transversal de perturbação mínima, o tempo total de análise e o fator de Courant. Assim como no modelo A, no modelo B também não há consideração de nenhum tipo de amortecimento. Além disso, utilizam-se B-splines cúbicas $N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$ como funções de interpolação nodal.

FIGURA 34 – DADOS DE ENTRADA DOS SUBMODELOS A-16X4-16X4-4.



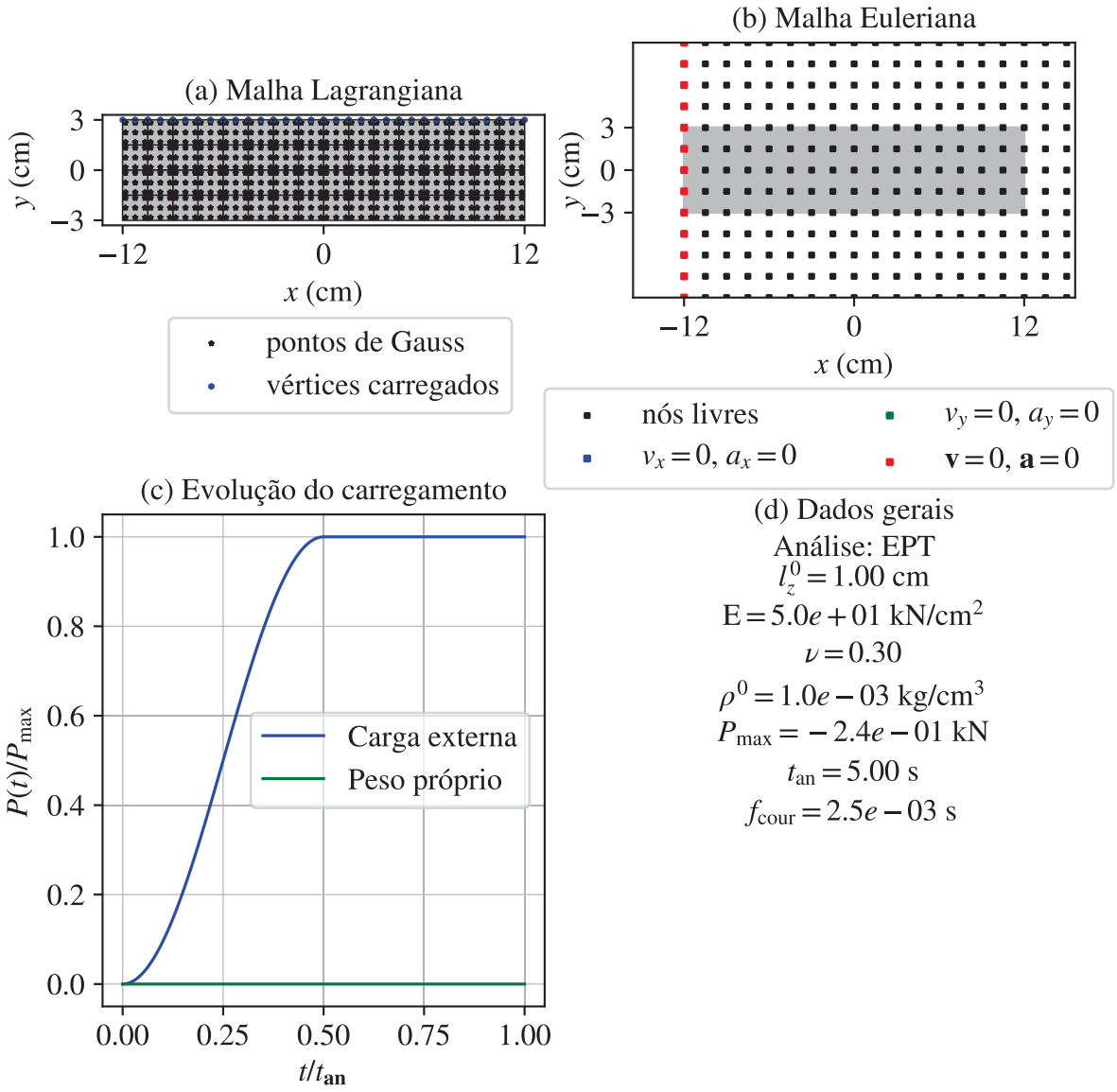
FONTE: O autor (2022).

4.3.2.3 Modelo C - laje engastada-livre sob ação da gravidade

Busca-se, no modelo C, reproduzir, com o MPM SPSI, o modelo processado por Sadeghirad et al. (2011) com o MPM CPDI. Trata-se da laje engastada-livre da figura 38, sob a ação de uma aceleração gravitacional $g = -10$ m/s^2, aplicada com seu valor total desde o início da análise e mantida com valor constante até o final do processamento.

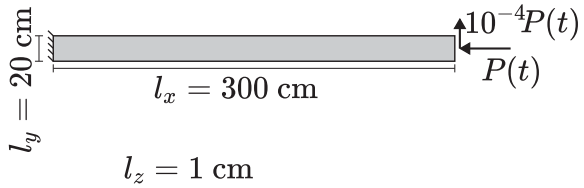
São processados dois submodelos: o submodelo C-L, com funções de interpolação nodal lineares $N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$ e o submodelo C-B, com interpolação nodal realizada pelas B-splines cúbicas $N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$.

FIGURA 35 – DADOS DE ENTRADA DOS SUBMODELOS A-16X4-16X4-9.



FONTE: O autor (2022).

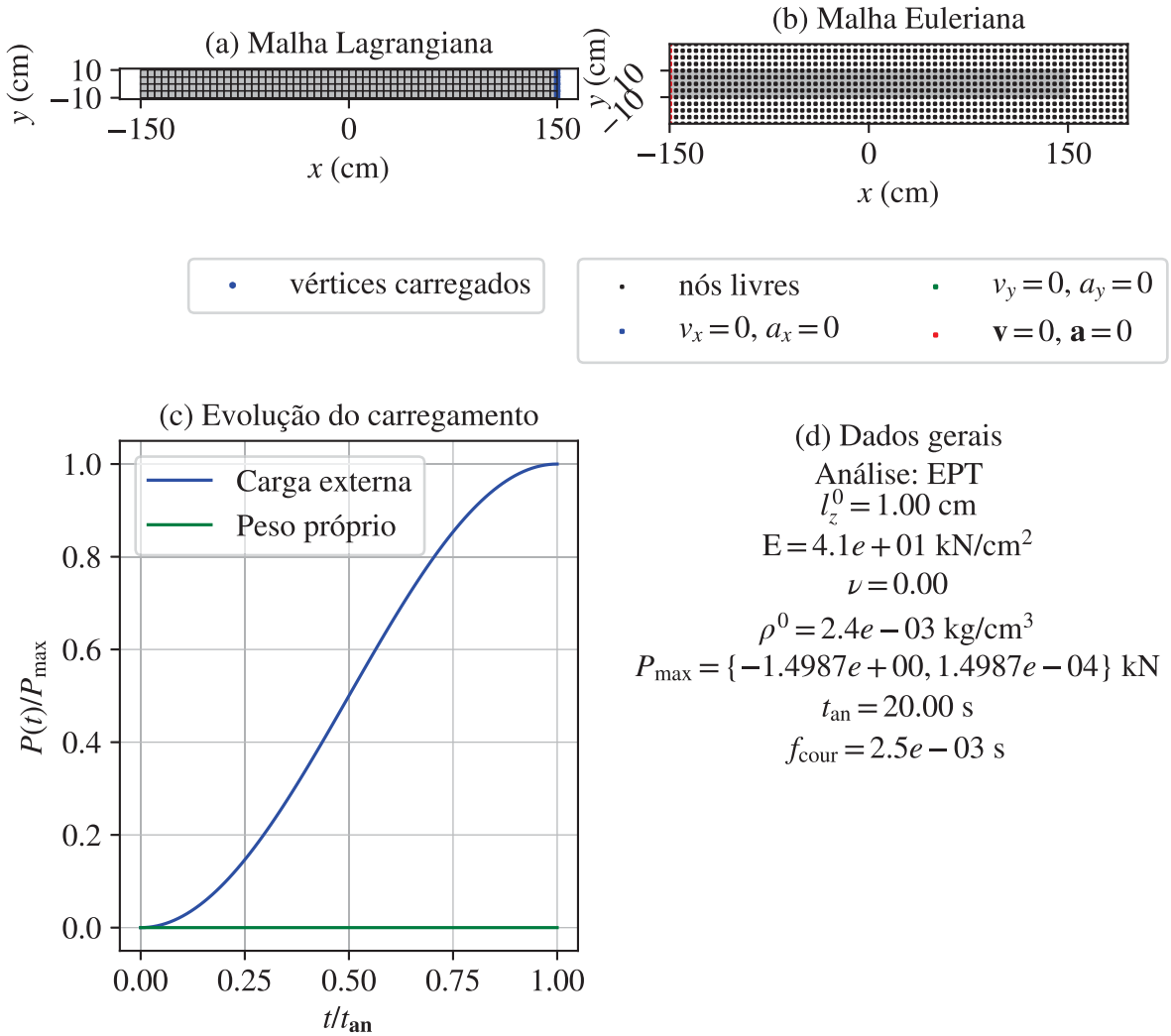
FIGURA 36 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO B.



FONTE: O autor (2022).

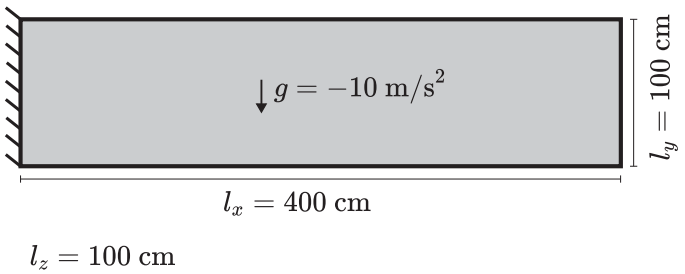
Como mostrado na alínea (a) da figura 39, utiliza-se uma malha Lagrangiana com 24×6 subdomínios, com 4 pontos superconvergentes (pontos de Gauss) por subdomínio. A malha Euleriana, por sua vez, possui 8×2 células sobre a área da projeção indeformada da laje, de acordo com a alínea (b). Ainda na alínea (b), mostram-se, em

FIGURA 37 – DADOS DE ENTRADA DO MODELO B.



FONTE: O autor (2022).

FIGURA 38 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO C.

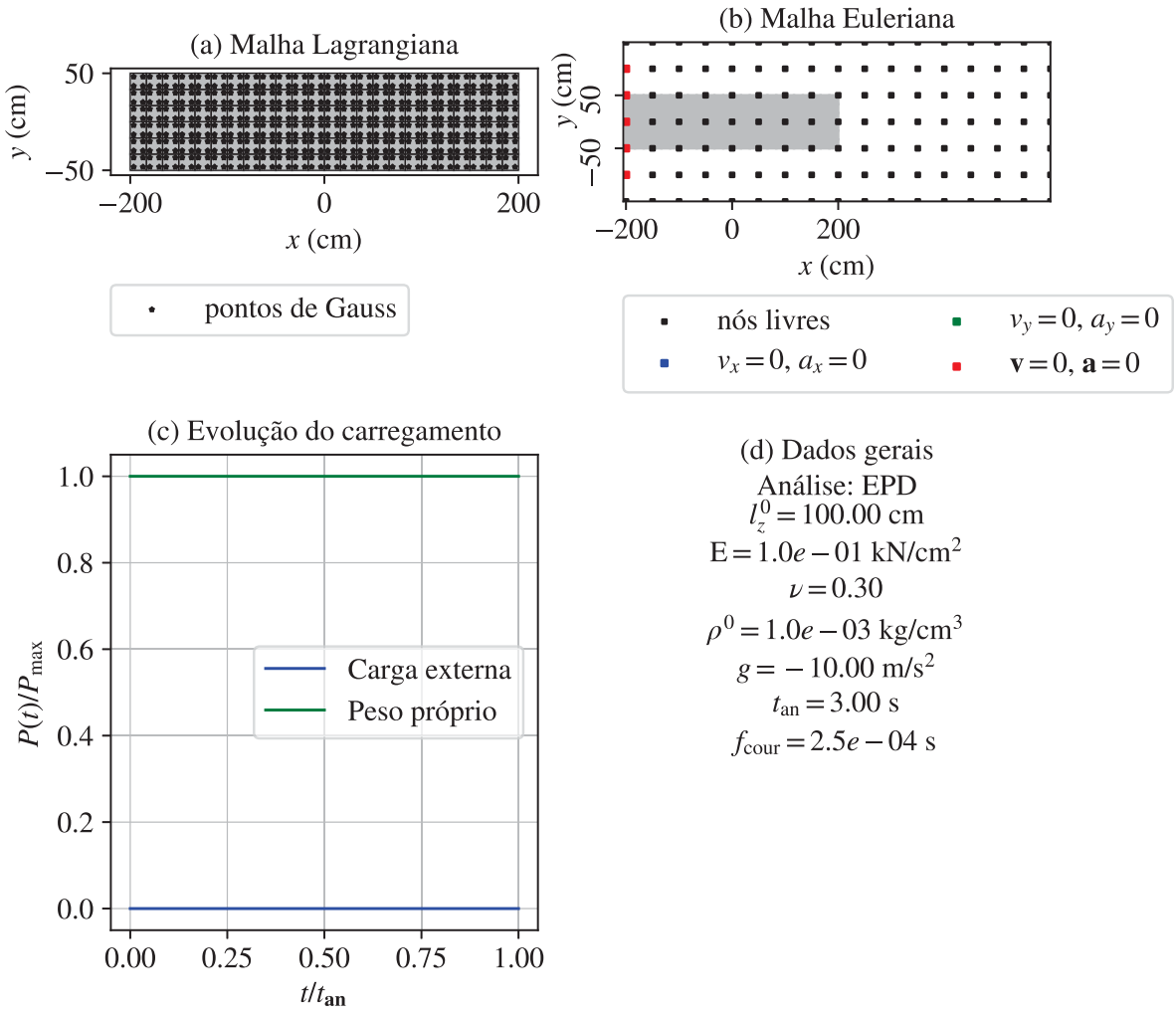


FONTE: O autor (2022).

vermelho, os nós da região do engaste com restrições de velocidade e aceleração nas direções x e y.

Na alínea (c) da figura 39, tem-se a evolução de carregamento já relatada

FIGURA 39 – DADOS DE ENTRADA DO MODELO C.



FONTE: O autor (2022).

anteriormente: o peso próprio da peça, provocado pela ação da gravidade, é aplicado abruptamente desde o começo da análise com seu valor total e mantido assim até o final. Nenhuma outra ação é considerada no processamento.

Diferentemente dos modelos A e B, no modelo C utiliza-se o estado plano de deformações (EPD), como mostrado na alínea (d) da figura 39. Também não há consideração de nenhum tipo de amortecimento, sendo $\alpha = 0$. Como tempo total de análise assume-se o mesmo valor utilizado por Sadeghirad et al. (2011).

Destaca-se também que os modelos constituivos dos materiais dos modelos C e D não seguem o comportamento puramente elástico linear mostrado na descrição do MPM SPSI. Excepcionalmente para reproduzir o que é feito por Sadeghirad et al. (2011) e, assim, permitir a comparação dos resultados, é utilizado um modelo hiperelástico neo-Hookeano, de acordo com a equação

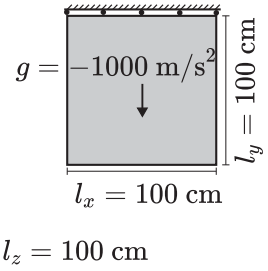
$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\{\lambda \ln[\det(\mathbf{F})] - \mu\}\,\mathbf{I} + \mu\mathbf{F}\mathbf{F}^T}{\det(\mathbf{F})}, \tag{4.134}$$

sendo μ e λ as constantes de Lamé do material e $\mathbf{F}$ o gradiente material de deformações.

4.3.2.4 Modelo D - bloco sob a ação de gravidade extrema

Com o modelo D, também almeja-se reproduzir, aplicando-se o MPM SPSI, um modelo processado por Sadeghirad et al. (2011) com o MPM CPDI: um bloco de material deformável hiperelástico neo-Hookeano da equação (4.134), com deslocamento restrito na direção y em sua face superior, submetido à ação repentina de uma aceleração da gravidade extrema $g = -1000$ m/s^2. Dois submodelos, D-L e D-B, são processados utilizando-se, respectivamente, funções de interpolação lineares $N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$ e B-splines cúbicas $N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$.

FIGURA 40 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO D.

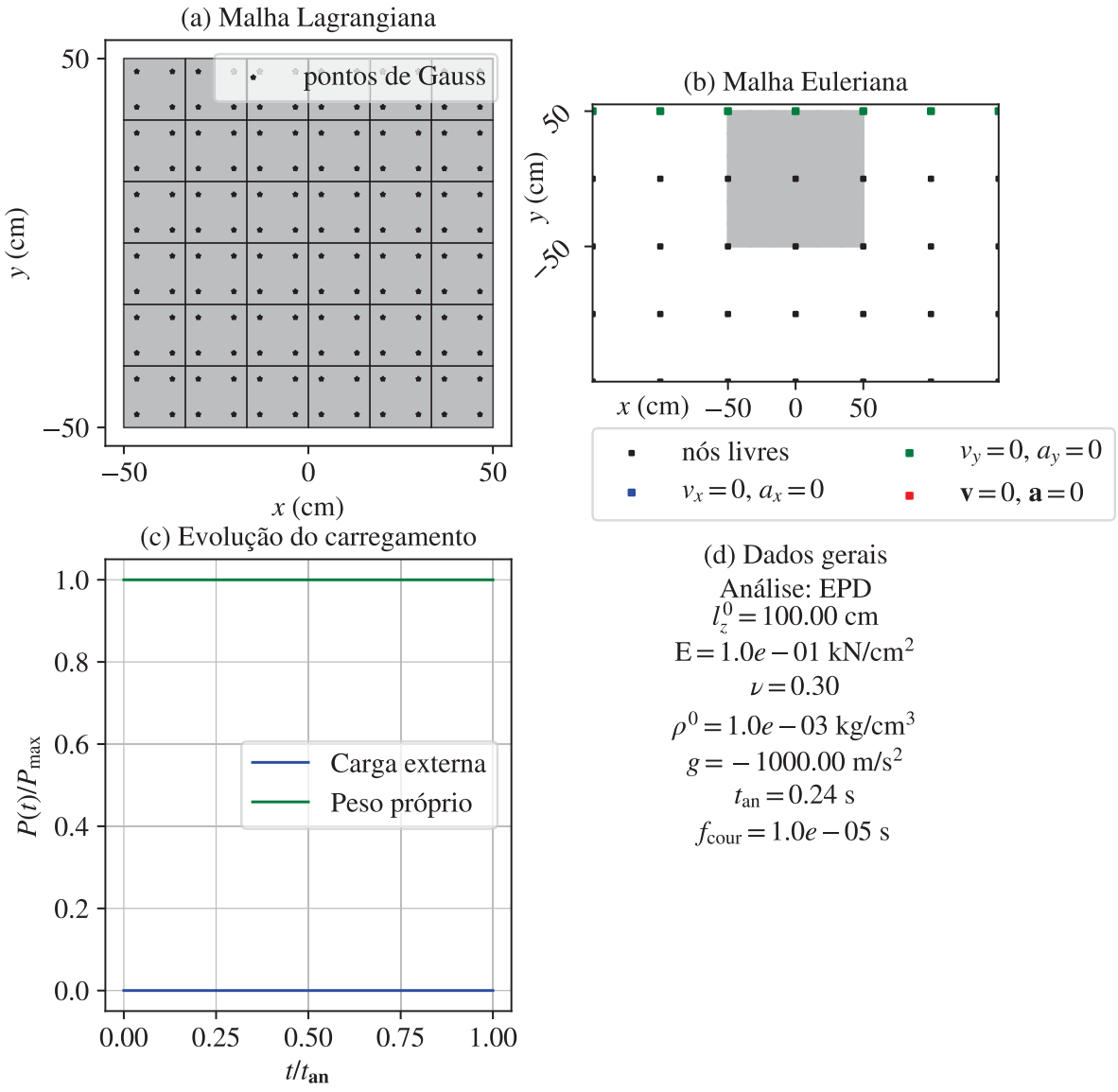


FONTE: O autor (2022).

A malha Lagrangiana é formada, no modelo D, por 6×6 subdomínios, com 4 pontos de Gauss cada um, conforme ilustrado na alínea (a) da figura 41. Na alínea (b) da mesma figura, mostra-se que a malha Euleriana possui 2×2 células sobre a projeção indeformada do bloco. Vê-se também que os nós com coordenada y coincidente com a coordenada y da face superior da peça possuem velocidades e acelerações nulas impostas na direção de ação da gravidade.

Quanto ao carregamento, cuja variação de magnitude ao longo do tempo de análise é mostrada na alínea (c) da figura 41, percebe-se que a aceleração da gravidade é a mesma em todos os passos de tempo. Além disso, similarmente ao modelo C, o estado plano de deformações é considerado. O tempo de análise é o mesmo estipulado por Sadeghirad et al. (2011).

FIGURA 41 – DADOS DE ENTRADA DO MODELO D.



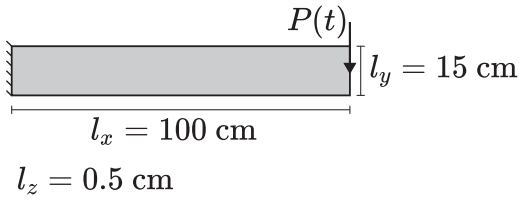
FONTE: O autor (2022).

4.3.2.5 Modelo E - viga engastada-livre com diferentes coeficientes de amortecimento

A utilização do amortecimento local não viscoso no MPM SPSI é testada com o modelo E, da figura 42: uma viga engastada-livre, composta por material elástico linear, sujeita a uma carga transversal ao eixo longitudinal $P(t)$, aplicada em sua extremidade livre. Essa carga evolui de zero - no início da análise - até um valor $P_{\max}$ - na metade do tempo de análise - segundo uma função senoidal. Após atingir $P_{\max}$, a carga é repentinamente reduzida a zero e permanece assim até o final do teste. Esse comportamento da carga pode ser visualizado graficamente nas alíneas (c) das figuras 43 e 44.

Conforme a tabela 5, são avaliados 16 submodelos, que variam entre si em

FIGURA 42 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO E.



FONTE: O autor (2022).

relação ao tipo de função de interpolação nodal ($N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$ ou $N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$), ao número de pontos de Gauss por subdomínio (4 ou 9) e ao valor do coeficiente de amortecimento local não viscoso α (0, 10^{-3}, 10^{-2} ou 10^{-1}).

TABELA 5 – SUBMODELOS E.

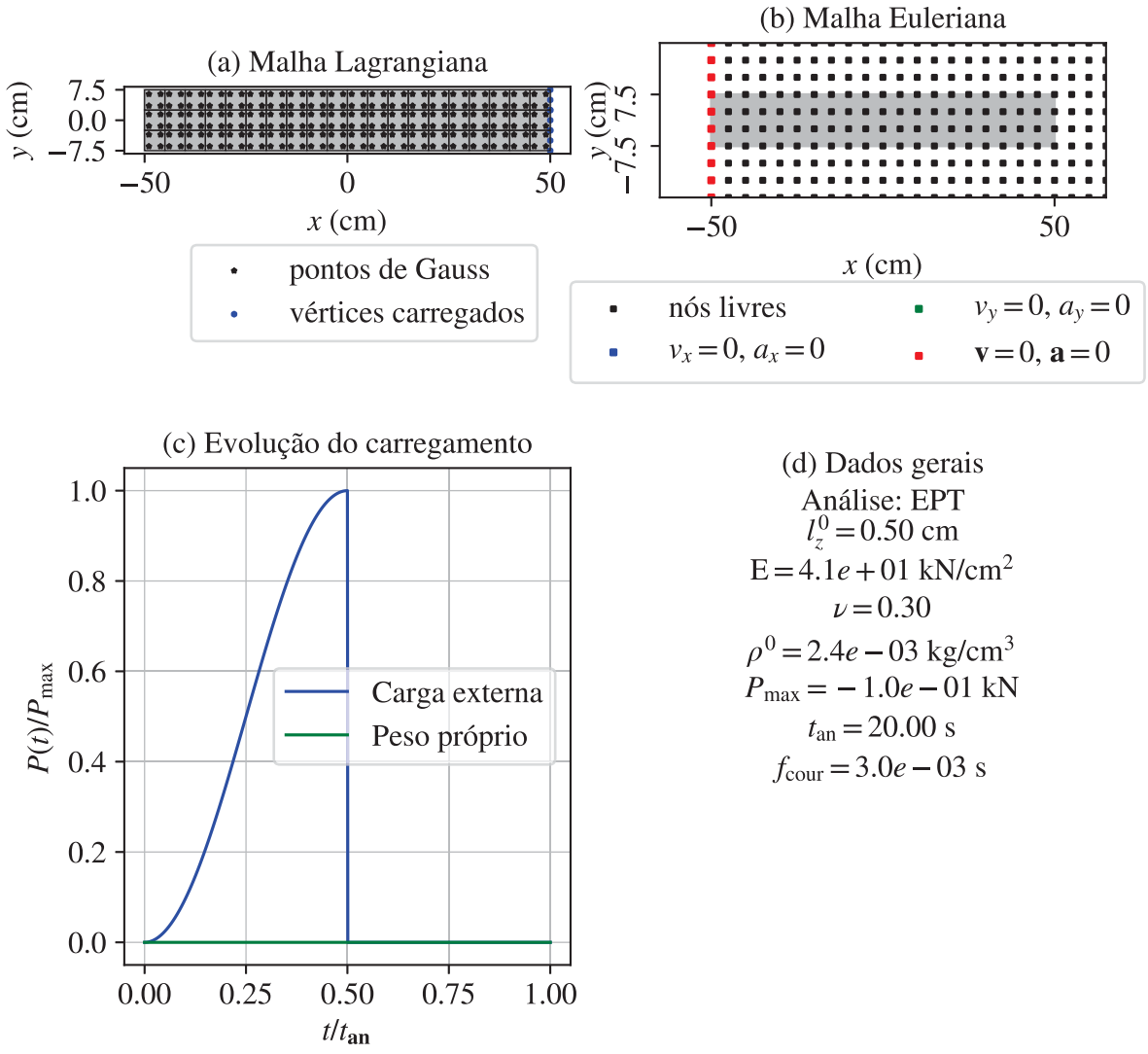
Submodelo	Função $N_i(\mathbf{x})$	n_g	α	Ilustração dos dados de entrada
E-L-4-0	$N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$	4	0	figura 43
E-L-4-10^{-3}	$N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$	4	10^{-3}	figura 43
E-L-4-10^{-2}	$N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$	4	10^{-2}	figura 43
E-L-4-10^{-1}	$N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$	4	10^{-1}	figura 43
E-L-9-0	$N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$	9	0	figura 44
E-L-9-10^{-3}	$N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$	9	10^{-3}	figura 44
E-L-9-10^{-2}	$N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$	9	10^{-2}	figura 44
E-L-9-10^{-1}	$N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$	9	10^{-1}	figura 44
E-B-4-0	$N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$	4	0	figura 43
E-B-4-10^{-3}	$N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$	4	10^{-3}	figura 43
E-B-4-10^{-2}	$N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$	4	10^{-2}	figura 43
E-B-4-10^{-1}	$N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$	4	10^{-1}	figura 43
E-B-9-0	$N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$	9	0	figura 44
E-B-9-10^{-3}	$N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$	9	10^{-3}	figura 44
E-B-9-10^{-2}	$N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$	9	10^{-2}	figura 44
E-B-9-10^{-1}	$N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$	9	10^{-1}	figura 44

FONTE: O autor (2022).

Na figura 43, mostram-se os dados de entrada dos submodelos que possuem 4 pontos de Gauss por subdomínio e, na figura 44, os dados dos submodelos com 9 pontos superconvergentes por subdomínio. As alíneas (a) dessas figuras ilustram a malha Lagrangiana com 20×3 subdomínios e os pontos de Gauss, além dos vértices entre os quais a carga $P(t)$ é distribuída (em azul).

A malha Euleriana, com 20×3 células sobre a área de projeção da viga indeformada, é indicada nas alíneas (b) das figuras 43 e 44, assim como os nós da região do engaste (em vermelho), aos quais são impostas velocidades e acelerações nulas nas direções x e y. Já nas alíneas (c) ilustra-se o comportamento da carga externa já relatado no início dessa seção terciária. Percebe-se também que desconsidera-se o peso próprio. Indica-se, nas alíneas (d) das figuras, que o tipo de análise plana é

FIGURA 43 – DADOS DE ENTRADA DOS SUBMODELOS E COM 4 PONTOS DE GAUSS POR SUBDOMÍNIO.



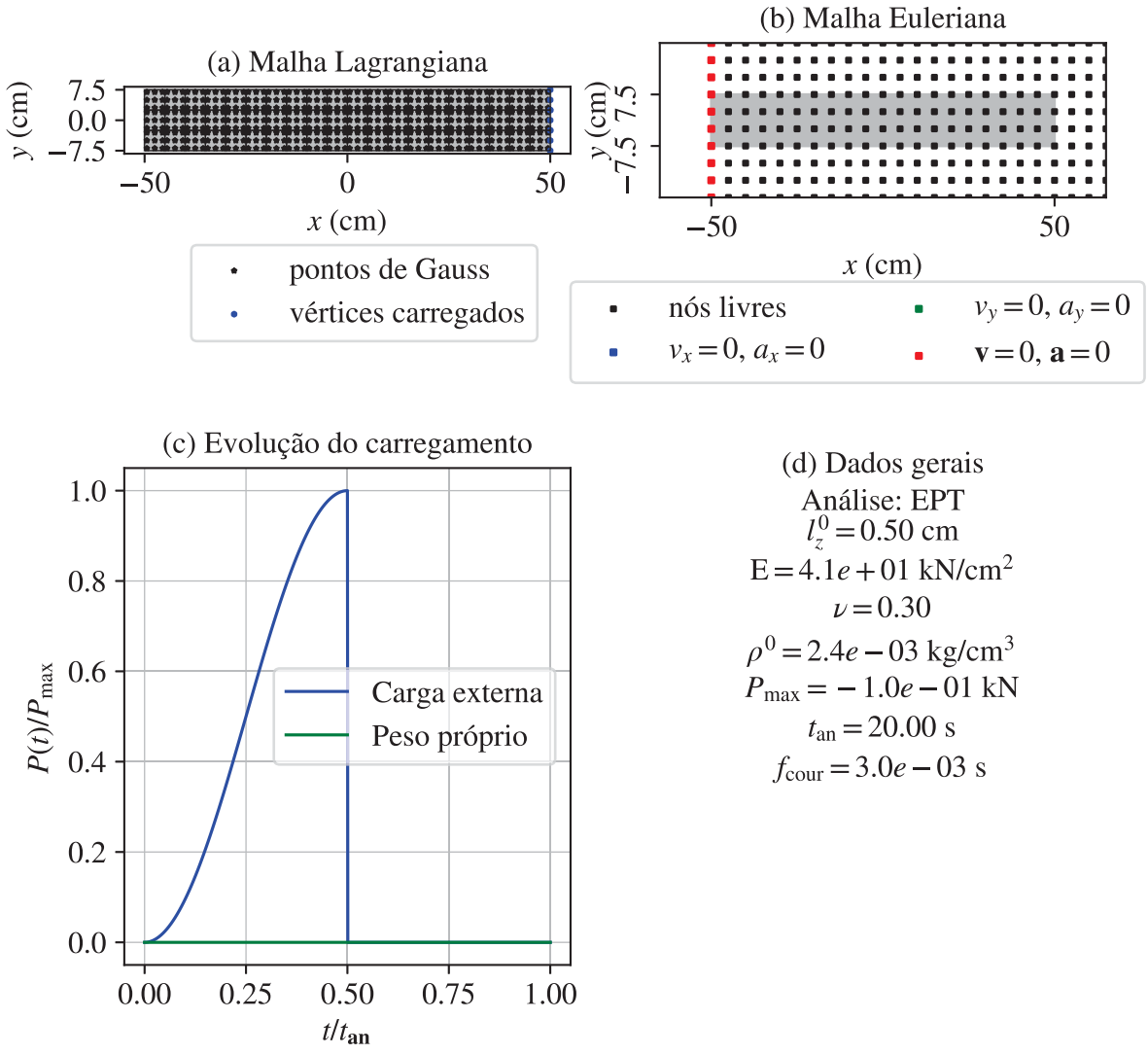
FONTE: O autor (2022).

o estado plano de tensões, bem como informações sobre o material, o valor máximo atingido por $P(t)$, o tempo total de análise e o fator de Courant utilizado no cálculo do incremento de tempo.

4.3.3 Análises com danificação e fratura

Outros cinco diferentes modelos são processados com a intenção de se avaliar a extensão do MPM SPSI descrita em 4.2. Nesta seção secundária, descrevem-se todos os parâmetros de entrada utilizados nas análises desses modelos. Aqui, todos os modelos utilizam interpolação nodal com B-splines cúbicas, já que essas funções mostraram-se mais adequadas ao processo de evolução do dano. Além disso, desconsidera-se o amortecimento local em todos os modelos processados.

FIGURA 44 – DADOS DE ENTRADA DOS SUBMODELOS E COM 9 PONTOS DE GAUSS POR SUBDOMÍNIO.



FONTE: O autor (2022).

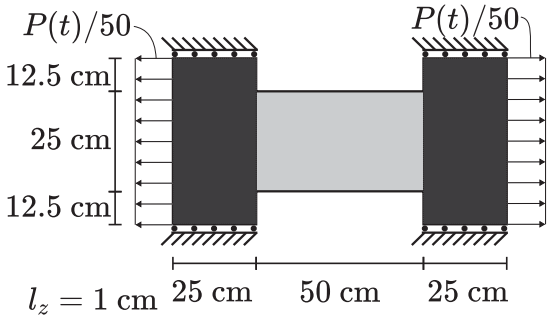
A intenção com os modelos aqui apresentados é a obtenção de resultados para casos similares a ensaios clássicos, como tração simples, compressão diametral, cisalhamento e flexão. Espera-se que isso facilite a identificação de potencialidades e limitações do MPM SPSI estendido com dano e fratura.

4.3.3.1 Modelo F - Tração simples

Como indicado na figura 45, o modelo F remete a um teste de tração simples. Percebe-se que carregamentos de tração de mesma magnitude e direção, porém com sentidos opostos, são aplicados às extremidades da peça. Opta-se pela disposição de blocos de extremidade nas regiões de aplicação da carga de tração, destacados com cor mais escura na figura 45. Tais blocos também são assumidos como não danificáveis

e, sendo assim, apenas a região central da peça, com menor seção transversal e cor mais clara na figura 45, é passível de danificação. Assume-se também que os deslocamentos em y das faces inferior e superior dos blocos de extremidade são iguais a zero.

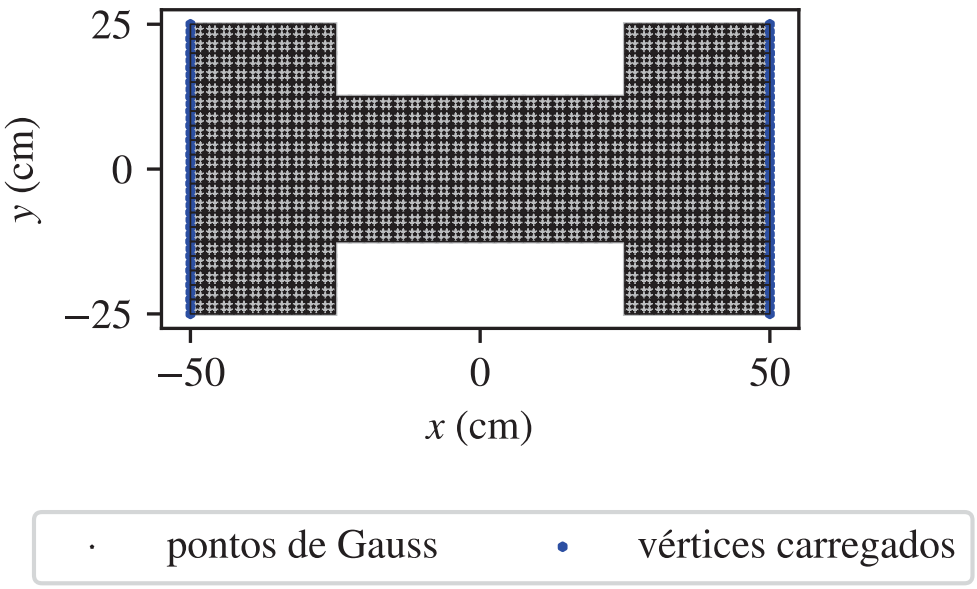
FIGURA 45 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO F.



FONTE: O autor (2022).

Ilustra-se, na figura 46, a malha Lagrangiana adotada, com 600 subdomínios que medem, inicialmente, 2.5×2.5 cm. Cada um desses subdomínios possui 9 pontos superconvergentes. Já a carga de tração é distribuída entre os vértices destacados em azul.

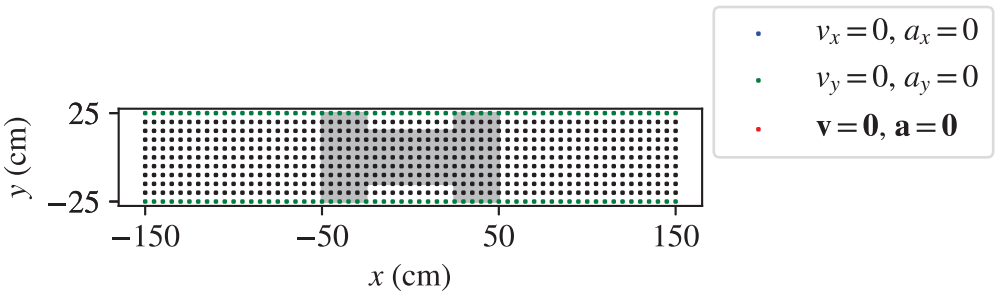
FIGURA 46 – MALHA LAGRANGIANA DO MODELO F.



FONTE: O autor (2022).

A malha Euleriana assumida, representada na figura 47, possui a mesma resolução inicial da malha Lagrangiana, com nós espaçados a cada 5 cm nos eixos x e y. Ainda na figura 47, os nós em verde são nós aos quais a condição de velocidades e acelerações nulas no eixo y são impostas.

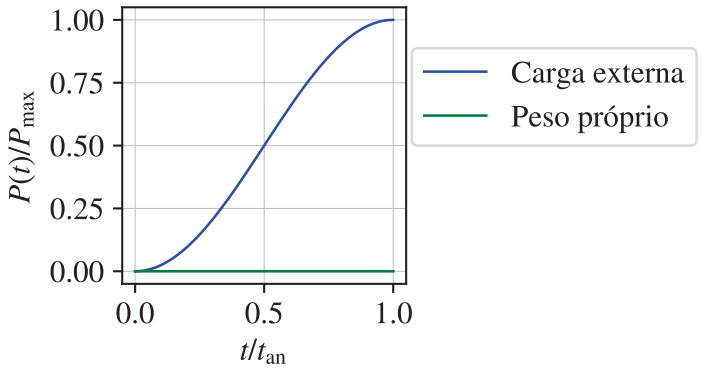
FIGURA 47 – MALHA EULERIANA DO MODELO F.



FONTE: O autor (2022).

O carregamento externo de tração é evoluído conforme a figura 48, seguindo um padrão senoidal. Parte-se de um valor nulo e chega-se ao valor máximo ao final do tempo de análise. Também destaca-se que o peso próprio é desconsiderado. As premissas de carregamento descritas para o modelo F valem também para os modelos G, H, I e J.

FIGURA 48 – EVOLUÇÃO DO CARREGAMENTO NOS MODELOS F, G, H, I E J.



FONTE: O autor (2022).

Finalmente, na figura 49 constam os demais dados de entrada utilizados. Como indicado, adota-se o estado plano de tensões. Especificam-se também, em ordem, o módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson, a densidade inicial do material, a tensão limite de tração do material, a energia de fratura do material por unidade de área no modo I, o carregamento máximo, o tempo total de análise, o fator de Courant e os coeficientes de atrito estático e cinético.

4.3.3.2 Modelo G - Compressão diametral

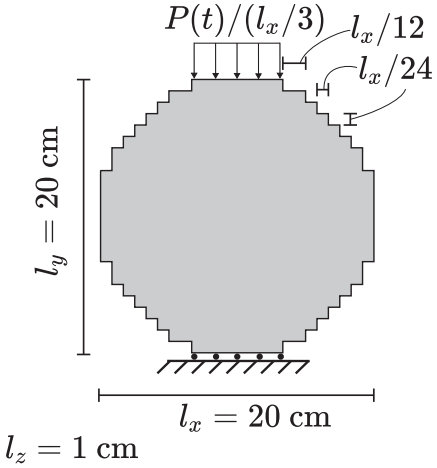
Respeitados os limites da discretização adotada, o objetivo do modelo G é a simulação de um teste de compressão diametral. O esquema geral do teste é reproduzido na figura 50, com a aplicação de um carregamento distribuído na face superior e com a restrição dos deslocamentos paralelos a y na face inferior.

FIGURA 49 – DEMAIS DADOS DE ENTRADA DO MODELO F.

$$\text{análise: EPT}$$
$$E = 2.00e+01 \text{ kN/cm}^2$$
$$\nu = 0.20$$
$$\rho^0 = 4.00e-03 \text{ kg/cm}^3$$
$$\sigma_{\text{lim}} = 1.00e-03 \text{ kN/cm}^2$$
$$G_f = 5.00e-06 \text{ kN.cm/cm}^2$$
$$P_{\text{max}} = \{1.00e-01, 0.00e+00\} \text{ kN}$$
$$t_{\text{an}} = 20.00 \text{ s}$$
$$f_{\text{cour}} = 1.00e-03$$
$$\mu^{\text{static}} = 0.15$$
$$\mu^{\text{kinetic}} = 0.05$$

FONTE: O autor (2022).

FIGURA 50 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO G.



FONTE: O autor (2022).

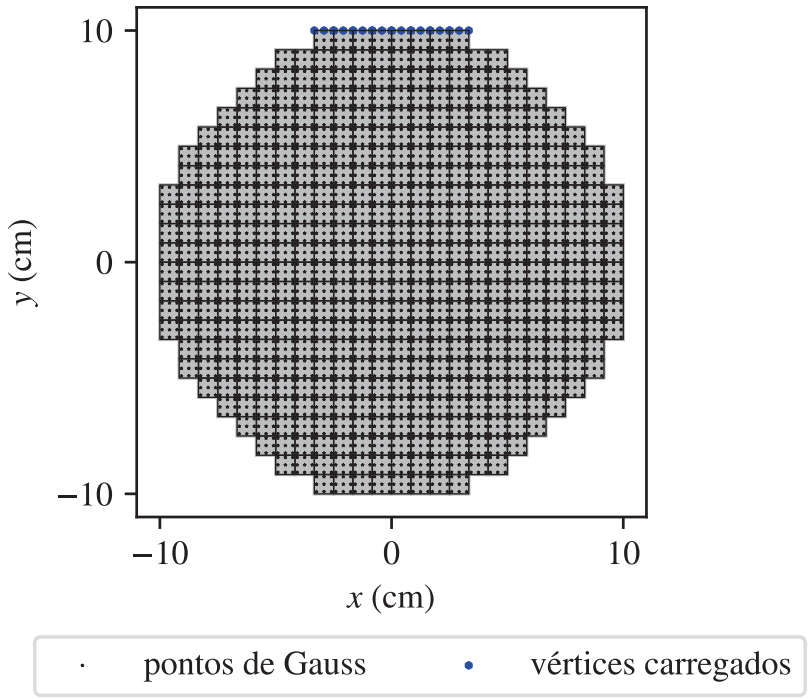
Nesse contexto, assume-se a malha Lagrangiana da figura 51, na qual os 456 subdomínios medem $\frac{20}{24} \times \frac{20}{24}$ cm. Ambos os submodelos contam com 9 pontos de Gauss por subdomínio. Já os vértices em azul são aqueles que recebem o carregamento distribuído aplicado na face superior.

A malha Euleriana, de acordo com a figura 52, possui células medindo $\frac{20}{12} \times \frac{20}{12}$ cm, com os nós restritos em y mostrados em verde. Os demais dados de entrada utilizados são dispostos na figura 53, destacando-se que essa é uma análise de estado plano de deformações.

4.3.3.3 Modelo H - Consolo curto

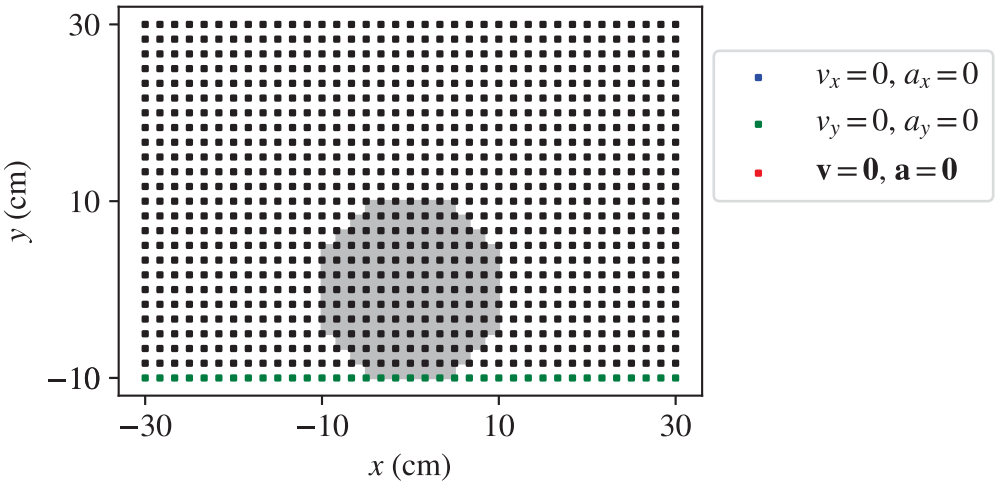
O modelo H, como mostra a figura 54, busca reproduzir o comportamento de um consolo curto com uma descontinuidade na face superior. Esse consolo é fixo na face esquerda e na metade da face superior. Na outra metade da face superior,

FIGURA 51 – MALHA LAGRANGIANA DO MODELO G.



FONTE: O autor (2022).

FIGURA 52 – MALHA EULERIANA DO MODELO G.



FONTE: O autor (2022).

aplica-se um carregamento vertical distribuído apontado no sentido negativo de y.

Discretiza-se a peça em 528 subdomínios com dimensões iniciais $\frac{20}{24} \times \frac{20}{24}$ cm, como exibido na figura 55. Observa-se também que há 9 pontos superconvergentes por subdomínio. A distribuição do carregamento é feita entre os vértices em azul destacados nas figuras citadas.

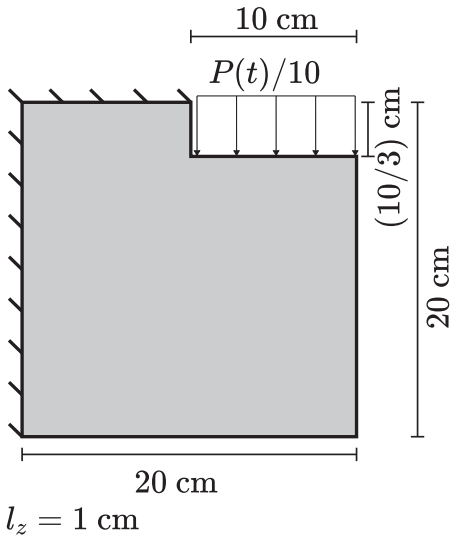
Na figura 56, percebe-se que a resolução da malha Euleriana é dada por nós a

FIGURA 53 – DEMAIS DADOS DE ENTRADA DO MODELO G.

$$\text{análise: EPD}$$
$$E = 2.00e+01 \text{ kN/cm}^2$$
$$\nu = 0.20$$
$$\rho^0 = 4.00e-03 \text{ kg/cm}^3$$
$$\sigma_{\text{lim}} = 1.00e-03 \text{ kN/cm}^2$$
$$G_f = 5.00e-06 \text{ kN.cm/cm}^2$$
$$P_{\text{max}} = \{0.00e+00, -5.00e-01\} \text{ kN}$$
$$t_{\text{an}} = 20.00 \text{ s}$$
$$f_{\text{cour}} = 2.00e-03$$
$$\mu^{\text{static}} = 0.15$$
$$\mu^{\text{kinetic}} = 0.05$$

FONTE: O autor (2022).

FIGURA 54 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO H.



FONTE: O autor (2022).

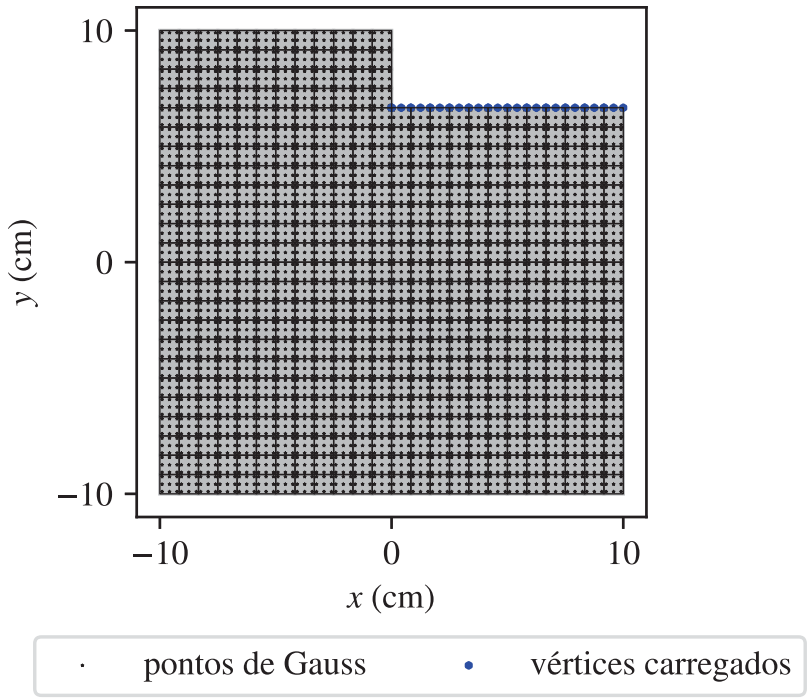
cada $\frac{20}{12}$ cm, tanto em x quanto em y. Também verifica-se que os nós em vermelho são aqueles aos quais impõem-se velocidades e acelerações nulas em ambas as direções. Adicionalmente, na figura 57 especificam-se a análise plana de tensões e os demais dados de entrada adotados no modelo H.

4.3.3.4 Modelo I - Pórtico

O modelo I, cujo esquema geral está na figura 58, remete a um pórtico formado por uma viga e dois pequenos pilares que, por sua vez, possuem deslocamentos em y nulos em sua base inferior. Esse pórtico é solicitado por um carregamento distribuído em toda a face superior da viga.

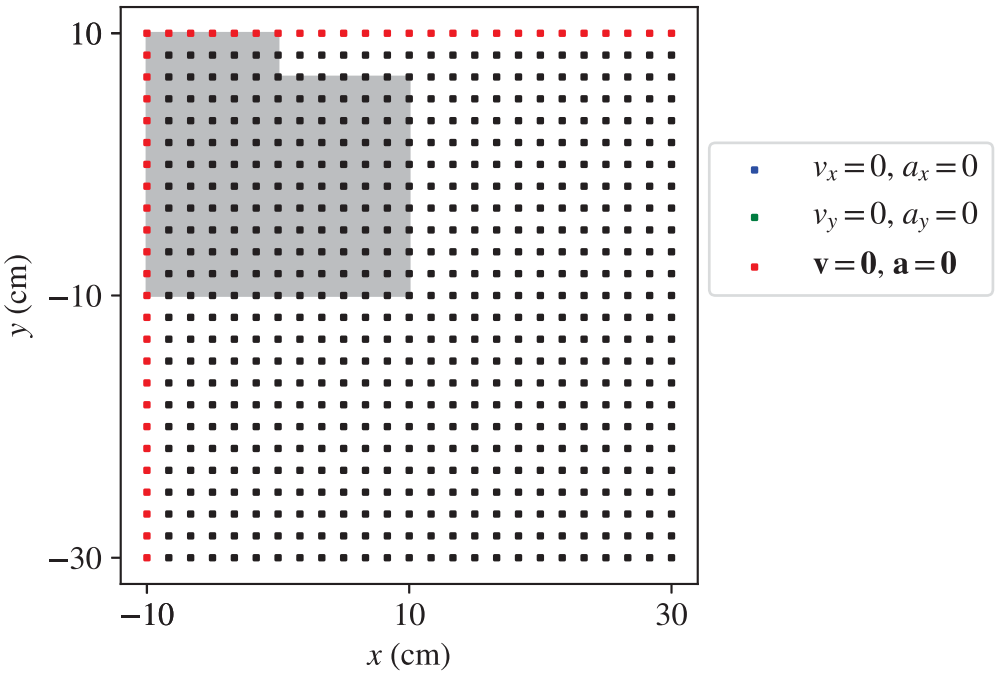
Forma-se a malha Lagrangiana do modelo I conforme a figura 59, com 576 subdomínios medindo 5×5 cm. Em todas as situações, os pontos superconvergentes

FIGURA 55 – MALHA LAGRANGIANA DO MODELO H.



FONTE: O autor (2022).

FIGURA 56 – MALHA EULERIANA DO MODELO H.



FONTE: O autor (2022).

são 9 em cada subdomínio. Já a aplicação do carregamento na face superior da viga é feita diretamente nos vértices em azul.

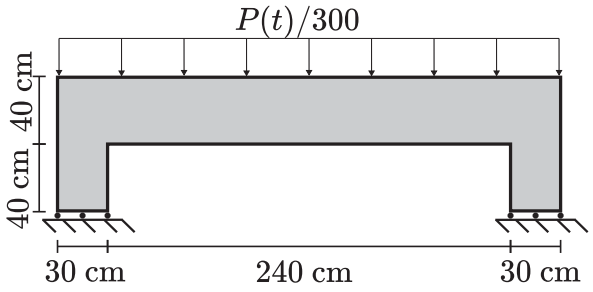
As células da malha Euleriana medem 10×10 cm, como pode-se inferir pela

FIGURA 57 – DEMAIS DADOS DE ENTRADA DO MODELO H.

$$\text{análise: EPT}$$
$$E = 2.00e+01 \text{ kN/cm}^2$$
$$\nu = 0.20$$
$$\rho^0 = 4.00e-03 \text{ kg/cm}^3$$
$$\sigma_{\text{lim}} = 1.00e-03 \text{ kN/cm}^2$$
$$G_f = 5.00e-06 \text{ kN.cm/cm}^2$$
$$P_{\text{max}} = \{0.00e+00, -2.40e-02\} \text{ kN}$$
$$t_{\text{an}} = 20.00 \text{ s}$$
$$f_{\text{cour}} = 2.00e-03$$
$$\mu^{\text{static}} = 0.15$$
$$\mu^{\text{kinetic}} = 0.05$$

FONTE: O autor (2022).

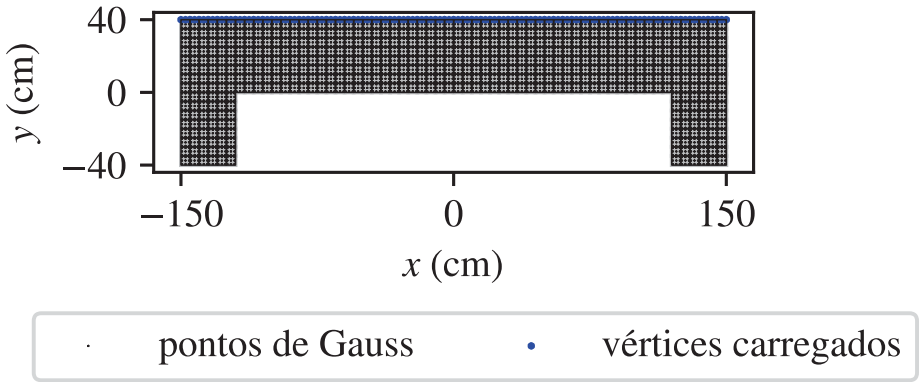
FIGURA 58 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO I.



$l_z = 1$ cm

FONTE: O autor (2022).

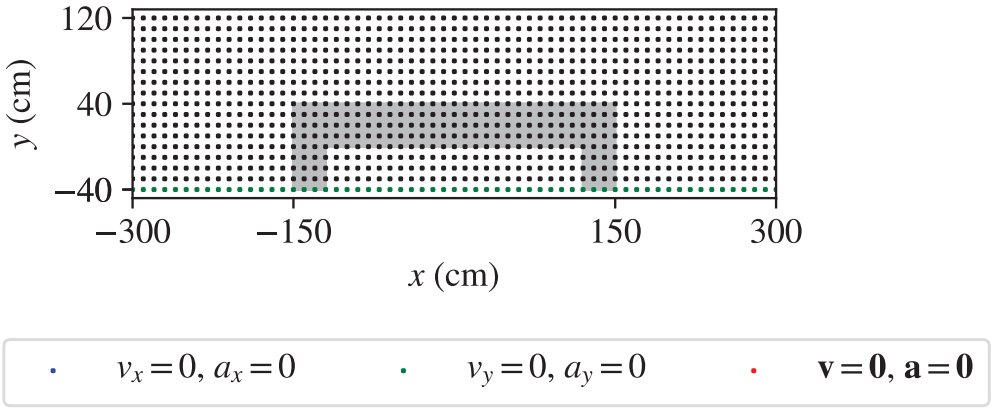
FIGURA 59 – MALHA LAGRANGIANA DO MODELO I.



FONTE: O autor (2022).

figura 60. Nessa figura, os nós em verde são os que têm velocidades e acelerações nulas impostas na direção y. Na figura 61, especifica-se que a teoria de estado plano de tensões é assumida, bem como outros dados de entrada inerentes ao modelo I.

FIGURA 60 – MALHA EULERIANA DO MODELO I.



FONTE: O autor (2022).

FIGURA 61 – DEMAIS DADOS DE ENTRADA DO MODELO I.

análise: EPT
$E = 2.00e+01$ kN/cm^2
$\nu = 0.20$
$\rho^0 = 4.00e-03$ kg/cm^3
$\sigma_{\text{lim}} = 1.00e-03$ kN/cm^2
$G_f = 5.00e-06$ kN.cm/cm^2
$P_{\text{max}} = \{0.00e+00,\ -1.00e-01\}$ kN
$t_{\text{an}} = 20.00$ s
$f_{\text{cour}} = 2.00e-03$
$\mu^{\text{static}} = 0.15$
$\mu^{\text{kinetic}} = 0.05$

FONTE: O autor (2022).

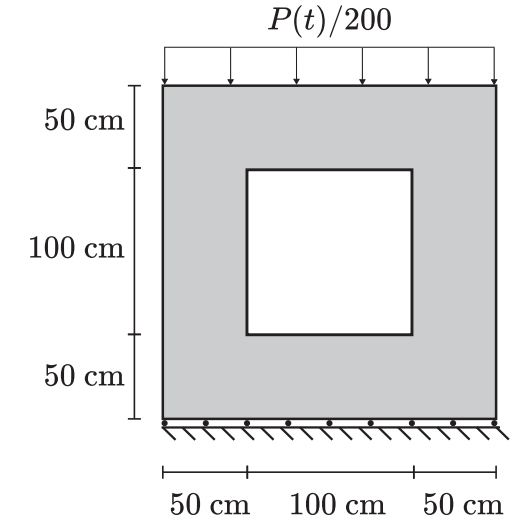
4.3.3.5 Modelo J - Parede com abertura

Vê-se, pela figura 62, que o modelo J faz referência a uma parede apoiada em sua base inferior, onde os deslocamentos em y são nulos. Tal parede possui uma abertura central quadrada, além de estar sujeita a um carregamento distribuído uniformemente em sua face superior.

Subdivide-se o modelo em 588 subdomínios quadrados com lado igual a $dfrac20028$ cm, mostrados na figura 63. Cada subdomínio possui 9 pontos de Gauss e os vértices em azul são aqueles onde aplica-se o carregamento distribuído.

Já o domínio de análise é discretizado com a adoção da malha Euleriana da figura 64, por meio de nós espaçados regularmente a cada $\frac{200}{14}$ cm tanto na direção x quanto na direção y. Aos nós em verde, impõem-se condições de velocidade e aceleração nula na direção y. Na figura 65, estão os demais dados de entrada da análise, inclusive a especificação do estado plano de tensões.

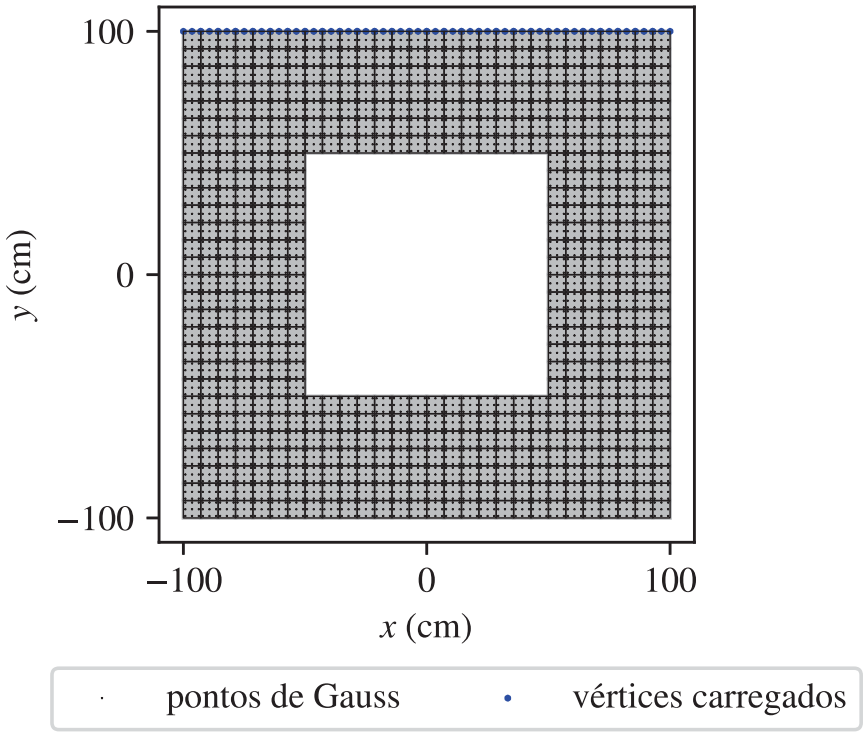
FIGURA 62 – ESQUEMA GERAL DE CARREGAMENTO DO MODELO J.



$l_z = 1$ cm

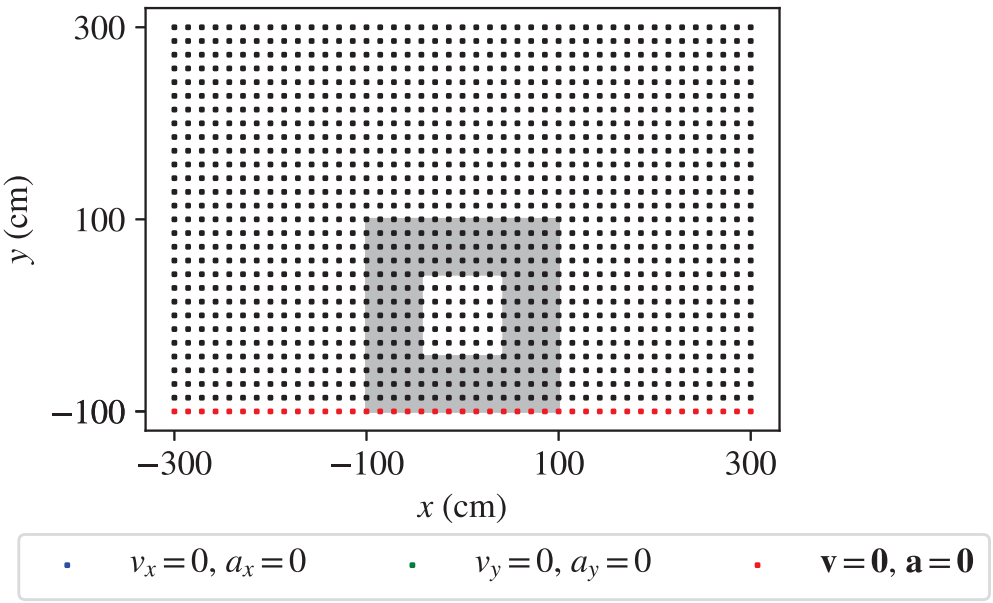
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 63 – MALHA LAGRANGIANA DO MODELO J.



FONTE: O autor (2022).

FIGURA 64 – MALHA EULERIANA DO MODELO J.



FONTE: O autor (2022).

FIGURA 65 – DEMAIS DADOS DE ENTRADA DO MODELO J.

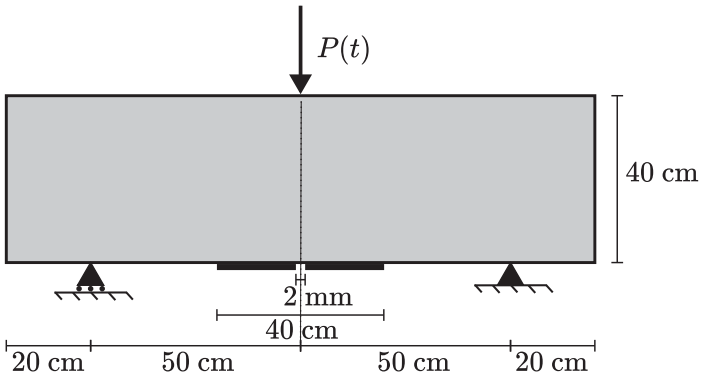
análise: EPT
$E = 2.00e+01$ kN/cm^2
$\nu = 0.20$
$\rho^0 = 4.00e-03$ kg/cm^3
$\sigma_{\text{lim}} = 1.00e-03$ kN/cm^2
$G_f = 5.00e-06$ kN.cm/cm^2
$P_{\text{max}} = \{0.00e+00,\ -1.50e+01\}$ kN
$t_{\text{an}} = 20.00$ s
$f_{\text{cour}} = 2.00e-03$
$\mu^{\text{static}} = 0.15$
$\mu^{\text{kinetic}} = 0.05$

FONTE: O autor (2022).

5 ANÁLISE DE CONSISTÊNCIA FRENTE A RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O principal resultado estabelecido no trabalho experimental de Grégoire et al. (2013) é a correlação entre o tamanho da abertura da fratura que surge no modelo e o carregamento aplicado, medido na célula de carga. Para isso, os autores fixam duas chapas de alumínio na face inferior da viga já apresentada em 4.3.1, simétricas em relação ao ponto médio dessa face. Essas chapas possuem entre si um espaçamento inicial de 2 mm e, juntas, monitoram um comprimento de 40 cm, como mostrado na figura 66. Dessa forma, qualquer abertura ou deformação que ocorra dentro desse comprimento pode ser medida a partir da mensuração da distância entre as faces internas das chapas, que inicialmente é de 2 mm.

FIGURA 66 – MONITORAMENTO DA ABERTURA DA FRATURA CONFORME O TESTE EXPERIMENTAL.



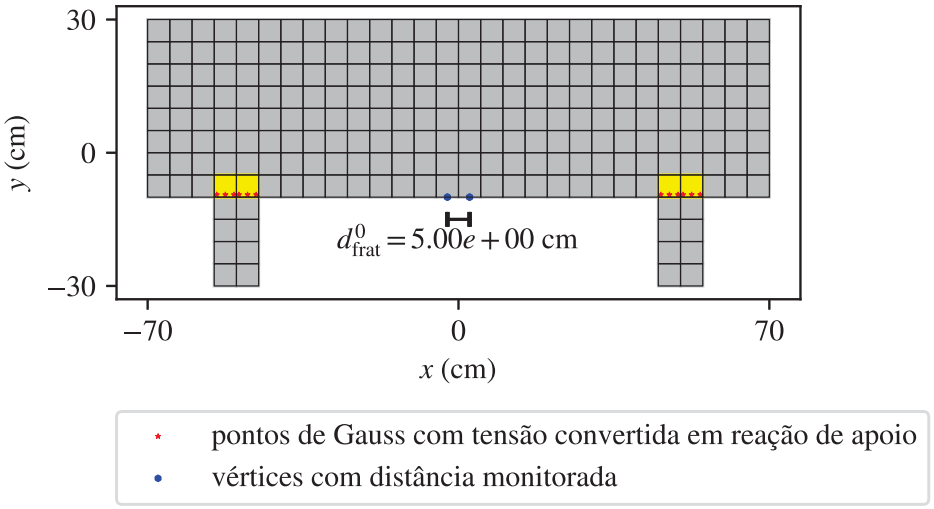
FONTE: Adaptado de Grégoire et al. (2013).

Na simulação com o MPM SPSI, um monitoramento correspondente é feito medindo-se a distância d_{frat} entre os vértices em azul da figura 67. Quando na configuração indeformada, essa distância vale $d^0_{\text{frat}} = 5$ cm. Então, ao passo que a viga se deforma e uma fratura surge na região entre tais vértices, a abertura da fratura é calculada como

$$\delta_{\text{frat}^n} = d^n_{\text{frat}} - d^0_{\text{frat}}. \tag{5.1}$$

Também na figura 67 indicam-se, em vermelho, os pontos de Gauss próximos às bases dos suportes de apoio da viga. Conforme ilustrado, a tensão vertical desses pontos, $\sigma^n_{yy_{g'}}$, é utilizada no cálculo das reações de apoio do modelo ao longo da análise. O índice $g' = 1, 2, 3$ (numeração da esquerda para a direita) diz respeito aos 3 pontos de Gauss em vermelho de cada um dos 4 subdomínios $\Omega_{p'}$ (em amarelo) que formam o apoio da viga sobre os suportes, com $p' = 1, 2, 3, 4$ (numeração da esquerda para

FIGURA 67 – MONITORAMENTO DA ABERTURA DA FRATURA E DAS REAÇÕES DE APOIO DO MODELO DE VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL COM O MPM SPSI.



FONTE: O autor (2022).

a direita). Sendo assim, a reação vertical total medida em cada passo de tempo é calculada por integração numérica unidimensional no eixo x como

$$R^n_y = \sum_{p'} \sum_{g'} \sigma^n_{yy_{g'}} \left[\frac{\partial x}{\partial \xi}(\xi_{g'}) \right] l^n_{z_{g'}} w_{g'}. \tag{5.2}$$

Na equação (5.2), $l^n_{z_{g'}}$ é a espessura do ponto g' no passo de tempo n, enquanto $\xi_{g'}$ é a coordenada local do ponto g' dentro do subdomínio $\Omega_{p'}$. Como os pontos g' são numerados da esquerda para a direita, tais coordenadas locais valem, respectivamente, -0.77459667, 0 e 0.77459667. Já

$$\frac{dx}{d\xi}(\xi_{g'}) = \sum_{v'} \frac{dG_{\mathrm{v}'}(\xi_{g'})}{\partial \xi} x^n_{\mathrm{v}'} \tag{5.3}$$

é o Jacobiano na direção x de um ponto g', sendo $x^n_{\mathrm{v}'}$ a coordenada x do vértice $\mathrm{v}' = 1, 5, 2$ do subdomínio $\Omega_{p'}$ no passo de tempo n. Esses vértices são escolhidos para o cálculo do Jacobiano por ser a sequência de vértices mais próxima dos pontos $g' = 1, 2, 3$. Ainda na equação (5.2), as derivadas em ξ das funções quadráticas unidimensionais $G_{\mathrm{v}'}(\xi_{g'})$ valem, respectivamente, para os vértices $\mathrm{v}' = 1, 5, 2$,

$$G_1(\xi_{g'}) = \frac{1}{2}\left(2\xi_{g'} - 1\right), \tag{5.4}$$

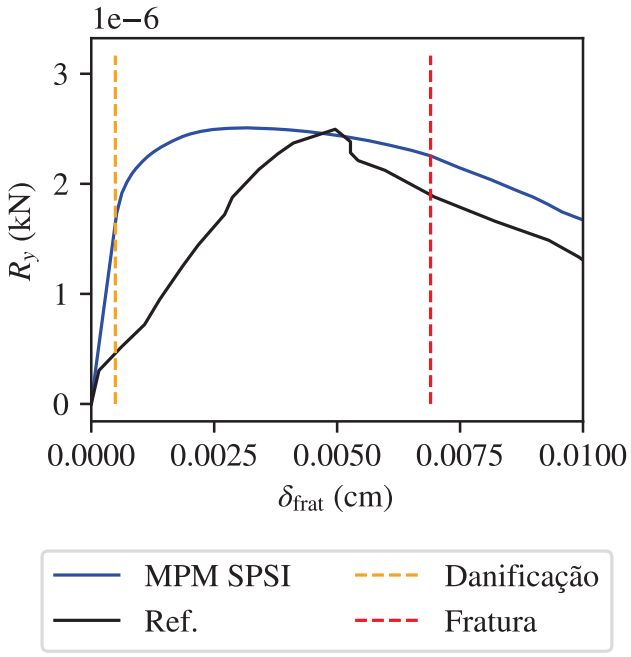
$$G_5(\xi_{g'}) = -2\xi_{g'} \tag{5.5}$$

e

$$G_2(\xi_{g'}) = \frac{1}{2}\left(2\xi_{g'} + 1\right). \tag{5.6}$$

Definidos os critérios de medição, comparam-se os resultados da simulação pelo MPM SPSI com os de Grégoire et al. (2013) na figura 68. O eixo das abcissas indica a abertura da fratura δ_{frat} e o das ordenadas mostra o carregamento vertical R_y transmitido à viga. Já a linha tracejada em laranja indica o momento a partir do qual a danificação tem início na simulação computacional. Por outro lado, a linha tracejada vermelha denota o momento de início da primeira fratura detectado com o MPM SPSI.

FIGURA 68 – COMPARAÇÃO ENTRE OS DIAGRAMAS ABERTURA DA FRATURA-CARREGAMENTO MEDIDOS EXPERIMENTALMENTE E COM O MPM SPSI.



FONTE: O autor (2022).
NOTA: Ref. é o trabalho de Grégoire et al. (2013).

Antes de qualquer análise, pontuam-se primeiramente as principais diferenças existentes entre o modelos computacional e experimental:

- o modelo de dano isotrópico de Rankine contempla apenas a perda de resistência e rigidez à tração do material, ou seja, o material permanece elástico linear sob deformações de compressão. Enquanto isso, o concreto caracteriza-se por ser não linear tanto sob tração quanto sob compressão;
- os valores de R_y mostrados na curva em azul da figura 68 são medições indiretas determinadas pela integração das tensões nos pontos da região de contato entre a viga e os suportes;

- Grégoire et al. (2013) não fornecem valores a serem utilizados como coeficientes de atrito e de amortecimento local não viscoso. Tais parâmetros são adotados na simulação computacional na tentativa de se representar minimamente o comportamento da estrutura real;
- enquanto Grégoire et al. (2013) evoluem os deslocamentos verticais e monitoram o carregamento aplicado, aqui evolui-se o carregamento e monitoram-se os deslocamentos;
- a viga simulada pelo MPM SPSI está apoiada sobre dois suportes elásticos, o que não ocorre com a viga experimental;
- para se reduzir o esforço computacional, aplica-se, na simulação numérica, um coeficiente redutor de 10^{-7} para o módulo de elasticidade, para a tensão limite de tração, para a energia de fratura por unidade de área e para o carregamento aplicado.

Tendo isso em vista, é possível afirmar que os carregamentos máximos (anteriores ao fraturamento) do modelo experimental e do modelo computacional com o MPM SPSI são próximos. No modelo experimental, o valor máximo medido, quando multiplicado por 10^{-7}, é de 2.54×10^{-6} kN. Ao mesmo tempo, esse valor é de 2.51×10^{-6} kN na simulação numérica. Isso remete a uma diferença de 1.18 %. Percebe-se, porém, uma maior rigidez da peça na simulação computacional no trecho pré-ruptura, algo ligado ao comportamento elástico linear considerado nas regiões comprimidas da viga pelo MPM SPSI.

Após a ruptura, o modelo experimental apresenta uma curva δ_{frat} *versus* R_y com uma queda do carregamento transmitido associado à aceleração da abertura da fratura. Na simulação computacional, há também uma queda de R_y após a ruptura. No entanto, essa queda é interrompida pelo início de um processo de oscilação, induzido em parte pela manutenção da rigidez à compressão da viga. Nesse caso, há também influência do comportamento elástico dos suportes, que tendem a reverter a energia de deformação acumulada na forma de energia cinética, gerando uma resposta vibracional. Como busca-se a comparação segundo o critério estático, interrompe-se a simulação computacional antes do início das vibrações pós ruptura.

Conforme já mostrado na figura 27, o carregamento aumenta de modo senoidal na análise numérica, mesmo após a ruptura. Essa característica também pode estar associada às diferenças de comportamento pós-pico em relação ao modelo experimental. Outro aspecto é a necessidade de melhor calibração dos coeficientes de atrito estático e cinético entre os subdomínios. Analogamente, uma calibração também é necessária para o coeficiente de amortecimento local não viscoso.

Com uma futura implementação de métodos mais robustos de integração no tempo, a representação numérica do ensaio de Grégoire et al. (2013) possivelmente tornaria-se mais fiel ao que ocorre na prática. Isso ocorreria pela possibilidade de desconsideração do fator de escala aplicado ao módulo de elasticidade, à tensão limite de tração, à energia de fratura por unidade de área e ao carregamento aplicado. Um modelo de dano mais representativo do comportamento mecânico do concreto também é indicada.

Apesar das ressalvas feitas em relação aos resultados, entende-se que o MPM SPSI, como um método numérico de análise não linear de estruturas, mostra-se aplicável na simulação virtual de um experimento real. Mesmo com todas as limitações listadas, o MPM SPSI é capaz de prever com relativa precisão o carregamento de pico pré-ruptura da peça. Além disso, verifica-se que as diferenças detectadas nas respostas estão diretamente associadas às diferenças nos dados de entrada do modelo e no modelo constitutivo aplicado na representação do material.

6 RESULTADOS

Neste capítulo, apresentam-se os resultados de processamento dos modelos cujos dados de entrada são mostrados em 4.3, para que possam ser discutidos no capítulo 7.

6.1 ANÁLISES SEM DANIFICAÇÃO E FRATURA

Nesta seção, mostram-se os resultados obtidos com o processamento dos modelos pelo algoritmo do MPM SPSI sem a consideração de danificação e fratura.

6.1.1 Modelo A - viga engastada-livre sob carregamento quase estático distribuído uniformemente

Os resultados do modelo A são agrupados de acordo com as discretizações das malhas Lagrangiana e Euleriana de cada submodelo.

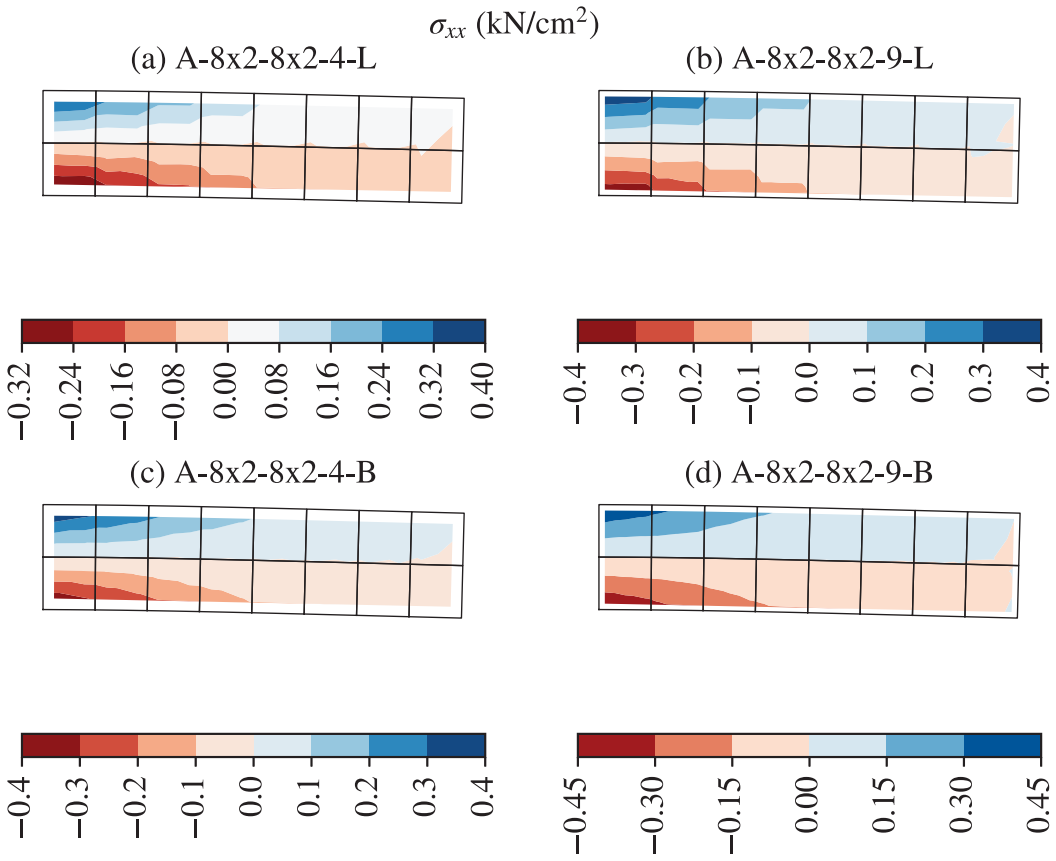
6.1.1.1 Submodelos A-8x2-8x2

As figuras 69, 70 e 71 plotam, respectivamente, as distribuições espaciais de tensões σ_{xx}, σ_{yy} e σ_{xy} dos submodelos com malha Lagrangiana 8×2 e Euleriana 8×2. Esses resultados são observados ao final do tempo de análise e os domínios das plotagens em cores resultam de uma interpolação de informações entre os pontos de Gauss dos subdomínios, não havendo extrapolação de resultados para os vértices externos da viga.

A comparação dos resultados de tensão produzidos pelo MPM SPSI ao final da análise com os resultados de referência, fornecidos por Piedade Neto (2013), é feita na seção transversal localizada na metade do comprimento da viga. Como, no MPM SPSI, os resultados de tensão são armazenados nos pontos de Gauss, escolhe-se uma linha de pontos imediatamente à esquerda da seção central e outra imediatamente à direita da mesma seção.

Na figura 72, mostram-se os pontos à esquerda em vermelho e os pontos à direita em azul. Essa mesma referência de cores é utilizada nos gráficos das figuras 73 a 75, com os resultados produzidos por Piedade Neto (2013) sendo plotados em preto. As figuras 73, 74 e 75 exibem, respectivamente, as tensões σ_{xx}, σ_{yy} e σ_{xy} na seção central dos submodelos A-8x2-8x2.

FIGURA 69 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{XX} NOS SUBMODELOS A-8X2-8X2.



FONTE: O autor (2022).

6.1.1.2 Submodelos A-8x2-32x8

O mesmo padrão de ilustração dos resultados dos submodelos A-8x2-8x2 é utilizados para os modelos A-8x2-32x8. Tem-se, respectivamente, nas figuras 76, 77 e 78, as variações espaciais das tensões σ_{xx}, σ_{yy} e σ_{xy} ao final da análise dos submodelos.

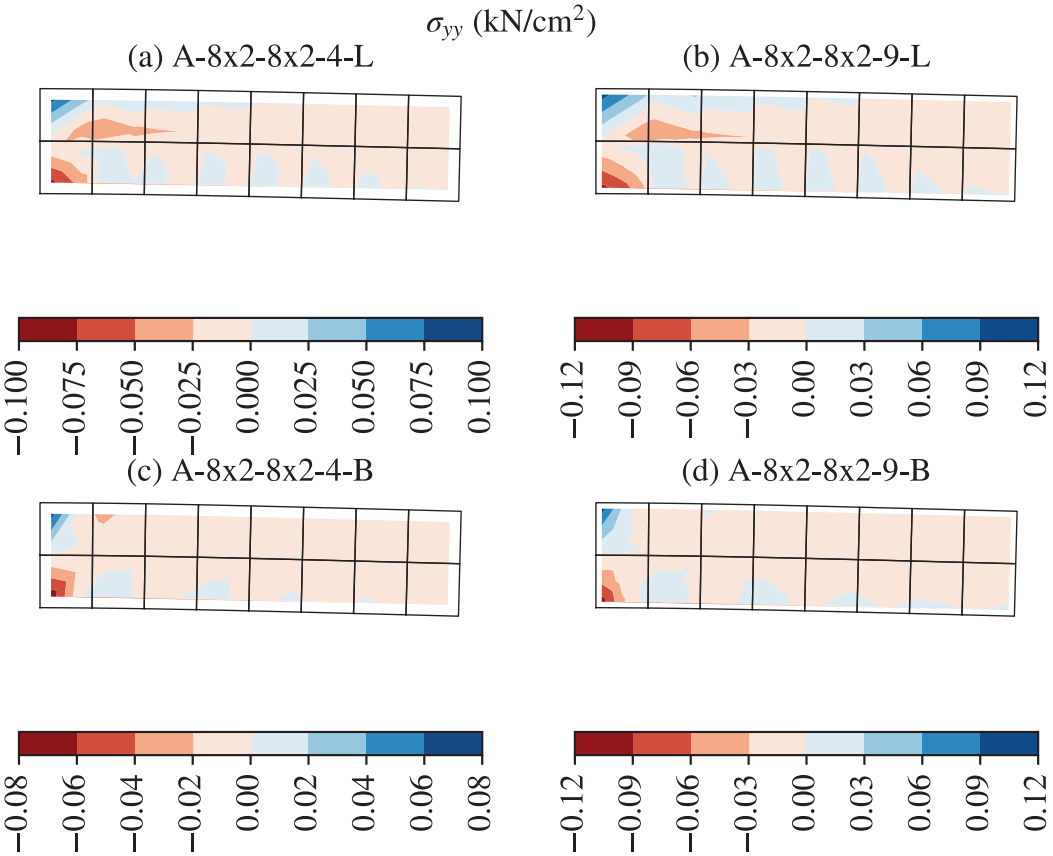
Já a figura 79 ilustra os pontos de Gauss à esquerda e à direita da seção central de referência, cujos resultados das tensões σ_{xx}, σ_{yy} e σ_{xy} são plotados nas figuras 80, 81 e 80, bem como são comparados com os resultados de Piedade Neto (2013).

6.1.1.3 Submodelos A-16x4-16x4

Assim, como é feito para os submodelos A-8x2-8x2 e A-8x2-32x8, nas figuras 83 a 85 ilustram-se as distribuições espaciais de tensões σ_{xx}, σ_{yy} e σ_{xy} dos submodelos A-16x4-16x4 no tempo final de análise.

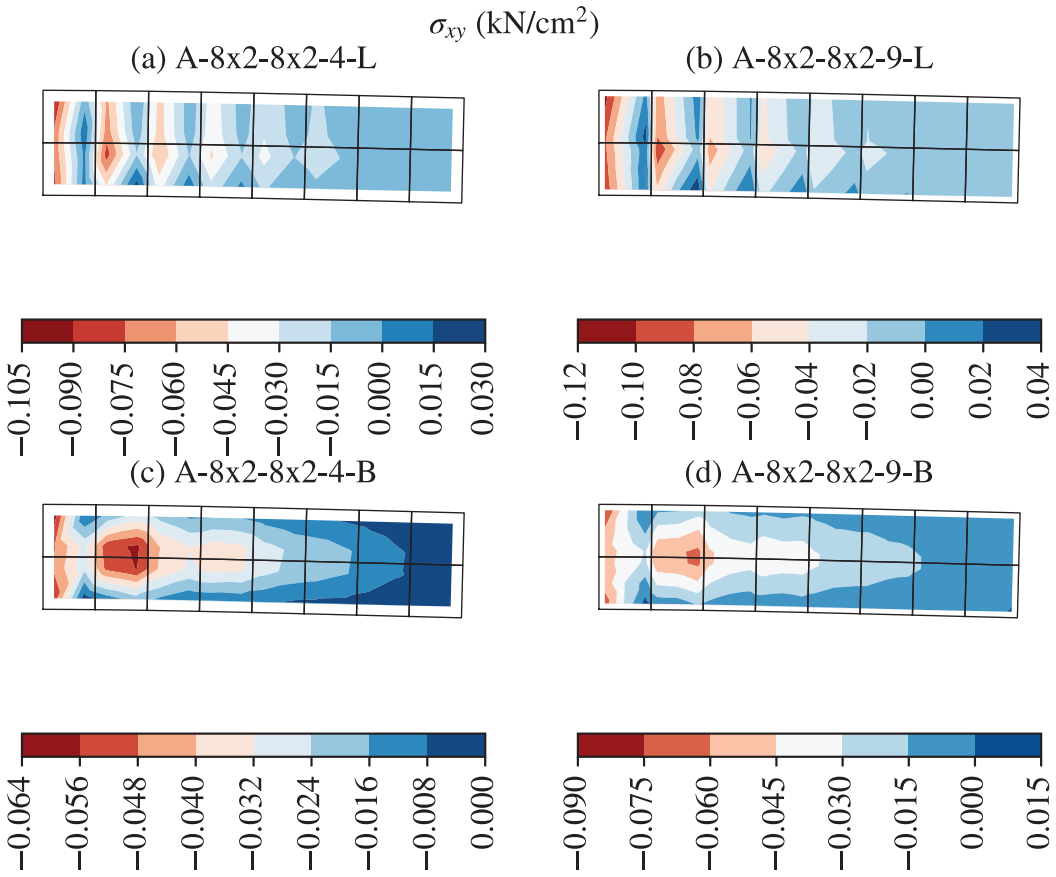
Além disso, nas figuras 87 a 89 são mostradas as distribuições de tensões σ_{xx}, σ_{yy} e σ_{xy} na seção central, representada pelos pontos em azul e vermelho da figura 86.

FIGURA 70 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{YY} NOS SUBMODELOS A-8X2-8X2.



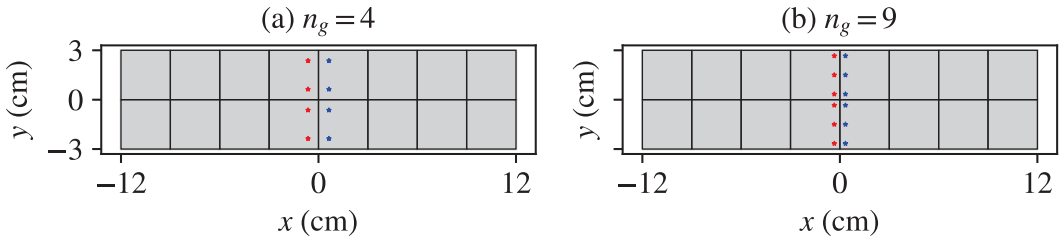
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 71 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{XY} NOS SUBMODELOS A-8X2-8X2.



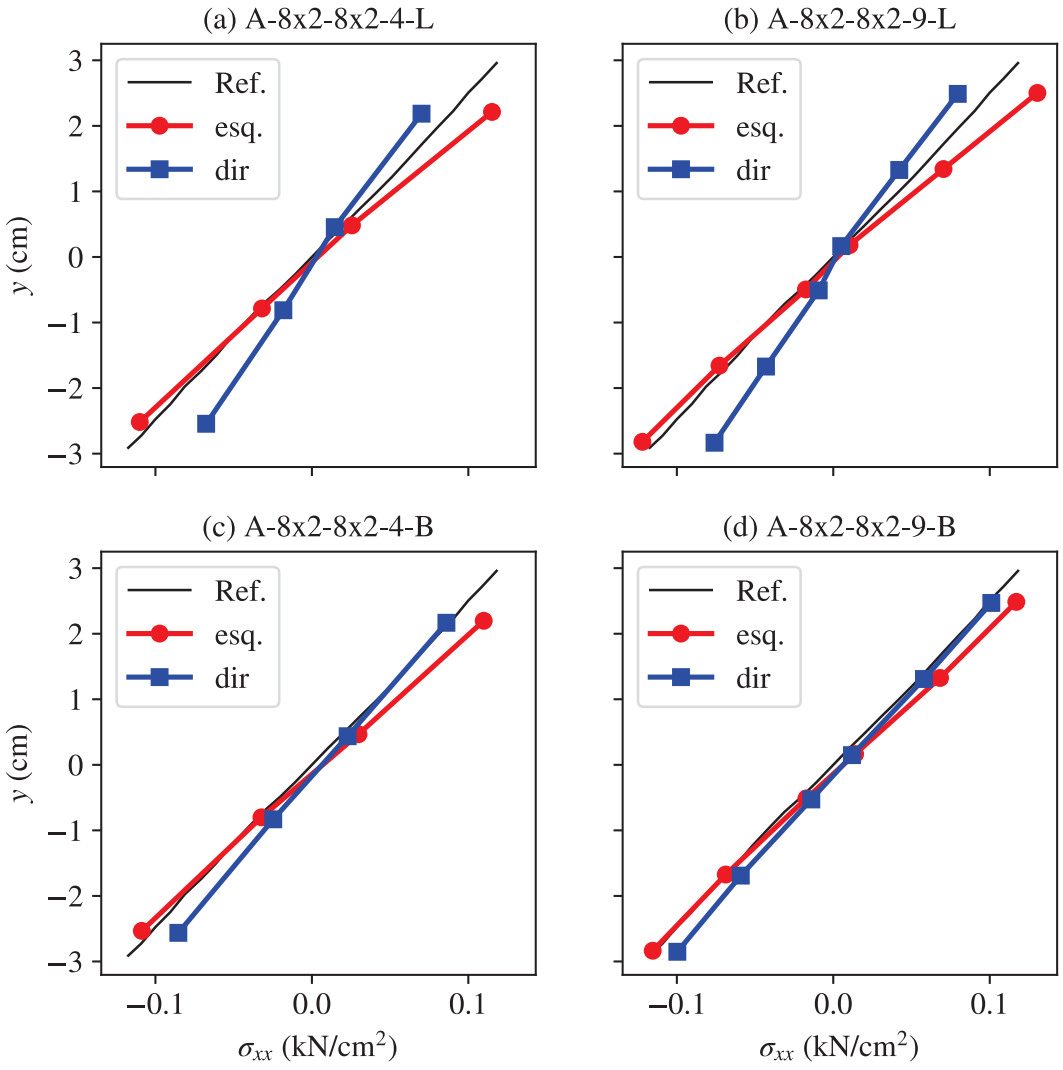
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 72 – INDICAÇÃO DOS PONTOS DE GAUSS À ESQUERDA (EM VERMELHO) E À DIREITA (EM AZUL) DA SEÇÃO CENTRAL PARA SUBMODELOS A-8X2-8X2.



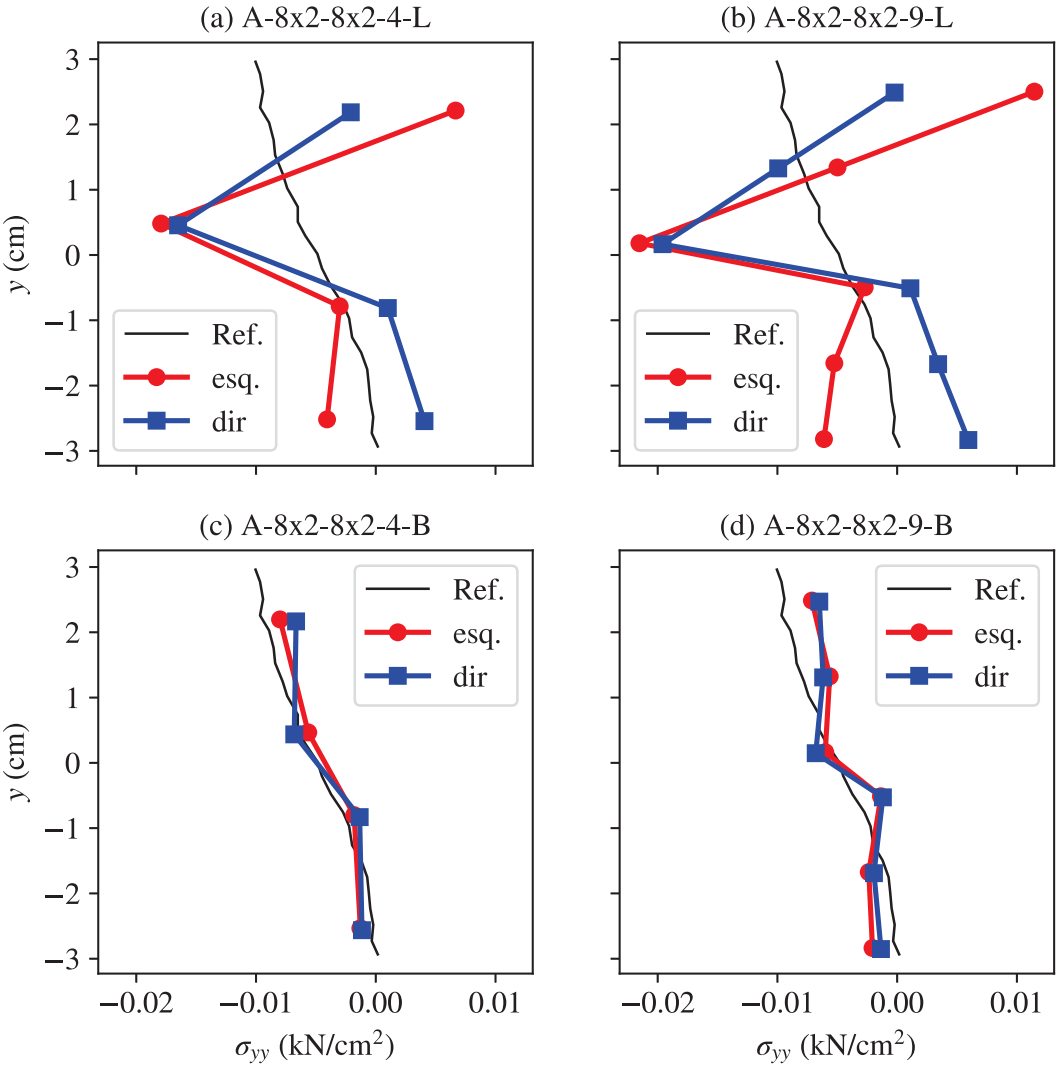
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 73 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{XX} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-8X2-8X2.



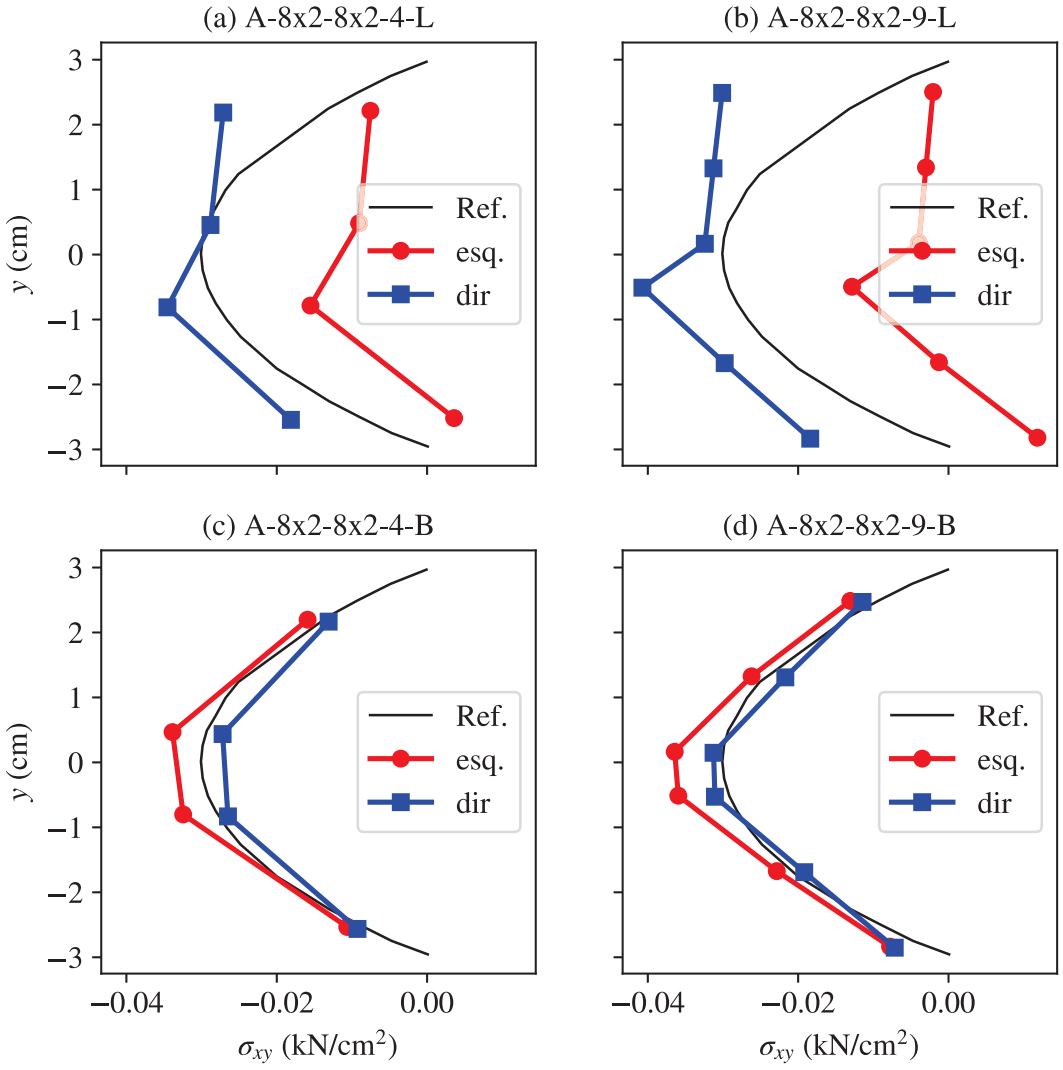
FONTE: O autor (2022).
NOTA: Ref. é o trabalho de Piedade Neto (2013).

FIGURA 74 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{YY} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-8X2-8X2.



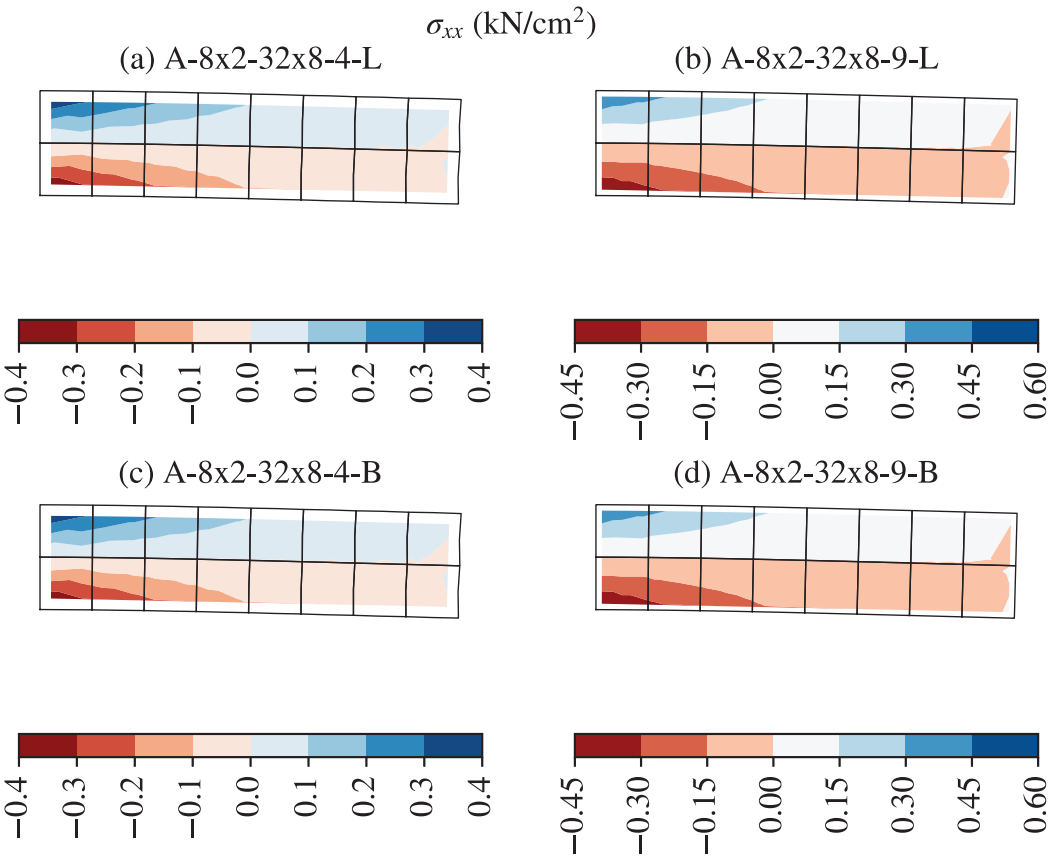
FONTE: O autor (2022).
NOTA: Ref. é o trabalho de Piedade Neto (2013).

FIGURA 75 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{XY} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-8X2-8X2.



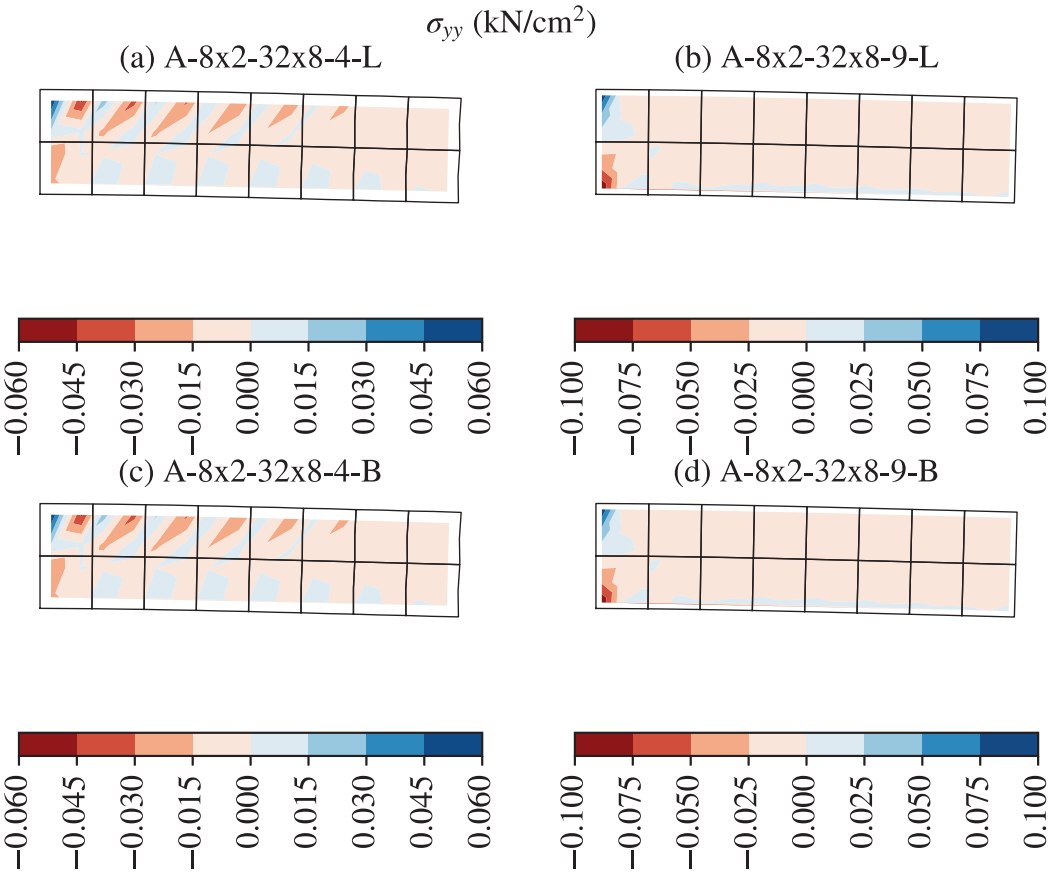
FONTE: O autor (2022).
NOTA: Ref. é o trabalho de Piedade Neto (2013).

FIGURA 76 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{XX} NOS SUBMODELOS A-8X2-32X8.



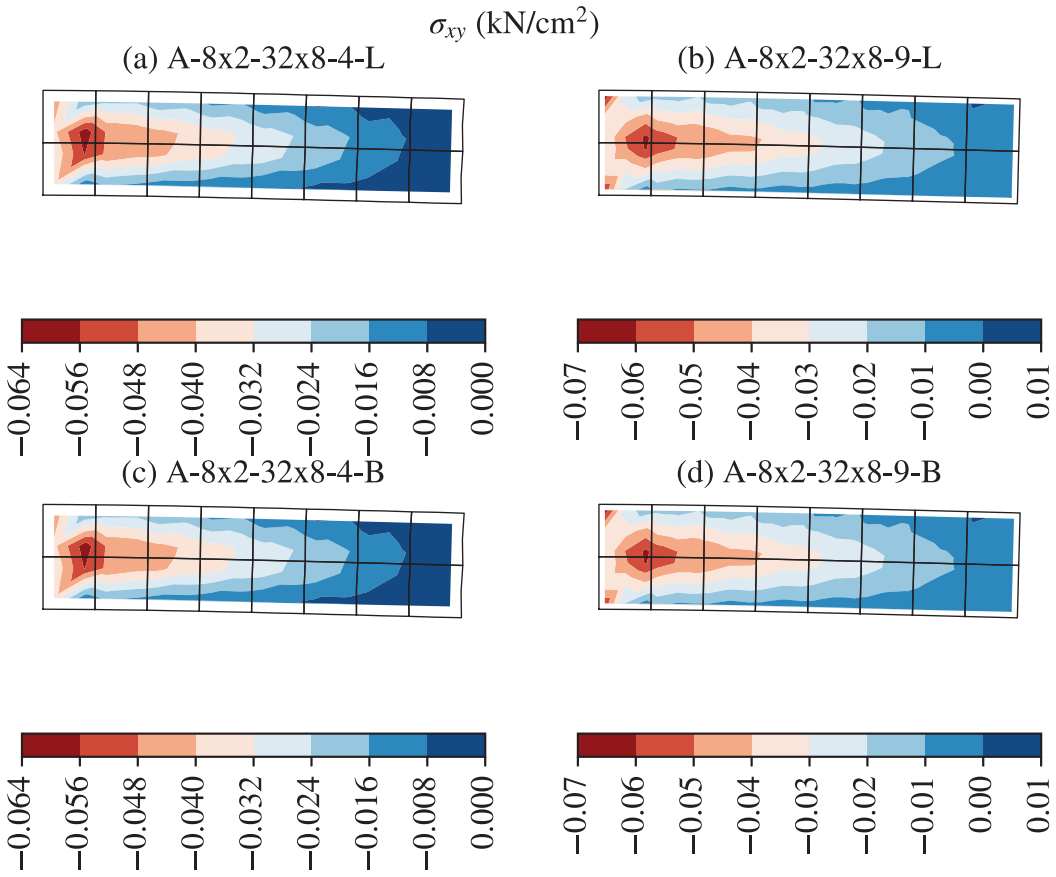
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 77 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{YY} NOS SUBMODELOS A-8X2-32X8.



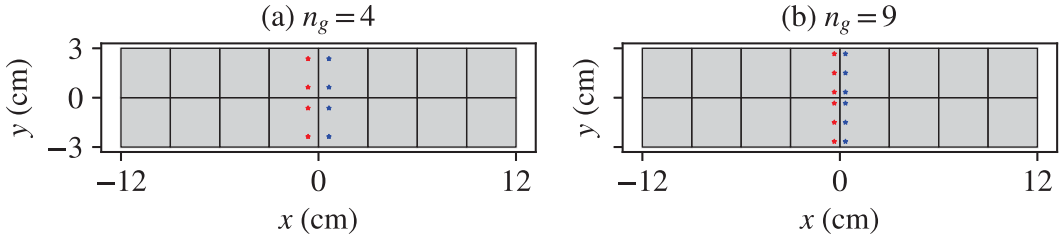
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 78 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{XY} NOS SUBMODELOS A-8X2-32X8.



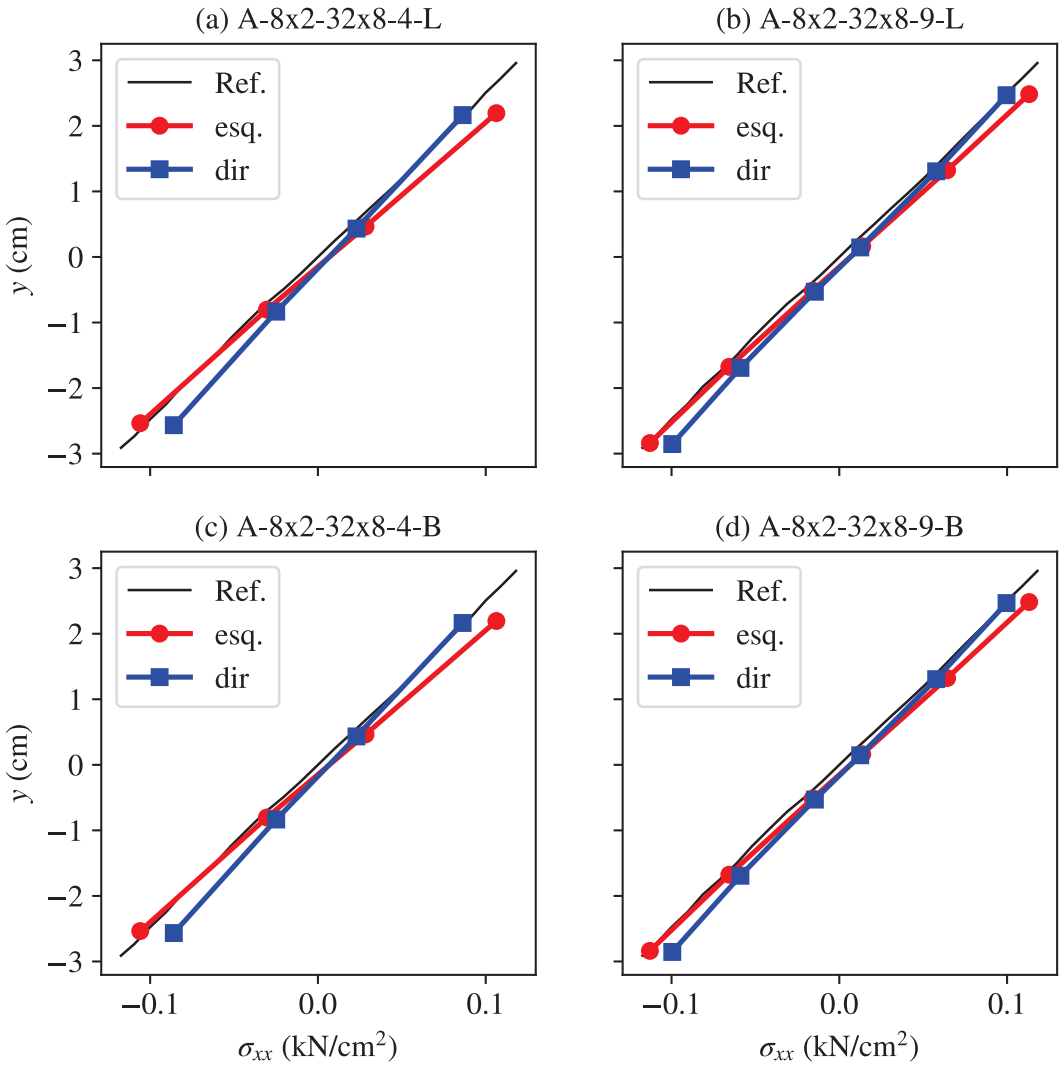
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 79 – INDICAÇÃO DOS PONTOS DE GAUSS À ESQUERDA (EM VERMELHO) E À DIREITA (EM AZUL) DA SEÇÃO CENTRAL PARA SUBMODELOS A-8X2-32X8.



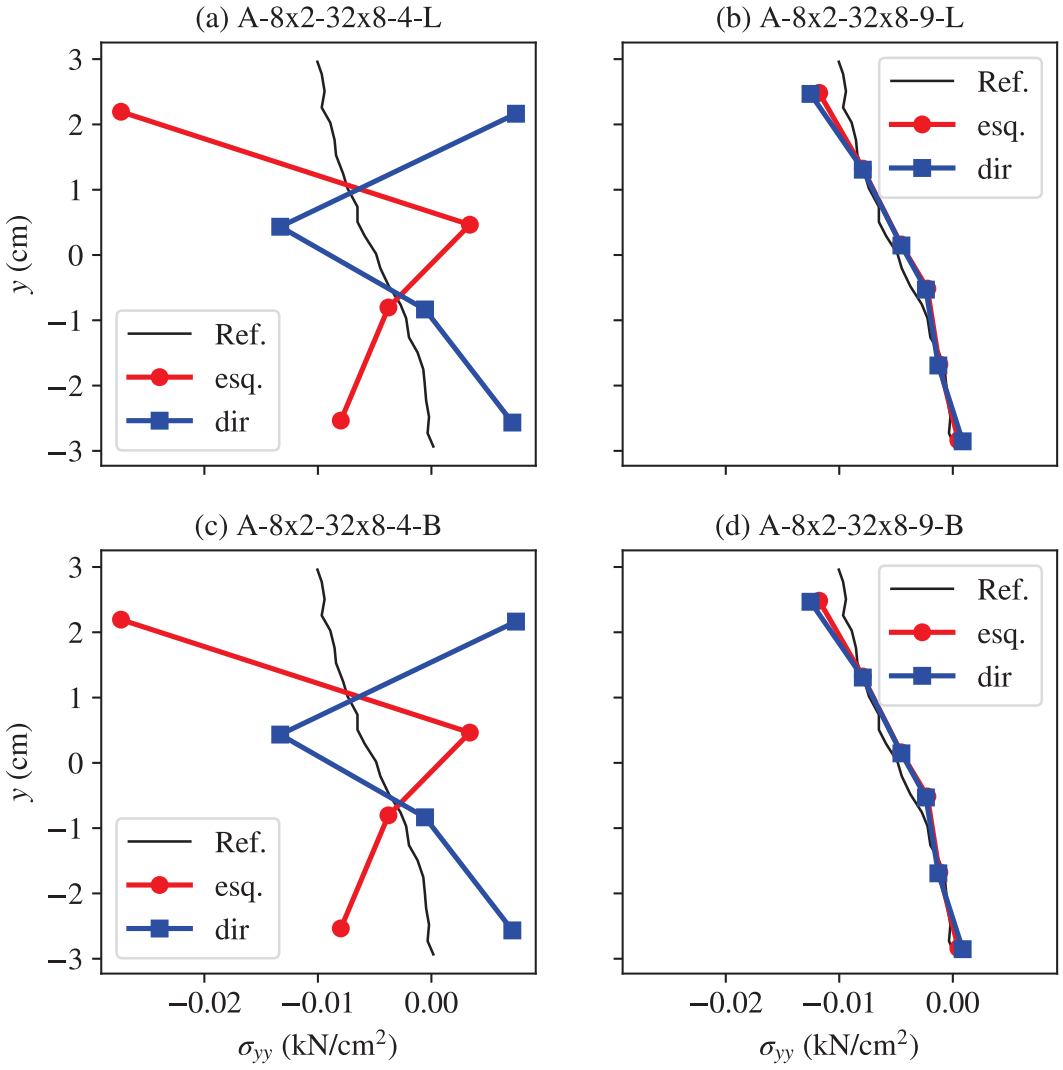
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 80 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{XX} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-8X2-32X8.



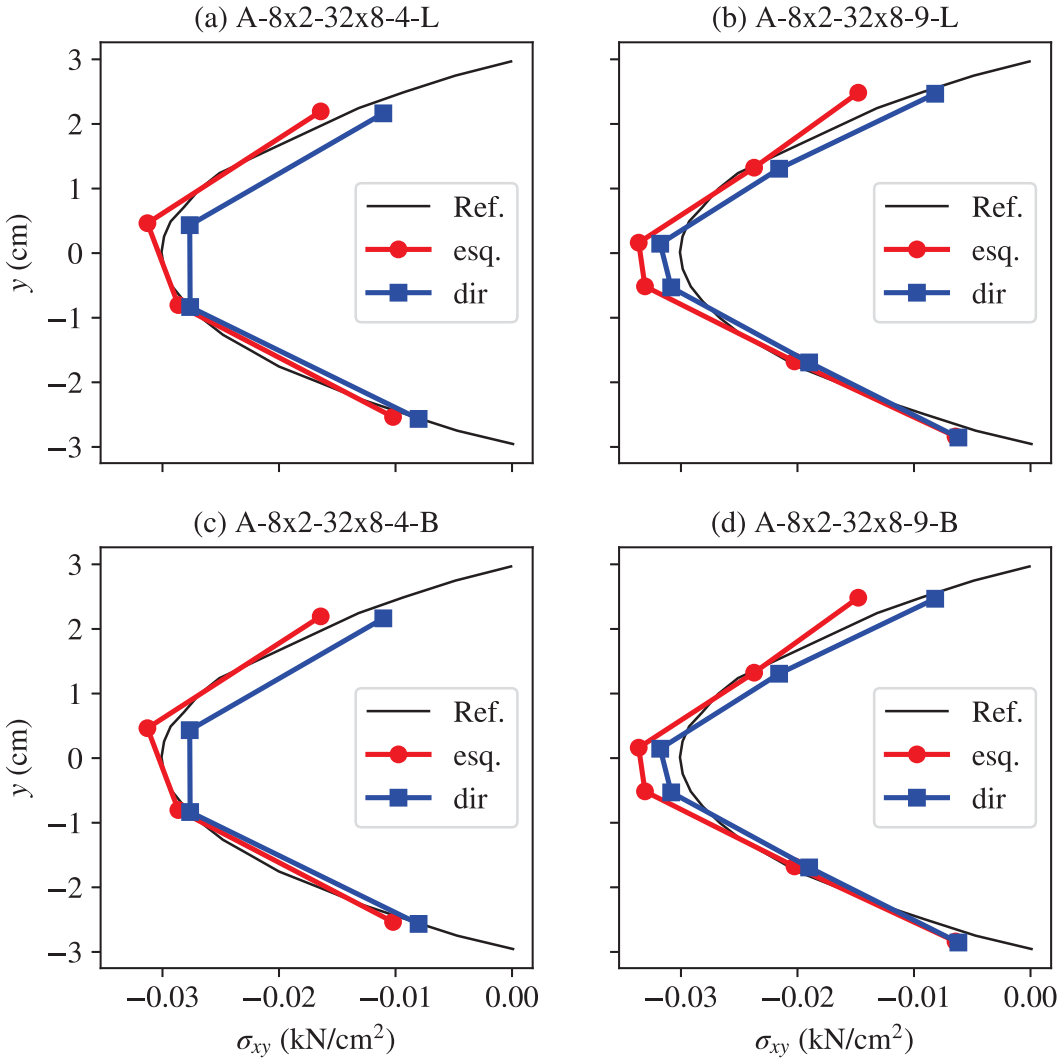
FONTE: O autor (2022).
NOTA: Ref. é o trabalho de Piedade Neto (2013).

FIGURA 81 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{YY} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-8X2-32X8.



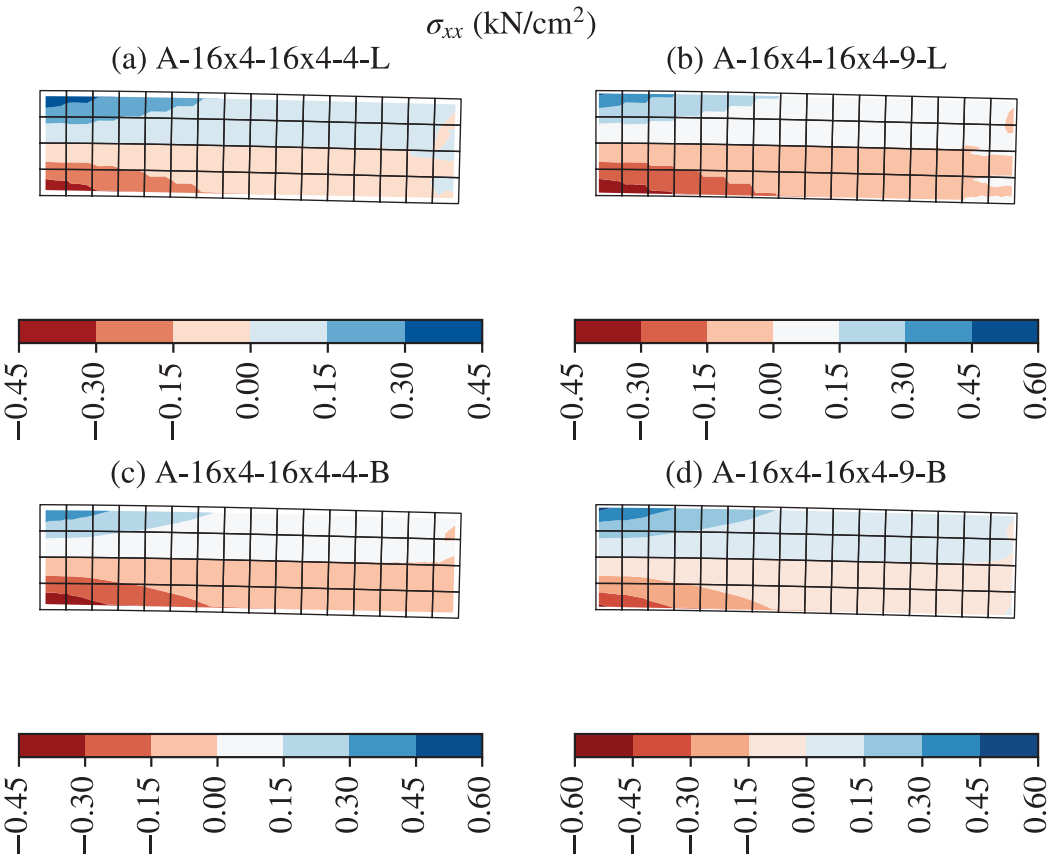
FONTE: O autor (2022).
NOTA: Ref. é o trabalho de Piedade Neto (2013).

FIGURA 82 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{XY} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-8X2-32X8.



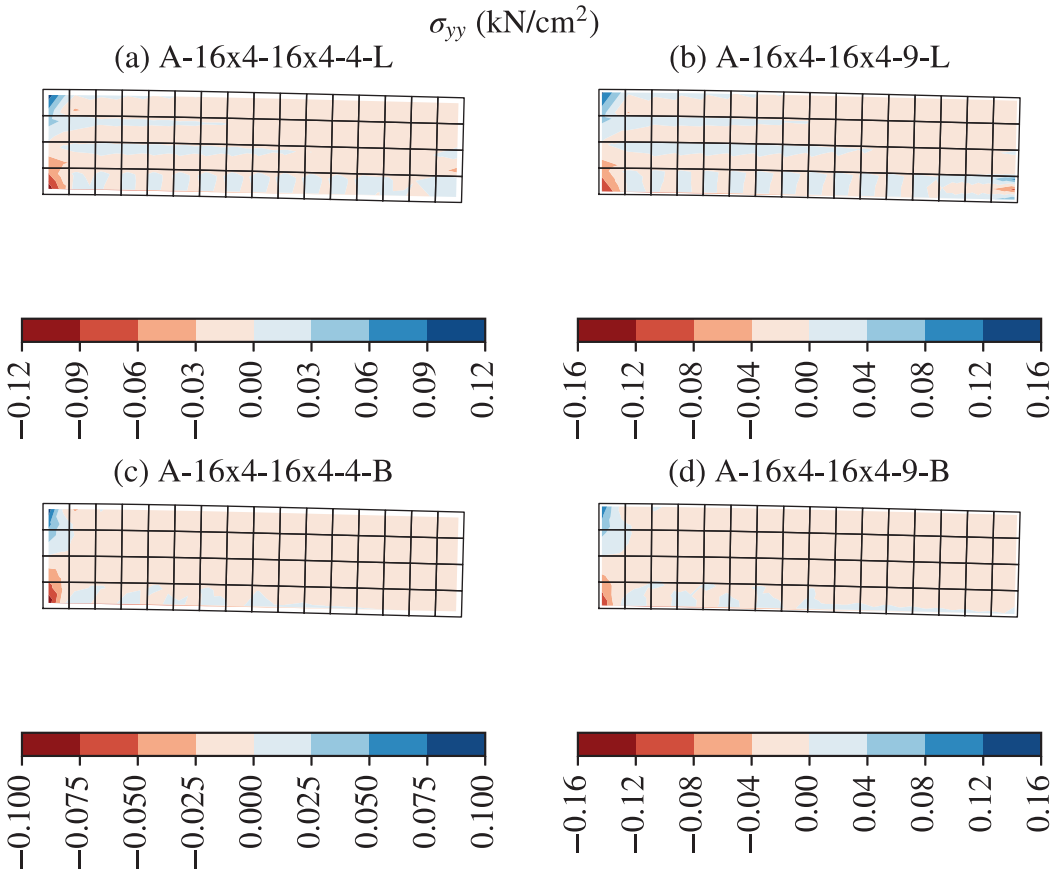
FONTE: O autor (2022).
NOTA: Ref. é o trabalho de Piedade Neto (2013).

FIGURA 83 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{XX} NOS SUBMODELOS A-16X4-16X4.



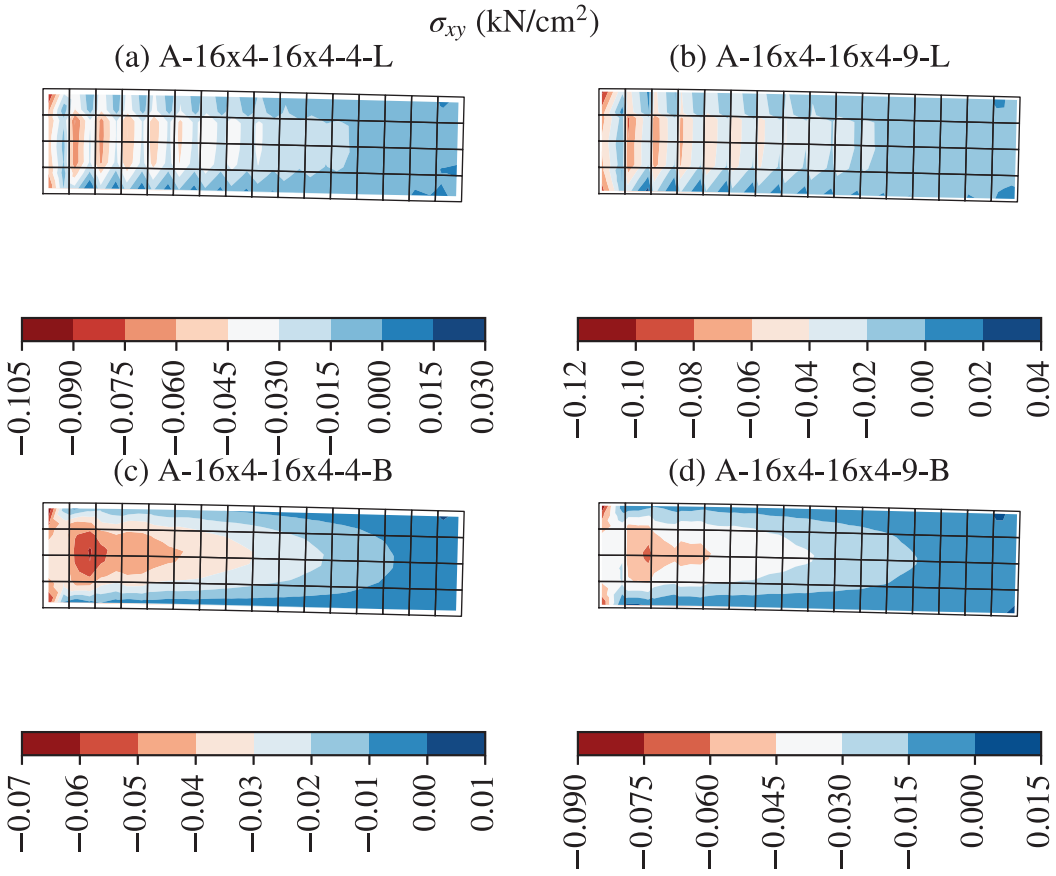
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 84 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{YY} NOS SUBMODELOS A-16X4-16X4.



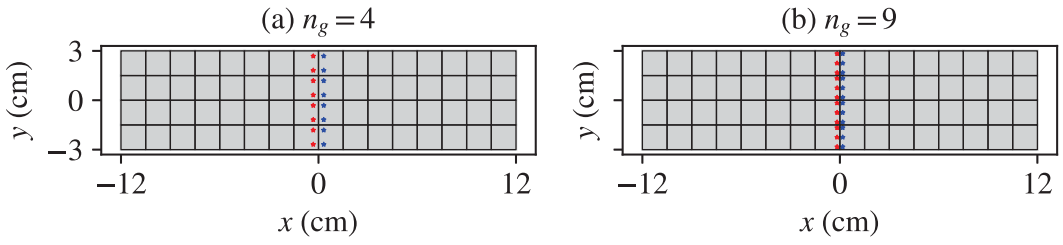
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 85 – DISTRIBUIÇÃO GERAL DE TENSÕES σ_{XY} NOS SUBMODELOS A-16X4-16X4.



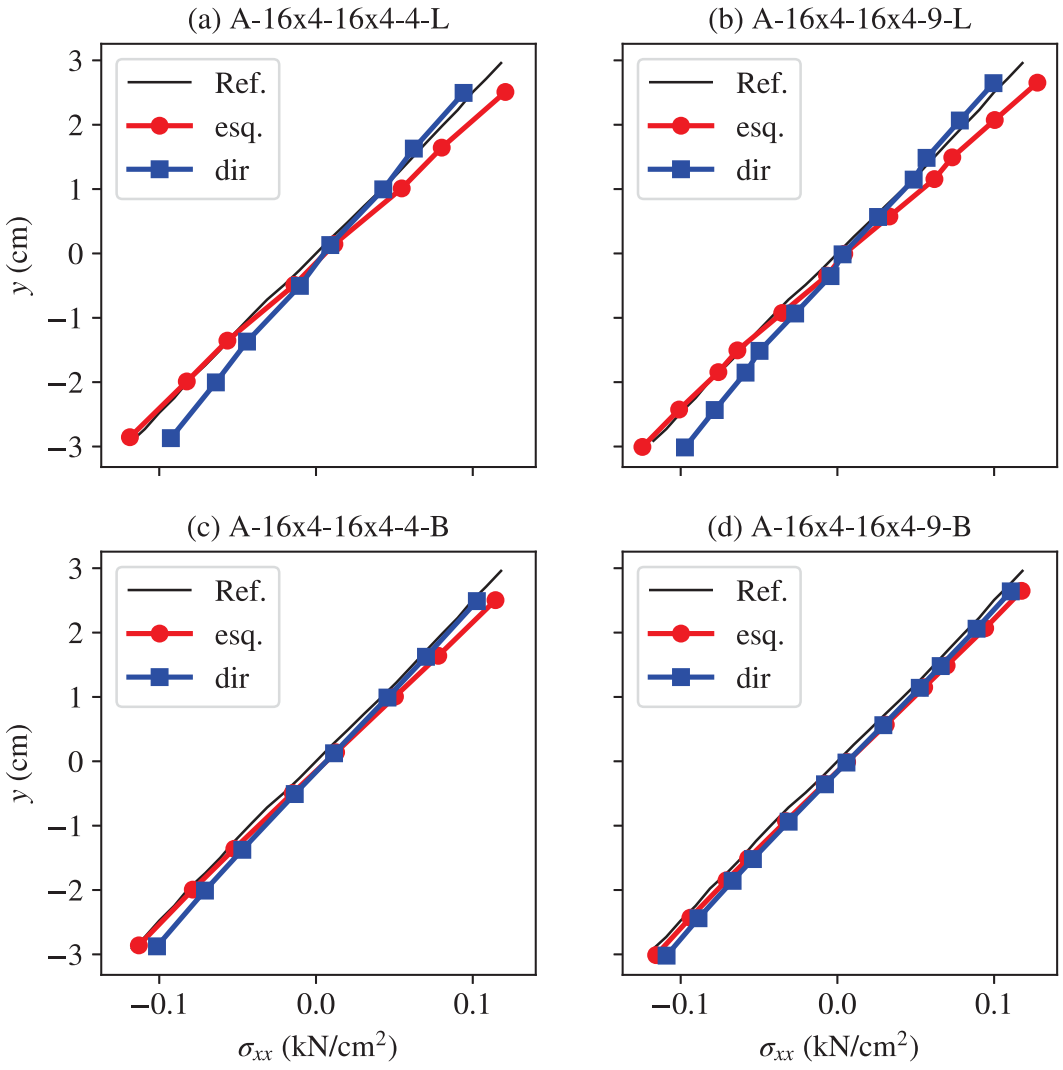
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 86 – INDICAÇÃO DOS PONTOS DE GAUSS À ESQUERDA (EM VERMELHO) E À DIREITA (EM AZUL) DA SEÇÃO CENTRAL PARA SUBMODELOS A-16X4-16X4.



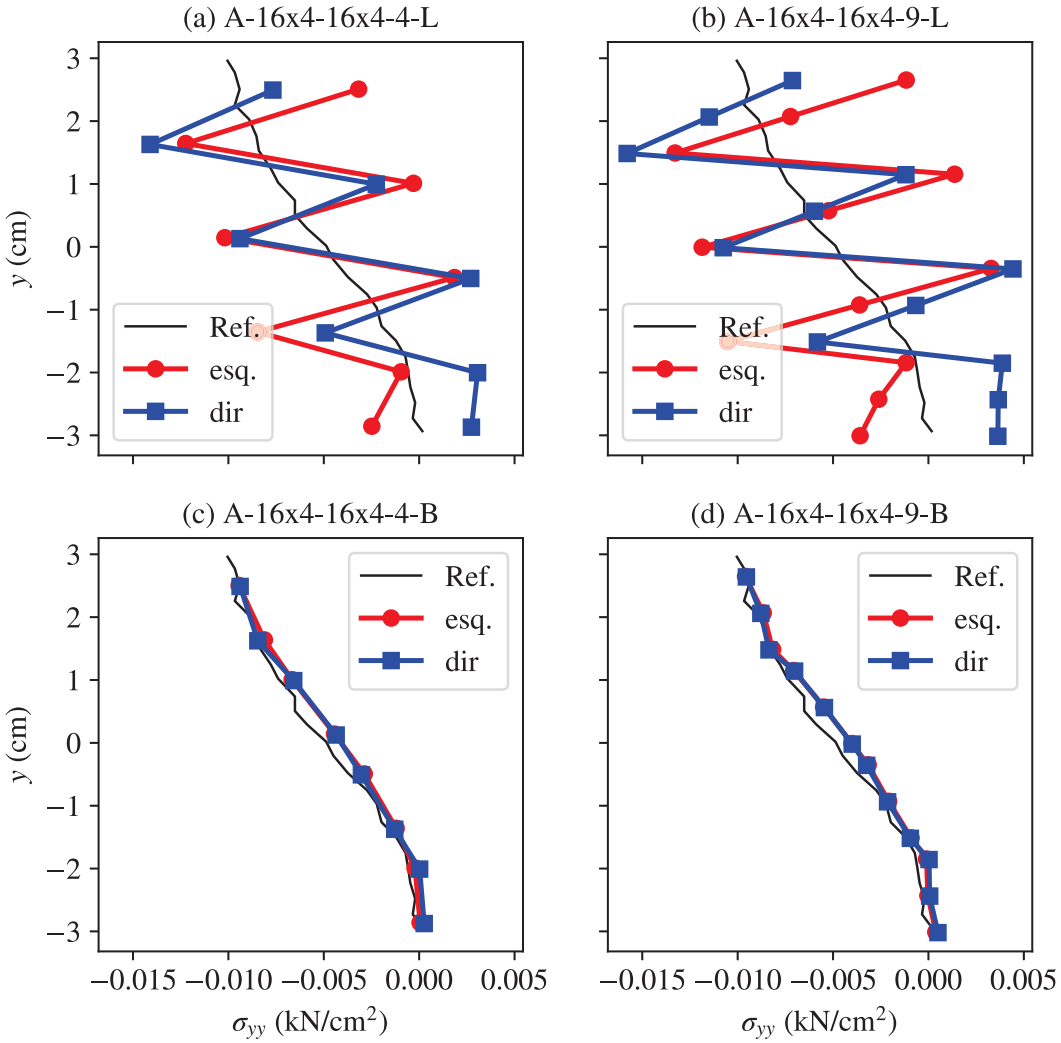
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 87 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{XX} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-16X4-16X4.



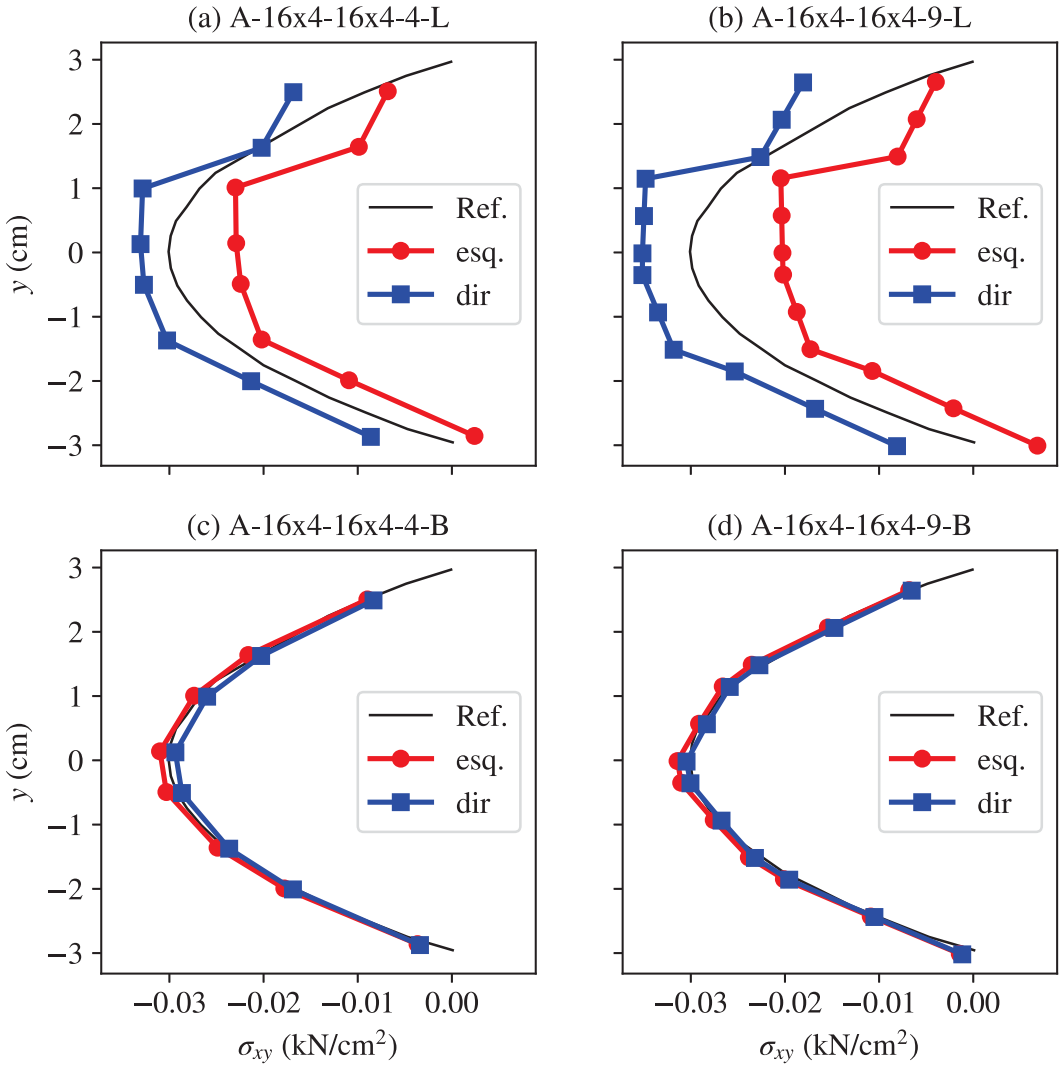
FONTE: O autor (2022).
NOTA: Ref. é o trabalho de Piedade Neto (2013).

FIGURA 88 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{YY} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-16X4-16X4.



FONTE: O autor (2022).
NOTA: Ref. é o trabalho de Piedade Neto (2013).

FIGURA 89 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES σ_{XY} NA SEÇÃO CENTRAL DOS SUBMODELOS A-16X4-16X4.

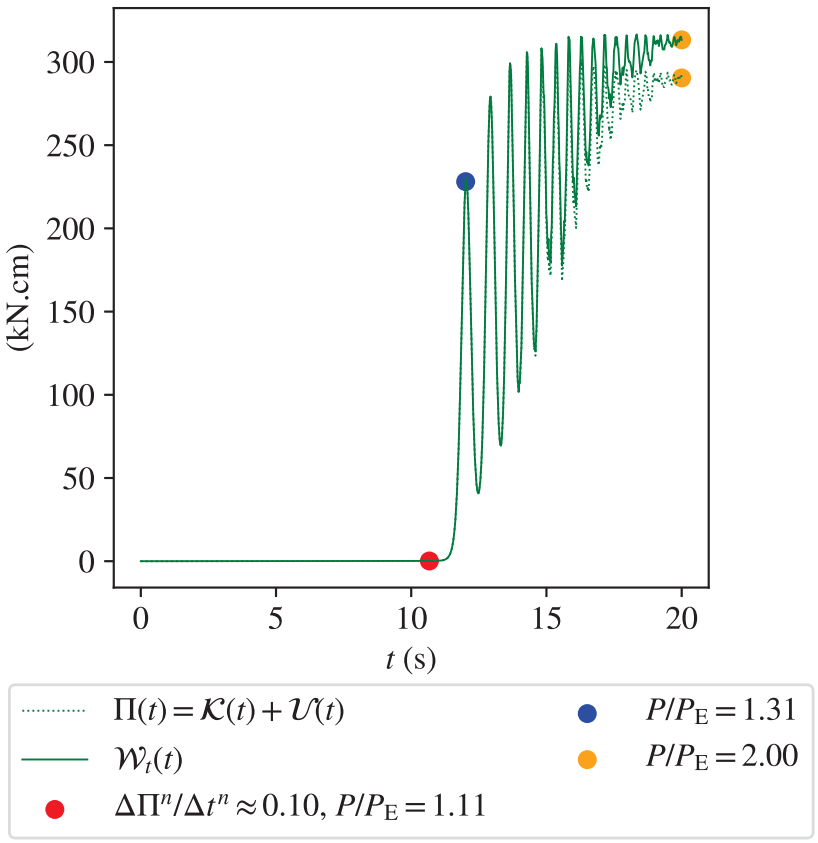


FONTE: O autor (2022).
NOTA: Ref. é o trabalho de Piedade Neto (2013).

6.1.2 Modelo B - barra engastada-livre sob carregamento quase estático de compressão sofrendo instabilidade

No caso do modelo B, os primeiros resultados mostrados são aqueles da figura 90. Nessa figura plotam-se as variações no tempo da energia mecânica potencial total $\Pi(t) = \mathcal{K}(t) + \mathcal{U}(t)$ e do trabalho das forças externas $\mathcal{W}_t(t)$. Isso é feito para se demonstrar o momento em que a barra sofre a instabilização e a consequente mudança abrupta em seu estado de equilíbrio.

FIGURA 90 – VARIAÇÕES DE ENERGIA MECÂNICA AO LONGO DA ANÁLISE DO MODELO B.



FONTE: O autor (2022).

O cálculo da energia cinética total do sistema no tempo t^{n+1} é feito de acordo com a equação

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(t^{n+1}) &= \mathcal{K}^{n+1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_p \int_{\Omega_p^{n+1}} \rho(\mathbf{x}, t^{n+1})\mathbf{v}(\mathbf{x}, t^{n+1}) \cdot \mathbf{v}(\mathbf{x}, t^{n+1}) dV \\ &= \frac{1}{2}\sum_p \sum_g \rho_g^{n+1}\mathbf{v}_g^{n+1} \cdot \mathbf{v}_g^{n+1} l_{z_g}^{n+1} \det(J_{(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})_g}^{n+1}) w_g \end{aligned} \tag{6.1}$$

e o da energia interna de deformação total do sistema segue a equação

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}(t^{n+1}) &= \mathcal{U}^{n+1} \\
&= \mathcal{U}^{n} + \Delta\mathcal{U}^{n} \\
&= \mathcal{U}^{n} + \Delta t^{n} \sum_{p} \int_{\Omega_p^{n+1}} \mathbf{D}(\mathbf{x}, t^{n+1}) : \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t^{n+1}) dV. \\
&= \mathcal{U}^{n} + \Delta t^{n} \sum_{p} \sum_{g} \left(\mathbf{D}_g^{n+1} : \boldsymbol{\sigma}_g^{n+1} \right) l_{z_g}^{n+1} \det(J_{(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})_g}^{n+1}) w_g
\end{aligned} \tag{6.2}$$

Já a determinação do trabalho das forças internas em t^{n+1} é feito conforme a equação

$$\begin{aligned}
\mathcal{W}_t(t^{n+1}) &= \mathcal{W}_t^{n+1} \\
&= \mathcal{W}_t^{n} + \Delta\mathcal{W}_t^{n}. \\
&= \mathcal{W}_t^{n} + \sum_{p} \sum_{\mathrm{v}} \left(\mathbf{f}_{\mathrm{v}}^{n+1} \cdot \Delta\mathbf{x}_{\mathrm{v}}^{n} \right)
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Para fins didáticos, determinam-se os pontos vermelho, azul e laranja na figura 90. O ponto vermelho representa o início da instabilização da barra, aquele em que a energia potencial total $\Pi(t)$ passa a ter grandes variações com pequenos incrementos de tempo. Define-se, pela análise das curvas, que esse ponto pode ser representado pelo instante de tempo em que

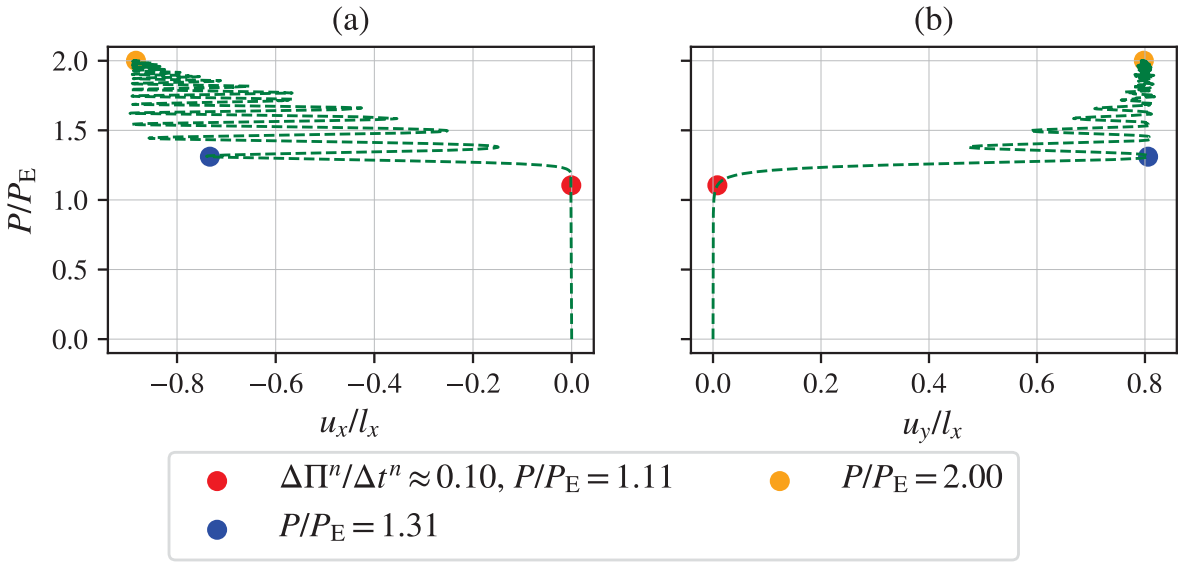
$$\frac{\Delta\Pi^{n}}{\Delta t^{n}} = \frac{\Pi^{n+1} - \Pi^{n}}{t^{n+1} - t^{n}} \tag{6.4}$$

atinge aproximadamente o valor de 0.10 kN.cm/s.

Já o ponto em azul diz respeito ao momento em que a barra inicia um processo dinâmico de vibração para atingir um novo estado de equilíbrio, após perder a estabilidade inicial. Esse estado de equilíbrio é aproximadamente aquele observado no ponto laranja da figura 90, representativo do final da análise.

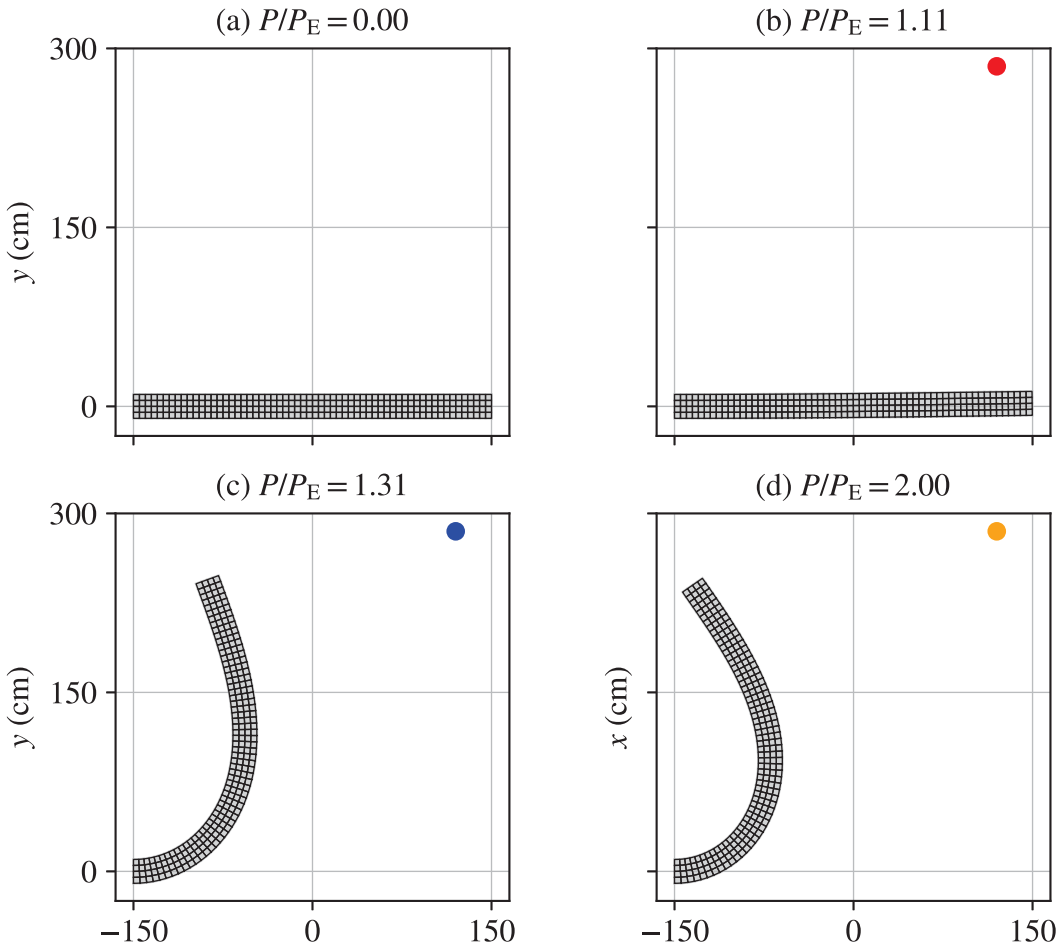
Na figura 91, mostram-se as variações dos deslocamentos nas direções x (a) e y (b) do ponto médio da extremidade livre da barra com o aumento do carregamento axial. Os pontos ilustrativos definidos anteriormente na figura 90 são reproduzidos na figura 91. Por fim, plotam-se as configurações inicial e deformadas da barra do modelo B em diferentes tempos da análise (pontos vermelho, azul e laranja).

FIGURA 91 – DESLOCAMENTOS *VERSUS* CARGA AXIAL NO PONTO MÉDIO DA EXTREMIDADE LIVRE DA BARRA DO MODELO B.



FONTE: O autor (2022).

FIGURA 92 – CONFIGURAÇÕES DO MODELO B NA SITUAÇÃO INDEFORMADA E NAS SITUAÇÕES DEFORMADAS DOS PONTOS VERMELHO, AZUL E LARANJA IDENTIFICADOS.

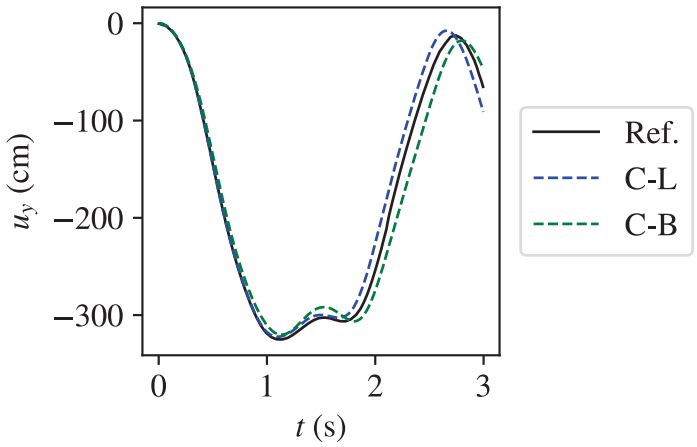


FONTE: O autor (2022).

6.1.3 Modelo C - laje engastada-livre sob ação da gravidade

Na figura 93, busca-se a comparação dos deslocamentos em y do ponto de Gauss $g = 5$, do subdomínio mais inferior da extremidade livre da laje, produzidos pelo MPM SPSI (submodelos C-L e C-B) com aqueles gerados pelo MPM CPDI, no trabalho de Sadeghirad et al. (2011).

FIGURA 93 – VARIAÇÕES DE DESLOCAMENTO EM Y NO PONTO DE GAUSS DE GAUSS $G = 5$ DO SUBDOMÍNIO MAIS INFERIOR DA EXTREMIDADE LIVRE DA LAJE.



FONTE: O autor (2022).
NOTA: Ref. é o trabalho de Sadeghirad et al. (2011)

Com a figura 94, mostram-se as variações ao longo do tempo da energia potencial total $\Pi(t) = \mathcal{K}(t) + \mathcal{U}(t)$ e do trabalho das forças externas de corpo $\mathcal{W}_b(t)$, calculado no instante t^{n+1} como

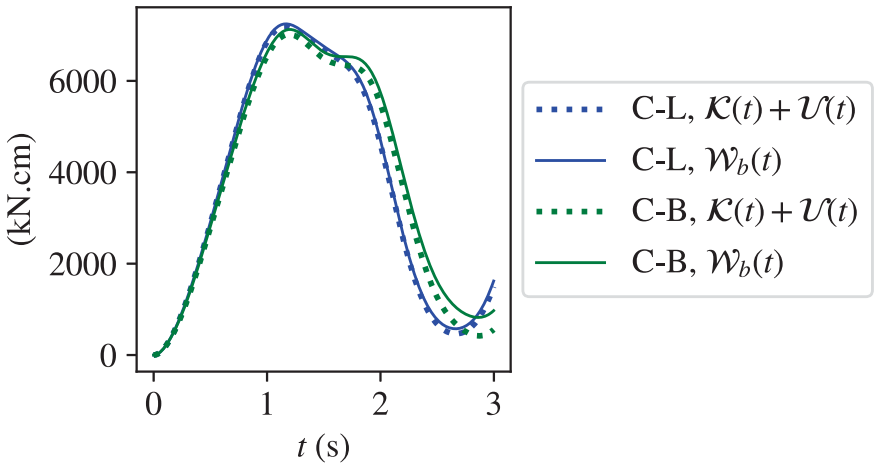
$$\begin{aligned} \mathcal{W}_b(t^{n+1}) &= \mathcal{W}_b^{n+1} \\ &= \mathcal{W}_b^n + \Delta\mathcal{W}_b^n \\ &= \mathcal{W}_b^n + \Delta t^n \int_{\Omega_p^{n+1}} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t^{n+1}) \cdot \rho(\mathbf{x}, t^{n+1}) \mathbf{b}(\mathbf{x}, t^{n+1}) dV \cdot \\ &= \mathcal{W}_b^n + \Delta t^n \sum_p \sum_g \mathbf{v}_g^{n+1} \cdot \rho_g^{n+1} \mathbf{b}_g^{n+1} l_{z_g}^{n+1} \det(J_{(\mathbf{x},\boldsymbol{\xi})_g}^{n+1}) w_g \end{aligned} \tag{6.5}$$

Adicionalmente, também confrontam-se, nas figuras 95 e 96, as configurações deformadas da laje em diferentes tempos da análise. Os resultados produzidos pelo processamento dos submodelos C-L e C-B pelo MPM SPSI são mostrados na figura 95, enquanto os resultados de Sadeghirad et al. (2011) são trazidos na figura 96.

6.1.4 Modelo D - bloco sob a ação de gravidade extrema

Pelo fato de Sadeghirad et al. (2011) também disponibilizarem os resultados, produzidos pelo MPM CPDI, de uma análise com a mesma configuração do modelo

FIGURA 94 – VARIAÇÕES DA ENERGIA MECÂNICA POTENCIAL TOTAL E DO TRABALHO DAS FORÇAS DE CORPO DO MODELO C.

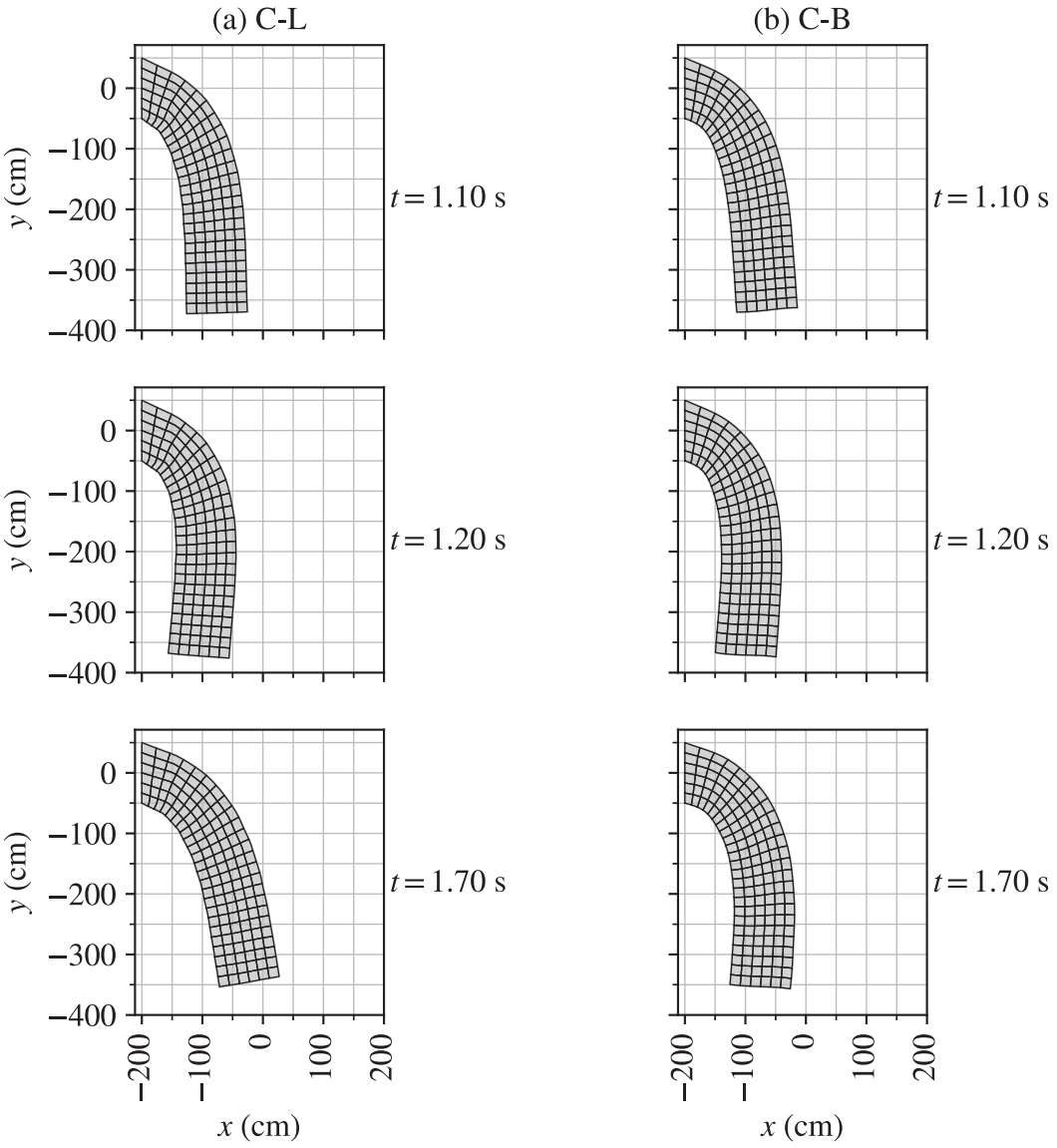


FONTE: O autor (2022).

D, realizam-se comparações semelhantes àquelas feitas em 6.1.3. Assim, na figura 97 constam os deslocamentos em y, ao longo do tempo, do ponto de Gauss $g = 5$ do subdomínio logo à esquerda do ponto médio da face inferior do bloco. Plotam-se, em um mesmo gráfico, os resultados dos submodelos D-L e D-B (MPM SPSI) e os resultados de Sadeghirad et al. (2011) (MPM CPDI).

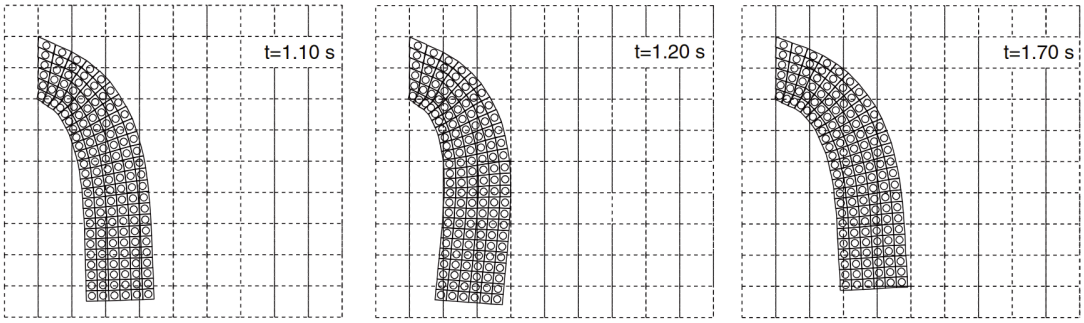
Na figura 98, estão as variações temporais da energia mecânica potencial total e do trabalho das forças externas de corpo observadas nos submodelos D-L e D-B. Também comparam-se as configurações deformadas dos submodelos D-L e D-B pelo MPM SPSI, que estão na figura 99, com os resultados gerados com o MPM CPDI (figura 100).

FIGURA 95 – CONFIGURAÇÕES DEFORMADAS DOS SUBMODELOS C-L E C-B AO LONGO DA ANÁLISE.



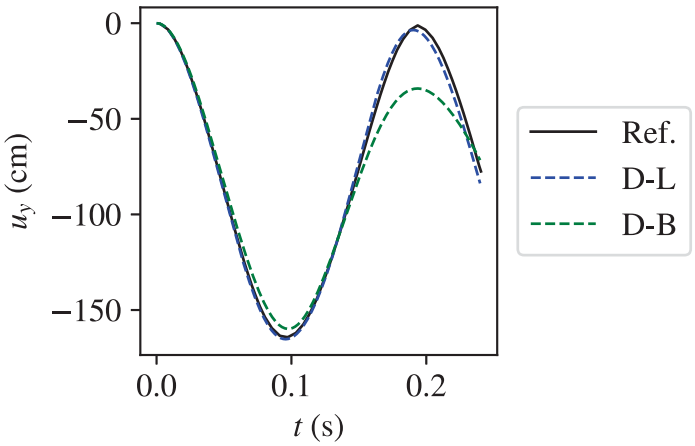
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 96 – CONFIGURAÇÕES DEFORMADAS PRODUZIDAS PELO MPM CPDI COM OS MESMOS DADOS DE ENTRADA DO MODELO C.



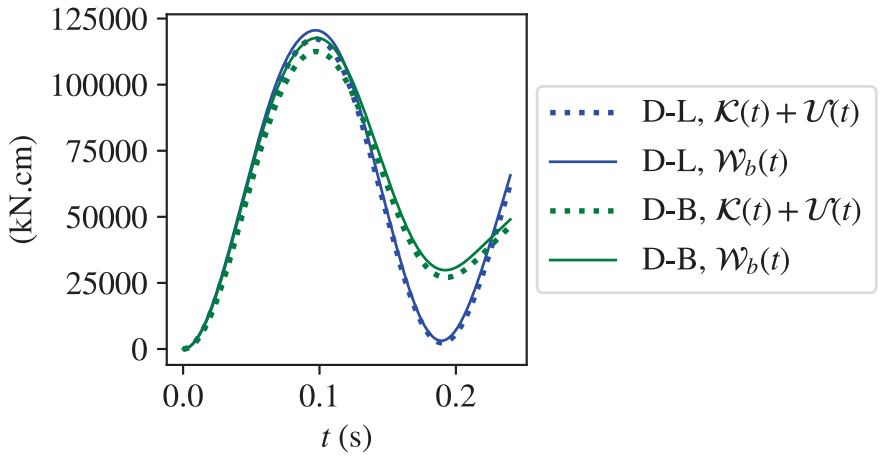
FONTE: Sadeghirad et al. (2011).

FIGURA 97 – VARIAÇÕES DE DESLOCAMENTO EM Y DO PONTO DE GAUSS $G = 5$ DO SUBDOMÍNIO IMEDIATAMENTE À ESQUERDA DO PONTO MÉDIO DA FACE INFERIOR DO BLOCO.



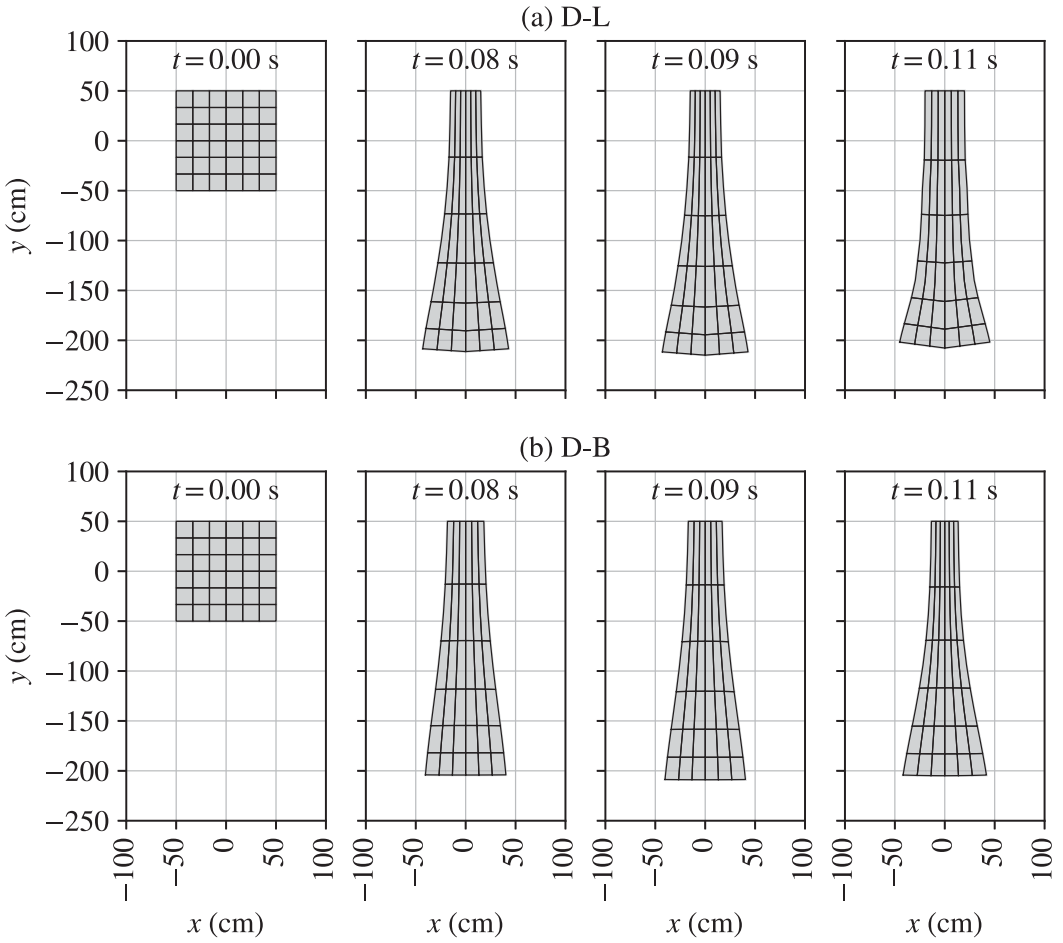
FONTE: O autor (2022).
NOTA: Ref. é o trabalho de Sadeghirad et al. (2011)

FIGURA 98 – VARIAÇÕES DA ENERGIA MECÂNICA POTENCIAL TOTAL E DO TRABALHO DAS FORÇAS DE CORPO DO MODELO D.



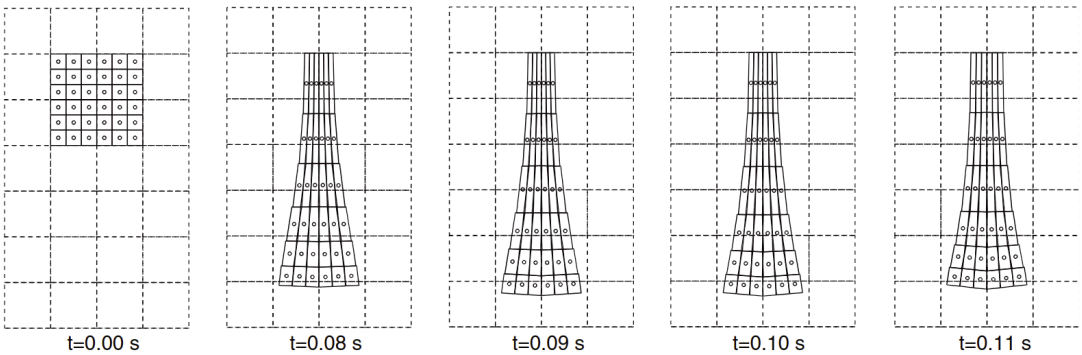
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 99 – CONFIGURAÇÕES DEFORMADAS DOS SUBMODELOS D-L E D-B AO LONGO DA ANÁLISE.



FONTE: O autor (2022).

FIGURA 100 – CONFIGURAÇÕES DEFORMADAS PRODUZIDAS PELO MPM CPDI COM OS MESMOS DADOS DE ENTRADA DO MODELO D.



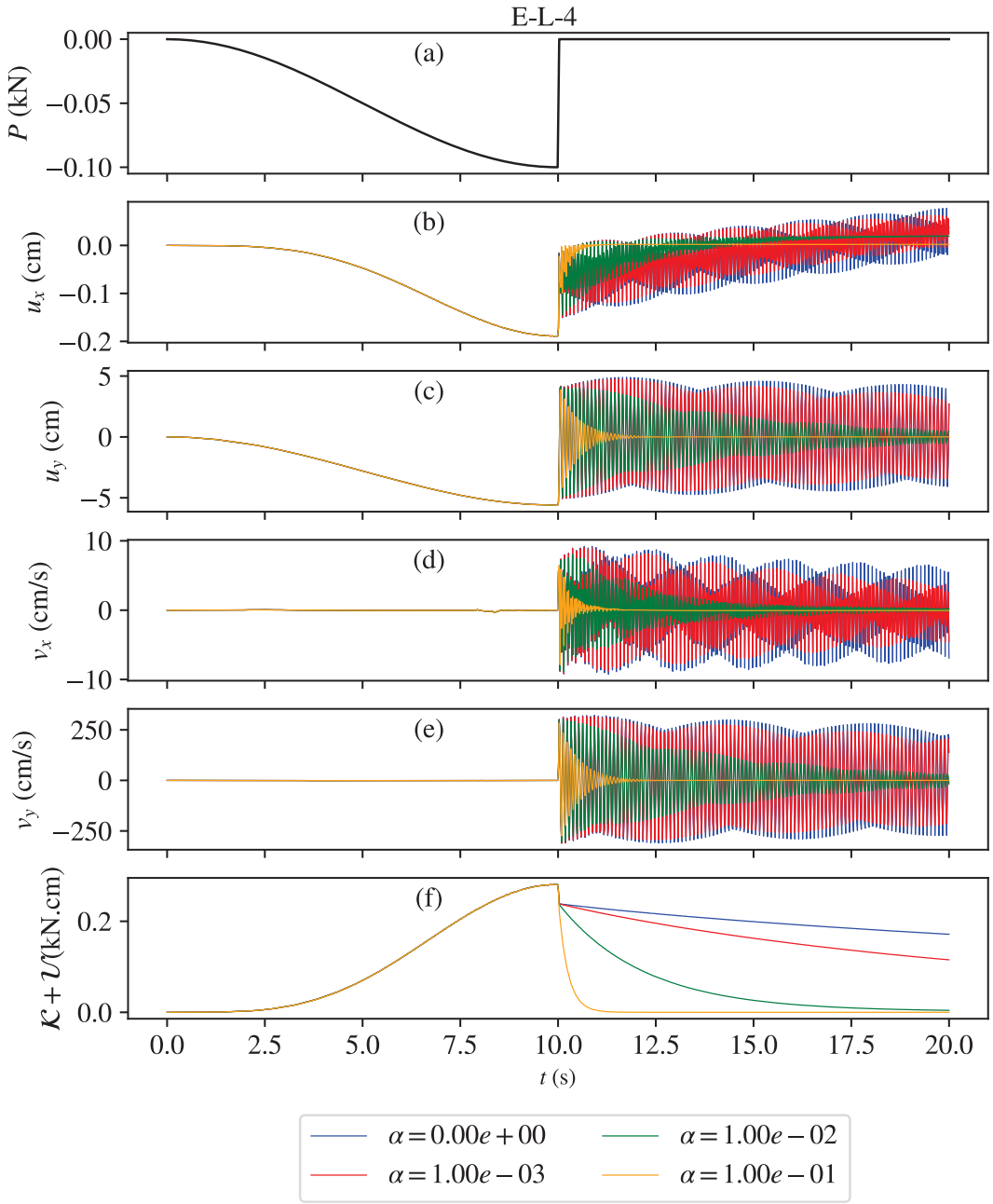
FONTE: Sadeghirad et al. (2011).

6.1.5 Modelo E - viga engastada-livre com diferentes coeficientes de amortecimento

O objetivo dos processamentos do modelo E é a verificação do efeito do coeficiente de amortecimento local não viscoso α nas análises. Sendo assim, aplica-se um carregamento que cresce suavemente até um valor máximo e logo após é retirado abruptamente. Assim, é possível perceber como o amortecimento utilizado no MPM SPSI afeta a amplitude das vibrações provocadas por essa retirada repentina da carga.

Dessa forma, as figuras 101 a 104 trazem, para os submodelos E-L-4, E-L-9, E-B-4 e E-B-9, a resposta da extremidade livre da viga ao longo do tempo provocada por diferentes valores de α. Nas alíneas (a) dessas figuras, a curva de aplicação do carregamento é mostrada, enquanto nas alíneas (b) e (c) têm-se os deslocamentos paralelos aos eixos x e y. As alíneas (d) e (e), por sua vez, trazem as velocidades paralelas a x e y. Finalmente, nas alíneas (f), ilustram-se as variações da energia mecânica potencial total, sendo as energias cinética e interna calculadas de acordo com as equações (6.1) e (6.2).

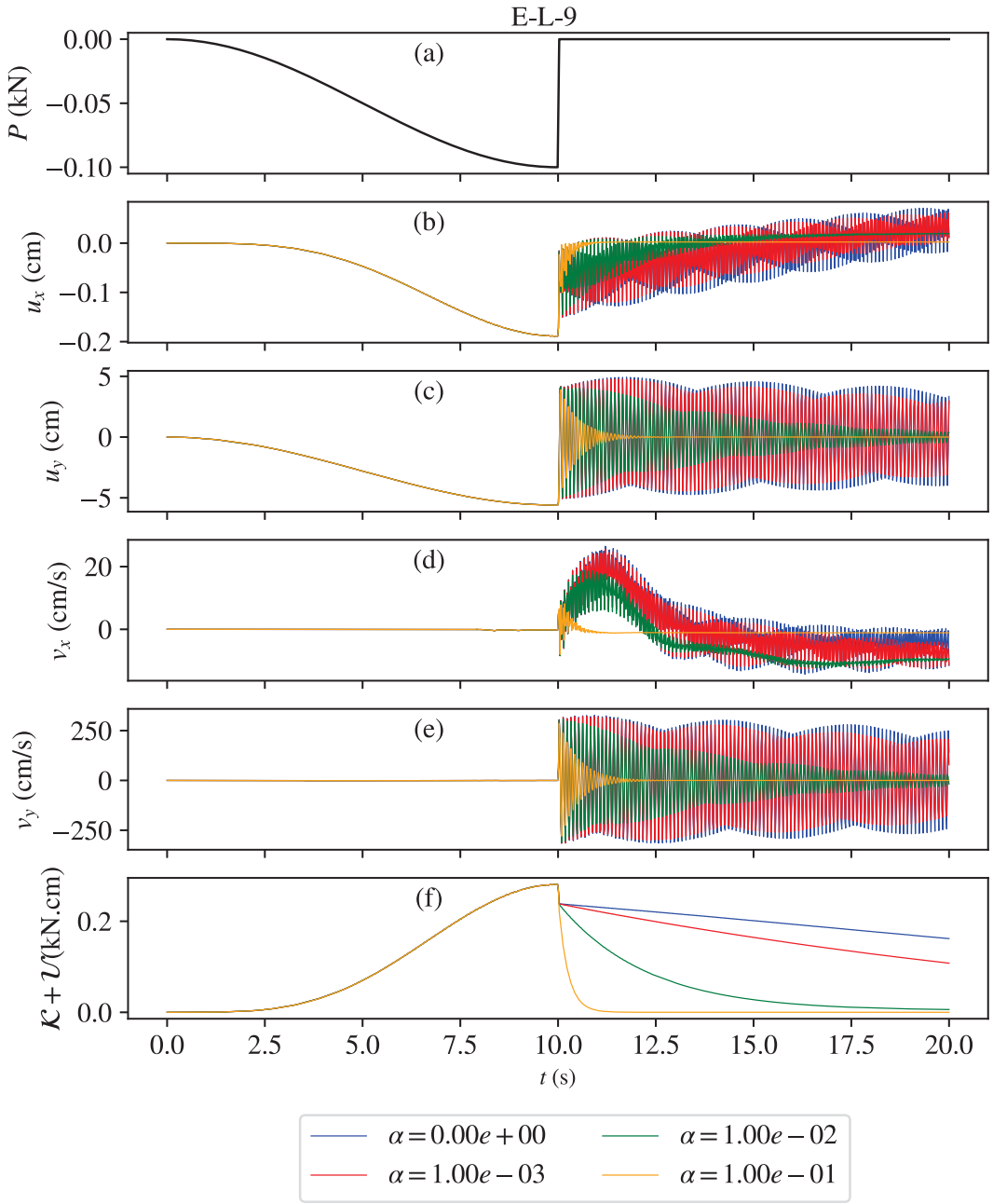
FIGURA 101 – VARIAÇÕES NO TEMPO DO CARREGAMENTO, DOS DESLOCAMENTOS E DAS VELOCIDADES NA EXTREMIDADE LIVRE E DA ENERGIA POTENCIAL MECÂNICA TOTAL DOS SUBMODELOS E-L-4.



FONTE: O autor (2022).

NOTA: (a) carregamento aplicado; (b) deslocamentos em x; (c) deslocamentos em y; (d) velocidades em x; (e) velocidades em y; (f) energia potencial mecânica total.

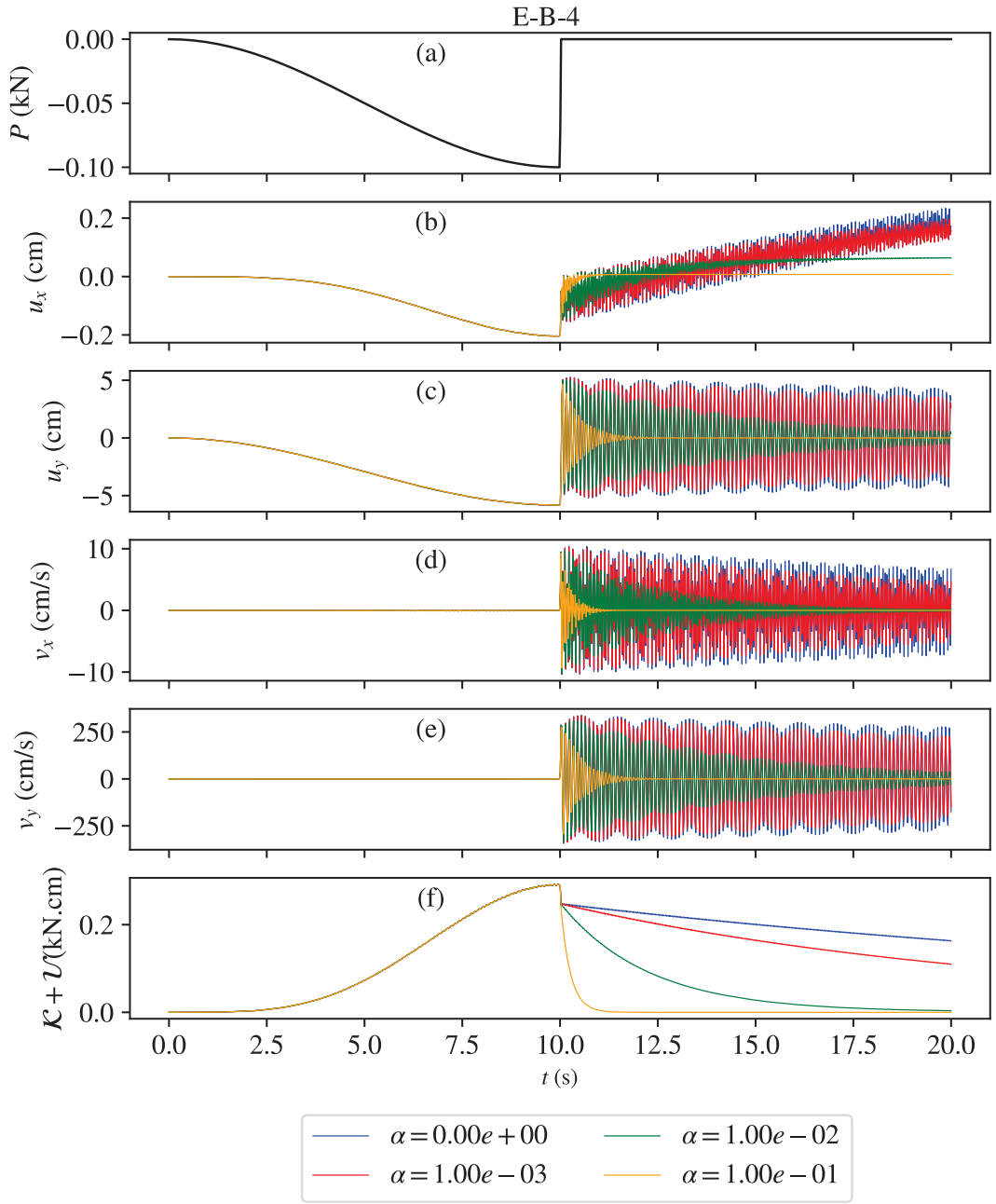
FIGURA 102 – VARIAÇÕES NO TEMPO DO CARREGAMENTO, DOS DESLOCAMENTOS E DAS VELOCIDADES NA EXTREMIDADE LIVRE E DA ENERGIA POTENCIAL MECÂNICA TOTAL DOS SUBMODELOS E-L-9.



FONTE: O autor (2022).

NOTA: (a) carregamento aplicado; (b) deslocamentos em x; (c) deslocamentos em y; (d) velocidades em x; (e) velocidades em y; (f) energia potencial mecânica total.

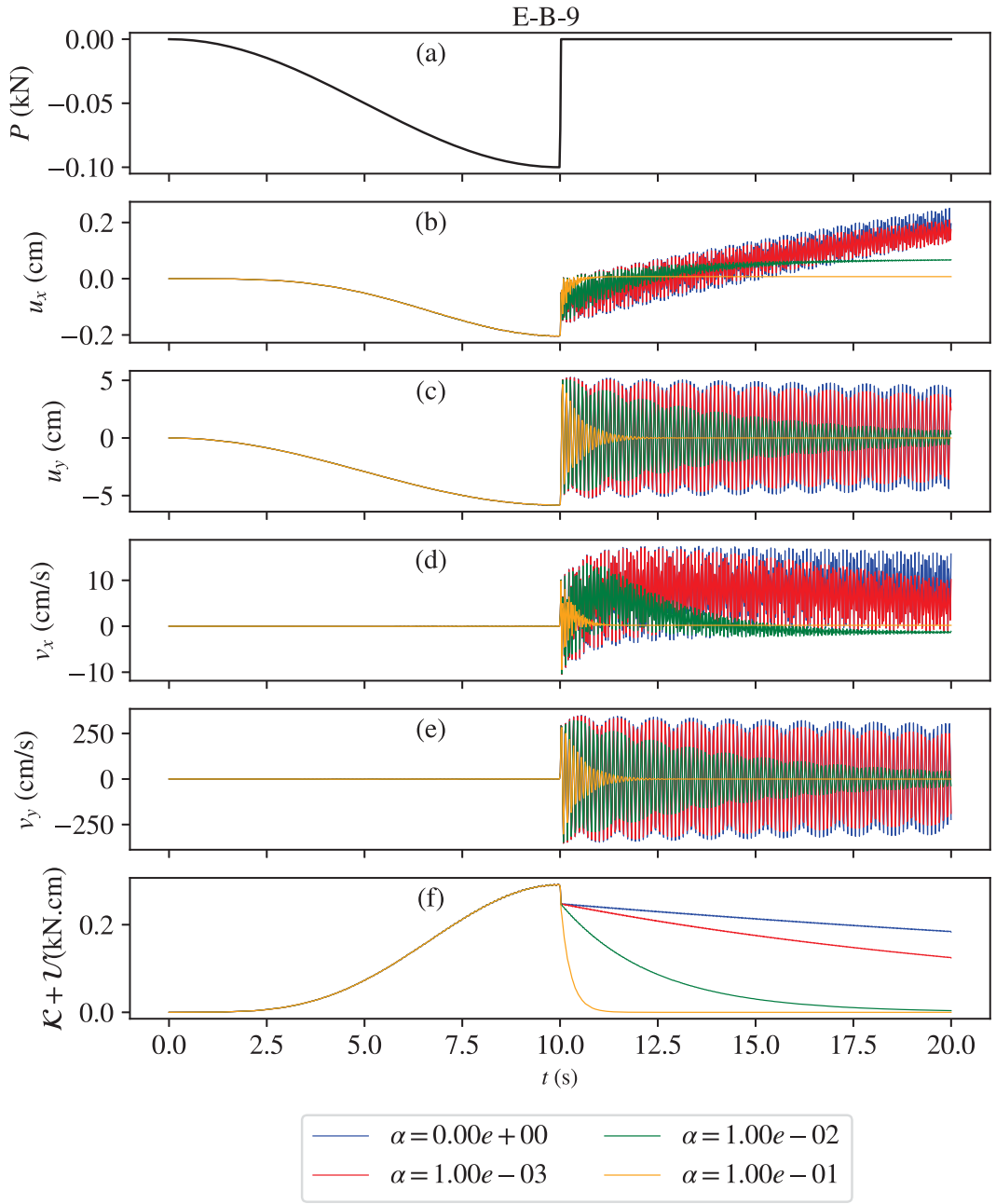
FIGURA 103 – VARIAÇÕES NO TEMPO DO CARREGAMENTO, DOS DESLOCAMENTOS E DAS VELOCIDADES NA EXTREMIDADE LIVRE E DA ENERGIA POTENCIAL MECÂNICA TOTAL DOS SUBMODELOS E-B-4.



FONTE: O autor (2022).

NOTA: (a) carregamento aplicado; (b) deslocamentos em x; (c) deslocamentos em y; (d) velocidades em x; (e) velocidades em y; (f) energia potencial mecânica total.

FIGURA 104 – VARIAÇÕES NO TEMPO DO CARREGAMENTO, DOS DESLOCAMENTOS E DAS VELOCIDADES NA EXTREMIDADE LIVRE E DA ENERGIA POTENCIAL MECÂNICA TOTAL DOS SUBMODELOS E-B-9.



FONTE: O autor (2022).

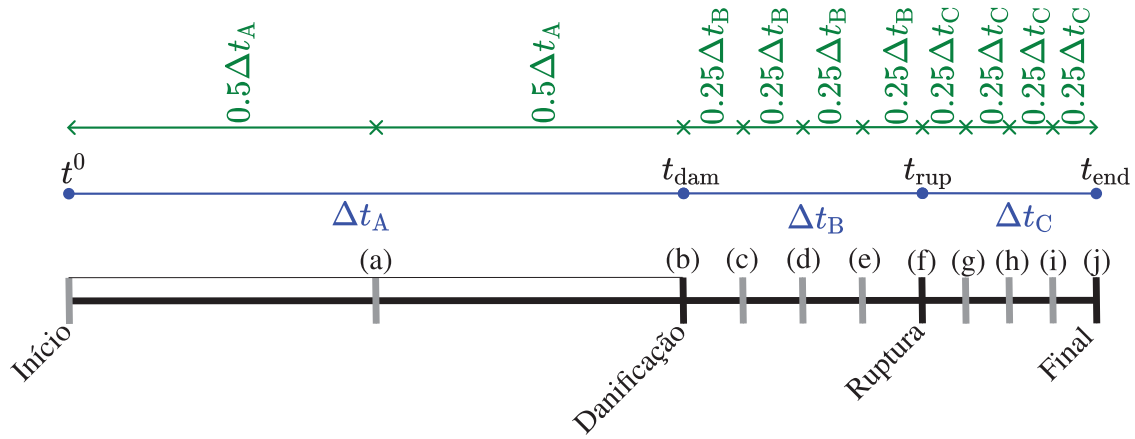
NOTA: (a) carregamento aplicado; (b) deslocamentos em x; (c) deslocamentos em y; (d) velocidades em x; (e) velocidades em y; (f) energia potencial mecânica total.

6.2 ANÁLISES COM DANIFICAÇÃO E FRATURA

Os resultados produzidos pelos processamentos dos modelos F, G, H, I e J são mostrados nesta seção. Aqui, prioriza-se o monitoramento das tensões principais e do dano escalar ao longo do tempo nos modelos. Para cada submodelo e cada variável de estado representada nas figuras 106 a 135, mostram-se os *frames* correspondentes aos tempos indicados no esquema da figura 105.

Sendo assim, as alíneas (a) registram as configurações dos modelos em um tempo próximo à metade do tempo de início da danificação t_{dam}. Já as alíneas (b) indicam a situação dos modelos em um instante imediatamente anterior a t_{dam}. Nas alíneas (c), (d) e (e) mostram-se quadros com t^n mensurado a aproximadamente 25%, 50% e 75% do intervalo Δt_B entre o início da danificação, t_{dam}, e o início da ruptura, t_{rup}. Em (f), ilustram-se os resultados no tempo imediatamente anterior a t_{rup}. Enquanto isso, em (g), (h), e (i) estão os resultados verificados em tempos situados a 25%, 50% e 75% do intervalo Δt_C entre o início da ruptura em t_{rup} e o final da análise em t_{end}. Por fim, em (j) apresentam-se as medições das variáveis ao final do processamento, no tempo t_{end}.

FIGURA 105 – LINHA DO TEMPO DAS CONFIGURAÇÕES MOSTRADAS NAS ALÍNEAS (a) A (j) DAS FIGURAS 106 a 135.



FONTE: O autor (2022).

Lembra-se, contudo, que o tempo final de análise t_{end} não é necessariamente igual ao tempo total de análise t_{an} estipulado nos dados de entrada. Na maioria das vezes, a análise é encerrada com $t_{\mathrm{end}} < t_{\mathrm{an}}$, seja pelo fato de algum vértice ter excedido os limites do domínio de análise preestabelecido, pela ocorrência de alguma deformação excessiva que impediu a continuidade da análise plana ou então por decisão arbitrária do pesquisador. Essa decisão arbitrária é tomada quando todos os processos não lineares que são objeto do estudo tenham ocorrido. Isso é feito para a redução do esforço computacional envolvido, principalmente no cálculo das forças de contato pós-ruptura entre subdomínios separados. Na tabela 6.2, listam-se os valores

TABELA 6 – CARGAS DE INÍCIO DA DANIFICAÇÃO E DE RUPTURA DOS MODELOS F A J.

Modelo	P_{dam} (N)	P_{rup} (N)
F	14.00	19.00
G	-42.00	-115.00
H	-1.44	-7.44
I	-14.00	-30.00
J	-720.00	-4800.00

FONTE: O autor (2022).

obtidos para as cargas de início da danificação P_{dam} e de ruptura/fratura P_{rup}, quando é detectada a primeira separação entre subdomínios.

6.2.1 Modelo F - Tração simples

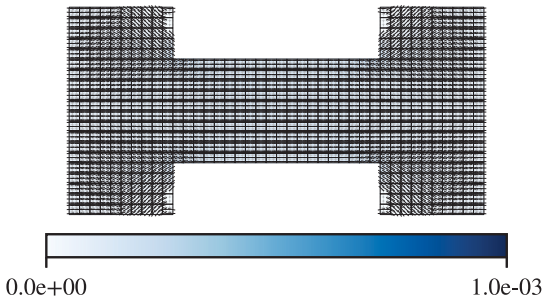
Para o submodelo modelo F, exibem-se os resultados de acordo com a seguinte lista:

- tensões principais $\sigma^n_{I_g}$: figuras 106 e 107;
- tensões principais $\sigma^n_{III_g}$: figuras 108 e 109;
- dano escalar $\mathscr{D}^n_g$: figuras 110 e 111.

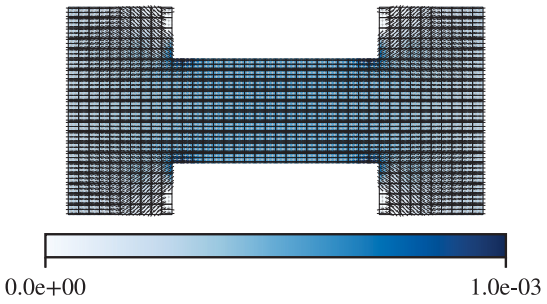
De forma a exemplificar como a leitura dos dados deve ser feita, toma-se a alínea (b) da figura 106. Essa plotagem é um registro das tensões principais máximas $\sigma^n_{I_g}$ no tempo $t^n = 4.96$ s, quando a máxima tensão medida é $\max_g(\sigma^n_{I_g}) = 1 \times 10^{-3}$ kN/cm^2. No mesmo registro, a carga aplicada de tração vale 14 % da carga máxima definida na figura 49, o equivalente a cerca de 1.4×10^{-3} kN. Essa mesma lógica de leitura deve ser aplicada às demais figuras.

FIGURA 106 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO F (kN/cm^2) - PARTE 1.

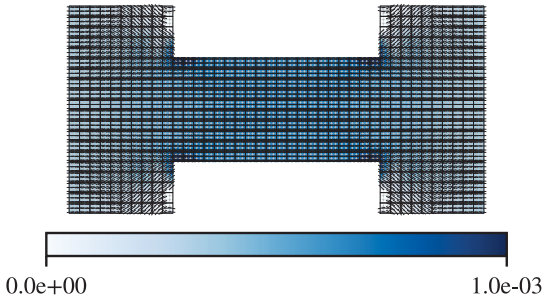
(a) $t^n = 2.48$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 2.6e-04$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.7e-02$



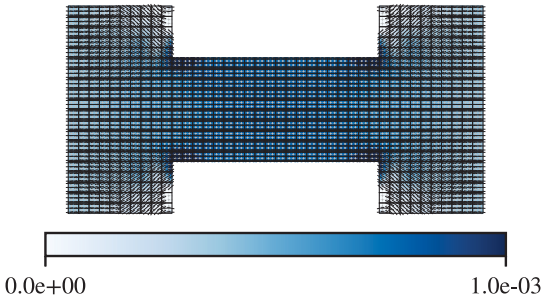
(b) $t^n = 4.96$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 1.4e-01$



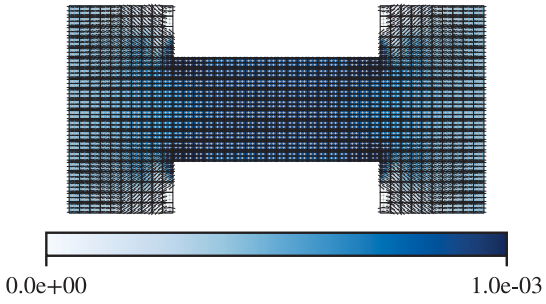
(c) $t^n = 5.39$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 1.7e-01$



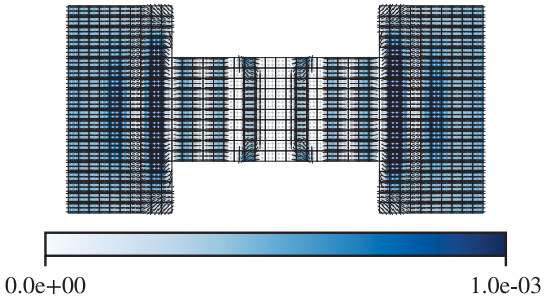
(d) $t^n = 5.82$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.1e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 2.0e-01$



(e) $t^n = 6.26$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.3e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 2.2e-01$

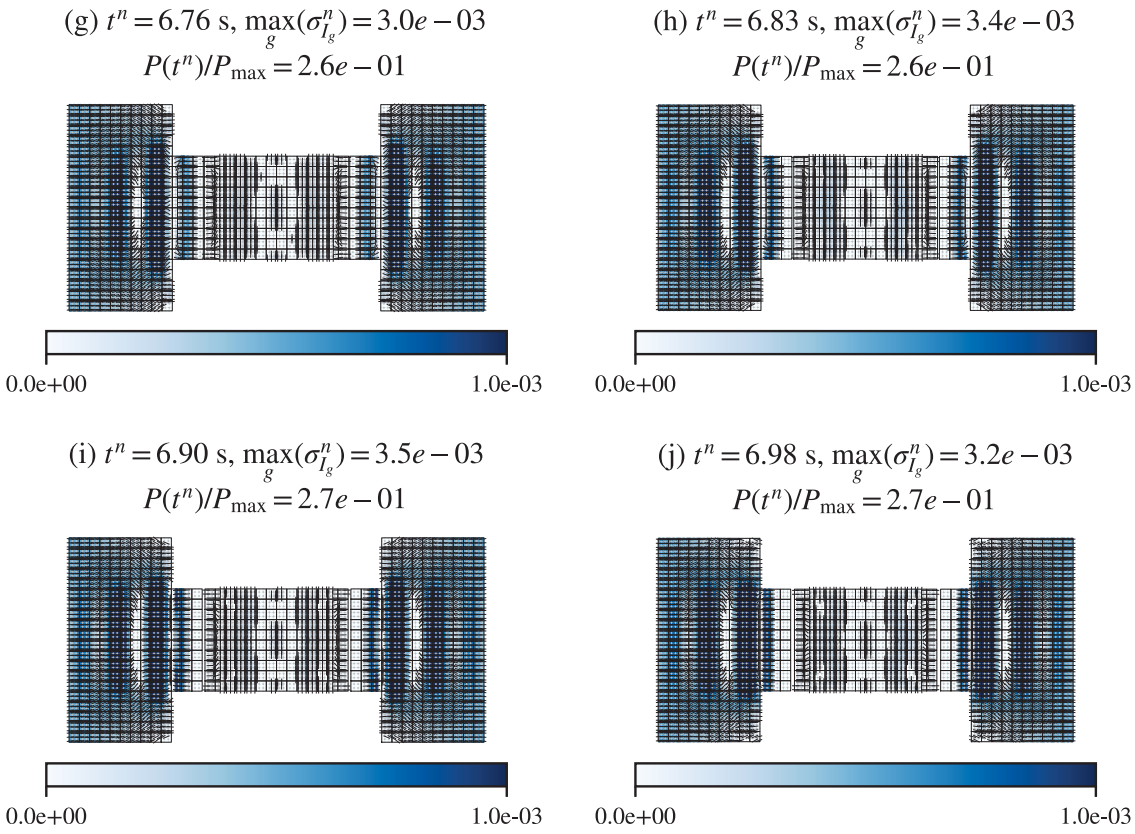


(f) $t^n = 6.69$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.9e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 2.5e-01$



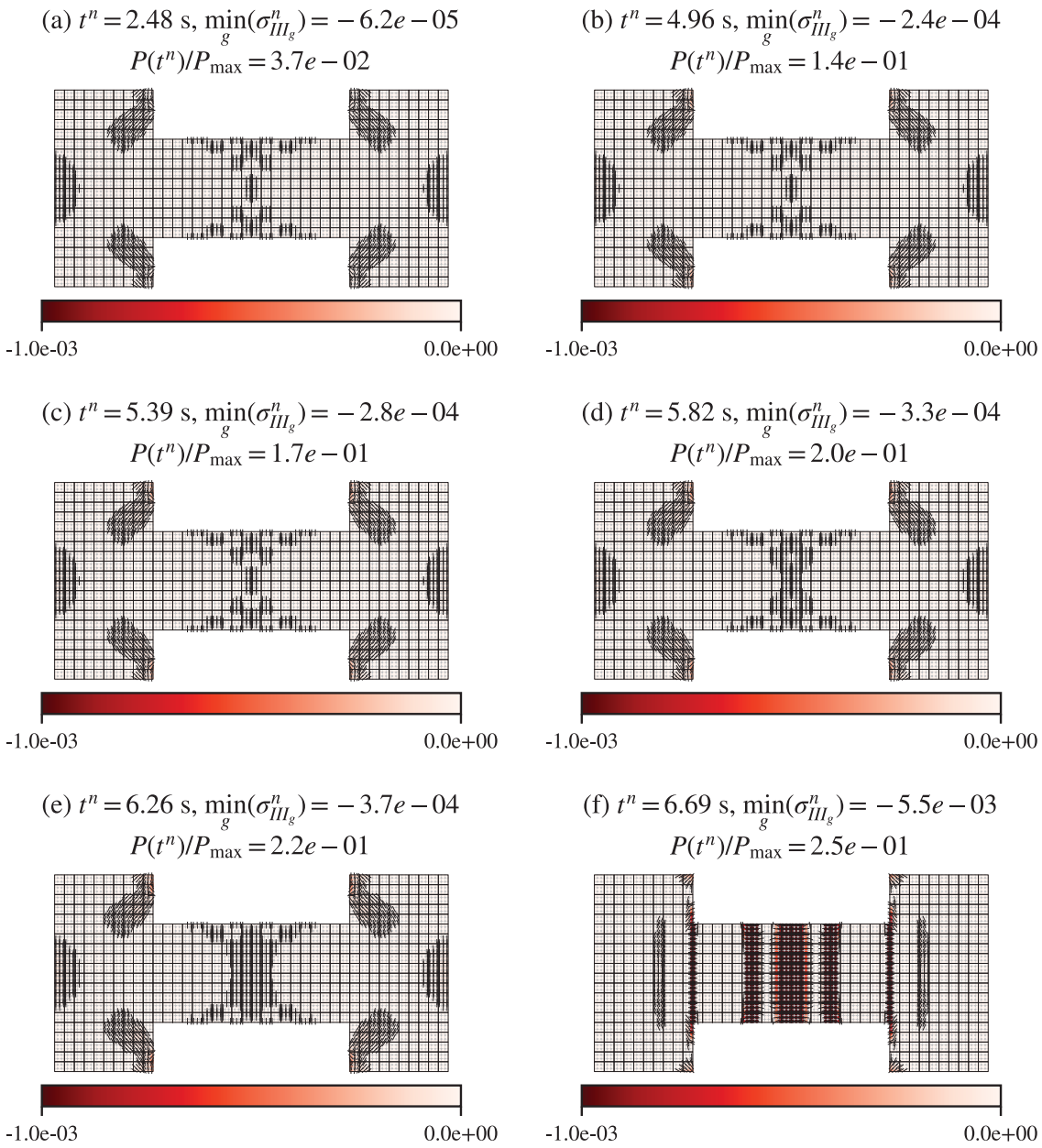
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 107 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO F (kN/cm^2) - PARTE 2.



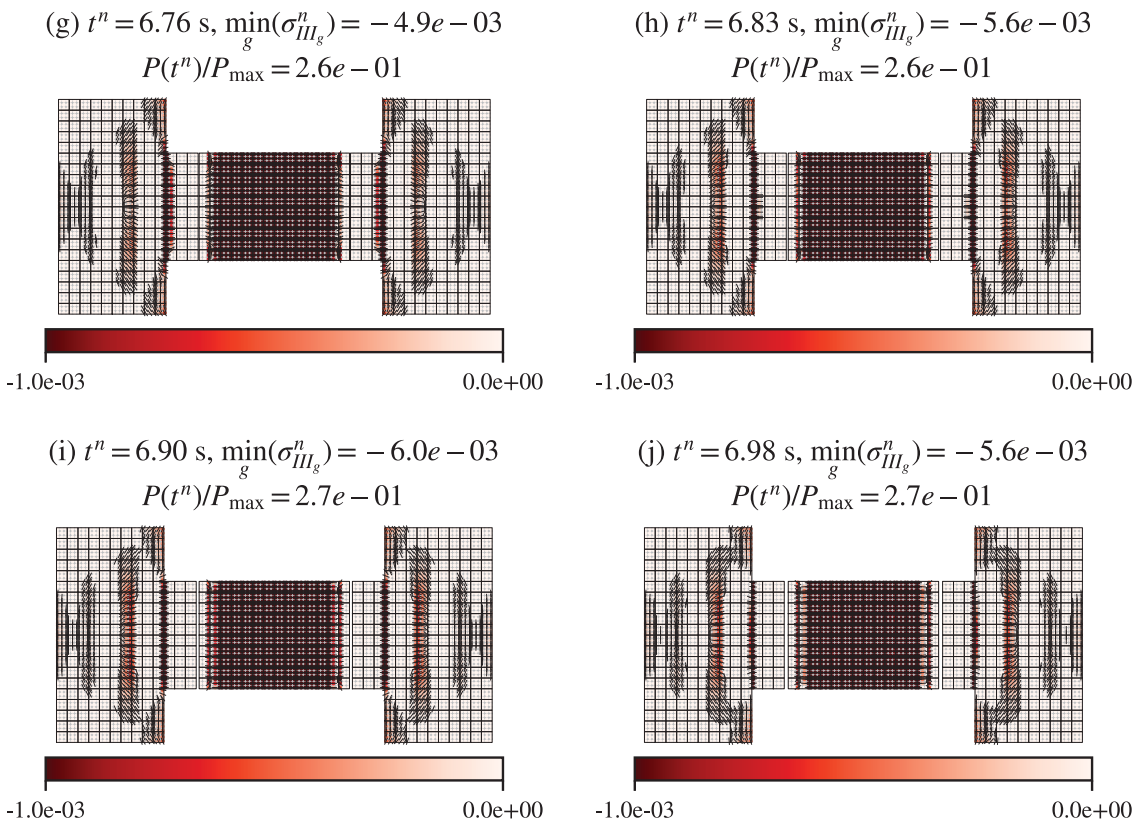
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 108 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO F (kN/cm^2) - PARTE 1.



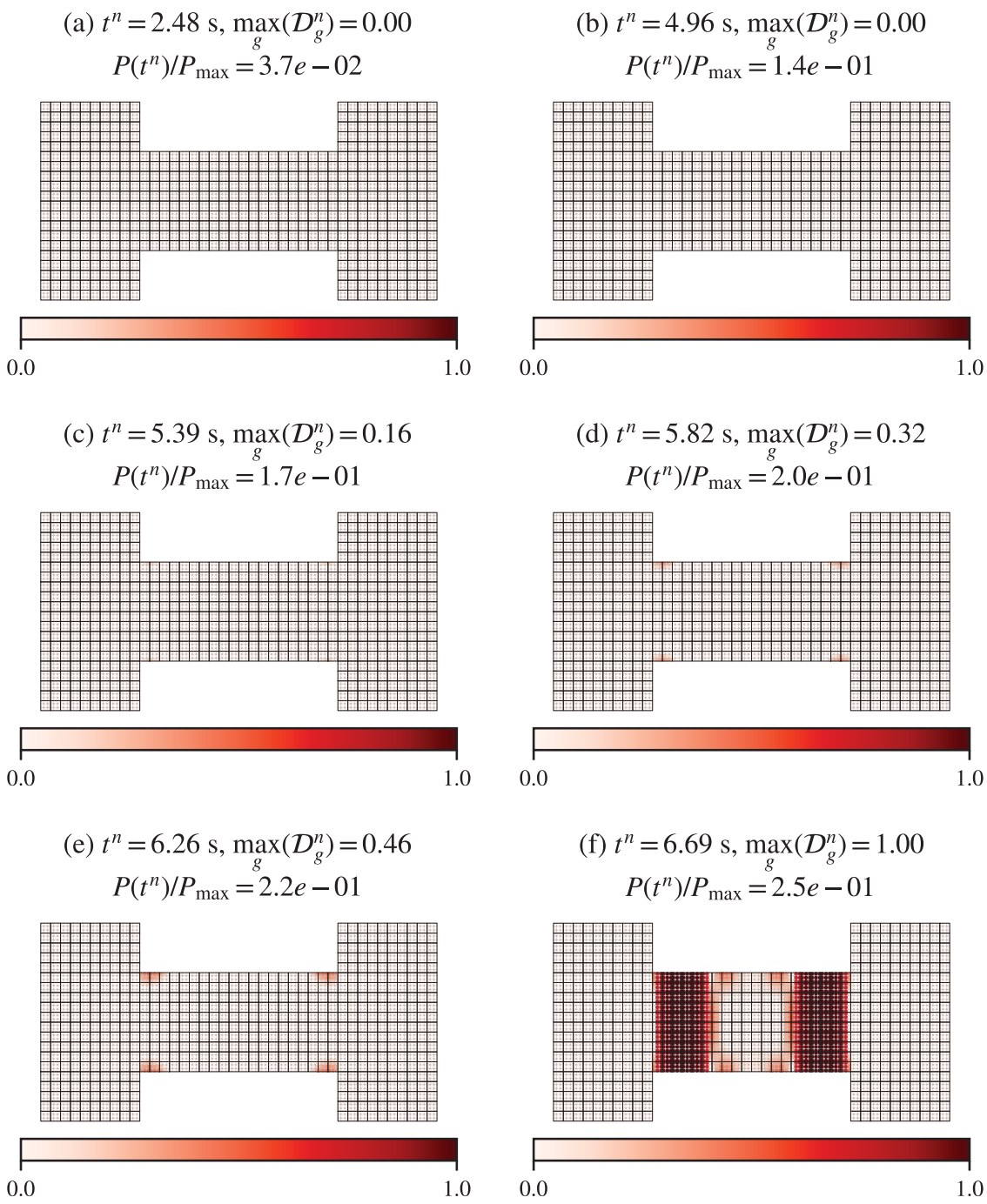
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 109 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO F (kN/cm^2) - PARTE 2.



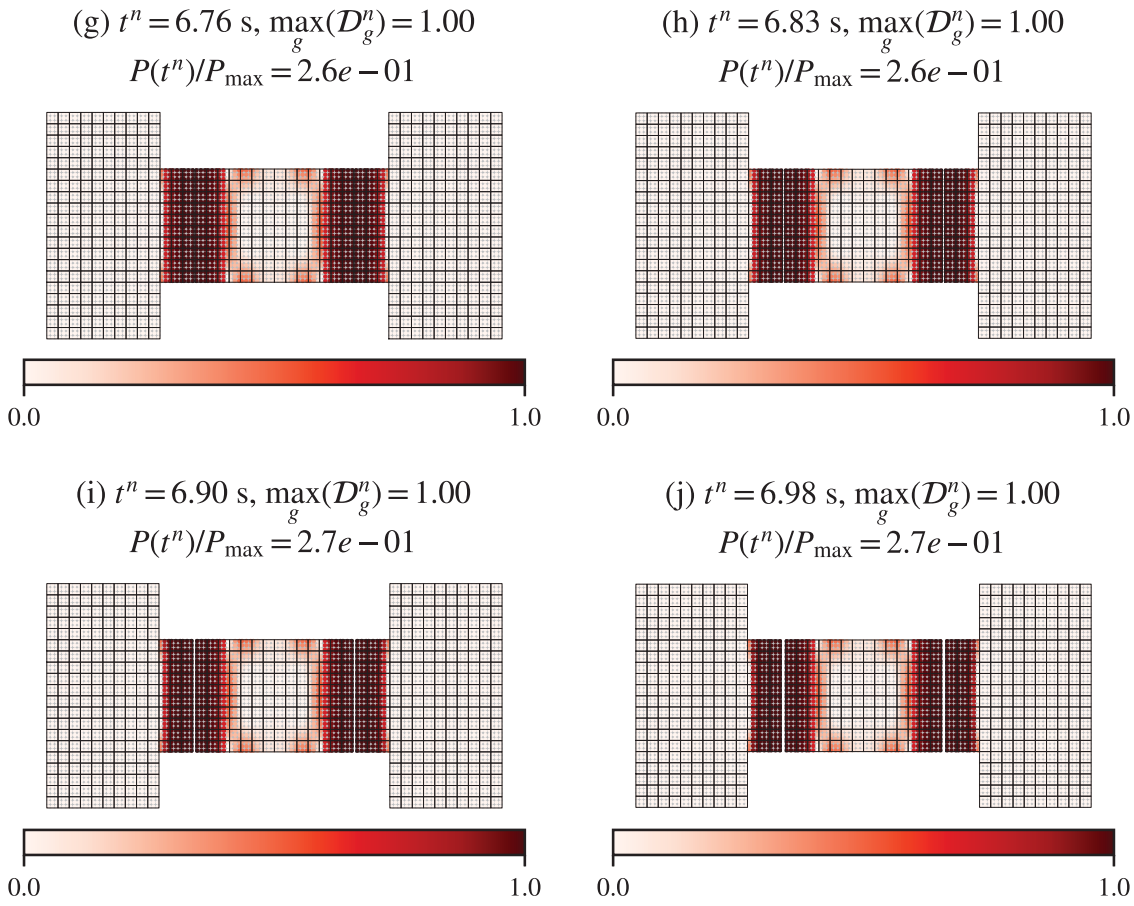
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 110 – DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO F - PARTE 1.



FONTE: O autor (2022).

FIGURA 111 – DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO F - PARTE 2.



FONTE: O autor (2022).

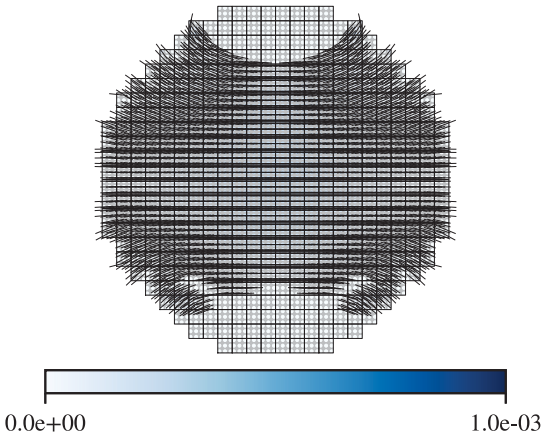
6.2.2 Modelo G - Compressão diametral

Dispõem-se os resultados referentes ao modelo G assim como na lista abaixo:

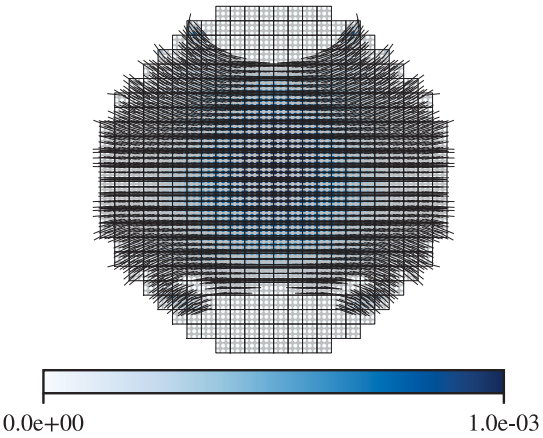
- tensões principais $\sigma^n_{I_g}$: figuras 112 e 113;
- tensões principais $\sigma^n_{III_g}$: figuras 114 e 115;
- dano escalar $\mathscr{D}^n_g$: figuras 116 e 117.

FIGURA 112 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO G (kN/cm^2) - PARTE 1.

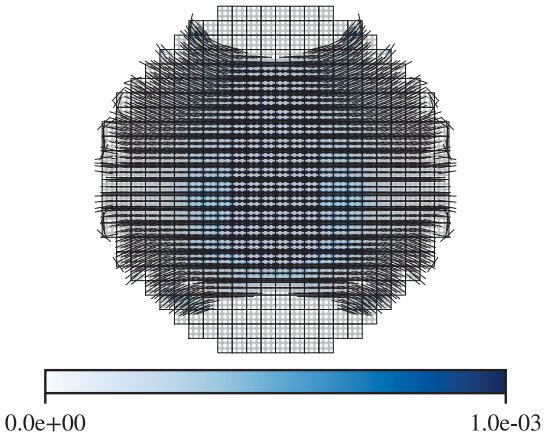
(a) $t^n = 1.87$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 2.6e-04$
$P(t^n)/P_{\max} = 2.2e-02$



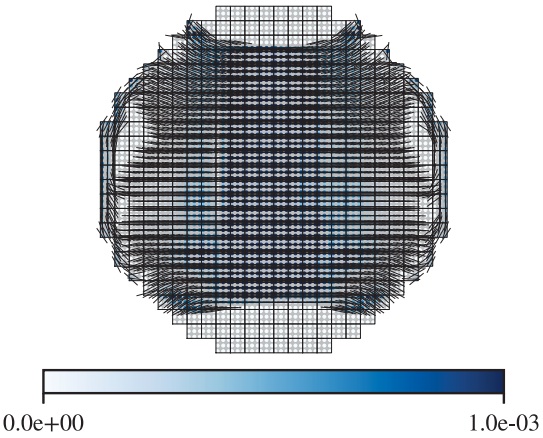
(b) $t^n = 3.75$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 8.4e-02$



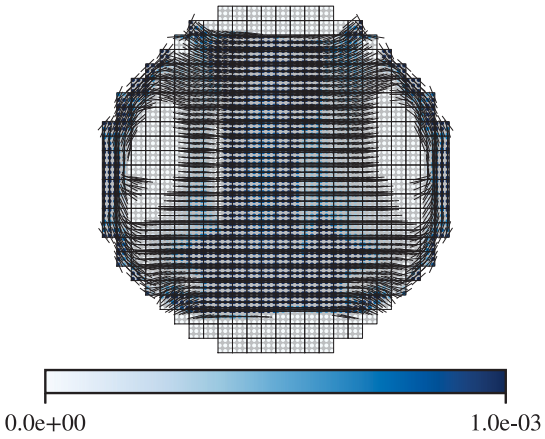
(c) $t^n = 4.40$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 1.1e-01$



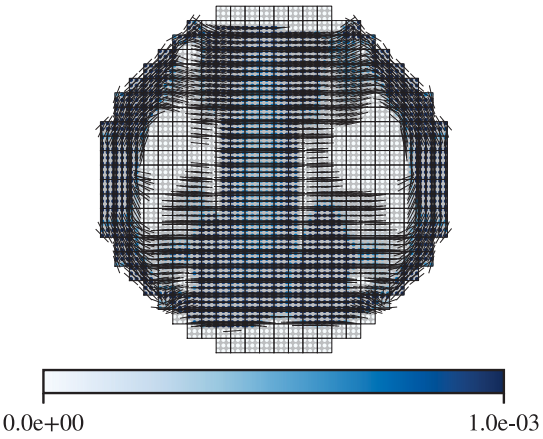
(d) $t^n = 5.04$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 1.5e-01$



(e) $t^n = 5.69$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 1.9e-01$



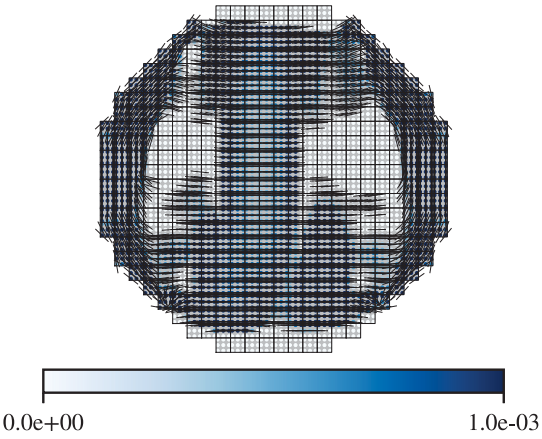
(f) $t^n = 6.34$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 2.3e-01$



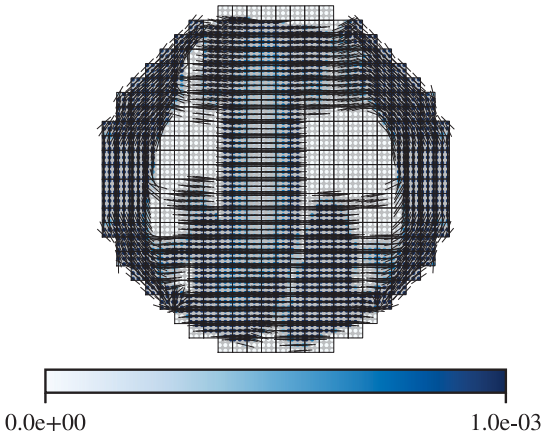
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 113 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO G (kN/cm^2) - PARTE 2.

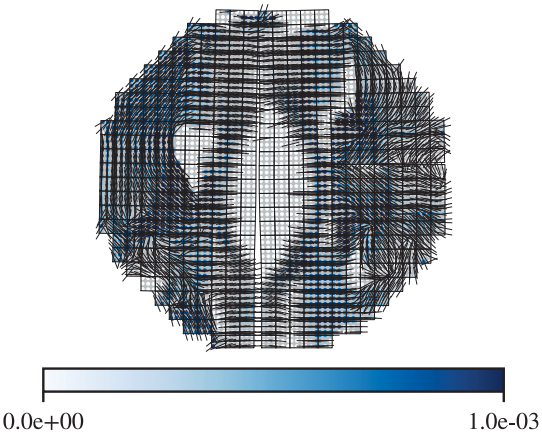
(g) $t^n = 6.55$ s, $\max_g(\sigma^n_{I_g}) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 2.4e-01$



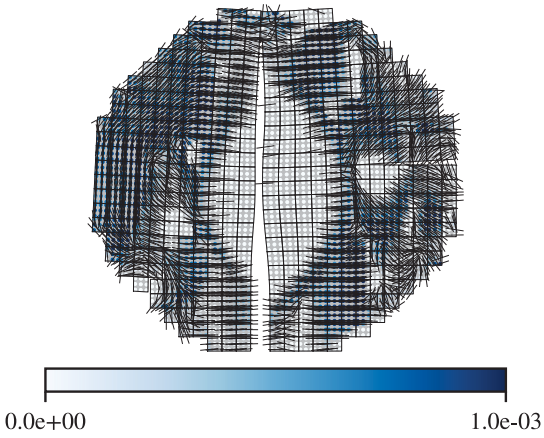
(h) $t^n = 6.77$ s, $\max_g(\sigma^n_{I_g}) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 2.6e-01$



(i) $t^n = 6.98$ s, $\max_g(\sigma^n_{I_g}) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 2.7e-01$

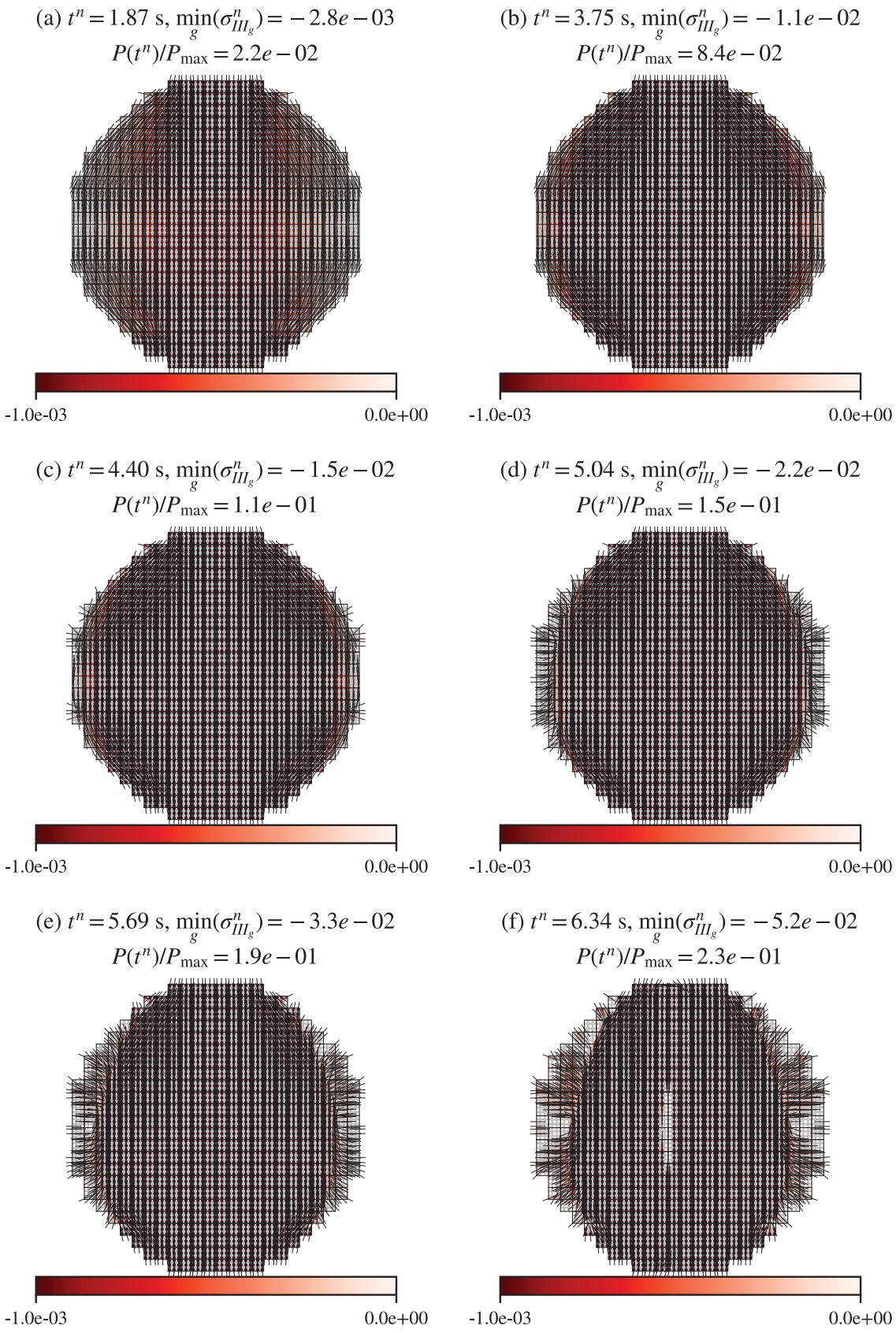


(j) $t^n = 7.20$ s, $\max_g(\sigma^n_{I_g}) = 9.9e-04$
$P(t^n)/P_{\max} = 2.9e-01$



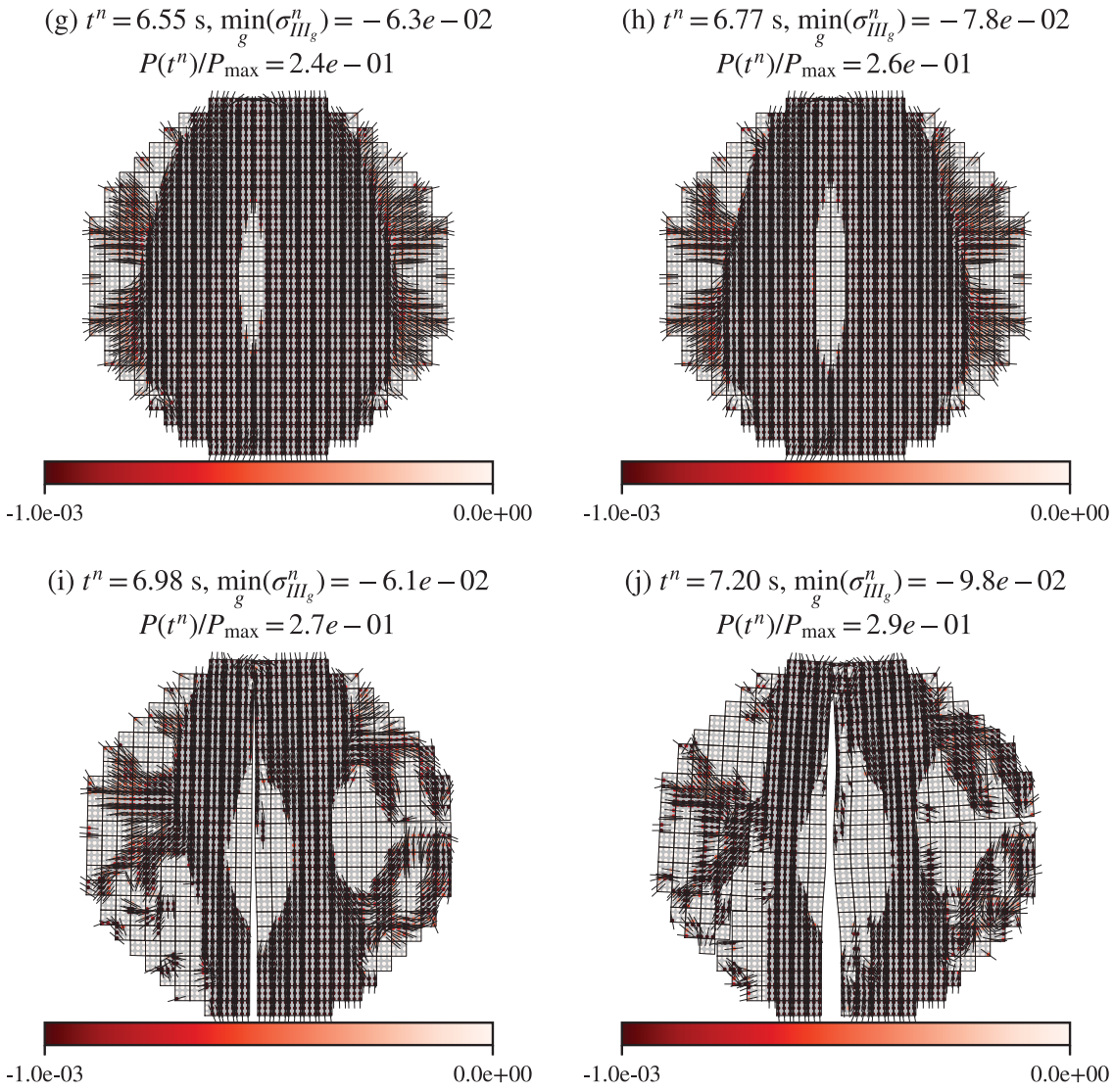
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 114 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO G (kN/cm^2) - PARTE 1.



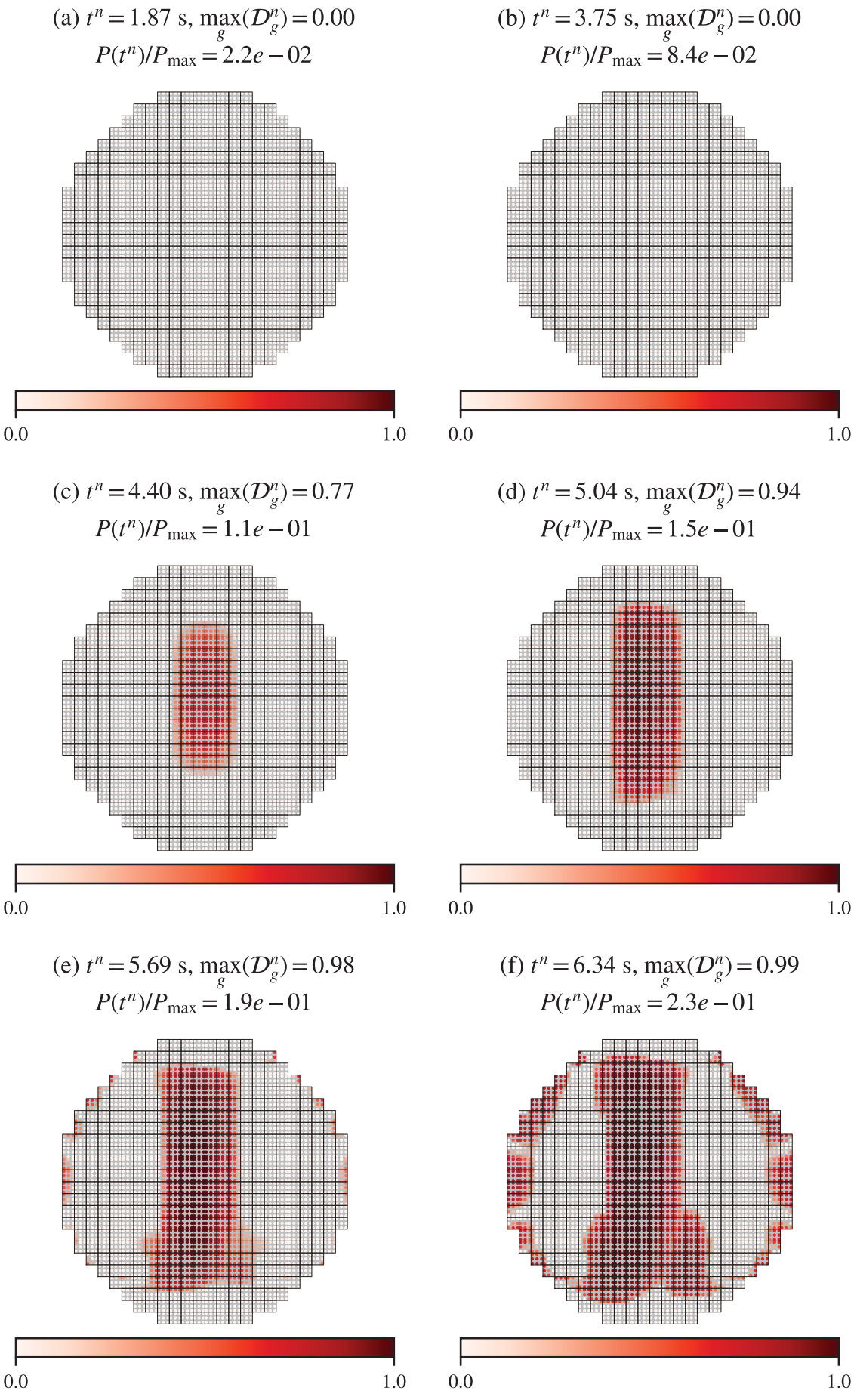
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 115 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO G (kN/cm^2) - PARTE 2.



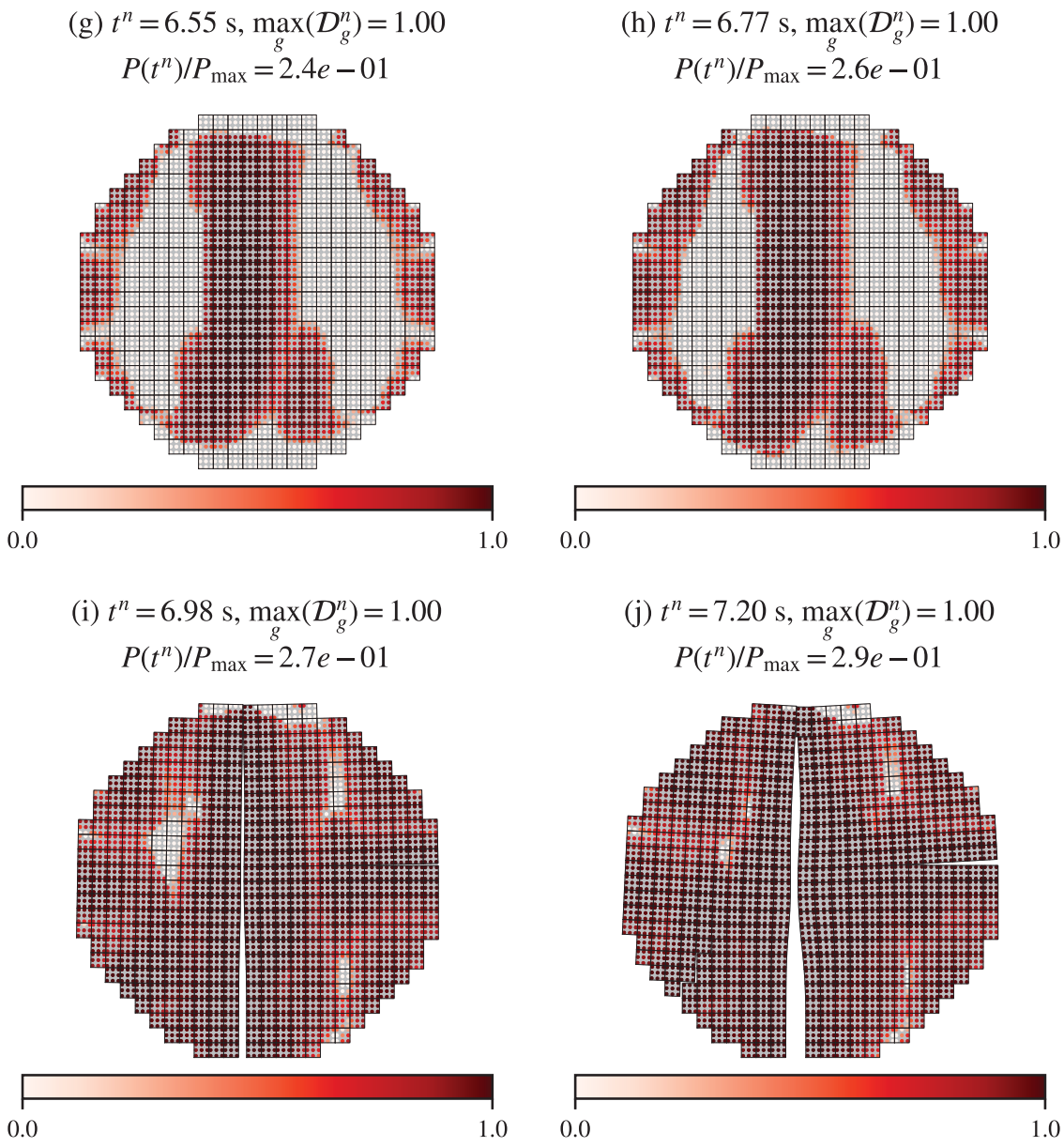
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 116 – DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO G - PARTE 1.



FONTE: O autor (2022).

FIGURA 117 – DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO G - PARTE 2.



FONTE: O autor (2022).

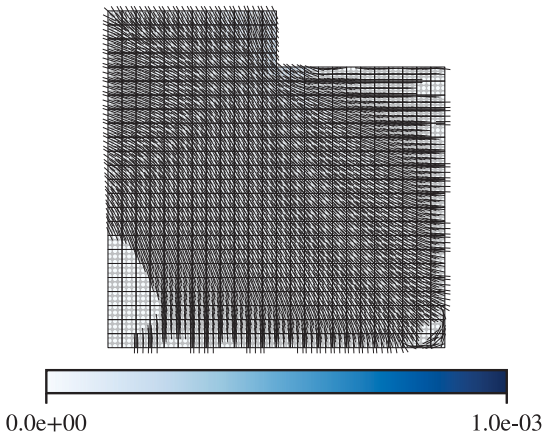
6.2.3 Modelo H - Consolo curto

Do modelo H plotam-se os seguintes resultados:

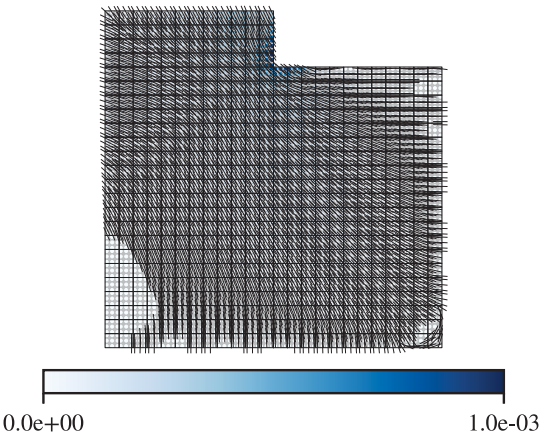
- tensões principais $\sigma^n_{I_g}$: figuras 118 e 119;
- tensões principais $\sigma^n_{III_g}$: figuras 120 e 121;
- dano escalar $\mathscr{D}^n_g$: figuras 122 e 123.

FIGURA 118 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO H (kN/cm^2) - PARTE 1.

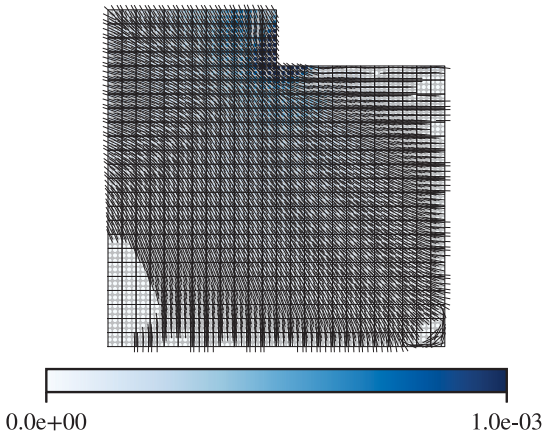
(a) $t^n = 1.57$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 2.6e-04$
$P(t^n)/P_{\max} = 1.5e-02$



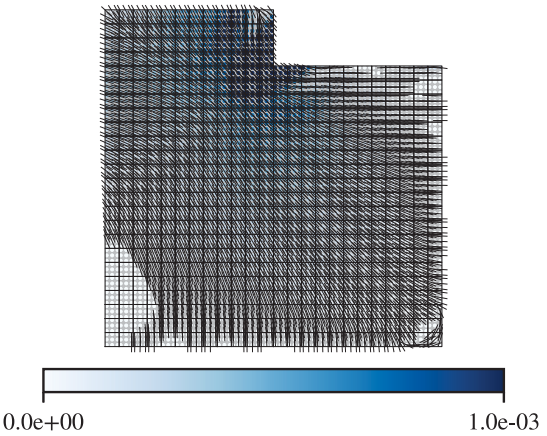
(b) $t^n = 3.14$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 6.0e-02$



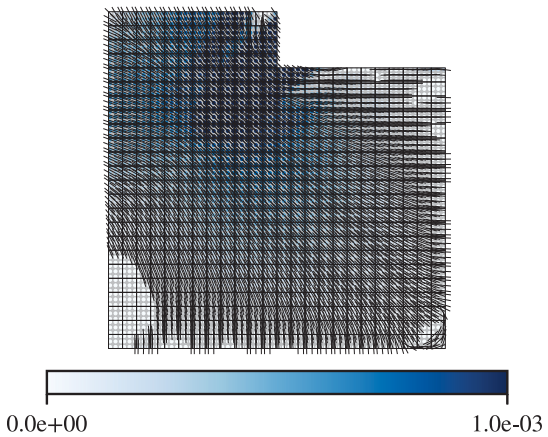
(c) $t^n = 4.23$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 1.1e-01$



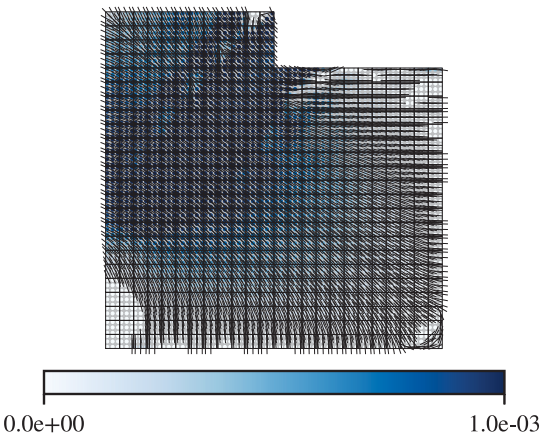
(d) $t^n = 5.33$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 1.7e-01$



(e) $t^n = 6.42$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 2.3e-01$



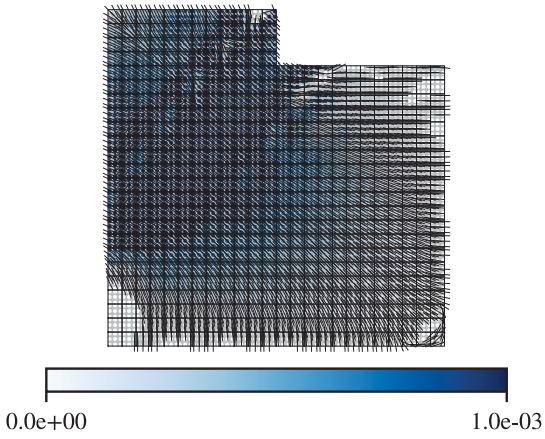
(f) $t^n = 7.52$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.1e-01$



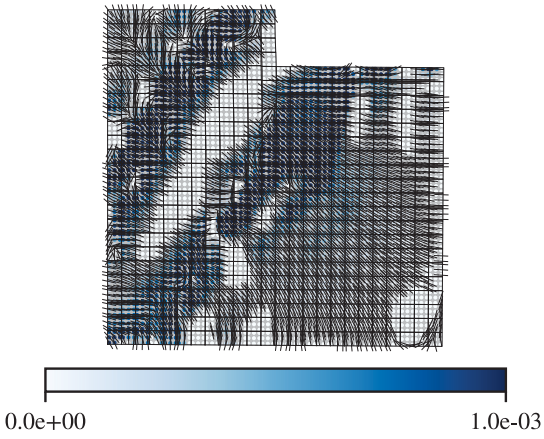
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 119 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO H (kN/cm^2) - PARTE 2.

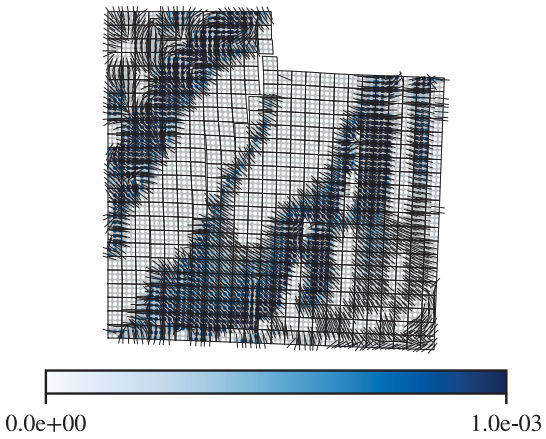
(g) $t^n = 7.62$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.2e-01$



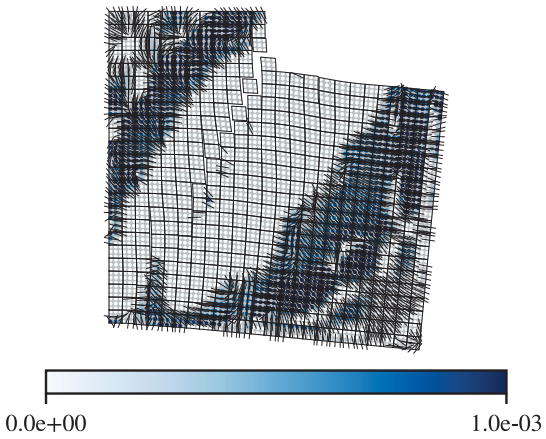
(h) $t^n = 7.74$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.3e-01$



(i) $t^n = 7.85$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.3e-01$



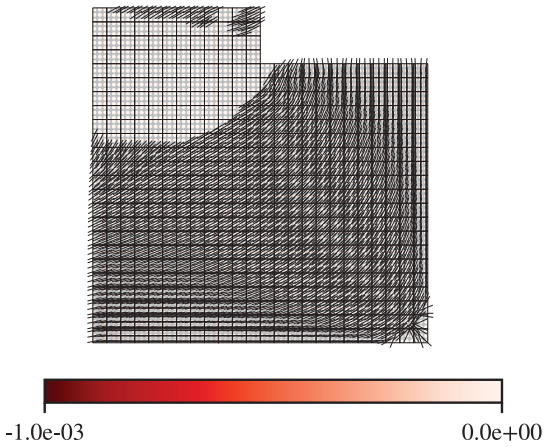
(j) $t^n = 7.96$ s, $\max_g(\sigma_{I_g}^n) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.4e-01$



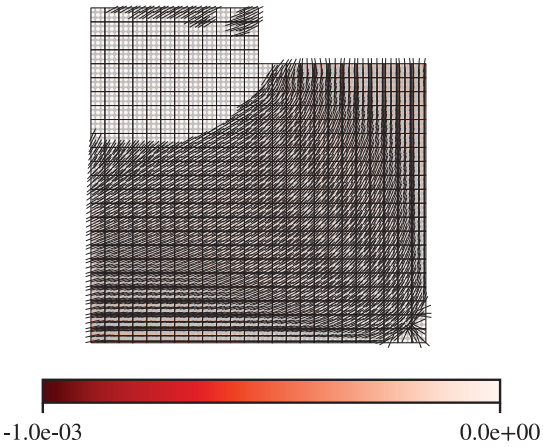
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 120 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO H (kN/cm^2) - PARTE 1.

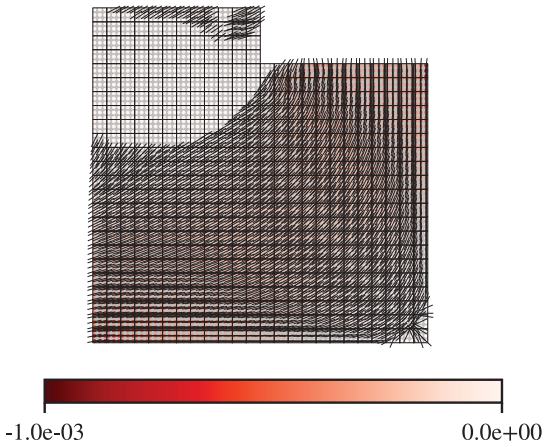
(a) $t^n = 1.57$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -1.0e-04$
$P(t^n)/P_{\max} = 1.5e-02$



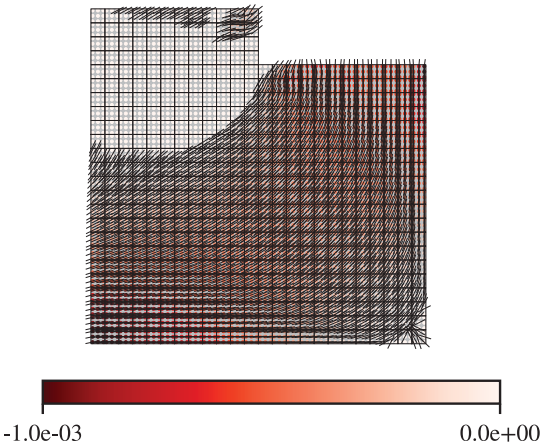
(b) $t^n = 3.14$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -4.1e-04$
$P(t^n)/P_{\max} = 6.0e-02$



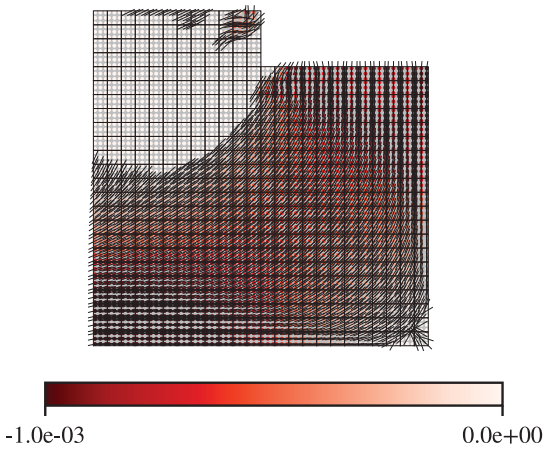
(c) $t^n = 4.23$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -7.6e-04$
$P(t^n)/P_{\max} = 1.1e-01$



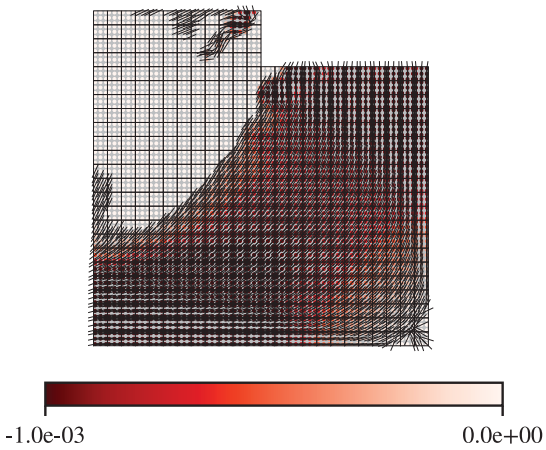
(d) $t^n = 5.33$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -1.3e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 1.7e-01$



(e) $t^n = 6.42$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -2.3e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 2.3e-01$



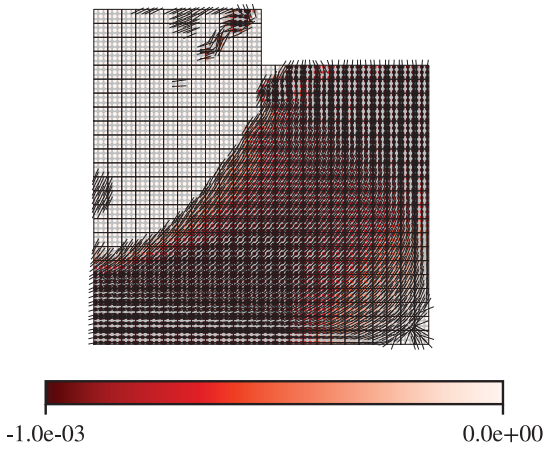
(f) $t^n = 7.52$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -5.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.1e-01$



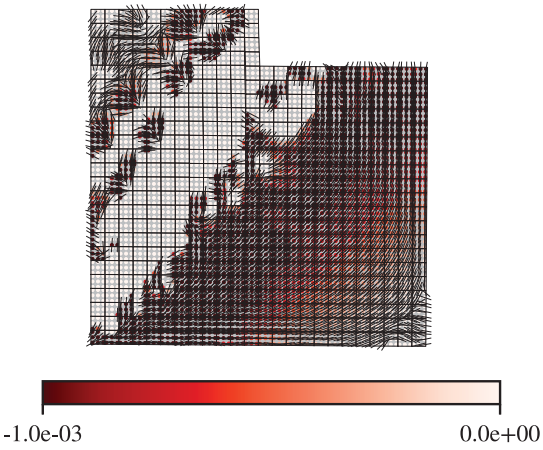
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 121 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO H (kN/cm^2) - PARTE 2.

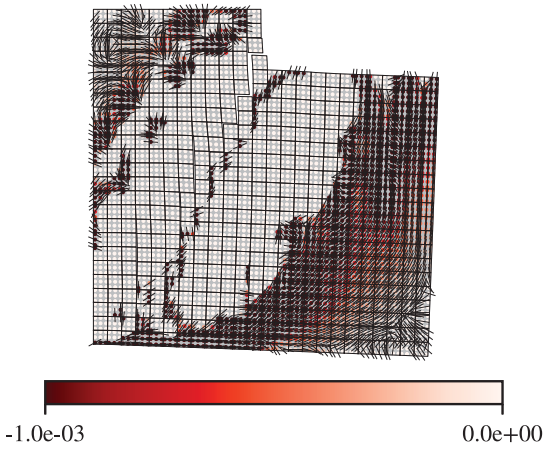
(g) $t^n = 7.62$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -6.1e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.2e-01$



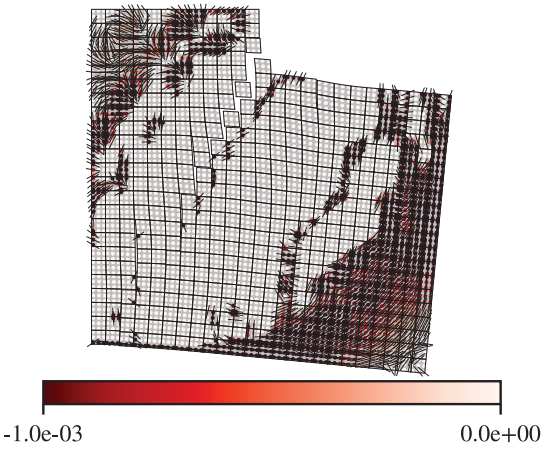
(h) $t^n = 7.74$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -4.7e-02$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.3e-01$



(i) $t^n = 7.85$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -5.5e-02$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.3e-01$

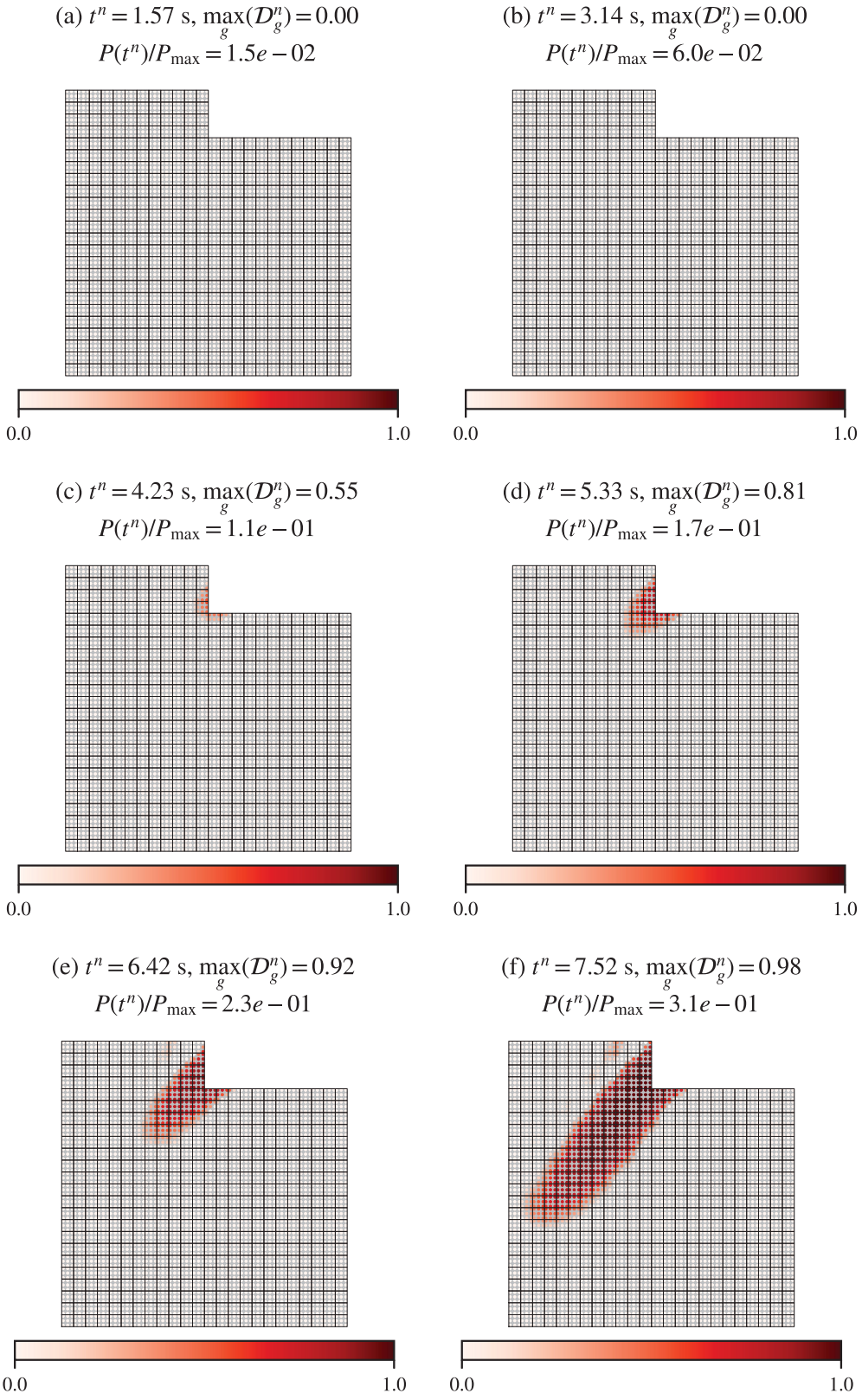


(j) $t^n = 7.96$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -5.8e-02$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.4e-01$



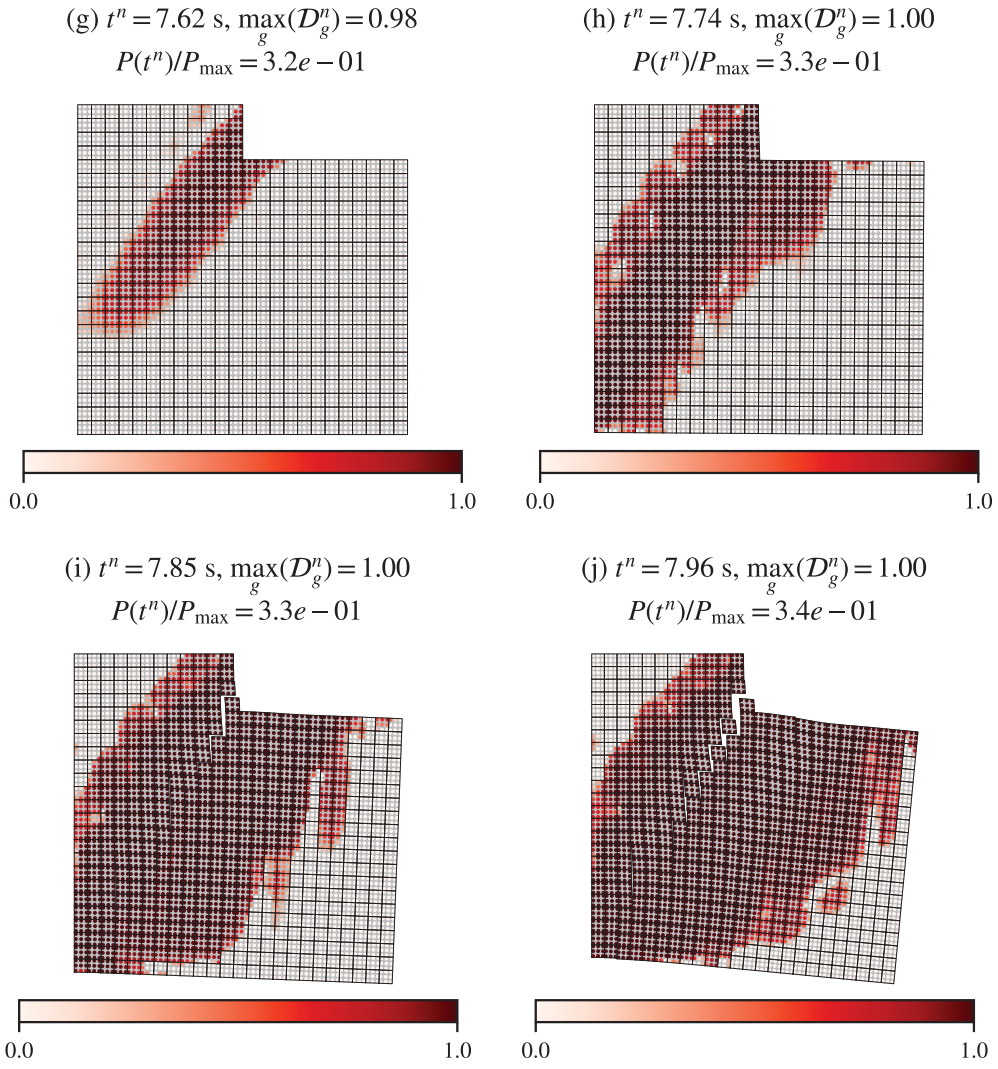
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 122 – DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO H - PARTE 1.



FONTE: O autor (2022).

FIGURA 123 – DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO H - PARTE 2.



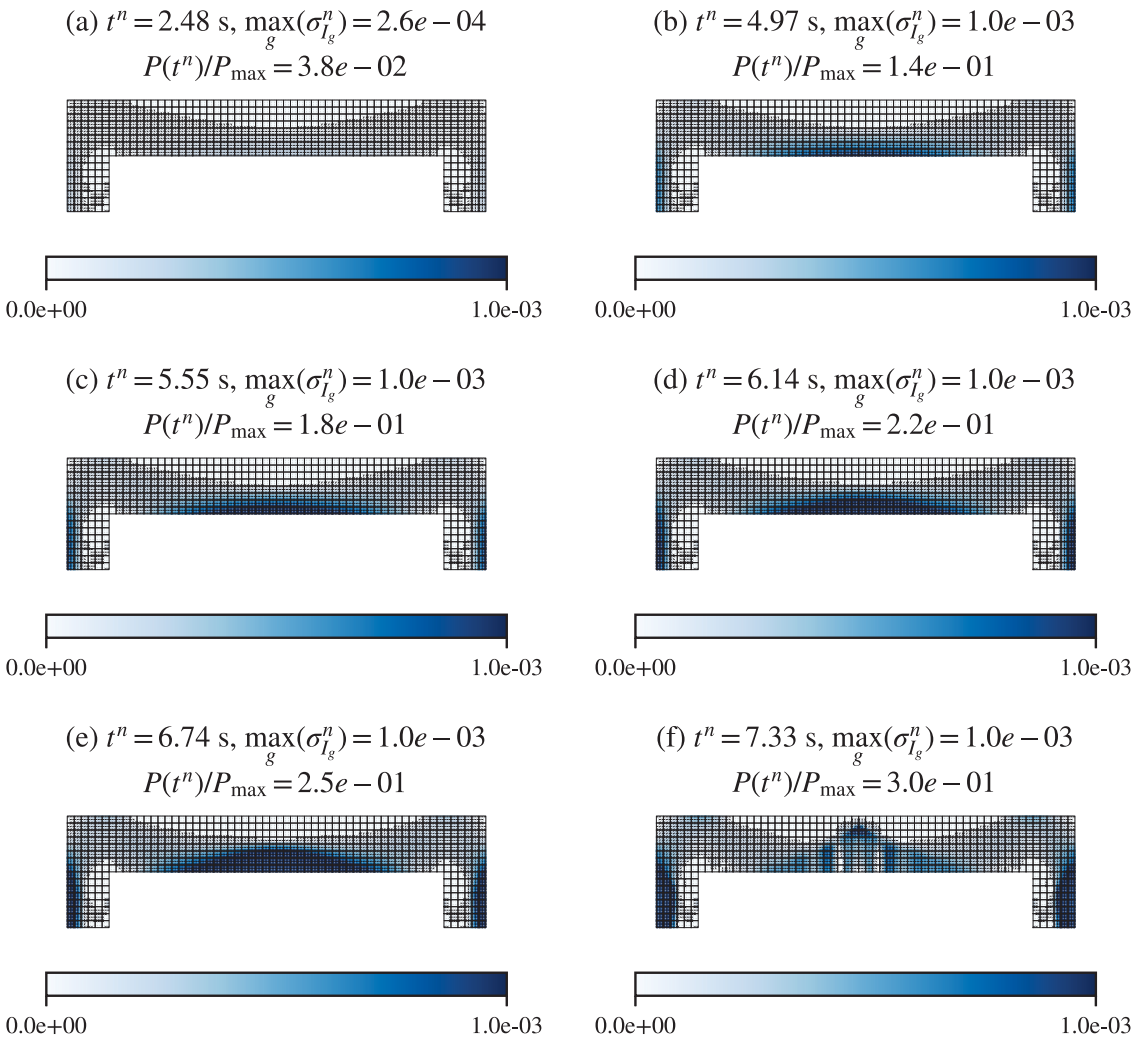
FONTE: O autor (2022).

6.2.4 Modelo I - Pórtico

Os resultados do modelo I são dispostos conforme a lista a seguir:

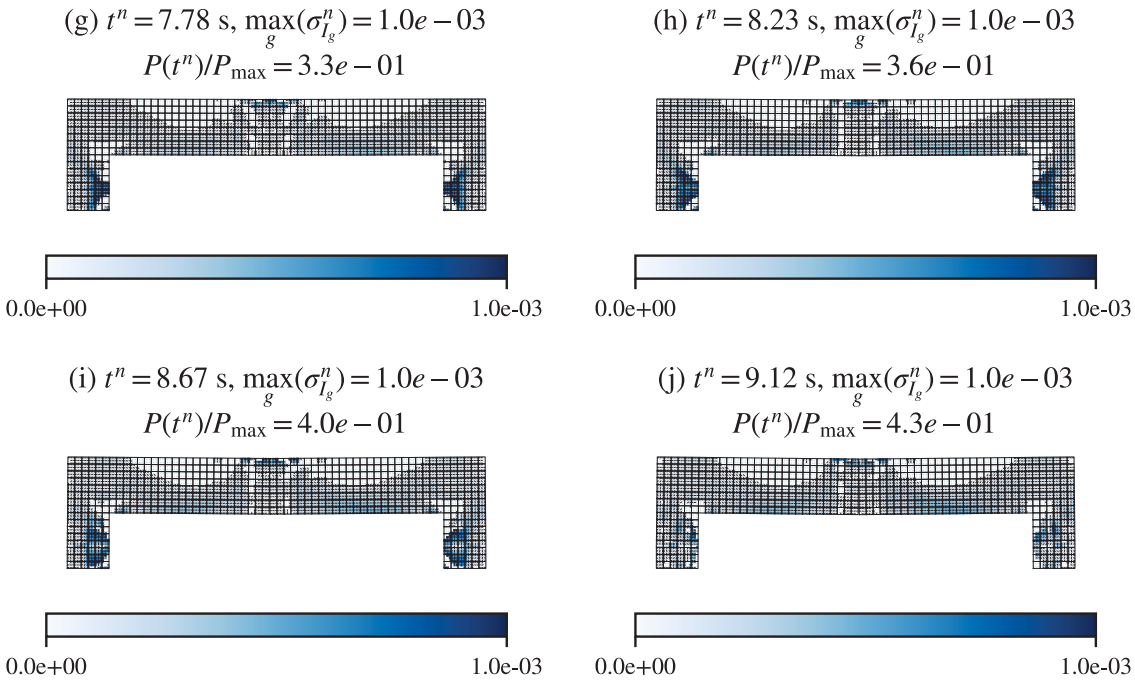
- tensões principais $\sigma^n_{I_g}$: figuras 124 e 125;
- tensões principais $\sigma^n_{III_g}$: figuras 126 e 127;
- dano escalar $\mathscr{D}^n_g$: figuras 128 e 129.

FIGURA 124 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO I (kN/cm^2) - PARTE 1.



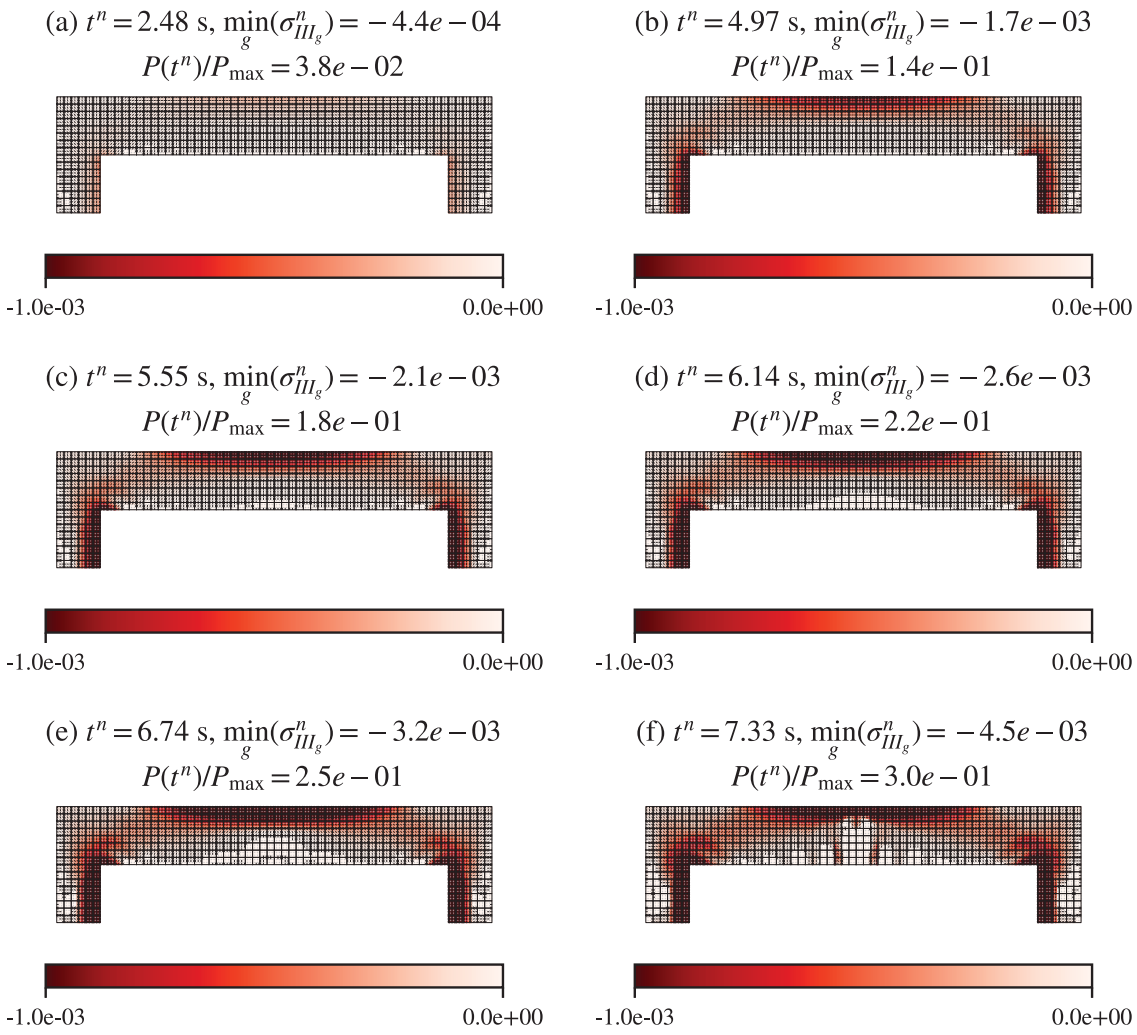
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 125 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO I (kN/cm^2) - PARTE 2.



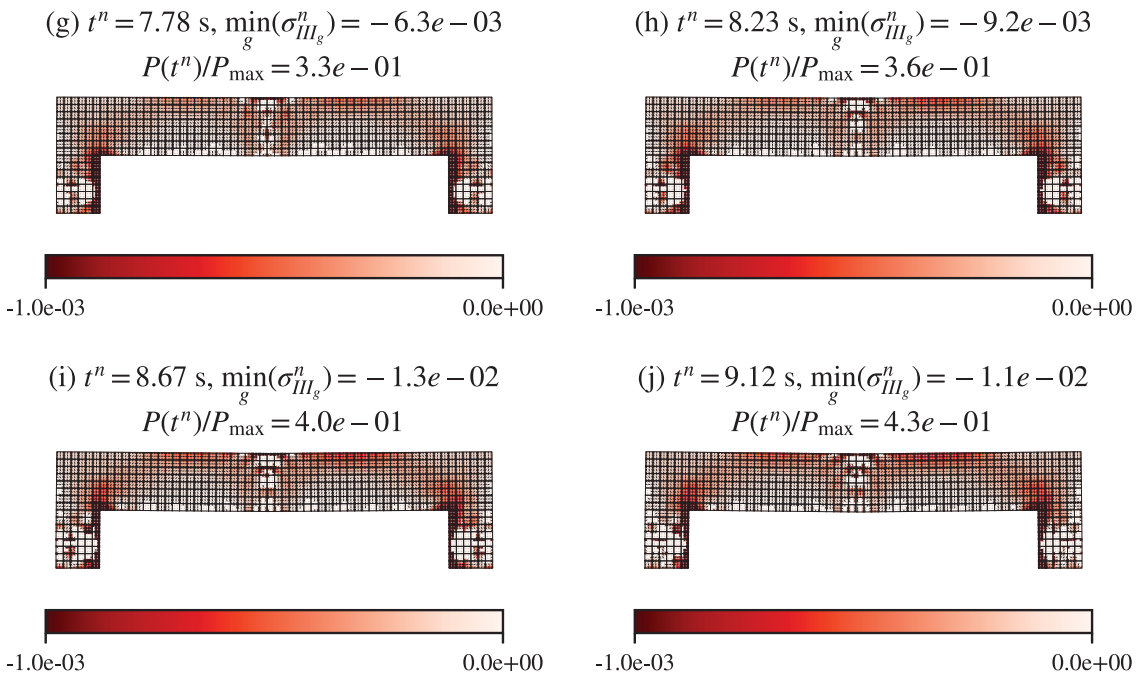
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 126 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO I (kN/cm^2) - PARTE 1.



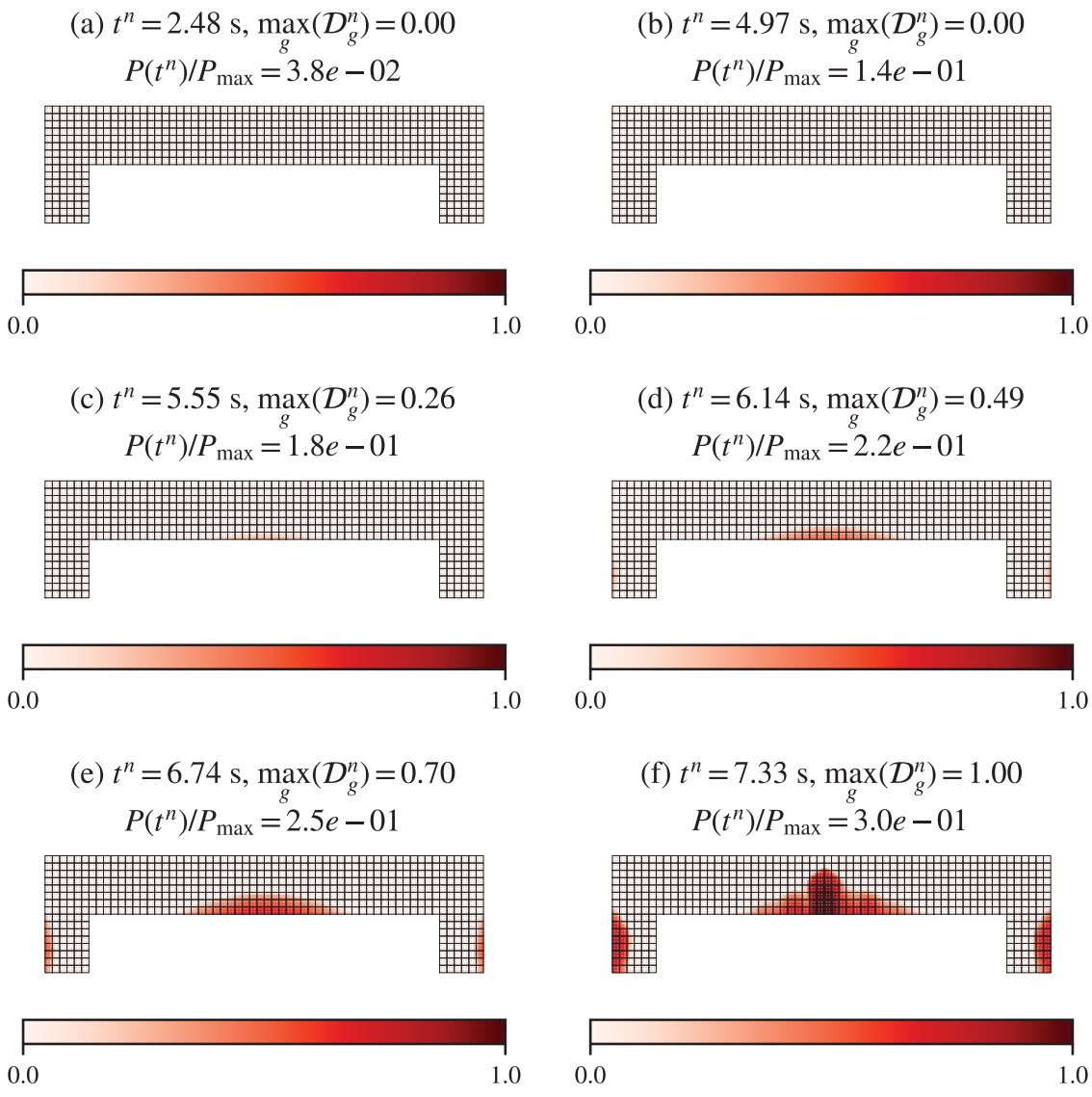
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 127 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO I (kN/cm^2) - PARTE 2.



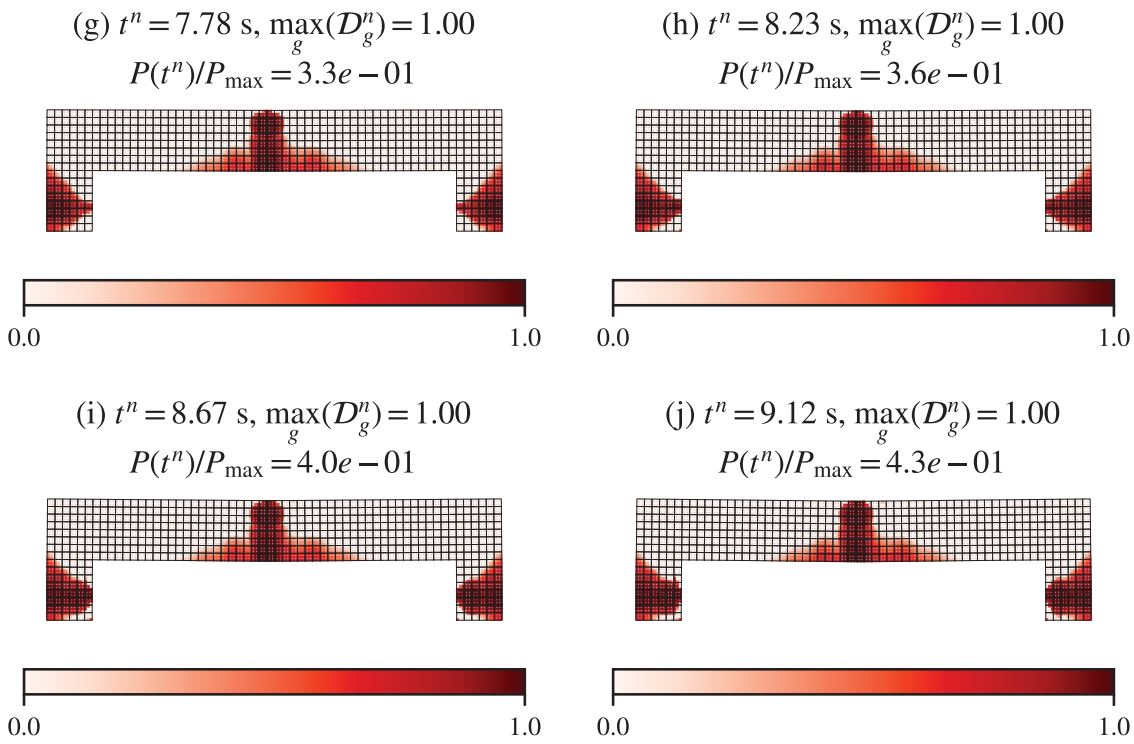
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 128 – DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO I - PARTE 1.



FONTE: O autor (2022).

FIGURA 129 – DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO I - PARTE 2.



FONTE: O autor (2022).

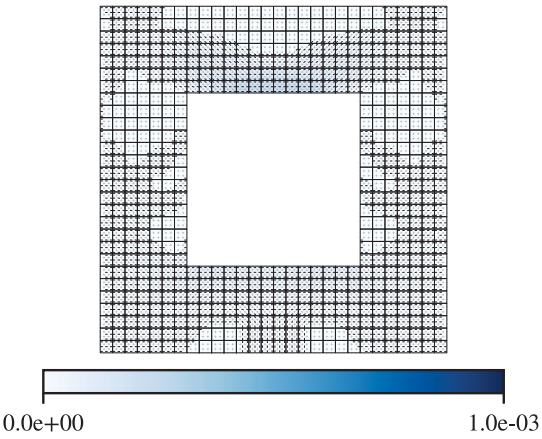
6.2.5 Modelo J - Parede com abertura

Por fim, exibem-se os seguintes resultados para o modelo J:

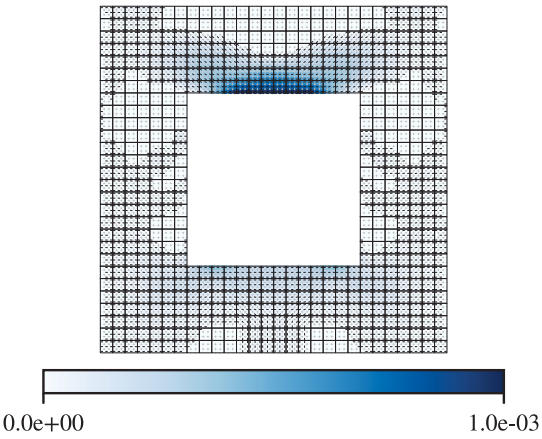
- tensões principais $\sigma^n_{I_g}$: figuras 130 e 131;
- tensões principais $\sigma^n_{III_g}$: figuras 132 e 133;
- dano escalar $\mathscr{D}^n_g$: figuras 134 e 135.

FIGURA 130 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO J (kN/cm^2) - PARTE 1.

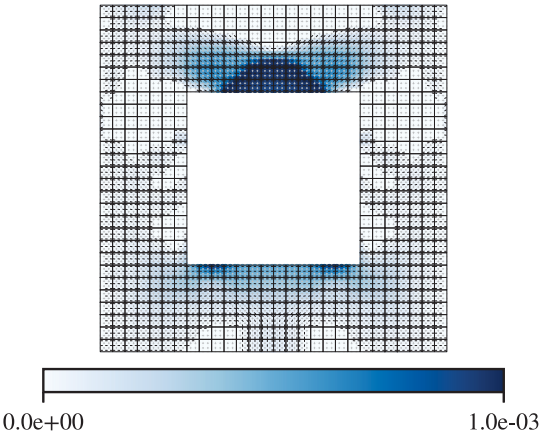
(a) $t^n = 1.41$ s, $\max_g(\sigma^n_{I_g}) = 2.5e-04$
$P(t^n)/P_{\max} = 1.2e-02$



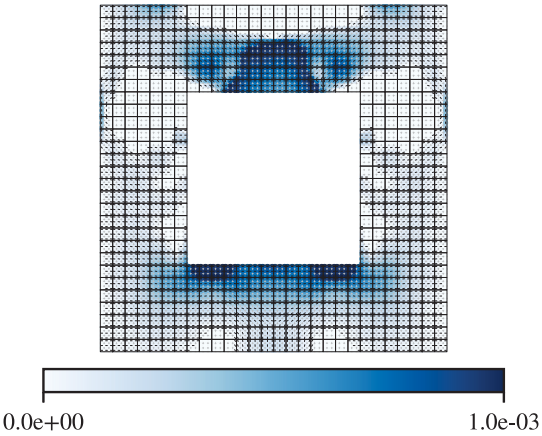
(b) $t^n = 2.81$ s, $\max_g(\sigma^n_{I_g}) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 4.8e-02$



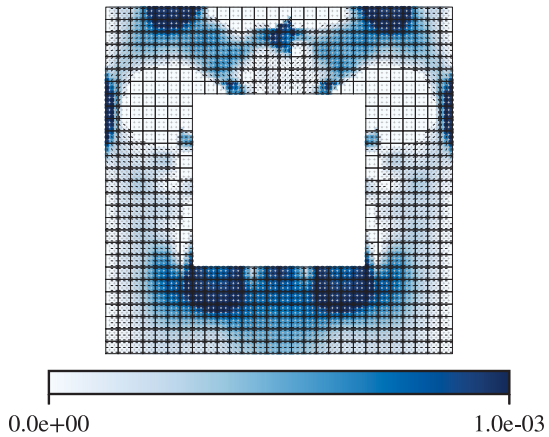
(c) $t^n = 4.04$ s, $\max_g(\sigma^n_{I_g}) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 9.7e-02$



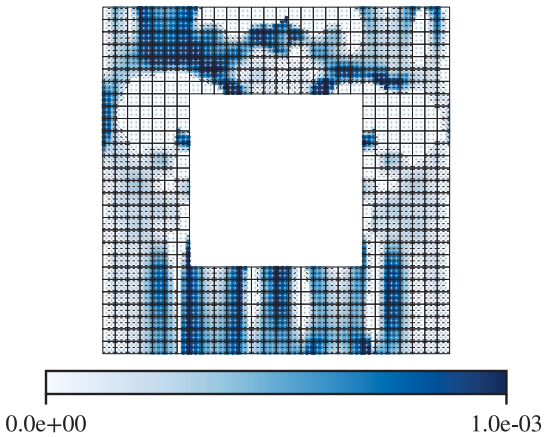
(d) $t^n = 5.26$ s, $\max_g(\sigma^n_{I_g}) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 1.6e-01$



(e) $t^n = 6.48$ s, $\max_g(\sigma^n_{I_g}) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 2.4e-01$



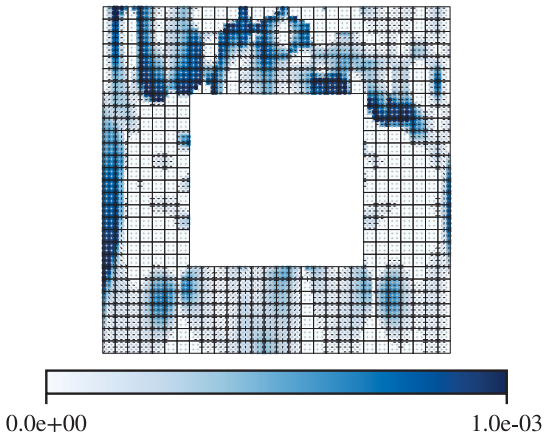
(f) $t^n = 7.71$ s, $\max_g(\sigma^n_{I_g}) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.2e-01$



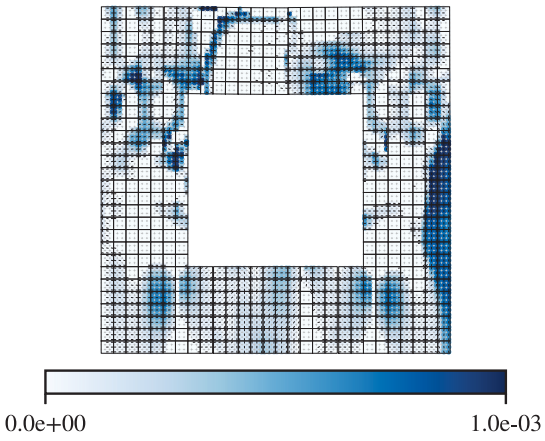
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 131 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_I NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO J (kN/cm^2) - PARTE 2.

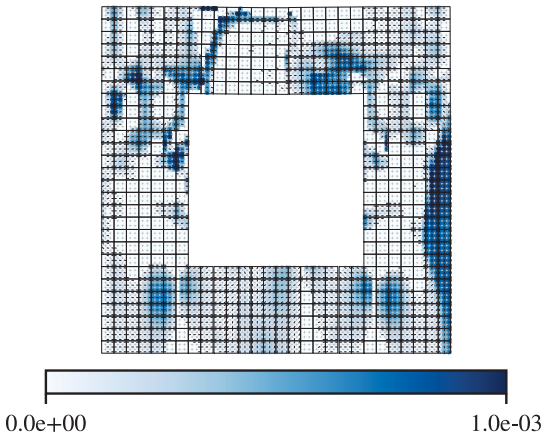
(g) $t^n = 7.89$ s, $\max_g(\sigma^n_{I_g}) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.4e-01$



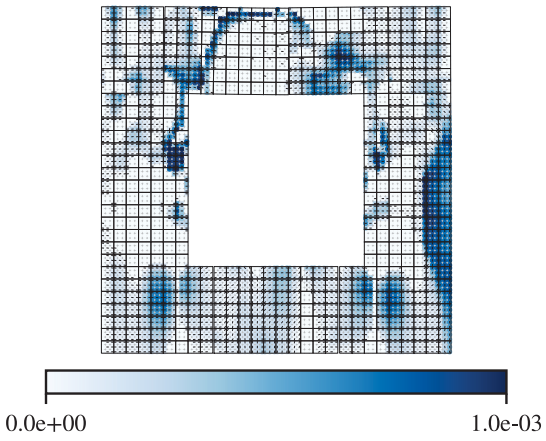
(i) $t^n = 8.24$ s, $\max_g(\sigma^n_{I_g}) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.6e-01$



(i) $t^n = 8.24$ s, $\max_g(\sigma^n_{I_g}) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.6e-01$



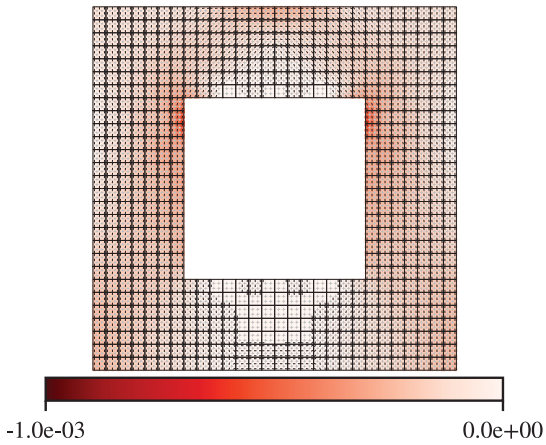
(j) $t^n = 8.42$ s, $\max_g(\sigma^n_{I_g}) = 1.0e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.8e-01$



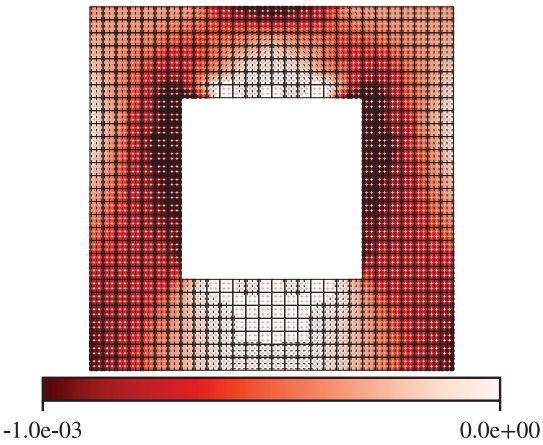
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 132 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO J (kN/cm^2) - PARTE 1.

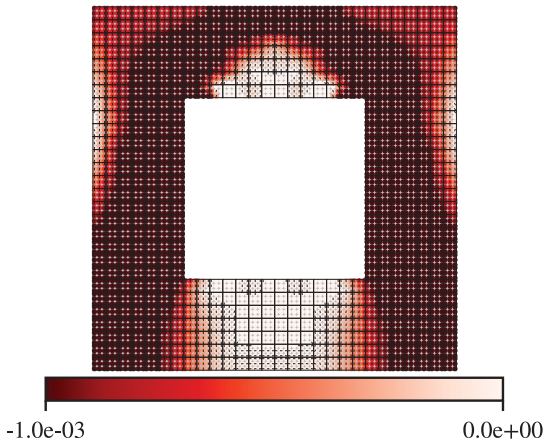
(a) $t^n = 1.41$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -5.6e-04$
$P(t^n)/P_{\max} = 1.2e-02$



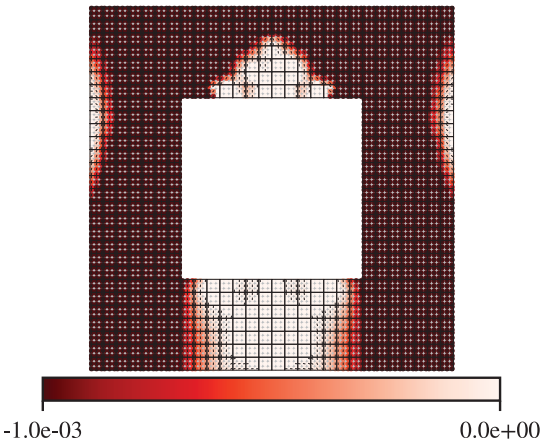
(b) $t^n = 2.81$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -2.2e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 4.8e-02$



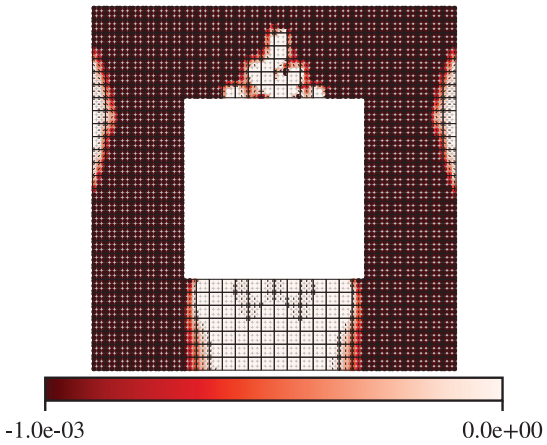
(c) $t^n = 4.04$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -4.7e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 9.7e-02$



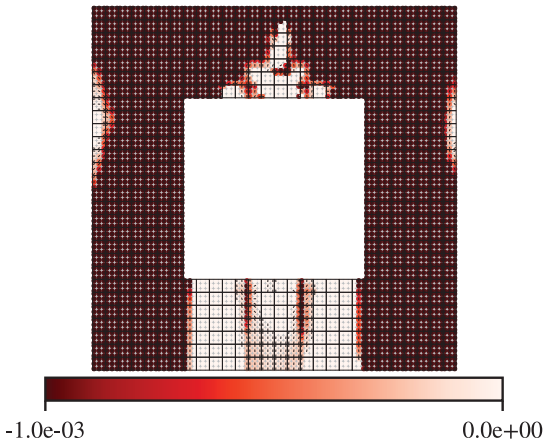
(d) $t^n = 5.26$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -8.5e-03$
$P(t^n)/P_{\max} = 1.6e-01$



(e) $t^n = 6.48$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -1.5e-02$
$P(t^n)/P_{\max} = 2.4e-01$



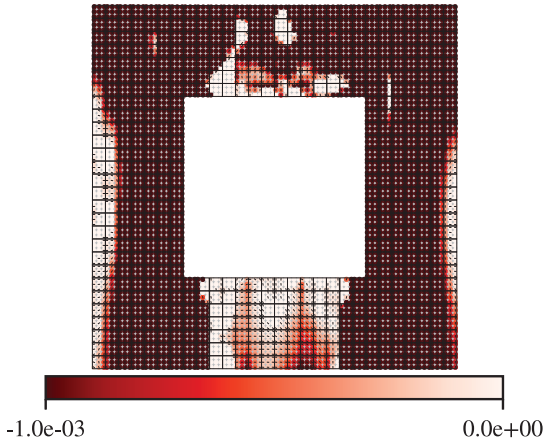
(f) $t^n = 7.71$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -2.0e-02$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.2e-01$



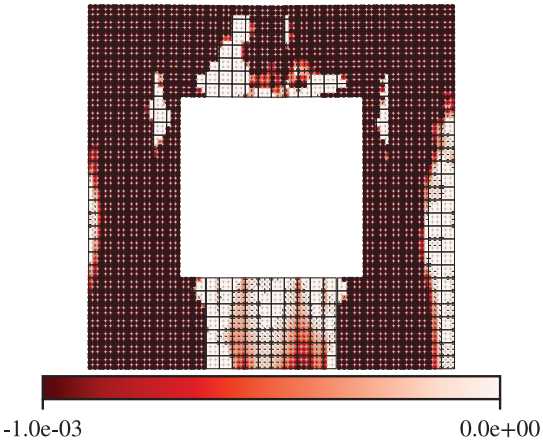
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 133 – TENSÕES PRINCIPAIS σ_{III} NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO J (kN/cm^2) - PARTE 2.

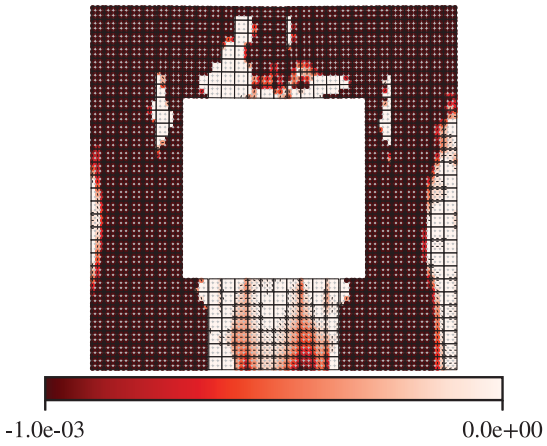
(g) $t^n = 7.89$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -2.4e-02$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.4e-01$



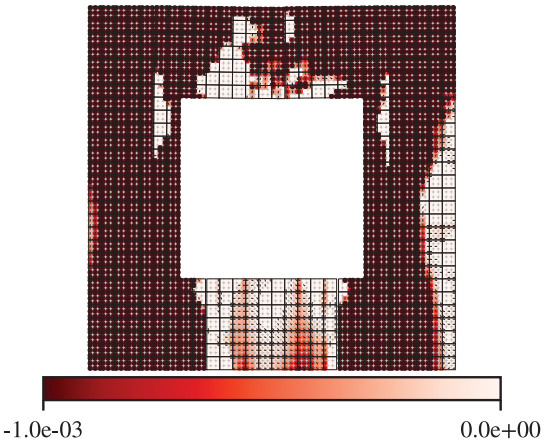
(i) $t^n = 8.24$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -4.7e-02$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.6e-01$



(i) $t^n = 8.24$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -4.7e-02$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.6e-01$

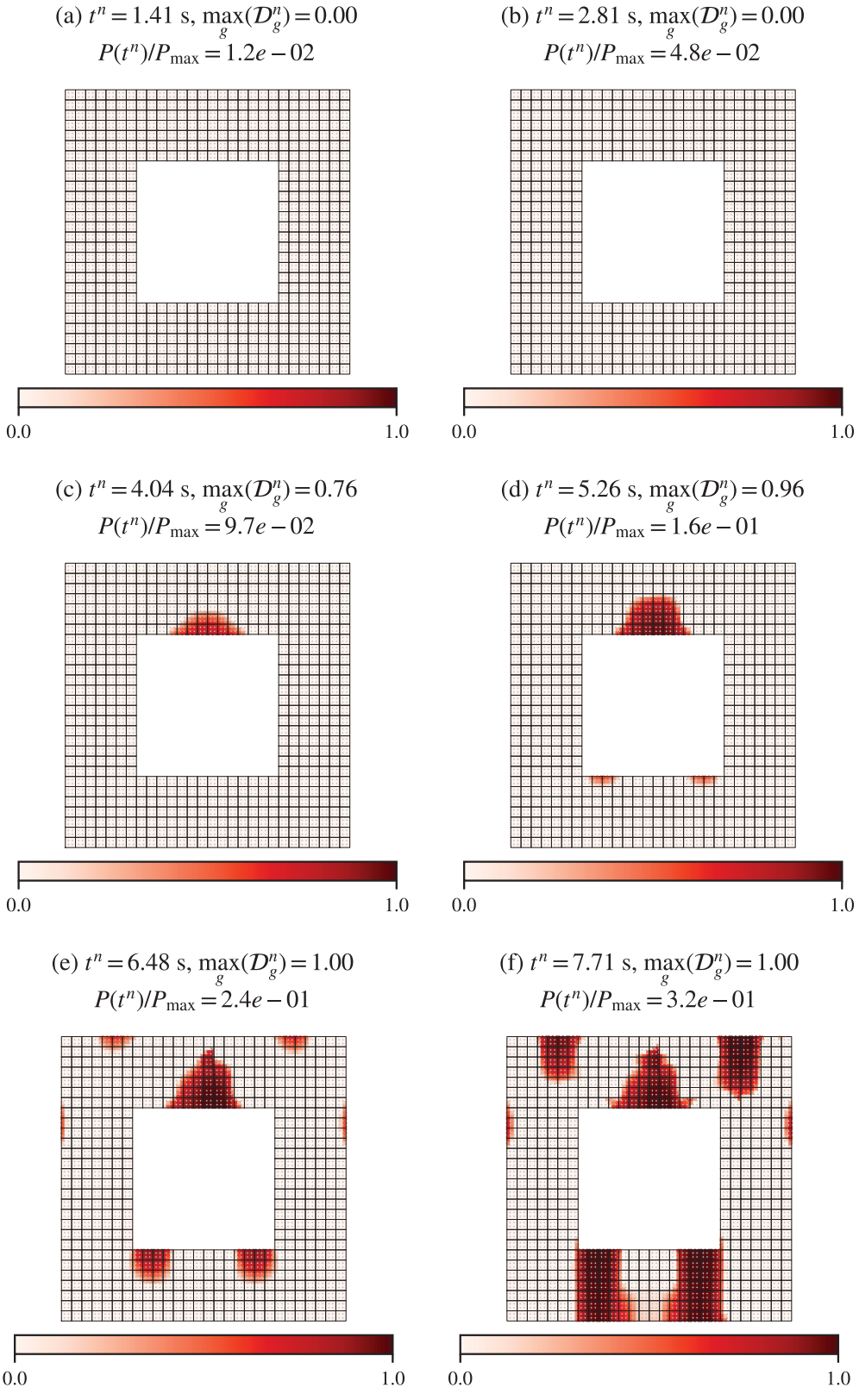


(j) $t^n = 8.42$ s, $\min_g(\sigma^n_{III_g}) = -5.7e-02$
$P(t^n)/P_{\max} = 3.8e-01$



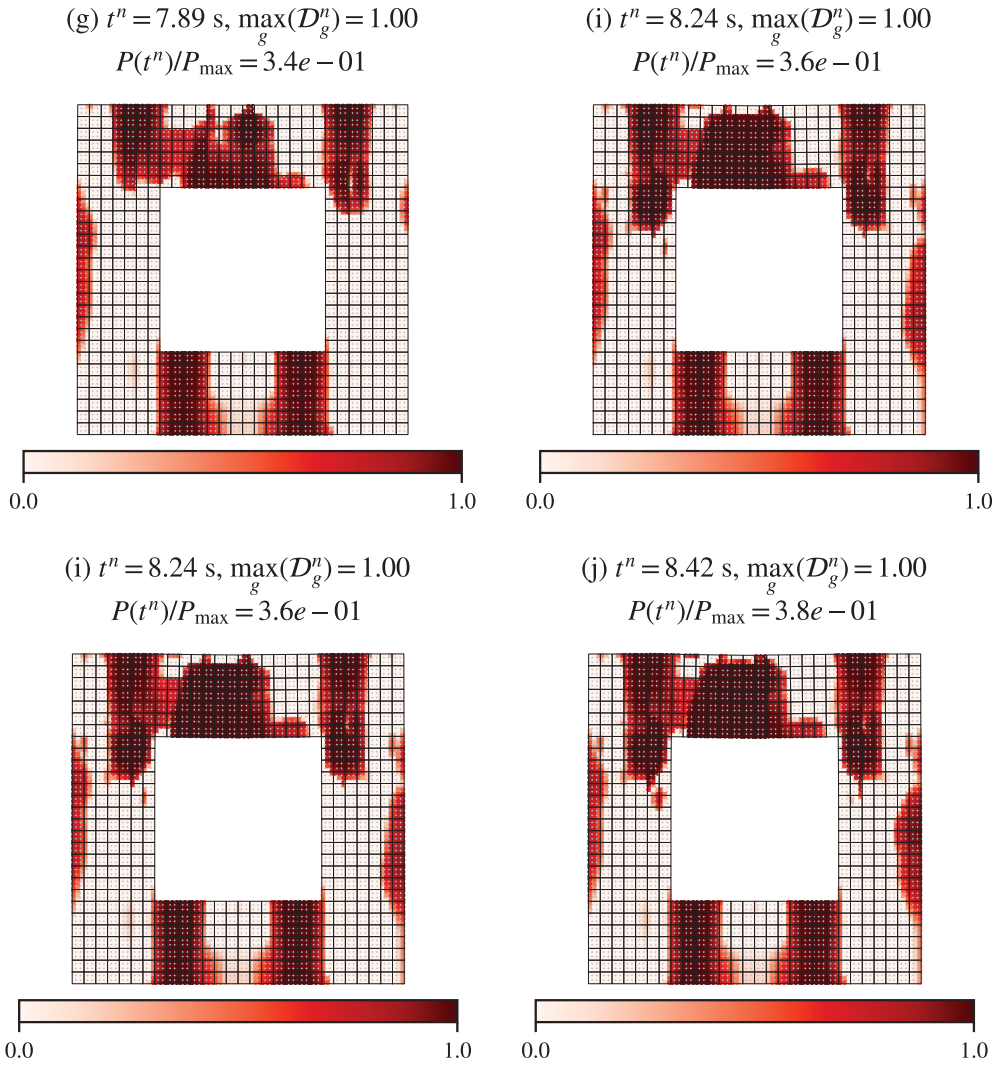
FONTE: O autor (2022).

FIGURA 134 – DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO J - PARTE 1.



FONTE: O autor (2022).

FIGURA 135 – DANO ESCALAR NOS PONTOS DE GAUSS DO MODELO J - PARTE 2.



FONTE: O autor (2022).

7 DISCUSSÕES

Este capítulo contém as discussões sobre os resultados apresentados no capítulo 6. Com a finalidade de confirmar as hipóteses definidas em 1.2, estas são confrontadas com as respostas fornecidas pelos processamentos dos modelos com o MPM SPSI.

7.1 ANÁLISES SEM DANIFICAÇÃO E FRATURA

7.1.1 Modelo A - viga engastada-livre sob carregamento quase estático distribuído uniformemente

Conforme já relatado, utiliza-se o modelo A para a verificação da distribuição de tensões, proporcionada pelo MPM SPSI, em uma viga sob carregamento quase estático no estado plano de tensões. Pela figura 69, onde avaliam-se as tensões σ_{xx} dos submodelos A-8x2-8x2, percebe-se que a interpolação nodal com B-splines cúbicas permite uma variação espacial mais suave e contínua. As funções lineares também acabam proporcionando tensões máximas de compressão e tração com menor magnitude em relação às B-Splines cúbicas.

Outro aspecto observado nos submodelos A-8x2x8x2-4-B e A-8x2x8x2-9-B é uma simetria entre os valores máximos e mínimos de tensão longitudinal na seção do engaste, o que não acontece nos submodelos A-8x2x8x2-4-L e A-8x2x8x2-9-L. Em relação ao número de pontos de Gauss, não se percebe influência significativa desse fator nos resultados da figura 69. A distribuição espacial dos submodelos com 9 pontos superconvergentes por subdomínio é parecida com a dos submodelos com 4 pontos. Há sim, alterações nos valores máximos e mínimos pois, com um número diferente de pontos de Gauss por subdomínio, as coordenadas desses pontos mudam e, portanto, alteram-se os valores das variáveis de estado.

Nas figuras 70 e 71, o melhor desempenho das B-splines cúbicas é confirmado. Principalmente na figura 71, que mostra as tensões σ_{xy}, vê-se que os resultados dos submodelos A-8x2x8x2-4-L e A-8x2x8x2-9-L oscilam consideravelmente ao longo do domínio deformado. Já os submodelos A-8x2x8x2-4-B e A-8x2x8x2-9-B indicam variações suaves e contínuas, compatíveis com a natureza do problema avaliado.

Quando confrontam-se as tensões σ_{xx} na região da seção central da viga, na figura 73, verifica-se que todos os submodelos apresentam resultados compatíveis com os resultados de Piedade Neto (2013). Entretanto, nitidamente nota-se uma maior aproximação entre os resultados do MPM SPSI e do trabalho de referência com a utilização de interpolação nodal com B-splines cúbicas, principalmente com 9 pontos

superconvergentes por subdomínio.

Na figura 74, não verifica-se compatibilidade entre a variação de σ_{yy} ao longo da altura dos submodelos A-8x2x8x2-4-L e A-8x2x8x2-9-L e as tensões do trabalho de referência. Nesse caso, a interpolação nodal linear provoca oscilações nos resultados abaixo e acima da linha neutra da viga. Por outro lado, as B-splines são capazes de proporcionar uma variação condizente com o que se observa em Piedade Neto (2013). Da mesma forma, as tensões de cisalhamento da seção central nos submodelos A-8x2x8x2-4-B e A-8x2x8x2-9-B aproximam-se razoavelmente dos resultados de referência, o que não ocorre com os submodelos A-8x2x8x2-4-L e A-8x2x8x2-9-L.

Em contrapartida, a utilização de uma malha Euleriana mais refinada que a malha Lagrangiana, como acontece nos submodelos A-8x2-32x8, tende a melhorar os resultados produzidos com a interpolação nodal linear. Esse tipo de combinação de malhas proporciona resultados gerados pela interpolação nodal linear parecidos com os da interpolação com B-splines cúbicas, como é visto nas figuras 76, 77 e 78.

Na seção central, vê-se, pela figura 80, que as tensões σ_{xx} de todos os submodelos possuem boa aproximação com os resultados de referência. O mesmo não acontece, todavia, com as tensões σ_{yy} da figura 81: há uma piora nos resultados produzidos com B-splines quando se tem 4 pontos superconvergentes por subdomínio, em um comportamento semelhante ao constatado com o submodelo A-8x2-32x8-4-L. Com $n_g = 9$, tanto o submodelo A-8x2-32x8-9-L quanto o A-8x2-32x8-9-B aproximam-se dos resultados de Piedade Neto (2013).

Já nas tensões σ_{xy} da figura 82, todos os submodelos A-8x2-32x8 apresentam resultados concordantes com os do trabalho de referência. Resumidamente, o que se observa nos submodelos com malha Euleriana mais refinada do que a malha Lagrangiana é uma melhora dos resultados da interpolação nodal linear e a manutenção ou piora dos resultados da interpolação com B-splines cúbicas.

Relativamente aos submodelos com malha Lagrangiana 16×4 e malha Euleriana 16×4, observam-se, na figura 83, variações espaciais de σ_{xx} mais suaves promovidas pelas funções $N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$, comparativamente ao que se tem com as funções $N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$. Algo similar é detectado nas figuras 84 e 85, embora isso fique mais destacado nas tensões σ_{xy}. Assim como observado nos submodelos A-8x2-8x2, percebe-se uma maior aproximação entre as tensões σ_{xx} dos submodelos A-16x4-16x4 com interpolação por B-splines e as tensões do trabalho de Piedade Neto (2013), como mostra a figura 87. Seguindo a mesma lógica, mas de forma mais pronunciada, as figuras 88 e 89 também remetem ao melhor desempenho das B-splines para essa configuração de malhas Lagrangiana e Euleriana.

7.1.2 Modelo B - barra engastada-livre sob carregamento quase estático de compressão sofrendo instabilidade

O gráfico de variação energética da figura 90, gerado pelo processamento do modelo B com o MPM SPSI (9 pontos superconvergentes/subdomínio e $N_i(\mathbf{x}) = N_i^B(\mathbf{x})$), permite a nítida compreensão da instabilização da barra analisada. Visualmente, percebe-se que há um instante de tempo a partir do qual a energia mecânica potencial total $\Pi(t)$ passa a variar com grande magnitude mediante incrementos de tempo muito pequenos. Nesse instante, o equilíbrio inicial da barra não é mais estável, e a peça busca uma nova configuração em que as forças internas e externas sejam balanceadas.

Para dar aspecto quantitativo à análise, define-se o momento de instabilização como o ponto em vermelho da figura 90, quando a variação $\dfrac{\Delta\Pi^n}{\Delta t^n}$ passa a ser maior ou igual a 0.10. Tal ponto está associado a um carregamento axial 1.11 vezes maior que a primeira carga crítica analítica de Euler, ou seja, a carga que instabiliza a barra no MPM SPSI é cerca de 11% maior que P_{E}. Esse resultado demonstra uma boa capacidade do MPM SPSI no monitoramento de um processo que envolve grandes deformações e deslocamentos, que aumentam vertiginosamente a partir do ponto em vermelho. Já os pontos azul e laranja representam, respectivamente, o momento em que a barra começa a vibrar e o final da análise.

A figura 90 também indica um processo vibracional significativo após a perda de estabilidade inicial, com a energia da barra oscilando em torno de uma tendência. Essa oscilação tende a diminuir à medida que a estrutura aproxima-se da configuração final. Ao longo de grande parte do processamento, percebe-se a manutenção do balanço energético, isto é, as energias potencial total $\Pi(t)$ e o trabalho das forças externas $\mathcal{W}_t(t)$ variam no tempo com curvas que se sobrepõem. É detectada, porém, certa dissipação energética na parte final da análise, a partir de $t = 15$ s. A referida dissipação pode ser devida ao processo de integração temporal de Euler-Gauss e ao processo USL de atualização de tensões utilizados no MPM SPSI.

Com a figura 91, na qual os pontos vermelho, azul e laranja são reproduzidos, também visualiza-se com clareza a instabilização da peça. Após chegar à situação do ponto em vermelho, têm-se grandes variações dos deslocamentos em x e y mediante incrementos ínfimos do carregamento axial. Em seguida, constata-se o processo de vibração e a tendência de um novo equilíbrio onde a solicitação interna principal é a flexão.

Já na figura 92, observa-se que a configuração deformada do instante representado pelo ponto vermelho - alínea (b) - ainda é relativamente próxima à configuração deformada - alínea (a). Entre os instantes das alíneas (b) e (c), contudo, há uma

mudança substancial nos deslocamentos e deformações, até que a barra atinge sua configuração do final da análise na alínea (d). Nessa figura, atesta-se visualmente a capacidade do MPM SPSI em proporcionar análises confiáveis de situações que abrangem grandes não linearidades geométricas no estado plano de tensões.

Lembra-se, no entanto, que as configurações deformadas das alíneas (c) e (d) da figura 92 somente ocorrem pela característica assumida para o material na simulação. O comportamento infinitamente elástico é uma idealização quase nunca observada em análises reais. Mediante a consideração de materiais como o concreto e o aço, por exemplo, a partir da alínea (b) seriam detectados nítidos indícios de falha. Com o concreto, provavelmente a fissuração e a ruptura frágil aconteceriam, enquanto o aço sofreria deformações plásticas irreversíveis.

7.1.3 Modelo C - laje engastada-livre sob ação da gravidade

Os modelos C e D são processados com a intenção de se comparar os resultados do MPM SPSI com os do MPM CPDI, retirados do trabalho de Sadeghirad et al. (2011). Relembra-se que, nesses dois casos, emprega-se o estado plano de deformações. Ambos os modelos também tratam de estruturas com relação rigidez/-massa bastante reduzida, fazendo com que a ação da gravidade provoque grandes deslocamentos e deformações nas peças. Cabe ressaltar que, para o processamento dos modelos C e D, o MPM SPSI é adaptado para contemplar materiais hiperelásticos neo-Hookeanos.

Infere-se, pela figura 93, que os submodelos C-L e C-B do MPM SPSI possuem a mesma tendência de deslocamento u_y do MPM CPDI. No primeiro trecho das curvas, que se estende um pouco além de $t = 1$ s, há quase a sobreposição completa entre os gráficos. Depois disso, a energia interna de deformação armazenada começa a ser novamente convertida em energia cinética e os deslocamentos verticais começam a diminuir. Esse processo ocorre, para o submodelo C-L, mais rapidamente que para o MPM CPDI. Para o submodelo C-B, a recuperação dos deslocamentos atinge seu pico depois do pico do MPM CPDI de Sadeghirad et al. (2011). A mesma dedução pode ser feita pela comparação entre as deformadas das figuras 95 e 96.

Analisando-se as variações energéticas da figura 94, há uma maior proximidade entre as curvas da energia potencial total e do trabalho externo para o submodelo C-L, com interpolação nodal linear. O submodelo C-B passa a apresentar maiores diferenças entre $\Pi(t) = \mathcal{K}(t) + \mathcal{U}(t)$ e $\mathcal{W}_b(t)$ na parte final da análise. Mais uma vez, constata-se que a interpolação nodal aplicada ao MPM SPSI interfere nos resultados das análises. Essa dissipação energética vista no modelo C-B, porém, pode ser devida ao processo de cálculo da energia interna de deformação e do trabalho das forças externas de corpo (integração explícita de Euler Gauss). Quando B-splines são utilizadas na interpolação,

esse efeito parece ser mais pronunciado.

A adoção de B-splines é, contudo, justificada pelos bons resultados observados nos modelos A e B. Como já comentado, distribuições espaciais de tensões mais regulares e precisas são obtidas com esse tipo de função. Além disso, as funções $N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$ demonstram, conforme o modelo B, capacidade de assimilação de deslocamentos grandes e abruptos durante a análise.

7.1.4 Modelo D - bloco sob a ação de gravidade extrema

Como observado na figura 97, o comportamento do deslocamento u_y do submodelo D-L é bem mais próximo ao que se observa no MPM CPDI, se comparado ao submodelo D-B. Sob a ação de uma aceleração da gravidade extrema, o submodelo com interpolação por B-splines cúbicas revela maior influência da inércia da viga na recuperação dos deslocamentos, limitando a amplitude da vibração provocada pela aplicação súbita do peso próprio. Vê-se, na figura 98, que esse comportamento não significa uma dissipação de energia, já que as curvas da energia mecânica potencial total e do trabalho externo ficam próximas para ambos os submodelos D-L e D-B. Em ambas as curvas energéticas, observam-se diferenças pequenas entre a energia potencial total e o trabalho externo, originárias do processo de cálculo por integração explícita.

Na comparação das configurações deformadas das figuras 99 e 100, também verifica-se maior semelhança entre os resultados do submodelo C-L com os resultados do MPM CPDI. O fato do MPM CPDI também utilizar interpolação nodal linear acaba interferindo nesse fato. Assim como no modelo C, infere-se que os resultados concebidos com B-splines cúbicas sejam representativos do problema, uma vez que as análises dos modelos A e B indicam um comportamento convincente.

Em ambos os submodelos da figura 99, verificam-se grandes alongamentos verticais dos subdomínios, principalmente na região dos apoios. Nessa mesma região, atesta-se também a estricção (redução da seção transversal) do bloco devida à tração causada pela gravidade $g = -1000$ m/s^2.

Em problemas com alongamentos de grande magnitude como os observados no modelo D, um maior refinamento da malha Lagrangiana provavelmente aumentará precisão do MPM SPSI. Uma medida nesse sentido pode diminuir as diferenças entre as larguras e os comprimentos dos subdomínios deformados e, consequentemente, aumentar a acurácia no uso numérico das matrizes Jacobianas. Aqui, a discretização adotada nas análises busca reproduzir os dados utilizados por Sadeghirad et al. (2011), objetivo que é atingido de maneira satisfatória.

7.1.5 Modelo E - viga engastada-livre com diferentes coeficientes de amortecimento

Com o modelo E, busca-se testar a incorporação do amortecimento local não viscoso de Cundall (1987) à hipótese do MPM SPSI. Uma primeira constatação, após a análise das figuras 101 a 104, é que o esquema de evolução da carga aplicada permite uma resposta quase estática, com oscilações mínimas, aos submodelos na primeira metade da análise e uma resposta dinâmica na segunda metade.

Atesta-se também, com as variações da energia potencial total das alíneas (f) das figuras 101 a 104, que o MPM SPSI promove uma dissipação energética mesmo com $\alpha = 0$ (sem amortecimento). Isso é perceptível na observação da curva de energia em azul que, em uma situação de não dissipação, precisaria manter-se na horizontal na segunda metade da análise. Essa situação é parecida com o que é relatado no modelo B e, dentre suas causas, estão a integração temporal explícita de Euler-Gauss e o processo de atualização de tensões USL.

Ainda nas alíneas (f) das referidas figuras, verifica-se o efeito do amortecimento à medida que o valor de α é aumentado. Com $\alpha = 10^{-2}$ e $\alpha = 10^{-1}$, um decaimento quase exponencial da energia mecânica potencial total fica mais nítido.

Analisando-se os deslocamentos u_x ao longo do tempo, percebe-se nos submodelos E-L-4-0, E-L-9-0, E-B-4-0 e E-B-9-0, a sobreposição de vibrações com diferentes frequências após $t = 10$ s. Ao passo em que o valor de α aumenta, seu efeito de amortecimento é percebido primeiramente nas vibrações de maior frequência. Nas alíneas (b) das figuras 101 a 104, isso é melhor detectado nas curvas com $\alpha = 10^{-2}$, na cor verde. Nessas curvas, os deslocamentos u_x só seriam completamente anulados se as análises prosseguissem após $t = 20$ s. Já para $\alpha = 10^{-1}$, os valores de u_x tendem a zero de um modo mais visível dentro do tempo de análise utilizado. Notam-se também oscilações diferentes dos deslocamentos u_x em função da escolha da interpolação nodal, com $N_i^{\mathrm{L}}(\mathbf{x})$ ou com $N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$.

Os deslocamentos u_y na extremidade da viga, cujos gráficos de variação estão nas alíneas (c) das figuras 101 a 104, refletem a direção principal das oscilações, já que são paralelos à direção de aplicação do carregamento. Com tais resultados, confirma-se que as análises do modelo E contemplam grandes deslocamentos, já que valores máximos próximos de $|u_y| = 5$ cm são observados, correspondentes a cerca de 5% do comprimento inicial da viga e $1/3$ de sua altura inicial.

Nos deslocamentos u_y, infere-se também que o aumento do valor de α é mais efetivo no abatimento das oscilações, se comparado ao que ocorre nos deslocamentos u_x. Tal fato justifica-se pela componente da força nodal de amortecimento $f^n_{d_{y_i}}$ ser bem maior que a componente $f^n_{d_{x_i}}$, visto que essas forças são calculadas proporcionalmente à magnitude das forças internas nodais em cada direção cartesiana. Outro fato ob-

servado é que a interpolação nodal linear também modifica a resposta oscilatória dos submodelos na direção y.

Com relação às velocidades v_x plotadas nas alíneas (d) das figuras 101 a 104, constata-se um comportamento distinto entre os submodelos com 4 e 9 pontos superconvergentes por subdomínio. Os submodelos E-L-4 e E-B-4 trazem oscilações com maior simetria em torno da reta $v_x = 0$, algo que não acontece com os submodelos E-L-9 e E-B-9. Nesse contexto, é importante reforçar que as velocidades plotadas são velocidades medidas nos pontos de Gauss dos subdomínios. Assim, como existem 3 subdomínios na extremidade livre da viga, escolhe-se o subdomínio do meio para a retirada das informações. Com 9 pontos superconvergentes, as velocidades plotadas são as velocidades do ponto de Gauss $g = 6$ do referido subdomínio. No caso de 4 pontos de Gauss, as velocidades representam uma média entre os valores dos pontos 2 e 4. Portanto, é factível que o procedimento adotado tenha provocado essa diferença de comportamento.

Da mesma forma que os deslocamentos u_y, as velocidades v_y das alíneas (e) das figuras 101 a 104 mostram com maior clareza o efeito do amortecimento local não viscoso nas análises do MPM SPSI. Como esperado, há a redução gradativa da magnitude de v_y com o passar do tempo, após a retirada abrupta da carga transversal.

Após o estudo dos resultados do modelo E, portanto, entende-se que o amortecimento local não viscoso de Cundall (1987) é uma alternativa passível de utilização e de aplicação relativamente simples no MPM SPSI. Todavia, percebe-se que a calibração do coeficiente α precisa ser feita de acordo com a estrutura e o material da análise, bem como deve levar em conta o tipo de interpolação nodal empregada.

7.1.6 Correlação entre as análises dos modelos A a E e as hipóteses

Os processamentos envolvendo os modelos A a E permitem o teste das hipóteses (a) a (f) definidas em 1.2. Entende-se, por exemplo, que a hipótese (a) é validada pelos resultados do modelo A. Neles, vê-se que a a aplicação do MPM SPSI na análise de estruturas é capaz de gerar respostas precisas em termos de tensões. No entanto, deve-se dedicar atenção especial à interação entre o tipo de função de interpolação nodal utilizada e as discretizações adotadas para as malhas Lagrangiana e Euleriana.

Já a hipótese (b), que remete ao uso de funções Lagrangianas quadráticas internamente ao subdomínio, é automaticamente ratificada com os resultados dos modelos A a E. No modelo A, o ajuste correto entre interpolação nodal e discretização das malhas permite que resultados muito próximos aos de Piedade Neto (2013). Com o modelo B, mostra-se que o MPM SPSI dotado de funções internas $Q_{\mathrm{v}}(\mathbf{x})$ é habilitado a monitorar a perda de estabilidade de uma barra comprimida axialmente, incluindo-se

o comportamento pós-crítico. Além disso, os modelos C e D processados com as funções $Q_{\mathrm{v}}(\mathbf{x})$ exibem resultados de deslocamento muito próximos aos resultados do MPM CPDI, com o benefício adicional de uma variação de resultados de tensão e deformação dentro dos subdomínios e de uma maior adaptação aos formatos deformados. No entanto, uma limitação das funções $Q_{\mathrm{v}}(\mathbf{x})$ acaba sendo a necessidade de armazenamento das massas m_p nos centros de massa dos subdomínios. Isso deve ser feito para sempre assegurar a interpolação de valores positivos de massa para os nós, com a integração espacial decorrente do uso dos pesos de interpolação $\phi_{ip}^{\mathrm{SPSI}}$.

Em relação à hipótese (c), os resultados indicam que a interpolação nodal pode ser feita tanto com funções lineares quanto com B-splines cúbicas. Conforme já relatado, o modelo A deixa claro que a qualidade das respostas depende do ajuste correto entre as malhas Lagrangiana e Euleriana de acordo com a função empregada. As funções $N_i^{\mathrm{B}}(\mathbf{x})$ tendem a induzir maior acurácia nas respostas de tensões. O modelo B, que também é processado com B-splines nodais, produz uma reposta bastante representativa do fenômeno de flambagem elástica de barras. Essa possibilidade de uso de diferentes tipos de funções nodais também é atestada nos modelos C e D. A comparação entre os submodelos C-L e C-B e entre D-L e D-B remete a algumas diferenças nas respostas de deslocamentos e na variação energética ao longo do tempo, de acordo com a interpolação nodal assumida. Conforme esperado, a curva deslocamento-tempo do modelo D-L fica mais próxima da curva do MPM CPDI, que também tem interpolação nodal linear. Outro aspecto percebido é que a dissipação energética decorrente da integração explícita e da atualização de tensões USL é mais pronunciada com o uso das B-splines cúbicas.

Principalmente pelo modelo A, também pode-se confirmar a hipótese (d) - atualização das tensões utilizando a derivada no tempo das deformações Lagrangianas e o segundo tensor de tensões de Piola-Kirchhoff. Nesse caso, a precisão das tensões obtida com o ajuste dos submodelos, principalmente aqueles com interpolação por B-splines cúbicas, é suficiente para a validação. Em relação ao procedimento mais comum utilizado no MPM, essa abordagem feita no MPM SPSI destaca-se por ter compatibilidade completa entre as grandes deformações e o tensor constitutivo elástico.

Por último, a hipótese (e) é testada e confirmada com todos os processamentos do modelo E já apresentados e comentados. O efeito do amortecimento local não viscoso de Cundall (1987) é percebido nitidamente ao passo em que o coeficiente α é aumentado. Esse efeito é maior na direção principal da oscilação da peça, já que o coeficiente atua diretamente sobre as forças nodais, variando conforme o sentido da velocidade.

7.2 ANÁLISES COM DANIFICAÇÃO E FRATURA

7.2.1 Modelo F - Tração simples

De maneira geral, pode-se afirmar que o MPM SPSI é capaz, no modelo F, de representar o processo de ruptura de um teste de tração. Dentre os fenômenos detectados nas simulações estão: a concentração de tensões nas regiões de transição entre os blocos de extremidade e a membrana danificável; a migração das tensões de tração para regiões não danificadas à medida que o dano escalar evolui; e a manutenção da simetria durante todo o processo, inclusive após o surgimento de fraturas explícitas.

Na figura 106, as alíneas (a) e (b) demonstram uma concentração inicial de tensões de tração nos cantos vivos onde há a transição entre os blocos não danificáveis e a membrana danificável. São nessas regiões que a danificação começa a ocorrer, como verificado na alíneas (b), (c), (d) e (e) da figura 110. Esse comportamento ocorre conforme o esperado em um teste dessa natureza, pois essa transição acontece com uma mudança abrupta da dimensão da peça paralela ao eixo y. O carregamento de tração, uniformemente distribuído nas faces extremas dos blocos, precisa ser inteiramente transmitido à parte central da peça. Assim, as direções das tensões principais $\sigma^n_{III_g}$ indicam uma migração de esforços das extremidades para o centro, resultando em um acúmulo justamente nos cantos onde o dano começa.

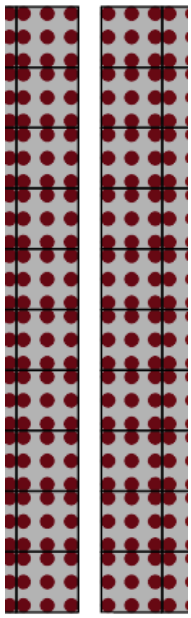
Após o desencadeamento da danificação, percebe-se com clareza o fenômeno do amolecimento linear inerente ao modelo de Rankine nas alíneas (c) a (e) das figuras 106 e 110. As regiões dos cantos vivos onde o dano tem origem na peça começam, gradativamente, a contribuir menos com as tensões resistentes de tração. Desse modo, as tensões principais máximas passam evoluir em direção ao eixo longitudinal da membrana. Consequentemente, essas regiões também começam a danificar. Esse processo não linear aumenta até que toda a seção transversal da membrana esteja danificada nas áreas próximas aos blocos de extremidade.

Essa situação culmina com a ruptura/fratura nas alíneas (f) das figuras 106 e figuras 110. Nesse momento, há uma redução considerável das tensões de tração na membrana danificada, uma vez que o carregamento que atua nos blocos para de ser transmitido à região central devido às fraturas. Por outro lado, as tensões de compressão aumentam significativamente na região central, resultante da transformação de parte da energia de deformação acumulada no alongamento. Isso só ocorre em virtude da região média da peça ainda estar pouco danificada e, portante, ter pontos de Gauss ainda dotados de rigidez elástica.

As duas fraturas, que formam-se simetricamente em relação ao eixo y, dividem a peça em três novas partes. Vê-se também que a separação ocorre quase que

simultaneamente em toda a seção transversal, dadas as deformadas pós-ruptura das alíneas (g) a (j) das figuras 107, 109 e 111. Pelo teste simulado ser de tração centrada, o acontecido está conforme a resposta esperada. O registro ampliado da fratura de tração do lado esquerdo exibido na figura 136, retirado da alínea (j) da figura 111, reforça a interpretação feita.

FIGURA 136 – FRATURA DE TRAÇÃO QUE SURGE DO LAGO ESQUERDO NO MODELO F.



FONTE: O autor (2022).

Sobre o encerramento do processamento, escolhe-se interromper a análise em $t^n = 6.98$ s. Isso é feito uma vez que os acontecimentos verificados até esse momento são suficientes para demonstrar como o MPM SPSI se comporta na simulação de um teste dessa natureza.

7.2.2 Modelo G - Compressão diametral

O teste de compressão diametral do modelo G é interessante na avaliação do MPM SPSI do ponto de vista da mudança de direção das tensões principais ao longo do disco comprimido. Em uma análise global da simulação, verifica-se que a compressão aplicada na face superior dá origem a um campo de tensões tal que as trações geradas no centro da peça sejam da mesma ordem de magnitude que as compressões oriundas do carregamento. Disso decorre o início da danificação a partir do interior do disco, expandindo-se aos poucos para as regiões de aplicação do carregamento e para as regiões periféricas. A fratura principal, conforme esperado, é uma fratura vertical que percorre todo o diâmetro do disco.

Atentando-se à alínea (a) da figura 114, percebe-se que o formato quase circular da peça é preponderante nos resultados da simulação. A geometria do disco

faz com que parte das tensões de compressão aplicadas no topo sejam transmitidas diretamente até os apoios, verticalmente. Outra parte, contudo, espalha-se em direções inclinadas em direção à seção média, que possui área resistente maior que o topo carregado. Essas compressões na seção média são, então, transmitidas aos apoios na parte inferior, exigindo nova mudança na direção principal associada.

Essas mudanças de direção das tensões principais de compressão, em conjunto com o efeito de Poisson, resultam no aparecimento de trações pronunciadas na direção do eixo x, conforme mostrado na alínea (b) da figura 112. Os valores das trações evoluem até que o limite σ_{lim} seja ultrapassado e a danificação comece. Com as alíneas (b) a (e) da figura 116, atesta-se que a quantidade de pontos danificados aumenta em direção à base e ao topo do disco. Esse fato decorre do efeito do amolecimento linear utilizado no modelo de dano: com a região central danificada, as tensões de tração têm a necessidade de migrar verticalmente para encontrarem pontos de Gauss que efetivamente tenham resistência. Essa resistência, porém, também diminui ao passo que a danificação avança e, assim, o dano se alastra na direção vertical.

É então, verticalmente, que a fratura principal surge no modelo G, como é visível nas alíneas (i) e (j) das figuras 113, 115 e 117. Essa falha é mostrada com maior detalhe na figura 137. Outras fraturas secundárias também se desenvolvem, dado que a danificação completa se alastra por toda a peça. Uma delas é a fratura horizontal representada na figura 138, à direita do centro do disco.

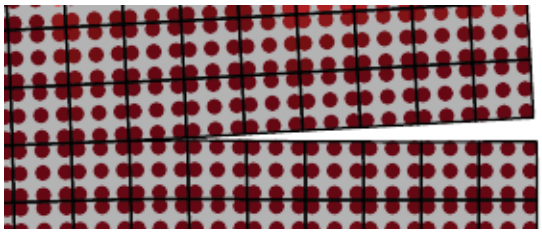
FIGURA 137 – FRATURA VERTICAL PRINCIPAL QUE SURGE NO MODELO G.



FONTE: O autor (2022).

Além disso, tanto a danificação quanto o fraturamento não acontecem de forma totalmente simétrica ao eixo y, como era esperado. Isso pode ser devido a alguns fatores, que incluem: a reconstrução do tensor de tensões de Cauchy danificado a partir dos autovetores do tensor não danificado; e as forças de contato consideradas, que são uma aproximação pela teoria de Hertz de contato entre cilindros de eixos

FIGURA 138 – FRATURA HORIZONTAL QUE SURGE NO MODELO G À DIREITA DO CENTRO DO DISCO.

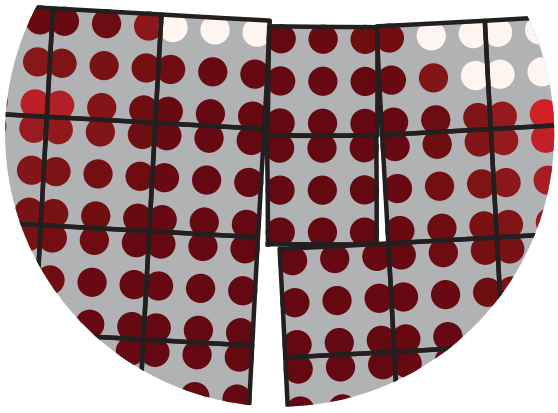


FONTE: O autor (2022).

paralelos. Mesmo assim, o comportamento observado é satisfatório, verificando-se que o aumento da discretização da malha Lagrangiana faz com que a resposta seja cada vez mais simétrica. Pode-se afirmar, assim, que as assimetrias possuem causas puramente numéricas.

A interpenetração não física pós-ruptura também é evitada com o esquema de detecção de sobreposições entre subdomínios e de cálculo de forças de contato utilizado. Isso se mantém mesmo quando observam-se detalhadamente os encontros entre subdomínios. Também percebe-se que o efeito do atrito entre subdomínios separados está sendo contemplado pelo MPM SPSI no modelo G. Principalmente no topo carregado, onde existem subdomínios separados ainda em contato físico nas alíneas (j) das figuras 113, 115 e 117, detecta-se um movimento tangencial conjunto gerado pelo atrito. Na figura 139, inclusive, amplia-se a visualização da região superior do disco na alínea (j) da figura 117, comprovando a afirmação feita.

FIGURA 139 – AMPLIAÇÃO VISUAL DA REGIÃO SUPERIOR DO MODELO G PARA AVALIAÇÃO DA INTERPENETRAÇÃO ENTRE SUBDOMÍNIOS.



FONTE: O autor (2022).

Encerra-se o processamento com $t^n = 7.20$ s em virtude dos mesmos critérios

adotados no modelo F. Isso significa que, com esse tempo, todas as observações necessárias ao teste das hipóteses colocadas já haviam sido feitas.

7.2.3 Modelo H - Consolo curto

No modelo H, obtém-se com o MPM SPSI um comportamento mecânico geral conforme o esperado. Esse comportamento resume-se:

- ao encaminhamento das tensões principais de compressão desde a região de aplicação até os apoios do lado esquerdo segundo uma direção inclinada próxima a 45 graus na parte central da peça;
- ao surgimento de tensões principais de tração perpendiculares às tensões de compressão citadas, com maior concentração inicial no vértice em que há uma descontinuidade geométrica;
- ao desenvolvimento do dano a partir da descontinuidade geométrica do modelo e expansão segundo um ângulo inclinado em direção à parte inferior face esquerda;
- à abertura de uma fratura principal condizente com a expansão do dano escalar;
- à garantia da impenetrabilidade nas regiões onde há separação física simultânea ao contato de compressão entre subdomínios, principalmente no canto esquerdo inferior.

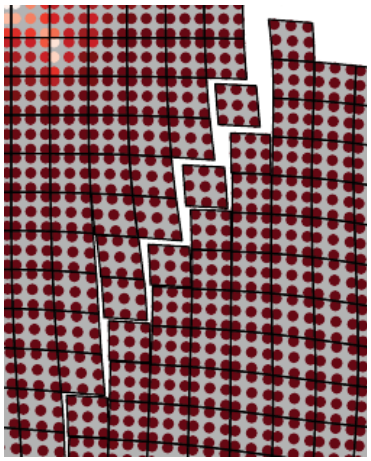
Observando-se as alíneas (a) das figuras 118 e 120, nota-se o encaminhamento das tensões de compressão de acordo com o previsto e o consequente surgimento de tensões de tração perpendiculares. As compressões, provocadas pelo carregamento vertical que solicita a face superior direita da peça, formam um campo com mudança gradativa da direção vertical para a direção horizontal. Nessa transição, obtém-se compressões orientadas a 45 graus na região central do consolo. Consequentemente, o efeito do coeficiente de Poisson estabelece tensões de tração perpendiculares às compressões. Essas trações que iniciam na alínea (a) são importantes no desencadeamento do processo de danificação e ruptura, principalmente por se concentrarem no vértice onde há uma descontinuidade geométrica destacada.

Assim, nas alíneas (c) e (d) da figura 122, nota-se o aparecimento gradativo de pontos superconvergentes danificados no entorno da descontinuidade geométrica do consolo. Ao passo que o carregamento aumenta, uma faixa de danificação inclinada forma-se, como atestam as alíneas (e) e (f) da figura figura 122. Esse avanço do dano também provoca o amolecimento à tração dos pontos de Gauss afetados e, com isso, o encaminhamento das tensões de compressão e tração tende a ser feito por pontos com maior rigidez, conforme registram as alíneas (c), (d) e (f) das figuras 118 e 120.

Logo após $t^n = 7.52$ s, nas alíneas (f), alguns pontos da região da descontinuidade atingem $\mathcal{D}_g^n = 1.$, inclusive fazendo com que ligações entre alguns deles se desfaçam, permitindo a separação de subdomínios.

No modelo H, há uma linha de fratura principal que se desenvolve de forma mais pronunciada. Essa linha segue em grande parte a faixa de danificação, com ângulo de inclinação similar, de acordo com as plotagens das alíneas (g), (h), (i) e (j) das figuras 119, 121 e 123. Na figura 140, inclusive, amplia-se essa fratura, em registro retirado da alínea (j) da figura 123. Com a expansão do fraturamento, há também o alívio de tensões nessa faixa, uma vez que a separação física interrompe a transmissão de esforços.

FIGURA 140 – FRATURA PRINCIPAL INCLINADA QUE SURGE NO MODELO H.



FONTE: O autor (2022).

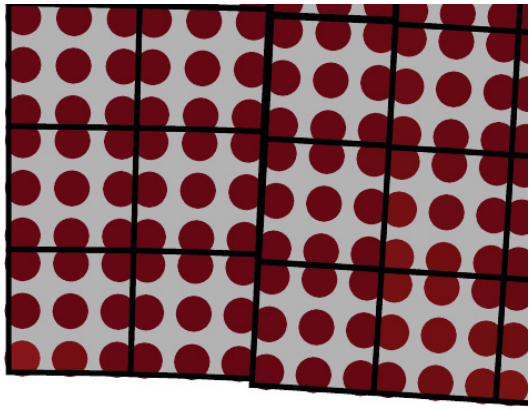
Adicionalmente, um exame mais atento da alínea (j) da figura 123 valida o desempenho das forças de contato estipuladas na garantia da impenetrabilidade. Com a evolução da fratura, há uma rotação expressiva do consolo no sentido horário, gerando uma forte tendência de sobreposição entre subdomínios separados na região inferior esquerda da estrutura. Mesmo assim, a inspeção visual não indica nenhuma interpenetração não física, como pode ser visto na ampliação visual da figura 141.

O encerramento do processo com $t^n = 7.96$ s ocorre por decisão arbitrária, tendo em vista a ocorrência de todos os processos não lineares desejáveis na análise do modelo H. É fato também que o esforço computacional requerido na avaliação do contato pós-ruptura aumenta consideravelmente e, por isso, realiza-se a interrupção da simulação logo após a obtenção das respostas desejadas.

7.2.4 Modelo I - Pórtico

Do mesmo modo que nos modelo F, G e H, as respostas fornecidas pela simulação computacional do pórtico do modelo I via MPM SPSI são convincentes. Nesse sentido, a análise global das figuras 124 a 129 permite afirmar que:

FIGURA 141 – AMPLIAÇÃO VISUAL DA REGIÃO INFERIOR ESQUERDA DO MODELO G PARA AVALIAÇÃO DA INTERPENETRAÇÃO ENTRE SUBDOMÍNIOS.



FONTE: O autor (2022).

- a distribuição de tensões nos momentos em que o material ainda está totalmente íntegro segue um padrão comum encontrado em estruturas em que os esforços de flexão são preponderantes;
- as maiores tensões de tração são, inicialmente, observadas no centro da face inferior da viga, onde a danificação começa;
- o amolecimento linear decorrente da danificação provoca a migração gradativa das tensões resistentes de tração das fibras mais inferiores para as fibras imediatamente superiores;
- a fratura principal que surge no modelo é uma fratura vertical, iniciada no ponto médio da face inferior da viga, que se expande gradativamente para as fibras superiores. Também há outras fraturas horizontais, próximas às bases dos pilares que sustentam o pórtico, iniciadas no lado externo, mais tracionado;
- a detecção da interpenetração e a aplicação de forças de contato é suficiente para garantir a impenetrabilidade pós-ruptura. Isso pode ser visto principalmente nas fibras superiores da seção central da viga e na face interna dos pilares;
- ao longo de toda a simulação, há uma resposta muito simétrica do modelo, conforme previsto, em função da geometria inicial e das condições de contorno essenciais e naturais assumidas.

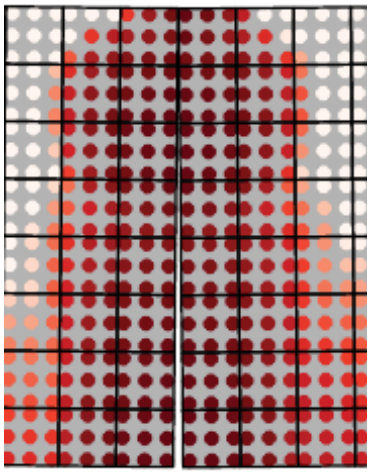
A primeira afirmação listada é indicada pela interpretação das alíneas (a) e (b) das figuras 124 e 126. Nessas ilustrações, há um campo de tensões de tração que se concentra na face externa dos pilares e segue até a face superior das vigas na região de conexão entre os elementos. Conforme se vai em direção ao centro do vão, as trações seguem em direção à face inferior da viga, até atingirem seu valor máximo no

ponto médio da fibra. Concomitantemente, um arco de compressão surge, transmitindo o carregamento uniforme aplicado desde a face superior da viga para os apoios. Esse arco é formado pela face interna dos pilares e pela face superior da viga, conectados por diagonais de compressão que vão em direção aos apoios da viga.

Nas alíneas (c) , (d) e (e) da figura 128, mostra-se que o dano começa a evoluir a partir do centro do vão na face inferior da viga, expandindo-se horizontalmente e verticalmente. A expansão vertical é, contudo, mais destacada. Tal fato é devido ao amolecimento linear dos pontos de Gauss inferiores, que sofrem um alívio de tensões e, como contrapartida, exigem maiores trações nos pontos das regiões imediatamente superiores. O dano na face externa dos pilares também evolui gradativamente, deslocando as tensões máximas de tração cada vez mais para o eixo longitudinal desses elementos.

Em $t^n = 7.33$ s, nas alíneas (f) das figuras 124, 126 e 128, imediatamente antes da ruptura, as tensões de tração na metade do vão da viga já estão claramente deslocadas para uma região acima do eixo médio da peça. Assim, a fibra inferior, mais danificada, passa a ter uma separação física entre os subdomínios. O mesmo acontece com as fibras mais externas dos pilares. Incrementando-se o carregamento, a fratura que surge na seção média da viga evolui verticalmente (figura 142), enquanto as fraturas horizontais dos pilares aumentam na direção das faces internas dos mesmos (figura 143), de acordo com as alíneas (g) a (j) das figuras 125, 127 e 129.

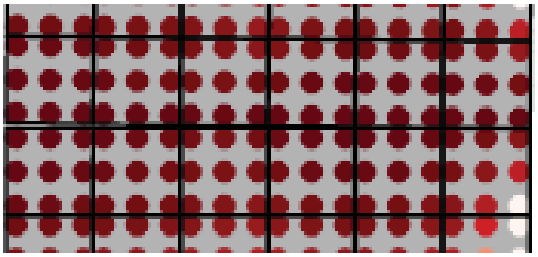
FIGURA 142 – FRATURA VERTICAL DE FLEXÃO NA SEÇÃO MÉDIA DA VIGA DO MODELO I.



FONTE: O autor (2022).

Ao final do processo, nas alíneas (j) das figuras 125, 127 e 129, a seção média da viga e as seções próximas às bases dos pilares encontram-se quase completamente danificadas e com separação física explícita. Mesmo assim, os subdomínios que são comprimidos em direção a seus homólogos vizinhos continuam sem interpenetração detectável visualmente, o que é comprovado com a aproximação visual da região com a

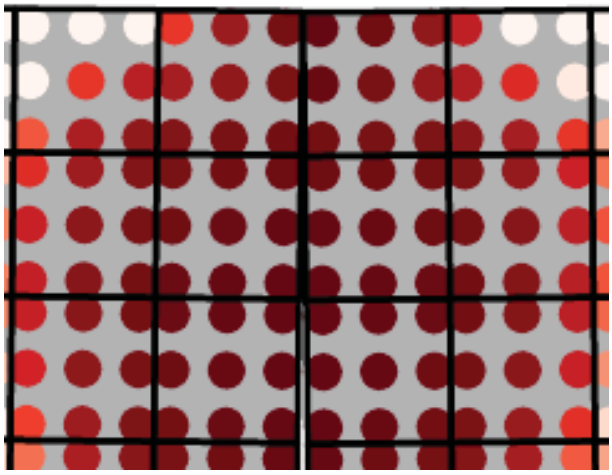
FIGURA 143 – FRATURA HORIZONTAL DE FLEXÃO PRÓXIMA À BASE DO PILAR ESQUERDO DO MODELO I.



FONTE: O autor (2022).

figura 144. Portanto, também infere-se o devido funcionamento do algoritmo de contato no modelo I, principalmente quando se inspecionam as fibras longitudinais superiores da seção média das vigas e as fibras longitudinais internas dos pilares na região vizinha das bases.

FIGURA 144 – AMPLIAÇÃO VISUAL DA REGIÃO SUPERIOR DA SEÇÃO CENTRAL DO MODELO I PARA AVALIAÇÃO DA INTERPENETRAÇÃO ENTRE SUBDOMÍNIOS.



FONTE: O autor (2022).

Por fim, a simetria das respostas do modelo em termos de tensões principais e danificação é verificada em todas as alíneas das figuras 124 a 129. A partir do início da danificação, não se pode afirmar que a simetria observada é total, mas há uma significativa similaridade entre que se observa à esquerda e à direita do eixo de simetria. As pequenas diferenças, como já destacado no modelo G, decorrem da reconstrução das tensões danificadas pela representação espectral, utilizando-se as direções principais do tensor não danificado. Dentro desse processo, o cálculo dos autovetores tende a promover um acúmulo de erros numéricos. Após o surgimento de fraturas, as forças de contato entre subdomínios também podem incorporar algumas assimetrias à simulação.

7.2.5 Modelo J - Parede com abertura

Do processo de falha da estrutura do modelo J com a simulação pelo MPM SPSI, pode-se depreender os seguintes fatos:

- as principais regiões tracionadas que desencadeiam o fraturamento surgem, no início da análise, na face interna logo acima da abertura da parede, bem como na região logo abaixo da abertura. Já as tensões de compressão, impostas pelo carregamento uniforme da face superior, formam uma espécie de arco sobre a abertura, desviando dessa descontinuidade e encaminhando-se para os subdomínios que ficam nas laterais da abertura da parede;
- o amolecimento do material à tração é percebido pela migração das tensões resistentes de tração para a parte superior da viga que fica acima da abertura. Na região abaixo da abertura, isso também é verificado pela gradativa transferência dos esforços de tração para uma região inferior menos danificada;
- cinco linhas de fratura principais, todas verticais, surgem com o aumento do carregamento:
  - uma na região próxima à seção média da viga superior;
  - duas na parte abaixo da abertura, simétricas em relação ao eixo vertical da peça;
  - duas na conexão entre a viga superior e os pilares laterais, que se abrem a partir da face superior da parede.
- assim como nos modelos F a H, não se verifica nenhuma interpenetração não física entre subdomínios após a ruptura;
- embora a geometria e as condições de contorno dessa estrutura possuam simetria em relação ao eixo y, o comportamento do modelo mostra-se assimétrico, principalmente no período pós-fratura.

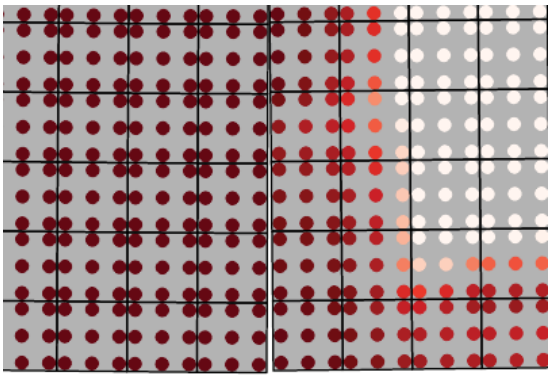
A análise item a item dos fatos recém-listados inicia pelas alíneas (a) e (b) das figuras 130 e 132. Na viga superior, logo acima da abertura, o carregamento induz o comportamento de flexão, com tração na face que fica logo acima da abertura. O mesmo carregamento provoca deslocamentos nos pilares que ficam nas laterais da abertura, sendo que os topos tendem a mover-se na direção interna da parede e as bases tendem a mover-se horizontalmente em direção à parte externa da parede. Tal deslocamento gera um alongamento da cinta que fica logo abaixo da abertura da parede e, então, ali também aparecem tensões principais de tração significativas. Essa situação é potencializada pela ausência de restrições de deslocamento paralelo a x na

base da parede. As compressões, por outro lado, possuem direção horizontal no topo da viga superior e migram até os pilares, onde são verticais, fazendo uma transição em forma de arco.

Quando a danificação inicia nos pontos de maior tração, há perda de rigidez e resistência dessas regiões. Assim, as alíneas (c), (d), (e) e (f) das figuras 130, 132 e 134 indicam o processo não linear de aumento das trações nas regiões vizinhas àquelas danificadas para que o carregamento continue sendo suportado. Na viga superior, há o alívio progressivo das fibras inferiores e o consequente aumento das solicitações nas fibras localizadas imediatamente acima. Algo similar ocorre na cinta inferior, onde as trações máximas migram para os cantos da abertura e também para regiões um pouco abaixo.

As cinco fraturas principais que surgem na simulação a partir das alíneas (f) das figuras 130, 132 e 134 e culminam com as alíneas (j) das figuras 131, 133 e 135 surgem quase que simultaneamente. Na viga superior, tem-se uma fratura típica de flexão (figura 145), enquanto na cinta inferior desenvolvem-se aberturas (figura 146) características de esforços de tração (similar ao que acontece no modelo F). Já nas conexões entre a viga superior e os pilares laterais também surgem fraturas de flexão que abrem-se desde a face superior da parede (figura 147).

FIGURA 145 – FRATURA VERTICAL DE FLEXÃO PRÓXIMA À SEÇÃO CENTRAL DA VIGA SUPERIOR DO MODELO J.

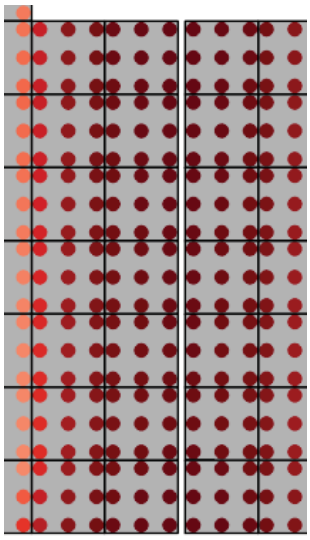


FONTE: O autor (2022).

A impenetrabilidade é assegurada pelas forças de contato nas regiões mais propensas à interpenetração não física. A principal região vulnerável a isso, no modelo J, é a parte comprimida da seção central da viga superior da parede. Tal área é mostrada com maior nível de detalhe na figura 148, derivada da alínea (j) da figura 135. Conforme indicado, sobreposições não são percebidas.

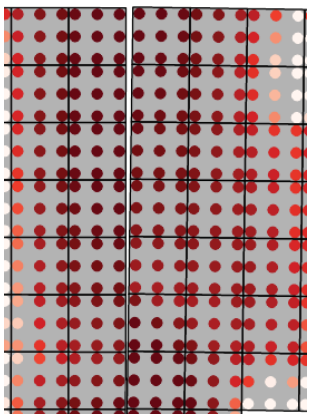
No que se refere às assimetrias detectadas pós-danificação, no modelo J há uma influência maior do processo de reconstrução do tensor danificado com os autovetores do tensor de Cauchy não danificado. Talvez, nesse caso, uma discretização

FIGURA 146 – FRATURA VERTICAL DE TRAÇÃO NO LADO ESQUERDO DA CINTA INFERIOR DO MODELO J.



FONTE: O autor (2022).

FIGURA 147 – FRATURA VERTICAL DE FLEXÃO NA CONEXÃO ENTRE O PILAR ESQUERDO E A VIGA SUPERIOR DO MODELO J.



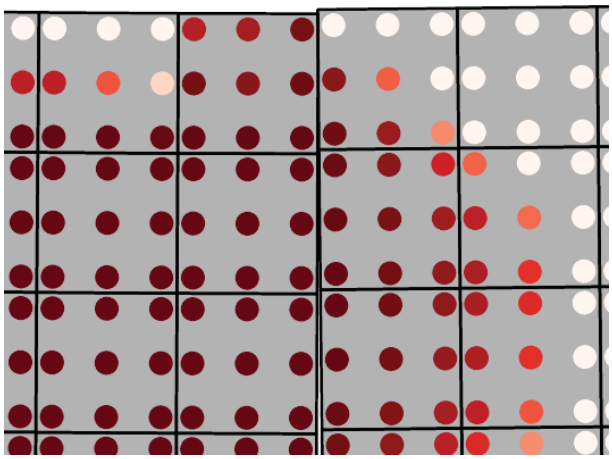
FONTE: O autor (2022).

maior da malha Lagrangiana seja necessária para assegurar um comportamento mais simétrico, condizente com as condições de contorno e com a geometria. Isso exigiria um esforço computacional consideravelmente mais alto, o que inviabilizaria a utilização do código desenvolvido nessa tese. Futuras melhorias no MPM SPSI quanto à integração no tempo e otimizações em termos de programação poderão viabilizar essa solução no futuro.

7.2.6 Correlação entre as análises dos modelos F a J e as hipóteses

Presume-se que, com as análises dos modelo A a E, as hipóteses (a) a (f) listadas em 1.2 tenham sido completamente validadas. Mesmo assim, os resultados e interpretações decorrentes dos modelos F a J reforçam consideravelmente algumas dessas hipóteses. A hipótese (a), por exemplo, é comprovada pelos campos de tensão

FIGURA 148 – AMPLIAÇÃO VISUAL DA REGIÃO SUPERIOR DA SEÇÃO CENTRAL DA VIGA SUPERIOR DO MODELO J PARA AVALIAÇÃO DA INTERPENETRAÇÃO ENTRE SUBDOMÍNIOS.



FONTE: O autor (2022).

condizentes com os carregamentos e com a geometria das peças, tudo isso proporcionado pela interpolação interna quadrática dos subdomínios e pela interpolação nodal com B-splines cúbicas, que fazem parte das hipóteses (b) e (c). Da mesma forma, o procedimento de atualização de tensões proposto - hipótese (d) - é ratificado pelas respostas contínuas e representativas dos modelos. Além disso, o procedimento incorporado ao MPM SPSI para a consideração do estado plano de tensões - hipótese (f) - é testado e devidamente aprovado pelas simulações dos modelos F, H, I e J.

A hipótese (f), entretanto, requer algumas ponderações se incorporada a modelos com danificação e fratura. Normalmente, quando existem subdomínios com alto grau de danificação, surge um problema relacionado à atualização da dimensão fora do plano $l^n_{z_g}$ dos pontos de Gauss no estado plano de tensões. Essa dimensão, como já exposto em 4.1.4.12 é atualizada pela equação $l^{n+1}_{z_g} = (F^{n+1}_g)_{zZ} l^{n=0}_{z_g}$. Portanto, para que espessuras não positivas (não físicas) sejam evitadas, o valor da componente fora do plano do gradiente de deformações deve obedecer à inequação $(F^{n+1}_g)_{zZ} \geq 0$. Essa condição, porém, por vezes não é obedecida em pontos de Gauss com pouca ou nenhuma rigidez à tração: os alongamentos excessivos no plano podem fazem com que $(F^{n+1}_g)_{zZ}$, que é função direta do coeficiente de Poisson, de $(F^{n+1}_g)_{xX}$ e de $(F^{n+1}_g)_{yY}$, torne-se nula ou negativa.

Nos resultados aqui mostrados, a situação citada não ocorre, principalmente pelo grau de refinamento da malha Lagrangiana assumido. Além disso, as análises são interrompidas arbitrariamente assim que todos os fenômenos que se desejava observar tenham acontecido. Em malhas mais grosseiras, os alongamentos excessivos nas direções x e y ocorrem em alguns subdomínios, principalmente quando forças de tração continuam solicitando esses elementos após a danificação total. Em uma

situação real, esses subdomínios precisariam ser particionados/subdivididos, por isso a diminuição do tamanho dos subdomínios ameniza o fenômeno.

As hipóteses (g) a (j), por outro lado, são aquelas que só podem ser testadas e validadas pelos modelos com danificação e fratura. Nos modelos F a J, vê-se que a extensão do MPM SPSI pela inserção do modelo isotrópico de Rankine com amolecimento linear na tração - hipótese (g) - é possível e gera respostas válidas. Conforme comentado nas seções secundárias 7.2.1 a 7.2.5, em todas as situações a danificação inicia-se nas regiões previstas, expandindo-se para a vizinhança conforme o amolecimento linear alivia as tensões $\sigma_{I_g}^n$ nos pontos com maior dano.

A estratégia de particionamento do domínio para a abertura de fraturas com base no modelo de dano e na ruptura de conexões entre pontos superconvergentes - hipótese (h) - também tem performance satisfatória nos modelos. Isso é provado pelo início da separação entre subdomínios sempre nos pontos que atingem danificação completa primeiro. Outra confirmação é indicada pela configuração deformada dos modelos após a ruptura. Em todos os casos, as fraturas seguem o que normalmente observa-se em ensaios reais de mesma natureza. Essas deduções precisam levar em conta, claro, todas as simplificações e limitações das simulações computacionais em relação ao que se tem em um experimento real.

Por fim, as discussões também corroboram as hipóteses (i) e (j), relativas à formulação de avaliação da interpenetração entre subdomínios e ao cálculo das forças de contato usando o método de Hertz de contato entre cilindros de eixos paralelos. Mesmo nas regiões mais críticas, onde existem subdomínios separados colocados em contato, não identifica-se visualmente nenhuma sobreposição não física. Ao mesmo tempo, as forças de contato não provocam afastamentos exagerados entre as partes em contato, mantendo a estabilidade da análise. Entende-se que a parcela de forças de contato na direção que liga os centros de massa (4.2.5.1) age no afastamento global entre dois subdomínios que se chocam. Complementarmente, as forças de contato entre pontos de Gauss de subdomínios diferentes (4.2.5.2) assegura que interpenetrações mais localizadas, próximas aos vértices externos, aconteçam.

8 CONCLUSÕES

O trabalho aqui apresentado em forma de tese busca a utilização de um método cinemático, o MPM, na avaliação mecânica de estruturas. Isso é feito segundo um processo dinâmico que considera tanto não linearidades físicas quanto geométricas. Nesse sentido, desenvolvem-se modificações na formulação original do MPM, consolida-se um algoritmo computacional capaz de obter a solução dinâmica não linear de acordo com essas modificações e testam-se as hipóteses estabelecidas.

Tudo isso é possível após um levantamento aprofundado da literatura disponível sobre o MPM. Os conceitos estudados vão desde a cinemática do contínuo, passam pela equação de balanço energético e chegam até a discretização e interpolação espacial dessa equação com o MPM. A partir daí, mostra-se que o MPM pode contar com diferentes métodos de cálculo das massas nodais, de integração temporal, de atualização das tensões e de interpolação espacial das variáveis de estado. Também são enfatizados alguns problemas inerentes ao método, como a instabilidade de partículas que fazem a transição entre células Eulerianas vizinhas (*cell-crossing error*), as dissipações energéticas e imprecisões na distribuição espacial das tensões.

Um destaque especial é dado à técnica de interpolação convectiva do domínio da partícula (MPM CPDI), uma variante criada por Sadeghirad et al. (2011, 2013) na tentativa de evitar o *cell-crossing error* e facilitar a imposição das condições de contorno. Detalha-se também o trabalho de Homel e Herbold (2016), que aplica o MPM CPDI em análises que considerar danificação e fratura, mostrando as potencialidades do MPM no tratamento de não linearidades físicas e geométricas.

Os resultados dos trabalhos citados e algumas ressalvas neles identificadas motivam, então, o desenvolvimento do MPM acoplado à técnica de subdomínios interpolados em partículas superconvergentes (MPM SPSI). Nessa abordagem inédita, focada na análise plana, a malha Lagrangiana que discretiza os corpos contínuos é formada por subdomínios quadrilaterais de nove vértices, com interpolação interna quadrática. A interpolação de informações para a malha Euleriana, por outro lado, pode ser feita tanto com funções lineares quanto com B-splines cúbicas. Já as variáveis de estado, computadas em uma análise ao longo do tempo, são armazenadas nos pontos de Gauss (pontos superconvergentes) dos subdomínios. O número de pontos superconvergentes por subdomínio pode ser igual a quatro ou nove.

No MPM SPSI, a atualização de tensões é feita a partir da derivada no tempo das deformações Lagrangianas e do tensor de tensões de Piola-Kirchhoff. Vale lembrar que a integração temporal explícita de Euler-Gauss é aplicada na atualização das das

velocidades, posições deformações e tensões. Além disso, método contempla o modelo de amortecimento local não viscoso de Cundall (1987). Outra possibilidade do MPM SPSI é a de se fazer análises segundo o estado plano de tensões.

Todas essas hipóteses relatadas, inerentes ao MPM SPSI, são testadas e validadas com o processamento computacional de cinco modelos diferentes, compostos por materiais elásticos lineares ou então por materiais neo-Hookeanos. As simulações são realizadas com base em um código computacional implementado em linguagem *Python 3*. Assim, as respostas observadas em estruturas com diferentes geometrias e condições de contorno, solicitadas por carregamentos estáticos e dinâmicos, atestam a validade das hipóteses levantadas. Tais resultados permitem concluir que:

- o correto ajuste entre o tipo de interpolação nodal e as resoluções das malhas Lagrangiana e Euleriana gera resultados de tensão bastante precisos com o MPM SPSI;
- a precisão dos resultados do MPM SPSI gerados com interpolação nodal linear aumenta com o refinamento da malha Euleriana. No caso de utilização de B-splines cúbicas, o aumento da precisão recai sobre o refinamento da malha Lagrangiana;
- de modo geral, os resultados obtidos com funções nodais do tipo B-spline cúbica são mais precisos e geram campos de tensão mais representativos;
- o MPM SPSI é potencialmente apto a simular satisfatoriamente casos em que existem grandes deslocamentos e deformações com mudança abrupta na configuração de equilíbrio, como acontece com barras comprimidas axialmente;
- o método de integração explícita de Euler-Gauss e o esquema de atualização de tensões USL utilizados no MPM SPSI tendem a gerar dissipação da energia mecânica do sistema;
- o efeito do amortecimento local não viscoso de Cundall (1987) é percebido nos deslocamentos dos vértices dos subdomínios, na velocidade dos pontos de Gauss e na variação energética do sistema. Esse efeito é maior na direção principal de oscilação da estrutura analisada.

Em função dos resultados satisfatórios obtidos com o MPM SPSI aplicado a materiais elásticos lineares, expande-se o método para que possa contemplar a danificação isotrópica na tração e a formação de fraturas. Incorpora-se então o modelo de dano escalar de Rankine com amolecimento linear aos pontos superconvergentes. Cria-se também uma estratégia que permita o particionamento do domínio, inicialmente

contínuo, possibilitando a abertura de fraturas. O que se faz é definir conexões iniciais entre pontos de Gauss de subdomínios vizinhos e considerar essas ligações rompidas assim que os dois pontos conectados atingem dano igual a 1 (um). A fratura é assumida em um nó Euleriano como perpendicular à conexão rompida que possui maior alongamento, passando pelo ponto médio dessa conexão. Dessa maneira, pode-se dividir os subdomínios em diferentes campos de velocidade.

Esses subdomínios separados, todavia, precisam de regras de contato bem definidas, que impeçam a interpenetração não física. Por isso, opta-se por estabelecer uma formulação de detecção de interpenetração e de cálculo de forças de contato conforme o método de Hertz, utilizando-se cilindros fictícios. Há duas abordagens que se complementam: forças que agem na direção que une os centros de massa de dois subdomínios; e forças que agem na direção que liga dois pontos de Gauss de subdomínios próximos. É facultada, inclusive, a consideração do atrito.

Realiza-se a análise de consistência dos resultados do MPM SPSI estendido com dano e fratura frente às respostas medidas experimentalmente por Grégoire et al. (2013) em um ensaio de flexão de três pontos em uma viga de concreto simples. Apesar das limitações estabelecidas por essa pesquisa na seção 1.6, a carga máxima resistida pela viga na simulação computacional pelo MPM SPSI é muito próxima àquela do experimento, com as devidas correções de escala. Por outro lado, diferenças são notadas na rigidez pré-ruptura, que é maior na simulação, e no comportamento pós-ruptura. Recorda-se que o processamento computacional precisou ser feito com módulos de elasticidade, energias de fratura e tensões limite de tração 10^7 vezes menores que os do material de ensaio. Esse é um requisito para viabilizar a análise numérica, uma vez que a integração explícita de Euler-Gauss precisaria de passos de tempo impraticáveis se os valores reais fossem diretamente usados.

Após a análise de consistência da simulação frente a um teste experimental, outros cinco modelos são analisados segundo o MPM SPSI com dano e fratura, com o objetivo de testar e confirmar as hipóteses decorrentes dessa extensão do método. Percebe-se, nesse contexto, que as respostas em termos de tensões principais e evolução da danificação são bastante coerentes com as solicitações e geometria dos modelos idealizados. O amolecimento provocado em pontos com dano escalar maior que zero é verificado com a migração das tensões máximas para regiões vizinhas, menos danificadas.

A estratégia de particionamento e abertura de fraturas é, também, condizente com o que se espera. As separações observadas entre os subdomínios iniciam-se sempre nas regiões mais danificadas, evoluindo conforme o esforço que provoca a falha. Ainda sobre os modelos com dano e fratura, entende-se que a formulação de contato implementada é suficiente para evitar a interpenetração não física entre subdomínios

separados, fato comprovado com a inspeção visual detalhada dos resultados em regiões críticas.

Conclui-se, após o estudo, que o MPM SPSI apresenta-se como uma ferramenta bastante aplicável na análise computacional não linear de estruturas. Casos entendidos como complexos podem ser simulados no contexto do método, desde que haja a devida calibração. Há, claro, várias melhorias possíveis, que ficam como sugestão de continuidade em trabalhos futuros. Dentre elas, estão:

- a melhoria do processo de integração temporal, com métodos explícitos mais estáveis ou então com integração implícita, aumentando a viabilidade de uso do MPM SPSI;
- a aplicação de condições de contorno essenciais diretamente nos vértices dos subdomínios;
- a utilização de subdomínios com outros formatos na formação da malha Lagrangiana (triangulares, por exemplo);
- a calibração do amortecimento local não viscoso de acordo com as particularidades de cada material e cada estrutura;
- a consideração da plasticidade nos modelos constitutivos dos materiais;
- a utilização de outros modelos de dano, mais completos que o modelo isotrópico de Rankine, incorporando inclusive o dano na compressão;
- a extensão para análises tridimensionais.

REFERÊNCIAS

ACOSTA, J. L. G.; VARDON, P. J.; HICKS, M. A. Study of landslides and soil-structure interaction problems using the implicit material point method. **Engineering Geology**, v. 285, August 2020 2021. ISSN 00137952. DOI: 10.1016/j.enggeo.2021.106043. Citado 1 vez na página 104.

ACOSTA, J. L. G.; VARDON, P. J.; REMMERSWAAL, G.; HICKS, M. A. An investigation of stress inaccuracies and proposed solution in the material point method. **Computational Mechanics**, Springer, v. 65, p. 555–581, 2 fev. 2019. ISSN 14320924. DOI: 10.1007/s00466-019-01783-3. Citado 4 vezes nas páginas 80, 81, 102.

ACOSTA, L. G.; VARDON, P. J.; HICKS, M. A. Composite Material Point Method (CMPM) to Improve Stress Recovery for Quasi-static Problems. In: v. 175, p. 324–331. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.01.037. Citado 4 vezes nas páginas 101, 102.

AL KAFAJI, I. K. J. **Formulation of a Dynamic Material Point Method (MPM) for Geomechanical Problems**. [S.l.: s.n.], 2013. P. 243. ISBN 9789053357057. Citado 5 vezes nas páginas 52, 71, 72, 99.

ANDERSEN, S.; ANDERSEN, L. Analysis of spatial interpolation in the material-point method. **Computers & Structures**, v. 88, p. 506–518, 7 2010. ISSN 0045-7949. DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2010.01.004. Disponível em: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794910000052. Citado 1 vez na página 97.

_____. Analysis of stress updates in the material-point method. In_____. P. 129–134. Citado 8 vezes nas páginas 23, 81, 82, 97.

BARDENHAGEN, S. G.; BRACKBILL, J. U.; SULSKY, D. The material-point method for granular materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 187, p. 529–541, 3 2000. ISSN 0045-7825. DOI: https://doi.org/10.1016/S0045-7825(99)00338-2. Disponível em: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045782599003382. Citado 7 vezes nas páginas 27, 89, 95, 98, 104.

BARDENHAGEN, S. G. Energy conservation error in the material point method for solid mechanics. **Journal of Computational Physics**, v. 180, p. 383–403, 1 2002. ISSN 00219991. DOI: 10.1006/jcph.2002.7103. Citado 2 vezes nas páginas 71, 95.

BARDENHAGEN, S. G.; KOBER, E. M. The generalized interpolation material point method. **CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences**, v. 5, p. 477–495, 6 2004. ISSN 15261492. DOI: 10.3970/cmes.2004.005.477. Citado 2 vezes nas páginas 73, 96.

BURGESS, D.; SULSKY, D.; BRACKBILL, J. U. Mass matrix formulation of the FLIP particle-in-cell method. **Journal of Computational Physics**, v. 103, p. 1–15, 1 1992. ISSN 10902716. DOI: 10.1016/0021-9991(92)90323-Q. Citado 1 vez na página 56.

CERVERA, M.; CHIUMENTI, M. Mesh objective tensile cracking via a local continuum damage model and a crack tracking technique. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 196, p. 304–320, 1-3 2006. ISSN 00457825. DOI: 10.1016/j.cma.2006.04.008. Citado 4 vezes nas páginas 83, 84, 123, 124.

CHARLTON, T. J.; COOMBS, W. M.; AUGARDE, C. E. iGIMP: An implicit generalised interpolation material point method for large deformations. **Computers & Structures**, v. 190, p. 108–125, 2017. ISSN 0045-7949. DOI: https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.05.004. Disponível em: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0045794917303395. Citado 1 vez na página 101.

CHAVES, E. W. V. **Notes on Continuum Mechanics**. First Edit. [S.l.: s.n.], 2013. P. 695. ISBN 978-94-007-5985-5. DOI: 10.1007/978-94-007-5986-2. Disponível em: http://link.springer.com/10.1007/978-94-007-5986-2. Citado 2 vezes nas páginas 30, 31, 40.

CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. **Dynamics of structures**. 3rd. [S.l.]: Computers & Structues, Inc., 1995. Citado 1 vez na página 58.

COOMBS, W. M.; AUGARDE, C. E. AMPLE: A Material Point Learning Environment. **Advances in Engineering Software**, 2020. ISSN 18735339. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2019.102748. Citado 1 vez na página 103.

COOMBS, W. M.; AUGARDE, C. E.; BRENNAN, A. J.; BROWN, M. J.; CHARLTON, T. J.; KNAPPETT, J. A.; MOTLAGH, Y. G.; WANG, L. On Lagrangian

mechanics and the implicit material point method for large deformation elasto-plasticity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2020. ISSN 00457825. DOI: 10.1016/j.cma.2019.112622. Citado 2 vez na página 103.

CORTIS, M.; COOMBS, W.; AUGARDE, C.; BROWN, M.; BRENNAN, A.; ROBINSON, S. Imposition of essential boundary conditions in the material point method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley e Sons Ltd, v. 113, p. 130–152, 1 jan. 2018. ISSN 10970207. DOI: 10.1002/nme.5606. Citado 1 vez na página 101.

CUMMINS, S. J.; BRACKBILL, J. U. An implicit particle-in-cell method for granular materials. **Journal of Computational Physics**, v. 180, p. 506–548, 2 2002. ISSN 00219991. DOI: 10.1006/jcph.2002.7101. Citado 4 vezes nas páginas 95, 96.

CUNDALL, P. A. Distinct element models of rock and soil structure. **Analytical and Computational Methods in Engineering Rock Mechanics**, p. 129–163, 1987. Disponível em: https://ci.nii.ac.jp/naid/10003877143/en/. Citado 7 vezes nas páginas 72, 115, 251–253, 269.

FERN, J.; ROHE, A.; SOGA, K.; ALONSO, E. **The Material Point Method for Geotechnical Engineering**. [S.l.]: CRC Press, Taylor e Francis Group, 2019. ISBN 9781138323315. DOI: 10.1201/9780429028090. Citado 2 vezes nas páginas 59, 71.

FERNÁNDEZ, F. **Modelagem Numérica de Problemas Geotécnicos de Grandes Deformações Mediante o Método do Ponto Material**. 2020. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Citado 1 vez na página 103.

GRÉGOIRE, D.; ROJAS-SOLANO, L. B.; PIJAUDIER-CABOT, G. Failure and size effect for notched and unnotched concrete beams. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 37, p. 1434–1452, 10 jul. 2013. ISSN 03639061. DOI: 10.1002/nag.2180. Citado 13 vezes nas páginas 145–147, 173, 175–177, 270.

GUILKEY, J. E.; WEISS, J. A. Implicit time integration for the material point method: Quantitative and algorithmic comparisons with the finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 57, p. 1323–1338, 9 2003. ISSN 00295981. DOI: 10.1002/nme.729. Citado 3 vezes nas páginas 63, 95.

GUO, Y. J.; NAIRN, J. A. Three-dimensional dynamic fracture analysis using the material point method. **CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences**, v. 16, p. 141–155, 3 2006. ISSN 15261492. DOI: 10.3970/cmes.2006.016.141. Citado 2 vez na página 97.

HOMEL, M. A.; BRANNON, R. M.; GUILKEY, J. Controlling the onset of numerical fracture in parallelized implementations of the material point method (MPM) with convective particle domain interpolation (CPDI) domain scaling. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley e Sons Ltd, v. 107, p. 31–48, 1 2016. cited By 5. ISSN 00295981. DOI: 10.1002/nme.5151. Citado 1 vez na página 100.

HOMEL, M. A.; HERBOLD, E. B. Field-gradient partitioning for fracture and frictional contact in the material point method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 109, 7 2016. DOI: 10.1002/nme.5317. Citado 22 vezes nas páginas 23, 27, 28, 30, 83, 85–90, 93, 100, 123, 268.

HUANG, P.; ZHANG, X.; MA, S.; HUANG, X. Contact algorithms for the material point method in impact and penetration simulation. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 85, p. 498–517, 4 jan. 2011. ISSN 00295981. DOI: 10.1002/nme.2981. Citado 5 vezes nas páginas 89–91, 98.

JASSIM, I.; STOLLE, D.; VERMEER, P. Two-phase dynamic analysis by material point method. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 37, p. 2502–2522, 15 out. 2013. ISSN 03639061. DOI: 10.1002/nag.2146. Citado 2 vez na página 99.

JIANG, C. **The Material Point Method for the Physics-Based Simulation of Solids and Fluids**. 2015. University of California. ISBN 9781321794229. Disponível em: https://www.math.ucla.edu/~jteran/student_thesis/jiang.pdf. Citado 2 vez na página 99.

JIANG, C.; SCHROEDER, C.; SELLE, A.; TERAN, J.; STOMAKHIN, A. The Affine Particle-In-Cell Method. **ACM TRANSACTIONS ON GRAPHICS**, v. 34, p. 51, 1–10, 4 2015. Disponível em: https://doi.org/10.1145/2766996. Citado 1 vez na página 99.

LAI, M.; RUBIN, D.; KREMPL, E. **Introduction to Continuum Mechanics (Fourth Edition)**. Fourth Edi. [S.l.: s.n.], 2010. ISBN 978-0-7506-8560-3. DOI: 10.1016/B978-0-7506-8560-3. Disponível em:

https://www.sciencedirect.com/book/9780750685603/introduction-to-continuum-mechanics. Citado 1 vezes nas páginas 30, 41.

LIAN, Y. P.; ZHANG, X.; ZHOU, X.; MA, Z. T. A FEMP method and its application in modeling dynamic response of reinforced concrete subjected to impact loading. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 200, p. 1659–1670, 17 2011. ISSN 0045-7825. DOI: https://doi.org/10.1016/j.cma.2011.01.019. Citado 1 vez na página 98.

LIANG, Y.; ZHANG, X.; LIU, Y. An efficient staggered grid material point method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier B.V., v. 352, p. 85–109, 2019. ISSN 00457825. DOI: 10.1016/j.cma.2019.04.024. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.04.024. Citado 1 vez na página 102.

LIU, A.; ZOU, J.; HU, W.; LIU, M.; CONG, P.; ZHANG, W. Numerical Simulation of Mesodamage Behavior of Concrete Based on Material Point Method. **Advances in Civil Engineering**, v. 2020, 2020. ISSN 16878094. DOI: 10.1155/2020/9183253. Citado 1 vez na página 103.

MORAES, T. C. **Análise de ruptura de encosta e interação com estruturas usando Método do Ponto Material**. 2019. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Citado 1 vez na página 102.

NAIR, A.; ROY, S. Implicit time integration in the generalized interpolation material point method for finite deformation hyperelasticity. **Mechanics of Advanced Materials and Structures**, v. 19, p. 465–473, 6 2012. ISSN 15376494. DOI: 10.1080/15376494.2010.550082. Citado 2 vezes nas páginas 98, 101.

NAIRN, J. A. Material point method calculations with explicit cracks. **CMES - Computer Modeling in Engineering and Sciences**, v. 4, p. 649–663, 6 2003. ISSN 15261492. DOI: 10.3970/cmes.2003.004.649. Citado 2 vezes nas páginas 71, 96.

NGUYEN, V. P.; NGUYEN, C. T.; RABCZUK, T.; NATARAJAN, S. On a family of convected particle domain interpolations in the material point method. **Finite Elements in Analysis and Design**, Elsevier, v. 126, p. 50–64, November 2016 2017. ISSN 0168874X. DOI: 10.1016/j.finel.2016.11.007. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1016/j.finel.2016.11.007. Citado 2 vezes nas páginas 74, 101.

PIEDADE NETO, D. **On the Generalized Finite Element Method in Nonlinear Solid Mechanics Analyses**. Nov. 2013. Universidade de São Paulo. Citado 11 vezes nas páginas 148, 178, 179, 182–184, 188–190, 194–196, 246, 247, 252.

REDDY, J. **An introduction to continuum mechanics**. Second Edi. [S.l.]: Cambridge University Press, 2013. ISBN 9781107025431. Citado 3 vezes nas páginas 30, 44, 49.

REINALDO, R. L. **Análise numérica do processo de instalação de estacas de deslocamento utilizando o método do ponto material**. 2015. Universidade de Brasília. Citado 1 vez na página 100.

REMMERSWAAL, G. **Development and implementation of moving boundary conditions in the Material Point Method**. 2017. Delft University of Technology. Disponível em: http://repository.tudelft.nl/. Citado 2 vez na página 101.

SADEGHIRAD, A.; BRANNON, R. M.; BURGHARDT, J. A convected particle domain interpolation technique to extend applicability of the material point method for problems involving massive deformations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 86, p. 1435–1456, 12 2011. cited By 131. ISSN 00295981. DOI: 10.1002/nme.3110. Citado 24 vezes nas páginas 23, 30, 68, 72, 74, 98, 100, 102, 154, 157, 158, 201–205, 249, 250, 268.

SADEGHIRAD, A.; BRANNON, R. M.; GUILKEY, J. E. Second-order convected particle domain interpolation (CPDI2) with enrichment for weak discontinuities at material interfaces. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 95, p. 928–952, 11 2013. cited By 49. ISSN 00295981. DOI: 10.1002/nme.4526. Citado 12 vezes nas páginas 23, 30, 74, 75, 80, 99, 101, 102, 110, 268.

SANCHEZ, J.; SCHREYER, H.; SULSKY, D.; WALLSTEDT, P. Solving quasi-static equations with the material-point method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, John Wiley e Sons Ltd, v. 103, p. 60–78, 1 2015. cited By 7. ISSN 00295981. DOI: 10.1002/nme.4879. Citado 1 vez na página 99.

SERNA, M. A. L. **Aplicações do Método do Ponto Material (MPM) a problemas geotécnicos**. 2012. Universidade de Brasília. Citado 1 vez na página 98.

SINAIE, S.; NGUYEN, V. P.; NGUYEN, C. T.; BORDAS, S. Programming the material point method in Julia. **Advances in Engineering Software**, Elsevier Ltd, v. 105,

p. 17–29, 2017. ISSN 18735339. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2017.01.008. Citado 1 vez na página 101.

STEFFEN, M.; KIRBY, R. M.; BERZINS, M. Analysis and reduction of quadrature errors in the material point method (MPM). **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 76, p. 922–948, 6 2008. cited By 82. ISSN 00295981. DOI: 10.1002/nme.2360. Citado 1 vez na página 97.

STOMAKHIN, A.; SCHROEDER, C.; CHAI, L.; TERAN, J.; SELLE, A. A material point method for snow simulation. **ACM Transactions on Graphics**, v. 32, 102:1-102–9, 4 2013. DOI: 10.1145/2461912.2461948. Disponível em: http://doi.acm.org/10.1145/2461912.2461948. Citado 2 vezes nas páginas 68, 98.

SULSKY, D.; KAUL, A. Implicit dynamics in the material-point method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, p. 1137–1170, 12-14 2004. cited By 69. ISSN 00457825. DOI: 10.1016/j.cma.2003.12.011. Citado 2 vezes nas páginas 96, 98.

SULSKY, D.; CHEN, Z.; SCHREYER, H. L. A particle method for history-dependent materials. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 118, p. 179–196, 1-2 1994. ISSN 00457825. DOI: 10.1016/0045-7825(94)90112-0. Citado 12 vezes nas páginas 22, 29, 30, 52, 55–57, 64, 66, 94.

SULSKY, D.; ZHOU, S. J.; SCHREYER, H. L. Application of a particle-in-cell method to solid mechanics. **Computer Physics Communications**, 1995. ISSN 00104655. DOI: 10.1016/0010-4655(94)00170-7. Citado 2 vezes nas páginas 69, 94.

VAN ROSSUM, G.; DRAKE, F. L. **Python 3 Reference Manual**. Scotts Valley, CA: CreateSpace, 2009. ISBN 1441412697. Citado 1 vez na página 105.

VAUCORBEIL, A. de; NGUYEN, V. P.; HUTCHINSON, C. R. A Total-Lagrangian Material Point Method for solid mechanics problems involving large deformations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 360, p. 1–31, 2020. ISSN 00457825. DOI: 10.1016/j.cma.2019.112783. Citado 1 vez na página 103.

VAUCORBEIL, A. D.; NGUYEN, V. P.; SINAIE, S.; WU, J. Y. **Chapter Two - Material point method after 25 years: Theory, implementation, and applications**. v. 53. [S.l.: s.n.], 2020. P. 185–398. Citado 7 vezes nas páginas 58, 64, 68, 80, 108, 109.

WANG, B.; VARDON, P. J.; HICKS, M. A.; CHEN, Z. Development of an implicit material point method for geotechnical applications. **Computers and Geotechnics**, Elsevier Ltd, v. 71, p. 159–167, 2016. ISSN 18737633. DOI: 10.1016/j.compgeo.2015.08.008. Disponível em: http://dx.doi.org/10.1016/j.compgeo.2015.08.008. Citado 1 vez na página 100.

WANG, L.; COOMBS, W. M.; AUGARDE, C. E.; CORTIS, M.; CHARLTON, T. J.; BROWN, M. J.; KNAPPETT, J.; BRENNAN, A.; DAVIDSON, C.; RICHARDS, D.; BLAKE, A. On the use of domain-based material point methods for problems involving large distortion. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier B.V., v. 355, p. 1003–1025, 2019. ISSN 00457825. DOI: 10.1016/j.cma.2019.07.011. Disponível em: https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.07.011. Citado 2 vez na página 102.

WANG, Q. J.; ZHU, D. Hertz Theory: Contact of Cylindrical Surfaces. In: **Encyclopedia of Tribology**. Edição: Q. Jane Wang e Yip-Wah Chung. Boston, MA: Springer US, 2013. P. 1639–1647. ISBN 978-0-387-92897-5. DOI: 10.1007/978-0-387-92897-5_491. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-0-387-92897-5_491. Citado 2 vezes nas páginas 123, 128.

WIECKOWSKI, Z. The material point method in large strain engineering problems. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, p. 4417–4438, 39-41 SPEC. ISS. 2004. ISSN 00457825. DOI: 10.1016/j.cma.2004.01.035. Citado 1 vez na página 96.

WOLPER, J.; FANG, Y.; LI, M.; LU, J.; GAO, M.; JIANG, C. CD-MPM: Continuum damage material point methods for dynamic fracture animation. **ACM Transactions on Graphics**, v. 38, 4 2019. ISSN 15577368. DOI: 10.1145/3306346.3322949. Citado 1 vez na página 102.

ZHANG, X.; CHEN, Z.; LIU, Y. **The Material Point Method**. [S.l.]: Academic Press, 2017. ISBN 978-0-12-407716-4. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-407716-4.00012-0. Disponível em: http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780124077164000120. Citado 9 vezes nas páginas 33, 52, 53, 56–60, 63, 69, 70.