

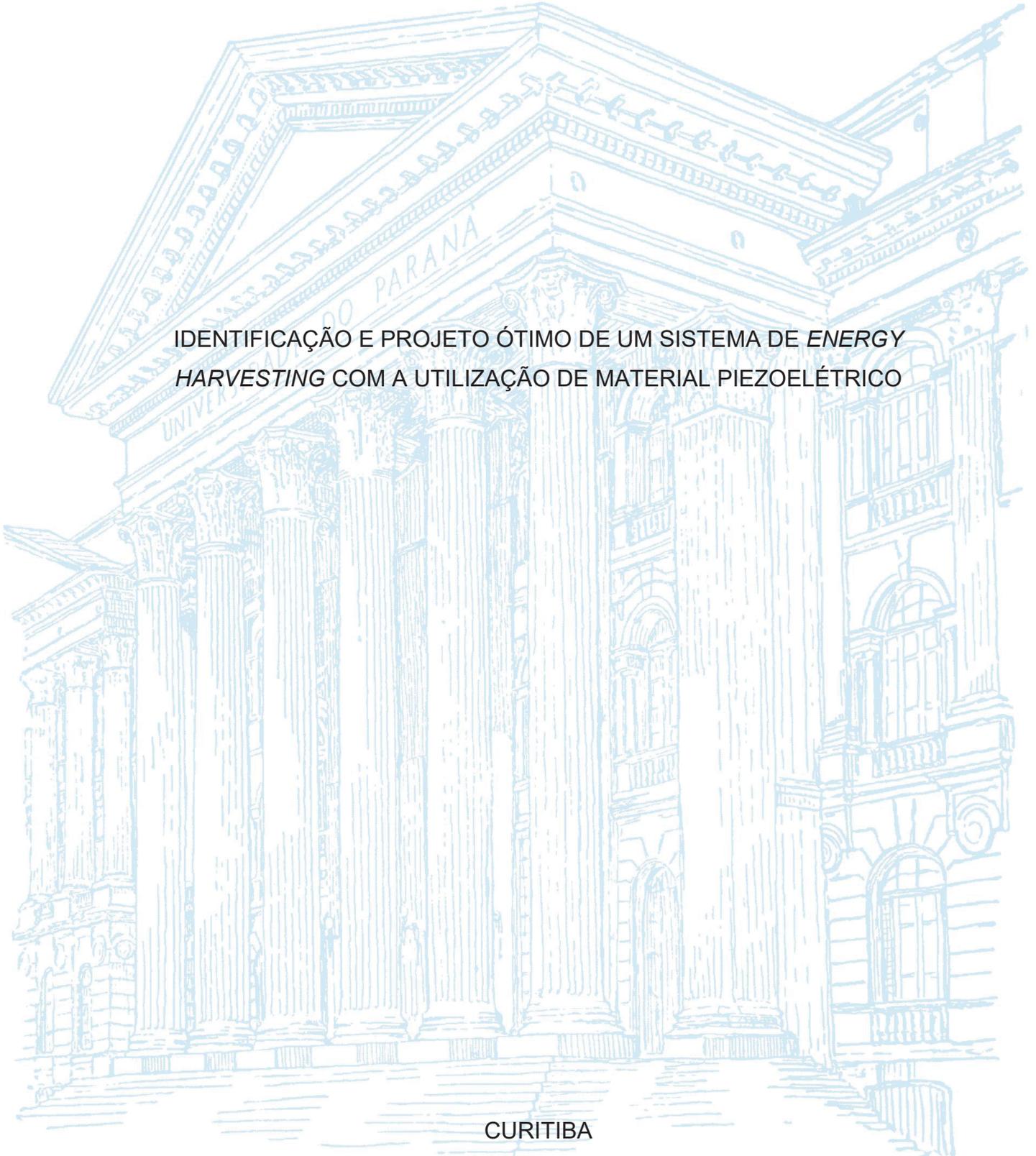
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

VINÍCIUS CONSOLIN SMARZARO

IDENTIFICAÇÃO E PROJETO ÓTIMO DE UM SISTEMA DE *ENERGY HARVESTING* COM A UTILIZAÇÃO DE MATERIAL PIEZOELÉTRICO

CURITIBA

2022



VINÍCIUS CONSOLIN SMARZARO

IDENTIFICAÇÃO E PROJETO ÓTIMO DE UM SISTEMA DE *ENERGY HARVESTING* COM A UTILIZAÇÃO DE MATERIAL PIEZOELÉTRICO

Dissertação apresentada ao curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Setor de Tecnologia, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Carlos Alberto Bavastri, DSc  
Coorientador: Prof. Mariano Febbo, DSc

CURITIBA

2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Smarzaro, Vinícius Consolin.

Identificação e Projeto ótimo de um sistema de *energy harvesting* com a utilização de material piezoelétrico. / Vinícius Consolin Smarzaro. – Curitiba, 2022.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Carlos Alberto Bavastri.

Coorientador: Prof. Dr. Mariano Febbo.

1. Engenharia mecânica. 2. Lagrange equations. 3. Harvesting. 4. Vibração. I. Bavastri, Carlos Alberto. II. Febbo, Mariano. III. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

Bibliotecário: Nilson Carlos Vieira Junior CRB-9/1797



## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA MECÂNICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **VINÍCIUS CONSOLIN SMARZARO** intitulada: **IDENTIFICAÇÃO E PROJETO ÓTIMO DE UM SISTEMA DE ENERGY HARVESTING COM A UTILIZAÇÃO DE MATERIAL PIEZOELÉTRICO**, sob orientação do Prof. Dr. CARLOS ALBERTO BAVASTRI, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 23 de Março de 2022.

Assinatura Eletrônica

23/03/2022 17:12:17.0

CARLOS ALBERTO BAVASTRI  
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

23/03/2022 17:08:24.0

MARCO ANTONIO LUERSEN

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO  
PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

23/03/2022 20:35:48.0

JUCÉLIO TOMÁS PEREIRA

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

23/03/2022 17:10:37.0

EDUARDO LUIZ ORTIZ BATISTA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA)

Assinatura Eletrônica

04/04/2022 16:58:21.0

MARIANO FEBBO

Coorientador(a) (UNIVERSIDAD NACIONAL DEL SUR)

## **AGRADECIMENTOS**

Agradeço primeiramente a Deus, por ter me dado sabedoria e força nas horas difíceis e por ter me ajudado a remover inúmeros obstáculos no meu caminho.

Agradeço aos meus orientadores, professores Carlos Bavastri e Mariano Febbo, pela ajuda, paciência, pelos conselhos e pela enorme dedicação de seu escasso tempo ao meu projeto, que demandou muito esforço e inúmeras reuniões que nunca terminavam.

Agradeço à Universidade Federal do Paraná, ao programa PRH 12.1 e à ANP/FINEP pelo suporte didático e financeiro prestado ao longo deste trabalho.

Agradeço aos meus pais, Richard e Viviane, que sempre estiveram ao meu lado, me incentivando a seguir na área acadêmica e me dando o suporte necessário ao longo de toda a minha pesquisa.

Agradeço ao meu irmão, Lorenzo, pelo companheirismo e, acima de tudo, por ser um amigo ao longo dessa trajetória.

Agradeço aos meus amigos, que sempre me animaram e estiveram ao meu lado mesmo quando eu estava totalmente focado na pesquisa.

“O que sabemos é uma gota; o que ignoramos é um oceano.”

(Isaac Newton, 1643-1727)

## RESUMO

Com a crescente demanda por aparelhos eletrônicos autônomos e com a necessidade de novas formas de geração de energia elétrica, surge o conceito de *Energy Harvesting*, que permite a obtenção de formas de energia presentes na natureza e a conversão dessa energia em uma forma útil, como a elétrica. Uma das formas de se gerar energia a partir desse conceito é utilizando materiais piezoelétricos. Contudo, a utilização de uma única viga piezoelétrica tem a geração limitada à frequências de excitação próximas a sua frequência de ressonância. Uma opção para garantir maior geração de energia em uma ampla faixa de frequências é a utilização de uma viga engastada-livre (viga primária) e uma viga piezoelétrica (*harvester*), acoplada na primária. Este tipo de sistema permite uma sintonização mais fácil, de modo que as primeiras frequências naturais do sistema coincidam com a faixa de operação desejada. Neste trabalho, são apresentadas metodologias para identificação e para otimização de um sistema experimental deste tipo. A base da viga metálica é excitada com um sinal conhecido e a tensão gerada no piezoelétrico é medida. A partir dos sinais de excitação e de tensão, é possível calcular a Função Resposta em Frequência de tensão-aceleração do sistema. O modelo matemático proposto para o sistema experimental é composto por uma viga contínua engastada-livre metálica, com uma mola equivalente, que representa a influência da viga piezoelétrica na viga metálica, acoplada. Para se obter o valor da rigidez equivalente, são apresentados diferentes modelos matemáticos para o piezoelétrico: 1 grau de liberdade e modelo contínuo, com seção única e duas seções. As equações de movimento do sistema composto são obtidas a partir da aplicação das Equações de Lagrange. Os parâmetros físicos e geométricos do sistema experimental são então identificados a partir de um problema inverso, no qual um modelo numérico é ajustado a partir dos dados obtidos experimentalmente. A identificação é realizada utilizando técnicas de otimização não linear. Para validar o modelo do sistema composto, são apresentados e testados experimentalmente modelos para as vigas individualmente, além de simulações do *harvester* no ANSYS. Os ajustes de curva ocorreram de forma satisfatória, e foi possível perceber a melhora dos resultados para o *harvester* contínuo, em comparação com o modelo de 1 grau de liberdade. Além disso, o modelo com 2 seções se mostrou mais próximo da realidade. Os pontos de maior divergência com os valores esperados foram o ponto de acoplamento e a capacitância total do *energy harvester*, enquanto os outros parâmetros apresentaram resultados satisfatórios. Após a identificação, é apresentado um método para a otimização do sistema, também utilizando técnicas de otimização não linear, de modo a se obter os parâmetros ótimos que possibilitem a máxima geração de energia pelo sistema em uma determinada faixa de frequências.

Palavras-chave: *Energy Harvesting*. Materiais Piezoelétricos. Vibrações Mecânicas. Equações de Lagrange. Otimização não linear.

## ABSTRACT

With the increasing demand for autonomous electronic devices and the need for new forms of electricity generation, the concept of Energy Harvesting, which allows obtaining forms of energy present in nature and converting this energy into a useful way, such as the electric one, has emerged. One way to generate energy based on this concept is by using piezoelectric materials. However, the use of a single piezoelectric beam has the generation limited to excitation frequencies close to its resonance frequency. One option to ensure greater power generation in a wide range of frequencies is using a cantilever beam (primary beam) and a piezoelectric beam (harvester), coupled to the primary one. This type of system allows an easier tuning so that the first natural frequencies of the system match the desired operating range. In this work, methodologies for the identification and optimization of an experimental system of this type are presented. The base of the metal beam is excited with a known signal and the voltage generated by the piezoelectric one is measured. From the excitation and voltage signals, it is possible to calculate the system voltage-acceleration Frequency Response Function. The mathematical model proposed for the experimental system is composed of a continuous metallic cantilever beam, with an equivalent spring, which represents the influence of the piezoelectric beam on the coupled metal one. In order to obtain the equivalent stiffness value, different mathematical models are presented for the piezoelectric: single degree of freedom and continuous model, with a single section and two sections. The equations of motion of the composite system are obtained by applying the Lagrange Equations. The physical and geometric parameters of the experimental system are then identified considering an inverse problem, in which a numerical model is adjusted from the data obtained experimentally. The identification is performed using non-linear optimization techniques. In order to validate the composite system model, models for the individual beams are presented and experimentally tested, in addition to harvester simulations using ANSYS. The curve adjustments occurred satisfactorily, and it was possible to notice the improvement of the results for the continuous harvester, compared to the single degree of freedom model. In addition, the model with 2 sections proved to be closer to reality. The points of greatest divergence with the expected values were the coupling point and the total capacitance of the energy harvester, while the other parameters showed satisfactory results. After the identification, a method for the optimization of the system is presented, also using non-linear optimization techniques, in order to obtain the optimal parameters that allow the maximum generation of energy by the system in a certain frequency range.

Keywords: Energy Harvesting. Piezoelectric materials. Mechanical Vibrations. Lagrange Equations. Nonlinear optimization.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Mapa de energias alternativas .....	13
Figura 2 – Monocristal .....	18
Figura 3 – Policristal .....	18
Figura 4 – Polaridade induzida em um policristal .....	19
Figura 5 – Ilustração do efeito piezoelétrico direto .....	19
Figura 6 – Ilustração do efeito piezoelétrico inverso .....	20
Figura 7 – Eixos de orientação de um material piezoelétrico .....	20
Figura 8 – Arranjo experimental para obtenção das constantes $d_{31}$ e $d_{31}$ .....	21
Figura 9 – Sistema massa-mola-amortecedor-piezo .....	29
Figura 10 – Gerador piezoelétrico do tipo $d_{31}$ engastado .....	31
Figura 11 – Esquema de um sistema .....	32
Figura 12 – Elemento de viga de Euler-Bernoulli .....	34
Figura 13 – Modos de vibrar de uma viga engastada-livre .....	37
Figura 14 – Viga deslizante-livre .....	37
Figura 15 – Modos de vibrar de uma viga deslizante-livre .....	38
Figura 16 – Dimensões (em mm) do <i>energy harvester</i> .....	40
Figura 17 – Arranjo experimental: sistema composto .....	41
Figura 18 – Arranjo experimental: parâmetros geométricos .....	42
Figura 19 – Arranjo experimental: <i>energy harvester</i> .....	43
Figura 20 – Arranjo experimental: viga de aço .....	44
Figura 21 – Modelo matemático proposto .....	45
Figura 22 – Sistema I: Modelo para o piezoelétrico de 1 grau de liberdade .....	50
Figura 23 – Sistema II: Modelo com rigidez dinâmica equivalente .....	50
Figura 24 – Circuito equivalente para um piezoelétrico bimorfo com conexão em paralelo .....	51
Figura 25 – Esquema do piezoelétrico utilizado .....	52
Figura 26 – Modelo do piezoelétrico contínuo .....	53
Figura 27 – Modelo do piezoelétrico contínuo com duas seções .....	56
Figura 28 – Seção transversal de $L1$ .....	58
Figura 29 – Modelo de viga simples .....	64
Figura 30 – Malha criada no ANSYS .....	67
Figura 31 – Detalhe da malha criada para o piezoelétrico .....	67

Figura 32 – Ajuste de curvas para a viga primária .....	72
Figura 33 – Modelo do piezoelétrico contínuo com duas seções .....	73
Figura 34 – Ajuste de curvas para o <i>harvester</i> com seção única .....	73
Figura 35 – Ajuste de curvas para o <i>harvester</i> com 2 seções .....	74
Figura 36 – Modelo do sistema composto – <i>harvester</i> 1 GL .....	75
Figura 37 – Ajuste de curvas para o sistema composto – <i>harvester</i> 1 grau de liberdade .....	76
Figura 38 – Ajuste de curvas para o sistema composto – $R = 41 \text{ k}\Omega$ .....	76
Figura 39 – Rigidez dinâmica equivalente obtida .....	77
Figura 40 – Modelo do sistema composto – <i>harvester</i> contínuo .....	78
Figura 41 – Ajuste de curvas para o sistema composto – $R = 324 \text{ k}\Omega$ .....	79
Figura 42 – Ajuste de curvas para o sistema composto – $R = 41 \text{ k}\Omega$ .....	79
Figura 43 – Rigidez dinâmica equivalente obtida .....	80
Figura 44 – Modelo do piezoelétrico contínuo com duas seções .....	81
Figura 45 – Ajuste de curvas para o sistema composto – $R = 324 \text{ k}\Omega$ .....	81
Figura 46 – Ajuste de curvas para o sistema composto – $R = 41 \text{ k}\Omega$ .....	82
Figura 47 – Rigidez dinâmica equivalente obtida .....	82

## LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Propriedades típicas de materiais piezoelétricos.....	23
Quadro 2 – Características dos principais <i>energy harvesters</i> existentes .....	27
Quadro 3 – Vantagens dos <i>harvesters</i> cinéticos .....	28
Quadro 4 – Desvantagens dos <i>harvesters</i> cinéticos .....	28

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Principais características do <i>energy harvester</i> utilizado, fornecidas pelo fabricante .....	40
Tabela 2 – Parâmetros medidos experimentalmente .....	42
Tabela 3 – Parâmetros físicos e geométricos utilizados .....	71
Tabela 4 – Comparação entre valores identificados e medidos .....	72
Tabela 5 – Comparação entre valores identificados e medidos .....	74
Tabela 6 – Comparação entre valores identificados e medidos .....	77
Tabela 7 – Comparação entre valores identificados e medidos .....	80
Tabela 8 – Comparação entre valores identificados e medidos .....	83
Tabela 9 – Comparação entre valores identificados e medidos – R = 324 k $\Omega$ .....	83
Tabela 10 – Comparação entre valores identificados e medidos – R = 41 k $\Omega$ (continua) .....	83

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO .....</b>	<b>12</b>
1.1	OBJETIVOS .....	14
1.1.1	Objetivo Geral.....	14
1.1.2	Objetivos Específicos .....	15
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	15
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA .....</b>	<b>17</b>
2.1	PIEZOELETRICIDADE.....	17
2.2	MATERIAIS E COEFICIENTES PIEZOELÉTRICOS.....	20
2.2.1	Constante piezoelétrica $d_{ij}$ .....	21
2.2.2	Constante dielétrica $\epsilon_{ij}$ .....	22
2.2.3	Materiais .....	22
2.3	EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PIEZOELÉTRICAS .....	24
2.4	<i>ENERGY HARVESTING</i> .....	25
2.4.1	<i>Energy harvesters</i> .....	26
2.4.2	<i>Energy harvester</i> piezoelétrico .....	29
2.4.3	<i>Energy Harvester do tipo d31</i> .....	31
2.5	IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS.....	32
2.6	VIBRAÇÃO LIVRE TRANSVERSAL DE VIGAS.....	33
2.6.1	Viga engastada-livre .....	36
2.6.2	Viga deslizante-livre.....	37
<b>3</b>	<b>MATERIAL E MÉTODOS.....</b>	<b>39</b>
3.1	ESQUEMA EXPERIMENTAL .....	39
3.1.1	Sistema composto .....	39
3.1.2	Energy harvester .....	42
3.1.3	Viga metálica .....	43
3.2	MODELOS MATEMÁTICOS .....	44
3.2.1	<i>Energy harvester</i> piezoelétrico com 1 grau de liberdade.....	49
3.2.2	<i>Energy harvester</i> piezoelétrico contínuo – seção única.....	53
3.2.3	<i>Energy harvester</i> piezoelétrico contínuo – 2 seções .....	56
3.2.4	Viga de aço.....	63
3.3	SIMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS.....	66
3.4	IDENTIFICAÇÃO .....	68

3.5	PROJETO ÓTIMO .....	69
<b>4</b>	<b>APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS .....</b>	<b>71</b>
4.1	PARÂMETROS FÍSICOS E GEOMÉTRICOS .....	71
4.2	VIGA PRIMÁRIA INDIVIDUAL.....	72
4.3	<i>ENERGY HARVESTER</i> INDIVIDUAL.....	72
4.4	SISTEMA COMPOSTO .....	74
4.4.1	<i>Energy harvester</i> piezoelétrico com 1 grau de liberdade.....	74
4.4.2	<i>Energy harvester</i> piezoelétrico contínuo com seção única.....	78
4.4.3	<i>Energy harvester</i> piezoelétrico contínuo com duas seções.....	80
4.5	COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS .....	83
<b>5</b>	<b>DISCUSSÃO DOS RESULTADOS .....</b>	<b>85</b>
<b>6</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS .....</b>	<b>87</b>
6.1	CONCLUSÕES GERAIS .....	87
6.2	RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	88
	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>90</b>

## 1 INTRODUÇÃO

As primeiras fontes de eletricidade portáteis no mundo foram criadas por Alessandro Volta, com a invenção da bateria em 1799, e por Michael Faraday, com a invenção do dínamo em 1831. Desde então, o uso de fontes portáteis se difundiu largamente.

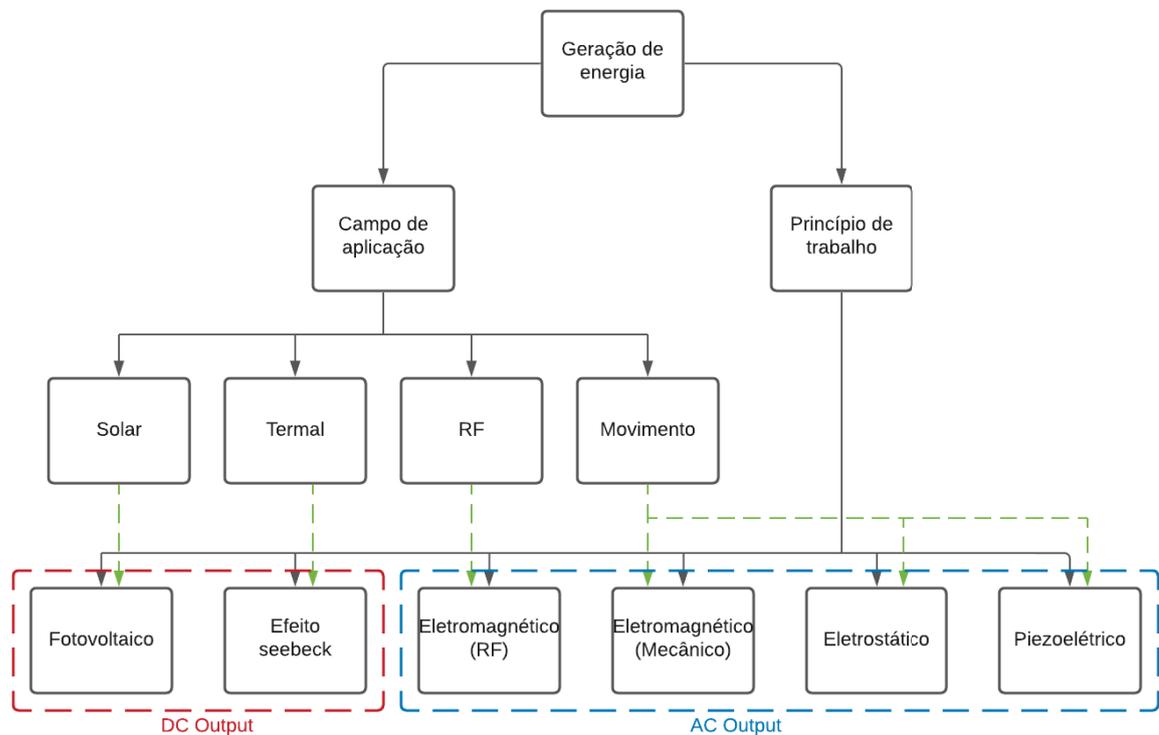
Nas últimas duas décadas, a demanda por aparelhos eletrônicos autônomos tem crescido, motivando pesquisas com o objetivo de obter formas alternativas de geração de energia elétrica (ROUNDY; WRIGHT, 2004; MUTHALIF; NORDIN, 2015).

Nesse contexto, surge o conceito do *Energy Harvesting*, que representa a obtenção de energia proveniente da chuva, do vento ou de outras formas presentes na natureza, que geralmente são desperdiçadas, e sua conversão em uma forma útil, como a elétrica (ACCIANI; MODUGNO; GELAO, 2016). Zhang *et al.* (2019) afirmam que a energia é geralmente proveniente da luz ambiente, ondas eletromagnéticas em rádio frequência, fontes térmicas ou fontes mecânicas. Em seu trabalho, é descrito um dispositivo capaz de converter sinais de wi-fi em eletricidade.

Os *energy harvesters*, termo utilizado para descrever os sistemas geradores, geram uma pequena quantidade de energia que pode ser utilizada para abastecer aparelhos eletrônicos (ERTURK; INMAN, 2009). Assim, o conceito de *Energy Harvesting* traz a possibilidade do carregamento de sensores sem fio, que podem ser utilizados em aplicações remotas. A troca ou recarga destes aparelhos costuma ser difícil de ser efetuada, apesar de sua vida útil ser muito maior do que a vida útil de suas baterias (KIM; KIM; KIM, 2011). Outra aplicação importante desse conceito está na diminuição da troca constante de pilhas e baterias em equipamentos eletrônicos, como smartphones e notebooks.

As principais formas de captação de energias alternativas estão representadas na Figura 1. Williams e Yates (1996) propõem três mecanismos básicos de conversão de energia de vibrações para energia elétrica: transduções eletromagnética, eletrostática e piezoelétrica. Estes três mecanismos têm sido profundamente estudados e comparados ao longo dos últimos 20 anos e a transdução piezoelétrica tem ganhado destaque, devido principalmente a sua maior densidade de potência (ANTON; SODANO, 2007) e sua utilidade na fabricação de microtecnologias (COOK-CHENNAULT; THAMBI; SASTRY, 2008).

Figura 1 – Mapa de energias alternativas



FONTE: O autor (2022).

Os materiais piezoelétricos, ao sofrerem deformação mecânica, geram uma polarização elétrica interna, que pode ser convertida em energia elétrica (efeito piezoelétrico direto), podendo ser captada por um circuito externo. De acordo com Hu *et al.* (2010), os materiais piezoelétricos têm ganhado destaque em pesquisas de *Energy Harvesting*, pela sua capacidade de converter diretamente um esforço mecânico em energia elétrica, além de apresentarem baixa complexidade na integração com outros sistemas.

A maioria dos *energy harvesters* piezoelétricos é dada por sistemas na forma de vigas engastadas-livre, devido à sua característica de ressonância em baixas frequências e à alta geração de energia elétrica na ressonância (KUNDU; NEMADE, 2016). A viga piezoelétrica é acoplada em uma estrutura sujeita a vibrações mecânicas e a deformação induzida no piezoelétrico é convertida em uma saída de tensão.

As duas principais configurações de uma viga piezoelétrica são unimorfa e bimorfa, caracterizadas pela presença de material piezoelétrico em um ou ambos os lados da viga. De acordo com Erturk e Inman (2009), cada configuração possui

vantagens e desvantagens, de modo que o dispositivo deve ser projetado de acordo com a sua aplicação.

Erturk e Inman (2008) desenvolveram uma solução analítica para um *energy harvester* piezoelétrico engastado-livre unimorfo, utilizando a teoria de Euler-Bernoulli, que não leva em consideração os efeitos da inércia rotacional e da deformação proveniente do cisalhamento. Eles obtiveram as respostas de tensão e de vibração do sistema para excitação harmônicas de translação na base. Além disso, Erturk e Inman (2009) desenvolveram uma solução analítica para um *energy harvester* piezoelétrico engastado-livre bimorfo, com conexão em série e em paralelo das camadas piezocerâmicas, utilizando a mesma teoria de Euler-Bernoulli e considerando excitações harmônicas de translação, com rotações pequenas, na base.

A grande limitação do *energy harvester* engastado-livre é o fato de que a geração de energia utilizando uma única viga piezoelétrica acoplada a uma estrutura sujeita a vibrações mecânicas é limitada à frequências de excitação próximas à frequência de ressonância do *harvester*. Uma opção para garantir maior geração de energia em uma ampla faixa de frequências é a utilização de uma viga engastada-livre (viga primária) e uma viga piezoelétrica, acoplada na primária. Este tipo de sistema permite uma sintonização mais fácil, pois é possível alterar as dimensões da viga primária de forma simples, de modo que as primeiras frequências naturais do sistema coincidam com a faixa de operação desejada.

O presente trabalho traz uma metodologia inédita de identificação de um sistema de *Energy Harvesting* composto por uma viga metálica e uma viga piezoelétrica bimorfa acoplada à metálica, juntamente com sua validação experimental. Além disso, é apresentada uma metodologia de otimização do sistema composto para obtenção de máxima energia gerada.

## 1.1 OBJETIVOS

### 1.1.1 Objetivo Geral

Este trabalho tem como objetivo apresentar e validar experimentalmente uma metodologia para a identificação e a otimização de um sistema de *Energy Harvesting* composto por uma viga de aço engastada-livre e por uma viga piezoelétrica (*energy harvester*) engastada na viga de aço.

Os parâmetros a serem identificados são: o amortecimento das duas vigas, a capacitância total do *harvester*, o comprimento de cada viga e o local de engaste do piezoelétrico na viga primária, pois não é possível medir com exatidão os locais de engaste, devido à ausência de engastes perfeitos.

Para desenvolver esta metodologia, é proposto um modelo equivalente do *harvester* a partir de sua rigidez dinâmica equivalente na base.

A partir de tal identificação, é feita a análise dos parâmetros físicos, mecânicos e elétricos, obtidos do sistema. A análise e validação dos modelos apresentados é realizada, de modo a permitir uma futura otimização do sistema, cuja metodologia é apresentada, obtendo-se a máxima geração de energia em uma faixa de frequências determinada.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Como objetivos específicos, têm-se:

- Realizar a construção do sistema experimental proposto, para identificação;
- Apresentar e comparar diferentes modelos matemáticos para o sistema composto experimental;
- Apresentar e comparar diferentes modelos matemáticos para as vigas de aço e piezoelétrica;
- Realizar a identificação dos parâmetros do sistema com os diferentes modelos, a partir de um problema inverso;
- Apresentar uma metodologia para a realização da otimização do sistema, de modo a se obter a máxima geração de energia.

## 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Para o embasamento do trabalho, conceitos como: fundamentos de piezoelectricidade, de materiais piezoelétricos, de coeficientes piezoelétricos, de equações constitutivas piezoelétricas, de *Energy Harvesting* e *energy harvesters*, de identificação de sistemas, de vibração livre transversal de vigas e de Equações de Lagrange são revisados no capítulo 2.

Os modelos matemáticos utilizados, assim como o problema de identificação inversa e o modelo para o projeto ótimo, são descritos e detalhados juntamente com a parte experimental do projeto no capítulo 3.

Os resultados obtidos ao longo do trabalho são apresentados no capítulo 4, enquanto sua discussão é realizada no capítulo 5.

As considerações finais sobre o trabalho, assim como recomendações para trabalhos futuros, são feitas no capítulo 6.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

Para o desenvolvimento do trabalho, alguns conceitos teóricos devem ser revisados, de modo a se obter uma metodologia completa e eficaz. Dessa forma, neste capítulo, alguns fundamentos de piezoeletricidade, de materiais piezoelétricos, de coeficientes piezoelétricos, de equações constitutivas piezoelétricas, de *Energy Harvesting* e *energy harvesters*, de identificação de sistemas e de vibração livre transversal de vigas são revisados.

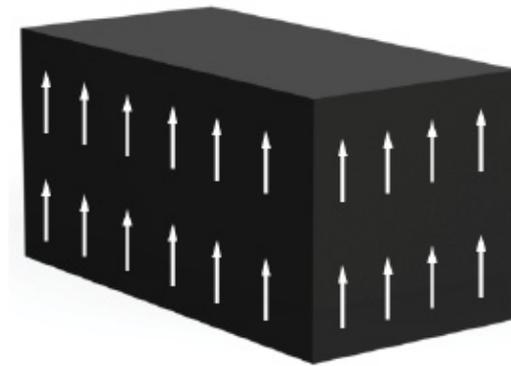
### 2.1 PIEZOELETRICIDADE

A piezoeletricidade foi descoberta em 1880, pelos irmãos Pierre e Jacques Curie. Eles perceberam que alguns tipos de cristais, ao serem comprimidos em direções específicas, apresentavam uma polarização, ou seja, cargas positivas e negativas ordenadas em certas partes do material. Essa polarização era proporcional à pressão aplicada e desaparecia quando a pressão cessava. Pierre Curie também descobriu que os polos eram produzidos apenas em algumas direções de acordo com a configuração geométrica do cristal (TICHÝ *et al.*, 2010).

A primeira aplicação prática da piezoeletricidade foi realizada durante a Primeira Guerra Mundial, por Paul Langevin, no desenvolvimento de sonares. Após esse período, foram iniciados estudos a respeito do desenvolvimento de materiais piezoelétricos sintéticos, gerando descoberta e aperfeiçoamento de cerâmicas piezoelétricas de Titanato de Bário e de cerâmicas piezoelétricas de Titanato Zirconato de Chumbo (PZT) (CADY, 1964).

A piezoeletricidade possui relação direta com a simetria do cristal (CURIE; CURIE, 1880). Seu efeito é observado em cristais sem centro de simetria, o que é explicado através de estruturas monocristalinas e policristalinas. Em um monocristal, todos os portadores de carga possuem eixos polares com características direcionais em apenas um sentido, como mostra a Figura 2. Este tipo de cristal apresenta simetria, com eixos unidirecionais, mesmo que o cristal seja partido em pedaços menores.

Figura 2 – Monocristal



FONTE: Iaconis (2016).

Por outro lado, um policristal apresenta regiões diversas com diferentes eixos polares, como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Policristal



FONTE: Iaconis (2016).

Para adquirir o efeito piezoelétrico, o policristal pode ser aquecido até o ponto de Curie, que é a temperatura a partir da qual um material ferromagnético começa a perder suas propriedades magnéticas, com um campo elétrico intenso (CURIE; CURIE, 1880). Com o aumento da temperatura, as moléculas conseguem se mover livremente e, com a atuação do campo elétrico, os dipolos se reorganizam, como mostra a Figura 4.

Figura 4 – Polaridade induzida em um policristal



FONTE: Iaconis (2016).

A piezoelectricidade pode ser de dois tipos: direta ou inversa.

Tichý *et al.* (2010) define a piezoelectricidade direta como a variação de polaridade de acordo com a deformação aplicada. Quando uma força externa é aplicada, uma polarização elétrica interna é obtida no material, com intensidade proporcional à força aplicada e diretamente relacionada com a geometria do material.

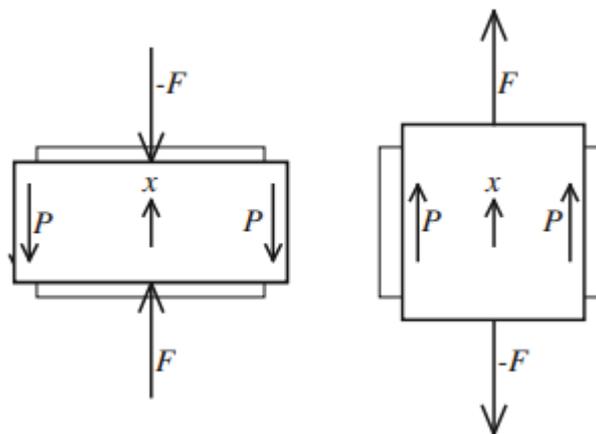
De acordo com Arnau e Soares (2008):

$$\mathbf{P}_p = \mathbf{T} \cdot \mathbf{d}, \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{P}_p$  é o vetor de polarização piezoelétrica,  $\mathbf{T}$  é a tensão mecânica sob a qual o material piezoelétrico está submetido e  $\mathbf{d}$  é o coeficiente de pressão piezoelétrica.

A Figura 5 ilustra um esquema de piezoelectricidade direta.

Figura 5 – Ilustração do efeito piezoelétrico direto



FONTE: Tichý *et al.* (2010).

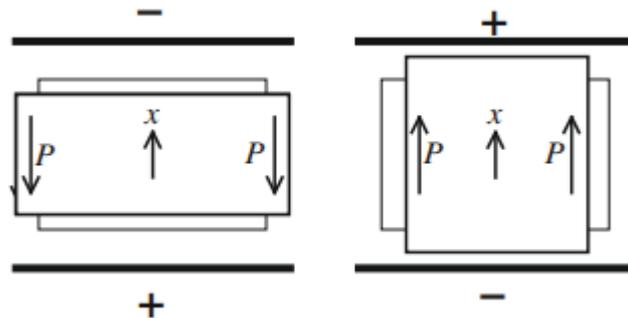
Na piezoelectricidade inversa, na presença de um campo elétrico, o cristal piezoelétrico se deforma. O efeito piezoelétrico inverso é uma manifestação da mesma propriedade fundamental dos cristais responsável pelo efeito piezoelétrico direto (TICHÝ *et al.*, 2010).

De acordo com Arnau e Soares (2008):

$$S_p = E \cdot d, \quad (2.2)$$

onde  $S_p$  é a tensão produzida,  $E$  é o campo elétrico aplicado e  $d$  é o coeficiente de pressão piezoelétrica. A Figura 6 ilustra a piezoeletricidade inversa.

Figura 6 – Ilustração do efeito piezoelétrico inverso

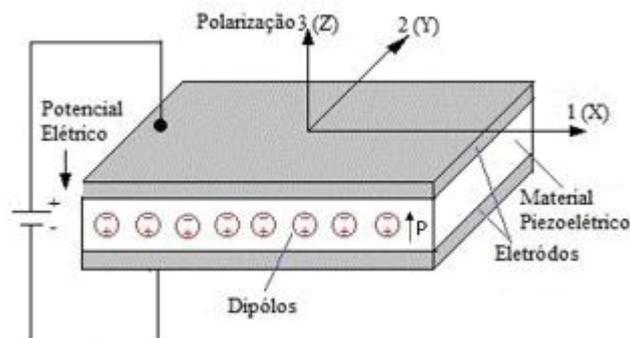


FONTE: Tichý *et al.* (2010).

## 2.2 MATERIAIS E COEFICIENTES PIEZOELÉTRICOS

Para estudo dos coeficientes piezoelétricos e, posteriormente, das equações constitutivas e dos *harvesters* piezoelétricos, é preciso definir as direções principais utilizadas em um material piezoelétrico. Essas direções são dadas a partir de um sistema de eixos ortogonais, como mostrado na Figura 7. Os eixos 1 (X) e 2 (Y) são os eixos perpendiculares aos dipolos gerados, enquanto o eixo 3 (Z) é o eixo de polarização, no qual está presente o vetor de polarização P.

Figura 7 – Eixos de orientação de um material piezoelétrico



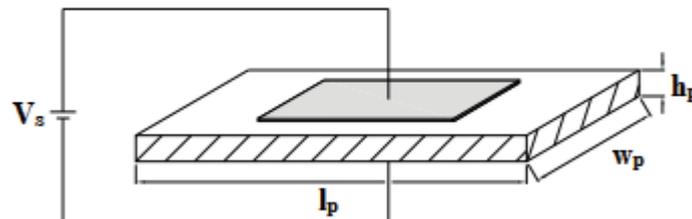
FONTE: Lima (2013).

### 2.2.1 Constante piezoelétrica $d_{ij}$

A constante piezoelétrica  $d_{ij}$  relaciona um campo elétrico aplicado ao longo do eixo  $i$  com a deformação no eixo  $j$ , quando todas as tensões mecânicas externas são mantidas constantes. As duas principais constantes desse tipo são a  $d_{31}$  e a  $d_{33}$ .

A Figura 8 mostra o arranjo experimental para a obtenção das constantes  $d_{31}$  e  $d_{33}$ .

Figura 8 – Arranjo experimental para obtenção das constantes  $d_{31}$  e  $d_{31}$ .



FONTE: Adaptado de Coelho (2015).

Para a constante  $d_{31}$ , uma tensão elétrica  $V_s$  é aplicada em um cristal piezoelétrico de comprimento  $l_p$ , largura  $w_p$  e espessura  $h_p$ , polarizado no eixo  $z$  (direção 3). A magnitude do campo elétrico gerado por essa tensão está descrita por Moheimani e Fleming (2006):

$$E_3 = \frac{V_s}{h_p}. \quad (2.3)$$

A deformação no elemento, ocasionada pelo campo elétrico gerado na direção 1, é dada por

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta l_p}{l_p}, \quad (2.4)$$

onde

$$\Delta l_p = \frac{d_{31} V_s l_p}{h_p}. \quad (2.5)$$

Por outro lado, para a constante  $d_{33}$ , a deformação no elemento, ocasionada pelo campo elétrico gerado na direção 3, é dada por

$$\varepsilon_3 = \frac{\Delta h_p}{h_p}, \quad (2.6)$$

onde

$$\Delta h_p = d_{33} V_s. \quad (2.7)$$

### 2.2.2 Constante dielétrica $\varepsilon_{ij}$

A constante dielétrica  $\varepsilon_{ij}$  determina a carga por unidade de área gerada no eixo  $i$  devido a um campo elétrico aplicado no eixo  $j$ . Na maioria dos materiais piezoelétricos, um campo elétrico aplicado em um eixo provoca a orientação de cargas elétricas apenas no mesmo sentido do eixo (MOHEIMANI; FLEMING, 2006).

Há também a constante denotada por  $\varepsilon_{ii}^\sigma$ , na qual  $\sigma$  descreve a permissividade para um campo aplicado na direção  $i$ , quando nenhuma barreira externa está restringindo o material (MOHEIMANI; FLEMING, 2006).

### 2.2.3 Materiais

O efeito piezoelétrico ocorre naturalmente em vários cristais, como por exemplo no quartzo, na turmalina e no tartarato de potássio e sódio (CURIE; CURIE, 1880). Além desses cristais, há um grupo importante de materiais piezoelétricos sintéticos, chamados cerâmicas piezoelétricas, como por exemplo o PZT. Estes são ferroelétricos policristalinos.

Os materiais piezoelétricos mais utilizados são o PZT (BALDISSERRI; GARDINI; GALASSI, 2012) e o titanato de bário (KOKA; ZHOU; SODANO, 2014). Outros materiais de grande importância são o PVDF (piezoelétrico polimérico) e o MFC (compósito de micro fibra). Anton e Sodano (2007) e Shen, Choe e Kin (2006) constataram que esses materiais são muito flexíveis. Além disso, Kranz, Benjeddou e Drossel (2013) mostraram que o MFC é um composto que combina a alta densidade de energia dos piezocerâmicos com a flexibilidade do epóxi. O Quadro 1 apresenta uma comparação entre algumas propriedades do PZT e do PVDF.

Quadro 1 – Propriedades típicas de materiais piezoelétricos

Propriedade do Material	PZT	PVDF
Módulo de Young (GPa)	50	2,5
Tensão máxima (Mpa)	Tração: 80 Compressão: 600	Tração: 200 Compressão: 200
Deformação máxima	Frágil	50%
Temperatura máxima de operação (°C)	80 - 150	90
Fator de acoplamento $k_{33}$	0,7	0,1
Campo elétrico máximo (V/mm)	2000	$5 \times 10^5$
Densidade (kg/m <sup>3</sup> )	7600	1800
<b>Constantes piezoelétricas:</b>		
$d_{33}$ (10 <sup>-12</sup> C/N ou m/V)	300	25
$d_{31}$ (10 <sup>-12</sup> C/N ou m/V)	-150	Uni-axial: -15 Bi-axial: -3
$d_{15}$ (10 <sup>-12</sup> C/N ou m/V)	500	-
$e_{31} = d_{31}/s^E$ (C/m <sup>2</sup> )	-7,5	-0,025
Constante dielétrica $\epsilon^T/\epsilon_0$ ( $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ F/m)	1800	10

FONTE: Adaptado de Preumont (2002).

Shen, Choe e Kin (2006) compararam os materiais PZT, PVDF e MFC e demonstraram que, apesar do PZT apresentar a maior densidade de potência, não deve ser utilizado para vibrações com altas acelerações, pois possui uma menor tensão de escoamento, o que faz com que fraturas ocorram mais facilmente. Para altas acelerações, os materiais piezoelétricos poliméricos e compósitos, PVDF e MFC, são mais adequados, de modo que o PVDF obteve a maior durabilidade nessas condições.

O óxido de zinco (ZnO) tem se mostrado um material capaz de gerar um campo piezoelétrico em escalas nanométricas. Ele tem sido utilizado em cabos com diâmetros menores do que 100 nanômetros. Como o zinco possui propriedades tanto piezoelétricas quanto semicondutoras, além de ser biocompatível, pode ser utilizado também em algumas aplicações médicas. (WANG; SONG, 2006).

### 2.3 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS PIEZOELÉTRICAS

Em um meio dielétrico unidimensional não sujeito à aplicação de forças, o deslocamento elétrico (carga por unidade de área)  $\mathbf{D}$  é dado por (ANSI/IEEE Std, 1988)

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (2.8)$$

onde  $\varepsilon$  é a constante dielétrica do material e  $\mathbf{E}$  é o campo elétrico.

Da mesma forma, em um corpo elástico unidimensional, na ausência de um campo elétrico, sua deformação  $\mathbf{S}$  é dada por

$$\mathbf{S} = s \mathbf{T}, \quad (2.9)$$

onde  $s$  é chamado de conformidade do material, que é o inverso do módulo de Young, e  $\mathbf{T}$  é a tensão aplicada.

Para um material piezoelétrico, as equações constitutivas mecânica e elétrica são acopladas da seguinte forma (ANSI/IEEE Std, 1988):

$$\mathbf{S} = s^E \mathbf{T} + d \mathbf{E} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{D} = d \mathbf{T} + \varepsilon^T \mathbf{E}. \quad (2.11)$$

Na Equação (2.10), a constante piezoelétrica  $d$  relaciona a deformação com o campo elétrico  $\mathbf{E}$  na ausência de esforços mecânicos e  $s^E$  está relacionado com a conformidade do material quando o campo elétrico é constante. Na Equação (2.11),  $d$  relaciona o deslocamento elétrico  $\mathbf{D}$  com a deformação na ausência de campo elétrico, enquanto  $\varepsilon^T$  é a constante dielétrica sob tensão constante (PREUMONT, 2002).

As equações podem ser reescritas como

$$\mathbf{T} = (s^E)^{-1} \mathbf{S} - d (s^E)^{-1} \mathbf{E} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{D} = d (s^E)^{-1} \mathbf{S} + \varepsilon^T \left( 1 - \frac{d^2}{\varepsilon^T} (s^E)^{-1} \right) \mathbf{E} \quad (2.13)$$

ou ainda, como

$$\mathbf{T} = c^E \mathbf{S} - e \mathbf{E} \quad (2.14)$$

$$\mathbf{D} = e \mathbf{S} + \varepsilon^T (1 - k^2) \mathbf{E} \quad (2.15)$$

onde  $c^E = (s^E)^{-1}$  é o módulo de Young sob campo elétrico constante,  $e = d (s^E)^{-1}$  é a constante que relaciona a deformação com o deslocamento elétrico na ausência de campo elétrico e  $k^2 = \frac{d^2}{\varepsilon^T} (s^E)^{-1}$  é chamado de coeficiente de acoplamento para o piezoelétrico. Para transduções eficientes, são desejáveis altos valores de  $k$  (PREUMONT, 2002).

Da Equação (2.14), é possível perceber que a constante dielétrica sob deformação constante é dada por  $\varepsilon^S = \varepsilon^T(1 - k^2)$ . Aquela equação é utilizada na formulação para um atuador piezoelétrico laminar, enquanto a Equação (2.15) é utilizada na formulação para um sensor laminar. Reescrevendo as Equações (2.14) e (2.15) na forma matricial, chega-se a

$$\begin{pmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{D} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^E & -e \\ e & \varepsilon^S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{S} \\ \mathbf{E} \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Para análises multidimensionais, as equações constitutivas assumem um formato análogo ao das unidimensionais, com a diferença de se tratarem de formas tensoriais em função das múltiplas dimensões envolvidas (LERCH, 1990). Se a direção de polarização coincidir com a direção 3, as equações constitutivas podem ser escritas matricialmente como

$$\begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{33} \\ 2S_{23} \\ 2S_{13} \\ 2S_{12} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 \\ s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & s_{33} & s_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & d_{31} \\ 0 & 0 & d_{32} \\ 0 & 0 & d_{33} \\ 0 & d_{24} & 0 \\ d_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

$$\begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

As Equações (2.17) e (2.18) representam um atuador e um sensor piezoelétrico, respectivamente.

## 2.4 ENERGY HARVESTING

De acordo com Acciani, Modugno e Gelao (2016), o conceito de *Energy Harvesting* representa a obtenção de energia proveniente da chuva, do vento ou de outras formas de energia presentes na natureza, que geralmente são ignoradas, e a conversão dessa energia em uma forma útil de energia, como a elétrica. Os sistemas projetados podem converter tipos de energia presentes também em ambientes industriais, como vibrações mecânicas, gradientes de temperatura, luz artificial ou ruídos elevados. Essa energia pode ser gerada e armazenada para alimentar dispositivos eletrônicos.

O principal objetivo do *Energy Harvesting* não é produzir energia em larga escala, mas sim utilizar imediatamente a energia gerada ou guardar a energia captada em um dispositivo de armazenamento para utilizá-la posteriormente em um sistema eletrônico (POZO *et al.*, 2019). Portanto, um sistema com esse conceito deve ser capaz de captar a energia durante seu período de disponibilidade, enquanto dispositivos complementares de armazenamento devem atender a demanda e fornecer essa energia em períodos determinados.

Os principais princípios do *Energy Harvesting* são (POZO *et al.*, 2019):

- Remover a necessidade de fios de alimentação;
- Eliminar ou reduzir a dependência de pilhas e baterias;
- Aumentar a vida útil de aparelhos e sensores eletrônicos;
- Facilitar instalação e manutenção de aparelhos;
- Reduzir custos;
- Reduzir desperdícios.

Um sistema padrão de *Energy Harvesting* é constituído por três partes principais (KHENG; KUMAR, 2010): um *harvester*, um sistema de gerenciamento e conversão e um sistema de armazenamento de baixo consumo de energia. A operação se inicia com a coleta de energia do ambiente através do *harvester*. Em seguida, o sistema de gerenciamento converte os níveis de tensão da energia captada para níveis padrão, alimentando o sistema eletrônico. Quando necessário, o excesso de energia obtida é armazenada pelo sistema de armazenamento.

#### 2.4.1 Energy harvesters

*Energy Harvesters* são dispositivos que possuem os mesmos princípios dos transdutores eletrônicos. Dessa forma, eles são fundamentalmente transdutores, projetados para extrair a máxima quantidade possível de energia do ambiente (WEBSTER; EREN, 2017). Os *energy harvesters* geram uma pequena quantidade de energia, que pode ser utilizada para abastecer aparelhos eletrônicos (ERTURK; INMAN, 2009).

Os *energy harvesters* podem ser fabricados a partir de diferentes princípios físicos. O Quadro 2 mostra os principais tipos de *harvesters* existentes, assim como as características de cada um.

Quadro 2 – Características dos principais *energy harvesters* existentes

Harvester	Princípio de Funcionamento	Densidade de Potência ( $\mu\text{W}/\text{cm}^2$ )	Rendimento (%)	Maturidade dos Estudos
Fotovoltaico	Efeito fotovoltaico	Externos: 15.000 Internos: 10-100	$\leq 40$	Maduro
Piezoelétrico	Efeito piezoelétrico	330	$\leq 30$	Maduro
Eletromagnético	Lei de Faraday	Humano: 4 Industrial: 306	$\leq 67$	Maduro
Eletrostático	Capacitores dependentes de vibração	50 a 100	9,5-23,6	Emergente
Piroelétrico	Ciclo de Olsen	3,5 a 85 °C/s	1-3,5	Emergente
Termoelétrico	Efeito seebeck	Humano: 100 Industrial: 100.000	10-15	Maduro
Magnético	Leis de Ampere, Maxwell e Faraday	1.800 com 400 A a 4 cm do condutor	0,1325	Emergente
RF	Transmissores de rádio	GSM: 0,1 WiFi: 0,01	50-70	Maduro
Vento Água	Lei de Faraday	1.160 à 5 m/s 4,91 à 3 l/s	0,61-17,6 1,7-29,5	Emergente
Acústico	Efeito Helmutz	1.436 à 123 dB	0,012	Emergente

FONTE: Adaptado de Pozo *et al.* (2019).

Os *harvesters* piezoelétrico, eletromagnético e eletrostático estão inseridos em um grupo conhecido como *harvesters* cinéticos, que são responsáveis por gerar energia elétrica a partir de energia mecânica através de transdutores eletromagnéticos

(BEEBY; WHITE, 2010). A energia mecânica é captada do ambiente através de vibrações. Esses dispositivos possuem a frequência de ressonância que costuma variar de dezenas a centenas de Hertz e costumam gerar energia também na faixa de dezenas a centenas de microwatts (PRIYA *et al.*, 2019). Os *harvesters* cinéticos são sensíveis à frequência de excitação, ou seja, fornecem um pico de potência em uma banda estreita de frequências de excitação em torno de sua frequência de ressonância. Dessa forma, é necessário sintonizar esses dispositivos (BOISSEAU; DESPESE; AHMED, 2012).

Os Quadros 3 e 4 mostram, respectivamente, as principais vantagens e desvantagens dos *harvesters* cinéticos disponíveis.

Quadro 3 – Vantagens dos *harvesters* cinéticos

<b>Dispositivos Piezoelétricos</b>	<b>Dispositivos Eletromagnéticos</b>	<b>Dispositivos Eletrostáticos</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Altas tensões de saída;</li> <li>- Altas capacitâncias;</li> <li>- Não há necessidade de controlar.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Altas correntes de saída;</li> <li>- Vida útil longa;</li> <li>- Robustez.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Altas tensões de saída;</li> <li>- Sistemas de baixo custo;</li> <li>- Coeficiente de acoplamento ajustável;</li> <li>- Redução no tamanho aumenta a capacitância.</li> </ul>

FONTE: Adaptado de Pozo *et al.* (2019).

Quadro 4 – Desvantagens dos *harvesters* cinéticos

<b>Dispositivos Piezoelétricos</b>	<b>Dispositivos Eletromagnéticos</b>	<b>Dispositivos Eletrostáticos</b>
<ul style="list-style-type: none"> <li>- Materiais caros;</li> <li>- Coeficiente de acoplamento dependente das propriedades do material.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Baixas tensões de saída;</li> <li>- Materiais caros;</li> <li>- Baixa eficiência em baixas frequências e com tamanhos pequenos.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Baixas capacitâncias;</li> <li>- Alta incidência de capacitâncias parasitas;</li> <li>- Não há conversão direta mecânica para elétrica para dispositivos sem eletreto.</li> </ul>

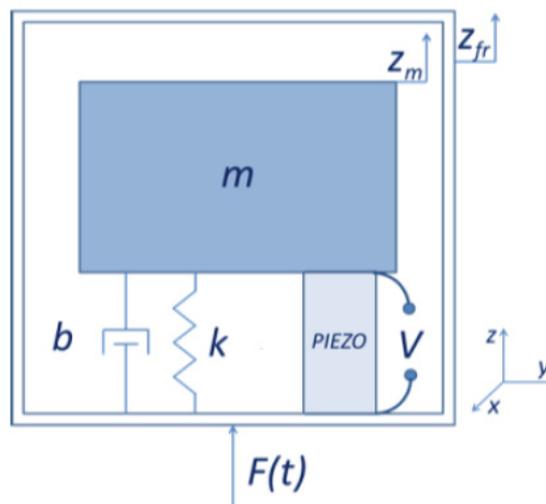
FONTE: Adaptado de Pozo *et al.* (2019).

### 2.4.2 Energy harvester piezoelétrico

Ao ser deformada, uma cerâmica piezoelétrica gera uma polarização elétrica interna. Por conta dessa propriedade, os materiais piezoelétricos podem ser utilizados como geradores inerciais de energia a partir de vibrações mecânicas.

Os geradores inerciais podem ser descritos como um sistema massa-mola-amortecedor de segunda ordem, no qual a mola e o amortecedor estão em paralelo com o elemento piezoelétrico (FERRARI *et al.*, 2008), (ERTURK; INMAN, 2008). A massa fica fixada a uma base na qual é aplicada uma aceleração externa. O esquema de um gerador inercial está representado na Figura 9. O elemento piezoelétrico transforma a deformação mecânica sofrida por este dispositivo em energia elétrica.

Figura 9 – Sistema massa-mola-amortecedor-piezo



FONTE: O autor (2022).

O sistema possui a seguinte equação de movimento:

$$m\ddot{z}_m(t) + b\dot{z}_m(t) + kz_m(t) = \mathbf{F}(t), \quad (2.19)$$

onde  $m$ ,  $b$  e  $k$  são a massa, o coeficiente de amortecimento e a constante de rigidez, respectivamente, e  $\mathbf{F}(t)$  representa uma força externa aplicada ao sistema. A constante  $k$  abrange o coeficiente de rigidez do sistema principal ( $k_s$ ) e do piezoelétrico ( $k_p$ ), enquanto o coeficiente de amortecimento  $b$  abrange tanto perdas mecânicas ( $b_m$ ) quanto perdas elétricas ( $b_e$ ). Este modelo possui erros desprezíveis sempre que a estrutura vibrar com um deslocamento pequeno, de modo que possui um comportamento mecânico linear nesta situação (STANTON *et al.*, 2011).

A frequência natural do sistema (frequência de ressonância do sistema não amortecido) é dada por

$$\Omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.20)$$

A energia gerada pelo piezoelétrico é calculada a partir da energia mecânica perdida por efeito da transdução (BEEBY; TUDOR; WHITE, 2006):

$$P_e = \frac{m\xi_e a^2}{4\Omega_n(\xi_e + \xi_p)^2}, \quad (2.21)$$

onde  $a = -\Omega^2 Z$  é a amplitude de aceleração da base, assumindo que a vibração seja harmônica e o deslocamento da base seja  $z_{fr} = Z \sin(\Omega t)$ . Além disso,  $\xi_e$  e  $\xi_p$  são as razões de amortecimento do piezoelétrico e do sistema mecânico, respectivamente ( $\xi = b/(2m\Omega_n)$ ).

Na prática, o sistema deve ser projetado de modo que  $\Omega_n$  coincida com a frequência de excitação externa  $\Omega$ , pois quando isso ocorre, tem-se a máxima deformação do sistema e, por consequência, a máxima geração de energia.

Quando uma tensão mecânica atua sobre um elemento piezoelétrico PZT, assumindo que o campo elétrico aplicado é nulo, o vetor deslocamento elétrico resultante é dado pela Equação (2.18), com  $E_1 = E_2 = E_3 = 0$ :

$$\begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{23} \\ T_{13} \\ T_{12} \end{Bmatrix}. \quad (2.22)$$

A carga gerada é dada por (MOHEIMANI; FLEMING, 2006)

$$q = \iint_S [D_1 \quad D_2 \quad D_3] \begin{bmatrix} dA_1 \\ dA_2 \\ dA_3 \end{bmatrix}, \quad (2.23)$$

onde  $dA_1$ ,  $dA_2$  e  $dA_3$  são os diferenciais de área dos eletrodos nos planos 2-3, 1-3 e 1-2, respectivamente. A tensão elétrica gerada  $V_s$  é dada por

$$V_s = \frac{q}{C_p}, \quad (2.24)$$

onde  $C_p$  é a capacitância do material piezoelétrico.

Supondo que a tensão mecânica seja aplicada apenas na direção 1, e assumindo o resultado da deformação nessa direção, a tensão gerada é dada por

$$V_s = \frac{d_{31}E_p w_p}{C_p} \int_{l_p} \varepsilon_1 dx, \quad (2.25)$$

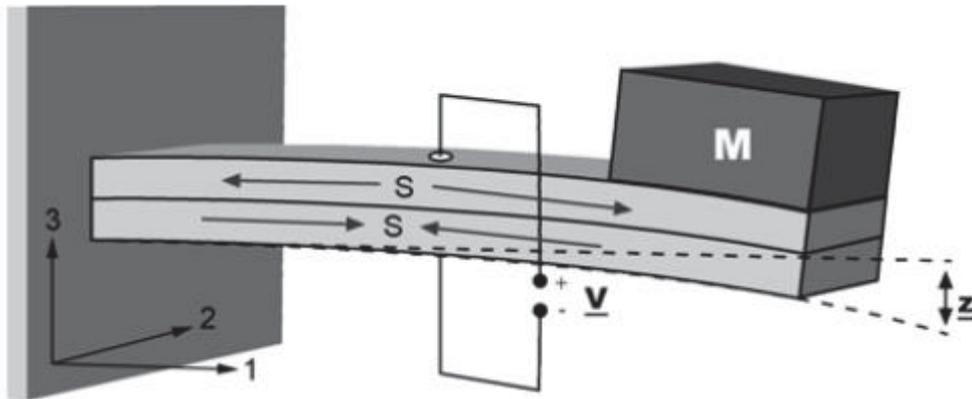
onde  $E_p$  é o módulo de Young do piezoelétrico e  $\varepsilon_1$  é a deformação média sobre o comprimento do elemento, calculada por

$$\varepsilon_1 = \frac{C_p V_s}{d_{31}E_p w_p l_p}. \quad (2.26)$$

#### 2.4.3 Energy Harvester do tipo $d_{31}$

No modo  $d_{31}$ , é aplicada uma deformação na direção 1, gerando um campo elétrico induzido na direção 3 no material. A Figura 10 mostra a configuração mais comum de um gerador piezoelétrico deste tipo, composto por uma viga retangular engastada-livre com uma massa na ponta e um material piezoelétrico.

Figura 10 – Gerador piezoelétrico do tipo  $d_{31}$  engastado



FONTE: Roundy e Wright (2004).

Para este tipo de arranjo, existem duas configurações: unimorfa e bimorfa, caracterizadas pela presença de material piezoelétrico apenas na parte superior da viga ou em ambos os lados, respectivamente. Ng e Liao (2005) estudaram e compararam as duas configurações de modo a se obter maior geração de energia. A viga unimorfa apresentou melhores resultados para frequências e resistências elétricas baixas, enquanto a viga bimorfa se mostrou mais adequada para frequências e resistências mais elevadas. Além disso, no caso da configuração bimorfa, os dois elementos piezoelétricos podem ser unidos eletricamente em paralelo (para aumentar

a passagem de corrente) ou em série (para aumentar a tensão gerada). Isso ocorre porque os elementos são submetidos a tensões opostas durante a operação.

A relação ótima, descrita pela Equação (2.27), para a resistência elétrica, foi obtida por Lu, Lee e Lim (2004), para uma viga bimorfa, em função das dimensões e propriedades do material:

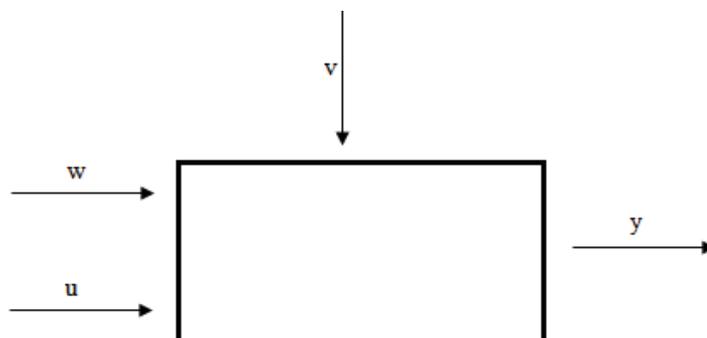
$$R_{\text{ótimo}} = \frac{t}{WL\varepsilon_{33}\Omega} = \frac{1}{C_p\Omega}, \quad (2.27)$$

onde  $t$  é a espessura,  $L$  é o comprimento do piezoelétrico,  $W$  é a largura da viga,  $\varepsilon_{33}$  é a constante dielétrica,  $\Omega$  é a frequência angular de excitação e  $C_p$  é a capacitância do elemento piezoelétrico. Assim, é possível perceber que a resistência ótima varia com as características físicas e geométricas do material, assim como com a frequência de excitação externa.

## 2.5 IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS

De acordo com Ljung (1987), um sistema pode ser definido como um conjunto de variáveis de diferentes características que interagem entre si, produzindo sinais. Os sinais gerados por esse sistema são comumente chamados de *outputs*, ou saídas. O sistema pode também ser afetado por estímulos externos. Quando gerados intencionalmente por um observador, estes sinais externos recebem o nome de *inputs*, ou entradas, enquanto os sinais não controlados são chamados de perturbações. Na Figura 11, é possível ver o esquema de um sistema com entradas  $u$  e  $w$ , saída  $y$  e perturbação  $v$ .

Figura 11 – Esquema de um sistema



FONTE: Adaptado de Ljung (1987).

Um sistema é classificado como dinâmico quando o valor atual de alguma saída depende não apenas do valor atual das entradas, mas também dos seus valores ao longo do tempo. Este tipo de sistema é o mais encontrado e possui as maiores aplicações na ciência. É possível representar matematicamente o comportamento de um sistema dinâmico utilizando um conjunto de equações diferenciais (tempo contínuo) ou equações de diferença (tempo discreto). Por outro lado, caso o valor atual das saídas de um sistema dependa apenas do valor atual das entradas, ele é classificado como estático. Os sistemas estáticos podem ser representados por equações algébricas (KALMAN; FALB; ARBIB, 1969; CASTI, 1977).

Um sistema dinâmico é dito “determinístico” quando é possível determinar sua saída  $y(t)$  conhecendo apenas a entrada  $u(t)$  e as condições iniciais do sistema. Caso isso não seja possível, o sistema é chamado de “estocástico”, o que implica que para sua descrição é necessária a especificação das características estatísticas dos sinais aleatórios que afetam seu comportamento. É possível modelar estes sinais através de estruturas conhecidas como processos estocásticos (DAVIS; VINTER, 1985; PAPOULIS, 1991).

Outra classificação importante utilizada na identificação de sistemas é a de sistemas variantes e invariantes no tempo. Um sistema é invariante se um deslocamento no tempo na entrada  $u(t)$  gera o mesmo deslocamento no tempo na saída  $y(t)$ , ou seja,  $u(t - t_0)$  irá gerar  $y(t - t_0)$ . Isso significa que sua dinâmica não varia com o tempo. A consideração de sistemas como invariantes no tempo simplifica suas modelagens, uma vez que a relação causa e efeito não tem variação significativa com o tempo (AGUIRRE, 2014). O conceito de “estacionariedade” possui relação direta com a invariância, e é amplamente utilizado no contexto de sinais e processos estocásticos. Seu estudo, juntamente com a identificação de sistemas não-estacionários, foi investigado em Araújo (2006).

## 2.6 VIBRAÇÃO LIVRE TRANSVERSAL DE VIGAS

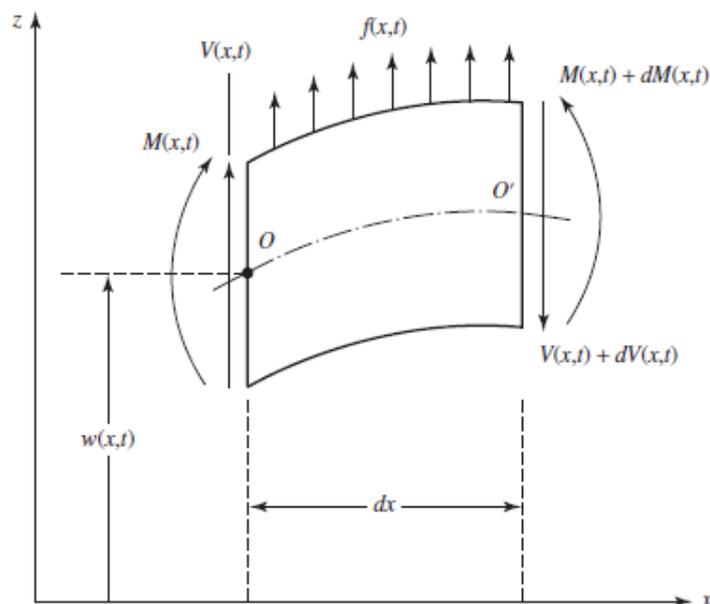
A equação de movimento transversal de uma viga pode ser obtida a partir das teorias de Euler-Bernoulli, de Rayleigh e de Timoshenko, além de outras não consideradas neste trabalho. A primeira teoria, considerada neste trabalho, ignora os efeitos da inércia rotacional e da deformação proveniente do cisalhamento e pode ser utilizada no estudo de vigas finas. Por outro lado, a segunda teoria leva em conta os

efeitos da inércia rotacional, enquanto a terceira teoria leva em consideração tanto os efeitos da inércia rotacional quanto da deformação gerada pelo cisalhamento, sendo portanto uma teoria mais completa, que pode ser usada para vigas de grandes espessuras. A solução para uma viga sujeita a vibrações não forçadas, que inclui a determinação de suas frequências naturais e respectivos modos de vibrar, pode ser obtida a partir dessas três teorias (RAO, 2019).

Na teoria de Euler-Bernoulli, a deformação angular devido ao cisalhamento é considerada desprezível com a deformação por flexão. Além disso, a rotação das seções transversais da viga é desprezível em comparação com a translação. Essa teoria se mostra robusta para vigas com comprimento pelo menos 10 vezes maior do que a largura e deflexões menores do que a largura (RAO, 2019).

A Figura 12 representa as forças e momentos atuando sobre um elemento de viga de Euler-Bernoulli, na qual  $V(x)$  e  $M(x)$  são o esforço cortante e o momento fletor, por definição, respectivamente e  $f(x, t)$  representa a carga externa por unidade de comprimento da viga.

Figura 12 – Elemento de viga de Euler-Bernoulli



FONTE: Rao (2019).

Assumindo vibração livre, a excitação externa é considerada nula, isto é,

$$f(x, t) = 0. \quad (2.28)$$

A equação de movimento da viga sem excitação externa é dada por Rao (2019):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ EI(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.29)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade da viga,  $I(x)$  é o momento de inércia,  $\rho$  é a massa específica e  $A(x)$  é a área da seção transversal. Para uma viga uniforme, na qual  $EI(x)$  é uma constante, a Equação (2.29) pode ser reescrita como

$$c^2 \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.30)$$

sendo

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (2.31)$$

A Equação (2.30) precisa de 4 condições de contorno e 2 condições iniciais para ser resolvida. As condições de contorno para uma viga com diferentes tipos de suporte foram descritas por Rao (2019).

A solução da vibração livre pode ser encontrada utilizando a seguinte separação de variáveis:

$$w(x, t) = W(x)T(t). \quad (2.32)$$

Substituindo a Equação (2.30) na Equação (2.28), chega-se a

$$\frac{c^2}{W(x)} \frac{d^4 W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)} \frac{d^2 T(t)}{dt^2} = \lambda^2. \quad (2.33)$$

A Equação (2.33) pode ser reescrita em duas equações:

$$\frac{d^4 W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0 \quad (2.34)$$

e

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} - \lambda^2 T(t) = 0, \quad (2.35)$$

onde

$$\beta^4 = \frac{\lambda^2}{c^2} = \frac{\rho A \lambda^2}{EI}. \quad (2.36)$$

A solução da equação temporal é dada por

$$T(t) = A \cos(\lambda t) + B \sin(\lambda t), \quad (2.37)$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes obtidas a partir das condições iniciais do problema.

A solução espacial, por outro lado, é dada por

$$W(x) = C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x) + C_3 \cosh(\beta x) + C_4 \sinh(\beta x), \quad (2.38)$$

sendo que as constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  são obtidas a partir das condições de contorno do problema. As frequências naturais da viga são dadas por

$$\lambda_i = (\beta_i L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}. \quad (2.39)$$

Para cada viga haverá infinitos modos de vibrar, com uma frequência natural associada a cada modo.

### 2.6.1 Viga engastada-livre

Se a viga está engastada em  $x = 0$  e livre em  $x = L$ , a deflexão transversal e sua derivada devem ser nulas em  $x = 0$  e o momento fletor e a força cisalhante devem ser nulos em  $x = L$ . Assim, as condições de contorno tornam-se (RAO, 2017)

$$W(0) = 0, \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial W}{\partial x}(0) = 0, \quad (2.41)$$

$$M(L) = -EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(L) = 0, \quad (2.42)$$

$$V(L) = EI \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}(L) = 0. \quad (2.43)$$

Utilizando as condições de contorno na Equação (2.38), chega-se a

$$C_1 = C_3 = 0, \quad (2.44)$$

$$C_2(\cos \beta L + \cosh \beta L) + C_4(\sin \beta L + \sinh \beta L) = 0 \quad (2.45)$$

e

$$C_2(-\sin \beta L + \sinh \beta L) + C_4(\cos \beta L + \cosh \beta L) = 0. \quad (2.46)$$

E o  $n$ -ésimo modo de vibrar é dado por

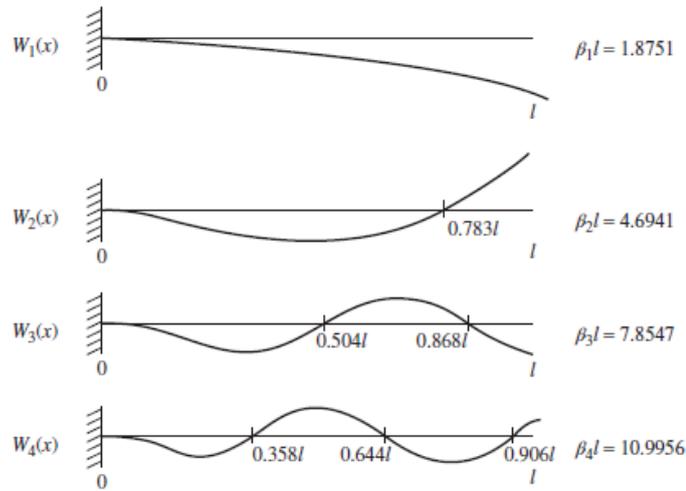
$$W_n(x) = (\cos \beta_n x - \cosh \beta_n x) - \frac{(\cos \beta_n L + \cosh \beta_n L)}{\sin \beta_n L + \sinh \beta_n L} (\sin \beta_n x - \sinh \beta_n x). \quad (2.47)$$

Finalmente, a solução para o deslocamento é dada por

$$w(x) = \sum_{i=1}^{\infty} W_i(x) T_i(t). \quad (2.48)$$

Os primeiros quatro modos de vibrar para uma viga engastada-livre estão representados na Figura 13.

Figura 13 – Modos de vibrar de uma viga engastada-livre

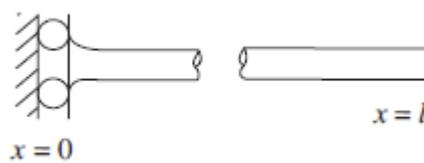


FONTE: Rao (2019).

### 2.6.2 Viga deslizante-livre

Se, em  $x = 0$ , o engaste anula qualquer movimento horizontal (em  $x$ ), mas permite que a viga se mova livremente verticalmente, o engaste é conhecido como deslizante. Na outra extremidade, em  $x = L$ , a viga está livre. Este tipo de configuração está ilustrado na Figura 14.

Figura 14 – Viga deslizante-livre



FONTE: Adaptado de Rao (2017).

Assim, as condições de contorno tornam-se (RAO, 2017)

$$\frac{\partial W}{\partial x}(0) = 0, \quad (2.49)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \Big|_{(0)} = 0, \quad (2.50)$$

$$EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}(L) = 0, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( EI \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) \Big|_{(L)} = 0. \quad (2.52)$$

Utilizando as condições de contorno na Equação (2.38), chega-se a

$$C_2 = C_4 = 0, \quad (2.53)$$

$$C_1 \cos \beta L = C_3 \cosh \beta L \quad (2.54)$$

e

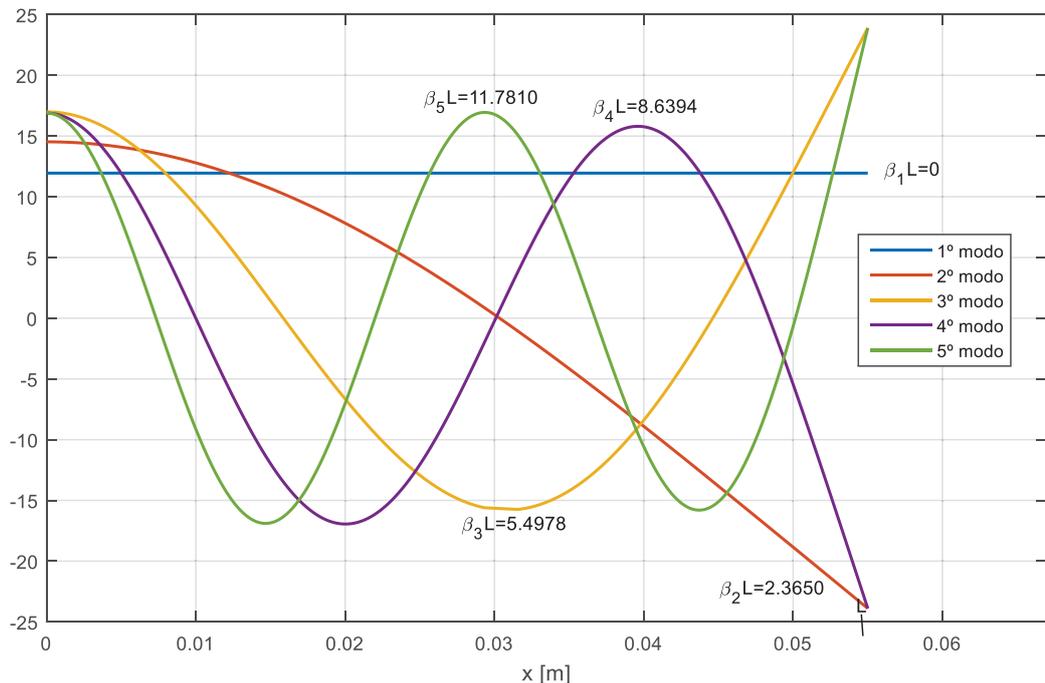
$$C_1 \sin \beta L = -C_3 \sinh \beta L. \quad (2.55)$$

E o n-ésimo modo de vibrar é dado por

$$W_n(x) = \cos \beta_n x + \frac{\cos \beta_n L}{\cosh \beta_n L} \cosh \beta_n x. \quad (2.56)$$

Os quatro primeiros modos de vibrar de uma viga deslizante-livre, com os respectivos valores de  $\beta L$ , estão representados na Figura 15.

Figura 15 – Modos de vibrar de uma viga deslizante-livre



FONTE: O autor (2022).

### 3 MATERIAL E MÉTODOS

A realização da parte experimental do presente trabalho foi dividida em duas etapas. Inicialmente, foi montado um sistema composto pela viga de aço (primária) engastada-livre e uma viga piezoelétrica engastada perpendicularmente na primária. A base da viga de aço é excitada com uma aceleração conhecida e, a partir das vibrações mecânicas transmitidas ao piezoelétrico, uma tensão é gerada e captada por um analisador. A partir do sinal de entrada de excitação na base e do sinal de tensão captado, a Função Resposta em Frequência (FRF) de tensão-aceleração do sistema experimental é medida.

Para a identificação do sistema, é utilizado o conceito de problema inverso, no qual a curva da FRF experimental é utilizada para ajuste de um modelo numérico, que será definido neste capítulo, de modo a se realizar a identificação dos parâmetros mecânicos e elétricos do sistema.

Para validação do modelo e identificação individual dos componentes, a viga de aço e o *energy harvester* foram analisados separadamente. A viga de aço é excitada de forma engastada-livre, na base, e a amplitude de velocidade em sua extremidade é captada, enquanto a viga piezoelétrica também é excitada pela base e a amplitude de tensão gerada é captada. Além disso, a viga piezoelétrica foi modelada e simulada utilizando um modelo de elementos finitos construído no software comercial ANSYS, para obtenção e validação da rigidez dinâmica equivalente na base.

Com os parâmetros do sistema identificados, é possível realizar o projeto ótimo do sistema a partir do modelo validado, de modo a se obter a resistência externa e a posição do acoplamento que possibilitam a máxima geração de energia em uma faixa de frequências especificada.

#### 3.1 ESQUEMA EXPERIMENTAL

##### 3.1.1 Sistema composto

Para a parte experimental do sistema composto, foi utilizada uma viga piezoelétrica de PZT 5H modelo Q220-H4BR-2513YB (PIEZO.COM) bimorfa com conexão em paralelo, substrato de latão e base de polyimide. Suas principais

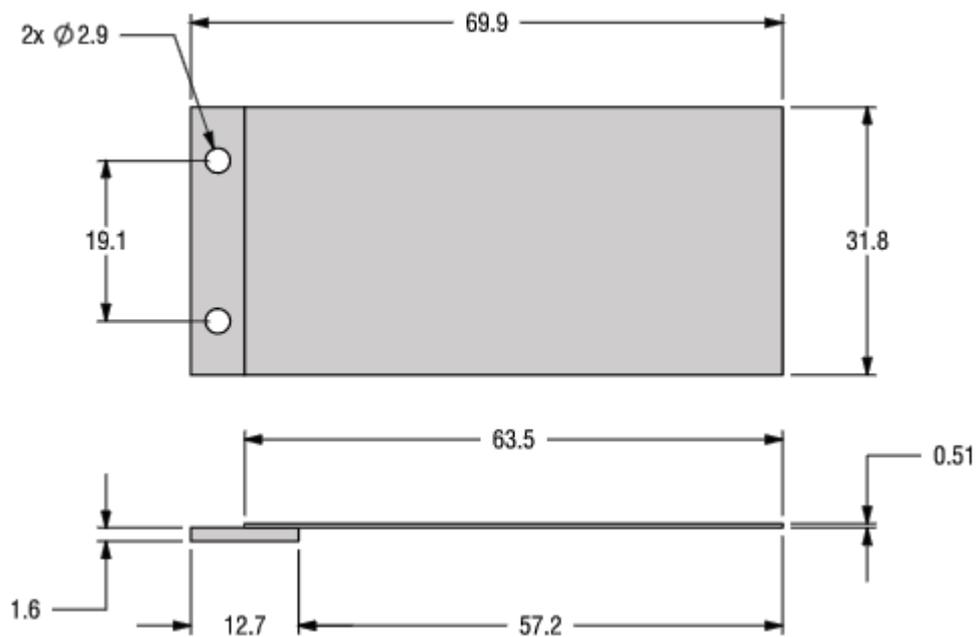
características, fornecidas pelo fabricante, estão indicadas na Tabela 1, enquanto suas dimensões estão mostradas na Figura 16.

Tabela 1 – Principais características do *energy harvester* utilizado, fornecidas pelo fabricante

Parâmetro	Valor
Frequência natural [Hz]	78
Capacitância [nF]	540
Constante piezo $d_{31}$ [pm V <sup>-1</sup> ]	-320
Massa [g]	8,0

FONTE: Adaptado de Piezo.Com (2020).

Figura 16 – Dimensões (em mm) do *energy harvester*



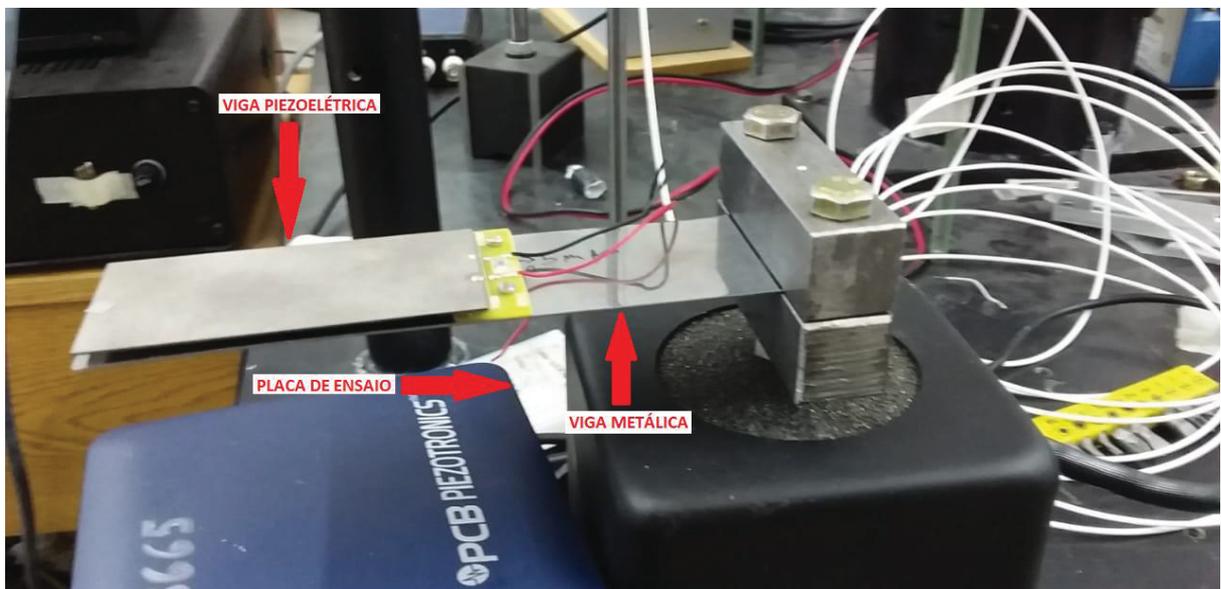
FONTE: Piezo.Com (2020).

O piezoelétrico foi fixado sobre uma viga metálica, com parafusos e cola. Os cabos saindo do piezoelétrico foram conectados em paralelo a uma placa de ensaio com resistências variáveis. O esquema experimental pode ser observado na Figura 17. O sistema de aquisição de dados possui impedância de entrada de 324 k $\Omega$ . Para a identificação, foram realizados experimentos com circuito aberto (o que corresponde a uma resistência externa de 324 k $\Omega$ ) e com uma resistência externa equivalente de 41 k $\Omega$ , de modo a possibilitar avaliar a diferença na geração e a comparação dos resultados.

Para a aquisição da tensão, foram utilizados canais analógicos de uma placa de aquisição de sinais Placa NI 9230, conectada a um programa de MATLAB.

O sinal enviado ao shaker é criado com um gerador de funções e é amplificado para alimentar o excitador eletromecânico. A viga primária foi montada de modo a ficar engastada-livre, com uma base de aço AISI 1020 parafusada. A base é excitada com um excitador eletromecânico, com um sinal do tipo *sine sweep*, que promove uma varredura em frequência, ao longo de uma faixa pré-estabelecida, possibilitando a identificação das frequências naturais do sistema. A aceleração da base é medida com um acelerômetro PCB 352C68.

Figura 17 – Arranjo experimental: sistema composto



FONTE: O autor (2022).

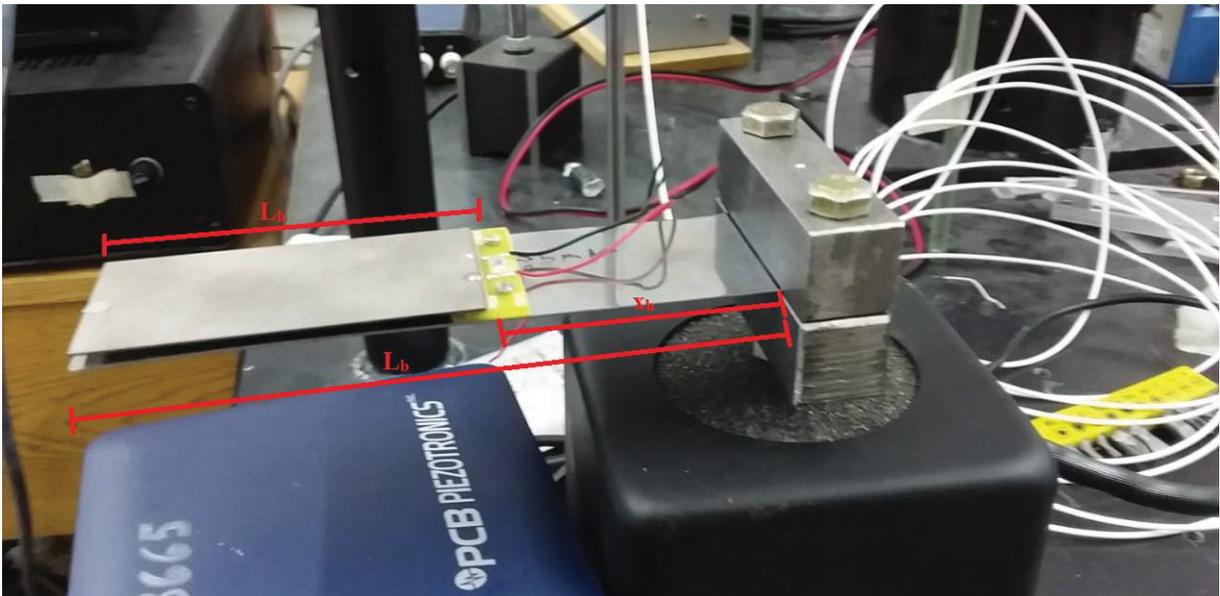
Foi realizada uma varredura entre 10 Hz e 100 Hz. A amostragem do sinal ocorreu na taxa de 2048 amostras por segundo.

Após a obtenção dos sinais, as Transformadas Rápidas de Fourier (FFT) foram obtidas no software comercial MATLAB para o cálculo da FRF de tensão-aceleração.

Dos 6 parâmetros a serem identificados, os comprimentos da viga primária ( $L_b$ ) e do *energy harvester* ( $L_h$ ) e o ponto de acoplamento entre as duas vigas ( $x_h$ ) (mostrados na Figura 18) foram medidos diretamente no sistema experimental. Essas medições não representam os valores exatos, devido a ausências de engastes e acoplamentos perfeitos, além de desgastes das peças, mas podem ser utilizadas

como estimativa, sendo base para os resultados esperados. Além disso, a capacitância total do piezoelétrico ( $C_p$ ) foi fornecida pelo fabricante, sendo outro parâmetro base para a identificação. Esses valores estão indicados na Tabela 2. A capacitância foi medida também antes de cada teste, com a utilização de um multímetro, devido a variações que pode apresentar dependendo das condições do experimento.

Figura 18 – Arranjo experimental: parâmetros geométricos



FONTE: O autor (2022).

Tabela 2 – Parâmetros medidos experimentalmente

Parâmetro	Valor
$L_b$ [mm]	114,0
$L_h$ [mm]	63,5
$x_h$ [mm]	50,0
$C_p$ [nF]	417

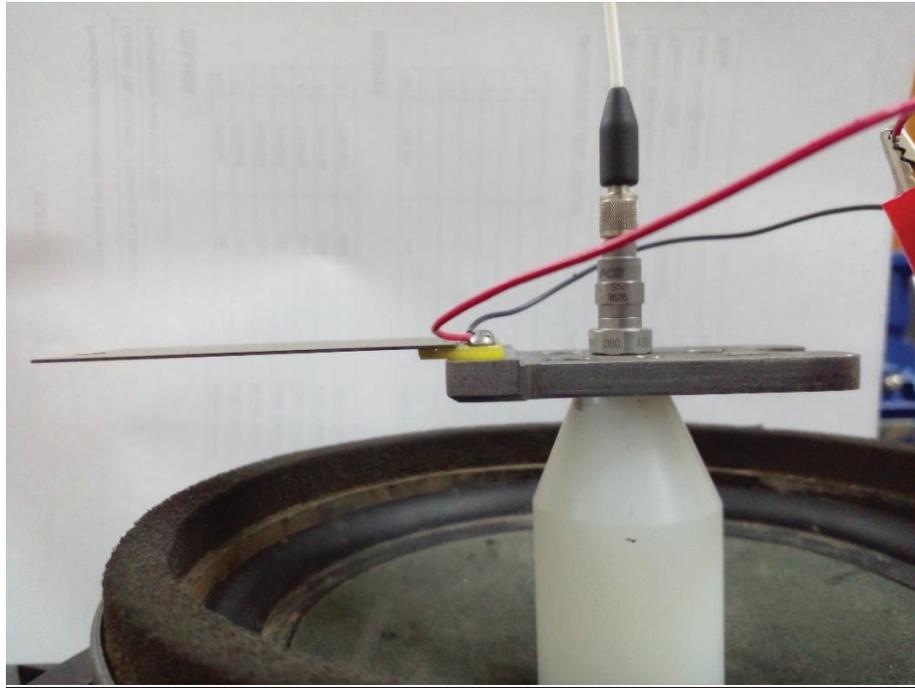
FONTE: O autor (2022).

### 3.1.2 Energy harvester

Para a análise individual do *harvester* piezoelétrico, a base da viga piezoelétrica foi parafusada em uma base rígida de aço. Um *sine sweep* é enviado para a base e seu deslocamento é medido com o sensor de proximidade. A diferença

de potencial gerada pelo piezoelétrico, a circuito aberto, é captada. O esquema experimental descrito pode ser observado na Figura 19.

Figura 19 – Arranjo experimental: *energy harvester*



FONTE: O autor (2022).

Foi realizada uma varredura entre 40 Hz e 100 Hz, de modo a passar pela primeira frequência natural do *harvester*. A amostragem do sinal ocorreu na taxa de 2048 amostras por segundo e os testes foram realizados com circuito aberto, o que corresponde, matematicamente, a uma resistência externa muito alta.

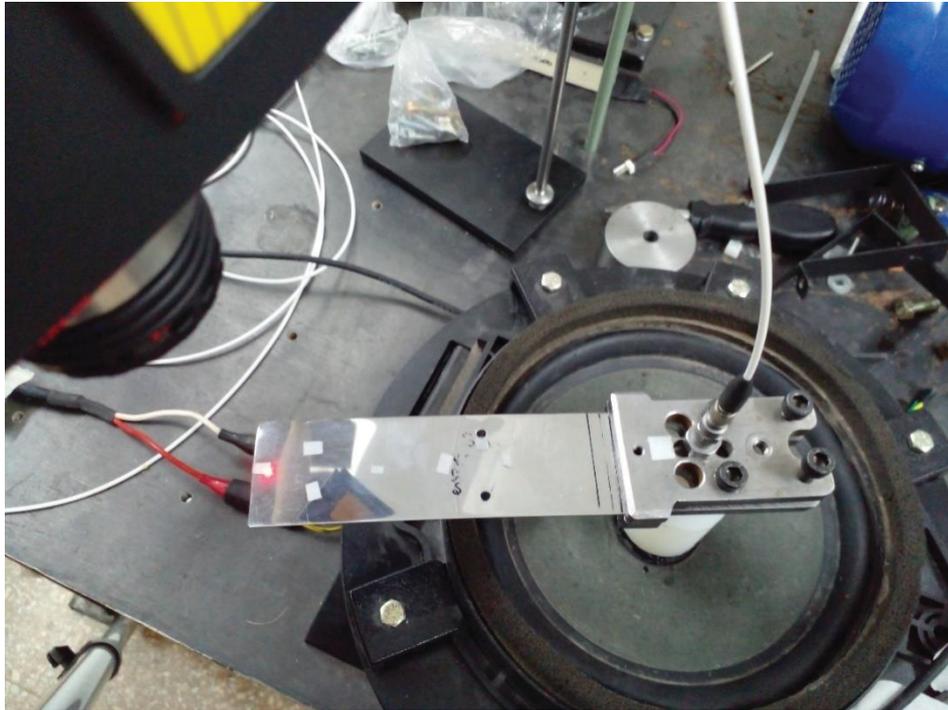
Após a obtenção dos sinais, as Transformadas Rápidas de Fourier (FFT) foram obtidas no software comercial MATLAB para o cálculo da FRF de tensão-aceleração.

### 3.1.3 Viga metálica

Para a análise individual da viga metálica, o piezoelétrico foi removido do sistema composto e a viga de aço foi novamente montada de modo a ficar engastada-livre. Um *sine sweep* é enviado para a base e seu deslocamento é medido com o sensor de proximidade. Na extremidade da viga, a velocidade absoluta é medida com

um vibrômetro portátil digital Polytec PDV 100, a laser. O esquema experimental descrito pode ser observado na Figura 20.

Figura 20 – Arranjo experimental: viga de aço



FONTE: O autor (2022).

Foi realizada uma varredura entre 30 Hz e 40 Hz, de modo a passar pela primeira frequência natural da viga. A amostragem do sinal ocorreu na taxa de 2048 amostras por segundo.

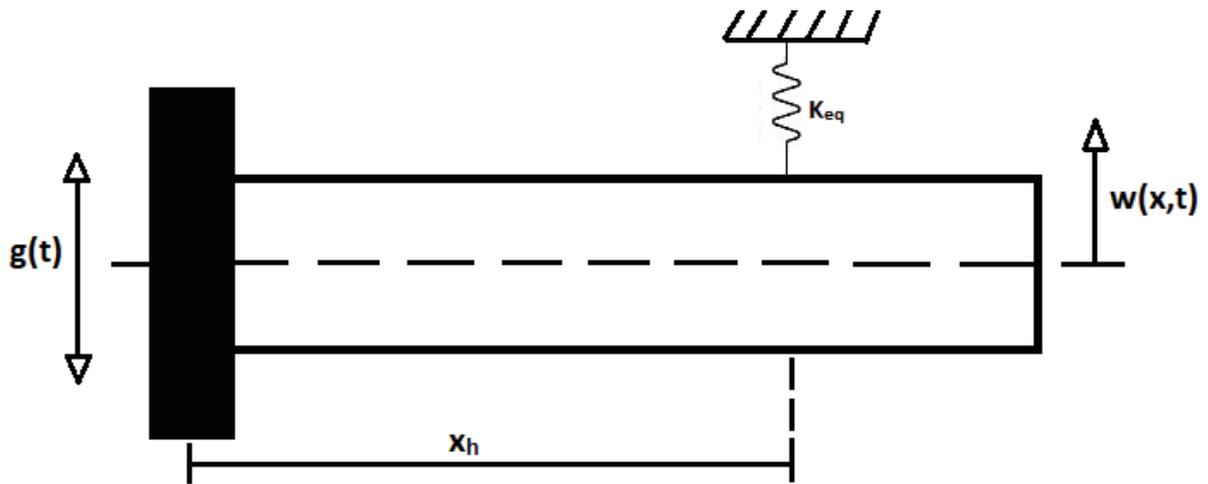
Após a obtenção dos sinais, as Transformadas Rápidas de Fourier (FFT) foram obtidas no software comercial MATLAB para o cálculo da FRF de velocidade-aceleração.

### 3.2 MODELOS MATEMÁTICOS

Nos modelos utilizados, a viga de aço é considerada contínua, com suas respectivas propriedades características. O *energy harvester* piezoelétrico, por outro lado, é considerado como uma mola com uma rigidez dinâmica equivalente ( $K_{eq} = K_{eq}(\Omega)$ ), que possui todas as suas características dinâmicas, mecânicas e elétricas, e representa a influência que a viga piezoelétrica exerce sobre o sistema

primário. A viga primária é excitada com um deslocamento  $g(t)$  em sua base, e responde com um deslocamento transversal relativo  $w(x,t)$ . Dessa forma, o deslocamento absoluto da viga é dado por  $w(x,t) + g(t)$ . O piezoelétrico, representado pela mola, está engastado a uma distância  $x_h$  da base da viga de aço. O sistema teórico proposto está representado pela Figura 21.

Figura 21 – Modelo matemático proposto



FONTE: O autor (2022).

Para uma frequência de excitação  $\Omega$ , as energias cinética ( $T$ ) e potencial ( $U$ ) do sistema são dadas, respectivamente, por

$$T = \frac{1}{2} \rho_b A_b \int_0^{L_b} [\dot{w}(x,t) + \dot{g}(t)]^2 dx, \quad (3.1)$$

$$U = \frac{1}{2} E_b I_b \int_0^{L_b} w''(x,t)^2 dx + \frac{1}{2} K_{eq}(\Omega) [w(x_h,t) + g(t)]^2, \quad (3.2)$$

onde  $\rho_b, A_b, E_b, L_b$  são a massa específica, área da seção transversal, módulo de Young e comprimento da viga primária, respectivamente,  $w''(x,t)$  é a derivada de segunda ordem de  $w$  em relação a  $x$  e  $I_b$  é o momento de inércia da seção transversal, dado por

$$I_b = \frac{b_b h_b^3}{12}, \quad (3.3)$$

onde  $b_b$  e  $h_b$  são a largura e a espessura da viga primária, respectivamente. A solução proposta para o problema é dada por

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^n a_r(t) \phi_r(x), \quad (3.4)$$

onde  $a_r(t)$  e  $\phi_r(x)$  são as coordenadas generalizadas e os modos assumidos da viga primária, respectivamente. São considerados  $n$  modos assumidos de viga engastada-livre.

Dessa forma, as expressões para as energias cinética e potencial do sistema tornam-se, respectivamente:

$$T = \frac{1}{2} \left[ \sum_{r,l} (\dot{a}_r \dot{a}_l m_{b,rl}^{aa} + 2\dot{a}_r p_r^a) + m_b^T \dot{g}^2 \right], \quad (3.5)$$

$$U = \frac{1}{2} \left[ \sum_{r,l} (a_r a_l (k_{rl}^{aa} + k_{eq,rl}^{aa})) + 2 \sum_r a_r k_{eq,r}^a + K_{eq} g^2 \right], \quad (3.6)$$

onde

$$m_{b,rl}^{aa} = \rho_b A_b \int_0^{L_b} \phi_r \phi_l dx, \quad (3.7)$$

$$p_r^a = \rho_b A_b \int_0^{L_b} \phi_r \dot{g} dx, \quad (3.8)$$

$$m_b^T = \int_0^{L_b} \rho_b A_b dx, \quad (3.9)$$

$$k_{rl}^{aa} = E_b I_b \int_0^{L_b} \phi_r'' \phi_l'' dx, \quad (3.10)$$

$$k_{eq,rl}^{aa} = K_{eq} \phi_r(x_h) \phi_l(x_h), \quad (3.11)$$

$$k_{eq,r}^a = K_{eq} \phi_r(x_h) g. \quad (3.12)$$

O termo  $\rho_b A_b$  representa a massa por unidade de comprimento da viga de aço, e também será chamado de  $m_b$  neste trabalho.

Considerando que todas as forças envolvidas no sistema são conservativas, para encontrar as equações de movimento do sistema, aplicam-se as Equações de Lagrange, dadas pela Equação (2.85), chegando-se na Equação (3.13) e, por consequência, na Equação (3.14):

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{a}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_j} + \frac{\partial U}{\partial a_j} = 0, \quad (3.13)$$

$$\sum_l (\ddot{a}_l m_{b,rl}^{aa} + f_r^a + a_l (k_{rl}^{aa} + k_{eq,rl}^{aa}) + k_{eq,r}^a) = 0, \quad (3.14)$$

onde

$$f_r^a = \dot{p}_r^a = m_b \ddot{g} \int_0^{L_b} \phi_r dx. \quad (3.15)$$

Matricialmente, a Equação (3.14) pode ser escrita como

$$M^a \ddot{\mathbf{a}} + K^a \mathbf{a} = \mathbf{f}_1, \quad (3.16)$$

onde

$$M^a = m_b^{aa}, \quad (3.17)$$

$$K^a = k^{aa} + k_{eq}^{aa}, \quad (3.18)$$

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}^a - \mathbf{k}_{eq}^a. \quad (3.19)$$

O amortecimento do modelo, por ser de difícil modelagem, é acoplado na Equação (3.16), com a inclusão da matriz de amortecimento  $C^a$ , gerando a nova equação matricial:

$$M^a \ddot{\mathbf{a}} + C^a \dot{\mathbf{a}} + K^a \mathbf{a} = \mathbf{f}_1, \quad (3.20)$$

Para se obter a solução da equação diferencial homogênea dada pela Equação (3.20), é possível definir  $\lambda = \Omega^2$  e  $\Omega_i^2 = k_i/m_i$  (frequências naturais do sistema), obtendo-se o seguinte problema de autovalores:

$$\lambda_i M^a \boldsymbol{\theta}_i = K^a \boldsymbol{\theta}_i, \quad (3.21)$$

sendo  $\boldsymbol{\theta} = [\boldsymbol{\theta}_i]$  a matriz de autovetores do sistema.

Utilizando as propriedades de ortogonalidade dos autovetores, tem-se que

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta}^T M^a \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & m_i & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\theta}^T K^a \boldsymbol{\theta} = \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & k_i & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \end{cases}. \quad (3.22)$$

É possível também normalizar os autovetores  $\boldsymbol{\theta}_i$  com os elementos  $m_i$ :

$$\boldsymbol{\theta}_i^0 = \frac{\boldsymbol{\theta}_i}{\sqrt{m_i}}, \quad (3.23)$$

de forma que  $\boldsymbol{\theta}^{0T} M^a \boldsymbol{\theta}^0 = I$  e  $\boldsymbol{\theta}^{0T} K^a \boldsymbol{\theta}^0 = \Lambda$ , onde  $I$  é a matriz identidade e  $\Lambda$  é chamada de matriz espectral.

Por simplicidade, daqui em diante:  $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^0$ . Realizando a seguinte transformação de coordenadas:

$$\mathbf{a}(t) = \boldsymbol{\theta} \mathbf{p}(t) \quad (3.24)$$

e pré multiplicando a Equação (3.20) por  $\boldsymbol{\theta}^T$ , chega-se a

$$I\ddot{\mathbf{p}}(t) + \Gamma\dot{\mathbf{p}}(t) + \Lambda\mathbf{p}(t) = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{f}_1, \quad (3.25)$$

onde

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 2\xi_i\Omega_i & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \Omega_i^2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix}, \quad (3.27)$$

com  $\xi_i$  sendo as razões de amortecimento modais do sistema.

No domínio da frequência:

$$[-\Omega^2 I + i\Omega\Gamma + \Lambda]P(\Omega) = \boldsymbol{\theta}^T F_1(\Omega). \quad (3.28)$$

Logo, a solução da Equação (3.28) é dada por

$$P(\Omega) = \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-\Omega^2 + i\Omega(2\xi_i\Omega_i) + \Omega_i^2} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^T F_1(\Omega) \quad (3.29)$$

e a solução  $A(\Omega) = \boldsymbol{\theta} P(\Omega)$  é dada por

$$A(\Omega) = \boldsymbol{\theta} \begin{bmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-\Omega^2 + i\Omega(2\xi_i\Omega_i) + \Omega_i^2} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^T F_1(\Omega), \quad (3.30)$$

com

$$F_1(\Omega) = 2[\Omega^2 I_\phi^a - k_{eq\phi}^a]G(\Omega), \quad (3.31)$$

onde

$$I_\phi^a = m_b \int_0^{L_b} \phi_r dx, \quad (3.32)$$

$$k_{eq\phi}^a = K_{eq} \phi_r(x_h). \quad (3.33)$$

Deseja-se calcular a FRF de tensão-aceleração (ERTURK; INMAN, 2009), dada por

$$H_V(\Omega) = \frac{V_p(\Omega)}{Y(\Omega)} = \frac{V_p(\Omega)}{-\Omega^2 G(\Omega)}, \quad (3.34)$$

onde  $V_p(\Omega)$  é a amplitude de tensão gerada pelo piezoelétrico e  $Y(\Omega) = -\Omega^2 G(\Omega)$  é a amplitude de aceleração da base do sistema primário.

Para se obter a amplitude de tensão gerada pelo piezoelétrico, é necessário encontrar o deslocamento em sua base ( $x_b(t)$ ), que é igual ao deslocamento absoluto do sistema primário no ponto de acoplamento. Além disso, com a Equação (3.4), chega-se a

$$x_b(t) = w(x_h, t) + g(t) = \sum_{r=1}^n a_r(t) \phi_r(x_h) + g(t). \quad (3.35)$$

No domínio da frequência, portanto,

$$X_b(\Omega) = \sum_{r=1}^n A_r(\Omega) \phi_r(x_h) + G(\Omega). \quad (3.36)$$

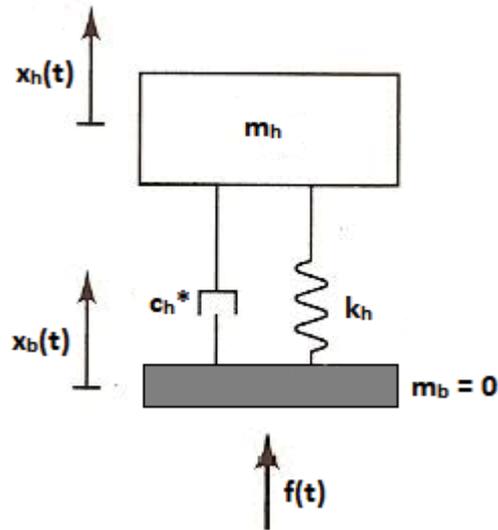
Deste modo, para se obter o deslocamento na base do piezoelétrico, é necessário encontrar o valor de  $K_{eq}$  e utilizar o equacionamento que foi apresentado nesta seção. Por outro lado, para se obter o valor de  $K_{eq}$ , é necessário um modelo matemático para o piezoelétrico, que também será utilizado para se obter a tensão gerada e, conseqüentemente, a FRF de tensão-aceleração.

No presente trabalho, serão apresentados diferentes modelos para se obter a rigidez dinâmica equivalente que representa o *harvester*.

### 3.2.1 Energy harvester piezoelétrico com 1 grau de liberdade

Neste modelo, o *energy harvester* piezoelétrico é considerado como um sistema composto por uma massa equivalente ( $m_h$ ), uma rigidez ( $k_h$ ) e um amortecimento ( $c_h^*$ ), que possui tanto a parte mecânica ( $c_h$ ) quanto a parte elétrica acoplados. Esse sistema é excitado pela base sem massa com uma força  $f(t)$ , e responde com um deslocamento  $x_h(t)$  na massa  $m_h$  e  $x_b(t)$  na base, como mostra a Figura 22. Uma metodologia para encontrar  $m_h$  e  $k_h$  foi desenvolvida por Rao (2017). Além disso,  $c_h = 2\xi_h m_h \Omega_n$ , onde  $\xi_h$  é a razão de amortecimento modal e  $\Omega_n$  é a frequência natural do sistema de 1 grau de liberdade.

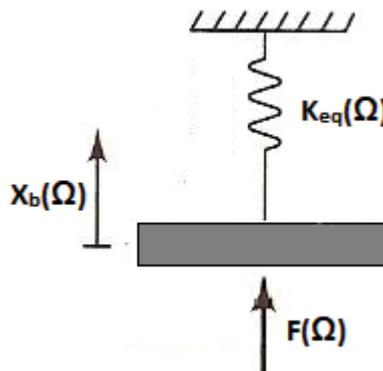
Figura 22 – Sistema I: Modelo para o piezoelétrico de 1 grau de liberdade



FONTE: O autor (2022).

Para se encontrar a rigidez dinâmica equivalente imposta por esse modelo, deve-se transformar o sistema presente na Figura 22, que será chamado de sistema I, em um sistema com uma mola equivalente, no domínio da frequência, que será chamado de sistema II, como mostra a Figura 23 (ESPÍNDOLA; SILVA, 1992).

Figura 23 – Sistema II: Modelo com rigidez dinâmica equivalente



FONTE: O autor (2022).

Realizando o balanço de forças no sistema I, chega-se a

$$f(t) - k_h(x_b - x_h) - c_h^*(\dot{x}_b - \dot{x}_h) = 0, \quad (3.37)$$

onde

$$c_h^* = c_h + \frac{\tilde{\theta}^2}{i\Omega C_p + \frac{1}{R_l}}, \quad (3.38)$$

parâmetro que pode ser obtido a partir das equações mecânicas e elétricas que representam o comportamento dinâmico do *harvester*.

Por outro lado, as equações que regem o movimento do *harvester* são (KUNDU; NEMADE, 2016)

$$m_h \ddot{x}_h + k_h(x_h - x_b) + c_h(\dot{x}_h - \dot{x}_b) + \tilde{\theta} v_p = 0, \quad (3.39)$$

$$C_p \dot{v}_p - \tilde{\theta}(\dot{x}_h - \dot{x}_b) + \frac{v_p}{R_l} = 0, \quad (3.40)$$

onde  $R_l$  é a resistência equivalente do circuito externo,  $v_p = v_p(t)$  é a tensão gerada e  $C_p$  é a capacitância total do piezoelétrico, calculada a partir da conexão de dois capacitores iguais em paralelo (viga bimorfa – ver Figura 24):

$$C_p = 2C_{\tilde{p}} = 2 \frac{\varepsilon_{33}^{\sigma} b_h L_h}{h_p}, \quad (3.41)$$

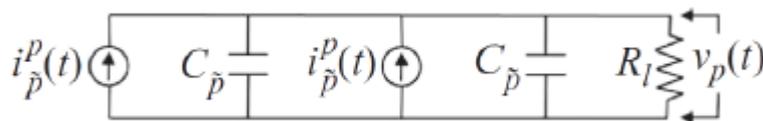
onde  $\varepsilon_{33}^{\sigma}$  é a constante de permissividade dielétrica a tensão constante,  $b_h$  é a largura do *harvester* e  $L_h$  e  $h_p$  são o comprimento e a espessura dos elementos piezoelétricos, respectivamente (ver Figura 25).  $\tilde{\theta}$  representa acoplamento eletromecânico, dado por  $\tilde{\theta} = e_{31} b_h (h_p + h_s) \alpha'(x)$ , onde  $h_s$  é a espessura do substrato,  $\alpha'(x)$  é a derivada espacial das formas de vibrar características do *harvester* ( $\alpha(x)$ ) e  $e_{31}$  é a constante efetiva de tensão piezoelétrica, dada por  $e_{31} = d_{31} c_{11}^E$ , com  $d_{31}$  sendo a constante piezoelétrica e  $c_{11}^E$  sendo o módulo de Young do material piezoelétrico a campo elétrico constante (ERTURK; INMAN, 2009).

A Equação (3.41) pode ser reescrita como

$$C_p = 2 \frac{K_e \varepsilon_0 b_h L_h}{h_p}, \quad (3.42)$$

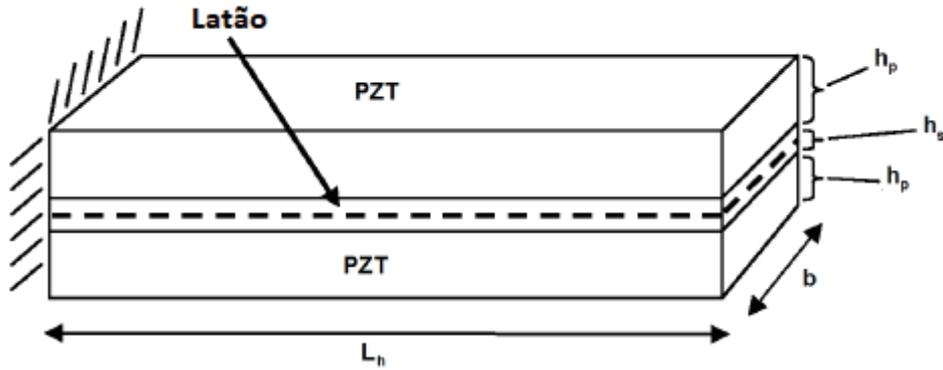
onde  $K_e$  é a razão entre a constante de permissividade dielétrica do material e a constante de permissividade dielétrica no vácuo ( $\varepsilon/\varepsilon_0$ ), com  $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ .

Figura 24 – Circuito equivalente para um piezoelétrico bimorfo com conexão em paralelo



FONTE: Erturk e Inman (2009).

Figura 25 – Esquema do piezoelétrico utilizado



FONTE: O autor (2022).

No domínio da frequência, as Equações (3.37), (3.39) e (3.40) tornam-se, respectivamente:

$$F(\Omega) = k_h(X_b - X_h) + c_h^* i\Omega(X_b - X_h), \quad (3.43)$$

$$-\Omega^2 m_h X_h = k_h(X_b - X_h) + c_h i\Omega(X_b - X_h) - \tilde{\theta} V_p, \quad (3.44)$$

$$\left(i\Omega C_p + \frac{1}{R_l}\right) V_p + \tilde{\theta} i\Omega(X_b - X_h) = 0, \quad (3.45)$$

onde  $X_b = X_b(\Omega)$ ,  $X_h = X_h(\Omega)$  e  $V_p = V_p(\Omega)$ .

Da Equação (3.45):

$$V_p = \frac{-\tilde{\theta} i\Omega(X_b - X_h)}{i\Omega C_p + \frac{1}{R_l}}. \quad (3.46)$$

Substituindo na Equação (3.44), chega-se a

$$-\Omega^2 m_h X_h = k_h(X_b - X_h) + i\Omega c_h^*(X_b - X_h), \quad (3.47)$$

ou, ainda,

$$X_h = \frac{k_h + i\Omega c_h^*}{-\Omega^2 m_h + k_h + i\Omega c_h^*} X_b. \quad (3.48)$$

Substituindo o resultado na Equação (3.43), chega-se a

$$F(\Omega) = (k_h + i\Omega c_h^*) \left[ X_b \left( 1 - \frac{k_h + i\Omega c_h^*}{-\Omega^2 m_h + k_h + i\Omega c_h^*} \right) \right]. \quad (3.49)$$

Do balanço de forças no sistema II,

$$F(\Omega) = K_{eq}(\Omega) X_b(\Omega), \quad (3.50)$$

e, portanto,

$$K_{eq}(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{X_b(\Omega)} = \frac{(k_h + i\Omega c_h^*)(-\Omega^2 m_h)}{-\Omega^2 m_h + k_h + i\Omega c_h^*}, \quad (3.51)$$

onde:

$$c_h^* = c_h + \frac{\tilde{\theta}^2}{i\Omega C_p + \frac{1}{R_l}}. \quad (3.52)$$

Utilizando a Equação (3.34), é possível encontrar a FRF de tensão-aceleração:

$$H_V(\Omega) = \frac{V_p(\Omega)}{-\Omega^2 G(\Omega)} = \frac{\tilde{\theta} i (X_b - X_h)}{\Omega G(\Omega) \left( i\Omega C_p + \frac{1}{R_l} \right)}, \quad (3.53)$$

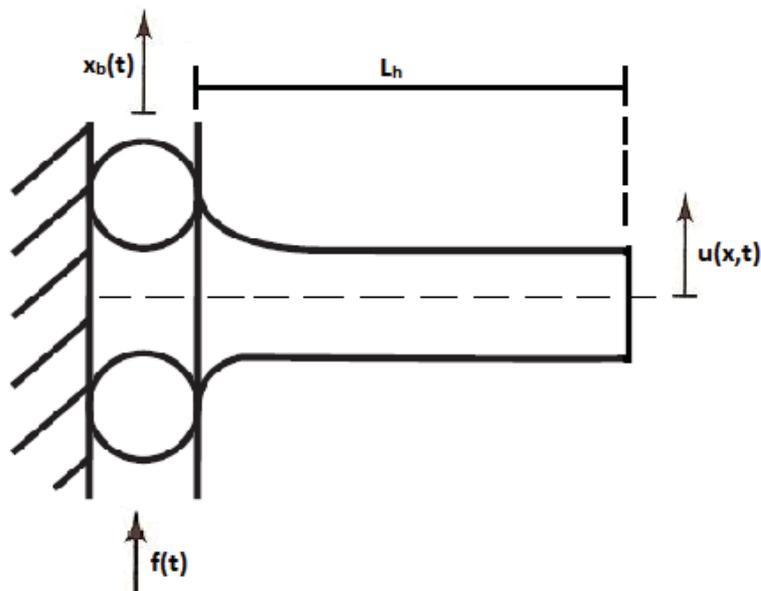
onde

$$X_h = \frac{k_h + i\Omega c_h^*}{-\Omega^2 m_h + k_h + i\Omega c_h^*} X_b. \quad (3.54)$$

### 3.2.2 Energy harvester piezoelétrico contínuo – seção única

Neste modelo, o *energy harvester* piezoelétrico é considerado como um sistema contínuo, com massa por unidade de comprimento  $m_{hl}$  e comprimento  $L_h$ , área da seção transversal constante e é excitado pela base com uma força  $f(t)$ , respondendo com deslocamento  $x_b(t)$  na base e  $u(x, t)$  ao longo de seu comprimento, como mostra a Figura 26.

Figura 26 – Modelo do piezoelétrico contínuo



FONTE: O autor (2022).

A equação diferencial para essa viga piezoelétrica contínua é dada por:

$$f(t)\delta(x) + m_{hl}\ddot{u}(x,t) + \theta^0 v_p(t)[\delta'(x) - \delta'(x - L_h)] + c_h \dot{u}(x,t) + k_h u(x,t) = 0, \quad (3.55)$$

onde  $\delta(x)$  é a função Delta de Kroenecker,  $k_h$  é o coeficiente de rigidez e  $c_h$  é o coeficiente de amortecimento do *harvester*.

A solução proposta para o problema é dada por

$$u(x,t) = \sum_{r=1}^N b_r(t)\beta_r(x), \quad (3.56)$$

onde  $b_r(t)$  e  $\beta_r(x)$  são as coordenadas generalizadas e os modos assumidos da viga piezoelétrica, respectivamente. São considerados  $N$  modos assumidos de viga deslizante-livre.

Além disso, as condições de ortogonalidade da equação diferencial impõem que (ERTURK; INMAN, 2009)

$$\int_0^{L_h} \beta_s(x)m_{hl}\beta_r(x) dx = \delta_{rs}(x), \quad (3.57)$$

$$\int_0^{L_h} \beta_s(x)E_h I_h \frac{d^4 \beta_r(x)}{dx^4} dx = \Omega_{h,r}^2 \delta_{rs}(x), \quad (3.58)$$

onde  $\Omega_{h,i}$  é a  $i$ -ésima frequência natural do piezoelétrico e

$$E_h I_h = \frac{2b_h}{3} \left[ \frac{E_s h_s^3}{8} + c_{11}^E \left( \left( h_p + \frac{h_s}{2} \right)^3 - \frac{h_s}{8} \right) \right], \quad (3.59)$$

sendo  $E_s$  e  $c_{11}^E$  os módulos de Young da subestrutura e do piezoelétrico, respectivamente.

Pré-multiplicando a Equação (3.55) por  $\beta_s(x)$  e integrando entre 0 e  $L_h$ , chega-se a

$$f(t)\beta_r(0) = \ddot{b}_r(t) + 2\xi_{h,r}\Omega_{h,r}\dot{b}_r(t) + \chi_r v_p(t) + \Omega_{h,r}^2 b_r(t), \quad (3.60)$$

onde  $\xi_{h,i}$  é a  $i$ -ésima razão de amortecimento modal do *energy harvester*, dada por

$$\chi_r = \theta^0 \beta_r'(L_h) \quad (3.61)$$

e

$$\theta^0 = \frac{e_{31}b_h}{h_p} \left[ \frac{h_s^2}{4} - \left( h_p + \frac{h_s}{2} \right)^2 \right]. \quad (3.62)$$

A equação de tensão para o *energy harvester* é dada por Erturk e Inman (2009):

$$C_p \dot{v}_p(t) + \frac{v_p(t)}{R_l} = \sum_{r=1}^N \kappa_r \dot{b}_r(t), \quad (3.63)$$

onde

$$\kappa_r = -e_{31} b_h \left( \frac{h_p + h_s}{2} \right) \beta_r'(L_h), \quad (3.64)$$

Propondo soluções harmônicas, do tipo  $v_p(t) = V_p(\Omega)e^{i\Omega t}$ ,  $f(t) = F(\Omega)e^{i\Omega t}$ ,  $b_r(t) = B_r(\Omega)e^{i\Omega t}$  e  $x_b(t) = X_b(\Omega)e^{i\Omega t}$ , as Equações (3.60) e (3.63) tornam-se, respectivamente

$$F(\Omega)\beta_r(0) = (-\Omega^2 + 2\xi_{h,r}\Omega_{h,r}i\Omega + \Omega_{h,r}^2)B_r + \chi_r V_p, \quad (3.65)$$

$$C_p i\Omega V_p + \frac{V_p}{R_l} = \sum_{r=1}^N \kappa_r i\Omega B_r. \quad (3.66)$$

Da Equação (3.66),

$$V_p = \sum_{r=1}^N \frac{\kappa_r i\Omega B_r}{C_p i\Omega + \frac{1}{R_l}}, \quad (3.67)$$

Para se encontrar a rigidez dinâmica equivalente imposta por esse modelo, deve-se transformar o sistema presente na Figura 26 no mesmo sistema com uma mola equivalente, que foi representado pela Figura 23. Dessa forma, de acordo com o balanço de forças, a rigidez dinâmica equivalente é dada por

$$K_{eq}(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{X_b(\Omega)}. \quad (3.68)$$

Se  $F(\Omega) = 1$ , e, como  $X_b(\Omega) = U(0, \Omega)$ , sendo  $u(x, t) = U(x, \Omega)e^{i\Omega t}$ :

$$K_{eq}(\Omega) = \frac{1}{X_b(\Omega)} = \frac{1}{U(0, \Omega)}. \quad (3.69)$$

Mas,

$$U(x, \Omega) = \sum_{r=1}^N B_r(\Omega)\beta_r(x). \quad (3.70)$$

Além disso,  $B_r(\Omega)$  pode ser calculado substituindo o resultado da Equação (3.67) na Equação (3.65), de forma que chega-se a

$$B_r(\Omega) = \left( F_r - \frac{\chi_r \sum_{r=1}^N \frac{i\Omega \kappa_r F_r}{\Delta}}{\frac{1}{R_l} + i\Omega C_p + \sum_{r=1}^N \frac{i\Omega \kappa_r \chi_r}{\Delta}} \right) \frac{1}{\Delta}, \quad (3.71)$$

com

$$\Delta = -\Omega^2 + 2\xi_{h,r}\Omega_{h,r}i\Omega + \Omega_{h,r}^2, \quad (3.72)$$

$$F_r = F(\Omega)\beta_r(0), \quad (3.73)$$

onde  $F(\Omega) = 1$ .

Portanto,

$$K_{eq}(\Omega) = \frac{1}{U(0, \Omega)} = \frac{1}{\sum_{r=1}^N B_r(\Omega)\beta_r(x)}, \quad (3.74)$$

onde  $\beta_r(x)$  são as autofunções (modos de vibrar) de uma viga deslizante-livre.

A FRF de tensão-aceleração desse modelo é dada por Erturk e Inman (2009):

$$H_V(\Omega) = \frac{V_p(\Omega)}{-\Omega^2 G(\Omega)} = \frac{\alpha_p X_b}{G(\Omega)}, \quad (3.75)$$

com

$$\alpha_p = \frac{\sum_{r=1}^N \frac{i\Omega \kappa_r \sigma_r}{\Delta}}{\frac{1}{R_l} + i\Omega C_p + \sum_{r=1}^N \frac{i\Omega \kappa_r \chi_r}{\Delta}}, \quad (3.76)$$

onde

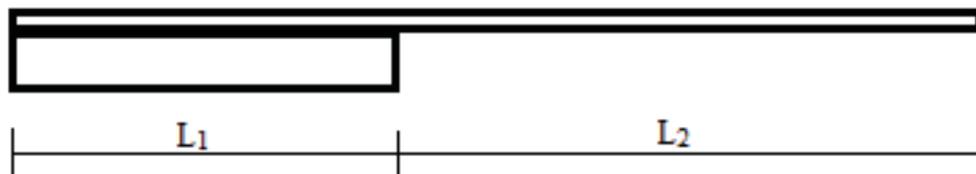
$$\sigma_r = -m_{hl} \int_0^{L_h} \beta_r(x) dx \quad (3.77)$$

e  $X_b$  é dado pelas Equações (3.30) a (3.36).

### 3.2.3 Energy harvester piezoelétrico contínuo – 2 seções

Neste modelo, o *energy harvester* piezoelétrico é considerado como um sistema contínuo, com comprimento total  $L_h$ , dividido em duas seções,  $L_1$ , composta pela base de polyimide e pela viga piezoelétrica bimorfa, e  $L_2$ , composta apenas pela viga piezoelétrica bimorfa, como mostra a Figura 27.

Figura 27 – Modelo do piezoelétrico contínuo com duas seções



FONTE: O autor (2022).

Da seção 2.6, tem-se que os modos característico de vibrar do sistema são dados por:

$$\beta_j(x) = C_{j1}\cos(\beta_{ji}x) + C_{j2}\sen(\beta_{ji}x) + C_{j3}\cosh(\beta_{ji}x) + C_{j4}\sinh(\beta_{ji}x), \quad (3.78)$$

onde  $j$  representa a seção e  $i$  indica o modo.

Para o modelo com duas seções, com a base de  $L_1$  engastada e a extremidade de  $L_2$  livre, para o cálculo da geração de energia, as seguintes condições de contorno são atuantes:

$$\beta_1(0) = 0, \quad (3.79)$$

$$\beta_1'(0) = 0, \quad (3.80)$$

$$\beta_1(L_1) = \beta_2(L_1), \quad (3.81)$$

$$\beta_1'(L_1) = \beta_2'(L_1), \quad (3.82)$$

$$E_1I_1\beta_1''(L_1) = E_2I_2\beta_2''(L_1), \quad (3.83)$$

$$E_1I_1\beta_1'''(L_1) = E_2I_2\beta_2'''(L_1), \quad (3.84)$$

$$E_2I_2\beta_2''(L_1 + L_2) = 0, \quad (3.85)$$

$$E_2I_2\beta_2'''(L_1 + L_2) = 0. \quad (3.86)$$

Para o cálculo da rigidez dinâmica equivalente, a condição de contorno (3.79) torna-se

$$E_1I_1\beta_1'''(0) = 0. \quad (3.79a)$$

Aplicando as condições (3.79) até (3.86) na Equação (3.78), surge um sistema homogêneo com 8 equações e 8 incógnitas. Igualando o determinante da matriz dos coeficientes a zero, é possível encontrar as frequências naturais do sistema. Além disso, é necessário que a condição de ortogonalidade seja satisfeita:

$$\int_0^{L_1} \beta_{1i}\rho_1A_1\beta_{1j} dx + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \beta_{2i}\rho_2A_2\beta_{2j} dx = \delta_{ij}, \quad (3.87)$$

onde

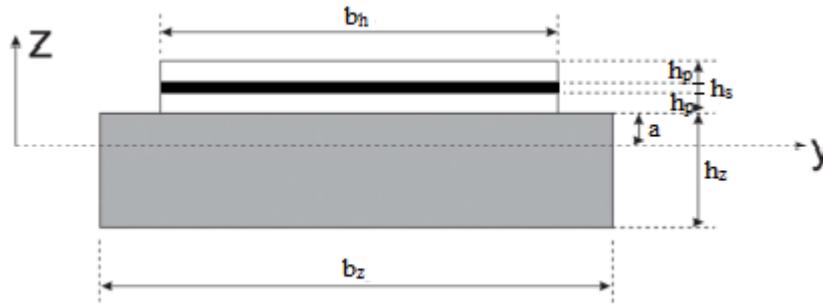
$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (3.88)$$

A solução do sistema de equações, incluindo a condição de ortogonalidade, fornece as constantes  $C_{j1}$ ,  $C_{j2}$ ,  $C_{j3}$  e  $C_{j4}$ . No presente trabalho, os passos descritos foram realizados no MATLAB, utilizando as funções “det” (utilizada para encontrar o determinante de uma matriz quadrada), “fzero” (utilizada para encontrar os zeros de

uma função) e “ $x = A \setminus B$ ” (utilizada para encontrar o vetor solução  $\mathbf{x}$  do sistema linear  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ).

O trecho  $L_1$  possui a seção transversal descrito pela Figura 28.

Figura 28 – Seção transversal de  $L_1$



FONTE: Adaptado de Gatti (2016).

$b_h$  e  $b_z$  são as larguras do harvester e da base, respectivamente,  $h_p$ ,  $h_s$  e  $h_z$  são as espessuras dos elementos piezoelétricos, do substrato e da base, respectivamente, e  $a$  é a distância entre a região de contato do harvester com a base e o eixo neutro.

Para o cálculo da posição da linha neutra e, conseqüentemente, de  $a$ , é necessário que

$$\int_{A_z} \sigma_z dA_z + \int_{A_s} \sigma_s dA_s + \int_{A_p} \sigma_p dA_p = 0, \quad (3.89)$$

onde

$$\sigma = -Ez w''(x), \quad (3.90)$$

com  $E$  e  $w(x)$  sendo o módulo de Young e o deslocamento transversal, respectivamente.

Assim,

$$\begin{aligned}
& \int_{a-h_z}^a \int_{-\frac{b_z}{2}}^{\frac{b_z}{2}} E_z \cdot z \, dy \, dz + \int_{a+h_p}^{a+h_p+h_s} \int_{-\frac{b_h}{2}}^{\frac{b_h}{2}} E_s \cdot z \, dy \, dz + \int_a^{a+h_p} \int_{-\frac{b_h}{2}}^{\frac{b_h}{2}} E_p \cdot z \, dy \, dz \\
& + \int_{a+h_p+h_s}^{a+2h_p+h_s} \int_{-\frac{b_h}{2}}^{\frac{b_h}{2}} E_p \cdot z \, dy \, dz = 0 .
\end{aligned} \tag{3.91}$$

Resolvendo a Equação (3.91) e considerando que no presente trabalho  $b_z = b_h$ , tem-se

$$a = \frac{E_z h_z^2 - E_s h_s (2h_p + h_s) - 2E_p h_p (2h_p + h_s)}{2(E_z h_z + E_s h_s + 2E_p h_p)} . \tag{3.92}$$

Além disso, é necessário realizar o cálculo da rigidez,  $EI$ , da seção 1:

$$E_1 I_1 = \int_{A_z} E_z \cdot z^2 \, dA_z + \int_{A_s} E_s \cdot z^2 \, dA_s + \int_{A_p} E_p \cdot z^2 \, dA_p , \tag{3.93}$$

onde  $E_z$ ,  $E_s$  e  $E_p$  são os módulos de Young da base, do substrato e do material piezoelétrico, respectivamente, enquanto  $A_z$ ,  $A_s$  e  $A_p$  são as áreas das seções transversais do base, do substrato e do material piezoelétrico, respectivamente.

A Equação (3.93) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}
E_1 I_1 = & \int_{a-h_z}^a \int_{-\frac{b_z}{2}}^{\frac{b_z}{2}} E_z \cdot z^2 \, dy \, dz + \int_{a+h_p}^{a+h_p+h_s} \int_{-\frac{b_h}{2}}^{\frac{b_h}{2}} E_s \cdot z^2 \, dy \, dz \\
& + \int_a^{a+h_p} \int_{-\frac{b_h}{2}}^{\frac{b_h}{2}} E_p \cdot z^2 \, dy \, dz + \int_{a+h_p+h_s}^{a+2h_p+h_s} \int_{-\frac{b_h}{2}}^{\frac{b_h}{2}} E_p \cdot z^2 \, dy \, dz .
\end{aligned} \tag{3.94}$$

Como  $b_z = b_h$ ,

$$\begin{aligned}
E_1 I_1 = & \frac{b_h}{3} [E_z h_z (3a^2 - 3ah_z + h_z^2) \\
& + E_s h_s (3a^2 + 6ah_p + 3ah_s + 3h_p^2 + 3h_p h_s + h_s^2) \\
& + E_p h_p (6a^2 + 12ah_p + 6ah_s + 8h_p^2 + 9h_p h_s + 3h_s^2)] .
\end{aligned} \tag{3.95}$$

$E_2 I_2$  é dado pela Equação (3.59).

Para o cálculo de  $K_{eq}(\Omega)$  e da FRF de tensão-aceleração, é possível utilizar a separação de variáveis proposta na Equação (3.56):

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^N b_r(t) \beta_r(x), \quad (3.96)$$

O deslocamento, desconsiderando esforços axiais, é dado por (GATTI, 2016):

$$u(x, t) = [-zw'(x, t) \quad 0 \quad w(x, t) + g(t)]^t, \quad (3.97)$$

enquanto a única componente de deformação é dada por:

$$S_1 = u_1'(x, t) = -zw''(x, t) = -z \sum_{r=1}^N b_r(t) \beta_r''(x). \quad (3.98)$$

As densidades de entalpia do material piezoelétrico, do substrato e da base são dados, respectivamente, por:

$$H_p = \frac{1}{2} E_p S_1^2 - e_{31} S_1 E_3 - \frac{1}{2} \varepsilon_{33} E_3^2, \quad (3.99)$$

$$H_s = \frac{1}{2} E_s S_1^2, \quad (3.100)$$

$$H_z = \frac{1}{2} E_z S_1^2, \quad (3.101)$$

onde  $e_{31}$  é a constante piezoelétrica,  $\varepsilon_{33}$  é a permissividade do piezoelétrico e  $E_3$  o campo elétrico, dado por:

$$E_3 = -\frac{v(t)}{h_p}, \quad (3.102)$$

Sendo  $v(t)$  a tensão gerada no piezoelétrico.

A energia potencial interna total do sistema é dado pela soma das energias internas da base, do substrato e do piezoelétrico ao longo de todo o comprimento do harvester:

$$U = U_z + U_s + U_p. \quad (3.103)$$

Além disso, a energia interna de cada sistema individual pode ser calculada integrando as densidades de entalpia ao longo de cada volume:

$$U_z = \int_{V_z} H_z dV_z = \int_{a-h_z}^a \int_{-\frac{b_z}{2}}^{\frac{b_z}{2}} \int_0^{L_1} H_z dx dy dz, \quad (3.104)$$

$$\begin{aligned}
U_s &= \int_{V_s} H_s dV_s \\
&= \int_{a+h_p}^{a+h_p+h_s} \int_{-\frac{b_h}{2}}^{\frac{b_h}{2}} \int_0^{L_1} H_s dx dy dz \\
&+ \int_{-\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}} \int_{-\frac{b_h}{2}}^{\frac{b_h}{2}} \int_{L_1}^{L_1+L_2} H_s dx dy dz ,
\end{aligned} \tag{3.105}$$

$$\begin{aligned}
U_p &= \int_{V_p} H_p dV_p \\
&= \int_a^{a+h_p} \int_{-\frac{b_h}{2}}^{\frac{b_h}{2}} \int_0^{L_1} H_p dx dy dz \\
&+ \int_{a+h_p+h_s}^{a+2h_p+h_s} \int_{-\frac{b_h}{2}}^{\frac{b_h}{2}} \int_0^{L_1} H_p dx dy dz \\
&+ 2 \int_{\frac{h_s}{2}}^{\frac{h_s}{2}+h_p} \int_{-\frac{b_h}{2}}^{\frac{b_h}{2}} \int_{L_1}^{L_1+L_2} H_p dx dy dz .
\end{aligned} \tag{3.106}$$

Definindo os seguintes coeficientes:

$$I_z = \frac{1}{3} b_z h_z (3a^2 - 3ah_z + h_z^2) , \tag{3.107}$$

$$I_{s1} = \frac{1}{3} b_h h_s (3a^2 + 6h_p + 3ah_s + 3h_p^2 + 3h_p h_s + h_s^2) , \tag{3.108}$$

$$I_{s2} = \frac{1}{12} b_h h_s^3 , \tag{3.109}$$

$$I_{p1} = \frac{1}{3} b_h h_p (6a^2 + 6ah_s + 12ah_p + 3h_s^2 + 9h_p h_s + 8h_p^2) , \tag{3.110}$$

$$I_{p2} = \frac{1}{6} b_h h_p (3h_s^2 + 6h_p h_s + 4h_p^2) , \tag{3.111}$$

$$J_{p1} = b_h e_{31} (2a + 2h_p + h_s) , \tag{3.112}$$

$$J_{p2} = b_h e_{31} (h_p + h_s) , \tag{3.113}$$

$$K_z = E_z I_z , \quad (3.114)$$

$$K_{s1} = E_s I_{s1} , \quad (3.115)$$

$$K_{s2} = E_s I_{s2} , \quad (3.116)$$

$$K_{p1} = E_p I_{p1} , \quad (3.117)$$

$$K_{p2} = E_p I_{p2} , \quad (3.118)$$

$$K_1 = K_z + K_{s1} + K_{p1} , \quad (3.119)$$

$$K_2 = K_{s2} + K_{p2} , \quad (3.120)$$

$$K = K_1 \int_0^{L_1} \beta''(x)^2 dx + K_2 \int_{L_1}^{L_1+L_2} \beta''(x)^2 dx , \quad (3.121)$$

$$\theta_1 = J_{p1} \beta'(L_1) , \quad (3.122)$$

$$\theta_2 = J_{p2} [\beta'(L_1 + L_2) - \beta'(L_1)] , \quad (3.123)$$

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = \text{acoplamento eletromecânico modal} , \quad (3.124)$$

$$C_p = \frac{2b_h(L_1 + L_2)\varepsilon_{33}}{h_p} = \text{capacitância} , \quad (3.125)$$

a energia potencial interna torna-se

$$U = \frac{1}{2} K b(t)^2 - \theta v(t) b(t) - \frac{1}{2} C_p v(t)^2 . \quad (3.126)$$

Aplicando as Equações de Lagrange para a coordenada  $v(t)$  (OSINAGA; MACHADO; FEBBO, 2021), tem-se

$$-\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial U}{\partial v(t)} \right) + \frac{v(t)}{R_l} = 0 , \quad (3.127)$$

$$\theta \frac{d b(t)}{dt} + C_p \frac{d v(t)}{dt} + \frac{v(t)}{R_l} = 0 , \quad (3.128)$$

ou, ainda,

$$C_{\tilde{p}} \frac{d v(t)}{dt} + \frac{v(t)}{2R_l} = -\frac{\theta d b(t)}{2 dt} , \quad (3.129)$$

onde  $C_{\tilde{p}} = \frac{C_p}{2}$  é a capacitância de uma camada piezoelétrica.

A partir deste resultado, da formulação para a rigidez equivalente de uma viga contínua proposta pela Subseção 3.2.2 e pela formulação feita por Erturk e Inman (2009) para a FRF de tensão-aceleração, tem-se que

$$K_{eq}(\Omega) = \frac{1}{U(0, \Omega)} = \frac{1}{\sum_{r=1}^N B_r(\Omega) \beta_r(x)} \quad (3.130)$$

e

$$H_V(\Omega) = \frac{V_p(\Omega)}{-\Omega^2 G(\Omega)} = \frac{\alpha_p X_b}{G(\Omega)}, \quad (3.131)$$

onde

$$B_r(\Omega) = \left( F_r - \frac{\chi_r \sum_{r=1}^N \frac{i\Omega \kappa_r \beta_r(0)}{\Delta}}{\frac{1}{R_l} + i\Omega C_p + \sum_{r=1}^N \frac{i\Omega \kappa_r \chi_r}{\Delta}} \right) \frac{1}{\Delta}, \quad (3.132)$$

$$\Delta = -\Omega^2 + 2\xi_{h,r} \Omega_{h,r} i\Omega + \Omega_{h,r}^2, \quad (3.133)$$

$$\alpha_p = \frac{\sum_{r=1}^N \frac{i\Omega \kappa_r \sigma_r}{\Delta}}{\frac{1}{R_l} + i\Omega C_p + \sum_{r=1}^N \frac{i\Omega \kappa_r \chi_r}{\Delta}}, \quad (3.134)$$

$$\sigma_r = -m_{hl} \int_0^{L_h} \beta_r(x) dx, \quad (3.135)$$

$$\chi_r = \theta_r, \quad (3.136)$$

$$\kappa_r = \frac{\theta_r}{2}, \quad (3.137)$$

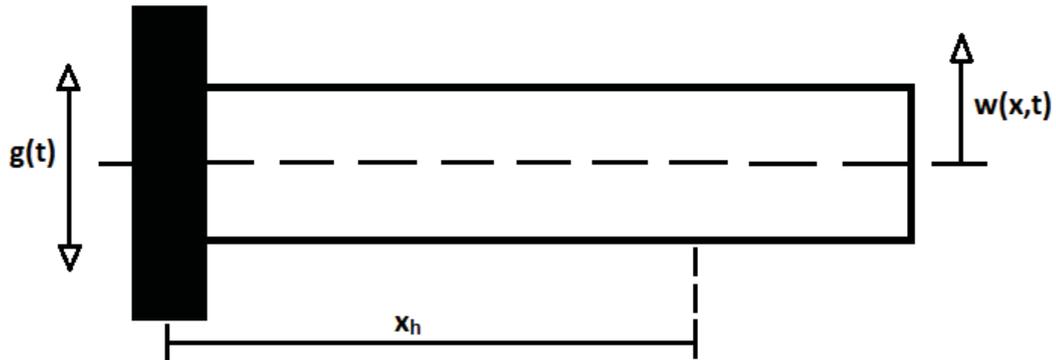
e  $X_b$  é dado pelas Equações (3.30) a (3.36).

Nas identificações realizadas com 2 seções para o *energy harvester*, o valor de  $L_h$  foi fixado como sendo o valor medido,  $L_h = 63,5 \text{ mm}$ , enquanto  $L_1$  e  $L_2$  foram identificados.

### 3.2.4 Viga de aço

Para este modelo a viga de aço é considerada como uma viga simples contínua, com suas respectivas propriedades características. A viga é excitada com um deslocamento  $g(t)$  em sua base, e responde com um deslocamento transversal relativo  $w(x, t)$ . Dessa forma, o deslocamento absoluto é dado por  $w(x, t) + g(t)$ . O sistema teórico proposto está representado pela Figura 29.

Figura 29 – Modelo de viga simples



FONTE: O autor (2022).

Para uma frequência de excitação  $\Omega$ , as energias cinética ( $T$ ) e potencial ( $U$ ) do sistema são dadas, respectivamente, por

$$T = \frac{1}{2} \rho_b A_b \int_0^{L_b} [\dot{w}(x, t) + \dot{g}(t)]^2 dx, \quad (3.138)$$

$$U = \frac{1}{2} E_b I_b \int_0^{L_b} w''(x, t)^2 dx, \quad (3.139)$$

onde  $\rho_b, A_b, E_b, L_b$  são a massa específica, área da seção transversal, módulo de Young e comprimento da viga, respectivamente, e  $I_b$  é o momento de inércia da seção transversal, dado por

$$I_b = \frac{b_b h_b^3}{12}, \quad (3.140)$$

onde  $b_b$  e  $h_b$  são a largura e a espessura da viga, respectivamente. A solução proposta para o problema é dada por

$$w(x, t) = \sum_{r=1}^n a_r(t) \phi_r(x), \quad (3.141)$$

onde  $a_r(t)$  e  $\phi_r(x)$  são as coordenadas generalizadas e os modos assumidos, respectivamente. São considerados  $n$  modos assumidos de viga engastada-livre.

Dessa forma, as expressões para as energias cinética e potencial do sistema tornam-se, respectivamente,

$$T = \frac{1}{2} \left[ \sum_{r,l} (\dot{a}_r \dot{a}_l m_{b,rl}^{aa} + 2\dot{a}_r p_r^a) + m_b^T \dot{g}^2 \right], \quad (3.142)$$

$$U = \frac{1}{2} \left[ \sum_{r,l} (a_r a_l k_{rl}^{aa}) \right], \quad (3.143)$$

onde

$$m_{b,rl}^{aa} = \rho_b A_b \int_0^{L_b} \phi_r \phi_l dx, \quad (3.144)$$

$$p_r^a = \rho_b A_b \int_0^{L_b} \phi_r \dot{g} dx, \quad (3.145)$$

$$m_b^T = \int_0^{L_b} \rho_b A_b dx, \quad (3.146)$$

$$k_{rl}^{aa} = E_b I_b \int_0^{L_b} \phi_r'' \phi_l'' dx, \quad (3.147)$$

O termo  $m_b = \rho_b A_b$  representa a massa por unidade de comprimento da viga de aço.

Considerando que todas as forças envolvidas no sistema são conservativas, para encontrar as equações de movimento do sistema, aplicam-se as Equações de Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{a}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial a_j} + \frac{\partial U}{\partial a_j} = 0, \quad (3.148)$$

$$\sum_l (\ddot{a}_l m_{b,rl}^{aa} + f_r^a + a_l k_{rl}^{aa}) = 0, \quad (3.149)$$

onde

$$f_r^a = \dot{p}_r^a = m_b \ddot{g} \int_0^{L_b} \phi_r dx. \quad (3.150)$$

Matricialmente, a Equação (3.150) pode ser escrita como

$$M^a \ddot{\mathbf{a}} + K^a \mathbf{a} = \mathbf{f}_1, \quad (3.151)$$

onde

$$M^a = m_b^{aa}, \quad (3.152)$$

$$K^a = k^{aa}, \quad (3.153)$$

$$\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}^a. \quad (3.154)$$

O amortecimento do modelo, novamente, é acoplado na Equação (3.151), com a inclusão da matriz de amortecimento  $C^a$ , gerando a nova equação matricial:

$$M^a \ddot{\mathbf{a}} + C^a \dot{\mathbf{a}} + K^a \mathbf{a} = \mathbf{f}_1, \quad (3.155)$$

Para se obter a solução da equação diferencial homogênea dada pela Equação (3.155), seguem-se os mesmos passos descritos pela seção 3.2.

Neste modelo, deseja-se calcular a FRF de velocidade-aceleração, dada por:

$$H_{VA}(\Omega) = \frac{\mathcal{E}(\Omega)}{Y(\Omega)} = \frac{\mathcal{E}(\Omega)}{-\Omega^2 G(\Omega)}, \quad (3.156)$$

onde  $\mathcal{E}(\Omega)$  é a amplitude de velocidade na ponta da viga e  $Y(\Omega) = -\Omega^2 G(\Omega)$  é a amplitude de aceleração em sua base.

Para se obter a amplitude de velocidade na ponta, é necessário encontrar primeiro o deslocamento ( $x_p(t)$ ), que é igual ao deslocamento absoluto da viga na extremidade. Deste modo,

$$x_p(t) = w(L_b, t) + g(t) = \sum_{r=1}^n a_r(t) \phi_r(L_b) + g(t). \quad (3.157)$$

No domínio da frequência, portanto,

$$X_p(\Omega) = \sum_{r=1}^n A_r(\Omega) \phi_r(L_b) + G(\Omega). \quad (3.158)$$

Das propriedades da transformada de Fourier,  $\mathcal{E}(\Omega) = i\Omega X(\Omega)$ . Portanto,

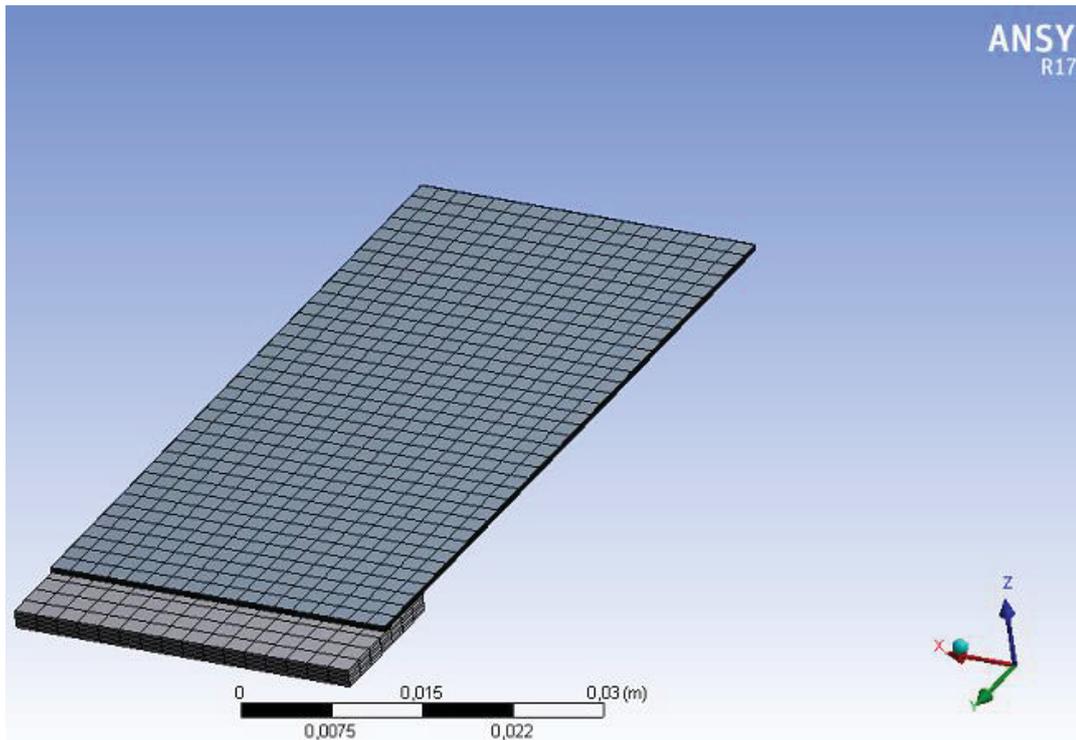
$$H_{VA}(\Omega) = \frac{\mathcal{E}(\Omega)}{Y(\Omega)} = \frac{i\Omega X_p(\Omega)}{-\Omega^2 G(\Omega)} = \frac{-i}{\Omega} \left( 1 + \frac{\sum_{r=1}^n A_r(\Omega) \phi_r(L_b)}{G(\Omega)} \right). \quad (3.159)$$

### 3.3 SIMULAÇÃO POR ELEMENTOS FINITOS

O *energy harvester* foi modelado no ANSYS Workbench, com a base de poliimide e o piezoelétrico bimorfo composto por duas camadas de PZT e substrato de latão. Todas as propriedades dos materiais foram inseridas no software.

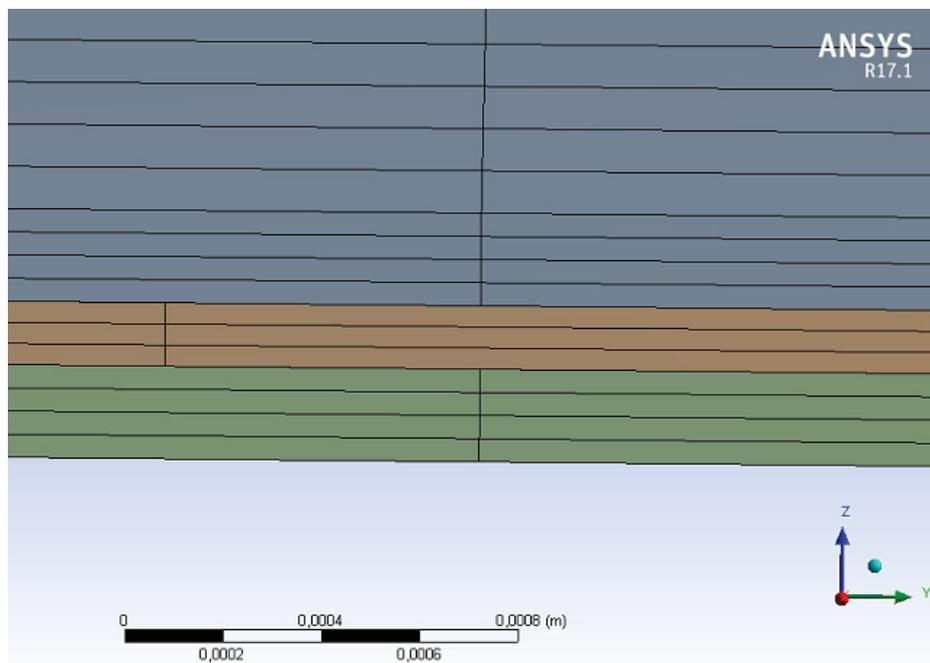
Foi criada uma malha com elementos sólidos, de interpolação quadrática, do Workbench, com função de tamanho adaptativa. Para a base, foi inserido um *face sizing* (elementos na face) de 2 mm e um *edge sizing* (elementos na aresta) de 0,3 mm. Para as três camadas do piezoelétrico, foi inserido um *face sizing* de 0,8 mm e um *edge sizing* de 0,1 mm. Os detalhes da malha criada podem ser observados nas Figuras 30 e 31. Ao todo, foram criados 30.835 nós e 6.054 elementos.

Figura 30 – Malha criada no ANSYS



FONTE: O autor (2022).

Figura 31 – Detalhe da malha criada para o piezoelétrico



FONTE: O autor (2022).

Para obtenção da rigidez dinâmica na base, foi inserido um *frictionless support* (apoio sem atrito) nas quatro faces laterais da base, de modo a impedir a translação

nos eixos x e y. Foi aplicada uma força constante de 1 N na direção z, na parte inferior da base.

Foi realizada uma análise harmônica, de modo a se obter o deslocamento da base entre 0 e 100 Hz. A FRF de Receptância ( $\alpha(\Omega)$ ), que é a amplitude de deslocamento na frequência ( $X(\Omega)$ ), dividida pela amplitude de força na frequência ( $F(\Omega)$ ) (RAO, 2017), é então obtida, considerando  $F(\Omega) = 1$ :

$$\alpha(\Omega) = \frac{X(\Omega)}{F(\Omega)} = X(\Omega). \quad (3.160)$$

A rigidez dinâmica ( $K_b(\Omega)$ ), que é o inverso da Receptância (RAO, 2017), pode então ser calculada:

$$K_b(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{X(\Omega)} = \frac{1}{\alpha(\Omega)}. \quad (3.161)$$

É importante ressaltar que a rigidez dinâmica calculada considera apenas a parte mecânica, desprezando influências que a parte elétrica possa exercer sobre a rigidez do *harvester*.

### 3.4 IDENTIFICAÇÃO

A identificação é tratada como um problema padrão de otimização com restrições. Nele, é definida uma função objetivo  $f_{obj}(x)$ , que deve ser minimizada. A função objetivo possibilita encontrar o ponto ótimo do problema, e é comumente definida como sendo algum tipo de erro. Além disso, é definido um vetor projeto  $x$ , sujeito a restrições. O vetor projeto deve estar dentro da região viável do problema, que é dada pela interseção das restrições. (ARORA, 2012).

De acordo com Arora (2012), a formulação padrão para um problema de otimização com restrições é dada por

$$\min f_{obj}(x): R^n \rightarrow R = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.162)$$

sendo  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  o vetor projeto, sujeito às seguintes restrições:

$$h_i(x) = 0, \quad i = 1 \text{ a } p, \quad (3.163)$$

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = 1 \text{ a } m. \quad (3.164)$$

Na identificação deste trabalho, a função objetivo utilizada foi definida como sendo a norma Euclideana da diferença entre a FRF de tensão-aceleração experimental e numérica:

$$f_{obj}(\mathbf{x}): R^6 \rightarrow R = \|H_V^{exp}(\Omega) - H_V^{num}(\Omega, \mathbf{x})\|_2, \quad (3.165)$$

onde  $H_V^{exp}(\Omega)$  é a FRF medida experimentalmente e  $H_V^{num}(\Omega, \mathbf{x})$  é a FRF calculada numericamente com o modelo matemático. Além disso,  $\mathbf{x}$  é o vetor projeto, definido como

$$\mathbf{x} = [L_b, L_h, x_h, K_e, \xi_b, \xi_h], \quad (3.166)$$

sujeito a restrições, onde  $L_b$  e  $L_h$  são os comprimentos da viga metálica e piezoelétrica, respectivamente,  $x_h$  é a posição do acoplamento entre as duas vigas,  $K_e$  é o coeficiente de capacitância  $\left(C_p = 2 \frac{K_e \varepsilon_0 b_h L_h}{h_p}\right)$  e  $\xi_b$  e  $\xi_h$  são as razões de amortecimento modal da viga metálica e do *energy harvester*, respectivamente.

Para o estudo do modelo teórico e comparação com o modelo experimental, foram utilizados códigos no software comercial MATLAB. A função utilizada para encontrar o mínimo da função objetivo é a “fminsearch”, que procura o mínimo de uma função em um espaço multidimensional partindo de um “chute”, ou estimativa, inicial. Essa função utiliza o algoritmo de Nelder-Mead, que procura um ponto ótimo local de um problema com  $n$  variáveis quando a função objetivo varia suavemente e é unimodal. As maiores vantagens deste método são o fato de não ser necessário conhecer as derivadas da função objetivo e a velocidade de convergência (LAGARIAS *et al.*, 1998). Além disso, como não é possível a utilização de restrições dentro desta função, foram utilizadas restrições do tipo “barreira”, que funcionam inserindo valores muito grandes para a função objetivo quando os parâmetros do vetor projeto se apresentam fora das faixas desejadas.

Para a identificação, foram considerados os 5 primeiros modos de vibrar, tanto para a viga primária, quanto para o *energy harvester*.

### 3.5 PROJETO ÓTIMO

Utilizando a Lei de Ohm, é possível encontrar a FRF de potência gerada pelo sistema:

$$H_P(\Omega) = \frac{H_V^2(\Omega)}{R_l}. \quad (3.167)$$

Assim, para maximizar a potência gerada em uma faixa de frequências  $\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2$ , é possível utilizar como base um problema padrão de otimização com restrições.

O problema atual seria dado por

$$\max f_{obj}(\mathbf{x}): R^n \rightarrow R = f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.168)$$

sendo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  o vetor projeto, sujeito às seguintes restrições:

$$h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1 \text{ a } p, \quad (3.169)$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1 \text{ a } m. \quad (3.170)$$

Porém, maximizar a função  $f_{obj}(\mathbf{x})$  é equivalente a minimizar a função  $g_{obj}(\mathbf{x}) = -f_{obj}(\mathbf{x})$  (ARORA, 2012). Dessa forma, o novo problema de otimização volta para sua formulação padrão, tornando-se

$$\min g_{obj}(\mathbf{x}): R^n \rightarrow R = -f(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (3.171)$$

sendo  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  o vetor projeto, sujeito às seguintes restrições:

$$h_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1 \text{ a } p, \quad (3.172)$$

$$g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1 \text{ a } m. \quad (3.173)$$

Para a geração máxima de energia em uma faixa de frequências  $\Omega_1 \leq \Omega \leq \Omega_2$ , a função objetivo que se deseja maximizar foi definida como sendo a integral da FRF de potência ao longo da faixa de frequências, dividido pelo intervalo de frequências, de modo a se obter uma potência média gerada:

$$f_{obj}(\mathbf{x}): R^2 \rightarrow R = \frac{\int_{\Omega_1}^{\Omega_2} H_P(\Omega, \mathbf{x}) d\Omega}{\Omega_2 - \Omega_1}, \quad (3.174)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor projeto, definido como

$$\mathbf{x} = [L_b, R_l, x_h], \quad (3.175)$$

sujeito às restrições:

$$L_{b,1} \leq L_b \leq L_{b,2}, \quad (3.176)$$

$$R_{l,1} \leq R_l \leq R_{l,2}, \quad (3.177)$$

$$x_{h,1} \leq x_h \leq x_{h,2}, \quad (3.178)$$

onde  $L_b$  é o comprimento da viga primária,  $R_l$  é a resistência do circuito externo e  $x_h$  é o ponto de acoplamento entre as duas vigas.

## 4 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

No presente capítulo, são apresentados os resultados experimentais e numéricos obtidos para os sistemas estudados, assim como os parâmetros medidos e restrições utilizadas.

### 4.1 PARÂMETROS FÍSICOS E GEOMÉTRICOS

A Tabela 3 apresenta os principais parâmetros físicos e geométricos medidos e considerados.

Tabela 3 – Parâmetros físicos e geométricos utilizados

Parâmetro	Viga metálica	Piezoelétrico	Substrato de latão	Base de polyimide
Largura $b$ [mm]	32,5	32	32	32
Espessura $h$ [mm]	0,5	0,19	0,13	1,6
Mód. Young $E$ [GPa]	190	50	100	2
Densidade $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	7850	7800	8300	1420

FONTE: O autor (2022).

As restrições utilizadas para o problema inverso de identificação são dadas por:

$$100,0 \text{ mm} \leq L_b \leq 130,0 \text{ mm} , \quad (4.1)$$

$$50,0 \text{ mm} \leq L_h \leq 70,0 \text{ mm} , \quad (4.2)$$

$$30,0 \text{ mm} \leq x_h \leq 90,0 \text{ mm} , \quad (4.3)$$

$$1,0 \times 10^3 \leq K_e \leq 4,0 \times 10^3 , \quad (4.4)$$

$$0,00005 \leq \xi_b \leq 0,05 , \quad (4.5)$$

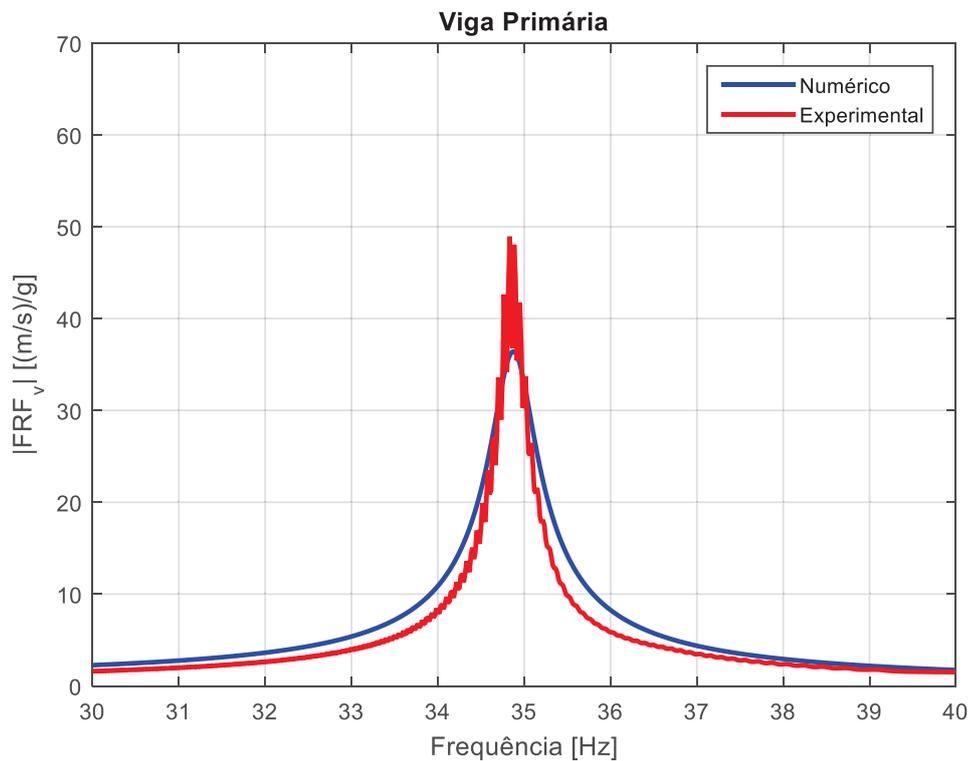
$$0,00005 \leq \xi_h \leq 0,05 , \quad (4.6)$$

onde  $L_b$  e  $L_h$  são os comprimentos da viga metálica e piezoelétrica, respectivamente,  $x_h$  é a posição do acoplamento entre as duas vigas,  $K_e$  é o coeficiente de capacitância  $\left( C_p = 2 \frac{K_e \epsilon_0 b_h L_h}{h_p} \right)$  e  $\xi_b$  e  $\xi_h$  são as razões de amortecimento modal da viga metálica e do *energy harvester*, respectivamente.

## 4.2 VIGA PRIMÁRIA INDIVIDUAL

Para o modelo da viga primária simples, o ajuste de curva obtido está representado na Figura 32, enquanto os valores identificados estão dados na Tabela 4.

Figura 32 – Ajuste de curvas para a viga primária



FONTE: O autor (2022).

Tabela 4 – Comparação entre valores identificados e medidos

Parâmetro	Valores identificados	Valores medidos
$L_b$ [mm]	107,7	114,0
$\xi_b$	0,0077	...

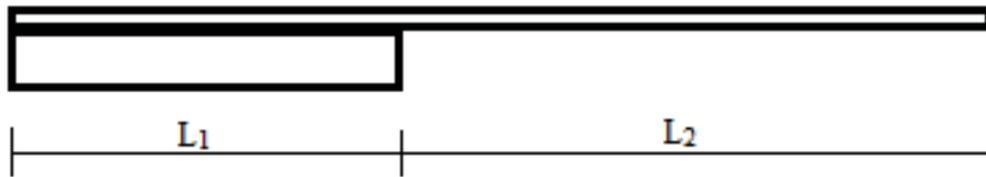
FONTE: O autor (2022).

## 4.3 ENERGY HARVESTER INDIVIDUAL

Para o modelo do *energy harvester* individual, foram feitos testes com circuito aberto (resistência externa de 324 k $\Omega$ ) e os modelos com seção única e duas seções foram utilizados.

No modelo de duas seções, foram identificados os comprimentos das duas seções,  $L_1$  e  $L_2$ , enquanto o valor da soma  $L_1 + L_2 = L_h$  foi fixada em 63,5 mm. O esquema deste modelo está ilustrado na Figura 33.

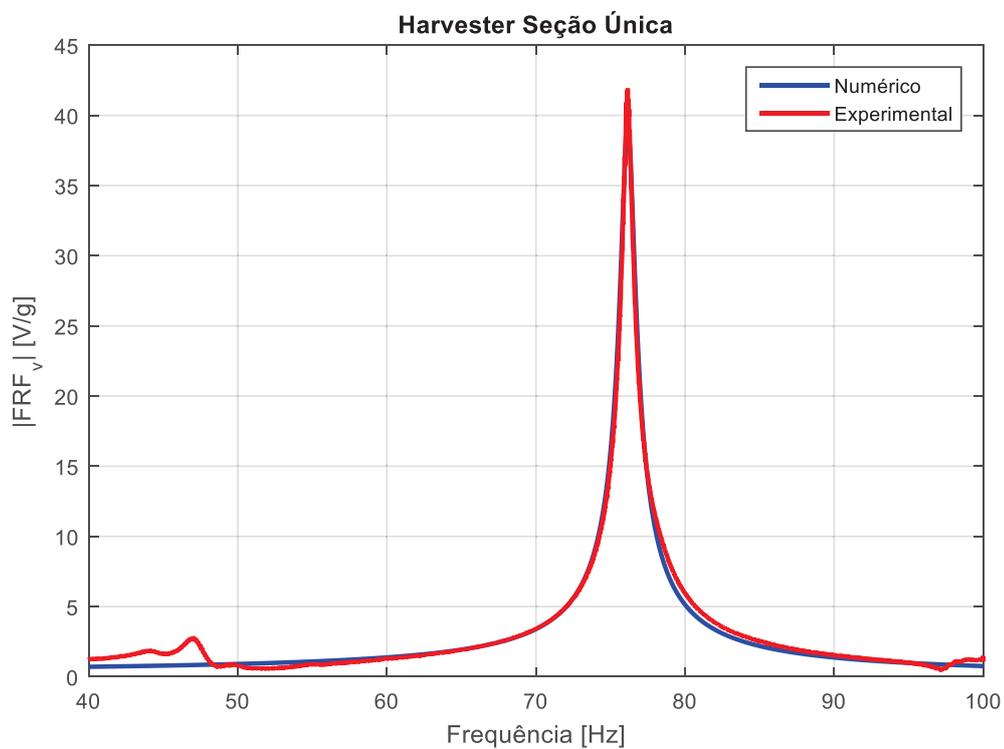
Figura 33 – Modelo do piezoelétrico contínuo com duas seções



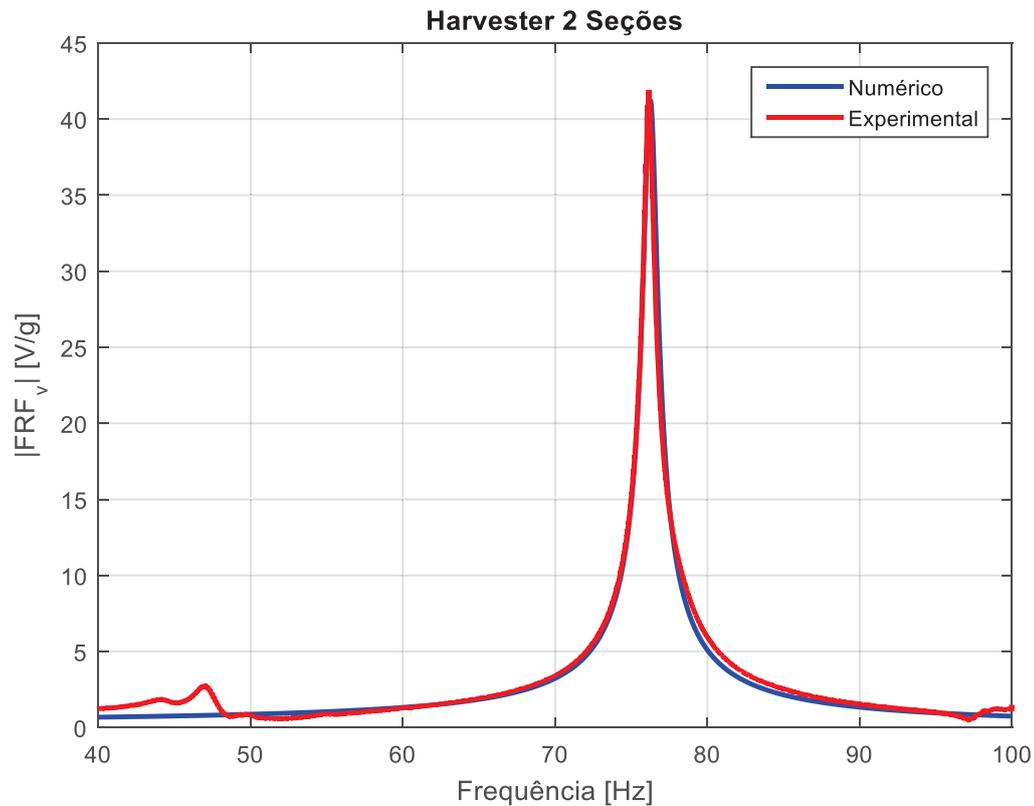
FONTE: O autor (2022).

Os ajustes de curva obtidos estão representados nas Figuras 34 e 35, enquanto os valores identificados estão dados na Tabela 5.

Figura 34 – Ajuste de curvas para o *harvester* com seção única



FONTE: O autor (2022).

Figura 35 – Ajuste de curvas para o *harvester* com 2 seções

FONTE: O autor (2022).

Tabela 5 – Comparação entre valores identificados e medidos

Parâmetro	Seção única	2 seções	Valores medidos
$L_1$ [mm]	...	12,1	6,3
$L_2$ [mm]	...	51,4	57,2
$L_h$ [mm]	53,5	63,5	63,5
$C_p$ [nF]	500	505	417
$\xi_h$	0,0066	0,0060	...

FONTE: O autor (2022).

NOTA: \*O valor de  $L_h$  foi fixado em 63,5 mm.

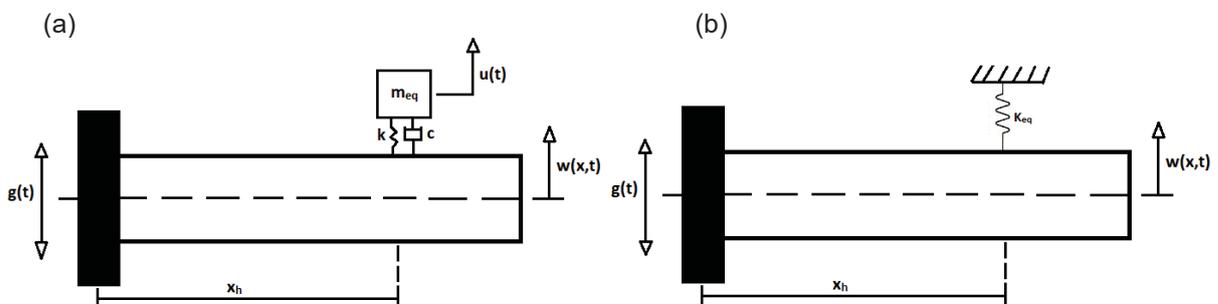
## 4.4 SISTEMA COMPOSTO

### 4.4.1 *Energy harvester* piezoelétrico com 1 grau de liberdade

Na modelagem do sistema composto utilizando o modelo do *energy harvester* de 1 grau de liberdade, a viga primária é excitada com um deslocamento  $g(t)$  em sua base e responde com um deslocamento transversal relativo  $w(x,t)$ . Assim, o deslocamento absoluto da viga é dado por  $w(x,t) + g(t)$ . O piezoelétrico, considerado

como tendo 1 grau de liberdade, é colocado a uma distância  $x_h$  da base da viga de aço, e possui massa equivalente  $m_{eq}$ , rigidez  $k$  e amortecimento  $c$ . O esquema pode ser visto na Figura 36(a). Para a dedução das equações do sistema composto, o modelo do *harvester* foi transformado em uma mola com rigidez dinâmica equivalente dependente da frequência de excitação ( $K_{eq} = K_{eq}(\Omega)$ ), que tem todas as suas características dinâmicas, mecânicas e elétricas, e representa a influência que a viga piezoelétrica realiza no sistema primário. Este sistema teórico proposto é representado pela Figura 36(b).

Figura 36 – Modelo do sistema composto – *harvester* 1 GL



FONTE: O autor (2022).

Foram feitos testes com as resistências externas de 41 e 324 k $\Omega$ . Os ajustes de curva obtidos estão representados nas Figuras 37 e 38.

A rigidez dinâmica equivalente para os dois casos foi calculada. Além disso, os parâmetros identificados foram utilizados para uma simulação utilizando uma resistência externa muito baixa, de 400  $\Omega$ , para avaliar a rigidez dinâmica sem efeitos elétricos, de modo a ser possível a comparação com a simulação no ANSYS. As curvas obtidas para cada rigidez estão mostradas na Figura 39.

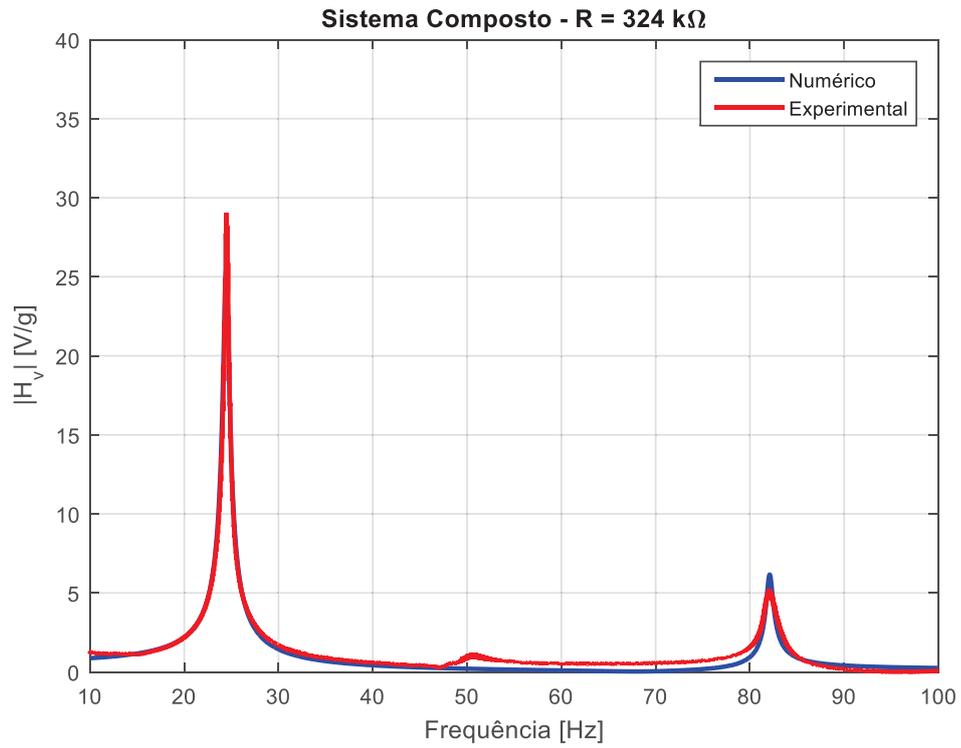
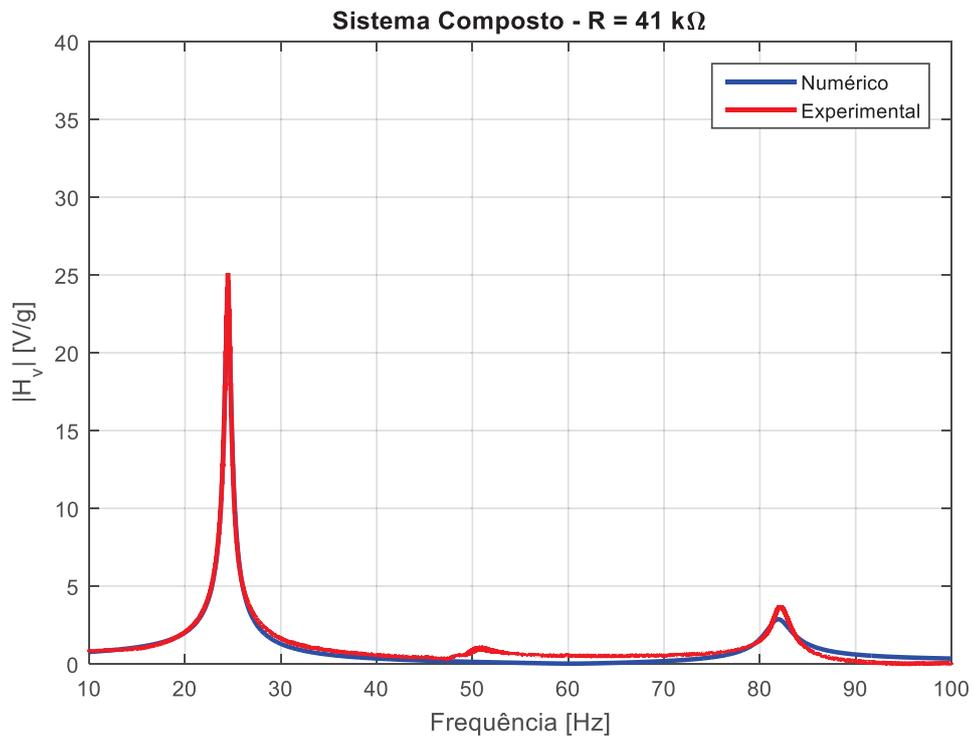
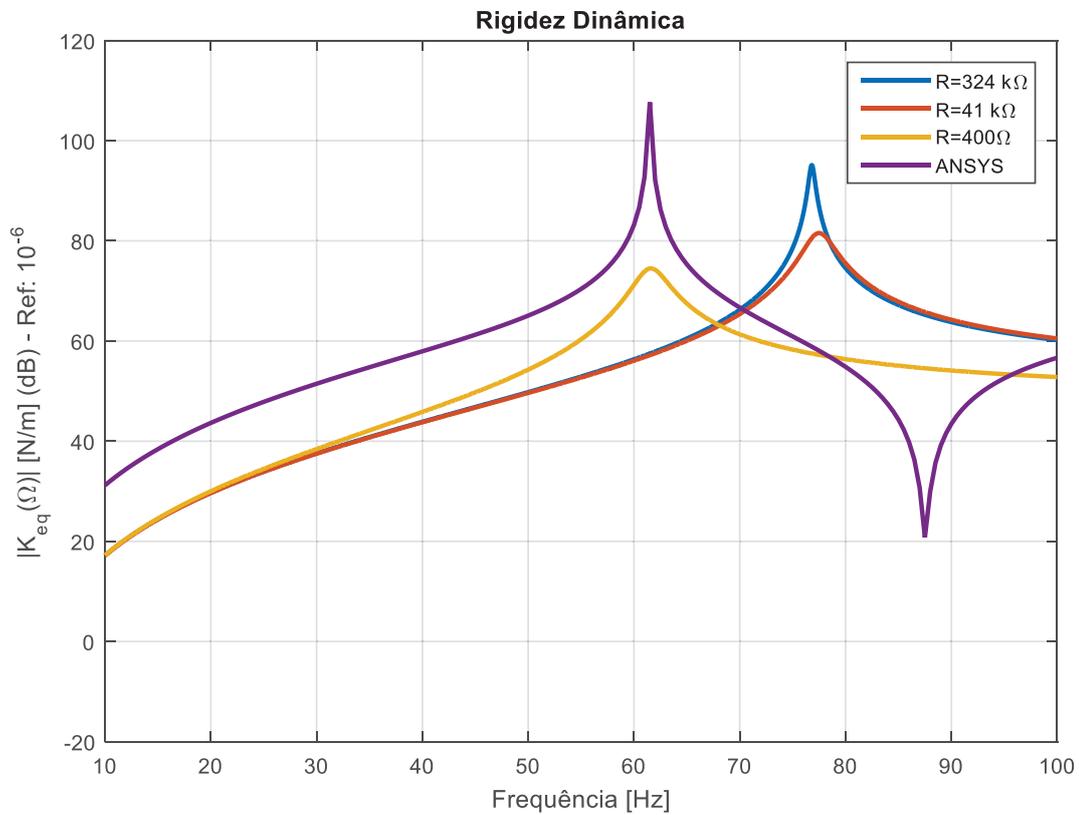
Figura 37 – Ajuste de curvas para o sistema composto – *harvester* 1 grau de liberdadeFigura 38 – Ajuste de curvas para o sistema composto – R = 41 k $\Omega$ 

Figura 39 – Rigidez dinâmica equivalente obtida



FONTE: O autor (2022).

Os valores identificados para este modelo, assim como a comparação entre a identificação e os valores estimados medidos, estão dados na Tabela 6.

Tabela 6 – Comparação entre valores identificados e medidos

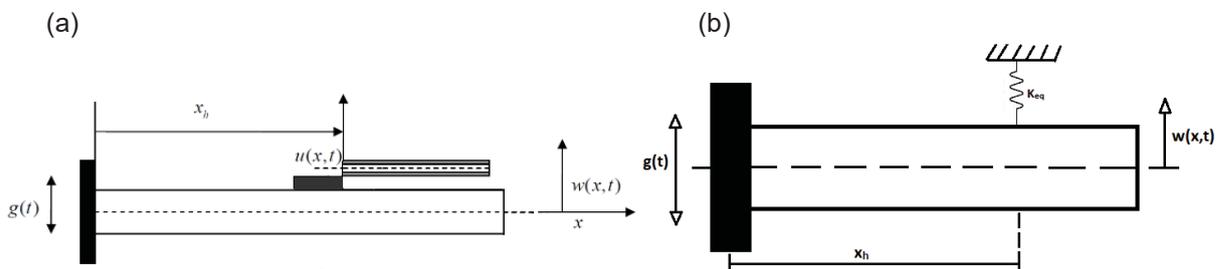
Parâmetro	R = 324 k $\Omega$	R = 41 k $\Omega$	Valores medidos
$L_b$ [mm]	122,5	122,9	114,0
$L_h$ [mm]	59,1	58,7	63,5
$x_h$ [mm]	84,2	81,8	50,0
$C_p$ [nF]	533	541	417
$\xi_b$	0,0156	0,0146	...
$\xi_h$	0,0018	0,0007	...

FONTE: O autor (2022).

#### 4.4.2 Energy harvester piezoelétrico contínuo com seção única

Na modelagem do sistema composto utilizando o modelo do *energy harvester* contínuo com seção única, a viga primária é excitada com um deslocamento  $g(t)$  em sua base e responde com um deslocamento transversal relativo  $w(x,t)$ . Assim, o deslocamento absoluto da viga é dado por  $w(x,t) + g(t)$ . O piezoelétrico, considerado sendo contínuo e possuindo seção única, é colocado a uma distância  $x_h$  da base da viga de aço, e responde com um deslocamento  $u(x,t)$ . O esquema pode ser visto na Figura 40(a). Para a dedução das equações do sistema composto, o modelo do *harvester* foi transformado em uma mola com rigidez dinâmica equivalente dependente da frequência de excitação ( $K_{eq} = K_{eq}(\Omega)$ ), que tem todas as suas características dinâmicas, mecânicas e elétricas, e representa a influência que a viga piezoelétrica realiza no sistema primário. Este sistema teórico proposto é representado pela Figura 40(b).

Figura 40 – Modelo do sistema composto – *harvester* contínuo



FONTE: O autor (2022).

Foram feitos testes com as resistências externas de 41 e 324 k $\Omega$ . Os ajustes de curva obtidos estão representados nas Figuras 41 e 42. A rigidez dinâmica equivalente para os dois casos foi calculada. Além disso, os parâmetros identificados foram utilizados para uma simulação utilizando uma resistência externa muito baixa, de 400  $\Omega$ , para avaliar a rigidez dinâmica sem efeitos elétricos, de modo a ser possível a comparação com a simulação no ANSYS. As curvas obtidas para cada rigidez estão mostradas na Figura 43.

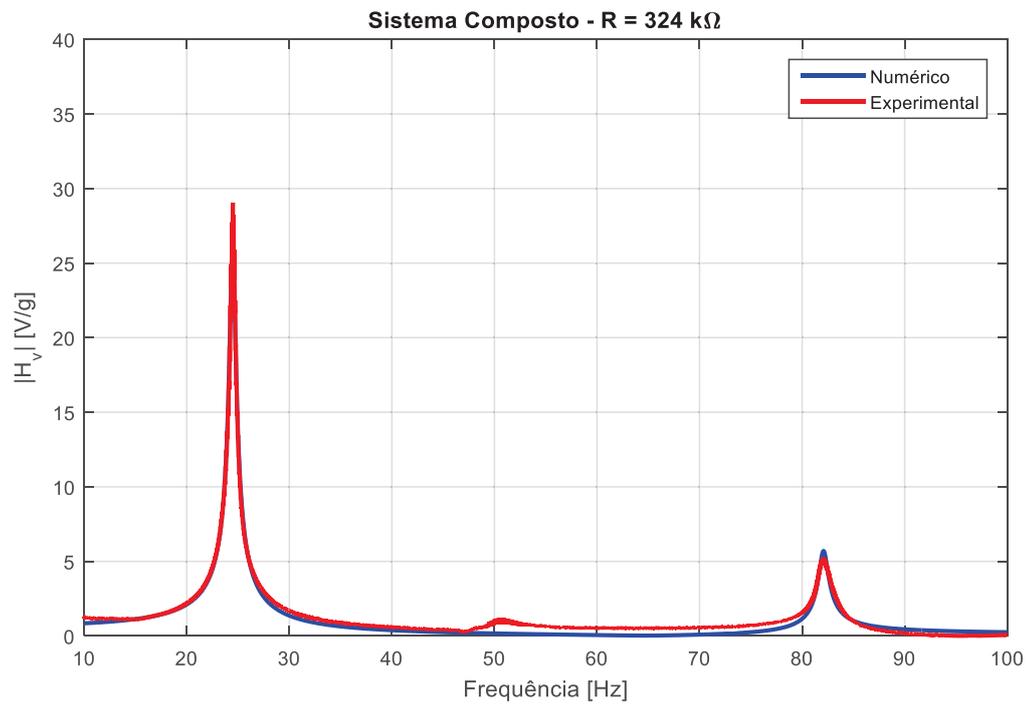
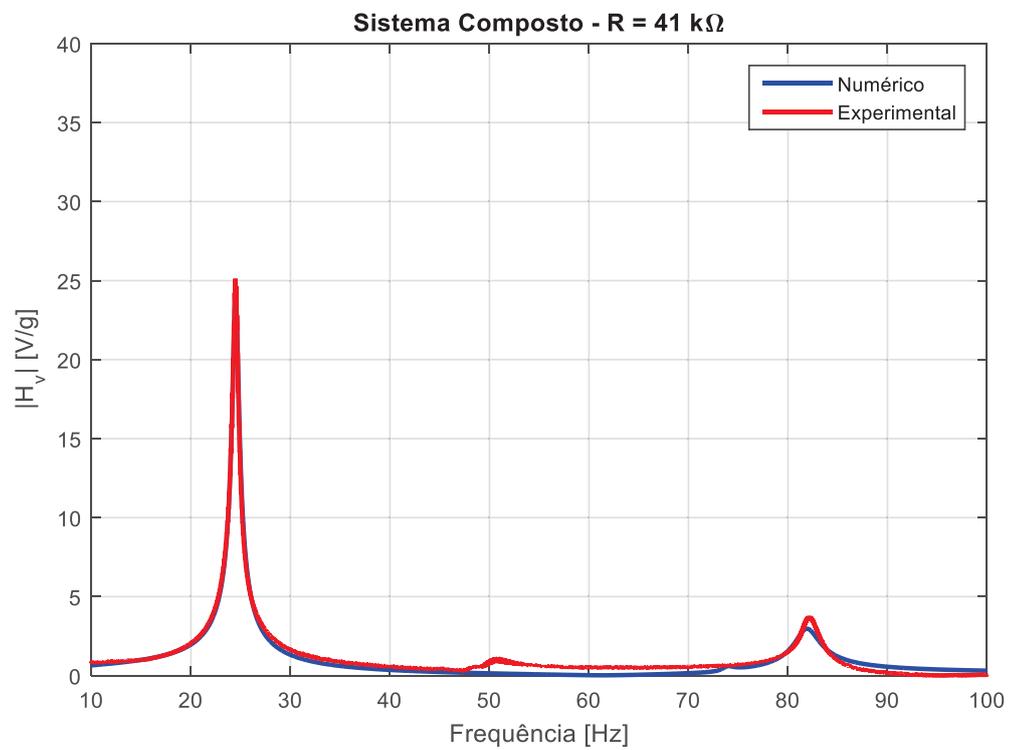
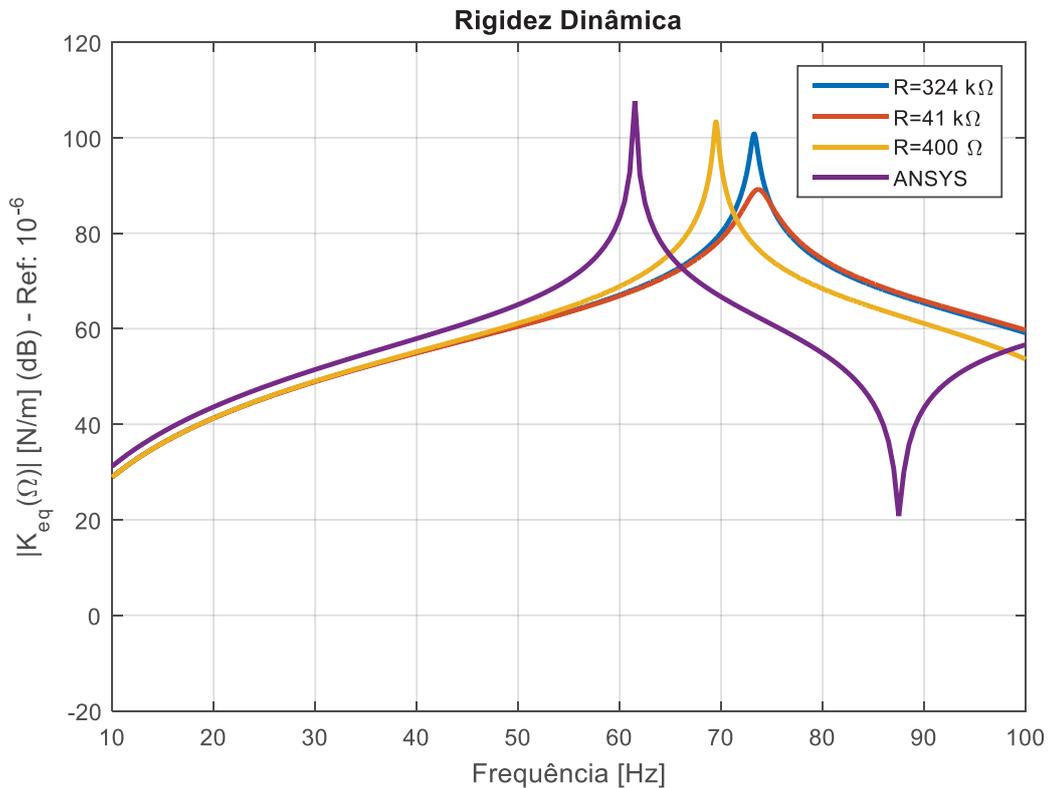
Figura 41 – Ajuste de curvas para o sistema composto – R = 324 k $\Omega$ Figura 42 – Ajuste de curvas para o sistema composto – R = 41 k $\Omega$ 

Figura 43 – Rigidez dinâmica equivalente obtida



FONTE: O autor (2022).

Os valores identificados para este modelo, assim como a comparação entre a identificação e os valores estimados medidos, estão dados na Tabela 7.

Tabela 7 – Comparação entre valores identificados e medidos

Parâmetro	R = 324 kΩ	R = 41 kΩ	Valores medidos
$L_b$ [mm]	113,7	114,3	114,0
$L_h$ [mm]	55,0	54,8	63,5
$x_h$ [mm]	73,4	72,5	50,0
$C_p$ [nF]	363	350	417
$\xi_b$	0,0173	0,0168	...
$\xi_h$	0,0039	0,0010	...

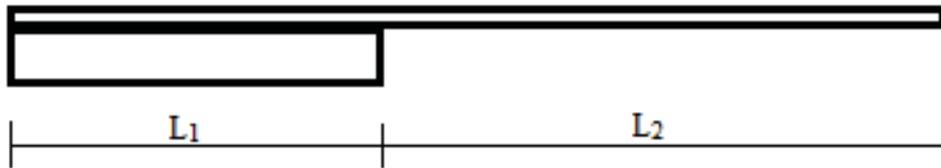
FONTE: O autor (2022).

#### 4.4.3 Energy harvester piezoelétrico contínuo com duas seções

A modelagem do sistema composto utilizando o modelo do *energy harvester* contínuo com duas seções é feita da mesma forma do *energy harvester* contínuo com uma seção, conforme mostrado na subseção 4.4.2. A diferença ocorre nos parâmetros

identificados, pois o *harvester* passa a ter duas seções, com comprimentos  $L_1$  e  $L_2$ , que somados resultam em  $L_h$ , conforme a Figura 44. Os valores de  $L_1$  e  $L_2$  foram identificados, enquanto o valor da soma  $L_1 + L_2 = L_h$  foi fixada em 63,5 mm.

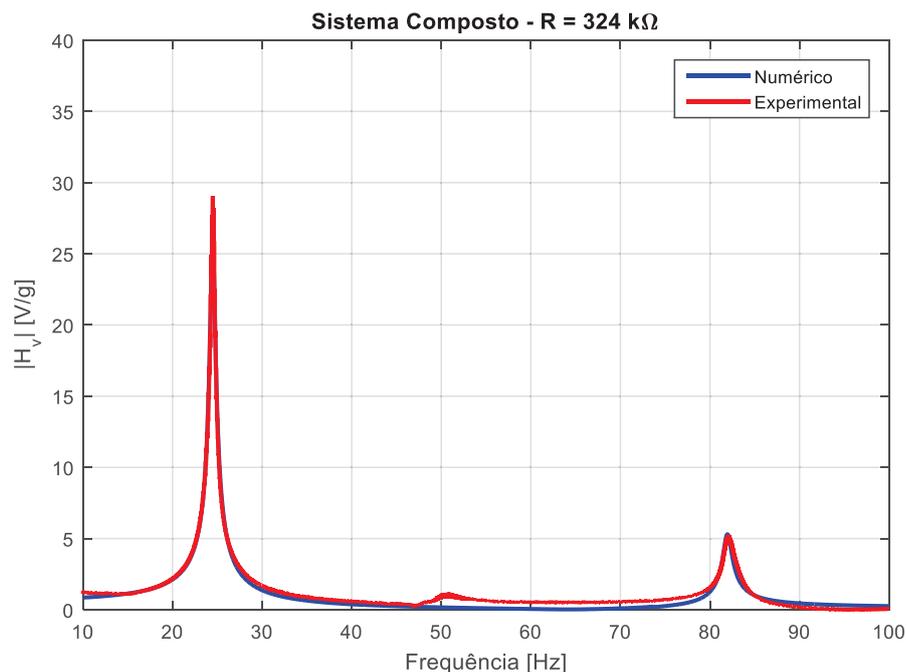
Figura 44 – Modelo do piezoelétrico contínuo com duas seções



FONTE: O autor (2022).

Foram feitos testes as resistências externas de 41 e 324 k $\Omega$ . Os ajustes de curva obtidos estão representados nas Figuras 45 e 46. A rigidez dinâmica equivalente para os dois casos foi calculada. Além disso, os parâmetros identificados foram utilizados para uma simulação utilizando uma resistência externa muito baixa, de 400  $\Omega$ , para avaliar a rigidez dinâmica sem efeitos elétricos, de modo a ser possível a comparação com a simulação no ANSYS. As curvas obtidas para cada rigidez estão mostradas na Figura 47.

Figura 45 – Ajuste de curvas para o sistema composto – R = 324 k $\Omega$



FONTE: O autor (2022).

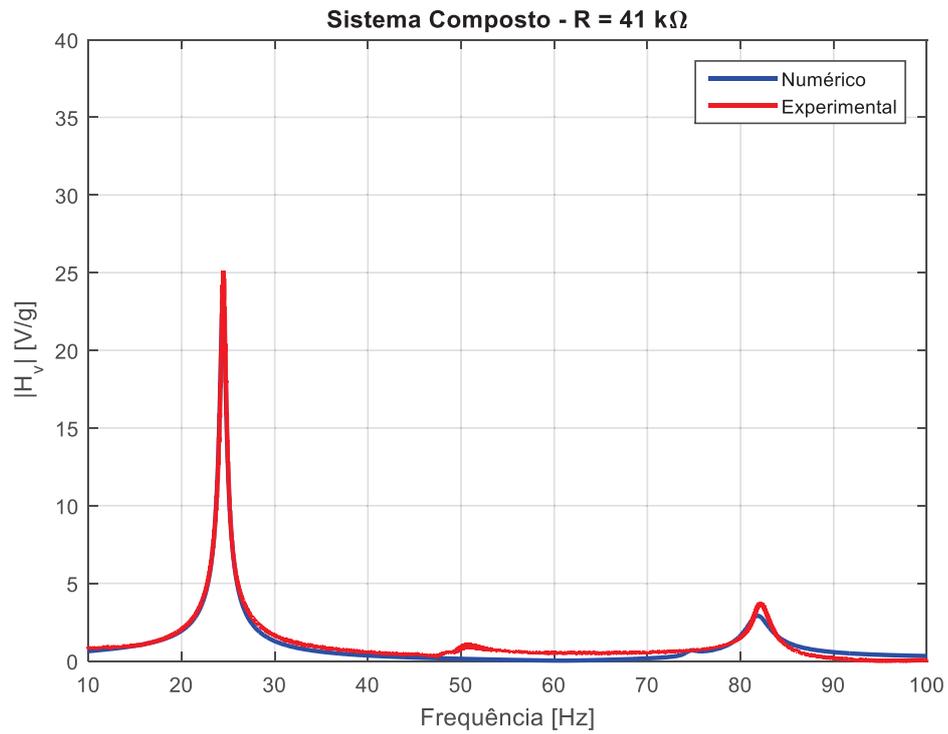
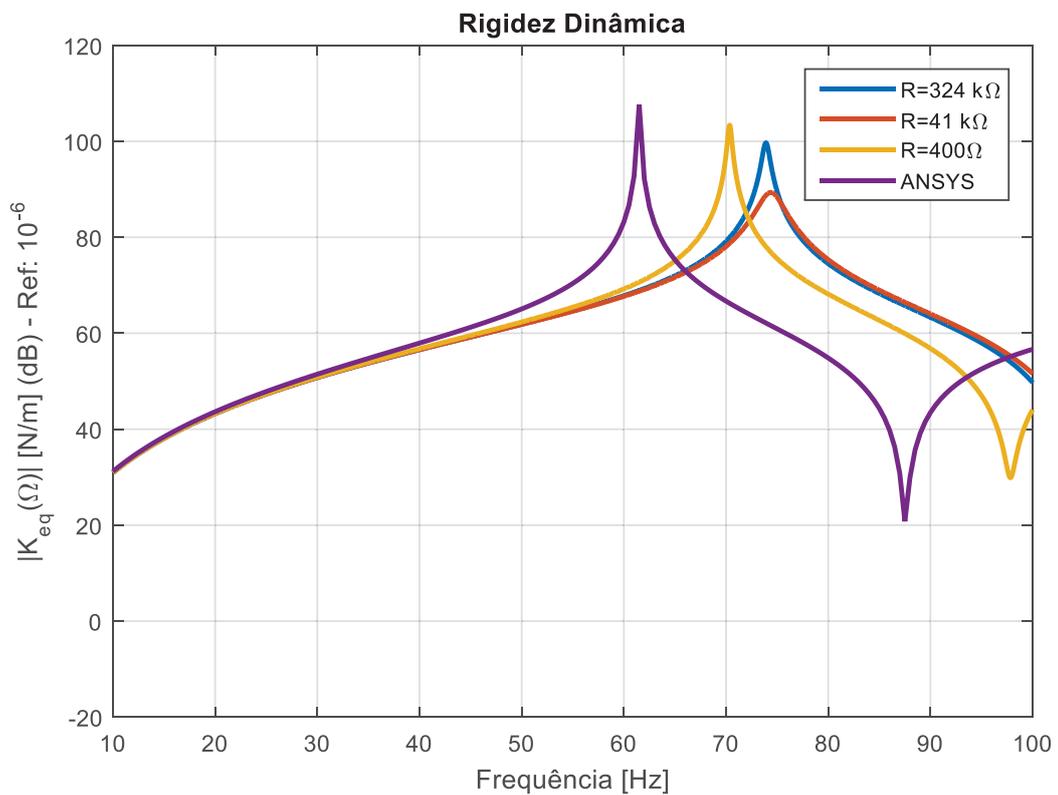
Figura 46 – Ajuste de curvas para o sistema composto – R = 41 k $\Omega$ 

Figura 47 – Rigidez dinâmica equivalente obtida



Os valores identificados para este modelo, assim como a comparação entre a identificação e os valores estimados medidos, estão dada na Tabela 8.

Tabela 8 – Comparação entre valores identificados e medidos

Parâmetro	R = 324 k $\Omega$	R = 41 k $\Omega$	Valores medidos
$L_b$ [mm]	111,7	112,5	114,0
$L_1$ [mm]	10,4	10,7	6,3
$L_2$ [mm]	53,1	52,8	57,2
$L_h$ [mm]	63,5*	63,5*	63,5
$x_h$ [mm]	70,9	70,1	50,0
$C_p$ [nF]	350	335	417
$\xi_b$	0,0181	0,0178	...
$\xi_h$	0,0044	0,0012	...

FONTE: O autor (2022).

NOTA: \*O valor de  $L_h$  foi fixado em 63,5 mm.

#### 4.5 COMPARAÇÃO ENTRE OS RESULTADOS

A Tabela 9 apresenta um comparativo entre os resultados das identificações, utilizando a resistência externa de 324 k $\Omega$ , enquanto a Tabela 10 apresenta o mesmo comparativo, utilizando a resistência externa de 41 k $\Omega$ .

Tabela 9 – Comparação entre valores identificados e medidos – R = 324 k $\Omega$

Parâmetro	Sistema Composto			Harvester seção única	Harvester 2 seções	Viga primária	Valores medidos
	Harvester 1 GL	Seção única	2 Seções				
$L_b$ [mm]	122,5	113,7	111,7	...	...	107,7	114,0
$L_1$ [mm]	...	...	10,4	...	12,1	...	6,3
$L_2$ [mm]	...	...	53,1	...	51,4	...	57,2
$L_h$ [mm]	59,1	55,0	63,5*	53,5	63,5*	...	63,5
$x_h$ [mm]	84,2	73,4	70,9	...	...	...	50,0
$C_p$ [nF]	533	363	350	500	505	...	417
$\xi_b$	0,0156	0,0173	0,0181	...	...	0,0077	...
$\xi_h$	0,0018	0,0039	0,0044	0,0066	0,0060	...	...

FONTE: O autor (2022).

NOTA: \*O valor de  $L_h$  foi fixado em 63,5 mm.

Tabela 10 – Comparação entre valores identificados e medidos – R = 41 k $\Omega$  (continua)

Parâmetro	Sistema Composto			Viga primária	Valores medidos
	Harvester 1 GL	Seção única	2 Seções		
$L_b$ [mm]	122,9	114,3	112,5	107,7	114,0
$L_1$ [mm]	...	...	10,7	...	6,3
$L_2$ [mm]	...	...	52,8	...	57,2

Tabela 10 – Comparação entre valores identificados e medidos – R = 41 kΩ (conclusão)

Parâmetro	Sistema Composto			Viga primária	Valores medidos
	Harvester 1 GL	Seção única	2 Seções		
$L_h$ [mm]	58,7	54,8	63,5*	...	63,5
$x_h$ [mm]	81,8	72,5	70,1	...	50,0
$C_p$ [nF]	541	350	335	...	417
$\xi_b$	0,0146	0,0168	0,0178	0,0077	...
$\xi_h$	0,0007	0,0010	0,0012	...	...

FONTE: O autor (2022).

NOTA: \*O valor de  $L_h$  foi fixado em 63,5 mm.

## 5 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os modelos apresentados ajustaram bem as curvas experimentais. Em geral, foram obtidos parâmetros dentro do esperado. As maiores divergências entre os valores estimados e os valores identificados para esse modelo ocorreram no valor da capacitância e, principalmente, no ponto de acoplamento do *energy harvester*. A ausência de engastes perfeitos, além de fatores como desgaste dos parafusos da base da viga metálica e da cola que realiza o acoplamento entre as duas vigas, contribui para as variações dos parâmetros  $L_b$ ,  $L_h$ ,  $L_1$ ,  $L_2$  e  $x_h$ . Como o *harvester* possui sua base colada no sistema primário, é de esperar que os valores identificados para  $L_h$  sejam menores do que o comprimento total medido do *harvester*, pois o modelo considera um engaste perfeito apenas no extremo da viga e experimentalmente toda a base está engastada.

Com relação à parte elétrica, houve uma pequena divergência entre o valor de capacitância fornecido pelo fabricante, o valor medido e os valores identificados. A utilização do piezoelétrico em ensaios de vibração, como os realizados, pode fazer com que o valor obtido para a capacitância total do piezoelétrico ( $C_p$ ) varie. O valor fornecido pelo fabricante corresponde à viga piezoelétrica sem deformação, diferentemente do que ocorre nos experimentos.

O valor da frequência do pico da rigidez dinâmica equivalente encontrado, utilizando a identificação com o modelo para 1 grau de liberdade para o *harvester*, desprezando a influência elétrica, foi o mesmo simulado utilizando o modelo de elementos finitos. Foi possível perceber que a parte elétrica aumenta a frequência de ressonância. Nos modelos contínuos, os valores identificados divergiram em cerca de 7 Hz do pico da rigidez dinâmica simulada via métodos de elementos finitos. Essa divergência pode ser causada pelas diferenças entre as condições de contorno ideais simuladas e aquelas aplicadas experimentalmente, e pode ser estudada em trabalhos futuros.

Os valores das razões de amortecimento ( $\xi$ ) obtidas foram adequadas para o caso de amortecimento subcrítico (MACHADO *et al.*, 2020).

Nos experimentos para identificação utilizando o modelo de *harvester* contínuo, é possível perceber uma ressonância próxima dos 50 Hz. Esse pico corresponde a uma frequência de ressonância do sistema de excitação, o que foi confirmado em experimentos à parte, sem o sistema composto acoplado ao *shaker*.

É possível perceber também que o modelo matemático de 1 grau de liberdade para o *energy harvester* é um modelo limitado, pois não permite a identificação de  $x_h$ , e menos abrangente do que o modelo contínuo, de forma que os resultados foram mais precisos neste. Além disso, o modelo do sistema composto considerando o *harvester* com 2 seções foi o que trouxe os menores erros para  $x_h$ , por ser um modelo mais completo.

No ensaio do *harvester* individual, foram obtidos valores de  $L_1$  maiores do que os medidos. Novamente, como o modelo considera um engaste perfeito, fazendo toda a viga piezoelétrica vibrar, o efeito do engaste experimental é compensado diminuindo a rigidez total do sistema, ou seja, aumentando o comprimento que possui a base de polyimide, que é mais flexível.

Os ensaios com as vigas individuais permitiram a validação dos modelos do sistema composto, identificando valores de comprimento e amortecimento próximos coerentes com aqueles esperados.

Por fim, a variação da resistência elétrica externa mostrou que uma alta resistência gera maiores tensões elétricas, como era esperado. Além disso, os ajustes de curva com resistências diferentes trouxeram resultados próximos.

## 6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 6.1 CONCLUSÕES GERAIS

No presente trabalho foi apresentada e validada experimentalmente uma metodologia para a identificação de parâmetros e a otimização de potência elétrica gerada de um sistema de *Energy Harvesting* composto por uma viga de aço engastada-livre e por uma viga piezoelétrica (*energy harvester*) fixada na viga de aço. Para desenvolver esta metodologia, foi proposto um modelo equivalente do *harvester* a partir de sua rigidez dinâmica equivalente na base. Vários modelos individuais para o *harvester* foram propostos e testados experimentalmente, com 1 e múltiplos graus de liberdade e também a partir da complexidade da viga piezoelétrica, com uma e duas seções. Além disso, o trabalho também apresentou a FRF de tensão-aceleração e sua dedução utilizando a rigidez equivalente.

O sistema de *Energy Harvesting* apresentado é capaz de gerar energia em uma faixa de frequências de excitação mais ampla do que um sistema composto por uma única viga piezoelétrica. O acoplamento de outra viga piezoelétrica é de alto custo, além de complexo. O acoplamento de uma viga de aço ao *harvester*, por outro lado, é mais simples e capaz de adicionar e alterar as frequências naturais do conjunto, de forma a sintonizar as frequências naturais do sistema com as frequências de excitação externas.

A modelagem do *energy harvester* como uma mola com rigidez dinâmica equivalente dependente da frequência de excitação ( $K_{eq} = K_{eq}(\Omega)$ ), que possui todas as suas características dinâmicas, mecânicas e elétricas, é inédita. Esta modelagem pode ser utilizada com diferentes modelos de sistema de base. Além disso, o modelo apresentado pode ser utilizado para identificar um sistema físico deste tipo e/ou otimizar seus parâmetros físicos, a fim de gerar a potência máxima de energia em uma faixa de frequências desejada (faixa de operação).

Os ajustes de curvas para as identificações com cada modelo ocorreram de forma satisfatória. Foi possível perceber a evolução entre os modelos apresentados. Com os modelos de vigas individuais, foi possível validar os modelos para o sistema composto. Alguns parâmetros obtiveram valores diferentes do esperado, mesmo nos modelos mais completos, em especial a posição do engaste  $x_h$ , o que pode ter ocorrido devido à ausência de engastes perfeitos, além de fatores como desgaste dos

parafusos da base da viga metálica e da cola que realiza o acoplamento entre as duas vigas.

O modelo de 1 grau de liberdade para o *energy harvester* não seria útil otimizando o valor de  $x_h$ , pois foi o modelo que apresentou a maior divergência neste parâmetro (quase 70% com relação ao valor medido). Apesar disso, é o modelo mais simples de ser implementado, exige menos tempo computacional e pode ser utilizado identificando o valor de  $x_h$  e otimizando outros parâmetros, como  $L_b$  e  $L_h$ . Por outro lado, o modelo contínuo com duas seções para o piezoelétrico foi o que apresentou os melhores resultados, podendo ser utilizado para otimização de outros parâmetros do sistema composto, de modo a se obter a máxima geração de potência em uma faixa de frequências determinada. Contudo, é o modelo mais complexo e que exige maior capacidade computacional.

Vale ressaltar ainda que o modelo linear estudado é válido para pequenas acelerações na base, como foi o caso dos experimentos realizados. Stanton *et al.* (2011) e Leadenham *et al.* (2015) demonstraram que essas acelerações devem ser em torno de 0,1 g. Para maiores amplitudes, ou para a obtenção de um modelo mais preciso também em pequenas amplitudes, modelos não lineares devem ser considerados, tanto para as equações mecânicas, quanto para as equações elétricas.

## 6.2 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

A partir do estudo deste e de outros trabalhos relacionados, algumas linhas de trabalhos são propostas. Em um primeiro momento, é sugerida a realização do projeto ótimo do sistema composto, a partir da metodologia apresentada na Seção 3.5, de modo a encontrar os parâmetros ótimos que possibilitem a máxima geração de energia dentro de uma faixa de frequências desejada. A validação experimental do sistema ótimo também pode ser realizada.

O estudo das divergências entre valores identificados e valores simulados/experimentais também pode ser realizado. Os modelos podem ser revisados de modo a se explicar pequenas discrepâncias obtidas, como nos valores de rigidez dinâmica simulada e identificada para os casos da viga piezoelétrica contínua.

Em outra linha, é proposto o desenvolvimento de um trabalho que leve em conta as não linearidades do sistema, tanto mecânicas quanto elétricas, para realizar

a identificação e mensurar o erro cometido ao se considerar o sistema linear para diferentes amplitudes de aceleração na base. O sistema ótimo pode então ser projetado a partir deste novo modelo.

Por fim, seria de grande proveito o estudo do material piezoelétrico atuando também como um neutralizador para a viga metálica. O sistema pode ser analisado e projetado para minimizar as vibrações da viga base metálica e, simultaneamente, maximizar a geração de energia.

## REFERÊNCIAS

- ACCIANI, G.; MODUGNO, F. di; GELAO, G. Comparative Studies of Piezoelectric Harvester Devices. *In: WILLIAMS, Renee. **Energy Harvesting: technology, methods and applications***. Nova Iorque: Nova Science Publishers, 2016. p. 1-18.
- AGUIRRE, L. A. **Introdução À Identificação De Sistemas**: técnicas lineares e não lineares: teoria e aplicação. 4. ed. Belo Horizonte: UFMG, 2014.
- ANTON, S. R.; SODANO, H. A. A review of power harvesting using piezoelectric materials (2003-2006). **Smart Materials and Structures**, v. 16, n. 3, 2007.
- ARAÚJO, L. O. **Identificação e controle de algumas classes de sistemas não-estacionários**. 148 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Elétrica, Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2006.
- ARNAU, A.; SOARES, D. Fundamentals of Piezoelectricity. *In: VIVES, Antonio Arnau. **Piezoelectric Transducers and Applications***. 2. ed. Valencia: Springer, 2008. Cap. 1. p. 1-38.
- ARORA, J. S. **Introduction to Optimum Design**. 3. ed. Iowa City: Academic Press, 2012. 919 p.
- ÅSTRÖM, K. J. The future of control. **Modeling, Identification And Control: A Norwegian Research Bulletin**, Lund, v. 15, n. 3, p. 127-134, 1994.
- ÅSTRÖM, K. J.; BOHLIN, T. Numerical Identification of Linear Dynamic Systems from Normal Operating Records. *In: HAMMOND, P. H. (ed.). **Theory of Self-Adaptive Control Systems***. Teddington: Plenum Press, 1966.
- ÅSTRÖM, K.J.; EYKHOFF, P. System identification: A survey. **Automatica**, [s.l.], v. 7, n. 2, p. 123-162, mar. 1971.
- BALDISSERRI, C.; GARDINI, D.; GALASSI, C. Sharp silicon/lead zirconate titanate interfaces by electrophoretic deposition on bare silicon wafers and post-deposition sintering. **Sensors And Actuators A: Physical**, [s.l.], v. 174, p. 123-132, fev. 2012.
- BEEBY, S.; WHITE, N. **Energy Harvesting for Autonomous Systems**. Norwood: Artech House, 2010. 308 v.
- BEEBY, S P; TUDOR, M J; WHITE, N M. Energy harvesting vibration sources for microsystems applications. **Measurement Science And Technology**, [s.l.], v. 17, n. 12, p. 175-195, 26 out. 2006.
- BOISSEAU, S.; DESPESSE, G.; AHMED, B. Electrostatic Conversion for Vibration Energy Harvesting. **Small-Scale Energy Harvesting**, Londres, p. 1-39, 31 out. 2012.
- BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M. **Time Series Analysis**: forecasting and control. São Francisco: Holden Day, 1976.

CADY, W. G. **Piezoelectricity (An Introduction to the Theory and Applications of Electromechanical Phenomena in Crystals)**. 2. ed. Nova Iorque: Dover Publication, Inc., 1964. 2 v.

CASTI, J. L. **Dynamical systems and their applications: linear theory**. Nova Iorque: Academic Press, 1977.

COELHO, M. A. J. **Avaliação e análise de um sistema de micro geração de energia baseado no efeito piezoelétrico**. 2015. 85 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

COOK-CHENNAULT, K. A.; THAMBI, N.; SASTRY, A. M. Powering MEMS portable devices-a review of non-regenerative and regenerative power supply systems with special emphasis on piezoelectric energy harvesting systems. **Smart Materials And Structures**, [s./], v. 17, n. 4, p. 1-33, 9 jun. 2008.

CURIE, J.; CURIE, P. Développement par compression de l'électricité polaire dans les cristaux hémihédres à faces inclinées. **Bulletin de La Société Minéralogique de France**, [s./], v. 3, n. 4, p. 90-93, 1880.

CURIE, J.; CURIE, P. Sur l'électricité polaire dans les cristaux hémihédres à faces inclinées. **CR Acad Sci Gen**, [s./], v. 91, p. 383-386, 1880.

DAVIS, M. H. A.; VINTER, R. B. **Stochastic Modelling and Control**. Londres: Chapman And Hall, 1985.

DEPEXE, M. D. **Concepção de um circuito Energy Harvesting aplicado a redes de sensores sem fio para sistemas de iluminação**. 2014. 116 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Elétrica, Centro de Tecnologia, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2014.

DOEBELIN, E. O. **System Modeling and Response: theoretical and experimental approaches**. Nova Iorque: John Wiley & Sons, 1980.

ERTURK, A.; INMAN, D. J. A Distributed Parameter Electromechanical Model for Cantilevered Piezoelectric Energy Harvesters. **Journal Of Vibration And Acoustics**, [s./], v. 130, n. 4, p. 1-15, ago. 2008.

ERTURK, A.; INMAN, D. J. An experimentally validated bimorph cantilever model for piezoelectric energy harvesting from base excitations. **Smart Materials And Structures**, [s./], v. 18, n. 2, 025009, 13 jan. 2009.

ERTURK, A.; INMAN, D. J. Issues in mathematical modeling of piezoelectric energy harvesters. **Smart Materials and Structures**, v. 17, n. 6, 2008.

ERTURK, A.; INMAN, D. J. **Piezoelectric Energy Harvesting**. [s./]: John Wiley & Sons, Ltd, 2011. 402 p.

ESPÍNDOLA, J. J. e SILVA, H. P. Modal reduction of vibrations by dynamic neutralizers, *In: Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference*, San Diego, CA, p. 1367–1373, 1992.

FARIA, A. W. **Modelagem por elementos finitos de placas compostas dotadas de sensores e atuadores piezoelétricos: implementação computacional e avaliação numérica**. 2006. 106 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

FERRARI, M. *et al.* Piezoelectric multifrequency energy converter for power harvesting in autonomous microsystems. **Sensors And Actuators A: Physical**, [s.l.], v. 142, n. 1, p. 329-335, mar. 2008.

FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. **Caos: uma introdução**. São Paulo: Edgard Blucher, 1994.

GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. **Classical Mechanics**. 3. ed. [s.l.]: Addison Wesley, 2000. 638 p.

IACONIS, F. R. **Cosechador de energia de bajo costo a partir de osciladores acoplados**. 2016. 80 f. TCC (Graduação) - Curso de Física, Departamento de Física, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 2016.

IEEE. IEEE Standard on Piezoelectricity. **Ansi/ieee Std 176-1987**, [s.l.], p. 1-50, jun. 1988.

KALMAN, R. E.; FALB, P.L.; ARBIB, M.A. **Topics in Mathematical System Theory**. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1969.

KHENG, Y.; KUMAR, S. Review of Energy Harvesting Technologies for Sustainable WSN. **Sustainable Wireless Sensor Networks**, [s.l.], p. 15-43, 14 dez. 2010.

KIM, H. S.; KIM, J.-H.; KIM, J. A review of piezoelectric energy harvesting based on vibration. **International Journal Of Precision Engineering And Manufacturing**, [s.l.], v. 12, n. 6, p. 1129-1141, dez. 2011. Springer Science and Business Media LLC.

KLAMKIN, M. S. (ed.). **Mathematical Modeling**: classroom notes in applied mathematics. Philadelphia: Siam, 1987.

KOKA, A.; ZHOU, Z.; SODANO, H. A. Vertically aligned BaTiO<sub>3</sub>nanowire arrays for energy harvesting. **Energy Environ. Sci.**, [s.l.], v. 7, n. 1, p. 288-296, 2014.

KRANZ, B.; BENJEDDOU, A.; DROSSEL, W.-G. Numerical and experimental characterizations of longitudinally polarized piezoelectric d 15 shear macro-fiber composites. **Acta Mechanica**, [s.l.], v. 224, n. 11, p. 2471-2487, 14 ago. 2013.

KUNDU, S.; NEMADE, H. B. Modeling and Simulation of a Piezoelectric Vibration Energy Harvester. **Procedia Engineering**, [s.l.], v. 144, p. 568-575, 2016.

LAGARIAS, J. C. *et al.* Convergence Properties of the Nelder-Mead Simplex Method in Low Dimensions. **Siam Journal On Optimization**, [s.l.], v. 9, n. 1, p. 112-147, jan. 1998.

LAGRANGE, J.-L. **Mécanique Analytique**. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

LEADENHAM, S.; ERTURK, A. Unified nonlinear electroelastic dynamics of a bimorph piezoelectric cantilever for energy harvesting, sensing, and actuation. **Nonlinear Dynamics**, [s. l.], v. 79, n. 3, p. 1727-1743, 6 nov. 2014.

LERCH, R. Simulation of piezoelectric devices by two- and three-dimensional finite elements. **Ieee Transactions On Ultrasonics, Ferroelectrics And Frequency Control**, [s.l.], v. 37, n. 3, p. 233-247, maio 1990. Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE).

LIMA, W. B. **Transdutores de Deformação a Base de Sensores Piezoelétricos**. 2013. 100 p. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2013.

LJUNG, L. **System Identification: theory for the user**. 2. ed. Linkoping: Prentice Hall Information And System Sciences Series, 1987.

LU, F.; LEE, H. P.; LIM, S. P. Modeling and analysis of micro piezoelectric power generators for micro-electromechanical-systems applications. **Smart Materials And Structures**, [s.l.], v. 13, n. 1, p. 57-63, 25 nov. 2003.

MACHADO, S. P. *et al.* A piezoelectric beam model with geometric, material and damping nonlinearities for energy harvesting. **Smart Materials And Structures**, [s.l.], v. 29, n. 9, p. 1-15, 11 ago. 2020.

MOHEIMANI, S. O. R.; FLEMING, A. J. **Piezoelectric Transducers for Vibration Control and Damping**. Londres: Springer, 2006.

MONERAT, G. A. *et al.* O Formalismo Variacional de Lagrange e Hamilton no Ensino de Mecânica Básica na Graduação em Engenharia. **Revista de Ensino de Engenharia**, [s.l.], v. 26, n. 1, p. 9-17, 30 jun. 2007.

MORETTI, T. B. **Desenvolvimento e caracterização do transdutor piezoelétrico de potência e da pinça laparoscópica para o Projeto do Bisturi Ultrassônico Nacional**. 2014. 112 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia de Materiais, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2014.

MUTHALIF, A. G. A.; NORDIN, N. H. D. Optimal piezoelectric beam shape for single and broadband vibration energy harvesting: Modeling, simulation and experimental results. **Mechanical Systems and Signal Processing**, v. 54, p. 417-426, 2015.

NG, T. H.; LIAO, W. H. Sensitivity Analysis and Energy Harvesting for a Self-Powered Piezoelectric Sensor. **Journal Of Intelligent Material Systems And Structures**, [s.l.], v. 16, n. 10, p. 785-797, out. 2005.

OLIVEIRA, T.; LADEIRA, D. G. **Princípio de d'Alembert e Equações de Lagrange**. 2016. 31 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Universidade Federal de São João Del-Rei, São João Del-Rei, 2016.

OSINAGA, S. M.; MACHADO, S. P.; FEBBO, M. On the role of nonlinear piezoelectric constitutive parameters in the dynamic response of clamped-clamped axially loaded beams. **Journal Of Sound And Vibration**. Bahía Blanca, p. 1-28. abr. 2021.

PAPOULIS, A. **Probability, Random Variables, and Stochastic Processes**. Nova Iorque: McGraw-Hill, 1991.

PIEZO.COM. **Piezoelectric Bending Transducer**. Disponível em: <https://piezo.com/collections/piezoelectric-actuators-motors/products/piezoelectric-bending-transducer-q220-h4br-2513yb>. Acesso em: 30 out. 2020.

POZO *et al.* Energy Harvesting Technologies and Equivalent Electronic Structural Models - Review. **Electronics**, [s.l.], v. 8, n. 5, p. 486-517, 30 abr. 2019.

PREUMONT, A. **Vibration Control of Active Structures: An Introduction**. 2. ed. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. 364 p.

PRIYA, S. *et al.* A Review on Piezoelectric Energy Harvesting: materials, methods, and circuits. **Energy Harvesting And Systems**, [s.l.], v. 4, n. 1, p. 3-39, 27 ago. 2019.

PRIYA, S.; INMAN, D. J. **Energy Harvesting Technologies**. Berlim: Springer, 2009.

RAO, S. S. **Mechanical Vibrations**. 6. ed. [s.l.], Hoboken: Pearson Education Inc., 2017.

RAO, S. S. **Vibration of Continuous Systems**. 2. ed. [s.l.], John Wiley & Sons, Inc., 2019.

ROCHA, R. T. **Comportamento dinâmico não-linear em fenômenos de colheita de energia usando dispositivos baseados em materiais piezoelétricos em estruturas apertadas**. 2014. 72 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Faculdade de Engenharia, 2014.

RODRIGUES, G. G. **Identificação de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares Utilizando Modelos NARMAX Polinomiais: aplicação a sistemas reais**. 2015. 127 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2015.

ROUNDY, S.; WRIGHT, P. K. A piezoelectric vibration based generator for wireless electronics. **Smart Materials and Structures**, v. 13, n. 5, p. 1131–1142, 2004.

ROUNDY, S. *et al.* Improving Power Output for Vibration-Based Energy Scavengers. **Ieee Pervasive Computing**, [s.l.], v. 4, n. 1, p. 28-36, jan. 2005.

SHEN, D.; CHOE, S.-Y.; KIM, D.-J. Analysis of Piezoelectric Materials for Energy Harvesting Devices under High-g Vibrations. **Japanese Journal Of Applied Physics**, [s.l.], v. 46, n. 10, p. 6755-6760, 9 out. 2007.

SHEN, D.; CHOE, S.-Y.; KIM, D.-J. Comparison of Piezoelectric Materials for Vibration Energy Conversion Devices. **Mrs Proceedings**, [s.l.], v. 966, p. 07-34, 2006.

STANTON, S. C. *et al.* Nonlinear nonconservative behavior and modeling of piezoelectric energy harvesters including proof mass effects. **Journal Of Intelligent Material Systems And Structures**, [s.l.], v. 23, n. 2, p. 183-199, jan. 2012. SAGE Publications.

TORRES, P. E. C. **Energy Harvest: recolha de energia em vibrações**. 2015. 90 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Eletrotécnica e de Computadores, Universidade da Beira Interior, Covilhã, 2015.

TICHÝ, J.; ERHART, J.; KITTINGER, E. **Fundamentals of Piezoelectric Sensorics: mechanical, dielectric, and thermodynamical properties of piezoelectric materials**. [s.l.]: Springer, 2010.

VIVES, A. A. (ed.). **Piezoelectric Transducers and Applications**. 2. ed. Berlim: Springer, 2004. 319 p.

WANG, Z. L.; SONG, J. Piezoelectric Nanogenerators Based on Zinc Oxide Nanowire Arrays. **Science**, [s.l.], v. 312, n. 5771, p. 242-246, 14 abr. 2006. American Association for the Advancement of Science (AAAS).

WEBSTER, J. G.; EREN, H. (ed.). **Measurement, Instrumentation, and Sensors Handbook: spatial, mechanical, thermal, and radiation measurement**. 2. ed. [s.l.]: Crc Press, 2017. 1640 p.

WILLIAMS, C. B.; YATES, R. B. Analysis of a micro-electric generator for microsystems. **Sensors And Actuators A: Physical**, [s.l.], v. 52, n. 1-3, p. 8-11, mar. 1996.

WILLIAMS, R. (ed.). **Energy Harvesting, technology methods and applications Complimentary Contributor Copy**. New York: Nova Science Publishers, 2016.

ZHANG, X. *et al.* Two-dimensional MoS<sub>2</sub>-enabled flexible rectenna for Wi-Fi-band wireless energy harvesting. **Nature**, v. 566, n. 7744, p. 368–372, 2019.