

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

VICTOR SLOBODA

MODELAGEM COMPUTACIONAL DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE
AÇO

CURITIBA

2022

VICTOR SLOBODA

MODELAGEM COMPUTACIONAL DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE
AÇO

Trabalho apresentado como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Ciências pelo Programa de Pós Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia do Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Roberto Dalledone Machado, DEng

Coorientador: Prof. Ricardo Pieralisi, DEng

CURITIBA

2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Sloboda, Victor.

Modelagem computacional de concreto reforçado com fibras de aço. / Victor Sloboda. – Curitiba, 2022.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone Machado.

Coorientador: Prof. Dr. Ricardo Pieralisi.

1. Engenharia - Modelos. 2. Métodos numéricos. 3. Concreto. 4. Aço.
I. Machado, Roberto Dalledone. II. Pieralisi, Ricardo. III. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia. VI. Título.



TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **VICTOR SLOBODA** intitulada: **MODELAGEM COMPUTACIONAL DE ESTRUTURAS DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO**, sob orientação do Prof. Dr. ROBERTO DALLEDONE MACHADO, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 17 de Agosto de 2022.

Assinatura Eletrônica

19/08/2022 10:47:12.0

ROBERTO DALLEDONE MACHADO

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

19/08/2022 10:08:26.0

JOÃO ELIAS ABDALLA FILHO

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

02/09/2022 14:56:05.0

LUIZ ANTONIO FARANI DE SOUZA

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ)

AGRADECIMENTOS

Primeiro, a Deus.

Depois, aos pais e à família, que demonstraram seu apoio durante todo o curso.

E mais especialmente, aos professores, em especial àqueles do PPGMNE da UFPR, que pavimentaram o caminho que levou aos resultados desta pesquisa. Agradeço muito ao Prof. Roberto Dalledone Machado pela paciência e atenção como orientador, e ao Prof. Ricardo Pieralisi pela diligência na coorientação.

Os agradecimentos são prestados também àqueles que, de certa forma, contribuíram para a realização desta dissertação, e também para os colegas de pesquisa, especialmente Thiago de Oliveira Abeche, um grande amigo que esteve junto nessa caminhada e prestou ajuda muito útil, e Bernardo Augusto Opolski, cujos resultados de pesquisa serviram de base para este trabalho.

Presto uma homenagem especial a meu grande amigo e colega da graduação Felipe José Gasparin, que infelizmente nos deixou no início de 2022 por conta de um trágico acidente, mas que demonstrou apoio a mim quando ingressei no curso de Mestrado.

RESUMO

Novas tecnologias de construção são desenvolvidas visando melhorar o desempenho estrutural. Uma tecnologia muito promissora é a do concreto reforçado com fibras de aço (CRFA), que consiste em acrescentar fibras de aço na mistura do concreto, junto com as armaduras de aço. O concreto é um material frágil cuja resistência à tração é muito inferior à resistência à compressão. As armaduras de aço incrementam o comportamento à tração e garantem mais ductilidade ao concreto. As fibras de aço realizam um trabalho suplementar e aumentam a resistência à fissuração e ao lascamento. O uso de CRFA é recomendado em túneis, pontes, pavimentos, tubulações de esgoto (situações nas quais as tensões de tração são consideráveis) e estruturas de concreto pré-fabricado. Embora o CRFA seja considerado promissor, ainda existem poucos modelos computacionais confiáveis para analisar e prever o comportamento do CRFA. A distribuição das fibras é aleatória, porém fortemente influenciada pelo lançamento, tornando o concreto anisotrópico. Além da distribuição, diversos atributos das fibras (por exemplo, comprimento, ângulo, forma e profundidade cravada) também intervêm no comportamento do CRFA. Essas variações dificultam a modelagem. É possível observar que as fibras possuem um considerável papel como ponte de transferência de tensões em fissuras. Para desenvolver este trabalho, usou-se uma abordagem computacional, por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), e o método de Newton-Raphson para se proceder com a análise não linear, incluindo-se também a técnica de comprimento de arco para se obter o trecho descendente da curva carga-deslocamento. O comportamento do material depois do início da fissuração foi implementado utilizando-se um modelo de dano, baseado em Mazars, por meio das equações da Mecânica do Dano Contínuo. Os resultados são comparados com dados experimentais obtidos de testes de flexão e encontrados na literatura e mostram boa aderência e relativa aproximação com esses resultados.

Palavras-chaves: Concreto; estrutura; fibra de aço; modelagem; fissuração.

ABSTRACT

New building technologies are developed with the goal of improving structural performance. One very promising technology is the steel fiber reinforced concrete (SFRC), which consists in adding steel fibers in the concrete mixture together with steel reinforcement. Concrete is a fragile material whose tensile resistance is very lower than compressive. Steel reinforcement enhances the tensile behavior and grants more ductility to concrete. Steel fibers make supplementary work and increase the cracking and spalling resistance. The usage of SFRC is recommended in tunnels, bridges, pavements, sewage ducts (situations in which tensile tensions are considerable) and precast concrete structures. Although SFRC is considered promising, there are still a few reliable computational models to analyze and predict the behavior of SFRC. The distribution of fibers is random but is strongly influenced by casting, making concrete anisotropic. Besides distribution, various attributes of the fibers (for example length, angle, shape and embedded depth) also intervene on SFRC behavior. These variations make the modeling difficult. It is possible to observe that the fibers have a considerable role in crack bridging. To develop this work, is used a numerical and computational approaching, by the Finite Element Method (FEM), and the Newton-Raphson method to proceed with nonlinear analysis, including also the arc length technique to obtain the descendant sector of the load-displacement curve. The behavior of the material after cracking was implemented using a damage model based on Mazars, by the equations of Mechanics of Continuum Damage. The results are compared with experimental data obtained from flexural tests and found in the literature and they show good adherence and reasonable approximation with such results.

Key-words: Concrete; structure; steel fiber; modeling; cracking.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 1 – ADOBE OU TIJOLO DE BARRO COM ADIÇÃO DE PALHA	19
FIGURA 2 – CORPO DE PROVA DE CONCRETO COM FIBRAS DE AÇO . .	20
FIGURA 3 – TÚNEL RODOVIÁRIO COM REVESTIMENTO DE CRFA	21
FIGURA 4 – TUBULAÇÕES DE ESGOTO CONSTITUÍDAS DE CRFA	22
FIGURA 5 – PISO INDUSTRIAL FEITO COM CRFA	22
FIGURA 6 – TRINCAS EM VIADUTO NA CIDADE DE CURITIBA (PR), SETEM- BRO DE 2019	24
FIGURA 7 – MISTURA DE CONCRETO COM FIBRAS NO ESTADO FRESCO	24
FIGURA 8 – DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DO CONCRETO À TRA- ÇÃO E À COMPRESSÃO	27
FIGURA 9 – DIFERENTES TIPOS DE FIBRAS (POLIMÉRICAS, AÇO, VIDRO)	28
FIGURA 10 – DIFERENTES FORMATOS DE FIBRAS DE AÇO	29
FIGURA 11 – DIFERENTES POLARIZAÇÕES DE FIBRAS CONFORME A DI- REÇÃO DE LANÇAMENTO E DISPOSIÇÃO DE FORMAS	30
FIGURA 12 – DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DO CONCRETO SOB COM- PRESSÃO UNIAXIAL	31
FIGURA 13 – REDUÇÃO DA CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES DEVIDA ÀS FIBRAS	32
FIGURA 14 – COMPARAÇÃO ENTRE CONCRETO CONVENCIONAL E RE- FORÇADO COM FIBRAS SOB COMPRESSÃO	34
FIGURA 15 – FISSURAÇÃO DE CORPOS DE PROVAS DE CONCRETO SEM FIBRAS E COM 3% DE FIBRAS SOB COMPRESSÃO	35
FIGURA 16 – ESQUEMA DE UMA FISSURA MOSTRANDO AS FIBRAS E ZO- NAS DE TENSÃO	35
FIGURA 17 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM UMA PEÇA SUJEITA À FLEXÃO	36
FIGURA 18 – DIAGRAMAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA O CONCRETO COM FIBRAS SOB TRAÇÃO	38
FIGURA 19 – DIAGRAMAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA O CONCRETO COM FIBRAS SOB FLEXÃO	39
FIGURA 20 – DIAGRAMAS CARGA-DESLOCAMENTO PARA O CONCRETO COM FIBRAS SUJEITO A ESFORÇOS DE CISALHAMENTO . .	40
FIGURA 21 – ESQUEMA DO ENSAIO DE TRÊS PONTOS À FLEXÃO, DIMEN- SÕES EM CENTÍMETROS	42
FIGURA 22 – DIAGRAMA CARGA VS. CMOD	43

FIGURA 23 – DIAGRAMA MULTILINEAR TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA O CONCRETO COM FIBRAS SOB TRAÇÃO	43
FIGURA 24 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UM ELEMENTO 2D SOB DEFORMAÇÕES	49
FIGURA 25 – EXEMPLO DE REFINAMENTO DE ELEMENTO RETANGULAR .	54
FIGURA 26 – ELEMENTO GENÉRICO DE 9 NÓS RELACIONADO AO ELEMENTO RETANGULAR ISOPARAMÉTRICO	56
FIGURA 27 – FUNÇÕES POLINOMIAIS DE LAGRANGE DE SEGUNDO GRAU PARA O ELEMENTO RETANGULAR ISOPARAMÉTRICO QUADRÁTICO DE 9 NÓS	57
FIGURA 28 – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON	62
FIGURA 29 – FLUXOGRAMA PARA O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON . .	63
FIGURA 30 – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO	63
FIGURA 31 – FLUXOGRAMA PARA O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO	64
FIGURA 32 – GRÁFICO DE UM PROBLEMA NÃO LINEAR RESOLVIDO POR PROCESSO ITERATIVO (PARÂMETRO DE CARGA <i>VERSUS</i> DESLOCAMENTO)	65
FIGURA 33 – DIAGRAMA BILINEAR TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA O AÇO .	71
FIGURA 34 – FLUXOGRAMA PARA A ANÁLISE LINEAR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	75
FIGURA 35 – MALHA DO ENSAIO DE TRÊS PONTOS – 132 ELEMENTOS RETANGULARES DE 4 NÓS	76
FIGURA 36 – ESTUDO DO REFINO DE MALHA E ESCOLHA ENTRE ELEMENTO CST OU RETANGULAR – ENSAIO DE 3 PONTOS, ANÁLISE LINEAR, CARGA DE 1 KN	78
FIGURA 37 – MALHA DO ENSAIO DE TRÊS PONTOS – 132 ELEMENTOS QUADRÁTICOS DE 9 NÓS	79
FIGURA 38 – ERRO PERCENTUAL EM RELAÇÃO À FLECHA ANALÍTICA, EM FUNÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE – ELEMENTO RETANGULAR LINEAR, QUADRÁTICO E CÚBICO – ENSAIO DE 3 PONTOS, ANÁLISE LINEAR, CARGA DE 1 KN	79
FIGURA 39 – ESQUEMA DO ENSAIO UNIAXIAL	83
FIGURA 40 – ESQUEMA DO ENSAIO DE VIGA-PAREDE À FLEXÃO	83
FIGURA 41 – ESQUEMA DO ENSAIO DE VIGA BIAPOIADA À FLEXÃO	84
FIGURA 42 – ESQUEMA DO ENSAIO DE VIGA-LAJE À FLEXÃO, DIMENSÕES EM CENTÍMETROS	85

FIGURA 43 – POSICIONAMENTO DAS ARMADURAS DE AÇO NA VIGA DO ENSAIO DE 4 PONTOS	86
FIGURA 44 – MALHA DO CORPO DE PROVA COM 32 ELEMENTOS	87
FIGURA 45 – COMPARATIVO ENTRE DIAGRAMAS CARGA-DESLOCAMENTO PARA ENSAIO UNIAXIAL À COMPRESSÃO – SEM FIBRAS, VARIAÇÃO DO TAMANHO DA MALHA	88
FIGURA 46 – COMPARATIVO ENTRE DIAGRAMAS CARGA-DESLOCAMENTO PARA ENSAIO UNIAXIAL À TRAÇÃO – SEM FIBRAS, VARIAÇÃO DO TAMANHO DA MALHA	88
FIGURA 47 – COMPARATIVO ENTRE DIAGRAMAS CARGA-DESLOCAMENTO PARA ENSAIO UNIAXIAL À COMPRESSÃO AO SE VARIAR TEOR DE FIBRAS	89
FIGURA 48 – COMPARATIVO ENTRE DIAGRAMAS CARGA-DESLOCAMENTO PARA ENSAIO UNIAXIAL À TRAÇÃO AO SE VARIAR TEOR DE FIBRAS	90
FIGURA 49 – MALHA DA VIGA-PAREDE COM 120 ELEMENTOS	90
FIGURA 50 – DIAGRAMA CARGA-DESLOCAMENTO – VIGA-PAREDE	91
FIGURA 51 – MALHA DE DANO PARA 52 KN – VIGA-PAREDE	91
FIGURA 52 – MALHA DE DANO PARA 52 KN – VIGA-PAREDE	91
FIGURA 53 – MALHA DE DANO PARA 51,75 KN – VIGA-PAREDE	92
FIGURA 54 – COMPARAÇÃO ENTRE CURVAS CARGA-DESLOCAMENTO (VIGA-PAREDE) – SEM FIBRAS, TEOR DE 0,25% E TEOR DE 0,5% DE FIBRAS EM VOLUME	93
FIGURA 55 – MALHA DA VIGA BIAPOIADA COM 540 ELEMENTOS	94
FIGURA 56 – DIAGRAMA CARGA-DESLOCAMENTO – VIGA BIAPOIADA ARMADA	95
FIGURA 57 – COMPARAÇÃO ENTRE CURVAS CARGA-DESLOCAMENTO (VIGA BIAPOIADA) – SEM FIBRAS, TEOR DE 0,25% E TEOR DE 0,5% DE FIBRAS EM VOLUME	96
FIGURA 58 – ESQUEMA DA MALHA PARA O ENSAIO DE VIGA-LAJE REFORÇADA COM BARRAS DE AÇO	97
FIGURA 59 – DIAGRAMA CARGA-DESLOCAMENTO PARA A VIGA-LAJE, MALHA DE 1152 ELEMENTOS QUADRÁTICOS, SEM FIBRAS – COMPARATIVO ENTRE PASSOS DE CARGA	98
FIGURA 60 – CURVAS OBTIDAS PELO PROGRAMA DE VIGA-LAJE, TEOR DE 0,25% DE FIBRAS, COMPARADA COM O ENSAIO EXPERIMENTAL	99
FIGURA 61 – CURVA OBTIDA PELO PROGRAMA DE VIGA-LAJE, TEOR DE 0,50% DE FIBRAS, COMPARADA COM O ENSAIO EXPERIMENTAL	99

FIGURA 62 – MALHA GLOBAL (À ESQUERDA) E ELEMENTO PADRÃO (À DIREITA) 112

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – TIPOS DE FIBRAS E ALGUNS ATRIBUTOS	28
TABELA 2 – PARÂMETROS PARA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA	58
TABELA 3 – VALORES RECOMENDADOS PARA OS PARÂMETROS – MO- DELO DE MAZARS	71
TABELA 4 – ENSAIO UNIAXIAL – ATRIBUTOS DOS MATERIAIS	83
TABELA 5 – VIGA-PAREDE – ATRIBUTOS DOS MATERIAIS	84
TABELA 6 – VIGA BIAPOIADA – ATRIBUTOS DOS MATERIAIS	85
TABELA 7 – VIGA-LAJE – ATRIBUTOS DOS MATERIAIS	86

LISTA DE ABREVIATURAS E DE SIGLAS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
ACI	American Concrete Institute
ASTM	American Society for Testing and Materials
CEN	European Committee for Standardization
CRF	Concreto Reforçado com Fibras
CRFA	Concreto Reforçado com Fibras de Aço
EHE	Instrucción Española del Hormigón Estructural
IBRACON	Instituto Brasileiro do Concreto
ISO	International Organization for Standardization
MEF	Método dos Elementos Finitos

LISTA DE SÍMBOLOS

S_D	área danificada do elemento
S	área de superfície do elemento
\tilde{S}	área sã do elemento
F_L	carga máxima para o regime linear no (ensaio de três pontos)
F_i	carga para abertura de fissura de (i-0,5) mm (ensaio de três pontos)
ν	coeficiente de Poisson
α_c	coeficiente ponderador de dano de Mazars à compressão
α_t	coeficiente ponderador de dano de Mazars à tração
$\langle \sigma \rangle_-$	componente negativa do vetor de tensões
ε_i^+	componente positiva de deformação na direção i
$\langle \sigma \rangle_+$	componente positiva do vetor de tensões
ξ	coordenada isoparamétrica horizontal
η	coordenada isoparamétrica vertical
D	dano isotrópico relativo do elemento
γ_{xy}	deformação angular no plano xy
ε_s	deformação do aço
$\varepsilon_{c,f}$	deformação do concreto antes do início da fissuração
$\tilde{\varepsilon}$	deformação efetiva (para análise de dano)
ε_e	deformação elástica do aço
ε_{eq}	deformação equivalente de um ponto de Gauss do elemento
ε_x	deformação linear na direção x
ε_{max}	deformação máxima antes do colapso
ε_{d0}	deformação para a qual o dano inicia
ε_p	deformação plástica do aço

$\varepsilon_{c,lim}$	deformação última admissível do concreto antes do colapso
δ	densidade relativa do material
ϕ	diâmetro da fibra
θ	distorção angular
$J(u)$	funcional de energia potencial total
$\{\Delta u\}$	incremento cumulativo de deslocamento do passo de carga
$\{\delta u\}$	incremento de deslocamento da iteração
$\{\delta u_g\}$	incremento de deslocamento devido ao resíduo de forças (técnica de comprimento de arco)
$\{\delta u_r\}$	incremento de deslocamento devido às forças externas (técnica de comprimento de arco)
$\delta\lambda$	incremento do parâmetro de carga da iteração
$\Delta\lambda$	incremento do parâmetro de carga do passo de carga
$[N]$	matriz das funções de forma (MEF)
$[B]$	matriz de derivadas de funções de forma
$[N_{x,y}]$	matriz de derivadas de funções de forma em relação às coordenadas cartesianas
$[\hat{N}_{\xi,\eta}]$	matriz de derivadas prescritas de funções de forma em relação às coordenadas isoparamétricas
$[L]$	matriz de operadores diferenciais
$[C]$	matriz de relações constitutivas do material
$[K]$	matriz de rigidez
$[K]^e$	matriz elementar de rigidez
$[J]$	matriz jacobiana
$[K(u)]$	matriz não linear de rigidez
E_{ci}	módulo de Young inicial do concreto
E'_s	módulo de elasticidade longitudinal do aço após o encruamento

\tilde{E}	módulo de elasticidade longitudinal efetivo (para análise de dano)
E_s	módulo de elasticidade longitudinal inicial do aço
E	módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young
λ	parâmetro de carga para a técnica de comprimento de arco
B_c	parâmetro exponencial de dano de Mazars à compressão
B_t	parâmetro exponencial de dano de Mazars à tração
A_c	parâmetro linear de dano de Mazars à compressão
A_t	parâmetro linear de dano de Mazars à tração
D_c	parcela de dano isotrópico do elemento à compressão
D_t	parcela de dano isotrópico do elemento à tração
W	pesos para integração numérica por quadratura de Gauss
f_t	resistência à tração
σ_s	resistência do aço à tração
f_{ck}	resistência média à compressão do concreto
f_{ctm}	resistência média à tração
f_{cm}	resistência média do concreto à compressão
$\tilde{\sigma}$	tensão efetiva (para análise de dano)
σ	tensão normal
σ_x	tensão normal na direção x
τ_{xy}	tensão tangencial no plano xy
$\delta J(u)$	variação do funcional de energia potencial total
$\{\varepsilon\}$	vetor de deformações
$\{u\}$	vetor de deslocamentos
$\{u\}^e$	vetor de deslocamentos do elemento
$\{f\}$	vetor de forças (forças internas no método de Newton-Raphson)
$\{q\}$	vetor de forças de superfície por unidade de superfície

$\{p\}$	vetor de forças de volume por unidade de volume
$\{r\}$	vetor de forças externas
$\{x\}$	vetor de resíduo de forças desbalanceadas
$\{\sigma\}$	vetor de tensões
$\{\sigma_0\}$	vetor de tensões iniciais
$\{f\}^e$	vetor elementar de forças
$\{f_q\}^e$	vetor elementar de forças de superfície
$\{f_p\}^e$	vetor elementar de forças de volume
$\{f_{\sigma_0}\}^e$	vetor elementar de forças iniciais
$\{o\}$	vetor nulo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	APLICAÇÕES DO CRFA	21
1.2	OBJETIVOS	23
1.3	JUSTIFICATIVA	23
1.4	ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO	25
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E TEÓRICA	26
2.1	MATERIAIS	26
2.1.1	O concreto	26
2.1.2	A fibra	27
2.1.3	Concreto reforçado com fibras como um material compósito	29
2.2	DESEMPENHO DO CRFA	30
2.2.1	A fibra e o desempenho do CRFA	32
2.2.2	Compressão	33
2.2.3	Tração	34
2.2.4	Flexão	36
2.2.5	Cisalhamento	40
2.2.6	Fissuração	40
2.3	ENSAIOS PADRONIZADOS	41
2.3.1	Ensaio de três pontos à flexão	42
2.3.2	Ensaio de flexão a quatro pontos	43
2.4	MODELAGEM COMPUTACIONAL	44
3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	46
3.1	O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)	46
3.1.1	Estado plano de tensões	48
3.1.2	Formulação pelo funcional de energia potencial total	49
3.1.3	Cálculo das matrizes elementares de rigidez	51
3.1.4	Refinamento	53
3.1.5	Elementos finitos isoparamétricos	54
3.1.6	Integração numérica	58
3.2	ANÁLISE NÃO LINEAR	59
3.2.1	Método de Newton-Raphson	61
3.2.2	Método de Newton-Raphson modificado	62
3.2.3	Técnica do comprimento de arco	62
3.2.4	Critérios de convergência	66
3.3	MECÂNICA DO DANO	66
3.3.1	Modelo de Dano de Mazars	68
3.3.2	Plasticidade do aço	70
4	MODELAGEM COMPUTACIONAL	72
4.1	TESTES PRÉ-SIMULAÇÕES	72

4.1.1	Teste 1: Elemento triangular <i>versus</i> elemento retangular	73
4.1.2	Teste 2: Escolha do elemento em relação ao grau	78
4.1.3	Teste 3: Carregamento incremental	80
4.2	NÃO LINEARIDADE	81
4.3	DESCRIÇÃO DOS PROBLEMAS SIMULADOS	82
4.3.1	Caso 1: Corpo de prova uniaxial	82
4.3.2	Caso 2: Viga-parede biengastada	83
4.3.3	Caso 3: Viga biapoçada armada	84
4.3.4	Caso 4: Viga-laje	85
5	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	87
5.1	CASO 1: CORPO DE PROVA UNIAXIAL	87
5.2	CASO 2: VIGA-PAREDE	89
5.3	CASO 3: VIGA BIAPOÇADA	92
5.4	CASO 4: VIGA-LAJE	95
6	CONCLUSÕES E SUGESTÕES	101
6.1	CONFRONTO ENTRE OBJETIVOS E RESULTADOS	101
6.2	SUGESTÕES PARA PRÓXIMOS TRABALHOS	102
6.3	POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS . . .	103
	REFERÊNCIAS	104
	APÊNDICE A – MATRIZES ELEMENTARES DE RIGIDEZ	110
A.1	MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR PARA ELEMENTO TRIANGULAR	110
A.2	MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR PARA ELEMENTO RETANGULAR	110
	APÊNDICE B – REARRANJO DE MATRIZES E VETORES	112
	APÊNDICE C – FUNÇÕES DE FORMA PARA ELEMENTOS ISO-	
	PARAMÉTRICOS	113
C.1	ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO RETANGULAR LINEAR	113
C.2	ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO RETANGULAR QUADRÁTICO . . .	114

1 INTRODUÇÃO

A construção civil é antiga e data das civilizações mais remotas, com o exemplo das Pirâmides do Egito, feitas com blocos de pedra; da Muralha da China, construída também com blocos de pedra intercalados com camadas de argila batida; das pontes e arcos da Roma Antiga, construídos com tijolos cerâmicos; e dos castelos medievais, feitos com grandes blocos de pedra. Com o tempo e o avanço da tecnologia, várias alternativas de construção surgem com o intuito de aprimorar o processo construtivo ou melhorar o desempenho da construção.

Em meados do século XIX, surgiu o concreto armado, que consiste em acrescentar barras de aço junto ao concreto. Essa tecnologia é largamente utilizada em construções de médio e grande porte. A ideia foi aprimorada mais tarde, próximo às décadas de 1960 e 1970 (BENTUR; MINDESS, 2006; NAAMAN, 2018), utilizando-se fibras em adição ou substituição às barras. Com isso, surgiu o Concreto Reforçado com Fibras (CRF). Essas fibras podem ser de diversos materiais, por exemplo, aço, carbono, vidro, geotêxteis, entre outras.

A adição de fibras na mistura de concreto pode parecer algo moderno e inovador, mas a ideia é análoga ao adobe (tijolos de barro com palha – vide FIGURA 1), dos tempos antigos da civilização egípcia.

FIGURA 1 – ADOBE OU TIJOLO DE BARRO COM ADIÇÃO DE PALHA



FONTE: Verde (2013).

Observa-se que o concreto é o material mais utilizado do mundo na construção civil e em obras de infraestrutura (FIGUEIREDO, 2011). Mesmo com as estruturas metálicas, que de maneira geral oferecem melhor desempenho estrutural e construção

mais limpa, o concreto ainda continua na liderança entre os materiais. Isso porque tem a vantagem de possuir custo de execução mais baixo, maior gama de formatos de construção devido à plasticidade do material no estado fresco e elevada resistência à compressão (MEHTA et al., 1994). Além disso, quando executado corretamente e com adequado controle de qualidade, observa-se um aumento na vida útil da estrutura e também na resistência à corrosão (característica esta observada principalmente nas regiões de alta salinidade) (MARCHETTI; BOTELHO, 2015). Por outro lado, o concreto é frágil e possui baixa resistência à tração, o que facilita o surgimento de fissuras.

Devido a essa deficiência, adicionam-se barras de aço, um material que resiste bem à tração, resultando então o concreto armado. Esse material passou a ter mais popularidade, principalmente nas edificações. Contudo, as seções transversais do concreto armado são bem heterogêneas, cujas regiões de maior sollicitação se localizam nas armaduras de aço. As fibras, diferentemente das barras de aço, distribuem as tensões de tração por toda a seção transversal da peça (KOSMATKA et al., 2002), e podem dispensar a necessidade de um setor no canteiro de obras para a confecção de armaduras, já que as fibras são acrescentadas diretamente na mistura. Essa distribuição das fibras pode ser percebida na FIGURA 2, na qual é ilustrado um corpo de prova constituído de Concreto Reforçado com Fibras de Aço (CRFA) e rompido, de modo a mostrar as fibras de aço.

FIGURA 2 – CORPO DE PROVA DE CONCRETO COM FIBRAS DE AÇO



FONTE: O autor.

O desempenho de uma estrutura de concreto é avaliado por vários parâmetros, por exemplo: a durabilidade, a resistência e o custo. As fibras de aço, por serem constituídas de um material relativamente caro, aumentam consideravelmente o custo da obra, porém oferecem resistência adicional à fissuração e, por consequência, prolongam a vida útil. O custo da estrutura de CRFA é viável com um teor ótimo de fibras, de modo que se obtenha melhor resistência e durabilidade para uma estrutura não muito mais onerosa.

Conforme comenta o código modelo FIB (2013), a principal vantagem da fibra é garantir a integridade da estrutura pós-fissuração, além de incrementar a resistência à tração.

1.1 APLICAÇÕES DO CRFA

Como o concreto reforçado com fibras possui melhor comportamento à tração que o concreto convencional, utiliza-se o concreto com fibras em estruturas bastante solicitadas por esforços de tração ou sujeitas à fissuração (CARVALHO et al., 2020). Segundo Figueiredo (2011), as estruturas que mais utilizam fibras são os pavimentos, seguidos do concreto projetado e das estruturas pré-fabricadas.

Os túneis rodoviários (exemplo ilustrado na FIGURA 3) são um exemplo dessas estruturas que fissuram frequentemente. As fissuras favorecem o lascamento do revestimento de concreto e, por isso, recomenda-se o reforço de fibras para minimizar esses riscos. Frequentemente, o revestimento desses túneis é constituído de concreto projetado (a mistura do concreto é bombeada para as paredes do túnel).

FIGURA 3 – TÚNEL RODOVIÁRIO COM REVESTIMENTO DE CRFA



FONTE: Mittal (2019).

Outro exemplo são as tubulações de esgoto (FIGURA 4), cuja ruptura causa transtornos incômodos à população. Muitas dessas tubulações são constituídas de concreto pré-fabricado. Nesse tipo de peça, as fibras têm substituído as armaduras convencionais (KOSMATKA et al., 2002).

Também se observam, com mais frequência, os pavimentos de concreto, uma alternativa ao asfalto. Os pavimentos rodoviários estão frequentemente sujeitos à tração e à fadiga; esta última se deve às cargas cíclicas oriundas da constante passagem

FIGURA 4 – TUBULAÇÕES DE ESGOTO CONSTITUÍDAS DE CRFA



FONTE: Mittal (2019).

de veículos. Os pisos industriais (FIGURA 5), devido ao tráfego de maquinário e das instalações pesadas, são bastante solicitados à tração.

FIGURA 5 – PISO INDUSTRIAL FEITO COM CRFA



FONTE: Mittal (2019).

As fibras podem ser utilizadas concomitantemente às barras de aço, acrescentadas em uma estrutura de concreto armado. Existem situações em que as fibras já substituem integralmente as armaduras convencionais (IKUMI et al., 2021), mas isso não implica dizer que o concreto armado convencional é uma tecnologia obsoleta. Com certeza, há aplicações em que o concreto armado convencional é preferível ao CRFA, como obras de pequeno porte nas quais a utilização de fibras encarece o empreendimento, e em estruturas cujos esforços são localizados (FIGUEIREDO, 2011).

1.2 OBJETIVOS

O objetivo principal deste trabalho é a modelagem computacional de estruturas de concreto, armado ou não, reforçado com fibras de aço, levando-se em consideração a Mecânica do Dano Contínuo aplicada em peças sujeitas a carregamentos monotônicos crescentes.

Para tanto, os seguintes objetivos específicos são propostos:

- Desenvolver e implementar um programa computacional, na linguagem Python, para análise de estruturas de concreto armado reforçadas com fibras de aço;
- Simular, por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), testes à tração, compressão e flexão de estruturas de CRFA sujeita a um carregamento monotônico;
- Simular o comportamento não linear de estruturas de concreto, considerando ou não a presença de fibras;
- Aplicar a Mecânica do Dano em peças de CRFA, utilizando-se um modelo baseado em Mazars (1984); e
- Analisar a influência do teor de fibras no comportamento das estruturas.

1.3 JUSTIFICATIVA

A ocorrência de incidentes catastróficos, veiculados pelos meios de comunicação, envolvendo o colapso de estruturas de concreto é um dos fatores para a escolha do assunto abordado. Exemplos dessas estruturas são os edifícios, pontes e viadutos; a FIGURA 6 mostra um viaduto rodoviário na cidade de Curitiba com sérios problemas de trincas.

Como o colapso de estruturas de concreto, que permite o desgaste e a corrosão das armaduras, é frequentemente a continuação de um agravamento da fissuração, muitas catástrofes poderiam ser evitadas ou seus efeitos poderiam ser menos intensos caso as estruturas colapsadas fossem de melhor qualidade. No caso da fissuração, as fibras poderiam ajudar a retardar o processo de aumento ou propagação de fissuras e conferir mais ductilidade ao concreto, já que a ruptura do concreto é frágil e repentina.

Os pavimentos rígidos de concreto que recebem alto tráfego de veículos pesados, por serem solicitados à tração, também fissuram. Com isso, é exigida a manutenção nos trechos danificados – cuja necessidade pode ter sua frequência reduzida quando há o reforço de fibras.

FIGURA 6 – TRINCAS EM VIADUTO NA CIDADE DE CURITIBA (PR), SETEMBRO DE 2019



FONTE: Paraná (2019).

Além disso, por mais antiga que seja a ideia de combinar fibras em um composto sólido, os materiais cimentícios com fibras ainda são pouco utilizados, haja vista o elevado custo, que muitas vezes acaba por inviabilizar a construção se esta não for de grande porte ou sujeita a elevados carregamentos. Existe também o fato de as fibras prejudicarem a trabalhabilidade da mistura, devido ao formato de filamentos (vide FIGURA 7).

FIGURA 7 – MISTURA DE CONCRETO COM FIBRAS NO ESTADO FRESCO



FONTE: Concreta (2019).

Outra razão é a relativa insipiência dessa tecnologia, principalmente no Brasil, em que ainda não há muitos dados de pesquisa sobre o concreto reforçado com fibras (FIGUEIREDO, 2011), e apenas recentemente surgiram normativas específicas, a exemplo da NBR-16935:2021. Em países como a Espanha, por exemplo, já existem normas especiais para concretos reforçados com fibras, por exemplo, a EHE (2008).

Por fim, muitos modelos constitutivos já existentes para o CRFA no momento não são capazes de simular fielmente as características do compósito, em função da aleatoriedade de distribuição das fibras (BITENCOURT JR et al., 2019).

Tanto a baixa qualidade de muitas estruturas de concreto quanto a falta de modelos confiáveis motivam o interesse por investigar mais a fundo como se comportam os concretos reforçados com fibras estruturais, a fim de que a tecnologia possa ser mais empregada futuramente.

1.4 ESTRUTURAÇÃO DO TRABALHO

Esta dissertação possui seis capítulos. Primeiramente, é feita uma introdução, com um apanhado histórico do concreto com fibras, uma apresentação dos objetivos almejados e também das razões que motivaram a realização do presente estudo.

Logo após, é feita uma revisão, em que se descreve o material utilizado no estudo, referenciando as obras de literatura como teses, dissertações, artigos e livros, seguida de um apanhado dos diversos conteúdos abordados na realização do estudo.

Inicia-se, então, o estudo com a formulação matemática e o equacionamento no capítulo posterior, no qual é descrito o Método dos Elementos Finitos, assim como os métodos iterativos empregados na solução de equações não lineares, e também as equações envolvidas na Mecânica do Dano.

Essas equações são aplicadas, no capítulo seguinte, no algoritmo computacional para a modelagem de um ensaio de resistência à flexão.

Os resultados obtidos pelos programas são comparados com dados presentes na literatura, num capítulo posterior, no qual também é realizada uma análise sobre esses resultados.

Por fim, discutem-se as conclusões e são feitas propostas e sugestões para trabalhos futuros.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E TEÓRICA

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns trabalhos relevantes e aspectos relativos ao concreto reforçado com fibras de aço. O concreto reforçado com fibras é um assunto bastante amplo, por isso, deve ser analisado sob diferentes pontos de vista. Por isso, faz-se necessária uma breve revisão bibliográfica.

Neste capítulo, serão descritos os diferentes materiais que compõem o CRFA, assim como será feita uma breve abordagem sobre os materiais compósitos em geral. Serão descritas, também, algumas características do CRFA, no que se refere ao desempenho mecânico. Serão brevemente abordados exemplos de ensaios padronizados para concretos com fibras e, por fim, será feita uma abordagem sobre a modelagem computacional de CRFA em si, referindo vários trabalhos tomados como base.

2.1 MATERIAIS

O CRFA é um material compósito constituído basicamente por uma matriz de concreto e pelas fibras de aço. Para o melhor entendimento a respeito desse material, serão apresentadas as definições e propriedades de cada um dos seus componentes.

2.1.1 O concreto

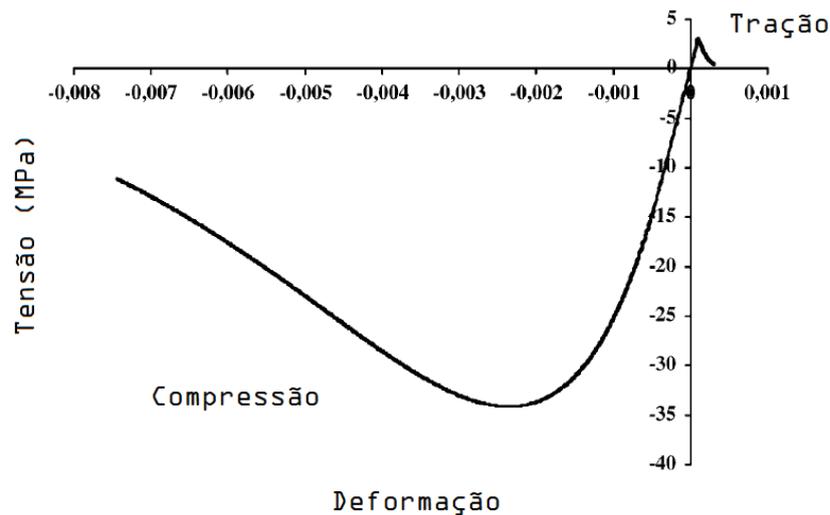
O concreto é um material que possui duas principais fases: a matriz de pasta de cimento e os agregados (miúdos e graúdos), por isso, é considerado um material heterogêneo (NAAMAN, 2018). Quanto menor for a escala de observação, mais evidente se torna essa heterogeneidade – a princípio, observada de longe, uma estrutura de concreto parece uniforme e homogênea.

Embora o concreto seja um material versátil, de baixo custo de execução e continue sendo largamente utilizado em obras de construção ((MEHTA et al., 1994); (MARCHETTI; BOTELHO, 2015)), existem algumas limitações.

Uma dessas limitações é a larga disparidade entre o comportamento sob tensões de compressão e tração: a resistência à esta última é muito baixa, característica que praticamente exige um reforço de aço na maioria das aplicações. Ao se plotar um diagrama tensão-deformação do concreto considerando tensões de compressão e tração, é possível notar essa brusca diferença entre as resistências, como na FIGURA 8, supondo um concreto de módulo de Young $E = 30 \text{ GPa}$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$ (PIJAUDIER-CABOT; MAZARS, 2001). Percebe-se que o concreto, quando submetido à compressão, apresenta comportamento inicialmente linear até o surgimento das fissuras. Após isso, o concreto perde rigidez e passa a apresentar um comportamento

não linear até o início do fenômeno de relaxação, isto é, diminuição da tensão residual da estrutura enquanto esta se deforma. Já sob tração, existe um trecho ascendente linear muito menor até o início da fissuração por tração. A ruptura é praticamente consecutiva a esse pico de tensão e existe uma baixíssima resistência residual.

FIGURA 8 – DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DO CONCRETO À TRAÇÃO E À COMPRESSÃO



FONTE: Pijaudier-Cabot e Mazars (2001), traduzido.

Outra limitação do concreto é a fragilidade, observada principalmente quando uma estrutura é solicitada à tração (por isso a deformação admitida pelo concreto à tração é tão baixa). O concreto armado possui resistência complementar à tração e ductilidade adicional, oferecida pelas armaduras de aço. Uma alternativa para incrementar esse comportamento do concreto é a adição de fibras (BITENCOURT JR et al., 2019), que são o foco deste trabalho, com ênfase nas fibras de aço.

2.1.2 A fibra

As fibras são filamentos que apresentam grande razão comprimento/diâmetro (também conhecida como fator de aspecto, do inglês, “aspect ratio”). De maneira geral, um material na forma de fibra apresenta resistência e rigidez superiores a esse mesmo material em sua forma maciça (do inglês, “bulk shape”) (JONES, 1999).

Existem diversos tipos de fibras para se acrescentar no concreto: as fibras naturais (como as de coco, sisal e bananeira), as fibras sintéticas (poliméricas, carbono, vidro, entre outras) e fibras metálicas (HERSCOVICI et al., 2019; PASA, 2007); estas últimas englobam as fibras de aço, nas quais o foco deste trabalho recai. A FIGURA 9 ilustra alguns tipos de fibras.

As fibras também podem ser estruturais ou não estruturais; estas têm a função de reduzir a fissuração oriunda da retração ou incrementar a resistência ao fogo e

FIGURA 9 – DIFERENTES TIPOS DE FIBRAS (POLIMÉRICAS, AÇO, VIDRO)



FONTE: Kosmatka et al. (2002).

à abrasão, ao passo que as fibras estruturais (assunto principal do trabalho) têm o propósito de incrementar a energia de fratura (EHE, 2008).

A Tabela 1 a seguir lista alguns tipos de fibras e algumas características, para efeito de comparação da matriz de concreto.

TABELA 1 – TIPOS DE FIBRAS E ALGUNS ATRIBUTOS

Material	ϕ (μm)	δ	E (GPa)	f_t (GPa)	ε_{max} (%)
Aço	5-500	7,84	200	0,5-20	0,5-3,5
Vidro	9-15	2,6	70-80	2,4	2,0-3,5
Polipropileno	20-400	0,9-0,95	3,5-10	0,45-0,76	15-25
Carbono	8-9	1,6-1,7	230-380	2,5-4,0	0,5-1,5
Nylon	23-400	1,14	4,1-5,2	0,75-1,0	16,0-20,0
Matriz de cimento	—	1,5-2,5	10-45	0,003-0,007	0,02

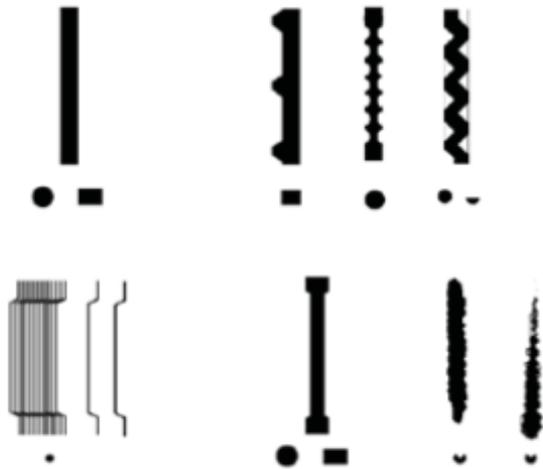
FONTE: Bentur e Mindess (2006), adaptado e traduzido.

Nesta tabela:

- ϕ é o diâmetro da fibra;
- δ é a densidade relativa;
- E é o módulo de Young;
- f_t é a resistência à tração; e
- ε_{max} é a deformação máxima antes do colapso.

Quanto às fibras de aço, elas podem se apresentar de diferentes formatos (retas, com ancoragem, onduladas, com extremidades alargadas, entre outras), superfície lisa ou rugosa, e de diversas seções transversais (circular e retangular, por exemplo). Esses diferentes formatos aparecem ilustrados na FIGURA 10.

FIGURA 10 – DIFERENTES FORMATOS DE FIBRAS DE AÇO



FONTE: Herscovici et al. (2019).

2.1.3 Concreto reforçado com fibras como um material compósito

Um material compósito é aquele que decorre da combinação de dois ou mais materiais, como uma liga metálica ou um tijolo de barro com adição de palha. Materiais compósitos, de maneira geral, apresentam características que não são observadas quando os componentes agem separadamente, isto é, observa-se uma sinergia entre os materiais componentes (NAAMAN, 2018).

Embora o aço seja quase três vezes mais denso que o concreto, o concreto reforçado com fibras de aço, mesmo com um alto teor de fibras, não possui densidade tão superior ao concreto convencional. O desempenho, no entanto, é bem diferente entre o concreto sem e com fibras. No CRFA observa-se outra vantagem dos materiais compósitos: a combinação de materiais de diferentes densidades sem que o peso específico do compósito aumente consideravelmente (JONES, 1999).

Até mesmo o concreto pode ser considerado um material compósito (NAAMAN, 2018), haja vista a composição (agregados miúdos e graúdos dispersos em uma matriz de pasta de cimento).

O concreto reforçado com fibras é um material compósito fibroso, que consiste em inserir fibras na matriz de concreto (JONES, 1999; REDDY, 1994). A fibra deve possuir uma ou mais propriedades de qualidade superior às da matriz, caso contrário, as fibras não fazem nenhuma falta e não garantem a sinergia esperada para um material compósito.

O concreto reforçado com fibras possui duas fases: a matriz de concreto e a fibra. Pode ser considerado também mais um componente para efeitos de análise de esforços: a interface entre matriz e fibra.

A disposição das fibras no concreto é, de maneira geral, aleatória, porém a direção do lançamento do concreto nas formas tem um papel considerável em polarizar as fibras em uma direção predominante de disposição. Por isso, o concreto reforçado com fibras é um material anisotrópico, isto é, o comportamento varia com a direção de solicitação. Blanco Álvarez et al. (2013) demonstram um esquema de como a disposição das formas e o fluxo da mistura de concreto podem influenciar na direção das fibras, baseado na Mecânica dos Fluidos. Esse esquema aparece ilustrado na FIGURA 11, para três situações: (a) para um fluxo livre (sem formas), (b) com duas faces de formas contornando o fluxo e (c) com quatro faces. As fibras, segundo a FIGURA 11, tendem a se posicionar próximas e paralelas às faces das formas.

FIGURA 11 – DIFERENTES POLARIZAÇÕES DE FIBRAS CONFORME A DIREÇÃO DE LANÇAMENTO E DISPOSIÇÃO DE FORMAS



FONTE: Blanco Álvarez et al. (2013), traduzido.

Contudo, por mais que o CRFA seja anisotrópico, para o programa computacional a ser simulado neste trabalho, será considerada uma isotropia, sem perda de generalidade.

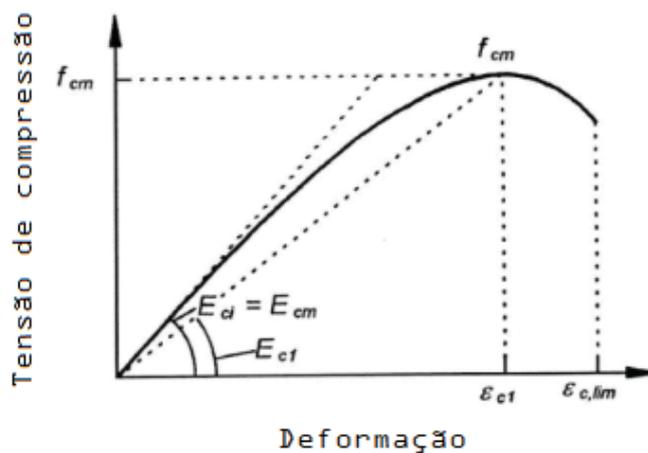
2.2 DESEMPENHO DO CRFA

Pelos resultados obtidos na literatura, a adição de fibras oferece diversos benefícios às estruturas de concreto. O diagrama tensão-deformação de um material oferece vários indicadores de desempenho, os quais são ilustrados na figura FIGURA 12, em que é mostrado um diagrama tensão-deformação de uma estrutura de concreto submetida à compressão uniaxial, com ênfase no comportamento não linear. Alguns desses indicadores são os seguintes:

- A altura do diagrama representa a tensão de pico (simbolizada como f_{cm}), isto é, a maior tensão que uma estrutura suporta antes de começar a fissurar;
- A largura total do diagrama é a máxima deformação a que a estrutura pode assumir antes de colapsar (simbolizada como $\varepsilon_{c,lim}$ na figura), ou seja, está relacionada com a ductilidade;

- A área sob o diagrama representa a tenacidade ou energia de deformação;
- O que está antes do pico de tensão ($\varepsilon_{c,f}$) é o diagrama pré-fissuração, ao passo que após o pico, a estrutura já está fissurada.
- A inclinação da curva representa o módulo de Young E – é possível perceber que, na figura FIGURA 12 existe um módulo inicial de Young E_{ci} , que se mantém constante durante o regime linear. Quando começa o regime não linear, esse módulo vai diminuindo.

FIGURA 12 – DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO DO CONCRETO SOB COMPRESSÃO UNIAXIAL

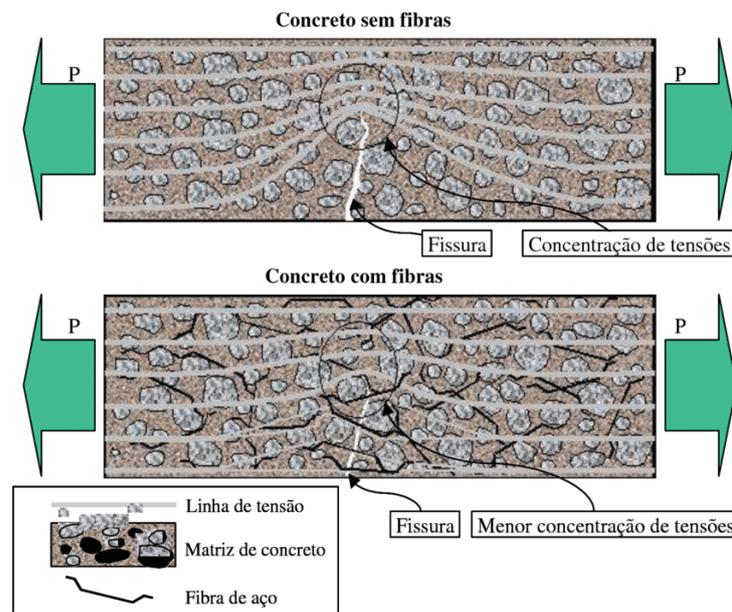


FONTE: FIB (2013), adaptado e traduzido.

As fibras modificam o diagrama tensão-deformação principalmente a partir do pico, isto é, seu papel estrutural é observado após o início da fissuração. Conclui-se que as fibras não evitam nem retardam a fissuração, mas diminuem os efeitos oriundos desta. Além disso, conforme ilustra a FIGURA 13, as fibras reduzem a concentração de tensões na extremidade de uma fissura (sem fibras as linhas de tensão, ilustradas em cinza na FIGURA 13, são bem próximas umas das outras na extremidade da fissura, evidenciando a concentração de tensões).

As fibras também atuam como pontes para transferir as tensões para a matriz de concreto, de modo que a fissura não continue se propagando. O ideal é que as fibras sejam dispostas paralelamente à tensão principal de tração, o que é inviável devido à aleatoriedade de distribuição (HERSCOVICI et al., 2019). Essa aleatoriedade é vantajosa nos casos em que os esforços são praticamente distribuídos ao longo de toda a estrutura, como nos pavimentos de CRFA.

FIGURA 13 – REDUÇÃO DA CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES DEVIDA ÀS FIBRAS



FONTE: Figueiredo (2011).

2.2.1 A fibra e o desempenho do CRFA

Existem vários atributos da fibra que podem contribuir para a melhoria do desempenho de uma estrutura de CRFA:

- **Forma:** As fibras onduladas ou com ancoragem apresentam aderência superior às fibras retas, pois as ancoragens oferecem uma resistência adicional ao arrancamento.
- **Rugosidade:** fibras rugosas ou com ranhuras oferecem melhor aderência à matriz que as fibras lisas, analogamente às barras de aço, devido à maior área de contato da fibra com a matriz, favorecendo a aderência por fricção.
- **Teor:** quanto mais fibras forem acrescentadas à mistura, mais fibras serão capazes de atuar como ponte quando surgir a fissura, da mesma forma que, no concreto armado, a resistência incremental à tração é proporcional à área total das armaduras de aço. Por isso, melhor será o comportamento quanto maior for o volume de fibras. No entanto, como as fibras possuem custo elevado, o excesso de fibras resulta num custo muito alto para a estrutura e pode prejudicar a viabilidade financeira. Além disso, quanto mais fibras, pior será a trabalhabilidade da mistura no estado fresco.
- **Seção transversal:** dois parâmetros estão relacionados com a seção transversal da fibra, que são a área e o perímetro. Quanto maior a área, maior será o esforço que a fibra será capaz de suportar. Quanto maior o perímetro, maior será a área

de contato entre a fibra e a matriz, logo, maior será a resistência da interface entre a fibra e a matriz; em outras palavras, melhor será a aderência.

- Comprimento: fibras mais longas, de maneira geral, oferecem melhor desempenho. Fibras muito curtas são facilmente arrancadas da matriz. Por outro lado, fibras muito longas rompem com mais facilidade e prejudicam consideravelmente a trabalhabilidade (FIGUEIREDO, 2011).
- Taxa de aspecto: percebeu-se que fibras com maior taxa de aspecto (razão entre comprimento e diâmetro) oferecem mais tenacidade ao concreto reforçado com fibras (SINGH, 2016).

Os experimentos realizados por Ikumi et al. (2021) mostraram a influência, principalmente do teor e do comprimento das fibras. No entanto, existem constatações em trabalhos como o de Blanco Álvarez et al. (2013) de que altos teores e altas taxas de aspecto podem ser prejudiciais a resistência do compósito, devido aos poros de ar na mistura, acarretados pelo mau posicionamento da fibra.

No programa desenvolvido neste trabalho, devido à dificuldade de se discretizar a fibra com precisão quando imersa na matriz de concreto, o único atributo a ser variado para análise de desempenho será o teor de fibras.

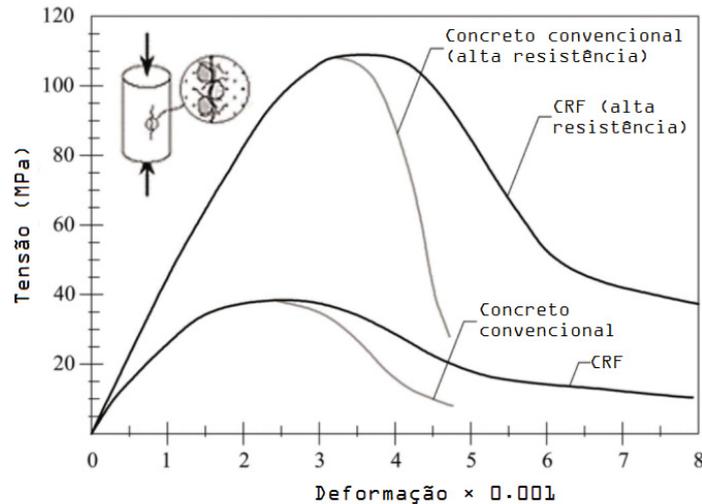
2.2.2 Compressão

O diagrama tensão-deformação para a compressão no trecho anterior ao pico (pré-fissuração) pouco se altera com a adição de fibras, isto porque, conforme explicado anteriormente, as fibras atuam depois que as fissuras surgem. Sendo assim, conforme a FIGURA 14, as curvas para o concreto convencional e reforçado com fibras praticamente coincidem até o pico (tanto para o concreto de resistência normal quanto para aqueles de alta resistência).

Após o pico, a área sob a curva do diagrama é maior para o concreto com fibras, o que leva a concluir que as fibras conferem tenacidade à estrutura. Percebe-se uma extensão horizontal no diagrama, ao passo que não existe uma extensão vertical, o que leva a concluir que as fibras não oferecem acréscimo de resistência à compressão, mas permitem que a estrutura continue se deformando mais que uma estrutura sem fibras; em outras palavras, as fibras também oferecem ductilidade pós-fissuração à estrutura.

As fibras também alteram o padrão de fissuração: a largura é reduzida e existe uma ramificação na propagação das fissuras, em vez de uma propagação predominantemente retilínea (vide FIGURA 15), o que pode ser associado ao papel de ponte de transferência de tensões que as fibras oferecem (BENCARDINO et al.,

FIGURA 14 – COMPARAÇÃO ENTRE CONCRETO CONVENCIONAL E REFORÇADO COM FIBRAS SOB COMPRESSÃO



FONTE: FIB (2013), adaptado e traduzido.

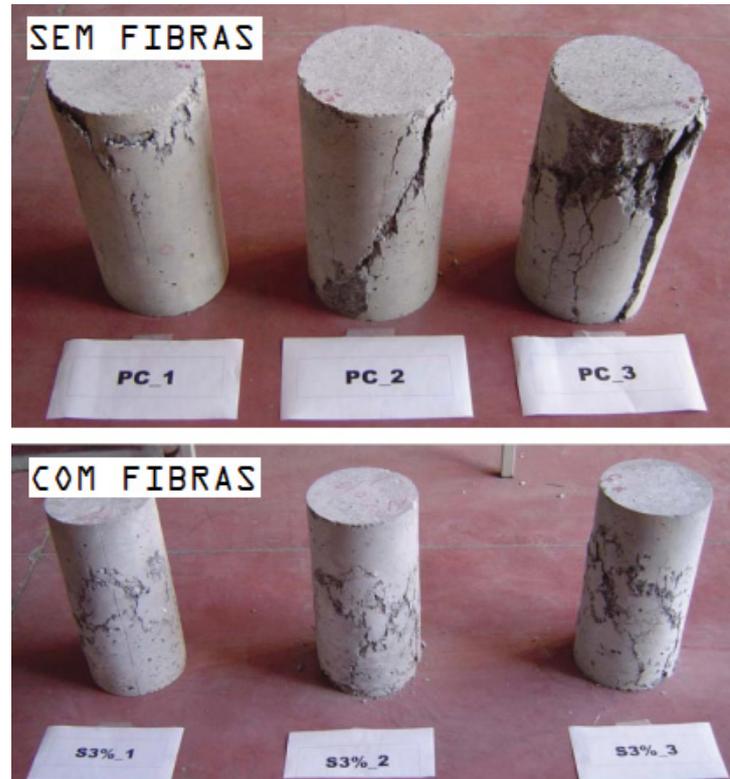
2008; FIB, 2013). É possível perceber três zonas diferentes em uma fissura (conforme FIGURA 16): um trecho fissurado e livre de tensões em que a abertura da fissura é máxima e as fibras já não atuam mais por terem sofrido ruptura ou arrancamento da fibra; uma região em que o concreto está fissurado, mas as fibras ainda estão íntegras; e a última região em que a abertura é mínima, mas na qual se define a propagação da fissura, pois a matriz ainda não rompeu e a transferência de tensões é feita pela matriz (WECHARATANA; SHAH, 1983), apud (PASA, 2007). Na zona fissurada, a transferência de tensões é dada pela própria fricção entre as faces fissuradas, ou pelos esforços de cisalhamento oriundos das bielas e tirantes, considerando o comportamento da estrutura análogo a uma treliça (KOTSOVOS, 2015).

2.2.3 Tração

O concreto por si só começa a apresentar fissuras com baixas tensões de tração, haja vista a resistência inferior a este tipo de esforço, comparada com a compressão (vide FIGURA 8). A fibra de aço tem um papel análogo à armadura do concreto armado. Como o aço tem alta resistência à tração e ductilidade, a combinação da matriz de concreto com a fibra de aço modifica o diagrama tensão-deformação para a tração. É observado um aumento na tensão de pico, isto é, a resistência do CRFA à tração é superior à resistência do concreto convencional.

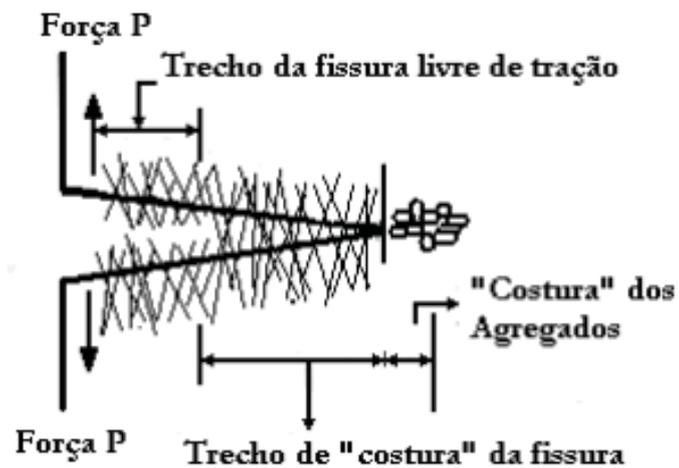
Dependendo do teor de fibras, o CRFA pode apresentar dois comportamentos distintos. Se o teor de fibras for menor que o volume crítico (FIGUEIREDO, 2011), ocorre o fenômeno de relaxação (do inglês “strain softening”) após o início da fissuração, isto é, observa-se um trecho descendente no diagrama tensão-deformação. Caso o teor de fibras seja maior que o volume crítico, o primeiro fenômeno observado após a

FIGURA 15 – FISSURAÇÃO DE CORPOS DE PROVAS DE CONCRETO SEM FIBRAS E COM 3% DE FIBRAS SOB COMPRESSÃO



FONTE: Bencardino et al. (2008), adaptado.

FIGURA 16 – ESQUEMA DE UMA FISSURA MOSTRANDO AS FIBRAS E ZONAS DE TENSÃO



FONTE: Wecharatana e Shah (1983), apud (PASA, 2007).

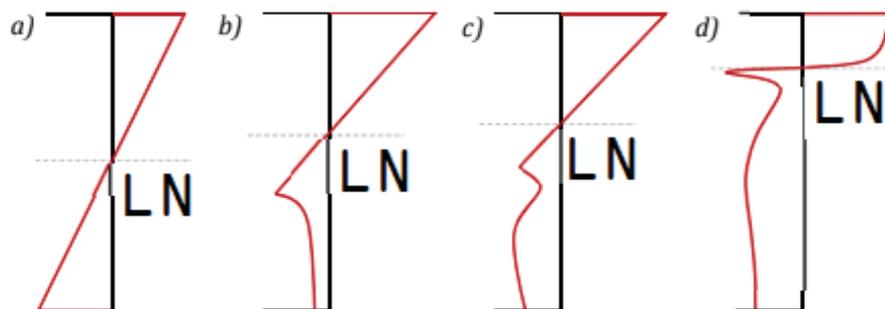
fissuração é o endurecimento (do inglês "strain hardening"), ou seja, aumento de carga com aumento de deformação. O volume crítico de fibras depende das características da peça, das propriedades do concreto e da fibra, por isso, varia consideravelmente.

Na FIGURA 18, existem cinco diagramas tensão-deformação para o concreto reforçado com fibras quando submetido à tração. O primeiro é para um concreto convencional, sem fibras. Neste caso, o colapso é frágil e abrupto, somente com o surgimento de uma fissura que se propaga por toda a peça. No segundo e no terceiro diagrama, o concreto é reforçado com fibras, mas com teor inferior ao crítico, por isso, observa-se a relaxação ou “strain softening” simultaneamente ao início da fissuração – em outras palavras, quando há um baixo teor de fibras, a tensão de pico à tração permanece inalterada, embora haja acréscimo de tenacidade (maior área sob a curva) e, até certo ponto, de ductilidade (no terceiro diagrama, as duas curvas em linha contínua englobam maior área, contudo, a largura permanece a mesma); existe ainda uma única fissura, na qual as fibras que atravessam a seção fissurada continuam atuando como pontes de transferência de tensão. Nos dois últimos diagramas, o teor de fibras é superior ao crítico, por isso, logo após a fissuração, existe um aumento na tensão de pico graças ao endurecimento ou “strain hardening”, até certo ponto quando inicia o “strain softening”.

2.2.4 Flexão

Quando uma estrutura é submetida à flexão, uma de suas faces é comprimida (onde as cargas são aplicadas), enquanto a face oposta é tracionada. Antes de a fissuração começar, o comportamento da estrutura à flexão é elástico linear (diagrama **a** da FIGURA 17). Porém, quando surge a primeira fissura, as tensões se rearranjam e a linha neutra (na qual não há tensões) deixa de cortar o centroide da seção e se aproxima da face mais comprimida (de maneira geral, a superior). A distribuição de deformações continua sendo linear, contudo, a distribuição de tensões deixa de sê-lo (diagramas **b**, **c** e **d** da FIGURA 17).

FIGURA 17 – DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES EM UMA PEÇA SUJEITA À FLEXÃO

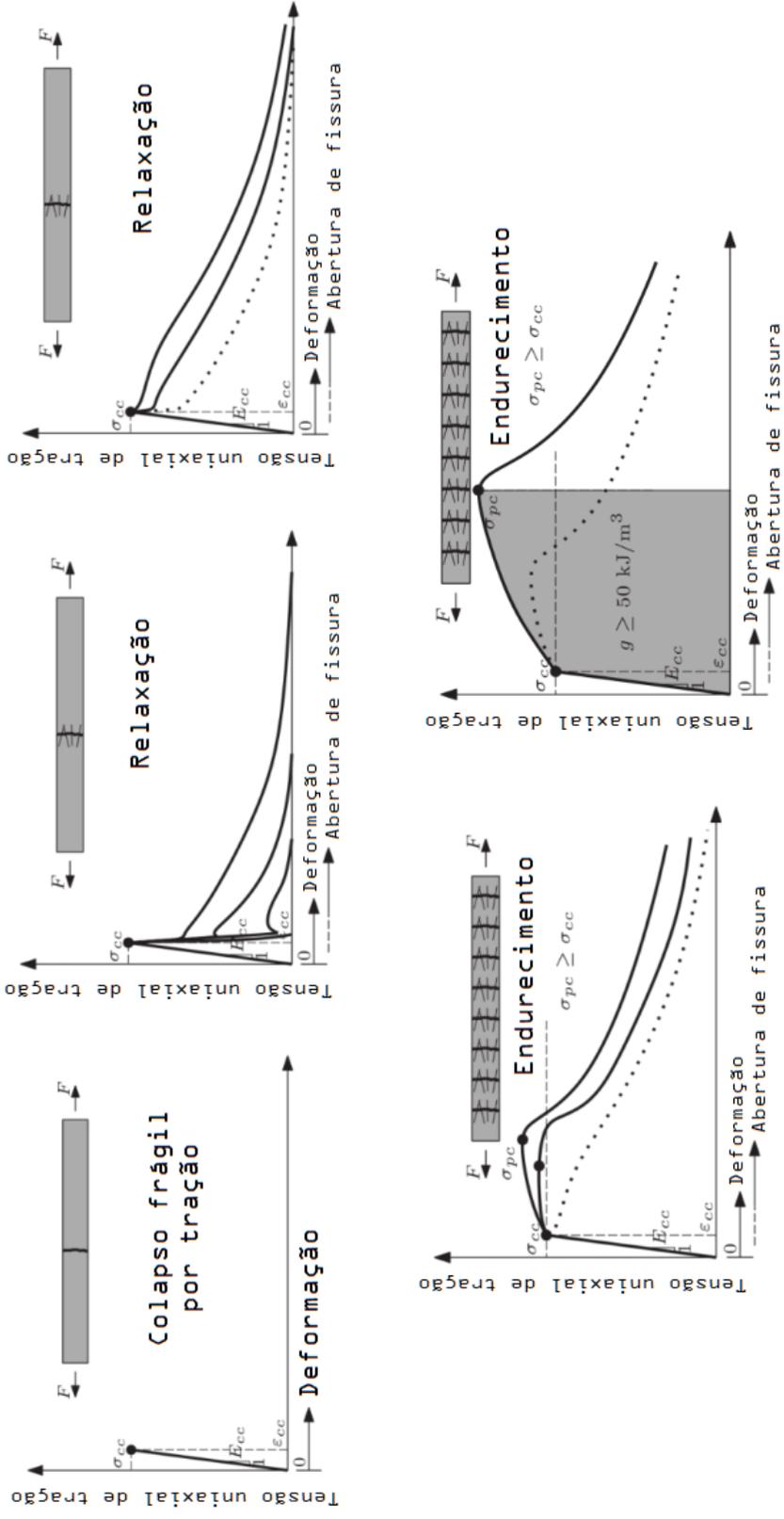


FONTE: Blanco Álvarez et al. (2013).

Assim como à tração, as fibras modificam o comportamento da peça à flexão, de forma análoga, conforme a FIGURA 18 e a FIGURA 19 (WILLE et al., 2014) ilustram, cada uma, em quatro diagramas diferentes. Tem-se o primeiro diagrama de uma estru-

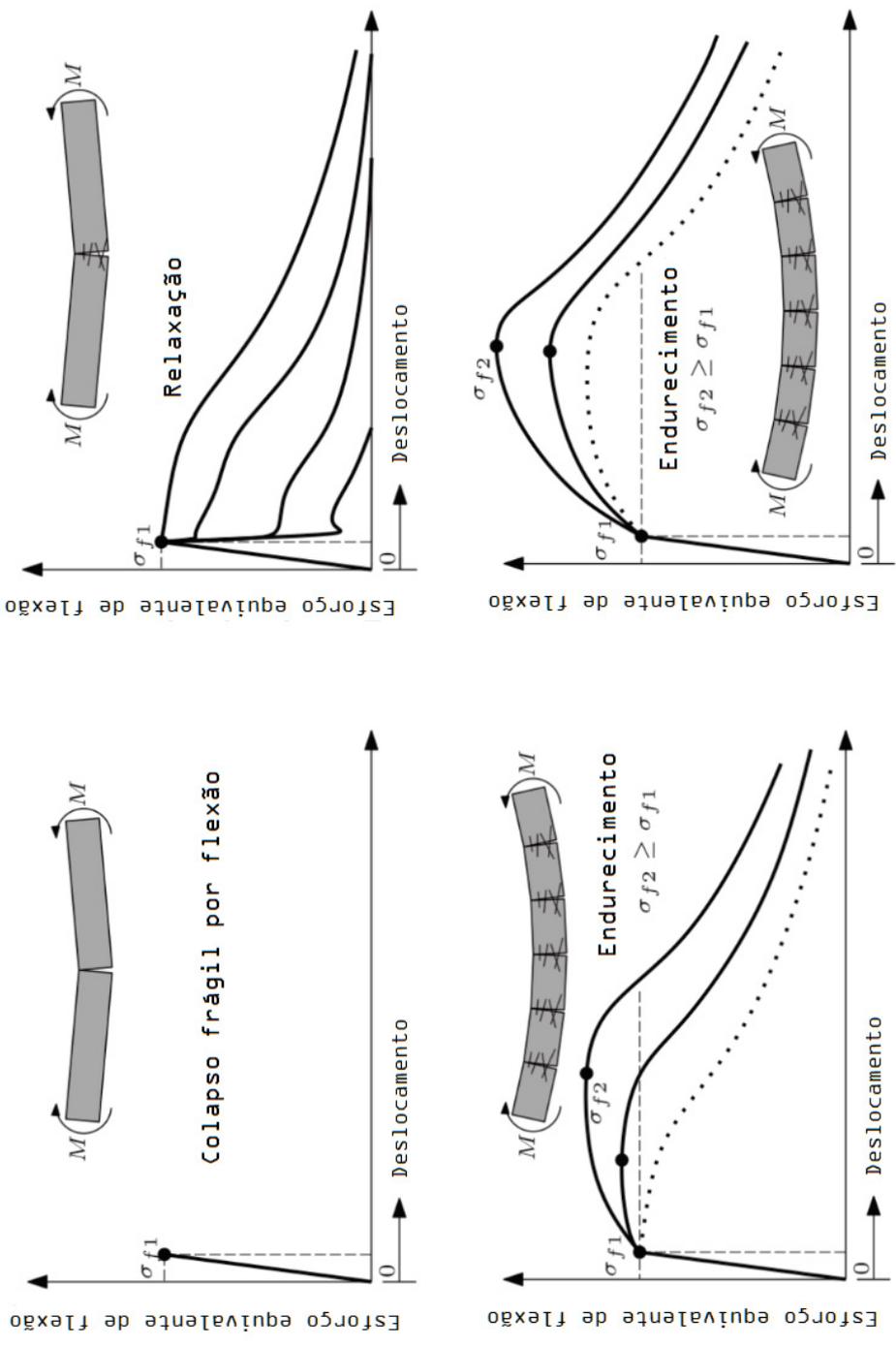
tura de concreto convencional (sem fibras) submetida à flexão, apresentando colapso frágil e abrupto devido à única fissura oriunda de tração na face inferior. Uma estrutura com baixo teor de fibras apresenta mais tenacidade e ductilidade, sem acréscimo de tensão de pico e com apenas uma fissura, o que caracteriza o “strain softening” ou relaxação (segundo diagrama da FIGURA 19). Conforme se aumenta o teor de fibras, observa-se aumento da tenacidade e (até certo ponto) da ductilidade, junto ao aumento da tensão de pico (o que caracteriza o “strain hardening” ou endurecimento, ilustrado nos dois últimos diagramas da FIGURA 19).

FIGURA 18 – DIAGRAMAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA O CONCRETO COM FIBRAS SOB TRAÇÃO



FONTE: Wille et al. (2014), adaptado e traduzido.

FIGURA 19 – DIAGRAMAS TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA O CONCRETO COM FIBRAS SOB FLEXÃO

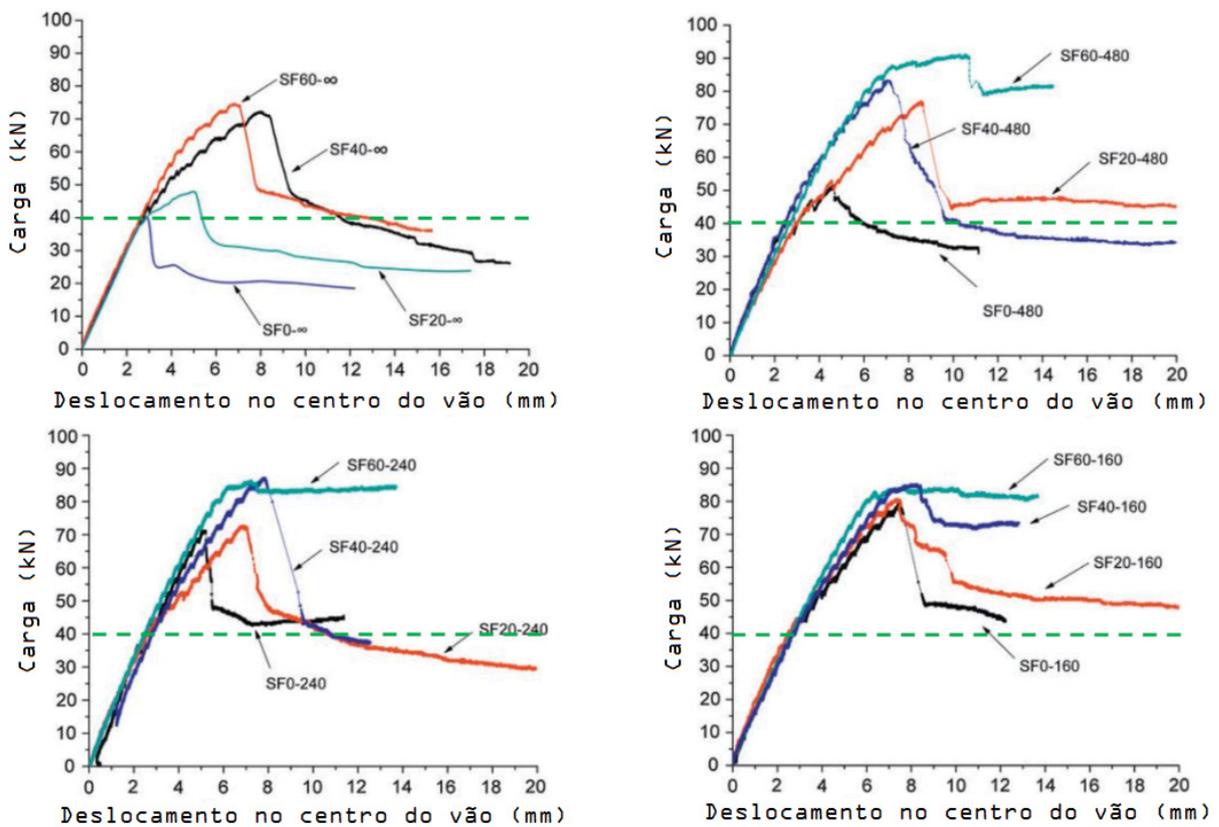


FONTE: Wille et al. (2014), adaptado e traduzido.

2.2.5 Cisalhamento

A adição de fibras confere mais resistência e tenacidade à peça sujeita ao cisalhamento. Em cada diagrama da FIGURA 20, do estudo realizado por Ding et al. (2012), cada curva representa um espécime de concreto reforçado com fibras de aço do tipo SFXX-YY, em que XX representa o teor de fibras em kg/m^3 e YY representa a idade do concreto em dias.

FIGURA 20 – DIAGRAMAS CARGA-DESLOCAMENTO PARA O CONCRETO COM FIBRAS SUJEITO A ESFORÇOS DE CISALHAMENTO



FONTE: Ding et al. (2012), adaptado e traduzido.

Segundo Barros (1995), as fibras em vigas de concreto armado podem substituir em parte os estribos (armaduras de cisalhamento), de modo que estes tenham apenas utilidade de posicionar as armaduras longitudinais.

2.2.6 Fissuração

Um problema frequentemente observado nas estruturas de concreto é o fenômeno de fissuração, isto é, o aparecimento de rachaduras na superfície da estrutura, inicialmente pequenas, mas que crescem, por exemplo, com o tempo e o acréscimo de cargas. Devido à concentração de tensões, pode ocorrer um fluxo de plasticidade provocando perda de energia, a qual é dissipada pelas fissuras. A fissuração pode ser

oriunda tanto da retração (algo praticamente inevitável, já que a água de amassamento evapora com o tempo) como também de defeitos estruturais (caso mais crítico e que exige mais atenção). À medida que a estrutura sofre fissuração, a capacidade de carga e a rigidez diminuem. Essa diminuição de resistência e rigidez explicam outra propriedade do concreto: a não linearidade, uma característica crucial a ser considerada no desenvolvimento do algoritmo para simular o comportamento de uma estrutura de CRFA. O avanço da fissuração pode tanto ser observado com o alargamento da fissura, o aumento do número de fissuras ou a propagação da fissura ao longo da peça de concreto, entre outros efeitos. Esse problema foi ilustrado na FIGURA 6, imagem de uma estrutura na vida real sujeita à fissuração.

Quando as fissuras atingem uma intensidade crítica, a estrutura de concreto colapsa. No caso de estruturas sem armaduras de aço, esse colapso é abrupto e repentino, devido à fragilidade. Existem diversos fatores que contribuem para o colapso da estrutura, como as descontinuidades na matriz de pasta de cimento, os vazios existentes e a quebra da interface argamassa-agregado (KOTSOVOS, 2015).

O CRFA, conforme já explicitado, é um material compósito de três fases: matriz de concreto, fibra de aço e interface matriz-fibra. A análise do compósito como um todo é a superposição dos efeitos de cada uma das fases. Por isso, quando ocorre a falha do material, qualquer fase pode ser o fator limitante.

Quando ocorre o arrancamento da fibra, a interface é o fator limitante, pois o que falhou foi a aderência da fibra, mas tanto a matriz de concreto quanto a fibra permanecem ambas íntegras. Às vezes, pode ocorrer a ruptura da fibra; esta, no caso, é o fator limitante. Ou também, a matriz de concreto pode ser o fator limitante e se romper antes da fibra ou antes de ocorrer o arrancamento. O ideal é que o fator limitante não seja predominantemente a fibra, pois assim, não é observado o comportamento esperado para o compósito. Conforme já explicitado na seção 2.1.3, fibras de baixa resistência não garantem a melhoria esperada para o CRFA.

Recomenda-se que as três fases do material compósito sejam de boa qualidade, porque, de maneira geral, a deficiência de uma das fases não pode ser compensada pelo alto desempenho de outra.

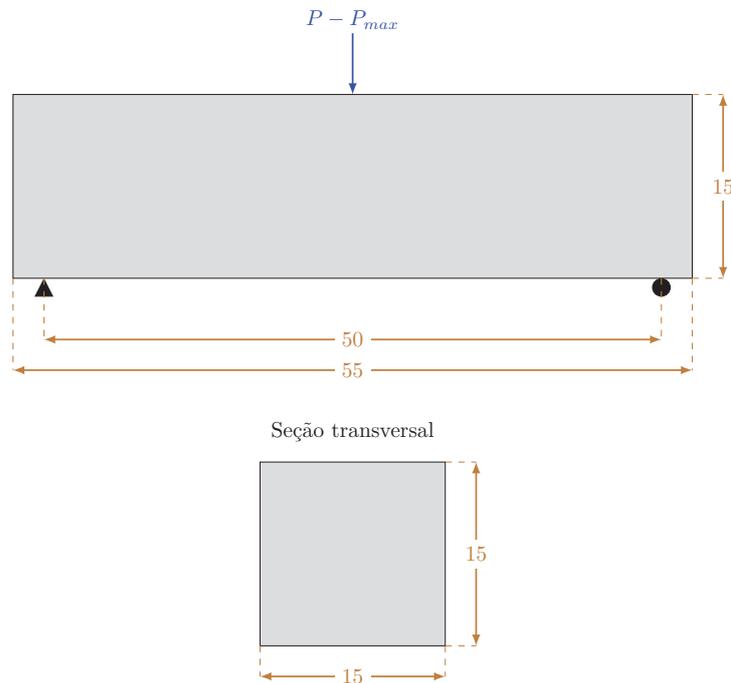
2.3 ENSAIOS PADRONIZADOS

Diversas normas apresentam testes padronizados para avaliação do comportamento do CRFA. Exemplos são as normas EN 14651 (2005) e ASTM-C-1609 (2012), relativos a ensaio de flexão de 3 e de 4 pontos, respectivamente.

2.3.1 Ensaio de três pontos à flexão

Este ensaio consiste em aplicar um carregamento concentrado no centro do vão de uma viga de 55 centímetros de comprimento, sendo 50 centímetros de vão e dois balanços de 2,5 cm de cada lado (o comprimento da viga pode variar, porém essas são as dimensões recomendadas pela norma europeia EN 14651 (2005)). A seção transversal da viga é quadrada de 15 centímetros de lado. As dimensões e carregamentos são ilustrados na FIGURA 21.

FIGURA 21 – ESQUEMA DO ENSAIO DE TRÊS PONTOS À FLEXÃO, DIMENSÕES EM CENTÍMETROS



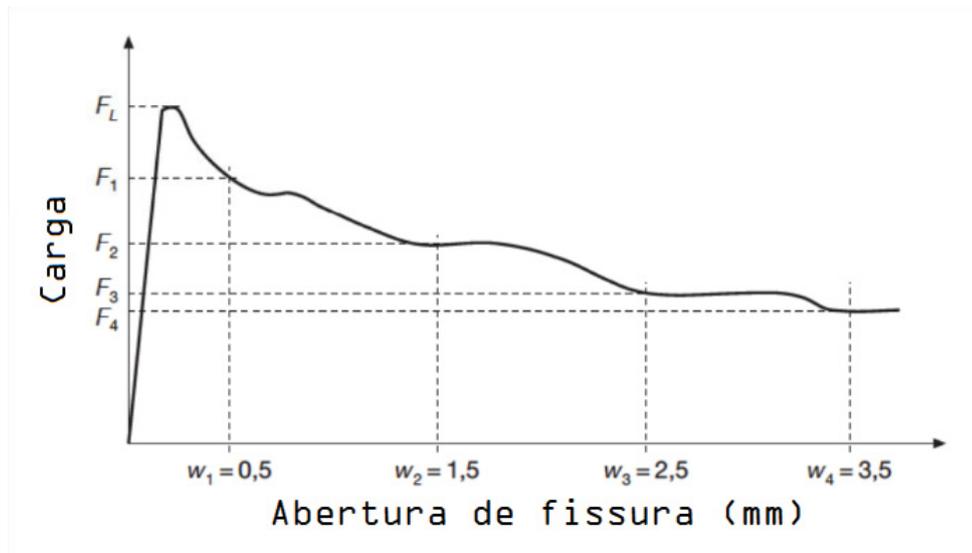
FONTE: O autor.

Pelo ensaio realizado, obtém-se o seguinte diagrama de carga em função da abertura de fissura (CMOD), conforme FIGURA 22.

No diagrama da FIGURA 22, tem-se que F_L é a carga máxima do regime linear (ou seja, do limite de proporcionalidade de tensões e deformações) e as cargas F_i , com $1 \leq i \leq 4$, são as cargas para a abertura de fissura igual a $(i - 0,5)$ mm.

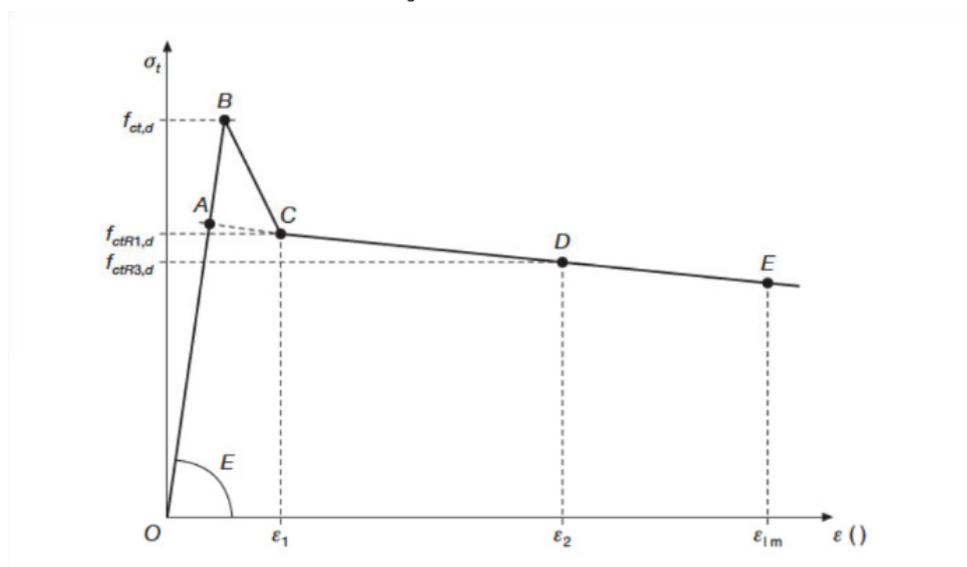
Obtidas essas cargas F_i , o próximo passo é calcular as tensões para se obter o diagrama tensão-deformação. Existem vários modelos constitutivos, cada um resultando em um diagrama tensão-deformação diferente, os quais são descritos por Blanco Álvarez et al. (2013). Um desses modelos é o proposto pela norma espanhola EHE (2008). O anexo 14 da referida norma possui várias recomendações para o concreto reforçado com fibras, define termos e parâmetros, e propõe diversos modelos constitutivos para o concreto com fibras (exemplo: o diagrama multilinear de tensão-deformação).

FIGURA 22 – DIAGRAMA CARGA VS. CMOD



FONTE: EHE (2008) (traduzido).

FIGURA 23 – DIAGRAMA MULTILINEAR TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA O CONCRETO COM FIBRAS SOB TRAÇÃO



FONTE: EHE (2008).

2.3.2 Ensaio de flexão a quatro pontos

Este ensaio é análogo ao ensaio de três pontos. A diferença é a aplicação de dois carregamentos concentrados. As dimensões da viga são as mesmas que para o ensaio de três pontos, embora o comprimento possa variar, segundo a ASTM-C-1609 (2012).

2.4 MODELAGEM COMPUTACIONAL

Existem diversas abordagens para se proceder com a modelagem computacional de estruturas de concreto reforçadas com fibras de aço. No presente trabalho, utilizaram-se, como base, vários trabalhos que se referem à modelagem de estruturas de concreto em geral. Um exemplo é o livro de Kotsovos (2015), que descreve a modelagem computacional por meio do Método dos Elementos Finitos.

As dissertações de Abeche (2015) e Imai (2018) têm como objetivo abordar a análise dinâmica não linear de estruturas de concreto armado (por exemplo, pontes) perante carregamentos de sistemas dinâmicos (por exemplo, veículos), considerando a interação entre os sistemas veículo-ponte. Também foram realizadas simulações estáticas não lineares comparando os resultados com os de ensaios experimentais. Em ambos, é dado um enfoque na Mecânica do Dano para o concreto e na Teoria da Plasticidade para o aço. Nos trabalhos citados, utilizaram-se elementos finitos de Euler-Bernoulli laminados, sub-discretizados em camadas, que consideram as demais dimensões (y e z), além da dimensão longitudinal x , e os efeitos mecânicos atuantes nestas por meio de mapeamento em diferentes espaços. Ademais, levou-se em conta a variação da posição da linha neutra em cada camada de cada seção transversal. No trabalho de Abeche (2015) consideraram-se as irregularidades da via de quaisquer formatos e as variações das posições de cada linha neutra de maneira iterativa. No trabalho de Imai (2018), por sua vez, não foram consideradas as irregularidades da via. No entanto, consideraram-se as variações das posições de cada linha neutra de maneira analítica, bem como quaisquer distribuições de armaduras e seções transversais de qualquer geometria. Contudo, esses trabalhos não se propuseram a analisar o uso de fibras no concreto, que é uma das propostas do presente trabalho, no contexto de análise estática não linear.

A dissertação de Opolski (2019) apresenta simulações computacionais estáticas e não lineares de estruturas de concreto armado, utilizando elementos finitos bidimensionais, por meio do Método de Comprimento de Arco e do Método Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno (BFGS). Os resultados de Opolski (2019) utilizam como base aqueles obtidos por simulações computacionais e testes laboratoriais de Jarek et al. (2011) e outros autores. Todos esses trabalhos foram bastante úteis na realização deste, porque os resultados das simulações foram tomados como base para comparar os resultados obtidos pelo presente programa.

A técnica de continuação pelo comprimento de arco é descrita na obra de Crisfield (1981) e utilizada por diversos autores, por exemplo, Opolski (2019) e ROCHA (2000). Este último descreveu várias técnicas de continuação para resolver problemas como os ensaios uniaxiais de tração e compressão, cujos diagramas tensão-deformação possuem trechos ascendentes e descendentes.

O trabalho de Pereira Junior et al. (2016) publicado na revista Ibracon realiza uma abordagem computacional de estruturas de CRFA, utilizando a Mecânica do Dano, e propondo um modelo de dano desenvolvido pelos autores. Carvalho et al. (2020) formula um modelo para o CRFA ao modelar, computacionalmente, estruturas fissuradas, utilizando o Método dos Elementos Finitos.

A tese de Blanco Álvarez et al. (2013) aborda a modelagem do concreto reforçado com fibras de aço, emprega modelos constitutivos recomendados por normas internacionais (por exemplo, a EHE (2008)) e apresenta resultados laboratoriais de testes de flexão, alguns utilizados para comparar com os resultados obtidos pelo programa desenvolvido.

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

Para proceder com o programa, será necessário implementar dois importantes métodos numéricos: o Método dos Elementos Finitos, por meio do qual pôde-se discretizar as malhas das estruturas e calcular seus deslocamentos; e os métodos de resolução de equações não lineares, como por exemplo, Newton-Raphson (completo e modificado).

Neste capítulo, além de uma descrição da formulação desses métodos, serão também abordadas as equações da Mecânica do Dano Contínuo, do modelo de dano de Mazars e da plasticidade do aço, assim como também da técnica de comprimento de arco, empregada no cálculo de diagramas carga-deslocamento em que se observa um trecho descendente, além do trecho ascendente.

3.1 O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

O presente trabalho emprega o Método dos Elementos Finitos (MEF), que consiste em resolver uma equação dividindo-se o domínio de uma função em muitas partes menores, interligadas por nós ou elementos nodais. Cada uma dessas partes é chamada de elemento finito, pois, por menor que sejam as dimensões dos subdomínios, o número destes é finito. A referida função é o esforço a qual a estrutura está submetida; o domínio dessa função é a própria estrutura (OÑATE, 2009; SORIANO; LIMA, 2003).

No caso de uma estrutura de concreto, a função do MEF é discretizar um domínio grande e aparentemente contínuo (a continuidade é um parâmetro dependente da escala de visualização).

Quando se discretiza o domínio, devem ser aplicadas as condições de contorno, que, no caso da estrutura, são os apoios e carregamentos.

Quanto mais elementos houver, isto é, quanto mais refinada for a malha de elementos finitos, mais próximo o resultado do modelo estará da solução analítica (SORIANO; LIMA, 2003).

Para proceder com o MEF, é necessário definir as funções de forma. A matriz $[N]$ de funções de forma interpola os deslocamentos nodais de um elemento, contidos no vetor $\{u\}^e$ (o índice sobrescrito 'e' representa que o vetor é elementar), para se obter os deslocamentos de um nó específico da estrutura, contidos no vetor $\{u\}$. A equação 3.1 representa essa transformação dos deslocamentos elementares para os deslocamentos globais. Cada nó do elemento finito possui uma função de forma a este relacionado.

$$\{u\} = [N]\{u\}^e \quad (3.1)$$

Uma deformação é a taxa de variação de comprimento; matematicamente, é a derivada desse comprimento em relação ao comprimento original. Por isso, é possível relacionar as deformações com os deslocamentos por meio de outra transformação. Tem-se uma matriz $[L]$ com operadores diferenciais, a qual é multiplicada pelo vetor de deslocamentos $\{u\}$, de modo a obter outro vetor, $\{\varepsilon\}$, que contém as deformações. Essa transformação é ilustrada na equação 3.2 a seguir.

$$\{\varepsilon\} = [L]\{u\} \quad (3.2)$$

Substituindo-se a equação 3.1 na equação 3.2:

$$\{\varepsilon\} = [L][N]\{u\}^e \quad (3.3)$$

Agora, seja $[B]$ a matriz das derivadas das funções de forma, isto é, a matriz das funções de forma $[N]$ submetida à diferenciação pelos operadores de $[L]$:

$$[B] = [L][N] \quad (3.4)$$

Substituindo-se a equação 3.4 na equação 3.3:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}^e \quad (3.5)$$

Para se observar o comportamento de uma estrutura, é necessário conhecer as relações constitutivas do material. Os dois parâmetros mais importantes nessa análise são o módulo de Young E e o coeficiente de Poisson ν , que são armazenados em uma matriz $[C]$. A equação 3.5 está associada à Lei de Hooke.

Uma estrutura de concreto, quando submetida a um esforço, se comporta como uma treliça, na qual os esforços são transferidos analogamente a um conjunto de bielas e tirantes (KOTSOVOS, 2015).

Inicialmente, uma estrutura de concreto (tanto simples, quanto armado ou reforçado com fibras) possui diagrama tensão-deformação linear, isto é, o módulo de Young – razão entre tensão e deformação – é constante. Em outras palavras, as tensões e deformações são proporcionais. Paralelamente, os deslocamentos são proporcionais às forças aplicadas.

A lei de Hooke pode ser escrita na forma matricial, em que o produto entre a matriz de rigidez $[K]$ pelo vetor de deslocamentos $\{u\}$ resulta no vetor de forças $\{f\}$. Isto pode ser observado como um sistema de equações.

$$[K]\{u\} = \{f\} \quad (3.6)$$

A matriz $[K]$ é singular (não inversível) quando não são impostas as condições de contorno. Por isso, devem ser estabelecidos os apoios e a matriz deve ser reordenada, de modo a separar os deslocamentos livres daqueles que têm valor pré-determinado (no caso dos apoios).

O sistema descrito na equação matricial 3.6 pode ser descrito com os deslocamentos livres (índice 'l') separados dos deslocamentos prescritos (índice 'p'), da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} K_{ll} & K_{lp} \\ K_{pl} & K_{pp} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_l \\ u_p \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_l \\ f_p \end{Bmatrix} \quad (3.7)$$

A lei de Hooke pode também ser escrita na forma matricial da seguinte maneira:

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} + \{\sigma_0\} \quad (3.8)$$

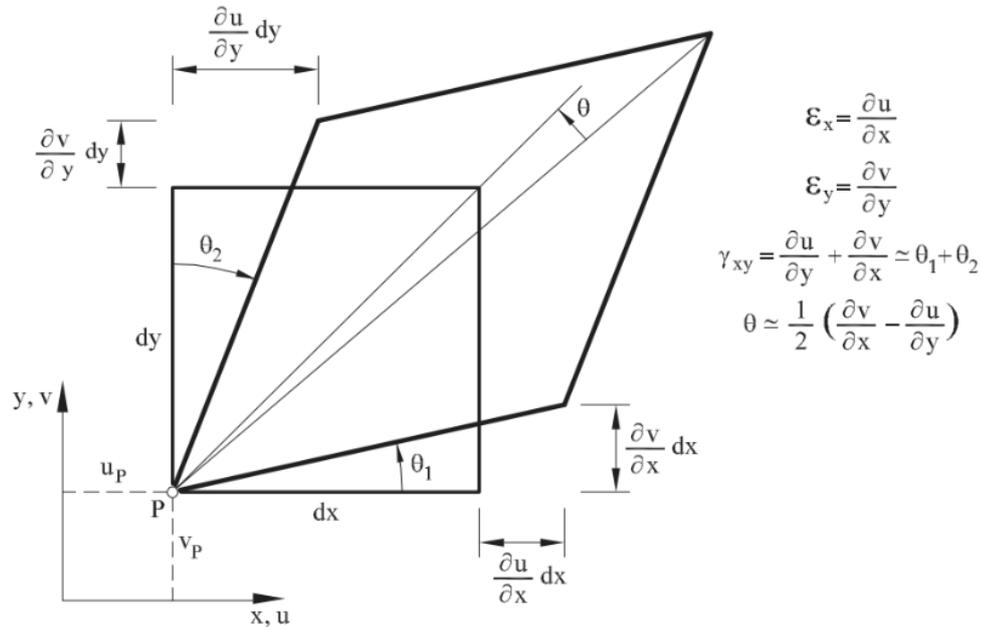
Na equação 3.8, $\{\sigma\}$ é o vetor que armazena as tensões normais e tangenciais do elemento, $\{\sigma_0\}$ armazena as tensões iniciais, $[C]$ é a matriz de relações constitutivas do material e o vetor $\{\varepsilon\}$ contém as deformações do elemento. No regime linear não há tensões iniciais, por isso, o termo $\{\sigma_0\}$ pode simplesmente ser suprimido.

Se o elemento é bidimensional, o vetor de tensões possui três componentes: duas tensões normais σ_x e σ_y e a tensão tangencial τ_{xy} . Por isso, também há três componentes no vetor de deformações: as duas deformações lineares ε_x e ε_y e a deformação angular γ_{xy} . A FIGURA 24 ilustra como ocorrem essas deformações em um elemento bidimensional. Os ângulos θ , θ_1 e θ_2 são, respectivamente, as distorções angulares média, horizontal e vertical.

3.1.1 Estado plano de tensões

Para o caso dos ensaios de viga, considera-se uma hipótese simplificadora para a qual as tensões são ortogonais à espessura. Essa hipótese denomina-se estado plano de tensões. É claro que, por se tratar de hipóteses simplificadoras, a consideração do estado plano (tanto de tensões quanto de deformações) na modelagem computacional de estruturas tridimensionais pode levar a erros nos resultados.

FIGURA 24 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DE UM ELEMENTO 2D SOB DEFORMAÇÕES



FONTE: Oñate (2009).

Para o estado plano de tensões, a matriz $[C]$ de relações constitutivas possui o seguinte aspecto no regime linear:

$$[C] = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

O símbolo ν é o coeficiente de Poisson, número adimensional que relaciona as deformações em diferentes direções. No regime não linear, o módulo de elasticidade E passa a variar.

No estado plano de tensões, não existe tensão normal na direção 'z' nem tensões tangenciais nos planos definidos pelo eixo 'z'. No entanto, existem deformações nas três direções (ε_x , ε_y e ε_z), sendo esta última calculada por:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\nu}{1 - \nu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y) \quad (3.10)$$

3.1.2 Formulação pelo funcional de energia potencial total

Um dos métodos para a formulação pelos elementos finitos é dado pelo funcional de energia potencial total $J(u)$, obtido a partir da integração da equação 3.8 em função da deformação (área da curva do diagrama tensão-deformação – dimensão de energia por volume) em todo o volume do elemento (SORIANO; LIMA, 2003; OÑATE,

2009). Esse funcional é dado pela equação 3.11 a seguir, considerando um elemento tridimensional de volume V e área total de superfície S :

$$J(u) = \int_V \left[\frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [C] \{\varepsilon\} + \{\sigma_0\}^T \{\varepsilon\} \right] dV - \int_V \{p\}^T \{u\} dV - \int_S \{q\}^T \{u\} dS \quad (3.11)$$

Na equação 3.11, os vetores $\{p\}$ e $\{q\}$ são, respectivamente, as forças de volume por unidade de volume e as forças de superfície por unidade de superfície.

Substituindo a equação 3.2 na equação 3.11:

$$J(u) = \int_V \left[\frac{1}{2} ([L]\{u\})^T [C] ([L]\{u\}) + \{\sigma_0\}^T ([L]\{u\}) \right] dV + \\ - \int_V \{p\}^T \{u\} dV - \int_S \{q\}^T \{u\} dS \quad (3.12)$$

Para se garantir estacionariedade, é necessário que a variação do funcional $\delta J(u)$ seja zero. Por isso:

$$\delta J(u) = \int_V \left[([L]\{\delta u\})^T [C] [L]\{u\} + \{\sigma_0\}^T ([L]\{\delta u\}) \right] dV + \\ - \int_V \{p\}^T \{\delta u\} dV - \int_S \{q\}^T \{\delta u\} dS = 0 \quad (3.13)$$

Sabe-se, da Geometria Analítica, que o produto escalar de vetores é comutativo. Sabe-se, também, da Álgebra Linear, que é possível considerar um vetor como uma matriz-coluna. Combinando essas propriedades e substituindo-se a equação 3.1 na equação 3.13:

$$\delta J(u) = \int_V \left[([L][N]\{\delta u\}^e)^T [C] [L][N]\{u\}^e + ([L][N]\{\delta u\}^e)^T \{\sigma_0\} \right] dV + \\ - \int_V ([N]\{\delta u\}^e)^T \{p\} dV - \int_S ([N]\{\delta u\}^e)^T \{q\} dS = 0 \quad (3.14)$$

Agora, substitui-se a equação 3.4 na equação 3.14:

$$\delta J(u) = \int_V \left[([B]\{\delta u\}^e)^T [C] [B]\{u\}^e + ([B]\{\delta u\}^e)^T \{\sigma_0\} \right] dV + \\ - \int_V ([N]\{\delta u\}^e)^T \{p\} dV - \int_S ([N]\{\delta u\}^e)^T \{q\} dS = 0 \quad (3.15)$$

Feito isso, aplica-se a propriedade da Álgebra Linear da transposição do produto de matrizes na equação 3.15, e coloca-se o fator $(\{\delta u\}^e)^T$ em evidência:

$$(\{\delta u\}^e)^T \left[\int_V [B]^T [C] [B] \{u\}^e + [B]^T \{\sigma_0\} \right] dV - \int_V [N]^T \{p\} dV - \int_S [N]^T \{q\} dS = 0 \quad (3.16)$$

Considerando-se que na equação 3.16 o fator $\{\delta u\}^e$ não é nulo, esse termo pode ser eliminado:

$$\int_V [B]^T [C] [B] dV \{u\}^e = - \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV + \int_V [N]^T \{p\} dV + \int_S [N]^T \{q\} dS \quad (3.17)$$

Na equação 3.17:

$$\begin{aligned} [K]^e &= \int_V [B]^T [C] [B] dV \\ \{f_{\sigma_0}\}^e &= - \int_V [B]^T \{\sigma_0\} dV \\ \{f_p\}^e &= \int_V [N]^T \{p\} dV \\ \{f_q\}^e &= \int_S [N]^T \{q\} dS \end{aligned} \quad (3.18)$$

Na relação 3.18, $[K]^e$ é a matriz elementar de rigidez, $\{f_{\sigma_0}\}^e$ é o vetor elementar de forças iniciais, $\{f_p\}^e$ é o vetor elementar de forças de volume e $\{f_q\}^e$ é o vetor elementar de forças de superfície. Considerando que no regime linear a estrutura só esteja sujeita ao carregamento concentrado, os vetores elementares de força podem ser considerados como um único vetor $\{f\}^e$.

Fazendo-se as devidas adaptações na equação 3.17, tem-se:

$$[K]^e \{u\}^e = \{f\}^e \quad (3.19)$$

É possível perceber que a equação 3.19 é bem semelhante à equação 3.6. A única diferença é que a equação 3.19 busca determinar os deslocamentos de um elemento, em vez dos deslocamentos globais (daí o índice sobrescrito 'e').

3.1.3 Cálculo das matrizes elementares de rigidez

Existem dois principais tipos de elementos finitos bidimensionais: o elemento triangular e o elemento retangular. Cada um possui dois deslocamentos em cada nó

(um vertical e um horizontal). Por conter mais funções no polinômio interpolador, o elemento retangular apresenta melhores resultados (OÑATE, 2009), por isso, optou-se por usar esse tipo de elemento na implementação do programa.

O vetor de deslocamentos nodais $\{u\}$ é escrito da seguinte maneira em relação às funções de forma $[N]$ e dos deslocamentos de um elemento:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_i & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Derivando-se a matriz $[N]$ como na equação 3.4, obtém-se a matriz $[B]$:

$$[B] = [L][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & \dots & N_i & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & \dots & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Substitui-se o resultado de 3.21 na primeira parcela da equação 3.17 (matriz elementar de rigidez). Como no estado plano de tensões a espessura é constante, esta pode ser retirada da integral. Logo, integra-se em toda a área do elemento, nas duas dimensões.

$$[K]^e = \int_V [B]^T [C] [B] dV = t \int_{A_e} [B]^T [C] [B] dA_e = t \int_0^a \int_0^b [B]^T [C] [B] dy dx \quad (3.22)$$

A matriz de rigidez elementar é quadrada, simétrica e tem dimensão 8 para o elemento linear de 4 nós, 18 para o elemento quadrático de 9 nós, e assim sucessivamente, sendo duas filas para cada nó do elemento. A matriz calculada encontra-se no Apêndice A.

Para o cálculo das deformações e tensões, procede-se, respectivamente, com as equações 3.5 e 3.8.

Calculadas as matrizes elementares de rigidez de cada elemento, o próximo passo consiste em distribuir os correspondentes coeficientes de rigidez nas devidas posições da matriz global de rigidez.

Um modo de se realizar essa alocação é montar uma matriz de incidência, que possui uma linha para cada elemento e uma coluna para cada nó que o elemento possui. É visto, no Apêndice B, um modo de endereçar os nós de um elemento genérico com relação à malha global dos nós. Deve-se prestar atenção à ordem e sequência dos nós; a contagem incorreta pode resultar em elementos torcidos ou incompatibilidades.

Pela matriz de incidência também são alocados os elementos do vetor global de forças. Esse rearranjo resulta no acoplamento dos elementos e das equações do sistema.

Com a matriz de rigidez e o vetor de forças ambos reorganizados, são impostas as condições de contorno; no caso, são restringidos os deslocamentos correspondentes aos apoios. Aí, procede-se conforme a equação 3.7 (é necessário também reordenar o sistema de equações e retirar as três filas correspondentes aos deslocamentos iguais a zero), para determinar os deslocamentos a partir da rigidez e das forças.

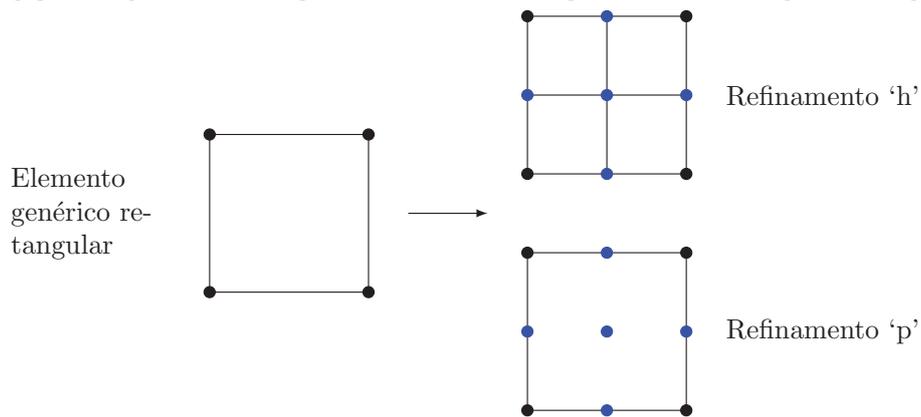
3.1.4 Refinamento

Para o caso de elementos com lados curvos depois de sujeitos a um carregamento, funções lineares não são capazes de representar fielmente suas dimensões. Para isso, é necessário adaptar esses elementos, refinando-os.

Existem dois principais métodos de refinar uma malha: aumentar o número de elementos de uma malha (refinamento 'h') ou aumentar o grau do polinômio das funções de forma (refinamento 'p'). A FIGURA 25 mostra um elemento retangular linear de quatro nós à esquerda. Para proceder ao refinamento, foram inseridos novos nós nos pontos médios entre os nós já existentes, conforme as duas imagens à direita. Submetendo-se o elemento a refinamento 'h', surgem quatro elementos menores a partir daquele original ao se passar de uma malha para outra imediatamente mais refinada (imagem superior direita na FIGURA 25). Submetendo-se o elemento a refinamento 'p', este é transformado em um elemento quadrático (imagem inferior direita na FIGURA 25).

O refinamento, qualquer que seja, de maneira geral oferece mais precisão nos resultados, no entanto, podem surgir termos espúrios que atrapalham a resposta da análise.

FIGURA 25 – EXEMPLO DE REFINAMENTO DE ELEMENTO RETANGULAR



FONTE: O autor.

3.1.5 Elementos finitos isoparamétricos

Quando uma estrutura é submetida a um carregamento incremental, a configuração da malha vai mudando a cada passo de carga, isto é, as coordenadas dos nós se alteram e os elementos apresentam deformações lineares e angulares, deixando de ser ortogonais ou de contorno retilíneo.

Quando um elemento finito bidimensional não é retangular, é possível associá-lo a um elemento retangular padrão por meio de funções interpoladoras que relacionam um sistema de coordenadas isoparamétricas ξ e η com o sistema cartesiano de coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{y} (SORIANO; LIMA, 2003; OÑATE, 2009).

O elemento retangular padrão possui lados de medida igual a 2, cujas coordenadas variam de -1 a 1. Logo, a origem do sistema isoparamétrico de coordenadas é o centro geométrico do retângulo.

Exemplos de funções interpoladoras são os polinômios de Lagrange, que possuem a seguinte forma:

$$L_i(x) = \prod_{j=1; j \neq i}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \quad (3.23)$$

Em um dos pontos do domínio, a imagem do polinômio de Lagrange é igual a 1; nos demais pontos a imagem é zero.

Na equação 3.23, n é o número de polinômios para uma dimensão, que é igual ao número de nós em uma dimensão ou ao grau do polinômio acrescido de 1. Por isso, para elementos lineares (lados definidos por funções polinomiais de grau 1), $n = 2$, ou seja, há dois polinômios para cada dimensão. Por consequência, existem quatro polinômios em duas dimensões (dois que são função de ξ e dois que são função de η). Para elementos quadráticos, $n = 3$ e há nove polinômios em duas dimensões.

Os elementos da matriz $[N]$ de funções de forma são obtidos por meio do produto de dois polinômios de Lagrange (no caso de elementos bidimensionais), um que é função de ξ pelo outro que é função de η . Para um determinado nó, multiplicam-se os dois polinômios cujas imagens naquele determinado nó são ambas iguais a 1.

Um elemento finito bidimensional possui n nós, logo, suas coordenadas cartesianas nodais prescritas \hat{x}_i e \hat{y}_i são as seguintes, quando dispostas matricialmente:

$$[\hat{X}] = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{y}_1 \\ \hat{x}_2 & \hat{y}_2 \\ \vdots & \vdots \\ \hat{x}_n & \hat{y}_n \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Cada ponto $P(x, y)$ pode ser representado como $P(\xi, \eta)$, ao se realizar a seguinte transformação:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x(\xi, \eta) \\ y &\rightarrow y(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (3.25)$$

A transformação descrita em 3.25 é feita, matricialmente, com a seguinte relação, considerando um elemento de n nós, para o qual existem n funções de forma $N_i(\xi, \eta)$:

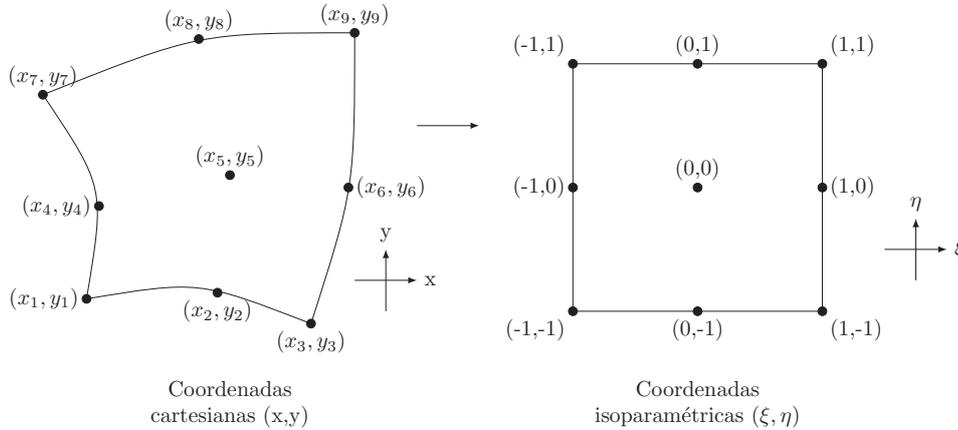
$$\begin{Bmatrix} x(\xi, \eta) \\ y(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [\hat{X}]^T [N(\xi, \eta)]^T = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 & \hat{x}_2 & \dots & \hat{x}_n \\ \hat{y}_1 & \hat{y}_2 & \dots & \hat{y}_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N_1(\xi, \eta) \\ N_2(\xi, \eta) \\ \vdots \\ N_n(\xi, \eta) \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

Considerando-se um elemento quadrilateral genérico, com quatro lados curvos, faz-se a seguinte relação entre o elemento genérico e o elemento padrão, ilustrada na FIGURA 26:

Se os lados do elemento fossem retos, um polinômio de grau 1 seria suficiente para representar a equação de qualquer lado, isto é, o elemento linear seria capaz de representá-lo fidedignamente. Como os lados são curvos, o grau do polinômio deve ser pelo menos 2 para representar cada lado curvo.

Os polinômios de Lagrange obtidos para $n = 3$ (elemento quadrático) aparecem ilustrados na FIGURA 27. Esses polinômios, assim como a matriz $[N]$ com as funções de forma obtidas para o elemento linear de 9 nós (quadrilateral), encontram-se no Apêndice C.

FIGURA 26 – ELEMENTO GENÉRICO DE 9 NÓS RELACIONADO AO ELEMENTO RETANGULAR ISOPARAMÉTRICO



FONTE: O autor.

A origem do sistema de coordenadas isoparamétricas coincide com o nó 5 do elemento padrão.

Como os lados são curvos, é necessário um polinômio de grau no mínimo 2 para representar cada lado.

Pela numeração dos nós como na FIGURA 26, as funções de forma de segundo grau para os lados do elemento aparecem ilustradas na FIGURA 27.

O próximo passo é calcular a matriz $[B]$, derivando-se $[N]$. Não se pode derivar funções de ξ e η em relação a x e y , contudo, é possível fazer o contrário, isto é, derivar x e y em relação a ξ e η . A matriz jacobiana $[J]$ contém essas derivadas. Seu determinante é usado para transformar as variáveis de cartesianas para isoparamétricas. As derivadas de $[N]$ em relação a ξ e η (respectivamente, N_ξ e N_η), assim como o determinante jacobiano em função das coordenadas ξ, η, x_i e y_i (com i variando de 1 a 4), estão no Apêndice C, junto com as funções de forma.

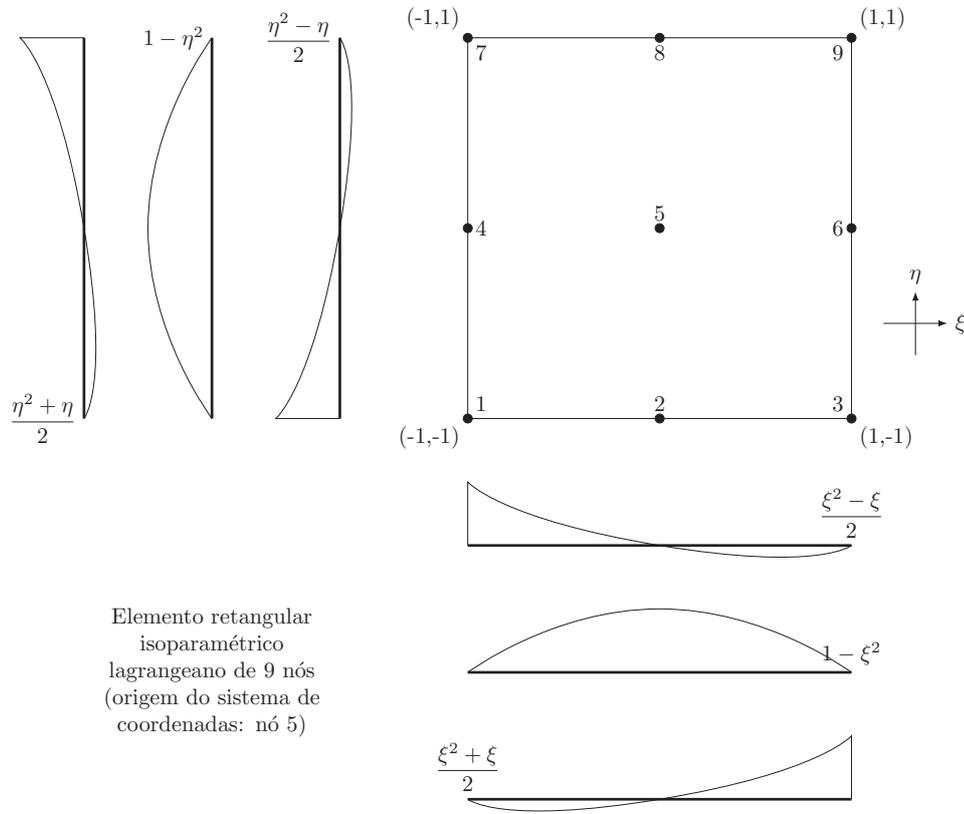
$$[J] = [\hat{X}]^T [N_{\xi, \eta}] = [\hat{X}]^T \begin{bmatrix} N_\xi & N_\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 \begin{bmatrix} N_{i, \xi} x_i & N_{i, \eta} x_i \\ N_{i, \xi} y_i & N_{i, \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Para se obter $[N_{x,y}]$ (derivadas das funções de forma em relação às coordenadas cartesianas) a partir de $[\hat{N}_{\xi, \eta}]$ (derivadas em relação às coordenadas isoparamétricas, com valores já prescritos) e $[J]$ (matriz jacobiana), realiza-se o seguinte cálculo:

$$[N_{x,y}] = [\hat{N}_{\xi, \eta}] [J]^{-1} \quad (3.28)$$

Mais detalhadamente:

FIGURA 27 – FUNÇÕES POLINOMIAIS DE LAGRANGE DE SEGUNDO GRAU PARA O ELEMENTO RETANGULAR ISOPARAMÉTRICO QUADRÁTICO DE 9 NÓS



FONTE: O autor.

$$[N_{i,x} \quad N_{i,y}] = [\hat{N}_{i,\xi} \quad \hat{N}_{i,\eta}] \begin{bmatrix} x_\xi & x_\eta \\ y_\xi & y_\eta \end{bmatrix}^{-1} = [\hat{N}_{i,\xi} \quad \hat{N}_{i,\eta}] \begin{bmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

A matriz $[B]$ de derivadas das funções de forma é (OÑATE, 2009):

$$[B] = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \bar{b}_1 & 0 & \bar{b}_2 & 0 & \bar{b}_3 & 0 & \bar{b}_4 & 0 \\ 0 & \bar{c}_1 & 0 & \bar{c}_2 & 0 & \bar{c}_3 & 0 & \bar{c}_4 \\ \bar{c}_1 & \bar{b}_1 & \bar{c}_2 & \bar{b}_2 & \bar{c}_3 & \bar{b}_3 & \bar{c}_4 & \bar{b}_4 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Cada elemento de $[B]$ é dado como:

$$\begin{aligned} \bar{b}_i &= y_\eta N_{i,\xi} - y_\xi N_{i,\eta} \\ \bar{c}_i &= x_\xi N_{i,\eta} - x_\eta N_{i,\xi} \end{aligned} \quad (3.31)$$

A matriz elementar de rigidez $[K]^e$ se calcula de maneira semelhante à equação 3.17, com uma modificação: integra-se com relação às coordenadas isoparamétricas, em vez das coordenadas cartesianas. Para isso, é incluído o determinante jacobiano calculado na equação 3.27.

$$[K]^e = t \iint [B]^T [C] [B] dx dy = t \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B]^T [C] [B] |J| d\xi d\eta \quad (3.32)$$

Para um elemento cujo grau dos polinômios de Lagrange seja igual a n , a dimensão da matriz $[N]$ é igual a $(n + 1)^2$ e a dimensão da matriz $[K_e]$ é $2(n + 1)^2$ – duas filas para cada função de forma.

3.1.6 Integração numérica

A integração analítica da equação 3.32 é muito difícil de ser realizada. Por isso, uma solução é a integração numérica (OÑATE, 2009). Esse método consiste em calcular o somatório dos valores de uma função em um determinado conjunto de pontos, os quais são obtidos por meio de quadratura de Gauss e dos polinômios de Legendre.

Para um elemento bidimensional isoparamétrico cujos lados sejam divididos por n subdomínios:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) dy dx = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [f(x_i, y_j) W_i W_j] \quad (3.33)$$

Os termos W_i e W_j são os coeficientes de ponderação (pesos), ao passo que x_i e y_j são os valores de x e y pré-determinados pela quadratura de Gauss.

Adaptando-se a equação 3.32 conforme a equação 3.33:

$$[K]^e = t \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [[B(\xi_i, \eta_j)]^T [C] [B(\xi_i, \eta_j)] |J| W_i W_j] \quad (3.34)$$

A TABELA 2 ilustra os valores de ξ e η e os pesos W para integração numérica em elementos lineares e quadráticos.

TABELA 2 – PARÂMETROS PARA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Grau do elemento	ξ, η	W
1 (linear)	$[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}]$	$[1, 0; 1, 0]$
2 (quadrático)	$[-\sqrt{0,6}; 0; \sqrt{0,6}]$	$[\frac{5}{9}; \frac{8}{9}; \frac{5}{9}]$

FONTE: Adaptado de Oñate (2009).

3.2 ANÁLISE NÃO LINEAR

O comportamento linear de uma estrutura de concreto sujeito a um carregamento é observado até que surja a primeira fissura. Após isso, a estrutura começa a perder rigidez, logo, a matriz $[K]$ se rearranja de modo a se adaptar à estrutura danificada (KOTSOVOS, 2015). O sistema 3.6 deixa de ser linear, e para resolvê-lo, é necessário empregar métodos numéricos.

Quando a estrutura passa a se comportar de maneira não linear, a equação 3.6 deixa de ser válida, porque a matriz de rigidez $[K(u)]$ passa ser uma função dos deslocamentos. Modificando-se a referida equação:

$$[K(u)]\{u\} = \{f\} \quad (3.35)$$

Junto a isso, é necessário estabelecer as condições de equilíbrio. As forças externas são os carregamentos aplicados, ao passo que as forças internas são os esforços absorvidos pela estrutura. Para que haja equilíbrio (BATHE, 2006), é necessário que as forças internas $\{f\}$ sejam iguais às forças externas $\{r\}$:

$$\{r\} - \{f\} = \{o\} \quad (3.36)$$

Em 3.36 (sistema de equações não lineares a ser resolvido), $\{o\}$ é o vetor nulo.

Segundo Bathe (2006), a implementação dos métodos iterativos é feita pela seguinte equação:

$$[K(u)]\{\delta u\} = \{r\} - \{f\} \quad (3.37)$$

Em 3.37, $[K(u)]$ é a matriz de rigidez não linear, $\{\delta u\}$ é o vetor de incremento de deslocamentos da correspondente iteração, $\{r\}$ e $\{f\}$ são, respectivamente, os vetores de forças externas e internas, cuja diferença entre ambos é denominada resíduo (equação desbalanceada). Na análise não linear, à medida que as iterações são processadas, o resíduo diminui se houver convergência, isto é, a força interna converge para o passo de carga (em outras palavras, o equilíbrio é atingido) e a norma do incremento de deslocamento converge para zero. Na análise linear, já na primeira iteração o vetor de forças internas equivale às forças internas, por isso, uma única iteração é suficiente.

Na análise realizada, as forças internas são independentes das forças externas, isto é, o comportamento da estrutura em relação às tensões e deformações não interfere no carregamento aplicado.

Será adotada a seguinte notação de índices:

- índice subscrito i para iterações; e
- índice sobrescrito j para o passo de carga.

Além disso, busca-se fazer a seguinte padronização de vetores de incrementos e matrizes de rigidez:

- $\{\delta u\}_{(i)}^{(j)}$ para o vetor de incremento de deslocamentos correspondente à i -ésima iteração processada no j -ésimo passo de carga – corresponde apenas ao deslocamento da referida iteração;
- $\{\Delta u\}_{(i)}^{(j)}$ para o vetor de incremento de deslocamento total obtido para o j -ésimo passo de carga até a i -ésima iteração – esse vetor é cumulativo e corresponde ao somatório das contribuições incrementais de todas as iterações anteriores, ou seja:

$$\{\Delta u\}_{(i)}^{(j)} = \sum_{k=0}^i \{\delta u\}_{(k)}^{(j)} \quad (3.38)$$

- $[K]_{(i)}^{(j)}$ para a matriz de rigidez na i -ésima iteração e j -ésimo passo de carga;
- $\{f\}_{(i)}^{(j)}$ para o vetor de forças internas obtido após a i -ésima iteração do j -ésimo passo de carga;
- $\{r\}^{(j)}$ para o vetor de forças externas aplicado no j -ésimo passo de carga (independe da iteração i); e
- $\{x\}_{(i)}^{(j)}$ para o resíduo de forças desbalanceadas, no qual:

$$\{x\}_{(i)}^{(j)} = \{r\}^{(j)} - \{f\}_{(i)}^{(j)} \quad (3.39)$$

Obtido o incremento de deslocamentos $\{\delta u\}_{(i)}^{(j)}$, este é somado com o vetor cumulativo $\{\Delta u\}_{(i-1)}^{(j)}$, de modo a se obter o vetor de deslocamentos $\{\Delta u\}$ da iteração atual i para o mesmo passo de carga j .

$$\begin{aligned} [K]_{(i-1)}^{(j-1)} \{\delta u\}_{(i)} &= \{x\}_{(i)}^{(j)} \\ \{\Delta u\}_{(i)}^{(j)} &= \{\Delta u\}_{(i-1)}^{(j)} + \{\delta u\}_{(i)} \end{aligned} \quad (3.40)$$

Ao fim de um passo de carga j , após processadas n iterações, o vetor cumulativo de deslocamentos $\{\Delta u\}_{(n)}^{(j)}$ é somado com o vetor de deslocamentos totais anterior $\{u\}^{(j-1)}$, obtendo-se o vetor atual de deslocamentos totais $\{u\}^{(j)}$:

$$\{u\}_{(i)}^{(j)} = \{u\}^{(j-1)} + \{\Delta u\}_{(n)}^{(j)} \quad (3.41)$$

Para a análise em questão, devem ser estabelecidas as seguintes condições iniciais:

- Ao passar de um passo de carga a outro, a matriz inicial de rigidez é igual à última matriz de rigidez do passo de carga anterior.

$$[K]_{(0)}^{(j)} = [K]_{(n)}^{(j-1)} \quad (3.42)$$

- No início de um passo de carga não há forças internas nem deslocamentos, por isso seus correspondentes vetores cumulativos são zerados (considera-se $\{o\}$ o vetor nulo):

$$\begin{aligned} \{\Delta u\}_{(0)}^{(j)} &= \{o\} \\ \{f\}_{(0)}^{(j)} &= \{o\} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Antes de prosseguir para a análise não linear, é necessário relembrar os métodos iterativos de resolução. Kotsovos (2015) cita alguns desses métodos para resolução de equações não lineares, principalmente o método de Newton-Raphson (completo e modificado), o qual foi escolhido para resolver sistemas de equações não lineares neste trabalho.

Em ambos os métodos, parte-se de uma estimativa inicial de deslocamentos (no caso, igual a zero, pois a estrutura inicialmente não possui deslocamentos) e traça-se uma linha reta da origem (haja vista a estimativa inicial nula) até o passo de carga processado. A inclinação dessa linha é proporcional ao módulo de Young inicial e, por consequência, à matriz de rigidez $[K(u)]$. Feito isso, calculam-se as forças internas (vetor $\{f\}$); a diferença entre os vetores de forças internas $\{f\}$ e de forças externas aplicadas $\{r\}$ é o resíduo $\{x\}$. Repete-se o procedimento, partindo-se da força interna obtida. O incremento de deslocamento $\{\delta u\}$ é somado ao deslocamento $\{\Delta u\}$ já obtido. A cada iteração, espera-se que o resíduo diminua. Deve-se repetir a operação até que a norma do resíduo ou do vetor de incremento de deslocamentos seja menor que a tolerância estipulada (critérios de parada serão comentados mais adiante).

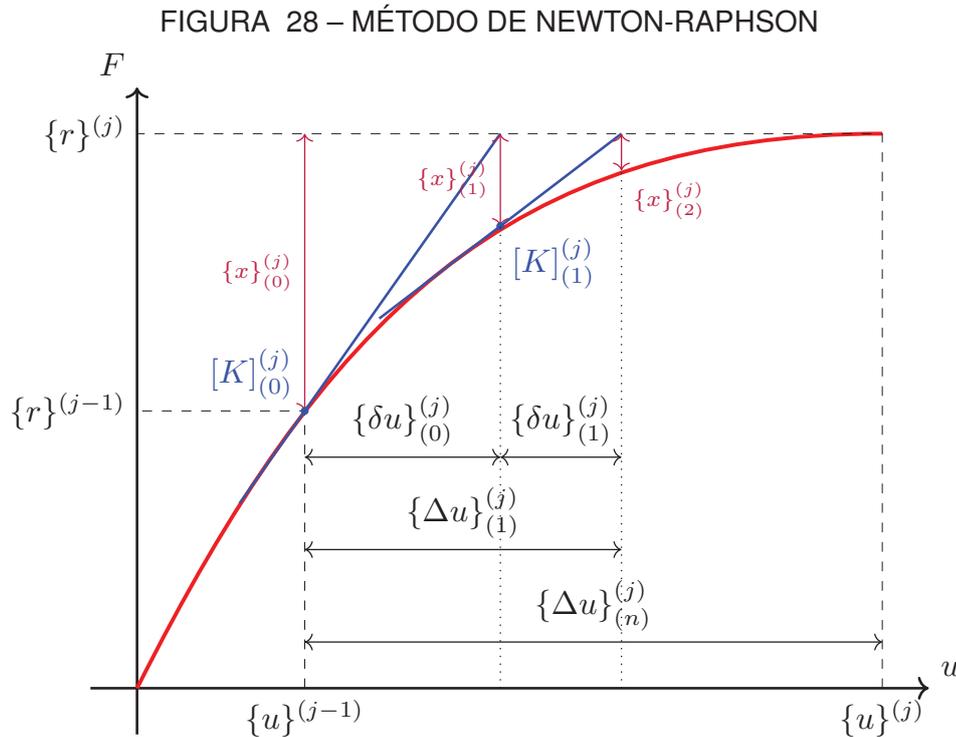
A diferença entre os métodos se dá na construção e atualização da matriz de rigidez $[K(u)]$.

3.2.1 Método de Newton-Raphson

O método do módulo tangente ou de Newton-Raphson (ou também, Newton-Raphson completo) é aquele em que a matriz de rigidez acompanha a curva carga-deslocamento. De maneira geral, o número de iterações é menor que para o método de Newton-Raphson modificado, pois a matriz de rigidez é atualizada a cada iteração;

isto, porém, exige um esforço computacional mais elevado, e existe a possibilidade de o tempo de processamento ser longo.

A FIGURA 28 ilustra o método de Newton-Raphson. É possível perceber que a cada iteração a reta em azul tangente à curva (que representa a matriz de rigidez) muda sua inclinação.



FONTE: Adaptado de Abeche (2015).

O processo iterativo é ilustrado no fluxograma da FIGURA 29.

3.2.2 Método de Newton-Raphson modificado

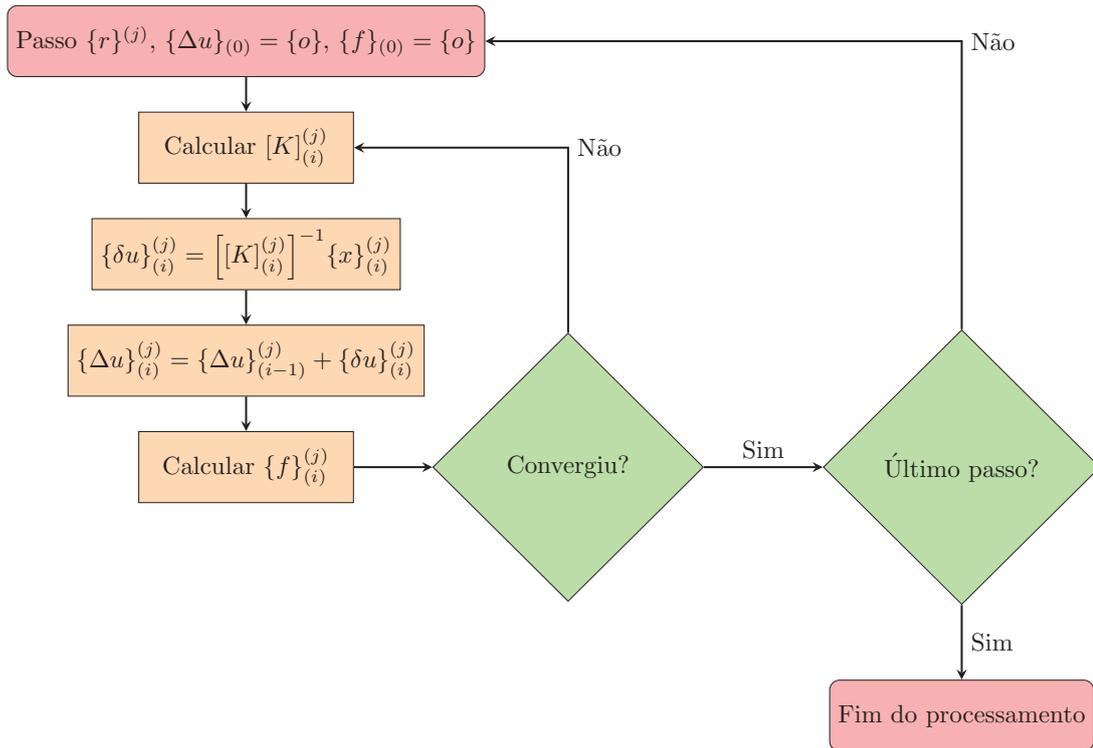
O método de Newton-Raphson modificado (ilustrado na FIGURA 30) consiste em manter a matriz de rigidez durante todo o processo iterativo. A vantagem desse método é o menor esforço computacional, já que não é exigida a atualização de $[K]$ a cada iteração. Por outro lado, é elevado o número de iterações, o que pode (mas nem sempre) demandar um elevado período de tempo para a convergência.

O processo iterativo é ilustrado no fluxograma da FIGURA 31.

3.2.3 Técnica do comprimento de arco

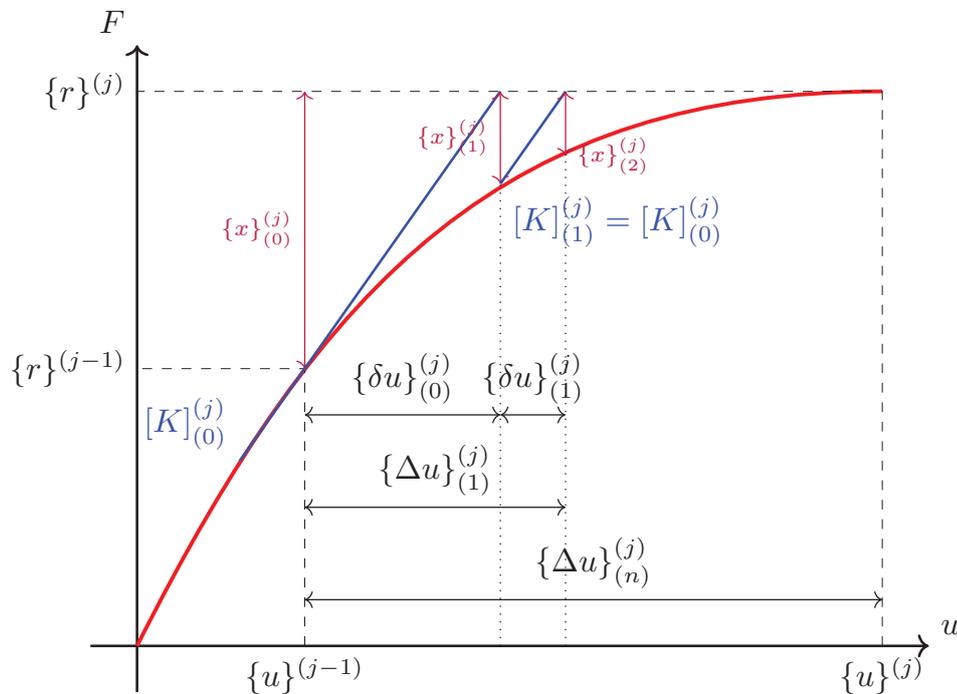
Ensaio de estruturas de concreto com fibras possuem diagramas tensão-deformação nos quais se observam trechos ascendentes seguidos de trechos descendentes de relaxação (BENCARDINO et al., 2008). A análise computacional desses pontos em que há mudança de um trecho ascendente para um trecho descendente

FIGURA 29 – FLUXOGRAMA PARA O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON



FONTE: O autor.

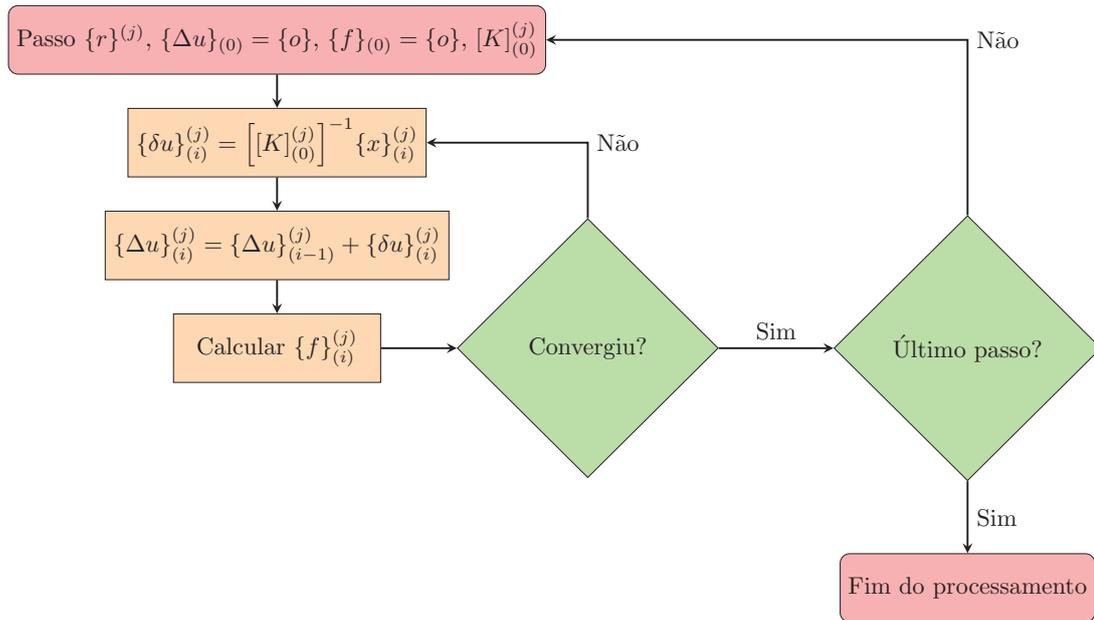
FIGURA 30 – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO



FONTE: Adaptado de Abeche (2015).

pode levar a erros, já que a reta tangente é horizontal, o que implica afirmar que a matriz de rigidez é singular. Para isso, procedem-se com técnicas de continuação. A obra de Crisfield (1981) faz referência a vários tipos dessas técnicas, também descritas

FIGURA 31 – FLUXOGRAMA PARA O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON MODIFICADO



FONTE: O autor.

no trabalho de ROCHA (2000).

A solução de um problema de análise não linear se dá pela FIGURA 32 (CRISFIELD, 1981):

Primeiramente, arbitra-se um valor de $\Delta\lambda_{(0)}$, que multiplicará o incremento de carga. Além disso, como se trata do início do passo de carga, o deslocamento $\{\Delta u\}$ para aquele passo é nulo (ou seja, o deslocamento total é $\{u\}^{(t)}$). Neste trabalho, adota-se $\Delta\lambda_{(0)} = 1$. O próximo passo é calcular o incremento predito $\{\delta u_r\}$ levando-se em consideração apenas a matriz $[K]$ de rigidez e o vetor de forças externas $\{R\}$. A solução predita $\{\Delta u\}_{(0)}$ é obtida a partir do incremento predito e do parâmetro $\Delta\lambda_{(0)}$, conforme equações a seguir:

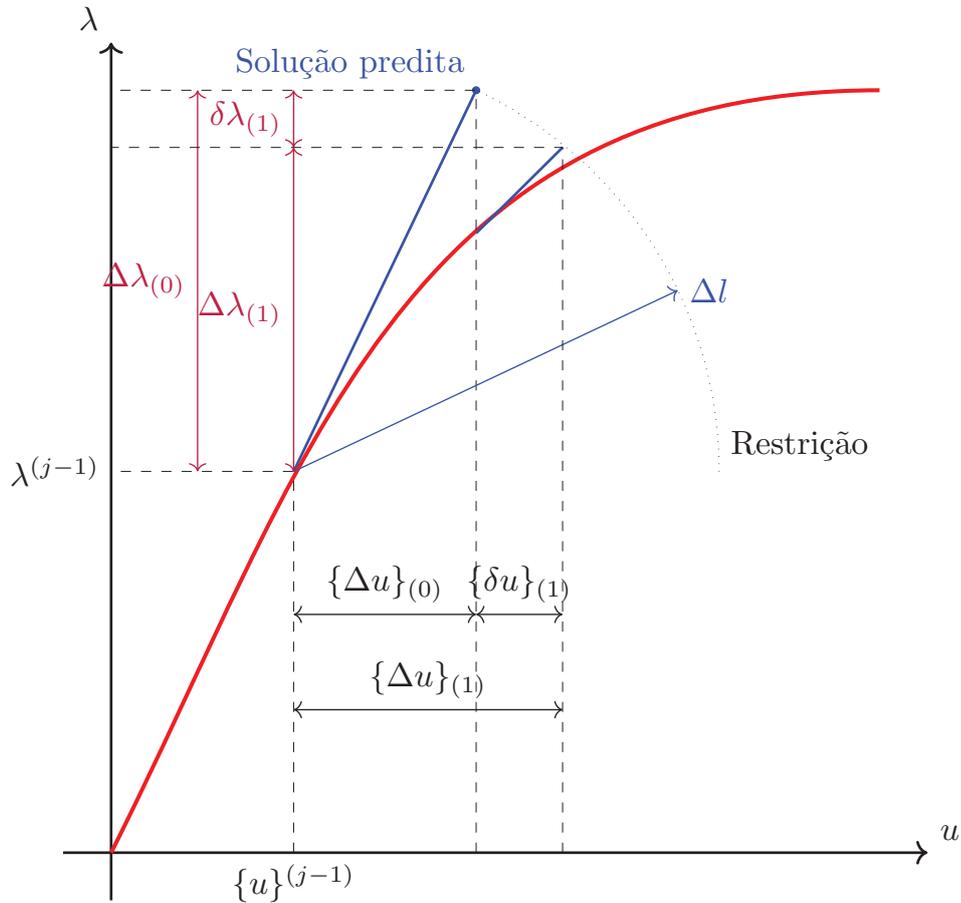
$$\{\delta u_r\} = [K]^{-1}\{R\} \quad (3.44)$$

$$\{\Delta u\}_{(0)} = \Delta\lambda_{(0)}\{\delta u_r\} \quad (3.45)$$

Um detalhe importante é analisar o sinal do produto $\{\Delta u\}_{(i)}^T\{\delta u_r\}$. Se este for positivo, prossegue-se à análise normalmente, porque ainda na iteração i , o trecho é ascendente; caso contrário, troca-se o sinal de $\Delta\lambda_{(0)}$, pois inicia-se um trecho descendente.

Verifica-se a convergência, isto é, se a solução predita leva ao equilíbrio. Em caso negativo (o que ocorre no regime não linear), inicia-se o processo iterativo. As parcelas $\{\delta u_r\}$ e $\{\delta u_g\}$ são os incrementos de deslocamento devidos, respectivamente,

FIGURA 32 – GRÁFICO DE UM PROBLEMA NÃO LINEAR RESOLVIDO POR PROCESSO ITERATIVO (PARÂMETRO DE CARGA *VERSUS* DESLOCAMENTO)



FONTE: Adaptado de ROCHA (2000).

às forças externas $\{R\}$ e ao resíduo entre forças externas corrigidas $\Delta\lambda\{R\}$ e internas $\{F\}$, conforme equações a seguir:

$$\{\delta u_g\} = [K]^{-1}(\lambda\{R\} - \{F\}) \quad (3.46)$$

$$\{\delta u_r\} = [K]^{-1}\{R\} \quad (3.47)$$

Calculadas essas parcelas, o próximo parâmetro a ser calculado é a correção $\delta\lambda$, que será somada ao parâmetro $\Delta\lambda$:

$$\delta\lambda = -\frac{\{\Delta u\}_{(0)}^T \{\delta u_g\}}{\{\Delta u\}_{(0)}^T \{\delta u_r\}} \quad (3.48)$$

$$\Delta\lambda_{(i)} = \Delta\lambda_{(i-1)} + \delta\lambda_{(i)} \quad (3.49)$$

Por fim, calcula-se o novo vetor de deslocamentos para o passo de carga, somando-o com o incremento da iteração processada:

$$\{\delta u\}_{(i)} = \{\delta u_g\}_{(i)} + \delta\lambda\{\delta u_r\}_{(i)} \quad (3.50)$$

$$\{\Delta u\}_{(i)} = \{\Delta u\}_{(i-1)} + \{\delta u\}_{(i)} \quad (3.51)$$

Atingida a convergência na iteração i do passo de carga j processado, são atualizados os vetores globais de deslocamento e o valor do parâmetro λ :

$$\{u\}^{(j)} = \{u\}^{(j-1)} + \{\Delta u\}_{(i)} \quad (3.52)$$

$$\lambda^{(j)} = \lambda^{(j-1)} + \Delta\lambda_{(i)} \quad (3.53)$$

3.2.4 Critérios de convergência

Estabelece-se uma tolerância como critério de parada. Quando, para a n -ésima iteração, a norma da diferença entre os vetores de forças (interna e externa) é menor que essa tolerância, faz-se $u^{(j-1)} = u_{(n)}^{(j-1)}$ e $f^{(j-1)} = f_{(n)}^{(j-1)}$. Matematicamente:

$$\|\{r\} - \{f\}\| < tol \quad (3.54)$$

Para a análise realizada, os passos de carga são incrementados a uma razão constante. Logo, o vetor $\{r\}$ é proporcional ao número de passos de carga.

Pode também ser empregado um critério de parada que leve em consideração o incremento de deslocamento $\{\Delta u\}$ de uma iteração em relação ao deslocamento $\{u\}$ de um passo de carga.

$$\frac{\|\{\Delta u\}\|}{\|\{u\}\|} < tol \quad (3.55)$$

É possível, também, combinar os critérios de parada de força e deslocamento em um só, isto é, o critério de parada passa a ser a energia (produto escalar entre os vetores de força e deslocamento).

$$\frac{|\{\Delta u\}_{(i)}^T (\{R\}_{(i)} - \{F\}_{(i-1)})|}{|\{\Delta u\}_{(1)}^T \{R\}_{(i)}|} < tol \quad (3.56)$$

3.3 MECÂNICA DO DANO

Quando a estrutura está fissurada e o regime não linear começou, a estrutura perde rigidez e a matriz $[K(u)]$ deve se rearranjar para se compatibilizar com a estrutura

danificada. Por isso, é necessário empregar uma função que relacione a lei constitutiva do material com o dano.

Embora o concreto reforçado com fibras de aço seja um material anisotrópico, sem perda de generalidade, pode-se considerá-lo isotrópico para análise de dano. Na malha de elementos finitos, um elemento possui uma área total S . Inicialmente, essa área é totalmente sã. Quando a fissuração inicia, essa área total se divide em duas partes: uma área sã \tilde{S} e uma área danificada S_D (LEMAITRE; DESMORAT, 2006).

$$S = \tilde{S} + S_D \quad (3.57)$$

A relação entre a área danificada e a área total é denominada dano relativo (D), um parâmetro de dano isotrópico que varia entre zero (elemento sem nenhum dano) e um (elemento totalmente danificado). Reescrevendo a equação 3.57, com ênfase na área sã (KACHANOV, 1958):

$$\tilde{S} = S - S_D = S(1 - D) \quad (3.58)$$

Depois que um elemento é danificado, este elemento está submetido a uma tensão normal aparente σ , mas que corresponde a uma tensão efetiva $\tilde{\sigma}$ (maior que a tensão aparente), dada pela razão entre o esforço F e a área sã \tilde{S} :

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} \quad (3.59)$$

Vale ressaltar que a tensão aparente é a razão entre o mesmo esforço F e a área total S . Substituindo essa relação e a equação 3.58 na equação 3.59, é possível relacionar as tensões aparente e efetiva com o dano. Essa é a equação descrita por Mazars (1986).

$$\tilde{\sigma} = \frac{F}{\tilde{S}} = \frac{F}{S(1 - D)} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (3.60)$$

Isolando-se D , e assumindo que o dano seja zero antes de a tensão efetiva se igualar à tensão aparente:

$$D = \begin{cases} 0, & \tilde{\sigma} < \sigma \\ 1 - \frac{\sigma}{\tilde{\sigma}}, & \tilde{\sigma} \geq \sigma \end{cases} \quad (3.61)$$

No caso, a tensão aparente é a resistência à tração do material.

O dano relativo D também relaciona a deformação efetiva $\tilde{\varepsilon}$ com a deformação aparente ε (maior), por meio da seguinte relação, que pode também ser considerada

como a razão entre o deslocamento efetivo $l - d$ e o deslocamento total l , em que d é o comprimento danificado e $\frac{d}{l}$ é o dano aparente:

$$\frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{l - d}{l} = 1 - D \quad (3.62)$$

Relacionando as tensões e deformações efetiva e aparente com a lei de Hooke:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma}{\tilde{\sigma}} &= \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon} = 1 - D \\ \frac{\tilde{E}\varepsilon}{E\tilde{\varepsilon}} &= \frac{\tilde{\varepsilon}}{\varepsilon} = 1 - D \\ \frac{\tilde{E}}{E(1 - D)} &= 1 - D \\ \frac{\tilde{E}}{E} &= (1 - D)^2 \end{aligned} \quad (3.63)$$

Em 3.63, E é o módulo de Young aparente e \tilde{E} é o módulo de Young efetivo.

3.3.1 Modelo de Dano de Mazars

O trabalho de Mazars (1984) propôs um modelo de dano para o concreto, obtido com base em ensaios uniaxiais, com hipóteses simplificadoras. Segundo Pituba (1998), para o modelo de Mazars o dano ocorre devido a um alongamento (deformação positiva) em pelo menos uma direção principal. Depois que o dano inicia, a tendência é que este sempre progrida, isto é, o concreto não é capaz de se regenerar (em outras palavras, o dano nunca diminui espontaneamente). Uma das hipóteses simplificadoras é que o coeficiente de dano é escalar, mesmo com a anisotropia do material, que exigiria um tensor de dano de quarta ordem. Outra hipótese é da elasticidade do concreto e que as deformações oriundas de um possível descarregamento não são significativas.

Segundo Kachanov, esse coeficiente escalar de dano relaciona a área de fissuras com a área total (vide equação 3.58).

Para relacionar dano com tensão, utiliza-se a equação da tensão efetiva descrita na equação 3.60.

Antes de se obter o dano, é necessário calcular a deformação equivalente, dada pela seguinte equação:

$$\varepsilon_{eq} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i^+)^2} \quad (3.64)$$

Cada termo ε_i^+ é a componente positiva na i -ésima direção principal. No caso do estado plano de tensões, $n = 3$ (há três direções de deformação). Essa componente é dada pela média aritmética entre a deformação e seu valor absoluto, ou então:

$$\varepsilon_i^+ = \frac{1}{2}(|\varepsilon_i| + \varepsilon_i) \quad (3.65)$$

Define-se uma função de dano $f(\varepsilon_{eq}, \varepsilon_{d0})$ cujo valor é zero antes que a deformação equivalente ε_{eq} atinja a deformação máxima admissível por tração ε_{d0} , dada por:

$$\varepsilon_{d0} = \frac{E}{f_{ctm}} \quad (3.66)$$

Em 3.66, E é o módulo de Young não danificado e f_{ctm} é a resistência do concreto à tração.

Como o concreto possui comportamento distinto sob tração ou compressão (vide FIGURA 8), a variável de dano é uma combinação linear do dano oriundo da tração e do dano oriundo da compressão.

$$D = \alpha_c D_c + \alpha_t D_t \quad (3.67)$$

As parcelas D_c e D_t são os danos por compressão e tração, respectivamente, e α_c e α_t são os respectivos coeficientes ponderadores (complementares – $0 \leq \alpha_c \leq 1$ e $0 \leq \alpha_t \leq 1$ – a soma de ambos é 1). Esses coeficientes são calculados como (GUELLO et al., 2002):

$$\alpha_c = \frac{\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ci}}{\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ci} + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ti}} \quad (3.68)$$

$$\alpha_t = \frac{\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ti}}{\sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ci} + \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ti}} \quad (3.69)$$

$$\varepsilon_c = \frac{1+\nu}{E} \langle \sigma \rangle_- - \frac{\nu}{E} \langle \sum \sigma_i \rangle_- \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\varepsilon_t = \frac{1+\nu}{E} \langle \sigma \rangle_+ - \frac{\nu}{E} \langle \sum \sigma_i \rangle_+ \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\alpha_c + \alpha_t = 1 \quad (3.70)$$

O índice i dos somatórios varia até 3 porque há 3 dimensões.

O vetor σ contém as tensões principais, ao passo que $\langle \sigma \rangle_+$ e $\langle \sigma \rangle_-$ são as componentes positiva e negativa de σ .

Feito isso, calculam-se as parcelas de dano D_c e D_t :

$$D_c = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_c)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_c}{\exp(B_c(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0}))}$$

$$D_t = 1 - \frac{\varepsilon_{d0}(1 - A_t)}{\varepsilon_{eq}} - \frac{A_t}{\exp(B_t(\varepsilon_{eq} - \varepsilon_{d0}))} \quad (3.71)$$

Os parâmetros A_c , A_t , B_c , B_t são coeficientes de ajuste da função de dano, cujos limites recomendados de valores são tabelados por Pijaudier-Cabot e Mazars (2001).

3.3.2 Plasticidade do aço

Na simulação de vigas com armaduras de aço, foi considerada a plastificação. O aço possui comportamento linear e elástico até atingir sua resistência à tração σ_s ,

TABELA 3 – VALORES RECOMENDADOS PARA OS PARÂMETROS – MODELO DE MAZARS

Parâmetro	Mínimo	Máximo
A_c	1,0	1,5
A_t	0,7	1,2
B_c	1000	2000
B_t	10000	50000

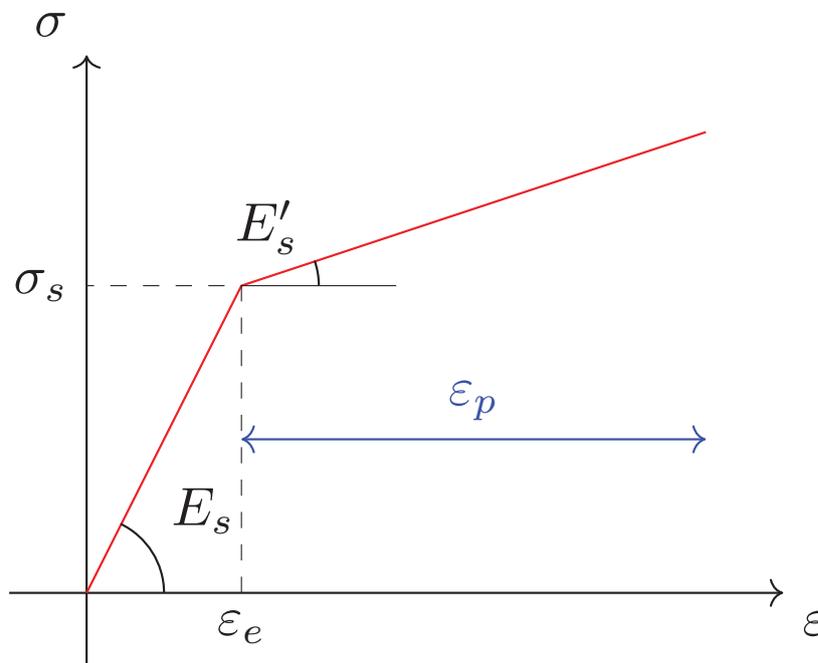
FONTE: Adaptado de Pijaudier-Gabot e Mazars (2001).

com módulo de Young E_s normalmente adotado como 210 GPa. Para essa resistência à tração, obtém-se uma deformação ε_s , dividindo-se a resistência pelo módulo de Young.

Após isso, quando o aço é submetido a uma tensão maior que σ_s , ocorre o fenômeno de plastificação, isto é, seu módulo de Young diminui para E'_s , conforme ilustrado na FIGURA 33 a seguir. A deformação possui duas parcelas: uma deformação elástica e recuperável ε_e e uma deformação plástica irreversível ε_p que corresponde à diferença entre a deformação total e a parcela elástica, ilustrada na equação a seguir:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (3.72)$$

FIGURA 33 – DIAGRAMA BILINEAR TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA O AÇO



FONTE: O autor.

4 MODELAGEM COMPUTACIONAL

No presente trabalho, o programa computacional desenvolvido foi aplicado em quatro problemas distintos:

- Caso 1: Ensaio de um corpo de prova uniaxial à tração e à compressão, com o intuito de verificar como é possível simular o trecho descendente da curva carga-deslocamento empregando-se a técnica de comprimento de arco;
- Caso 2: Ensaio de uma viga-parede biengastada de concreto à flexão, sujeita a dois carregamentos, simulando-se um exemplo sem fibras para se comparar com resultados já obtidos, e posteriormente realizando-se a simulação com diferentes teores de fibras;
- Caso 3: Ensaio de uma viga biapoiada de concreto armado à flexão, também procedendo-se a essa análise primeiramente sem fibras (para fins de comparação com resultados de outros trabalhos) e depois com diferentes teores de fibras; e
- Caso 4: Ensaio de uma viga-laje biapoiada de concreto reforçado com fibras de aço, comparando-se com um exemplo de controle (sem fibras).

O algoritmo do programa foi escrito na linguagem Python. Os gráficos e diagramas obtidos também foram plotados no próprio *software* da linguagem.

Em todos os códigos de análise não linear, nos quais foi empregado o método de Newton-Raphson, o número de iterações foi limitado a 300, a fim de limitar o tempo de execução.

Além do teor de fibras, foi também analisada a influência do refinamento da malha no resultado final. Nas simulações de ensaio de viga, foi testada a influência do tamanho do passo de carga – inclusive, utilizando-se um passo de carga diminuído para um carregamento mais avançado –, e também foram variados os parâmetros de dano de Mazars.

4.1 TESTES PRÉ-SIMULAÇÕES

Inicialmente, os códigos foram escritos progressivamente, a fim de se testar o programa de elementos finitos. Como na análise não linear não existe solução analítica para os problemas tratados neste trabalho, os primeiros programas apenas foram simulados com um passo de carga, baixo o suficiente para que não houvesse fissuração (ou seja, para que a estrutura permanecesse no regime linear) e fosse possível calcular

o resultado analítico por meio da equação 4.1. Nessa etapa, foram testados os dois tipos de elementos finitos (CST e retangular), com o intuito de escolher com qual destes prosseguir com a análise. Foram simuladas malhas de vários tamanhos para analisar como o refinamento 'h' (aquele que consiste em aumentar o número de elementos de uma malha) interfere nos resultados obtidos, principalmente no que concerne ao erro em relação ao resultado analítico.

$$\sigma = \frac{PL^3}{48EI} + \frac{PL}{4K_cAG} \quad (4.1)$$

A primeira parcela da equação 4.1 considera o modelo de viga de Euler-Bernoulli, segundo o qual todas as seções permanecem indeformadas, planas e ortogonais ao eixo da viga, considerando efeitos de cisalhamento desprezíveis. Contudo, para vigas muito curtas ou com baixa relação altura/largura (o que é o caso do ensaio de três pontos definido pela norma EN 14651 (2005)), os efeitos oriundos do cisalhamento passam a ser consideráveis. Por isso, é necessário adotar o modelo de viga de Timoshenko, considerando-se a segunda parcela da equação 4.1, fazendo-se o coeficiente de correção de esforço de cisalhamento $K_c = \frac{2}{3}$ para uma seção retangular.

Depois disso, escolhido o elemento entre CST e retangular, foram simulados os ensaios, ainda com apenas um passo de carga, porém com elementos de diferentes graus (número de nós), em outras palavras, fazendo-se o refinamento 'p'. O intuito é escolher o elemento ideal para proceder com a análise, de modo que os resultados tenham boa convergência, mas sem demasiado esforço computacional. Foram testados elementos de 4, 9 e 16 nós. Foram executadas, para cada tipo de elemento, o máximo de malhas que a máquina pôde processar.

Escolhido o melhor tipo (CST ou retangular) e o grau (linear, quadrático ou cúbico) de elemento, procedeu-se com as simulações de ensaios com vários passos de carga, primeiramente até cessar o regime linear, isto é, até iniciar a fissuração. Outro fator também a ser analisado é o tamanho do passo de carga, que também interfere na resposta final.

O próximo passo foi iniciar a análise não linear, empregando os métodos numéricos de resolução de equações não lineares e os modelos de dano descritos no capítulo anterior, para estruturas ainda sem armaduras de aço.

4.1.1 Teste 1: Elemento triangular *versus* elemento retangular

Para testar o funcionamento do programa de elementos finitos e analisar o erro entre a flecha máxima analítica (que pode ser calculada) e a flecha obtida pelo programa, foram inicialmente escritos dois códigos para simular o ensaio de três pontos à flexão, porém com carga inicial fixa de 1 kN: um código para a malha de elementos

triangulares e outro para a malha de elementos retangulares, ainda lineares (grau 1 – lagrangeano 4 nós). Analisa-se o erro percentual em função do número de graus de liberdade; este varia com o tamanho da malha.

Este é o conjunto de passos para se chegar aos resultados de uma determinada malha, o qual está ilustrado no fluxograma da FIGURA 34:

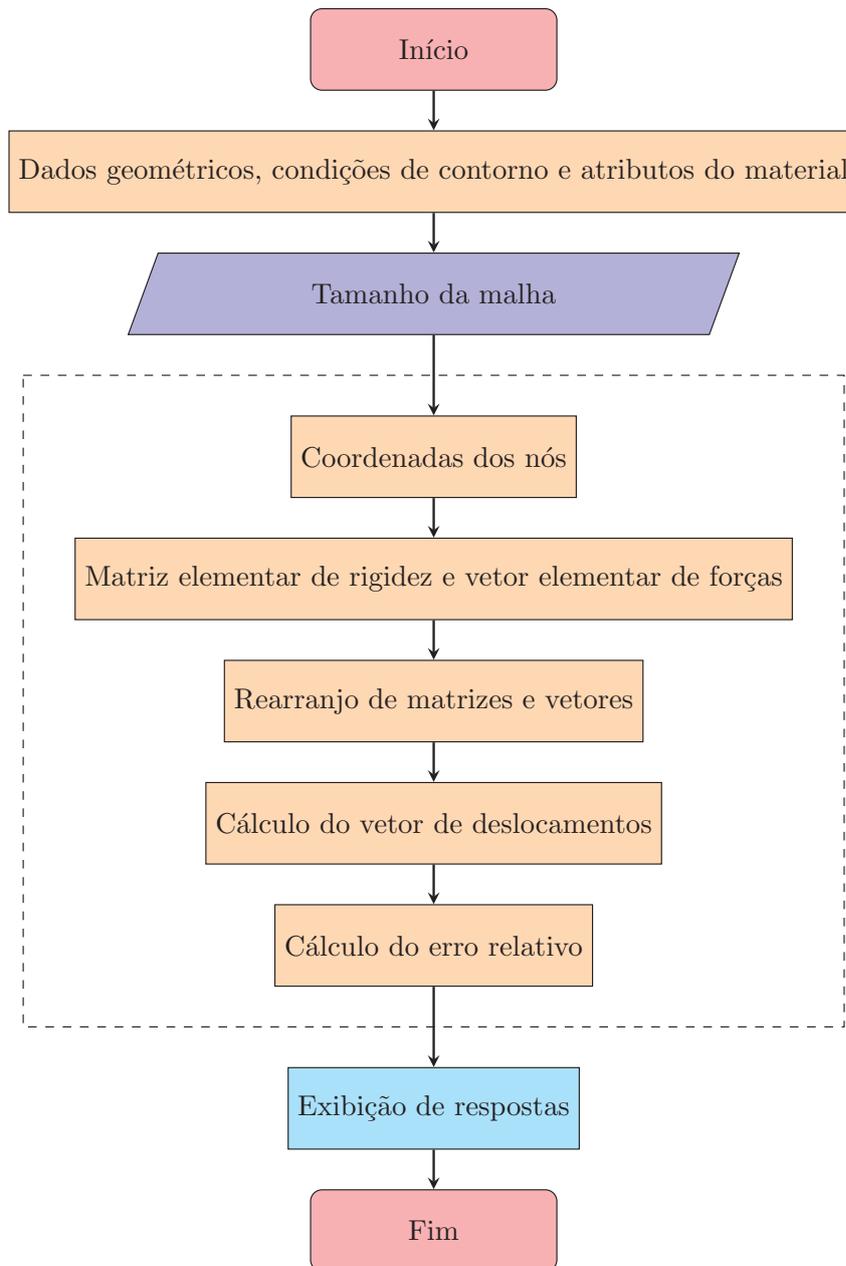
1. Definir dados geométricos, condições de contorno e atributos do material;
2. Definir tamanho da malha a ser simulada;
3. Definir coordenadas indeformadas dos nós e índices de deslocamentos restritos;
4. Para cada elemento, calcular matrizes elementares de rigidez e vetores elementares de forças;
5. Rearranjar matrizes e vetores, separando-se os deslocamentos restritos (nos apoios);
6. Calcular vetor de deslocamentos;
7. Calcular erro da flecha obtida pelo programa em relação à flecha analítica;
8. Exibir resposta do erro em função do tamanho da malha (número de graus de liberdade).

O fluxograma da FIGURA 34 ilustra os passos do processamento desse primeiro código, utilizando o MEF para os elementos lineares e não isoparamétricos. Tanto o código para o elemento triangular quanto para o elemento retangular possuem o mesmo fluxograma de execução.

As dimensões da viga (altura, comprimento total e espessura; h , l e t , respectivamente) são dadas em metros. Os atributos do material são o módulo de Young inicial (E , dado em kN/m²) e o coeficiente de Poisson (ν – adimensional). O comprimento é o total da viga, inclusive os balanços, e não somente o vão livre. O módulo de Young foi adotado como 31 GPa e o coeficiente de Poisson foi adotado como 0,2.

O número de malhas simuladas é dado pelo usuário. Cada malha possui um número de linhas para dividir a seção longitudinal da viga. O número de colunas é proporcional ao número de linhas, de modo que os elementos sejam quadrados, no caso dos elementos retangulares (Soriano e Lima (2003) recomenda elementos retangulares cujas dimensões sejam próximas, pois elementos muito alongados ou achatados conduzem a resultados pouco acurados). Para se testar a malha de elementos triangulares, aproveitou-se a mesma malha, porém cada elemento quadrado foi dividido ao meio. Ou seja, o número de elementos triangulares é o dobro do número de

FIGURA 34 – FLUXOGRAMA PARA A ANÁLISE LINEAR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS



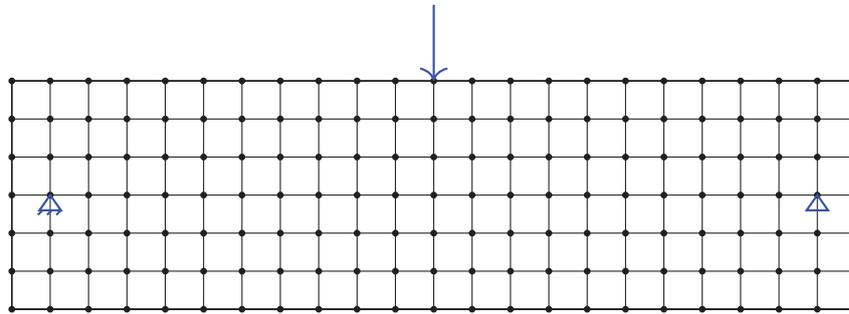
FONTE: O autor.

elementos retangulares para uma mesma malha, embora o número de nós continue o mesmo.

A malha mais grosseira simulada para o ensaio de três pontos possui 132 elementos retangulares (ou 264 elementos triangulares) – a FIGURA 35 ilustra a malha mais grosseira de elementos retangulares. A seção longitudinal da viga foi dividida em quadrados de 2,5 cm de lado para essa malha. Tanto para os elementos triangulares quanto para os retangulares, para uma mesma malha obteve-se o mesmo número de nós (161 para a malha mais grosseira). Desse modo, considerando-se o fato de que cada nó possui dois deslocamentos (um vertical e um horizontal) e restringindo-se dois

deslocamentos verticais e um horizontal nos apoios, têm-se 319 graus de liberdade.

FIGURA 35 – MALHA DO ENSAIO DE TRÊS PONTOS – 132 ELEMENTOS RETANGULARES DE 4 NÓS



FONTE: O autor.

Com as dimensões da viga e atributos do material já definidos, monta-se a matriz de coordenadas indeformadas, a matriz de incidência e a matriz de relações constitutivas $[C]$ para o estado plano de tensões. Tanto para o elemento triangular quanto para o retangular as matrizes de coordenadas indeformadas e de relações constitutivas são iguais.

Preenche-se a matriz de coordenadas indeformadas, que possui uma linha para cada nó da malha, e duas colunas (uma para a coordenada x e outra para a coordenada y).

A matriz de relações constitutivas $[C]$ é a mesma da equação 3.9 e depende do módulo de Young E e do coeficiente de Poisson ν , definidos no início do programa.

A matriz de incidência armazena o número global do nós de cada elemento.

Para preencher as matrizes de rigidez de cada elemento ($[K]^e$), é necessário determinar as coordenadas do elemento.

Calculadas as matrizes de rigidez, o próximo passo é alocar os termos da matriz elementar na posição correta da matriz global de rigidez $[K]$. Para isso, foi declarado um vetor auxiliar, cujas posições estão relacionadas com o índice do elemento na matriz de incidência.

Feito isso, são impostas as condições de contorno. São retiradas as três filas (entende-se por fila tanto a linha quanto a coluna) da matriz global de rigidez e as três posições do vetor global de forças cujos índices sejam iguais a de um deslocamento restrito (equação 3.7), já que não há deslocamentos nos apoios. Essas posições são determinadas a partir de outro vetor auxiliar que contém os índices dos deslocamentos restritos, que variam conforme a malha.

Já rearranjado o sistema sem os deslocamentos restritos, procede-se com a resolução do sistema, por meio de uma função do *software* que realiza o cálculo de sistemas lineares de equações. Esse cálculo resulta no vetor dos deslocamentos livres.

O vetor completo de deslocamentos recebe os deslocamentos restritos, inseridos nas respectivas posições.

Ao fim do processamento do programa, são exibidas as seguintes informações: a flecha máxima obtida (deslocamento vertical no centro do vão da viga), o número de elementos, o número de graus de liberdade e o valor analítico da flecha (que, no caso, só varia com o ensaio). São comparados os valores obtidos com o analítico, sendo calculado o erro percentual.

Estes códigos foram posteriormente modificados para simular várias malhas. E, com o intuito de reduzir o tempo de execução, para cada malha os resultados foram gravados em arquivos; desse modo, ao se executar o programa posteriormente, o programa apenas acessa os dados dos arquivos das malhas já simuladas, em vez de novamente calculá-las.

Ao passar de uma malha para a próxima, esta é submetida a um refinamento 'h', inserindo-se nós exatamente entre aqueles já existentes. Para o ensaio de três pontos, as malhas de elementos retangulares possuem 132, 528, 1188, 2112 elementos e assim por diante, ao passo que as malhas de elementos triangulares possuem 264, 1056, 2376, 4224 elementos e assim sucessivamente.

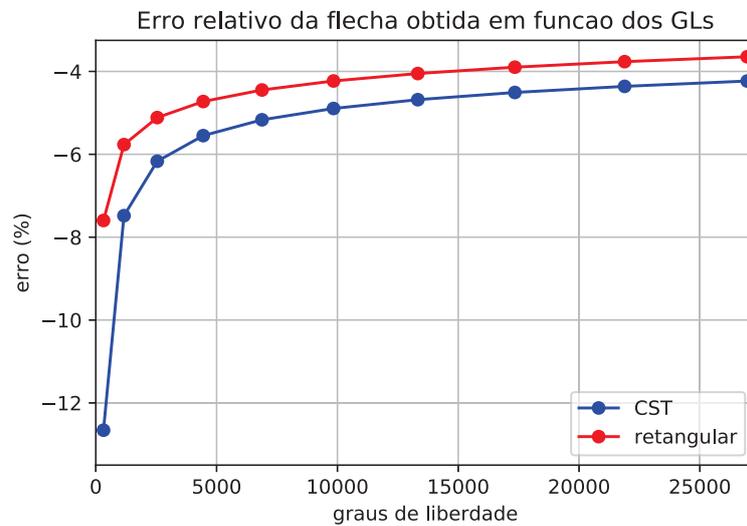
Terminada a simulação de todas as malhas, é plotado um gráfico que mostra o valor da flecha obtida para cada malha e a comparação com o valor analítico, de modo a se ter uma conclusão a respeito do refino, que levará a escolha do elemento adequado. Foram simuladas 10 malhas tanto para o elemento triangular (CST) quanto para o elemento retangular e calculados os erros obtidos em relação à flecha analítica. O gráfico da FIGURA 36 mostra as duas curvas de erro percentual em função do número de graus de liberdade.

Comparando-se as duas curvas, percebe-se que o refinamento da malha leva a uma diminuição do erro, isto é, conforme previsto, a flecha obtida pelo programa se aproxima da flecha analítica. Um detalhe importante é que, em todas as malhas simuladas, o erro obtido para o elemento retangular foi menor, o que foi decisivo para a escolha desse elemento para os próximos códigos. Segundo Oñate (2009), a convergência deve ser mais rápida para o elemento retangular.

Além disso, o erro obtido para a malha mais grosseira mostrou-se elevadíssimo para o elemento CST (13% a menos que a flecha analítica). É importante analisar o comportamento do erro nas malhas mais grosseiras porque, devido a limitações de máquina, não é possível simular malhas muito refinadas para ensaios mais complexos.

A diminuição do erro também mostrou-se assintótica, em outras palavras, o refinamento resultou em uma redução maior do erro para as malhas mais grosseiras do que para as malhas mais refinadas. Isso quer dizer que existe um ponto no qual o

FIGURA 36 – ESTUDO DO REFINO DE MALHA E ESCOLHA ENTRE ELEMENTO CST OU RETANGULAR – ENSAIO DE 3 PONTOS, ANÁLISE LINEAR, CARGA DE 1 KN



FONTE: O autor.

refinamento, embora contribua para a convergência, exige muito tempo de execução. Ainda assim, existe uma parcela espúria ou erros de máquina, que prejudicam a análise.

4.1.2 Teste 2: Escolha do elemento em relação ao grau

Foi escolhido o elemento retangular para se prosseguir com a análise, devido aos resultados mais próximos do analítico comparados com aqueles obtidos pelo CST.

O código para testar as malhas de elementos isoparamétricos foi escrito a partir do código já existente para as malhas de elementos retangulares. Para isso, foram empregadas as equações da seção 3.1.5. O cálculo dos resultados foi feito por meio de integração numérica, utilizando os coeficientes da TABELA 2.

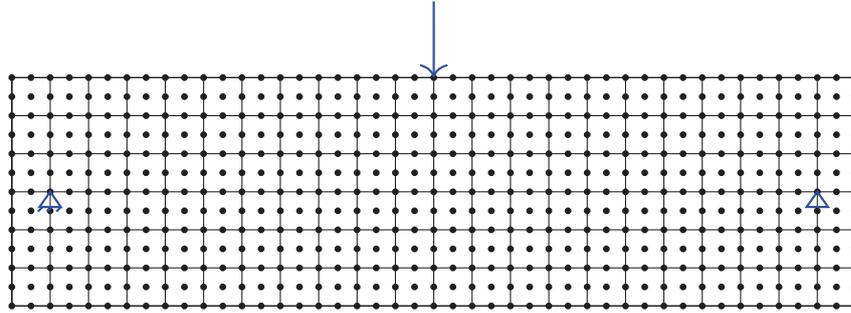
A matriz elementar de rigidez $[K]^e$ é calculada conforme a equação 3.32. As matrizes $[B]$ de cada elemento são armazenadas e acessadas posteriormente para calcular as tensões de cada elemento pelas equações 3.5 e 3.8. Quando se terminava de calcular a malha, acessavam-se as matrizes $[B]$, gravando-se apenas os deslocamentos e tensões.

O próximo passo é proceder com o refinamento 'p', isto é, simular elementos quadráticos e cúbicos, além do linear. Conforme a seção 3.1.4, os elementos lineares de 4 nós não representam, de maneira satisfatória, a configuração deformada da estrutura, porque esses elementos quando distorcidos permanecem com os lados retos, o que não ocorre na prática.

Por isso, o código de elementos isoparamétricos foi modificado para que uma mesma malha seja simulada utilizando também elementos isoparamétricos lagran-

geanos quadráticos (9 nós) e cúbicos (16 nós), incluindo-se as devidas funções de forma, obtidas com os polinômios de Lagrange. Para isso, a malha mais grosseira de elementos retangulares (com 132 elementos lineares) foi submetida a refinamento 'p', resultando 132 elementos quadráticos (vide FIGURA 37) e 585 nós (mesmo número de nós da malha de 528 elementos lineares).

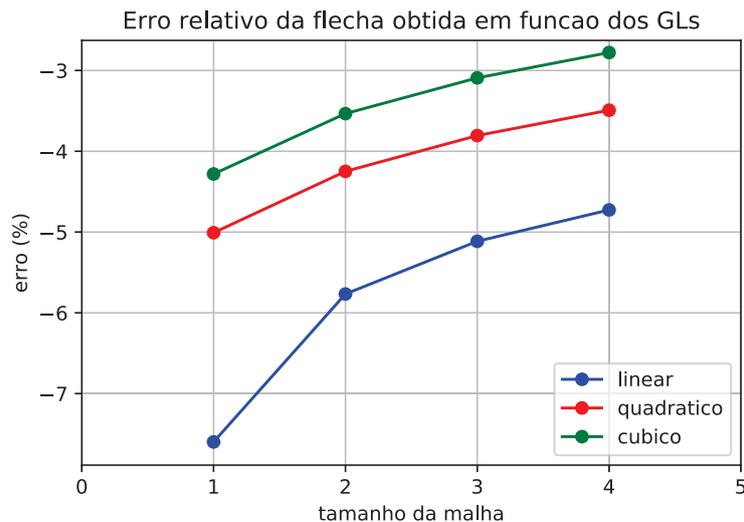
FIGURA 37 – MALHA DO ENSAIO DE TRÊS PONTOS – 132 ELEMENTOS QUADRÁTICOS DE 9 NÓS



FONTE: O autor.

Devido a limitações de máquina, apenas 5 malhas puderam ser simuladas para o elemento quadrático, e apenas 4 malhas foram simuladas para o elemento cúbico. Mesmo assim, foi obtido o erro percentual relativo à flecha analítica para essas malhas, ilustrado no gráfico da FIGURA 38.

FIGURA 38 – ERRO PERCENTUAL EM RELAÇÃO À FLECHA ANALÍTICA, EM FUNÇÃO DOS GRAUS DE LIBERDADE – ELEMENTO RETANGULAR LINEAR, QUADRÁTICO E CÚBICO – ENSAIO DE 3 PONTOS, ANÁLISE LINEAR, CARGA DE 1 KN



FONTE: O autor.

Observando-se a FIGURA 38, percebeu-se que o refinamento 'p', assim como o refinamento 'h', contribuiu com a diminuição do erro. No entanto, percebeu-se uma redução maior do erro ao passar do elemento linear para o quadrático do que ao

passar do elemento quadrático para o cúbico. Além disso, o tempo de execução para uma malha de elementos cúbicos é muito maior que para uma malha de elementos quadráticos.

Desse modo, foi escolhido o elemento quadrático de 9 nós para as análises. O elemento de 4 nós não leva a uma boa aproximação, e o elemento de 16 nós demanda demasiado esforço computacional.

4.1.3 Teste 3: Carregamento incremental

O código de elementos retangulares isoparamétricos empregou um carregamento incremental monotônico, com o passo de carga dado pelo usuário. O programa foi processado até que o elemento mais tracionado atingisse a resistência à tração, isto é, até o início da fissuração.

Sendo assim, antes de processar a malha, outra informação é necessária: a resistência do material. Para o concreto, foi adotada uma resistência à compressão f_{ck} de 25 MPa. A resistência à tração foi calculada conforme a equação da norma NBR-6118:2014:

$$f_{ctm} = 0,3 \sqrt[3]{f_{ck}^2} \quad (4.2)$$

Para um concreto de resistência à compressão $f_{ck} = 25 \text{ MPa}$, obtém-se uma resistência à tração $f_{ctm} = 2,56 \text{ MPa}$ de acordo com a equação 4.2 (ABNT, 2014). A deformação máxima de tração foi obtida dividindo-se a resistência à tração pelo módulo de Young.

Os passos para o cálculo de uma malha com carregamento incremental são os seguintes:

1. Definir dados geométricos, condições de contorno e atributos do material;;
2. Definir incremento de carga;
3. Definir tamanho da malha;
 - a) Se os dados da malha já existirem, acessar os dados contidos em arquivos;
 - b) Se não existirem os dados, calculá-los;
4. Se a resistência máxima ainda não for atingida, incrementar carga;
5. Se a resistência já tiver sido atingida, cessar cálculo;
6. Gravar dados calculados em arquivos;

7. Depois de calculadas todas as malhas, plotar o gráfico do erro em função do tamanho da malha (número de graus de liberdade).

Este código só processa uma malha por vez, ao invés de processar várias malhas (o tamanho da malha é fornecido pelo usuário). Além disso, a resposta do ensaio não é perfeitamente linear, pois a cada passo de carga, a estrutura se deforma e as coordenadas dos nós são atualizadas (daí, a importância do elemento isoparamétrico).

Neste código, em vez de ser plotado o gráfico erro de flecha *versus* graus de liberdade, é plotado o diagrama carga-deslocamento no último passo de carga no início da fissuração.

4.2 NÃO LINEARIDADE

A resolução do sistema não linear foi feita pelo método de Newton-Raphson modificado (descrito na seção 3.2). As equações de Mecânica do Dano foram aplicadas declarando-se uma matriz cuja dimensão varia com a malha de elementos finitos. Em cada ponto de Gauss foi calculado o correspondente dano, tomando-se como base o modelo de Mazars (1984). Esse fator de dano é obtido a partir da tensão calculada para o correspondente ponto de Gauss. O dano daquele referido ponto de Gauss era zero caso a tensão do elemento fosse inferior à resistência do material.

Devido aos elevados erros dos resultados obtidos para o elemento linear de 4 nós, e também devido ao longo tempo de processamento para o elemento de 16 nós, só se procedeu à execução do programa com o elemento de 9 nós.

Os passos para o cálculo de uma malha com carregamento incremental, sendo a análise não linear, estão a seguir:

1. Definir dados geométricos, condições de contorno e atributos do material;
2. Definir incremento de carga;
3. Definir tamanho da malha;
 - a) Se os dados da malha já existirem, acessar os dados contidos em arquivos;
 - b) Se não existirem os dados, calculá-los;
4. Se a carga máxima ainda não for atingida, incrementar carga;
5. Se a resistência já tiver sido atingida, iniciar processo iterativo para análise não linear;
6. Calcular resíduo de forças;

- a) Se o resíduo entre vetores de forças externas e internas for maior que a tolerância, proceder com a próxima iteração;
 - b) Se o resíduo for menor que a tolerância, passar para o próximo passo de carga;
7. Gravar dados calculados em arquivos;
 8. Depois de calculadas todas as malhas, plotar o gráfico do erro em função do tamanho da malha (número de graus de liberdade).

Foi adotada a tolerância de $1,0 \times 10^{-6}$ tanto para a norma máxima do resíduo de forças (diferença entre vetores de forças internas e externas), quanto para a norma do incremento de deslocamentos, e também para a norma de energia. Essa tolerância também foi adotada para todos os critérios de parada, nas simulações dos demais problemas. Nos primeiros passos de carga, como a resistência máxima do material ainda não havia sido atingida, o regime era linear e foi necessária apenas uma iteração. De maneira geral, quanto mais avançado o passo de carga, maior era o número de iterações processadas.

4.3 DESCRIÇÃO DOS PROBLEMAS SIMULADOS

Depois de testado o programa de elementos finitos e detectar que o programa foi capaz de representar o comportamento não linear, procedeu-se com as simulações de ensaios. Foram simulados, por meio dos algoritmos, os ensaios de corpo de prova uniaxial à tração e compressão (Caso 1), de viga-parede (Caso 2), viga biapoiada (Caso 3) e viga-laje à flexão (Caso 4). Pelo fato de ter sido adotada a hipótese de estado plano de tensões, a espessura da viga só foi considerada para efeitos de cálculo.

4.3.1 Caso 1: Corpo de prova uniaxial

Primeiramente foi simulado um corpo de prova prismático com 20 cm de altura e seção transversal quadrada de 10 cm de lado (esquema ilustrado na FIGURA 39 – as flechas duplas representam que a carga pode tanto ser de tração quanto de compressão). Possibilita-se, no programa, decidir se o ensaio será de tração ou compressão.

Para o ensaio à compressão, o incremento de carga foi de 1 kN. Para a tração, o passo de carga estipulado foi de 0,25 kN.

Os atributos dos materiais e parâmetros de dano de Mazars utilizados neste problema aparecem na TABELA 4.

FIGURA 39 – ESQUEMA DO ENSAIO UNIAXIAL



FONTE: O autor.

TABELA 4 – ENSAIO UNIAXIAL – ATRIBUTOS DOS MATERIAIS

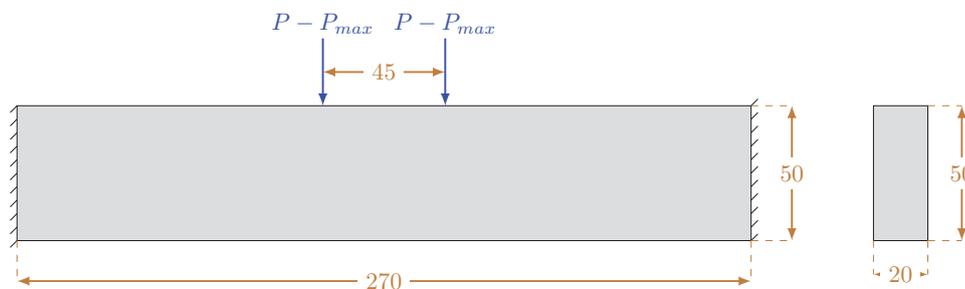
Símbolo	Atributo	Valor
E_c	Módulo de elasticidade do concreto	24,7 GPa
ν	Coefficiente de Poisson	0,2
A_c	Parâmetro de dano de Mazars à compressão	1,13
A_t	Parâmetro de dano de Mazars à tração	1,0
B_c	Parâmetro de dano de Mazars à compressão	1250
B_t	Parâmetro de dano de Mazars à tração	20000

FONTE: O autor.

4.3.2 Caso 2: Viga-parede biengastada

O modelo simulado deste ensaio é uma viga de concreto com 2,70 metros de comprimento total, biengastada nos dois bordos laterais. A seção transversal é retangular de 0,20 m de espessura por 0,50 m de altura. Os dois carregamentos concentrados incrementais e monotônicos estão no centro da viga, espaçados em 45 cm, simetricamente em relação ao comprimento total, conforme o trabalho de Guello et al. (2002) (esquema da estrutura mostrado na FIGURA 40). Não há armaduras de aço, assim como no ensaio realizado no trabalho referido.

FIGURA 40 – ESQUEMA DO ENSAIO DE VIGA-PAREDE À FLEXÃO



FONTE: Adaptado de Guello et al. (2002).

O incremento de carga para esta simulação foi de 0,25 kN até o carregamento de 37,5 kN (150 primeiros passos de carga) – após isso, o incremento foi reduzido pela

metade (0,125 kN) e prosseguiu até o carregamento de 65 kN (aproximadamente a mesma carga máxima que para o trabalho de Guello et al. (2002)).

Os atributos dos materiais e parâmetros de dano de Mazars utilizados por Guello et al. (2002) e na simulação do presente trabalho estão listados na TABELA 5. Inicialmente, utilizaram-se os mesmos parâmetros de dano que da dissertação analisada, porém, os resultados observados de deslocamento estiveram muito aquém do esperado (como se a estrutura simulada pelo programa fosse bem mais rígida). Sendo assim, foram escolhidos outros parâmetros de dano, preservados o módulo de Young E e o coeficiente de Poisson ν .

TABELA 5 – VIGA-PAREDE – ATRIBUTOS DOS MATERIAIS

Símbolo	Atributo	Valor ^[1]	Valor ^[2]
E_c	Módulo de elasticidade do concreto	24,7 GPa	24,7 GPa
ν	Coefficiente de Poisson	0,2	0,2
A_c	Parâmetro de dano de Mazars à compressão	1,13	1,0
A_t	Parâmetro de dano de Mazars à tração	0,7	1,0
B_c	Parâmetro de dano de Mazars à compressão	1250	2000
B_t	Parâmetro de dano de Mazars à tração	8000	50000

FONTE: Guello et al. (2002)^[1], O autor^[2].

4.3.3 Caso 3: Viga biapoiada armada

Nesta simulação a estrutura é uma viga simétrica de concreto armado com 6,00 metros de vão, com apoios nas duas extremidades. A seção transversal é retangular de 0,20 m de espessura por 0,40 m de altura. Há um carregamento puntual incremental e monotônico no centro da viga. As armaduras consistem em três barras de 12,5 mm de diâmetro, tanto no bordo inferior (armaduras de tração) quanto no bordo superior (armaduras de compressão). Esta viga foi simulada primeiramente por Jarek et al. (2011) e está ilustrada na FIGURA 41).

FIGURA 41 – ESQUEMA DO ENSAIO DE VIGA BIAPOIADA À FLEXÃO



FONTE: Adaptado de Imai (2018).

Os atributos dos materiais e parâmetros de dano de Mazars estão listados na TABELA 6. Assim como no trabalho de referência, utilizaram-se coeficientes de Poisson diferenciados para o concreto e para o aço.

TABELA 6 – VIGA BIAPOIADA – ATRIBUTOS DOS MATERIAIS

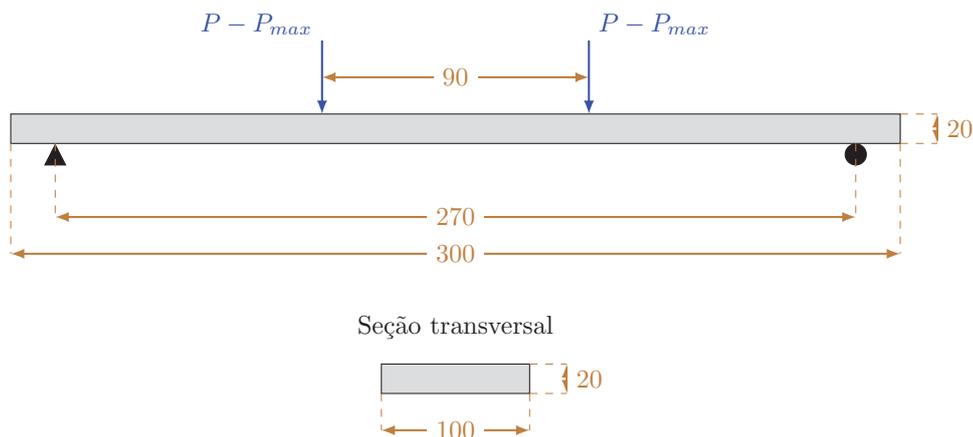
Símbolo	Atributo	Valor
E_c	Módulo de elasticidade do concreto	30,2 GPa
ν_c	Coefficiente de Poisson para o concreto	0,2
ν_s	Coefficiente de Poisson para o aço	0,3
A_c	Parâmetro de dano de Mazars à compressão	1,1
A_t	Parâmetro de dano de Mazars à tração	1,1
B_c	Parâmetro de dano de Mazars à compressão	5000
B_t	Parâmetro de dano de Mazars à tração	50000
ε_d	Deformação para a qual o dano inicia	$6,5 \times 10^{-5}$

FONTE: Jarek et al. (2011).

4.3.4 Caso 4: Viga-laje

O modelo deste ensaio é uma viga de concreto armado com 3 metros de comprimento total, com vão de 2,70 m e um balanço de 15 cm de cada lado da viga. A seção transversal é retangular de 1,00 m de largura por 20 cm de altura. Existem dois carregamentos concentrados incrementais e monotônicos, espaçados em 90 cm, simetricamente em relação ao comprimento da viga, conforme o trabalho de Blanco Álvarez et al. (2013). A viga é isostática: há três apoios, restringindo dois deslocamentos verticais e um horizontal. O esquema do ensaio é ilustrado na FIGURA 42.

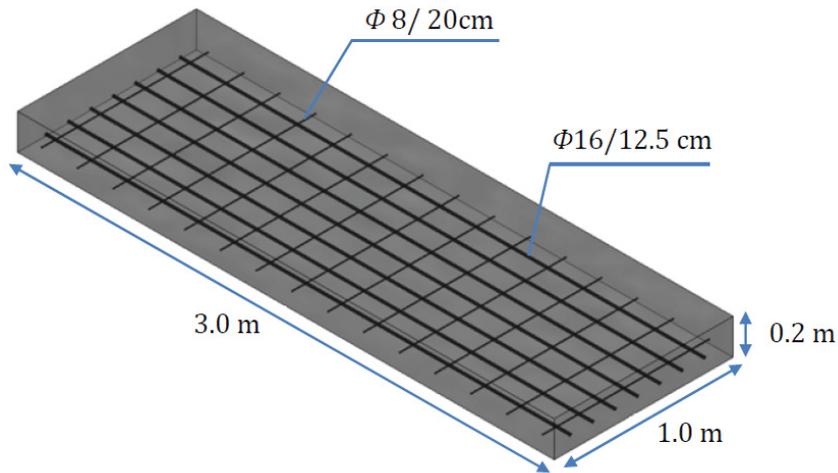
FIGURA 42 – ESQUEMA DO ENSAIO DE VIGA-LAJE À FLEXÃO, DIMENSÕES EM CENTÍMETROS



FONTE: O autor.

A viga submetida a ensaios experimentais, cujos resultados foram descritos no trabalho de Blanco Álvarez et al. (2013), possui o esquema de posicionamento de armaduras ilustrado na FIGURA 43. Há 15 barras de 16 mm, espaçadas em 12,5 cm, ao longo do comprimento, e também 7 barras de 8 mm, espaçadas a cada 20 cm, na direção transversal.

FIGURA 43 – POSICIONAMENTO DAS ARMADURAS DE AÇO NA VIGA DO ENSAIO DE 4 PONTOS



FONTE: Blanco Álvarez et al. (2013).

A TABELA 7 contém os valores adotados de parâmetros de dano, módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e deformação limite de dano.

TABELA 7 – VIGA-LAJE – ATRIBUTOS DOS MATERIAIS

Símbolo	Atributo	Valor
E_c	Módulo de elasticidade do concreto	28,0 GPa
ν_c	Coeficiente de Poisson para o concreto	0,2
A_c	Parâmetro de dano de Mazars à compressão	1,0
A_t	Parâmetro de dano de Mazars à tração	0,9
B_c	Parâmetro de dano de Mazars à compressão	2000
B_t	Parâmetro de dano de Mazars à tração	20000
ε_d	Deformação para a qual o dano inicia	8×10^{-5}

FONTE: O autor, Blanco Álvarez et al. (2013).

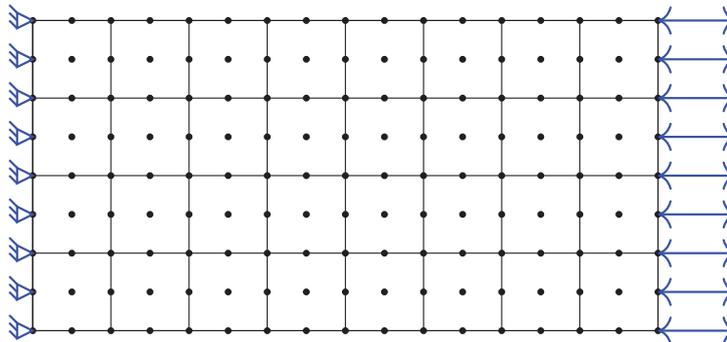
5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, será descrito como foi procedido para cada simulação, principalmente no que se refere à malha, e serão apresentados os resultados, tanto para estruturas sem fibras (para efeitos de calibração em comparação com os resultados de outros trabalhos) quanto para simulações já incluindo as fibras.

5.1 CASO 1: CORPO DE PROVA UNIAXIAL

Para simular o ensaio de corpo de prova uniaxial, tanto à tração quanto à compressão, foram simuladas três malhas diferentes: com 2, 8 e 32 elementos retangulares de 9 nós, conforme a FIGURA 44 ilustra a malha mais refinada. As setas duplas dos carregamentos estão representadas assim porque foram simulados ensaios de tração e de compressão. Inicialmente os corpos de prova de concreto foram simulados sem fibras de aço.

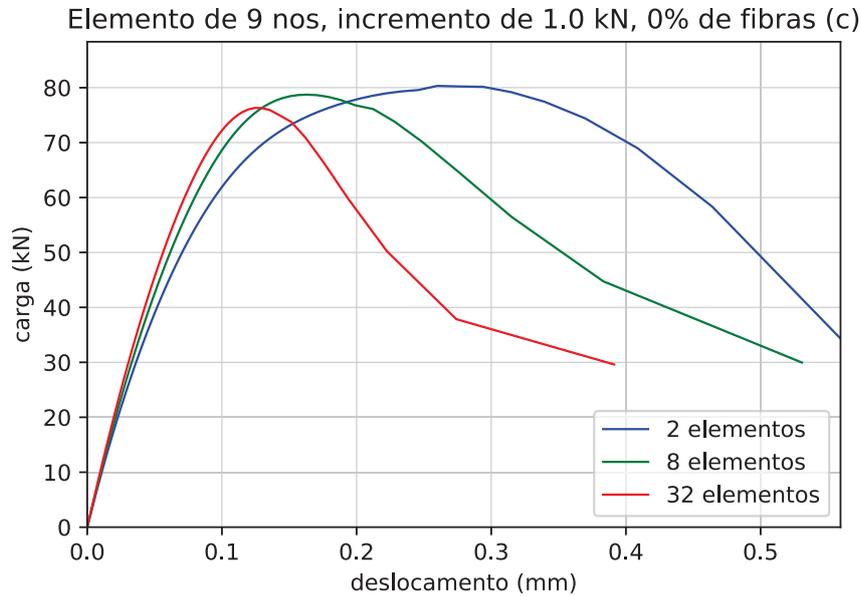
FIGURA 44 – MALHA DO CORPO DE PROVA COM 32 ELEMENTOS



FONTE: O autor.

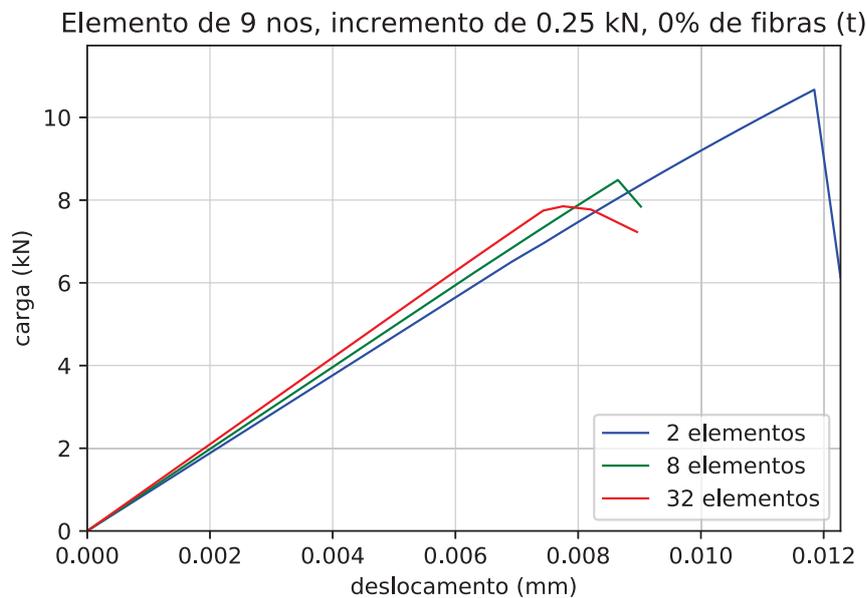
Foram obtidos os seguintes resultados para cada malha, ilustrados na figura FIGURA 45 (compressão) e FIGURA 46 (tração), com o intuito de mostrar a influência do refinamento. Percebeu-se, nessas figuras, que o refinamento da malha resultou em diminuição na tenacidade observada. No caso do ensaio à tração, o resultado para a malha de 2 elementos (mais grosseira) é bem destoante dos demais e, à medida que o refinamento era processado, percebeu-se uma diminuição na carga de pico. Previsivelmente, observaram-se curvas características para o concreto à compressão (trecho crescente linear, trecho crescente não linear e trecho decrescente com relaxação suave) e tração (trecho crescente quase totalmente linear seguido de uma queda abrupta devido ao colapso). Os trechos descendentes puderam ser obtidos empregando-se a técnica de comprimento de arco juntamente ao método de Newton-Raphson.

FIGURA 45 – COMPARATIVO ENTRE DIAGRAMAS CARGA-DESLOCAMENTO PARA EN-
SAIO UNIAXIAL À COMPRESSÃO – SEM FIBRAS, VARIAÇÃO DO TAMANHO
DA MALHA



FONTE: O autor.

FIGURA 46 – COMPARATIVO ENTRE DIAGRAMAS CARGA-DESLOCAMENTO PARA EN-
SAIO UNIAXIAL À TRAÇÃO – SEM FIBRAS, VARIAÇÃO DO TAMANHO DA
MALHA

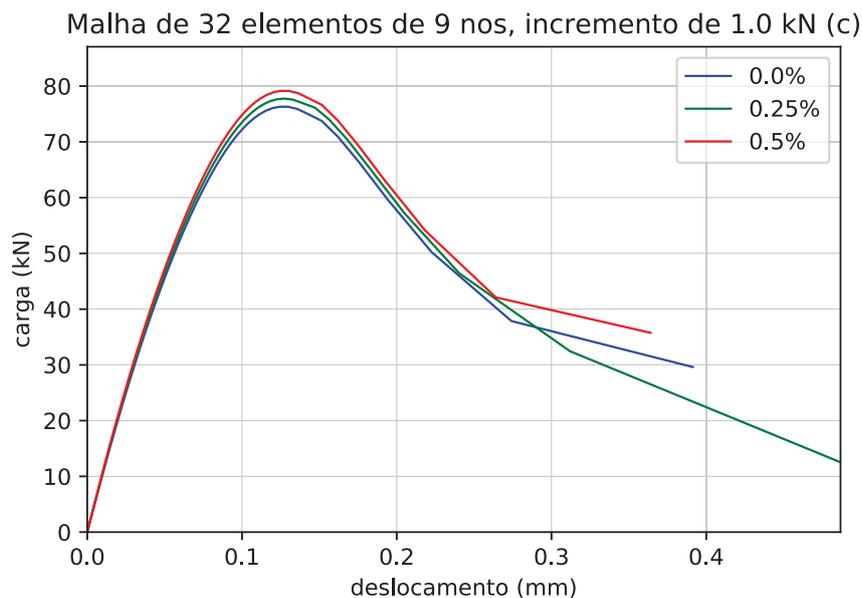


FONTE: O autor.

O próximo passo foi simular os corpos de prova com fibras, sendo dois teores diferentes: 0,25 % e 0,50 % em volume. Escolheu-se a malha com 32 elementos (mais refinada) para se proceder com a análise.

Foram obtidos os seguintes conjuntos de curvas para os diferentes teores de fibras, comparados com um corpo de prova de concreto puro. Esses resultados estão ilustrados a seguir na FIGURA 47 (compressão) e FIGURA 48 (tração). No caso da compressão, percebeu-se um pequeno aumento na tensão de pico conforme foi aumentado o teor de fibras, contudo, apenas para o teor de 0,25% observou-se um aumento na ductilidade (isto é, a análise prosseguiu para um deslocamento maior).

FIGURA 47 – COMPARATIVO ENTRE DIAGRAMAS CARGA-DESLOCAMENTO PARA ENSAIO UNIAXIAL À COMPRESSÃO AO SE VARIAR TEOR DE FIBRAS



FONTE: O autor.

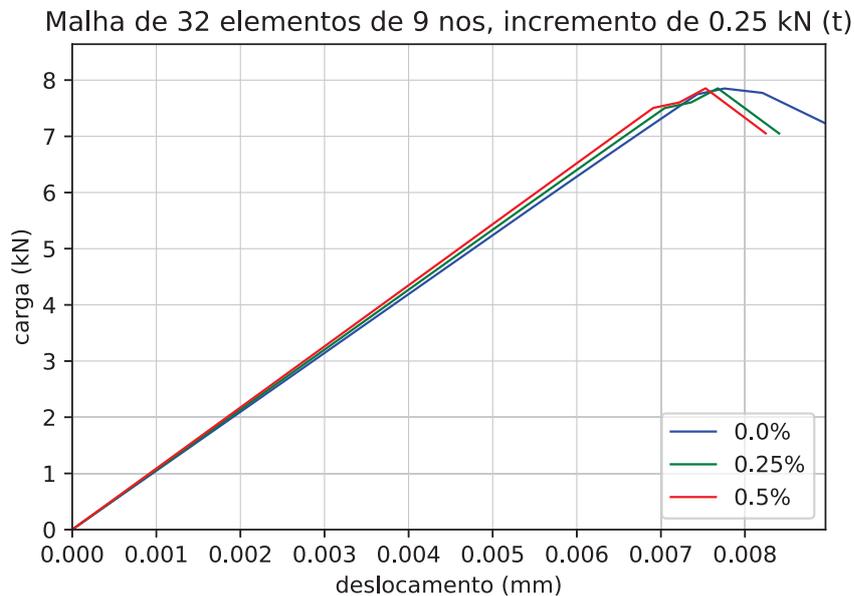
No caso da tração, no entanto, observou-se pouca diferença entre as curvas. Provavelmente, devido à abordagem e ao modelo de dano empregado, o programa não foi capaz de oferecer um aumento na ductilidade e na carga de pico.

5.2 CASO 2: VIGA-PAREDE

A malha simulada para o ensaio de viga-parede possui 120 elementos retangulares de 9 nós, dispostos em 5 linhas com 24 elementos em cada linha. A malha é uniforme, isto é, todos os elementos têm o mesmo tamanho e dimensões. Essa malha possui o mesmo número de elementos que a malha utilizada por Guello et al. (2002), embora este tenha empregado elementos de 8 nós (esquema da malha ilustrado na FIGURA 49). Para simular o engaste, foram restringidos os deslocamentos verticais e horizontais dos nós que estão nas extremidades laterais da malha.

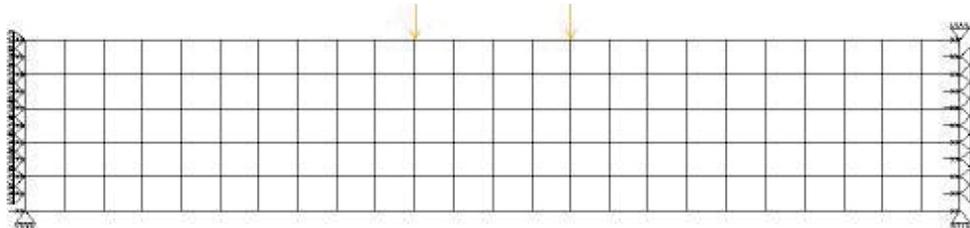
Foram obtidos os seguintes resultados para o deslocamento máximo no meio do vão, no bordo inferior da viga (FIGURA 50). As curvas em verde e vermelho foram obtidas, respectivamente, por Guello et al. (2002) e Pituba e Lacerda (2012). A curva

FIGURA 48 – COMPARATIVO ENTRE DIAGRAMAS CARGA-DESLOCAMENTO PARA ENSAIO UNIAXIAL À TRAÇÃO AO SE VARIAR TEOR DE FIBRAS



FONTE: O autor.

FIGURA 49 – MALHA DA VIGA-PAREDE COM 120 ELEMENTOS



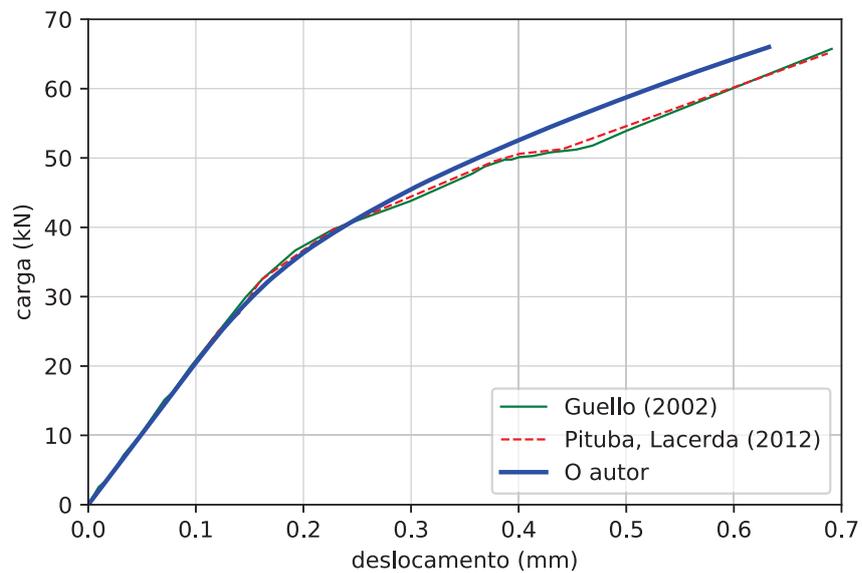
FONTE: Guello et al. (2002).

em azul foi obtida pelo programa deste trabalho, ainda não considerando as fibras de aço.

A modelagem proposta praticamente coincidiu com as curvas de Guello et al. (2002) e Pituba e Lacerda (2012) até um trecho da parte não linear (cerca de 50 kN de carga, 0,37 mm de deslocamento). Após isso, houve uma diferença, como se a estrutura fosse mais rígida. Possíveis fatores que levaram a essas diferenças são os erros de máquina e respostas espúrias, haja vista que todos os trabalhos analisados utilizaram a mesma malha, o mesmo tipo de elemento e o mesmo modelo de dano.

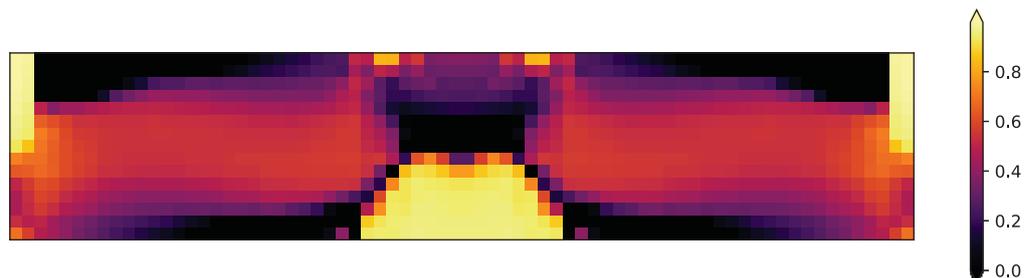
Os danos D de cada ponto de Gauss para uma carga de 52 kN estão na FIGURA 51. As regiões em preto estão íntegras ($D = 0$); regiões roxas são levemente danificadas ($D \approx 0,2$), regiões vermelhas e laranja possuem dano considerável, próximo a 0,5, e as regiões em amarelo são as mais seriamente danificadas (dano escalar próximo a 1).

FIGURA 50 – DIAGRAMA CARGA-DESLOCAMENTO – VIGA-PAREDE



FONTE: O autor.

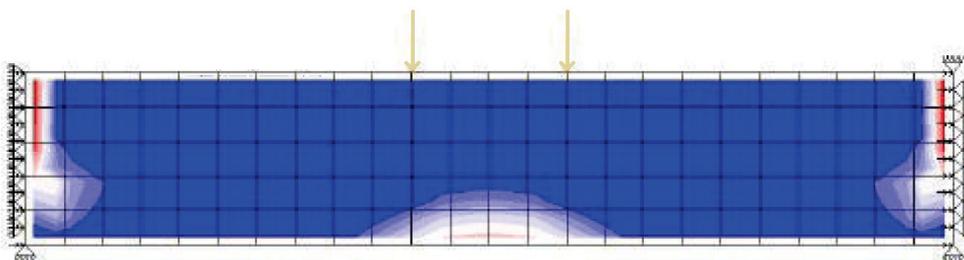
FIGURA 51 – MALHA DE DANO PARA 52 KN – VIGA-PAREDE



FONTE: O autor.

Os resultados de dano obtido são comparados com aqueles obtidos por Guello et al. (2002) (FIGURA 52) e Pituba e Lacerda (2012) (FIGURA 53), respectivamente, para os carregamentos de 52 kN e 51,75 kN.

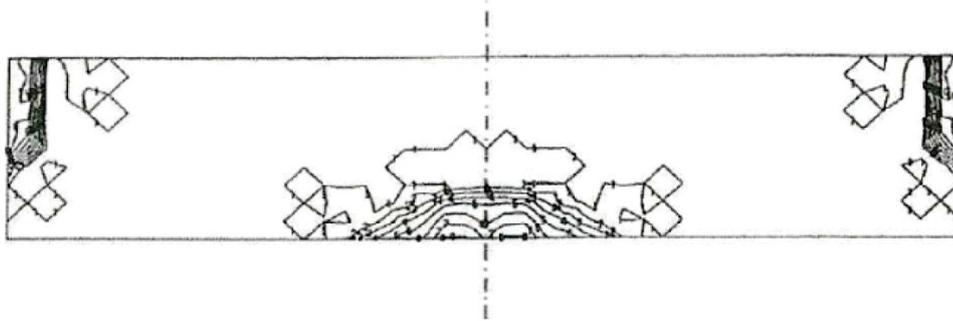
FIGURA 52 – MALHA DE DANO PARA 52 KN – VIGA-PAREDE



FONTE: Adaptado de Guello et al. (2002).

Na FIGURA 52, as regiões azuis estão íntegras ($D = 0$); regiões brancas possuem dano próximo a 0,5, e as regiões vermelhas estão danificadas quase ao extremo (dano escalar próximo a 1). Comparando-se com a malha obtida na simulação atual (FIGURA 51), esta se danificou bem mais em seu interior, embora em ambas tenha-se observado um padrão semelhante de danificação (maiores danos no centro do bordo inferior e nas extremidades superiores). Analisando-se o mapa de dano de MASONRY et al. (1991) – FIGURA 53 –, pode-se observar que as regiões mais afetadas pelo dano encontram-se nas mesmas regiões que os resultados observados pelo programa.

FIGURA 53 – MALHA DE DANO PARA 51,75 KN – VIGA-PAREDE



FONTE: Adaptado de MASONRY et al. (1991) *apud* Pituba e Lacerda (2012).

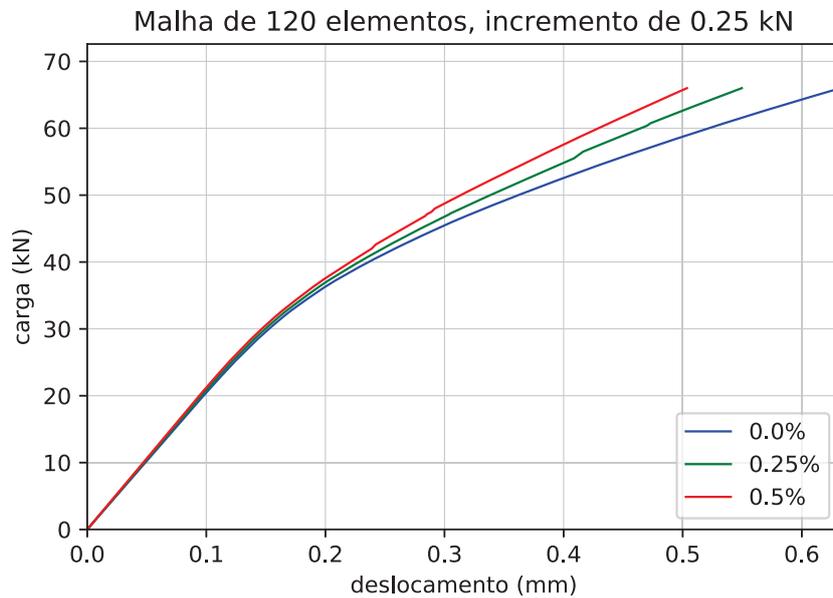
Incluindo-se fibras de aço, com teores de 0,25% (curva verde) e 0,50% (curva vermelha) em volume, foram obtidas as curvas na FIGURA 54 a seguir, comparando-se com a modelagem sem fibras (curva azul). Foi aproveitada a mesma malha de 120 elementos e foi usado o mesmo incremento de carga (0,25 kN até a carga de 37,5kN, e 0,125 kN a partir disso). Percebe-se que, no trecho linear, as três curvas praticamente coincidem, o que corrobora o fato de que as fibras têm pouco efeito nessa situação. No entanto, houve um ligeiro enrijecimento da estrutura e uma diminuição no deslocamento máximo, para um dado passo de carga, conforme se aumentava o teor de fibras.

5.3 CASO 3: VIGA BIAPOIADA

A malha simulada para o ensaio de viga biapoiada possui 540 elementos quadráticos lagrangeanos de 9 nós, dispostos em 15 linhas com 36 elementos em cada linha. Foram restringidos os três deslocamentos correspondentes aos apoios.

Para se simular as armaduras de aço, foi calculada a espessura equivalente de armadura dividindo-se a área total das seções transversais das barras pela espessura da viga. As camadas da malha de elementos finitos, próximas aos bordos superior e inferior, eram compostas de aço. A espessura das camadas de aço foi calculada a

FIGURA 54 – COMPARAÇÃO ENTRE CURVAS CARGA-DESLOCAMENTO (VIGA-PAREDE) – SEM FIBRAS, TEOR DE 0,25% E TEOR DE 0,5% DE FIBRAS EM VOLUME

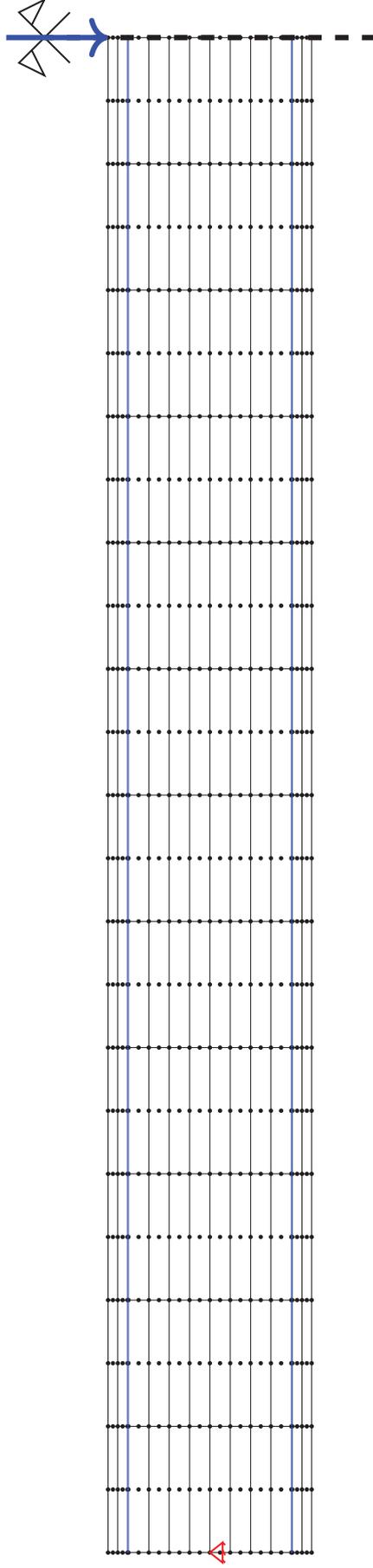


FONTE: O autor.

partir da taxa de armadura (a área transversal de aço foi dividida pela espessura da peça). Como essa espessura é muito pequena, as armaduras são representadas na FIGURA 55 como as linhas azuis, embora fosse empregado o elemento bidimensional tanto para o concreto quanto para o aço.

Devido ao fato de a estrutura ser simétrica, apenas metade da malha aparece ilustrada na FIGURA 55 a seguir.

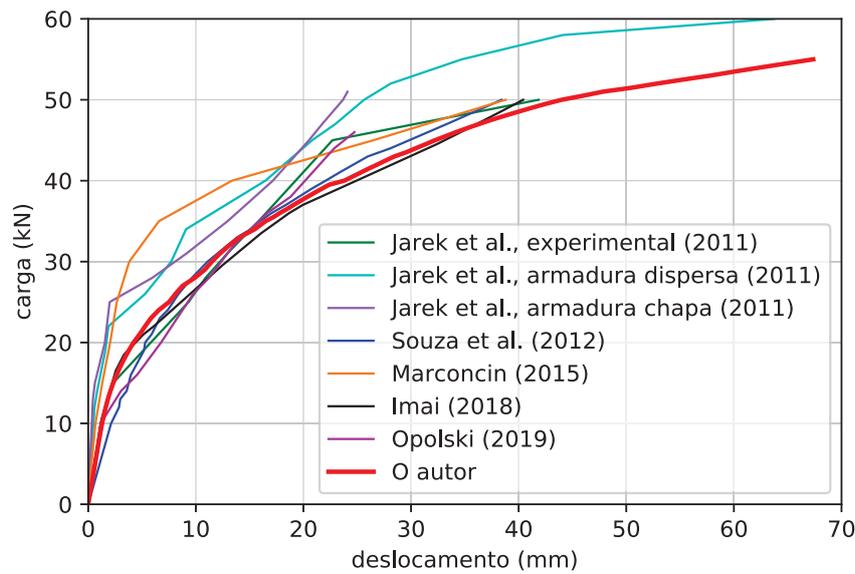
FIGURA 55 – MALHA DA VIGA BIAPOIADA COM 540 ELEMENTOS



FONTE: O autor.

Os deslocamentos obtidos no centro do vão (bordo inferior) pela presente simulação encontram-se na FIGURA 56, juntamente à curva experimental de Jarek et al. (2011) e a modelagens computacionais de Souza e Machado (2013), Marconcini (2015), Imai (2018) e Opolski (2019).

FIGURA 56 – DIAGRAMA CARGA-DESLOCAMENTO – VIGA BIAPOIADA ARMADA



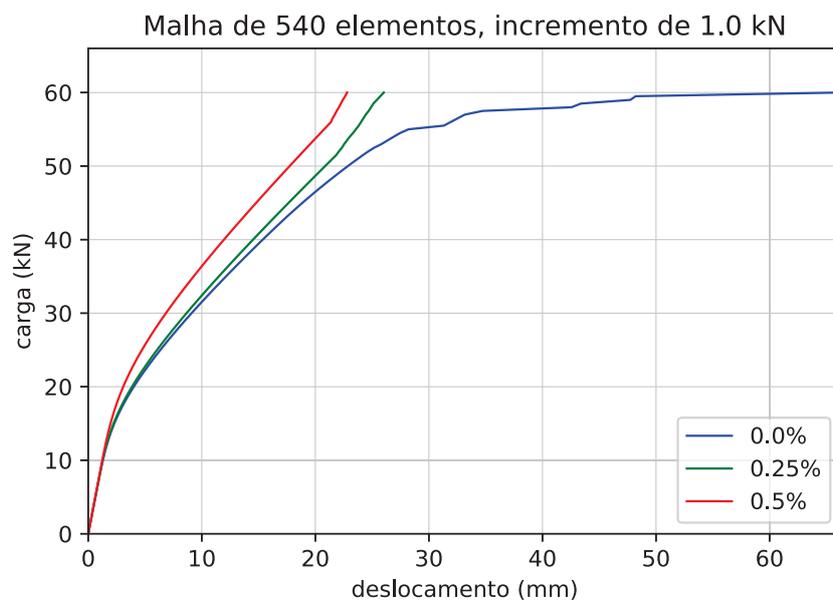
FONTE: O autor.

Ao se incluir as fibras de aço, com teores de 0,25 (curva verde) e 0,50% (curva vermelha) em volume, foram obtidas as curvas na FIGURA 57, comparando-se com a modelagem sem fibras (curva azul). Foi aproveitada a mesma malha e foi usado o mesmo incremento de carga (1,0 kN até a carga de 35 kN, e 0,5 kN a partir disso, até o carregamento de 55 kN). Assim como Caso 2, as três curvas praticamente coincidem no trecho linear, mostrando que as fibras começam a entrar em ação quando o regime não linear inicia. Foi observada a plastificação das barras de aço.

5.4 CASO 4: VIGA-LAJE

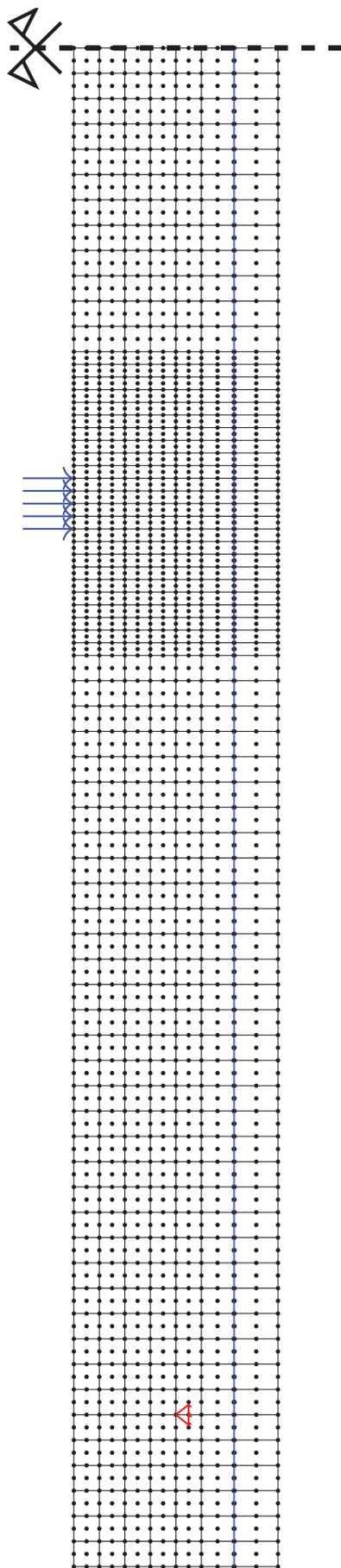
A malha possui 1152 elementos quadráticos de 9 nós. Como a estrutura é simétrica, metade da seção longitudinal da viga foi ilustrada na FIGURA 58. Os elementos em azul representam as armaduras de aço.

FIGURA 57 – COMPARAÇÃO ENTRE CURVAS CARGA-DESLOCAMENTO (VIGA BIAPOIADA) – SEM FIBRAS, TEOR DE 0,25% E TEOR DE 0,5% DE FIBRAS EM VOLUME



FONTE: O autor.

FIGURA 58 – ESQUEMA DA MALHA PARA O ENSAIO DE VIGA-LAJE REFORÇADA COM BARRAS DE AÇO



FONTE: O autor.

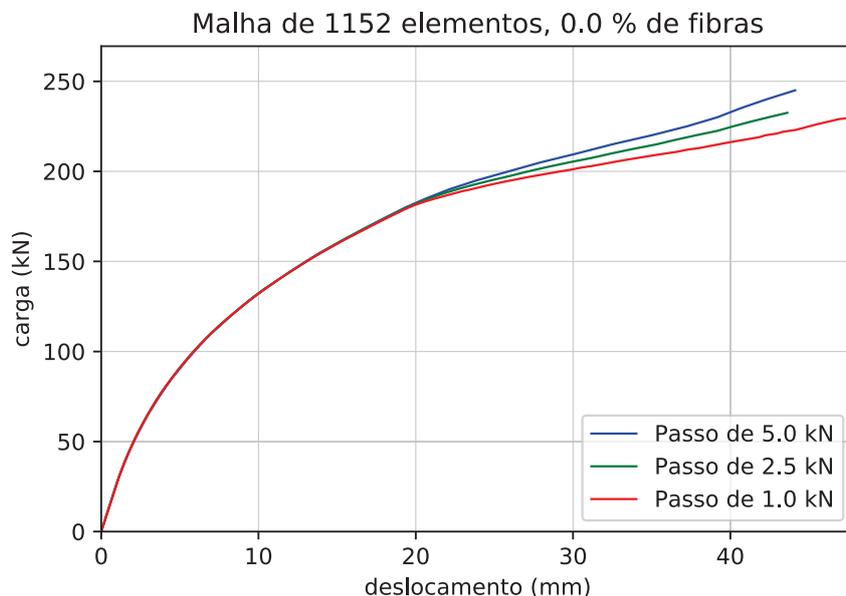
Para simular as barras de aço, foi considerado, na malha de elementos finitos, que uma das camadas era composta de aço. Assim como para o Caso 3, uma das camadas de elementos finitos da viga é a armadura de aço. A espessura da camada de aço foi calculada a partir da taxa de armadura (a área transversal de aço foi dividida pela espessura da peça).

Devido ao fato de haver altas concentrações de tensões nos pontos em que as cargas são aplicadas, os dois carregamentos foram considerados como distribuídos em um curto trecho da viga. Além disso, a malha foi mais refinada nas regiões de aplicação das cargas, em vez de uma malha totalmente uniforme (vide FIGURA 58).

Essa simulação foi realizada com uma carga máxima de 250 kN (próximo à carga máxima obtida pelo experimento de Blanco Álvarez et al. (2013)), sem fibras, primeiramente com 50 passos de carga de 5,0 kN, depois com 100 passos de 2,5 kN, e por fim, 250 passos de 1,0 kN.

Os resultados de carga-deslocamento para os incrementos de carga de 5,0 kN (curva azul), 2,5 kN (curva verde) e 1,0 kN (curva vermelha) estão ilustrados na FIGURA 59.

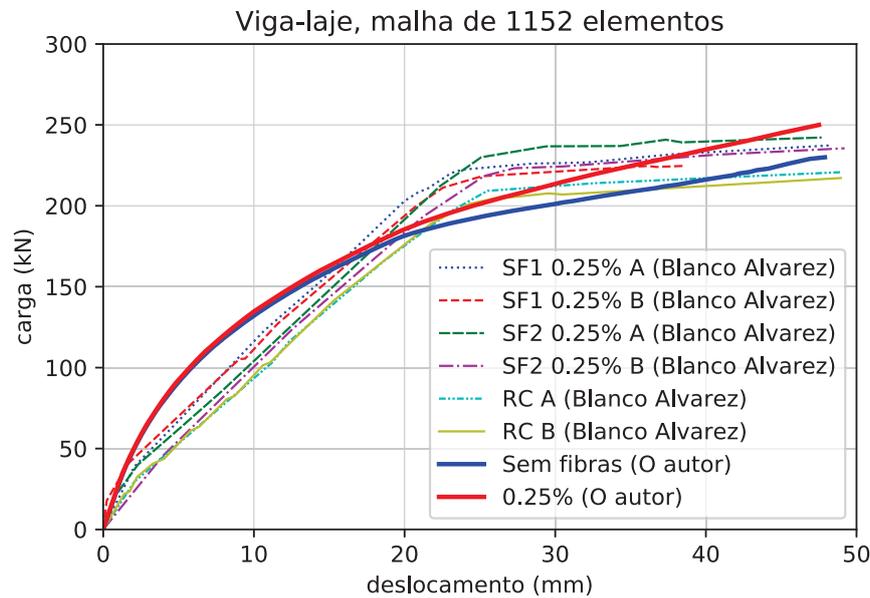
FIGURA 59 – DIAGRAMA CARGA-DESLOCAMENTO PARA A VIGA-LAJE, MALHA DE 1152 ELEMENTOS QUADRÁTICOS, SEM FIBRAS – COMPARATIVO ENTRE PASSOS DE CARGA



FONTE: O autor.

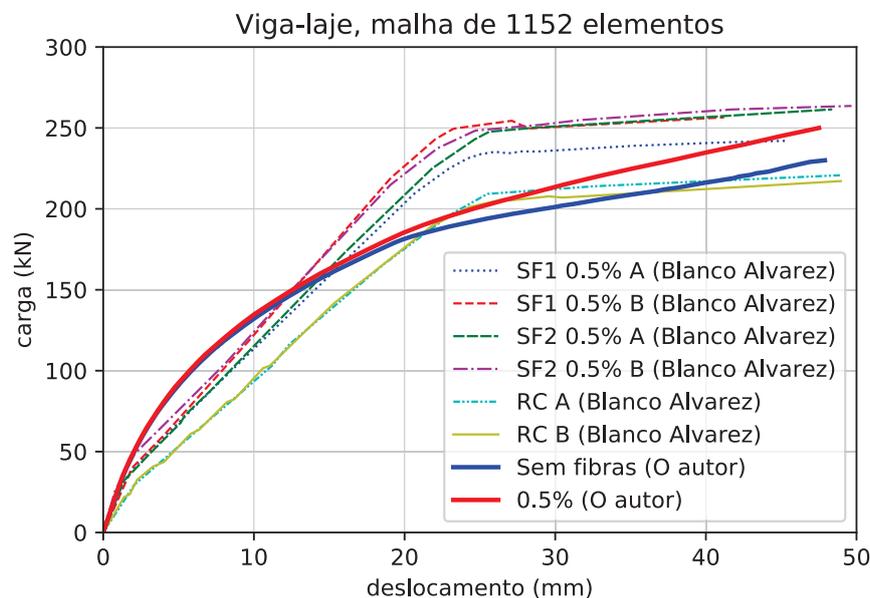
Simulou-se a mesma estrutura com teores de 0,25% e 0,50% de fibras. Os resultados obtidos no ensaio de viga-laje à flexão foram comparados com aqueles obtidos pelo experimento descrito na tese de Blanco Álvarez et al. (2013), para um teor de fibras de 0,25% e para um teor de 0,50%.

FIGURA 60 – CURVAS OBTIDAS PELO PROGRAMA DE VIGA-LAJE, TEOR DE 0,25% DE FIBRAS, COMPARADA COM O ENSAIO EXPERIMENTAL



FONTE: O autor.

FIGURA 61 – CURVA OBTIDA PELO PROGRAMA DE VIGA-LAJE, TEOR DE 0,50% DE FIBRAS, COMPARADA COM O ENSAIO EXPERIMENTAL



FONTE: O autor.

Como se percebe na figura FIGURA 60 e na figura FIGURA 61, a resposta computacional obtida no presente trabalho, embora próxima dos resultados apresentados por Blanco Álvarez et al. (2013), segue uma trajetória um pouco distinta do trabalho de referência. A diferença pode ser explicada pelo fato de que, neste trabalho, não se utilizou o mesmo modelo constitutivo empregado no trabalho de Blanco Álvarez

et al. (2013) mas, ao contrário, o processo de danificação foi totalmente baseado na Mecânica do Dano Contínuo segundo o modelo de Mazars (1984). Acontece que o modelo de Mazars foi originalmente proposto para concretos comuns, sem reforço de fibras. Não se encontrou, na literatura, trabalhos recentes propondo modelos de dano específicos para concreto com fibras. Esse é um campo a ser devidamente explorado em trabalhos futuros.

Para o concreto sem fibras, obteve-se uma carga máxima de 230 kN e um deslocamento máximo de 47,9 mm. No caso do reforço de 0,25% de fibras (figura FIGURA 60), obteve-se um deslocamento máximo semelhante, contudo para uma carga de 250 kN. No caso do teor de 0,50% de fibras (figura FIGURA 61), a execução do programa prosseguiu até um carregamento de quase 250 kN, mas para um deslocamento máximo aproximado de 50 mm. Além disso, observou-se a plastificação das armaduras de aço.

6 CONCLUSÕES E SUGESTÕES

Após a realização deste trabalho e da implementação do programa, cabe-se comparar o que foi obtido com o que se desejava obter com os objetivos formulados. Feito isso, são realizados alguns comentários gerais sobre os resultados, e são feitas colocações para explicar as divergências. Depois disso, são formuladas propostas e sugestões para os trabalhos futuros. Por fim, são formuladas algumas ideias para aplicar, na prática, o que foi realizado no presente trabalho.

6.1 CONFRONTO ENTRE OBJETIVOS E RESULTADOS

Foi realizada a modelagem computacional de estruturas de concreto reforçado com fibras de aço (CRFA), reforçado ou não com barras de aço, levando-se em consideração a Mecânica do Dano Contínuo aplicada em peças sujeitas a carregamentos monotônicos crescentes. E para isso, foi necessário que o programa fosse capaz de capturar a não linearidade do material, o que foi o caso. Os problemas tiveram como objetivo simular o comportamento à tração, à compressão e, principalmente, à flexão. Mas, para intuito de calibração e para testar o programa de análise não linear, inicialmente foi considerado o concreto sem fibras.

Os resultados observados para as simulações de estruturas de concreto sem fibras mostraram boa aproximação com os trabalhos realizados pelos outros autores. As diferenças observadas entre a presente modelagem e os outros trabalhos que procederam a modelagem computacional podem ser devidas provavelmente à metodologia utilizada na modelagem, por causa do modelo de dano, que não é o mais adequado para a modelagem de concreto com fibras, haja vista que o modelo de Mazars (1984) foi desenvolvido para concretos convencionais. No caso de ensaios de laboratório, as diferenças para a presente modelagem computacional podem ter ocorrido devido a erros sistemáticos (inerentes ao equipamento), e principalmente devido à abordagem que utiliza hipóteses simplificadoras como o estado plano de tensões, o dano contínuo e a hipótese de isotropia.

Quanto às simulações de estruturas de concreto com fibras de aço, percebeu-se, de maneira geral, um enrijecimento da estrutura à medida que se aumentava o teor de fibras, conforme esperado. Em outras palavras, para um mesmo passo de carga, observaram-se menores valores de deslocamento para teores mais elevados de fibras. A mudança no teor de fibras influenciou no resultado de deslocamento das estruturas, de maneira geral, levando a uma maior rigidez e ductilidade. A exceção a isso foi no Caso 1: Ensaio Uniaxial, em que foi percebida maior ductilidade para um teor de 0,25%

de fibras do que para 0,50%.

Ainda assim, observando os resultados obtidos, ainda há bastante margem para aperfeiçoamento.

Existe, também, possibilidade de otimização no tempo de processamento, isto porque algumas simulações levaram algumas horas para que os resultados fossem obtidos.

6.2 SUGESTÕES PARA PRÓXIMOS TRABALHOS

Para se prosseguir com a modelagem computacional de estruturas de concreto reforçado com fibras de aço, são formuladas as seguintes ideias, a fim de se aprimorar os resultados e reduzir os erros oriundos das hipóteses simplificadoras:

- Utilizar outros modelos de dano para o concreto, além do modelo de Mazars, e de plasticidade para o aço, de modo a analisar as diferenças entre cada modelo;
- Formular um modelo de dano específico para o CRFA, considerando as dimensões e atributos das fibras;
- Como o CRFA é um material anisotrópico, analisar a resposta por meio do modelo de dano adequado para esse tipo de material;
- Extrapolar as simulações computacionais para estruturas tridimensionais, ainda utilizando o Método dos Elementos Finitos, devido às limitações observadas para o Estado Plano de Tensões;
- Escrever o algoritmo em uma linguagem de nível mais baixo (por exemplo, C++), com o intuito de reduzir o tempo de processamento;
- Ainda almejando-se otimizar o tempo de execução do programa, utilizar métodos com ordem de convergência maior ou que evitem o processamento de matrizes demasiado esparsas;
- Analisar a influência de outros atributos da fibra, além do teor;
- Analisar o comportamento de estruturas de CRFA sujeitas a carregamentos dinâmicos e cíclicos, de modo a observar a resposta com relação à fadiga. Esse objetivo é importante no cálculo e dimensionamento de pavimentos em CRFA; e
- Simular estruturas não necessariamente retilíneas, como o revestimento de túneis rodoviários, situação na qual tem se observado um maior emprego de fibras como reforço do concreto.

6.3 POSSÍVEIS CONTRIBUIÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Pretende-se estimular o uso de CRFA em diversas situações descritas na seção 1.1, como:

- Pavimentos urbanos em que é intenso o tráfego de veículos pesados como ônibus e caminhões (exemplo: canaletas de ônibus biarticulados de Curitiba – PR). Com isso, são previstos os seguintes benefícios:
 - Prolongar a vida útil desses pavimentos, reduzindo o custo e a necessidade de manutenções;
 - Substituir os pavimentos de asfalto (mais flexíveis e sujeitos a deformações) por lajes de CRFA; e
 - Reduzir a demanda por asfalto, e por consequência, de petróleo, um material fóssil.
- Pisos e pátios industriais, outra situação em que existe tráfego de caminhões e máquinas pesadas;
- Revestimentos de túneis rodoviários; e
- Vigas e lajes pré-fabricadas, estruturas frequentemente solicitadas à flexão.

REFERÊNCIAS

ABECHE, T. d. O. **Modelagem computacional da interação dinâmica desacoplada entre viga e veículo considerando as irregularidades da via e a mecânica do dano contínuo**, 2015. Citado 2 vezes nas páginas 44, 62, 63.

ABNT, N. 6118 (2014). **Projeto de estruturas de concreto—Procedimento. Rio de Janeiro**, 2014. Citado 1 vez na página 80.

ASTM-C-1609. **Standard test method for flexural performance of fiber-reinforced concrete (using beam with third-point loading): ASTM-C-1609**. [S.l.]: ASTM International PA, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 41, 43.

BARROS, J. A. O. d. **Comportamento do betão reforçado com fibras: Análise experimental e simulação numérica**, 1995. Citado 1 vez na página 40.

BATHE, K.-J. **Finite element procedures**. [S.l.]: Klaus-Jurgen Bathe, 2006. Citado 2 vezes na página 59.

BENCARDINO, F.; RIZZUTI, L.; SPADEA, G.; SWAMY, R. N. Stress-strain behavior of steel fiber-reinforced concrete in compression. **Journal of Materials in Civil Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 20, n. 3, p. 255–263, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 33, 35, 62.

BENTUR, A.; MINDESS, S. **Fibre reinforced cementitious composites**. [S.l.]: Crc Press, 2006. Citado 1 vez nas páginas 19, 28.

BITENCOURT JR, L. A.; MANZOLI, O. L.; BITTENCOURT, T. N.; VECCHIO, F. J. Numerical modeling of steel fiber reinforced concrete with a discrete and explicit representation of steel fibers. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 159, p. 171–190, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 25, 27.

BLANCO ÁLVAREZ, A. et al. **Characterization and modelling of SFRC elements**. Universitat Politècnica de Catalunya, 2013. Citado 10 vezes nas páginas 30, 33, 36, 42, 45, 85, 86, 98, 99.

CARVALHO, M. R.; BARROS, J. A.; ZHANG, Y.; DIAS-DA-COSTA, D. A computational model for simulation of steel fibre reinforced concrete with explicit fibres and cracks.

Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Elsevier, v. 363, p. 112879, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 21, 45.

CONCRETA, E. **Fibra para concreto: Principais tipos de fibras e utilização**. [S.l.: s.n.], 2019. Disponível em: <https://engenhariaconcreta.com/fibra-para-concreto-principais-tipos-de-fibras-e-utilizacao/>. Acesso em: 7 nov. 2019. Citado 0 vez na página 24.

CRISFIELD, M. A. **A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”**. In: COMPUTATIONAL methods in nonlinear structural and solid mechanics. [S.l.]: Elsevier, 1981. P. 55–62. Citado 3 vezes nas páginas 44, 63, 64.

DING, Y.; ZHANG, F.; TORGAL, F.; ZHANG, Y. Shear behaviour of steel fibre reinforced self-consolidating concrete beams based on the modified compression field theory. **Composite Structures**, Elsevier, v. 94, n. 8, p. 2440–2449, 2012. Citado 1 vez na página 40.

EHE. Instrucción de hormigón estructural EHE-08. **Fomento, Madrid, España**, 2008. Citado 4 vezes nas páginas 24, 28, 42, 43, 45.

EN 14651, B. S. B. A1: 2007, Test method for metallic fibre concrete—Measuring the flexural tensile strength (limit of proportionality (LOP), residual). **British Standard Institute, UK**, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 41, 42, 73.

FIB. **Fib model code for concrete structures 2010**. [S.l.]: Ernst & Sohn, Wiley, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 21, 31, 34.

FIGUEIREDO, A. D. d. **Concreto reforçado com fibras**. 2011. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Citado 6 vezes nas páginas 19, 21, 22, 24, 32–34.

GUELLO, G. A.; BITTENCOURT, T. N.; PROENÇA, S. Simulação Computacional De Estruturas De Concreto Por Meio Da Mecânica Do Dano. **Mecânica Computacional**, n. 1, p. 957–967, 2002. Citado 8 vezes nas páginas 69, 83, 84, 89–91.

HERSCOVICI, H.; ROEHL, D.; SÁNCHEZ FILHO, E. d. S. Estudo experimental de vigas curtas de concreto com fibras de aço sujeitas à flexão. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, SciELO Brasil, v. 12, n. 2, p. 288–307, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 27, 29, 31.

IKUMI, T.; GALEOTE, E.; PUJADAS, P.; FUENTE, A. de la; LÓPEZ-CARREÑO, R. Neural network-aided prediction of post-cracking tensile strength of fibre-reinforced concrete. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 256, p. 106640, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 22, 33.

IMAI, A. P. **Análise do comportamento dinâmico não linear de vigas de pontes de concreto armado com seção e distribuição de armaduras variáveis através da interação entre veículo e ponte da mecânica do dano**, 2018. Citado 3 vezes nas páginas 44, 84, 95.

JAREK, A.; MARCONCIN, L.; SOUZA, L.; MACHADO, R. D.; LACERDA, L. **Numerical modeling combined with experimental analysis of simply supported reinforced concrete beam monitored with fiber optic sensors**. In: IBERIAN Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, XXXII, Anais. Ouro Preto: CILAMCE. [S.l.: s.n.], 2011. Citado 3 vezes nas páginas 44, 84, 85, 95.

JONES, R. M. *Mechanics of Composite Materials*, Taylor & Francis. **Inc., USA**, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 27, 29.

KACHANOV, L. M. **Rupture time under creep conditions**. IZVESTIA AKADEMII NAUK SSSR OTDELENIE TEKHNICHESKICH NAUK, 1958. Citado 1 vez na página 67.

KOSMATKA, S. H.; KERKHOFF, B.; PANARESE, W. C. et al. **Design and control of concrete mixtures**. [S.l.]: Portland Cement Association Skokie, IL, 2002. v. 5420. Citado 2 vezes nas páginas 20, 21, 28.

KOTSOVOS, M. D. **Finite-element modelling of structural concrete: short-term static and dynamic loading conditions**. [S.l.]: CRC Press, 2015. Citado 6 vezes nas páginas 34, 41, 44, 47, 59, 61.

LEMAITRE, J.; DESMORAT, R. **Engineering damage mechanics: ductile, creep, fatigue and brittle failures**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. Citado 1 vez na página 67.

MARCHETTI, O.; BOTELHO, M. H. C. **Concreto armado-Eu te amo**. [S.l.]: Editora Blucher, 2015. v. 1. Citado 2 vezes nas páginas 20, 26.

MARCONCIN, L. d. R. **Uma abordagem numérico-experimental para análise de dano em lajes de barragens de enrocamento com face de concreto**, 2015. Citado 1 vez na página 95.

MASONRY, F. O. B.; MAIER, G.; PAPA, E. Department of Structural Engineering Politecnico (Technical University) Milano P. zza Leonardo da Vinci, 32. **Experimental and Numerical Methods in Earthquake Engineering**, Springer Science & Business Media, v. 2, p. 223, 1991. Citado 1 vez na página 92.

MAZARS, J. A description of micro-and macroscale damage of concrete structures. **Engineering Fracture Mechanics**, Elsevier, v. 25, n. 5-6, p. 729–737, 1986. Citado 1 vez na página 67.

_____. Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. **THESE DE DOCTEUR ES SCIENCES PRESENTÉE A L'UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE-PARIS 6**, 1984. Citado 2 vezes nas páginas 68, 81.

MEHTA, P. K.; MONTEIRO, P. J.; CARMONA FILHO, A. **Concreto: estrutura, propriedades e materiais**. [S.l.]: Pini, 1994. Citado 2 vezes nas páginas 20, 26.

MITTAL, A. **O uso de fibras de aço no concreto**. [S.l.: s.n.], 2019. Disponível em: <http://blog.arcelormittal.com.br/o-uso-de-fibras-de-aco-no-concreto/>. Acesso em: 7 nov. 2019. Citado 0 vezes nas páginas 21, 22.

NAAMAN, A. E. **Fiber reinforced concrete: Five decades of progress**. In: PROCEEDINGS of the 4th Brazilian Conference on Composite Materials, Rio de Janeiro, Brazil. [S.l.: s.n.], 2018. P. 22–25. Citado 4 vezes nas páginas 19, 26, 29.

OÑATE, E. **Structural analysis with the finite element method. Linear statics: volume 1: basis and solids**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2009. Citado 7 vezes nas páginas 46, 49, 52, 54, 57, 58, 77.

OPOLSKI, B. A. **Simulação não linear física de vigas de concreto armado**. In: Citado 4 vezes nas páginas 44, 95.

PARANÁ, T. do. **População teme que viaduto desabe em Curitiba; prefeitura diz que é seguro**. [S.l.: s.n.], 2019. Disponível em: <https://www.tribunapr.com.br/cacadores->

de-noticias/curitiba/todo-rachado-populacao-teme-que-viaduto-desabe-em-curitiba/. Acesso em: 7 nov. 2019. Citado 0 vez na página 24.

PASA, V. F. **Análise do comportamento de estruturas de concreto reforçado com fibras de aço via método dos elementos finitos**. 2007. Tese (Doutorado) – Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas), Universidade Federal do ... Citado 2 vezes nas páginas 27, 34, 35.

PEREIRA JUNIOR, W.; ARAÚJO, D.; PITUBA, J. Numerical analysis of steel-fiber-reinforced concrete beams using damage mechanics. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, SciELO Brasil, v. 9, p. 153–191, 2016. Citado 1 vez na página 45.

PIJAUDIER-CABOT, G.; MAZARS, J. **Damage models for concrete**. [S.l.: s.n.], 2001. Citado 2 vezes nas páginas 26, 27, 70, 71.

PITUBA, J.; LACERDA, M. Sobre o emprego de modelos simplificados de dano na análise de estruturas em concreto armado. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, SciELO Brasil, v. 5, p. 26–37, 2012. Citado 3 vezes nas páginas 89–92.

PITUBA, J. J. d. C. **Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo**. 1998. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo. Citado 1 vez na página 68.

REDDY, J. N. **Mechanics of composite materials: selected works of Nicholas J. Pagano**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 1994. v. 34. Citado 1 vez na página 29.

ROCHA, G. **Estratégias de incremento de carga e de iteração para análise não linear de estruturas**, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 44, 64, 65.

SINGH, H. **Steel fiber reinforced concrete: behavior, modelling and design**. [S.l.]: Springer, 2016. Citado 1 vez na página 33.

SORIANO, H. L.; LIMA, S. d. S. **Método de Elementos Finitos em Análise de Estruturas Vol. 48**. [S.l.]: EdUSP, 2003. Citado 5 vezes nas páginas 46, 49, 54, 74.

SOUZA, L. de; MACHADO, R. Análise numérico-computacional de estruturas de concreto armado considerando o dano, a fratura e critério de falha. **Revista IBRACON**

de Estruturas e Materiais, SciELO Brasil, v. 6, p. 101–120, 2013. Citado 1 vez na página 95.

VERDE, P. **As vantagens e desvantagens do tijolo de adobe**. [S.l.: s.n.], 2013. Disponível em: <https://www.pensamentoverde.com.br/arquitetura-verde/vantagens-desvantagens-tijolo-adobe/>. Acesso em: 7 nov. 2019. Citado 0 vez na página 19.

WECHARATANA, M.; SHAH, S. P. A model for predicting fracture resistance of fiber reinforced concrete. **Cement and Concrete Research**, Elsevier, v. 13, n. 6, p. 819–829, 1983. Citado 1 vezes nas páginas 34, 35.

WILLE, K.; EL-TAWIL, S.; NAAMAN, A. E. Properties of strain hardening ultra high performance fiber reinforced concrete (UHP-FRC) under direct tensile loading. **Cement and Concrete Composites**, Elsevier, v. 48, p. 53–66, 2014. Citado 1 vezes nas páginas 36, 38, 39.

APÊNDICE A – MATRIZES ELEMENTARES DE RIGIDEZ

A.1 MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR PARA ELEMENTO TRIANGULAR

$$[K]^e = \frac{tE}{4A_e(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} A_{1,1} & C_{1,1} & A_{1,2} & C_{1,2} & A_{1,3} & C_{1,3} \\ \vdots & B_{1,1} & C_{2,1} & B_{1,2} & C_{3,1} & B_{1,3} \\ & & A_{2,2} & C_{2,2} & A_{2,3} & C_{2,3} \\ & & & B_{2,2} & C_{3,2} & B_{2,3} \\ & & & & A_{3,3} & C_{3,3} \\ \text{sim.} & \dots & & & & B_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$d = \frac{1-\nu}{2}$$

$$A_{i,j} = b_i b_j + d c_i c_j$$

$$B_i = c_i c_j + d b_i b_j$$

$$C_{i,j} = b_i \nu c_j + c_i d b_j$$

A.2 MATRIZ DE RIGIDEZ ELEMENTAR PARA ELEMENTO RETANGULAR

$$\frac{tE}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} -2A & -G & E & H & A & G & C & -H \\ \vdots & -2B & -H & D & G & B & H & F \\ & & -2A & G & C & H & A & -G \\ & & & -2B & -H & F & -G & B \\ & & & & -2A & -G & E & H \\ & & & & & -2B & -H & D \\ & & & & & & -2A & G \\ \text{sim.} & \dots & & & & & & -2B \end{bmatrix}$$

$$A = -\frac{2b^2 + a^2(1-\nu)}{12ab}$$

$$B = -\frac{2a^2 + b^2(1-\nu)}{12ab}$$

$$C = \frac{a^2(1 - \nu) - 4b^2}{12ab}$$

$$D = \frac{b^2(1 - \nu) - 4a^2}{12ab}$$

$$E = \frac{b^2 - a^2(1 - \nu)}{6ab}$$

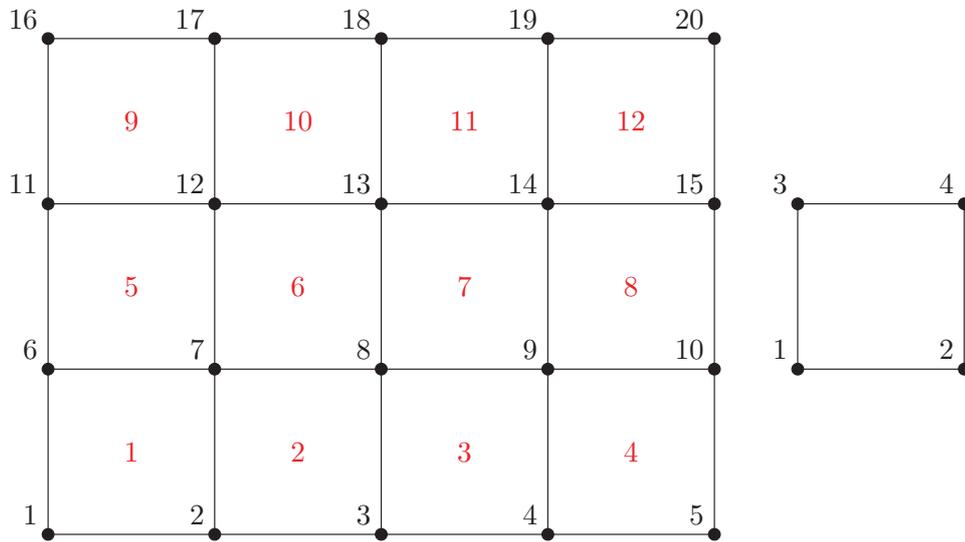
$$F = \frac{a^2 - b^2(1 - \nu)}{6ab}$$

$$G = \frac{\nu + 1}{8}$$

$$H = \frac{3\nu - 1}{8}$$

APÊNDICE B – REARRANJO DE MATRIZES E VETORES

FIGURA 62 – MALHA GLOBAL (À ESQUERDA) E ELEMENTO PADRÃO (À DIREITA)



FONTE: O autor

A matriz de incidência, para o exemplo citado na FIGURA 62, é:

$$Inc = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 9 & 10 \\ 6 & 7 & 11 & 12 \\ 7 & 8 & 12 & 13 \\ 8 & 9 & 13 & 14 \\ 9 & 10 & 14 & 15 \\ 11 & 12 & 16 & 17 \\ 12 & 13 & 17 & 18 \\ 13 & 14 & 18 & 19 \\ 14 & 15 & 19 & 20 \end{bmatrix} \quad (B.1)$$

APÊNDICE C – FUNÇÕES DE FORMA PARA ELEMENTOS ISOPARAMÉTRICOS

C.1 ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO RETANGULAR LINEAR

$$L_1(\xi) = \frac{1 - \xi}{2}$$

$$L_2(\xi) = \frac{1 + \xi}{2}$$

$$L_1(\eta) = \frac{1 - \eta}{2}$$

$$L_2(\eta) = \frac{1 + \eta}{2}$$

$$N_1 = L_1(\xi)L_1(\eta) = \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4}$$

$$N_2 = L_2(\xi)L_1(\eta) = \frac{(1 + \xi)(1 - \eta)}{4}$$

$$N_3 = L_1(\xi)L_2(\eta) = \frac{(1 - \xi)(1 + \eta)}{4}$$

$$N_4 = L_2(\xi)L_2(\eta) = \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4}$$

$$[N] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{cccc} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \xi\eta \\ \xi \\ \eta \\ 1 \end{array} \right\} \right]^T$$

$$[N_\xi] = \frac{\partial [N]}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \eta \\ 1 \end{array} \right\} \right]^T$$

$$[N_\eta] = \frac{\partial [N]}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \xi \\ 1 \end{array} \right\} \right]^T$$

$$|J| = \frac{1}{8} \left((x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3) + \right. \\ \left. + \xi((x_1 - x_4)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_4)) + \right. \\ \left. + \eta((x_2 - x_1)(y_3 - y_4) - (x_3 - x_4)(y_2 - y_1)) \right)$$

C.2 ELEMENTO ISOPARAMÉTRICO RETANGULAR QUADRÁTICO

$$L_1(\xi) = \frac{\xi^2 - \xi}{2}$$

$$L_2(\xi) = 1 - \xi^2$$

$$L_3(\xi) = \frac{\xi^2 + \xi}{2}$$

$$L_1(\eta) = \frac{\eta^2 - \eta}{2}$$

$$L_2(\eta) = 1 - \eta^2$$

$$L_3(\eta) = \frac{\eta^2 + \eta}{2}$$

$$N_1 = L_1(\xi)L_1(\eta)$$

$$N_2 = L_2(\xi)L_1(\eta)$$

$$N_3 = L_3(\xi)L_1(\eta)$$

$$N_4 = L_1(\xi)L_2(\eta)$$

$$N_5 = L_2(\xi)L_2(\eta)$$

$$N_6 = L_3(\xi)L_2(\eta)$$

$$N_7 = L_1(\xi)L_3(\eta)$$

$$N_8 = L_2(\xi)L_3(\eta)$$

$$N_9 = L_3(\xi)L_3(\eta)$$

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8 \ N_9] =$$

$$= \frac{1}{4} \left[\begin{array}{ccccccccc} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \xi^2\eta^2 \\ \xi^2\eta \\ \xi^2 \\ \xi\eta^2 \\ \xi\eta \\ \xi \\ \eta^2 \\ \eta \\ 1 \end{array} \right\}^T$$

$$\begin{aligned}
[N_\xi] &= \frac{\partial[N]}{\partial\xi} = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{cccccc} 2 & -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 2 & 0 & -2 \\ 8 & 0 & -8 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \left. \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \xi\eta^2 \\ \xi\eta \\ \xi \\ \eta^2 \\ \eta \\ 1 \end{array} \right\} \end{array} \right]^T \\
[N_\eta] &= \frac{\partial[N]}{\partial\eta} = \frac{1}{4} \left[\begin{array}{cccccc} 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 0 & 4 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ -4 & 0 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \left. \begin{array}{c} \left\{ \begin{array}{c} \xi^2\eta \\ \xi^2 \\ \xi\eta \\ \xi \\ \eta \\ 1 \end{array} \right\} \end{array} \right]^T
\end{aligned}$$