

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RICARDO CUSTÓDIO

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS APLICADO COM ELEMENTOS TRIANGULARES NA ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS EM ESTADO PLANO

CURITIBA PR

2022

RICARDO CUSTÓDIO

O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS APLICADO COM ELEMENTOS  
TRIANGULARES NA ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS EM ESTADO PLANO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - PPGMNE da Universidade Federal do Paraná - Setor de Tecnologia, como requisito parcial para obtenção do grau de “Mestre em Métodos Numéricos em Engenharia” .

Orientador: Prof. Dr. Marcos Arndt.

CURITIBA PR

2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Custódio, Ricardo

O método dos elementos finitos generalizados aplicado com elementos triangulares na análise dinâmica de estruturas em estado plano. / Ricardo Custódio. – Curitiba, 2022.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia.

Orientador: Prof. Dr. Marcos Arndt.

1. Método dos Elementos Finitos. 2. Vibração. I. Arndt, Marcos. II. Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia. III. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

## TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **RICARDO CUSTÓDIO** intitulada: **O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS APLICADO COM ELEMENTOS TRIANGULARES NA ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS EM ESTADO PLANO**, sob orientação do Prof. Dr. MARCOS ARNDT, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

Curitiba, 31 de Outubro de 2022.

Assinatura Eletrônica

01/11/2022 11:47:49.0

MARCOS ARNDT

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

07/12/2022 10:15:28.0

ROBERTO DALLEDONE MACHADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica

01/11/2022 12:10:03.0

RICARDO PIERALISI

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

*Para minha esposa Sandra*

## **AGRADECIMENTOS**

A minha querida esposa Sandra, pelo suporte dado para conclusão deste trabalho.

A minha mãe, Jorgina (*in memoriam*), minha inspiração de perseverança.

Ao meu orientador, Professor Marcos, pela disponibilidade, constância e compreensão.

## RESUMO

A análise dinâmica das estruturas é um tema atualmente relevante, haja vista que o avanço tecnológico tem permitido a execução de estruturas cada vez mais esbeltas, que estão diretamente suscetíveis aos efeitos dinâmicos. Os problemas de vibrações livre de estruturas em estado plano podem ser aproximados pelo Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), sendo que o foco do presente estudo é a apresentação de duas propostas de formulação de elementos mestres triangulares enriquecidos com funções de forma trigonométrica, pois a natureza oscilatória destas funções é característica das soluções destes tipos de problemas. A primeira proposta (chamada de MEFG-D) consiste na degeneração de um elemento quadrilateral já enriquecido e a segunda (chamada de MEFG-2) é feita através a proposição de novas funções de enriquecimento tomadas com base em metodologias de geração de espaço enriquecido para os elementos de barras. Relativo a análise modal de chapas em estado plano verifica-se que a segunda metodologia é mais vantajosa em relação a primeira, e quando comparada com os resultados obtidos pelo Método do Elementos Finitos Tradicional, o MEFG-2 produz melhores aproximações para o campo de frequências naturais situadas no início do espectro de frequências.

Palavras-chave: Vibração Livre, Estado Plano, Método dos Elementos Finitos Generalizados, Elementos Triangulares.

## ABSTRACT

The dynamic analysis of structures is a relevant topic, given that advanced technology has allowed the execution of slender structures, which are more suitable to the dynamic effects. The in-plane vibration of structures can be approximated through Generalized Finite Element Method (GFEM). The purpose of this work is to present two triangular finite elements enriched with trigonometric functions, considering that oscillatory characteristic of these functions are common within these problems. The first methodology (it is called GFEM-D) is made from an enriched quadrilateral element. The second proposal (called GFEM-2) is done by generating new enrichment functions, based on the methodology of building enrichment functions for bar elements. To the in-plane vibration of plates, it is found that the GFEM-2 is better than GFEM-D. When compared to the traditional FEM, the GFEM-2 has a better approximation to the low natural frequency field. In this way, the method proves to be suitable for use in these types of problems.

Keywords: Free Vibration, Plane State, Plane Strain, Generalized Finite Element Method, Triangular Elements

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 -	DIAGRAMA DE RAMIFICAÇÕES DO ESTUDO DA ANÁLISE DINÂMICA	17
Figura 2.2 -	GRÁFICO DE UMA PARTIÇÃO DA UNIDADE E FUNÇÃO DE ENRIQUECIMENTO NODAL EM UM SUPORTE . . . . .	25
Figura 3.1 -	SÓLIDOS EM ESTADO PLANO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES . . .	30
Figura 3.2 -	PLANO INFINITESIMAL DE DEFORMAÇÃO . . . . .	31
Figura 3.3 -	DIAGRAMA DE CORPO LIVRE . . . . .	33
Figura 3.4 -	TIPOS DE APOIO EM BORDAS DE CHAPAS . . . . .	34
Figura 3.5 -	CONDIÇÕES DE CONTORNO ESSENCIAIS . . . . .	35
Figura 3.6 -	MODOS DE VIBRAÇÃO DE UMA CHAPA . . . . .	36
Figura 4.1 -	COORDENADAS DE ÁREA . . . . .	40
Figura 4.2 -	FUNÇÕES DE FORMA LINEARES DO MEF PARA ELEMENTO TRIANGULAR . . . . .	41
Figura 4.3 -	ELEMENTO QUADRÁTICO . . . . .	42
Figura 5.1 -	TRANSFORMAÇÃO DE DUFFY . . . . .	46
Figura 5.2 -	PARTIÇÃO DA UNIDADE EM UM DOMÍNIO TRIANGULAR . . . . .	47
Figura 5.3 -	FUNÇÕES EM DOMÍNIO TRIANGULAR . . . . .	48
Figura 5.4 -	FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO . . . . .	51
Figura 5.5 -	FUNÇÕES BORDA ASSOCIADAS A BORDA 1. . . . .	51
Figura 5.6 -	FUNÇÕES BORDA ASSOCIADAS A BORDA 2. . . . .	52
Figura 5.7 -	FUNÇÕES ASSOCIADAS A BORDA 3. . . . .	52
Figura 5.8 -	FUNÇÕES TIPO BOLHAS . . . . .	53
Figura 5.9 -	NUMERAÇÃO EM SEQUÊNCIA DOS NÓS DO ELEMENTO MESTRE .	53
Figura 5.10 -	ORIENTAÇÃO DAS ARESTAS DOS ELEMENTOS TRIANGULARES EM UMA MALHA GENÉRICA. . . . .	55
Figura 5.11 -	DISTRIBUIÇÃO DOS PONTOS DE GAUSS NO INTERIOR DE UM ELEMENTO TRIANGULAR. . . . .	56
Figura 6.1 -	CHAPA ENGASTADA EM UMA BORDA . . . . .	57
Figura 6.2 -	MALHA COM OITO ELEMENTOS FINITOS CONSTRUÍDA PARA USO NO MEF2 . . . . .	58
Figura 6.3 -	ERRO RELATIVO VERSUS NÚMERO DE PONTOS DE GAUSS PARA O MEF2 . . . . .	59
Figura 6.4 -	ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS APROXIMADAS PELO MEF2 COM DIVERSOS VALORES DE $\beta_j$ PARA CHAPA ENGASTADA . . . . .	60
Figura 6.5 -	ESPECTROS DE FREQUÊNCIA NATURAL PARA CHAPA ENGASTADA	61
Figura 6.6 -	ERRO RELATIVO DA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL DE UMA CHAPA ENGASTADA . . . . .	62
Figura 6.7 -	ERRO RELATIVO DA VIGÉSIMA FREQUÊNCIA NATURAL DE UMA CHAPA ENGASTADA . . . . .	62
Figura 6.8 -	PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DE UMA CHAPA ENGASTADA OBTIDO PELO MEF2 . . . . .	63

Figura 6.9 - REFERÊNCIA DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DE UMA CHAPA ENGASTADA . . . . .	63
Figura 6.10 - MODELO DE CHAPA COM APOIO MÓVEL ROTULADO EM TODAS AS BORDAS. . . . .	64
Figura 6.11 - ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS - CHAPAS COM BORDAS DO TIPO F1 . . . . .	66
Figura 6.12 - ERRO RELATIVO DA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL DE CHAPA COM BORDAS TIPO F1 . . . . .	67
Figura 6.13 - ERRO RELATIVO DA VIGÉSIMA QUINTA FREQUÊNCIA NATURAL - CHAPAS COM APOIO TIPO F1 . . . . .	68
Figura 6.14 - PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DE UMA CHAPA COM BORDAS TIPO F1 . . . . .	68
Figura 6.15 - REFERÊNCIA DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DE UMA CHAPA COM APOIOS TIPO F1 . . . . .	69
Figura 6.16 - CHAPA COM BORDAS FIXAS E MÓVEIS (F-F-F-F2) . . . . .	69
Figura 6.17 - SETOR ANULAR COM BORDAS FIXAS . . . . .	71
Figura 6.18 - MALHA UTILIZADA NO MEF-G-2 PARA OBTENÇÃO DOS RESULTADOS - SETOR ANULAR . . . . .	72
Figura 6.19 - MALHA UTILIZADA NO MEF-T3 - SETOR ANULAR . . . . .	72
Figura 6.20 - MALHA UTILIZADA NO MEF-T6 - SETOR ANULAR . . . . .	73
Figura 6.21 - ERRO RELATIVO DA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIBRAÇÃO - SETOR ANULAR. . . . .	73
Figura 6.22 - ERRO RELATIVO DA SEXTA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIBRAÇÃO - SETOR ANULAR . . . . .	74
Figura 6.23 - PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DE UMA CHAPA ANULAR OBTIDO PELO MEF-G-2 . . . . .	75
Figura 6.24 - REFERÊNCIA DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DE UMA CHAPA ANULAR OBTIDO PELO MEF-Q4 . . . . .	75
Figura 6.25 - PAREDE ESTRUTURAL COM DESCONTINUIDADE GEOMÉTRICA . . . . .	76
Figura 6.26 - MALHAS USADAS NO MEF-G E NO MEF - PAREDE ESTRUTURAL. . . . .	77
Figura 6.27 - ERRO RELATIVO DAS OITO PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS NATURAIS . . . . .	78
Figura 6.28 - ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS . . . . .	79
Figura 6.29 - ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS AMPLIADO . . . . .	79
Figura 6.30 - PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO LIVRE DA PAREDE . . . . .	80
Figura 6.31 - REFERÊNCIA DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO LIVRE DA PAREDE . . . . .	81
Figura 6.32 - MODELO DE UM PÓRTICO EM ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO. . . . .	82
Figura 6.33 - MALHA TRIANGULAR CONSTRUÍDA PARA O MEF-G-2 de um pórtico em EPD. . . . .	82
Figura 6.34 - ESPECTROS DE FREQUÊNCIAS NATURAIS - PÓRTICO EPD. . . . .	83
Figura 6.35 - QUINTO MODO DE VIBRAÇÃO DO PÓRTICO EM EPD OBTIDO PELO MEF-G-2 COM $\beta_j = \pi$ . . . . .	84
Figura 6.36 - REFERÊNCIA DO QUINTO MODO DE VIBRAÇÃO DO PÓRTICO EM EPD. . . . .	84

## LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - TIPOS DE CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA SÓLIDOS EM EPT . . .	34
Tabela 4.1 - FUNÇÕES DE FORMA QUADRÁTICA . . . . .	43
Tabela 5.1 - FUNÇÕES DE FORMA DO MEFG-D EM ELEMENTO TRIANGULAR . .	49
Tabela 5.2 - FUNÇÕES DE FORMA DO MEFG-2 . . . . .	54
Tabela 6.1 - NÚMERO DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE MASSA . . . . .	64
Tabela 6.2 - PRIMEIRAS 25 FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO ( <i>rad/s</i> ) EM CHAPA COM BORDAS TIPO F1 . . . . .	65
Tabela 6.3 - FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONAIS . . . . .	70
Tabela 6.4 - PRIMEIRAS SEIS FREQUÊNCIAS ADIMENSIONAIS - SETOR ANULAR COM BORDAS FIXAS . . . . .	71
Tabela 6.5 - FREQUÊNCIAS NATURAIS (Hz) . . . . .	78
Tabela 6.6 - FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO (Hz) DE UM PÓRTICO EM EPD. . . . .	83

## LISTA DE ACRÔNIMOS

EP	Estado Plano
EPT	Estado Plano de Tensões
EPD	Estado Plano de Deformações
GL	Graus de Liberdade
MEF	Método dos Elementos Finitos
MRD	Método da Rigidez Dinâmica
MRDE	Método da Rigidez Dinâmica Espectral
MQD	Método das Quadraturas Diferenciáveis
MEFQHD	Método dos Elementos Finitos com Quadraturas Hierarquicamente Diferenciáveis
MEFH	Método dos Elementos Finitos Hierárquicos
NURBS	Non Uniform Rational Basis Spline
PVC	Problema de Valor de Contorno

## LISTA DE SÍMBOLOS

$a_{ij}$	i-ésimo grau de liberdade de campo associado ao j-ésimo nível de enriquecimento
$e$	Erro relativo
$\mathbf{n}$	Vetor normal
$nl$	Nível de enriquecimento
$\mathbf{p}$	Vetor de forças de corpo
$p$	Grau polinomial
$t$	Espessura
$u$	Deslocamento horizontal
$\dot{\mathbf{u}}$	Vetor de velocidade
$\ddot{\mathbf{u}}$	Vetor de aceleração
$\tilde{\mathbf{u}}^{MEF}$	Campo de deslocamento devido ao MEF
$\tilde{\mathbf{u}}^{ENR}$	Campo de deslocamento enriquecido
$\tilde{\mathbf{u}}$	Campo de deslocamento aproximado
$v$	Deslocamento vertical
$w_i$	i-ésimo peso de Gauss
$x$	Abcissa cartesiana
$y$	Ordenada cartesiana
$\mathbf{0}$	Matriz nula
$\mathbf{C}$	Matriz de amortecimento
$E$	Módulo de elasticidade
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\mathbf{L}$	Matriz de operadores diferenciais
$L_{ij}$	i-ésima função enriquecida do j-ésimo nível de enriquecimento $j$
$\mathbf{M}$	Matriz de massa
$N_i$	i-ésima partição da unidade
$\mathbf{U}$	Matriz de deslocamento
$\vec{X}$	Vetor posição
$\alpha, \theta$	Ângulos
$\beta_j$	j-ésimo parâmetro de enriquecimento
$\Gamma$	Contorno
$\Gamma_t$	Contorno essencial
$\gamma_{ij}$	i-ésima função de enriquecimento com j-ésimo nível
$\phi_{ij}$	i-ésima função de enriquecimento com j-ésimo nível
$\eta$	Ordenada natural

$\Phi$	Matriz de funções de forma
$\mu_m$	m-ésimo produtório formador de partição da unidade
$\rho$	Massa específica
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\xi$	Abcissa natural
$\Omega$	Domínio global
$\Omega_i$	i-ésimo domínio local
$\omega$	Frequência natural de vibração
$\tilde{\omega}_i$	Frequência natural de vibração aproximada

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
1.1	OBJETIVO GERAL	15
1.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	15
1.3	ESTRUTURA DO TRABALHO	16
<b>2</b>	<b>REVISÃO DA LITERATURA</b>	<b>17</b>
2.1	MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS	18
2.1.1	Soluções Analíticas	19
2.1.2	Soluções Numéricas	19
2.1.3	Método Dos Elementos Finitos	21
2.1.4	Método Dos Elementos Finitos Hierárquicos	23
2.1.5	Método Dos Elementos Finitos Generalizados	24
<b>3</b>	<b>ESTADO PLANO E EQUAÇÃO GOVERNANTE</b>	<b>30</b>
<b>4</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS</b>	<b>37</b>
4.1	MÉTODO DE GALERKIN EM PROBLEMAS ELASTODINÂMICOS 2D	38
4.2	VIBRAÇÃO LIVRE	39
4.3	ELEMENTO FINITO TRIANGULAR	39
4.3.1	Elemento Triangular Linear	39
4.3.2	Elemento Triangular Quadrático	41
<b>5</b>	<b>MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS</b>	<b>44</b>
5.1	MÉTODO DA PARTIÇÃO DA UNIDADE	44
5.2	IMPLEMENTAÇÃO GERAL DO MEFM	45
5.2.1	Enriquecimento De Um Elemento Triangular	46
5.2.2	Proposta De Enriquecimento De Um Elemento Triangular	50
5.2.3	Uma Nota Sobre Integração Numérica	55
<b>6</b>	<b>MODELOS NUMÉRICOS</b>	<b>57</b>
6.1	DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE PONTOS DE GAUSS	57
6.2	VIBRAÇÃO LIVRE DE UMA CHAPA ENGASTADA	59
6.3	VIBRAÇÃO LIVRE DE UMA CHAPA RETANGULAR COM APOIOS DO TIPO F1	64
6.4	VIBRAÇÃO LIVRE DE UMA CHAPA RETANGULAR COM BORDA FIXA ROTULADA E BORDA MÓVEL ROTULADA	69
6.5	VIBRAÇÃO LIVRE DE UMA CHAPA ANULAR COM BORDAS FIXAS	70
6.6	VIBRAÇÃO LIVRE DE UMA PAREDE ESTRUTURAL	75
6.7	PÓRTICO EM ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO	81
<b>7</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>85</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>87</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O estudo da análise dinâmica atrai o interesse dos pesquisadores desde o período clássico. O filósofo e matemático Pitágoras é considerado o precursor das primeiras contribuições teóricas a respeito de análise dinâmica, através de seu estudo sobre o comportamento oscilatório de cordas. Já no século XVII, nomes importantes como Isaac Newton, Euler e Lagrange estabeleceram as bases teóricas fundamentais que hoje são aplicadas no desenvolvimento de diversos projetos de engenharia, relacionados com áreas que vão desde a construção civil até a indústria aeroespacial (BRAUN et al., 2002).

Devido ao avanço de novas tecnologias na engenharia contemporânea, a relevância da análise dinâmica de estruturas tem sido cada vez maior. Em épocas passadas, as estruturas confeccionadas tinham como característica a massa própria elevada, com interferências oscilatórias baixas e pouco relevantes. Ao contrário do que ocorre hoje, as construções são mais esbeltas e com alturas mais elevadas, sendo mais suscetíveis com relação as interferências oscilatórias (BRAUN et al., 2002).

De acordo com Liu et al (2019), a quantidade de estudos correspondentes a vibração de peças em Estado Plano (EP) é escassa quando comparada com a quantidade de pesquisas sobre dinâmica de placas. Apesar disso, a análise das frequências naturais no contexto de Estado Plano possui um papel importante para o desenvolvimento dos projetos e dimensionamento das diversas estruturas, tais como, mecânicas, civis, aeronáutica, etc. Portanto, é necessário o desenvolvimento apropriado de modelos numéricos que sejam capazes de descrever satisfatoriamente o comportamento dinâmico de estruturas em geral.

As soluções de problemas de engenharia podem ser feitas de três formas, através dos métodos experimentais, numéricos e analíticos, sendo que cada um desses métodos possui vantagens e desvantagens entre si, haja vista que dependem dos recursos, técnicas e fontes disponíveis para a melhor escolha. Em problemas complexos, por exemplo, nos quais as técnicas de obtenções de respostas analíticas não sejam possíveis, o emprego de métodos numéricos pode ser uma boa opção, uma vez que consistem em implementações matemáticas que podem ser aplicadas em casos mais generalistas com complexidades diversas. Apesar das respostas obtidas via métodos numéricos poderem ser muito precisas, em geral elas devem ser consideradas como aproximações numéricas, porque estas soluções incorporam diversas categorias de erros, tais como, erro de máquina, erro de discretização e até mesmo erros provenientes da formulação do modelo matemático, a partir do qual os métodos numéricos são aplicados. Quando se comparam os métodos numéricos com os métodos experimentais, aqueles costumam ser economicamente mais viáveis, porque são necessários apenas computadores e programas para a sua aplicação, ao contrário do que ocorrem com métodos experimentais, que demandam elevados investimentos em equipamentos e laboratórios (MALISKA, 2000) (CLOVIS, 2000).

Dentre os métodos existentes, o Método dos Elementos Finitos (MEF), na sua formulação clássica, tem sido uma ferramenta de uso cotidiano por muitos engenheiros, por ser já difundido e consagrado, além de permitir boa discretização geométrica quando comparado aos outros métodos numéricos, tais como, o método das diferenças finitas. O MEF está disponível em vários programas computacionais, cujos algoritmos estão implementados para o uso de elementos finitos triangulares e quadriláteros. Em aplicações práticas e de uso corrente, os elementos triangulares podem ser usados para a modelagem de regiões geometricamente complexas. Todavia, o MEF pode produzir aproximações insatisfatórias nos problemas que

possuam soluções descontínuas, acarretando em elevado custo computacional para se alcançar a precisão desejada (RAO, 2017).

Nas últimas décadas, o MEF tem sido aprimorado por meio de diferentes estratégias de formulações que visam aumentar a qualidade das repostas numéricas. Assim, outros métodos têm surgido como alternativas, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG), o qual através do Método da Partição da Unidade (MPU) permite a incorporação de novas funções de enriquecimento junto ao espaço de aproximação. No campo da dinâmica, por exemplo, estudos recentes têm mostrado que as funções trigonométricas incorporadas ao espaço enriquecido do MEFG são promissoras na obtenção de soluções aproximadas de frequências naturais de vibração (ARNDT, 2009; TORII, 2012; CORRÊA, 2019; CITTADIN, 2020).

Na implementação do MEFG existe a possibilidade do uso de diferentes estratégias na construção das funções de enriquecimento. De acordo com as publicações encontradas (TORII; MACHADO; ARNDT, 2015; SHANG et al., 2017; SHANG; MACHADO; ABDALLA, 2019), observa-se que a o espaço de aproximação trigonométrico tem conduzido para boas aproximações das frequências naturais de elementos em EP, vigas, pórticos e barras.

A contribuição principal deste trabalho consiste na investigação do comportamento do MEFG estruturado com elemento mestre do tipo triangular, formado com base no espaço de enriquecimento adaptado a partir das definições propostas em Arndt (2009) e Torii (2012), referente a análise dinâmica de estruturas em estado plano de tensão ou deformação. Será utilizado o espaço trigonométrico, porque em geral as soluções numéricas e analíticas são apresentadas em forma de funções trigonométricas, sendo uma característica destes problemas. Também serão apresentados vários estudos encontrados na literatura sobre soluções analíticas e aproximadas de vibrações livres de estruturas em EP.

## 1.1 OBJETIVO GERAL

O objetivo desta pesquisa é investigar o comportamento do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) formulado com elementos triangulares em problemas de vibrações livres de estruturas em Estado Plano.

## 1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Os objetivos específicos são os seguintes:

- Buscar soluções analíticas e numéricas relativas aos problemas de vibrações livres de estruturas em estado plano, para usar como referências;
- Propor um elemento triangular enriquecido para aplicação no MEFG;
- Propor um elemento triangular degenerado a partir de um elemento quadrilateral enriquecido;
- Utilizar funções trigonométricas na construção de funções de enriquecimento em elementos triangulares para verificação da eficiência do método relativo ao uso deste tipo de base;
- Avaliar a performance do MEFG proposto em comparação com outros métodos.

### 1.3 ESTRUTURA DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em sete capítulos. No capítulo dois está descrita uma revisão da literatura sobre os fenômenos de vibrações, bem como estudos existentes sobre as soluções analíticas de vibrações livres nos problemas dinâmicos sujeitos ao estado plano de tensões e deformações. Posteriormente, no capítulo dois, são apresentados os métodos numéricos aqui trabalhados, levando em conta o contexto histórico e produções recentes encontradas na literatura.

No terceiro capítulo são apresentados os conceitos gerais sobre as teorias de estado plano, bem como a formulação fraca dos problemas elastodinâmicos.

No quarto capítulo são apresentados os fundamentos matemáticos do Método dos Elementos Finitos. De igual modo, no capítulo cinco, conceitos matemáticos do Método dos Elementos Finitos Generalizados são mostrados com enfoque nos elementos triangulares.

No sexto capítulo uma série de problemas numéricos são trabalhados, com o intuito de se comparar a performance do Método dos Elementos Finitos Generalizados em relação ao Método dos Elementos Finitos clássico.

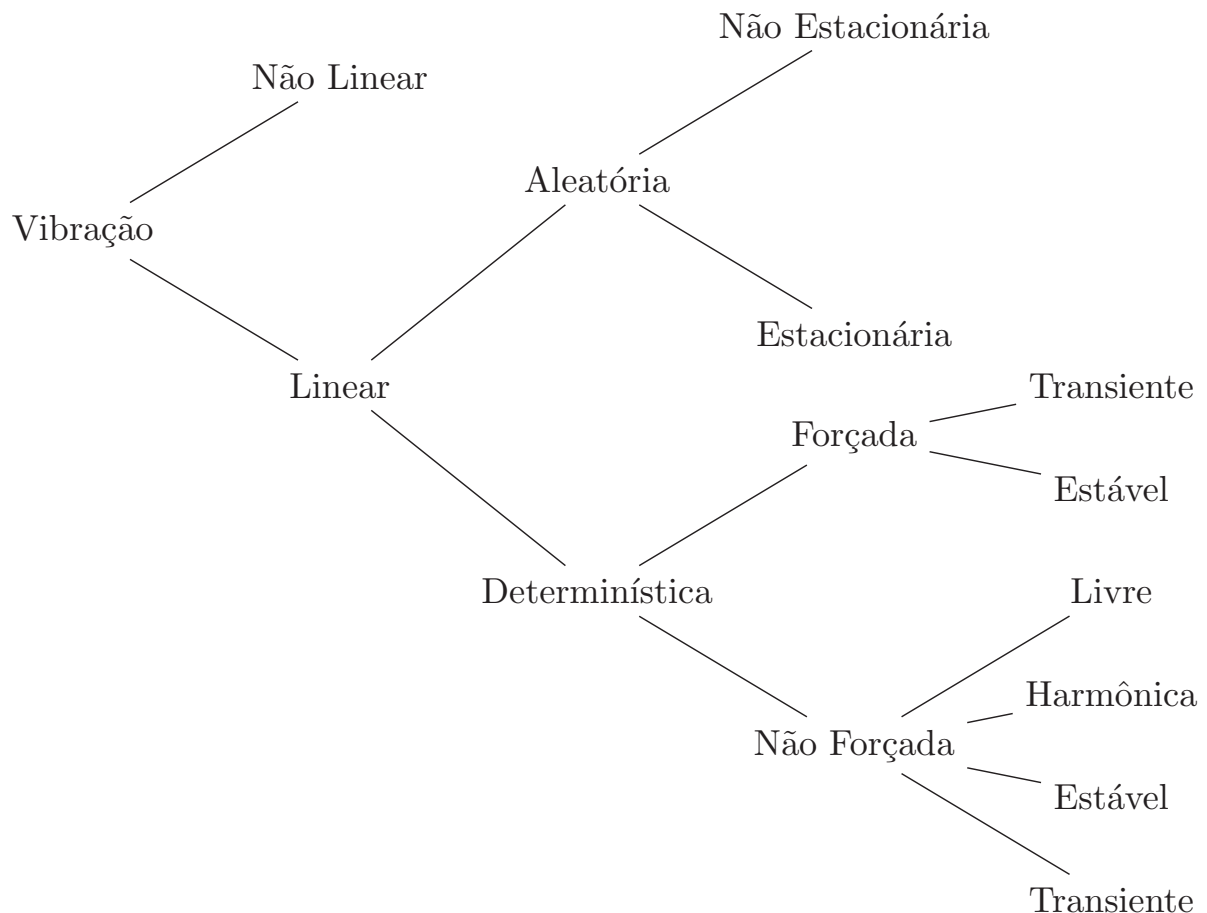
No capítulo sete as principais conclusões são sumarizadas levando em conta os resultados numéricos obtidos e são apresentadas sugestões para trabalhos futuros.

## 2 REVISÃO DA LITERATURA

O estudo do comportamento do MEEG aplicado no contexto de vibrações livres de peças em Estado Plano (EP), se encaixa como uma análise de linear determinística livre.

Conforme Leung (2012), as vibrações de sistemas lineares recaem em duas categorias gerais: as vibrações livres e forçadas. Quando um sistema físico está sujeito a uma condição inicial sem atuação de forças externas, a vibração é denominada como livre e possui deslocamentos periódicos formados pela combinação dos modos de vibração, que por sua vez estão relacionados às frequências naturais. Os modos de vibração ou modos naturais de vibração, são as configurações iniciais de vibração livre que produzem um movimento harmônico em torno da posição de equilíbrio, com uma determinada frequência natural de vibração que é comum a todos os pontos deste mesmo corpo. As ramificações do estudo da análise dinâmica podem ser sumarizadas de acordo com a Figura 2.1.

Figura 2.1: DIAGRAMA DE RAMIFICAÇÕES DO ESTUDO DA ANÁLISE DINÂMICA



FONTE: Adaptado de Leung (2012)

A Figura 2.1 revela que o estudo dinâmico de um sólido se divide primariamente em linear e não linear. Levando em conta os efeitos lineares, tem-se que esta se divide em vibrações aleatórias e determinísticas, sendo que a partir desta última surgem as classificações de vibrações forçadas e não forçadas.

Os problemas de análise dinâmica são comumente modelados como problemas de valores iniciais, a partir dos quais são obtidas as soluções para o campo de deslocamentos, frequências naturais e outras variáveis de interesse. Entretanto, no caso de sistemas em EP, as soluções analíticas existentes limitam-se apenas aos modelos com geometria, condições de contorno e carregamentos simplificados. Para problemas que fogem desta característica, seja pela geometria diferenciada, ou por particularidades de vinculações com o meio externo, o desenvolvimento de soluções analíticas torna-se impraticável, sendo então necessária a aplicação de algum método numérico que possibilite a discretização do problema. Mas, os resultados obtidos via métodos numéricos são considerados como soluções aproximadas, cujas ordens de precisões dependem de técnicas de refinamento (TORII, 2012).

No caso das estruturas com comportamento de Estado Plano, a causa dos deslocamentos oscilatórios na mesma direção do plano médio de um certo sólido, está relacionada com frequências de excitação elevadas. Contudo, a geração de respostas precisas para este tipo de fenômeno torna-se difícil, porque o comprimento de onda oscilatória é extremamente curto, uma vez que é proveniente dos modos de vibração com variações espaciais extremamente rápidas (LANGLEY; BERCIN, 1994).

Nas últimas décadas consideráveis avanços foram alcançados no desenvolvimento de ferramentas numéricas voltadas para a análise mecânica de sistemas estruturais, sendo o Método dos Elementos Finitos (MEF) a mais difundida. Todavia, existem outras ferramentas alternativas ao MEF, que também podem ser aplicadas nos problemas de análise dinâmica, tais como, o Método de Rayleigh-Ritz, o Método das Diferenças Finitas, Método de Elementos de Contorno, o Método das Quadraturas Diferenciáveis, os Métodos Espectrais, os Métodos discretos e etc (CHEN; JIN; LIU, 2014).

A busca pela correta descrição dos efeitos dinâmicos em elementos de Estado Plano (EP) tem sido eminente nas publicações científicas. Porém, levando em conta a literatura existente até o ano de 2002, as publicações encontradas sobre análise dinâmica de sólidos em EP são em menor número quando comparadas aos estudos dinâmicos em placas de Mindlin e Kirchhoff, dado que as frequências que causam vibrações transversais (fora do plano) costumam ocorrer em faixas mais próximas das frequências de excitação externa (WANG; WERELEY, 2002).

Assim, o interesse na investigação destes fenômenos ainda perduram, uma vez que impactam diretamente em diversas aplicações de engenharia. No caso das estruturas hidráulicas, por exemplo, o impacto do movimento tangencial dos fluídos contra as paredes dos tubos é responsável pela causa de vibrações em estado plano. Outro exemplo pode ser citado na indústria aeronáutica, onde os componentes das aeronaves podem sofrer perturbações oscilatórias caracterizadas por meio de vibrações no estado plano. Na indústria da construção civil, os edifícios têm alcançado esbeltez e alturas cada vez mais elevadas, logo, os seus componentes estruturais estão mais sujeitos as ações dinâmicas. Além destes exemplos, poderiam ser citados vários outros em que os fenômenos dinâmicos em EP são relevantes (WANG; WERELEY, 2002; COTTRELL et al., 2006; DU et al., 2007; LIU et al., 2017; LIU; BANERJEE, 2017).

## 2.1 MÉTODOS ANALÍTICOS E NUMÉRICOS

Existem diversas técnicas de soluções para o estudo de vibrações no plano de chapas retangulares, algumas analíticas e outras numéricas. Atualmente existe três tipos de métodos analíticos: o método de separação de variáveis, o método de Kantorovich-Krylov e o método da superposição. Relativos as soluções numéricas existem vários, sendo o método de Rayleigh-Ritz o principal. Os métodos numéricos comparados com as soluções analíticas podem ser adaptados

para quaisquer condições de contorno, que podem ser clássicas, elásticas ou concentradas (pontuais). Nas seções a seguir são apresentadas algumas abordagens encontradas na literatura a respeito de análise modal em estado plano.

### 2.1.1 Soluções Analíticas

Sobre a solução denominada como método da separação de variáveis, tem-se que Park (2008) apresentou soluções para frequências naturais de chapas isotrópicas com espessura uniforme, com formatos circulares e bordas engastadas através do método de separação de variáveis. Devido a característica geométrica deste tipo de problema, as equações governantes foram modeladas em coordenadas cilíndricas, e derivadas do princípio de Hamilton, produzindo equações diferenciais acopladas. Para viabilizar a solução analítica, o desacoplamento das equações foi realizado pela técnica de decomposição de Helmholtz. Xing e Liu (2009) desenvolveram soluções para chapas retangulares com diversas combinações de apoios através da solução da Equação Diferencial governante (ED) por meio do método da separação de variáveis em placas isotrópicas e quadradas. Neste contexto é citado que as soluções analíticas só são possíveis de serem desenvolvidas com o requisito de que hajam ao menos dois apoios do tipo rotulado. Liu e Xing (2011) desenvolveram soluções analíticas para casos particulares de condições de contorno em chapas quadradas formados por materiais ortotrópicos, denominando-as de auto soluções. Entretanto, para que as soluções sejam possíveis é preciso que as arestas opostas dos modelos sejam vinculados com apoios rotulados, com deslocamentos livres em uma direção. Wang, Xing e Sun (2020) abordaram o problema de vibração livre em EP usando o método iterativo de separação de variáveis denominado pela sigla em inglês de iSOV (iterative separation-of-variable), o qual é fundamentado no método de quociente de Rayleigh. Nesta publicação os modelos estudados foram chapas retangulares com bordas opostas rotuladas. Conforme os autores, essas soluções são consideradas exatas, com exceção dos casos que possuem apoios livres e engastados.

O método da superposição foi proposto por Gorman (GORMAN, 2004), e consiste no uso de séries de Levy para a representação de deslocamentos contidos no plano. O Método de Kantorovich-Krylov assume que existe um função modal em uma direção, que é resolvida através de uma técnica iterativa. Em Wang e Wereley (2002) aplicaram o método variacional de Kantorovich-Krylov na determinação da solução de vibrações livres em chapas retangulares com bordas livres e engastadas. Nesta pesquisa foi aplicada uma combinação linear de ondas com amplitudes desconhecidas para a construção das expressões analíticas de deslocamentos.

### 2.1.2 Soluções Numéricas

Conforme Papkov (2016), grande parte das soluções propostas para o problema de vibração livre no estado plano consiste em variações do método de Rayleigh-Ritz. Em geral, as buscas por soluções analíticas concentram-se no uso de funções de forma com termos provenientes das séries de Fourier e outras funções trigonométricas.

Bardell, Langley e Dunsdon (1996) estão entre os primeiros autores a apresentar soluções numéricas de frequências naturais de chapas. Os autores aplicaram o método de Rayleigh-Ritz em chapas quadradas e retangulares, utilizando polinômios K-ortogonais como base de aproximação, sendo que os resultados obtidos são comumente usados como referência para comparação de resultados em estudos posteriores.

Farag e Pan (1998) desenvolveram um modelo matemático para a previsão de vibrações livres e forçadas na direção do plano de chapas retangulares. O modelo desenvolvido ilustra

a natureza do acoplamento entre as oscilações longitudinais e transversais bem como as características dos deslocamentos vibracionais das chapas.

Du et al. (2007) investigaram o problema de vibrações livres no plano de chapas retangulares com bordas apoiadas elasticamente, através do método da série de Fourier melhorado com base de aproximação obtida a partir da série de Fourier, e levando em conta o uso de funções suplementares calculadas através do produto de funções polinomiais com a expansão das séries de Fourier, para contornar os problemas de descontinuidades existentes no campo de deslocamentos próximo às quinas da chapas.

Em Shi et al. (2015) foi proposto o chamado método de Fourier-Ritz, para obtenção de solução analítica por séries, tal como descrito em Du et al. (2007). Os problemas analisados foram estendidos para chapas ortotrópicas, com apoios elásticos, não uniformes e com linhas de apoios inseridos no interior do domínio das chapas. Para esses tipos de apoios notou-se que aqueles com restrições uniformes têm rápida convergência na resposta de frequências naturais de vibração à medida em que se aumenta o número de termos da série de Fourier, porém nos modelos com restrições não uniformes a convergência mostrou-se lenta. Bao e Wang (2017) analisaram o problema de vibrações livres em chapas retangulares e setores anulares com diversas combinações de condições de contorno, utilizando o método de Fourier-Ritz, o qual consiste nos mesmos procedimentos usados por Wang et al. (2016). Para simplificação das equações governantes dos problemas de vibrações livres em peças circulares, foram aplicadas variáveis logarítmicas radiais. Liu et al. (2019) aplicaram os termos senoidais das expansões da série de Fourier como funções adicionais no cálculo de vibrações livres de chapas triangulares em EP. Eles usaram a transformação de quatro coordenadas nodais para o mapeamento do domínio físico no domínio computacional. Yuan, Li, Parker et al. (2020) introduziram um método semi-analítico para resolução de chapas com geometrias arbitrárias a partir do chamado método do mapeamento de contorno, cuja proposta é de simplificar uma geometria complexa para definir as condições de contorno. Yuan et al. (2020) propuseram um solução analítica para problemas dinâmicos em EP, por meio do desacoplamento das equações diferenciais via técnica de decomposição de Helmholtz. Após a aplicação desta técnica, o método de separação das variáveis é utilizado, sendo que as soluções propostas funcionam para peças circulares. Em Seok, Tiersten e Scarton (2004) foram apresentadas as soluções de frequências naturais de vibração no plano de chapas retangulares com apenas uma borda engastada, levando em consideração várias relações entre o comprimento e a largura. Singh e Muhammad (2004) apresentaram resultados aproximados em chapas não retangulares, de modo que as soluções de frequências e modos de vibração foram obtidas através do MEF com elementos quadrilaterais de elevada ordem. Dozio (2010) propôs um método de Rayleigh-Ritz usando uma base funções trigonométricas, obtidas pelo produto entre funções do tipo seno, no cálculo de frequências naturais de vibração em chapas com restrições do tipo elásticas e não uniformes. Kim, Cho e Beom (2012) alcançaram resultados aproximados de modos de vibração no plano de chapas circulares com bordas elasticamente restritas, por meio do método de Rayleigh-Ritz. Neste trabalho a base de funções usadas foi trigonométrica e formulada no sistema de coordenadas cilíndricas. Chen, Jin e Liu (2014) usaram base de funções de Chebyshev na implementação do método de Rayleigh-Ritz, para a obtenção dos modos de vibração aproximados em EP de chapas retangulares com furos internos. Wang et al. (2016) estenderam a aplicação do método de Rayleigh-Ritz formulado com base nos termos da série de Fourier em domínios circulares, anulares, retangulares, ortotrópicos e com condições de contorno gerais. Nos modelos apresentados, a aplicação deste método mostrou-se rápida e com convergência mais acentuada para os resultados de frequências naturais quando comparados aos resultados obtidos pelo MEF. Liu et al. (2022) aplicaram o método Espectral-Chebyshev na análise de vibrações livres no plano

em peças com geometrias curvilíneas e com diferentes condições de contorno. Neste estudo, o que foi feito consiste no mapeamento de uma geometria arbitrária em uma área quadrada através de transformações de coordenadas. As funções para aproximar o campo de deslocamentos são os polinômios bidimensionais de Chebyshev. A validação das simulações numéricas foram feitas através de simulações experimentais de seis chapas de alumínio com diferentes condições de contorno.

O Método da Rigidez Dinâmica (MRD) foi proposto como um método alternativo ao MEF, cuja proposta visa justamente capturar de forma precisa as respostas relativas às frequências elevadas (BERCIN; LANGLEY, 1996). Neste método ao invés de se resolver aproximadamente as equações do movimento por meio de cálculos variacionais, as equações diferenciais que descrevem o problema dinâmico são resolvidas assumindo-se soluções na forma de séries definidas nas direções  $x$  e  $y$ . Anos mais tarde no trabalho de Liu e Banerjee (2017) o MRD foi reformulado sob o nome de Método da Rigidez Dinâmica Espectral (MRDE) voltado para aplicações em problemas elastodinâmicos com comportamento de estado plano, fornecendo soluções equivalentes às soluções analíticas. Liu e Banerjee (2017) apresentaram uma variação do método da rigidez dinâmica, com a proposta de fornecer soluções exatas de problemas de vibrações livres considerando faixas baixas, médias e altas de frequências naturais. Este método integra o MRD clássico, com métodos espectrais e com o algoritmo de Wittrick-Williams (WITTRICK; WILLIAMS, 1971). Nesta pesquisa o método foi aplicado aos problemas de vibrações livres em estado plano, obtendo soluções analíticas até a milésima frequência natural de vibração, além de resolver os problemas para 55 combinações possíveis de condições de contorno.

Deutsch e Eisenberger (2022) definiram o problema de vibração livre em EP como um problema clássico da mecânica, cuja solução envolve duas equações diferenciais acopladas como diversas combinações possíveis para as condições de contorno. Em certos casos, existem soluções exatas, porém na maioria as soluções são aproximadas, que têm sido desenvolvidas ao longo dos anos. Os autores propuseram soluções aproximadas para diversos casos de combinações de condições de contorno, por meio do uso de séries matemáticas.

### 2.1.3 Método Dos Elementos Finitos

O Método dos Elementos Finitos é um método numérico no qual uma equação diferencial é remodelada por meio da discretização de um domínio global em regiões mais simplificadas, tais como, um conjunto de triângulos, quadriláteros, tetraedros, etc. Estas regiões simplificadas são associadas para que satisfaçam o critério de continuidade na interconexão entre os nós que constituem o domínio global do problema (GUPTA; MEEK, 1996).

As bases físicas e matemáticas que deram origem ao MEF datam do século XVII, iniciando pela criação do cálculo variacional por Bernoulli em 1697. No mesmo período, o filósofo e matemático Leibniz desenvolveu uma teoria para as aproximações variacionais em domínios discretos. A primeira formulação discreta em problema de autovalores de mecânica dos sólidos via formulação física foi elaborada por Strutt, em 1877. Anos depois, Rayleigh (1896) publicou o livro "Sound's Theory" (Teoria dos Sons), no qual consta a apresentação do conhecido método de Rayleigh, amplamente utilizado na modelagem numérica de problemas físicos até os dias de hoje (STEIN, 2014).

Já em meados do séculos XX, em 1909, o matemático Ritz elaborou o primeiro método variacional para aplicação em problemas de placas de Kirchhoff, que desenvolvido a partir dos trabalhos de Rayleigh, sendo hoje é conhecido como o método de Rayleigh-Ritz. Em 1915, o engenheiro Galerkin estudou a aplicação de vários grupos de funções nos domínios de problemas da mecânica do contínuo (STEIN, 2014).

Courant (1943) desenvolveu a minimização de um funcional utilizando aproximações através de sub-regiões, com valores especificados por pontos nodais, denominando-os como malha de elementos. Entretanto, a terminologia "elementos finitos", passou a ser difundida a partir de Turner et al. (1956), nas aplicações de problemas relacionados a engenharia aeronáutica. No mesmo ano, em 1956, Zienkiewicz publicou técnicas de minimização de funcionais através de aplicações em diversos problemas de campo (ZIENKIEWICZ, 1956).

Levando em conta os diversos problemas que podem ser modelados através do MEF, verifica-se que o benefício da sua aplicação se dá pela capacidade de aproximação de domínios geométricos com formas diversas, resultando na solução de sistemas de equações formados por matrizes numéricas esparsas e simétricas, reduzindo significativamente o esforço computacional empregado na solução dos sistemas lineares. Este método converge para a solução analítica porque atende a dois critérios importantes: o primeiro é o que se chama de completude, pois os elementos podem representar deslocamentos de corpo rígido e estados de tensões constantes. O segundo, é o critério de conformidade, o qual garante a continuidade nas adjacências entre os elementos que constituem a malha discretizadora do problema (SORIANO, 2009).

Na busca por aproximações em problemas de dinâmica, o MEF costuma ser formulado com funções polinomiais de baixa ordem, geralmente lineares, porém nesta formulação as respostas fornecidas possuem baixa precisão, ainda mais nos casos onde se buscam aproximações de frequências elevadas, tais como aquelas que ocorrem nos problemas de estado plano. Conforme Liu e Banerjee (2017), o MEF pode não ser um método adequado para a determinação das frequências naturais de vibração em problemas de EP, porque acaba requerendo o uso de malhas muito refinadas na obtenção de soluções aproximadas, sendo que isto gera demanda computacional elevada.

Os erros numéricos existentes nas aproximações obtidas pelo MEF podem ser reduzidos na medida que se realizam os chamados refinamento  $h$ ,  $p$  ou  $hp$ . O refino- $h$  é caracterizado pela diminuição do tamanho dos elementos da malha. No refino- $p$  a malha permanece constante enquanto os polinômios interpoladores têm o seus graus aumentados até que seja alcançada a precisão necessária. Os Graus de Liberdade (GL) gerados nos elementos com refinamento- $p$  são constituídos pelos graus de liberdade nos nós das extremidades e pelas amplitudes das funções de forma dentro do elemento, sendo que em geral este tipo de refino é mais efetivo em relação ao refino- $h$  (SZABÓ; DÜSTER; RANK, 2004).

O uso do refinamento- $p$  no lugar do refinamento- $h$  é justificado pela alta taxa de convergência nas aproximações de resultados de problemas que não envolvam grandes discontinuidades, porém sua dificuldade é aumentada em implementações computacionais e também em escolhas de bases de funções adequadas para compor o elemento mestre (TORII, 2012). O refinamento- $hp$  consiste no uso simultâneo do refinamento  $h$  e  $p$ . (BATHE, 1982; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000; HUGHES, 2012).

Na mecânica da fratura, por exemplo, no estudo de propagações de trincas tem sido aplicado o chamado refino- $s$ , no qual são construídas duas malhas de elementos finitos que ocupam um mesmo domínio, sendo que uma delas discretiza todo o domínio global e a outra cobre uma região de interesse, porém mais densa, sendo essa técnica semelhante a estratégia global-local utilizada no Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) de Duarte e Babuška (2005) (KISHI et al., 2020).

A etapa de geração da malha de elementos finitos é de importância significativa, sendo que este processo consiste na subdivisão de um domínio em diversos elementos. Nas aproximações que envolvem domínios geométricos complexos, muitas vezes é necessário o uso de milhares de elementos finitos, ou até mesmo milhões deles. Assim, muitas aplicações podem envolver domínios que contenham curvas geométricas de difícil modelagem computacional, porém

estas dificuldades podem ser contornadas usando os elementos finitos triangulares (SHYLAJA et al., 2020).

Conforme Bathe (2017), em análises de alta complexidade, muitas vezes gasta-se mais tempo na construção de uma malha adequada do que para resolver o sistema de equações. Dada a impossibilidade de sobreposição dos elementos, acabam surgindo elementos muito distorcidos, necessitando a adequação da malha para que não prejudique a precisão dos resultados. Por conta disso, é necessária boa experiência do operador para a geração de malhas adequadas nas simulações de problemas de engenharia. Atualmente existem técnicas que permitem a sobreposição dos elementos finitos, facilitando a construção das malhas. Uma dessas técnicas utiliza mesclagem entre o MEF e o Método das Esferas Finitas, conforme mostrado em Bathe e Zhang (2017).

A literatura existente a respeito de vibrações na direção do plano médio de chapas é concentrada em problemas de chapas anulares e retangulares. Entretanto, o MEF é popular na aplicação dinâmica dos mais variados casos, haja vista que neste método as interpolações de Lagrange ou Hermite são usadas na descrição dos campos de deslocamentos desconhecidos (CHEN et al., 2017).

O MEF é difundido nas modelagens dos problemas dinâmicos, porém há situações em que a sua aplicação pode gerar respostas imprecisas, devido a dificuldade de capturar o comportamento oscilatório de ondas curtas, requerendo então o uso de modelos com malhas super refinadas, que por sua vez geram sistemas de equações excessivamente grandes, aumentando tempo e custo de processamento computacional. A aplicação do MEF nos problemas dinâmicos em EP pode carregar erros numéricos com relação as propriedades dos materiais, geometrias e condições de contorno, podendo surgir erros expressivos nas aproximações do campo de deslocamentos (BERCIN; LANGLEY, 1996).

#### 2.1.4 Método Dos Elementos Finitos Hierárquicos

O Método dos Elementos Finitos Hierárquicos (MEFH) é constituído pelo refino- $p$  do MEF quando o conjunto de funções de forma correspondentes a uma aproximação de ordem  $p$  constitui um subconjunto de um conjunto de funções que correspondem a uma aproximação de ordem  $(p+1)$ , conhecido como refino- $p$  hierárquico (PETYT, 2010).

Das vantagens do MEFH sobre o MEF, pode-se destacar que não é necessário o refino da malha para que seja alcançada a precisão desejada, e as matrizes de massa e rigidez possuem a propriedade de acoplamento, ou seja, as matrizes associadas a uma aproximação de ordem  $p_1$  serão submatrizes das matrizes associadas a uma ordem  $p_2$  para  $p_2 > p_1$ . Esta última propriedade possibilita o princípio da inclusão, de modo que os autovalores aproximados com uma ordem  $p + 1$  incorporam os autovalores que correspondem a ordem anterior. Através do MEFH estruturas simples podem muitas vezes ser modeladas com boa precisão utilizando-se apenas um elemento finito (ZHU, 1986; MEIROVITCH; BARUH, 1983).

Muitos tipos de funções hierárquicas podem ser incorporadas no MEFH, tais como os polinômios de Legendre, Lobatto, Chebyshev, funções trigonométricas, dentre outros. Em equações diferenciais de segunda ordem, tal como as que descrevem o estado plano, é interessante o uso de polinômios de Lobatto. No caso de problemas de quarta ordem são possíveis o uso dos polinômios de Bardell (BARDELL; LANGLEY; DUNSDON, 1996; LEUNG et al., 2004; HOUMAT, 2008; LIU et al., 2019). Em geral o refino- $p$  tem maior taxa de convergência do que o refino- $h$ , sendo que as funções trigonométricas costumam ser mais efetivas na aproximação de frequências médias e altas, quando comparadas com a base de funções polinomiais (LEUNG et al., 2003).

Em Taylor, Zienkiewicz e Oñate (1998) é discutido o uso do MEFH com aproximações baseadas na Partição da Unidade (PU). A estruturação das aproximações foram realizadas de modo que as adições de funções polinomiais de qualquer grau  $p$  pudessem ser aplicadas em qualquer nó na malha, levando-se em conta que o enriquecimento do espaço de aproximação preservam as funções de base iniciais.

Houmat (2008) propôs um elemento triangular isoparamétrico, enriquecido com funções trigonométricas senoidais obtidas a partir dos termos da série de Fourier, na investigação das frequências naturais de vibração em estruturas bidimensionais com formatos circulares. Neste estudo foi observado que para malhas fixas e com poucos elementos, os resultados apresentaram boa precisão devido à inclusão das funções trigonométricas. A aplicação do MEFH também apresentou taxas de convergências maiores quando comparadas com as taxas de convergência do refino- $p$  do MEF convencional.

No campo da análise dinâmica o MEFH apresenta precisão satisfatória na aproximação de frequências altas a medida que se aumenta o grau da interpolação, mesmo com malhas irregulares, mostrando baixa sensibilidade para elementos distorcidos (DANG-TRUNG; YANG; LIU, 2019).

#### 2.1.5 Método Dos Elementos Finitos Generalizados

O desenvolvimento do MEFG teve seu início de forma independente nos trabalhos de Babuska et al. (1994) e Duarte et al. (1996). Moes e Belytschko (2002) desenvolveram um método semelhante denominado como Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFES). Posteriormente em Belytschko, Gracie e Ventura (2009) foi reconhecido que o MEFES é equivalente ao MEFG, cujo cerne é consiste no uso de partições da unidade para a definição dos espaços de aproximação.

Em muitas aplicações, a solução dos problemas podem apresentar descontinuidades, singularidades, gradientes altos, oscilações e etc. O MEF aplicado nos problemas com grandes descontinuidades exige a construção de malhas muito refinadas para que forneça uma solução precisa, porém o refinamento excessivo das malhas acarreta em elevado custo computacional. O MEFG foi desenvolvido com a proposta de alcançar soluções mais precisas de problemas que contenham descontinuidades, requerendo o uso de malhas com poucos elementos. Uma aproximação obtida através do MEFG costuma ser mais precisa do que a obtida pelo MEF, haja vista que a construção do espaço de aproximação do MEFG é realizado por meio do enriquecimento da base de aproximação do MEF. Este enriquecimento muitas vezes é feito a partir do conhecimento *a priori* da solução analítica de um determinado PVC (DUARTE; BABUŠKA; ODEN, 2000).

Em termos de programação de algoritmo, a estruturação do MEFG é semelhante a técnica de refinamento- $p$ , sendo que suas malhas podem ser formadas por poucos elementos. O uso deste método tem sido amplamente avaliado na aplicação em vários problemas físicos, tais como, propagação de trincas, modelagem de materiais, escoamento de fluídos multifásicos, interação entre fluído e estrutura, análise de concentração de tensões, análise dinâmica, condução de calor, materiais compósitos e etc (BABUŠKA et al., 2020; HATAMI; GHASEMI, 2021; SILVA et al., 2022).

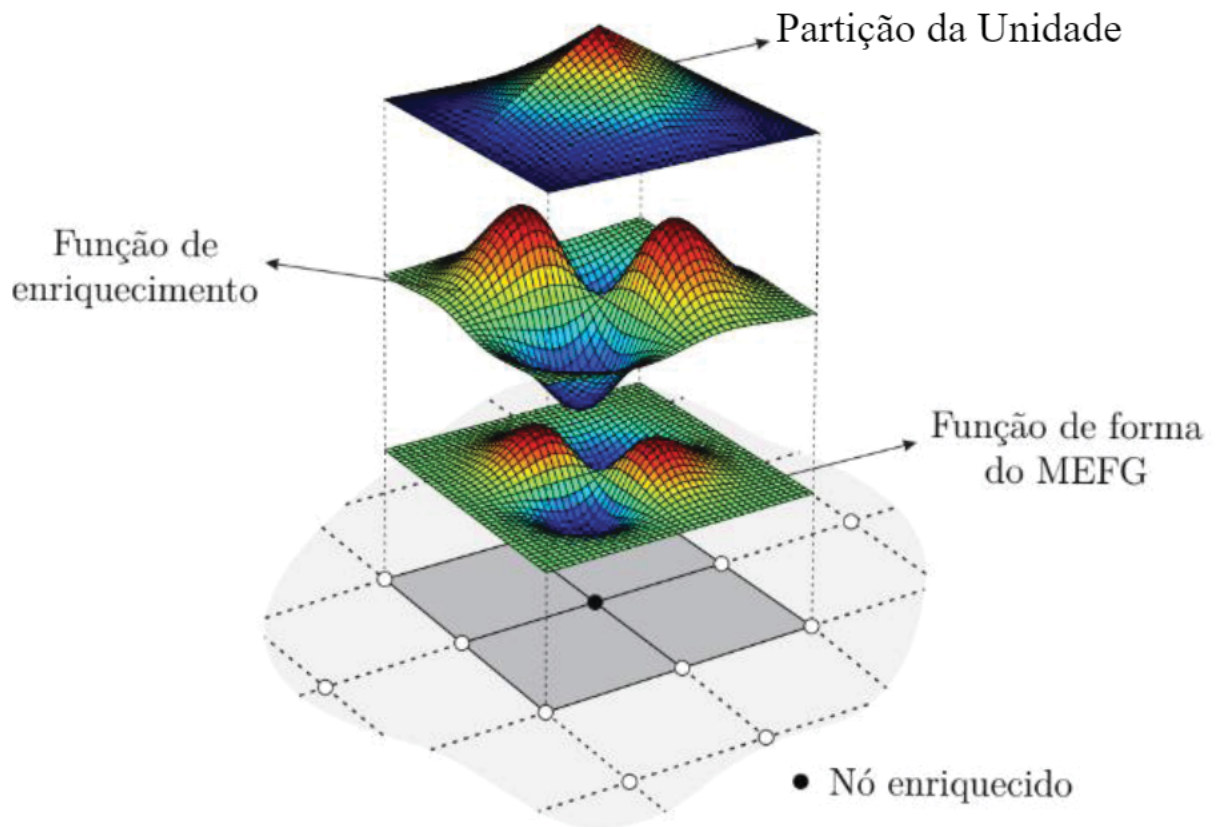
O MEFG é uma instância do Método da Partição da Unidade (MPU), pois permite que sejam utilizadas as malhas do MEF, de tal maneira que as nuvens sejam construídas pelo agrupamento dos elementos finitos e associadas a um nó  $i$  da malha (DUARTE; ODEN, 1996; DUARTE; KIM, 2008).

A alternativa mais eficiente para o enriquecimento da aproximação do MEEG consiste no produto das partições da unidade pelas funções enriquecedoras, as quais podem ser polinomiais, harmônicas, exponenciais ou até mesmo parte da solução de um PVC. Posteriormente o espaço enriquecido é agrupado ao espaço de aproximação original do MEF (DE BARCELLOS; MENDONÇA; DUARTE, 2009; SANCHEZ-RIVADENEIRA; DUARTE, 2019). Assim, a base de aproximação é formada pelo grupo das funções  $L_{ij}$  obtidas por

$$L_{ij}(\vec{X}) = N_i(\vec{X})\phi_{ij}(\vec{X}) \quad (2.1)$$

sendo  $\phi_{ij}$  uma função enriquecedora,  $N_i$  uma partição da unidade,  $\vec{X}$  um vetor posição e  $i, j$  são os índices nodais e de enriquecimento contidos na malha de elementos finitos, respectivamente. Na Figura 2.2 é mostrada graficamente a técnica de enriquecimento definida na equação (2.1).

Figura 2.2: GRÁFICO DE UMA PARTIÇÃO DA UNIDADE E FUNÇÃO DE ENRIQUECIMENTO NODAL EM UM SUPORTE



FONTE: Ramos (2019)

Através deste procedimento é possível construir funções de forma que podem aproximar adequadamente a solução local de um determinado problema (GARZON; DUARTE; BUTTLAR, 2010).

Várias funções de enriquecimento podem ser obtidas hierarquicamente em qualquer nó componente de uma malha, ou ainda, no domínio local de um elemento finito, de acordo com os

trabalhos de Arndt (2009), Torii (2012) e Shang (2018). A forma geral da aproximação local  $\tilde{u}$  de um campo  $u$  pode ser definida como:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n N_i \sum_{j=1}^{nl} \phi_{ij} a_{ij} \quad (2.2)$$

onde  $a_{ij}$  com  $i = 1, 2, \dots, n$  e  $j = 1, \dots, nl$  representam os graus de liberdade e  $nl$  é a quantidade de níveis de enriquecimento.

Duarte, Kim e Quaresma (2006) apresentaram um procedimento para construir funções de forma com suavidade arbitrária em malhas não estruturadas. Neste trabalho foi demonstrado que a razão de convergência não está relacionada a convexidade do suporte das funções de forma. A proposta de partições de unidade de classe  $C^k$  usadas na formulação podem reproduzir aproximações polinomiais de elevado grau.

Arndt (2009) propôs subespaços de enriquecimento para o MEFGE compostos por funções trigonométricas formulados a partir de soluções analíticas dos problemas dinâmicos unidimensionais. Verifica-se que a implementação de bases formadas a partir do conhecimento das soluções analíticas, aumentam a taxa de convergência e a precisão dos resultados na obtenção de frequências naturais de vibração de barras, treliças, vigas de Euler-Bernoulli e pórticos.

Conforme Babuška e Banerjee (2012), o MEFGE tem como característica a geração de matriz de massa e rigidez com número de condição elevado. Para contornar esta situação, foi desenvolvido o Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE).

Agarwal, Chakraborty e Singh (2015) apresentaram uma aplicação do MEFGE em placas compostas de dois materiais e sob carregamentos dinâmicos. O método foi aplicado com sucesso na modelagem das descontinuidades presentes no domínio. Foram investigados os comportamentos das placas sob carregamentos do tipo rampa, senoidais e descontínuos, sendo que o método de Newmark foi aplicado para integração no tempo. Os resultados mostraram que as deformações são descontínuas na interface entre os dois materiais, mesmo que as tensões nessa região sejam contínuas. Devido às precisões obtidas, o uso do MEFGE mostra-se promissor na análise de peças compostas sob carregamentos dinâmicos.

Weinhardt (2016) apresentou propostas de técnicas para diminuir a sensibilidade numérica do MEFGE causada pelo enriquecimento do espaço de aproximação para análise dinâmica e analisou a influência de diferentes partições da unidade na precisão das frequências naturais. No tocante à estabilização numérica, a validade das propostas foi verificada em problemas dinâmicos de peças unidimensionais e bidimensionais. A primeira proposta foi baseada em uma modificação do MEFGE, onde foram incorporadas as funções enriquecedoras trigonométricas propostas por Arndt (2009). A análise dos resultados obtidos pelo MEFGE modificado evidenciou que a estabilidade numérica foi melhorada, porém com perda de precisão nas aproximações das frequências finais do espectro. Já a segunda proposta apresentada pelo autor, foi formulada com enfoque na variação do parâmetro  $\beta_j$  das funções de enriquecimento trigonométricas, sendo que inicialmente as definições do  $\beta_j$  foram feitas heurísticamente. Os resultados obtidos mostraram grande precisão em 90 % no espectro de frequências e também melhorias expressivas na estabilidade do MEFGE, evidenciado pela redução significativa do número de condição das matrizes de massa e rigidez.

Petroli (2016) realizou diversas análises para investigação do condicionamento e sensibilidade das matrizes de massa em problemas de vibrações livres de estruturas reticuladas analisadas pela formulação do MEFGE proposta por Arndt (2009). Este estudo apresenta uma correlação direta entre a potência da ordem do número de condição da matriz de massa com

a quantidade de dígitos significativos que são necessários para que a matriz de massa seja numericamente definida positiva. Com relação ao número de condição das matrizes do sistema matemático formado no MEF, a medida em que se incorporam novas funções trigonométricas junto ao espaço de enriquecimento, ocorre o aumento do número de condição da matriz de massa de forma exponencial (SHANG; MACHADO; ABDALLA FILHO, 2019). O mau condicionamento pode ser oriundo da dependência linear entre as funções de enriquecimento e o espaço de aproximação do MEF, ou ainda, entre as próprias funções de enriquecimento. Existem muitas técnicas para a redução do número de condição que podem ser aplicadas nos diferentes estágios de construção do método, uma delas consiste na alteração da matriz de rigidez, de modo que os erros causados por essa alteração são reduzidos por um processo iterativo. Outra técnica consiste na implementação de pré-condicionadores aplicados ao problema na fase de solução do sistema. Isso pode se dar através de diferentes técnicas de solução do sistema, tais como, método de decomposição de Cholesky, multigrid ou por escalonamento combinado com a eliminação de alguns graus de liberdade (AGATHOS; BORDAS; CHATZI, 2019).

O Método do Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFGE) (BABUŠKA; BANERJEE, 2012) foi desenvolvido com o objetivo de contornar os problemas com alto número de condição, removendo a dependência linear entre o espaço do MEF e o espaço enriquecido através da modificação das funções de enriquecimento. Na sequência o MEFGE foi estendido com a inclusão de polinômios de alta ordem como funções de enriquecimento e aplicado em problemas de mecânica da fratura e em problemas de interface (ZHANG; BANERJEE; BABUŠKA, 2014).

Em Piedade Neto (2016) é avaliado o MEFG dentro de análise dinâmica não linear de estruturas. O uso de partições da unidade polinomiais podem gerar dependência linear, afetando a estabilidade numérica do método, sendo que este efeito é controlado pelo cálculo do número de condição das matrizes do sistemas de equações, porém montagem de matrizes consistentes permanecem estáveis até o segundo nível de enriquecimento.

Debella (2019) estudou o comportamento do MEFG em análises transientes de estruturas reticuladas, com verificações específicas em vigas de Euler-Bernoulli. Neste contexto foi testado o emprego do MEFG juntamente com a técnica de Superposição Modal, levando-se em conta apenas os modos de vibração mais precisos e de maior peso na matriz modal. Nos resultados obtidos anteriormente verificou-se que o MEFG possui precisão boa em relação a 60 % das frequências naturais, bem como dos modos de vibração. Assim, foi proposto um fator de influência para escolha dos modos mais preponderantes a serem mantidos na matriz modal, responsável pelo desacoplamento do sistema de equações via Método da Superposição Modal. Os resultados de deslocamento, velocidade e aceleração apresentaram precisões melhores com a condensação da matriz modal, quando comparada com a matriz modal completa.

Malacarne (2018) propôs o uso de estimativas de erros *a priori* para diminuir o custo computacional do MEFG na análise dinâmica de estruturas reticuladas. No estudo foi aplicado o indicador de erro de Friberg, o qual pode ser utilizado para encontrar qual o elemento da malha deve ser enriquecido a fim de melhorar a precisão da solução aproximada de uma determinada frequência alvo sem ter que enriquecer todos os elementos da malha. Primeiramente obtém-se uma aproximação inicial via MEF, depois acrescentam-se os graus de liberdade de campo gerados pelos níveis de enriquecimento do MEFG, assim o estimador de erros *a priori* é usado como um indicador de erro relativo para uma determinado autovalor, de modo que quanto maior for o índice de erro obtido, maior será a variação na aproximação do autovalor em questão. Segundo o autor, o uso desta proposta possibilita a redução do tamanho das matrizes globais do MEFG, uma vez que o indicador mostrará quais são os elementos, ou regiões, da malha que proporcionam maiores taxas de convergência quando enriquecidos. Ficou demonstrado

que o MEFG combinado com o estimador de erro de Friberg, consegue prever quais serão os elementos mais relevantes para enriquecimento, a fim de se obter a melhor aproximação de uma frequência alvo. Essa técnica permite a geração de matrizes menores do que aquelas que seriam geradas se fossem aplicados o enriquecimento hierárquico em todos os elementos da malha, por consequência reduz o número de condição dessas matrizes. Os testes foram aplicados em uma série de modelos, verificando-se que a proposta é muito promissora no campo de refinamentos seletivos.

Em Freisleben (2019) foi aplicado o MEFG em problemas de análise dinâmica de vigas de Timoshenko levando em consideração diferentes conjuntos de funções enriquecedoras, tais como as funções trigonométricas, propostas por Arndt (2009), e as funções exponenciais, propostas por Hsu (2016). Nos espectros de frequência ficou constatado que em vigas com alta relação altura/comprimento, a base de enriquecimento para vigas de Euler-Bernoulli proposta por Arndt (2009) levou a resultados de frequências naturais com as melhores precisões. Já nas vigas com baixa relação altura/comprimento, o espaço de enriquecimento de barras proposto por Arndt (2009) foi o que forneceu os melhores resultados, quando comparados com as bases enriquecedoras de Hsu (2016).

Debella et al. (2019) apresentaram uma formulação para o MEFG adaptativo em problemas de análise dinâmica transiente de barras e treliças. Os resultados obtidos validaram a precisão do método, em cuja formulação o uso de poucos modos na matriz modal promove a redução do custo computacional.

Conforme Shang et al. (2019), o emprego de funções trigonométricas nos elementos quadriláteros necessita do uso de subintervalos de integração nos elementos de classe  $C^0$ , para que atinja a precisão adequada na integração numérica e consequentemente nas matrizes de massa e rigidez.

Corrêa (2019) implementou o MEFG no estudo dinâmico de arcos, sendo propostas alternativas para aplicações de funções partição da unidade e de enriquecimento em arcos finos e espessos. Para o desenvolvimento dos elementos de arcos finos e espessos foram utilizadas como funções enriquecedoras aquelas propostas por Leung et al. (2004) e Arndt (2009), cujas análises foram comparadas com o MEFH e soluções analíticas existentes. No contexto da aplicabilidade do MEFG em arcos também foram apresentados os modos de vibração, visto que não são comumente mostrados na literatura sobre o tema. Os resultados obtidos levaram a conclusão de que os elementos de arcos propostos são eficazes em análises de vibrações livres. Ficou evidenciado que o MEFG tem alto número de condicionamento nas suas matrizes, a medida em que o nível de enriquecimento do método é aumentado, de modo que não é recomendado enriquecer os elementos com mais do que 5 ou 6 níveis. Nos elementos de arcos finos foi evidenciado que o uso de partições da unidade cúbicas não trouxe melhorias expressivas em relação aos resultados com partições da unidade lineares.

Cittadin (2020) realizou estudos com o indicador de erro de Friberg em peças submetidas ao estado plano de tensões e deformações. O estudo foi voltado para a verificação da eficiência da proposta de Malacarne (2018) aplicada agora para as análises bidimensionais, bem como a aplicação de enriquecimentos seletivos juntamente com técnicas de redução de matrizes modais nos problemas transientes bidimensionais. A técnica aplicada gerou as chamadas funções de bordas e bolhas, além das funções nodais originais. As funções de bordas são não nulas em uma das faces dos elementos mestres. As funções chamadas de bolhas são nulas em todas as bordas do elemento mestre, pois elas provêm do produto entre as funções de enriquecimento que são nulas nos nós do elemento de barra. A formulação do MEFG utilizada no contexto deste estudo foi aquela proposta por Torii (2012), na qual primeiramente se estrutura o MEFG em elementos unidimensionais para que depois sejam multiplicadas as bases horizontais e

verticais, que formarão as bases de funções bidimensionais. Os resultados obtidos levaram a conclusão de que em problemas de vibração livre o uso de enriquecimento seletivo no MEFGE pode atingir 85 % da precisão dos resultados que se obtém com o MEFGE padrão, enriquecendo seletivamente a malha de forma a obter apenas 50 % dos graus de liberdade do MEFGE padrão (malha inteiramente enriquecida).

Corrêa et al. (2021) investigaram o comportamento do MEFGE em vibrações livres de arcos, comparando os resultados obtidos por este método com os resultados do MEF e do Método  $p$ -Fourier. Nas suas análises ficou constatado que o MEFGE é superior aos outros métodos analisados, uma vez que converge mais rápido para a solução de referência, além de que isto é possível com uma malha com poucos graus de liberdade.

Em Cittadin et al. (2022) foi apresentado um processo de enriquecimento seletivo do MEFGE usado em análise dinâmica de estado plano baseado no indicador de erro de Frieberg. Os resultados mostraram que com o enriquecimento seletivo é possível se obter uma precisão de 99 % da obtida pelo MEFGE com enriquecimento de todos os elementos com 80 % do número total de graus de liberdade.

Silva et al. (2022) aplicaram partições da unidade do tipo flat-top no MEFGE como alternativa de estabilização numérica causada pelo enriquecimento trigonométrico do espaço de aproximação em problemas relacionados a análise modal de barras e membranas.

Cabe ressaltar que nos estudos anteriormente citados a maioria considerou somente a aplicação do MEFGE com elementos quadriláteros, sendo que o uso de elementos triangulares na aplicação do MEFGE em análise dinâmica possui referências escassas.

### 3 ESTADO PLANO E EQUAÇÃO GOVERNANTE

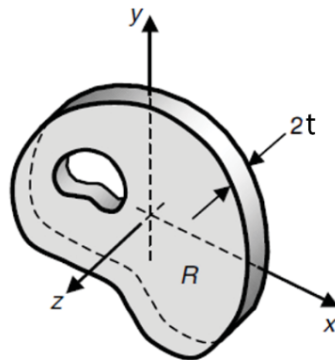
As estruturas reais são formadas por elementos contínuos tridimensionais com infinitos graus de liberdade. Mas, para fins de análise física e matemática os elementos estruturais são simplificados em modelos com graus de liberdade de quantidade finita, cujas formulações possam reproduzir o mais precisamente possível as características dinâmicas das estruturas reais (WITTRICK; WILLIAMS, 1971).

Existem certas situações em que os problemas tridimensionais são tratados bidimensionalmente através das teorias de Estado Plano de Tensões e Deformações. Na abordagem através do Estado Plano de Tensões (EPT) é assumido que as tensões perpendiculares ao plano de ação das forças externas são nulas, o que ocorre comumente em estruturas planas, conforme mostrado na Figura 3.1a, com carregamento atuante no plano médio e cujas faces são livres de restrições aos deslocamentos.

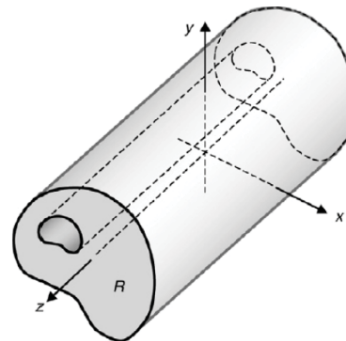
Em uma abordagem através do Estado Plano de Deformações (EPD), é assumido que as deformações são nulas nas direções perpendiculares ao plano de ação das forças externas, ou quando as faces opostas estão restritas ao deslocamento. Este fenômeno é comum de acontecer em estruturas com área de seção transversal muito pequena em relação ao comprimento, conforme mostrado na Figura 3.1b (SADD, 2009; LIU; BANERJEE, 2017).

Figura 3.1: SÓLIDOS EM ESTADO PLANO DE TENSÕES E DEFORMAÇÕES

(a) Estado Plano de Tensão



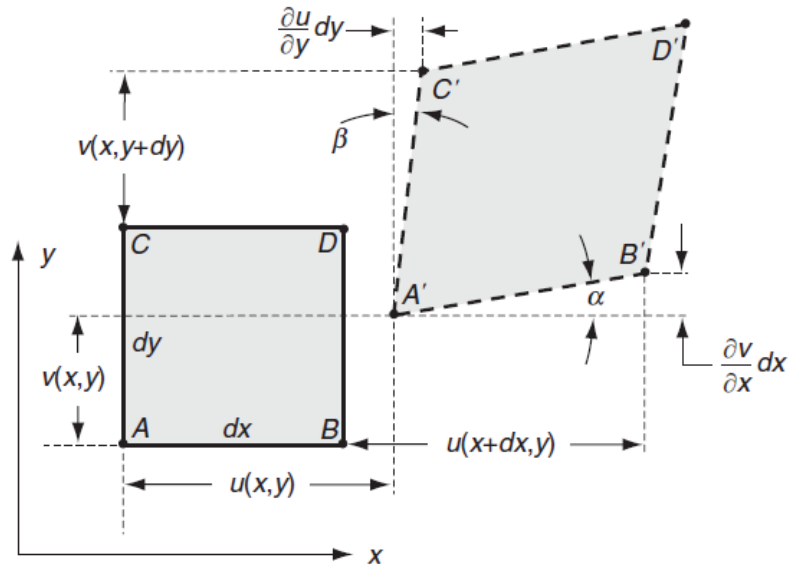
(b) Estado Plano de Deformação



FONTE: Sadd (2009)

Seja a Figura 3.2, onde é apresentado um meio contínuo infinitesimal de um sólido em estado plano, com largura e altura infinitesimal e com configuração inicial  $ABCD$ . A partir da Figura 3.2 verifica-se que, após a deformação, a área infinitesimal toma a forma delimitada pelos pontos  $A'B'C'D'$ . Em relação ao vértice  $A$ , por exemplo, a translação horizontal é  $u(x, y)$  e na vertical  $v(x, y)$ . Em relação ao ponto  $B$  as translações equivalem a  $u(x + dx, y)$  e  $v(x + dx, y)$  e no contexto de deslocamentos pequenos, o termo  $u(x + dx, y)$  pode ser aproximado para  $u(x, y) + \frac{\partial u}{\partial x} dx$ , o mesmo conceito pode ser estendido para a direção vertical.

Figura 3.2: PLANO INFINITESIMAL DE DEFORMAÇÃO



FONTE: Sadd (2009)

A partir da Figura 3.2 é possível definir as deformações  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  e  $\gamma_{xy}$ , sendo que a deformação normal  $\varepsilon_x$  obedece a relação:

$$\varepsilon_x = \frac{A'B' - AB}{AB} \quad (3.1)$$

onde  $AB = dx$  e  $A'B'$  equivale a aproximadamente  $(1 + \frac{\partial u}{\partial x})dx$ , portanto fica possível definir que a deformação normal é a taxa de variação do deslocamento em relação ao eixo horizontal do sistema cartesiano, ou seja:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.2)$$

Similarmente a deformação normal na direção  $y$  é dada por:

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.3)$$

Com relação à deformação  $\gamma_{xy}$ , deduz-se geometricamente que  $\gamma_{xy} = \alpha + \beta$ , porém no contexto de deformações pequenas é possível atribuir que  $\alpha$  se aproxima de  $tg\alpha$  e  $\beta$  de  $tg\beta$ , tal que

$$\gamma_{xy} = \frac{\frac{\partial v}{\partial x} dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx} + \frac{\frac{\partial u}{\partial y} dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy} \quad (3.4)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.5)$$

Alocando os termos derivadas e deslocamentos em forma matricial as Equações (3.2), (3.3) e (3.5) podem ser escritas como:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Ou seja:

$$\varepsilon = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (3.7)$$

Na Figura 3.1a o domínio geométrico do EPT corresponde ao plano médio entre as duas faces paralelas e distanciadas de  $t$ , de modo que as ações atuantes nesse plano médio não causam tensões na direção  $z$ . Com base na lei de Hooke, é possível relacionar as tensões proporcionalmente as deformações, de modo que

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon \quad (3.8)$$

sendo que o vetor  $\sigma$  armazena as tensões normais e tangenciais, o vetor  $\varepsilon$  contém as deformações normais e tangenciais e  $\mathbf{D}$  é a matriz constitutiva que leva em conta as propriedades mecânicas dos materiais.

O presente trabalho considera os materiais elásticos lineares e isotrópicos, uma vez que possuem a mesmas propriedades mecânicas em todas as direções do meio contínuo. No caso do EPT, por exemplo, a matriz  $\mathbf{D}$  é definida como:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \nu \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ \nu \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \frac{E}{1-\nu^2} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade e  $\nu$  o coeficiente de Poisson. A partir da Equação (3.8) tem-se que:

$$\sigma_x = \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.10)$$

$$\sigma_y = \left( \frac{\nu E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \left( \frac{E}{1-\nu^2} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.11)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E(1-\nu)}{2(1+\nu^2)} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.12)$$

que são agrupados no vetor de tensões:

$$\sigma = \left( \sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy} \right)^T \quad (3.13)$$

Referente ao estado plano de deformações, mostrado na Figura 3.1, a matriz constitutiva é definida como:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} & \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

com tensões normais e tangenciais obtidas pelas expressões:

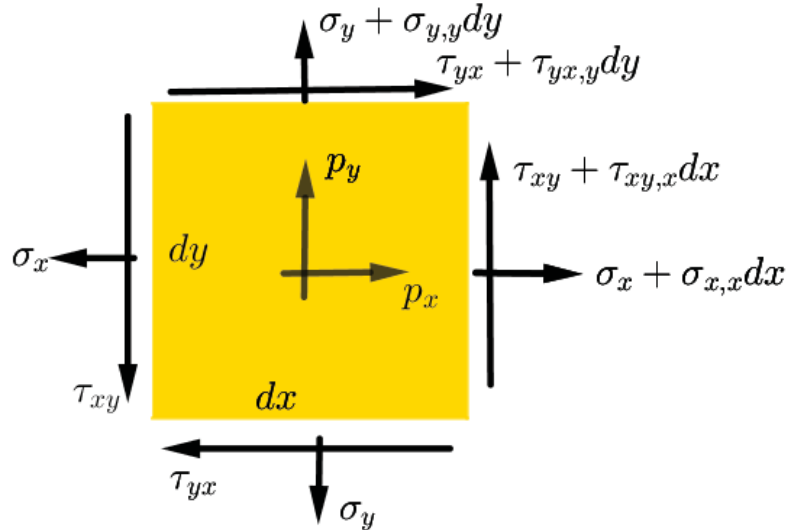
$$\sigma_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (3.15)$$

$$\sigma_y = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.16)$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (3.17)$$

Com base em Cittadin (2020) a montagem da equação diferencial do campo de deslocamentos de problemas em estado plano é construído a partir do diagrama de corpo livre mostrado na Figura 3.3.

Figura 3.3: DIAGRAMA DE CORPO LIVRE



Aplicando o equilíbrio de forças e considerando os efeitos de aceleração, velocidade e amortecimento chegam-se nas equações:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c \frac{\partial u}{\partial t} - p_x \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + c \frac{\partial v}{\partial t} - p_y \end{cases} \quad (3.18)$$

Nas equações (3.18) o termo  $\rho$  é a densidade,  $c$  representa o coeficiente de amortecimento,  $p_x$  e  $p_y$  são as forças de corpo. A equação (3.18) também pode ser escrita matricialmente como:

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - c \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (3.19)$$

Onde  $\mathbf{L}^T$  é o vetor transposto dos operadores diferenciais,  $\mathbf{p}$  é vetor de forças de corpo,  $\rho$  a densidade,  $\ddot{\mathbf{u}}$  o vetor de aceleração,  $c$  é o coeficiente de amortecimento,  $\dot{\mathbf{u}}$  o vetor de velocidades e  $\mathbf{0}$  é um vetor nulo.

Levando as Equações (3.10), (3.11), (3.12) em (3.18) obtém-se as equações que regem os problemas elastodinâmicos em EPT:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial u}{\partial t} + p_x = 0 \\ \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c \frac{\partial v}{\partial t} + p_y = 0 \end{array} \right\} \quad (3.20)$$

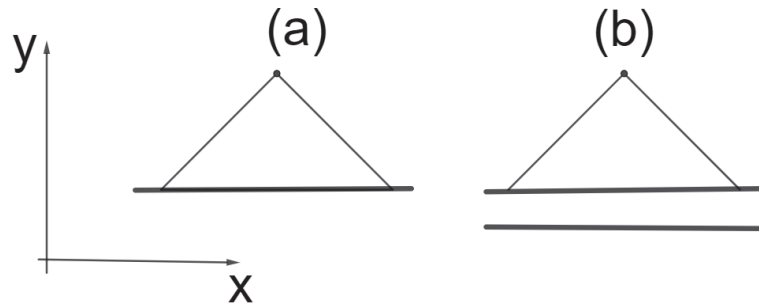
Para o caso de EPD o sistema de equações fica:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial u}{\partial t} + p_x = 0 \\ \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{E}{2(1+\nu)} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c \frac{\partial v}{\partial t} + p_y = 0 \end{array} \right\} \quad (3.21)$$

As condições de contorno possíveis são:  $\mathbf{n}\sigma = \mathbf{q}$  em  $\Gamma_t$  e condições de deslocamentos prescritos  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ , além das condições de deslocamento e velocidade no instante inicial  $t_0$ .

A Tabela 3.1 elenca alguns dos tipos de vinculações possíveis em modelos de chapas, sendo que as condições de contorno possíveis são do tipo Livre (L), fixa (F) e livre rotulada dos tipos 1 (F1) e 2 (F2), conforme a Figura 3.4:

Figura 3.4: TIPOS DE APOIO EM BORDAS DE CHAPAS

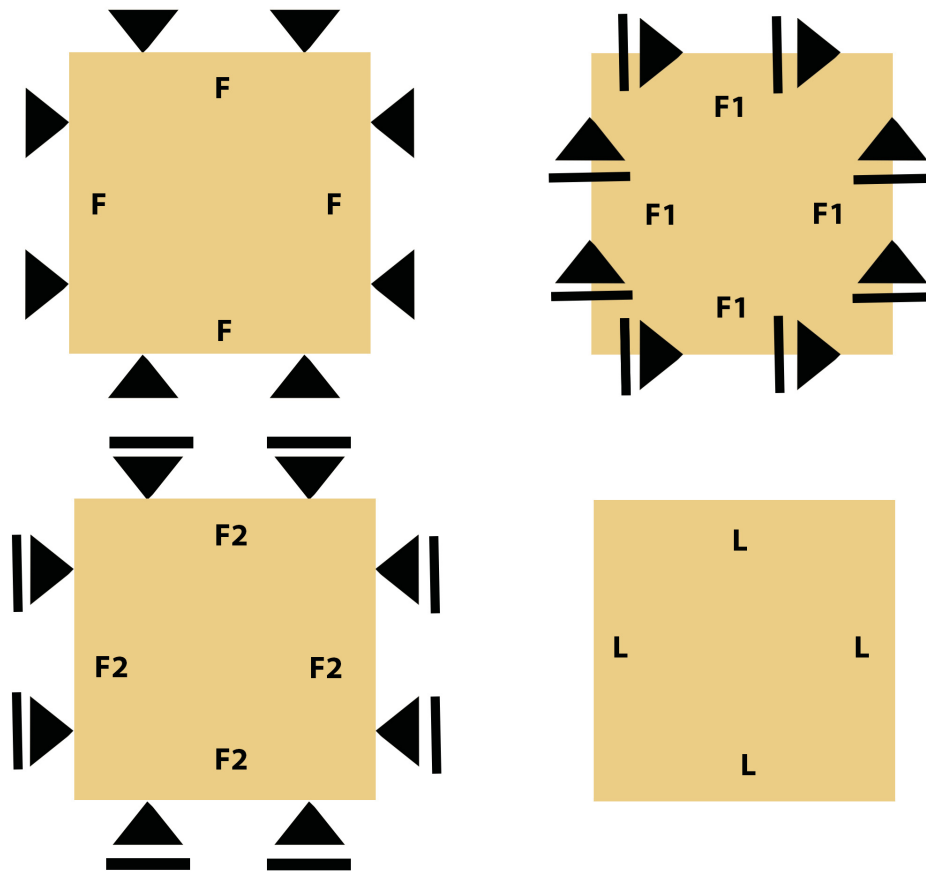


Na Figura (3.4a), os movimentos nas direções  $x$  e  $y$  são travados, por isso este apoio é denominado de tipo fixo, enquanto que na Figura 3.4b, por exemplo, o deslocamento é restrito em  $y$  e livre em  $x$ , sendo então denominado de apoio tipo Livre Rotulado. Sobre este tipo de apoio existem duas variações possíveis, conforme mostrado na Figura 3.5. No contexto deste estudo serão consideradas as condições de contorno apresentadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1: TIPOS DE CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA SÓLIDOS EM EPT

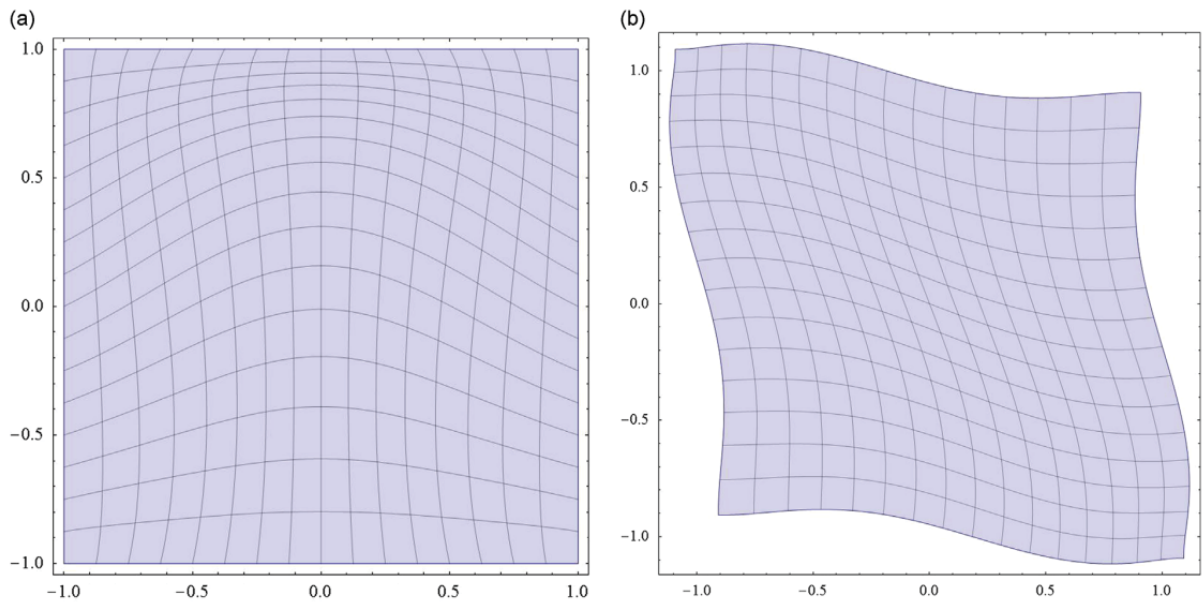
C. Contorno	$x = 0/a$	$y = 0/b$
Fixo (F)	$u = v = 0$	$u = v = 0$
Livre (L)	$\sigma_x = \tau_{xy} = 0$	$\sigma_y = \tau_{xy} = 0$
F1	$v = 0, \sigma_x = 0$	$u = 0, \sigma_y = 0$
F2	$u = 0, \tau_{xy} = 0$	$v = 0, \tau_{xy} = 0$

Figura 3.5: CONDIÇÕES DE CONTORNO ESSENCIAIS



Conforme Liu et al (2009), tanto na Tabela 3.1 quanto na Figura 3.5, as letras  $a$  e  $b$  denotam a largura e altura de uma chapa de domínio  $\Omega$ , respectivamente. O apoio tipo F1 implica em deslocamento perpendicular à borda da chapa livre, e o deslocamento na direção paralela a borda da chapa é restrito, sendo a rotação permitida. O apoio tipo F2 implica o contrário, ou seja, o deslocamento na direção paralela à borda da chapa é livre, enquanto o deslocamento perpendicular à borda da chapa é restrito, sendo a rotação em ambos os tipos permitida. A Figura 3.6 a seguir, apresenta dois exemplos de modos de vibração de uma chapa quadrada.

Figura 3.6: MODOS DE VIBRAÇÃO DE UMA CHAPA



FONTE: PAPKOV (2016).

Na Figura 3.6a os apoios da chapa são todos fixos do tipo (F), enquanto que na Figura 3.6b, os apoios são do tipo livre. De acordo com estas quatro condições de contorno (F1, F2, L e F) existem 256 combinações possíveis em chapas retangulares. As frequências naturais são altamente influenciadas pelos tipos de condições de contorno definidos na análise (NARITA; INNAMI, 2021).

#### 4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Conforme Babuška e Zhang (1998), o Método dos Elementos Finitos aplicado na solução de problemas lineares consiste em resolver pela forma fraca o seguinte problema: encontre

$$u \in H \mid B(u, v) = F(v) \quad \forall v \in Y \quad (4.1)$$

onde  $H, Y$  são espaços de Hilbert com normas  $\| \cdot \|_H, \| \cdot \|_Y$ . O termo  $B(u, v)$  é uma transformação bilinear que mapeia o produto cartesiano do espaço de funções de forma  $H$  com o espaço de funções peso  $Y$  em um escalar  $\mathbb{R}$ :

$$B : H \times Y \rightarrow \mathbb{R} \quad (4.2)$$

Uma aproximação  $\tilde{u}$  para o problema da equação (4.1) é então formulada de acordo com a seguinte proposição: encontre

$$\tilde{u} \in H_n \mid B(\tilde{u}, v) = F(v) \quad \forall v \in Y_n \quad (4.3)$$

sendo  $H_n$  um subespaço de Hilbert e  $Y_n$  um subespaço de funções peso. A convergência para a solução do problema é garantida de acordo com as condições de aproximabilidade e estabilidade, definidas respectivamente a seguir:

- A aproximação para uma solução  $u$  pode ser feita pelo subespaço  $H_n$ , desde que  $\inf\{\|u - v\|_{H_n} \mid v \in H_n\} \rightarrow 0$  para  $n \rightarrow \infty$ ;
- A bilinearidade  $B(u, v)$  deve satisfazer as condições de limite inferior e superior, ou seja, satisfazer as condições de contorno para que seja garantida a estabilidade da aproximação.

No caso de problemas de valores de contorno de segunda ordem, o espaço de funções admissíveis consiste em funções contidas no espaço de Sobolev  $H_1$  que satisfaçam as condições de contorno iniciais (BABUŠKA; ZHANG, 1998).

A aplicação do método de Galerkin distribui o erro da aproximação ao longo do domínio de análise, logo, para o campo de deslocamentos  $u$ , a aproximação  $\tilde{u}$  pode ser aplicada de acordo com a expressão:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^N u_i N_i \quad (4.4)$$

A equação (4.4) é uma combinação linear das funções  $N_i$ , cujas variáveis independentes são os vetores posição  $(x, y)$  alocados em um sistema cartesiano de coordenadas. No método Galerkin as funções peso são iguais às funções de forma e são adotadas de acordo com a ordem da equação diferencial. No caso dos problemas de análise dinâmica a EDP é de segunda ordem, logo as funções de forma precisam ser contínuas em relação ao domínio de estudo (SORIANO, 2009; BATHE, 1982; REDDY, 1993; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

#### 4.1 MÉTODO DE GALERKIN EM PROBLEMAS ELASTODINÂMICOS 2D

Em problemas de EP, um domínio geométrico  $\Omega$  pode ser discretizado em uma malha de elementos finitos, através da qual é gerado um campo de deslocamentos que são considerados como variável primária. Aplicando-se o Método de Galerkin na equação (3.19) obtém-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T (\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} - \rho \ddot{\mathbf{u}} - c \dot{\mathbf{u}}) d\Omega = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

onde a matriz  $\mathbf{N}$  contém as funções peso que coincidem com as funções de interpolação do campo dos deslocamentos arbitrados. Posteriormente, aplicando o teorema de Green na equação (4.5) e levando-se em conta a relação:  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\sigma}_0$  e as condições de contorno:  $\mathbf{n}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{q}$ , com  $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}$ , chega-se em:

$$\int_{\Omega} [(\mathbf{LN})^T (\mathbf{D}\mathbf{L}\mathbf{u} + \boldsymbol{\sigma}_0) + \mathbf{N}^T (\mathbf{p} + \rho \ddot{\mathbf{u}} + c \dot{\mathbf{u}})] d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^T \mathbf{q} d\Gamma \quad (4.6)$$

Uma vez que o campo de deslocamentos real pode ser aproximado por  $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}^e$  (formato matricial da equação (4.4)), o campo de velocidades por  $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}^e$ , o de acelerações por ( $\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}^e$ ) e ainda juntamente com a relação  $\mathbf{B} = \mathbf{LN}$ , obtém-se a partir da equação (4.6) as igualdades a nível de elemento:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (4.7)$$

$$\mathbf{M}^e = \int_{\Omega_e} \rho \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (4.8)$$

$$\mathbf{C}^e = \int_{\Omega_e} c \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\Omega \quad (4.9)$$

$$\mathbf{f}_q^e = \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}^T \mathbf{q} d\Gamma \quad (4.10)$$

$$\mathbf{f}_p^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \mathbf{p} d\Omega \quad (4.11)$$

$$\mathbf{f}_{\sigma_0}^e = \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d\Omega \quad (4.12)$$

Nas equações (4.7) à (4.12) estão definidas a matriz de rigidez, as matrizes de massa, de amortecimento e os vetores de forças de contorno, forças de corpo e forças devidas às tensões iniciais, respectivamente. Logo, com as expressões anteriores, e após o agrupamento das matrizes e vetores elementares em matrizes e vetores globais, é possível definir o sistema de equações do equilíbrio dinâmico dado por

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t) \quad (4.13)$$

A equação (4.13) relaciona o vetor  $\mathbf{f}(t)$ , que é composto pela soma das forças devido as tensões iniciais ( $\mathbf{f}_{\sigma_0}$ ), forças de campo gravitacional ( $\mathbf{f}_p$ ) e forças que incidem sobre o contorno ( $\mathbf{f}_q$ ), com as matrizes globais de massa  $\mathbf{M}$ , rigidez  $\mathbf{K}$  e amortecimento  $\mathbf{C}$ , geradas pela formulação do MEF. A equação elastodinâmica que rege o fenômeno de vibração livre não amortecida torna-se um caso particular da equação (4.13), representada matricialmente como:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

## 4.2 VIBRAÇÃO LIVRE

Tendo em vista que neste trabalho o estudo é focado no comportamento do MEF em problemas de vibração livre não amortecida, a expressão a partir do qual o MEF é implementado é proveniente da equação (4.14), cuja solução é assumida como uma solução harmônica da seguinte forma:

$$\mathbf{u} = \psi_i \text{sen}(\omega_i t - \theta_i) \quad (4.15)$$

onde  $\omega_i$  representa a frequência natural do  $i$ -ésimo modo de vibração,  $\theta_i$  é a fase harmônica do movimento, o vetor  $\psi_i$  contém as amplitudes do modo natural de vibração nas direções  $x$  e  $y$ . Levando a equação (4.15) na equação (4.14), chega-se ao problema generalizado de autovalores e autovetores dado por:

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M})\psi_i = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

A equação (4.16) é composta pelas matrizes de rigidez  $\mathbf{K}$ , massa  $\mathbf{M}$ , vetor de modo de vibração  $\psi_i$  e pelo escalar  $\omega_i$ . Já o tamanho das matrizes e do vetor modal variam de acordo com o número de graus de liberdade adotados na aproximação numérica. Existem várias técnicas que podem ser aplicadas para a solução da equação (4.16), tais como método de Jacobi, decomposição **LR**, **QR** e **QL** e o método de Lanczos.

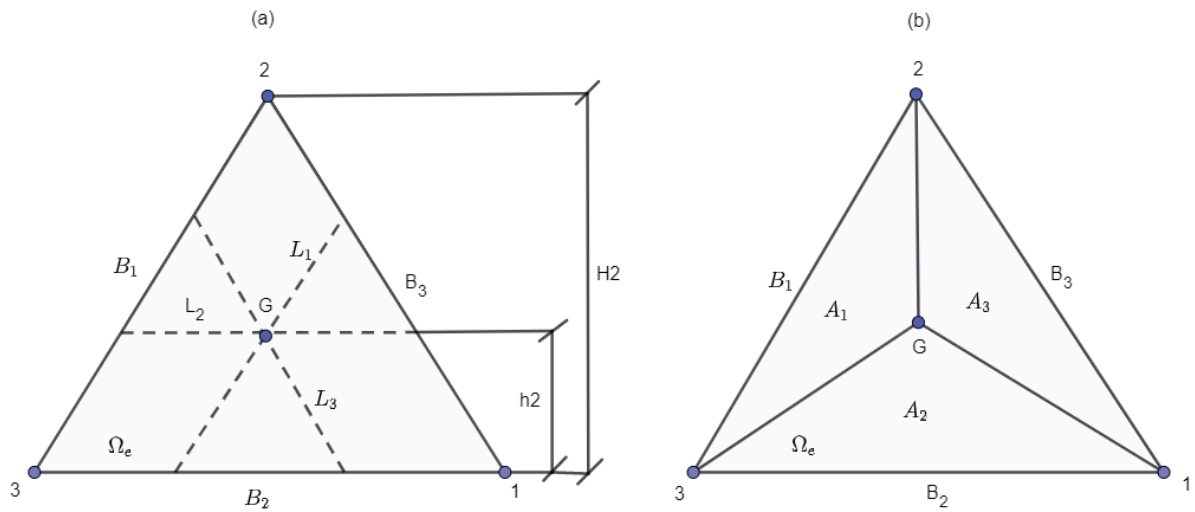
## 4.3 ELEMENTO FINITO TRIANGULAR

Nas análises bidimensionais é possível o uso de elementos finitos com diversas geometrias, sendo que os mais usuais são os elementos triangulares e quadriláteros. Para cada elemento adotado é necessária a escolha correta das funções de forma, a fim de que o campo de deslocamentos seja completo e conforme, garantindo o atendimento do critério de convergência na medida em que as malhas são refinadas. Dentre a gama de elementos finitos possíveis, os triangulares são os mais simples de serem formulados para os problemas em duas dimensões (SORIANO, 2009; BATHE, 1982; REDDY, 1993; ZIENKIEWICZ; TAYLOR, 2000).

### 4.3.1 Elemento Triangular Linear

Antes da definição da base de funções de forma do MEF nos elementos triangulares, é preciso compreender o conceito de coordenadas de área, apresentado nas Figuras 4.1a e 4.1b.

Figura 4.1: COORDENADAS DE ÁREA



Na Figura 4.1a, os termos  $L_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , são as coordenadas que podem variar de 0 a 1, sendo que estas coordenadas são paralelas as bordas ( $B_1, B_2, B_3$ ) de referência. Os termos  $h_2$  e  $H_2$ , por exemplo, representam as distâncias em relação a borda  $B_2$ . O  $G$  é um ponto interno no triângulo, que pode ser localizado através de  $L_1$ ,  $L_2$  e  $L_3$ . A Figura 4.1b mostra um triângulo dividido em três subáreas,  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , cuja soma entre si a área total do triângulo  $A_t$ . As coordenadas  $L_i$  podem ser relacionadas de acordo com as equações a seguir:

$$L_1 = \frac{h_1}{H_1} = \frac{A_1}{A_t} \quad (4.17)$$

$$L_2 = \frac{h_2}{H_2} = \frac{A_2}{A_t} \quad (4.18)$$

$$L_3 = \frac{h_3}{H_3} = \frac{A_3}{A_t} \quad (4.19)$$

sendo que:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (4.20)$$

Conforme Sylvester (1969) apenas duas dessas coordenadas podem ser independentes. Então as coordenadas de áreas podem ser escritas em função das variáveis,  $\xi$  e  $\eta$ , de tal maneira que:

$$L_1 = \xi \quad (4.21)$$

$$L_2 = \eta \quad (4.22)$$

Da equação (4.20) é obtida a terceira função de forma:

$$L_3 = 1 - \xi - \eta \quad (4.23)$$

Ficam então definidas as funções de forma lineares para um elemento triangular com três nós. Nomeando as funções de forma como  $N_i$ , para  $i = 1, 2, 3$  têm-se que:

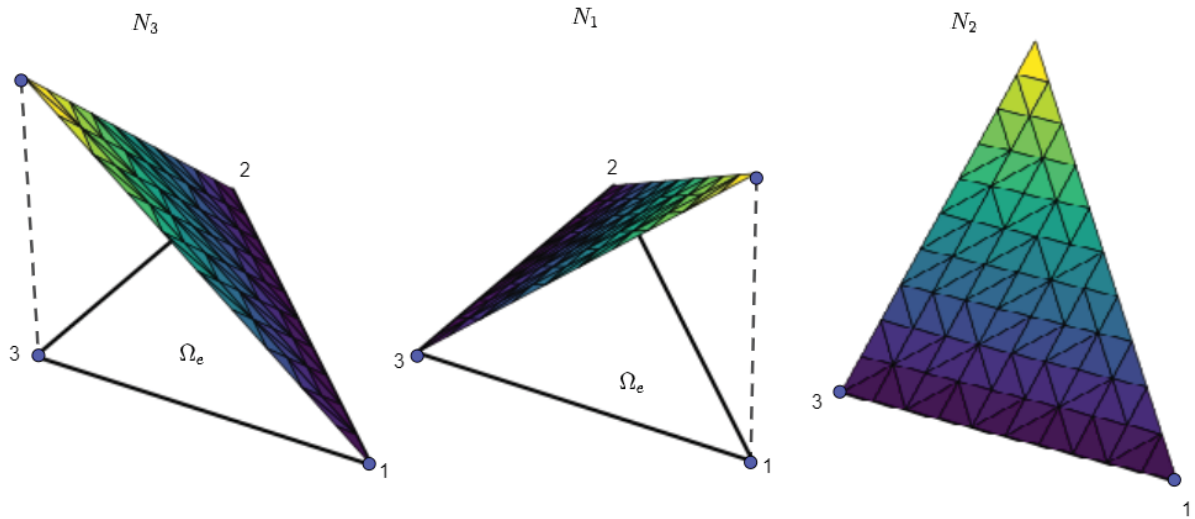
$$N_1 = \xi \quad (4.24)$$

$$N_2 = \eta \quad (4.25)$$

$$N_3 = 1 - \xi - \eta \quad (4.26)$$

Graficamente estas funções tem o comportamento no domínio elementar ( $\Omega_e$ ) de acordo com os gráficos representados na Figura 4.2.

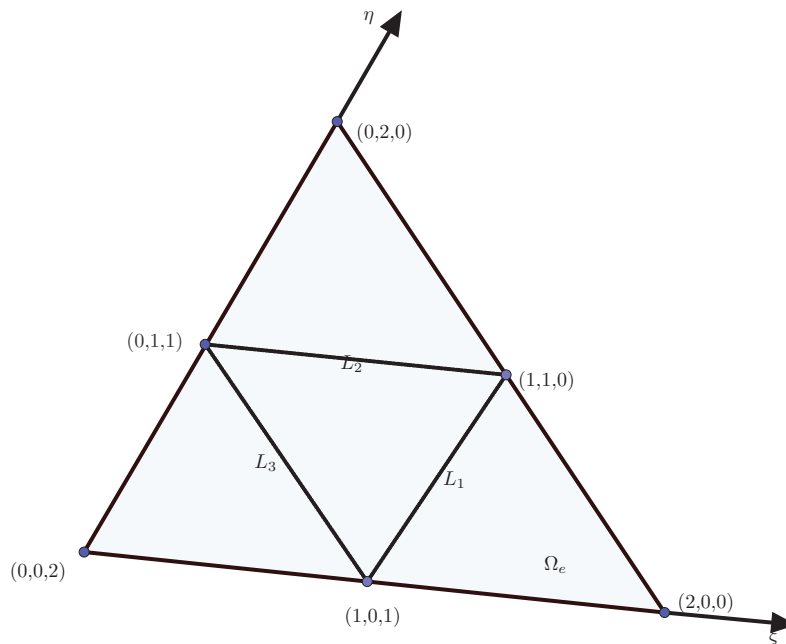
Figura 4.2: FUNÇÕES DE FORMA LINEARES DO MEF PARA ELEMENTO TRIANGULAR



#### 4.3.2 Elemento Triangular Quadrático

A precisão dos resultados obtidos pelo MEF pode ser aumentada através do refino- $p$ , levando-se em conta o aumento da ordem polinomial  $p$  do elemento mestre, e conseqüentemente o aumentando-se o número de nós do elemento. Seja então o elemento finito triangular mostrado na Figura 4.3.

Figura 4.3: ELEMENTO QUADRÁTICO



O elemento mostrado na Figura 4.3 pode ser chamado de "Lagrangiano", uma vez que as funções de forma atreladas a cada nó podem ser construídas pela multiplicação de uma série de funções de forma lineares. Em Silvester (1969), é mostrado que em um certo elemento triangular, uma função de forma para um nó  $i$  pode ser construída através do produto de três polinômios auxiliares, dados pela seguinte equação:

$$P_m(L_i) = \prod_{j=1}^m \left( \frac{NL_i - j + 1}{j} \right) \quad m \geq 1 \quad (4.27)$$

$$P_m(L_i) = 1 \quad m = 0 \quad (4.28)$$

Na equação (4.27),  $P_m$  é um polinômio auxiliar  $m$ , de ordem  $N$ , sobre a coordenada  $L_i$ , sendo que  $m$  assume os valores  $i, j$  ou  $k$ , tal que  $i + j + k = N$ . O polinômio  $P_m$  pode ser simplificado como:

$$P_m(L_i) = \frac{1}{m!} \prod_{j=0}^{m-1} (NL_i - j) \quad m \geq 1 \quad (4.29)$$

$$P_m(L_i) = 1 \quad m = 0 \quad (4.30)$$

A expressão que define a métrica para geração de funções em elementos de ordem polinomial superior é mostrada na seguinte equação:

$$N_{ijk}(L_1, L_2, L_3) = P_i(L_1)P_j(L_2)P_k(L_3) \quad (4.31)$$

Na equação (4.31), o  $N_{ijk}$  é uma função de forma relacionada ao nó de coordenada de área  $i, j, k$ , com  $i + j + k = N$ . Na Tabela 4.1 a seguir, é mostrada uma aplicação das equações (4.29) e (4.31).

Tabela 4.1: FUNÇÕES DE FORMA QUADRÁTICA

Número Nodal	$i$	$j$	$k$	$P_i$	$P_j$	$P_k$	$N_{ijk}$
(2, 0, 0)	2	0	0	$\frac{(2L_1)(2L_1-1)}{2}$	1	1	$L_1(2L_1 - 1)$
(0, 2, 0)	0	2	0	1	$\frac{(2L_1)(2L_1-1)}{2}$	1	$L_2(2L_2 - 1)$
(0, 0, 2)	0	0	2	1	1	$\frac{(2L_1)(2L_1-1)}{2}$	$L_3(2L_3 - 1)$
(1, 1, 0)	1	1	0	$2L_1$	$2L_2$	1	$4L_1L_2$
(1, 0, 1)	1	0	1	$2L_1$	1	$2L_1$	$4L_1L_3$
(0, 1, 1)	0	1	1	1	$2L_2$	$2L_3$	$4L_2L_3$

De acordo com a Tabela 4.1 as colunas "Número Nodal" aloca o endereço nodal em coordenadas de áreas triangulares, nas colunas  $P_i, P_j$  e  $P_k$  são aplicadas as equações (4.27), (4.28), (4.29) e (4.30), enquanto que na coluna  $N_{ijk}$  são obtidas as funções de forma conforme o uso da equação (4.31). A partir da Tabela 4.1, as funções de forma para um elemento quadrático são:

$$N_{2,0,0} = \xi(2\xi - 1) \quad (4.32)$$

$$N_{2,0,0} = \eta(2\eta - 1) \quad (4.33)$$

$$N_{2,0,0} = (\xi - \eta - 1)(2(\xi - \eta - 1) - 1) \quad (4.34)$$

$$N_{1,1,0} = 4(1 - \xi - \eta)\xi \quad (4.35)$$

$$N_{1,0,1} = 4(1 - \xi - \eta)(1 - \xi - \eta) \quad (4.36)$$

$$N_{0,1,1} = 4\eta(1 - \xi - \eta) \quad (4.37)$$

## 5 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

No MEFG podem ser usadas funções especiais para o enriquecimento local, que refletem as características locais da solução, do domínio do problema ou mesmo do tipo de condição de contorno. Estas funções são inseridas dentro da aproximação através do método da partição da unidade. O enriquecimento propriamente construído, mesmo que com poucas funções, já pode conduzir a melhoramentos nas precisões dos resultados computacionais (STROUBOULIS; COPPS; BABUŠKA, 2001).

### 5.1 MÉTODO DA PARTIÇÃO DA UNIDADE

De acordo com Melenk e Babuska (1996), a criação do Método da Partição da Unidade (MPU) foi motivada pela necessidade de novas técnicas na solução de problemas, cujas aproximações pelo MEF não fossem precisas o suficiente, tais como, modelagens de materiais compósitos, microestruturas e determinação de respostas oscilatórias.

Conforme Melenk e Babuška (1996), a principal característica do MPU é que sua aplicação permite o uso do conhecimento prévio do comportamento da solução das equações a serem aproximadas. O MPU permite a construção de espaços de aproximação com regularidade desejada, de modo que funções testes usadas na formulação variacional de problemas de equações diferenciais de alta ordem são possíveis de serem implementadas de acordo com a característica do problema estudado.

As formulações matemáticas do MPU são dadas pelas expressões a seguir:

Seja um subconjunto aberto  $\Omega$  do espaço  $\mathbb{R}^2$ , e seja  $\{\Omega_i\}$  uma cobertura de  $\Omega$  que satisfaça pontualmente a condição de sobreposição:

$$\exists M \in \mathbb{N} \quad | : \forall x \in \Omega \quad \text{card}\{i \mid x \in \Omega_i\} \leq M \quad (5.1)$$

A equação (5.1) expressa que existe uma quantidade numérica natural  $M$ , tal que para todo  $x$  em  $\Omega$  existe uma quantidade finita de coberturas  $\Omega_i$  menor ou igual a  $M$ .

Por definição a partição da unidade é um conjunto de funções, cujas somas equivalem a unidade em qualquer ponto do domínio considerado. A construção da PU é feita pela discretização de  $\Omega$  em coberturas  $\Omega_i$  que satisfaçam a condição de sobreposição, logo um conjunto de funções  $\{\phi_i\}$  será uma PU sobre o suporte  $\{\Omega_i\}$  se satisfizer a condição:

$$\sum_i \phi_i = 1, \quad \text{sobre } \Omega; \quad (5.2)$$

Deste modo, as funções  $\phi_i$  formam uma PU subordinada a cobertura  $\{\Omega_i\}$ . Assim, dados os suportes  $\{\Omega_i\}$  como coberturas abertas de  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e uma partição  $\{\phi_i\}$  subordinada a  $\{\Omega_i\}$ , e dado um conjunto de funções  $V_i \in H^1(\Omega_i \cap \Omega)$ , isto é, um conjunto de funções contidas no espaço de Hilbert, associada a cada suporte  $\Omega_i$ , então um campo de aproximação feito pelo MPU, chamado de  $\tilde{u}_{MPU}$ , é construído como:

$$\tilde{u}_{MPU} = \sum_i \phi_i V_i \quad (5.3)$$

com

$$V_i = \sum_j v_j^i d_i^j, \quad v_j^i \in V_i \quad (5.4)$$

Da equação (5.4) os termos  $v_j^i$  e  $d_i^j$  são as funções de aproximação local e os graus de liberdade associados as mesmas, respectivamente.

Weinhardt (2016) cita que as partições da unidade podem ser obtidas a partir de diferentes grupos de funções, tais como, polinômios de Lagrange, Lobatto, racionais e funções trigonométricas.

## 5.2 IMPLEMENTAÇÃO GERAL DO MEFG

O MEFG é uma instância do MPU e permite uma estruturação efetiva na aproximação dos mais variados problemas. A aproximação de uma solução pelo MEFG pode ser descrita matematicamente como a seguir.

Seja uma função  $u$  definida em um domínio  $\Omega$ , cuja cobertura é formada por um conjunto de suportes  $R_i$ . Seja  $\tilde{u}_i^j$  uma aproximação local de  $u$  pertencente ao subespaço local  $\mathcal{S}_i(R_i) = \text{span}\{\gamma_{ij}\}_{j \in \mathfrak{I}(i)}$ , onde  $\mathfrak{I}(i)$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  representa o conjunto de índices referentes as funções de enriquecimento associadas a cada nó,  $\gamma_{ij}$  denota a  $i$ -ésima função de enriquecimento associada a um nó  $\mathbf{x}_j$  e  $N$  significa o número de nós contidos em  $\Omega$ . Em geral o MEFG propõe que cada subespaço  $\mathcal{S}_i(R_i)$  pode ser escolhido de tal maneira que a função  $\gamma_{ij} \in \mathcal{S}(R_i)$  possa se aproximar de  $u|_{R_i}$  sobre o suporte  $R_i$ , sem comprometer o requisito de conformidade.

A aproximação de um campo de deslocamentos via MEFG também consiste na soma das aproximações do campo nodal (campo MEF) com o campos enriquecido, de acordo com a expressão:

$$\tilde{u} = \tilde{u}^{MEF} + \tilde{u}^{ENR} \quad (5.5)$$

A partir da expressão (5.5) a aproximação do campo de deslocamentos  $\tilde{u}$  é estendido como:

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^N N_i u_i + \sum_{i=1}^N N_i \sum_{j=1}^{nl} (\gamma_{ij} a_{ij} + \phi_{ij} b_{ij}) \quad (5.6)$$

Matricialmente a equação (5.6) é representada por:

$$\tilde{u} = \Phi^T \mathbf{U} \quad (5.7)$$

sendo:

$$\mathbf{U}^T = [u_1 \quad \dots \quad u_N \quad a_{11} \quad \dots \quad a_{Nnl} \quad b_{11} \quad \dots \quad b_{Nnl}] \quad (5.8)$$

$$\Phi^T = [N_1 \quad \dots \quad N_N \quad N_1 \gamma_{11} \quad \dots \quad N_N \gamma_{Nnl} \quad N_1 \phi_{11} \quad \dots \quad N_N \phi_{Nnl}] \quad (5.9)$$

Na equação (5.6), o termo  $N_i$  representa a partição da unidade, que por sua vez está associada ao nó  $i$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , sendo  $n$  o número de nós do elemento. Nas equações (5.8) e (5.9) estão definidos os vetores de deslocamentos e de funções de aproximação, respectivamente. Os termos  $\gamma_{ij}$  e  $\phi_{ij}$  mostrados na Equação (5.6) representam as funções de enriquecimento para o  $j$ -ésimo nível de enriquecimento, relacionadas a um nó de índice  $i$  específico e os termos  $u_i$ ,  $a_{ij}$  e  $b_{ij}$  são escalares que representam os graus de liberdade nodais e de campo, respectivamente.

### 5.2.1 Enriquecimento De Um Elemento Triangular

A partição da unidade usualmente aplicada no MEEG é composta pelos polinômios de Lagrange. Nos elementos quadrilaterais as partições podem ser geradas a partir do produto entre os polinômios de Lagrange definidos em uma dimensão, conforme a expressão a seguir:

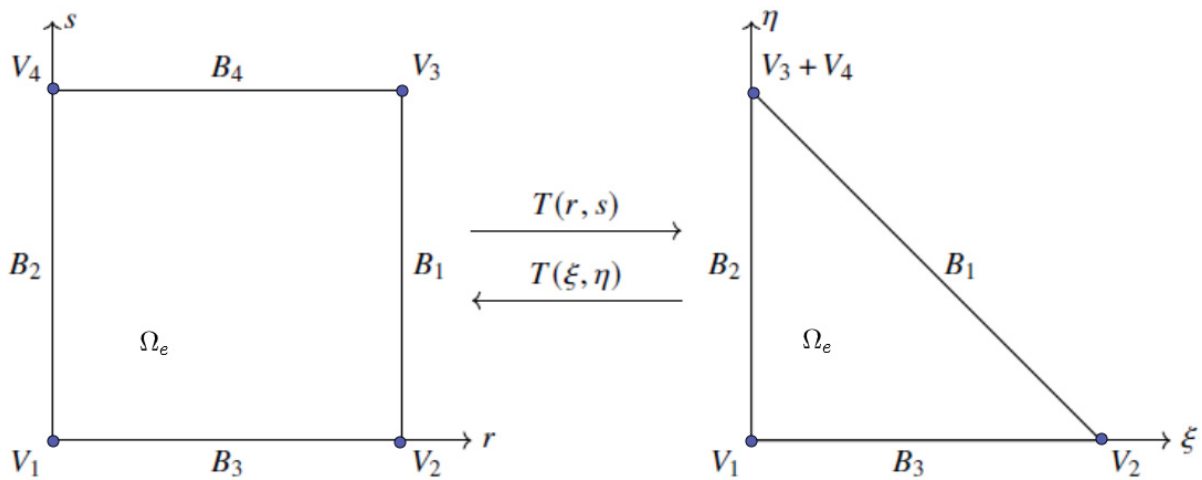
$$\Psi_{ij} = L_i L_j, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (5.10)$$

Na equação (5.10)  $\Psi_{ij}$  é a uma função da partição da unidade para um elemento quadrilateral. As funções  $L_i$  e  $L_j$  correspondem as funções partição da unidade unidimensionais de índices  $i$  e  $j$ , já o termo  $n$  é o número de partições da unidade unidimensionais sendo que maiores detalhes podem ser encontrados em Solin (2003), Torii (2012) e Weinhardt (2016).

Conforme Bathe (1982), nos elementos triangulares é possível a geração da partição da unidade a partir da simplificação de um elemento quadrilateral, sendo que esta técnica consiste na união de dois pontos nodais de um elemento quadrilateral e é também conhecida como transformação de Duffy (MOXEY et al., 2016).

Neste trabalho será aplicada a transformação de Duffy para a formulação de um elemento triangular enriquecido, cuja denotação será MEEG-D. Na Figura 5.1 é mostrada a união de dois nós de um elemento quadrilateral.

Figura 5.1: TRANSFORMAÇÃO DE DUFFY



Na Figura 5.1 é possível perceber que a borda  $B_4$  é eliminada para formar um elemento triangular, conseqüentemente os vértices  $V_3$  e  $V_4$  são sobrepostos e passam a ser somados, bem como as funções atreladas a estes nós.

Através da expressão (5.10) e considerando as partições da unidade unidimensionais, definidas para  $0 \leq r, s \leq 1$ :

$$L_1(r) = (1 - r) \quad (5.11)$$

$$L_2(r) = r \quad (5.12)$$

$$L_1(s) = (1 - s) \quad (5.13)$$

$$L_2(s) = s \quad (5.14)$$

Em um domínio elementar quadrilateral ( $\Omega_e$ ), no intervalo  $\Omega_e : 0 \leq r, s \leq +1$ , as partições da serão definidas como:

$$N_1(r, s) = (1 - r)(1 - s) \quad (5.15)$$

$$N_2(r, s) = r(1 - s) \quad (5.16)$$

$$N_3(r, s) = rs \quad (5.17)$$

$$N_4(r, s) = (1 - r)s \quad (5.18)$$

Agora, unindo os nós  $V_3$  e  $V_4$  as partições da unidade triangulares serão definidas como:

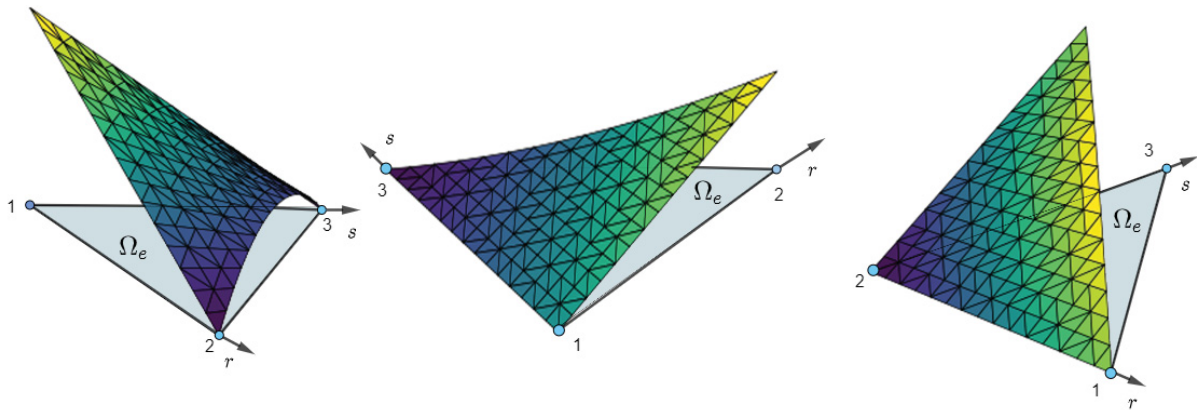
$$N_1 = (1 - r)(1 - s) \quad (5.19)$$

$$N_2 = r(1 - s) \quad (5.20)$$

$$N_3 = rs + (1 - r)s \quad (5.21)$$

A Figura 5.2 apresenta o aspecto gráfico das expressões (5.19), (5.20) e (5.21).

Figura 5.2: PARTIÇÃO DA UNIDADE EM UM DOMÍNIO TRIANGULAR



Contudo, as funções da Figura 5.2 ainda estão em função do sistema de coordenadas cartesiana  $(r, s)$ , sendo então preciso a aplicação de uma transformação  $T : (r, s) \rightarrow (\xi, \eta)$  que é dada por:

$$r = \frac{\xi}{1 - \eta} \quad (5.22)$$

$$s = \eta \quad (5.23)$$

Após a aplicação das equações (5.22) e (5.23) nas equações (5.19) à (5.21), as funções partição da unidade do MEF-G-D ficam como:

$$N_1 = 1 - \xi - \eta \quad (5.24)$$

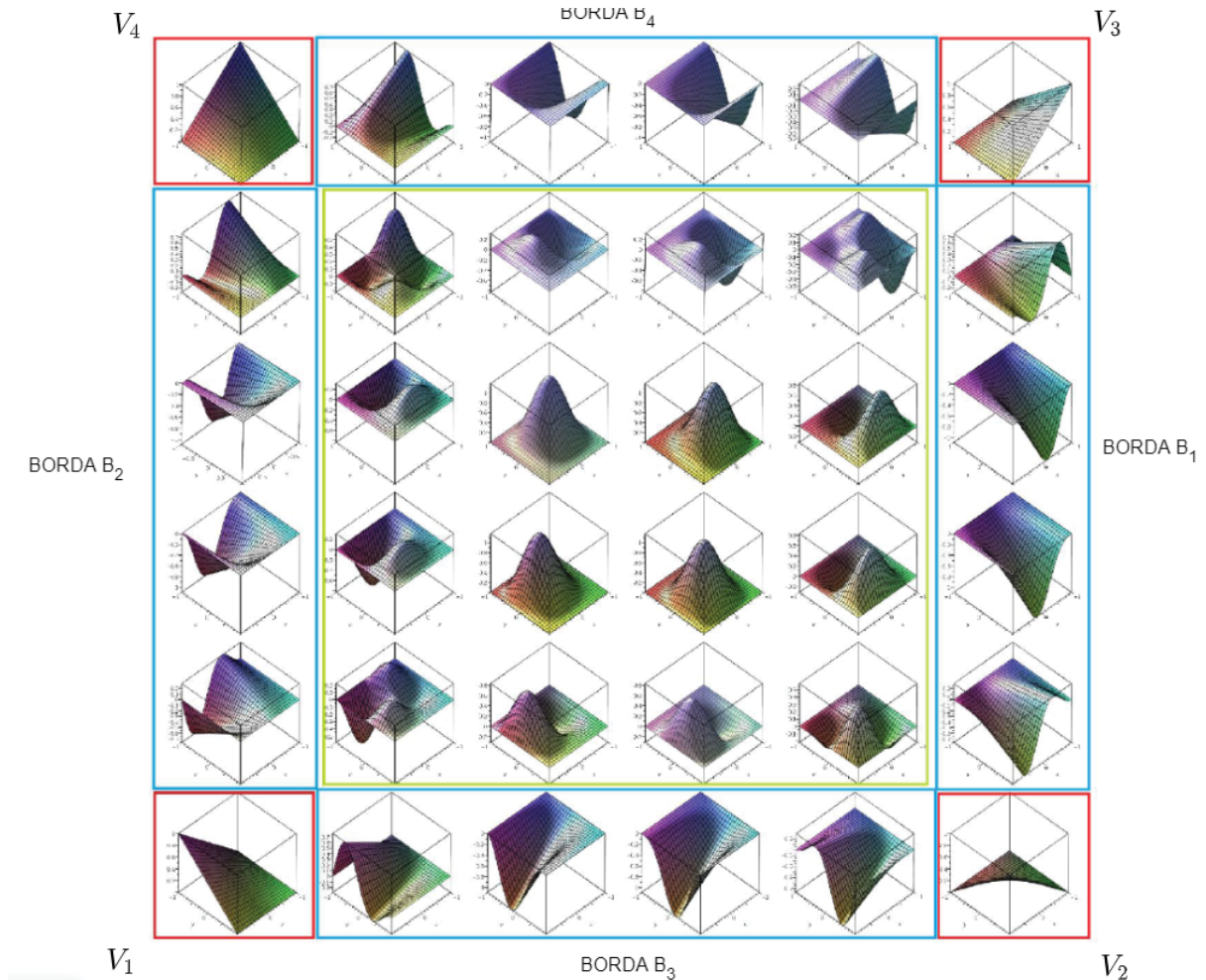
$$N_2 = \xi \quad (5.25)$$

$$N_3 = \eta \quad (5.26)$$

Para a obtenção das funções enriquecidas no elemento triangular, partiu-se das funções enriquecidas do elemento quadrilateral apresentado por Torii (2012). O elemento quadrilateral proposto por Torii (2012) possui ao todo 36 nós, sendo quatro nós físicos e 32 nós de campo, dentre os quais alguns são associados a funções borda e outros associados a funções bolha.

Como cada nó possui dois graus de liberdade, ao todo este elemento possui 72 graus de liberdade. Na Figura 5.3 é mostrado o gráfico das funções de forma do MEFG definidas em um elemento quadrilateral enriquecido.

Figura 5.3: FUNÇÕES EM DOMÍNIO TRIANGULAR



FONTE: Adaptado de WEINHARDT (2016)

Na Figura 5.3 estão representadas as funções das bordas  $B_1, B_2, B_3$  e  $B_4$ , inscritas nos retângulos azuis. As funções inscritas nos quadrados vermelhos, são as funções nodais e as funções no quadrado verde são as funções bolha. Aplicando a transformada de Duffy no elemento quadrilateral, ou seja, sobrepondo o vértice  $V_3$  com o vértice  $V_4$ , e aplicando a transformação de coordenadas mostradas nas equações (5.22) e (5.23), a base de funções do elemento triangular fica definida de acordo com a Tabela 5.2 a seguir.

Tabela 5.1: FUNÇÕES DE FORMA DO MEFQ-D EM ELEMENTO TRIANGULAR

Partição da Unidade:	
$N_1 = -\eta - \xi + 1$	
$N_2 = \xi$	
$N_3 = \eta$	
BORDA $B_3$ :	
$L_1^J = \frac{1}{2}(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(-\eta + \xi + 1)/(\eta - 1)) - 1)(-\eta - \xi + 1)$	
$L_2^J = \frac{1}{2}(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + \xi - 1)/(\eta - 1)) - 1)(-\eta + \xi + 1)$	
$L_3^J = \frac{1}{2}(\eta + \xi - 1)\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(-\eta + \xi + 1)/(\eta - 1))$	
$L_4^J = \frac{1}{2}(-\eta + \xi + 1)\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + \xi - 1)/(\eta - 1))$	
BORDA $B_1$ :	
$L_5^J = \frac{1}{2}\xi(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + 1)) - 1)$	
$L_6^J = -\frac{1}{2}\xi(\eta + 1)(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(\eta - 1)) - 1)/(\eta - 1)$	
$L_7^J = \frac{1}{2}\xi\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + 1))$	
$L_8^J = \frac{1}{2}\xi(\eta + 1)\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(\eta - 1))/(\eta - 1)$	
BORDA $B_2$ :	
$L_9^J = \frac{1}{2}(\eta + 1)(-\eta - \xi + 1)\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(\eta - 1))/(\eta - 1)$	
$L_{10}^J = \frac{1}{2}(-\eta - \xi + 1)\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + 1))$	
$L_{11}^J = \frac{1}{2}(\eta + 1)(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(\eta - 1)) - 1)(\eta + \xi - 1)/(\eta - 1)$	
$L_{12}^J = \frac{1}{2}(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + 1)) - 1)(-\eta - \xi + 1)$	
BOLHAS	
$L_{13}^J = \frac{1}{4}(\eta + 1)(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(\eta - 1)) - 1)(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(-\eta + \xi + 1)/(\eta - 1)) - 1)(\eta + \xi - 1)/(\eta - 1)$	
$L_{14}^J = \frac{1}{4}(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(-\eta + \xi + 1)/(\eta - 1)) - 1)(-\eta - \xi + 1)\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + 1))$	
$L_{15}^J = -\frac{1}{4}(\eta + 1)(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(\eta - 1)) - 1)(-\eta + \xi + 1)\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + \xi - 1)/(\eta - 1))/(\eta - 1)$	
$L_{16}^J = \frac{1}{4}(-\eta + \xi + 1)\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + 1))\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + \xi - 1)/(\eta - 1))$	
$L_{17}^J = -\frac{1}{4}(\eta + 1)(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(\eta - 1)) - 1)(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + \xi - 1)/(\eta - 1)) - 1)(-\eta + \xi + 1)/(\eta - 1)$	
$L_{18}^J = \frac{1}{4}(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + \xi - 1)/(\eta - 1)) - 1)(-\eta + \xi + 1)\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + 1))$	
$L_{19}^J = \frac{1}{4}(\eta + 1)(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(\eta - 1)) - 1)(-\eta - \xi + 1)\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(-\eta + \xi + 1)/(\eta - 1))/(\eta - 1)$	
$L_{20}^J = \frac{1}{4}(\eta + \xi - 1)\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + 1))\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(-\eta + \xi + 1)/(\eta - 1))$	
$L_{21}^J = \frac{1}{4}(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + 1)) - 1)(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(-\eta + \xi + 1)/(\eta - 1)) - 1)(-\eta - \xi + 1)$	
$L_{22}^J = \frac{1}{4}(\eta + 1)(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(-\eta + \xi + 1)/(\eta - 1)) - 1)(-\eta - \xi + 1)\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(\eta - 1))/(\eta - 1)$	
$L_{23}^J = \frac{1}{4}(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + 1)) - 1)(-\eta + \xi + 1)\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + \xi - 1)/(\eta - 1))$	
$L_{24}^J = \frac{1}{4}(\eta + 1)(-\eta + \xi + 1)\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(\eta - 1))\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + \xi - 1)/(\eta - 1))/(\eta - 1)$	
$L_{25}^J = \frac{1}{4}(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + 1)) - 1)(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + \xi - 1)/(\eta - 1)) - 1)(-\eta + \xi + 1)$	
$L_{26}^J = \frac{1}{4}(\eta + 1)(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + \xi - 1)/(\eta - 1)) - 1)(-\eta + \xi + 1)\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(\eta - 1))/(\eta - 1)$	
$L_{27}^J = \frac{1}{4}(\cos(\frac{1}{2}\beta_j(\eta + 1)) - 1)(\eta + \xi - 1)\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(-\eta + \xi + 1)/(\eta - 1))$	
$L_{28}^J = \frac{1}{4}(\eta + 1)(\eta + \xi - 1)\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(\eta - 1))\text{sen}(\frac{1}{2}\beta_j(-\eta + \xi + 1)/(\eta - 1))/(\eta - 1)$	

As funções de forma associadas a  $B_4$  (Figura 5.3) são excluídas do espaço de aproximação do elemento triangular, sendo que nas bordas  $B_1, B_2$  e  $B_3$  as funções são mantidas, bem como as funções bolhas. Este elemento possui ao todo 31 nós, sendo 3 nós físicos e 28 nós de campo, totalizando ao todo 62 graus de liberdade.

### 5.2.2 Proposta De Enriquecimento De Um Elemento Triangular

Uma vez que as funções de enriquecimento podem ser adotadas a partir do conhecimento *a priori* do comportamento da solução analítica, no contexto deste trabalho, é proposta uma outra metodologia de enriquecimento de elementos triangulares utilizando as funções trigonométricas de acordo com a técnica de construção empregada em Arndt (2009), além da metodologia de enriquecimento por transformada de Duffy (MEFG-D) apresentada no tópico anterior. Esta nova formulação será aqui denominada de MEFG-2.

Neste caso, a geração das funções enriquecedoras trigonométricas é feita de tal maneira, que as condições de contorno essenciais possam ser aplicadas diretamente pela restrição dos graus de liberdade nodais e de campo. Na análise dinâmica unidimensional, foram propostas por Arndt (2009) funções enriquecedoras trigonométricas, obtidas com base nas soluções analíticas de vibrações livre de barras, que são definidas por:

$$\gamma_{1j}(\xi) = \text{sen}(\beta_j L_e \xi) \quad (5.27)$$

$$\gamma_{2j}(\xi) = \text{sen}(\beta_j L_e (\xi - 1)) \quad (5.28)$$

$$\phi_{1j}(\xi) = \text{cos}(\beta_j L_e \xi) - 1 \quad (5.29)$$

$$\phi_{2j}(\xi) = \text{cos}(\beta_j L_e (\xi - 1)) - 1 \quad (5.30)$$

Nas equações (5.27) à (5.30),  $L_e$  é o comprimento do elemento de barra e  $\beta_j$  é um termo de acoplamento equivalente a  $j\pi$ , para  $j = 1, 2, \dots, nl$ , sendo que estas funções de enriquecimento possuem o suporte compacto no intervalo  $[0, 1]$ . Em Torii (2012) as funções das Equações (5.27) a (5.30) foram adaptadas para o intervalo  $\{\xi : -1 \leq \xi \leq 1\}$ . Já no presente trabalho, propõe-se que nos elementos triangulares em Estado Plano, o espaço de funções enriquecedoras contidas no domínio triangular  $\{(\xi, \eta) : 0 \leq \xi, \eta, \xi + \eta \leq 1\}$  seja definido de acordo com as seguintes expressões:

$$\gamma_{1j}(\xi, \eta) = \text{sen}(\beta_j \eta (1 - \xi - \eta)) \quad (5.31)$$

$$\gamma_{2j}(\xi, \eta) = \text{sen}(\beta_j \xi (1 - \xi - \eta)) \quad (5.32)$$

$$\gamma_{3j}(\xi, \eta) = \text{sen}(\beta_j \xi \eta) \quad (5.33)$$

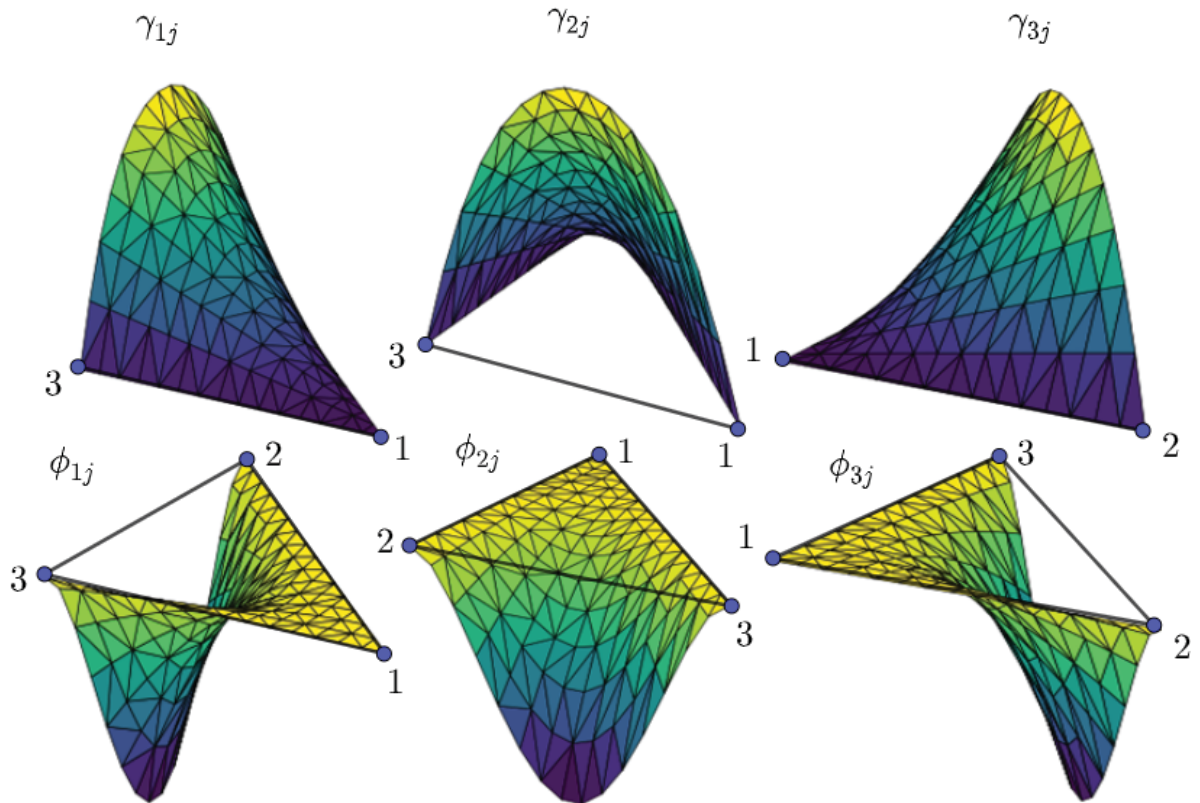
$$\phi_{1j}(\xi, \eta) = \text{cos}(\beta_j \eta (1 - \xi - \eta)) - 1 \quad (5.34)$$

$$\phi_{2j}(\xi, \eta) = \text{cos}(\beta_j \xi (1 - \xi - \eta)) - 1 \quad (5.35)$$

$$\phi_{3j}(\xi, \eta) = \text{cos}(\beta_j \xi \eta) - 1 \quad (5.36)$$

As funções (5.31) à (5.36) são nulas nos nós aos quais estão relacionadas, e não nulas nas bordas opostas a estes mesmos nós, como mostrado na Figura 5.4.

Figura 5.4: FUNÇÕES DE ENRIQUECIMENTO



A Figura 5.4 mostra as funções senoidais  $\gamma_{1j}$ ,  $\gamma_{2j}$ ,  $\gamma_{3j}$ , para  $\beta_j = \pi$ , bem como as funções cossenoidais,  $\phi_{1j}$ ,  $\phi_{2j}$ ,  $\phi_{3j}$ , também para  $\beta_j = \pi$ . Uma vez definido o espaço de funções de enriquecimento, a aplicação da Equação (5.6) gerará um conjunto de funções enriquecidas, que podem ser divididas em funções do tipo borda e tipo bolha. As funções do tipo borda estão representadas nos gráficos das Figuras 5.5, 5.6 e 5.7, para  $\beta_j = \pi$ . Essas funções são assim chamadas, porque elas são não nulas em uma das bordas do elemento mestre.

Figura 5.5: FUNÇÕES BORDA ASSOCIADAS A BORDA 1.

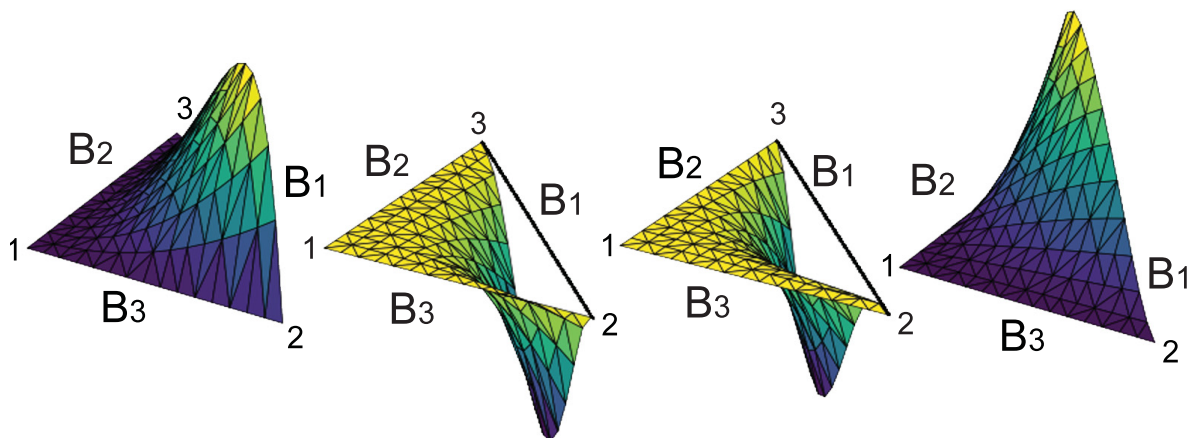


Figura 5.6: FUNÇÕES BORDA ASSOCIADAS A BORDA 2.

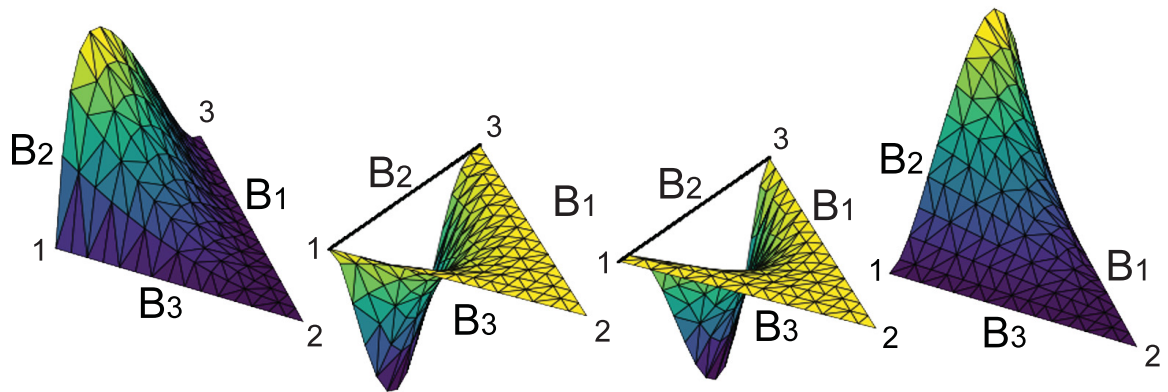
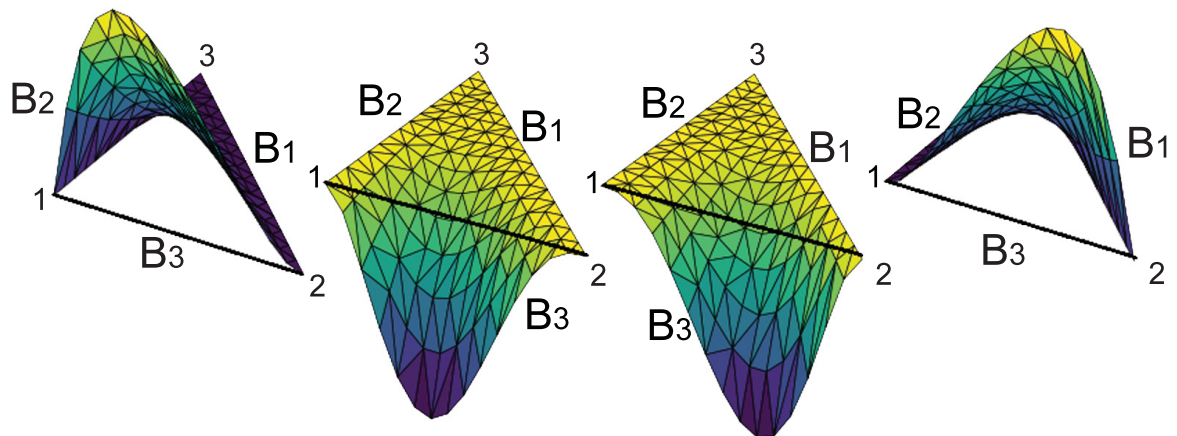
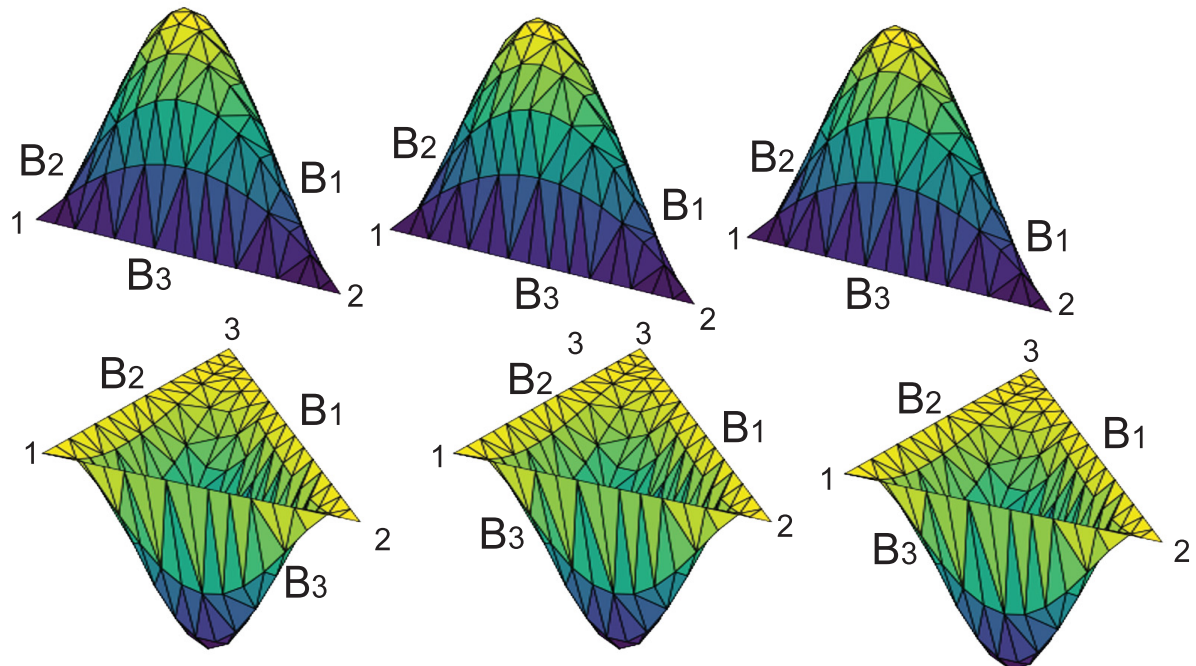


Figura 5.7: FUNÇÕES ASSOCIADAS A BORDA 3.



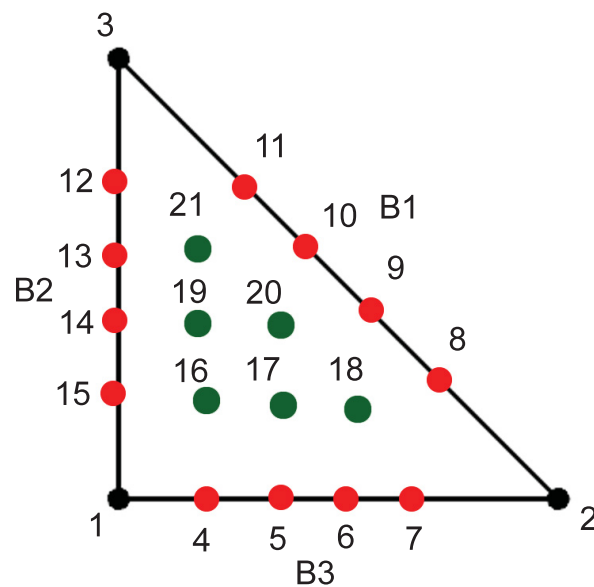
Nos gráficos da Figura 5.8 estão representadas as funções do tipo bolha, com  $\beta_j = \pi$ , cujos valores são nulos em todas as bordas do elemento mestre.

Figura 5.8: FUNÇÕES TIPO BOLHAS



Para a correta construção das matrizes de rigidez e de massa globais, é apropriado associar todas as funções enriquecidas a nós do elemento, mesmo que se tratem de funções associadas aos graus de liberdade não nodais. Na Figura 5.9 é mostrado o grupo de nós fictícios gerado nas bordas e no interior do elemento mestre, conforme o conjunto de funções enriquecedoras proposto.

Figura 5.9: NUMERAÇÃO EM SEQUÊNCIA DOS NÓS DO ELEMENTO MESTRE



Na Figura 5.9 verifica-se que o elemento proposto possui ao todo 21 nós, sendo que os nós de cores vermelha e verde são nós fictícios (de campo) relativos aos graus de liberdade

de campo. Ao todo existe 42 graus de liberdade no elemento proposto. Através da aplicação das funções enriquecedoras das Equações (5.31) a (5.36) na Equação (5.6) nota-se que são geradas quatro funções enriquecidas por bordas, e seis funções do tipo bolha. A particularização da equação (5.6) para esse elemento triangular enriquecido pode ser equacionada a seguir.

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^3 N_i u_i + \sum_{i=1}^3 N_i \sum_{j=1}^{nl} (\gamma_{ij} a_{ij} + \phi_{ij} b_{ij}) \quad (5.37)$$

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^3 N_i u_i + \sum_{j=1}^{nl} \sum_{k=1}^{18} L_k^j c_{ij} \quad (5.38)$$

Na equação (5.38),  $i$  representa o índice nodal,  $j$  é o índice relativo ao nível de enriquecimento,  $c_{ij}$  é o grau de liberdade,  $\gamma_{ij}$  e  $\phi_{ij}$  são as funções enriquecedoras senoidais e cossenoidais, respectivamente. A equação (5.38) é uma simplificação da equação (5.37), sendo  $L_k^j$  a função enriquecida associada ao grau de liberdade de campo  $c_{ij}$ . Na Tabela 5.2 a seguir, estão elencadas as funções PU e enriquecidas para um elemento mestre triangular no MEF-2.

Tabela 5.2: FUNÇÕES DE FORMA DO MEF-2

---

$N_1 = -\eta - \xi + 1$
$N_2 = \xi$
$N_3 = \eta$
$L_{1j} = (-\eta - \xi + 1) \text{sen}(\beta_j \xi (-\eta - \xi + 1))$
$L_{2j} = (\cos(\beta_j \xi (-\eta - \xi + 1)) - 1)(-\eta - \xi + 1)$
$L_{3j} = \xi (\cos(\beta_j \xi (-\eta - \xi + 1)) - 1)$
$L_{4j} = \xi \text{sen}(\beta_j \xi (-\eta - \xi + 1))$
$L_{5j} = \xi \text{sen}(\beta_j \eta \xi)$
$L_{6j} = \xi (\cos(\beta_j \eta \xi) - 1)$
$L_{7j} = \eta (\cos(\beta_j \eta \xi) - 1)$
$L_{8j} = \eta \text{sen}(\beta_j \eta \xi)$
$L_{9j} = (-\eta - \xi + 1) \text{sen}(\beta_j \eta (-\eta - \xi + 1))$
$L_{10j} = (\cos(\beta_j \eta (-\eta - \xi + 1)) - 1)(-\eta - \xi + 1)$
$L_{11j} = \eta (\cos(\beta_j \eta (-\eta - \xi + 1)) - 1)$
$L_{12j} = \eta \text{sen}(\beta_j \eta (-\eta - \xi + 1))$
$L_{13j} = (-\eta - \xi + 1) \text{sen}(\beta_j \eta \xi)$
$L_{14j} = \xi \text{sen}(\beta_j \eta (-\eta - \xi + 1))$
$L_{15j} = \eta \text{sen}(\beta_j \xi (-\eta - \xi + 1))$
$L_{16j} = (\cos(\beta_j \eta \xi) - 1)(-\eta - \xi + 1)$
$L_{17j} = \xi (\cos(\beta_j \eta (-\eta - \xi + 1)) - 1)$
$L_{18j} = \eta (\cos(\beta_j \xi (-\eta - \xi + 1)) - 1)$

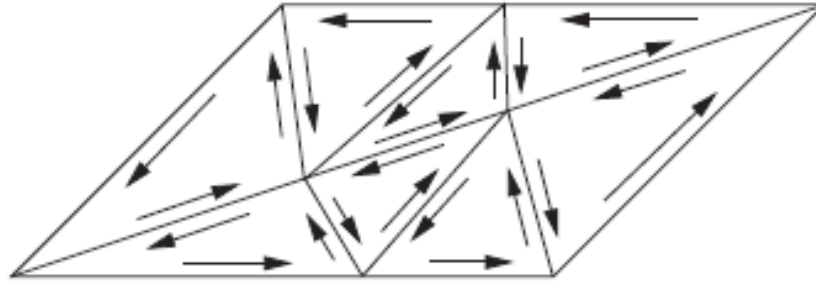
---

Na Tabela 5.2, as funções  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$  correspondem as partições da unidade, sendo que as funções enriquecedoras começam a partir de  $L_{1j}$ .

De acordo com Cittadin (2020) é possível o uso apenas das funções bolhas como a parcela de enriquecimento, haja vista que elas geram graus de liberdades de campo no interior do elemento e por isso facilitam as imposições das condições de contorno, bem como não exigem o acoplamento de graus de liberdade na união entre elementos adjacentes.

Assim como no MEF, o MEFG requer atenção especial com relação as funções de borda para que durante a construção da malha seja garantida a compatibilidade entre os elementos adjacentes, caso contrário o método poderá apresentar erros na análise. Para conectar os graus de liberdade contidos na borda do elemento (físicos e de campo), deve ser definida a orientação da borda e a numeração do elemento de referência. Neste caso a orientação será sequencial de  $B_1, B_2$  e  $B_3$  obedecendo o sentido anti-horário, tal como mostrado na Figura 5.10 (PENA, 2009).

Figura 5.10: ORIENTAÇÃO DAS ARESTAS DOS ELEMENTOS TRIANGULARES EM UMA MALHA GENÉRICA.



### 5.2.3 Uma Nota Sobre Integração Numérica

As vantagens existentes no MEFG, ou mesmo em outros métodos enriquecidos, são, entretanto, balanceadas pelo aumento do custo computacional, uma vez que geralmente é necessário o aumento do número de pontos de integração para obtenção dos coeficientes das matrizes de rigidez e massa. É comum que essas integrações sejam demasiadamente complexas e de difícil solução analítica, sendo recorrente a aplicação de métodos de integração numérica, tais como, a integração de Gauss, Gauss-Legendre ou Gauss-Lobatto, as quais usualmente são definidas para intervalos numéricos entre -1 e 1.

Hammer e Stroud (1956) estabeleceram a integração numérica para funções com duas variáveis em domínios triangulares.

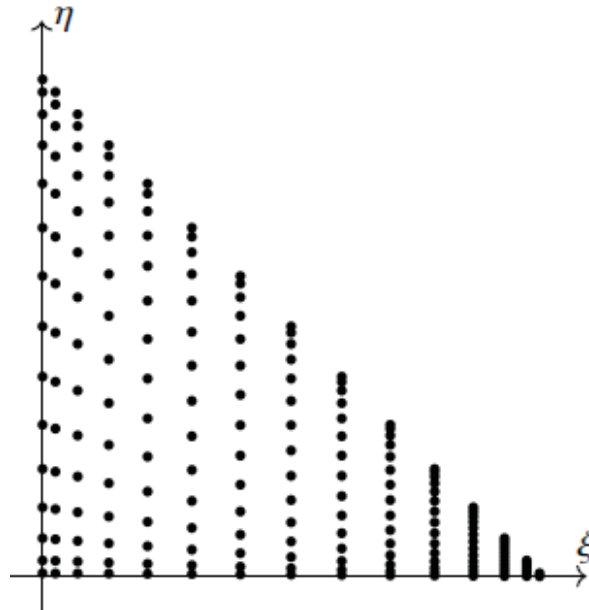
Facco (2020) propôs um método de integração numérica de alta ordem, uma vez que a nuvem de pontos de integração fica concentrada na região próxima ao baricentro do elemento triangular. Este esquema de integração foi implementado no MEFG visando a solução de problemas com duas interfaces.

No contexto deste trabalho será utilizada a técnica de integração numérica desenvolvida em Rathod e Karim (2002), por meio da qual é possível o uso da quadratura de Gauss Legendre em um domínio triangular. A técnica consiste em transformar uma área triangular, com domínio  $0 \leq \xi, \eta \leq 1, \xi + \eta \leq 1$ , em um domínio quadrado com os seguintes limites:  $-1 \leq \xi, \eta \leq 1$ . A equação utilizada para a integração numérica é dada por:

$$I = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{1-\xi_i}{8} \right) w_i w_j f(x(\xi_i, \eta_j), y(\xi_i, \eta_j)) \quad (5.39)$$

com  $\xi_i, \eta_j$  representando os pontos de Gauss nas direções  $\xi$  e  $\eta$ ,  $w_i$  e  $w_j$  são os respectivos pesos. A distribuição dos pontos de Gauss no interior do elemento mestre fica de acordo com o mostrado na Figura 5.11.

Figura 5.11: DISTRIBUIÇÃO DOS PONTOS DE GAUSS NO INTERIOR DE UM ELEMENTO TRIANGULAR.



Para obter matrizes de rigidez e massa sem singularidades via integração numérica, a definição da quantidade satisfatória de pontos de integração torna-se importante. Os métodos numéricos enriquecidos em geral requerem mais pontos de integração do que o MEF. Segundo Shang et al. (2019), não há na literatura definições claras acerca do critério de número mínimo de pontos de integração necessários. Existem aplicações do MEEG, por exemplo, onde foram requeridos 900 pontos de integração por elemento para a construção das matrizes de massa e rigidez.

## 6 MODELOS NUMÉRICOS

Neste capítulo é analisado o comportamento do MEEG proposto para elementos triangulares em diversos problemas de vibração livre de peças em EP. As modelagens estão divididas em problemas de EPT e EPD, sendo que os problemas escolhidos já foram tratados na literatura.

Os erros relativos são calculados de acordo com a seguinte expressão:

$$e(\%) = 100 \frac{|\tilde{\omega} - \omega|}{\omega} \quad (6.1)$$

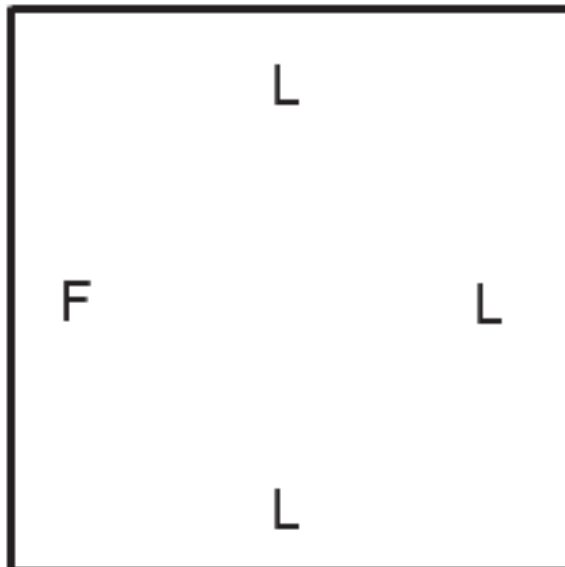
onde  $\tilde{\omega}$  representa a resposta da frequência natural aproximada e  $\omega$  a resposta usada como referência. Em alguns problemas as soluções de referência foram obtidas a partir do Método dos Elementos Finitos utilizando o programa ANSYS 2020 versão estudante, módulo "Mechanical APDL", sendo indicado quando for o caso.

Foram analisados também os espectros de frequência na investigação do comportamento do MEEG em problemas de vibração livre. Em um gráfico de espectro de frequência o eixo das abcissas corresponde ao quociente entre a ordem  $i$  da frequência e o número total de frequências contidas na análise, conforme a relação  $i/N$ , para  $i = 1, 2, \dots, N$ . O eixo das ordenadas do gráfico contém a relação  $\tilde{\omega}_i/\omega_i$ , sendo  $\tilde{\omega}_i$  a  $i$ -ésima frequência aproximada e  $\omega_i$  a  $i$ -ésima frequência de referência. Através deste gráfico é possível comparar os resultados entre métodos numéricos com diferentes números de graus de liberdade.

### 6.1 DETERMINAÇÃO DO NÚMERO DE PONTOS DE GAUSS

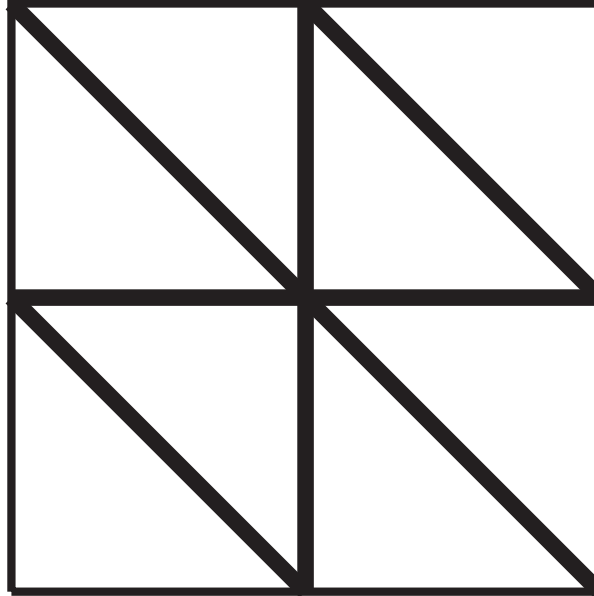
Nesta seção é analisado o comportamento do erro em relação à quantidade de pontos de Gauss usados na integração numérica das matrizes de massa e rigidez do MEEG. O modelo analisado consiste em uma chapa quadrada com a borda esquerda fixa, Figura 6.1, com dimensões de largura e comprimento igual a  $1m$ , e espessura de  $0,05m$ , módulo de elasticidade  $E = 210GPa$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e densidade equivalente a  $\rho = 8000kg/m^3$ .

Figura 6.1: CHAPA ENGASTADA EM UMA BORDA



A malha de elementos finitos está apresentada na Figura 6.2, totalizando 220 graus de liberdade, considerado aqui na formulação.

Figura 6.2: MALHA COM OITO ELEMENTOS FINITOS CONSTRUÍDA PARA USO NO MEF2

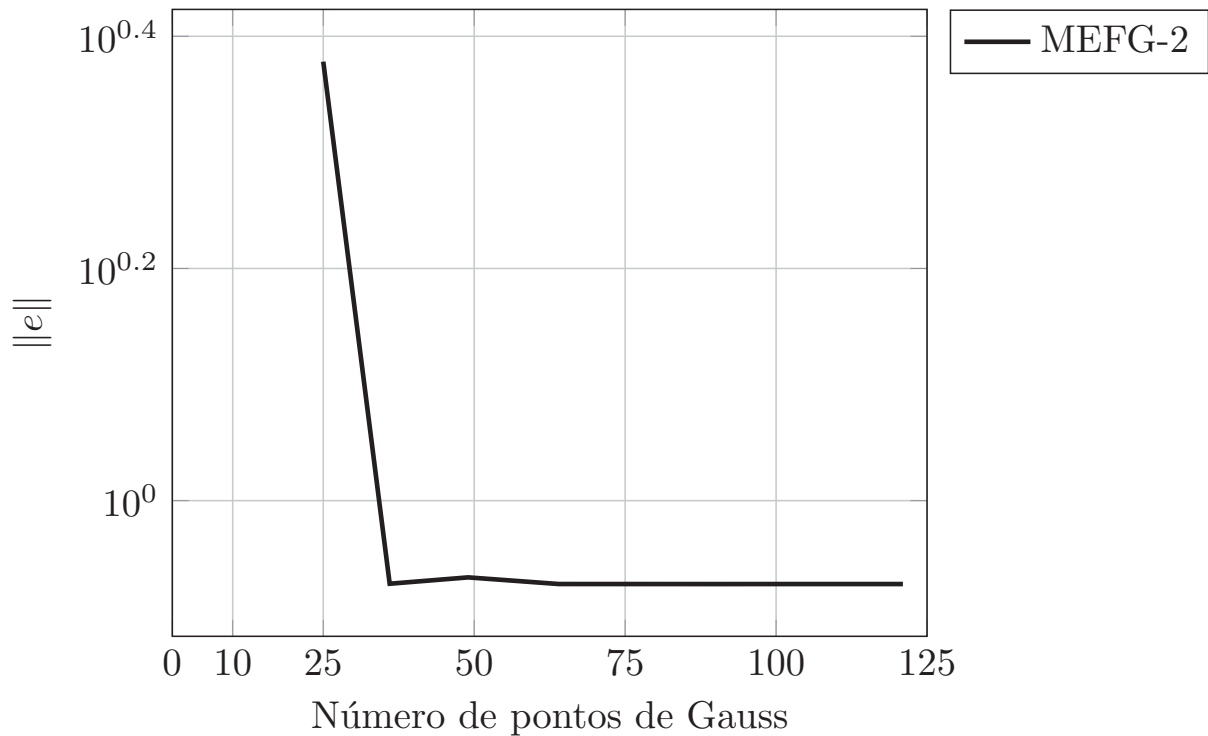


Para o cômputo dos resultados desta seção foi analisada a norma euclidiana do erro conforme a seguinte expressão:

$$\|e\| = \frac{\left\| \sqrt{\sum_i (\omega_i - \tilde{\omega}_i)^2} \right\|}{\left\| \sqrt{\sum_i \omega_i^2} \right\|} \quad (6.2)$$

Na equação (6.2) a norma do erro é calculada levando em conta o quociente da raiz da soma do quadrado da diferença entre as frequências obtidas ( $\tilde{\omega}_i$ ) e a frequência de referência ( $\omega_i$ ) pela raiz da soma do quadrado das frequências de referência, conforme aplicado em Suarez, Rossi e Silva (2012). O gráfico na Figura 6.3 mostra a variação do erro em relação à quantidade de pontos de Gauss utilizados para o elemento finito enriquecido na formulação do MEF2.

Figura 6.3: ERRO RELATIVO VERSUS NÚMERO DE PONTOS DE GAUSS PARA O MEFG-2



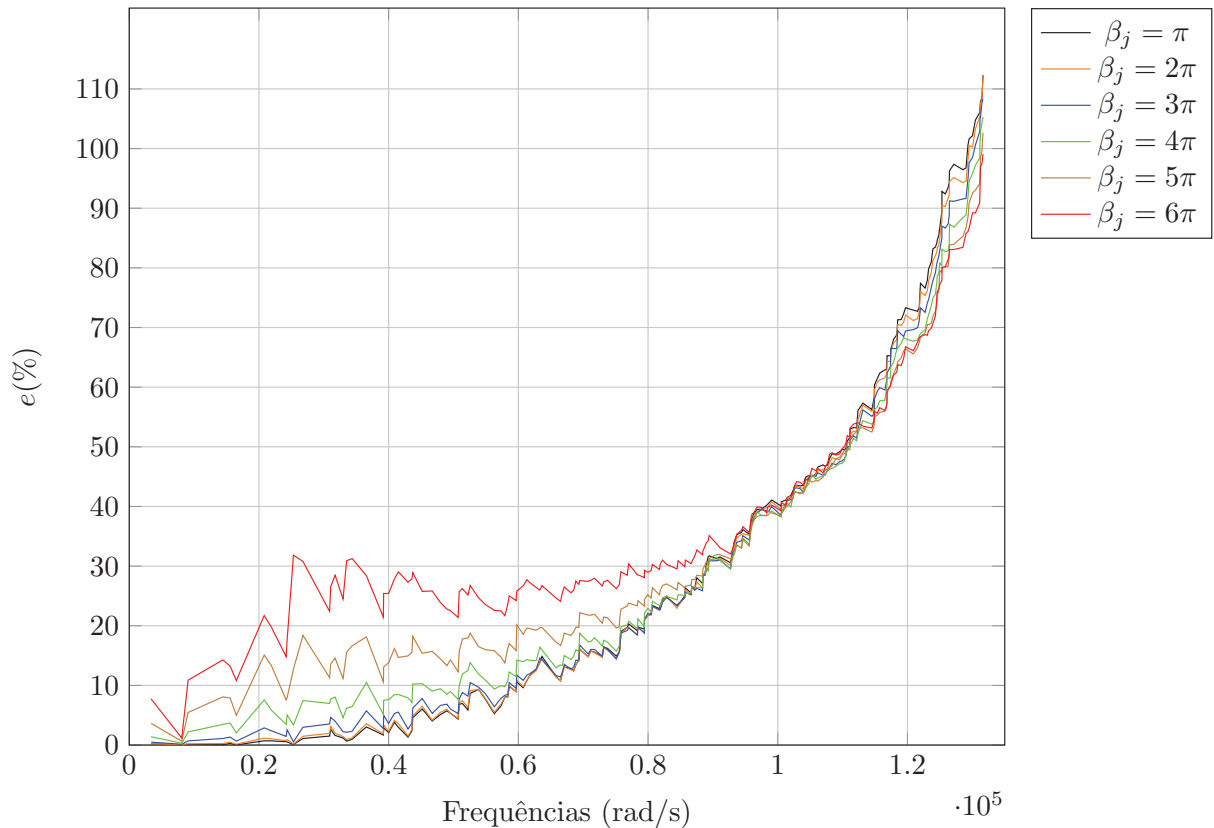
Conforme a Figura 6.3 o erro estabiliza a partir de 75 pontos de Gauss. O comportamento da linha no gráfico tem natureza oscilatória, conforme os resultados mostrados em Suarez, Rossi e Silva (2012). A contagem do número de pontos de integração começa em 25, porque para quantidades menores o modelo numérico não é calculado, acusando erro no cômputo dos autovalores. Levando em conta os dados do gráfico anterior, o número de pontos de integração usados nas análises subsequentes será adotado como 75 pontos.

## 6.2 VIBRAÇÃO LIVRE DE UMA CHAPA ENGASTADA

O modelo desta seção refere-se à aplicação do MEFG com elementos triangulares em um problema de vibração livre em EPT. O modelo é uma chapa quadrada com densidade  $\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$ , isotrópica, com módulo de elasticidade  $E = 210 \text{ GPa}$ , apresentada na Figura 6.1. As dimensões da largura e comprimento são unitárias e a espessura  $t = 0,05 \text{ m}$ . Este problema já foi analisado nos trabalhos de Torii (2012) e Cittadin (2021) utilizando elementos quadrilaterais.

Na Figura 6.2 consta a malha de elementos finitos enriquecidos, sendo que ao todo constam 220 graus de liberdade no modelo considerando a formulação MEFG-2. Já a Figura 6.4 apresenta um gráfico que mostra o comportamento do MEFG-2 em relação à 200 primeiras frequências naturais da chapa e para vários valores de  $\beta_j$  atribuídos de  $\pi$  até  $6\pi$ , considerando como referência o comportamento do MEFH formulado com polinômios de Lobatto de quinta ordem. Neste gráfico, o eixo das abscissas contém o intervalo de frequências naturais e o eixo das ordenadas contém o erro relativo.

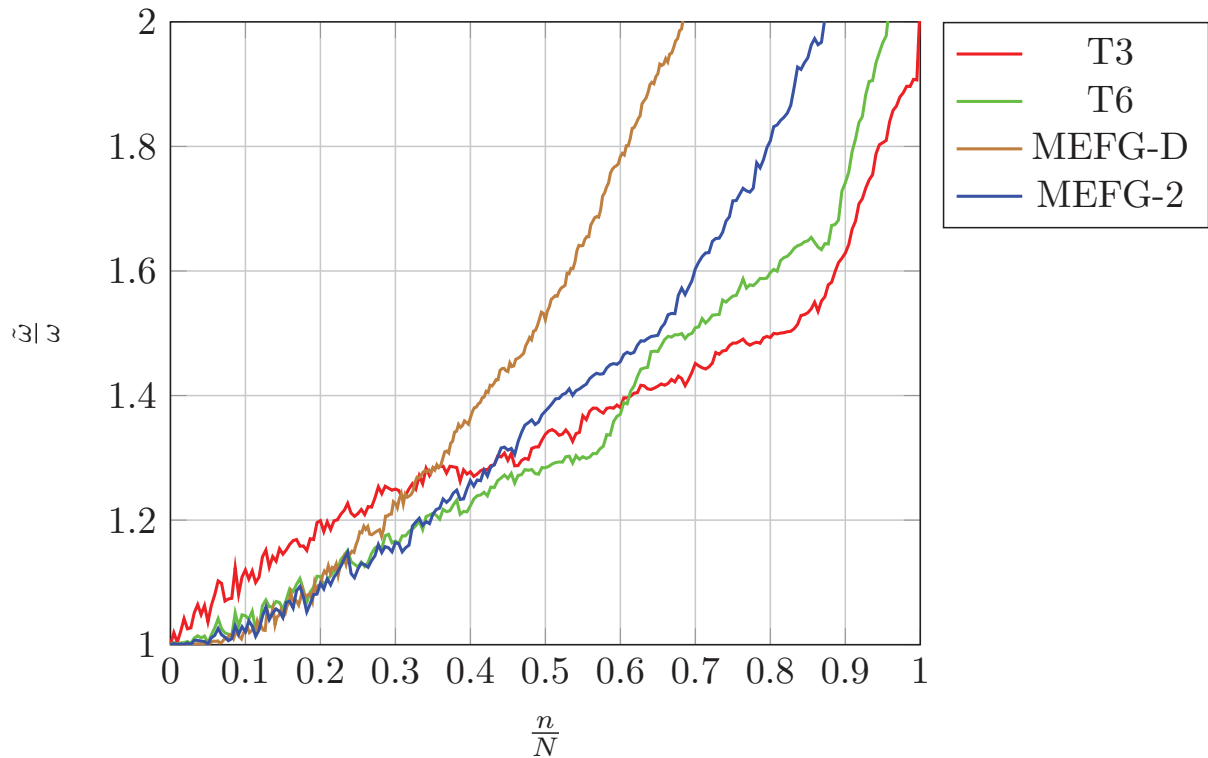
Figura 6.4: ERROS RELATIVOS DAS FREQUÊNCIAS NATURAIS APROXIMADAS PELO MEFG-2 COM DIVERSOS VALORES DE  $\beta_j$  PARA CHAPA ENGASTADA



Comparando-se os diversos valores de  $\beta_j$ , observa-se que os erros com  $\beta_j = \pi$  são menores para as frequências até  $0,9 \times 10^5 \text{ rad/s}$ , porém a partir deste valor as frequências passam a ter mais precisão para  $\beta_j = 6\pi$ .

Na Figura 6.5 são comparados os espectros de frequência entre do MEFG formulado a partir da degeneração do elemento quadrilateral enriquecido (MEFG-D), do MEFG proposto neste trabalho (MEFG-2) e do MEF com elementos triangulares de primeira e segunda ordem (T3 e T6, respectivamente). Nas análises realizadas pelos diferentes MEFG's foi utilizado um único nível de enriquecimento ( $j = 1$ ) e o parâmetro  $\beta_j = \pi$ .

Figura 6.5: ESPECTROS DE FREQUÊNCIA NATURAL PARA CHAPA ENGASTADA



A partir dos espectros de frequência apresentados na Figura 6.5 observa-se que o MEF-T3 é o método com menor precisão no intervalo  $0 \leq n/N \leq 0,35$ , entretanto sua precisão começa a melhorar a partir de  $n/N = 0,4$ , superando a precisão dos métodos MEFG-2 e MEFG-D. Observa-se também que nos intervalos altos de frequências o T3 é o que apresenta melhores resultados em relação aos demais. Em relação ao MEFG-D, verifica-se que ele apresenta os piores resultados a partir de  $n/N = 0,32$ . O MEFG-2 por sua vez apresenta os resultados mais precisos e próximos aos obtidos pelo MEF T6 na parte inicial do espectro até  $n/N$  de aproximadamente 0,35 e ainda melhores que o MEF T3 até  $n/N$  de 0,45. A partir desse ponto os erros do MEFG-2 aumentam mantendo-se maiores que os obtidos pelo MEF mas menores que os apresentados pelo MEFG-D.

Como o MEFG-2 mostrou-se mais preciso que o MEFG-D no espectro de frequência, a partir de agora as análises vão se concentrar no desempenho apenas do MEFG-2. A seguir, na Figura 6.6 e Figura 6.7, são mostrados os gráficos de convergência da primeira e vigésima frequências naturais obtidas pelo MEFG-2 e pelo MEF T3 e T6, sendo que estes gráficos correlacionam o erro relativo com o número de graus de liberdade.

Figura 6.6: ERRO RELATIVO DA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL DE UMA CHAPA ENGASTADA

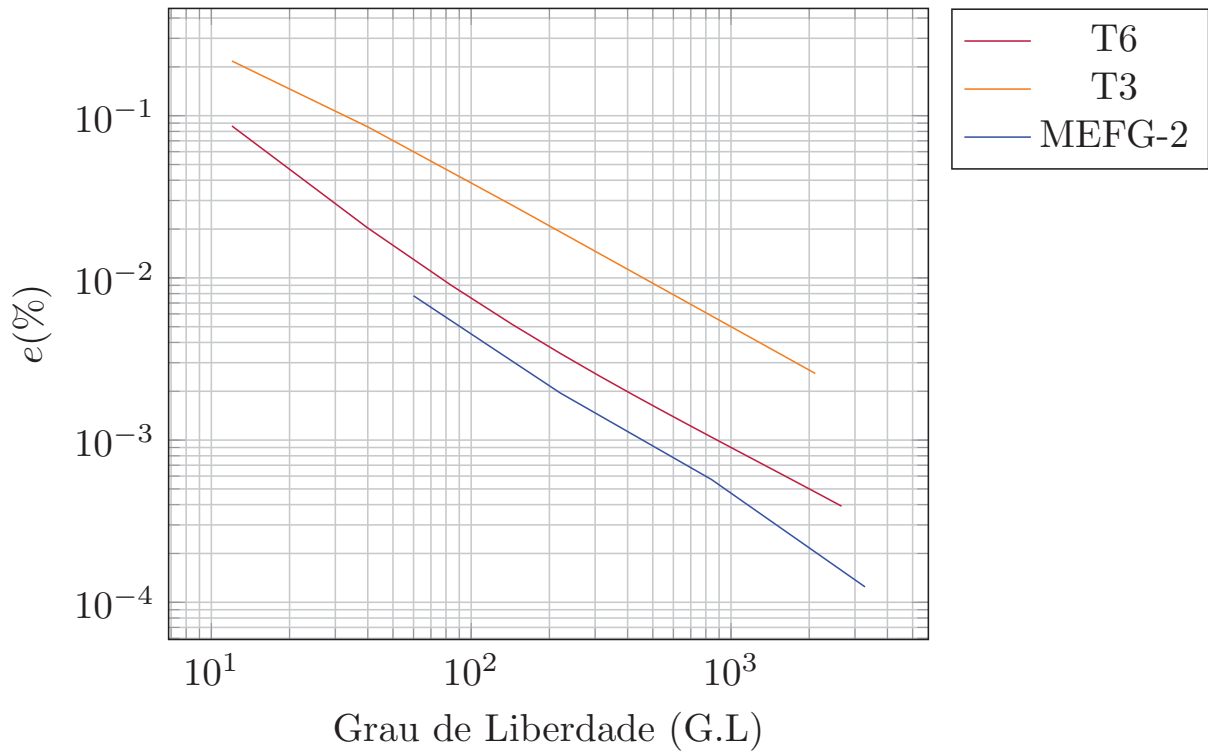
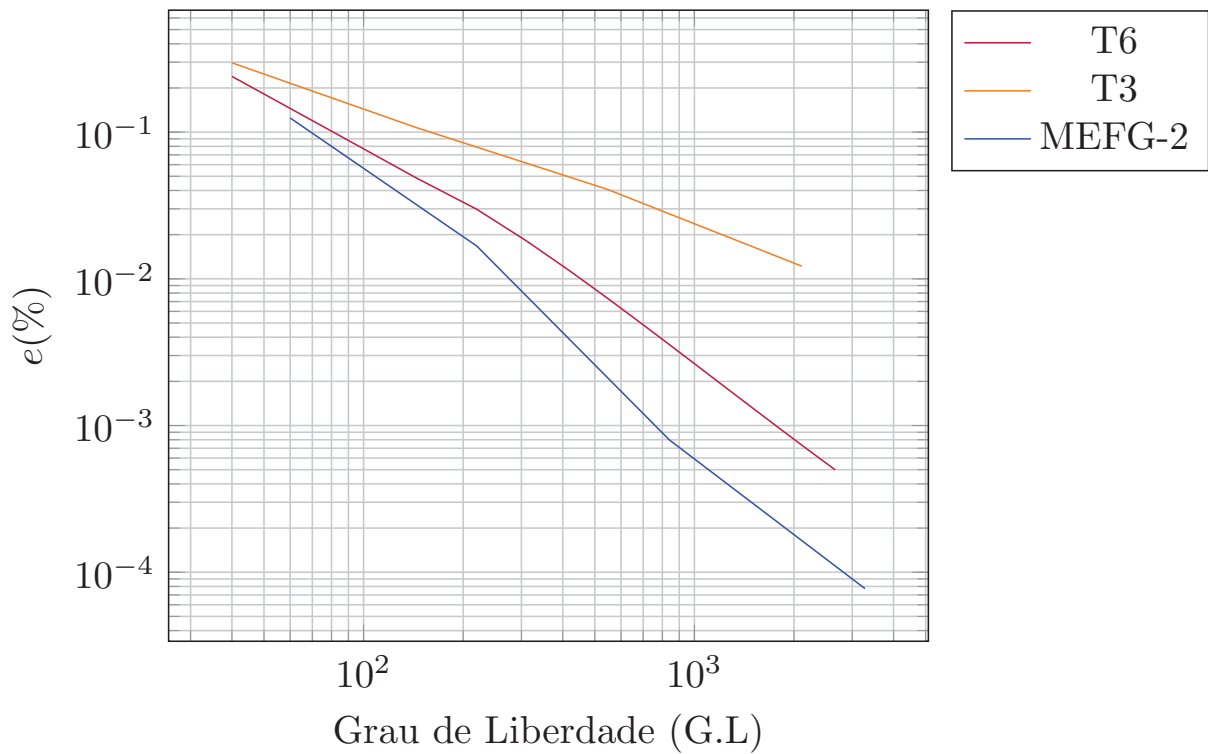


Figura 6.7: ERRO RELATIVO DA VIGÉSIMA FREQUÊNCIA NATURAL DE UMA CHAPA ENGASTADA



Para este modelo, verifica-se nas Figuras 6.6 e 6.7 que o MEFG-2 apresenta resultados mais precisos que o MEF, e taxa de convergência maior que o MEF linear T3 e semelhante ao

MEF quadrático T6. A Figura 6.8 apresenta o primeiro modo de vibração da chapa obtido pelo MEFQ-2. Para fins de comparação do modo de vibração, na Figura 6.9 é mostrado o primeiro modo de vibração obtido por Cittadin (2020).

Figura 6.8: PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DE UMA CHAPA ENGASTADA OBTIDO PELO MEFQ-2

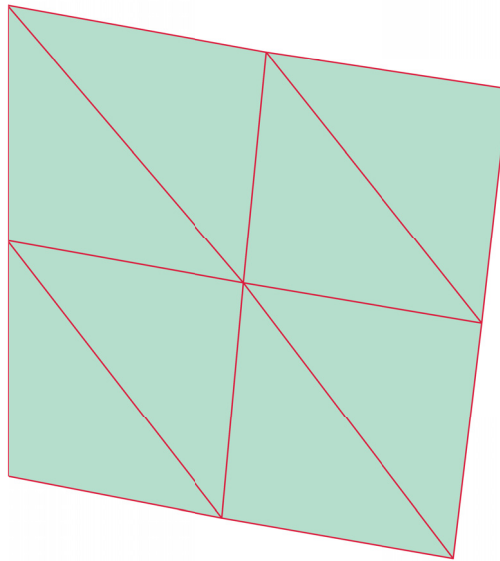
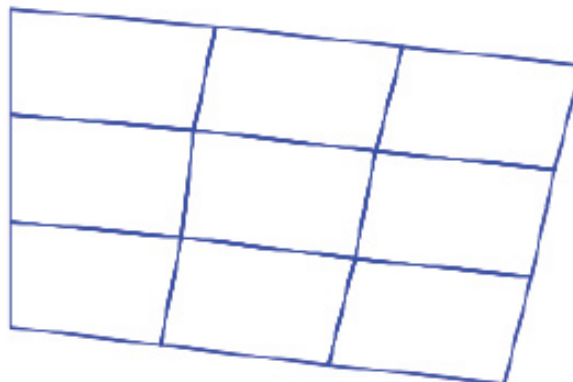


Figura 6.9: REFERÊNCIA DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DE UMA CHAPA ENGASTADA



FONTE: Cittadin (2020)

Na Figura 6.8 nota-se que o modo de vibração é semelhante ao modo de vibração de referência (Figura 6.9), sendo que no primeiro é utilizado 1 elemento a menos na malha construída em relação a malha de referência. A Tabela 6.1 apresenta o número de condição das matrizes de massa geradas no MEFQ-2, MEF-T3, MEF-T6 e no MEFQ composto por elementos quadrilaterais (MEFQ-Q), sendo o valor deste tomado com base nos estudos de Cittadin (2020).

Tabela 6.1: NÚMERO DE CONDIÇÃO DA MATRIZ DE MASSA

MÉTODO	G.L	NÚM.CONDIÇÃO
MEF-T3	544	14
MEF-T6	544	24
MEFG-Q	512	5,7E+11
MEFG-2	630	2,3E+8

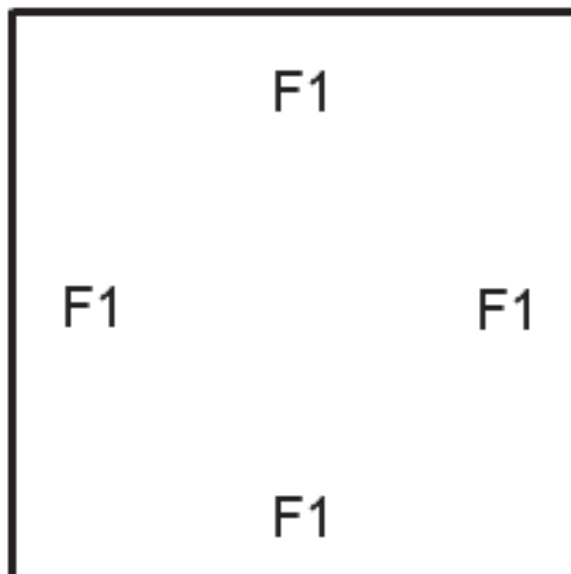
Na Tabela 6.1, observa-se que o número de condição da matriz de massa do MEF-T3 é o menor entre os métodos analisados, no entanto o MEFG-2 possui número de condição menor do que o do MEFG-Q.

Observa-se nesse exemplo que o MEFG-2 mostrou desempenho superior ao MEFG-D, mesmo com um menor número de graus de liberdade por elemento. Entretanto, o desempenho do MEFG-2 foi semelhante ao MEF-T6 na faixa inicial do espectro. Já com relação a faixa alta das frequências naturais, o MEF-T3 apresentou o melhor resultado. Esta informação dá indícios de que quanto maior o número de graus de liberdade de um elemento mestre, maior será o erro do método na faixa final do espectro de frequência, isto é, levando em conta o tipo de malha apresentado nesta seção.

### 6.3 VIBRAÇÃO LIVRE DE UMA CHAPA RETANGULAR COM APOIOS DO TIPO F1

Seja uma chapa com comprimento de  $1,2m$ , altura de  $1m$  e espessura de  $0,002m$ , em EPT, cujas propriedades mecânicas são  $E = 72GPa$ ,  $\rho = 2800kg/m^3$  e  $\nu = 0,3$ . Na Figura 6.10 é mostrada a chapa com suas condições de contorno.

Figura 6.10: MODELO DE CHAPA COM APOIO MÓVEL ROTULADO EM TODAS AS BORDAS.



Este problema foi tratado no trabalho de Xing e Liu (2009), e no trabalho de Boscolo e Banerjee (2011), cujos resultados foram usados como referência na análise do erro relativo das frequências naturais compreendidas entre os modos de vibração de 1 até 25. Segundo os autores os resultados de referência foram tomados com base no MEF (quadrangular) com uma malha de 100x120 elementos.

Na Tabela 6.2 são mostradas as frequências aproximadas  $\tilde{\omega}_i$  para  $i = 1, 2, \dots, 25$ , sendo que na segunda coluna consta a frequência natural de referência e nas colunas subsequentes constam os resultados obtidos pelo MEF tradicional, com malhas quadrilaterais e triangulares (MEF-Q4, MEF-T3 e MEF-T6, respectivamente) e pelo MEFG-2. Nesta análise foi possível construir malhas com mesmo número total de graus de liberdade, sendo 198 ao todo. No MEFG-2, foi utilizado um único nível de enriquecimento ( $nl = 1$ ) e  $\beta_j = \pi$ .

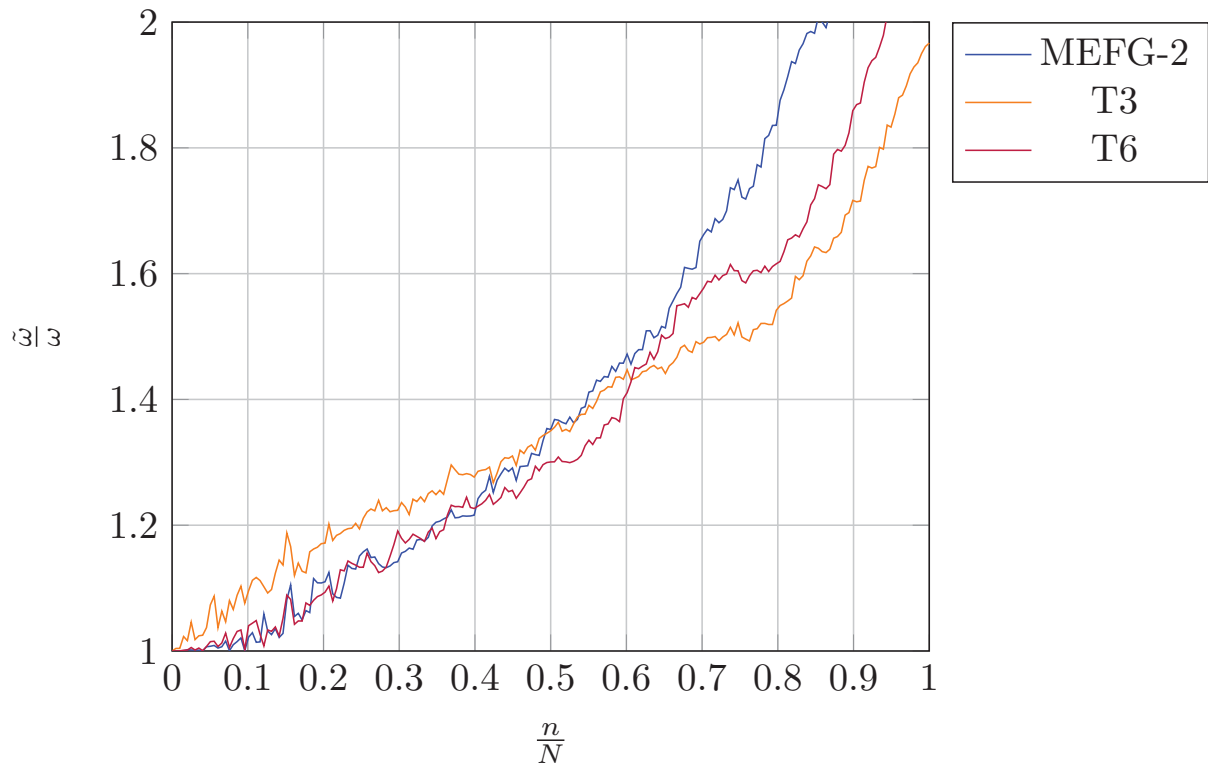
Tabela 6.2: PRIMEIRAS 25 FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO ( $rad/s$ ) EM CHAPA COM BORDAS TIPO F1

$\tilde{\omega}_i$	REFERÊNCIA (MEF)	MEF-Q4	MEF-T3	MEF-T6	MEFG-2
		198 G.L	198 G.L	198G.L	198 G.L
1	8233	8267	8267	8234	8234
2	9879	9921	9920	9881	9880
3	12859	12962	13156	12876	12863
4	16465	16738	16738	16492	16500
5	19198	19604	20084	19310	19233
6	19756	20086	20118	19790	19787
7	21400	21800	21924	21506	21434
8	21736	21826	22284	21749	21740
9	24693	25621	25618	24877	24865
10	25707	26542	27607	26103	25915
11	26591	27728	28921	27015	26836
12	29629	30745	30737	29850	29777
13	30746	32000	32714	31152	30968
14	31605	32802	33103	32528	32130
15	32450	33358	35057	32640	32474
16	32918	35117	35109	33585	33263
17	33878	35649	36912	34960	34412
18	33970	36653	37924	35531	35098
19	34361	36857	38933	36282	36199
20	34388	41426	42085	39950	39251
21	35604	41726	42918	40288	39705
22	36173	42140	44141	41431	40067
23	36833	43167	44891	41437	40951
24	38024	43959	45373	41496	43590
25	38223	45392	46238	43752	43679

Na Tabela 6.2 verifica-se que a frequência  $\omega_1$  é igual entre os métodos MEFG-2 e MEF-T6, e entre os métodos MEF-Q4 e MEF-T3. O MEFG-2 é o método que apresenta melhores resultados, uma vez que a convergência é do tipo "upperbound" e seus resultados em quase todas as frequências analisadas são os mais próximos das soluções de referência. Cabe citar que apenas para as frequências  $\omega_4$  e  $\omega_{24}$  os resultados são melhores para o MEF-T6.

A Figura 6.11 apresenta o espectro de frequências para os métodos MEF-T6, MEF-T3 e MEFG-2.

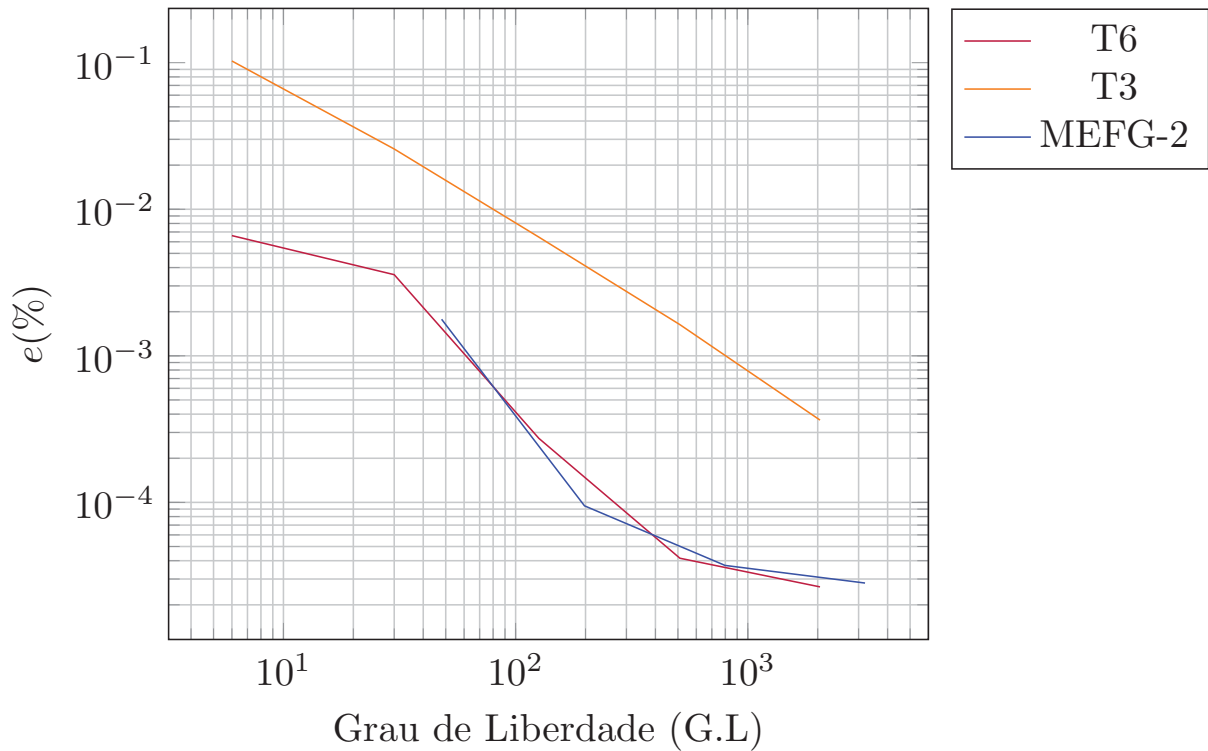
Figura 6.11: ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS NATURAIS - CHAPAS COM BORDAS DO TIPO F1



No gráfico da Figura 6.11 verifica-se que o MEF-T3 é o que apresenta menores relações  $\tilde{\omega}/\omega$  na faixa de frequências mais altas, repetindo a característica do modelo da seção anterior. Nota-se também que nas faixas de frequências maiores, o MEFG-2 é o que apresenta resultados menos precisos. Para  $n/N \leq 0,5$ , ou seja, na metade inferior das frequências obtidas, o MEFG-2 e o MEF-T6 apresentam os melhores resultados em relação ao MEF-T3 e até  $n/N = 0,4$  o MEFG-2 e MEF-T6 apresentaram resultados semelhantes.

Na Figura 6.12 é mostrada a convergência do erro relativo para a primeira frequência natural, obtido através do refino- $h$ , tanto no MEFG-2 quanto no MEF.

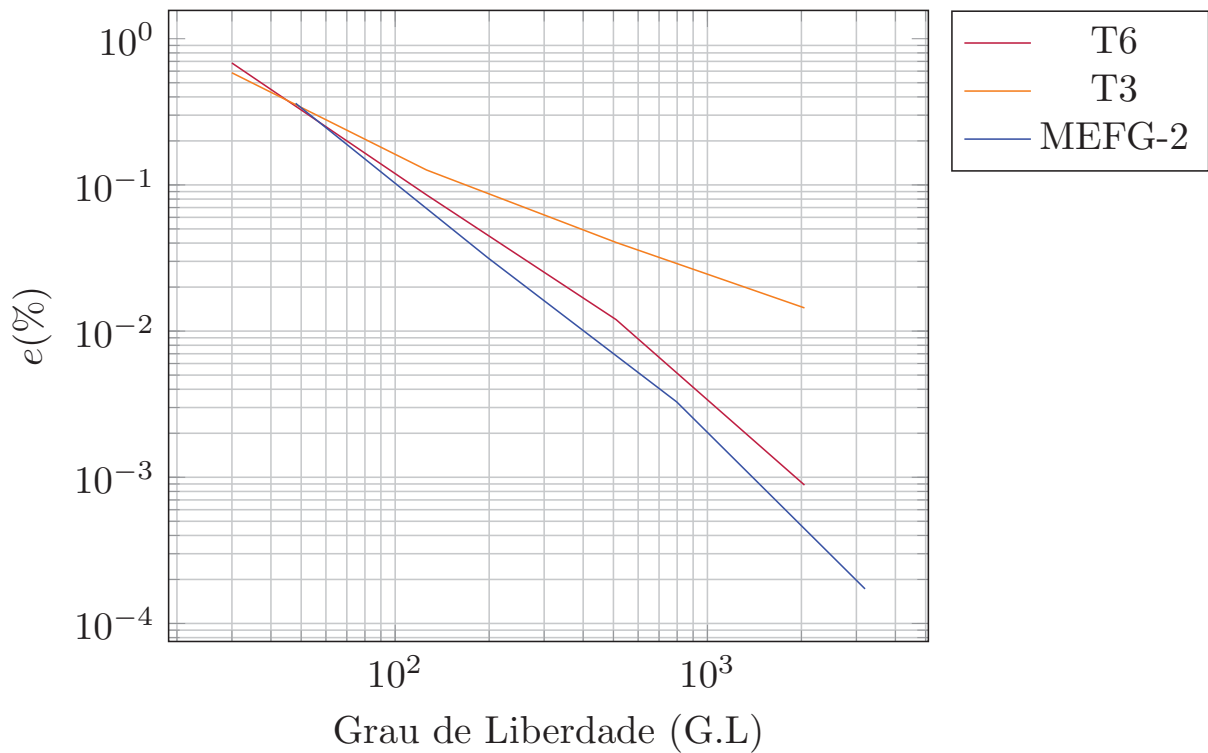
Figura 6.12: ERRO RELATIVO DA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL DE CHAPA COM BORDAS TIPO F1



Na Figura 6.12 nota-se que o MEFG-2 e o MEF-T6 apresentam erros relativos menores se comparados ao T3. Comparando-se o MEF-T6 e o MEFG-2, é possível perceber que ambos apresentam convergência semelhante, porém por causa da característica do MEFG-2 de possuir graus de liberdade nodais e de campo, verifica-se que o modelo inicial apresenta mais graus de liberdade em relação às malhas iniciais do MEF.

Na Figura 6.13 é apresentado o resultado do erro relativo para a frequência natural de ordem 25.

Figura 6.13: ERRO RELATIVO DA VIGÉSIMA QUINTA FREQUÊNCIA NATURAL - CHAPAS COM APOIO TIPO F1



Na Figura 6.13 o MEFG-2 mostrou-se mais preciso que o MEF-T3 e MEF-T6, Dentre os três métodos o MEF-T3 foi o que apresentou erros relativos maiores, enquanto que o MEFG-2 apresentou taxas de convergência e precisão superior ao MEF quadrático T6. Na Figura 6.14 e na Figura 6.15 são mostrados o primeiro modo de vibração calculados pelo MEFG-2 e o modo de referência para a chapa retangular com os apoios do tipo F1.

Figura 6.14: PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DE UMA CHAPA COM BORDAS TIPO F1

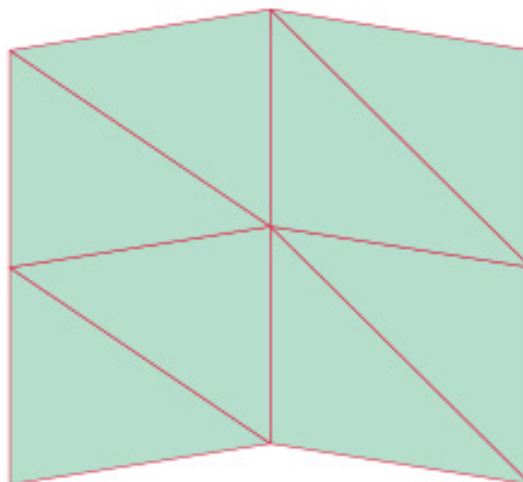
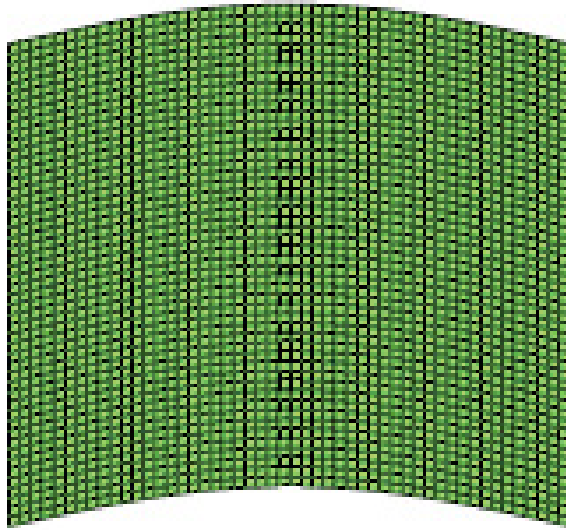


Figura 6.15: REFERÊNCIA DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DE UMA CHAPA COM APOIOS TIPO F1



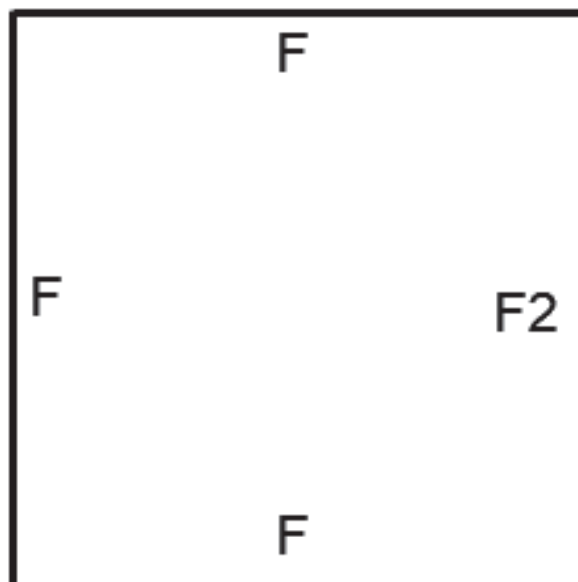
FONTE: Liu e Xing (2011)

Na Figura 6.14 é notável que o MEF2 fornece modo de vibração semelhante ao modo de referência, mesmo com menos elementos. Neste problema o MEF2 voltou a apresentar comportamento semelhante ao MEF-T6 para a faixa inicial do espectro, porém sua precisão é reduzida a partir de 40 % do espectro.

#### 6.4 VIBRAÇÃO LIVRE DE UMA CHAPA RETANGULAR COM BORDA FIXA ROTULADA E BORDA MÓVEL ROTULADA

A próxima análise é efetuada sobre uma chapa com dimensões  $1,2m \times 1,0m$ , mostrada na Figura 6.16, e com propriedades mecânicas  $E = 72GPa$ ,  $\rho = 2800kg/m^3$  e  $\nu = 0,3$  em EPT. Neste modelo as condições de contorno essenciais consistem em 3 bordas com apoios fixos e 1 borda com apoio móvel rotulado tipo F2.

Figura 6.16: CHAPA COM BORDAS FIXAS E MÓVEIS (F-F-F-F2)



As soluções de referências para a comparação dos resultados foram tomadas com base em Liu e Banerjee (2017), através do Método da Rigidez Dinâmica Espectral (MRDE), onde foram calculadas as frequências naturais para a faixa média no intervalo  $10 \leq i \leq 100$  e no intervalo de faixa alta compreendendo o intervalo  $100 \leq i \leq 1000$ .

Na Tabela 6.3 são apresentados os resultados obtidos para as frequências naturais pelo MEF-G-2, e pelo MEF com elementos triangulares (MEF-T3 e MEF-T6) e quadrilaterais (Q4). Nesta seção os valores das frequências naturais estão apresentados na forma adimensional dada pela expressão  $2\tilde{\omega}a\sqrt{\rho/G}/\pi$ , sendo  $G$  o módulo de elasticidade cisalhante e  $a$  o comprimento da aresta da chapa. O tempo de processamento de cada método também foi determinado e está mostrado na Tabela 6.3, assim como o número total de graus de liberdade.

Tabela 6.3: FREQUÊNCIAS NATURAIS ADIMENSIONAIS

MODO	REFERÊNCIA (MEF)	MEF-T3	MEF-Q4	MEF-T6	MEFG-2
10	3.72833	4.09146	3.73557	3.72878	3.72842
20	5.0783	5.47572	5.09838	5.08011	5.07864
40	6.80026	7.53596	6.83458	6.80231	6.80085
60	8.22259	9.20363	8.35369	8.24221	8.23529
80	9.31753	10.56418	9.45162	9.34844	9.32706
100	10.3622	11.87561	10.53996	10.42342	10.37691
200	14.4709	16.82666	15.06342	14.71906	14.59756
400	20.1682	24.83034	21.60083	20.95388	21.07156
600	24.4609	31.43584	27.23300	26.58843	26.51104
800	28.1562	37.45853	32.32613	31.83257	31.61365
1000	31.3854	42.88343	36.98395	36.71458	36.72263
G.L		3081	3081	3081	3081
TEMPO(S)		10min53s	5min24seg	2min58s	2min50s

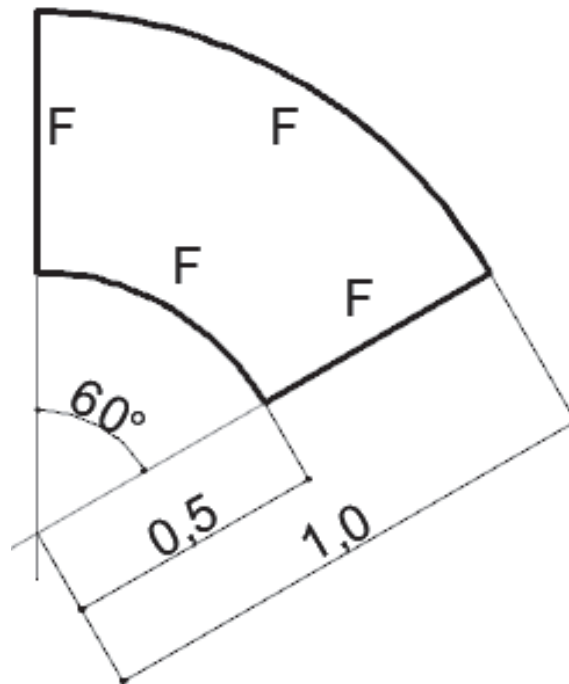
Na Tabela 6.3 o MEF-G-2 e o MEF-T6 foram os métodos que apresentaram os melhores resultados para as frequências observadas. Desconsiderando os modos de vibração número 400 e 1000, o MEF-G-2 mostrou-se superior em relação aos demais métodos. É possível verificar que o tempo de processamento dos resultados pelo MEF-G-2 foi menor em relação aos demais métodos, haja vista que foram utilizados 128 elementos, enquanto que no MEF-T6, foram necessários o uso de uma malha com 800 elementos, mas o número total de graus de liberdade (nodais e de campo) foi o mesmo para todos os métodos considerados.

Nesta seção o MEF-G-2 performou melhor do que o MEF-T3 e MEF-Q4, e mesmo para uma frequência de ordem alta ( $i = 1000$ ), seu desempenho foi ligeiramente melhor em relação ao MEF-T6. Para este tipo de problema, levando em conta as condições de contorno estabelecidas, o MEF-G-2 apresentou bom desempenho superando os demais métodos analisados.

## 6.5 VIBRAÇÃO LIVRE DE UMA CHAPA ANULAR COM BORDAS FIXAS

Seja o modelo mostrado na Figura 6.17, em EPT, o qual consiste em um setor anular com ângulo central de  $60^\circ$ , raio interno de  $0,5m$  e raio externo de  $1m$ . As propriedades mecânicas da chapa anular são  $\rho = 7800kg/m^3$ ,  $E = 2 \times 10^{11}Pa$  e  $\nu = 0,3$ . As vinculações externas são todas fixas com travamentos aos deslocamentos horizontais e verticais.

Figura 6.17: SETOR ANULAR COM BORDAS FIXAS



Os resultados para as frequências naturais foram obtidos pelo MEF-G-2 e pelo MEF, sendo que as soluções de referência foram tomadas com base nos trabalhos de Shi, Li e Shi (2012), Bao e Wang (2017) e, Singh e Muhammad (2004)., as quais estão na forma adimensional dada pela expressão  $\tilde{\omega} b \sqrt{\rho(1 - \nu^2)/E}$ , sendo o  $b$  o valor da aresta interna da chapa.

Na Tabela 6.4 são apresentados os valores obtidos para as 6 primeiras frequências naturais calculadas com 162 graus de liberdade para todos os métodos. Na Figura 6.21 é mostrada a relação de erros relativos em função do número total de graus de liberdade do primeiro modo de vibração, enquanto que na Figura 6.22 consta a evolução do erro relativo do sexto modo de vibração.

Tabela 6.4: PRIMEIRAS SEIS FREQUÊNCIAS ADIMENSIONAIS - SETOR ANULAR COM BORDAS FIXAS

FREQUÊNCIA	REFERÊNCIA	MEF-T3	MEF-Q4	MEF-T6	MEFG-2
	162 G.L	162 G.L	162 G.L	162 G.L	162 G.L
1	5,3385	5,4364	5,3788	5,3478	5,4961
2	6,6046	6,6994	6,6218	6,5842	6,7257
3	7,0882	7,4679	7,2752	7,1903	7,3781
4	8,2349	8,5838	8,3815	8,2804	8,4453
5	8,6217	9,1781	8,9770	8,8271	9,0803
6	8,8282	9,3417	9,0147	8,9162	9,1600

Na Tabela 6.4 verifica-se que os melhores resultados foram obtidos pelo MEF-T6. Observa-se também que o MEFG-2 foi o método que apresentou a pior aproximação das primeiras duas frequências, porque conforme ilustrado na Figura 6.18(a), a malha utilizada não se aproxima muito bem a geometria do problema quando comparada com as malhas utilizadas pelos outros métodos, conforme mostram a Figura 6.19 e a Figura 6.20. É possível também observar que a malha usada para o MEF-T6 é a que melhor aproxima a geometria real do

problema. Entretanto, mesmo com pouco elementos o MEEG-2 aproximou melhor as frequências naturais a partir do 3º modo, quando comparado ao MEF-T3.

Figura 6.18: MALHA UTILIZADA NO MEEG-2 PARA OBTENÇÃO DOS RESULTADOS - SETOR ANULAR

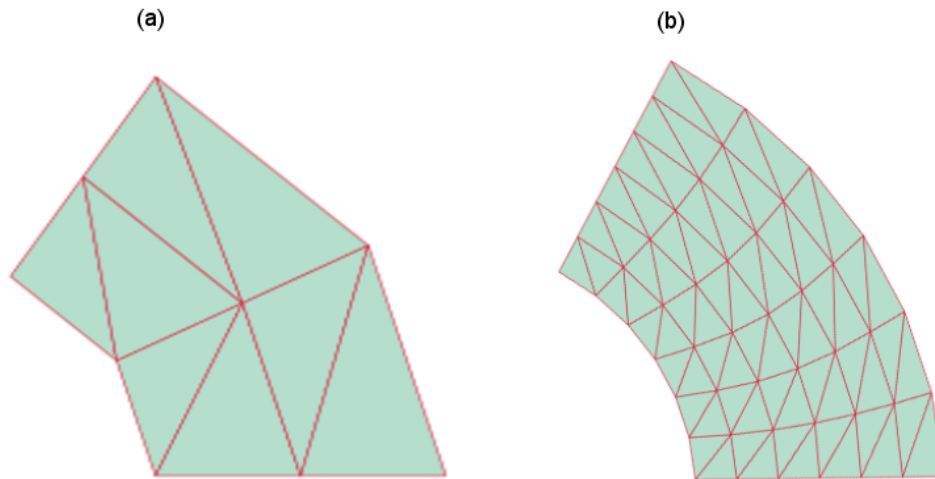
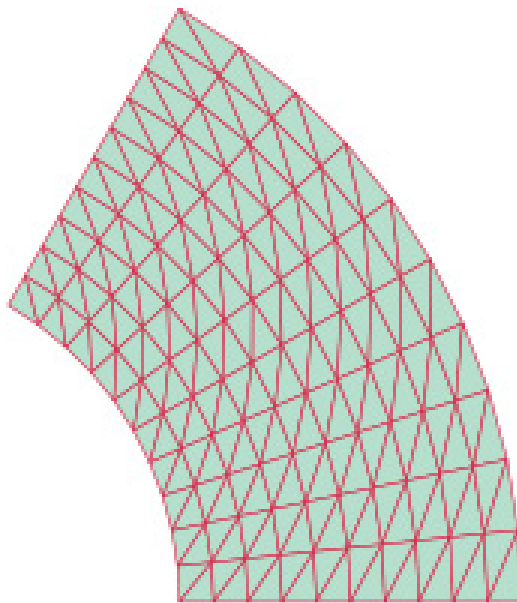
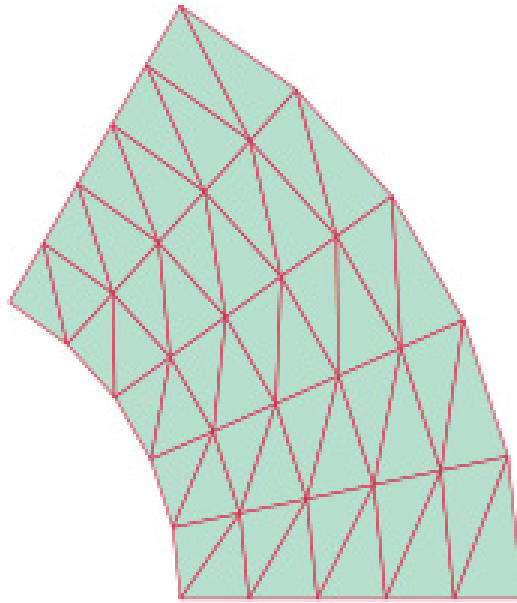


Figura 6.19: MALHA UTILIZADA NO MEF-T3 - SETOR ANULAR



A malha das Figuras 6.18a e 6.18b contém 162 e 1682 graus de liberdade respectivamente.

Figura 6.20: MALHA UTILIZADA NO MEF-T6 - SETOR ANULAR



As malhas das Figuras 6.19 e 6.20 possuem 162 graus de liberdade. A Figura 6.21 e a Figura 6.22 mostram os erros relativos dos métodos para a primeira e sexta frequências naturais com o uso do refino- $h$  dos métodos analisados.

Figura 6.21: ERRO RELATIVO DA PRIMEIRA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIBRAÇÃO - SETOR ANULAR.

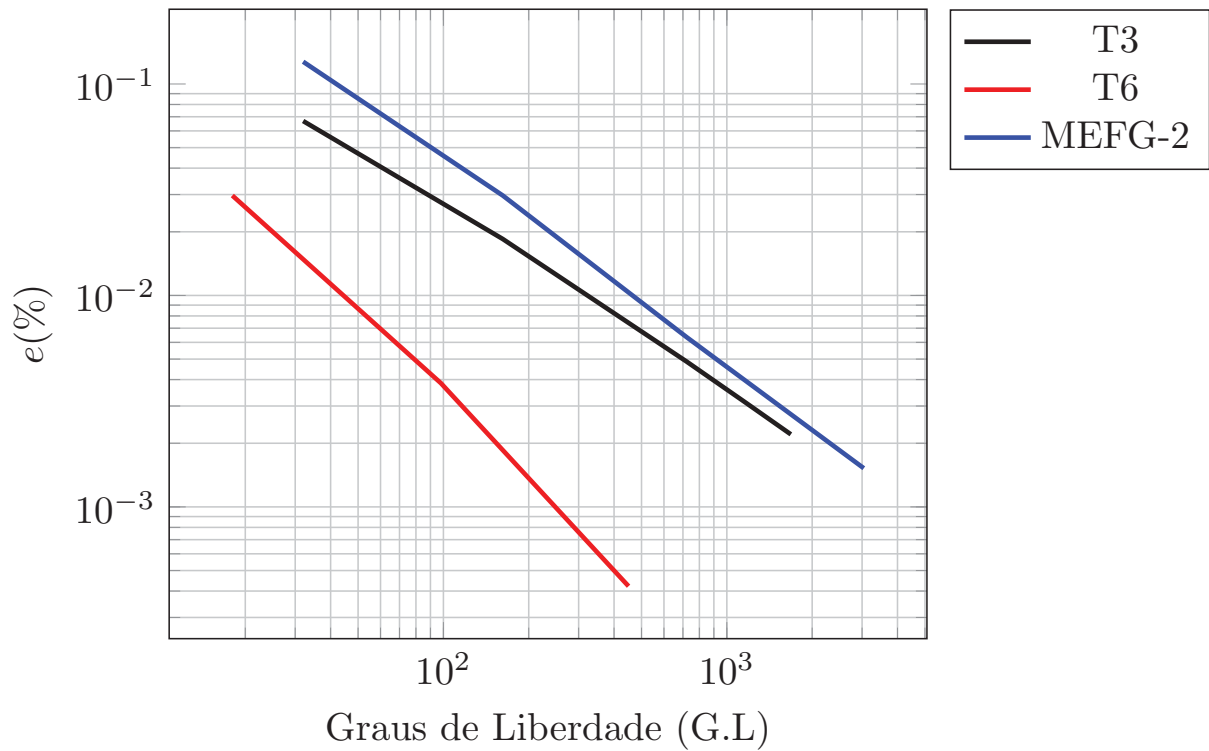
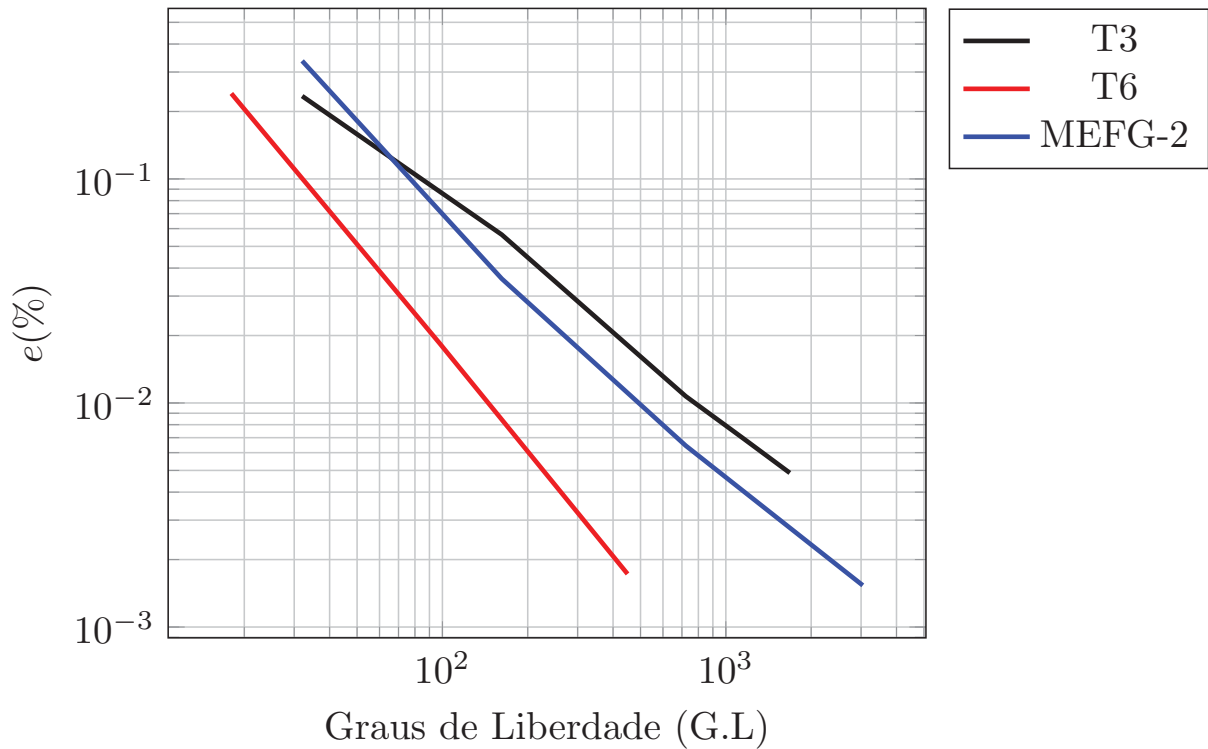


Figura 6.22: ERRO RELATIVO DA SEXTA FREQUÊNCIA NATURAL DE VIBRAÇÃO - SETOR ANULAR



Na Figura 6.21 é possível notar que neste tipo de problema o MEF-T6 converge mais rapidamente para a solução da primeira frequência natural. O MEFG-2, embora tenha apresentado resultados menos precisos que o MEF-T3, apresentou uma taxa de convergência levemente superior ao MEF-T3. Na Figura 6.22 observa-se que a eficiência superior do MEF-T6 se mantém em relação aos demais métodos, porém o MEFG-2 já apresenta resultados mais precisos que o MEF-T3 a partir de 70 graus de liberdade. Nas Figuras 6.23 e na Figura 6.24 estão ilustrados o primeiro modo de vibração da chapa anular, obtidos pelo MEFG-2 e o modo de referência obtido pelo MEF-Q4.

Figura 6.23: PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DE UMA CHAPA ANULAR OBTIDO PELO MEF-G-2

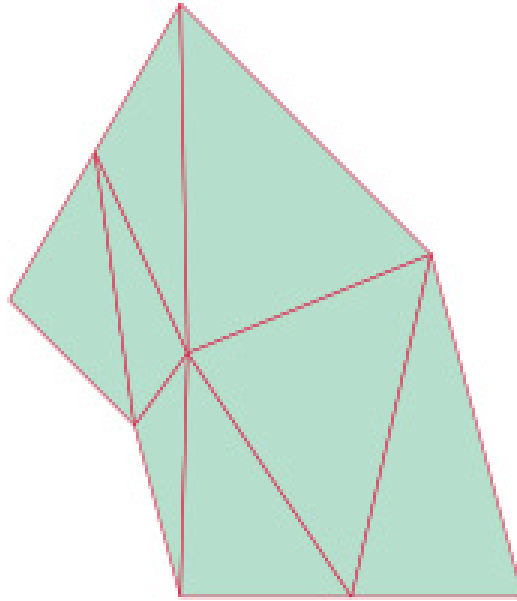
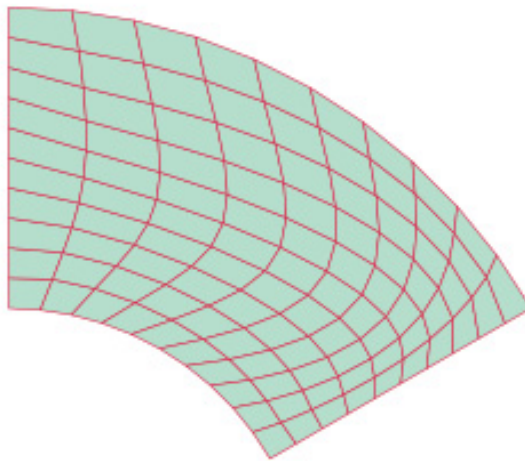


Figura 6.24: REFERÊNCIA DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO DE UMA CHAPA ANULAR OBTIDO PELO MEF-Q4



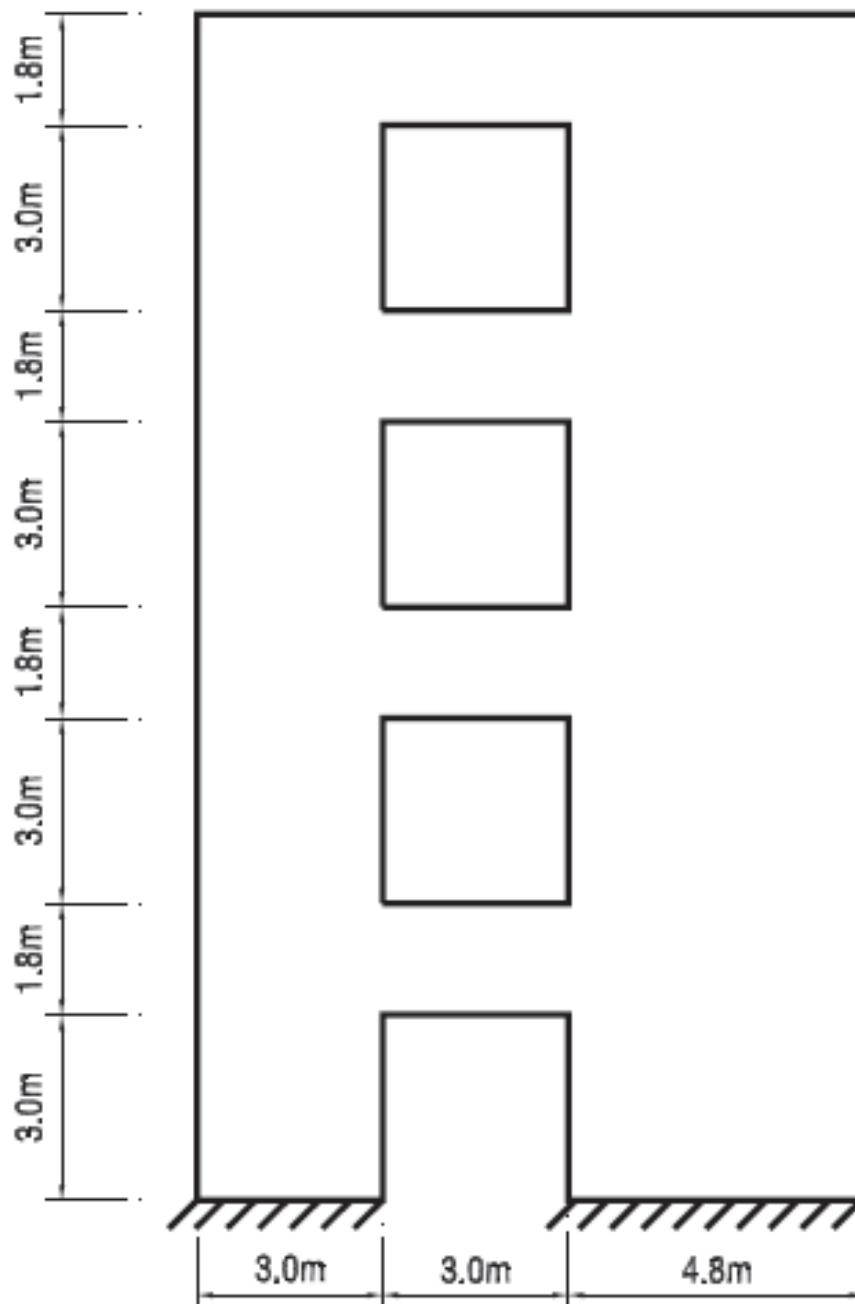
## 6.6 VIBRAÇÃO LIVRE DE UMA PAREDE ESTRUTURAL

Seja uma parede, cujas propriedades mecânicas são:  $E = 1,0 \times 10^4 \text{ Pa}$ ;  $\nu = 0,20$ ,  $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$ , espessura de  $1 \text{ m}$  e submetida ao EPT, com as dimensões mostradas na Figura 6.25.

Na presente seção, as soluções de referência foram obtidas a partir dos trabalhos de Nguyen-Thanh (2010) e Gu e Liu (2001), nos quais foi utilizado o método sem malha na obtenção das frequências naturais de vibração livre. Será efetuada a comparação entre o MEF-G-2 proposto e o MEF-G-2 estruturado somente com funções enriquecidas do tipo bolha (MEFG-2B), o MEF-T3 e o MEF-T6, a fim de verificar a precisão dos resultados das frequências naturais.

A Figura 6.26 mostra as malhas de elementos finitos utilizadas tanto para o MEEG-2 quanto para o MEF. Na Tabela 6.5 são apresentados os resultados das 8 primeiras frequências naturais de vibração, bem como o número total de graus de liberdade utilizados em cada método. Na Figura 6.27 é mostrado o erro relativo dos métodos em relação a solução de referência. Já nas Figuras 6.28 e 6.29 são apresentados os espectros de frequências, sendo que na Figura 6.29 é mostrado o espectro geral, levando em conta todos os graus de liberdade, e na Figura 6.29 é apresentado um espectro ampliado para 40 % das frequências, para melhor visualização.

Figura 6.25: PAREDE ESTRUTURAL COM DESCONTINUIDADE GEOMÉTRICA



FONTE: Nguyen-Thanh et al. (2010)

Figura 6.26: MALHAS USADAS NO MEFG E NO MEF - PAREDE ESTRUTURAL.

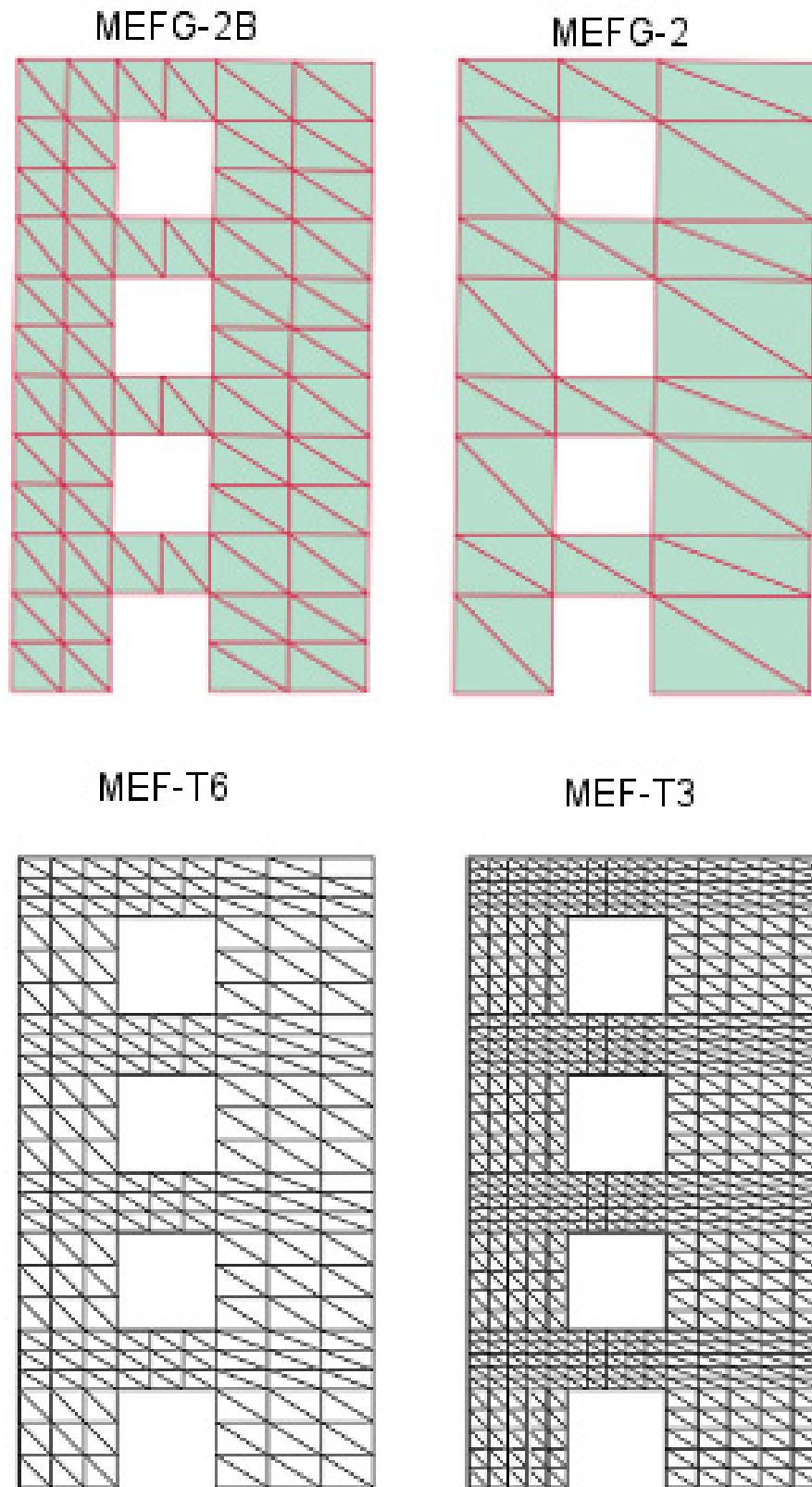


Tabela 6.5: FREQUÊNCIAS NATURAIS (Hz)

FREQ.	REF.	MEFG-2B	MEFG-2	MEF-T3	MEF-T6
	118360 GL	1504 GL	1152 GL	1600 GL	1624 GL
1	2.0	2.5	2.1	2.1	2.0
2	6.9	7.9	6.9	7.2	7.0
3	7.6	8.5	7.8	7.6	7.6
4	11.4	15.1	11.8	12.2	11.8
5	14.9	19.0	15.4	15.8	15.2
6	18.0	21.1	17.5	18.7	18.2
7	19.6	23.5	19.9	20.3	19.8
8	21.8	24.6	22.2	22.6	22.1

Figura 6.27: ERRO RELATIVO DAS OITO PRIMEIRAS FREQUÊNCIAS NATURAIS

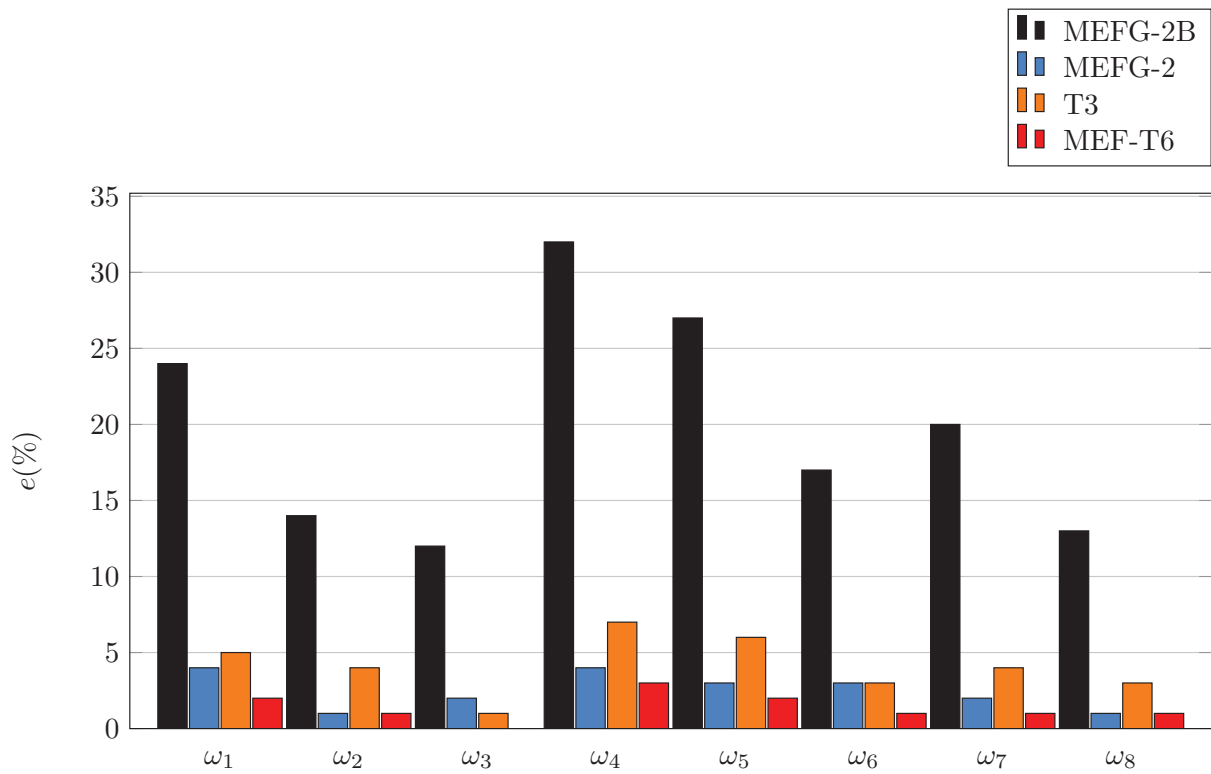


Figura 6.28: ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS

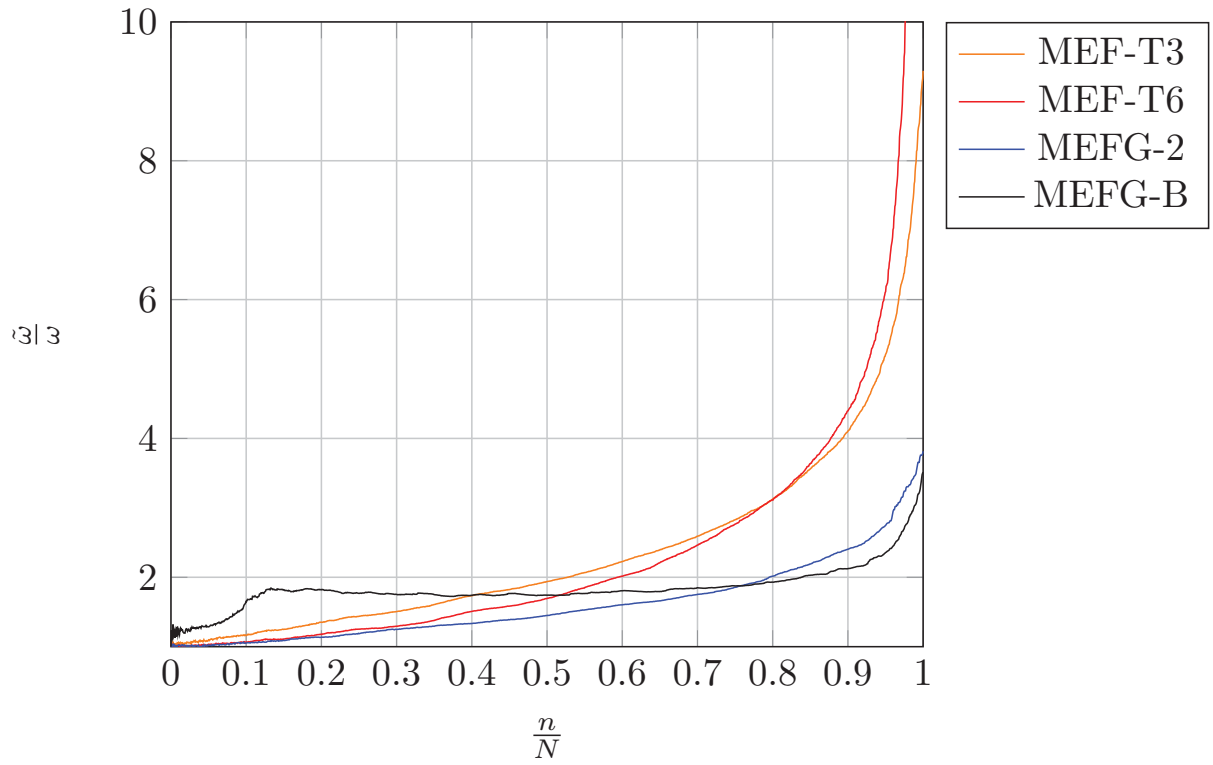
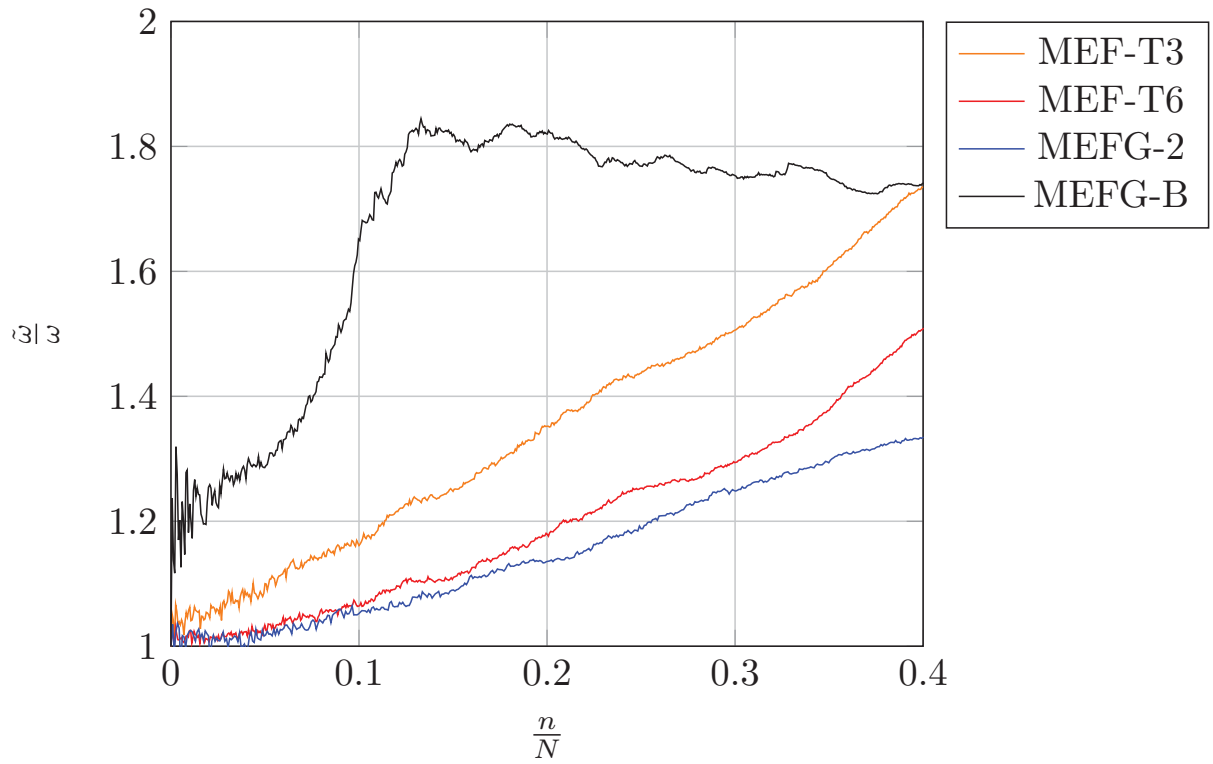


Figura 6.29: ESPECTRO DE FREQUÊNCIAS AMPLIADO



De acordo com a Tabela 6.26 o modelo do MEFG-2B possui 1504 graus de liberdade, enquanto que o MEFG-2 possui 1152, o MEF-T3 1600 e o MEF-T6 1624 graus de liberdade. Além da relativa diferença de número de graus de liberdade entre as malhas (Figura 48), verifica-se também a diferença de quantidade de elementos entre elas, sendo a malha do MEFG-2 aquela que possui menos elementos finitos.

Na Tabela 6.5 e no gráfico de barras da Figura 6.27 verifica-se que o MEFG-2B é o método que apresenta menos precisão na aproximação das frequências iniciais. O MEF-T6 é o método que se mostrou mais preciso entre todos os métodos. O MEFG-2 apresentou resultados próximos aos do MEF-T6, sendo que foi superior ao MEF-T3. Porém, vale notar que o MEFG-2 possui 472 graus de liberdade a menos que o MEF-T6.

No espectro da Figura 6.28, nota-se que o MEFG-2B supera a precisão do MEF-T3 e MEF-T6, a partir de 50% das frequências. Posteriormente o MEFG-2B supera a precisão do MEFG-2 a partir de 80% das frequências. Este resultado mostra que o enriquecimento de elementos com apenas funções bolhas resultou em mais precisão nos intervalos de frequências altas, neste exemplo.

No espectro ampliado contido na Figura 6.29, verifica-se que os resultados do MEFG-2 são mais precisos que os do MEF-T6 e que os resultados do MEFG-2B são bastante ruins na faixa das 40% primeiras frequências.

Pelo fato do MEFG-2B ser enriquecido apenas com funções do tipo bolha, os graus de liberdade de campo não precisam serem acoplados nas matrizes de rigidez e massa global, o que acaba facilitando a montagem do sistema de equações.

Na Figura 6.30 e na Figura 6.31 são mostrados o segundo modo de vibração obtidos pelo MEFG-2 e pelo MEFG-2B, e o modo de referência, respectivamente.

Figura 6.30: PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO LIVRE DA PAREDE

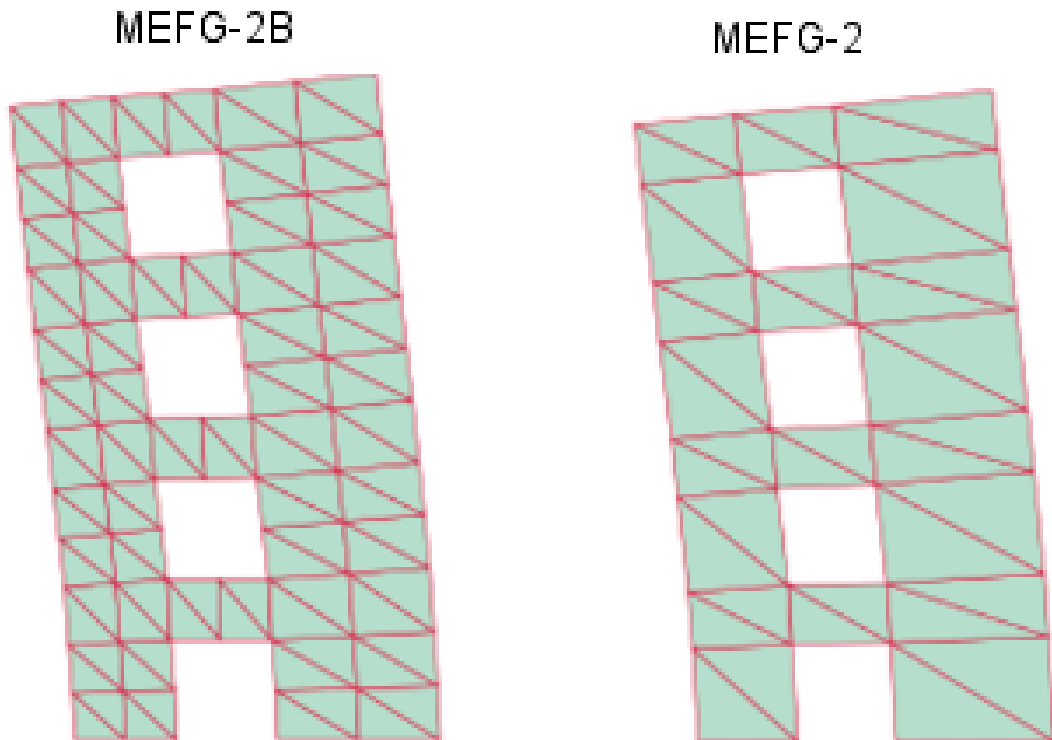
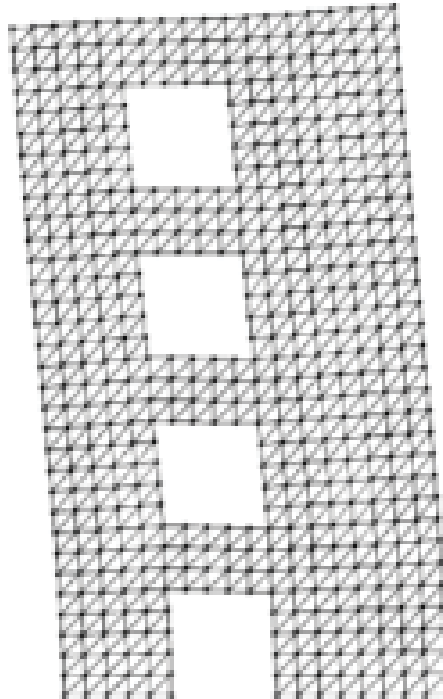


Figura 6.31: REFERÊNCIA DO PRIMEIRO MODO DE VIBRAÇÃO LIVRE DA PAREDE



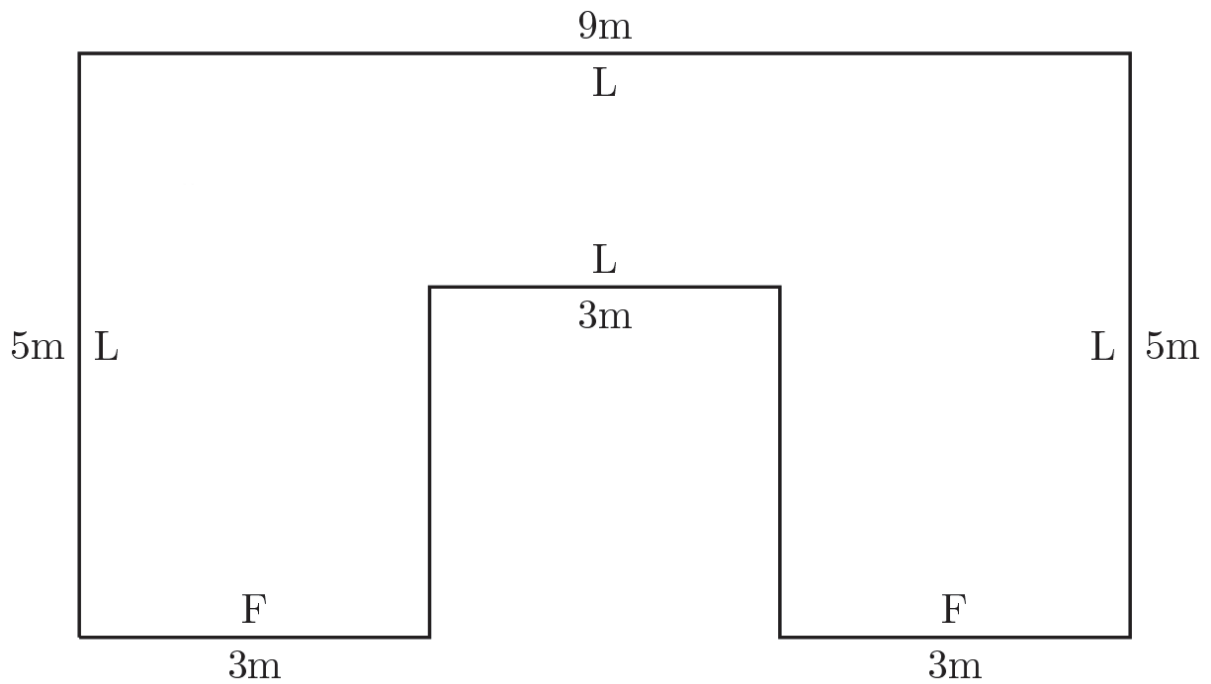
FONTE: Nguyen-Thanh et al. (2010)

Os modos obtidos pelo MEF-G-2B e MEF-G-2 são semelhantes ao modo de referência.

## 6.7 PÓRTICO EM ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO

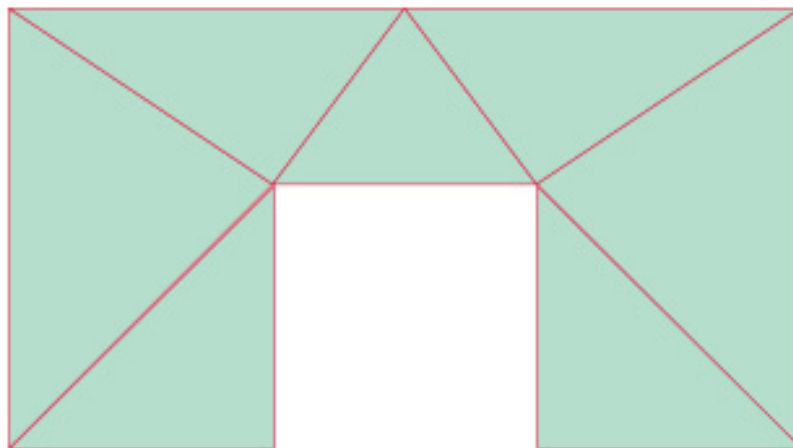
Seja um modelo de pórtico em Estado Plano de Deformação (EPD), apresentado na Figura 6.32, formado por um material isotópico com  $E = 17GPa$ ,  $\rho = 7800kg/m^3$  e  $\nu = 0,2$ , fixado na base. Conforme Boscolo e Banerjee (2011), este modelo pode representar o comportamento dinâmico de estruturas em EPD que poderiam estar sujeitas às ações sísmicas ou ações de ventos. Neste problema serão comparados o MEF-G-2, MEF-T3 e MEF-T6, relativos as frequências naturais de vibração. A malha utilizada para a modelagem numérica via MEF-G-2 está indicada na Figura 6.33.

Figura 6.32: MODELO DE UM PÓRTICO EM ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO.



FONTE: Adaptado de Boscolo e Banerjee (2011)

Figura 6.33: MALHA TRIANGULAR CONSTRUÍDA PARA O MEF2 de um pórtico em EPD.

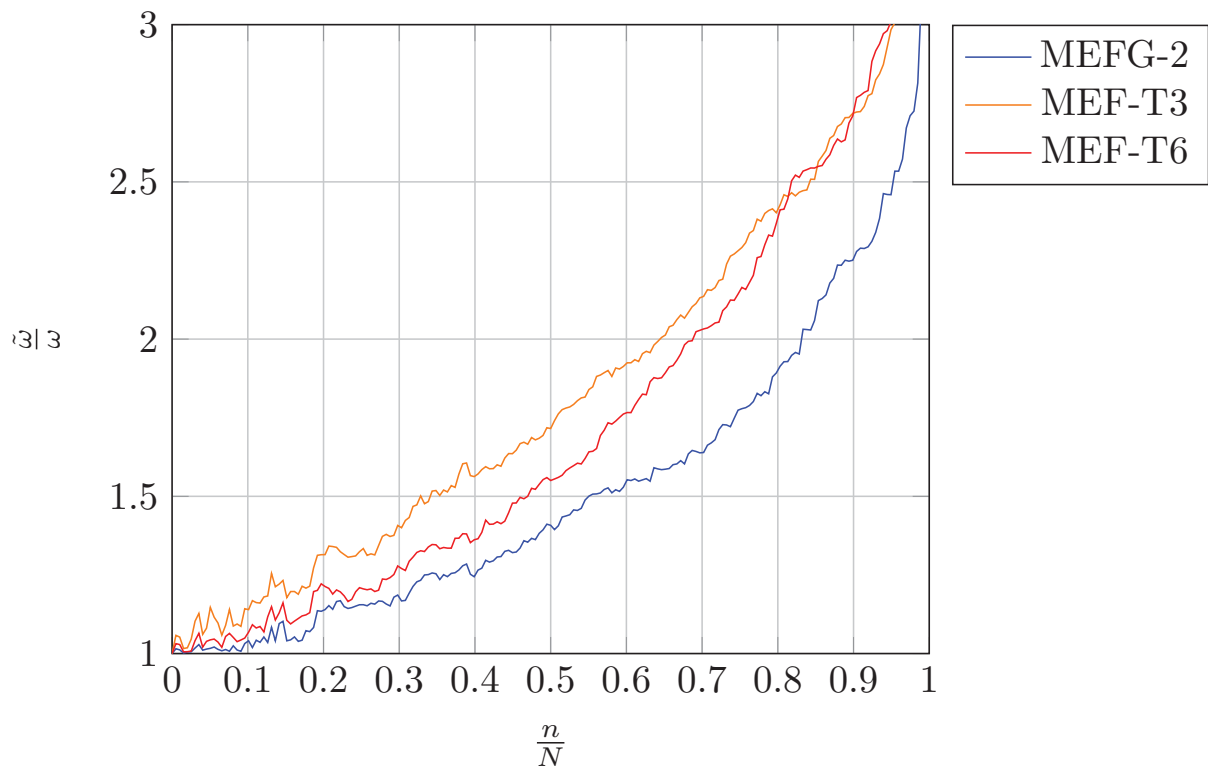


Na Tabela 6.6 estão apresentadas as 10 primeiras frequências naturais obtidas pelo MEF2 com  $\beta_j = \pi$  e  $\beta_j = 3\pi$ , para  $nl = 1$  respectivamente. Os resultados de referência foram obtidos a partir de um modelo com malha super refinada aplicando-se o MEF com elementos finitos quadrilaterais. A Figura 6.34 apresenta os espectros de frequência para os diferentes métodos aqui analisados.

Tabela 6.6: FREQUÊNCIAS NATURAIS DE VIBRAÇÃO (Hz) DE UM PÓRTICO EM EPD.

FREQ.	REF.	MEFG-2	
	24000 G.L	288 G.L	288 G.L
		$\beta_j = \pi$	$\beta_j = 3\pi$
1	26.286	26.674	26.677
2	54.943	55.605	55.594
3	73.735	73.841	73.867
4	75.665	76.001	76.019
5	81.765	82.092	82.243
6	98.134	99.419	99.933
7	130.36	133.843	134.201
8	152.137	153.441	153.780
9	170.100	171.393	172.588
10	181.31	183.668	184.440

Figura 6.34: ESPECTROS DE FREQUÊNCIAS NATURAIS - PÓRTICO EPD.



Pela Tabela 6.6 observa-se que a mudança do parâmetro  $\beta_j$  de  $\pi$  para  $3\pi$  faz o MEFG-2 produzir frequências mais distantes em relação as frequências de referência, por esse motivo o espectro da Figura 6.34 foi construído para o MEFG-2 com  $\beta_j = \pi$ . Neste espectro é possível notar que os resultados são mais precisos quando obtidos pelo MEFG-2, em comparação ao MEF-T3 e até mesmo em relação ao MEF-T6. Nas Figuras 6.35 e 6.36 são mostrados o quinto modo de vibração obtido pelo MEFG-2 e o modo de referência, respectivamente.

Figura 6.35: QUINTO MODO DE VIBRAÇÃO DO PÓRTICO EM EPD OBTIDO PELO MEFG-2 COM  $\beta_j = \pi$

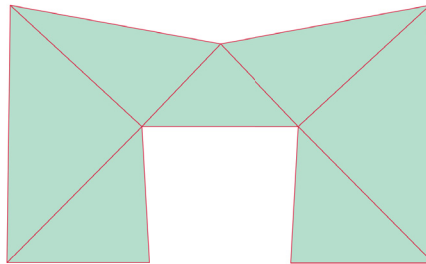
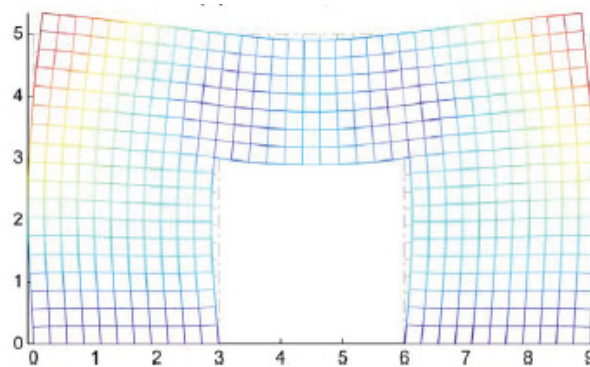


Figura 6.36: REFERÊNCIA DO QUINTO MODO DE VIBRAÇÃO DO PÓRTICO EM EPD.



FONTE: Boscolo e Banerjee (2011)

O modo de vibração gerado pelo MEFG-2 é semelhante ao modo de referência, mesmo utilizando menos elementos finitos. A partir deste problema verifica-se que o MEFG-2 apresenta desempenho superior em relação ao MEF tradicional. A depender da malha formada, mesmo com menos elementos finitos o modelo do MEFG-2 já pode prever o modo de vibração satisfatoriamente. A elevação do  $\beta_j$  deteriora o resultado, sendo então  $\beta_j = \pi$  o valor mais adequado para este tipo de simulação.

## 7 CONCLUSÃO

No presente trabalho foi aplicado o MEFG com enriquecimento de elementos triangulares, através da partição da unidade importada do Método dos Elementos Finitos e com funções de enriquecimento trigonométricas. Os modelos analisados levaram em conta as teorias de estado plano de tensões e deformações, para peças com condições de contorno arbitrárias, com o objetivo de verificar a precisão das respostas dinâmicas em problemas diversos de vibração livre.

A respeito da pesquisa bibliográfica realizada nesse trabalho, foi encontrado apenas um trabalho que utilizou o MEFG estruturado com elementos triangulares na aplicação em problemas de análise dinâmica, porém com enriquecimento polinomial. A proposta de formulação do MEFG com elemento triangular enriquecido por meio de funções trigonométricas parece ser inédita. Foram encontrados diversos trabalhos relativos às soluções de problemas de vibração livre de estruturas em estado plano, sendo que a maioria delas consistem em soluções numéricas e baseadas Método de Rayleigh-Ritz. Sobre soluções analíticas, a pesquisa bibliográfica é menor e concentrada em problemas com geometria simples e com condições de contorno limitadas.

O primeiro enriquecimento foi construído em um elemento mestre triangular obtido a partir da simplificação de um elemento quadrilateral enriquecido (MEFG-D), que foi proposto em estudos anteriores. Posteriormente, foi proposto um novo elemento triangular enriquecido diretamente com funções trigonométricas (MEFG-2), haja vista que a performance do primeiro não foi satisfatória, de acordo com o apresentado na primeira simulação.

Comparando o MEFG-2 com o MEFG-D, foi constatado que o primeiro apresentou melhor desempenho na aproximação de frequências naturais para problemas de estado plano de tensões, de modo que o primeiro passou a ser usado nos demais problemas propostos. É notável que o MEFG-2 apresentou boas respostas nas faixas iniciais das frequências do espectro, para cerca de 30% das frequências iniciais. Porém, na faixa final do espectro de frequências a performance do MEFG-2 foi inferior ao MEF-T3 e MEF-T6.

As matrizes de massa do MEFG-2 possuem número de condicionamento menor do que as matrizes do MEFG-Q apresentado por Torii (2012) e Cittadin (2020). Por conta disto não se observou instabilidade numérica na modelagem dos problemas aqui analisados via MEFG-2.

No problema de uma parede com furos e de um pórtico, o MEFG-2 apresentou respostas melhores em relação ao MEF tradicional. Entretanto, verifica-se que o MEFG-2B, enriquecido apenas com funções tipo bolha, gera melhores resultados relativos as frequências naturais contidas na faixa alta das frequências do espectro, porém ruins na faixa de frequências baixas.

Nos problemas de análise modal o MEFG-2 é adequado quando se deseja obter as frequências e modos de vibração no campo inicial do espectro de frequências, sendo estas em geral as mais importantes nos problemas de engenharia.

No sentido de trazer melhorias ao método na resposta de altas frequências, sugere-se que em estudos futuros sejam avaliadas as seguintes propostas:

- Refinamento adaptativo em problemas de estado plano;
- Dado que o condicionamento das matrizes do MEFG em elementos triangulares é mais baixo, vale promover mais níveis de enriquecimento neste método, a fim de verificar a sua eficiência;
- Aplicação do MEFG-2 em problemas de iteração entre sistemas rígido-flexível;

- Implementação de outras partições da unidade, tais como polinômios racionais, funções flat-top e PU trigonométrica;
- Implementação do MEFG Estável levando em conta os elementos triangulares.

## REFERÊNCIAS

- AGARWAL, Priyam; CHAKRABORTY, Ankit; SINGH, Akhilendra. Simulation of bi-material plate by XFEM under dynamic load. **Materials Today: Proceedings**, Elsevier, v. 2, n. 4-5, p. 1552–1559, 2015.
- AGATHOS, Konstantinos; BORDAS, Stéphane PA; CHATZI, Eleni. Improving the conditioning of XFEM/GFEM for fracture mechanics problems through enrichment quasi-orthogonalization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 346, p. 1051–1073, 2019.
- ALLEN, DN DE G et al. CORRESPONDENCE. THE EXPERIMENTAL AND MATHEMATICAL ANALYSIS OF ARCH DAMS, WITH SPECIAL REFERENCE TO DOKAN. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, Thomas Telford-ICE Virtual Library, v. 5, n. 4, p. 412–434, 1956.
- ARNDT, Marcos. **O método dos elementos finitos generalizados aplicado à análise de vibrações livres de estruturas reticuladas**. 2009. Tese (Doutorado) – UFPR, Curitiba - Brasil.
- BABUŠKA, Ivo; BANERJEE, Uday. Stable generalized finite element method (SGFEM). **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 201, p. 91–111, 2012.
- BABUŠKA, Ivo; CALOZ, Gabriel; OSBORN, John E. Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, SIAM, v. 31, n. 4, p. 945–981, 1994.
- BABUŠKA, Ivo; LIPTON, Robert et al. Multiscale-spectral GFEM and optimal oversampling. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 364, p. 112960, 2020.
- BABUŠKA, Ivo; MELENK, Jens M. The partition of unity method. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 40, n. 4, p. 727–758, 1997.
- BABUŠKA, Ivo; ZHANG, Zhimin. The partition of unity method for the elastically supported beam. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 152, n. 1-2, p. 1–18, 1998.
- BAO, Siyuan; WANG, Shuodao. A generalized solution procedure for in-plane free vibration of rectangular plates and annular sectorial plates. **Royal Society open science**, The Royal Society Publishing, v. 4, n. 8, p. 170484, 2017.
- BARDELL, NS; LANGLEY, RS; DUNSDON, JM. On the free in-plane vibration of isotropic rectangular plates. **Computational Mechanics**, Elsevier, 1996.
- BATHE, Klaus-Jürgen. Finite Element Procedures for Solids and Structures Linear Analysis. **Finite Element Procedures**, p. 148–214, 1982.
- BATHE, Klaus-Jürgen; ZHANG, Lingbo. The finite element method with overlapping elements—a new paradigm for CAD driven simulations. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 182, p. 526–539, 2017.
- BELYTSCHKO, Ted; GRACIE, Robert; VENTURA, Giulio. A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. **Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering**, IOP Publishing, v. 17, n. 4, p. 043001, 2009.
- BERCIN, AN; LANGLEY, RS. Application of the dynamic stiffness technique to the in-plane vibrations of plate structures. **Computers & structures**, Elsevier, v. 59, n. 5, p. 869–875, 1996.

- BOSCOLO, M; BANERJEE, JR. Dynamic stiffness method for exact inplane free vibration analysis of plates and plate assemblies. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 330, n. 12, p. 2928–2936, 2011.
- BRAUN, SG et al. Encyclopedia of vibration: Volumes 1, 2, and 3. **Appl. Mech. Rev.**, v. 55, n. 3, b45–b45, 2002.
- BROWN, Eric Hugh et al. CORRESPONDENCE. THE EFFECT OF UPLIFT ON GRAVITY-DAM PROFILES. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers**, Thomas Telford-ICE Virtual Library, v. 5, n. 6, p. 867–875, 1956.
- CHEN, Mingfei; JIN, Guoyong; YE, Tianguai et al. An isogeometric finite element method for the in-plane vibration analysis of orthotropic quadrilateral plates with general boundary restraints. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 133, p. 846–862, 2017.
- CHEN, Yuehua; JIN, Guoyong; LIU, Zhigang. Flexural and in-plane vibration analysis of elastically restrained thin rectangular plate with cutout using Chebyshev–Lagrangian method. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 89, p. 264–278, 2014.
- CITTADIN, Carolina Castro et al. Selective enrichment and modal matrix reduction in the generalized/eXtended Finite Element Method applied to dynamic analysis of plane state problems. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, Elsevier, v. 91, p. 104430, 2022.
- CITTADIN, Carolina Castro. **Enriquecimento seletivo com uso do método dos elementos finitos generalizados na análise dinâmica de problemas de estado plano**. 2020. Dissertação de Mestrado – UFPR, Curitiba - Brasil.
- CLOVIS, R Maliska. Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional. **2ª Edição–2004. LTC**, 2000.
- COL DEBELLA, Letícia Barizon. Análise dinamica transiente pelo método dos elementos finitos generalizados. **Engineering Computations**, Universidade Federal Do Paraná, v. 1, n. 1, 2019.
- CORRÊA, Ramon Macedo. **Análise dinâmica de arcos utilizando o método dos elementos finitos generalizados**. 2019. Dissertação de Mestrado – UFPR, Curitiba - Brasil.
- CORRÊA, Ramon Macedo; ARNDT, Marcos; MACHADO, Roberto Dalledone. Free in-plane vibration analysis of curved beams by the generalized/extended finite element method. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, Elsevier, v. 88, p. 104244, 2021.
- COTTRELL, J Austin et al. Isogeometric analysis of structural vibrations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 195, n. 41-43, p. 5257–5296, 2006.
- COURANT, Richard. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations. **Bulletin of the American mathematical Society**, American Mathematical Society, v. 49, n. 1, p. 1–23, 1943.
- DANG-TRUNG, H; YANG, Dane-Jong; LIU, YC. Improvements in Shear Locking and Spurious Zero Energy Modes Using Chebyshev Finite Element Method. **Journal of Computing and Information Science in Engineering**, American Society of Mechanical Engineers Digital Collection, v. 19, n. 1, 2019.
- DE BARCELLOS, Clovis Sperb; MENDONÇA, R Mendonça; DUARTE, Carlos A. AC k continuous generalized finite element formulation applied to laminated Kirchhoff plate model. **Computational Mechanics**, Springer, v. 44, n. 3, p. 377–393, 2009.
- DEBELLA, Leticia Col et al. Transient dynamic analysis of bars and trusses by the adaptive generalized finite element method. **Engineering Computations**, Emerald Publishing Limited, 2019.

- DEUTSCH, A; EISENBERGER, M. Benchmark analytic in-plane vibration frequencies of orthotropic rectangular plates. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, p. 117248, 2022.
- DOZIO, Lorenzo. Free in-plane vibration analysis of rectangular plates with arbitrary elastic boundaries. **Mechanics Research Communications**, Elsevier, v. 37, n. 7, p. 627–635, 2010.
- DU, Jingtao et al. An analytical method for the in-plane vibration analysis of rectangular plates with elastically restrained edges. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 306, n. 3-5, p. 908–927, 2007.
- DUARTE, C Armando; BABUŠKA, Ivo; ODEN, J Tinsley. Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 77, n. 2, p. 215–232, 2000.
- DUARTE, C Armando; KIM, D-J. Analysis and applications of a generalized finite element method with global–local enrichment functions. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 197, n. 6, p. 487–504, 2008.
- DUARTE, C Armando; ODEN, J Tinsley. An hp adaptive method using clouds. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 139, n. 1-4, p. 237–262, 1996.
- DUARTE, CA; BABUŠKA, I. A global-local approach for the construction of enrichment functions for the generalized fem and its application to propagating three-dimensional cracks. In: ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods, Lisbon, Portugal. [S.l.: s.n.], 2005. P. 11–14.
- DUARTE, CA; KIM, D-J; QUARESMA, DM. Arbitrarily smooth generalized finite element approximations. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 196, n. 1-3, p. 33–56, 2006.
- FACCO, WG et al. Alternative proposal of the high-order Gauss quadrature for reference triangle in the generalized finite element method. **Computers & Mathematics with Applications**, Elsevier, v. 80, n. 10, p. 2162–2175, 2020.
- FARAG, NH; PAN, J. Free and forced in-plane vibration of rectangular plates. **The Journal of the Acoustical Society of America**, ASA, v. 103, n. 1, p. 408–413, 1998.
- FREISLEBEN, Patricia Luiza Moscon. Análise dinâmica de vigas de Timoshenko utilizando o método dos elementos finitos generalizados.
- GARZON, Jorge; DUARTE, Carlos Armando; BUTTLAR, William. Analysis of reflective cracks in airfield pavements using a 3-D generalized finite element method. **Road Materials and Pavement Design**, Taylor & Francis, v. 11, n. 2, p. 459–477, 2010.
- GORMAN, DJ. Accurate analytical type solutions for the free in-plane vibration of clamped and simply supported rectangular plates. **Journal of sound and vibration**, Elsevier, v. 276, n. 1, p. 311–333, 2004.
- GUPTA, KK; MEEK, JL. A brief history of the beginning of the finite element method. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 39, n. 22, p. 3761–3774, 1996.
- HAMMER, Preston C; STROUD, Arthur H. Numerical integration over simplexes. **Mathematical tables and other aids to computation**, JSTOR, v. 10, n. 55, p. 137–139, 1956.
- HATAMI, Mohammad; GHASEMI, SE. Thermophoresis and Brownian diffusion of nanoparticles around a vertical cone in a porous media by Galerkin finite element method (GFEM). **Case Studies in Thermal Engineering**, Elsevier, v. 28, p. 101627, 2021.

- HOUMAT, A. In-plane vibration of plates with curvilinear plan-forms by a trigonometrically enriched curved triangular p-element. **Thin-Walled Structures**, Elsevier, v. 46, n. 2, p. 103–111, 2008.
- HUGHES, Thomas JR. **The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis**. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.
- KIM, Chang-Boo; CHO, Hyeon Seok; BEOM, Hyeon Gyu. Exact solutions of in-plane natural vibration of a circular plate with outer edge restrained elastically. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 331, n. 9, p. 2173–2189, 2012.
- KISHI, Kota et al. Dynamic crack propagation analysis based on the s-version of the finite element method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 366, p. 113091, 2020.
- LANGLEY, Robin S; BERGIN, Ahmet N. Wave intensity analysis of high frequency vibrations. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society London, v. 346, n. 1681, p. 489–499, 1994.
- LEUNG, Andrew YT. **Dynamic stiffness and substructures**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012.
- LEUNG, AYT et al. Analytic trapezoidal Fourier p-element for vibrating plane problems. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 271, n. 1, p. 67–81, 2004.
- LIU, Bo; LIU, Cuiyun; LU, Shuai et al. A differential quadrature hierarchical finite element method using Fekete points for triangles and tetrahedrons and its applications to structural vibration. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, 2019.
- LIU, Bo; XING, Yufeng. Exact solutions for free in-plane vibrations of rectangular plates. **Acta Mechanica Sinica**, Elsevier, v. 24, n. 6, p. 556–567, 2011.
- LIU, Cuiyun; LIU, Bo; XING, Yufeng et al. In-plane vibration analysis of plates in curvilinear domains by a differential quadrature hierarchical finite element method. **Meccanica**, Springer, v. 52, n. 4-5, p. 1017–1033, 2017.
- LIU, Tao; HU, Guoqing et al. A unified formulation for free in-plane vibrations of arbitrarily-shaped straight-sided quadrilateral and triangular thin plates. **Applied Acoustics**, Elsevier, v. 155, p. 407–422, 2019.
- LIU, Tao; WANG, Qingshan et al. Free in-plane vibration of plates with arbitrary curvilinear geometry: Spectral-Chebyshev model and experimental study. **Thin-Walled Structures**, Elsevier, v. 170, p. 108628, 2022.
- LIU, X; BANERJEE, JR. A spectral dynamic stiffness method for free vibration analysis of plane elastodynamic problems. **Mechanical Systems and Signal Processing**, Elsevier, v. 87, p. 136–160, 2017.
- MALACARNE, Maicon Felipe. **O indicador de erro de Friberg empregado no método dos elementos finitos generalizados aplicado à análise dinâmica de estruturas**. 2018. Dissertação de Mestrado – UFPR, Curitiba - Brasil.
- MEIROVITCH, L; BARUH, Haim. On the inclusion principle for the hierarchical finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 19, n. 2, p. 281–291, 1983.
- MELENK, Jens M; BABUŠKA, Ivo. The partition of unity finite element method: basic theory and applications. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 139, n. 1-4, p. 289–314, 1996.

- MOES, Nicolas; BELYTSCHKO, Ted. Extended finite element method for cohesive crack growth. **Engineering fracture mechanics**, Elsevier, v. 69, n. 7, p. 813–833, 2002.
- MOXEY, David et al. Optimising the performance of the spectral/hp element method with collective linear algebra operations. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 310, p. 628–645, 2016.
- NARITA, Yoshihiro; INNAMI, Michio. Identifying all combinations of boundary conditions for in-plane vibration of isotropic and anisotropic rectangular plates. **Thin-Walled Structures**, Elsevier, v. 164, p. 107320, 2021.
- NETO, Dorival Piedade; PROENCA, Sergio Persival Baroncini. Generalized Finite Element Method in linear and nonlinear structural dynamic analyses. **Engineering Computations**, Emerald Group Publishing Limited, v. 33, n. 3, 2016.
- NGUYEN-THANH, Nhon et al. An alternative alpha finite element method ( $A\alpha$ FEM) for free and forced structural vibration using triangular meshes. **Journal of computational and applied mathematics**, Elsevier, v. 233, n. 9, p. 2112–2135, 2010.
- ODEN, J Tinsley; DUARTE, CAM; ZIENKIEWICZ, Olek C. A new cloud-based hp finite element method. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 153, n. 1-2, p. 117–126, 1998.
- PAPKOV, SO. A new method for analytical solution of inplane free vibration of rectangular orthotropic plates based on the analysis of infinite systems. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 369, p. 228–245, 2016.
- PARK, Chan Il. Frequency equation for the in-plane vibration of a clamped circular plate. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 313, n. 1, p. 325–333, 2008.
- PENA, Gonçalo. **Spectral element approximation of the incompressible Navier-Stokes equations in a moving domain and applications**. 2009. Tese (Doutorado) – Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL).
- PETROLI, Thamara. **Condicionamento do problema de autovalores obtido do método de elementos finitos generalizados na dinâmica de estruturas**. 2016. Dissertação de Mestrado – UFPR, Curitiba - Brasil.
- PETYT, Maurice. **Introduction to finite element vibration analysis**. [S.l.]: Cambridge university press, 2010.
- RAMOS, Caio Silva. **Partições da Unidade flat-top e trigonométricas no Método dos Elementos Finitos Generalizados**. 2019. Dissertação de Mestrado – Universidade de São Paulo.
- RAO, Singiresu S. **The finite element method in engineering**. [S.l.]: Butterworth-heinemann, 2017.
- RAYLEIGH, John William Strutt Baron. **The theory of sound**. [S.l.]: Macmillan, 1896. v. 2.
- REDDY, Junuthula Narasimha. **An introduction to the finite element method**. [S.l.]: McGraw-Hill New York, 1993. v. 2.
- SADD, Martin H. **Elasticity: theory, applications, and numerics**. [S.l.]: Academic Press, 2009.
- SANCHEZ-RIVADENEIRA, AG; DUARTE, CA. A stable generalized/extended FEM with discontinuous interpolants for fracture mechanics. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 345, p. 876–918, 2019.

- SEOK, Jongwon; TIERSTEN, HF; SCARTON, HA. Free vibrations of rectangular cantilever plates. Part 2: in-plane motion. **Journal of sound and vibration**, Elsevier, v. 271, n. 1-2, p. 147–158, 2004.
- SHANG, Hsu Yang; MACHADO, Roberto Dalledone; ABDALLA FILHO, Joao Elias. On the performance of GFEM with trigonometric enrichment in bidimensional dynamic elastoplastic modelling. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, Elsevier, v. 73, p. 512–527, 2019.
- SHANG, Hsu Yang et al. Numerical analysis of plane stress free vibration in severely distorted mesh by Generalized Finite Element Method. **European Journal of Mechanics-A/Solids**, Elsevier, v. 62, p. 50–66, 2017.
- SHANG, HY; MACHADO, RD; ABDALLA FILHO, JE. Dynamic analysis of Euler–Bernoulli beam problems using the generalized finite element method. **Computers & structures**, Elsevier, v. 173, p. 109–122, 2016.
- SHI, Xianjie; LI, Wen; SHI, Dongyan. Free in-plane vibrations of annular sector plates with elastic boundary supports. In: ACOUSTICAL SOCIETY OF AMERICA, 1. PROCEEDINGS of Meetings on Acoustics 164ASA. [S.l.: s.n.], 2012. v. 18, p. 030001.
- SHYLAJA, G et al. Improved finite element triangular meshing for symmetric geometries using MATLAB. **Materials Today: Proceedings**, Elsevier, 2020.
- SILVA, Ivan Assing da et al. Assessment of the flat-top stable GFEM for free vibration analysis. **Computers & Mathematics with Applications**, Elsevier, v. 117, p. 271–283, 2022.
- SILVESTER, P. High-order polynomial triangular finite elements for potential problems. **International Journal of Engineering Science**, Elsevier, v. 7, n. 8, p. 849–861, 1969.
- SINGH, AV; MUHAMMAD, T. Free in-plane vibration of isotropic non-rectangular plates. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 273, n. 1, p. 219–231, 2004.
- SORIANO, Humberto Lima. **Elementos finitos: formulação e aplicação na estática e dinâmica das estruturas**. [S.l.]: Ciência Moderna, 2009.
- STEIN, Erwin. History of the finite element method—mathematics meets mechanics—part I: Engineering developments. In: THE history of theoretical, material and computational mechanics-mathematics meets mechanics and engineering. [S.l.]: Springer, 2014. P. 399–442.
- STROUBOULIS, Theofanis; COPPS, Kevin; BABUŠKA, Ivo. The generalized finite element method. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 190, n. 32-33, p. 4081–4193, 2001.
- SUAREZ, Oscar AG de; ROSSI, Rodrigo; SILVA, Cláudio RA da. Enrichment of a rational polynomial family of shape functions with regularity  $Ck_0$ ,  $k= 0, 2, 4, \dots$ : Applications in axisymmetric plates and shells. **Engineering Computations**, Emerald Group Publishing Limited, 2012.
- SZABÓ, Barna; DÜSTER, Alexander; RANK, Ernst. The p-version of the finite element method. **Encyclopedia of computational mechanics**, Wiley Online Library, 2004.
- TAYLOR, Robert L; ZIENKIEWICZ, Olgierd Cecil; OÑATE, Eugenio. A hierarchical finite element method based on the partition of unity. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 152, n. 1-2, p. 73–84, 1998.
- TORII, André Jacomel. **Análise dinâmica de estruturas com o método dos elementos finitos generalizado**. 2012. Tese (Doutorado) – UFPR, Curitiba - Brasil.

- TORII, André Jacomel; MACHADO, Roberto Dalledone; ARNDT, Marcos. GFEM for modal analysis of 2D wave equation. **Engineering Computations**, Emerald Group Publishing Limited, v. 32, n. 6, p. 1779–1801, 2015.
- TURNER, M Jon et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures. **journal of the Aeronautical Sciences**, v. 23, n. 9, p. 805–823, 1956.
- WANG, Gang; WERELEY, Norman M. Free in-plane vibration of rectangular plates. **AIAA journal**, v. 40, n. 5, p. 953–959, 2002.
- WANG, Zekun; XING, Yufeng; SUN, Qiaozhen. Highly accurate closed-form solutions for the free in-plane vibration of rectangular plates with arbitrary homogeneous boundary conditions. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 470, p. 115166, 2020.
- WEINHARDT, Paulo de Oliveira. **Estudo da estabilidade do método dos elementos finitos generalizados aplicado à análise dinâmica**. 2016. Dissertação de Mestrado – UFPR, Curitiba - Brasil.
- WITTRICK, W\_H; WILLIAMS, FW. A general algorithm for computing natural frequencies of elastic structures. **The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics**, Oxford University Press, v. 24, n. 3, p. 263–284, 1971.
- XING, YF; LIU, B. Exact solutions for the free in-plane vibrations of rectangular plates. **International Journal of Mechanical Sciences**, Elsevier, v. 51, n. 3, p. 246–255, 2009.
- YUAN, Yunbo; LI, Hongliang; PARKER, Robert G et al. A unified semi-analytical method for free in-plane and out-of-plane vibrations of arbitrarily shaped plates with clamped edges. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 485, p. 115573, 2020.
- YUAN, Yunbo; LI, Hongliang; WANG, Donghua et al. An exact analytical solution for free in-plane vibration of sector plates with simply supported radial edges. **Journal of Sound and Vibration**, Elsevier, v. 466, p. 115024, 2020.
- ZHANG, Qinghui; BANERJEE, Uday; BABUŠKA, Ivo. Higher order stable generalized finite element method. **Numerische Mathematik**, Springer, v. 128, n. 1, p. 1–29, 2014.
- ZHU, DC. Development of hierarchical finite element methods at BIAA. In: PROCEEDINGS of the international conference on computational mechanics. [S.l.: s.n.], 1986. v. 1.
- ZIENKIEWICZ, O; TAYLOR, R. **The finite element method 5th edition, volume 1: The Basis, Section 14.4**. [S.l.]: Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000.
- ZIENKIEWICZ, OC. The effect of pore pressures on stresses in gravity dams. **Journal of the Power Division**, American Society of Civil Engineers, v. 82, n. 4, p. 1042–1, 1956.
- ZIENKIEWICZ, Olgierd Cecil. Stability of parallel-branch and differential surge tanks. **Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 170, n. 1, p. 265–280, 1956.