

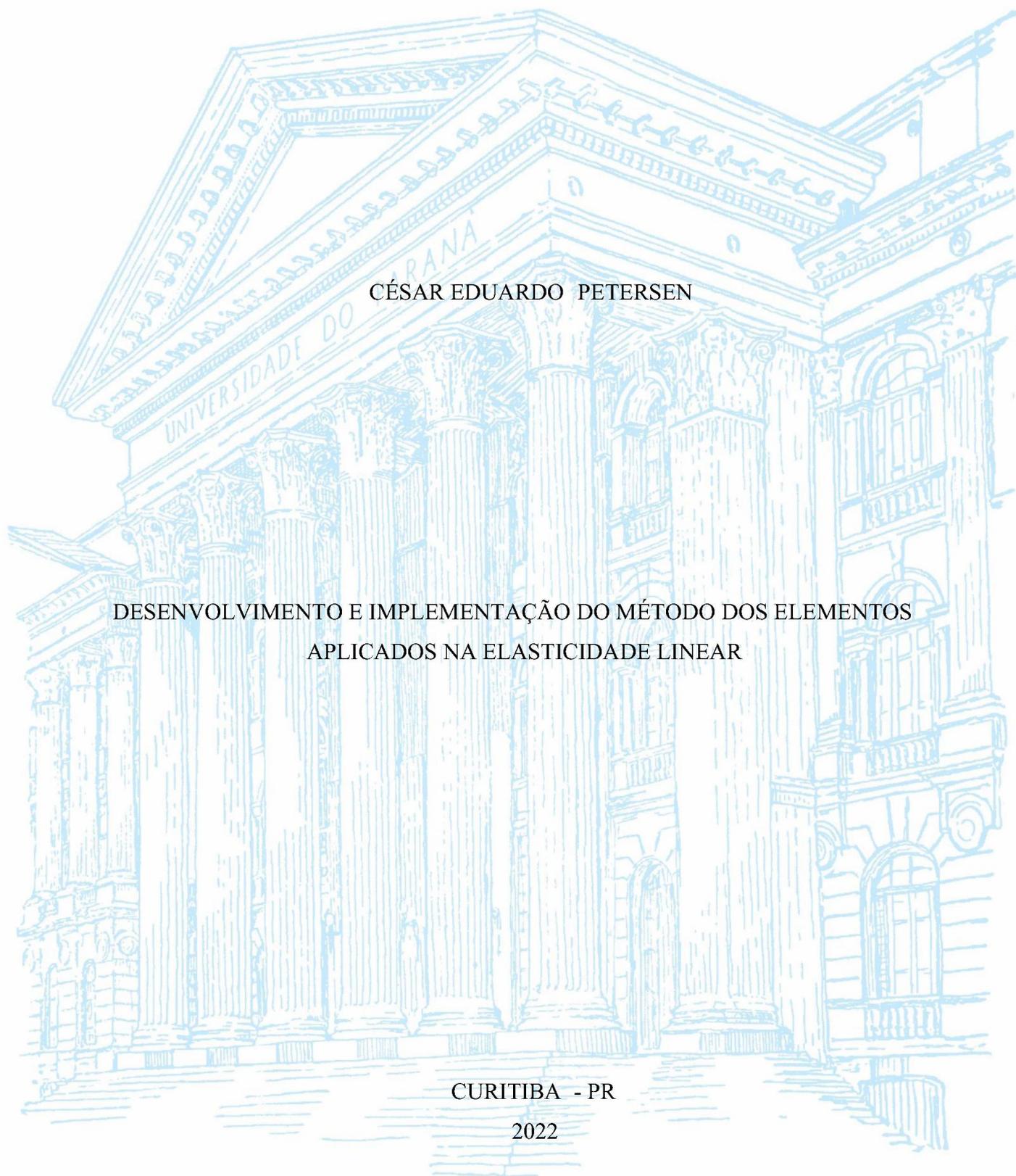
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CÉSAR EDUARDO PETERSEN

DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
APLICADOS NA ELASTICIDADE LINEAR

CURITIBA - PR

2022



CÉSAR EDUARDO PETERSEN

DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DOS ELEMENTOS
APLICADOS NA ELASTICIDADE LINEAR

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil, no curso de Pós-graduação em Engenharia Civil, área de concentração em Estruturas, Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Peralisi

Coorientador: Prof. Dr. Luis Alberto Montoya Coronado

CURITIBA - PR

2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Petersen, César Eduardo

Desenvolvimento e implementação do método dos elementos aplicados na elasticidade linear / César Eduardo Petersen. – Curitiba, 2022.

1 recurso on-line : PDF.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Tecnologia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Orientador: Ricardo Pieralisi

Coorientador: Luis Alberto Montoya Coronado

1. Elasticidade. 2. Análise estrutural (Engenharia). 3. Estática. 4. Método dos Elementos Aplicados. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Pieralisi, Ricardo. IV. Coronado, Luis Alberto Montoya. V. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894



MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
SETOR DE TECNOLOGIA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENGENHARIA CIVIL -
40001016049P2

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação ENGENHARIA CIVIL da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da Dissertação de Mestrado de **CÉSAR EDUARDO PETERSEN** intitulada: **Desenvolvimento e implementação do Método dos Elementos Aplicados na elasticidade linear**, sob orientação do Prof. Dr. RICARDO PIERALISI, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de mestre está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 16 de Setembro de 2022.

Assinatura Eletrônica

19/09/2022 16:09:49.0

RICARDO PIERALISI

Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica

19/09/2022 16:40:04.0

LUIZ ALKIMIN DE LACERDA

Avaliador Externo (INSTITUTO DE TECNOLOGIA PARA O DESENVOLVIMENTO)

Assinatura Eletrônica

20/09/2022 11:12:50.0

ROBERTO DALLEDONE MACHADO

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Centro Politécnico - CURITIBA - Paraná - Brasil

CEP 81531-980 - Tel: (41) 3361-3110 - E-mail: ppgecc@ufpr.br

Documento assinado eletronicamente de acordo com o disposto na legislação federal Decreto 8539 de 08 de outubro de 2015.

Gerado e autenticado pelo SIGA-UFPR, com a seguinte identificação única: 223462

Para autenticar este documento/assinatura, acesse <https://www.prppg.ufpr.br/siga/visitante/autenticacaoassinaturas.jsp>
e insira o código 223462

AGRADECIMENTOS

Primeiramente à minha família pelo amor e suporte imensuráveis.

Aos amigos que fiz durante essa jornada, aos colegas do TJPR: Silvia, Matheus, Carlos e Dorotea. Ao meu amigo André pelas muitas horas e muitos *prints* lidos revisando e ajudando no texto. As minhas queridíssimas professoras da graduação, Prof^a Dr^a Virginia Grace Barros e Prof^a Dr^a Elisa Henning, pelo incentivo e apoio para começar o mestrado.

Agradeço imensamente ao meu orientador, Prof^o Dr^o Ricardo Pieralisi, pela enorme paciência e incrível orientação, por toda a atenção e apoio dados e pela sugestão desse tema de pesquisa.

À Universidade Federal do Paraná (UFPR), ao seu Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC) e todos os seus membros que, direta e indiretamente, auxiliaram nessa pesquisa.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela disponibilidade de bolsa durante o primeiro ano desse mestrado.

Ao Tribunal de Justiça do Paraná (TJPR) pela oportunidade de estágio de pós-graduação em Engenharia Civil durante o segundo ano desse mestrado, e pelo enorme aprendizado da prática da engenharia.

A todos, muito obrigado!

*É um erro capital teorizar antes de ter os dados.
Insensivelmente, começa-se a distorcer os fatos para
adaptá-los às teorias, em vez de fazer com que as
teorias se adaptem aos fatos.*

Sherlock Holmes, em *Um Escândalo na Boêmia*, Conan Doyle (1891)

RESUMO

O Método dos Elementos Aplicados, do inglês Applied Element Method – AEM, consiste em discretizar um corpo em elementos rígidos ligados por pares de molas normais e tangenciais dispostas em suas bordas. As molas representam as deformações normais e tangenciais do elemento e são também usadas para determinar as tensões nestes. É possível considerar o efeito Poisson nos modelos analisando o efeito de um elemento em seus vizinhos, sem a necessidade de graus de liberdade extras. Tem sido aplicado com sucesso inclusive no estudo de colapso progressivo de estruturas, por permitir a análise desde o regime elástico-linear até a separação de elementos, combinando técnicas do Método dos Elementos Discretos. Neste trabalho, o AEM foi implementado na linguagem C++ com a base para a análise estática e linear de estruturas simples. Foram simulados modelos de carga axial em um corpo prismático sob tração e compressão, uma viga engastada com carga distribuída e concentrada, uma viga biapoada com carga distribuída, e uma viga biengastada com carga distribuída. Todos os modelos foram submetidos a uma análise de sensibilidade de malha, variando o tamanho e forma dos elementos, quantidade de molas e aplicação do efeito Poisson, além de serem comparados com modelos equivalente no tradicional Método dos Elementos Finitos – MEF. Não se observou diferença até a 3ª casa decimal nos deslocamentos entre as quantidades de molas testadas (5, 10 e infinitas) e a convergência do deslocamento é lenta em comparação ao MEF. Elementos retangulares convergem mais rapidamente, ao custo de uma distribuição de tensões mais pobre sem a possibilidade de considerar a aplicação do efeito Poisson. As distribuições de tensões nos modelos com aplicação do efeito Poisson, mesmo em modelos com malhas mais grosseiras, tiveram excelente concordância com os modelos analíticos e de referência em MEF.

Palavras chave: Mecânica Computacional. Método dos Elementos Aplicados. Análise Estrutural. Análise Estática.

ABSTRACT

The Applied Element Method – AEM, divides a body into smaller rigid elements connected by pairs of normal and shears springs distributed along their borders. The springs represent normal and shear strains on the elements, and are also used to calculate theirs stresses. It's possible to consider the Poisson effect on the models by analyzing the effect of an element on its neighbors, without the need of extra degrees of freedom. Is has been successfully applied on the progressive collapse of structures area for its ability to analyze from the elastic-linear regime until element separation, by combing technics from the Discrete Element Method. On this word, AEM was implemented in the C++ programming language for the linear elastic analysis part of the method to simulate simple structures. A prismatic body under axial load, both traction and compression, a cantilever with distributed and concentrated load, a simply supported beam with distributed load and a fixed beam with distributed load were simulated. All models were subjected to a sensitivity analysis for variation in the size and shape of the elements, number of springs and application of the Poisson effect, in addition to being compared with models in the equivalent Finite Elements Method – FEM. There were no differences up to the 3rd decimal place in the displacement values for the different springs quantities (5, 10 and infinite) and the convergence of the displacement is slow in comparison to FEM. Rectangular elements converged more quickly, at the cost of a poorer stress distribution without the possibility of the Poisson effect application. The stress distributions in the models with application of the Poisson effect, even in models with coarser meshes, had excellent agreement with the analytical and reference models in FEM.

Keywords: Computational Mechanics. Applied Element Method. Structural Analysis. Static Analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Corpo tridimensional generalizado no MEF.....	14
Figura 2 – Exemplo de discretização de viga biapoiada.	16
Figura 3 - Área de influência das molas.	17
Figura 4 – Esquema da armadura.	18
Figura 5 – Representação da mola conectando um par de elementos.	19
Figura 6 - Aplicação dos deslocamentos unitários.	20
Figura 7 - Esquema de numeração para efeito Poisson.	21
Figura 8 - Cálculo da tensão-deformação das molas.	23
Figura 9 - Modelo constitutivo de concreto de Maekawa.	24
Figura 10 - Critério de falha dos elementos.	24
Figura 11 - Elemento de placa fina.	28
Figura 12 – Elevação Norte do edifício colapsado.	30
Figura 13 - Comparação do colapso do viaduto real x simulado.	31
Figura 14 - Classes Element e Connection.	32
Figura 15 - Esquema de numeração dos elementos.	33
Figura 16 - Processo de geração de conexões de malhas arbitrárias.	34
Figura 17 – Submatriz não continua.	37
Figura 18 - Esquema do ensaio em corpo prismático.	41
Figura 19 - Análise de Sensibilidade de Malha no modelo de carga axial.	42
Figura 20 - Modelo de Carga axial MEF.	43
Figura 21 - Modelo de Carga Axial de compressão com efeito Poisson.	44
Figura 22 - Modelo de Carga axial tracionado, magnitude de deslocamento (exagerado 15.000x) [m].	45
Figura 23 - Malha de elementos triangulares.	45
Figura 24 - Análise de sensibilidade de carga axial com malha triangular.	46
Figura 25 - Modelo de carga axial com elemento triangular.	47
Figura 26 – Esquema de viga engastada com carga distribuída.	47
Figura 27 – Malha da viga.	48
Figura 28 – Análise de sensibilidade viga engastada com carga distribuída.	49
Figura 29 - Modelo MEF de viga engastada com carga distribuída.	50
Figura 30 – Resultados modelo de carga distribuída.	51
Figura 31 - Tensão X e tangencial XY no centro da viga com carga distribuída.	52

Figura 32 - Tensão X discretizada nas molas.	53
Figura 33 – Tensões em modelo com malha grosseira.	54
Figura 34 – Campos de tensões da viga engastada com carga distribuída e elementos retangulares.	55
Figura 35 – Resultados modelo de carga distribuída com elemento triangular.	56
Figura 36 – Esquema da viga engastada com carga concentrada.	57
Figura 37 – Análise de sensibilidade viga engastada com carga concentrada.	58
Figura 38 – Modelo MEF de viga engastada com carga concentrada.	59
Figura 39 – Resultados modelo de viga engastada e carga concentrada.	60
Figura 40 – Tensão X e tangencial XY no centro da viga engastada com carga concentrada.	61
Figura 41 – Esquema de viga biapoiada com carga distribuída.	62
Figura 42 – Análise de sensibilidade viga biapoiada com carga distribuída.	63
Figura 43 – Modelo MEF de viga biapoiada com carga distribuída.	64
Figura 44 – Resultados modelo de viga biapoiada e carga distribuída.	65
Figura 45 – Tensão X e tangencial XY da viga biapoiada com carga distribuída.	66
Figura 46 – Diferença entre modelo teórico e numérico.	66
Figura 47 – Esquema de viga biengastada com carga distribuída.	67
Figura 48 – Análise de sensibilidade viga biengastada com carga distribuída.	68
Figura 49 – Modelo MEF de viga biengastada com carga distribuída.	68
Figura 50 – Resultados modelo de viga biengastada e carga distribuída.	69
Figura 51 – Tensão X e tangencial XY da viga biengastada com carga distribuída.	70
Figura 52 - Exemplo de Diagrama de Classe.	78
Figura 53 – Efeitos do deslocamento horizontal (a) e vertical (b).	80
Figura 54 - Efeitos do deslocamento rotacional nas bordas verticais (a) e horizontais (b).	80

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dados da simulação de carga axial de compressão.....	42
Tabela 2 - Dados da simulação de carga axial de compressão com modelo triangular.	46
Tabela 3 – Dados da simulação de viga engastada com carga distribuída e elementos quadrados.	48
Tabela 4 – Dados da simulação de viga engastada com carga distribuída e elementos retangulares.....	49
Tabela 5 - Dados da simulação de viga engastada com carga distribuída e elementos triangulares.	56
Tabela 6 - Dados da simulação de viga engastada com carga concentrada.	57
Tabela 7 – Dados da simulação de viga biapoiada com carga distribuída.	62
Tabela 8 – Dados da simulação de viga biengastada com carga distribuída.	67
Tabela A-1 - Rigidez adicionada pelo efeito Poisson em relação ao elemento zero.....	81

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	12
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	14
2.1	PRÉ-PROCESSAMENTO	15
2.1.1	Materiais	16
2.1.2	Molas e Lei Constitutiva	16
2.1.3	Armadura	18
2.2	PROCESSAMENTO	19
2.2.1	Matriz de Rigidez	19
2.2.2	Efeito Poisson	21
2.2.3	Resolução do Sistema	22
2.2.4	Tensão-Deformação	22
2.3	EXTENSÕES DO MÉTODO	23
2.4	ESTADO DA ARTE	27
3	IMPLEMENTAÇÃO	32
3.1	PRÉ-PROCESSAMENTO	32
3.2	PROCESSAMENTO	36
3.3	PÓS-PROCESSAMENTO	38
4	EXEMPLOS ESTUDADOS	41
4.1	EXEMPLO DE CARGA DISTRIBUÍDA APLICADA EM BLOCO APOIADO	41
4.2	EXEMPLO DE VIGA ENGASTADA COM CARGA DISTRIBUÍDA	47
4.3	EXEMPLO DE VIGA ENGASTADA COM CARGA CONCENTRADA	57
4.4	EXEMPLO DE VIGA BIAPOIADA COM CARGA DISTRIBUÍDA	61
4.5	EXEMPLO DE VIGA BIENGASTADA COM CARGA DISTRIBUÍDA	67
5	CONCLUSÃO	71
5.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS	71
5.2	SUGESTÕES DE PESQUISAS FUTURAS	72
	BIBLIOGRAFIA	74
	APÊNDICE A – DIAGRAMA DE CLASSES	77
	ANEXO A – EFEITO POISSON	79

1 INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Aplicados – AEM, na sigla inglesa – foi proposto por Meguro e Tagel-Din (2000) no final dos anos 90, num contexto onde o tradicional Método dos Elementos Finitos – MEF, limitava-se a pequenos deslocamentos, e modelos com alta não-linearidade ainda eram computacionalmente inviáveis. Para contornar esses problemas, o método divide o corpo em elementos rígidos ligados por molas distribuídas em suas bordas.

Essa abordagem em torno das molas permitiu incorporar o efeito Poisson na formulação do método (geralmente não considerado em modelos de corpo rígido), além de permitir representar simplificada a armadura em uma estrutura de concreto armado. Os autores ainda trazem diversas extensões propostas ao método, permitindo simular com precisão fraturas, colapso, separação de elementos e grandes deformações, além de análise dinâmica. Em especial, segundo Gohel, Patel e Joshi (2013), o modelo de fratura utilizado no método permite representar a propagação das fraturas sem a necessidade de uma fissura inicial. O grande diferencial do AEM, conforme Meguro e Tagel-Din (2000), é a capacidade de simular o espectro todo desde os pequenos deslocamentos, na mesma precisão que o FEM, e até a separação total de elementos e o colapso, combinando as técnicas do Método dos Elementos Discretos – DEM, na sigla inglesa.

O AEM tem sido aplicado com sucesso na análise de colapso progressivo por outros autores como Domaneschi *et al.* (2020) e El-desoqi, Ehab e Salem (2020). Grunwal *et al.* (2018) ressaltam que, como o MEF é baseado numa idealização contínua, a simulação de separação de elementos, fundamental para a análise de colapso, é desafiadora, enquanto o AEM consegue combinar as vantagens dessa formulação contínua do MEF com as de métodos discretos na separação dos elementos.

A literatura do método, no entanto, ainda é escassa, em particular na língua portuguesa, especialmente no Brasil, com apenas uma única dissertação (MARTINS, 2019) que discute brevemente o método, mas não realiza uma simulação pela dificuldade de adquirir o programa. Atualmente o único *software* comercial disponível que utiliza o AEM é o *ELS – Extreme Loading® for Structures*, usado por alguns autores em Portugal e El-desoqi, Ehab e Salem (2020), por exemplo.

Poucos trabalhos abordam os detalhes de implementação e programação do método, podendo citar, por exemplo, Shakeri e Bargi (2015) que discutem a estrutura do programa para análise estática e dinâmica no AEM. Ou Christy, Nagarajan e Pillai (2021) que detalham a

matriz de rigidez para elementos tridimensionais e a determinação das tensões e deformações destes.

Esse trabalho está dividido em 4 partes: A Fundamentação Teórica, onde são apresentadas as bases da formulação do método e extensões propostas pelos autores, e o estado da arte; a Implementação, onde são apresentados os algoritmos utilizados para programar e implementar o método; os Exemplos Estudados, onde são mostrados resultados de modelos utilizando o método; e a Conclusão, com as considerações finais do trabalho.

Finalmente, essa pesquisa tem como objetivo geral implementar e validar o Método dos Elementos Aplicados na análise estática no regime elástico-linear de estruturas. O escopo do trabalho se limitará a elasticidade linear dado o caráter de novidade do método e bibliografia restrita. Para cumprir o objetivo geral foram definidos os seguintes objetivos específicos:

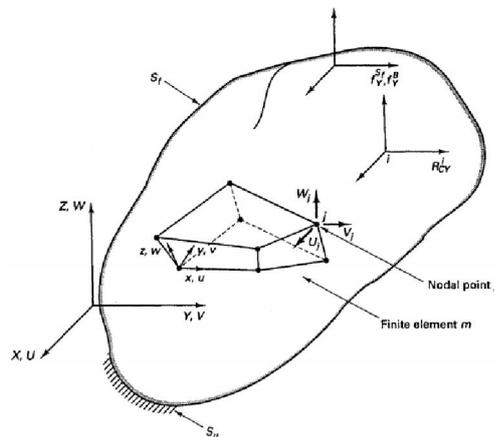
- Desenvolver as rotinas e *software* para aplicação do método;
- Executar modelos simples de elementos prismáticos e vigas;
- Avaliar a sensibilidade de malha nos resultados;
- Validar os deslocamentos e tensões-deformações com modelos analíticos e modelos de referência em MEF;
- Avaliar a validade da formulação com outros tipos de elementos como triangulares.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Em relação a modelagem de problemas físicos, Zienkiewicz, Taylor e Zhu (2005) lembram que em muitas situações, um modelo adequado é obtido utilizando um número finito de componentes, denominados problemas *discretos*. Em outras situações, o problema pode ser apenas definido dividindo o modelo infinitamente, sendo descrito em termos de equações diferenciais, estes, denominados problemas *contínuos*. Com o avanço da computação digital, problemas discretos cada vez maiores podem ser resolvidos, e os métodos numéricos propõem-se a discretizar um modelo contínuo permitindo obter uma solução satisfatoriamente aproximada. Conforme Tagel-Din (1998), alguns dos principais métodos numéricos são: o Método dos Elementos Finitos – MEF, baseados em equações para materiais contínuos; e o Método dos Elementos Discretos – DEM, que usa técnicas de elementos discretos.

De acordo com Bathe (2014), no MEF um corpo é aproximado por um conjunto de elementos discretos finitos conectados em pontos nodais no contorno dos elementos, como pode ser visto na Figura 1. O campo de deslocamentos em cada elemento é interpolado a partir deslocamentos dos nós do elemento através de uma matriz de funções interpoladoras. As deformações podem ser obtidas derivando a matriz de funções interpoladores, e, com elas, é possível determinar as tensões no corpo.

Figura 1 - Corpo tridimensional generalizado no MEF.



Fonte: Bathe (2014, p. 154)

O DEM por sua vez, segundo Cundall e Strack (1979), se baseia na ideia de que um incremento de tempo seja tão pequeno que, durante ele, a perturbação propaga-se para não mais que às partículas adjacentes. Dessa maneira, as forças resultantes de qualquer partícula são determinadas apenas com a interação com as partículas em contato, esse é o fator chave que permite reproduzir o comportamento não linear de um grande número de partículas sem custos computacionais excessivos em geral necessários em um processo iterativo. O ciclo de cálculo

para o DEM alterna entre a aplicação da segunda lei de Newton ($\mathbf{F} = m \cdot \mathbf{a}$), que dá o movimento da partícula a partir das forças atuantes nela, e de uma lei de força-deslocamento nos contatos, que determina as forças de contato a partir de deslocamentos, chamada também de lei constitutiva.

O Método dos Elementos Aplicados – AEM, foi então proposto por Tagel-Din (1998) para juntar as vantagens das duas abordagens, contínua e discreta, permitindo uma análise desde o regime elástico-linear dos pequenos deslocamentos até a separação de elementos.

Segundo Meguro e Tagel-Din (2000), no AEM, uma estrutura bidimensional é modelada por um conjunto de elementos rígidos com três graus de liberdade do movimento de corpo rígido (deslocamentos horizontais, verticais e rotação). Pares de elementos são conectados por pares de molas normais e tangenciais distribuídas ao longo de suas bordas em contato. Embora os elementos não deformem, o conjunto deles é deformável. É possível interpretar os elementos como sendo pontos materiais.

Cada mola conectando um par de elementos tem uma matriz de rigidez local associada a ela, e então a matriz de rigidez global (K_G) é determinada somando-se todas as matrizes locais. Com um vetor de forças aplicadas (F), os deslocamentos (Δ) podem ser determinados pela equação governante do modelo (1), conforme Meguro e Tagel-Din (2000, p. 34). O efeito Poisson é contabilizado na matriz de rigidez global analisando-se todos os elementos vizinhos entre si. Com as forças e deslocamentos resolvidos, é possível finalmente determinar as tensões e deformações dos elementos no pós-processamento.

$$[K_G]\{\Delta\} = \{F\} \quad (1)$$

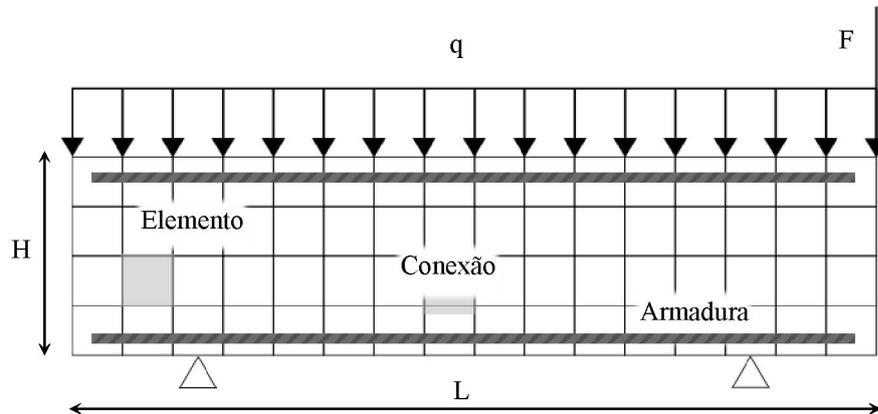
Cada etapa dessa análise será discutida em detalhes nos subcapítulos seguintes. Enquanto os detalhes de programação e algoritmos da implementação serão apresentados no Capítulo 3.

2.1 PRÉ-PROCESSAMENTO

O pré-processamento é a etapa inicial para a construção de um modelo. Nele são feitas as definições dos materiais usados, a geometria do modelo e as condições de contorno. Um exemplo de uma viga biapoçada de altura (H) e largura (L), com carga distribuída (q) e concentrada (F) é apresentada na Figura 2, com indicação dos elementos, conexões e armadura. Meguro e Tagel-Din (2000) formulam o elemento como um corpo rígido com três graus de

liberdade representando sua movimentação horizontal, vertical e rotacional, com as tensões e deformações representadas pelas molas dispostas ao redor de suas bordas.

Figura 2 – Exemplo de discretização de viga biapoada.



Fonte: O autor.

2.1.1 Materiais

A primeira configuração do modelo é a definição do material. Foi considerado um material isotrópico elástico-linear com módulo de Elasticidade (E), e o coeficiente de Poisson (ν). O peso próprio do material (w) pode ser incluído também para a análise dinâmica. Pelas relações para materiais isotrópicos, mostrada na equação (2), conforme Hibbeler (2004, p. 405), é possível derivar o módulo de Cisalhamento (G).

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2)$$

2.1.2 Molas e Lei Constitutiva

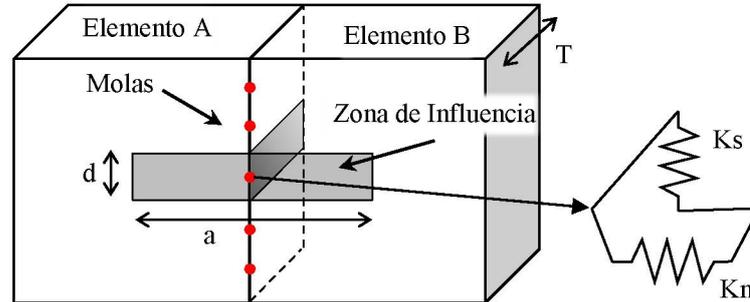
Com os parâmetros de materiais definidos, calcula-se a rigidez das molas através de uma Lei Constitutiva. Meguro e Tagel-Din (2000) utilizam uma lei Elástico-Linear simples para tal. Isolando o termo da rigidez na lei de Hooke, $F = k \cdot \Delta x$, substituindo os termos $\sigma = F/A = E \cdot \varepsilon$, e sabendo que $\varepsilon = \Delta x/x_0$, pode-se deduzir a equação para rigidez (3).

$$k = \frac{EA}{x_0} \quad (3)$$

Conforme ilustrado pela Figura 3, considerando o comprimento indeformado x_0 como a distância entre centros (a), a área (A) como a seção transversal da zona de influência da mola ($T \cdot d$), e, de maneira análoga, usando o módulo de Cisalhamento para a rigidez tangencial, pode-

se deduzir as equações (4) da rigidez normal (K_n) e tangencial (K_s). No caso de elementos com materiais e/ou espessuras diferentes, é tirada a média entre as rigidezes.

Figura 3 - Área de influência das molas.



Fonte: Adaptado de Meguro e Tagel-Din (2000, p. 33).

$$\begin{cases} K_n = \frac{ETd}{a} \\ K_s = \frac{GTd}{a} \end{cases} \quad (4)$$

Onde:

- E = módulo de Elasticidade dos elementos;
- G = módulo de Cisalhamento dos elementos;
- T = espessura dos elementos;
- d = comprimento da área de influência da mola;
- a = distância entre centros dos elementos.

Segundo Meguro e Tagel-Din (2000), o número de molas por conexão deve ser determinado com cautela mesmo no regime elástico-linear: uma única mola pode representar totalmente os graus de liberdade de deslocamentos, mas não o grau de liberdade de rotação. É possível deduzir a rigidez rotacional teórica (K_r) de um elemento de altura (h), espessura (T) e módulo de elasticidade (E) pela equação (5), e pode-se deduzir essa mesma rigidez rotacional discretizada para um conjunto de n molas igualmente espaçadas conforme a equação (6). Meguro e Tagel-Din (2000) observaram que 10 molas por conexão reduzem a taxa de erro da rigidez rotacional teórica em relação à discreta para menos de 1%, ainda mantendo um valor de tempo computacional baixo. Uma análise paramétrica dos autores conclui que diminuir o tamanho dos elementos aumentou a precisão dos resultados, enquanto aumentar o número de molas não traz ganhos significativos, apenas aumentando o tempo computacional da análise.

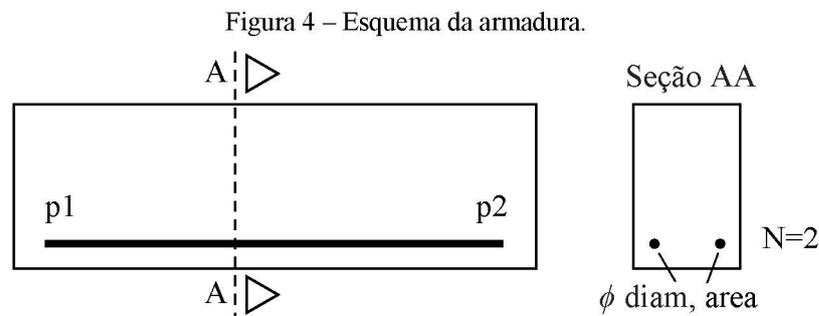
$$K_r = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{ET}{h} z^2 dz = \frac{ETh^2}{12} \quad (5)$$

$$K_r = \frac{ETh^2}{4n^3} \sum_{i=1}^n (i - 0,5)^2 \quad (6)$$

2.1.3 Armadura

O concreto armado é caracterizado pela presença de uma armadura de aço. A barra é definida geometricamente como uma linha ligada por dois pontos (p1 e p2) associada a um diâmetro (diam), um material (mat) e um número de barras (N), como esquematizado na Figura 4. O número de barras representa a quantidade de barras existentes no mesmo plano ao longo da profundidade e é multiplicado na área da seção da barra (area).

Segundo Meguro e Tagel-Din (2000), as armaduras podem ser representadas por molas. São acrescentadas duas molas nas coordenadas da intersecção entre a borda dos elementos e a barra, uma representando o aço e a outro o concreto, assumindo que ambas tenham a mesma deformação em cada etapa do carregamento.



Fonte: O autor.

Também é possível representar as barras de armadura como molas considerando a área da seção transversal como a própria área de barra, chega-se na equação (7) para rigidez normal e tangencial da barra (K_{n_s} e K_{s_s} , respectivamente).

$$\begin{cases} K_{n_s} = \frac{E_s \cdot A_s}{a} \\ K_{s_s} = \frac{G_s \cdot A_s}{a} \end{cases} \quad (7)$$

Onde:

- E_s = módulo de Elasticidade do material da barra;
- G_s = módulo de Cisalhamento do material da barra;
- A_s = área da seção transversal da barra;
- a = distância entre centros dos elementos.

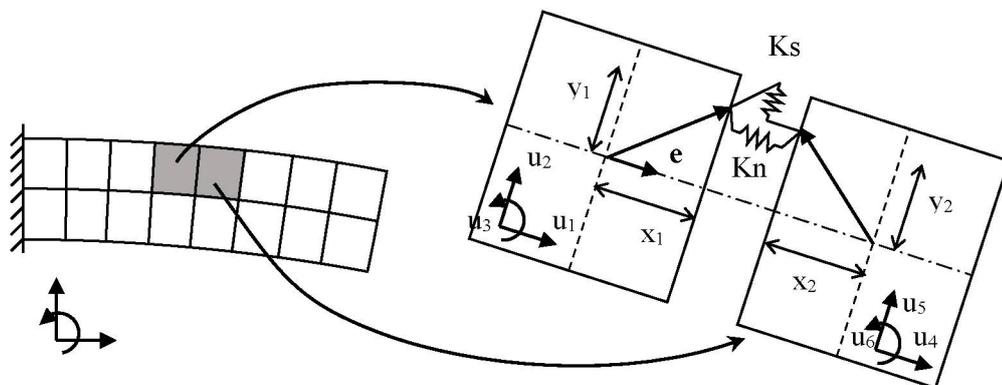
2.2 PROCESSAMENTO

2.2.1 Matriz de Rigidez

Com as molas atribuídas em todas as conexões na malha de elementos, a próxima etapa é a montagem da matriz de rigidez do modelo. O método itera cada uma das molas, calculando sua matriz de rigidez local, rotacionando para o sistema global, e somando a matriz de rigidez global do modelo. A matriz de rigidez na configuração local é apresentada na equação (8). x_i e y_i são as distâncias no sistema de coordenadas local do centro do elemento até a mola, conforme ilustrado na Figura 5, e o vetor unitário e , que aponta do centro de um elemento ao outro, é utilizado para fazer a rotação entre as coordenadas locais e globais. A distinção entre as distâncias para o elemento esquerdo e direito demonstram a possibilidade fazer a transição entre elementos de diferentes tamanhos de maneira direta, no caso de elemento, quando todos os elementos são iguais, fica claro que $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$.

$$[K] = \begin{bmatrix} Kn & 0 & -Kn \cdot y_1 & -Kn & 0 & Kn \cdot y_2 \\ 0 & Ks & Ks \cdot x_1 & 0 & -Ks & Ks \cdot x_2 \\ -Kn \cdot y_1 & Ks \cdot x_1 & Kn \cdot y_1^2 + Ks \cdot x_1^2 & Kn \cdot y_1 & -Ks \cdot x_1 & -Kn \cdot y_1 \cdot y_2 + Ks \cdot x_1 \cdot x_2 \\ -Kn & 0 & Kn \cdot y_1 & Kn & 0 & -Kn \cdot y_2 \\ 0 & -Ks & -Ks \cdot x_1 & 0 & Ks & -Ks \cdot x_2 \\ Kn \cdot y_2 & Ks \cdot x_2 & -Kn \cdot y_1 \cdot y_2 + Ks \cdot x_1 \cdot x_2 & -Kn \cdot y_2 & -Ks \cdot x_2 & Kn \cdot y_2^2 + Ks \cdot x_2^2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Figura 5 – Representação da mola conectando um par de elementos.



Fonte: O autor.

Aplicando deslocamentos unitários em todos os 6 graus de liberdade do sistema é possível deduzir a matriz com as forças internas resultantes nos elementos.

A primeira linha da matriz, é obtida aplicando um deslocamento unitário horizontal no elemento esquerdo, conforme demonstrado na Figura 6a. É gerado um par de forças normais na mola com um momento associado. A segunda linha da matriz, é obtida com um deslocamento unitário vertical no elemento esquerdo, conforme a demonstrado Figura 6b. É gerado um par de forças tangenciais na mola com um momento associado. E a terceira linha da matriz, é obtida com uma rotação unitária no elemento esquerdo, conforme demonstrado na Figura 6c, gerados um par de forças normais e tangenciais na mola com seus momentos associados no centro do elemento. De maneira análoga, é possível deduzir as linhas restantes da matriz aplicando os deslocamentos unitários no elemento direito e analisando as forças internas geradas pela mola.

Vale ressaltar que os deslocamentos na rotação são dados por: $\Delta x = x(1 - \cos\theta) + y \cdot \text{sen}\theta$ e $\Delta y = x \cdot \text{sen}\theta - y(1 - \cos\theta)$, aproximando para pequenos ângulos temos: $\Delta x \cong y \cdot \theta$ e $\Delta y \cong x \cdot \theta$, de onde surgem: $\Delta x \cong y$ e $\Delta y \cong x$.

Figura 6 - Aplicação dos deslocamentos unitários.

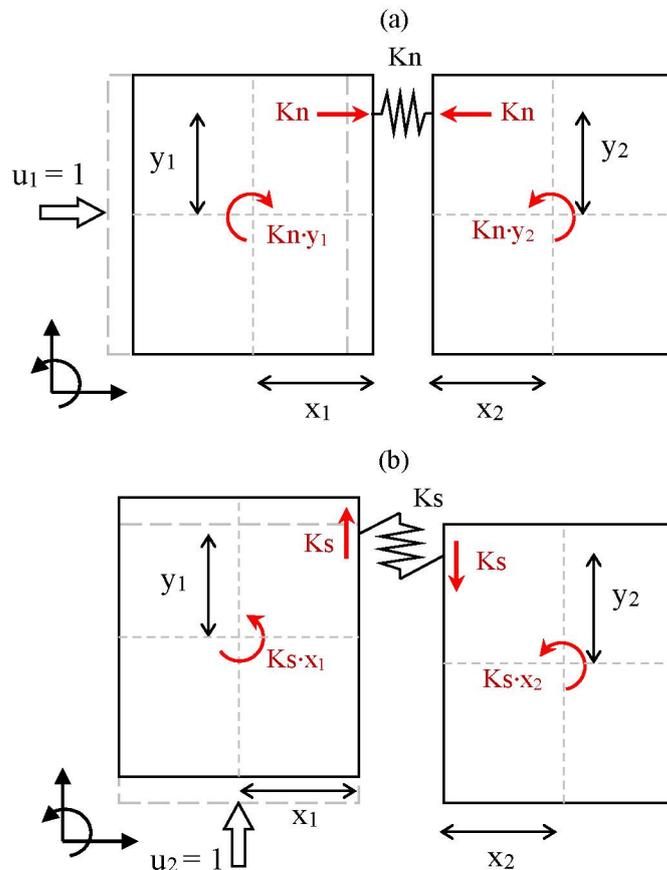
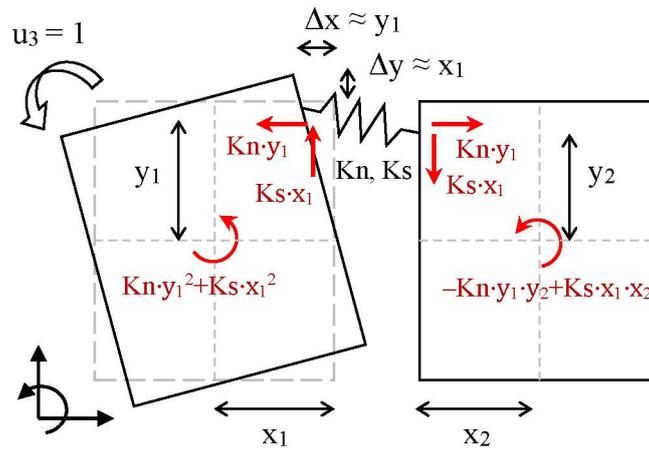


Figura 6 - Aplicação dos deslocamentos unitários. (Continuação)
(c)

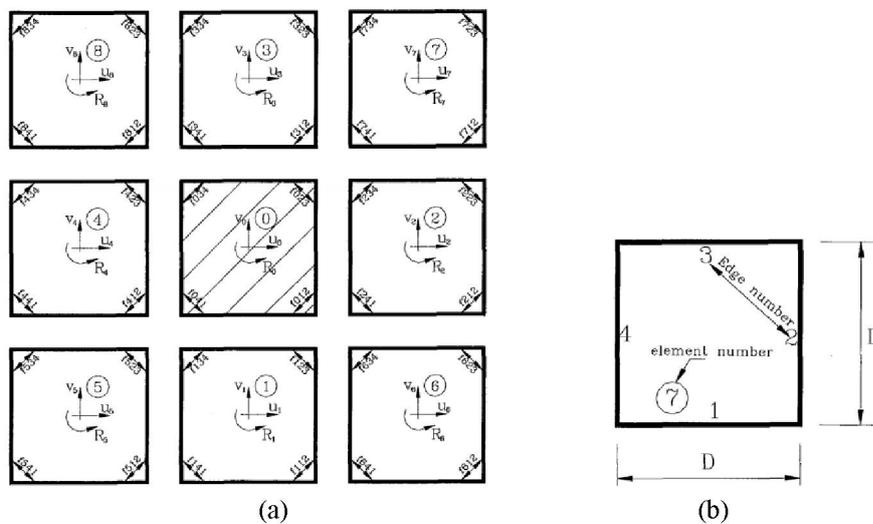


Fonte: O autor.

2.2.2 Efeito Poisson

Meguro e Tagel-Din (1998) adotaram uma abordagem para representar o efeito Poisson sem depender de graus de liberdade extras, correlacionando a matriz de rigidez de cada borda dos elementos com as bordas adjacentes dos seus 6 vizinhos. Assumindo um arranjo generalizado de elementos, conforme a Figura 7(a), cada elemento tem 4 bordas numeradas em sequência, mostrado na Figura 7(b), com os fatores “f” representando a continuidade do elemento, calculados pela equação (9).

Figura 7 - Esquema de numeração para efeito Poisson.



Fonte: Meguro e Tagel-Din (1998, p. 44).

$$f_{ijk} = f_{ij} \cdot f_{ik} \tag{9}$$

O índice i representa o número do elemento, e j e k o número da borda, f_{ij} é igual a 1 se a face j do elemento i estiver em contato com a face do elemento adjacente, f_{ik} similarmente, para a face k . De acordo com Meguro e Tagel-Din (1998), para cada grau de liberdade dos elementos, termos adicionais na matriz de rigidez são obtidos assumindo um deslocamento na direção do grau de liberdade e calculando a deformação imposta no centroide dos elementos. O procedimento detalhado para a obtenção da matriz de rigidez alterada com a consideração do efeito Poisson está apresentado no Anexo A.

2.2.3 Resolução do Sistema

Tendo a matriz de rigidez e os vetores de deslocamento e forças aplicadas definidos é possível resolver a equação governante do modelo. Inicialmente a matriz é reorganizada em submatrizes separando-se os graus de liberdade fixos (F) e livres (L), conforme a equação (10). Os deslocamentos fixos \mathbf{D}_F e forças aplicadas livres \mathbf{F}_L são as condições de contorno de deslocamento e força, respectivamente, e são conhecidos. Enquanto os deslocamentos livres \mathbf{D}_L e as forças aplicadas fixas \mathbf{F}_F são incógnitas, referentes aos deslocamentos do modelo e as reações nos apoios, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{FF} & \mathbf{K}_{FL} \\ \mathbf{K}_{LF} & \mathbf{K}_{LL} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{D}_F \\ \mathbf{D}_L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_F \\ \mathbf{F}_L \end{Bmatrix} \quad (10)$$

2.2.4 Tensão-Deformação

Por fim, a última etapa antes do pós-processamento é calcular as tensões e deformações dos elementos. A técnica adotada por Meguro e Tagel-Din (2000) consiste em:

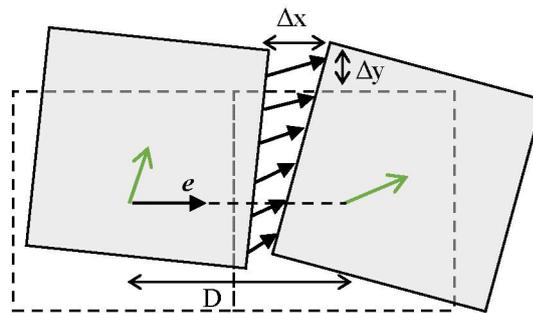
1. Para cada mola, calcular as deformações a partir do deslocamento das extremidades das molas (Δx ou Δy) com $\varepsilon = \Delta/D$, onde D é o tamanho do elemento;
2. Para cada elemento, calcular as deformações médias $\bar{\varepsilon}$ a partir de todas as molas;
3. Corrigir a deformação das molas com $\varepsilon'_x = \varepsilon + \nu\bar{\varepsilon}_y$ e $\varepsilon'_y = \varepsilon + \nu\bar{\varepsilon}_x$, onde ν é o coeficiente de Poisson;
4. Calcular as tensões $\sigma_x = E\varepsilon'_x/(1 - \nu^2)$ e $\sigma_y = E\varepsilon'_y/(1 - \nu^2)$.

Os autores, no entanto, não deixam claro como determinar as deformações e tensões tangenciais, sendo as deformações nas direções x e y mencionadas, referentes às deformações normais para as molas nas conexões verticais e horizontais, respectivamente. Assumiram-se as deformações tangenciais análogas às normais, apenas utilizando o deslocamento das

extremidades das molas nas direções tangenciais de cada conexão: y para as verticais, e x para as horizontais.

A Figura 8 mostra o procedimento adotado. Na configuração local do elemento indeformado, os deslocamentos relativos entre as molas são calculados (vetores com flecha fechada, na interface entre os elementos), o com a flecha aberta no centro do elemento representa seu deslocamento, Δy representa uma deformação tangencial, e Δx uma deformação normal. Essas deformações são então rotacionadas para a configuração global para compor a deformação média do elemento e então calcular as tensões das molas, assim é feita a distinção entre conexões verticais e horizontais. A distância D pode ser melhor interpretada como o comprimento indeformado original das molas, ou seja, a distância entre os centros. Como uma deformação na direção global x não contribuirá com a deformação y do elemento, e vice-versa, foi adotado uma média ponderada para calcular as deformações médias do elemento. Considerando um vetor de deformações $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \tau_{xy}\}$, um vetor de pesos $\boldsymbol{p} = \{\cos^2 \theta, \sin^2 \theta, 1\}$ foi adotado, onde θ representa a direção entre os centros dos elementos indeformados, também representado pelo vetor unitário \boldsymbol{e} da Figura 5, repetido na Figura 8 para clareza. Com as deformações corrigidas, as tensões nas molas podem ser determinadas.

Figura 8 - Cálculo da tensão-deformação das molas.



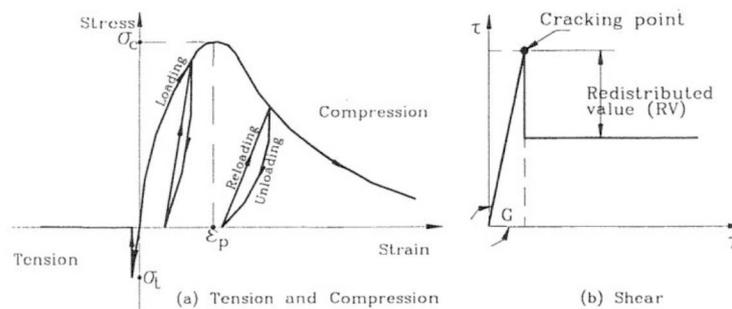
Fonte: O autor.

2.3 EXTENSÕES DO MÉTODO

Tagel-Din e Meguro (2000b) introduzem uma extensão para o método para simulação não-linear de estruturas de concreto armado. Para a modelagem do concreto os autores adotaram o modelo de Maekawa (1991 apud TAGEL-DIN; MEGURO, 2000b), apresentado na Figura 9(a) e (b), com o comportamento na tração/compressão e cisalhamento, respectivamente. Nesse modelo, o módulo de Elasticidade inicial, o parâmetro de fratura representando o dano interno no concreto e a deformação plástica de compressão são apresentados para definir a relação

tensão-deformação na compressão. A resistência a compressão do concreto é modelada a partir do estado de tensões principais em cada mola e, após atingir um pico de tensão compressiva, a rigidez da mola é reduzida a 0,1% do seu valor inicial, evitando uma rigidez negativa. As tensões residuais geradas pela diferença entre a tensão calculada e à correspondente à deformação da mola, são redistribuídas aplicando uma força no sentido oposto. No caso das molas sujeitas a tração, a rigidez é reduzida a zero após atingir a resistência a tração do concreto. As molas representando a armadura seguem um modelo bi linear de tensão-deformação, onde, após o escoamento, a rigidez é reduzida a 1% da original.

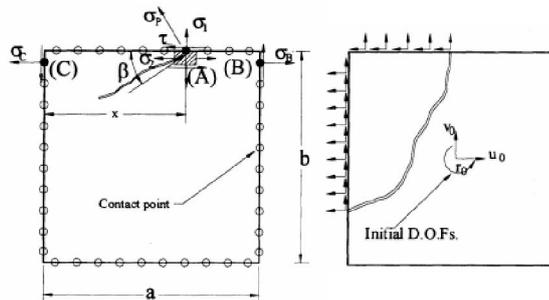
Figura 9 - Modelo constitutivo de concreto de Maekawa.



Fonte: Maekawa (1991 apud TAGEL-DIN; MEGURO, 2000b, p. 14)

O cálculo da tensão principal e o ângulo do plano de ruptura, conforme, Tagel-Din e Meguro (2000b) pode ser esquematizado conforme a Figura 10(a): o ponto (A) na figura indica o ponto em análise de onde são obtidas as tensões normais e tangenciais, e os pontos (B) e (C) são utilizados para calcular tensões normais secundárias necessárias para se obter a tensão principal (σ_p) e o ângulo de ruptura (β). A redistribuição de forças no sentido oposto ao longo da borda desativada se dá conforme a Figura 10(b). Conforme os autores, essa técnica é simples e não necessita de nenhum tratamento especial para representar as fraturas, porém, a espessura das fraturas não pode ser definida com precisão, nem a falha por cisalhamento pode ser simulada com precisão se o plano de fratura não for paralelo ao elemento.

Figura 10 - Critério de falha dos elementos.



Fonte: (TAGEL-DIN; MEGURO, 2000b, p. 15)

Estendendo a análise estática para trabalhar num regime de grandes deslocamentos, Meguro e Tagel-Din (2002) adaptaram a equação governante do sistema para a equação (11), trabalhando com incrementos de deslocamento (ΔU), incrementos de força (Δf), forças residuais devido a faturamento ou incompatibilidade entre molas (R_m) e forças residuais devido a mudanças geométricas (R_G), e onde K passa a ser uma matriz de rigidez não-linear.

$$[K]\{\Delta U\} = \{\Delta f\} + \{R_m\} + \{R_G\} \quad (11)$$

O processo iterativo descrito por Meguro e Tagel-Din (2002) é o seguinte:

1. Assumir R_m e R_G nulos e resolver a equação (11) obtendo ΔU ;
2. Modificar a geometria de acordo com os incrementos de deslocamento calculados;
3. Modificar a direção do vetor de forças das molas conforme a nova geometria, gerando incompatibilidade entre as forças aplicadas e tensões internas;
4. Verificar a ocorrência de fraturas e calcular R_m ;
5. Calcular o vetor de forças do elemento, F_m , somando as forças das molas do elemento;
6. Calcular as forças residuais geométricas $R_G = f - F_m$, onde f é o vetor de forças aplicadas, assume-se que esse resíduo engloba a incompatibilidade entre forças internas e externas devido a modificação da geometria;
7. Pequenas deformações são assumidas em cada incremento;
8. Calcular a matriz de rigidez da estrutura com a nova configuração, considerando que a rigidez mudou devido ao fraturamento ou escoamento;
9. Repetir o processo.

Meguro e Tagel-Din (2002) fazem uma ressalva quanto as limitações dessa técnica: a simetria completa da estrutura deve ser evitada para análise de flambagem, a simetria pode ser evitada com pequenas mudanças nos parâmetros do material em alguma parte do elemento, por exemplo; como são assumidas pequenas deformações nos incrementos, os incrementos de carga ou deslocamento devem ser pequenos. Os autores puderam simular com sucesso o comportamento de uma viga de borracha, o comportamento pré e pós-flambagem de uma coluna, um salto numa treliça de 2 barras e um pórtico sob diferentes configurações de apoio.

Tagel-Din e Meguro (2000a) introduziram uma extensão para o método para análise dinâmica em estrutura, os autores iniciam com a formulação da equação geral dinâmica no regime de pequenos deslocamentos, dada pela equação (12), onde M representa a matriz de massa, C a matriz de amortecimento, K a matriz de rigidez não-linear, $\Delta f(t)$ o incremento de

força aplicada, e $\Delta\ddot{U}$, $\Delta\dot{U}$ e ΔU os incrementos de aceleração, velocidade e deslocamento, respectivamente, e $\Delta\ddot{U}_G$ o vetor de aceleração da gravidade.

$$[M]\{\Delta\ddot{U}\} + [C]\{\Delta\dot{U}\} + [K]\{\Delta U\} = \{\Delta f(t)\} - [M]\{\Delta\ddot{U}_G\} \quad (12)$$

Para determinação da matriz de massa, Tagel-Din e Meguro (2000a) consideram a massa concentrada no centroide dos elementos. No caso de elementos quadrados de lado D , espessura t e densidade ρ , a matriz de massa é dada pela equação (13). A matriz de amortecimento pode ser obtida pela equação (14), onde ζ é a taxa de amortecimento e w_1 a primeira frequência natural de vibração da estrutura, obtida pelos autovalores da equação de vibração livre da estrutura, conforme a equação (15). É possível então solucionar o sistema da equação (12) através de um método numérico, como, por exemplo, o de Newmark-Beta, escolhido por Tagel-Din e Meguro (2000a).

$$[M] = \begin{bmatrix} D^2 \cdot t \cdot \rho & 0 & 0 \\ 0 & D^2 \cdot t \cdot \rho & 0 \\ 0 & 0 & \frac{D^4 \cdot t \cdot \rho}{6} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$[C] = 2 \cdot \zeta \cdot w_1 \cdot [M] \quad (14)$$

$$(w^2[M] - [K])\{U\} = 0 \quad (15)$$

Para estender a análise dinâmica para o regime de grandes deslocamentos, o lado direito da equação (12) é substituído por $\{\Delta f(t)\} + \{R_m\} + \{R_G\}$, de maneira análoga a equação (11). O processo iterativo de resolução desse sistema é igualmente análogo ao de Meguro e Tagel-Din (2002): No passo inicial a equação é resolvida para a aceleração da gravidade; os incrementos de carga são aplicados; R_m e R_G são assumidos nulos para obter o incremento de deslocamento; são calculados os incrementos de tensão e deformação; o incremento de velocidade e aceleração, bem como velocidade e aceleração total são calculados; a geometria é modificada conforme o incremento obtido; é modificada a direção do vetor de forças das molas; a ocorrência de fraturas é verificada e R_m é obtido; o vetor de forças dos elementos F_m é obtido; é calculado o resíduo geométrico de cada elemento $R_G = f(t) - [M]\{\ddot{U}\} - [C]\{\dot{U}\} - F_m$; a nova matriz de rigidez é calculada; por fim, um novo incremento de carga é aplicado e o processo se repete.

Finalmente, Meguro e Tagel-Din (2001), aplicando os conceitos anteriores de modelagem não-linear e análise dinâmica, utilizaram o Método dos Elementos Aplicados para simular uma estrutura de concreto armado sob carga cíclica.

Worakanchana e Meguro (2008) ainda propõem ainda a utilização de células Voronoi como elementos para o AEM, trazendo mais flexibilidade na geração malha. Com os elementos Voronoi, os nós podem ser colocados em qualquer lugar dentro do domínio físico do modelo, com tamanhos variáveis, permitindo a concentração de elementos em áreas de interesse modificando a densidade de nós da região. A representação de fissuras pré-existentes também pode ser simulada com o posicionamento apropriado de nós. As rigidezes normal e tangencial das molas são dadas pela equação (16) para o estado plano de tensão e (17) para o estado plano de deformação. Como limitação, o coeficiente de Poisson é restringido entre -1 e 0,33 para o estado plano de tensões, e -1 e 0,25 para o estado plano de deformações, de forma a evitar a rigidez negativa.

$$\begin{cases} Kn = \frac{ET}{(1-\nu)d} \\ Ks = \frac{ET(1-3\nu)}{(1-\nu^2)d} \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} Kn = \frac{ET}{(1-2\nu)(1+\nu)d} \\ Ks = \frac{ET(1-4\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)d} \end{cases} \quad (17)$$

Onde:

- E = módulo de Elasticidade;
- ν = coeficiente de Poisson;
- T = espessura dos elementos;
- d = distância entre centros dos elementos.

2.4 ESTADO DA ARTE

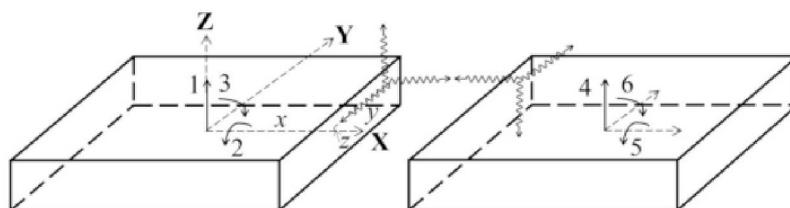
Na língua portuguesa, um levantamento nas principais plataformas de busca (Google Acadêmico, SciELO e a plataforma Sucupira) pelo termo “método dos elementos aplicados” retornou apenas 13 resultados, destes, 4 trabalhos eram brasileiros, e os demais portugueses. Nesses 4 trabalhos brasileiros, apenas Martins (2019) discute brevemente sobre o método, num estudo sobre demolição de estruturas em concreto armado, no entanto, não realiza nenhuma

simulação pela dificuldade de adquirir o *Extreme Loading® for Structures*, o único *software* comercial que aplica o método atualmente. Os trabalhos Portugueses, por sua vez, realizaram simulações nesse *software*, podendo citar dentre alguns: Ferreira (2015), onde foi discutida a modelagem não-linear do comportamento de vigas-parede; Fonseca (2014), que aplicou o método para simular o arrancamento de armaduras; e Bernardo (2014) que realizou uma análise não-linear e dinâmica de uma passarela de pedestres. Expandindo a busca para a literatura internacional, pesquisando pelo termo “*applied element method*” no Google Acadêmico, obtém-se 950 resultados, e uma busca nas bases *Scopus* e *Science Direct* retornou apenas 179 resultados distintos. É notável a escassez da literatura no mundo lusófono, contudo, a situação da literatura internacional não é tão distante assim.

Gohel, Patel e Joshi (2013) realizaram uma análise estática de um pórtico através do Método dos Elementos Aplicados, comparando-a com uma análise através do Método dos Elementos Finitos. Conforme os autores, uma das principais vantagens do método é permitir a propagação de falhas em qualquer local do modelo, sem necessidade de pré-aberturas. Foi simulado um pórtico de duas colunas e uma viga com carga lateral aplicada no topo esquerdo sob 4 configurações de tamanho de elementos (300, 200, 150 e 120mm) e 5 de número de molas (1, 3, 5, 7 e 10 molas por conexão). Os autores observaram que a precisão dos resultados aumentou com o uso de elementos menores, e também com menos molas conexões que o sugerido por Meguro e Tagel-Din (2000).

Christy, Nagarajan e Pillai (2019) desenvolveram um elemento de placa para o AEM, segundo os autores, elementos bidimensionais são suficientes quando apenas cargas no plano são consideradas. Para cargas transversais, é necessário um elemento mais complexo, para isso, os autores modificaram um elemento tridimensional. Os autores também consideram apenas 3 graus de liberdade, as rotações nos eixos x e y , e deslocamento no eixo z , conforme apresentado na Figura 11, e trazem a matriz de rigidez correspondente para as molas, uma normal, e duas tangenciais.

Figura 11 - Elemento de placa fina.



Fonte: (CHRISTY; NAGARAJAN; PILLAI, 2019, p. 3)

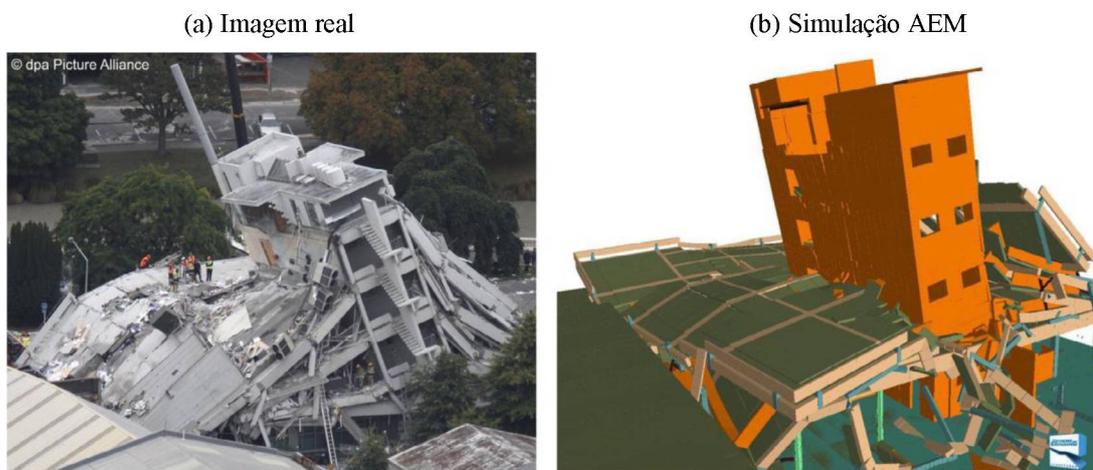
Christy, Nagarajan e Pillai (2019) fazem também uma simplificação na matriz de rigidez, considerando infinitas molas na seção e integrando a matriz, obtendo uma nova que representa toda a seção e podendo ser usada diretamente, ao invés de somar as matrizes de cada mola. A última modificação proposta pelos autores refere-se ao efeito Poisson, que tem papel fundamental no comportamento de placas. Um deslocamento unitário na direção z não gera nenhum esforço normal nas molas, não gerando nenhum efeito Poisson, as rotações por sua vez geram. Os autores prosseguem com uma dedução detalhada desses efeitos, aplicando o deslocamento unitário e gerando tensões normais nos elementos. Os elementos são subdivididos em 4 partes pelos seus centros, e as forças e momentos de cada quarto do elemento são calculadas, com isso determina-se rigidezes adicionais a serem adicionadas nos elementos vizinhos. Christy, Nagarajan e Pillai (2019) fizeram tanto uma análise estática quanto dinâmica em uma placa de $1,2 \times 1,2$ m e espessura de 30 mm, com 100 molas por conexão, e o método foi capaz de prever com precisão os deslocamentos, tensões, momentos, torções e força cortante.

Christy, Pillai e Nagarajan (2020) trazem uma comparação entre o AEM e o MEF em problemas estáticos elásticos. Os autores simulam uma viga engastada com carga concentrada variando o número de elementos ao longo do comprimento e profundidade da viga. Foi observado que apenas um elemento na direção da profundidade bastava para determinar o deslocamento da ponta no caso do AEM. A divergência encontrada no MEF quando um único elemento é utilizado é devido ao travamento por cisalhamento (*shear locking*) inerente a elementos quadrilaterais de 4 nós. Os autores ainda afirmam que o AEM trouxe resultados mais precisos que o MEF no caso de malhas similares na análise linear com a taxa de convergência de ambos os métodos é próxima tanto na análise linear como não-linear.

Christy, Nagarajan e Pillai (2021) também chamam atenção para a pouca quantidade de literatura, em especial discutindo sobre a matriz de rigidez. Os autores deduzem em detalhes a matriz para elementos em duas dimensões e também a para elementos tridimensionais e aplicam a mesma simplificação apresentada no parágrafo anterior: considerando infinitas molas numa seção, integrando e obtendo uma matriz nova única. Segundo os autores, essa técnica, além de simplificar o modelo, também aumenta sua precisão. São também deduzidas todas as fórmulas para cálculo das deformações, tensões, momentos fletores e força cortante. O método foi verificado simulando modelos de viga engastada com seção retangular, com seção circular, e um pórtico, todos prevendo com precisão os resultados, em alguns casos até melhor que pelo método dos elementos finitos.

Uma importante área de estudo envolvendo o Método dos Elementos Aplicados é o de colapso progressivo de estruturas, pela habilidade de simular todo o comportamento de uma estrutura desde os pequenos deslocamentos até a separação. Grunwald *et al.* (2018) traz uma comparação entre o tradicional MEF e o AEM na área de colapso progressivo. Segundo os autores, a separação de elementos se dá quando a deformação resultante de uma mola atinge um determinado patamar, a conexão é removida e o elemento passa a responder como um corpo rígido livre. Um algoritmo busca os contatos entre elementos livres, permitindo a transmissão de esforços tangenciais entre elementos em contato compressivo, de maneira que o fechamento de trincas pode ser capturado. O AEM, no entanto, possui algumas desvantagens, conforme Grunwald *et al.* (2018), a direção do carregamento deve ser constante, impedindo a análise de carregamentos não conservativos, nem pode realizar análise multi-física, como o acoplamento com efeitos térmicos por exemplo ou o efeito de ondas de choque no material devido a impactos. Foram realizadas três simulações, a primeira simulou uma viga com a perda do seu apoio central, a segunda a falha de uma laje com remoção da sua coluna de apoio, e por fim, o colapso de um edifício real devido a um terremoto em 2011, ilustrado na Figura 12. Os autores concluem que o MEF não trouxe resultados precisos na forma final do colapso, além de ser muito proibitivo devido ao tempo excessivo de processamento necessário, o AEM, em contrapartida, obteve resultados satisfatórios nos 3 níveis de complexidade analisados.

Figura 12 – Elevação Norte do edifício colapsado.

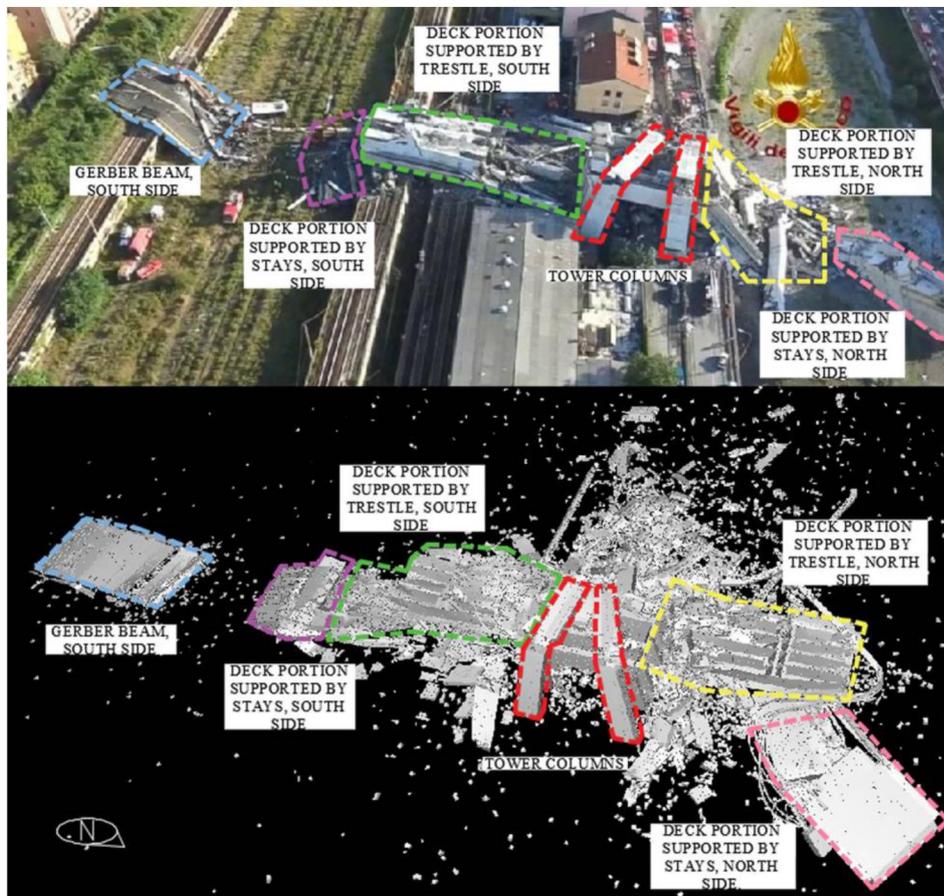


Fonte: Grunwald *et al.* (2018)

El-desoqi, Ehab e Salem (2020) realizaram duas simulações em estruturas porticadas, com e sem a contribuição da laje para a rigidez da estrutura, sob o peso próprio delas. Foram simulados diversos cenários de remoção de colunas, e com diferentes comprimentos de vigas e, como esperado, as estruturas com a consideração da laje resistiram mais.

Domaneschi *et al.* (2020) realizaram uma análise do colapso do viaduto *Polcevera* na Itália, em 2018. Toda a estrutura central do viaduto colapsado foi modelada em elementos tridimensionais no maior nível de detalhamento, com toda a armadura do viaduto também inclusa, e modelos constitutivos não lineares para os materiais. Ao todo, o modelo continha 150 mil elementos num passo de tempo $\Delta t = 0,001s$, com um tempo total de computação de quase 48h. Foram realizadas simulações removendo/degradando diversas partes do viaduto até se atingir o colapso, foi possível assim determinar a provável causa do colapso como uma degradação num dos cabos do viaduto, quando aproximadamente 60% de sua área foi removida. As simulações foram comparadas instante a instante com imagens e vídeos disponibilizados pela polícia e bombeiros locais e indicam que a simulação apresentou uma boa concordância com o mecanismo de colapso real da estrutura, pelo menos nos 5 primeiros segundos. O viaduto colapsado e seu respectivo modelo pode ser observado na Figura 13.

Figura 13 - Comparação do colapso do viaduto real x simulado.



Fonte: (DOMANESCHI et al., 2020, p. 10)

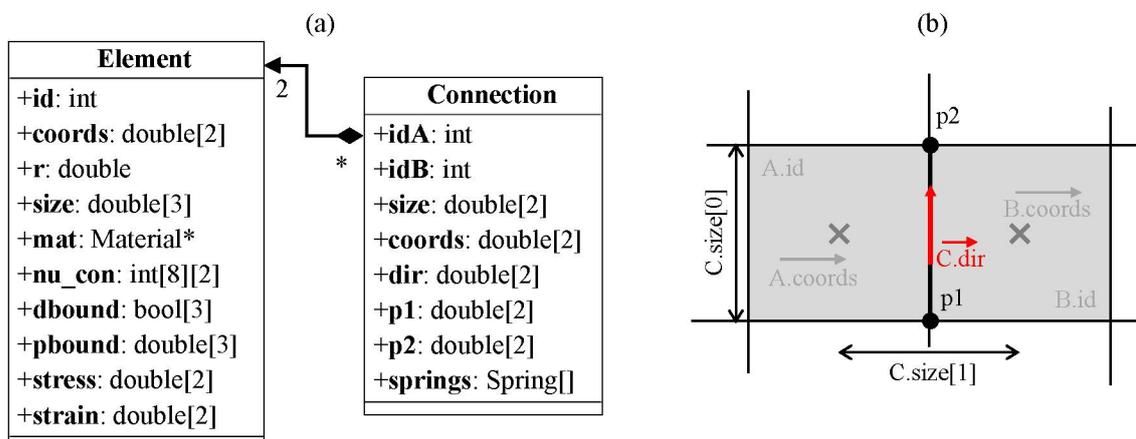
3 IMPLEMENTAÇÃO

Para o desenvolvimento desse método optou-se por utilizar a linguagem de programação C++. A biblioteca Eigen versão 3.4.0 (GUENNEBAUD; JACOB et al., 2020) foi amplamente utilizada para toda álgebra linear necessária. O *software* SWIG – *Simplified Wrapper and Interface Generator* versão 4.0.2 (THE SWIG DEVELOPERS, 2020), também foi utilizado para integrar o código com Python, permitindo a montagem de simulações interativamente, sem a necessidade de recompilação do código. O compilador GCC versão 11.2.0 no ambiente MSYS2 foi utilizado para compilação do código. Os códigos fontes estão disponíveis livremente no *Git-Hub*¹.

3.1 PRÉ-PROCESSAMENTO

As duas classes básicas implementadas para descrever a geometria são a *Element* e *Connection*, que representam, respectivamente, um elemento da análise e uma conexão entre um par de elementos, descritas na Figura 14(a). Pode-se visualizar os elementos como as faces de uma grade, ou uma malha, e as conexões como as arestas entre faces, conforme ilustrado na Figura 14(b), os atributos precedidos por “A.” e “B.” são referentes ao elemento da esquerda e da direita, e os precedidos por “C.” referentes a conexão.

Figura 14 - Classes Element e Connection.



Fonte: O autor.

Nessa implementação, cada elemento traz um número de identificação único (id), seus demais atributos representam: as coordenadas do centro do elemento (coords); sua rotação (r); suas dimensões horizontal, vertical e de profundidade (size); o material desse elemento (mat);

¹ Disponível em: <https://github.com/ricpialisi/AEMtool>. Acesso em: 18 ago. 2022.

uma tabela de conectividade com os elementos vizinhos para cálculo do efeito Poisson (*nu_con*); as condições de contorno de deslocamento (*dbound*) e forças aplicadas (*pbound*); e, finalmente, tensão (*stress*) e deformação (*strain*) do elemento. As conexões, por sua vez, trazem as identificações do par de elementos que elas relacionam (*idA* e *idB*); as dimensões de comprimento dessa conexão e distância entre centros dos elementos (*size*); o vetor de coordenadas do centro da conexão (*coords*); um vetor diretor unitário paralelo a direção da conexão (*dir*); os vértices dessa conexão (*p1* e *p2*); e as molas existentes nessa conexão.

O método *Retangular* da classe *Mesh* é responsável por montar uma malha de elementos retangulares. Ele toma como parâmetros de entrada as dimensões do modelo, as dimensões e o material dos elementos, e cria as instâncias das classes *Element* e *Connections* que representam a geometria do modelo. Um esquema simples de numeração, mostrado na equação (18), permite configurar de maneira eficiente todos os elementos e conexões numa malha retangular, além da tabela de conectividade para o efeito Poisson, graças a previsibilidade da posição dos elementos, ilustrado pela Figura 15. O número de elementos nx e ny é resultado da divisão das dimensões do modelo pelas dimensões do elemento, fica claro que é preciso escolher uma dimensão de elemento proporcional à da estrutura, de forma que nx e ny resultem em inteiros.

$$id = i \cdot nx + j, \quad i \in [0, ny), \quad j \in [0, nx) \quad (18)$$

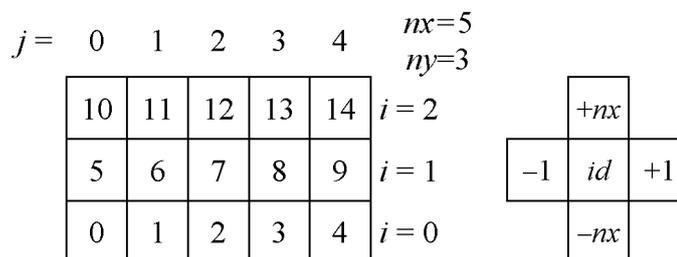
Onde:

i = linha;

j = coluna;

nx, ny = número de elementos no horizontal e vertical.

Figura 15 - Esquema de numeração dos elementos.



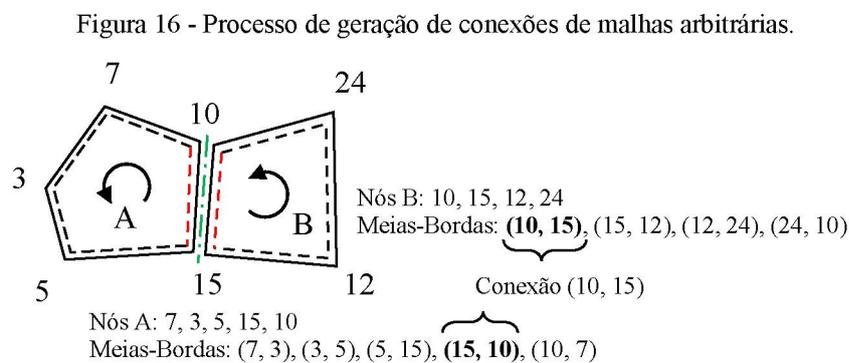
Fonte: O autor.

O método *importMSH* também foi desenvolvido para a importação de malhas de elementos mais complexas, geradas pelo *software* GMSH². Inicialmente são separados os grupos físicos da malha, estes podem representar as faces ou nós de apoio e/ou aplicação de carga, ou regiões de elementos com alguma propriedade distinta, ressalta-se que apenas

² Especificação do formato de arquivo disponível em: <https://gmsh.info/doc/texinfo/gmsh.html#MSH-file-format>. Acesso em: 10 ago. 2022

elementos pertencentes a pelo menos um grupo são exportados por padrão. Em seguida, os grupos de entidades são lidos, estes agrupam elementos de diferentes dimensões (pontos, linhas e células) e os associam aos grupos físicos. As coordenadas dos nós da malha são então lidas, elas são divididas em blocos de nós, cada um associado a uma entidade. Os elementos são também divididos em blocos associados a uma entidade. Elementos de dimensões abaixo de 2, como, por exemplo, linhas e nós, são armazenados com as suas respectivas entidades, para fazer a correspondência de grupos físicos nos demais elementos posteriormente. Os elementos bidimensionais, ou células, são lidos e é verificado se entre os nós que compõem esse elemento, está contido algum elemento de dimensão menor, associando então os grupos deste, por fim, área e centroide são calculados.

Para gerar as conexões, todos os elementos são iterados, e são criadas “meias-bordas” entre os pares de nós que formam os elementos. Em seguida, todas essas meias-bordas são comparadas contra as demais, verificando se outra meia-borda de outro elemento utiliza o mesmo par de nós, formando uma “borda-inteira”, que representa a conexão entre os elementos, o processo é ilustrado na Figura 16. Essa formulação para determinar as conexões permite gerar malhas com quaisquer tipos de elementos poligonais exportados pelo GMSH, e pode também ser estendida para outros formatos de malhas como células Voronoi por exemplo. Algumas limitações, no entanto, ainda estão presentes: não foi implementada a definição de múltiplos materiais e/ou espessuras de elementos para diferentes grupos físicos, nem é possível gerar a tabela de conectividade requerida para aplicação do efeito Poisson, no caso de elementos quadrados.



Fonte: O autor.

Com a geometria configurada é necessário definir as condições de contorno do modelo. Para isso, a classe *Mesh* traz os métodos *applyDbound* e *applyPbound* para aplicar condições de apoio e forças aplicadas, respectivamente. As funções tomam como parâmetros de entrada o id dos elementos e um vetor com as condições nos 3 graus de liberdade de cada modelo, as

direções horizontal e vertical e a rotação. O vetor para as condições de apoio usa valores lógicos com *Verdadeiro* para fixação na direção e *Falso* para movimento livre, enquanto o vetor da força aplicada utiliza valores numéricos, representando as forças horizontal, vertical e o momento aplicado. A classe *Mesh* traz o atributo *edges*, que agrupa os ids dos principais grupos de elementos, os das quatro bordas e os quatro cantos.

A classe *Mesh* traz os dois métodos desenvolvidos para adicionar molas ao modelo: *CreateSprings* e *AddRebar*, responsáveis por criar as molas entre as conexões, e a mola que representa uma armadura, respectivamente.

O método *CreateSprings*, mostrado no Algoritmo 1, toma como parâmetros de entrada uma lei constitutiva e um número de molas a serem criadas nas conexões, por padrão, 10. O método itera pelas conexões da malha, criando molas igualmente espaçadas ao longo da conexão.

Algoritmo 1 - Pseudocódigo de CreateSprings.

```

1 função CreateSprings(Law lei, int N_springs = 10):
2 para cada conexão em conexões:
3     e1A = elementos[conexão.idA]
4     e1B = elementos[conexão.idB]
5     Kn, Ks = lei.output(e1A, e1B, conexão)
6     para s entre [0, N_springs):
7          $\vec{pt} = \text{conexão.coords} + \text{conexão.dir} * \text{conexão.size}[0] * \left(0,5 - \frac{0,5+s}{N_{springs}}\right)$ 
8         conexão.molas.adiciona(pt, Kn, Ks)

```

O método *AddRebar*, mostrado no Algoritmo 2, toma como parâmetros uma barra de reforço e uma lei constitutiva. É iterado pelas conexões da malha, verificando a existência de uma intersecção entre a barra e a conexão, e, havendo intersecção, é adicionado uma mola nessa coordenada.

Algoritmo 2 - Pseudocódigo AddRebar.

```

9 função AddRebar(Embedded barra, Law lei):
10 para cada conexão em conexões:
11     se inter = intersecção(barra, conexão) existe:
12         Kn, Ks = lei.output(barra, conexão)
13         conexão.molas.adiciona(inter, Kn, Ks, verdadeiro)

```

Considerando a equação da reta na forma vetorial, $\mathbf{P}(t) = \mathbf{A} + t \cdot \mathbf{u}$, é possível determinar a intersecção entre duas retas pela regra de Cramer. Igualando as equações de duas retas, eq. (19), é possível deduzir o sistema de equações (20).

$$\mathbf{A} + t \cdot \mathbf{u} = \mathbf{B} + s \cdot \mathbf{v} \quad (19)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 & -v_1 \\ u_2 & -v_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t \\ s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} B_1 - A_1 \\ B_2 - A_2 \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Uma intersecção existe se o determinante da matriz for não-nulo e se o ponto de intersecção estiver dentro dos trechos finitos das retas que representam a barra e a conexão. Para a barra é possível utilizar **p1** como ponto inicial e **p2-p1** como vetor diretor, sendo válida no trecho $0 \leq t \leq 1$. As conexões utilizam o vetor de coordenadas do centro **coords**, e o vetor diretor **dir**, sendo válidas para $|s| \leq 0,5 \cdot \text{size}[0]$.

3.2 PROCESSAMENTO

A montagem da matriz de rigidez global é demonstrada no Algoritmo 3. O operador += soma o valor operado ao valor atual da variável. A utilização de matrizes esparsas é fundamental para montagem de modelos com maior número de elementos. Matrizes esparsas representam apenas os valores não nulos, economizando substancialmente memória. São ideais para matrizes de rigidez onde existem muitos zeros, além de terem *solvers* mais apropriados, tendo também ganhos de performance. A exemplo, uma matriz de valores decimais de precisão dupla (ponto flutuante de 64 bits, geralmente denominados *double*), necessita de 8 bytes de memória por valor. Um modelo com 10 mil elementos, teria uma matriz de 30 mil linhas por 30 mil colunas considerando os 3 graus de liberdade por elemento, não desprezando os zeros, essa matriz necessitaria de $30.000^2 \cdot 8 \text{ Bytes} \approx 6,71 \text{ GBytes}$ de memória. Sendo o tamanho da matriz de rigidez quadrático em relação ao número de elementos, os requisitos de memória rapidamente atingem patamares impraticáveis.

Algoritmo 3 - Pseudocódigo Assembly.

```

1 função Assembly():
2 K = matriz_esparsa(tamanho(elementos)*3, tamanho(elementos)*3)
3 D = vetor(tamanho(elementos)*3)
4 F = vetor(tamanho(elementos)*3)
5 para cada conexão em conexões:
6     e1A = elementos[conexão.idA]
7     e1B = elementos[conexão.idB]
8     T = rotação(e1A, e1B)
9     Klocal = matriz(6, 6)
10    para cada mola em conexão.molas:
11        Klocal += mola.rigidez
12    K[conexão.idA*3+0..3, conexão.idB*3+0..3] += TT * Klocal * T

```

```

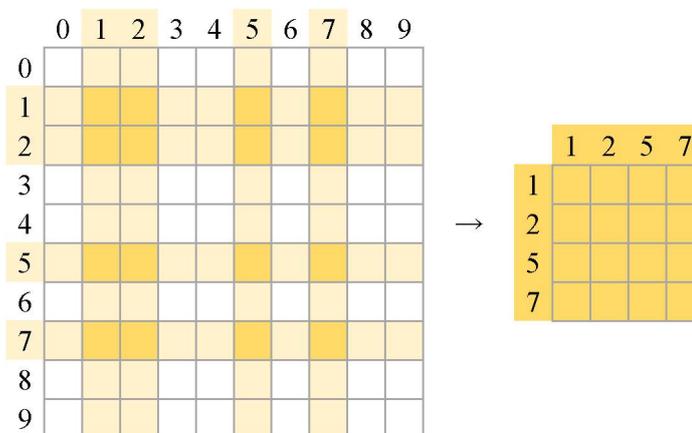
13 para cada elemento em elementos:
14   K += EffPoisson(elemento)
15   D[elemento.id*3+0..3] = elemento.dbound
16   F[elemento.id*3+0..3] = elemento.pbound

```

A montagem da matriz de rigidez é atualmente a etapa que consome a maior parte do tempo total de processamento do modelo. A resolução em si do sistema utiliza as funções da biblioteca *Eigen*, já extensamente testadas e otimizadas, com um tempo de processamento mínimo. Uma das abordagens para acelerar o processamento da montagem dessa matriz, foi a execução em paralelo dos dois loops principais das conexões e dos elementos, nas linhas 5 e 13 do Algoritmo 3. Para evitar uma condição de *data racing*³, já que ambos os loops acessam e modificam a matriz K, cada loop modifica uma versão temporária da matriz, que apenas no final será somada à matriz final.

A biblioteca *Eigen* não dispõe de funções para separar as matrizes esparsas em submatrizes não contínuas, como exemplificado na Figura 17. Para isso, foram utilizadas matrizes identidade cortadas: partindo de uma matriz identidade de tamanho igual aos graus de liberdade do sistema, define-se uma matriz MF para os graus de liberdade fixos, apenas com as linhas correspondentes a esses graus, 1, 2, 5 e 7 conforme a equação (21) para o exemplo da Figura 17, e uma matriz ML para os graus de liberdade livres, com as linhas restantes. As linhas da submatriz resultante são definidas multiplicando a esquerda da matriz, e as colunas, multiplicando a transposta na direita, por exemplo: $K_{FF} = MF \cdot K \cdot MF^T$ ou $K_{FL} = MF \cdot K \cdot ML^T$.

Figura 17 – Submatriz não contínua.



Fonte: O autor.

³ *Data Racing* ocorre em programas *multi-thread*, isto é, que utilizam múltiplos núcleos do processador para realizar tarefas em paralelo, quando os diferentes processos ou *threads* tentam acessar e modificar as mesmas variáveis na memória, um processo precisa aguardar o outro finalizar a operação para então prosseguir, levando a má performance.

$$MF = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

3.3 PÓS-PROCESSAMENTO

O procedimento adotado para o cálculo das tensões e deformações é mostrado no Algoritmo 4. Os operadores `.*` e `./` denotam aqui multiplicação e divisão entre vetores aplicadas elemento a elemento, ou seja, retornam outro vetor de mesmo tamanho, enquanto o operador `*` denota uma multiplicação tradicional entre vetor e matriz ou entre matrizes.

Algoritmo 4 - Determinação de tensões-deformações.

```

1 função TensaoDeformacao():
2     para cada conexão em conexões:
3         e1A = elementos[conexão.idA]
4         e1B = elementos[conexão.idB]
5         e = normalizar(e1B.coords - e1A.coords)
6         T = [ e[0]  e[1]
              [-e[1] e[0]]
7         peso = vetor(T.cos², T.sen², 1)
8         dA = e1A.deslocamento
9         dB = e1B.deslocamento
10        rotA = [ cos(e1A.rotacao)  -sen(e1A.rotacao)
                [ sen(e1A.rotacao)  cos(e1A.rotacao)
11        rotB = [ cos(e1B.rotacao)  -sen(e1B.rotacao)
                [ sen(e1B.rotacao)  cos(e1B.rotacao)
12        para cada mola em conexão.molas:
13            coordRelA = mola.coordA - e1A.coords
14            coordRelAdeform = rotA*coordRelA + dA
15            deltaA = coordRelAdeform - coordRelA
16            coordRelB = mola.coordB - e1B.coords
17            coordRelBdeform = rotB*coordRelB + dB
18            deltaB = coordRelBdeform - coordRelB
19            delta = T*((mola.coordB + deltaB) - (mola.coordA + deltaA))
20            defN = delta[0]/conexão.size[1]
21            defT = delta[1]/conexão.size[1]
22            deformacaoGlobal = vetor(
                T.cos²*defN - 2*T.cos*T.sen*defT,
                T.sen²*defN + 2*T.cos*T.sen*defT,
                T.cos*T.sen*defN + (T.cos² - T.sen²)*defT
            )
23            mola.deformacaoA = deformacaoGlobal
24            mola.deformacaoB = deformacaoGlobal

```

```

25     elA.def_media += deformacaoGlobal .* peso
26     elA.pesos += peso
27     elB.def_media += deformacaoGlobal .* peso
28     elB.pesos += peso
29     para cada elemento em elementos:
30         elemento.def_media = elemento.def_media ./ elemento.pesos
31     para cada conexão em conexões:
32         elA = elementos[conexão.idA]
33         elB = elementos[conexão.idB]
34         nuA = elA.material.nu
35         nuB = elB.material.nu
36     para cada mola em conexão.molas:
37         mola.deformacaoA[0] += elA.def_media[1] * elA.material.nu
38         mola.deformacaoA[1] += elA.def_media[0] * elA.material.nu
39         mola.tensaoA[0] = elA.material.E * mola.deformacaoA[0]/(1-nuA)
40         mola.tensaoA[1] = elA.material.E * mola.deformacaoA[1]/(1-nuA)
41         mola.tensaoA[2] = elA.material.G * mola.deformacaoA[2]
42         elA.tensao_media += mola.tensaoA .* peso
43         mola.deformacaoB[0] += elB.def_media[1] * elB.material.nu
44         mola.deformacaoB[1] += elB.def_media[0] * elB.material.nu
45         mola.tensaoB[0] = elB.material.E * mola.deformacaoB[0]/(1-nuB)
46         mola.tensaoB[1] = elB.material.E * mola.deformacaoB[1]/(1-nuB)
47         mola.tensaoB[2] = elB.material.G * mola.deformacaoB[2]
48         elB.tensao_media += mola.tensaoB .* peso
49     para cada elemento em elementos:
50         elemento.tensao_media = elemento.tensao_media ./ elemento.pesos

```

O primeiro loop para cada conexão gera a matriz de rotação **T** utilizada para rotacionar as coordenadas do sistema global para o local e gerar o vetor de **pesos**, os vetores de deslocamento **dA** e **dB** dos elementos, e as matrizes de rotação **rotA** e **rotB** para aplicar as rotações calculadas para cada elemento. O próximo loop aninhado das molas dentro de cada conexão calcula as coordenadas relativas das molas para aplicar os deslocamentos e rotação dos elementos e determinar o deslocamento **delta** na configuração local entre os extremos das molas, com isso, as deformações normais e tangenciais **defN** e **defT** são calculadas e rotacionadas para a configuração global e atribuídas às molas.

Em seguida um loop para cada elemento apenas calcula a deformação média dos elementos a partir dos pesos. E um novo loop para as conexões e para suas molas, corrige as deformações a partir da deformação média dos elementos, calculando então as tensões das molas. É possível então acumular a tensão das molas na tensão média do elemento, e no último loop para cada elemento, dividir pelos pesos obtendo a média, como demonstrado no Algoritmo 4. Outra abordagem também é calcular as tensões médias no elemento de forma análoga as das

molas, incluindo a correção da deformação (linhas 37 a 41), utilizando a deformação média do elemento, por simplicidade, esta foi a adotada no programa final.

Para visualização e interpretação dos resultados são gerados arquivos no formato VTK – *Visualization Toolkit*. O VTK é um *toolkit*, ou, um conjunto de ferramentas, para visualização de dados (SCHROEDER; MARTIN; LORENSEN, 2006). Foi utilizada a especificação de arquivos *Legacy* no formato *ASCII*⁴ para exportação dos dados, todos os dados são salvos em formato de texto com a primeira seção do arquivo descrevendo a geometria do modelo, e as seções seguintes descrevendo os dados em forma de campos escalares, vetoriais ou tensoriais. O módulo *VTKwriter* foi desenvolvido em paralelo para realizar essa exportação de dados.

Optou-se por gerar um par de arquivos, um referente aos elementos, e o outro referente às molas. O arquivo dos elementos inclui o campo de deslocamentos dos elementos, um campo de rotações, os campos de tensão e deformações, e um campo de tensões principais. O arquivo das molas, por sua vez, traz as tensões e deformações normais e tangenciais de cada mola, além da sua orientação. Os resultados podem, então, ser visualizados através do *software* ParaView (AYACHIT, 2015).

⁴Detalhes e especificações desse formato de arquivos estão disponíveis em: <https://kitware.github.io/vtk-examples/site/VTKFileFormats/>. Acesso em: 15 jun. 2021.

4 EXEMPLOS ESTUDADOS

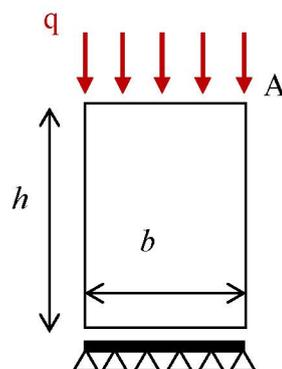
Neste capítulo será abordada a metodologia aplicada para o desenvolvimento desse trabalho e os modelos propostos para análise através do Método dos Elementos Aplicados. Os modelos serão comparados com seus modelos teóricos analíticos equivalentes e também com modelos feitos pelo mais tradicional Método dos Elementos Finitos em 2D. Além disso, será realizada uma análise de sensibilidade de malha, variando o tamanho e forma dos elementos, o número de molas por conexão, e a aplicação do efeito Poisson. Foram realizados também modelos equivalentes no MEF com a versão educacional do *ANSYS 2022 R2*, com elementos lineares de 4 nós nas mesmas dimensões dos elementos AEM.

As simulações foram realizadas num computador com processador Intel i5-9400F de 6 núcleos com frequência-base de 2,90GHz e 16GB de memória RAM DDR4 com frequência de 2666MHz, no sistema operacional Windows 10 versão 21H1.

4.1 EXEMPLO DE CARGA DISTRIBUÍDA APLICADA EM BLOCO APOIADO

O primeiro exemplo a ser analisado será um bloco prismático sujeito a carga distribuída vertical conforme o esquema apresentado na Figura 18. Trata-se de um bloco com altura h , base b , e uma espessura t com a área de seção transversal $A = b \cdot t$. O bloco é simplesmente apoiado na sua base e com uma força $P = \pm 10$ kN equivalente a $q = \pm 50$ kN/m distribuída na face superior para simular a compressão e a tração. Serão arbitradas dimensões de 20x36cm e espessura 20cm para o corpo, com o módulo de elasticidade $E = 26$ GPa e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$.

Figura 18 - Esquema do ensaio em corpo prismático.



Fonte: O autor.

Um resumo das simulações com o modelo é mostrado na Tabela 1. Foram realizadas simulações com 5 e 10 molas, e a formulação integrada proposta por Christy, Nagarajan e Pillai

(2021), e não se observou diferença nos valores do deslocamento nas 3 primeiras casas decimais. Foram realizadas também simulações com e sem a aplicação do efeito Poisson, além da variação no tamanho do elemento. Como valor de referência, utilizou-se os deslocamentos do modelo em elementos finitos.

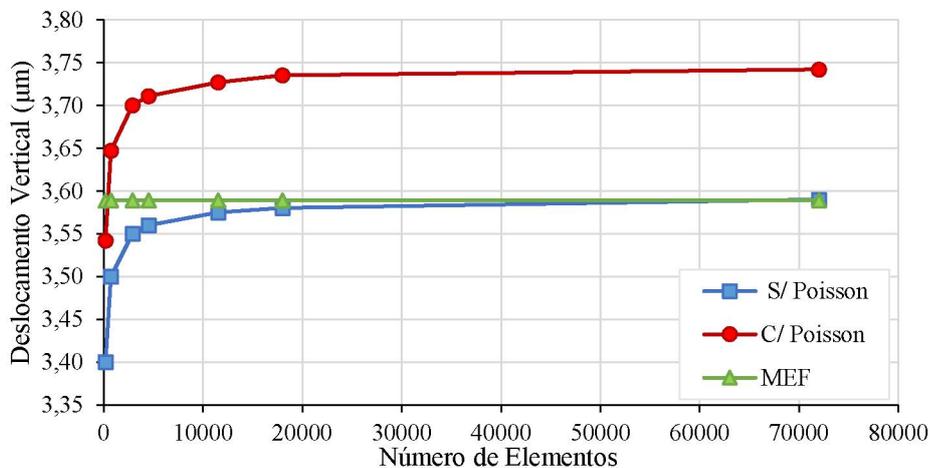
Tabela 1 - Dados da simulação de carga axial de compressão.

Caso	Tamanho do Elemento (cm)	Número de elementos	Deslocamento AEM (μm)		Deslocamento MEF (μm)	Diferença MEF (%)	
			S/ Poisson	C/ Poisson		S/ Poisson	C/ Poisson
1	2,0 x 2,0	180	3,400	3,542	3,5886	-5,26	-1,30
2	1,0 x 1,0	720	3,500	3,647	3,589	-2,48	+1,62
3	0,5 x 0,5	2880	3,550	3,700	3,589	-1,09	+3,09
4	0,4 x 0,4	4500	3,560	3,711	3,589	-0,81	+3,40
5	0,25 x 0,25	11520	3,575	3,727	3,589	-0,39	+3,85
6	0,2 x 0,2	18000	3,580	3,735	3,589	-0,25	+4,07
7	0,1 x 0,1	72000	3,590	3,742	3,589	+0,03	+4,26

Fonte: O autor.

A Figura 19 traz um resumo gráfico da Tabela 1. Os valores aparentam caminhar para uma convergência, com o modelo sem aplicação do efeito Poisson se aproximando do valor em MEF. Nota-se também o comportamento quase paralelo das curvas entre os modelos sem e com aplicação do efeito, com uma distância média entre eles de $0,150 \mu\text{m}$. A diferença entre a aplicação ou não do efeito, no entanto, não se restringiu aos deslocamentos, o modelo sem aplicação trouxe os campos de tensões todos constantes, com $\sigma_y = -260,4 \text{ kPa}$, $\sigma_x = -52,1 \text{ kPa}$, e tensão tangencial nula.

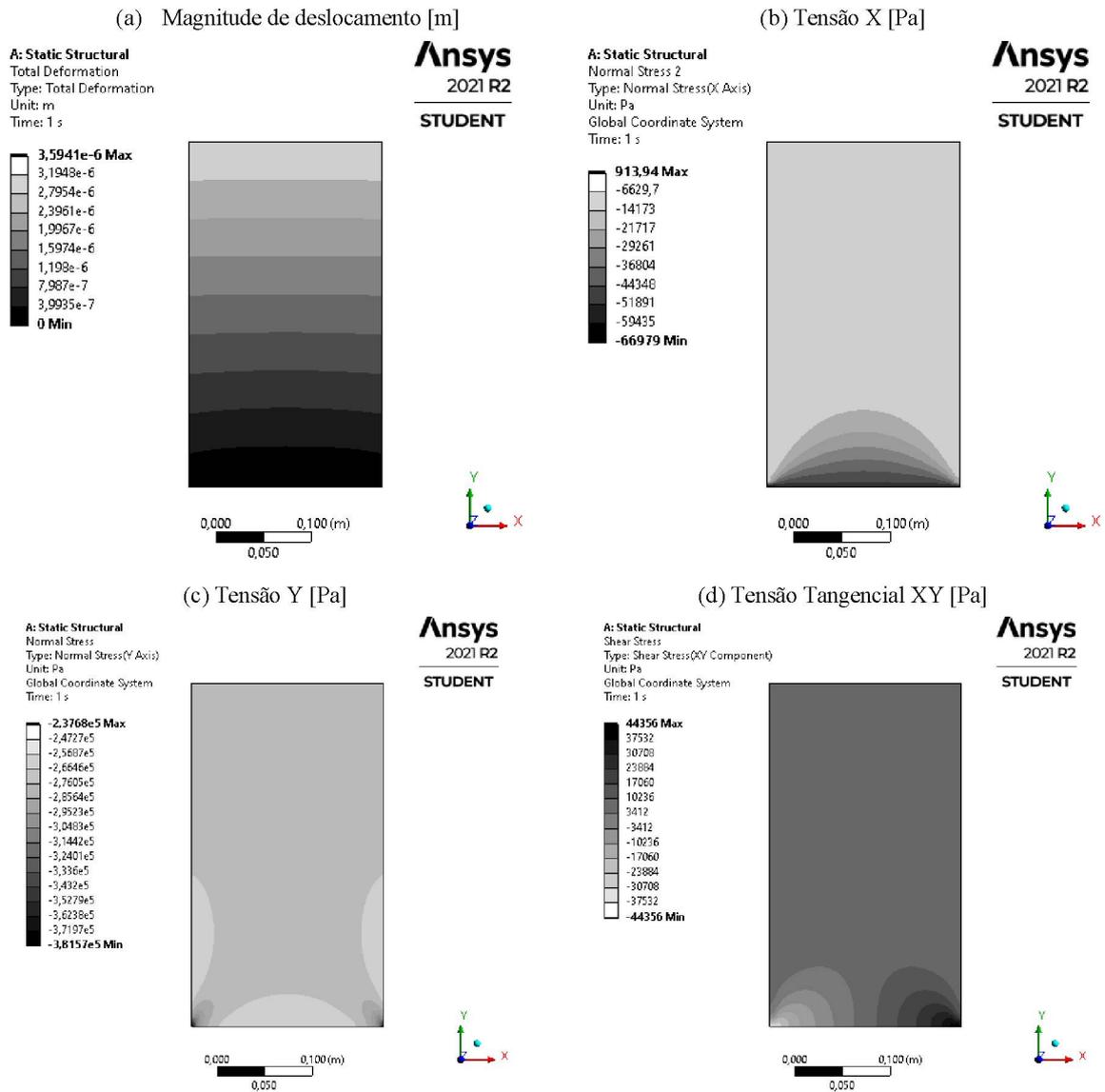
Figura 19 - Análise de Sensibilidade de Malha no modelo de carga axial.



Fonte: O autor.

A Figura 20 apresenta os resultados do modelo MEF para referência.

Figura 20 - Modelo de Carga axial MEF.



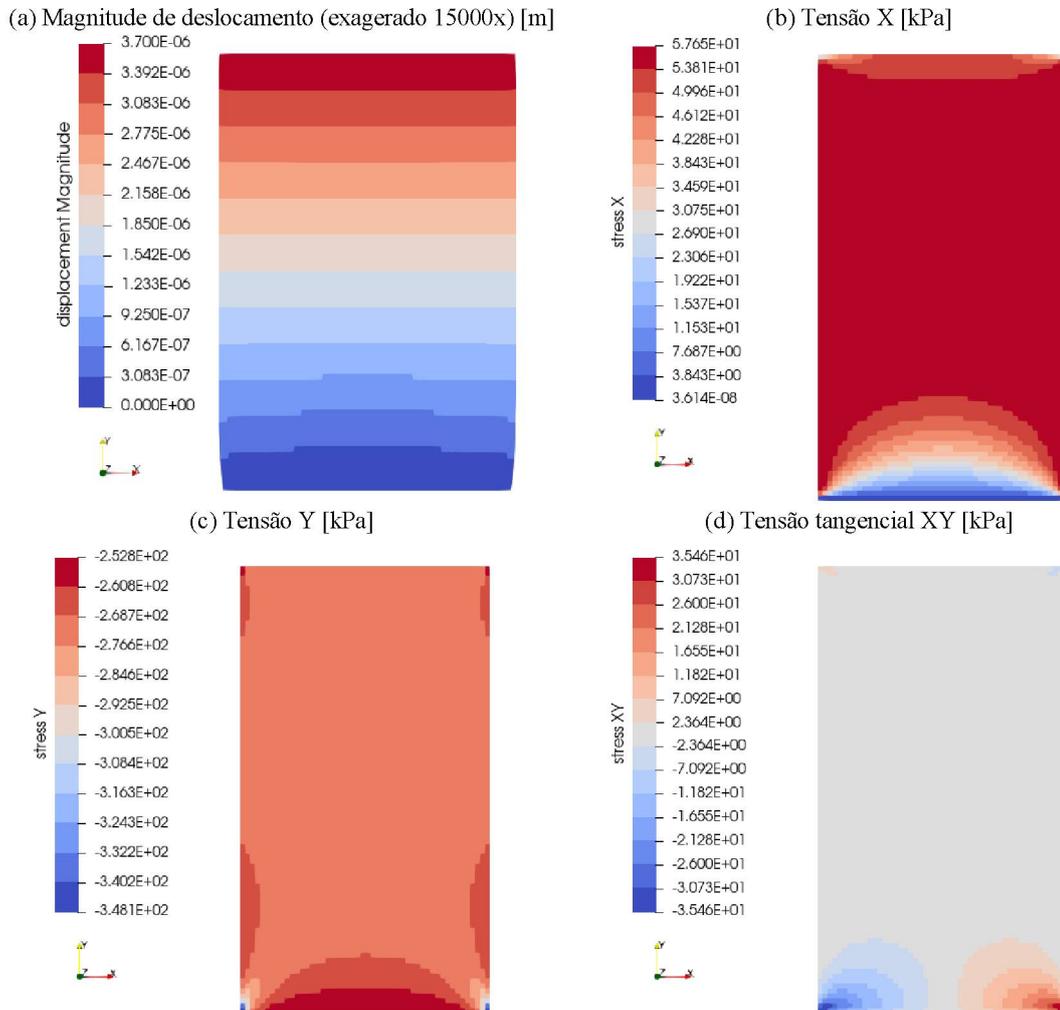
Fonte: O autor.

A Figura 21 apresenta os resultados do terceiro modelo simulado da carga axial de compressão com 10 molas e aplicação do efeito Poisson. A magnitude do deslocamento na configuração deformada é apresentada na Figura 21(a), as Figura 21(b), (c) e (d), respectivamente, apresentam as tensões na direção X, Y, e a tensão tangencial XY.

Os modelos apresentam boa compatibilidade com os campos de tensões na parte inferior do modelo, com algumas concentrações de tensões na parte superior, não presentes na referência em MEF. O campo de tensões Y na Figura 21(c) apresenta tensões entre -268,7 e -276,6 kPa, enquanto as do modelo MEF encontram-se entre -276,05 e -285,64 kPa, ambas condizentes com a tensão teórica $\sigma = F/A = 250$ kPa. O campo de tensão tangencial XY na

Figura 21(d) também apresenta as mesmas distribuições, com valores máximos e mínimos na mesma magnitude.

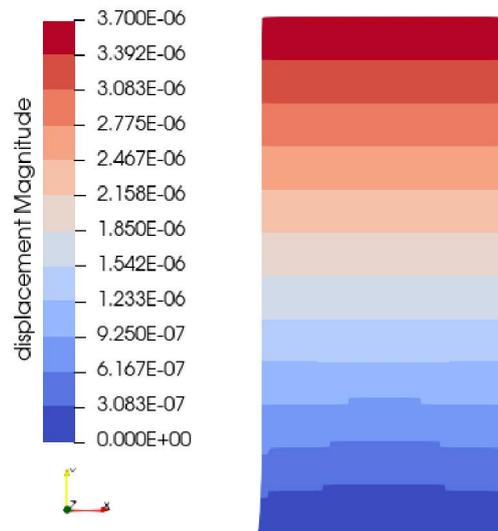
Figura 21 - Modelo de Carga Axial de compressão com efeito Poisson.



Fonte: O autor.

O modelo também foi ensaiado com uma carga de tração e obteve os mesmos resultados, porém em sentido oposto, o campo da magnitude de deslocamento na configuração deformada é apresentado na Figura 22, também com um comportamento conforme esperado físico, sendo tracionado no centro. Os demais campos de tensões são todos análogos aos do modelo comprimido, apenas com sentido inverso.

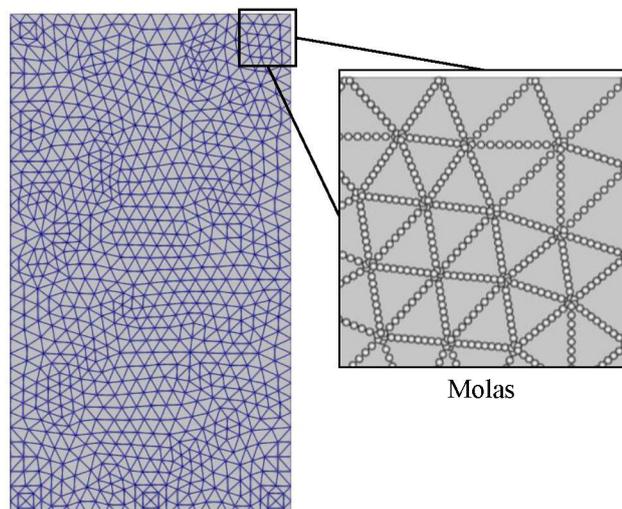
Figura 22 - Modelo de Carga axial tracionado, magnitude de deslocamento (exagerado 15.000x) [m].



Fonte: O autor.

Considerando que a formulação base da matriz de rigidez do método leva em conta apenas as distâncias do centroide do elemento à mola na interface entre dois elementos, e a rigidez da mola também sendo calculada apenas com a distância entre os centroides dos elementos e parâmetros dos materiais, não há impedimento explícito ao uso de outros formatos de elementos (exceto para a aplicação do efeito Poisson, exclusiva para elementos quadrados). Isso motivou o teste também de modelos com a utilização de uma malha de elementos triangulares, importadas pelo GMSH, com a segunda malha apresentada na Figura 23 com uma aproximação do canto do elemento, evidenciando as posição das molas ao longo das bordas.

Figura 23 - Malha de elementos triangulares.



Fonte: o autor.

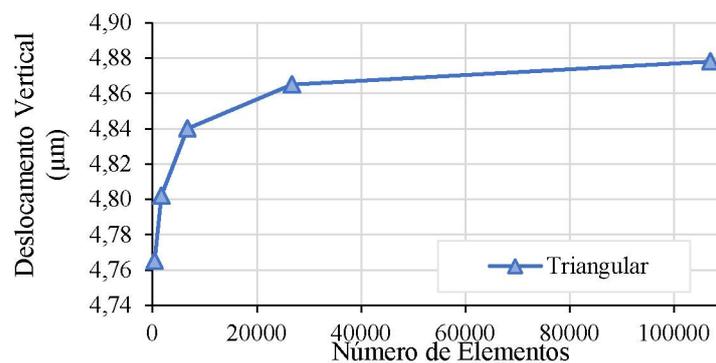
O resumo dos deslocamentos do modelo com elementos triangulares é apresentado na Tabela 2, acompanhado da análise de sensibilidade de malha na Figura 24.

Tabela 2 - Dados da simulação de carga axial de compressão com modelo triangular.

Caso	Número de Elementos	Deslocamento vertical (μm)
1	418	4,765
2	1672	4,802
3	6688	4,840
4	26752	4,865
5	107008	4,878

Fonte: O autor.

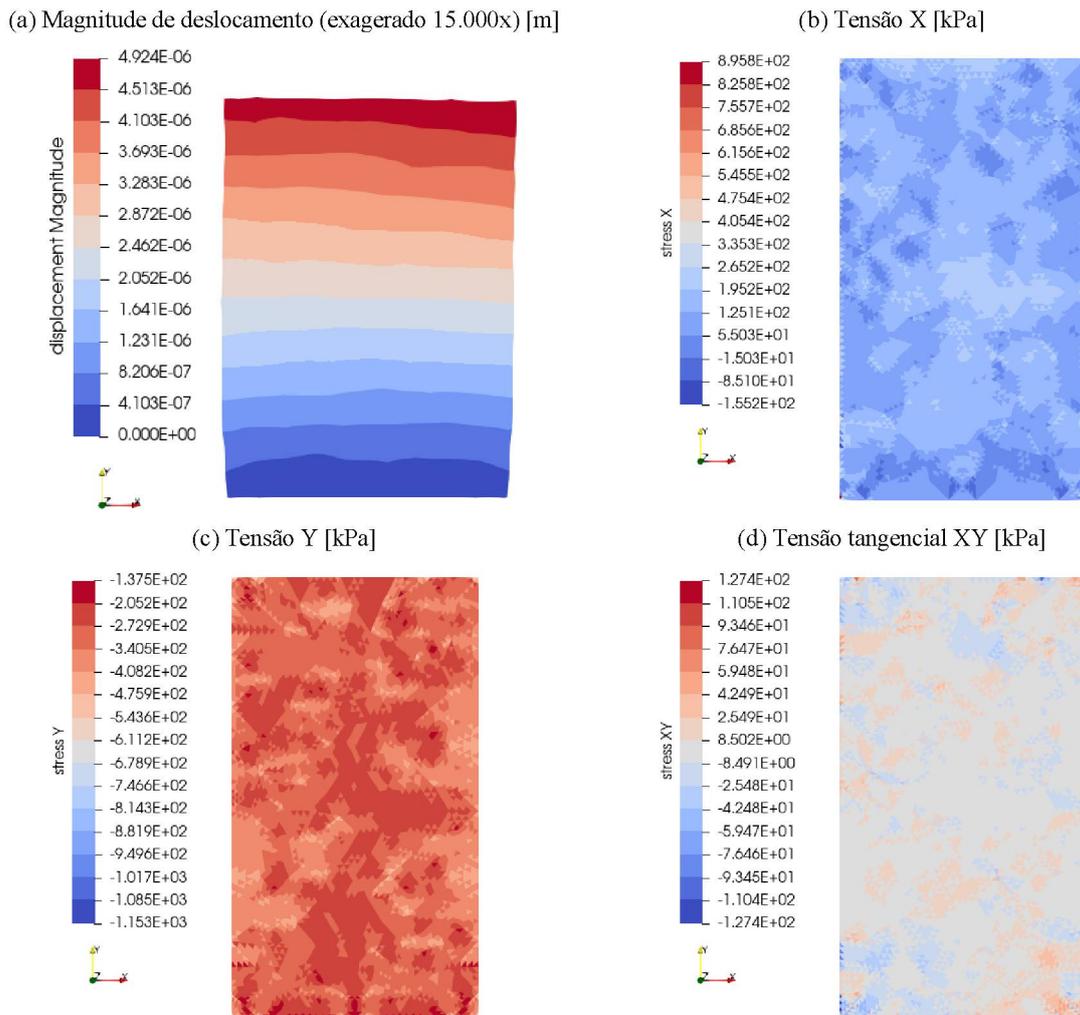
Figura 24 - Análise de sensibilidade de carga axial com malha triangular.



Fonte: O autor.

A Figura 25(a) traz a magnitude de deslocamento na configuração deformada, enquanto as Figuras (b), (c) e (d) trazem as tensões X, Y e tangencial XY, respectivamente. Embora o campo de deslocamentos tenha um comportamento em geral dentro do esperado fisicamente, o valor do deslocamento vertical do modelo é aproximadamente 1,36x maior em comparação ao deslocamento de referência em MEF, equivalente também ao deslocamento do modelo sem aplicação do efeito Poisson. Além disso, os campos de tensões apresentam comportamento instável, com a média da tensão na direção Y na faixa entre -272,9 e -340,5 kPa. Fica claro que não é possível utilizar a formulação sem modificações adicionais para elementos triangulares.

Figura 25 - Modelo de carga axial com elemento triangular.

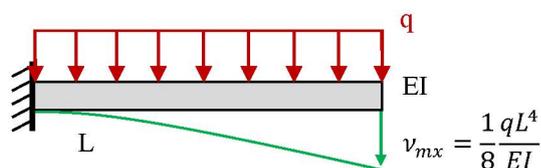


Fonte: O autor.

4.2 EXEMPLO DE VIGA ENGASTADA COM CARGA DISTRIBUÍDA

O próximo modelo simulado foi de uma viga engastada-livre com carga distribuída na face superior, conforme o esquema da Figura 26. Foram arbitrados os parâmetros $L=2\text{m}$, $q=20\text{kN/m}$, $E=25\text{GPa}$, e uma seção de viga $20\times 40\text{cm}$, com $I=1,067\cdot 10^{-3}\text{m}^4$. Para representar o engaste, todos os elementos da face esquerda do modelo foram fixados nos seus 3 graus de liberdade.

Figura 26 – Esquema de viga engastada com carga distribuída.



Fonte: O autor.

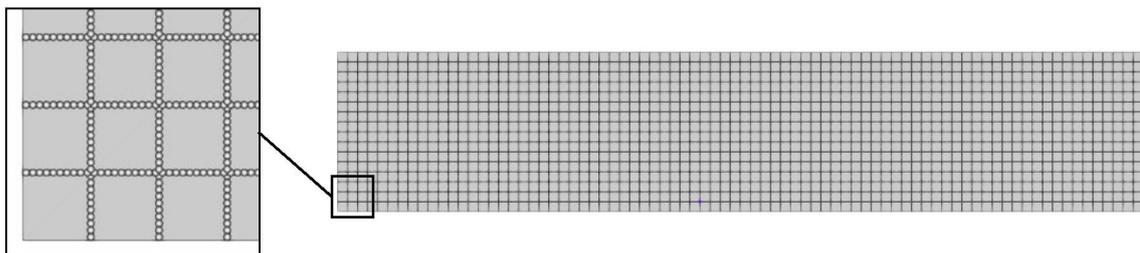
Assim como o modelo do item 4.1, o número de molas não afetou as 3 primeiras casas decimais. Foi escolhido para comparação o deslocamento analítico da viga de Euler-Bernoulli $\delta = qL^4/8EI = 1,442\text{mm}$ na extremidade livre, embora saiba-se que este não é apropriado para vigas com a proporção comprimento/altura menor que 10 (LABUSCHAGNE; RENSBURG; MERWE, 2009) como as simuladas. A Tabela 3 traz os resumos das simulações com 10 molas, sem e com a aplicação do efeito Poisson, e comparação com os deslocamentos em um modelo equivalente em elementos finitos, e com a utilização de elementos quadrados. A malha do caso Q3 é ilustrada na Figura 27, com destaque para as molas. Os demais modelos de vigas utilizaram as mesmas malhas de elementos, apenas com as condições de contorno apropriadas.

Tabela 3 – Dados da simulação de viga engastada com carga distribuída e elementos quadrados.

Caso	Tamanho do Elemento (cm)	Número de elementos	Deslocamento AEM (mm)		Diferença AEM e analítico (%)		Deslocamento MEF (mm)	Diferença MEF (%)	
			S/	C/	S/	C/		S/	C/
			Poisson	Poisson	Poisson	Poisson		Poisson	Poisson
Q1	10,0 x 10,0	80	1,408	1,428	-2,36	-0,97	1,5534	-9,36	-8,07
Q2	5,0 x 5,0	320	1,510	1,549	4,72	7,42	1,5562	-2,97	-0,46
Q3	2,5 x 2,5	1280	1,562	1,615	8,32	12,00	1,5572	0,31	3,71
Q4	2,0 x 2,0	2000	1,572	1,628	9,02	12,90	1,5574	0,94	4,53
Q5	1,25 x 1,25	5120	1,588	1,649	10,12	14,36	1,5576	1,95	5,87
Q6	1,0 x 1,0	8000	1,593	1,655	10,47	14,77	1,5576	2,27	6,25
Q7	0,5 x 0,5	32000	1,603	1,669	11,17	15,74	1,5576	2,91	7,15
Q8	0,25 x 0,25	128000	1,609	1,676	11,58	16,23	1,5576	3,30	7,60

Fonte: O autor.

Figura 27 – Malha da viga



Fonte: o autor.

Foram também realizadas simulações com a utilização de elementos retangulares, similares as realizadas por Christy, Pillai e Nagarajan (2020), com resultados mostrados na Tabela 4. É importante observar que não é possível aplicar o efeito Poisson, já que sua formulação se restringe a elementos quadrados. Nota-se também a convergência com um número significativamente menor de elementos em comparação ao modelo com elementos quadrados.

Tabela 4 – Dados da simulação de viga engastada com carga distribuída e elementos retangulares.

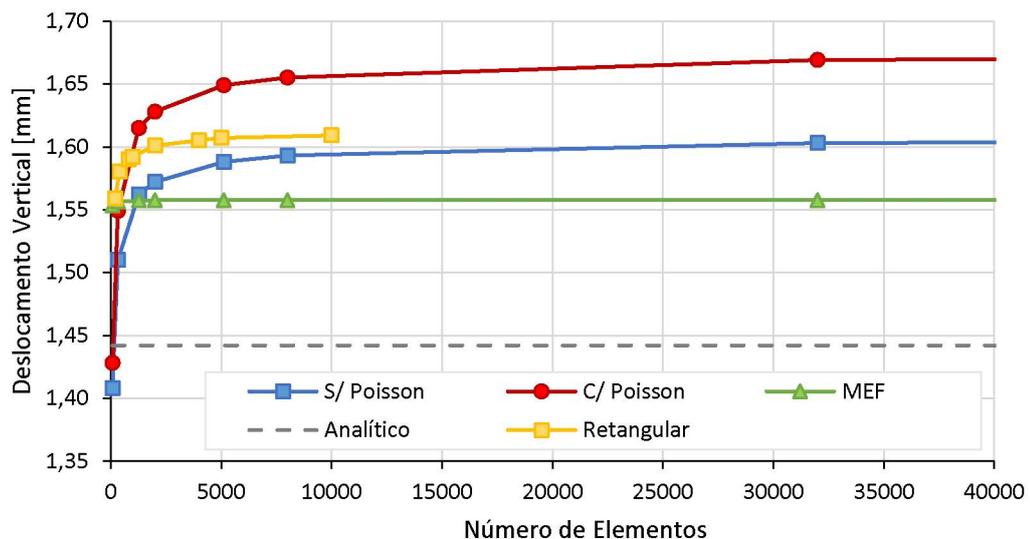
Caso	Tamanho do Elemento (cm)	Número de elementos	Deslocamento vertical (mm)	Diferença teórica (%)	Deslocamento MEF (mm)	Diferença MEF (%)
R1	2,0 x 20,0	200	1,559	+3,93	1,5502	+0,57
R2	1,0 x 20,0	400	1,580	+5,33	1,5504	+1,91
R3	0,5 x 20,0	800	1,590	+6,00	1,5506	+2,54
R4	0,4 x 20,0	1,000	1,592	+6,13	1,5506	+2,67
R5	0,4 x 10,0	2000	1,601	+6,73	1,5548	+2,97
R6	0,2 x 10,0	4,000	1,605	+7,00	1,5548	+3,23
R7	0,2 x 8,0	5,000	1,607	+7,13	1,5556	+3,30
R8	0,2 x 4,0	10,000	1,609	+7,27	1,5557	+3,43

Fonte: O autor.

Vale destacar que mesmo modelos com elementos mais estreitos não atrapalharam a convergência dos valores, em contraste, no MEF, elementos mais estreitos ficam instáveis.

A Figura 28 uma análise de sensibilidade de malha com os dados da Tabela 3 e Tabela 4, foi omitido o último caso com 128.000 elementos para melhorar a escala de visualização com os elementos retangulares, além dos resultados equivalentes em MEF do modelo retangular, por terem valores muito similares aos com elementos quadrados. Novamente, as curvas com e sem aplicação do efeito Poisson são quase paralelas, e apresentaram uma distância média de aproximadamente 0,060 mm após a convergência.

Figura 28 – Análise de sensibilidade viga engastada com carga distribuída.



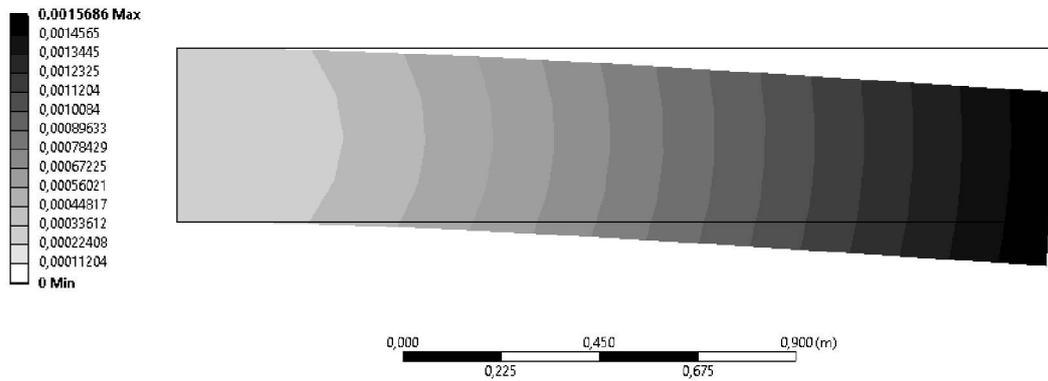
Fonte: O autor.

Para servir de referência e comparação, a Figura 29 traz os campos de deslocamento e tensões do modelo MEF.

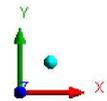
Figura 29 - Modelo MEF de viga engastada com carga distribuída.

(a) Magnitude de deslocamento (exagerado 66x) [m]

A: Static Structural
 Total Deformation
 Type: Total Deformation
 Unit: m
 Time: 1 s

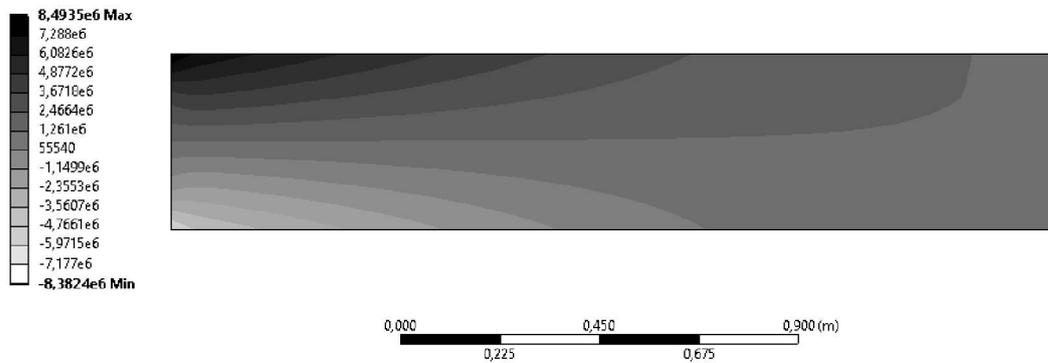


Ansys
 2021 R2
 STUDENT

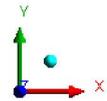


(b) Tensão X [Pa]

A: Static Structural
 Stress X
 Type: Normal Stress(X Axis)
 Unit: Pa
 Global Coordinate System
 Time: 1 s

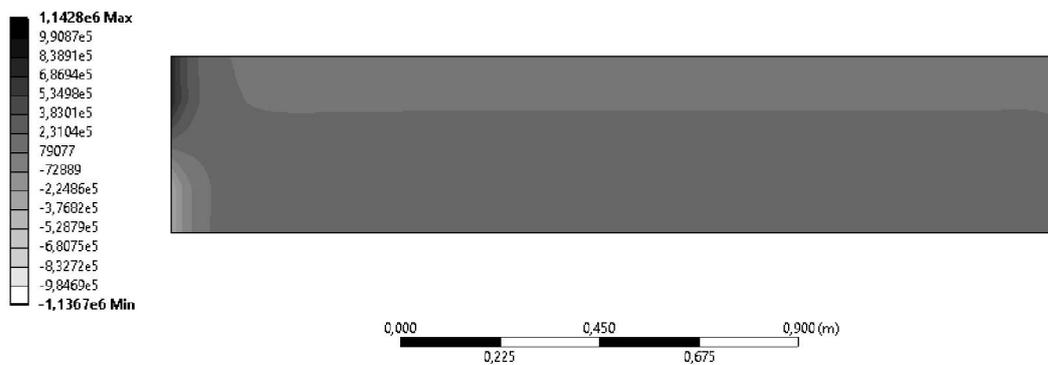


Ansys
 2021 R2
 STUDENT



(c) Tensão Y [Pa]

A: Static Structural
 Stress Y
 Type: Normal Stress(Y Axis)
 Unit: Pa
 Global Coordinate System
 Time: 1 s



Ansys
 2021 R2
 STUDENT

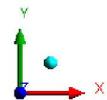
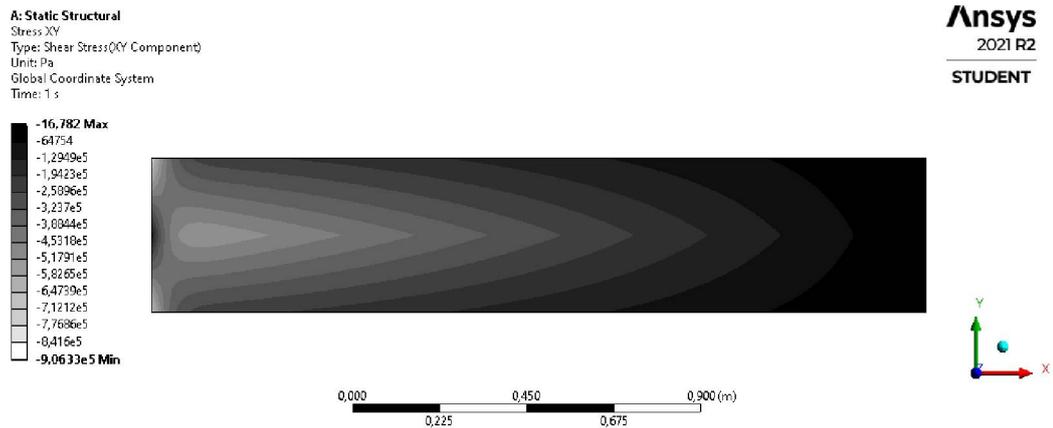


Figura 29 - Modelo MEF de viga engastada com carga distribuída. (Continuação)

(d) Tensão tangencial XY [Pa]

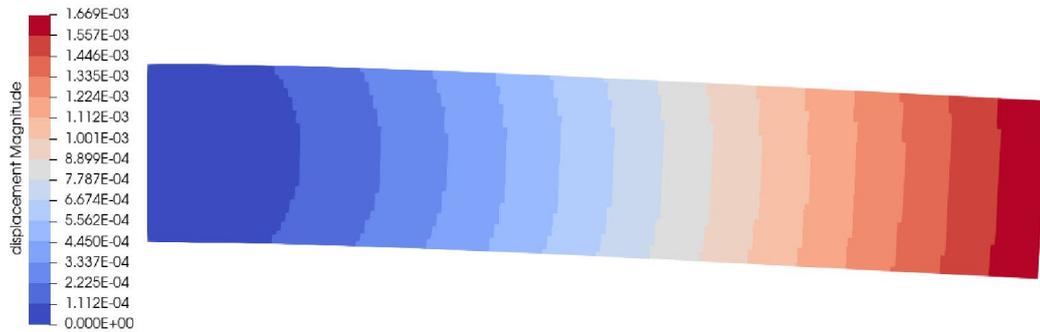


Fonte: O autor.

A Figura 30, por sua vez, traz os campos de deslocamento e tensões para o modelo do caso Q6, com elementos de 1,0 x 1,0 cm.

Figura 30 – Resultados modelo de carga distribuída.

(a) Magnitude de deslocamento (exagerado 50x) [m]



(b) Tensão X [kPa]



(c) Tensão Y [kPa]

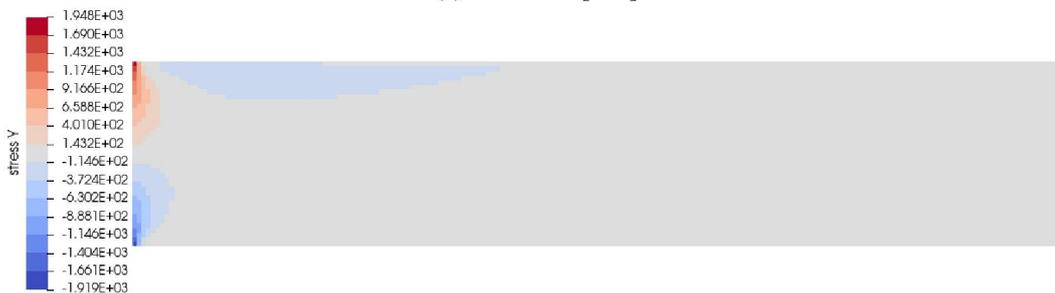
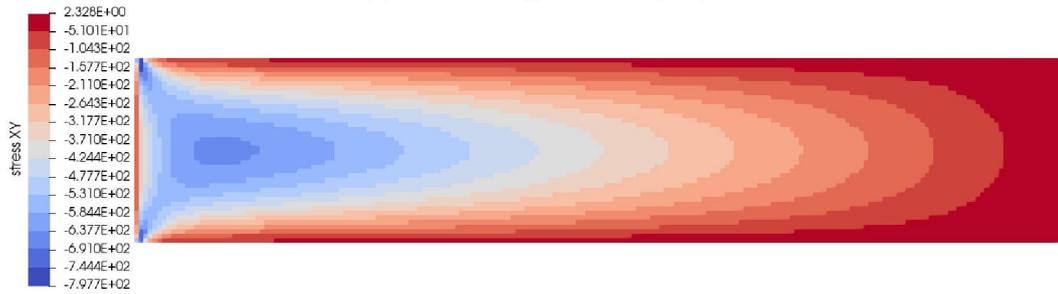


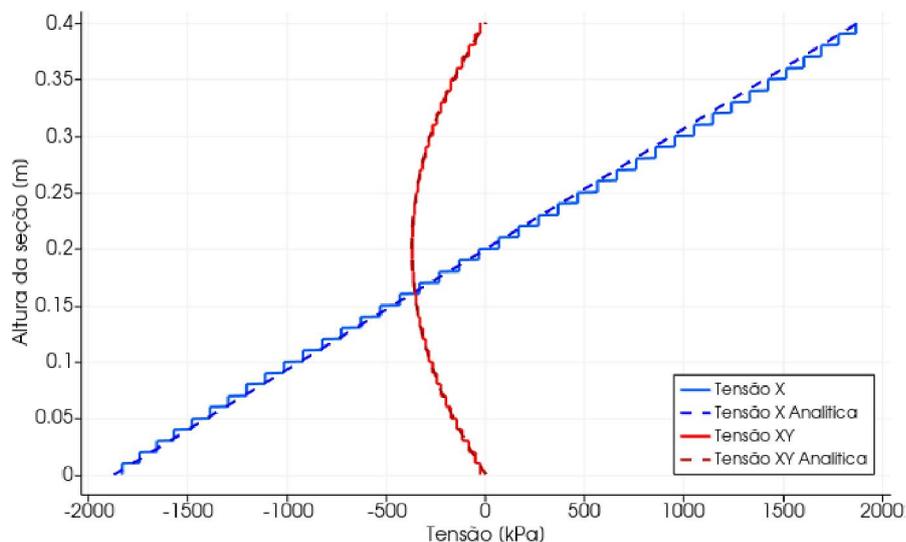
Figura 30 – Resultados modelo de carga distribuída. (Continuação)
(d) Tensão Tangencial XY [kPa]



Fonte: O autor.

Pode-se observar uma boa concordância entre os modelos. Os campos de deslocamentos do modelo deformado são quase idênticos. Em relação as tensões na direção X, há também uma boa concordância, inclusive nos valores, com os valores máximos entre -9,6 e +9,7 MPa, enquanto o modelo MEF estão entre -8,4 e +8,5 MPa. A tensão tangencial XY também mostra ótima concordância com a referência em MEF, com a tensão tangencial máxima de -797,7 kPa, enquanto o modelo MEF apresenta -906,3 kPa nos pontos de concentrações, tendo as áreas mais centrais da viga com valores mais próximos. Analisando uma seção transversal no centro da viga, temos a Figura 31 com as tensões X e tangencial nessa seção, ambas são coerentes com o modelo analítico da viga, onde a tensão X varia linearmente, sendo nula no centro da viga e máxima igual a $\sigma_x = \pm 1875$ kPa nas extremidades, e a tensão tangencial com distribuição parabólica e valor máximo no centro $\tau_{xy} = -375$ kPa. O modelo calculado traz valores muito próximos com σ_x entre -1832,6 e +1861,6 kPa e $\tau_{xy} = -372,1$ kPa.

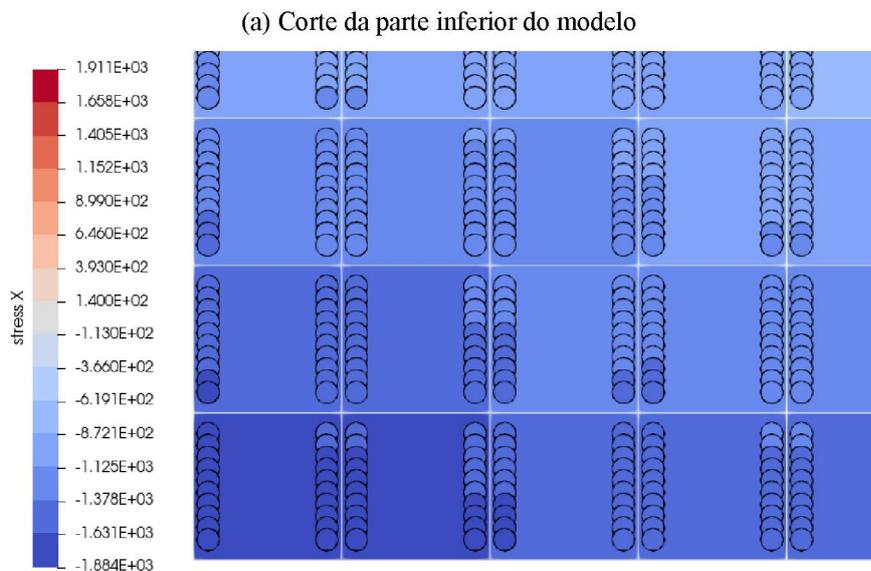
Figura 31 - Tensão X e tangencial XY no centro da viga com carga distribuída.



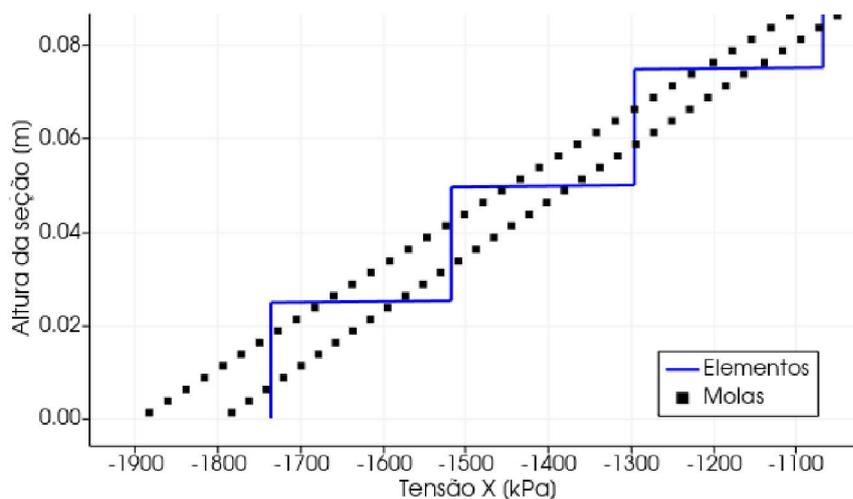
Fonte: O autor.

Destaca-se também que embora cada elemento apresente uma tensão média constante, essa tensão é discretizada em cada uma das molas, como demonstrado na Figura 32, escolheu-se o modelo Q3 com a malha mais grossa para evidenciar a diferença entre as tensões. A Figura 32(a) mostra uma aproximação de um corte na seção central e inferior da viga, apenas as molas verticais são exibidas como círculos pintados e distanciadas da sua posição real na direção do centroide do elemento as quais pertencem, as molas horizontais foram omitidas já que contribuem apenas com as tensões Y e tangencial XY. A Figura 32(b) detalha as tensões nessa mesma região, como esperado, a tensão média do elemento é a média entre as tensões das molas que compõem ele. Não foi possível, porém, encontrar uma maneira mais direta de representar continuamente esses dados pontuais das molas dentro do *ParaView*.

Figura 32 - Tensão X discretizada nas molas.



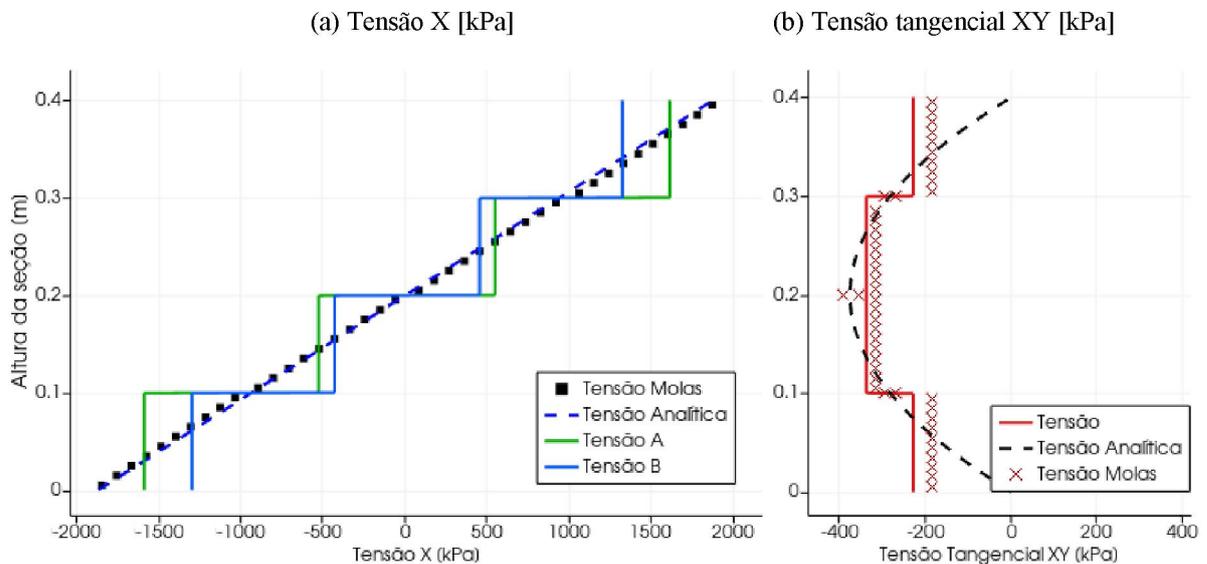
(b) Gráfico da tensão nas molas e elementos



Fonte: O autor.

A Figura 33 mostra as tensões X e tangencial XY numa seção no centro da viga, porém no primeiro modelo Q1 com apenas 80 elementos de 10,0 x 10,0cm, e somente 4 elementos na direção da altura. Como o modelo também tem um número par de elementos ao longo do comprimento, a seção central fica exatamente sobre a conexão entre 2 elementos. Na figura foram evidenciadas apenas as molas dessa conexão central, e as tensões X para os elementos da esquerda (A) e da direita (B), as tensões tangenciais XY são mostradas apenas para o elemento esquerdo por serem muito próximas. Pode-se observar que mesmo nesse modelo com poucos elementos, a tensão X nas molas teve o alinhamento quase perfeito com a tensão analítica, com as tensões médias no elemento também se aproximando adequadamente às tensões teóricas. O mesmo não pode ser dito das molas tangenciais, com estas refletindo o mesmo comportamento médio do elemento, embora com alinhamento razoável ao modelo teórico, as molas não oferecem uma discretização extra para as tensões tangenciais.

Figura 33 – Tensões em modelo com malha grosseira.

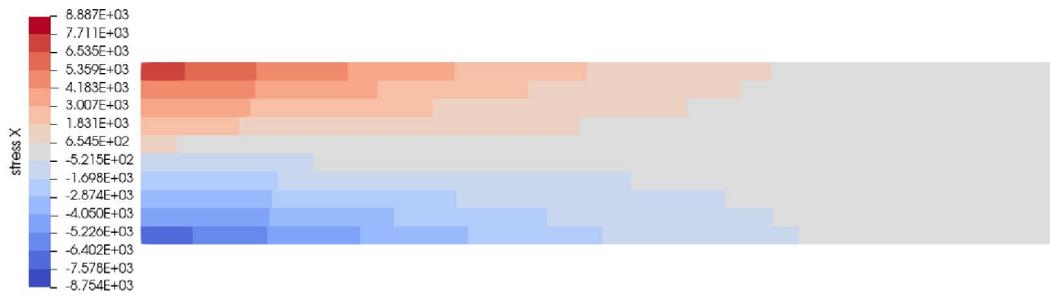


Fonte: O autor.

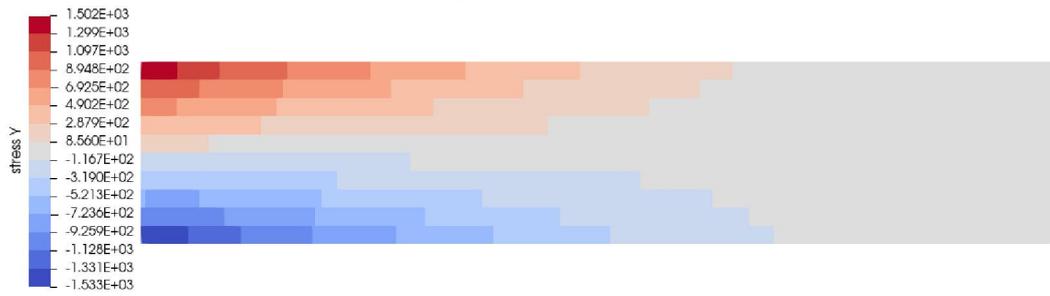
Em relação aos modelos com elementos retangulares, seus campos de tensões são apresentados na Figura 34. Embora a tensão X se comporte adequadamente, a tensão Y na Figura 34(b) tem comportamento divergente do modelo de referência em MEF. O campo de tensões tangenciais XY na Figura 34(c) tem o comportamento divergente nas concentrações de tensões no apoio, mas, na seção central demonstrada na Figura 34(d), as tensões X e tangencial XY se adequam perfeitamente aos modelos analíticos.

Figura 34 – Campos de tensões da viga engastada com carga distribuída e elementos retangulares.

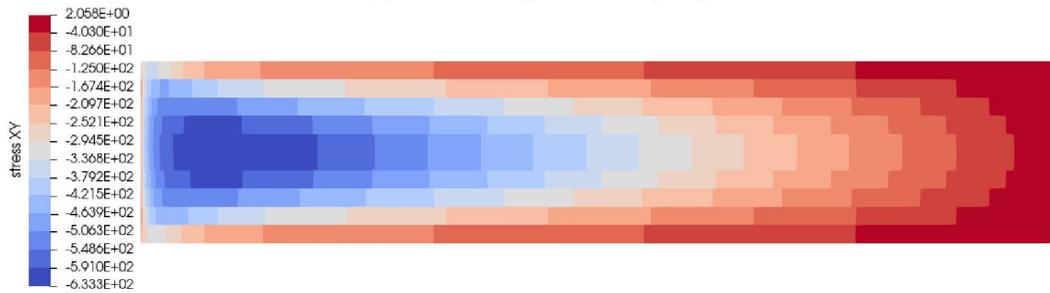
(a) Tensão X [kPa]



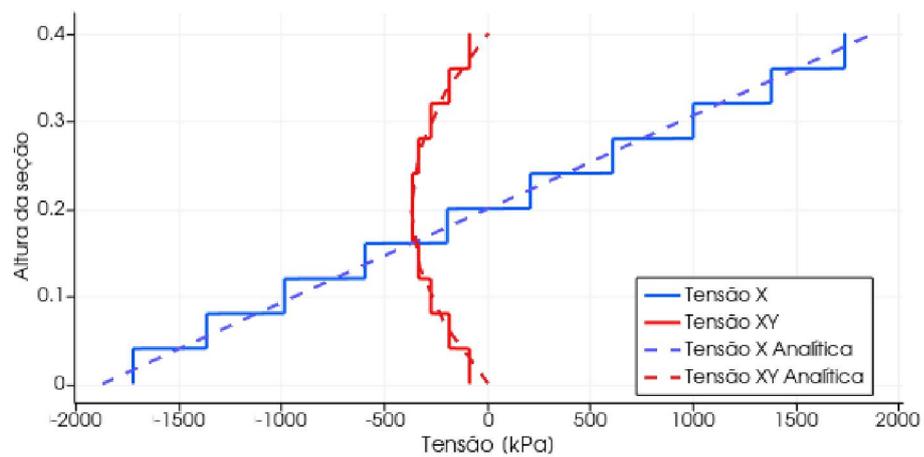
(b) Tensão Y [kPa]



(c) Tensão tangencial XY [kPa]



(d) Tensão na seção central



Fonte: O autor.

O mesmo comportamento é observado nos modelos com elementos quadrados sem a aplicação do efeito Poisson: o campo de tesões Y não corresponde à referência, e as concentrações de tensões tangenciais nos apoios também diferem.

Foram também realizadas simulações com elementos triangulares, sem alteração da formulação base, com os dados mostrados na Tabela 5 e a malha de elementos do caso 2 mostrada na Figura 35(a). O valor final do deslocamento caminha para uma convergência e é aproximadamente 1,26x maior que o modelo com elementos quadrado sem considerar o efeito Poisson, ou 1,21x considerando-o. O campo de tensões tem um comportamento geral similar ao esperado, conforme demonstrado na Figura 35(b) e (c), em especial na tensão X, com os valores máximos aproximadamente 1,36x maiores que o modelo.

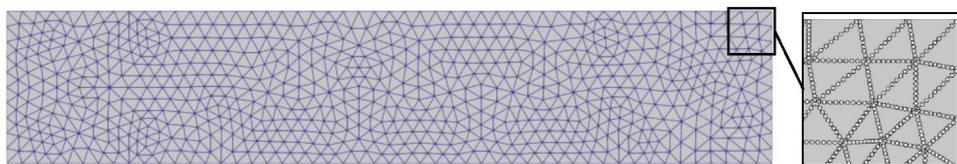
Tabela 5 - Dados da simulação de viga engastada com carga distribuída e elementos triangulares.

Caso	Número de Elementos	Deslocamento vertical (mm)
1	340	1,928
2	1360	1,983
3	5440	2,008
4	21760	2,021
5	87040	2,028

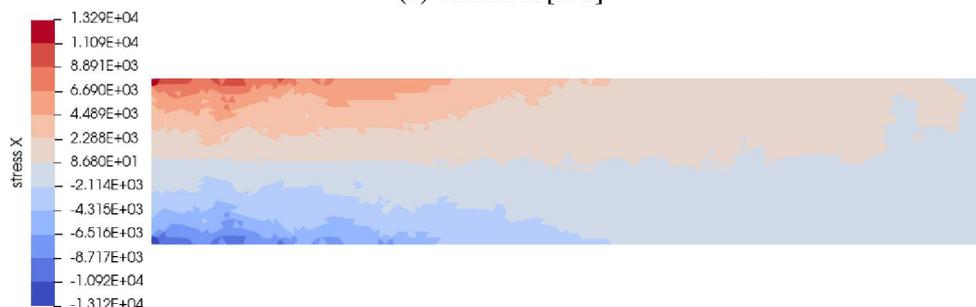
Fonte: O autor.

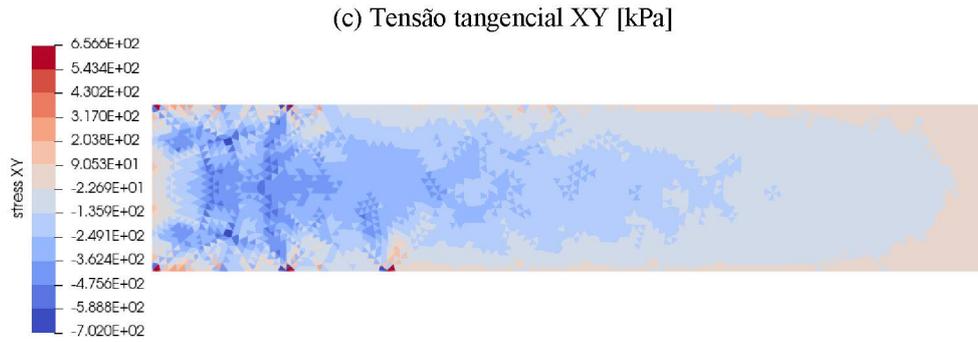
Figura 35 – Resultados modelo de carga distribuída com elemento triangular.

(a) Malha de Elementos



(b) Tensão X [kPa]



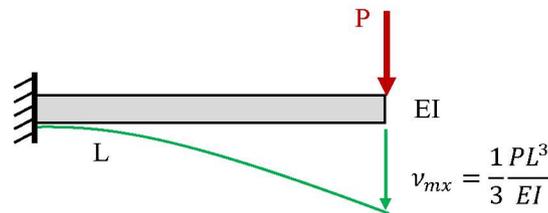


Fonte: O autor.

4.3 EXEMPLO DE VIGA ENGASTADA COM CARGA CONCENTRADA

O próximo modelo simulado foi de uma viga engastada-livre com carga concentrada, conforme o esquema da Figura 36. Foram arbitrados os mesmos parâmetros do modelo anterior da seção 4.2 com a carga $P = 50$ kN. Os elementos da face esquerda foram fixados nos seus 3 graus de liberdade, e a carga foi aplicada no elemento do canto superior direito.

Figura 36 – Esquema da viga engastada com carga concentrada.



Fonte: O autor.

Os resultados do modelo de viga com a carga aplicada na extremidade livre são apresentados na Tabela 6, com 10 molas, com e sem aplicação do efeito Poisson, além dos modelos equivalentes em MEF, e ambos os casos com elementos quadrados e retangulares. Novamente para comparação foi considerado o deslocamento da viga de Euler-Bernoulli $\delta = PL^3/3EI = 5,118$ mm. E a quantidade de molas, mais uma vez, não apresentou diferença até a 3ª casa decimal.

Tabela 6 - Dados da simulação de viga engastada com carga concentrada.

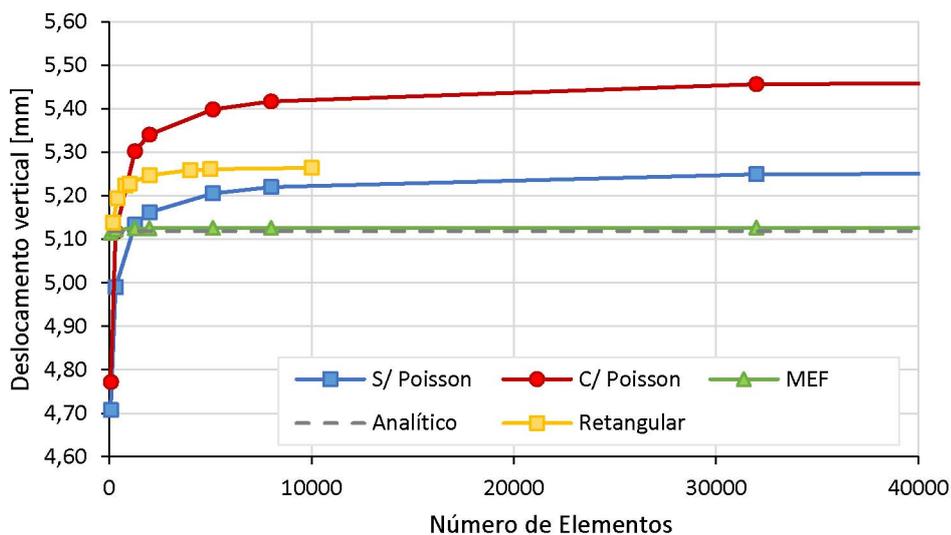
Caso	Tamanho do Elemento (cm)	Número de elementos	Deslocamento AEM (mm)		Diferença entre AEM e Analítico (%)		Deslocamento MEF (mm)	Diferença MEF (%)	
			S/ Poisson	C/ Poisson	S/ Poisson	C/ Poisson		S/ Poisson	C/ Poisson
Q1	10,0 x 10,0	80	4,707	4,772	-8,03	-6,76	5,1148	-7,97	-6,70
Q2	5,0 x 5,0	320	4,990	5,117	-2,50	-0,02	5,1219	-2,58	-0,10
Q3	2,5 x 2,5	1280	5,133	5,302	+0,29	+3,60	5,1249	+0,16	+3,46
Q4	2,0 x 2,0	2000	5,162	5,340	+0,86	+4,34	5,1253	+0,72	+4,19
Q5	1,25 x 1,25	5120	5,205	5,398	+1,70	+5,47	5,1259	+1,54	+5,31
Q6	1,0 x 1,0	8000	5,220	5,417	+1,99	+5,84	5,1260	+1,83	+5,68
Q7	0,5 x 0,5	32000	5,249	5,456	+2,56	+6,60	5,1262	+2,40	+6,43

Q8	0,25 x 0,25	128000	5,263	5,476	+2,83	+6,99	-	-	-
R1	2,0 x 20,0	200	5,138	-	+0,39	-	5,1377	+0,01	-
R2	1,0 x 20,0	400	5,194	-	+1,48	-	5,1813	+0,25	-
R3	0,5 x 20,0	800	5,223	-	+2,05	-	5,2678	-0,85	-
R4	0,4 x 20,0	1,000	5,228	-	+2,15	-	5,3110	-1,56	-
R5	0,4 x 10,0	2000	5,247	-	+2,52	-	5,1639	+1,61	-
R6	0,2 x 10,0	4,000	5,259	-	+2,75	-	5,2174	+0,80	-
R7	0,2 x 8,0	5,000	5,261	-	+2,79	-	5,0610	+3,95	-
R8	0,2 x 4,0	10,000	5,264	-	+2,85	-	5,1348	+2,52	-

Fonte: O autor.

A Figura 37 mostra a análise de sensibilidade de malha dos modelos analisados, se omitiu novamente os últimos modelos de 128000 elementos para melhor visualização da curva do modelo de elementos retangulares. As curvas entre os modelos com e sem aplicação do efeito Poisson também são praticamente paralelas, e na convergência estão afastadas aproximadamente 0,2 mm. Novamente o elemento com modelos retangulares convergiu com menos elementos que o com elementos quadrados. Foi omitida também a curva para os valores do modelo equivalente MEF dos elementos retangulares, mas, diferente do comportamento desses valores no modelo da seção 4.2, pode-se reparar na Tabela 6 que os valores não estabilizam, comportamento esperado já que elementos finitos com formatos mais alongados não se comportam tão bem.

Figura 37 – Análise de sensibilidade viga engastada com carga concentrada.



Fonte: O autor.

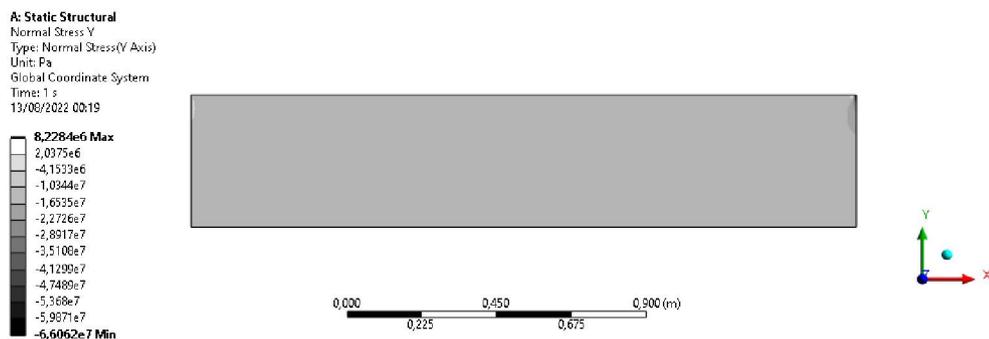
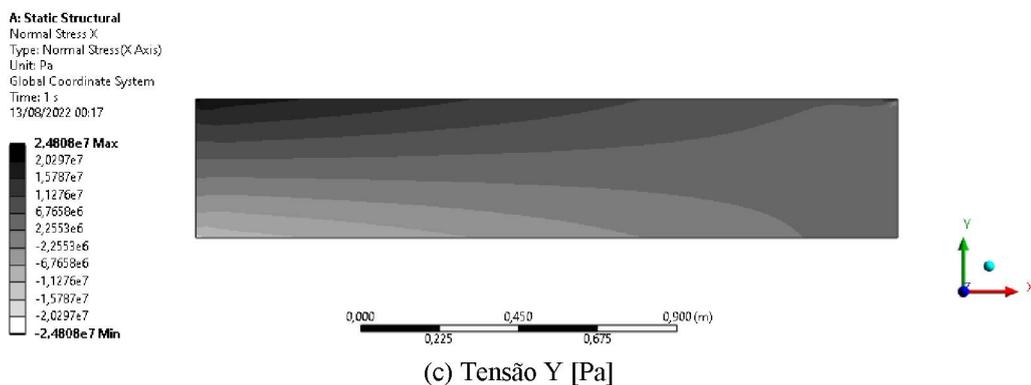
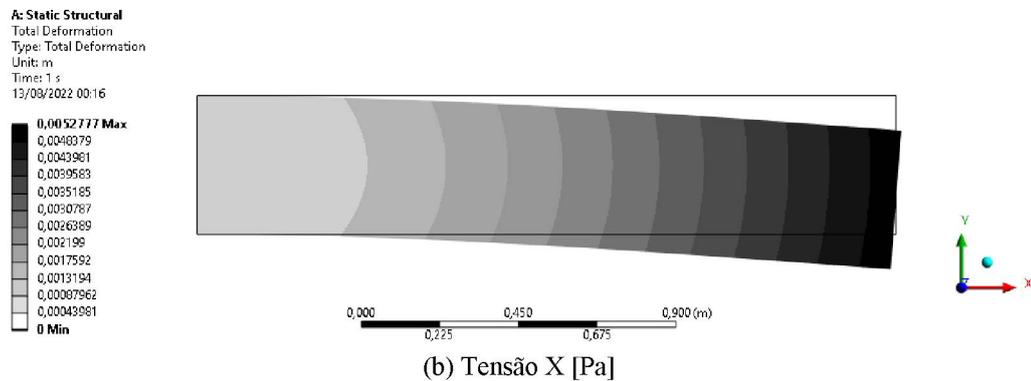
Os campos de deslocamento e tensões para comparação no modelo equivalente em MEF são mostrados na Figura 38. Os campos de tensões Y e tangencial XY na Figura 38(c) e (d) apresentam maiores concentrações de tensões nas quinas em comparação com o modelo de

carga distribuída, com a toda a região central do modelo com tensões Y de valores entre 2514 kPa e -3201 kPa, e as tensões tangenciais XY entre -590,4 e -1478,1 kPa.

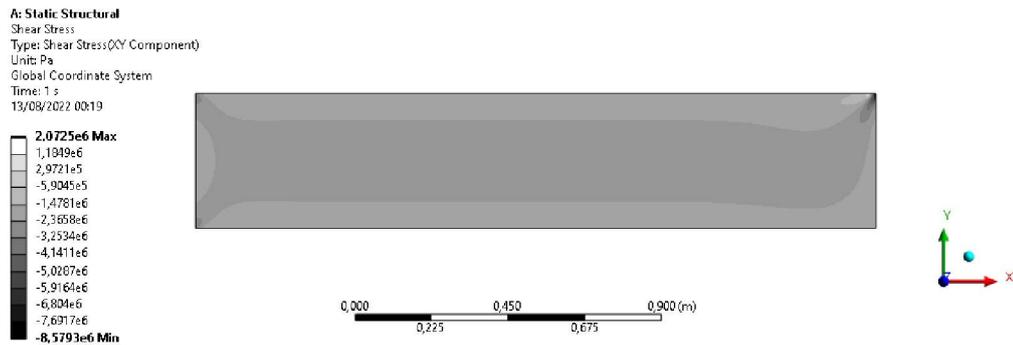
Os campos de deslocamentos e tensões para o modelo em elementos aplicados são apresentados na Figura 39. Os campos de tensões entre o modelo MEF e em elementos finitos concordam muito bem, mostrando as mesmas distribuições e também concentrações de tensões nos mesmos locais. Os valores máximos da tensão na direção X também estão muito próximos, com a referência MEF apresentando valor máximo de aproximadamente $\pm 24,8$ MPa, e os valores para o modelo em elementos aplicados $\pm 22,8$ MPa, e a maior parte do corpo com tensão tangencial XY entre -613,9 e -1043 kPa, inteiramente contido dentro do intervalo do modelo MEF.

Figura 38 – Modelo MEF de viga engastada com carga concentrada.

(a) Magnitude de deslocamento (exagerado 20x) [m]



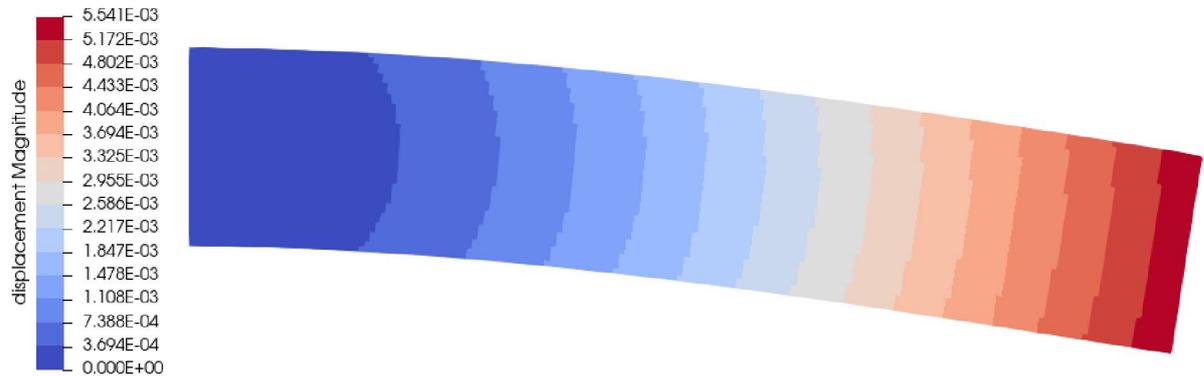
(d) Tensão tangencial XY [Pa]



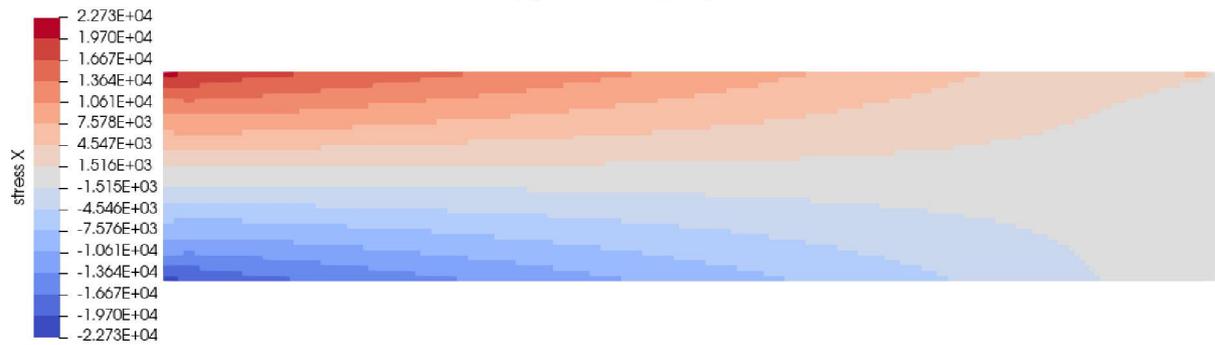
Fonte: O autor.

Figura 39 – Resultados modelo de viga engastada e carga concentrada.

(a) Magnitude de deslocamento (exagerado 40x) [m]



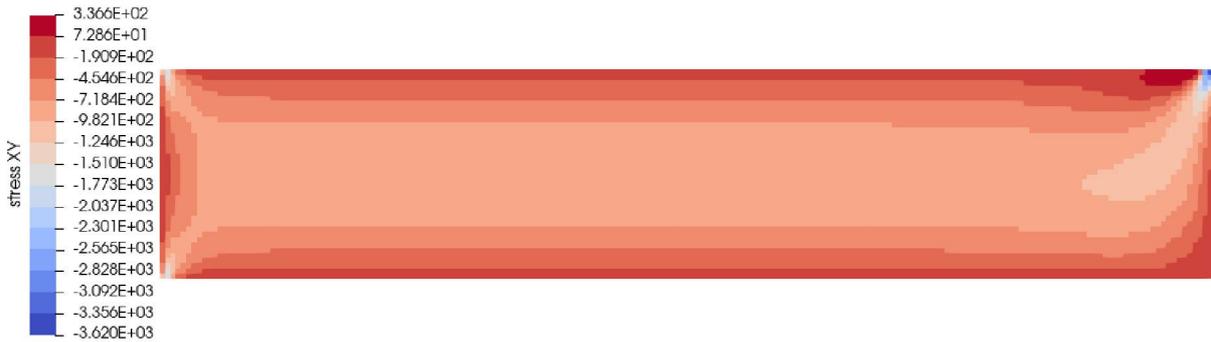
(b) Tensão X [kPa]



(c) Tensão Y [kPa]



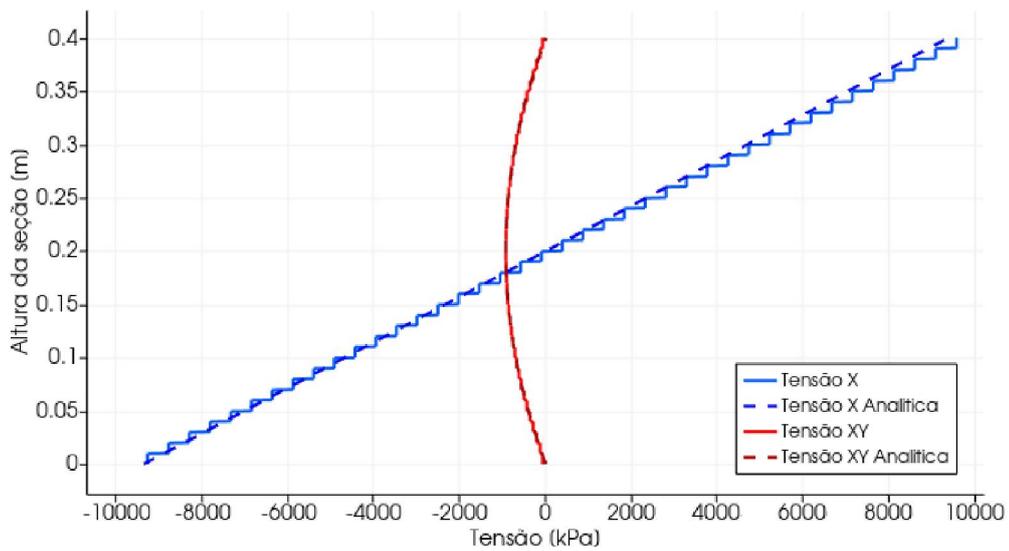
(d) Tensão tangencial XY [kPa]



Fonte: O autor.

Analisando uma seção transversal no centro da viga, conforme a Figura 40, também se observa um comportamento de acordo com o esperado. A tensão X máxima e mínima corresponde a -9277,9 e +9567,0 kPa, enquanto a tensão teórica é $\sigma_x = \pm 9375$ kPa, e a tensão tangencial máxima no centro de -935,1 kPa, muito próxima a teórica $\tau_{xy} = -937,5$ kPa.

Figura 40 – Tensão X e tangencial XY no centro da viga engastada com carga concentrada.



Fonte: O autor.

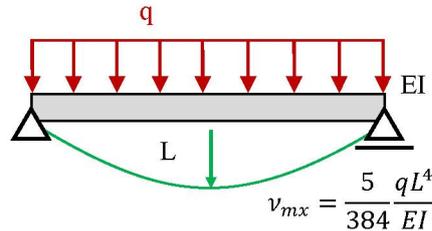
O comportamento desse modelo em relação a distribuição de tensão dos modelos retangulares e sem aplicação do efeito Poisson, bem como a discretização da tensão nas molas é totalmente análogo ao da seção 4.2.

4.4 EXEMPLO DE VIGA BIPOIADA COM CARGA DISTRIBUÍDA

Dentre os modelos isostáticos, também foi simulado uma viga biapojada com carga distribuída, conforme o esquema da Figura 41. Foram arbitrados os parâmetros: $L = 2$ m, $q = 20$ kN/m, $E = 25$ GPa, e uma seção de viga 20x40cm, com $I = 1,067 \cdot 10^{-3}$ m⁴. Para

representar os apoios de primeiro e segundo graus, os elementos na metade da altura da viga tiveram seus graus de liberdade de deslocamento horizontal e vertical fixados conforme o tipo de apoio, e o carregamento foi aplicado nos elementos da face superior.

Figura 41 – Esquema de viga biapoiada com carga distribuída.



Fonte: O autor.

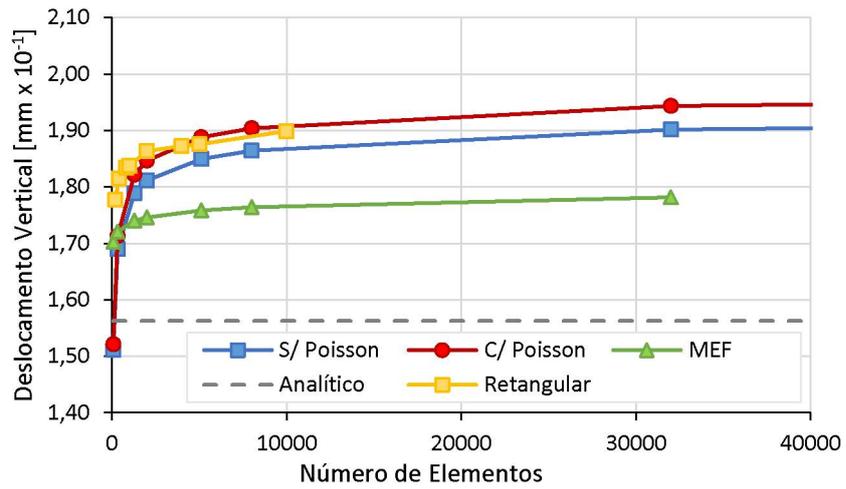
Os resultados do modelo de viga biapoiada com a carga distribuída são apresentados na Tabela 7, com e sem aplicação do efeito Poisson, além dos modelos equivalentes em MEF, e ambos os casos com elementos quadrados e retangulares. Para comparação foi considerado um deslocamento analítico da viga de Euler-Bernoulli de $\delta = 1,5625 \cdot 10^{-1}$ mm. A Figura 42 traz a análise de sensibilidade de malha com base nos valores da tabela, também se omitiu o último modelo para melhorar a escala de visualização.

Tabela 7 – Dados da simulação de viga biapoiada com carga distribuída.

Caso	Tamanho do Elemento (cm)	Número de elementos	Deslocamento AEM (mm x 10 ⁻¹)		Diferença entre AEM e Analítico (%)		Deslocamento MEF (mm)	Diferença MEF (%)	
			S/ Poisson	C/ Poisson	S/ Poisson	C/ Poisson		S/ Poisson	C/ Poisson
Q1	10,0 x 10,0	80	1,5111	1,5209	-3,29	-2,66	1,7022	-11,23	-10,65
Q2	5,0 x 5,0	320	1,6896	1,7129	8,13	9,63	1,7206	-1,80	-0,45
Q3	2,5 x 2,5	1280	1,7891	1,8219	14,50	16,60	1,7400	2,82	4,71
Q4	2,0 x 2,0	2000	1,8115	1,8465	15,94	18,18	1,7459	3,76	5,76
Q5	1,25 x 1,25	5120	1,8493	1,8877	18,36	20,81	1,7581	5,19	7,37
Q6	1,0 x 1,0	8000	1,8640	1,9036	19,30	21,83	1,7639	5,67	7,92
Q7	0,5 x 0,5	32000	1,9015	1,9435	21,70	24,38	1,7815	6,74	9,09
Q8	0,25 x 0,25	128000	1,9317	1,9749	23,63	26,63	-	-	-
R1	2,0 x 20,0	200	1,7771	-	13,73	-	1,8374	-3,28	-
R2	1,0 x 20,0	400	1,8148	-	16,15	-	2,0100	-9,71	-
R3	0,5 x 20,0	800	1,8339	-	17,37	-	2,3548	-22,12	-
R4	0,4 x 20,0	1,000	1,8377	-	17,61	-	2,5271	-27,28	-
R5	0,4 x 10,0	2000	1,8634	-	19,26	-	1,9189	-2,89	-
R6	0,2 x 10,0	4,000	1,8719	-	19,80	-	2,1330	-12,24	-
R7	0,2 x 8,0	5,000	1,8754	-	20,03	-	1,9172	-2,18	-
R8	0,2 x 4,0	10,000	1,8990	-	21,54	-	1,8212	4,27	-

Fonte: O autor.

Figura 42 – Análise de sensibilidade viga biapoiada com carga distribuída.

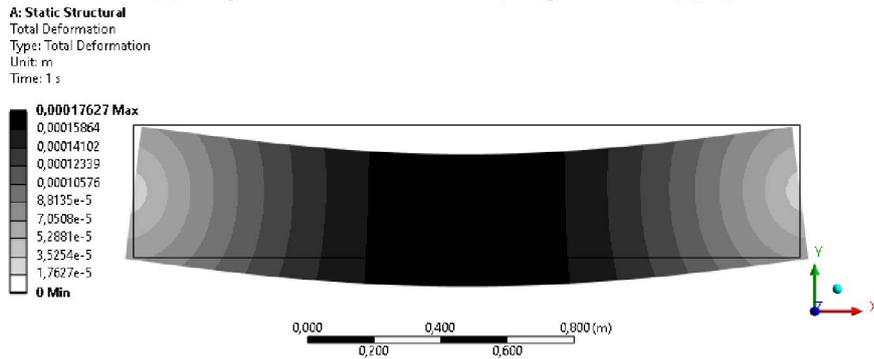


Fonte: O autor.

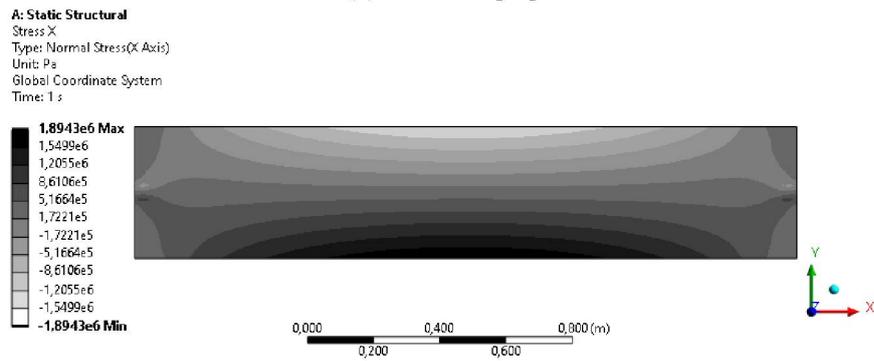
Os modelos de referência em MEF são mostrados na Figura 43, e o modelo em elementos aplicados na Figura 44, foram.

Figura 43 – Modelo MEF de viga biapoada com carga distribuída.

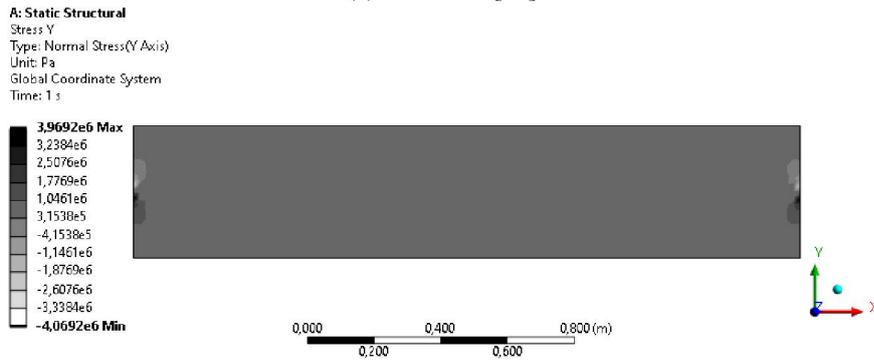
(a) Magnitude de deslocamento (exagerado 500x) [m]



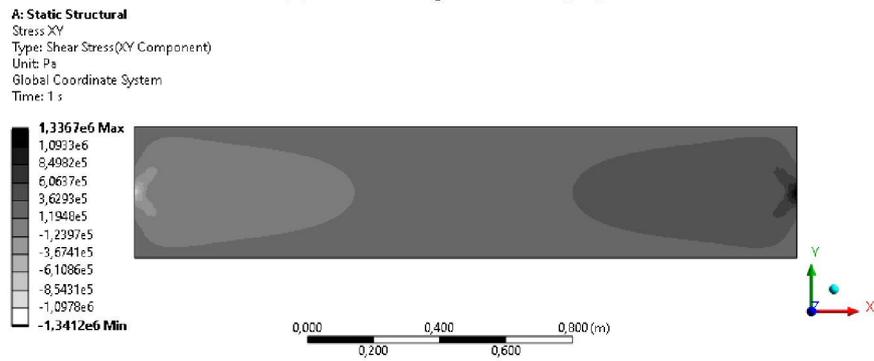
(b) Tensão X [Pa]



(c) Tensão Y [Pa]



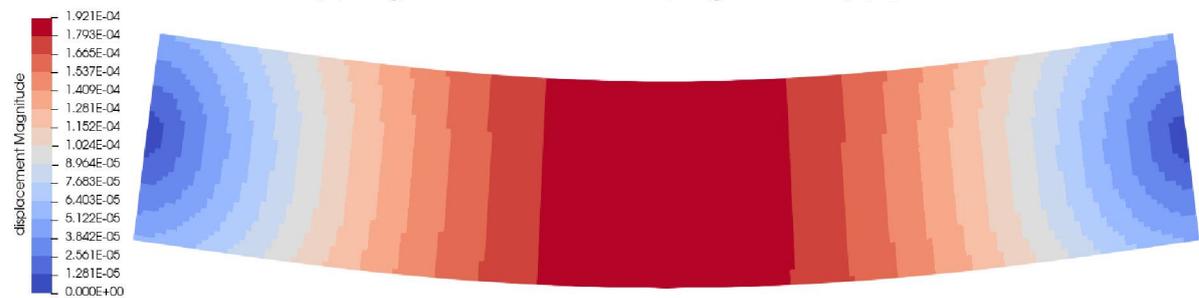
(d) Tensão tangencial XY [Pa]



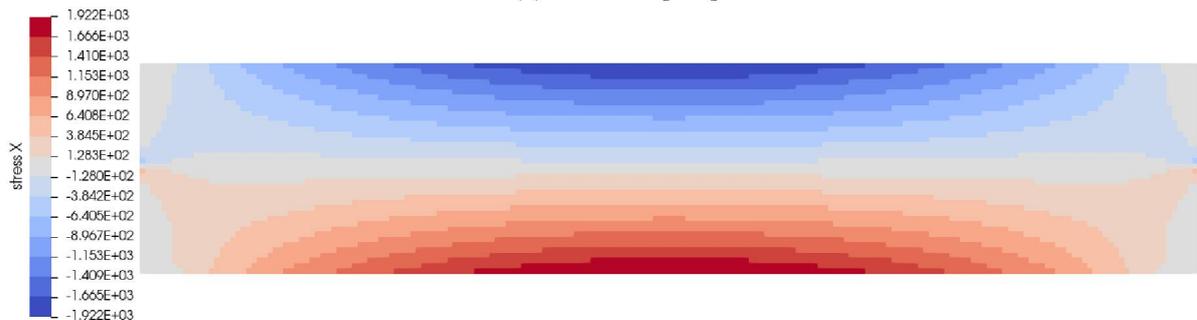
Fonte: O autor.

Figura 44 – Resultados modelo de viga biapoada e carga distribuída.

(a) Magnitude de deslocamento (Exagerado 500x) [m]



(b) Tensão X [kPa]



(c) Tensão Y [kPa]



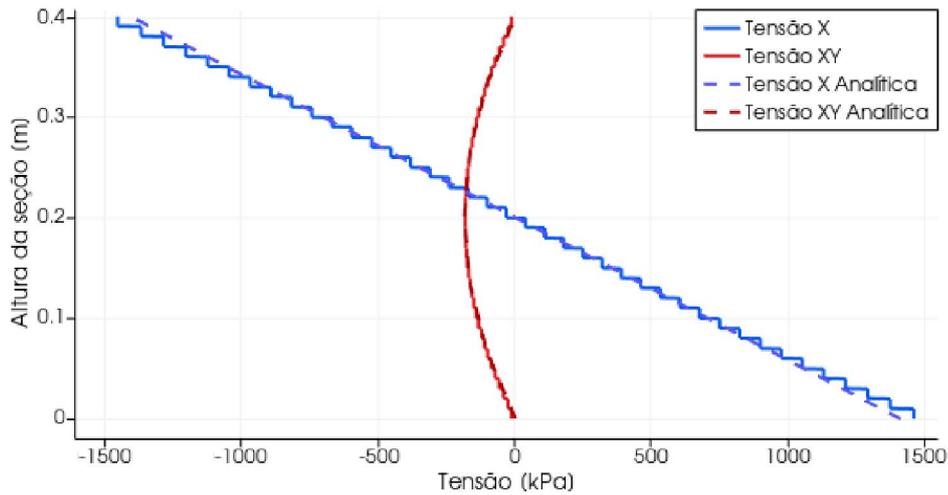
(d) Tensão tangencial XY [kPa]



Fonte: O autor.

Os modelos apresentam distribuições dos campos de tensões praticamente idênticas as das referências em MEF, mostrando ótima compatibilidade. Foi analisada também uma seção transversal a $\frac{1}{4}$ do comprimento da viga (50 cm), mostrando as tensões X e tangencial XY, conforme apresentado na Figura 45, também com resultados quase idênticos aos analíticos.

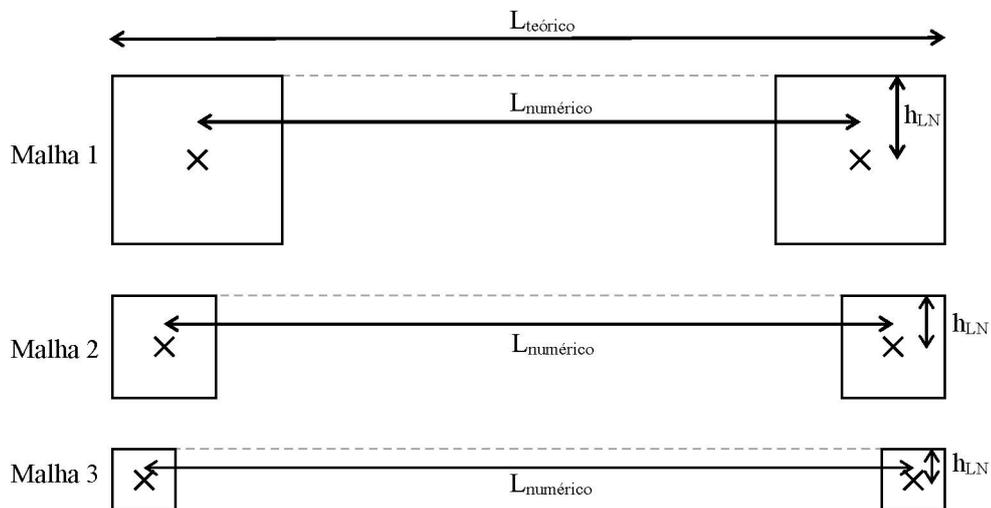
Figura 45 – Tensão X e tangencial XY da viga biapoada com carga distribuída.



Fonte: O autor.

Um fator a se considerar nesse modelo são os pontos de apoios. Foi fixado o elemento na linha neutra da viga, porém, como todos os tamanhos de malhas têm um número par de elementos na altura, só existem elementos imediatamente acima e abaixo da linha neutra, arbitrou-se então como elemento fixado o imediatamente abaixo. Além disso, tanto o apoio como a aplicação da carga ocorrem no centroide do elemento, efetivamente, cada malha mais fina é um modelo físico ligeiramente diferente, porém mais aproximado ao modelo teórico proposto. O diagrama da Figura 46 exemplifica essas diferenças com 3 malhas, sequencialmente mais finas, a linha pontilhada indica a linha neutra da viga. O comprimento numérico do modelo é igual ao comprimento teórico subtraído da metade da largura dos elementos nas extremidades.

Figura 46 – Diferença entre modelo teórico e numérico.

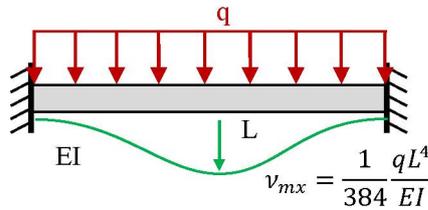


Fonte: O autor.

4.5 EXEMPLO DE VIGA BIENGASTADA COM CARGA DISTRIBUÍDA

O último modelo simulado foi uma viga biengastada com carga distribuída, conforme o esquema da Figura 47. Foram arbitrados os parâmetros: $L=2\text{m}$, $q=20\text{ KN/m}$, $E=25\text{ GPa}$, e uma seção de viga $20\times 40\text{cm}$, com $I=1,067\cdot 10^{-3}\text{ m}^4$. As faces esquerda e direita tiveram todos os graus de liberdade fixos para representar os engastes, e o carregamento foi aplicado na face superior.

Figura 47 – Esquema de viga biengastada com carga distribuída.



Fonte: O autor.

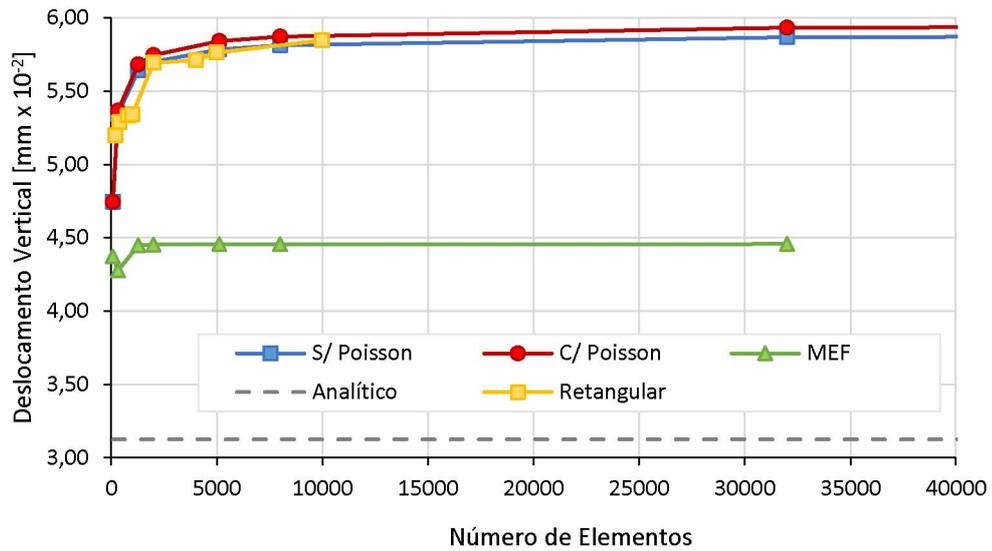
Os resultados do modelo de viga biapoada com a carga distribuída são apresentados na Tabela 8 com e sem aplicação do efeito Poisson, além dos modelos equivalentes em MEF, e ambos os casos com elementos quadrados e retangulares. Para comparação foi considerado o deslocamento do modelo de Euler-Bernoulli $\delta = 3,125\cdot 10^{-2}\text{ mm}$. A Figura 48 traz a análise de sensibilidade de malha com base nos valores da tabela, também se omitiu o último modelo para melhorar a escala de visualização.

Tabela 8 – Dados da simulação de viga biengastada com carga distribuída.

Caso	Tamanho do Elemento (cm)	Número de elementos	Deslocamento AEM (mm x 10 ⁻²)		Diferença entre AEM e Analítico (%)		Deslocamento MEF (mm)	Diferença MEF (%)	
			S/ Poisson	C/ Poisson	S/ Poisson	C/ Poisson		S/ Poisson	C/ Poisson
Q1	10,0 x 10,0	80	4,7445	4,7433	51,82	51,79	4,3722	10,96	10,93
Q2	5,0 x 5,0	320	5,3441	5,3647	71,01	71,67	4,2760	22,23	22,70
Q3	2,5 x 2,5	1280	5,6400	5,6819	80,48	81,82	4,4490	26,77	27,71
Q4	2,0 x 2,0	2000	5,6979	5,7451	82,33	83,84	4,4518	27,99	29,05
Q5	1,25 x 1,25	5120	5,7836	5,8395	85,08	86,86	4,4551	29,82	31,07
Q6	1,0 x 1,0	8000	5,8118	5,8707	85,98	87,86	4,4559	30,43	31,75
Q7	0,5 x 0,5	32000	5,8673	5,9327	87,75	89,85	4,4571	31,64	33,11
Q8	0,25 x 0,25	128000	5,8947	5,9634	88,63	90,83	-	-	-
R1	2,0 x 20,0	200	5,1988	-	66,36	-	4,2673	-92,17	-
R2	1,0 x 20,0	400	5,2865	-	69,17	-	4,2695	-92,36	-
R3	0,5 x 20,0	800	5,3301	-	70,56	-	4,2704	-92,45	-
R4	0,4 x 20,0	1,000	5,3388	-	70,84	-	4,2705	-92,46	-
R5	0,4 x 10,0	2000	5,6917	-	82,13	-	4,3917	-93,07	-
R6	0,2 x 10,0	4,000	5,7098	-	82,71	-	4,3919	-93,10	-
R7	0,2 x 8,0	5,000	5,7614	-	84,36	-	4,4122	-93,17	-
R8	0,2 x 4,0	10,000	5,8456	-	87,06	-	4,4442	-93,29	-

Fonte: O autor.

Figura 48 – Análise de sensibilidade viga biengastada com carga distribuída.

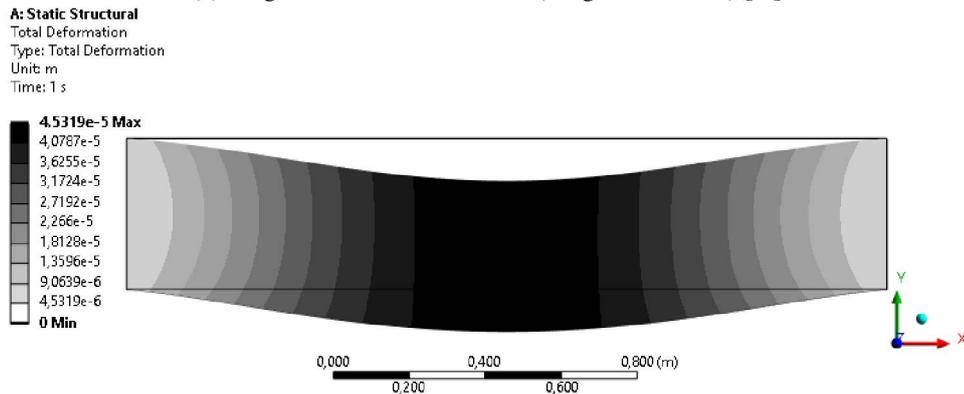


Fonte: O autor.

Para referência, os modelos em MEF são apresentados na Figura 49, enquanto os modelos simulados em AEM são mostrados na Figura 50.

Figura 49 – Modelo MEF de viga biengastada com carga distribuída.

(a) Magnitude de deslocamento (exagerado 2500x) [m]



(b) Tensão X [Pa]

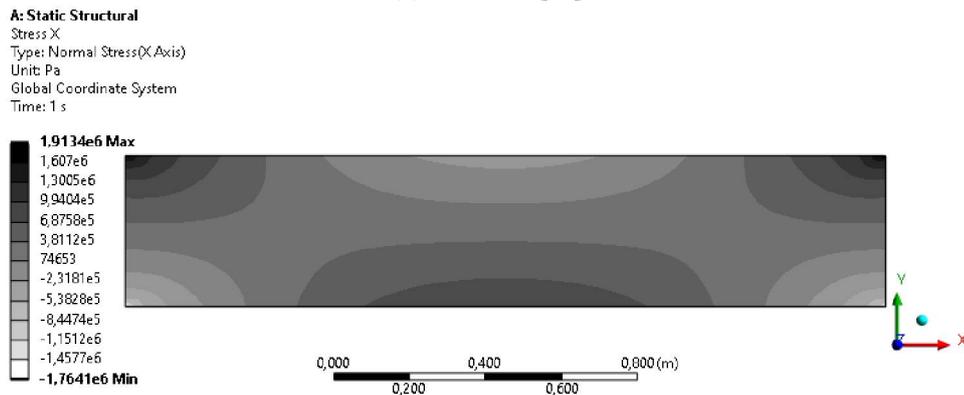
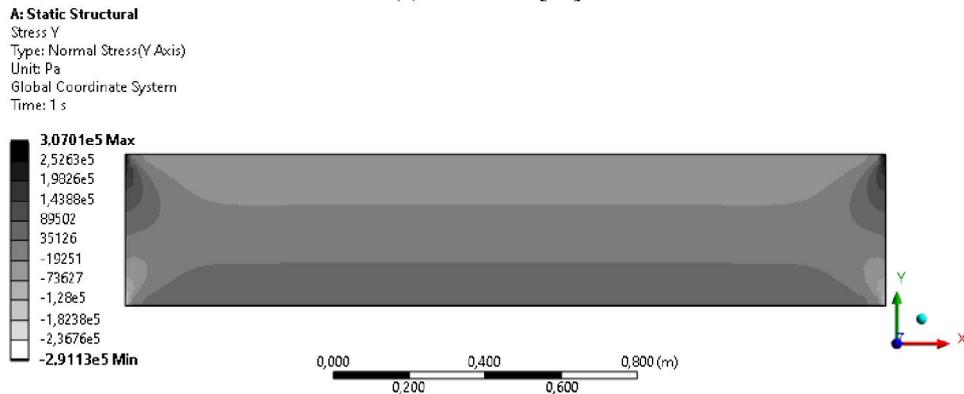
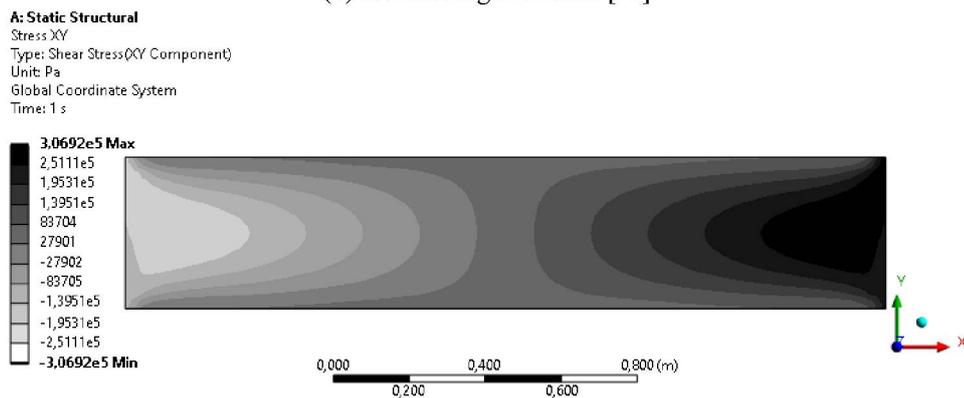


Figura 49 – Modelo MEF de viga biengastada com carga distribuída. (Continuação)

(c) Tensão Y [Pa]



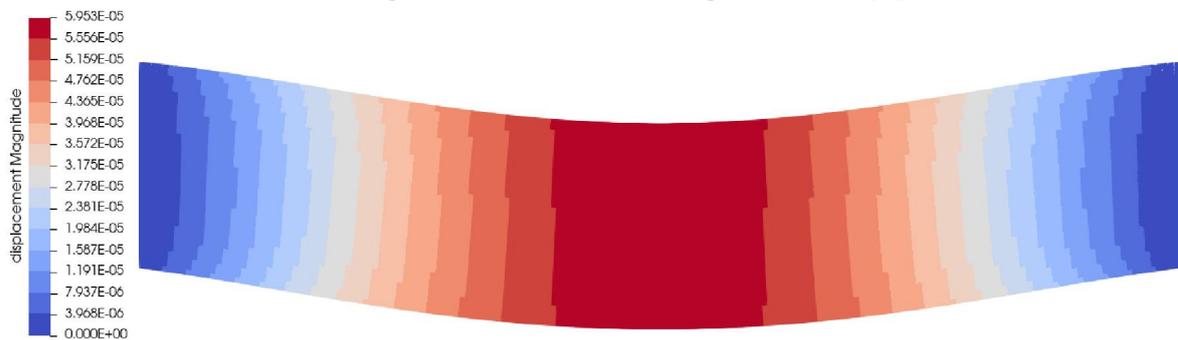
(d) Tensão tangencial XY [Pa]



Fonte: O autor.

Figura 50 – Resultados modelo de viga biengastada e carga distribuída.

(a) Magnitude de deslocamento (exagerado 2000x) [m]



(b) Tensão X [kPa]



Figura 50 – Resultados modelo de viga biengastada e carga distribuída. (Continuação)

(c) Tensão Y [kPa]



(d) Tensão tangencial XY [kPa]

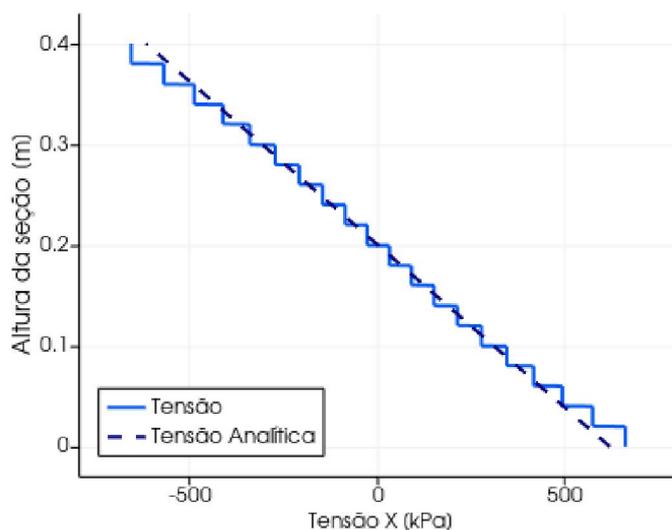


Fonte: O autor.

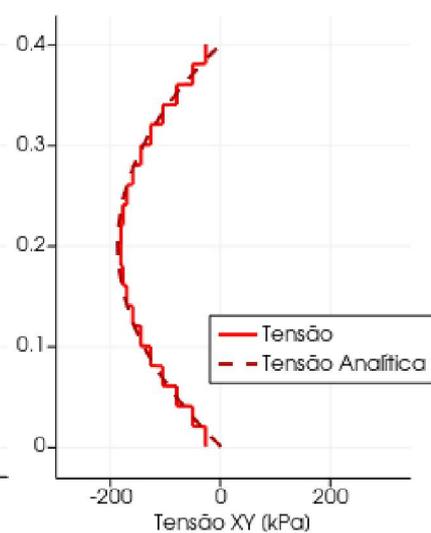
Os modelos apresentam boa concordância visual com as referências em MEF. Foi analisado também uma seção no centro da viga para a tensão X, conforme a Figura 51(a), e uma seção a $\frac{1}{4}$ do comprimento (50 cm) para análise da tensão tangencial XY, de acordo com a Figura 51(b). Ambas tiveram o comportamento bem ajustado ao modelo analítico.

Figura 51 – Tensão X e tangencial XY da viga biengastada com carga distribuída.

(a) Tensão X [kPa]



(b) Tensão tangencial XY [kPa]



Fonte: O autor.

5 CONCLUSÃO

5.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nessa pesquisa foi desenvolvida toda a base do *software* para realizar simulações no regime elástico-linear pelo Método dos Elementos Aplicados na linguagem de programação C++ e seguindo os preceitos da orientação a objetos, buscando trazer performance na execução da simulação e extensibilidade para o programa. O código foi organizado de forma a facilitar a inclusão de novos módulos como, por exemplo, novas leis constitutivas ou tipos diferentes de elementos, e as próprias extensões originais propostas pelos autores do método. O programa também foi integrado com a linguagem de programação Python, trazendo uma interface mais dinâmica para a montagem dos modelos, sem necessidade de recompilação do código-fonte. E, principalmente, o código-fonte foi disponibilizado para uso livre no *Git-Hub*.

Cinco modelos foram executados: um modelo de carga axial num prisma retangular, e quatro modelos em vigas, duas engastadas em balanço com cargas distribuída e concentrada, outra biapoada com carga distribuída, e uma biengastada com carga distribuída.

Em relação às distribuições de tensões nos corpos, todos os modelos com aplicação do efeito Poisson estavam em concordância com as referências simuladas através do método dos elementos finitos. Já os modelos sem aplicação do efeito, tanto com elementos quadrados ou retangulares, apresentaram distribuições de tensões divergentes nas direções “secundárias” dos modelos, a direção Y no caso das vigas e X no caso do modelo axial. E mesmo os modelos com menor número de elementos apresentaram tensões nas molas totalmente compatíveis com os valores analíticos, com as tensões médias nos elementos se aproximando adequadamente.

Os deslocamentos calculados em geral convergem substancialmente mais devagar em relação aos modelos MEF, requerendo um grande número de elementos e ainda assim não se estabilizando além de 2 casas decimais. Isso vai em desacordo com o observado na literatura, Meguro e Tagel-Din (2000) por exemplo, alegam que uma das principais vantagens do método é a grande precisão com relativamente pouco tempo de processamento. Christy, Nagarajan e Pillai (2021) também afirmaram que os modelos convergem com quase a mesma taxa que MEF, com apenas 200 elementos. Parte dessa divergência com a literatura pode ser explicada pela aplicação das condições de contorno nos modelos, considerando a diferença entre o centroide dos elementos e o modelo teórico, como exemplificado na Figura 46 da seção 4.4, já que em nenhuma das simulações realizadas na literatura foram explicitadas as condições de contorno apropriadas dos modelos.

Os modelos com elementos retangulares apresentam uma convergência mais rápida, em contrapartida, trazem campos de tensões mais pobres. Essa convergência com menos elementos aparenta ser análoga a uma análise em MEF com elementos unidimensionais de barras: refinando modelo dividindo os elementos ao longo da direção do comprimento da viga, já que elementos na direção vertical contribuem pouco para o resultado. Aqui, uma das sugestões para continuação da pesquisa envolve revisar a metodologia para aplicação do efeito Poisson e tentar aplicá-la em elementos não quadrados. Tentou-se também, sem sucesso, utilizar elementos triangulares sem alterar a formulação da rigidez das molas, motivado pela formulação da matriz de rigidez considerando apenas a distância entre centroides e molas. A lei constitutiva padrão mostrou-se inadequada para esses elementos, sendo também objeto de pesquisas futuras.

A análise de armaduras de reforço no concreto ficou fora do escopo desse trabalho, embora esteja parcialmente implementada no programa. Ainda é necessário desenvolver e implementar a exportação dos dados das armaduras em formato compatível com o *ParaView*, permitindo sua visualização para análise e validação dos resultados.

Em linhas gerais, o Método dos Elementos Aplicados não apresentou grandes vantagens em relação ao tradicional Método dos Elementos Finitos no regime das análises elástico-lineares. Mas a sua formulação em torno de molas dispostas ao longo das bordas dos elementos traz grande potencial de extensibilidade e análises de efeitos não-lineares, descritas nos artigos dos autores originais como: Análise dinâmica (TAGEL-DIN; MEGURO, 2000a), fissuração em concreto (TAGEL-DIN; MEGURO, 2000b) e regime de grandes deslocamentos (MEGURO; TAGEL-DIN, 2002). A validação do método no regime elástico-linear mais simples é a base fundamental para estender e continuar o desenvolvimento do método, e espera-se que essa pesquisa contribua com uma fundação sólida para tal.

5.2 SUGESTÕES DE PESQUISAS FUTURAS

Sumarizando as sugestões para continuação dessa pesquisa temos:

- Finalizar a implementação da armadura e sua validação;
- Estender a formulação do efeito Poisson para elementos retangulares;
- Analisar o uso de outros formatos de elementos como triangulares e de Voronoi, bem como uma forma de aplicar o efeito Poisson nestes.

Além da implantação das próprias extensões propostas pelos autores originais:

- Implementar a análise estática no regime de grandes deslocamentos através de incrementos, conforme Meguro e Tagel-Din (2002);
- Implementar a análise dinâmica conforme Tagel-Din e Meguro (2000a);
- Implementar leis constitutivas não-lineares para análise de fissuração no concreto, conforme Tagel-Din e Meguro (2000b).

BIBLIOGRAFIA

- AYACHIT, U. **The ParaView Guide: A Parallel Visualization Application**. [S.l.]: Kitware, 2015.
- BATHE, K.-J. **Finite Element Procedures**. 2. ed. Watertown, MA: Klaus-Jürgen Bathe, 2014. Disponível em: https://web.mit.edu/kjb/www/Books/FEP_2nd_Edition_4th_Printing.pdf. Acesso em: 28 jul. 2021.
- BERNARDO, V. M. S. **Análise não linear do comportamento dinâmico de passadiços pedonais pré-fabricados**. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2014. Disponível em: <https://run.unl.pt/handle/10362/13843>. Acesso em: 20 jul. 2020.
- CHRISTY, D. L.; NAGARAJAN, P.; PILLAI, T. M. M. Thin plate element for applied element method. **Structures**, v. 22, p. 1-12, 2019. DOI: 10.1016/j.istruc.2019.07.010. Acesso em: 25 jul. 2021.
- CHRISTY, D. L.; NAGARAJAN, P.; PILLAI, T. M. M. Simplified analysis of structures using applied element method. **Songklanakarín Journal of Science and Technology**, v. 43, n. 1, p. 133-143, 2021. DOI: 10.14456/sjst-psu.2021.18. Disponível em: <http://rdo.psu.ac.th/sjstweb/journal/43-1/18.pdf>. Acesso em: 23 jul. 2021.
- CHRISTY, D. L.; PILLAI, T. M. M.; NAGARAJAN, P. A Comparison of Applied Element Method and Finite Element Method for Elastostatic Problems. *In: PRAKASH, R. et al. Structural Integrity Assessment*. Singapore: Springer, 2020. p. 309-320. DOI: 10.1007/978-981-13-8767-8_26.
- CUNDALL, P. A.; STRACK, O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies. **Geotechnique**, v. 29, n. 1, p. 47-65, mar. 1979. Disponível em: <https://www.icevirtuallibrary.com/doi/10.1680/geot.1979.29.1.47>. Acesso em: 28 jun. 2020.
- DOMANESCHI, M.; PELLECCIA, C.; DE IULIIS, E.; CIMELLARO, G. P.; MORGESE, M.; KHALIL, A. A.; ANSARI, F. Collapse analysis of the Polcevera viaduct by the applied element method. **Engineering Structures**, v. 214, p. 110659, 2020. DOI: 10.1016/j.engstruct.2020.110659. Acesso em: 24 jul. 2021.
- EL-DESOQI, M.; EHAB, M.; SALEM, H. Progressive collapse assessment of precast reinforced concrete beams using applied element method. **Case Studies in Construction Materials**, v. 13, p. e00456, 2020. DOI: 10.1016/j.cscm.2020.e00456. Acesso em: 23 jul. 2021.
- FERREIRA, D. F. **Modelação não-linear do comportamento de vigas-parede**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2015. Disponível em: <https://run.unl.pt/handle/10362/15472>. Acesso em: 20 jul. 2021.

- FONSECA, A. M. C. M. D. **Método dos elementos aplicados na simulação numérica do arrancamento de armaduras**. 2014. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2014. Disponível em: <https://run.unl.pt/handle/10362/14173>. Acesso em: 20 jul. 2021.
- GOHEL, V.; PATEL, P. V.; JOSHI, D. Analysis of Frame using Applied Element Method (AEM). **Procedia Engineering**, v. 51, p. 176-183, 2013. DOI: 10.1016/j.proeng.2013.01.026. Acesso em: 21 jul. 2021.
- GRUNWALD, C.; KHALIL, A. A.; SCHAUFELBERGER, B.; RICCIARDI, E. M.; PELLECCIA, C.; DE IULIIS, E.; RIEDEL, W. Reliability of collapse simulation – Comparing finite and applied element method at different levels. **Engineering Structures**, v. 176, p. 265-278, 2018. DOI: 10.1016/j.engstruct.2018.08.068. Acesso em: 20 ago. 2022.
- GUENNEBAUD, G.; JACOB, B. *et al.* **Eigen v3**. 2020. Disponível em: <http://eigen.tuxfamily.org>. Acesso em: 15 abr. 2021.
- HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.
- LABUSCHAGNE, A.; RENSBURG, N. F. J. V.; MERWE, A. J. V. D. Comparison of linear beam theories. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 49, n. 1-2, p. 20-30, 2009. DOI: 10.1016/j.mcm.2008.06.006. Acesso em: 3 dez. 2022.
- MARTINS, P. H. S. **Procedimentos e projeto de demolições para edificações em concreto armado**. 2019. Dissertação (Mestrado em Estruturas e Construção Civil) – UFSCar, São Carlos, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/11665>. Acesso em: 20 jul. 2021.
- MEGURO, K.; TAGEL-DIN, H. Consideration of Poisson's Ratio Effect in Structural Analysis Using Elements with Three Degrees of Freedom. **Bulletin of Earthquake Resistant Structure, IIS, University of Tokyo**, n. 31, p. 41-50, 1998.
- MEGURO, K.; TAGEL-DIN, H. Applied Element Method for Structural Analysis: Theory and Application for Linear Materials. **J. Struct. Mech. Earthquake Eng.**, v. 2000, n. 647, p. 31-45, 2000. DOI: 10.2208/jscej.2000.647_31. Acesso em: 13 abr. 2021.
- MEGURO, K.; TAGEL-DIN, H. Applied element simulation of RC structures under cyclic loading. **Journal of Structural Engineering**, v. 127, n. 11, p. 1295-1305, 2001. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(2001)127:11(1295). Acesso em: 20 jul. 2021.
- MEGURO, K.; TAGEL-DIN, H. Applied Element Method Used for Large Displacement Structural Analysis. **Journal of Natural Disaster Science**, v. 24, n. 1, p. 25-34, 2002. Disponível em: https://www.jsnds.org/jnds/24_1_3.pdf. Acesso em: 20 jul. 2021.
- OBJECT MANAGEMENT GROUP. **Unified Modeling Language**. Specification. 2017. Disponível em: <https://www.omg.org/spec/UML>. Acesso em: 04 maio 2021.
- SCHROEDER, W.; MARTIN, K.; LORENSEN, B. **The Visualization Toolkit**. 4. ed. [S.l.]: Kitware, 2006.

SHAKERI, A.; BARGI, K. Use of Applied Element Method for Structural Analysis. **KSCE Journal of Civil Engineering**, v. 19, n. 5, p. 1375-1384, 2015. DOI: 10.1007/s12205-015-0625-4. Acesso em: 22 jul. 2021.

TAGEL-DIN, H. **A new efficient method for nonlinear, large deformation and collapse analysis of structures**. 1998. Tese – Universidade de Tóquio, Tóquio, 1998.

TAGEL-DIN, H.; MEGURO, K. Applied element method for dynamic large deformation analysis of structures. **J. Struct. Mech. Earthquake Eng.**, v. 2000, n. 661, p. 1-10, 2000a. DOI: 10.2208/jscej.2000.661_1. Acesso em: 20 jul. 2021.

TAGEL-DIN, H.; MEGURO, K. Nonlinear simulation of RC structures using applied element method. **J. Struct. Mech. Earthquake Eng.**, v. 2000, n. 654, p. 13-24, 2000b.

THE SWIG DEVELOPERS. **SWIG**. Simplified Wrapper and Interface Generator. 2020. Disponível em: <http://www.swig.org/>. Acesso em: 15 abr. 2021.

WORAKANCHANA, K.; MEGURO, K. Voronoi Applied Element Method for structural analysis: Theory and applicatio for linear and non-linear materials. *In*: WORLD CONFERENCE ON EARTHQUAKE ENGINEERING, 14., 2008, Beijing. Beijing: [s.n.], 2008. p. 1-8. Disponível em: https://www.iitk.ac.in/nicee/wcee/article/14_14-0248.PDF Acesso em: 26 jun. 2021.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**. 6. ed. Amsterdam: Butterworth-Heinemann, 2005.

APÊNDICE A – DIAGRAMA DE CLASSES

A Linguagem de Modelagem Unificada (UML), mantida pelo Object Management Group (2017), é uma maneira de elaborar, visualizar e também documentar a estrutura de *softwares* orientados a objeto. Uma construção muito útil dentro de suas especificações é o diagrama de classes.

Num programa orientado a objetos, todos os seus componentes são descritos por classes e suas interações. Classes são como “receitas” para montar um objeto, compostas de atributos e métodos: os atributos descrevem o estado da classe através de variáveis, enquanto os métodos, que são funções, modificam esse estado. Atributos e métodos estão associados a um tipo de visibilidade: pública, privada ou protegida. Elementos públicos podem ser modificados e acessados em qualquer contexto do programa, enquanto privados apenas no contexto do próprio objeto, já elementos protegidos permitem também acesso no contexto de classes herdadas. Um objeto é, então, uma instância de uma classe.

A notação básica do diagrama de classes é uma caixa com 3 compartimentos, o primeiro, em negrito, indica o nome da classe, admitindo uma variação em itálico para classes abstratas.

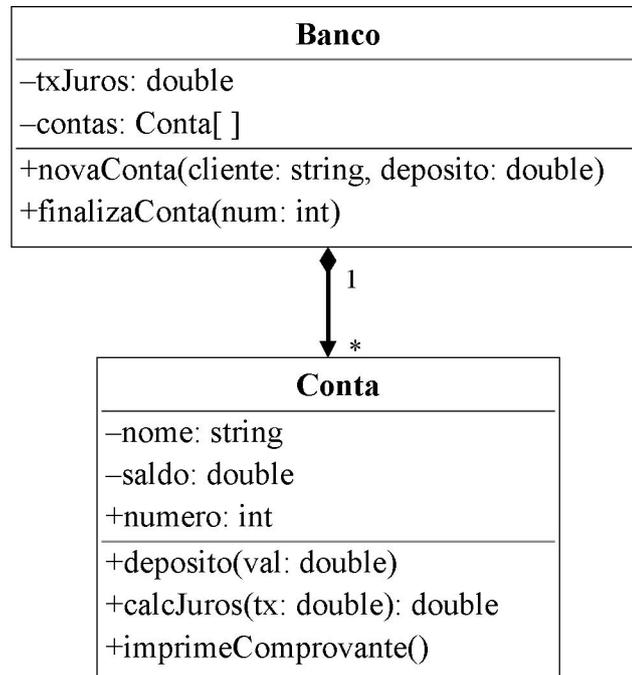
O segundo compartimento indica os atributos da classe, sua notação é dada pelo tipo de visibilidade: atributos públicos (+), privados (-) e protegidos (#); seguido pelo nome do atributo, dois pontos e o tipo de variável: números inteiros (*int*); números reais de precisão dupla (*double*); booleanos (*bool*); outras classes; referencias, ou ponteiros, a outros objetos de um tipo (**tipo*); listas ou vetores de um tipo com tamanho indefinido (*tipo[]*); vetores numéricos em duas dimensões (*double[2]*); tabelas ou matrizes de um tipo com tamanhos indefinidos (*tipo[][]*); quaisquer tipo de variável suportada pela linguagem utilizada.

O terceiro e último compartimento traz os métodos da classe, segue uma notação similar, o tipo de visibilidade, nome do método, entre parênteses: uma lista de argumentos com seus nomes e tipos; por fim, caso o método tenha algum retorno, dois pontos e o tipo do retorno.

Um exemplo de diagrama de classes representando um modelo simplificado de um banco com contas é apresentado na Figura 52, um banco é representado por uma lista de contas e uma taxa de juros e é possível adicionar e finalizar contas nesse banco. Contas são representadas pelo nome do cliente, um saldo e um número de conta, sendo possível modificar esse saldo, informar uma taxa de juros e também imprimir um comprovante de conta. A seta com um losango ligando os objetos indica uma composição, “1” no losango indica que cada

conta pertence a um único banco, e o asterisco na Conta indica que um Banco poder ter qualquer número de contas.

Figura 52 - Exemplo de Diagrama de Classe.



Fonte: O autor.

ANEXO A – EFEITO POISSON

Conforme Meguro e Tagel-Din (2000), a Figura 53(a) apresenta os efeitos de um deslocamento horizontal, as molas entre os elementos 0 e 2 são comprimidas, com a área representada pelo grupo A. Forças compressivas entre os elementos 0 e 2 geram deslocamentos laterais verticais, com a área representada pelos grupos A', esse deslocamento lateral é função do coeficiente de Poisson. Como os demais graus de liberdade são fixados, esse deslocamento gera tensões na região, assumidas como uniformemente distribuídas pela borda dos elementos, e transferidos para o centroide dos elementos vizinhos como força e momento – p_i e m_i , dadas pelas equações (22) e (23).

$$p_i = \frac{\nu \cdot E_i \cdot t_i}{4(1 - \nu^2)} \quad (22)$$

$$m_i = \frac{\nu \cdot E_i \cdot t_i}{4(1 - \nu^2)} \cdot \frac{D}{4} \quad (23)$$

Onde:

- ν = Coeficiente de Poisson;
- E = Módulo de Elasticidade;
- t = espessura do elemento;
- D = dimensão do elemento.

Já as molas entre os elementos 0 e 4 são tracionadas, com área representada pelo grupo B, e, analogamente, geram-se deslocamentos verticais e tensões proporcionais ao coeficiente de Poisson representadas pelo grupo B'.

Todos os componentes de tensão são dados em função dos fatores de continuidade, permitindo generalizar essa formulação para qualquer caso com ausência de elementos vizinhos.

Os efeitos de um deslocamento vertical são mostrados na Figura 53(b) e são totalmente análogos aos do deslocamento horizontal, aqui, as molas entre os elementos 0 e 1 são tracionadas, e comprimidas entre os elementos 0 e 3.

A Figura 54 apresenta os efeitos devido a um deslocamento rotacional. Analisando as bordas verticais, na Figura 54(a), a metade esquerda das molas entre os elementos 0 e 1, e a metade direita entre os elementos 0 e 3, estão com compressão, com as outras metades em tração. Enquanto na Figura 54(b), a metade inferior das molas entre os elementos 0 e 2, e a superior entre os elementos 0 e 4 estão comprimidas, com as demais tracionadas.

Figura 53 – Efeitos do deslocamento horizontal (a) e vertical (b).

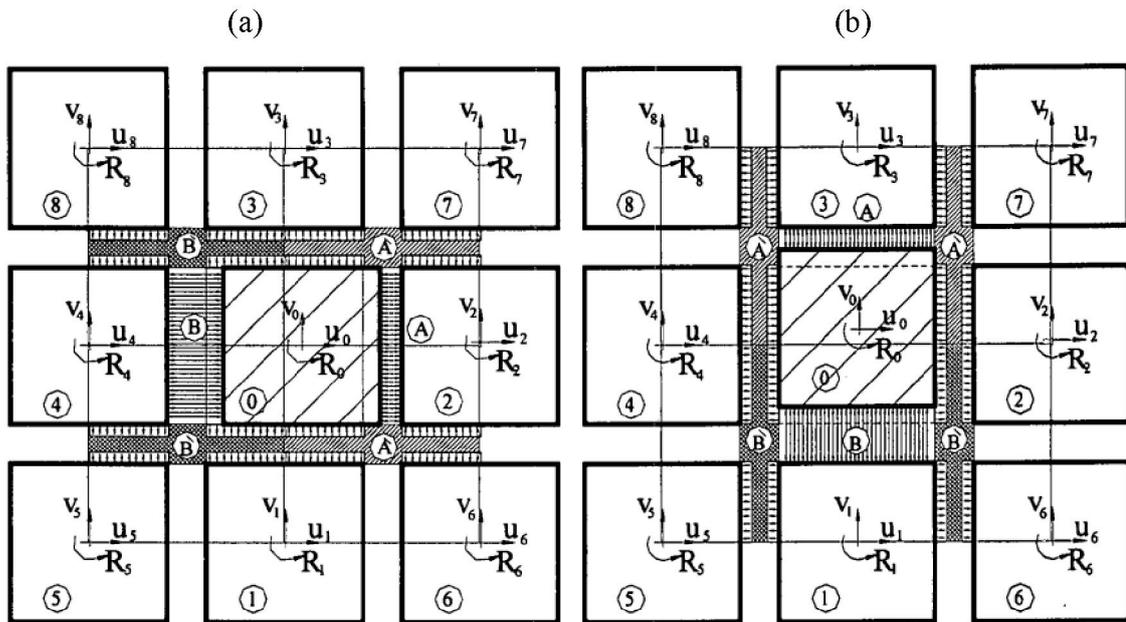
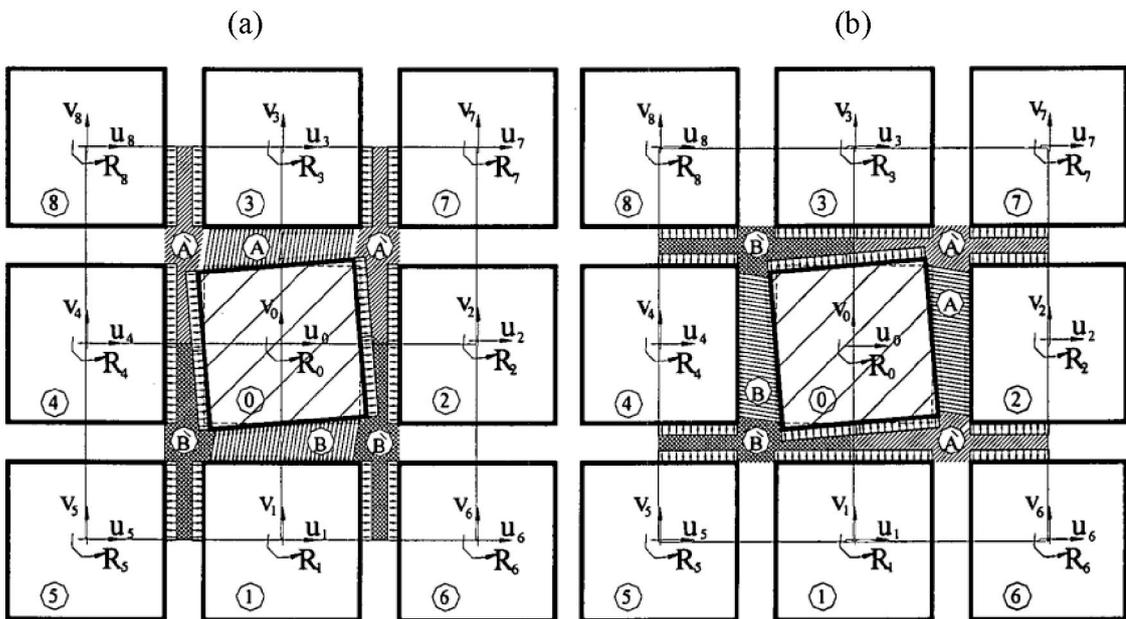


Figura 54 - Efeitos do deslocamento rotacional nas bordas verticais (a) e horizontais (b).



Os termos adicionados na matriz de rigidez global para contabilizar o efeito Poisson são apresentados na Tabela A-1.

Tabela A-1 - Rigidez adicionada pelo efeito Poisson em relação ao elemento zero.

u0	v0	R0	u1	v1	R1	u2	v2	R2
0	$p_0 \times$ $(-f_{012}+f_{023}$ $-f_{034}+f_{041})$	$m_0 \times$ $(-f_{012}+f_{023}$ $+f_{034}-f_{041})$	0	$p_0 \times$ $(+f_{012}-f_{041})$	$m_0 \times$ $(+f_{012}+f_{041})$	0	$p_2 \times$ $(-f_{241}+f_{234})$	$m_2 \times$ $(+f_{241}-f_{234})$
$p_0 \times$ $(-f_{012}+f_{023}$ $-f_{034}+f_{041})$	0	$m_0 \times$ $(-f_{012}-f_{023}$ $+f_{034}+f_{041})$	$p_1 \times$ $(-f_{123}+f_{134})$	0	$m_1 \times$ $(+f_{123}-f_{134})$	$p_0 \times$ $(+f_{012}-f_{023})$	0	$m_0 \times$ $(+f_{012}+f_{023})$
$m_0 \times$ $(-f_{012}+f_{023}$ $+f_{034}-f_{041})$	$m_0 \times$ $(-f_{012}-f_{023}$ $+f_{034}+f_{041})$	$-2 \cdot m_0 \cdot a/4 \times$ $(-f_{012}-f_{023}$ $+f_{034}+f_{041})$	$m_1 \times$ $(-f_{123}-f_{134})$	$m_0 \times$ $(+f_{012}-f_{041})$	$a/4 \times$ $(+m_0 \cdot f_{012}$ $+m_0 \cdot f_{041}$ $+m_1 \cdot f_{123}$ $+m_1 \cdot f_{134})$	$m_0 \times$ $(+f_{012}-f_{023})$	$m_2 \times$ $(-f_{241}-f_{234})$	$a/4 \times$ $(+m_2 \cdot f_{241}$ $+m_2 \cdot f_{234}$ $+m_0 \cdot f_{012}$ $+m_0 \cdot f_{023})$
u3	v3	R3	u4	v4	R4	u5	v5	R5
0	$p_0 \times$ $(-f_{023}+f_{034})$	$m_0 \times$ $(-f_{023}-f_{034})$	0	$p_4 \times$ $(+f_{412}-f_{423})$	$m_4 \times$ $(+f_{412}-f_{423})$	0	$-p_4 \times f_{412}$	$-m_4 \times f_{412}$
$p_3 \times$ $(+f_{312}-f_{341})$	0	$m_3 \times$ $(+f_{312}-f_{341})$	$p_0 \times$ $(-f_{041}+f_{034})$	0	$m_0 \times$ $(-f_{041}-f_{034})$	$-p_1 \times f_{134}$	0	$+m_1 \times f_{134}$
$m_3 \times$ $(+f_{312}+f_{341})$	$m_0 \times$ $(+f_{023}-f_{034})$	$a/4 \times$ $(+m_0 \cdot f_{023}$ $+m_0 \cdot f_{034}$ $+m_3 \cdot f_{312}$ $+m_3 \cdot f_{341})$	$m_0 \times$ $(+f_{041}+f_{034})$	$m_4 \times$ $(+f_{412}+f_{423})$	$a/4 \times$ $(+m_4 \cdot f_{412}$ $+m_4 \cdot f_{423}$ $+m_0 \cdot f_{041}$ $+m_0 \cdot f_{034})$	$+m_1 \times f_{134}$	$-m_4 \times f_{412}$	$a/4 \times$ $(-m_4 \cdot f_{412}$ $-m_1 \cdot f_{134})$
u6	v6	R6	u7	v7	R7	u8	v8	R8
0	$+p_2 \times f_{241}$	$-m_2 \times f_{241}$	0	$-p_2 \times f_{234}$	$+m_2 \times f_{234}$	0	$+p_4 \times f_{423}$	$+m_4 \times f_{423}$
$+p_1 \times f_{123}$	0	$-m_1 \times f_{123}$	$-p_3 \times f_{312}$	0	$-m_3 \times f_{312}$	$+p_3 \times f_{341}$	0	$+m_3 \times f_{341}$
$+m_1 \times f_{123}$	$+m_2 \times f_{241}$	$a/4 \times$ $(-m_2 \cdot f_{241}$ $-m_1 \cdot f_{123})$	$-m_3 \times f_{312}$	$+m_2 \times f_{234}$	$a/4 \times$ $(-m_2 \cdot f_{234}$ $-m_3 \cdot f_{312})$	$-m_3 \times f_{341}$	$-m_4 \times f_{423}$	$a/4 \times$ $(-m_4 \cdot f_{423}$ $-m_3 \cdot f_{341})$

Fonte: Meguro e Tagel-Din (1998, p. 46).