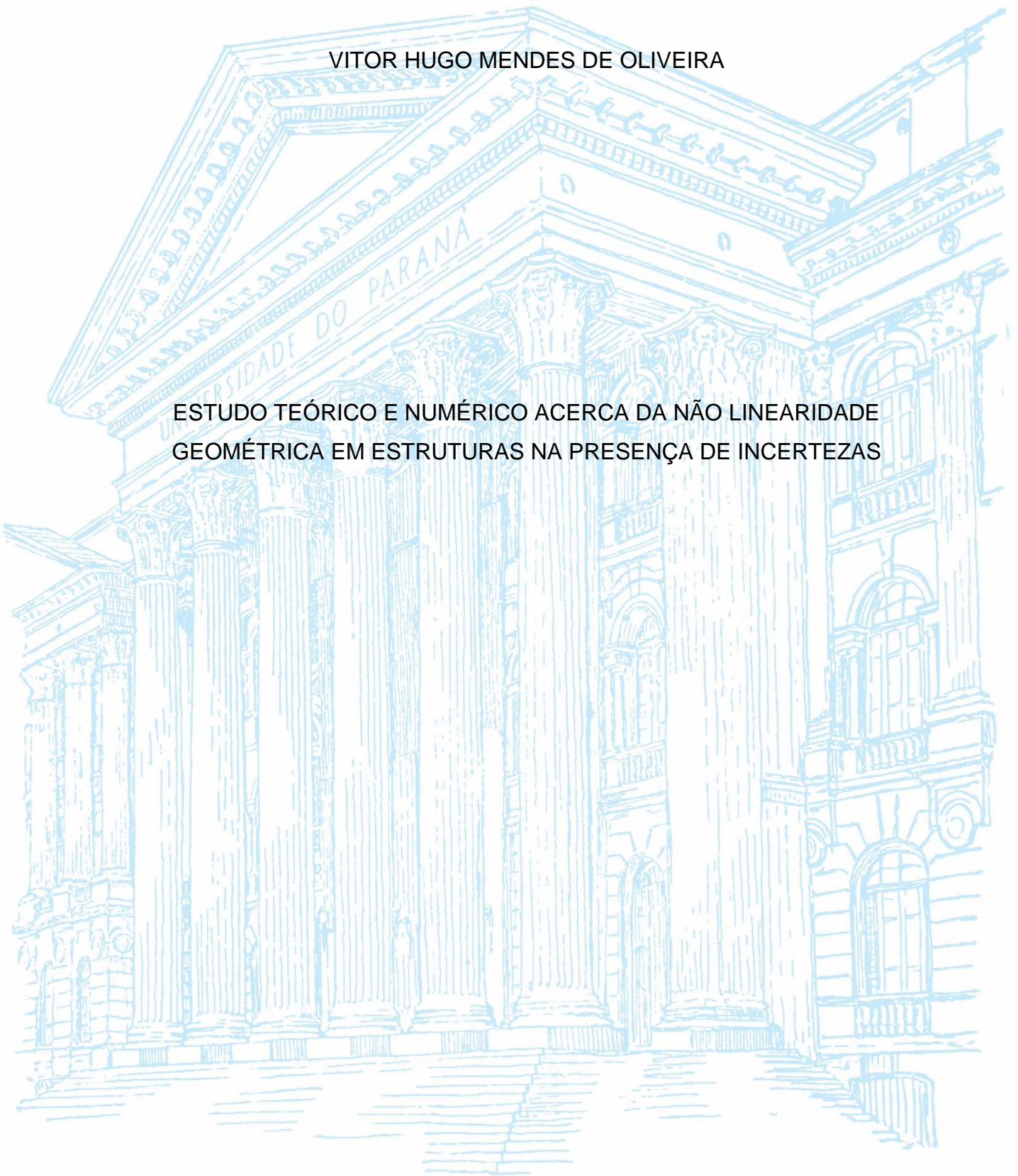


UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

VITOR HUGO MENDES DE OLIVEIRA

ESTUDO TEÓRICO E NUMÉRICO ACERCA DA NÃO LINEARIDADE  
GEOMÉTRICA EM ESTRUTURAS NA PRESENÇA DE INCERTEZAS



PONTAL DO PARANÁ

2022

VITOR HUGO MENDES DE OLIVEIRA

ESTUDO TEÓRICO E NUMÉRICO ACERCA DA NÃO LINEARIDADE  
GEOMÉTRICA EM ESTRUTURAS NA PRESENÇA DE INCERTEZAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao curso de graduação em Engenharia Civil, Campus Pontal do Paraná – Centro de Estudos do Mar, Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Bacharel em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Machado Kroetz

PONTAL DO PARANÁ

2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)  
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ  
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DO CENTRO DE ESTUDOS DO MAR

Oliveira, Vitor Hugo Mendes de  
O48e Estudo teórico e numérico acerca da não linearidade geométrica em estruturas na presença de incertezas / Vitor Hugo Mendes de Oliveira. – Pontal do Paraná, 2022.  
1 arquivo [108 f.] : PDF.

Orientador: Prof. Dr. Henrique Machado Kroetz

Monografia (Graduação) – Universidade Federal do Paraná, Campus Pontal do Paraná, Centro de Estudos do Mar, Curso de Engenharia Civil.

1. Construção civil. 2. Trelças (Construção civil). I. Kroetz, Henrique Machado. II. Título. III. Universidade Federal do Paraná.

CDD - 690



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

ATA DE REUNIÃO

**TERMO DE APROVAÇÃO**

Vitor Hugo Mendes de Oliveira

**“ESTUDO TEÓRICO E NUMÉRICO ACERCA DA NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA EM ESTRUTURAS NA PRESENÇA DE INCERTEZAS”**

Monografia aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Bacharel em Engenharia Civil, da Universidade Federal do Paraná, pela Comissão formada pelos membros:

Prof. Dr. Henrique Machado Kroetz  
Prof. Orientador - CPP-CEM/UFPR

Prof. Dr. Carlos Eduardo Rossigali  
CPP-CEM - UFPR

Prof. Dr. Giovanni Pais Pellizzer  
FAENG/UFMS

Pontal do Paraná, 22 de setembro de 2022.



Documento assinado eletronicamente por **CARLOS EDUARDO ROSSIGALI, VICE / SUPLENTE COORDENADOR(A) DE CURSO DE GRADUACAO (CURSO DE ENGENHARIA CIVIL) - PP**, em 23/09/2022, às 15:16, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **HENRIQUE MACHADO KROETZ, PROFESSOR DO MAGISTERIO SUPERIOR**, em 23/09/2022, às 15:24, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.



Documento assinado eletronicamente por **Giovanni Pais Pellizzer**, **Usuário Externo**, em 26/09/2022, às 09:08, conforme art. 1º, III, "b", da Lei 11.419/2006.

---



A autenticidade do documento pode ser conferida [aqui](#) informando o código verificador **4888329** e o código CRC **EC18AD76**.

---

*Se enxerguei longe, foi porque me apoiei sobre  
o ombro de gigantes.*

**Isaac Newton**

*O que sabemos é uma gota; o  
que ignoramos é um oceano.*

**Isaac Newton**

*“O SENHOR é o meu pastor, nada me faltará.*

*Deitar-me faz em verdes pastos, guia-me  
mansamente a águas tranquilas.*

*Refrigera a minha alma; guia-me pelas veredas  
da justiça, por amor do seu nome.*

*Ainda que eu andasse pelo vale da sombra da  
morte, não temeria mal algum, porque tu estás  
comigo; a tua vara e o teu cajado me*

*consolam.*

*Preparas uma mesa perante mim na presença  
dos meus inimigos, unges a minha cabeça com  
óleo, o meu cálice transborda.*

*Certamente que a bondade e a misericórdia me  
seguirão todos os dias da minha vida; e  
habitarei na Casa do SENHOR por longos  
dias.”*

**Salmos 23**

## RESUMO

Os projetos de estruturas requerem, com cada vez mais frequência, estruturas com layouts complexos, elevada esbeltez, baixo peso próprio e baixo custo. Diante dessa demanda, sistemas estruturais compostos por elementos de treliça são amplamente empregados. Contudo, em estruturas sob essas circunstâncias, podem se desenvolver efeitos não-lineares, para os quais a consideração de pequenos deslocamentos torna-se equivocada. Por outro lado, o caráter aleatório presente nas variáveis de projeto, tais como resistência e solicitação, torna necessária a consideração probabilística no dimensionamento estrutural, avaliando a(s) ocorrência(s) de falha. O objetivo principal do trabalho é analisar a confiabilidade e a não linearidade geométrica em estruturas. Para isso trata-se desses conceitos através de estudos de caso, analisando estruturas treliçadas. Para a análise não-linear geométrica, adota-se o método incremental-iterativo de Newton-Raphson, enquanto para a avaliação da confiabilidade estrutural utiliza-se o método de simulação de Monte Carlo. A solução para os estudos de caso se dá por meio da implementação computacional de um conjunto de rotinas na linguagem de programação Octave, determinando as probabilidades de falha e a confiabilidade, dada a descrição dos estados limites para cada estudo de caso. Os resultados obtidos mostram-se satisfatórios para o caso linear e não-linear geométrico, embora o elevado custo computacional tenha sido observado.

Palavras-chave: Não linearidade geométrica. Confiabilidade estrutural. Método de Newton-Raphson. Simulação de Monte Carlo. Método incremental-iterativo.

## ABSTRACT

Structural projects require much more frequency of complex structure layouts, high slenderness, low self-weight, and low cost. Due to this demand, structural systems called trusses are widely used. However, structures under these circumstances can develop nonlinear effects, for which consideration of small displacements could be wrong. Moreover, the randomized profile present in the design variables as the resistance and load makes necessary the probabilistic consideration in the structural design, evaluating the occurrence of failure. The main objective of this study is to analyze the reliability and geometric nonlinearity in structures. This is done through case studies using truss structures. For the geometric nonlinear analysis, Newton-Raphson method is adopted, while for the structural reliability assessment the Monte Carlo simulation method is used. The solution of the studies case is given by the computational implementation of a range of routines in the Octave programming language, setting the failure probability and reliability, given the description of limit states for each study case. The results obtained showed satisfaction for the linear and nonlinear geometric cases, although a high computational cost was observed. Suggestions are made for the enhancement of nonlinear analysis using a physical nonlinear analysis and the consideration of time-dependent reliability.

Keywords: geometric non-linearity. structural reliability. Newton-Raphson method. Monte Carlo simulation. Incremental-Iterative Method.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – COLAPSO PROGRESSIVO DA PONTE I35-W .....	16
FIGURA 2 – NÍVEIS DE ABSTACÃO NA ANÁLISE ESTRUTURAL.....	20
FIGURA 3 – MODELO ESTRUTURAL .....	21
FIGURA 4 – MODELO DISCRETO DE ESCADA AUTO-PORTANTE.....	22
FIGURA 5 – GRAUS DE LIBERDADE .....	25
FIGURA 6 – APOIOS BIDIMENSIONAIS.....	26
FIGURA 7 – ESFORÇOS SOLICITANTES INTERNOS .....	26
FIGURA 8 – RESULTANTE DOS ESI.....	27
FIGURA 9 – DEFORMAÇÕES ASSOCIADAS AOS ESI .....	28
FIGURA 10 – MUDANÇA DE CONFIGURAÇÃO E DEFORMAÇÃO.....	29
FIGURA 11 – ALONGAMENTO DE UMA BARRA.....	29
FIGURA 12 – EXEMPLIFICAÇÃO DO EQUILÍBRIO ESTRUTURAL.....	32
FIGURA 13 – COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE UM ARCO RASO CARREGADO .....	33
FIGURA 14 – CAMINHO DE EQUILÍBRIO.....	33
FIGURA 15 – PONTOS LIMITE NA TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO.....	34
FIGURA 16 – EXEMPLO DE TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO COM IDENTIFICAÇÃO DE SEUS PONTOS CRÍTICOS .....	35
FIGURA 17 – EXEMPLOS DE ESTRUTURAS SUJEITAS AO SNAP-THROUGH...	36
FIGURA 18 – EXEMPLO DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS .....	36
FIGURA 19 – BARRA SUJEITA A FLAMBAGEM .....	38
FIGURA 20 – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON .....	40
FIGURA 21 – MÉTODO INCREMENTAL-ITERATIVO .....	42
FIGURA 22 – PROCEDIMENTO DO MÉTODO INCREMENTAL-ITERATIVO.....	43
FIGURA 23 – LIMITAÇÃO NO CONTROLE DE CARGA.....	44
FIGURA 24 – DIAGRAMA DE VENN.....	46
FIGURA 25 – PARTIÇÃO DE UM ESPAÇO AMOSTRAL .....	47
FIGURA 26 – REGRA DA ADIÇÃO .....	50
FIGURA 27 – FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE .....	52
FIGURA 28 – FDA E FDP ASSOCIADAS.....	53
FIGURA 29 – DISTRIBUIÇÃO UNIFORME DE PROBABILIDADE.....	58

FIGURA 30 – DISTRIBUIÇÃO NORMAL DE PROBABILIDADE E A INFLUÊNCIA DOS PARÂMETROS ESTATÍSTICOS .....	59
FIGURA 31 – FUNÇÃO CONJUNTA DE DENSIDADE E PROBABILIDADE DE UM EVENTO A .....	63
FIGURA 32 – FUNÇÃO DE DENSIDADE CONJUNTA E FUNÇÕES MARGINAIS PARA DUAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS .....	64
FIGURA 33 – ESQUEMA GERAL DA QUANTIFICAÇÃO DAS INCERTEZAS EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS .....	68
FIGURA 34 – DOMÍNIO DEFINIDO PELA FUNÇÃO DE ESTADO LIMITE .....	71
FIGURA 35 – INTERFERÊNCIA ENTRE RESISTÊNCIA E SOLICITAÇÃO .....	72
FIGURA 36 – MODELO MECÂNICO LINEAR 1 .....	79
FIGURA 37 – MODELO MECÂNICO NÃO-LINEAR GEOMETRICO .....	80
FIGURA 38 – MODELO MECÂNICO LINEAR 2 .....	84
FIGURA 39 – MODELO MECÂNICO LINEAR 2 EQUACIONAMENTO .....	85

## LISTA DE GRÁFICOS

GRÁFICO 1 – CAMINHO DE EQUILIBRIO DA ESTRUTURA.....	89
GRÁFICO 2 – CONVERGÊNCIA DO MÉTODO.....	90
GRÁFICO 3 – INFLUÊNCIA NO AUMENTO DA MÉDIA DA FORÇA $V$ NA $Pf$ .....	91

## LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – PROBABILIDADES DE FALHA ADMISSÍVEIS .....	65
TABELA 2 – VALORES CARACTERISTICOS ESTUDO DE CASO 1 .....	78
TABELA 3 – VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DA ESTRUTURA 1 .....	83
TABELA 4 – VALORES CARACTERISTICOS ESTUDO DE CASO 2.....	85
TABELA 5 – VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DA ESTRUTURA 2 .....	87
TABELA 6 – PROBABILIDADE DE FALHA DIANTE DA MUDANÇA DO CARREGAMENTO .....	91
TABELA 7 – CONFIABILIDADE DO SISTEMA .....	92

## LISTA DE ABREVIATURAS OU SIGLAS

CM	- Centro geométrico
ELS	- Estados limites de serviço
ELU	- Estados limites últimos
ESL	- Esforços solicitantes interno
FDA	- Função de distribuição acumulada de probabilidades
FDP	- Função densidade de probabilidade
NBR	- Norma técnica brasileira
NLG	- Não linearidade geométrica
SMC	- Simulação de Monte Carlo
VA	- Variável aleatória

## LISTA DE SÍMBOLOS

$F_x, F_y, F_z$  - componentes escalares da força

$M_x, M_y, M_z$  - componentes escalares do momento

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$  – versores

$\sigma_t$  - tensão normal

$\sigma_{t,lim}$  - limite de resistência à tração

$E$  - módulo de elasticidade do material

$\varepsilon$  - deformação específica longitudinal/axial

$\varepsilon_E$  - deformação de engenharia

$\varepsilon_G$  - deformação de Green

$N$  – esforço normal

$Q_y$  – esforço cortante

$M_z$  – momento fletor

$L, l_0$  - comprimento final e inicial, respectivamente

$u$  – deslocamento

$\zeta$  – tangente de rigidez do caminho de equilíbrio

$K_t$  – tangente de rigidez do método de Newton-Raphson

$P_{lim}$  - carga limite de tração;

$P_{cr}$  - carga crítica de flambagem

$I_{min}$ : menor momento de inércia mínimo seção transversal;

$q$  - vetor de forças internas

$f$  - vetor de forças externas

$g$  - força residual ou força de equilíbrio

$\xi$ : raiz real da função;

$E_{re}$ : erro relativo estimado da solução;

$u_{NS}$ : solução numérica aproximada para o deslocamento;

$u_{NS}^{(i)}$ : solução numérica estimada na penúltima iteração;

$u_{NS}^{(i+1)}$ : solução numérica estimada na última iteração;

$tol$ : tolerância do erro relativo estimado;

$\Omega$  - espaço amostral

$\mathbb{E}$  - experimento aleatório

$\omega$  - ponto amostral

$A$  – evento  $A$

$\bar{A}$  – evento complementar de  $A$

$P$  - probabilidade

$P(A|B)$  - probabilidade condicionada de  $A$  dado o evento  $B$

$X$  – variável aleatória

$Y$  – variável aleatória

$f_X(x)$  – função densidade de probabilidade

$F_X(x)$  – função de distribuição acumulada de probabilidade

$\phi(z)$  - função de densidade de probabilidade normal padrão

$\Phi(z)$  - função de distribuição acumulada de probabilidade normal padrão;

$m$  - número de pontos amostrais

$n$  - número de eventos possíveis

$n_A$  - número de ocorrência de um evento  $A$

$N_A$  - número de casos favoráveis ao evento  $A$

$N_\Omega$  - número de casos possíveis

$\mathbf{X}$  - vetor de variáveis aleatórias

$P_f$  - probabilidade falha

$\bar{P}_f$  - complemento da probabilidade de falha

$\mathcal{R}$  - confiabilidade

$\Omega_f$  - domínio da falha

$\Omega_s$  - domínio da sobrevivência ou não falha

$\varphi(\ )$  - função de estado limite

$nls$  – número de modos de falha

$R$  - resistência

$S$  – solicitação

$\sigma_s$  – tensão de ruptura

$U$  - união

$\cap$  - intersecção

$\subset$  - contido

$\supset$  - contem

$\in$  - pertence

$\forall$  - para todo e qualquer

$\Sigma$  - somatório de números

$\Pi$  - produtório de números

$\pi$  – número de pi, 3,1415 ...

$e$  – número de Euler, 2,7182 ...

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	<b>16</b>
1.1 JUSTIFICATIVA .....	17
1.2 OBJETIVOS .....	18
1.2.1 Objetivo geral .....	18
1.2.2 Objetivos específicos.....	18
1.3 METODOLOGIA.....	19
<b>2 REVISÃO DE LITERATURA</b> .....	<b>20</b>
2.1 ANÁLISE ESTRUTURAL LINEAR .....	20
2.1.1 Níveis de abstração na análise estrutural.....	20
2.1.1.1 Modelo real.....	20
2.1.1.2 Modelo estrutural .....	21
2.1.1.3 Modelo Discreto.....	21
2.1.1.4 Modelo Computacional .....	22
2.1.2 Condições da análise estrutural .....	22
2.1.2.1 Condições de equilíbrio .....	22
2.1.2.2 Condições de Compatibilidade entre Deslocamentos e Deformações .....	23
2.1.2.3 Leis Constitutivas.....	24
2.1.3 Hipóteses Simplificadoras .....	24
2.1.4 Equilíbrio externo .....	25
2.1.5 Equilíbrio interno .....	26
2.1.5.1 Esforço normal ( $N$ ): .....	28
2.1.5.2 Esforço cortante ( $Q_y$ ): .....	28
2.1.5.3 Momento fletor ( $M_z$ ): .....	28
2.1.6 Deformação e deslocamentos .....	28
2.1.7 Medidas de deformação unidimensional .....	29
2.1.8 Deformação de engenharia .....	30
2.1.9 Deformação de Green .....	30
2.2 ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR.....	30
2.2.1 Não linearidade geométrica.....	31
2.2.2 Efeitos de Segunda Ordem .....	32
2.2.3 Estabilidade e Instabilidade.....	32
2.2.4 Caminho do Equilíbrio .....	33

2.2.4.1	Tangente de Rigidez.....	34
2.2.4.2	Ponto Limite.....	34
2.2.4.3	Ponto de Bifurcação do Equilíbrio.....	35
2.2.5	Snap-Through e Snap-Back.....	35
2.3	TRELIÇAS E MODOS DE FALHAS EM ESTRUTURAS RETICULADAS SUJEITAS A CARGAS AXIAIS .....	36
2.3.1	Falha por tração pura .....	37
2.3.2	Falha por flambagem .....	37
2.3.3	Falha por snap-through .....	39
2.4	MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR .....	39
2.4.1	Método de Newton-Raphson.....	39
2.4.1.1	Critério de parada .....	41
2.4.2	Newton-Raphson com análise incremental-iterativa .....	42
2.4.3	Controle de carga.....	43
2.5	ELEMENTOS DA PROBABILIDADE .....	44
2.5.1	Experimento aleatório, ponto amostral e espaço amostral.....	44
2.5.2	Evento .....	45
2.5.2.1	Eventos especiais.....	45
2.5.2.2	Eventos mutuamente excludentes ou disjuntos .....	46
2.5.2.3	Eventos exaustivos ou partição do espaço amostral .....	47
2.5.3	Conceito de probabilidade.....	47
2.5.3.1	Definição axiomática.....	48
2.5.3.2	Definição clássica .....	48
2.5.3.3	Definição frequentista .....	49
2.5.3.4	Definição subjetiva ou bayesiana .....	49
2.5.4	Regras da probabilidade .....	49
2.5.4.1	Regra do complementar .....	49
2.5.4.2	Regra da adição .....	50
2.5.4.3	Regra do produto.....	50
2.6	VARIÁVEIS ALEATÓRIAS .....	51
2.6.1	Função densidade de probabilidade .....	52
2.6.2	Função de distribuição acumulada de probabilidade .....	53
2.6.3	Parâmetros característicos de uma variável aleatória .....	54
2.6.3.1	Valor esperado ou média.....	54

2.6.3.2	Mediana.....	55
2.6.3.3	Valor mais provável ou moda .....	55
2.6.3.4	Variância.....	55
2.6.3.5	Desvio padrão .....	56
2.6.3.6	Coeficiente de variação .....	56
2.6.4	Medidas representativas de uma amostra.....	56
2.6.5	Modelos de distribuição de probabilidades para variáveis aleatórias contínuas	
	57	
2.6.5.1	Distribuição uniforme $U_{a,b}$ .....	57
2.6.5.2	Distribuição gaussiana ou normal $N_{\mu,\sigma^2}$ .....	59
2.6.5.3	Distribuição normal padrão $N_{0,1}$ .....	60
2.6.6	Distribuição conjunta de probabilidade.....	61
2.6.6.1	Função conjunta de distribuição acumulada de probabilidade para duas variáveis aleatórias contínuas .....	61
2.6.6.2	Função conjunta de densidade de probabilidade para duas variáveis aleatórias contínuas .....	62
2.6.6.3	Funções marginais de probabilidade para duas variáveis aleatórias contínuas.....	63
2.7	CONFIABILIDADE E SEGURANÇA ESTRUTURAL.....	64
2.7.1	Segurança, economia e confiabilidade.....	65
2.7.2	Consideração das incertezas na engenharia de estruturas.....	66
2.7.2.1	Incertezas Intrínsecas.....	66
2.7.2.2	Incertezas Epistêmicas.....	67
2.7.2.3	Erro humano .....	67
2.7.2.4	Etapas de quantificação das incertezas .....	67
2.7.3	Definição de Confiabilidade.....	68
2.7.3.1	Aspectos da abordagem probabilística.....	69
2.7.4	Estados limites e modos de falha.....	69
2.7.4.1	Estados limites últimos - ELU .....	69
2.7.4.2	Estados limites de serviço - ELS .....	70
2.7.4.3	Equação de estado limite .....	70
2.7.5	Problema fundamental da confiabilidade estrutural.....	71
2.7.6	Confiabilidade de sistemas.....	73
2.7.6.1	Associação em série.....	73

2.7.6.2	Sistemas Estruturais Isostáticos.....	74
2.8	SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO (SMC).....	75
2.8.1	Formulação do método na confiabilidade estrutural.....	75
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA .....</b>	<b>78</b>
3.1	ESTUDO DE CASO 1 .....	78
3.1.1	Exemplo mecânico linear .....	78
3.1.2	Exemplo mecânico não-linear geométrico.....	80
3.1.3	Exemplo de confiabilidade estrutural.....	83
3.2	ESTUDO DE CASO 2 .....	84
3.2.1	Modelo mecânico linear.....	84
3.2.2	Modelo de confiabilidade estrutural .....	87
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES.....</b>	<b>89</b>
4.1	ESTUDO DE CASO 1 .....	89
4.1.1	Análise linear e probabilística.....	89
4.1.2	Análise não-linear geométrica e probabilística .....	89
4.2	ESTUDO DE CASO 2 .....	92
4.2.1	Confiabilidade de sistemas.....	92
<b>5</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS.....</b>	<b>93</b>
5.1	RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS .....	93
	<b>REFERÊNCIAS.....</b>	<b>94</b>
	<b>GLOSSÁRIO.....</b>	<b>98</b>
	<b>ANEXO A – CÓDIGO FONTE .....</b>	<b>100</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Na atualidade, com os avanços tecnológicos na área de materiais e o aprimoramento de técnicas construtivas, a engenharia de estruturas depara-se frequentemente com projetos de arquiteturas (ou *layouts*) complexas, de elevada esbeltez e elevados vãos (MENDES, 2017). Nesse contexto se apresentam os sistemas estruturais por elementos de treliça, amplamente utilizados em diversas aplicações de engenharia, que além dos aspectos construtivos e mecânicos possuem baixo custo (FELIPE, 2019).

Usualmente, a modelagem dessas estruturas é simples para as condições clássicas de linearidade, podendo ser negligenciados quaisquer efeitos não lineares. Porém, para algumas aplicações modernas, a negligência do caráter não-linear pode resultar em uma análise estrutural imprecisa e equivocada sobre comportamento da estrutura (FELIPE, 2019). Essa situação é evidenciada na FIGURA 1, no caso de colapso progressivo da ponte I35-W sobre o rio *Mississippi*, na cidade de Mineápolis nos Estados Unidos.

FIGURA 1 – COLAPSO PROGRESSIVO DA PONTE I35-W



FONTE: Felipe (2019 apud NTSB, 2008)

De acordo com Felipe (2019, apud NTSB, 2008), o colapso progressivo pela falha das longarinas em aço resultou em 13 mortes e 145 feridos. Uma das conclusões

obtidas a partir de investigações do NTSB<sup>1</sup> foi que a análise elástica linear bidimensional era insuficiente para descrever o comportamento da estrutura.

O caráter não-linear na análise estrutural divide-se em dois principais ramos, sendo esses a não linearidade física (NLF), atribuída ao comportamento do material e a não linearidade geométrica (NLG), atribuída aos deslocamentos excessivos e perda de estabilidade estrutural (LACERDA, 2014). Neste trabalho, analisam-se somente os aspectos referentes a não linearidade geométrica.

Por outro lado, a análise não-linear geométrica de uma estrutura é apenas parte da solução de um problema real de engenharia, pois além das considerações da análise estrutural, a natureza aleatória associada às variáveis existentes e as incertezas presentes nos modelos de cálculo torna necessária a análise sob uma perspectiva probabilística (FELIPE, 2019). Esse tipo de abordagem amplia o escopo dos problemas da engenharia de estruturas ao considerar que as variáveis de projeto não são perfeitamente conhecidas e que esse caráter aleatório é propagado ao longo do sistema estudado (KROETZ, 2019). Neste contexto a teoria da confiabilidade surge como uma ferramenta de manipulação das incertezas de forma racional, de forma a produzir estruturas mais econômicas e mais confiáveis (BECK, 2019; FELIPE, 2019).

Sendo assim, esta monografia tem por objetivo explorar, através de dois estudos de caso teóricos, os conceitos da não linearidade geométrica e da teoria da confiabilidade estrutural, aplicando técnicas de simulação e modelagem computacional, e acoplando essas duas análises.

## 1.1 JUSTIFICATIVA

Em muitos casos, como em projetos de edifícios de concreto armado, se faz necessário considerar a análise não-linear geométrica para a avaliação da estabilidade global e determinação dos esforços solicitantes internos (KIMURA, 2007). Além disso, esse tipo de análise é frequentemente empregada nas estruturas destinadas às telecomunicações (e.g. poste de telefonia móvel), onde a elevada esbelteza dos elementos estruturais faz necessária a consideração da NLG existente (WAHRHAFTIG, 2017).

---

<sup>1</sup> National Transportation Safety Board.

Adicionalmente, a consideração do carácter aleatório de algumas variáveis envolvidas em projetos de engenharia e as incertezas intrínsecas nos modelos de cálculo torna necessário avaliar a confiabilidade estrutural diante aos diferentes cenários de falha, tendo em vista que existirá sempre uma probabilidade não nula da estrutura em não atender a algum requisito estrutural durante o período de vida útil (LOPES, 2007).

## 1.2 OBJETIVOS

Contextualizado o problema, delimitam-se os objetivos gerais e específicos desta monografia.

### 1.2.1 Objetivo geral

Analisar a confiabilidade e não linearidade geométrica estrutural através de dois estudos de caso, em que um apresenta a confiabilidade e não linearidade geométrica e o outro a confiabilidade de sistema.

### 1.2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- a) Caracterizar os estados limites das duas estruturas sob as condições propostas;
- b) Determinar e analisar um modelo mecânico sob análise linear e não-linear geométrica;
- c) Formular um problema de confiabilidade de sistema em série;
- d) Determinar a probabilidade de falha estrutural a partir do método de simulação de Monte Carlo;
- e) Simular e analisar os níveis de segurança da solução não-linear geométrica com o modelo de confiabilidade estrutural;
- f) Simular e analisar os níveis de segurança da solução linear com o modelo de confiabilidade estrutural.

### 1.3 METODOLOGIA

A metodologia deste trabalho integra as etapas de revisão bibliográfica, concepção de alguns estudos de caso e implementação computacional desses.

Na etapa da fundamentação teórica buscou-se compreender, através de estudos, os assuntos relativos à confiabilidade estrutural, análise estrutural linear e não linearidade geométrica. Em relação aos estudos de caso, determinou-se um modelo mecânico e probabilístico para duas estruturas sob situações definidas, em que uma considera o comportamento linear e a outra considera a não linearidade geométrica. Por fim, na implementação computacional, através da linguagem de programação GNU Octave<sup>2</sup>, desenvolveram-se rotinas para a determinação da probabilidade de falha estrutural e do fenômeno de *snap-through*.

---

<sup>2</sup> GNU Octave consiste em uma linguagem de programação de alto nível com aplicações em métodos numéricos computacionais (<https://www.gnu.org/software/octave/about>).

## 2 REVISÃO DE LITERATURA

Este capítulo tem como objetivo apresentar um panorama do problema, utilizando livros e outros estudos, a fim de compreender os procedimentos e conceitos referentes a análise estrutural, não-linearidade geométrica e confiabilidade em estruturas.

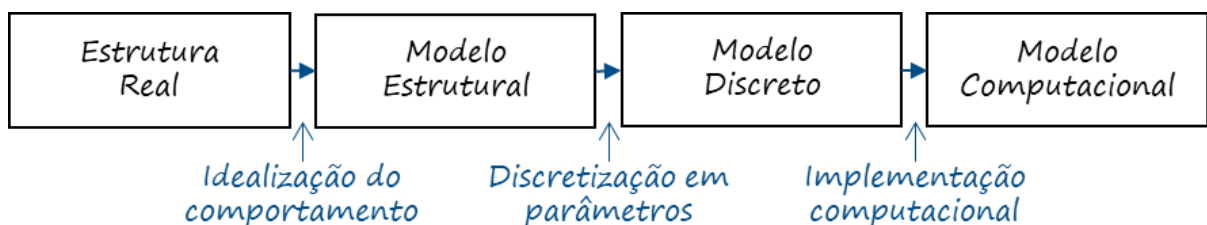
### 2.1 ANÁLISE ESTRUTURAL LINEAR

De acordo com Martha (2022), Soriano e Lima (2006), a análise estrutural refere-se à etapa do projeto em que são realizadas as idealizações do comportamento real da estrutura, objetivando a determinação de diferentes parâmetros, como esforços solicitantes (internos e externos), tensões, deslocamentos e deformações de forma a identificar eventuais problemas no comportamento do material empregado e/ou no comportamento da estrutura e seus constituintes. No que lhe concerne, as estruturas, de acordo com Soriano e Lima (2006, p. 1), consistem em “[...] sistemas físicos capazes de receber e transmitir esforços [...]”.

#### 2.1.1 Níveis de abstração na análise estrutural

Na análise estrutural moderna, utilizam-se quatro níveis de abstração, conforme indicado na FIGURA 2.

FIGURA 2 – NÍVEIS DE ABSTACÃO NA ANÁLISE ESTRUTURAL



FONTE: Adaptado de Martha (2022).

##### 2.1.1.1 Modelo real

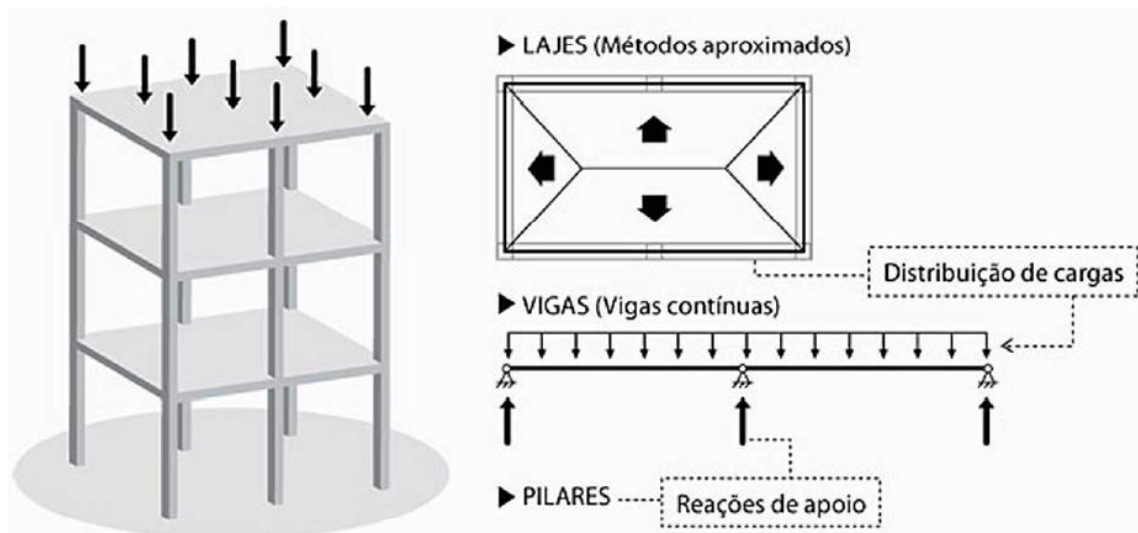
O primeiro nível consiste na estrutura física, ou seja, aquela que reproduz a estrutura real tal como é construída (MARTHA, 2022).

### 2.1.1.2 Modelo estrutural

Neste nível de abstração, também conhecido como modelo analítico, representa-se a estrutura real de maneira simplificada, incorporando as teorias e hipóteses que descrevem o comportamento estrutural, desprezando alguns detalhes que pouco influenciem nas respostas estruturais desejadas (KASSIMALI, 2015; MARTHA, 2022).

Um modelo analítico usual de análise consiste na consideração da estrutura dividida em partes de comportamentos isolados, os quais transmitem os esforços entre si, conforme ilustrado na FIGURA 3 (SORIANO, 2013).

FIGURA 3 – MODELO ESTRUTURAL



FONTE: Kimura (2007).

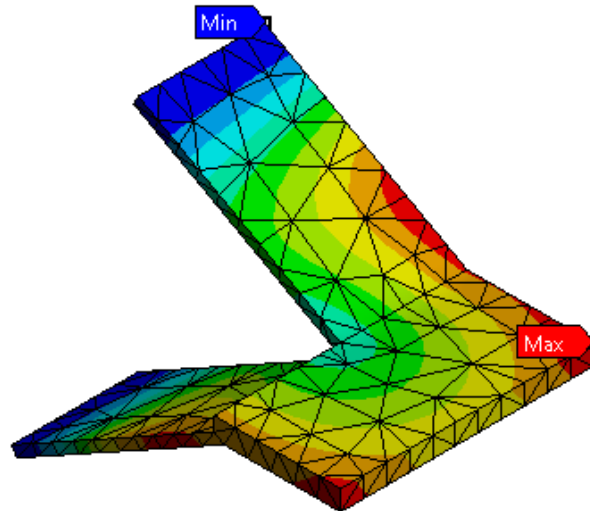
Segundo Kimura (2007), o modelo estrutural ideal é aquele onde o comportamento estrutural mais se assemelha à estrutura real.

### 2.1.1.3 Modelo Discreto

No modelo discreto, a representação contínua do comportamento da estrutura é substituída por soluções discretas de seus parâmetros, possibilitando a sua resolução numérica. Esse tipo de análise é concebida a partir de metodologias de cálculo por métodos de análise (e.g. método dos deslocamentos e método das forças),

onde é realizada a transição do modelo estrutural contínuo em um modelo discreto, a partir de um processo denominado discretização (MARTHA, 2022).

FIGURA 4 – MODELO DISCRETO DE ESCADA AUTO-PORTANTE



FONTE: o Autor (2022).

#### 2.1.1.4 Modelo Computacional

Segundo Martha (2022, p. 10), “a análise de estruturas pode ser vista atualmente como uma simulação computacional do comportamento de estruturas.”

A implementação computacional de modelos de cálculos estruturais traz consigo diversas questões relevantes de análise, como procedimentos para a criação da geometria e discretização de sistemas complexos, a inserção de diferentes atributos de análise (e.g. propriedades dos materiais e condições de contorno) e a visualização gráfica dos resultados (MARTHA, 2022).

#### 2.1.2 Condições da análise estrutural

##### 2.1.2.1 Condições de equilíbrio

Segundo Martha (2022, p.78), desconsiderando qualquer problema dinâmico ou oscilatório, as “[...] condições de equilíbrio são aquelas que garantem o equilíbrio estático de qualquer porção isolada da estrutura ou desta como um todo.”

Para que uma estrutura apresente um equilíbrio dito estático, a condição necessária e suficiente é dada partir das leis universais da estática (SUSSEKIND, 1981):

$$\sum \vec{F} = \left(\sum F_x\right) \hat{i} + \left(\sum F_y\right) \hat{j} + \left(\sum F_z\right) \hat{k} = \vec{0} \quad (1)$$

$$\sum \vec{M} = \left(\sum M_x\right) \hat{i} + \left(\sum M_y\right) \hat{j} + \left(\sum M_z\right) \hat{k} = \vec{0} \quad (2)$$

onde:

$F_x, F_y, F_z$ : componentes escalares da força;

$M_x, M_y, M_z$ : componentes escalares do momento;

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ : versores.

Essas equações representam as restrições dos movimentos de translação e rotação de um corpo no espaço sob condição de equilíbrio, as quais podem ser substituídas por suas versões escalares, que no caso bidimensional para um sistema de forças coplanares resumem-se em três equações (SUSSEKIND, 1981):

$$\sum F_x = 0 \quad (3)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (4)$$

$$\sum M_z = 0 \quad (5)$$

#### 2.1.2.2 Condições de Compatibilidade entre Deslocamentos e Deformações

A compatibilidade entre os deslocamentos e deformações consiste em condições geométricas que devem ser atendidas a fim de garantir que a estrutura permaneça contínua e compatível com seus vínculos externos após se deformar (MARTHA, 2022).

Estas condições podem ser divididas em dois grupos, sendo estes:

- a) Compatibilidade externa: retrata os vínculos externos da estrutura;

- b) Compatibilidade interna: garante a continuidade interna da estrutura perante as deformações.

### 2.1.2.3 Leis Constitutivas

O comportamento do modelo estrutural é expresso de maneira macroscópica por um conjunto de relações matemáticas entre tensões e deformações, as quais são denominadas leis constitutivas (MARTHA, 2022).

Para estruturas com elementos submetidos a esforços axiais, no qual o material empregado apresenta comportamento elástico e linear, a lei constitutiva é dada pela Lei de Hooke<sup>3</sup> (TIMOSHENKO; GERE, 1983).

$$\sigma_t = E \cdot \varepsilon \quad (6)$$

onde:

- $\sigma_t$ : tensão normal;
- $E$ : módulo de elasticidade do material;
- $\varepsilon$ : deformação axial.

### 2.1.3 Hipóteses Simplificadoras

De acordo com Proença (2018), na análise estrutural linear clássica, admite-se a proporcionalidade entre a carga e o deslocamento. Para tal comportamento, algumas hipóteses devem ser atendidas, como:

- a) Resposta elástica linear do material;
- b) Pequenos deslocamentos.

Nesse tipo de abordagem, as condições de equilíbrio são determinadas com base na geometria indeformada (geometria inicial) da estrutural, sendo esta uma análise dita de *primeira ordem*, onde seus efeitos (i.e. deslocamentos e esforços

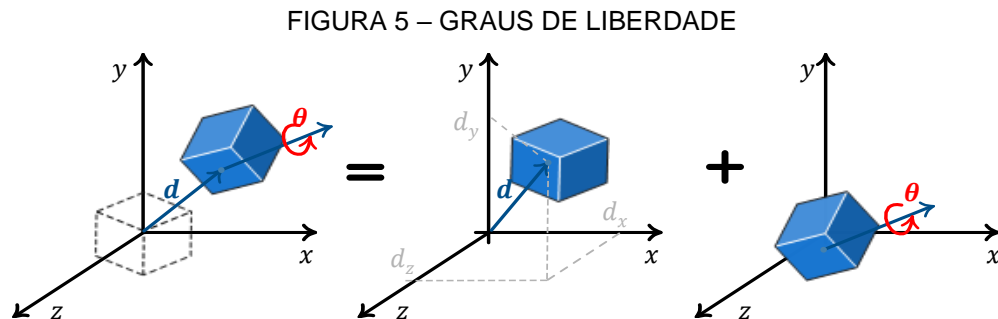
---

<sup>3</sup> Nome em homenagem ao cientista inglês Robert Hooke (1635-1703) um dos pioneiros a estabelecer experimentalmente a relação linear intrínseca entre tensões e deformações (TIMOSHENKO; GERE, 1983).

solicitantes internos) são denominados *efeitos de primeira ordem* (KIMURA, 2007; LACERDA, 2014).

#### 2.1.4 Equilíbrio externo

Uma estrutura tridimensional imposta a um sistema de forças arbitrário possui seis graus de liberdade possíveis, ou seja, seis tendências de movimento, sendo três translações e três rotações, conforme ilustrado na FIGURA 5 (SORIANO, 2013; SUSSEKIND, 1981).



FONTE: Adaptada de Soriano (2013).

Objetivando impedir esses movimentos diante da ação de um sistema de forças e garantir o equilíbrio estático, são necessárias restrições de seus graus de liberdade, o que se obtém por meio de apoios ou vínculos (SUSSEKIND, 1981). Nesses apoios desenvolvem-se forças de superfície denominadas reações, sendo estas intimamente ligadas aos tipos de apoio aos quais o elemento está fixado. Em geral, segundo Hibbeler (2004, p. 2), “se o apoio impede a translação em dada direção, então deve ser desenvolvida uma força naquela direção. Da mesma forma, se a rotação for impedida, deve ser aplicado um conjugado<sup>4</sup> sobre o elemento”.

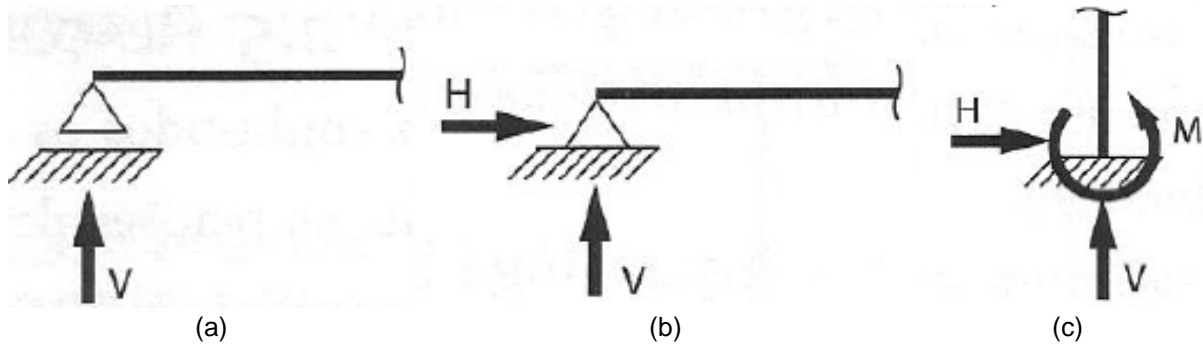
Alguns apoios e suas respectivas reações, para um caso plano, podem ser vistos conforme FIGURA 6, onde a estrutura é carregada no próprio plano, sendo os apoios classificados como (SUSSEKIND, 1981):

- a) Apoio de 1º gênero: restringe apenas uma translação, FIGURA 6a;

<sup>4</sup> Também conhecido por torque ou binário.

- b) Apoio de 2º gênero: restringe duas translações, FIGURA 6b;  
 c) Apoio de 3º gênero: restringe os três graus de liberdade da estrutura FIGURA 6c.

FIGURA 6 – APOIOS BIDIMENSIONAIS



FONTE: Almeida (2009).

LEGENDA: a) apoio do primeiro gênero.

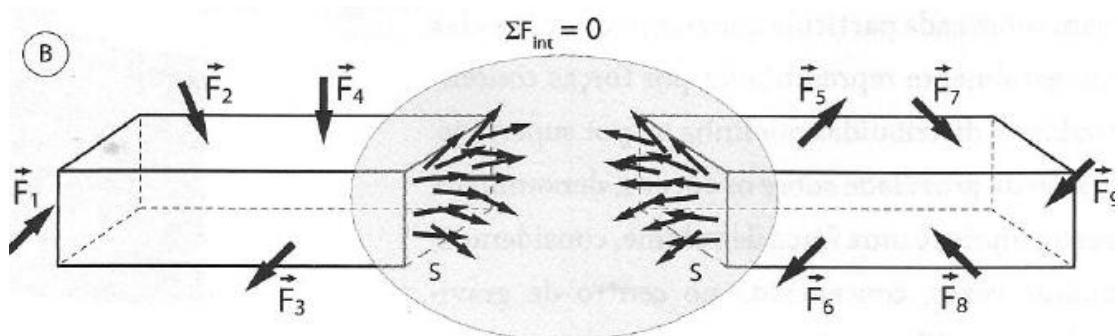
b) apoio do segundo gênero.

c) apoio do terceiro gênero.

### 2.1.5 Equilíbrio interno

Quando uma estrutura é submetida a um sistema de forças externas arbitrária, a interação entre suas partes é dada através de forças internas, denominadas esforços solicitantes internos - ESI ou esforços seccionais, as quais surgem em cada seção transversal de modo a restaurar o equilíbrio das partes, conforme ilustrado na FIGURA 7 (ALMEIDA, 2009).

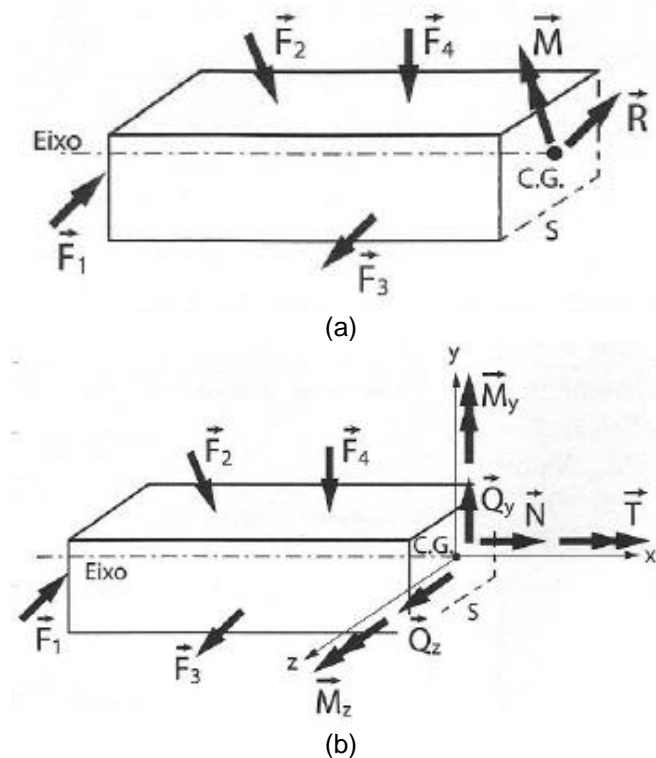
FIGURA 7 – ESFORÇOS SOLICITANTES INTERNOS



FONTE: Almeida (2009).

Esses esforços consistem em uma abstração de cálculo, uma vez que na seção transversal de um elemento verdadeiramente desenvolvem-se tensões (SORIANO, 2013). A resultante dessas tensões, ou seja, os ESI, podem ser reduzidos a um sistema força e momento no centro geométrico da seção, decompostos em três componentes de força e três componentes de momento, conforme ilustrado na FIGURA 8 (ALMEIDA, 2009).

FIGURA 8 – RESULTANTE DOS ESI

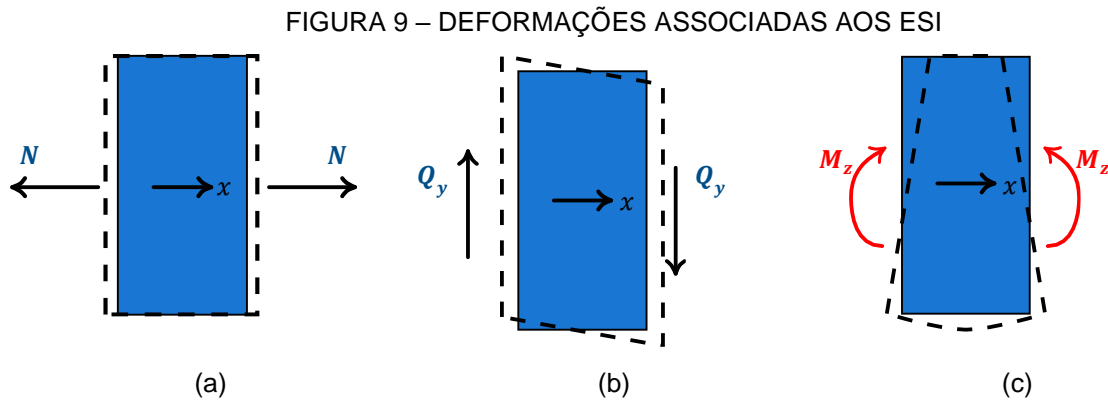


FONTE: Almeida (2009).

LEGENDA: a) resultante dos ESI no centroide da seção transversal.

b) decomposição dos ESI em componentes cartesianas.

No caso de estruturas planas submetidas a carregamentos no seu próprio plano, aqui definido como o plano  $xy$ , somente três esforços seccionais desenvolvem-se, sendo esses o esforço normal, esforço cortante em  $y$  e o momento fletor em  $z$  (SUSSEKIND, 1981).



FONTE: Adaptada de Soriano (2013).

LEGENDA: a) esforço normal.

b) esforço cortante em  $y$ .

c) momento fletor em  $z$ .

#### 2.1.5.1 Esforço normal ( $N$ ):

Consiste na força que atua perpendicularmente a seção transversal, gerada sempre que forças externas tendem a tracionar ou comprimir as partes do elemento (HIBBELER, 2004).

#### 2.1.5.2 Esforço cortante ( $Q_y$ ):

Consiste na força que atua perpendicularmente à seção transversal na direção  $y$ , gerada sempre que forças externas tendem a provocar um deslizamento relativo entre suas partes (HIBBELER, 2004).

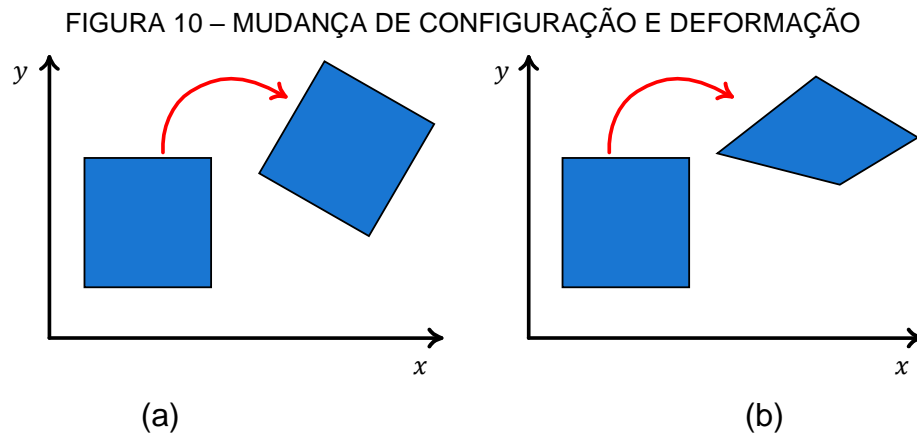
#### 2.1.5.3 Momento fletor ( $M_z$ ):

Consiste no momento que atua perpendicularmente ao eixo longitudinal  $x$ , gerado quando as forças externas tendem a provocar uma flexão, ou seja, um giro da seção transversal em torno do eixo perpendicular ao plano de flexão (SORIANO, 2013).

#### 2.1.6 Deformação e deslocamentos

Ao impor ações sobre um corpo, tende-se a gerar mudanças em sua configuração inicial (PROENÇA, 2018). Se essas mudanças implicam na variação da

posição relativa entre pontos adjacentes, tem-se uma deformação, do inglês *strain* (LACERDA, 2014; PROENÇA, 2018). Porém, quando essas mudanças não variam as posições relativas do corpo tem-se uma simples mudança de configuração, do inglês *deformation* (LACERDA, 2014). Tais conceitos podem ser exemplificados através da FIGURA 10.



FONTE: Adaptada de Lacerda (2014).

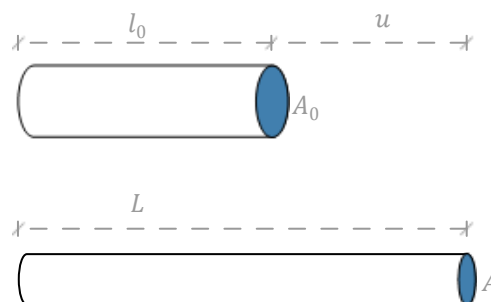
LEGENDA: a) mudança de configuração.

b) deformação.

### 2.1.7 Medidas de deformação unidimensional

A deformação consiste em uma medida adimensional caracterizada pelo deslocamento  $u$  sofrido por um elemento (LACERDA, 2014). No caso de deformações unidimensionais é representada por  $\varepsilon$ , denominada deformação longitudinal específica. A FIGURA 11 ilustra o caso onde uma barra é alongada.

FIGURA 11 – ALONGAMENTO DE UMA BARRA



FONTE: o Autor (2022).

Existem diferentes maneiras de medir essa deformação em elementos unidimensionais, como a partir da deformação de engenharia e deformação de Green.

### 2.1.8 Deformação de engenharia

Também conhecida como deformação de Cauchy ou deformação específica, consiste em uma das medidas mais simples utilizadas para medir deformação, a qual permanece válida mesmo quando o elemento sofre grandes rotações na direção de  $\varepsilon_E$  (LACERDA, 2014).

$$\varepsilon_E = \frac{u}{l_0} = \frac{L - l_0}{l_0} \quad (7)$$

onde:

$\varepsilon_E$ : deformação de engenharia;

$u$ : variação de comprimento;

$L, l_0$ : comprimento final e inicial, respectivamente.

### 2.1.9 Deformação de Green

Consiste em uma medida utilizada quando há grandes deslocamentos, mas com pequenas deformações, dada com base no quadrado do comprimento do elemento (LACERDA, 2014).

$$\varepsilon_G = \frac{L^2 - l_0^2}{2l_0^2} \quad (8)$$

onde:

$\varepsilon_G$ : deformação de Green.

## 2.2 ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR

Em geral, a não linearidade consiste no cálculo da resposta estrutural, seja dos esforços solicitantes internos, tensões ou deslocamentos, onde o comportamento

é não-linear, ou seja, não há proporcionalidade entre a resposta estrutural e a carga (KIMURA, 2007).

Segundo Kimura (2007, p. 461), os principais fatores determinantes do comportamento não-linear de uma estrutura quando submetida a ações externas são:

- a) A alteração das propriedades dos materiais que constituem a estrutura, denominada não linearidade física;
- b) A alteração da geometria original da estrutura, denominada não linearidade geométrica.

Em uma análise não-linear completa, considera-se tanto o comportamento não-linear dos materiais empregados (não linearidade física) como da variação da configuração geométrica dos elementos estruturais (não linearidade geométrica).

Nesta monografia concentram-se os estudos referentes à análise estrutural não-linear geométrica.

### 2.2.1 Não linearidade geométrica

A análise não-linear geométrica, de acordo com Proença (2018, p. 198-199), consiste nas “[...] análises resultantes de uma abordagem na qual o equilíbrio estático é descrito tomando-se a estrutura na posição deslocada, mas mantendo-se o material num regime de resposta linear elástica [...]”

O comportamento da estrutura sob efeito não-linear geométrico é influenciado por mudanças da geometria dos elementos estruturais à medida que a carga é aplicada sobre a estrutura, assim a superposição de efeitos perde a validade no campo (e.g. deslocamentos) não-linear de interesse (KIMURA, 2007; PROENÇA, 2018).

Segundo Lacerda (2014, p. 8), a não linearidade geométrica pode ser classificada em dois grupos, sendo estes:

- a) Estruturas com pequenas deformações, mas grandes deslocamentos ou rotações;
- b) Estruturas com grandes deformações.

## 2.2.2 Efeitos de Segunda Ordem

A análise de segunda ordem consiste em avaliar o equilíbrio estático da estrutura considerando a posição deformada, sendo os seus efeitos (i.e. deslocamentos e esforços solicitantes internos) denominados efeitos de segunda ordem. Entretanto, o equilíbrio de uma estrutura sempre ocorre na configuração deformada, mas na prática os efeitos de segunda ordem podem ser desprezíveis (KIMURA, 2007).

## 2.2.3 Estabilidade e Instabilidade

Segundo Féodosiev (1977, p. 450), a estabilidade é definida como “[...] a propriedade do sistema de manter o seu estado nas condições de aplicação de forças externas”. Logo, quando um sistema não possui esta propriedade este é dito como instável.

Um dos critérios básicos para avaliar a estabilidade e instabilidade estrutural é a condição de mínimo e máxima energia potencial de deformação, exemplificada através de uma esfera inicialmente em equilíbrio sob a ação da gravidade, a qual é perturbada da posição inicial, conforme FIGURA 12 (FÉODOSIEV, 1977; SORIANO, 2013).

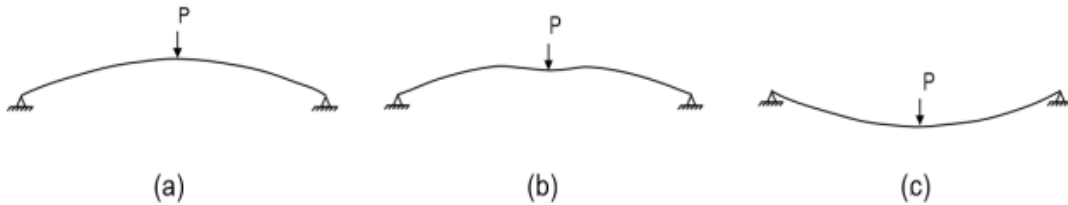
FIGURA 12 – EXEMPLIFICAÇÃO DO EQUILÍBRIO ESTRUTURAL



FONTE: Adaptada de Soriano (2013).

Um exemplo de perda de estabilidade estrutural pode ser encontrado quando se aplica uma carga em um arco abatido (raso), conforme FIGURA 13, em que o módulo da carga sobre o sistema é relevante (SOUZA, 2018).

FIGURA 13 – COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE UM ARCO RASO CARREGADO



FONTE: SOUZA (2018).

LEGENDA: a) arco estável sob pequena perturbação.  
 b) arco em comportamento elástico linear.  
 c) arco sob grande perturbação com perda de estabilidade.

Em muitos casos, quando um sistema perde a estabilidade, verifica-se uma transição da configuração inicial para um novo estado de equilíbrio, acompanhada de grandes deslocamentos, surgimento de deformações plásticas ou colapso estrutural (FÉODOSIEV, 1977).

#### 2.2.4 Caminho do Equilíbrio

Ao avaliar a estabilidade de um sistema estrutural, adota-se um conjunto de variáveis de controle (e.g. carregamento e deslocamentos), de modo a compreender o comportamento global e identificar as possíveis instabilidades estruturais (SOUZA, 2018). Para isso utilizam-se as chamadas *trajetórias* ou *caminhos de equilíbrio*, que relacionam a carga em relação ao deslocamento, onde cada ponto sobre a curva representa uma configuração de equilíbrio estático admissível (LACERDA, 2014; SOUZA, 2018).

FIGURA 14 – CAMINHO DE EQUILÍBRIO



FONTE: Adaptada de Lacerda (2014).

### 2.2.4.1 Tangente de Rigidez

A tangente de rigidez  $\zeta$  do caminho de equilíbrio expressa a razão entre a carga aplicada pelo deslocamento ou deflexão gerada, sendo que nos pontos onde está é negativa a estrutura apresenta instabilidade (LACERDA, 2014).

$$\zeta = \frac{\text{carga ou força}}{\text{deslocamento ou deflexão}} \quad (9)$$

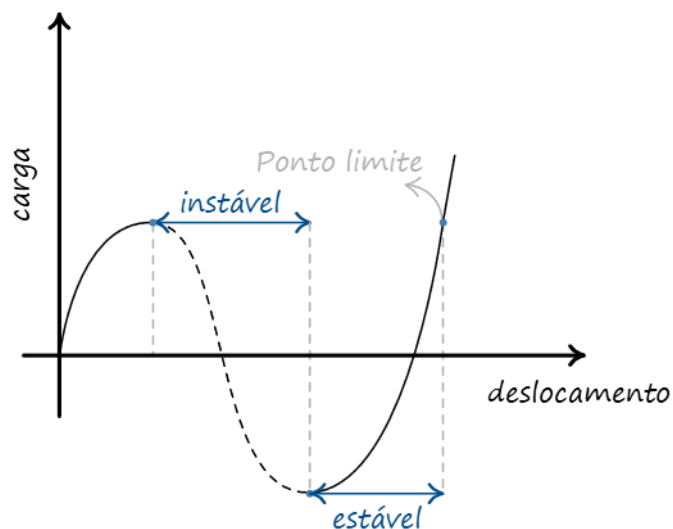
### 2.2.4.2 Ponto Limite

Segundo Lacerda (2014), os *pontos limites* consistem em pontos extremos do caminho de equilíbrio, onde ocorrem tangentes de rigidez horizontais, os quais separam as partes estáveis e instáveis da trajetória.

Estes podem ser divididos em dois grupos, sendo eles:

Os pontos limites podem ser de carga ou de deslocamento, correspondendo, respectivamente, a valores de máximos ou mínimos relativos (valores máximos ou mínimos locais) de carga e valores máximos ou mínimos relativos (valores máximos ou mínimos locais) de deslocamentos na trajetória de equilíbrio. (SOUZA, 2018, p. 22).

FIGURA 15 – PONTOS LIMITE NA TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO



FONTE: O Autor (2022).

### 2.2.4.3 Ponto de Bifurcação do Equilíbrio

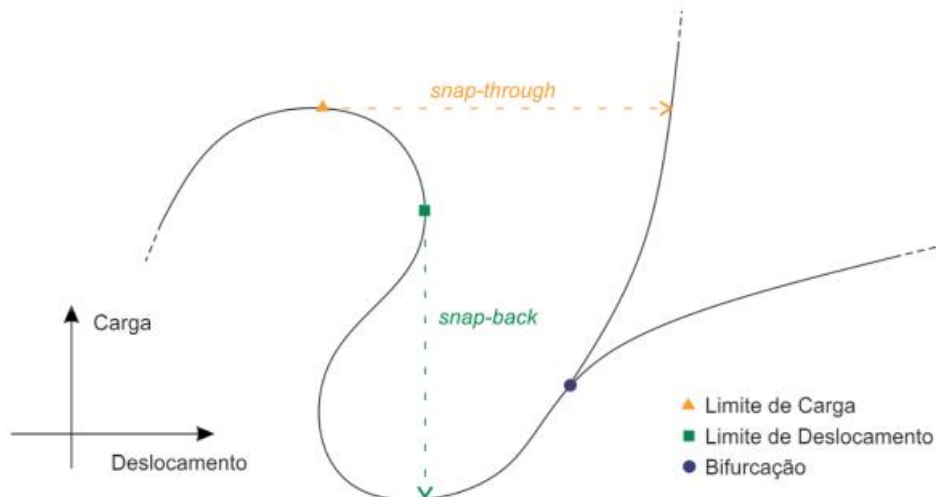
Segundo Lacerda (2014, p. 10), “[...] ponto no qual dois ou mais caminhos de equilíbrio se cruzam.”, indicando que existe mais de uma configuração de equilíbrio possível.

### 2.2.5 Snap-Through e Snap-Back

O fenômeno de *snap-through*, comum em estruturas treliçadas e arcos rasos, é associado a pontos limites de carga, onde ocorre um salto repentino entre dois pontos limites em função da perda de estabilidade da estrutura ao atingir uma carga crítica (LACERDA, 2014).

Já o *snap-back* é a forma amplificada do *snap-through*, associado a pontos limites de deslocamento, onde o caminho de equilíbrio pode se inverter. Neste caso, a rigidez do sistema se torna elevada para certo deslocamento, gerando uma variação instantânea na carga aplicada (SOUZA, 2018).

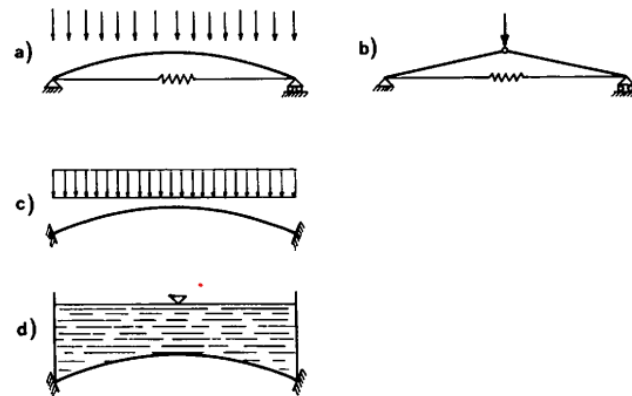
FIGURA 16 – EXEMPLO DE TRAJETÓRIA DE EQUILÍBRIO COM IDENTIFICAÇÃO DE SEUS PONTOS CRÍTICOS



FONTE: Souza (2018).

Alguns exemplos de estruturas sujeitas ao *snap-through* são ilustrados conforme FIGURA 17.

FIGURA 17 – EXEMPLOS DE ESTRUTURAS SUJEITAS AO SNAP-THROUGH



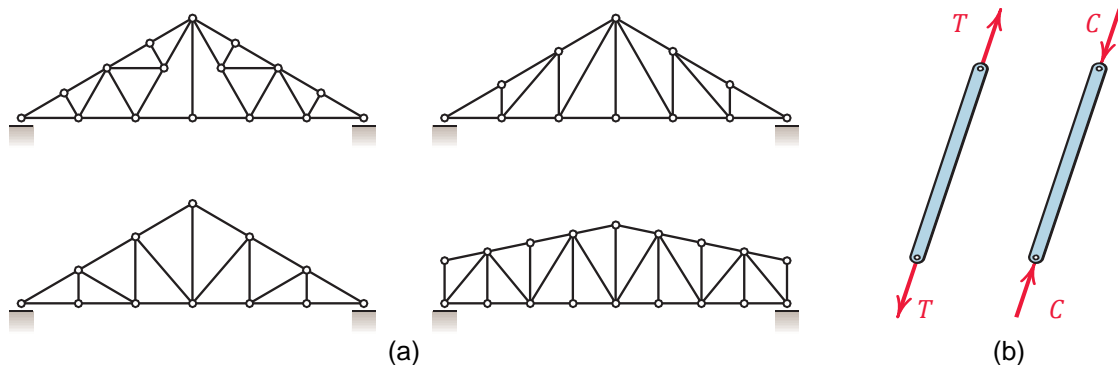
FONTE: Bazant e Cedolin (2010).

### 2.3 TRELIÇAS E MODOS DE FALHAS EM ESTRUTURAS RETICULADAS SUJEITAS A CARGAS AXIAIS

Diversos sistemas estruturais são compostos por treliças com ampla utilização em aplicações de engenharia como em torres de transmissão, plataformas *offshore* e pontes (FELIPE, 2019).

As treliças consistem em um arranjo estável de elementos retilíneos, denominados barras. Quando essas barras possuem as extremidades vinculadas por pinos sem atritos e solicitada por cargas apenas sob os nós, a treliça é classificada como ideal, funcionando somente na transmissão de forças axiais (BEER; JOHNSTON JR, 1991; LACERDA, 2014).

FIGURA 18 – EXEMPLO DE ESTRUTURAS TRELIÇADAS



FONTE: Meriam e Kraige (2011).

LEGENDA: a) exemplos de treliças.

b) barras de treliça sujeitas a tração e compressão.

Como esse tipo de estrutura é solicitada a forças normais de tração e compressão, é importante conhecer seus modos de falha referentes a cargas axiais.

### 2.3.1 Falha por tração pura

A tensão desenvolvida na seção transversal de um elemento reticulado, considerando o princípio de Saint-Venant, é constante e expresso por (HIBBELER, 2004):

$$\sigma_t = \frac{N}{A} \quad (10)$$

onde:

- $\sigma_t$ : tensão normal;
- $N$ : esforço normal;
- $A$ : área.

Esse princípio afirma que os efeitos de forças concentradas ou de vínculos externos sobre uma barra provoca somente perturbações locais, apresentando distribuição uniforme sobre a seção transversal (PROENÇA, 2018).

De acordo com Beer et al. (2011), uma estrutura submetida a esforços normais pode sofrer uma ruptura quando sua resistência chega a um valor limite denominado limite de resistência à tração do material, expresso por:

$$\sigma_{t,lim} = \frac{P_{lim}}{A} \quad (11)$$

onde:

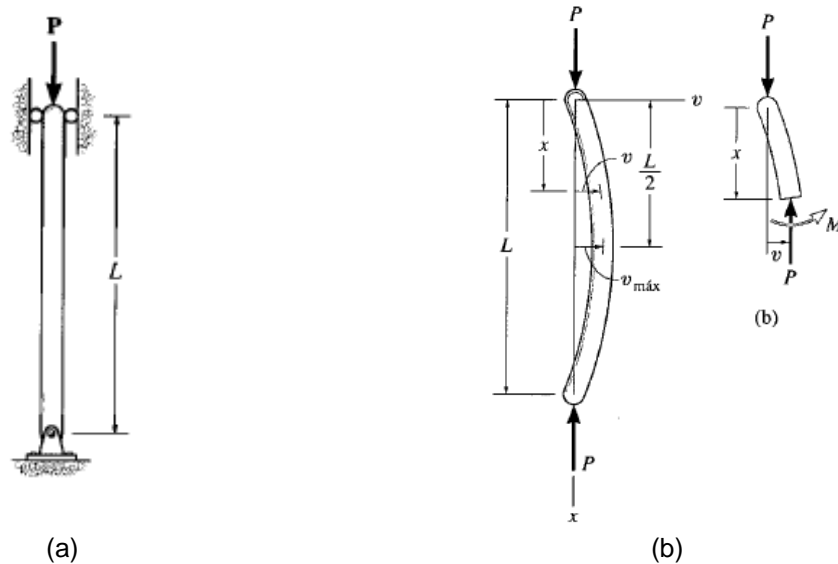
- $\sigma_{t,lim}$ : limite de resistência à tração;
- $P_{lim}$ : carga limite.

### 2.3.2 Falha por flambagem

O fenômeno de flambagem, ou flambagem de Euler, consiste em uma falha súbita da estrutura diante a deformação lateral excessiva ocasionada pelo aumento

gradativo de forças compressivas, comum em estruturas esbeltas (BEER et al., 2011; HIBBELER, 2004).

FIGURA 19 – BARRA SUJEITA A FLAMBAGEM



FONTE: Hibbeler (2004).

Embora seja um efeito não linear, esse tipo de falha é avaliado a partir de uma carga crítica, a qual estabelece uma condição limite da mudança da configuração equilíbrio inicial da estrutura com eixo reto para uma nova condição de estabilidade com um eixo deformado (PROENÇA, 2018).

A determinação da carga crítica consiste em um problema de determinação da linha elástica da estrutura, considerando seu equilíbrio na posição deslocada. Para um elemento bi-apoiado sob carga centrada, conforme ilustra a FIGURA 19, a carga crítica dada por (HIBBELER, 2004):

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{min}}{L^2} \quad (12)$$

onde:

$P_{cr}$ : carga crítica

$E$ : módulo de elasticidade;

$I_{min}$ : menor momento de inércia da seção transversal;

$L$ : Comprimento do elemento.

É importante notar que a inércia utilizada para a avaliação da carga crítica sempre é a menor presente na seção, tendo em vista que deseja-se obter o menor valor de carga crítica. Considerando uma barra circular de raio  $r$ , o momento de inércia da seção transversal é expresso por (BEER et al., 2011):

$$I = \frac{\pi r^4}{4} \quad (13)$$

### 2.3.3 Falha por snap-through

Como mencionado anteriormente, o fenômeno de *snap-through* consiste em um problema não-linear geométrico, cuja falha é dada pela perda de estabilidade diante da ação de forças de compressão, seguida de um salto repentino entre dois pontos limites da trajetória de equilíbrio da estrutura (LACERDA, 2014).

De acordo com Lacerda (2014 apud BATHE, 2006), em problemas não lineares geométricos busca-se a obtenção da configuração de equilíbrio da estrutura a partir da posição deslocada, a qual é obtida quando a força residual  $g$  é nula.

$$g(u) = q(u) - f(u) = 0 \quad (14)$$

onde:

$q$ : vetor de forças internas;

$f$ : vetor de forças externas;

$g$ : força residual ou força de equilíbrio.

## 2.4 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR

### 2.4.1 Método de Newton-Raphson

Nas ciências e engenharia existem muitos problemas em que é necessário determinar a(s) raiz(es)  $\xi$  reais de uma função  $g(u)$ , ou seja,  $u = \xi / g(\xi) = 0$ . Contudo, em diversas situações, as expressões disponíveis podem ser complexas, expressando o parâmetro  $u$  implicitamente, como no caso de muitas equações transcendentais (BARROSO et al., 1987; CHAPRA, 2013).

Sendo assim, o método de Newton-Raphson consiste em um esquema de cálculo utilizado para a obtenção da solução aproximada de equações na forma  $g(u) = 0$ , onde  $g(u)$  é contínua e diferenciável (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008). O método é ilustrado conforme FIGURA 20.

Sua formulação baseia-se em métodos abertos, os quais não exigem um intervalo para a obtenção da raiz  $\xi$  da equação, mas sim de um valor inicial  $u_0$  ou dois valores que não necessariamente delimitam a raiz (CHAPRA, 2013). Sendo assim, de acordo com Ruggiero e Lopes (1996), escolhido um  $u_0$ , a sequência  $\{u_n\}$ , ou fórmula iterativa, é determinada pela equação (15).

$$u_{i+1} = u_i - \frac{g(u_i)}{g'(u_i)} \quad (15)$$

onde:

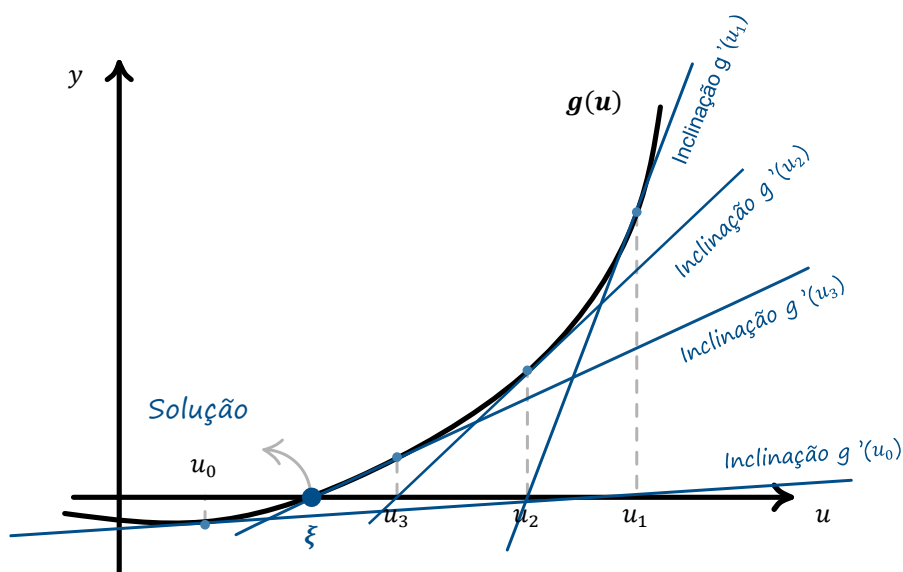
$u_{i+1}$ : aproximação da raiz;

$u_i$ : abscissa atual;

$g(u_i)$ : função  $g(u)$  aplicada na abscissa  $u_i$ ;

$g'(u_i)$ : derivada da função  $g(u)$  aplicada na abscissa  $u_i$ .

FIGURA 20 – MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON



FONTE: O Autor (2022).

Na análise não linear geométrica comumente reescreve-se a equação (15) na forma:

$$\Delta u_i = -K_t^{-1}g(u_i), \quad K_t = \frac{dg(u_i)}{du} \quad (16)$$

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_i \quad (17)$$

onde:

$K_t$ : tangente de rigidez;

Segundo Lacerda (2014), na mecânica computacional a derivada de  $g(u)$  é denominada tangente de rigidez  $K_t$ , a qual não é igual à tangente de rigidez da trajetória de equilíbrio descrita no item 2.2.4.1. Esta distinção é importante, pois a tangente de rigidez  $\zeta$  está relacionada com a estabilidade da estrutura, enquanto a tangente de rigidez  $K_t$  pode não apresentar relação com o estado de equilíbrio da estrutura até o método de Newton-Raphson convergir (LACERDA, 2014).

#### 2.4.1.1 Critério de parada

Embora a solução numérica seja aproximada, esses valores podem ser obtidos com precisão suficiente para o problema, a não ser por limitações computacionais, desde que estabelecidos critérios, de modo a verificar a convergência da solução e a precisão requerida (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008; RUGGIERO; LOPES, 1996).

Um dos critérios utilizados é a determinação do erro relativo estimado, conforme equação (18), onde a cada nova iteração obtém-se uma solução cada vez mais próxima da tolerância fixada (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008).

$$E_{re} = \left| \frac{u_{NS}^{(i+1)} - u_{NS}^{(i)}}{u_{NS}^{(i)}} \right| \leq tol \quad (18)$$

onde:

$E_{re}$ : erro relativo estimado da solução;

$u_{NS}$ : solução numérica aproximada;

$u_{NS}^{(i)}$ : solução numérica estimada na penúltima iteração;

$u_{NS}^{(i+1)}$ : solução numérica estimada na última iteração;

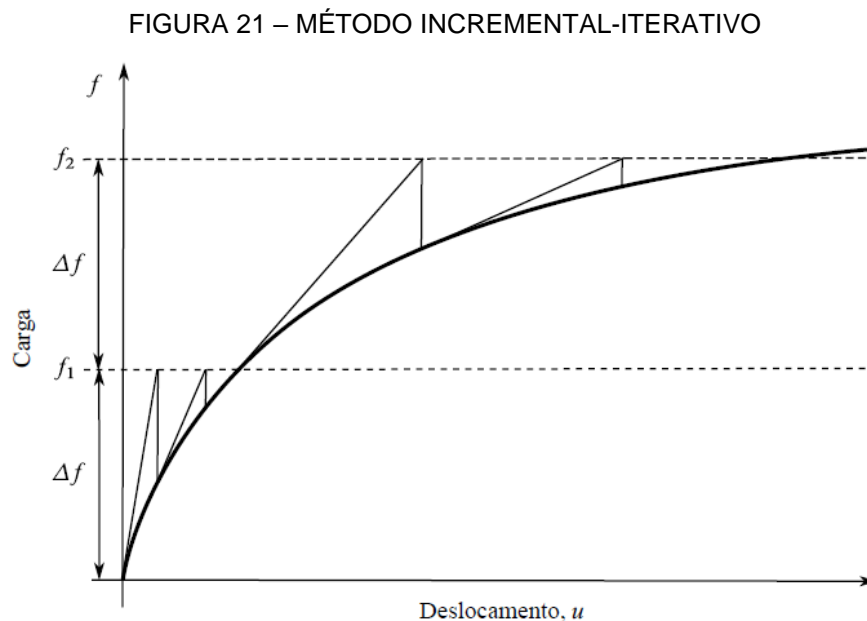
$tol$ : tolerância do erro relativo estimado;

Outro critério possível consiste em avaliar o valor absoluto de  $g(u_i)$  em relação a um valor de tolerância pré-especificado (LACERDA, 2014).

$$|g(u_i)| \leq tol \quad (19)$$

#### 2.4.2 Newton-Raphson com análise incremental-iterativa

Na análise não-linear geométrica é conveniente incrementar o valor da carga  $f$  lentamente para obter-se uma melhor convergência. Nesta abordagem combinam-se as iterações de Newton-Raphson com ciclos de incrementos de carga, obtendo-se para cada nível de carga uma solução (LACERDA, 2014). A FIGURA 21 ilustra graficamente o procedimento do método.



FONTE: Lacerda (2014).

Um algoritmo geral do método é proposto por Lacerda (2014), conforme ilustrado a seguir.

FIGURA 22 – PROCEDIMENTO DO MÉTODO INCREMENTAL-ITERATIVO

```

f =  $\Delta f$ , u = 0;
for n = 1 to  $n_{max}$  do
  | g =  $q(\mathbf{u}) - \mathbf{f}$ ;
  | for i = 1 to  $i_{max}$  do
  | |  $\mathbf{K}_t = \frac{\partial q(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}$ ;
  | |  $\Delta \mathbf{u} = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}$ ;
  | | u = u +  $\Delta \mathbf{u}$ ;
  | | g =  $q(\mathbf{u}) - \mathbf{f}$ ;
  | | if  $\|\mathbf{g}\| \leq tol \cdot \|\Delta \mathbf{f}\|$  then break;
  | end
  | output u, f;
  | f = f +  $\Delta \mathbf{f}$ 
end

```

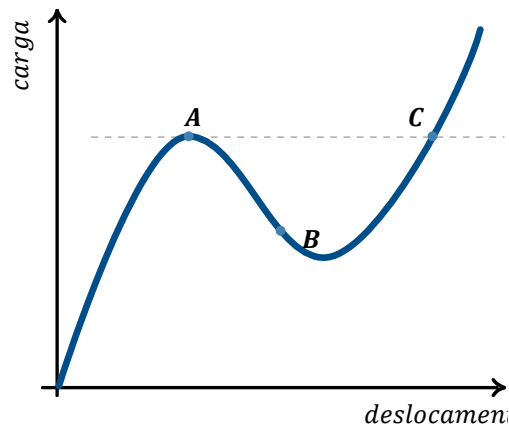
FONTE: Lacerda (2014).

### 2.4.3 Controle de carga

O algoritmo descrito no item 2.4.2 utiliza incrementos de carga para determinação da trajetória de equilíbrio, sendo essa uma abordagem denominada controle de carga. Alternativamente, existe uma abordagem que utiliza deslocamentos incrementais, sendo essa denominada controle de deslocamentos.

O controle de carga apresenta algumas limitações no traçado do caminho de equilíbrio. Devido a singularidade na matriz de rigidez tangente, quando a carga alcança um valor limite (tangente horizontal) ocorre um salto de um ponto limite para o outro. Sendo assim, o traçado do caminho de equilíbrio entre os pontos limites sofre uma descontinuidade (LACERDA, 2014). Por exemplo, na FIGURA 23, com o controle de carga o traçado do caminho de equilíbrio salta do ponto *A* para o ponto *C* ignorando os pontos intermediários nesse intervalo.

FIGURA 23 – LIMITAÇÃO NO CONTROLE DE CARGA



FONTE: Lacerda (2014).

## 2.5 ELEMENTOS DA PROBABILIDADE

### 2.5.1 Experimento aleatório, ponto amostral e espaço amostral

Um experimento aleatório consiste em qualquer atividade ou processo que, mesmo repetido sucessivamente sob as mesmas condições, fornece diferentes resultados (DEVORE, 2018; MONTGOMERY; RUNGER, 2021). Alguns exemplos familiares são: (a) lançamento de uma moeda; (b) lançamento de um dado.

Os resultados possíveis fornecidos no experimento aleatório são denominados pontos amostrais<sup>5</sup> e a coleção de todos esses elementos é denominada espaço amostral, representado pelo símbolo  $\Omega$  (WALPOLE; MYERS; MYERS, 2009).

$$\Omega = \{\omega_i\} = \{\omega_1; \omega_2; \omega_3; \dots; \omega_i; \dots\}, \quad i = 1, \dots, m \quad (20)$$

onde:

$\Omega$ : espaço amostral;

$\omega_i$ : i-ésimo ponto amostral;

$m$ : número de pontos amostrais.

Por exemplo, no experimento de lançar duas moedas, onde C é coroa e K é cara, o espaço amostral é definido por pares de pontos amostrais:

---

<sup>5</sup> Também denominados elementos do espaço amostral (GUPTA; GUTTMAN, 2017).

$$\Omega = \{(C, C); (C, K); (K, C); (K, K)\}$$

O espaço amostral pode ser discreto, quando o conjunto é formado por uma quantidade numerável, finita ou infinita, de resultados ou contínuo quando contém um intervalo de números reais (MONTGOMERY; RUNGER, 2021).

### 2.5.2 Evento

Em muitos casos, em um experimento aleatório, deseja-se analisar uma coleção de resultados do espaço amostral (MONTGOMERY; RUNGER, 2021). Para isso, considera-se um subconjunto desse espaço amostral denominado evento, muitas vezes representado por uma letra em maiúsculo (COSTA NETO; CYMBALISTA, 2006).

$$A = \{\omega_i\}, \quad i = 1, \dots, m \quad (21)$$

onde:

$A$ : evento;

$m$ : número de pontos amostrais.

Por exemplo, considere o lançamento de três moedas, em que se deseja a ocorrência de ao menos uma vez coroa, onde  $C$  é coroa e  $K$  é cara. Então, o subespaço associado, *i.e.*, o evento é dado por:

$$A = \{(C, K, K); (K, C, K); (K, K, C); (C, C, K); (C, K, C); (K, C, C); (C, C, C)\}$$

Segundo Devore (2018, p. 48), um evento pode ser simples ou composto. No evento simples, existe apenas um resultado possível, enquanto o evento composto apresenta mais de um possível resultado.

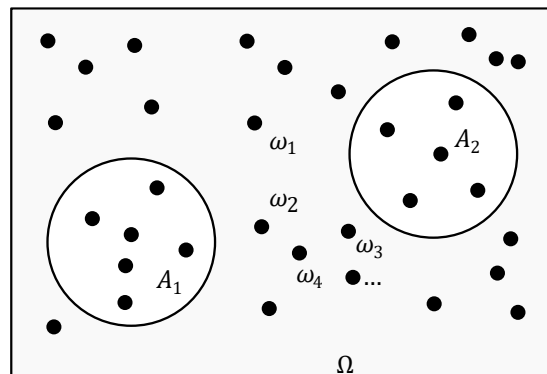
#### 2.5.2.1 Eventos especiais

- a) Evento elementar: consiste em um conjunto formado por um único ponto amostral (BECK, 2019);

- b) Evento impossível: também conhecido como evento nulo, consiste no conjunto vazio, onde nenhum resultado possível satisfaz a regra que caracteriza o evento (ANG; TANG, 2007, tradução nossa);
- c) Evento certo: consiste no conjunto que contém todos os possíveis resultados do espaço amostral, ou seja, o próprio espaço amostral (ANG; TANG, 2007, tradução nossa);
- d) Evento complementar: seja o evento  $A$  pertencente ao espaço amostral  $\Omega$ , seu complemento, denotado por  $\bar{A}$ , consiste em todos os pontos do espaço amostral exceto os pertencentes a  $A$  (ANG; TANG, 2007, tradução nossa).

Conforme FIGURA 24, através do diagrama de Venn<sup>6</sup> podem-se representar esquematicamente os conceitos de espaço amostral, pontos amostrais, eventos e eventos especiais.

FIGURA 24 – DIAGRAMA DE VENN



FONTE: O Autor (2022).

LEGENDA:  $\Omega$ : espaço amostral;  $\{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ : pontos amostrais;  $(A_1, A_2)$ : eventos;

### 2.5.2.2 Eventos mutuamente excludentes ou disjuntos

Dois eventos  $A$  e  $B$  quaisquer são mutuamente excludentes ou disjuntos se não ocorrem simultaneamente durante uma mesma realização de um experimento aleatório (COSTA NETO; CYMBALISTA, 2006).

Essa condição é expressa analiticamente conforme a seguir:

<sup>6</sup> Consiste em uma representação esquemática dos conjuntos (IEZZI; MURAKAMI, 2013).

$$A \cap B = \emptyset \quad (22)$$

### 2.5.2.3 Eventos exaustivos ou partição do espaço amostral

Quando a união de vários eventos disjuntos forma o próprio espaço amostral, tem-se o que é denominado partição do espaço amostral ou eventos exaustivos (COSTA NETO; CYMBALISTA, 2006).

$$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j \quad (23)$$

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega \quad (24)$$

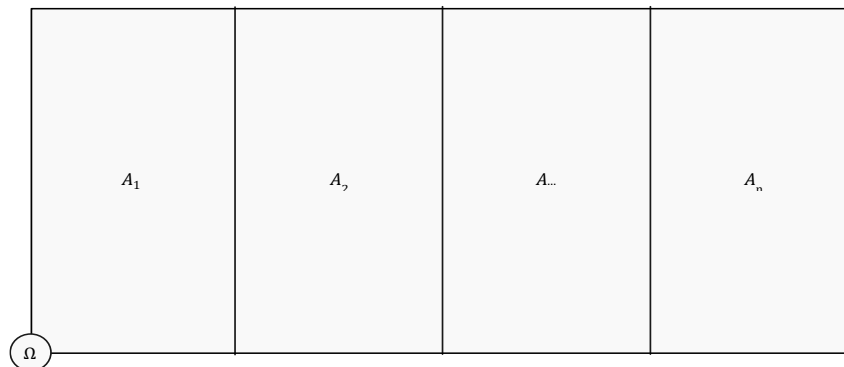
onde:

$A_i, A_j$ :  $i$ -ésimo e  $j$ -ésimo evento;

$n$ : número de eventos.

A FIGURA 25 ilustra esquematicamente através do diagrama de Venn a situação de uma partição de um espaço amostral.

FIGURA 25 – PARTIÇÃO DE UM ESPAÇO AMOSTRAL



FONTE: O Autor (2022).

### 2.5.3 Conceito de probabilidade

A teoria da probabilidade consiste na área de estudo da matemática que lida com a aleatoriedade e a incerteza, proporcionando métodos para qualificar a possibilidade de ocorrência associada aos possíveis resultados (DEVORE, 2018). A

essa possibilidade de ocorrência, maior ou menor, denomina-se probabilidade, denotada por  $P$  (COSTA NETO; CYMBALISTA, 2006).

Historicamente, a probabilidade foi definida de diferentes formas, com origem em questões relacionadas a jogos de azar (COSTA NETO; CYMBALISTA, 2006; DEVORE, 2018).

### 2.5.3.1 Definição axiomática

De acordo com Costa Neto e Cymbalista (2006), a teoria da probabilidade moderna utiliza a definição axiomática proposta pelo russo Kolmogorov (1903-1987), onde a probabilidade de um evento está sujeita a três axiomas, sendo estes:

$$P(A) \geq 0 \quad (25)$$

$$P(\Omega) = 1 \quad (26)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B), \quad A \cap B = \emptyset \quad (27)$$

onde:

$A, B$ : eventos;

$P(\ )$ : probabilidade associada a um evento.

### 2.5.3.2 Definição clássica

Na definição clássica, a probabilidade é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis ao evento  $A$  e o total de casos possíveis, desde que todos sejam igualmente prováveis (BECK, 2019).

$$P(A) = \frac{N_A}{N_\Omega} \quad (28)$$

onde:

$N_A$ : número de casos favoráveis ao evento  $A$ ;

$N_\Omega$ : número total de casos possíveis.

Nesse caso, de acordo com Beck (2019, p. 148), “a probabilidade  $P(A)$  é encontrada *a priori*, antes da primeira realização do experimento”.

### 2.5.3.3 Definição frequentista

Segundo Beck (2019), a probabilidade pode ser dada a partir do valor limite da frequência relativa, quando o número de realizações do experimento tende ao infinito.

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad (29)$$

onde:

$n_A$ : número de ocorrência de um evento  $A$ ;

$n$ : número de eventos possíveis.

Nesta abordagem, a probabilidade  $P(A)$  é obtida *a posteriori*, em que conforme se aumenta o número de realizações do experimento aleatório, espera-se que a probabilidade convirja para um valor exato (KROETZ, 2015).

### 2.5.3.4 Definição subjetiva ou bayesiana

Nesse tipo de abordagem a determinação da probabilidade é realizada a partir de uma probabilidade pré-definida (*a priori*), atualizada por uma probabilidade posterior (*a posteriori*), a partir de dados observáveis (BECK, 2019). Esta análise combina informações dos dados amostrais e informações subjetivas (MONTGOMERY; RUNGER, 2021).

## 2.5.4 Regras da probabilidade

### 2.5.4.1 Regra do complementar

Para uma coleção  $m$  de eventos  $A_1, A_2, \dots, A_m$ , pertencente a um espaço amostral  $\Omega$ , a probabilidade da união dos seus eventos complementares é dada por (GUPTA; GUTTMAN, 2017):

$$P\left(\bigcup_{i=1}^m \bar{A}_i\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) \quad (30)$$

onde:

$A, \bar{A}$ : evento e complemento do evento;

$m$ : número da coleção de eventos disjuntos.

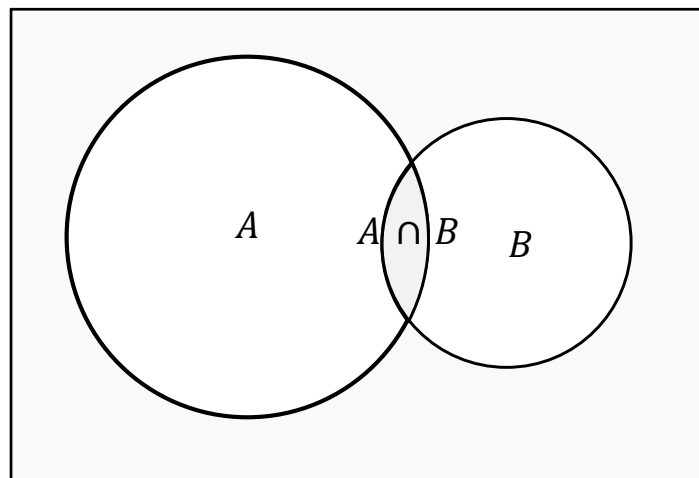
#### 2.5.4.2 Regra da adição

Para dois eventos  $A$  e  $B$  quaisquer, a probabilidade da união é dada por (DEVORE, 2018):

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (31)$$

Esta expressão pode ser representada graficamente pelo diagrama de Venn, conforme FIGURA 26.

FIGURA 26 – REGRA DA ADIÇÃO



FONTE: O Autor (2022).

#### 2.5.4.3 Regra do produto

A probabilidade do evento intersecção, também conhecido como regra do produto, para dois eventos  $A$  e  $B$  quaisquer é obtida por (COSTA NETO; CYMBALISTA, 2006):

$$P(A \cap B) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A) \quad (32)$$

onde:

$P(A|B)$ : probabilidade condicional de  $A$  dado evento  $B$ ;

$P(B|A)$ : probabilidade condicional de  $B$  dado evento  $A$ .

## 2.6 VARIÁVEIS ALEATÓRIAS

Uma variável aleatória consiste em uma representação matemática de um evento de forma analítica (ANG; TANG, 2007, tradução nossa). Esta variável, denotada por  $X$ , consiste em uma função real que em um experimento aleatório atribui para cada ponto amostral um número real  $x$  (WALPOLE; MYERS; MYERS, 2009).

$$X: \begin{array}{l} \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \omega \rightarrow X(\omega) \end{array} \quad (33)$$

onde:

$X, x$ : variável aleatória e valor da variável aleatória.

Uma definição mais precisa, segundo Beck (2019, p.150), diz que “uma variável aleatória real  $X(\omega)$  é uma função real que atribui a cada ponto amostral  $\omega$  de um espaço amostral  $\Omega$  um valor real  $x$ , tal que o conjunto  $\{X \leq x\}$  é um evento para qualquer número real  $x$ .”

Diferentemente de uma variável determinística, a qual é possível assumir um valor exato, o valor de uma variável aleatória não pode ser previsto, mas sim estimado dentro de um intervalo de valores possíveis (ANG; TANG, 2007, tradução nossa). Logo, sua descrição é feita através de uma função de densidade de probabilidade  $f_X(x)$ , uma função de distribuição acumulada de probabilidade  $F_X(x)$  ou por seus parâmetros estatísticos característicos (BECK, 1999).

As variáveis aleatórias mais frequentes dividem-se em discretas e contínuas, sendo a primeira classe formada por um conjunto finito ou enumerável de valores, enquanto a segunda classe é formada por um intervalo contínuo de valores (BUSSAB; MORETTIN, 2010). Usualmente utiliza-se  $X$  em maiúsculo para representar a VA propriamente dita e  $x$  em minúsculo para representar um valor que esta assume.

Há também variáveis aleatórias mistas, sendo em parte discretas e em parte contínuas (CAMPOS; RÊGO; MENDONÇA, 2017).

### 2.6.1 Função densidade de probabilidade

Para variáveis aleatórias contínuas, a distribuição de probabilidade é definida por uma função, chamada de função densidade de probabilidade, designada pela letra minúscula  $f_X(x)$  (COSTA NETO; CYMBALISTA, 2006). Esta função segue as seguintes propriedades:

$$f_X(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (34)$$

$$\int_a^b f_X(x) dx = P(a < X \leq b), \quad b > a \quad (35)$$

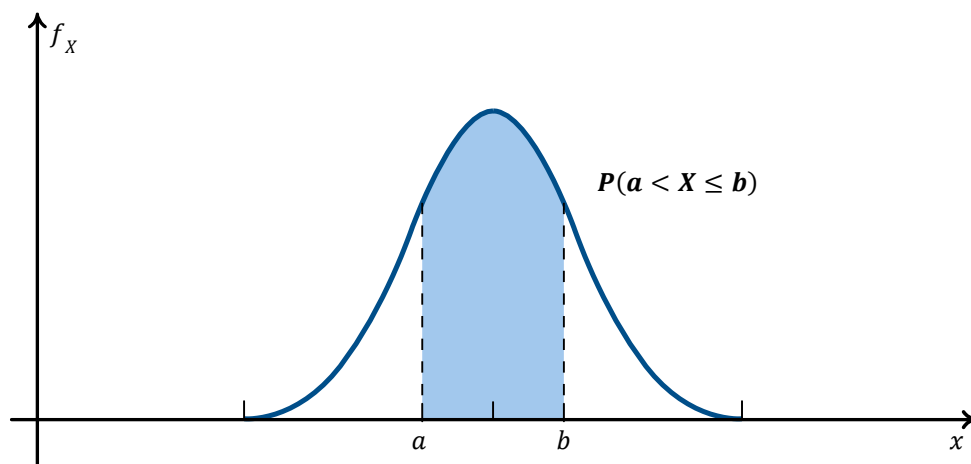
$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1 \quad (36)$$

onde:

$f_X(x)$ : função de densidade de probabilidade.

Conforme a FIGURA 27, a área sob a curva  $f_X(x)$  representa um valor de probabilidade. No caso da equação (36) esta indica a área total, enquanto a equação (35) indica a área entre o intervalo  $[a; b]$  (GUPTA; GUTTMAN, 2017).

FIGURA 27 – FUNÇÃO DENSIDADE DE PROBABILIDADE



FONTE: O Autor (2022).

A probabilidade de uma variável aleatória contínua  $X$  assumir qualquer valor particular  $x$  é zero, isto pois a área sob a curva  $f_X(x)$  para  $a = b$  é nula. A partir desse

fato conclui-se que os pontos do extremo do intervalo podem ou não ser incluídos no cálculo da probabilidade, assim (GUPTA; GUTTMAN, 2017):

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) \quad (37)$$

### 2.6.2 Função de distribuição acumulada de probabilidade

De maneira alternativa, pode-se definir a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória através de sua função de distribuição acumulada de probabilidade, designada pela letra maiúscula  $F_X(x)$  (COSTA NETO; CYMBALISTA, 2006). No caso de uma variável aleatória contínua esta função é dada por:

$$F_X(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < \infty \quad (38)$$

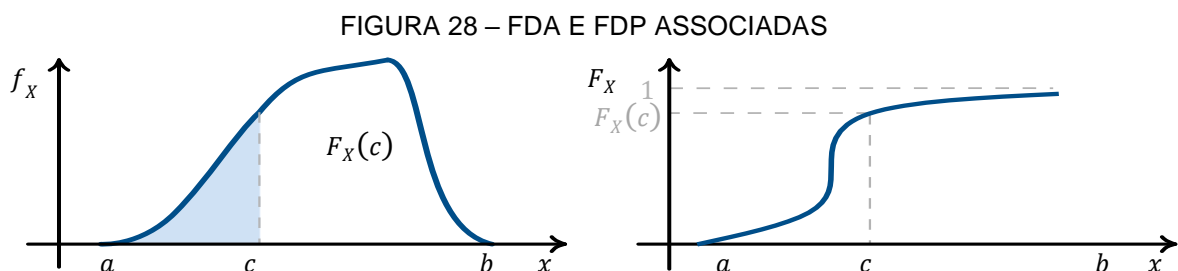
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (39)$$

onde:

$F_X(x)$ : função de distribuição acumulada de probabilidades.

Segundo Costa Neto e Cymbalista (2006, p. 56-55), a função de distribuição acumulada  $F_X(x)$  satisfaz as seguintes propriedades:

- $0 \leq F_X(x) \leq 1$
- $F_X(-\infty) = 0$  e  $F_X(\infty) = 1$ ;
- $F_X(x)$  é monotonicamente crescente;
- $F_X(c)$  é contínua à direita.



FONTE: o Autor (2022).

Esta função fornece, para qualquer ponto  $x$  considerado, a probabilidade que a variável aleatória assuma um valor menor ou igual ao valor correspondente nesse ponto, representada geometricamente pela área sob a curva da FDP à esquerda de  $x$ , conforme FIGURA 28 (COSTA NETO; CYMBALISTA, 2006; DEVORE, 2018).

Sendo  $X$  uma variável aleatória contínua com função de repartição conhecida, como consequência direta da equação (39) e do teorema fundamental do cálculo, tem-se (WALPOLE; MYERS; MYERS, 2009):

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = F_X(b) - F_X(a), \quad b > a \quad (40)$$

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} [F_X(x)] \quad (41)$$

### 2.6.3 Parâmetros característicos de uma variável aleatória

A caracterização de uma variável aleatória é realizada a partir do formato de sua função de distribuição e de seus parâmetros característicos (ANG; TANG, 2007, tradução nossa). Esses parâmetros indicam onde os dados se concentram e como variam em relação ao seu centro (COSTA NETO; CYMBALISTA, 2006).

Os parâmetros de posição são o valor esperado, mediana e moda, enquanto os parâmetros de dispersão são a variância, desvio padrão e o coeficiente de variação.

#### 2.6.3.1 Valor esperado ou média

O valor esperado ou esperança matemática de uma variável aleatória contínua  $X$  é dado por (WALPOLE; MYERS; MYERS, 2009):

$$E(x) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \quad (42)$$

onde:

$E(x)$ : operador matemático do valor esperado;

$\mu$ : média da variável aleatória  $X$ .

Esse parâmetro no geral é utilizado para caracterizar o centro da distribuição de probabilidade (COSTA NETO; CYMBALISTA, 2006).

Considerando uma função  $g(X)$  qualquer em função de  $X$ , a partir da equação (42) a esperança matemática é dada por (DEVORE, 2018):

$$E(g(x)) = \mu_{g(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (43)$$

#### 2.6.3.2 Mediana

Também conhecida como 50º percentil, consiste no ponto  $x_{md}$  que satisfaz  $P(X \leq x_{md}) = F_X(x_{md}) = 0,5$ , dividindo a distribuição em duas partes equiprováveis (DEVORE, 2018).

#### 2.6.3.3 Valor mais provável ou moda

Compreende-se como o valor mais provável de uma distribuição de probabilidades, sendo esse o ponto onde a função densidade de probabilidade  $f_X(x)$  assume o valor máximo (BECK, 2019).

#### 2.6.3.4 Variância

A variância de uma variável aleatória contínua  $X$  é definida como:

$$\sigma^2 = Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f_X(x) dx = E[(X - \mu)^2] \quad (44)$$

onde:

$\sigma^2, Var(x)$ : variância de uma variável aleatória.

Uma forma alternativa é dada por (WALPOLE; MYERS; MYERS, 2009):

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - \mu^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx - \mu^2 \quad (45)$$

### 2.6.3.5 Desvio padrão

O desvio padrão é dada como a raiz quadrada da variância, denotada por  $\sigma$ :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} \quad (46)$$

onde:

$\sigma$ : desvio padrão.

Diferentemente da variância, o desvio-padrão apresenta mesma unidade da variável aleatória, além de ser mais representativa para comparações de dispersões (COSTA NETO; CYMBALISTA, 2006).

### 2.6.3.6 Coeficiente de variação

Consiste em uma forma adimensional de medir a dispersão dos dados, definido como o quociente entre o desvio-padrão e a média (COSTA NETO; CYMBALISTA, 2006).

$$CV = \frac{\sigma}{\mu} \quad (47)$$

onde:

$CV$ : coeficiente de variação.

### 2.6.4 Medidas representativas de uma amostra

Considerando uma amostra com  $n$  observações de uma variável aleatória  $X$  com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ , a média e variância amostrais podem ser determinadas respectivamente por (BECK, 2019):

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_m}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (48)$$

$$\bar{v} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_m - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (49)$$

onde:

$\bar{x}$ : média amostral;

$\bar{v}$ : variância amostral;

$n$ : número de observações.

Estas medidas de  $\bar{x}$  e  $\bar{v}$  consistem em estimadores não tendenciosos de  $\mu$  e  $\sigma^2$ , sendo necessária uma correção no caso da variância, dada por (BECK, 2019):

$$\bar{v} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (50)$$

### 2.6.5 Modelos de distribuição de probabilidades para variáveis aleatórias contínuas

Em problemas descritos por variáveis aleatórias, a análise estatística visa estimar certos parâmetros, como média e variância, de um modelo teórico não determinístico (WALPOLE; MYERS; MYERS, 2009). Com as suposições apropriadas, mesmo sem a observação direta do fenômeno aleatório, esse modelo, dito probabilístico, pode ser capaz de reproduzir de maneira aceitável a distribuição de frequências do fenômeno quando analisado diretamente (BUSSAB; MORETTIN, 2010).

A seguir apresentam-se alguns dos principais modelos probabilísticos para variáveis aleatórias contínuas, empregados na engenharia, os quais serão utilizados ao decorrer do trabalho.

#### 2.6.5.1 Distribuição uniforme $U(a, b)$

Para uma variável aleatória contínua  $X$  que segue uma distribuição uniforme em um intervalo  $[a; b]$ , sua FDP e FDA são dadas respectivamente por (BUSSAB; MORETTIN, 2010):

$$f_X(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (51)$$

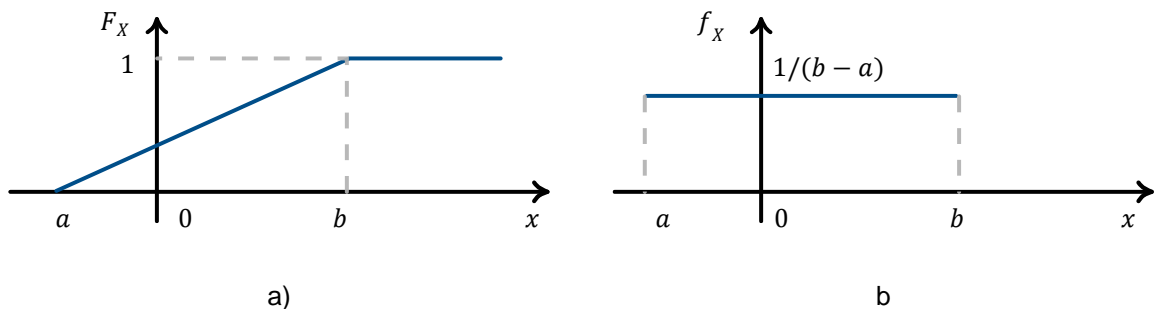
$$F_X(x; a, b) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x - a}{b - a}, & a \leq x < b \\ 1, & x \geq b \end{cases} \quad (52)$$

onde:

$a, b$ : abscissas extremas do intervalo.

Essa distribuição, denotada por  $X \sim U(a, b)$ , conforme FIGURA 29 apresenta um formato retangular, considerada uma das mais simples para variáveis aleatórias contínuas (GUPTA; GUTTMAN, 2017).

FIGURA 29 – DISTRIBUIÇÃO UNIFORME DE PROBABILIDADE



FONTE: Bussab; Morettin (2010).

LEGENDA: a) função densidade de probabilidade.

b) função de distribuição acumulada de probabilidade.

Para distribuição uniforme, pode-se demonstrar que a esperança e variância são dadas pelas equações (53) e (54), respectivamente (COSTA NETO; CYMBALISTA, 2006).

$$E(X) = \mu = \frac{a + b}{2} \quad (53)$$

$$Var(X) = \sigma^2(X) = \frac{(b - a)^2}{12} \quad (54)$$

Os parâmetros  $a$  e  $b$  da distribuição podem ser obtidos diretamente a partir dos valores da média e variância (BECK, 2019).

$$a = \mu - \sqrt{3}\sigma \quad (55)$$

$$b = \mu + \sqrt{3}\sigma \quad (56)$$

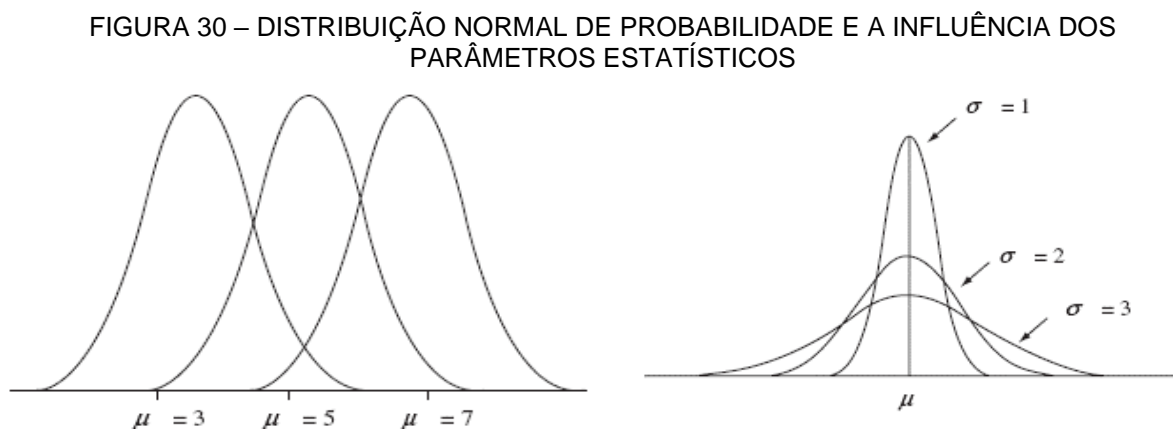
### 2.6.5.2 Distribuição gaussiana ou normal $N(\mu, \sigma^2)$

Uma variável aleatória  $X$  descrita por uma distribuição normal, denotada por  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , tem sua FDP e FDA dadas respectivamente por (BUSSAB; MORETTIN, 2010; DEVORE, 2018):

$$f_X(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad -\infty < x < +\infty \quad (57)$$

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dt, \quad -\infty < x < +\infty \quad (58)$$

Esta distribuição, ilustrada na FIGURA 30 consiste em uma das mais importantes na estatística, seja por questões práticas, como ser capaz de descrever um grande número de fenômenos, seja por questões teóricas ligadas ao teorema do limite central (COSTA NETO; CYMBALISTA, 2006).



FONTE: Gupta; Guttman (2017).

De acordo com Costa Neto e Cymbalista (2006) e Gupta e Guttman (2017), a distribuição normal apresenta algumas características, sendo estas:

- a) Simetria em torno de sua média  $\mu$ , com formato em forma de sino;
- b) Caudas da função se estendem de  $-\infty$  a  $+\infty$ ;

- c) Decrescente assintoticamente a zero nos extremos;
- d) Pontos de inflexão em  $\mu - \sigma$  e  $\mu + \sigma$ ;
- e) A localização e o formato da curva normal mudam à medida que se alteram os valores da média e do desvio-padrão conforme a FIGURA 30.

Para essa distribuição, a média  $\mu$  e a variância  $\sigma^2$  consistem nos parâmetros que caracterizam a própria distribuição, dados por (GUPTA; GUTTMAN, 2017):

$$E(X) = \mu \quad (59)$$

$$Var(X) = \sigma^2 \quad (60)$$

### 2.6.5.3 Distribuição normal padrão $N(0,1)$

A determinação da probabilidade de uma variável aleatória normal  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  consiste na solução da integral imprópria dada pela equação (61), a qual não possui solução analítica (DEVORE, 2018).

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dx \quad (61)$$

Para resolver esse problema recorre-se a um método simplificado, através da padronização de variável, transformando todas as observações de uma variável aleatória normal  $X$  qualquer em um novo grupo de observações de uma variável aleatória também normal, designada por  $Z$ , cuja média é nula e a variância é unitária (WALPOLE; MYERS; MYERS, 2009).

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad (62)$$

Assim, uma variável aleatória normal é transformada em uma variável normal padrão  $Z$ , a qual possui os parâmetros  $\mu = 0$  e  $\sigma = 1$  (DEVORE, 2018).

$$f_Z(z; 0,1) = \phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), \quad -\infty < z < +\infty \quad (63)$$

$$F_Z(z) = \Phi(z) = \int_{-\infty}^z \phi(t)dt, \quad -\infty < z < +\infty \quad (64)$$

onde:

$Z$ : variável aleatória normal padrão;

$z$ : valor da variável aleatória normal padrão;

$\phi(z)$ : função de densidade de probabilidade de uma VA normal padrão;

$\Phi(z)$ : função de distribuição acumulada de probabilidade de uma VA normal padrão.

Portanto, a ideia chave da padronização consiste em realizar uma transformação de variável para cada um dos limites do intervalo de interesse e utilizar valores tabelados para  $z$  a fim de se obter o valor da probabilidade.

## 2.6.6 Distribuição conjunta de probabilidade

Frequentemente, em problemas de engenharia, é útil avaliar simultaneamente mais de uma variável aleatória em um experimento, logo, faz-se necessário considerar as suas distribuições conjuntas de probabilidade (MONTGOMERY; RUNGER, 2021).

### 2.6.6.1 Função conjunta de distribuição acumulada de probabilidade para duas variáveis aleatórias contínuas

Considerando um espaço amostral contínuo, a função conjunta de distribuição acumulada de probabilidade para um par de variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é expressa por (GUPTA; GUTTMAN, 2017):

$$F_{XY}(x, y) = P[X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y] \quad (65)$$

onde:

$F_{XY}(x, y)$ : função conjunta de distribuição acumulada de probabilidades;

$X, Y$ : variáveis aleatórias;

$x, y$ : valores assumidos pelas variáveis aleatórias.

Algumas propriedades desta distribuição são (GUPTA; GUTTMAN, 2017):

- a)  $0 \leq F_{XY}(x, y) \leq 1 \forall (x, y)$
- b)  $F_{XY}(-\infty, y) = F_{XY}(x, -\infty) = F(-\infty, -\infty) = 0$
- c)  $F_{XY}(\infty, \infty) = 1$
- d)  $F_{XY}(x, y)$  é não decrescente.

#### 2.6.6.2 Função conjunta de densidade de probabilidade para duas variáveis aleatórias contínuas

A função conjunta de densidade de probabilidade para as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$  é obtida a partir da derivação da função conjunta de distribuição acumulada (KROETZ, 2015):

$$f_{XY}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x, y)}{\partial x \partial y} \quad (66)$$

onde:

$f_{XY}(x, y)$ : função conjunta de densidade de probabilidade.

Além disso, esta função deve satisfazer as seguintes condições (WALPOLE; MYERS; MYERS, 2009):

$$f_{XY}(x, y) \geq 0 \forall (x, y) \quad (67)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx dy = 1 \quad (68)$$

$$P[(X, Y) \in A] = \iint_A f_{XY}(x, y) dx dy \quad \forall A \in \mathbb{R}^2 \quad (69)$$

onde:

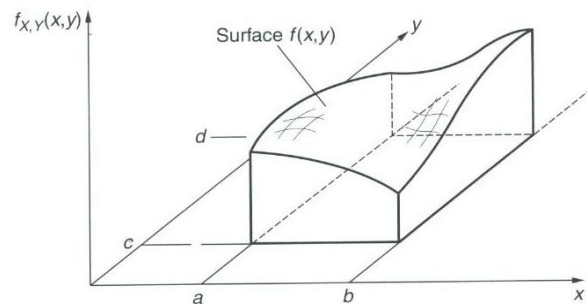
$A$ : evento no plano  $xy$ .

Note que se  $A = \{X, Y \mid X \leq x, Y \leq y\}$  então (GUPTA; GUTTMAN, 2017):

$$P[(X, Y) \in A] = F_{XY}(x, y), \quad A = \{X, Y \mid X \leq x, Y \leq y\} \quad (70)$$

Geometricamente, esta função consiste em uma superfície tridimensional de probabilidade, o evento  $A$  um plano e a probabilidade  $P[(X,Y) \in A]$  o volume delimitado entre a superfície e o plano (BUSSAB; MORETTIN, 2010).

FIGURA 31 – FUNÇÃO CONJUNTA DE DENSIDADE E PROBABILIDADE DE UM EVENTO  $A$



FONTE: Ang; Tang (2007).

### 2.6.6.3 Funções marginais de probabilidade para duas variáveis aleatórias contínuas

As funções de distribuição acumuladas  $F_X(x)$  e  $F_Y(y)$  são denominadas distribuições marginais de probabilidade (BECK, 2019). Estas funções podem ser expressas em termos das distribuições conjuntas.

$$F_X(x) = F_{XY}(x, \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^x f_{XY}(u, v) du dv \quad (71)$$

$$F_Y(y) = F_{XY}(\infty, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(u, v) du dv \quad (72)$$

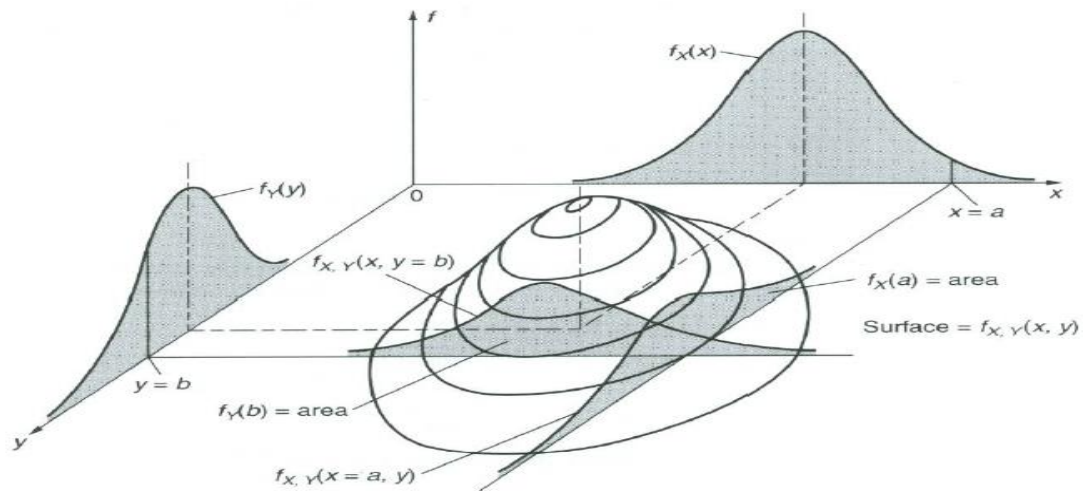
Derivando as equações (71) e (72) obtêm-se as funções marginais de densidade de probabilidade para as variáveis aleatórias  $X$  e  $Y$ , dadas por (BECK, 2019; DEVORE, 2018):

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dy, \quad -\infty < x < \infty \quad (73)$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, y) dx, \quad -\infty < y < \infty \quad (74)$$

A FIGURA 32 ilustra as funções marginais de densidade de probabilidade e a função conjunta de densidade de probabilidade para duas variáveis aleatórias contínuas.

FIGURA 32 – FUNÇÃO DE DENSIDADE CONJUNTA E FUNÇÕES MARGINAIS PARA DUAS VARIÁVEIS ALEATÓRIAS



FONTE: Ang; Tang (2007).

## 2.7 CONFIABILIDADE E SEGURANÇA ESTRUTURAL

Em projetos estruturais, os procedimentos e critérios existentes visam que a estrutura e seus elementos sejam dimensionados, construídos e conservados de modo a cumprir satisfatoriamente a função para a qual são concebidos, considerando os aspectos de durabilidade durante sua vida útil, nível adequado de segurança, economia, eficiência e mínima exposição dos usuários a riscos (BECK, 2019; PANTOJA, 2012).

Segundo Beck (2019, p. 35) as estruturas e seus constituintes devem satisfazer os seguintes requisitos técnicos:

- a) Requisito de serviço: a estrutura deve manter-se em condições adequadas de utilização durante o tempo de vida útil;
- b) Requisito de segurança: a estrutura deve resistir as cargas extremas de natureza esporádica e repetitiva, durante sua vida útil;
- c) Requisito de robustez: a estrutura deve resistir a eventos acidentais como explosões, impactos, sismos, incêndios ou erros humanos.

Além disso, as estruturas devem satisfazer a requisitos adicionais, sendo esses (BECK, 2019):

- a) Requisito econômico: a estrutura deve atender aos requisitos técnicos sem comprometer a viabilidade econômica da mesma;
- b) Requisito social: a estrutura deve atender aos requisitos anteriores, respeitando níveis aceitáveis de riscos aos usuários.

A TABELA 1 apresenta alguns valores de probabilidade de falha sugeridos por Araújo (2010 apud CEB, 1978) como dados de referência em análise que considera requisitos sociais e econômicos.

TABELA 1 – PROBABILIDADES DE FALHA ADMISSÍVEIS

Nº de pessoas atingidas	Consequências econômicas		
	Pequeno	Grave	Muito grave
Pequeno	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$
Médio	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
Grande	$10^{-5}$	$10^{-6}$	$10^{-7}$

FONTE: Adaptado de Araújo (2010).

### 2.7.1 Segurança, economia e confiabilidade

Os aspectos da segurança e economia, dois requisitos conflitantes entre os citados anteriormente, consistem em temas centrais na engenharia, pois além de funcionais, as estruturas devem ser viáveis e seguras (BECK, 2019; KROETZ, 2015). Uma análise que combina segurança e o custo total esperado, resulta em uma estrutura com nível adequado de segurança (BECK, 2019).

Segundo Pantoja (2012, p. 127–128, apud VAZ, 2011), as metodologias de projeto estrutural existentes, em relação aos níveis de segurança e economia, são:

- a) Método das tensões admissíveis (nível 0): utiliza-se de valores médios de tensões como dado, sem a consideração da probabilidade de falha;
- b) Método semi-probabilístico (nível 1): utiliza-se de parâmetros estatísticos para definição de valores característicos das variáveis

aleatórias de projeto e coeficientes parciais de segurança para obtenção das variáveis de cálculo;

- c) Método baseado em confiabilidade (nível 2): utiliza-se dados estatísticos para a caracterização das variáveis aleatórias e determinação da probabilidade de falha.

No que se refere ao método semi-probabilístico, a consideração de projeto dito ótimo é feita de tal forma que a economia é a maior possível. Já no método baseado em confiabilidade, um projeto dito ótimo fornece o projeto de risco total mínimo, considerando o custo de construção, o custo de operação e o custo associado à falha (PANTOJA, 2012).

Além da consideração econômica, existe uma tênue relação entre confiabilidade e segurança estrutural, pois questionamentos como “quão seguro é seguro o suficiente?” surgem (BECK, 1999; PANTOJA, 2012). Sendo assim, a confiabilidade estrutural surge como ferramenta que quantifica a segurança, fornecendo métodos que possibilitem projetos estruturais que cumpram todos os requisitos necessários (KROETZ, 2015).

### 2.7.2 Consideração das incertezas na engenharia de estruturas

Nos problemas de engenharia de estruturas as incertezas sempre estão presentes, seja em maior ou menor grau, associadas ao conhecimento insuficiente da real resposta do problema estudado e ao caráter aleatório das variáveis de projeto (BECK, 1999; PANTOJA, 2012). Sendo assim, nenhum projeto de engenharia de estruturas é concebido livre de riscos, pois estes riscos devem-se diretamente à presença de incertezas (FELIPE, 2019).

Os principais tipos de incertezas em problemas de engenharia são classificados como: (a) intrínsecas, (b) epistêmicas e (c) erro humano (BECK, 2019).

#### 2.7.2.1 Incertezas Intrínsecas

As incertezas intrínsecas estão associadas ao caráter aleatório típico dos fenômenos naturais que cercam os problemas de engenharia. Estes se devem a variabilidade inerente nas variáveis de projeto, por exemplo, nas propriedades dos

materiais, nos aspectos geométricos e na caracterização das cargas atuantes (PANTOJA, 2012).

Além disso, essas incertezas também estão associadas aos erros de previsão de condições futuras, os quais muitas vezes possuem um histórico de informações curto para realização de uma extrapolação (BECK, 2019).

#### 2.7.2.2 Incertezas Epistêmicas

Frequentemente na engenharia lida-se com modelos idealizados, a fim de se tomar decisões ou planejar e desenvolver critérios para um projeto, os quais representam imperfeitamente a realidade (ANG; TANG, 2007, tradução nossa). Os resultados obtidos a partir de análises, estimativas ou predições baseadas nesses modelos imprecisos contêm algum grau de erro, logo, contêm incertezas. Além disso, também existem incertezas em virtude do conhecimento incompleto dos fenômenos envolvidos na falha ou sobrevivência de uma estrutura (BECK, 2019).

#### 2.7.2.3 Erro humano

Segundo Beck (2019, p. 25), o erro humano consiste na “[...] ação direta ou indireta do homem, que por imprudência, imperícia ou negligência afeta de maneira indesejável o desempenho ou a segurança de sistemas de engenharia [...]”

Embora a modelagem do caráter imprevisível da ação humana seja trabalhosa, existem estatísticas conhecidas que modelam as taxas de falha de atividade para tarefas repetitivas e específicas (BECK, 2019).

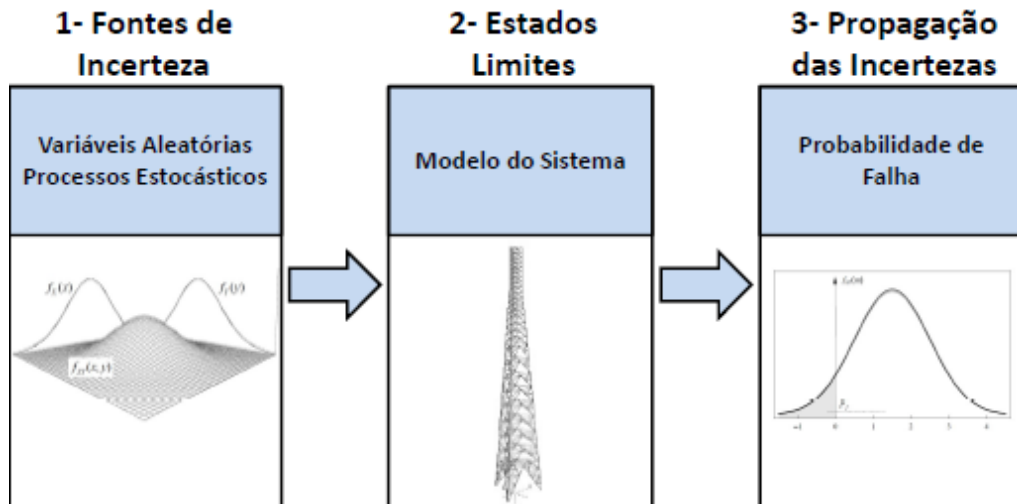
#### 2.7.2.4 Etapas de quantificação das incertezas

A consideração do comportamento aleatório das variáveis de projeto em problemas de engenharia amplia os horizontes da análise estrutural, sendo necessário o auxílio de distribuições de probabilidade para a quantificação das incertezas.

De acordo com Kroetz (2019 apud MAI et al., 2017), a quantificação dessas incertezas na engenharia de estruturas pode ser avaliada a partir de três etapas, esquematizadas na FIGURA 33, sendo essas: tratamento e quantificação das fontes de incertezas; modelagem do comportamento do sistema a partir da definição dos

estados limites; e a determinação da probabilidade de falha em razão a propagação das incertezas através do sistema (KROETZ, 2019).

FIGURA 33 – ESQUEMA GERAL DA QUANTIFICAÇÃO DAS INCERTEZAS EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS



FONTE: Kroetz (2019).

### 2.7.3 Definição de Confiabilidade

De forma geral, a confiabilidade  $\mathcal{R}$  de um sistema ou componente funcionando dentro das condições de projeto, consiste na probabilidade de não falha do mesmo durante o tempo vida previsto (BECK, 1999 apud ROSA, 1976). Esta pode ser obtida como o complemento da probabilidade de falha, ou seja (BECK, 2019):

$$\mathcal{R} = \bar{P}_f = 1 - P_f \quad (75)$$

onde:

$\mathcal{R}$ : confiabilidade;

$P_f$ : probabilidade de falha;

$\bar{P}_f$ : complemento da probabilidade de falha.

Logo, a confiabilidade é obtida por meio da probabilidade de falha  $P_f$ , que de acordo com Beck (2019, p. 25), “[...] é a probabilidade de o sistema falhar, não

atendendo às especificações de projeto, dentro de uma vida de projeto especificada, mesmo respeitadas as condições de operação e de projeto do sistema".

#### 2.7.3.1 Aspectos da abordagem probabilística

Em função do caráter único das estruturas, a confiabilidade estrutural é interpretada como o grau de confiança na capacidade da estrutura em desempenhar de maneira satisfatória suas funções, ou seja, como uma medida subjetiva de probabilidade. Já em outras áreas da engenharia, como na produção de componentes mecânicos ou elétricos, a interpretação frequentista de probabilidade é suficiente (BECK, 2019).

#### 2.7.4 Estados limites e modos de falha

Em termos práticos, a caracterização da falha de uma estrutura pode ser desafiadora, já que, em um sentido mais amplo, a falha representa um estado indesejável da estrutura em relação a um requisito imposto e não necessariamente ao colapso estrutural (BECK, 2019; KROETZ, 2015). Desta forma, convenientemente utiliza-se o conceito de estados limites, que configuram a condição de falha a partir do não cumprimento de requisitos técnicos estabelecidos, em que para cada requisito existe um estado limite associado (KROETZ, 2015; SÁLES; MUNAIR NETO; MALITE, 2015).

Usualmente, os estados limites são classificados em duas categorias: estados limites últimos, que dizem respeito à segurança estrutural propriamente dita; e estados limites de serviço, associados ao desempenho e uso da estrutura (BECK, 2019; SÁLES; MUNAIR NETO; MALITE, 2015).

##### 2.7.4.1 Estados limites últimos - ELU

Os estados limites últimos correspondem aos requisitos de segurança estrutural, associados à perda da capacidade portante da estrutura, i.e., da ocorrência de falha (BECK, 2019; SÁLES; MUNAIR NETO; MALITE, 2015). Geralmente, a excedência de um estado limite último é irreversível, resultando em um colapso ou dano grave e permanente (BECK, 2019).

Alguns exemplos em que há violação desses estados limites são:

- a) Perda de estabilidade global e/ou local;
- b) Instabilidade dinâmica;
- c) Ruptura dos elementos ou ligações por fadiga, ou outros efeitos dependentes do tempo;
- d) Ultrapassagem da capacidade máxima das seções, elementos ou ligações, seja por ruptura ou deformação excessiva.

#### 2.7.4.2 Estados limites de serviço - ELS

Os estados limites de serviço correspondem às exigências operacionais, de durabilidade estrutural e conforto para os usuários, as quais se não respeitadas interferem diretamente nas condições de desempenho especificadas para o uso normal da construção, podendo levar à diminuição de sua vida útil (KROETZ, 2015; SÁLES; MUNAIR NETO; MALITE, 2015).

Alguns exemplos em que há violação desses estados limites são:

- a) Deformação excessiva durante a utilização normal da estrutura;
- b) Deslocamentos excessivos sem perda de equilíbrio;
- c) Vibrações excessivas.

#### 2.7.4.3 Equação de estado limite

A descrição analítica de um modo de falha a partir dos estados limites se dá através de sua função de estado limite  $g(\mathbf{X})$  (KROETZ, 2015; PANTOJA, 2012).

$$g(\mathbf{X}) = g(X_1, X_2, \dots, X_m) \quad (76)$$

onde:

- $g$ : equação de estado limite;
- $X$ : variáveis aleatórias.
- $\mathbf{X}$ : vetor de variáveis aleatórias.

A essa função caracteriza a resposta estrutural de um sistema, para cada estado limite, dividindo-o em uma região de falha e uma região de sobrevivência (KROETZ, 2015; PANTOJA, 2012).

$$\Omega_f = \{x \mid g(x) \leq 0\} \quad (77)$$

$$\Omega_s = \{x \mid g(x) > 0\} \quad (78)$$

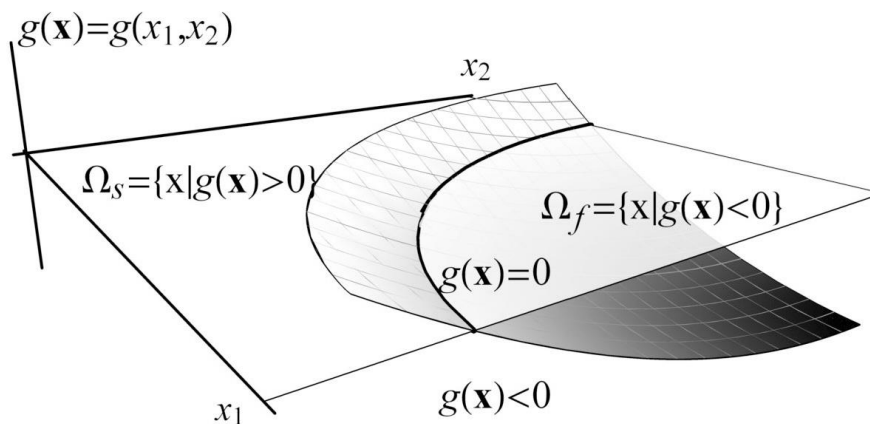
onde:

$\Omega_f$ : domínio de falha;

$\Omega_s$ : domínio de sobrevivência.

No domínio da falha  $\Omega_f$ , todos os pontos  $X$  dentro dessa região não atendem aos requisitos de segurança. Já no domínio de sobrevivência  $\Omega_s$  todos os pontos  $X$  dentro dessa região satisfazem aos requisitos de segurança. Assim, conforme FIGURA 34,  $g(X) = 0$  estabelece uma fronteira entre os domínios de falha e sobrevivência (KROETZ, 2015).

FIGURA 34 – DOMÍNIO DEFINIDO PELA FUNÇÃO DE ESTADO LIMITE



FONTE: Beck (2019).

### 2.7.5 Problema fundamental da confiabilidade estrutural

O problema fundamental da confiabilidade estrutural consiste na determinação da probabilidade de falha  $P_f$  a partir da propensão à violação dos estados limites da estrutura (BECK, 2019; FELIPE, 2019).

$$P_f = P[\{X \in \Omega_f\}] = P[\{\mathcal{g}(X) \leq 0\}] \quad (79)$$

onde:

$P_f$ : probabilidade de falha;

$\mathcal{g}$ : equação de estado limite.

A equação de estado limite mais simples utilizada em projetos de estruturas é uma função linear que compara alguma capacidade resistente  $R$  com alguma medida de solicitação  $S$ , sendo em uma análise de confiabilidade, ambas descritas por funções de densidade de probabilidade (BECK, 2019; KROETZ, 2019).

$$\mathcal{g}(R, S) = R - S, \quad \mathbf{X} = \{R, S\} \quad (80)$$

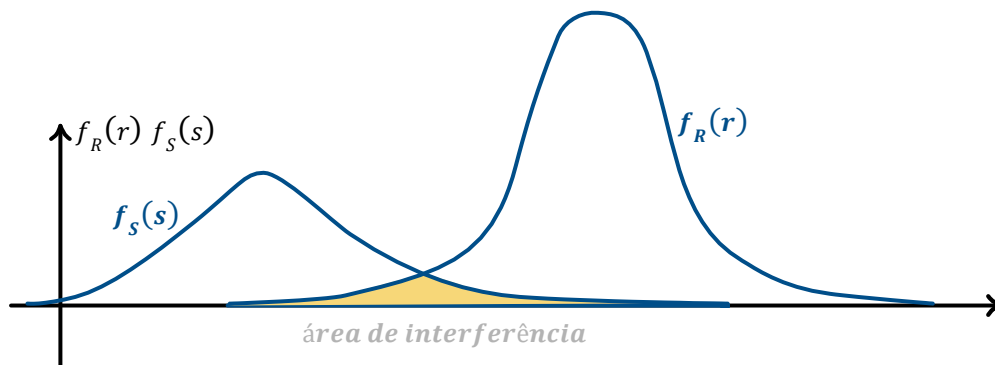
onde:

$\mathcal{g}$ : equação de estado limite;

$R$ : resistência;

$S$ : solicitação.

FIGURA 35 – INTERFERÊNCIA ENTRE RESISTÊNCIA E SOLICITAÇÃO



FONTE: Adaptada de Beck (1999).

Assim, conforme FIGURA 35, a probabilidade de falha é proporcional (mas não idêntica) à área hachurada de interferência entre as curvas de FDP, determinada a partir da função de densidade de probabilidade conjunta de  $R$  e  $S$ ,  $f_{RS}(r, s)$ , dada por (BECK, 2019):

$$P_f = P[\{\mathcal{g}(X) \leq 0\}] = \int_{\Omega_f} f_X(X) dX = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^s f_{RS}(r, s) dr ds \quad (81)$$

onde:

$s$ : variável aleatória das solicitações;

$r$ : variável aleatória da resistência;

$f_{RS}$ : função densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias.

$\Omega_f$ : domínio da falha.

Se as variáveis  $R$  e  $S$  são estatisticamente independentes, a função de probabilidade conjunta  $f_{R,S}(r, s)$  pode ser obtida pelo produto das funções de densidade de probabilidade de  $R$  e  $S$  (BECK, 1999).

$$f_{R,S}(r, s) = f_R(r) \cdot f_S(s) \quad (82)$$

A confiabilidade é dada pelo complemento da probabilidade de falha, que nesse caso é dada por (BECK, 2019):

$$\mathcal{R} = 1 - P_f = \int_{\Omega_s} f_X(X) dX \quad (83)$$

#### 2.7.6 Confiabilidade de sistemas

A confiabilidade de um sistema depende do modo que seus componentes estão associados. A classificação desses sistemas pode ser dividida em: sistemas em série, sistemas em paralelo e sistemas mistos.

Na perspectiva da análise estrutural, esses componentes (ou elementos) estruturais interferem diretamente no nível de segurança de uma estrutura, tendo em vista que múltiplos modos de falha podem ocorrer simultaneamente (KROETZ, 2019; PANTOJA, 2012).

Neste trabalho aborda-se somente a associação de sistemas em série.

##### 2.7.6.1 Associação em série

Na associação de componentes em série, a falha de um componente implica na falha do sistema, logo, o funcionamento do sistema requer o bom funcionamento

de todos os seus constituintes (BECK, 2019). Considerando  $E_i$  a falha do  $i$ -ésimo componente, a falha do sistema  $F$  é dada por:

$$F = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \dots \cup E_m = \bigcup_{i=1}^{nls} E_i \quad (84)$$

O evento de sobrevivência é dado por:

$$\bar{F} = \bar{E}_1 \cap \bar{E}_2 \cap \bar{E}_3 \cap \dots \cap E_m = \bigcap_{i=1}^{nls} \bar{E}_i \quad (85)$$

Assim, a probabilidade de falha e a confiabilidade de sistemas em série são expressas, respectivamente, por (BECK, 2019):

$$P_f = P(F) = P\left(\bigcup_{i=1}^{nls} E_i\right) \quad (86)$$

$$\mathcal{R}_{sist} = P(\bar{F}) = P\left(\bigcap_{i=1}^{nls} \bar{E}_i\right) \quad (87)$$

De acordo com Costa Neto e Cymbalista (2006), para um sistema em série em que os componentes são independentes, a confiabilidade do sistema é dada por:

$$\mathcal{R}_{sist} = \prod_{i=1}^{nls} P(\bar{F}) \quad (88)$$

onde:

$nls$ : número de modos de falha.

#### 2.7.6.2 Sistemas Estruturais Isostáticos

Em razão da inexistência de hiperestaticidade (redundância) em estruturas isostáticas, esses são típicos exemplos de sistemas associados em série, em que a falha de um elemento resulta na falha global da estrutura (BECK, 2019).

## 2.8 SIMULAÇÃO DE MONTE CARLO (SMC)

Em um problema de confiabilidade, a determinação analítica da probabilidade de falha a partir da integração multidimensional da equação (81) nem sempre é simples (FELIPE, 2019; KROETZ, 2015). Desta forma, outras abordagens surgiram, dentre essas, o método de simulação de Monte Carlo.

Proposto por Metropolis e Ulam (1949), o método baseia-se na simulação repetitiva de um experimento aleatório para uma amostragem com muitos valores de variáveis aleatórias, tomados a partir da função conjunta de densidade de probabilidade  $f_X(X)$  das variáveis de entrada do problema (KROETZ, 2015).

### 2.8.1 Formulação do método na confiabilidade estrutural

A simulação de Monte Carlo consiste na substituição da equação (81) por um estimador não tendencioso da probabilidade de falha (BECK, 2019; PANTOJA, 2012). Essa estimativa é obtida a partir da introdução de uma variável aleatória definida como função indicadora  $I$ , em que para cada realização do experimento assumem-se os seguintes valores (KROETZ, 2019):

$$I[X] = f(x) = \begin{cases} 1, & X \in \Omega_f \\ 0, & X \notin \Omega_f \end{cases} \quad (89)$$

Dada a função indicadora, a probabilidade de falha pode ser expressa sobre todo o domínio, calculada a partir da esperança matemática de  $I[X]$  (KROETZ, 2019; PANTOJA, 2012).

$$P_f = \int_{\Omega_f} f_X(X) dX = \int_{\Omega} I[X] f_X(X) dX = E[I[X]], \quad \Omega = \Omega_f \cup \Omega_s \quad (90)$$

onde:

$\Omega$ : domínio;

$I[ ]$ : função indicadora;

$E[I[ ]]$ : esperança matemática da função indicadora.

Sendo assim, repetindo as simulações para um número finito de amostras  $n_s$ , a probabilidade de falha pode ser estimada por (BECK, 2019):

$$P_f \approx \hat{P}_f = \frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} I[X_i] = \frac{n_f}{n_s} \quad (91)$$

onde:

$P_f$ : probabilidade de falha;

$\hat{P}_f$ : probabilidade de falha estimada;

$n_s$ : número de pontos amostrais;

$n_f$ : número de pontos no domínio da falha.

A variância desse estimador e o coeficiente de variação são expressos pelas seguintes equações respectivamente (BECK, 2019; KROETZ, 2019):

$$Var[\hat{P}_f] = \frac{1}{(n_s - 1)} \sum_{i=1}^{n_s} (I[X_i] - \hat{P}_f)^2 \quad (92)$$

$$CV[\hat{P}_f] = \frac{\sqrt{Var[\hat{P}_f]}}{E[\hat{P}_f]} \approx \frac{1}{\sqrt{n_s P_f}} \quad (93)$$

A partir da equação (93), obtém-se uma estimativa do tamanho da amostra  $n_s$  necessária dado um coeficiente de variação fixado, cuja expressão é dada por (BECK, 2019):

$$n_s \approx \frac{1}{P_f (CV[\hat{P}_f])^2} \quad (94)$$

Como expressa a equação (94), a ordem de grandeza da probabilidade de falha influencia no número de amostras necessárias para simulação, em que fixado um coeficiente de variação, quanto menor a probabilidade de falha, maior o número de simulações necessárias (KROETZ, 2019).

A equação (94) também necessita da probabilidade de falha antemão para estimar o tamanho da amostra necessária. Em projetos de estruturas existem probabilidades de falha recomendáveis as quais podem ser utilizadas, conforme apresentado na TABELA 1.

Neste trabalho utiliza-se o método de Monte Carlo denominado simples ou bruto, o qual não utiliza técnicas de redução de variância.

### 3 METODOLOGIA

Nesta seção constam os estudos de caso propostos assim como suas modelagens e a metodologia utilizada.

Para o caso da análise de confiabilidade utilizou-se a metodologia descrita por Kroetz (2019 apud MAI et al., 2017), conforme esquematizado na FIGURA 33, onde as fontes de incertezas são os dados de entrada do problema. A definição dos estados limites é descrita para cada estudo de caso e a probabilidade de falha é determinada a partir da simulação de Monte Carlo.

#### 3.1 ESTUDO DE CASO 1

Neste primeiro caso propõe-se uma estrutura baseada na tese de doutorado de Felipe (2019) avaliando os aspectos da linearidade, não linearidade geométrica e a análise de confiabilidade estrutural. Os valores característicos utilizados também foram baseados na tese citada.

##### 3.1.1 Exemplo mecânico linear

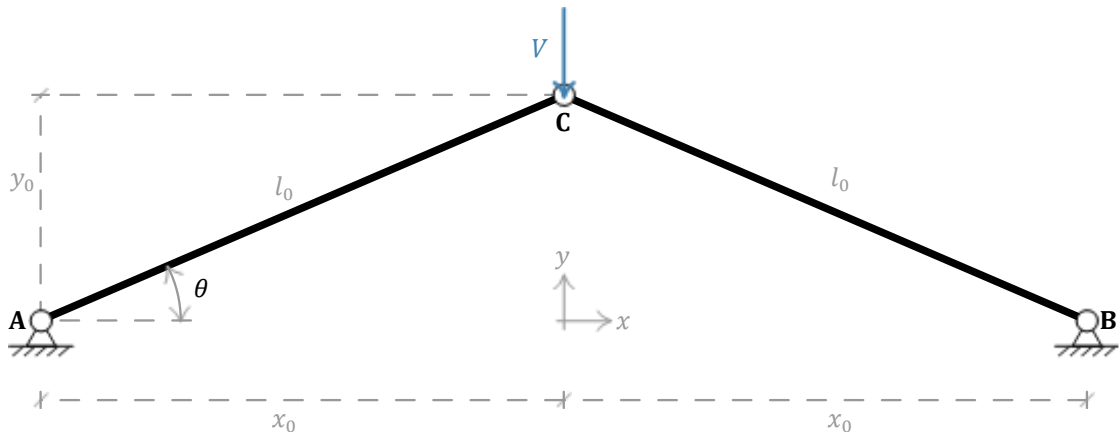
A estrutura apresentada na FIGURA 36 consiste em uma treliça isostática composta por duas barras de aço idênticas de seção transversal circular com raio  $r$  igual a  $5\text{ cm}$ , módulo de elasticidade  $E$  igual a  $20500\text{ kN/cm}^2$  e carga vertical  $V$  igual a  $77\text{ kN}$ . As constantes geométricas do problema são  $y_0 = 10\text{ cm}$ ,  $x_0 = 200\text{ cm}$  e  $l_0 = 200,25\text{ cm}$ . Esses valores característicos adotados no problema estão sintetizados na TABELA 2.

TABELA 2 – VALORES CARACTERISTICOS ESTUDO DE CASO 1

<b>variáveis</b>	<b>Descrição</b>	<b>Valor característico</b>
$E$	módulo de elasticidade	$20500\text{ kN}$
$r$	raio da barra	$5\text{ cm}$
$V$	força externa vertical	$-77\text{ kN}$
$y_0$	parâmetro geométrico da estrutura	$10\text{ cm}$
$x_0$	parâmetro geométrico da estrutura	$200\text{ cm}$
$l_0$	parâmetro geométrico da estrutura	$200,25\text{ cm}$

FONTE: Adaptada de Felipe (2019).

FIGURA 36 – MODELO MECÂNICO LINEAR 1



FONTE: O Autor (2022).

Pela simetria da estrutura os esforços axiais internos nas barras  $AC$  e  $BC$ , em módulo, são iguais, definidos como  $N$ .

As hipóteses do problema são: a) estrutura sob comportamento linear geométrico; b) estrutura sob regime elástico-linear; c) somente ação de esforços normais.

A partir dessas considerações, os esforços normais  $N$  para cada barra são obtidos a partir da consideração de equilíbrio estático do ponto  $C$ , logo o esforço normal em cada barra é expresso por:

$$N = \frac{V}{2\text{sen}(\theta)} = \frac{l_0 V}{2y_0}, \quad \text{sen}(\theta) = y_0/l_0 \quad (95)$$

onde:

$V$ : força aplicada sobre a estrutura;

$l_0, y_0, \theta$ : constantes relacionadas à geometria da estrutura.

Como as barras estão sob compressão axial o estado limite possível é a flambagem conforme visto no item 2.3.2. Sendo assim, conforme expressa a equação (80), considera-se a resistência  $R$  da barra dada pela carga crítica de flambagem, descrita pela equação (12), e a solitação  $S$  dada pelo esforço normal.

$$\varphi_E(E, r, V) = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} - N = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} - \frac{l_0 V}{2y_0}, \quad [kN] \quad (96)$$

onde:

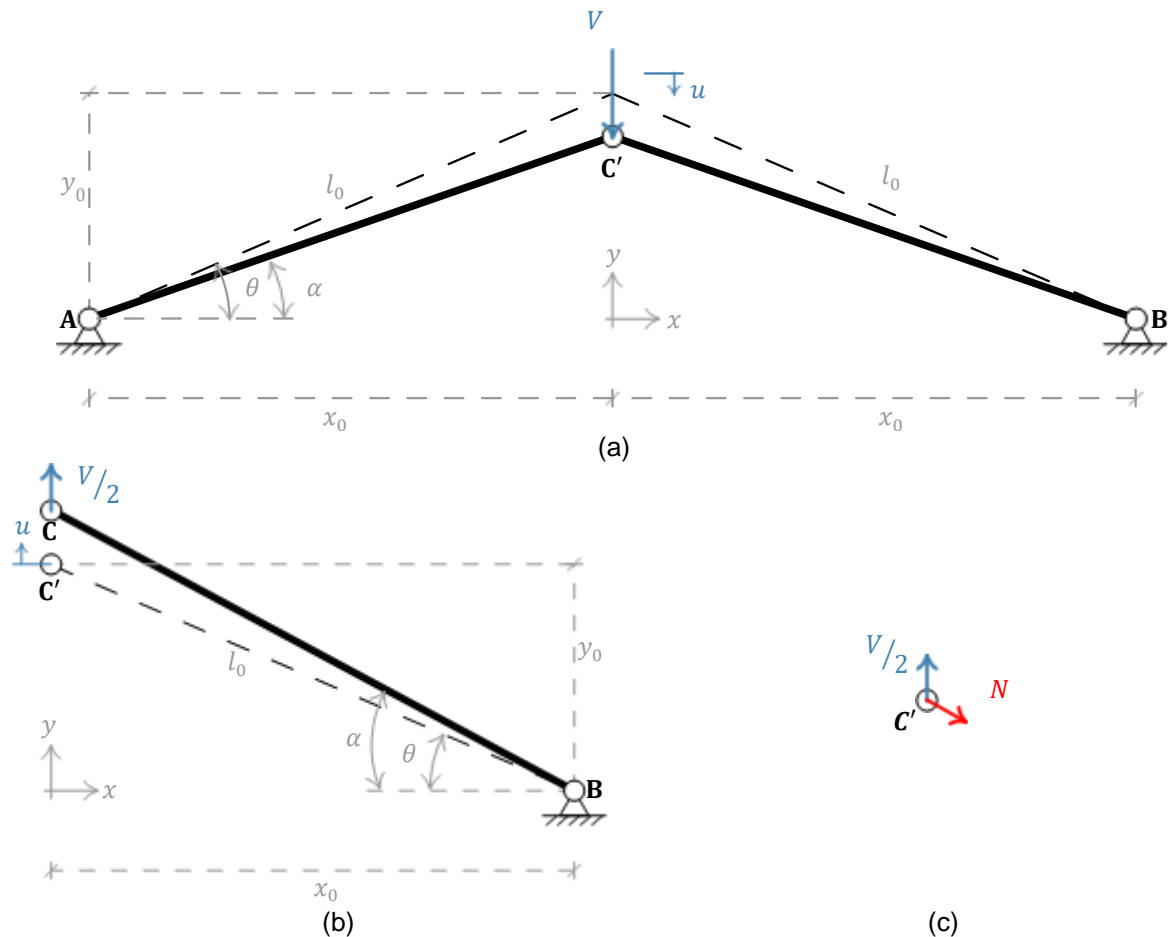
$\mathcal{G}_E$ : equação de estado limite por flambagem de Euler.

O valor do esforço normal é avaliado pelo seu valor absoluto.

### 3.1.2 Exemplo mecânico não-linear geométrico

A partir da FIGURA 37a, neste modelo a estrutura apresenta os mesmos valores característicos do caso anterior, porém sob a consideração da NLG.

FIGURA 37 – MODELO MECÂNICO NÃO-LINEAR GEOMÉTRICO



FONTE: O Autor (2022).

Por simplicidade no equacionamento e utilizando da simetria da estrutura, considera-se apenas metade da mesma conforme ilustrado na FIGURA 37b, tomando  $V$  como metade de seu valor e o deslocamento ocorrendo no sentido positivo do eixo

de referência  $y$ . Essa consideração é apenas um artifício de cálculo, sendo a estrutura real sujeita a uma força no sentido negativo de  $y$ , logo é necessário atribuir um valor negativo para  $V$  ao utilizar a equação final.

As hipóteses do problema são: a) estrutura sob comportamento não-linear geométrica; b) estrutura sob regime elástico-linear; c) somente ação de esforços normais.

Em conformidade com o item 2.3.3, como o problema é não-linear geométrico sob cargas de compressão é necessário avaliar a instabilidade da estrutura por *snap-through*. Para isso toma-se o ponto  $C$  da estrutura e verifica-se o equilíbrio na posição deslocada, conforme ilustra a FIGURA 37c, assim:

$$\sum F_{y,c} = 0 \Rightarrow N \operatorname{sen}(\alpha) - \frac{V}{2} = 0$$

A partir da equação anterior, a solução analítica deste problema é dada por:

$$V = 2N \operatorname{sen}(\alpha), \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{y_0 + u}{x_0}\right) \quad (97)$$

Embora o problema seja NLG, pela hipótese de pequenos deslocamentos propõe-se uma aproximação linear para o  $\operatorname{sen}(\alpha)$  como  $(y_0 + u)/l_0$ , assim:

$$N \operatorname{sen}(\alpha) - \frac{V}{2} = N \frac{(y_0 + u)}{l_0} - \frac{V}{2} = 0 \quad (98)$$

A partir da equação anterior, reescrevendo-a na forma da equação (14), a qual descrevem a NLG do problema, temos:

$$g(u) = q(u) - f \Rightarrow g(u) = N \underbrace{\frac{(y_0 + u)}{l_0}}_{q(u)} - \underbrace{\frac{V}{2}}_f = 0$$

Recorrendo-se ao método de Newton-Raphson para a resolução numérica da equação anterior, conforme descreve as equações (16) e (17), temos:

$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_i, \quad \Delta u_i = -K_t^{-1}g(u_i), \quad K_t = \frac{dg(u_i)}{du}$$

A tangente de rigidez  $K_t$  fica expressa como:

$$K_t = \frac{d}{du} [g(u)] = \frac{d}{du} \left[ N \frac{(y_0 + u)}{l_0} \right] - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{dV}{du}}_0 = \frac{y_0}{l_0} \frac{dN}{du} + \frac{1}{l_0} \frac{d}{du} (Nu)$$

Como a análise do problema é no domínio elástico-linear assume-se que o esforço normal  $N$  é igual a  $EA\varepsilon$ , obtendo-se para a tangente de rigidez uma nova expressão:

$$K_t = \frac{y_0 EA}{l_0} \frac{d\varepsilon}{du} + \frac{EA}{l_0} \frac{d}{du} (\varepsilon u)$$

Como  $\varepsilon$  é em função de  $u$ , a partir da regra do produto entre derivadas de funções obtém-se:

$$K_t = \frac{EA}{l_0} \frac{d\varepsilon}{du} (y_0 + u) + \frac{EA}{l_0} \varepsilon$$

Assumindo a deformação longitudinal específica como a deformação de Green, expressa pela equação (8), tem-se:

$$K_t = \frac{EA}{l_0} \frac{d\varepsilon_G}{du} (y_0 + u) + \frac{EA}{l_0} \varepsilon_G \quad (99)$$

$$\varepsilon_G = \frac{u^2 + 2y_0 u}{2l_0^2} = \frac{y_0}{l_0} \frac{u}{l_0} + \frac{1}{2} \left( \frac{u}{l_0} \right)^2 \quad (100)$$

$$\frac{d\varepsilon_G}{du} = \frac{u + y_0}{l_0^2} \quad (101)$$

Sendo assim, conforme expressa a equação (80), para o modo de falha por *snap-through* considera-se a resistência  $R$  da barra dada pelas forças internas  $q(u)$  e a solicitação  $S$  dada pelas forças externas  $f$ .

$$\varphi_{NGL}(E, r, V) = q(u_i) - f = N \frac{(y_0 + u)}{l_0} - \frac{V}{2}, \quad [kN] \quad (102)$$

onde:

$\varphi_{NGL}$ : equação de estado limite para o fenômeno de *snap-throug*.

Alguns parâmetros auxiliares para a implementação computacional do método de Newton-Raphson são o número máximo de iterações para a convergência em cada incremento de carga  $k_{max}$ , o número de incrementos de carga  $nincr$ , e a tolerância  $tol$  do método.

### 3.1.3 Exemplo de confiabilidade estrutural

A TABELA 3 apresenta alguns dados de variáveis aleatórias propostas para a análise de confiabilidade para os exemplos mecânico linear e não-linear geométrico, sendo os parâmetros  $E$ ,  $r$  e  $V$  dados pelos valores característicos descritos anteriormente na TABELA 2.

TABELA 3 – VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DA ESTRUTURA 1

variáveis	Média ( $\mu$ )	CV	FDP
Diretas			
$E$	$1,0 E$	0,03	normal
$r$	$1,0 r$	0,1	uniforme
$V$	$1,0 V$	0,2	normal
Indiretas			
$A$	$f(r)$	-	uniforme
$I$	$f(r)$	-	uniforme

FONTE: Adaptada de Felipe (2019).

No caso da variável aleatória  $r$ , para se obter os parâmetros  $a$  e  $b$  utilizou-se a equação (55) e (56) respectivamente, obtendo assim:

$$a = 4,134$$

$$b = 5,866$$

Considerando uma probabilidade de falha na ordem de  $10^{-3}$ , valor condizente com projetos de estruturas (ver TABELA 1), pela equação (94), fixado um coeficiente de variação em  $10^{-1}$ , tem-se:

$$n_s \approx \frac{1}{P_f (CV[\hat{P}_f])^2} \approx \frac{1}{(10^{-3}) \cdot (10^{-1})^2} \approx 10^5$$

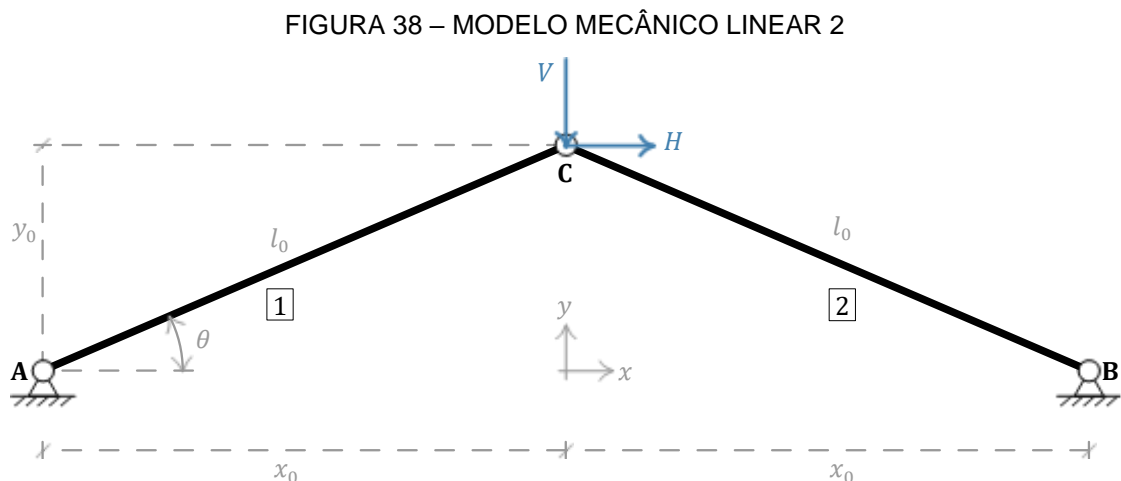
Logo, o espaço amostral necessário para a avaliação da probabilidade de falha pelo método de simulação de Monte Carlo é na ordem de  $10^5$  pontos.

### 3.2 ESTUDO DE CASO 2

No segundo estudo de caso propõe-se uma estrutura baseada em um problema proposto por Beck (2019, p. 76) sob a análise da confiabilidade e segurança de sistemas sob três modos de falha distintos. Neste problema não são considerados os efeitos da não linearidade geométrica.

#### 3.2.1 Modelo mecânico linear

A estrutura apresentada na FIGURA 38 consiste em uma treliça isostática composta por duas barras de seção transversal circular, com a barra 1 apresentando raio  $r_1$  igual a 4,0 mm e barra 2 com  $r_2$  igual a 5,2 mm.



FONTE: O Autor (2022).

O módulo de elasticidade  $E$  e a tensão de ruptura  $\sigma_s$  são os mesmos para as duas barras. As constantes geométricas do problema são  $y_0 = 150 \text{ mm}$ ,  $x_0 = 300 \text{ mm}$  e  $l_0 = 335,41 \text{ mm}$ . Esses valores característicos estão sintetizados na TABELA 4.

TABELA 4 – VALORES CARACTERISTICOS ESTUDO DE CASO 2

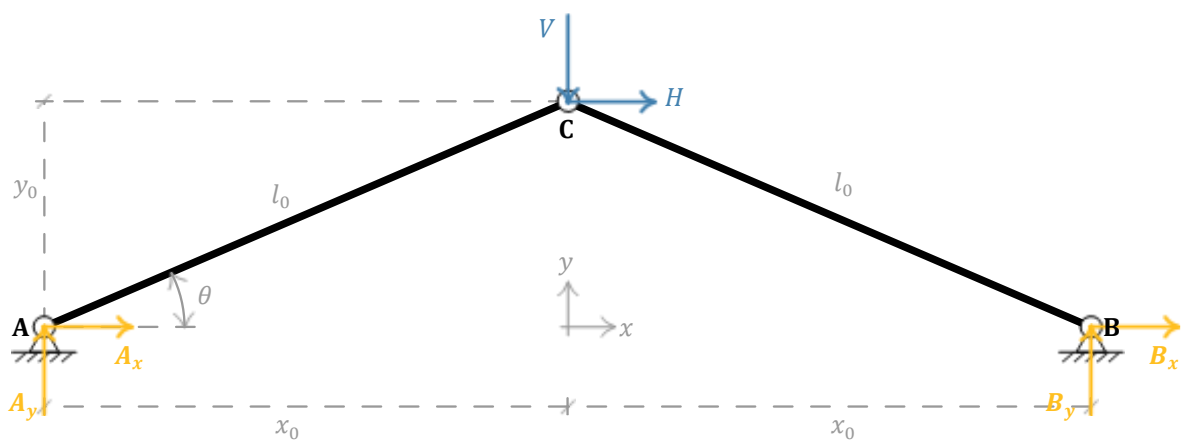
variáveis	Valor característico
$E$	70 GPa
$\sigma_s$	24,5643 MPa
$r_1$	4,0 mm
$r_2$	5,2 mm
$H$	2,0 kN
$V$	1,0 kN
$y_0$	150 mm
$x_0$	300 mm
$l_0$	335,41 mm

FONTE: Adaptada de Beck (2019).

Considerando as forças externas  $V$  e  $H$  sempre positivas, a barra 1 é comprimida por  $V$  e tracionada por  $H$  e ambas as forças provocam compressão sobre a barra 2.

Para escrever as equações de estado limite é necessária a determinação da força normal em cada barra. Como a estrutura é isostática, existe um número de equações suficientes para determinar suas incógnitas. Sendo assim, a partir da FIGURA 39, tomando inicialmente a barra 1, tem-se:

FIGURA 39 – MODELO MECÂNICO LINEAR 2 EQUACIONAMENTO



FONTE: O Autor (2022).

Pelo equilíbrio temos:

$$\begin{aligned}\sum F_x = 0 : A_x + B_x &= -H \\ \sum F_y = 0 : A_y + B_y &= V \\ \sum M_A = 0 : B_y &= \frac{Vx_0 + Hy_0}{2x_0}\end{aligned}$$

Considerando o equilíbrio interno da barra 1, tem-se:

$$\sum F_y = 0 : B_y - V = N_1 \text{sen}(\theta)$$

Substituindo a expressão obtida anteriormente para  $B_y$ , chega-se:

$$N_1 = \frac{Vx_0 + Hy_0 - 2x_0V}{2x_0 \text{sen}(\theta)} \Rightarrow N_1 = \frac{H}{2 \cos(\theta)} - \frac{V}{2 \text{sen}(\theta)}$$

Considerando o equilíbrio interno da barra 2, aproveitando o valor de  $N_{CA}$  obtido, tem-se:

$$\begin{aligned}\sum F_y = 0 : N_1 \text{sen}(\theta) + N_2 \text{sen}(\theta) &= V \\ \text{sen}(\theta) \left\{ \left[ \frac{H}{2 \cos(\theta)} - \frac{V}{2 \text{sen}(\theta)} \right] + N_2 \right\} &= -V \Rightarrow N_2 = -\frac{H}{2 \cos(\theta)} - \frac{V}{2 \text{sen}(\theta)}\end{aligned}$$

Sendo assim, o esforço normal nas barras 1 e 2 são descritos respectivamente por  $N_1$  e  $N_2$

$$N_1 = \frac{H}{2 \cos(\theta)} - \frac{V}{2 \text{sen}(\theta)} \quad (103)$$

$$N_2 = -\frac{H}{2 \cos(\theta)} - \frac{V}{2 \text{sen}(\theta)} \quad (104)$$

Como a barra 1 pode sofrer esforços de compressão e tração os estados limites possíveis são a ruptura por tração e a flambagem conforme visto no item 2.3.1 e 2.3.2 respectivamente. Sendo assim, conforme expressa a equação (80), considera-

se a resistência  $R$  da barra 1 dada pelo limite de resistência à tração do material, descrita pela equação (11) e a sollicitação  $S$  dada pelo esforço normal. Já para a flambagem, considera-se a resistência  $R$  da barra dada pela carga crítica de flambagem, descrita pela equação (12), e a sollicitação  $S$  dada pelo esforço normal.

Para o caso em que há flambagem nas barras os esforços são tomados por seus valores absolutos. Assim, os estados limites ficam:

$$\phi_{T1}(\sigma_s, r_1, H, V) = A_1 \sigma_s - N_{CA} = A_1 \sigma_s - \left[ \frac{H}{2 \cos(\theta)} - \frac{V}{2 \text{sen}(\theta)} \right], [kN] \quad (105)$$

$$\phi_{E1}(E, r_1, H, V) = \frac{\pi^2 E I_1}{l_0^2} - N_{CA} = \frac{\pi^2 E I_1}{l_0^2} - \left[ -\frac{H}{2 \cos(\theta)} + \frac{V}{2 \text{sen}(\theta)} \right], [kN] \quad (106)$$

$$\phi_{E2}(E, r_2, H, V) = \frac{\pi^2 E I_2}{l_0^2} - N_{CB} = \frac{\pi^2 E I_2}{l_0^2} - \left[ \frac{H}{2 \cos(\theta)} + \frac{V}{2 \text{sen}(\theta)} \right], [kN] \quad (107)$$

### 3.2.2 Modelo de confiabilidade estrutural

A TABELA 5 apresenta alguns dados de variáveis aleatórias propostos para a análise de confiabilidade para o modelo mecânico linear anterior, sendo os parâmetros  $\sigma_s$ ,  $E$ ,  $H$ ,  $V$ ,  $r_1$  e  $r_2$  dados pelos valores característicos descritos na TABELA 4.

TABELA 5 – VARIÁVEIS ALEATÓRIAS DA ESTRUTURA 2

variáveis	Média ( $\mu$ )	CV	FDP
$E$	$1,0 E$	0,03	normal
$\sigma_s$	$1,0 \sigma_s$	0,1	normal
$H$	$1,0 H$	0,2	normal
$V$	$1,0 V$	0,2	normal
$r_1$	$1,0 r_1$	0,1	uniforme
$r_2$	$1,0 r_2$	0,1	uniforme

FONTE: Adaptada de Beck (2019).

Embora as forças e o módulo de elasticidade sejam modelados por distribuições normais, a probabilidade de atingirem valores negativos é muito pequena, sendo então desprezadas. Computacionalmente essa hipótese é cumprida verificando se essas VA apresentam valores negativos.

No caso das variáveis aleatórias  $r_1$  e  $r_2$ , para se obter os parâmetros  $a$  e  $b$  utilizaram-se a equação (55) e (56) respectivamente, obtendo assim:

$$a_1 = 3,307 \text{ mm}, a_2 = 4,693 \text{ mm}$$

$$b_1 = 4,693 \text{ mm}, b_2 = 6,101 \text{ mm}$$

Ainda considerando uma probabilidade de falha na ordem de  $10^{-3}$ , pela equação (94), fixado um coeficiente de variação em  $10^{-1}$ , o número de amostras necessárias para a análise de confiabilidade é na ordem de  $10^5$ .

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

### 4.1 ESTUDO DE CASO 1

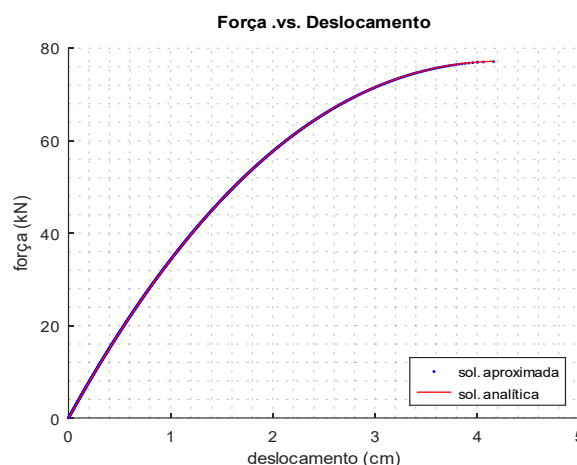
#### 4.1.1 Análise linear e probabilística

Considerando os dados da TABELA 3, o valor de probabilidade de falha  $P_f$  por flambagem descrita pela equação (96) pelo método de SMC foi de  $1,9 \cdot 10^{-4}$  ou 0,019%, sendo a confiabilidade  $\mathcal{R}$  dada por 0,9998 ou 99,98%. Comparando o valor de  $P_f$  obtido com valores típicos para estruturas, como os apresentados na TABELA 1, a estrutura apresenta valores de probabilidade de falha adequados para a consideração de segurança estrutural.

#### 4.1.2 Análise não-linear geométrica e probabilística

Para fins de validação da rotina do método de Newton-Raphson, utilizando a análise NLG com os parâmetros dados sob uma consideração determinística, para uma força  $V = -100 \text{ kN}$ , tolerância de  $tol = 10^{-10}$ , incrementos de cargas tomados na ordem de  $nincr = 10^4$  e número máximo de iterações admissível na ordem de  $k_{max} = 10^3$ , obteve-se valores de força e deslocamentos respectivamente iguais a  $-77,170 \text{ kN}$  e  $-4,1895 \text{ cm}$ . Comparando o resultado com o valor analítico da força descrita pela equação (97) a solução convergiu para o valor exato.

GRÁFICO 1 – CAMINHO DE EQUILIBRIO DA ESTRUTURA



FONTE: O Autor (2022).

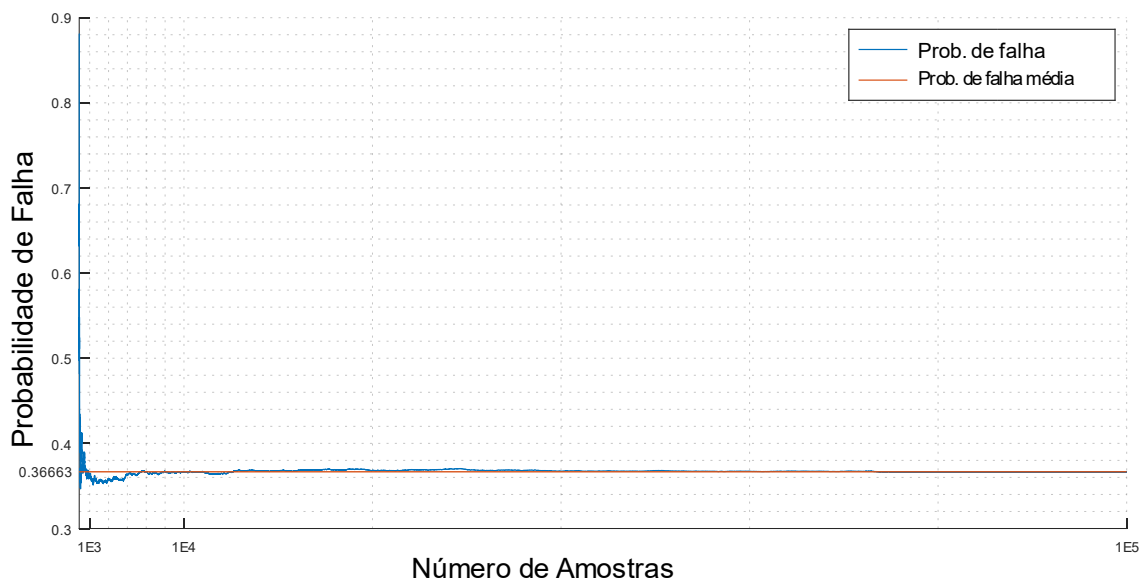
Deve-se salientar que no GRÁFICO 1, para esta monografia, a trajetória de equilíbrio foi admitida até o primeiro ponto limite obtido. Isto pois, para fins da análise de confiabilidade, a primeira falha da estrutura por *snap-through* já caracteriza uma situação desfavorável. Sendo assim, os demais pontos limites da trajetória de equilíbrio foram desconsiderados.

Constatou-se que sob a análise determinística, a adoção de valores de  $nincr$  menores que  $10^3$  implicam na não captura da falha por *snap-through*. Já o aumento desse parâmetro não influencia na precisão do resultado. Sendo assim, o valor do incremento de carga mínimo adotado nesta análise probabilística foi de  $nincr = 10^4$ .

Considerando os dados da TABELA 3, o valor de probabilidade de falha obtido foi de  $P_f = 0,3666$  ou 36,663 %, com um tempo de processamento de aproximadamente 6 h. Sendo assim, a partir da equação (75), a confiabilidade do problema é de  $\mathcal{R} = 0,6334$  ou 63,4%.

A partir do GRÁFICO 2 percebe-se que para um número de amostras na ordem de  $10^4$  se obtém uma estimativa para a probabilidade de falha. Para amostras menores, a probabilidade de falha oscila em torno da  $P_f$  obtida. O gráfico apresenta duas curvas, uma corresponde a probabilidade de falha obtida a medida que a simulação identifica as falhas e a outra corresponde a probabilidade de falha média, ou seja, o valor de probabilidade de falha obtido pela SMC.

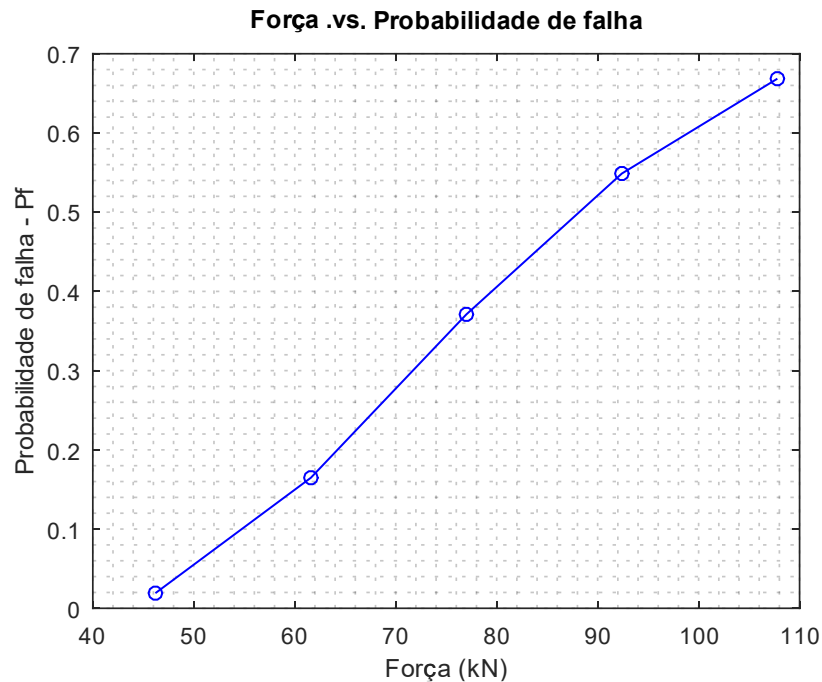
GRÁFICO 2 – CONVERGÊNCIA DO MÉTODO



FONTE: O Autor (2022).

A fim de complementar a discussão acerca da não linearidade do problema diante da aleatoriedade das variáveis, propõe-se analisar a influência da variação da média da carga no valor da probabilidade de falha. Para isso escolheram-se quatro pontos adicionais, dados em relação à média original de 77 kN.

GRÁFICO 3 – INFLUÊNCIA NO AUMENTO DA MÉDIA DA FORÇA  $V$  NA  $P_f$



FORTE: O Autor (2022).

O GRÁFICO 3 mostra a influência do aumento e diminuição do valor médio da força na probabilidade de falha. A TABELA 6 mostra os valores obtidos para a probabilidade de falha em cada valor assumido para a média.

TABELA 6 – PROBABILIDADE DE FALHA DIANTE DA MUDANÇA DO CARREGAMENTO

Média ( $\mu$ )	Probabilidade de Falha ( $P_f$ )	Referência a média
-46,20 kN	$1,910.10^{-2}$	$\mu - 2\sigma$
-61,60 kN	$1,648.10^{-1}$	$\mu - 1$
-77 kN	$3,666.10^{-1}$	$\mu$
-92,40 kN	$5,488.10^{-1}$	$\mu + 1$
-107,80 kN	$6,685.10^{-1}$	$\mu + 2\sigma$

FORTE: O Autor (2022).

## 4.2 ESTUDO DE CASO 2

### 4.2.1 Confiabilidade de sistemas

Considerando os dados de entrada da TABELA 5, os valores de probabilidade individuais e a probabilidade do sistema obtidas pelo método de SMC estão descritas conforme a TABELA 7.

TABELA 7 – CONFIABILIDADE DO SISTEMA

Modo de Falha	Descrição da Falha	Probabilidade de Falha ( $P_f$ )	Confiabilidade ( $\mathcal{R}$ )
$\mathcal{G}_{T1}$	Ruptura por tração na barra 1	$8,700.10^{-4}$	$9,990.10^{-1}$
$\mathcal{G}_{E1}$	Flambagem da barra 1	$4,070.10^{-3}$	$9,959.10^{-1}$
$\mathcal{G}_{E2}$	Flambagem da barra 2	$2,910.10^{-2}$	$9,709.10^{-1}$
$\mathcal{G}_{sys}$	Falha do sistema	$3,392.10^{-2}$	$9,661.10^{-1}$

FONTE: O Autor (2022).

Nota-se que a soma de cada estado limite corresponde a  $3,404.10^{-2}$ . Comparando esse valor com a probabilidade de falha dada pelo sistema  $\mathcal{G}_{sys}$ ,  $3,392.10^{-2}$ , tem-se um erro relativo de 0,35%. Isto representa que os estados limites considerados apresentam baixa dependência.

Essa evidência também foi constatada por Beck (2019) em seu problema proposto que serviu de base para o estudo de caso 2.

## 5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Através desta monografia apresentaram-se alguns estudos de caso avaliando os aspectos da não linearidade geométrica e confiabilidade estrutural, explorando as técnicas computacionais para resolução de problemas numéricos, como o método de Newton-Raphson incremental e a simulação de Monte Carlo.

Verificou-se que a estrutura proposta no estudo de caso 1 pouco é influenciada pelo modo de falha por flambagem de Euler. Em contrapartida, a consideração da análise não-linear geométrica no problema mostrou que a estrutura é fortemente afetada pelo modo de falha por *snap-through*. Além disso, a partir do GRÁFICO 2, nota-se que a probabilidade de falha estabiliza para um número de amostras na ordem de  $10^4$ .

No que se refere ao estudo de caso 2, embora os valores de probabilidade de falha tenham apresentados valores na ordem de  $10^{-3}$  a  $10^{-2}$ , verificou-se que modo de falha mais crítico é a flambagem na barra 2, implicando na diminuição da confiabilidade do sistema.

Outro ponto importante refere-se ao tempo de processamento. Para a análise não-linear geométrica em conjunto com a análise de confiabilidade constatou-se um tempo de processamento acima de 6 h para um espaço amostral com  $10^5$  pontos e um número de incrementos de carga na ordem de  $10^4$ . Tendo em vista que nesse estudo de caso somente avaliou-se um estado limite, para estruturas mais complexas sob múltiplos modos de falhas a análise pode implicar em um custo computacional elevado. Uma forma de contornar esse problema, conforme mencionado por Kroetz (2015), consiste na utilização de técnicas de amostragem inteligentes, que a partir de estratégias de seleção de amostra tornaram possível a convergência da SMC para quantidades menores de pontos amostrais.

### 5.1 RECOMENDAÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para trabalhos futuros baseados nestes estudos de caso é proposta a consideração da não linearidade física do problema. Além disso, também pode ser conveniente avaliar a probabilidade de falha da estrutura dependendo do tempo. Outra recomendação consiste em avaliar a estrutura sob análise não linear geométrica com dois graus de liberdade tomando-se a estrutura do estudo de caso 2 como referência.

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, M. C. F. DE. **Estruturas isostáticas**. 1. ed. São Paulo: oficina de textos, 2009.
- ANG, A. H.-S.; TANG, W. H. **Probability Concepts in Engineering: Emphasis on Applications to Civil and Environmental Engineering**. 2. ed. United States of America: John Wiley & Sons, 2007.
- ARAÚJO, J. M. DE. **Curso de Concreto Armado**. 3. ed. Rio Grande: Dunas, 2010. v. 1
- BARROSO, L. C. et al. **Cálculo Numérico - com aplicações**. 2. ed. São Paulo: Harbra, 1987.
- BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. New Jersey: Prentice Hall, 2006.
- BAZANT, Z. P.; CEDOLIN, L. **Stability of Structures**. Singapore: WORLD SCIENTIFIC, 2010.
- BECK, A. T. **Um método para Análise de Confiabilidade para Elementos Finitos**. 1999. 180 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Mecânica, Centro Tecnológico, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 1999
- BECK, A. T. **Confiabilidade e Segurança das Estruturas**. 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.
- BEER, F. P. et al. **Mecânica Dos Materiais**. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2011.
- BEER, F. P.; JOHNSTON JR, E. R. **Mecânica Vetorial para Engenheiros - Estática**. 5. ed. São Paulo: Makron Books, 1991.
- BUSSAB, W. DE O.; MORETTIN, P. A. **Estatística Básica**. 6. ed. [s.l.] Saraiva, 2010.
- CAMPOS, M. A.; RÊGO, L. CHAVES; MENDONÇA, A. F. DE. **Métodos Probabilísticos e Estatísticos com Aplicações em Engenharias e Ciências Exatas**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.
- COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON (CEB). **Code-modèle CEB/FIP pour les Structures em Béton**. 1978. Relatório técnico.
- CHAPRA, S. C. **Métodos Numéricos Aplicados com MATLAB® para Engenheiros e Cientistas**. 3. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.
- COSTA NETO, P. L. DE O.; CYMBALISTA, M. **Probabilidades**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 2006.

DEVORE, J. L. **Probabilidade e estatística para engenharia e ciências**. 9. ed. São Paulo: Cengage, 2018.

FELIPE, T. R. C. **Análise Mecânica e Probabilística de Estruturas Treliçadas Sujeitas ao Colapso Progressivo**. 2019. 160 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Pós-Graduação em Engenharia Civil, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

FÉODOSIEV, V. **Resistência dos Materiais**. Porto: Livraria Lopes da Silva, 1977.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas - uma introdução com aplicações usando o MATLAB**. Porto Alegre: Bookman, 2008.

GUPTA, B. C.; GUTTMAN, I. **Estatística e Probabilidade com Aplicações para Engenheiros e Cientistas**. 1. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2017.

HIBBELER, R. C. **Resistência dos Materiais**. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de matemática elementar: Conjuntos Funções**. 9. ed. São Paulo: Atual editora, 2013. v. 1

KASSIMALI, A. **Análise Estrutural**. 5. ed. São Paulo: Cengage Learning , 2015.

KIMURA, A. **Informática Aplicada em Estruturas de Concreto Armado - cálculo de edifícios com o uso de sistemas computacionais**. São Paulo: Pini, 2007.

KROETZ, H. M. **Meta-modelagem em Confiabilidade Estrutural**. 2015. 112 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

KROETZ, H. M. **Otimização estrutural sob incertezas: métodos e aplicações**. 2018. 141 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

LACERDA, E. G. M. **Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional**. 2014. 92 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

LEET, K. M.; UANG, C.-M.; GILBERT, A. M. **Fundamentos da análise estrutural**. 3. ed. Porto Alegre: AMGH, 2010.

LOPES, M. T. A. **Análise de confiabilidade de estruturas aplicada ao projeto de reforço à força cortante de vigas em concreto armado com compósitos de fibras de carbono**. 2007. 209 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2007.

MAI, C.;SUDRET, B. **Surrogate models for oscillatory systems using sparse polynomial chaos expansions and stochastic time warping**.SIAM/ASA J. Unc. Quat., v. 5, p.540-571, 2017.

MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas - Conceitos e Métodos Básicos**. 3. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2022.

MENDES, T. M. P. **Análise não-linear física e geométrica de sistemas apertados com elementos de rigidez variável em concreto armado**. 2017. 92 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Escola de Minas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2017.

MERIAM, J. L.; KRAIGE, L. G. **Mecânica para Engenharia - Estática**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011. v. 1

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros**. 7. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2021.

NATIONAL TRANSPORTATION SAFETY BOARD (NTSB). **Highway accident report interstate 35W collapse over the Mississippi River Minneapolis, Minnesota, August 1, 2007**. 2008. Relatório técnico.

PANTOJA, J. da C. **Geração automática via otimização topológica e avaliação de segurança de modelos de bielas e tirantes**. 2012. 240 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

PROENÇA, S. P. B. **Curso de resistência dos materiais**. São Paulo: Eesc/Usp, 2018.

RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. DA R. **Cálculo Numérico -aspectos teóricos e computacionais**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1996.

SÁLES, J. J.; MUNAIR NETO, J.; MALITE, M. **Segurança nas Estruturas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

SORIANO, H. L. **Estática das Estruturas**. 3. ed. São Paulo: Ciência Moderna, 2013.

SORIANO, H. L.; LIMA, S. DE S. **Análise de Estruturas - Método das Forças e Método dos Deslocamentos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2006.

SOUZA, Y. P. **Introdução à teoria da estabilidade com implementação numérica**. 2018. 154 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Centro Tecnológico, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2018.

SUSSEKIND, J. C. **Curso de Análise Estrutural - Estruturas Isostáticas**. Rio de Janeiro: Globo, 1981. v. 1

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. E. **Mecânica dos Sólidos**. Rio de Janeiro: LTC, 1983. v. 1

VAZ, L. E. **Análise de Confiabilidade – DME**. Escola Politécnica da UFRJ, Notas de Aula, Rio de Janeiro, 2011.

WAHRHAFTIG, A. DE M. **Ação do vento em estruturas esbeltas com efeito geométrico**. 2. ed. São Paulo: Blucher Open Access, 2017.

WALPOLE, R. E.; MYERS, R. H.; MYERS, S. L. **Probabilidade e Estatística para Engenharia e Ciências**. 8. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2009.

## GLOSSÁRIO

**Ações/carregamentos externos:** forças e/ou momentos, ativos e reativos; variação de temperatura; deslocamentos prescritos; e deformação prévia (SORIANO; LIMA, 2006).

**Análise de primeira ordem:** Análise baseada na geometria original da estrutura, na qual as deformações são consideradas insignificantes (LEET; UANG; GILBERT, 2010).

**Análise de segunda ordem:** Análise que leva em conta o efeito dos deslocamentos dos nós nas forças em uma estrutura submetida a deslocamentos significativos (LEET; UANG; GILBERT, 2010).

**Centroide/centro geométrico:** ponto que define o centro geométrico de um corpo.

**Deformação:** mudança da posição relativa dos pontos de um corpo em relação a pontos vizinhos após a ação de ações, do inglês *strain* (LACERDA, 2014).

**Deslocamento:** vetor posição cuja origem é um ponto pertencente ao corpo e a extremidade é o mesmo ponto no corpo após a deformação (FÉODOSIEV, 1977).

**Esforços seccionais ou solicitantes:** esforços internos gerados em cada seção transversal de um elemento reticulado, sendo estes: esforço normal, esforço cortante, momento fletor e momento torçor (SORIANO; LIMA, 2006).

**Estrutura reticulares:** elementos unidimensionais os quais preponderam uma dimensão em relação às demais (SORIANO; LIMA, 2006).

**Estrutura:** sistema físico capaz de receber e transmitir esforços (SORIANO; LIMA, 2006).

**Forças de corpo:** ocorrem pela ação de um corpo sobre outro sem a necessidade de um contato físico direto (HIBBELER, 2004).

**Forças de superfície:** ocorrem pelo contato direto entre superfícies (HIBBELER, 2004).

**Graus de liberdade:** refere-se as seis tendências de movimento possíveis de um corpo, sendo esses três translações e três rotações (SORIANO; LIMA, 2006).

**Módulo de elasticidade:** Medida da rigidez de um material, definida como a relação da tensão dividida pela deformação e representada pela variável  $E$  (LEET; UANG; GILBERT, 2010).

**Momento de inércia:** Ou momento de segunda ordem, consiste em uma propriedade de uma área de seção transversal que é uma medida da capacidade de curvatura de uma seção (LEET; UANG; GILBERT, 2010).

**Mudança de configuração:** mudança da posição do corpo sem variação da posição relativa após a ação de ações, do inglês *deformation* (LACERDA, 2014).

**Princípio da superposição:** As tensões e deformações produzidas por um conjunto de forças são idênticas àquelas produzidas pela adição dos efeitos das forças individuais (LEET; UANG; GILBERT, 2010).

**Seção transversal:** seção perpendicular ao eixo geométrico do elemento reticulado (SORIANO; LIMA, 2006).

**Sistemas de forças:** conjunto de uma ou mais forças e/ou momentos.

## ANEXO A – CÓDIGO FONTE

### FUNÇÃO SMCL – ESTUDO DE CASO 1 PARA O PROBLEMA LINEAR

A função utiliza o método de SMC verificando o estado limite dado pela equação (96).

$V$ : distribuição normal de probabilidade de força aplicada sob a estrutura;  
 $E$ : distribuição normal de probabilidade de módulo de elasticidade da barras;  
 $lin$ : número de amostras;  
 $y_0, x_0, l_0$ : parâmetros geométricos da estrutura;

```
% =====
% = ARQUIVO: SMCL.m
% = ESTUDO DE CASO 1
% = METODO: SIMULACAO DE MONTE CARLO
% = ASSUNTO: resolucao de um problema linear
% = AUTOR: VITOR HUGO MENDES DE OLIVEIRA
% =====

pkg load statistics;
clear;
clc;

% == VARIAVEIS

y0 = 10; % altura inicial da estrutura
x0 = 200; % base da estrutura
L0 = 200.25; % comprimento inicial
n_flgab = 0; % contador de falha por flambagem

% == VETORES

lin = 1E5; % n de linhas dos vetores
E = normrnd(20500E3, 0.03*20500E3, [1, lin]); % modulo de Elasticidade (Pa)
r = unifrnd(4.134,5.866, [1, lin]); % raio da barra (cm), do menor para o maior ponto do intervalo
V = normrnd(77E3, 0.2*77E3, [1, lin]); % carregamento (N)

% == MAIN

for(i = 1:lin) % SMC

    I = (pi*(r(i))^4)/4;
    ge = (pi^2)*E(i)*I/(L0^2)-abs(L0*V(i)/(2*y0)); % flambagem

    if(ge < 0)

        printf("\n falha por flambagem de Euler \n")
    end
end
```

```
V(i)/1000
n_flmab++;
end
end

'probabilidade de falha por snap-throug: '
printf("%f %%",100*n_flmab/lin)
printf("\n")
```

## FUNÇÃO NEWTONINCRFALHA – ESTUDO DE CASO 1 PARA O PROBLEMA NLG

A função utiliza o método de Newton-Raphson com análise incremental de carga, assim seus parâmetros de entrada da função consistem nas variáveis:

$V$ : força aplicada sob a estrutura;

$E$ : módulo de elasticidade da barra;

$A$ : área da seção transversal da barra, em função do raio  $r$ ;

$y_0, x_0, l_0$ : parâmetros geométricos da estrutura;

$k_{max}$ : número máximo de iterações no método de Newton-Raphson;

$nincr$ : número de incrementos de carga;

$tol$ : tolerância admissível;

```
% =====
% = ARQUIVO: newtonincrfalha.m
% = METODO: NEWTON-RAPHSON INCREMENTAL
% = ASSUNTO: resolucao de um problema NLG
% =      utilizando o metodo de newton-
% =      raphson incremetal - verifica a
% =      primeira falha
% = AUTOR: VITOR HUGO MENDES DE OLIVEIRA
% =====

function y=newtonincrfalha(V, E, A, y0, x0, L0, kmax, nincr, tol)

% == SUB-FUNCOES

% eps: epsilon (deformacao de Green)
function s=eps(u, y0, L0)
    s = (2*y0*u+(u^2))/(2*(L0^2));
end

% derivada de eps: epsilon
function s=deps(u, y0, L0)
    s = (y0+u)/(L0^2);
end

% tangente de rigidez Kt
function s=Kt(u, E, A, y0, L0)
    s=E*A*deps(u, y0, L0)*(y0+u)/L0 + E*A*eps(u, y0, L0)/L0;
end

% == MAIN

df = V/nincr; % define o incremento de carga

u = 0; u0 = 0; f = 0; q = 0; g = 0; % instancia as variaveis do problema

vu(1)=0; % veotr de deformacao
```

```

vf(1)=0; % vetor de incrementos de forza

ktotal=0;
ierro=0;
falha = 0;

for (i=2:nincr)

    f = f+df;
    k=0;

    g = E*A*eps(u,y0,L0)*(y0+u)/L0 - f/2;

    while (k<kmax)

        k=k+1;

        du=-g/Kt(u, E, A, y0, L0);
        u=u0+du;
        u0=u;

        g = E*A*eps(u,y0,L0)*(y0+u)/L0 - f/2;

        if (abs(g)<=abs(tol*df)) % verificacao da tolerancia
            break
        end
    end

    if (k==kmax) % nao ocorreu snap-through ou este não foi obtido para esse kmax

        %printf("\n não houve snap-throug \n")
        ierro=ierro+1;
        falha = 0;
        break
    end

    if(y0-abs(u)<0) % verificacao da ocorrencia de snap-through

        %printf("\n snap-throug \n")
        falha = 1;
        break
    else
        falha = 0;
    end

end

y=falha;
end

```

## FUNÇÃO SMCNLG – ESTUDO DE CASO 1 PARA O PROBLEMA LINEAR

A função utiliza o método de SMC com a análise incremental de Newton-Raphson, em que utiliza-se a função descrita anteriormente acoplada ao código. Os parâmetros necessários, além dos já mencionados para a função **newtonincrfalha()** são:

- V*: distribuição normal de probabilidade de força aplicada sob a estrutura;
- E*: distribuição normal de probabilidade de módulo de elasticidade da barra;
- r*: distribuição uniforme raio *r* da seção transversal da barra;
- lin*: número de amostras;

```
% =====
% = ARQUIVO: SMCNLG.m
% = METODO: SIMULACAO DE MONTE CARLO COM
% =     NEWTON-RAPHSON INCREMENTAL
% = ASSUNTO: resolucao de um problema NLG
% =     utilizando o metodo de newton-
% =     raphson incremetal sob consi-
% =     deracao probabilistica
% = AUTOR: VITOR HUGO MENDES DE OLIVEIRA
% =====

pkg load statistics;
clear;
clc;

% == VARIAVEIS

y0 = 10; % altura inicial da estrutura
x0 = 200; % base da estrutura
L0 = 200.25; % comprimento inicial
n_snapthroug = 0; % contador de falha por snap-throug

% --- variaveis complementares NLG

kmax = 1E4; % num. maximo de iteracoes
nincr = 1E4; % num. de incrementos de carga
tol = 1E-10; % tolerancia

% == VETORES

lin = 1E5; % n de linhas dos vetores
E = normrnd(20500E3, 0.03*20500E3, [1, lin]); % modulo de Elasticidade (Pa)
r = unifrnd(4.134,5.866, [1, lin]); % raio da barra (cm), do menor para o maior ponto do intervalo
V = normrnd(77E3, 0.2*77E3, [1, lin]); % carregamento (N)

% == MAIN

for(i = 1:lin) % SMC
```

```
A = pi*(r(i))^2; % area da secao transversal da barra;  
falha = newtonincrfalha(-V(i), E(i), A, y0, x0, L0, kmax, nincr, tol);
```

```
if(falha > 0)  
    i  
    printf("\n snap-throug \n")  
    n_snapthroug++;  
end  
end
```

```
'probabilidade de falha por snap-throug: '  
printf("%f %%", 100*n_snapthroug/lin)  
printf("\n")
```

## FUNÇÃO SMCSIS – ESTUDO DE CASO 2 PARA O PROBLEMA LINEAR COM CONFIABILIDADE DE SISTEMAS

A função utiliza o método de SMC para determinar a probabilidade de falha de sistemas.

$V$ : distribuição normal de probabilidade de força aplicada sob a estrutura;  
 $H$ : distribuição normal de probabilidade de força aplicada sob a estrutura;  
 $E$ : distribuição normal de probabilidade de módulo de elasticidade da barra;  
 $r_1$ : distribuição uniforme raio  $r_1$  da seção transversal da barra 1;  
 $r_2$ : distribuição uniforme raio  $r_2$  da seção transversal da barra 2;  
 $\sigma_u$ : distribuição uniforme da tensão de limite da barra 1 a ruptura por tração;  
 $lin$ : número de amostras;

```
% =====
% = ARQUIVO: SMCSIS.m
% = METODO: SIMULACAO DE MONTE CARLO COM
% = ASSUNTO: resolucao de um problema com
% =      confiabilidade de sistemas
% =      em serie
% = AUTOR: VITOR HUGO MENDES DE OLIVEIRA
% =====

pkg load statistics;
clear;
clc;

% == VARIAVEIS

lin = 1E5; % n de linhas dos vetores

k = 1/2;
a = 300E-3;
b = k*a;

L = sqrt((a^2)+(b^2)); % comprimento (m)

% == VETORES

% modulo de Elasticidade (Pa)
E = normrnd(70E9, 0.03*70E9, [1, lin]);

% tensao ultima (Pa)
sigma_u1 = normrnd(24.5643E6, 0.1*24.5643E6, [1, lin]);

% raio da barra (m)
r1 = unifrnd(3.207E-3, 4.693E-3, [1, lin]);
```

```

r2 = unifrnd(4.693E-3, 6.101E-3, [1, lin]); %r2 = unifrnd(4.8E-3, 5.2E-3, [1, lin]);

% carregamento (N)
H = normrnd(2E3, 0.2*2E3, [1, lin]);
V = normrnd(1E3, 0.2*1E3, [1, lin]);

% contador de falha
n_falha_total = 0;
n_falha_flamb1 = 0;
n_falha_flamb2 = 0;
n_falha_trac1 = 0;

% == MAIN

alpha = atan(b/a);

for(i = 1:lin);

    % area (m2)
    A1 = pi*r1(i)^2;
    A2 = pi*r2(i)^2;

    % momento de 2ª ordem/momento de inercia de area (m4)
    I1 = pi*r1(i)^4/4;
    I2 = pi*r2(i)^4/4;

    % estado limite 1 (escoamento por tracao da barra 1)
    gt1 = A1*sigma_u1(i)-((H(i)/(2*cos(alpha))) - (V(i)/(2*sin(alpha))));

    % estado limite 2 (flambagem da barra 1)
    gb1 = (pi^2)*E(i)*I1/(L^2) - ((H(i)/(2*cos(alpha))) + (V(i)/(2*sin(alpha))));

    % estado limite 3 (flambagem da barra 2)
    gb2 = (pi^2)*E(i)*I2/(L^2) - ((H(i)/(2*cos(alpha))) + (V(i)/(2*sin(alpha))));

    % ocorrencia de falha
    if(gt1 < 0 || gb1 < 0 || gb2 < 0);

        n_falha_total++;

        % OBS: a estrutura pode falhar da seguinte formato
        % - somente ruptura por tracao da barra 1
        % - somente flambagem da barra 1
        % - somente flambagem da barra 2
        % - ruptura por tracao da barra 1 e flambagem da barra 2
        % - flambagem da barra 1 e 2

        if(gt1 < 0);

            n_falha_trac1++;

        endif;

        if(gb1 < 0);

            n_falha_flamb1++;

        endif;

        if(gb2 < 0);

```

```
    n_falha_flamb2++;  
  
    endif;  
  
    endif;  
endfor;  
  
'probabilidade de falha por tração: '  
printf("%f %%",100*n_falha_trac1/lin)  
printf("\n")  
  
'probabilidade de falha por flambagem da barra 1: '  
printf("%f %%",100*n_falha_flamb1/lin)  
printf("\n")  
  
'probabilidade de falha por flambagem da barra 2: '  
printf("%f %%",100*n_falha_flamb2/lin)  
printf("\n")  
  
'probabilidade de algum estado limite falhar: '  
printf("%f %%",100*n_falha_total/lin)
```