



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
WESLEY DOS SANTOS VILLELA BATISTA

SECÇÕES NO QUIVER DE AUSLANDER-REITEN DA CATEGORIA DERIVADA DE ÁLGEBRAS
HEREDITÁRIAS POR PARTES

CURITIBA

2022

WESLEY DOS SANTOS VILLELA BATISTA

SECÇÕES NO QUIVER DE AUSLANDER-REITEN DA CATEGORIA DERIVADA DE ÁLGEBRAS
HEREDITÁRIAS POR PARTES

Tese apresentada como requisito parcial à obtenção
do grau de Doutor em Matemática, no Programa de
Pós-Graduação em Matemática, Setor de Ciências
Exatas, da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Edson Ribeiro Alvares.

CURITIBA

2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA DE CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Batista, Wesley dos Santos Villela

Secções no quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada de álgebras hereditárias por partes / Wesley dos Santos Villela Batista. – Curitiba, 2022.
1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Orientador: Edson Ribeiro Alvares

1. Álgebra. 2. Álgebras hereditárias. 3. Auslander-Reiten, Quiver de. I. Universidade Federal do Paraná. II. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Alvares, Edson Ribeiro. IV. Título.

Bibliotecário: Elias Barbosa da Silva CRB-9/1894

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação MATEMÁTICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **WESLEY DOS SANTOS VILLELA BATISTA** intitulada: **SECÇÕES NO QUIVER DE AUSLANDER-REITEN DA CATEGORIA DERIVADA DE ÁLGEBRAS HEREDITÁRIAS POR PARTES**, sob orientação do Prof. Dr. EDSON RIBEIRO ALVARES, que após terem inquirido o aluno e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutor está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 31 de Agosto de 2022.

Assinatura Eletrônica
01/09/2022 16:13:59.0
EDSON RIBEIRO ALVARES
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
01/09/2022 16:42:59.0
VIKTOR BEKKERT
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS)

Assinatura Eletrônica
05/09/2022 19:28:50.0
HERNÁN ALONSO GIRALDO SALAZAR
Avaliador Externo (UNIVERSIDAD DE ANTIOQUIA)

Assinatura Eletrônica
01/09/2022 16:09:05.0
MARCELO MUNIZ SILVA ALVES
Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
01/09/2022 18:12:51.0
EDUARDO DO NASCIMENTO MARCOS
Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente agradeço a Deus pela oportunidade de desenvolver tal estudo sempre com saúde, disposição e por estar acompanhado de pessoas maravilhosas que fizeram parte dessa caminhada. Agradeço a todas as pessoas que me ajudaram e me apoiaram durante minha formação. Em especial meus pais, Celso Villela Batista Junior e Luzia Carvalho dos Santos, que sempre me apoiaram ao longo da minha vida acadêmica. Também agradeço minha namorada, Janaina Rayane Rodrigues, por estar ao meu lado me apoiando e por continuar acreditando em mim, mesmo nos momentos em que nem mesmo eu acreditava.

Ao meu orientador Edson Ribeiro Alvares, agradeço pela amizade, dedicação e confiança que já completam quase oito anos, desde o início da minha jornada. Também gostaria de agradecer ao professor Marcelo Muniz Silva Alves pela amizade, pelas conversas e por ter me inspirado, a quase uma década atrás, a seguir a carreira acadêmica.

Por fim, agradeço a todos os meus amigos do PPGM pelos vários momentos agradáveis que pudemos compartilhar. Em especial ao Cristian Schmidt, Tiago Luiz Ferrazza, Wagner Augusto Almeida de Moraes e Welington Santos.

Agradeço ao PPGM pela oportunidade e apoio dados nesses anos, em especial a Cinthia Souza por sempre se mostrar dispostas a me ajudar durante essa caminhada.

*“A mente que se abre a uma nova ideia
jamais voltará ao seu tamanho original.”*

Albert Einstein

*“A ciência nunca resolve um problema
sem criar pelo menos outros dez.”*

George Bernard Shaw

RESUMO

Sejam A e H duas k -álgebras de dimensão finita, com H hereditária. Dizemos que A é hereditária por partes, do tipo H , se existe uma equivalência triangulada entre as categorias derivadas limitadas de $\text{mod}(A)$ e $\text{mod}(H)$. O objetivo deste trabalho é apresentar um método intrínseco para a construção do quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada de algumas classes de álgebras hereditárias por partes. Apresentaremos um método para as álgebras hereditárias por partes do tipo Dynkin, no qual será construída uma secção no quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada, apenas utilizando shifts de objetos da categoria de módulos. Através de outra abordagem, apresentaremos resultados em relação as álgebras mansas, de radical quadrado zero. Mostraremos um método para a criação de secções na componente transjectiva do quiver de Auslander-Reiten da sua categoria derivada.

Palavras-Chave: Secções; Categoria Derivada; Álgebras hereditárias por partes; Álgebras inclinadas iteradas; Quiver de Auslander-Reiten.

ABSTRACT

Let A and H be finite-dimensional k -algebras, with H hereditary. We say that A is piecewise hereditary of type H , if there is a triangulated equivalence between the bounded derived categories of $\text{mod}(A)$ and $\text{mod}(H)$. The objective of this work is to present an intrinsic method for the construction of the Auslander-Reiten quiver of the derived category of some classes of piecewise hereditary algebras. We will present a method for the piecewise hereditary algebras of type Dynkin, in which a section will be constructed in the Auslander-Reiten quiver of the derived category, using only objects of the category of modules. Through another approach, we will present results in relation to the tame algebras, with radical squared zero. We will show a method for creating sections in the transjective component of the Auslander-Reiten quiver of the derived category.

Keywords: Sections in translation quivers; Derived Category; Piecewise hereditary algebras; Iterated tilted algebra; Auslander-Reiten quiver.

SUMÁRIO

Introdução	9
1 Conceitos básicos	13
1.1 Álgebras de caminhos e representações	13
1.2 Categorias Trianguladas	17
1.3 Categoria dos complexos e de homotopia	20
1.4 Categoria derivada	24
1.5 Teoria inclinante	28
2 Triângulos de Auslander-Reiten na categoria derivada	32
2.1 Algumas propriedades gerais	32
2.2 Algumas propriedades homológicas	34
3 Morfismos irredutíveis em álgebras hereditárias por partes	41
3.1 Morfismos irredutíveis em $\mathcal{T}(T)$ e $\mathcal{F}(T)$	42
3.2 Morfismos irredutíveis na categoria derivada	44
4 Categoria derivada de álgebras hereditárias por partes do tipo Dynkin	56
4.1 A categoria mesh $k\langle\mathbb{Z}\Delta\rangle$	57
4.2 Álgebras hereditárias por partes do tipo \mathbb{A}_n	59
4.3 Álgebras hereditárias por partes do tipo \mathbb{D}_n	72
4.3.1 Secções em \mathbb{D}_n	81
5 Secções na categoria derivada de álgebras de radical quadrado zero	92
5.1 Definindo complexos através de uma graduação em Q_0	92
5.2 Complexo inclinante $T^\bullet = \bigoplus_{a \in Q_0} T_a^\bullet$	101
5.2.1 Um estudo sobre $\text{End}_{\mathcal{D}^b(A)}(T^\bullet)$	115
5.3 Morfismos irredutíveis e o funtor de Koszul	133
5.4 Construção da componente transjectiva de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$	143
Referências	150

Introdução

Seja Λ uma k -álgebra de dimensão finita, o principal objetivo da teoria de representações de álgebras é buscar propriedades interessantes a respeito de Λ , porém realizando um estudo através de sua categoria de módulos. Tal estudo pode ser realizado utilizando diferentes abordagens. Como por exemplo, através do estudo das Sequências de Auslander-Reiten, Álgebra Homológica ou pela Teoria Inclinante. Denotando por $\text{mod}(\Lambda)$ a categoria dos Λ -módulos, à direita, finitamente gerados, temos que nem sempre é possível extrairmos algumas informações diretamente de $\text{mod}(\Lambda)$. Portanto surge, como uma estratégia natural, o fato de realizarmos este estudo por intermédio de uma álgebra B que seja Morita equivalente com Λ , isto é, tal que $\text{mod}(\Lambda)$ seja equivalente a categoria $\text{mod}(B)$. Seguindo este caminho, temos a Teoria Inclinante, a qual foi introduzida por Brenner e Butler (ver [14]). Nesta teoria é feito o uso de um Λ -módulo T , chamado de módulo inclinante e se considera $B = \text{End}_{\Lambda}(T)$ a álgebra a ser estudada, pois neste caso as categorias $\text{mod}(\Lambda)$ e $\text{mod}(B)$ são consideradas muito próximas, porém não necessariamente Morita equivalentes.

Com o passar do tempo, algumas técnicas de abordagem foram generalizadas da categoria de módulos para a categoria derivada. Dentre elas estão as Sequências de Auslander-Reiten e a Teoria Inclinante. Em [20], Happel estendeu a equivalência de Morita para o contexto de categorias derivadas. Podemos pensar que, de certa maneira, a categoria derivada contém a categoria de módulos, portanto a equivalência derivada ainda preserva alguns invariantes. Por exemplo, se as álgebras Λ e B são derivadamente equivalentes, então Λ tem dimensão global finita se, e somente se, B tem dimensão global finita. Além disso, ainda temos outros invariantes que são preservados, como por exemplo o centro dessas álgebras. Porém, dependendo das características da álgebra Λ , estudar a categoria derivada $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ pode ser uma tarefa extremamente difícil.

Happel realizou um estudo a respeito da categoria derivada de álgebras hereditárias de dimensão finita. Ele introduziu os Triângulos de Auslander-Reiten e apresentou uma maneira de construir o quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada dessas álgebras. Tendo em vista que houve avanços em relação aos estudos da categoria derivada de álgebras hereditárias de dimensão finita, é natural nos perguntarmos quais são os tipos de álgebras que são derivadamente equivalentes a elas. Em busca dessa resposta surgiu o conceito de álgebras hereditárias por partes. Um passo determinante nesses estudos foi um resultado obtido por Happel, em que ele prova que categorias derivadas são invariantes na teoria inclinante. Se Λ é uma álgebra de dimensão finita, sobre um corpo algebricamente fechado,

e T é um Λ -módulo inclinante, então $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ e $\mathcal{D}^b(\text{mod } \text{End}_\Lambda T)$ são equivalentes como categorias trianguladas.

Posteriormente Rickard, em [26], apresentou uma condição necessária e suficiente para a equivalência triangulada entre as categorias derivadas $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ e $\mathcal{D}^b(\text{mod } B)$ de duas álgebras A e B . Neste caso, existe o que chamamos de um complexo inclinante $T^\bullet \in \mathcal{D}^b(\text{mod } B)$ tal que T^\bullet gera $\mathcal{D}^b(\text{mod } B)$ como categoria triangulada, $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(B)}(T^\bullet, T^\bullet[n]) = 0$, para todo $n \neq 0$, e $\text{End}_{\mathcal{D}^b(B)} \cong A$. Pela semelhança com o teorema de Morita, costuma-se dizer que Rickard apresentou uma teoria de Morita para as categorias derivadas.

Se uma álgebra A é hereditária, temos que além de existir um mergulho $\text{mod}(A) \hookrightarrow \mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, também existe um mergulho entre seus quivers de Auslander-Reiten, ou seja, um mergulho do quiver $\Gamma(\text{mod}(A))$ em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$. Lenzing mostrou em [23] que se A é uma álgebra hereditária de dimensão finita, então sua categoria derivada pode ser escrita como $\bigvee_{n \in \mathbb{Z}} \text{mod}(A)[n]$, ou seja, ela é dada por colagens de cópias da categoria de módulos. Portanto é possível construir o quiver de Auslander-Reiten dessas categorias sem a necessidade de métodos mais sofisticados. Como por exemplo o método Knitting (ver [3]).

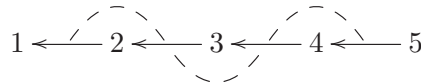
Em geral, nos casos em que A não é hereditária, a construção de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$ é uma tarefa árdua. O que temos na literatura é o desenvolvimento de técnicas específicas para a construção do quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada de algumas classes de álgebras.

Sabemos que se A é hereditária por partes, então $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A)) \cong \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } H))$, em que H é uma álgebra hereditária. Porém apenas saber que os quivers são isomorfos, não nos ajuda a compreender determinadas informações. Pelo quiver de Auslander-Reiten podemos obter diversas informações sobre a categoria derivada. Por exemplo, o método de construção do quiver, nos permite construir objetos indecomponíveis (tomando o cone de morfismos irredutíveis entre indecomponíveis) o que nos fornece um conhecimento estrutural da categoria. Em [1], Alvares, Fernandes e Giraldo apresentaram um método intrínseco para a construção da componente transjectiva da categoria derivada de uma álgebra inclinada. Porém o método depende da existência de um slice na categoria de módulos, o qual não existe em álgebras hereditárias por partes em geral.

O objetivo deste trabalho é apresentar um método intrínseco para a construção do quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada de álgebras hereditárias por partes do tipo \mathbb{A}_n e apresentar alguns resultados sobre o tipo \mathbb{D}_n . No capítulo final apresentaremos resultados para o caso de álgebras hereditárias por partes de radical quadrado zero. O texto está dividido em cinco capítulos. O primeiro capítulo apenas aborda brevemente alguns conceitos básicos relacionados a teoria.

Durante este trabalho, abordamos o tema de variadas formas. No capítulo 2, foi realizado um estudo sobre os triângulos de Auslander-Reiten. Estudamos alguns aspectos da relação entre as homologias nesses triângulos, o que permitiu colocar um pouco mais de luz sobre uma propriedade dos triângulos de Auslander-Reiten. Este resultado nos permitiu provar uma afirmação de Happel, em [20], que se encontra sem demonstração. Tal prova, nos permite de alguma forma entender melhor uma classe específica de triângulos de Auslander-Reiten.

No capítulo 3, realizamos um estudo em busca de informações a respeito dos morfismos irreduzíveis na categoria derivada $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$, em que Λ é álgebra hereditária por partes. Sabemos que existe um mergulho $F : \text{mod}(\Lambda) \hookrightarrow \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$, porém como Λ não é hereditária, não temos um mergulho de $\Gamma(\text{mod}(\Lambda))$ em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$. Portanto dado um morfismo irreduzível $f \in \text{mod}(\Lambda)$, não temos garantias de que $F(f)$ representa um morfismo irreduzível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$. De fato, considerando Λ a álgebra dada pelo quiver



temos que os quivers de Auslander-Reiten da sua categoria de módulos e de sua categoria derivada são dados, respectivamente, por:

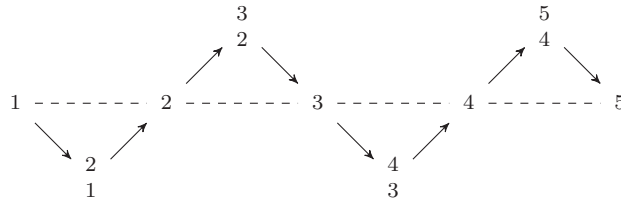


Figura 1: $\Gamma(\text{mod } \Lambda)$

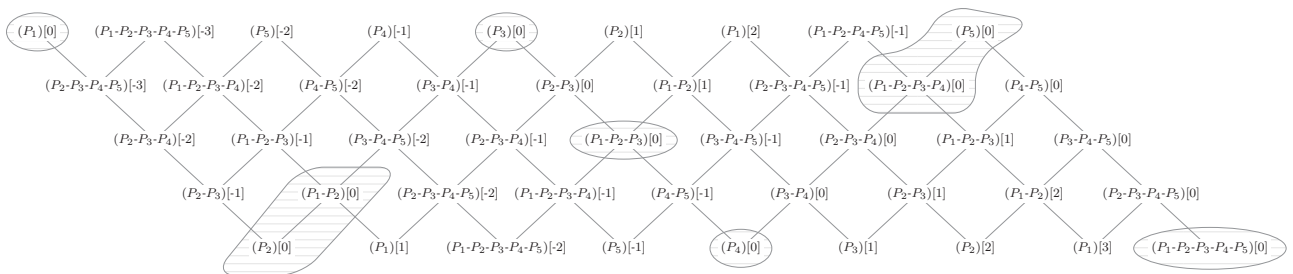
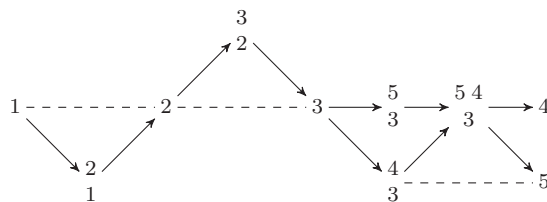


Figura 2: $\text{mod}(\Lambda) \subset \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$

A parte hachurada destaca os objetos de $\text{mod}(\Lambda)$ em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$. Portanto podemos ver que, apesar do mergulho $F : \text{mod}(\Lambda) \hookrightarrow \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ ser fiel e pleno, temos que apenas dois morfismos irreduzíveis de $\text{mod}(\Lambda)$ foram levados em morfismos irreduzíveis em $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$. No capítulo 3, apre-

sentaremos uma condição suficiente para que existam morfismos irredutíveis na categoria derivada, que sejam advindos de morfismos irredutíveis da categoria de módulos, através do mergulho F . Apesar deste resultado, queremos destacar aqui os seguintes fatos. No trabalho de Alvares, Fernandes e Giraldo, foi possível apresentar uma técnica para a construção de uma componente do quiver de Auslander-Reiten de álgebras inclinadas, apenas utilizando alguns morfismos irredutíveis específicos da categoria de módulos, a saber os irredutíveis contidos no slice da álgebra inclinada. Nosso estudo do caso geral, isto é, para álgebras hereditárias por partes do tipo Dynkin, mostrou através dos exemplos que este caminho não é viável para esta classe de álgebras, porém tentamos resgatar este resultado que obtivemos neste capítulo, com uma outra técnica que apresentaremos no capítulo quatro.

No capítulo 4, iremos apresentar uma técnica para a construção de uma secção no quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada de álgebras hereditárias por partes do tipo Dynkin. O método consiste em, utilizar apenas as informações da categoria de módulos, e através de propriedades homológicas, construir uma secção utilizando apenas shifts de módulos indecomponíveis. Por exemplo, considere o quiver de Auslander-Reiten de uma álgebra hereditária por partes, de radical quadrado zero, do tipo \mathbb{D}_n , como abaixo:



Através de nosso método, é possível concluir que o conjunto

$$\left\{ \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} [0], 2[0], 3[-1], 4[-2], 5[-2] \right\}$$

forma uma secção Σ no quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada dessa álgebra.

Por fim, no capítulo 5, iremos trabalhar com álgebras hereditárias por partes de radical quadrado zero. Mais especificamente com álgebras do tipo manso, dadas por $A = kQ/R^2$, em que Q é um quiver com uma certa propriedade. Neste caso iremos apresentar um método explícito para a construção de uma secção na componente transjectiva de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$, a qual só depende da análise dos caminhos entre os vértices do quiver Q .

Capítulo 1

Conceitos básicos

Neste capítulo, abordaremos brevemente alguns conceitos, propriedades e resultados que serão usados ao longo do texto. Também iremos fixar algumas notações. Ao longo deste trabalho, sempre estaremos considerando k um corpo algebricamente fechado e iremos trabalhar com k -álgebras básicas, conexas e de dimensão finita. Iremos considerar $\text{mod}(A)$ como sendo a categoria dos A -módulos, à direita, finitamente gerados. Denotaremos por $\text{proj}(A)$ e $\text{inj}(A)$ as subcategorias plenas de $\text{mod}(A)$, cujos objetos são os A -módulos projetivos e A -módulos injetivos, respectivamente. Além disso, dado $M \in \text{mod}(A)$ denotaremos por $\text{p.dim}(M)$ e $\text{i.dim}(M)$ as dimensões projetiva e injetiva do módulo M , respectivamente.

1.1 Álgebras de caminhos e representações

Uma importante classe de álgebras, associativas com unidade e de dimensão finita, são as chamadas álgebras de caminhos, as quais são dadas por quivers finitos. Um quiver $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ é uma quádrupla formada por um conjunto de vértices Q_0 , um conjunto de flechas Q_1 e duas aplicações $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$, que associam a cada flecha $\alpha \in Q_1$, um início $s(\alpha)$ e um final $t(\alpha)$, respectivamente.

Um quiver Q é dito finito se Q_0 e Q_1 são conjuntos finitos. O grafo subjacente de um quiver Q é obtido, através dele, retirando as orientações de suas flechas. Dizemos que Q é um quiver conexo se seu grafo subjacente é conexo. Um caminho w , de comprimento $\ell(w) = n \geq 1$, é uma sequência de flechas $w = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ tal que $s(\alpha_i) = t(\alpha_{i-1})$, para $1 < i \leq n$. Neste caso, dizemos que w é um caminho que inicia em $s(\alpha_1)$ e termina em $t(\alpha_n)$, o qual denotamos por $w : s(\alpha_1) \rightsquigarrow t(\alpha_n)$. Para cada vértice $a \in Q_0$, associamos um caminho trivial de comprimento zero, o qual é denotado por ϵ_a , em que $s(\epsilon_a) = t(\epsilon_a)$.

Definição 1.1.1. Dados um quiver Q e um corpo k , definimos a álgebra de caminhos kQ como sendo uma k -álgebra cujo k -espaço vetorial subjacente possui como base o conjunto de todos os caminhos de Q . Definimos um produto, em kQ , entre dois caminhos $w_1 = \alpha_1 \dots \alpha_n$ e $w_2 = \beta_1 \dots \beta_m$ da seguinte

maneira:

$$w_1 w_2 = \begin{cases} 0, & \text{se } t(\alpha_n) \neq s(\beta_1) \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \beta_1 \dots \beta_m, & \text{se } t(\alpha_n) = s(\beta_1) \\ w_1, & \text{se } w_2 = \epsilon_a \text{ e } t(\alpha_n) = a \\ w_2, & \text{se } w_1 = \epsilon_a \text{ e } s(\beta_1) = a \end{cases}$$

Estendendo por linearidade, temos que kQ possui uma estrutura de k -álgebra associativa.

A seguir apresentaremos algumas propriedades a respeito desse tipo de álgebra.

Proposição 1.1.2. *Sejam Q um quiver e kQ uma álgebra de caminhos, então:*

(a) kQ possui identidade se, e somente se, Q_0 é finito.

(b) kQ é de dimensão finita se, e somente se, Q é finito e acíclico.

(c) kQ é uma álgebra conexa se, e somente se, Q é conexo.

Demonstração. Ver [4], página 45. □

Proposição 1.1.3. *Seja Q um quiver finito. Então a álgebra kQ é conexa se, e somente se, Q é um quiver conexo.*

Demonstração. Ver [4], página 47. □

Proposição 1.1.4. *Seja Q um quiver finito sem ciclos orientados. Então a álgebra de caminhos kQ é hereditária. Por outro lado, se A é uma k -álgebra hereditária, básica de dimensão finita, então existe um quiver finito Q , sem ciclos orientados, tal que $A \cong kQ$.*

Demonstração. Ver [20], página 45. □

Sejam Q um quiver finito, kQ uma álgebra de caminhos e R_Q o ideal de kQ gerado, como ideal, pelas flechas de Q . Então dizemos que um ideal I de kQ é admissível se existir um inteiro $m \geq 2$ tal que $R_Q^m \subset I \subset R_Q^2$. Neste caso, o par (Q, I) é chamado quiver com relações. Uma relação em Q é uma combinação k -linear de caminhos, de comprimento maior ou igual a 2, que possuem mesmo início e mesmo final. Todo ideal admissível I de kQ é finitamente gerado por um conjunto de relações. A álgebra quociente $A = kQ/I$ é chamada álgebra de caminhos sobre um quiver limitado. Neste caso, o radical de A é dado por $\text{rad}(A) = R_Q/I$.

Teorema 1.1.5 (Teorema de Gabriel). *Seja A uma k -álgebra básica, conexa e de dimensão finita. Então existem um quiver finito Q e um ideal admissível I , tal que $A \cong kQ/I$.*

Demonstração. Ver [4], página 64. □

Representações de um quiver

Seja Q um quiver finito. Uma representação de Q é uma família $M = (M(a), M(\alpha))_{a \in Q_0, \alpha \in Q_1}$ que associa a cada vértice $a \in Q_0$, um k -espaço vetorial $M(a)$ e a cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$, uma transformação linear $M(\alpha) : M(a) \rightarrow M(b)$. Dizemos que uma representação é de dimensão finita se $M(v)$ é um k -espaço vetorial de dimensão finita para todo $v \in Q_0$.

Definição 1.1.6. Sejam M e N duas representações de Q . Um morfismo de representações $f : M \rightarrow N$ é uma família $f = (f_a)_{a \in Q_0}$ de transformações k -lineares $f_a : M(a) \rightarrow N(a)$, tais que para cada $\alpha : a \rightarrow b$ em Q , tem-se $N(\alpha)f_a = f_b M(\alpha)$, ou seja, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} M(a) & \xrightarrow{M(\alpha)} & M(b) \\ f_a \downarrow & & \downarrow f_b \\ N(a) & \xrightarrow{N(\alpha)} & N(b) \end{array}$$

Desta forma temos uma categoria $\text{Rep}(Q)$ chamada de categoria das representações de Q . Denotamos por $\text{rep}(Q)$ a subcategoria plena de $\text{Rep}(Q)$, cujos objetos são representações de dimensão finita. Neste caso, temos que $\text{rep}(Q)$ e $\text{Rep}(Q)$ são k -categorias abelianas.

Dados Q um quiver finito, $M \in \text{Rep}(Q)$ e $w : a \rightsquigarrow b$ um caminho em Q , definimos uma avaliação de M sobre w como sendo uma aplicação k -linear $M(w) : M(a) \rightarrow M(b)$, tal que:

$$M(w) = M(\alpha_1)M(\alpha_2) \dots M(\alpha_n)$$

em que $w = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$. Tal definição se estende para uma combinação k -linear de caminhos, com mesmo início e mesmo final. Desta maneira, dado um quiver com relações (Q, I) , temos que uma representação M de Q é limitada por I se $M(\mu) = 0$, para todo $\mu \in I$. Denotamos por $\text{Rep}(Q, I)$ a subcategoria plena de $\text{Rep}(Q)$, consistindo de todas as representações limitadas por I .

O próximo resultado, juntamente com o teorema (1.1.5), nos permite identificar os objetos e os morfismos da categoria $\text{mod}(A)$, em que A é uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado k .

Teorema 1.1.7. Sejam (Q, I) um quiver com relações e $A = kQ/I$ sua álgebra de caminhos. Então existe uma equivalência k -linear de categorias $F : \text{mod}(A) \xrightarrow{\sim} \text{rep}(Q, I)$.

Demonstração. Ver [4], página 72. □

Quiver de Auslander-Reiten

O quiver de Auslander-Reiten reúne importantes informações da categoria dos módulos finitamente gerados, como por exemplo as classes de módulos indecomponíveis e os geradores dos espaços de morfismos irredutíveis em sequências exatas curtas que quase cindem, chamadas sequências de Auslander-Reiten.

Seja A uma k -álgebra de dimensão finita. Um morfismo $f : X \rightarrow Y$, em $\text{mod}(A)$, é um monomorfismo que cinde (resp. epimorfismo que cinde) se, e somente se, existe um morfismo $h : Y \rightarrow X$ tal que $hf = id_X$ (resp. $fh = id_Y$). No caso em que f satisfaz qualquer umas das duas condições, dizemos que f cinde. Um morfismo $f \in \text{mod}(A)$ é dito irredutível se ele não cinde e além disso, para qualquer fatoração $f = hg$, tem-se que g é um monomorfismo que cinde ou h é um epimorfismo que cinde.

Definição 1.1.8. Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Uma sequência de Auslander-Reiten é uma sequência exata em $\text{mod}(A)$

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \longrightarrow 0$$

que satisfaz as seguintes condições:

(AR1) X e Z são indecomponíveis.

(AR2) v não é um epimorfismo que cinde.

(AR3) Se $f : W \rightarrow Z$ não é um epimorfismo que cinde, então existe $f' : W \rightarrow Y$ tal que $vf' = f$.

Teorema 1.1.9. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita, com $k = \bar{k}$. Então, para cada $Z \in \text{mod}(A)$ indecomponível, não projetivo, existe uma única sequência de Auslander-Reiten $0 \rightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow 0$, a menos de isomorfismo. Neste caso, $X \in \text{mod}(A)$ é indecomponível.*

Em uma sequência de Auslander-Reiten $0 \rightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow 0$, tem-se que os morfismos u e v são irredutíveis.

Definição 1.1.10. Seja A uma k -álgebra. O radical de Jacobson da categoria $\text{mod}(A)$ é o ideal bilateral dado por:

$$\text{rad}_A(X, Y) = \{f \in \text{Hom}_A(X, Y); 1_Y - fg \text{ é invertível, para todo } g \in \text{Hom}_A(Y, X)\}$$

para quaisquer $X, Y \in \text{mod}(A)$.

Tendo definido o radical de uma categoria de módulos, podemos definir de forma recursiva $\text{rad}_A^n(X, Y)$, para $n > 1$. Tal definição pode ser encontrada em [5] página 179. Em particular, temos:

$$\text{rad}_A^2(X, Y) = \{gf; f \in \text{rad}_A(X, Z) \text{ e } g \in \text{rad}_A(Z, Y), \text{ para algum } Z \in \text{mod}(A)\}$$

Observe que $\text{rad}_A^2(X, Y) \subset \text{rad}_A(X, Y)$. Se adicionarmos a X e Y a hipótese de que são indecomponíveis, podemos concluir que um morfismo $f : X \rightarrow Y$ é irredutível se, e somente se, $f \in \text{rad}_A(X, Y) / \text{rad}_A^2(X, Y)$, (ver [4], pág. 100). Dessa forma, definimos então o quociente

$$\text{Irr}(X, Y) = \text{rad}_A(X, Y) / \text{rad}_A^2(X, Y)$$

que chamamos de espaço dos morfismos irredutíveis.

Neste caso, a dimensão de $\text{Irr}(X, Y)$ é igual ao número máximo de morfismos irredutíveis de X para Y , que são linearmente independentes.

Definição 1.1.11. Podemos definir o quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(\text{mod } A)$ da seguinte forma:

- Os vértices de $\Gamma(\text{mod}(A))$ são as classes de isomorfismos $[X]$ dos módulos indecomponíveis $X \in \text{mod}(A)$.
- Se $[X]$ e $[Y]$ são dois vértices de $\Gamma(\text{mod } A)$, correspondentes aos módulos X e Y , então o número de flechas de $[X]$ para $[Y]$ é igual a dimensão do k -espaço vetorial $\text{Irr}(X, Y)$.

1.2 Categorias Trianguladas

Nesta seção apresentaremos a definição de categoria triangulada e listaremos suas propriedades básicas. Para mais informações ver [20].

Definição 1.2.1. Uma categoria \mathcal{A} é dita aditiva se satisfaz:

- Para todo $X, Y \in \mathcal{A}_0$, $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)$ é um grupo abeliano, e a composição de morfismos é bilinear.

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(Y, Z) \times \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Z) \\ (\gamma, \alpha + \beta) &\longmapsto \gamma\alpha + \gamma\beta \\ (\alpha + \beta, \gamma) &\longmapsto \alpha\gamma + \beta\gamma \end{aligned}$$

- Possui objeto zero.

- Toda família finita de objetos de \mathcal{A} admite um produto e uma soma direta em \mathcal{A} .

Definição 1.2.2. Seja \mathcal{T} uma categoria aditiva e $S : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$ um automorfismo de \mathcal{T} . Ao functor S chamaremos de functor suspensão. Utilizaremos a seguinte notação, $S^n(X) = X[n]$ e $S^n(f) = f[n]$, diremos que $X[n]$ é o n -ésimo shift do objeto X .

Definição 1.2.3. Um triângulo em \mathcal{T} é uma sequência de objetos e morfismos em \mathcal{T} da forma

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

Um morfismo de triângulos em \mathcal{T} é uma tripla (f, g, h) de morfismos tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1] \end{array}$$

Se os morfismos f, g, h são isomorfismos em \mathcal{T} , então o morfismo de triângulos é dito isomorfismo.

Definição 1.2.4. Uma categoria triangulada é uma tripla $(\mathcal{T}, S, \mathcal{F})$ em que \mathcal{T} é uma categoria aditiva, S é o functor suspensão e \mathcal{F} é uma família de triângulos exatos (ou distinguidos), os quais satisfazem os seguintes axiomas:

(TR1) Todo triângulo isomorfo a um triângulo exato também é exato. Para cada objeto X em \mathcal{T} , o triângulo

$$X \xrightarrow{Id_X} X \longrightarrow 0 \longrightarrow X[1]$$

é um triângulo exato. Todo morfismo $u : X \rightarrow Y$ em \mathcal{T} pode ser completado para formar um triângulo exato

$$X \xrightarrow{u} Y \longrightarrow Z \longrightarrow X[1].$$

(TR2) Um triângulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ é um triângulo exato se, e somente se, o triângulo

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$$

é um triângulo exato.

(TR3) Dados dois triângulos exatos $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ e $A \xrightarrow{u'} B \xrightarrow{v'} C \xrightarrow{w'} A[1]$, cada

diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & & & \downarrow f[1] \\ A & \xrightarrow{u'} & B & \xrightarrow{v'} & C & \xrightarrow{w'} & A[1] \end{array}$$

pode ser completado de maneira a formar um morfismo de triângulos (não necessariamente único).

(TR4) Dados triângulos exatos $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ e $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ com $\gamma_1 = \beta_1\alpha_1$, existe um triângulo exato $(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ fazendo comutar o diagrama abaixo,

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\alpha_1} & Y & \xrightarrow{\alpha_2} & U & \xrightarrow{\alpha_3} & X[1] \\ \downarrow 1 & & \downarrow \beta_1 & & \downarrow \delta_1 & & \downarrow 1[1] \\ X & \xrightarrow{\gamma_1} & Z & \xrightarrow{\gamma_2} & V & \xrightarrow{\gamma_3} & X[1] \\ & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \delta_2 & & \downarrow \alpha_1[1] \\ & & W & \xrightarrow{1} & W & \xrightarrow{\beta_3} & Y[1] \\ & & \downarrow \beta_3 & & \downarrow \delta_3 & & \\ & & Y[1] & \xrightarrow{\alpha_2[1]} & U[1] & & \end{array}$$

O axioma (TR4) também é conhecido como Axioma do Octaedro.

Lema 1.2.5. *Seja $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ um triângulo exato. Então a composição de quaisquer dois morfismos consecutivos é nula.*

Proposição 1.2.6. *Seja $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ um triângulo exato em uma categoria triangulada \mathcal{T} . Então para todo objeto $X_0 \in \mathcal{T}$, as seguintes sequências são exatas:*

$$\begin{array}{c} \text{Hom}(X_0, X) \xrightarrow{\text{Hom}(X_0, u)} \text{Hom}(X_0, Y) \xrightarrow{\text{Hom}(X_0, v)} \text{Hom}(X_0, Z) \\ \\ \text{Hom}(Z, X_0) \xrightarrow{\text{Hom}(v, X_0)} \text{Hom}(Y, X_0) \xrightarrow{\text{Hom}(u, X_0)} \text{Hom}(X, X_0) \end{array}$$

Lema 1.2.7. *Seja $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ um triângulo exato. Então são equivalentes:*

- (i) u é um isomorfismo.
- (ii) $Z = 0$

Proposição 1.2.8. *As seguintes afirmações são equivalentes para um triângulo exato*

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

(a) u é um monomorfismo que cinde.

(b) v é um epimorfismo que cinde.

(c) $w = 0$.

Definição 1.2.9. Dado um morfismo $u : X \rightarrow Y$ em uma categoria triangulada \mathcal{T} , existe um triângulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$. Dizemos que Z é o cone de u .

Dado um morfismo em uma categoria triangulada, temos que seu cone está unicamente definido a menos de isomorfismos.

1.3 Categoria dos complexos e de homotopia

Seja \mathcal{A} uma categoria aditiva, um complexo sobre \mathcal{A} é uma família $X^\bullet = (X^n, d_X^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de objetos $X^n \in \mathcal{A}$ e morfismos $d_X^n : X^n \rightarrow X^{n-1}$ tais que $d_X^n d_X^{n-1} = 0$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Podemos representar o complexo X^\bullet da seguinte maneira:

$$X^\bullet : \dots \longrightarrow X^{n-1} \xrightarrow{d_X^{n-1}} X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} \longrightarrow \dots$$

Cada objeto X^n é chamado de componente homogênea de grau n . Iremos definir o comprimento de X^\bullet como sendo igual a quantidade de componentes homogêneas não nulas, e denotaremos por $\ell(X^\bullet)$.

Dados dois complexos $X^\bullet = (X^n, d_X^n)$ e $Y^\bullet = (Y^n, d_Y^n)$, um morfismo de complexos $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ é uma família de morfismos $f^n : X^n \rightarrow Y^n$ tal que $f^n d_X^{n-1} = d_Y^{n-1} f^{n-1}$, para todo $n \in \mathbb{Z}$, ou seja, temos que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet : & \dots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\ f^\bullet \downarrow & & & \downarrow f^{n-1} & & \downarrow f^n & & \downarrow f^{n+1} & & \\ Y^\bullet : & \dots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Dizemos que $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ é um isomorfismo se $f^n : X^n \rightarrow Y^n$ é um isomorfismo, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Os complexos sobre uma categoria aditiva \mathcal{A} formam a categoria $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, chamada de categoria dos complexos sobre \mathcal{A} . Dizemos que um complexo é limitado inferiormente (resp. superiormente) se existe $n_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $X^n = 0$, para todo $n < n_0$ (resp. $n > n_0$). Dizemos que um complexo X^\bullet é limitado, se ele for limitado superiormente e inferiormente. Denotaremos por $\mathcal{C}^+(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}^-(\mathcal{A})$ e $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$

as subcategorias plenas de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$, cujos objetos são os complexos limitados inferiormente, limitados superiormente e limitados, respectivamente.

Proposição 1.3.1. *Seja \mathcal{A} uma categoria aditiva, então o funtor $\mathcal{C} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{A})$, que associa $X \in \mathcal{A}$ ao complexo X^\bullet dado por $X^0 = X$ e $X^n = 0, \forall n \neq 0$, é fiel e pleno.*

Todo objeto X em \mathcal{A} pode ser considerado um complexo dado por:

$$X^\bullet : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

Esse tipo de complexo é conhecido como 0-complexo ou stalk.

Definição 1.3.2. Uma categoria \mathcal{A} é abeliana se é aditiva, possui kernel e cokernel, todo monomorfismo é kernel de algum morfismo, todo epimorfismo é cokernel de algum morfismo, e todo morfismo $f : X \rightarrow Y$ pode ser escrito como $X \xrightarrow{u} I \xrightarrow{v} Y$, em que u é um epimorfismo e v é um monomorfismo.

No caso em que \mathcal{A} é uma categoria abeliana, tem-se que $\mathcal{C}(\mathcal{A})$ também é uma categoria abeliana. A seguir vamos definir o shift de um complexo X^\bullet , o qual é dado pela aplicação do funtor suspensão em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.

Definição 1.3.3. Definimos o shift de um complexo X^\bullet como sendo um novo complexo $X^\bullet[1]$ dado por:

$$(X^\bullet[1])^n = X^{n+1}, \quad (d_{X[1]})^n = -d_X^{n+1}$$

Para $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$, definimos o cone C_{f^\bullet} por:

$$C_{f^\bullet} = ((X^\bullet[1])^n \oplus Y^n, d_{C_{f^\bullet}}^n); \quad d_{C_{f^\bullet}}^n = \begin{pmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ f^{n+1} & d_Y^n \end{pmatrix}$$

Categoria de Homotopia

Considere dois morfismos $f^\bullet, g^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ em $\mathcal{C}(\mathcal{A})$. Dizemos que f^\bullet e g^\bullet são homotópicos, e denotamos por $f^\bullet \sim g^\bullet$, se existe uma família $(s^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ de morfismos $s^n : X^n \rightarrow Y^{n-1}$ em \mathcal{A} satisfazendo:

$$f^n - g^n = d_Y^{n-1} s^n + s^{n+1} d_X^n, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{Z},$$

isto é, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & X^{n-1} & \xrightarrow{d_X^{n-1}} & X^n & \xrightarrow{d_X^n} & X^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow & \swarrow s^n & \downarrow g^n & \searrow f^n & \downarrow & & \\
 \dots & \longrightarrow & Y^{n-1} & \xrightarrow{d_Y^{n-1}} & Y^n & \xrightarrow{d_Y^n} & Y^{n+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & & & \swarrow s^{n+1} & & & &
 \end{array}$$

Note que a relação de equivalência \sim é uma congruência. Portanto podemos definir a categoria quociente $\mathcal{C}(\mathcal{A})/\sim$.

Definição 1.3.4. Definimos a categoria de homotopia de complexos, denotada por $\mathcal{K}(\mathcal{A})$, da seguinte forma:

- Objetos de $\mathcal{K}(\mathcal{A}) =$ Objetos de $\mathcal{C}(\mathcal{A})$.
- $\text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) = \text{Hom}_{\mathcal{C}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)/\sim$

Aqui também temos que o funtor $\mathcal{K} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A})$ é fiel e pleno.

De maneira análoga as subcategorias dos complexos, as categorias de homotopia de $\mathcal{C}^+(\mathcal{A})$, $\mathcal{C}^-(\mathcal{A})$ e $\mathcal{C}^b(\mathcal{A})$ serão denotadas, respectivamente, por $\mathcal{K}^+(\mathcal{A})$, $\mathcal{K}^-(\mathcal{A})$ e $\mathcal{K}^b(\mathcal{A})$.

Proposição 1.3.5. Um complexo $X^\bullet \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ é isomorfo a zero em $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ se, e somente se, X^\bullet é isomorfo a uma soma direta de complexos da forma:

$$Z^\bullet : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow Z \xrightarrow{id} Z \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Demonstração. Ver [32], página 307. □

Proposição 1.3.6. Seja f^\bullet um morfismo de complexos, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) f^\bullet é homotópico à zero.
- (ii) $f^\bullet[1]$ é homotópico à zero.

Como consequência deste resultado, temos que o funtor suspensão induz o seguinte isomorfismo:

$$\text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) \cong \text{Hom}_{\mathcal{K}(\mathcal{A})}(X^\bullet[1], Y^\bullet[1])$$

Proposição 1.3.7. Seja \mathcal{A} uma categoria aditiva. Então a categoria de homotopia $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é uma categoria triangulada.

Demonstração. Ver [32], página 312. □

Note que se \mathcal{A} é uma categoria abeliana, então $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ é uma categoria aditiva. Porém a categoria $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ pode não ser abeliana.

Definição 1.3.8. Uma categoria aditiva \mathcal{A} é chamada de Krull-Schmidt se todo objeto X de \mathcal{A} possui uma decomposição $X = X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$, em que cada X_i é um objeto indecomponível cujo anel de endomorfismo $\text{End}_{\mathcal{A}}(X_i)$ é local.

Proposição 1.3.9. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita, então:*

(i) $\mathcal{C}^b(\text{mod } A)$ e $\mathcal{C}^b(\text{proj } A)$ são k -categorias Hom-finitas e Krull-Schmidt.

(ii) $\mathcal{K}^b(\text{mod } A)$ e $\mathcal{K}^b(\text{proj } A)$ são k -categorias Hom-finitas e Krull-Schmidt.

Demonstração. Ver [24], página 37. □

Cohomologia

Definição 1.3.10. Seja X^\bullet um complexo em $C(\mathcal{A})$. Definimos a n -ésima cohomologia do complexo X^\bullet como:

$$H^n(X^\bullet) = \frac{\text{Ker}(d^n)}{\text{Im}(d^{n-1})}.$$

Note que se $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ é um morfismo de complexos, temos:

$$f^n(\text{Ker}(d_X^n)) \subset \text{Ker}(d_Y^n) \quad \text{e} \quad f^n(\text{Im}(d_X^{n-1})) \subset \text{Im}(d_Y^{n-1}), \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Portanto para cada $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$, existe $H^n(f^\bullet) : H^n(X^\bullet) \rightarrow H^n(Y^\bullet)$.

Proposição 1.3.11. *Para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos que $H^n(_) : C(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ é um funtor. Além disso, temos as seguintes propriedades:*

$$H^n(X^\bullet[1]) = H^{n+1}(X^\bullet) \quad \text{e} \quad H^n(f^\bullet[1]) = H^{n+1}(f^\bullet).$$

Teorema 1.3.12. *Sejam $f^\bullet, g^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ dois morfismos homotópicos em $C(\mathcal{A})$, então $H^n(f^\bullet) = H^n(g^\bullet)$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

Demonstração. Por definição temos $H^n(f^\bullet)(\bar{x}) = \overline{f^n(x)}$ e $H^n(g^\bullet)(\bar{x}) = \overline{g^n(x)}$. Mostremos que $f^n(x) - g^n(x) \in \text{Im}(d_Y^{n-1})$. De fato, como $f^\bullet \sim g^\bullet$, então existe um morfismo $s^n : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ tal que

$$f^n(x) - g^n(x) = (f^n - g^n)(x) = d_Y^{n-1}s^n(x) + s^{n+1}d_X^n(x), \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Uma vez que $x \in \text{Ker}(d_X^n)$, segue que $f^n(x) - g^n(x) = d_Y^{n-1}s^n(x)$. Portanto $f^n(x) - g^n(x) \in \text{Im}(d_Y^{n-1})$ e segue que $H^n(f^\bullet) = H^n(g^\bullet)$. \square

Definição 1.3.13. Um morfismo $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ é dito quase isomorfismo se

$$H^n(f^\bullet) : H^n(X^\bullet) \rightarrow H^n(Y^\bullet)$$

for isomorfismo para todo $n \in \mathbb{Z}$.

1.4 Categoria derivada

Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana. A categoria derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é uma categoria tal que existe um funtor $Q : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$ que leva quase isomorfismos em isomorfismos, e satisfaz a seguinte propriedade universal: se $F : \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{C}$ é um funtor tal que $F(f^\bullet)$ é isomorfismo para todo f^\bullet quase isomorfismo, então F se fatora por Q , ou seja, existe um único funtor G tal que $F = G \circ Q$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(\mathcal{A}) & \xrightarrow{Q} & \mathcal{D}(\mathcal{A}) \\ & \searrow F & \downarrow G \\ & & \mathcal{C} \end{array}$$

Se \mathcal{A} é uma categoria abeliana, então a categoria derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é uma categoria aditiva. Além disso, $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ também é uma categoria triangulada.

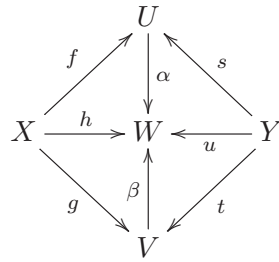
Definição 1.4.1. Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana, então dada $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ categoria aditiva, temos que a categoria derivada $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ é da seguinte forma:

- Objetos de $\mathcal{D}(\mathcal{A}) =$ Objetos de $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.
- $f \in \text{Hom}_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}(X, Y)$ é dado por uma classe de equivalência de pares $s^{-1}f$ dados por:

$$s^{-1}f = (X \xrightarrow{f} U \xleftarrow{s} Y)$$

em que s é um quase isomorfismo.

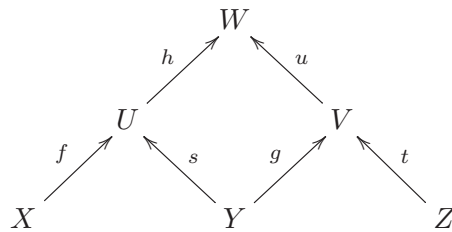
Dizemos que $(X \xrightarrow{f} U \xleftarrow{s} Y) \sim (X \xrightarrow{g} V \xleftarrow{t} Y)$ se existe um diagrama comutativo



em que u é um quase isomorfismo, ou seja,

$$s^{-1}f \sim t^{-1}g \iff (\alpha s)^{-1}(\alpha f) = u^{-1}h = (\beta t)^{-1}(\beta g)$$

a composição dos morfismos em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ pode ser visualizada pelo seguinte diagrama:



ou seja,

$$(t^{-1}g)(s^{-1}f) = (ut)^{-1}(hf)$$

Para mais informações a respeito dos morfismos em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, ver [30] página 12.

Teorema 1.4.2. *Seja \mathcal{A} uma categoria abeliana e considere $C(\mathcal{A})$, $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ as categorias de complexo, de homotopia e derivada sobre \mathcal{A} , respectivamente. Se denotarmos por F o funtor que representa a composição*

$$\mathcal{A} \rightarrow C(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

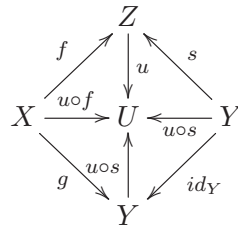
então temos que F é fiel e pleno.

Demonstração. Seja $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{A})$, para cada objeto $X \in \mathcal{A}$ temos que $F(X)$ é um 0-complexo tendo grau zero igual a X . Para cada morfismo $f : X \rightarrow Y$, tem-se que $F(f)$ é a classe de equivalência do morfismo $(F(X) \xrightarrow{f} F(Y) \xleftarrow{id_Y} F(Y))$. Observe que a composição de F com o funtor de cohomologia $H^0 : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$ é igual a identidade de \mathcal{A} . Mostremos que F é fiel. De fato, se $F(f) = 0$, então existe um quase isomorfismo s tal que $s \circ f$ é homotópico a zero. Então $H^0(s)H^0(f) = 0$, como $H^0(s)$ é um isomorfismo, temos que $f = H^0(f) = 0$.

Agora mostremos que F é pleno. De fato, seja $(F(X) \xrightarrow{f} Z \xleftarrow{s} F(Y))$ um representante da classe de equivalência de um morfismo de $F(X)$ para $F(Y)$ em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Como s é um quasi-isomorfismo, o complexo Z possui cohomologia igual a Y no grau zero, e zero nos demais graus. Portanto o morfismo de complexos:

$$\begin{array}{ccccccccccc} Z & & \cdots & \longrightarrow & Z^{-1} & \xrightarrow{d^{-1}} & Z^0 & \xrightarrow{d^0} & Z^1 & \xrightarrow{d^1} & Z^2 & \longrightarrow & \cdots \\ \downarrow u & & & & \downarrow & & \downarrow u^0 & & \parallel & & \parallel & & \\ U & & \cdots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{d^{-1}} & Z^0/\text{Im}(d^{-1}) & \xrightarrow{h^0} & Z^1 & \xrightarrow{d^1} & Z^2 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

é um quase isomorfismo. Além disso, $Y \xrightarrow{(us)^0} Z^0/\text{Im}(d^{-1})$ é o kernel de $Z^0/\text{Im}(d^{-1}) \xrightarrow{h^0} Z^1$. Note que, $h^0 \circ u^0 \circ f = d^0 \circ f = 0$, então existe um único morfismo $X \xrightarrow{g} Y$ em \mathcal{A} tal que $u^0 \circ s^0 \circ g = u^0 \circ f$. Portanto temos o seguinte diagrama comutativo,



o qual implica que $s^{-1} \circ f$ e $id_Y^{-1} \circ g$ são equivalentes em $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. □

Em [30] podem ser encontradas mais informações a respeito do teorema acima.

Definição 1.4.3. Sejam \mathcal{A} e \mathcal{C} duas categorias trianguladas. Um funtor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ é dito funtor exato se leva triângulos distinguidos de \mathcal{A} em triângulos distinguidos de \mathcal{C} . No caso em que F é uma equivalência de categorias, dizemos que $F : \mathcal{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$ é uma equivalência triangulada.

Denotaremos por $\mathcal{K}^{-,b}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{K}^{+,b}(\mathcal{A})$ as categorias de homotopia dos complexos limitados superiormente e inferiormente, respectivamente, e que possuem homologia limitada. Analogamente denotaremos as respectivas subcategorias de $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, por $\mathcal{D}^{-,b}(\mathcal{A})$ e $\mathcal{D}^{+,b}(\mathcal{A})$ e a categoria derivada sobre os complexos limitados será denotada por $\mathcal{D}^b(\mathcal{A})$.

A seguir apresentamos a definição de álgebra hereditária por partes, a qual pode ser encontrada em [20], página 152.

Definição 1.4.4. Seja A uma k -álgebra de dimensão finita. Dizemos que A é hereditária por partes se existe uma equivalência triangulada $\mathcal{D}^b(\text{mod } A) \cong \mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$, em que Q é um quiver finito sem ciclos orientados.

Vale salientar que existe uma definição mais geral a respeito das álgebras hereditárias por partes, porém neste texto iremos utilizar a definição acima.

Proposição 1.4.5. *Sejam A e B duas k -álgebras de dimensão finita, tais que existe uma equivalência triangulada $\mathcal{D}^b(\text{mod } A) \cong \mathcal{D}^b(\text{mod } B)$. Então A tem dimensão global finita se, e somente se, B tem dimensão global finita.*

Demonstração. Ver [19], página 344. □

Neste trabalho estamos interessados em trabalhar com álgebras hereditárias por partes, de dimensão finita. Note que, pela proposição (1.1.4), temos que se Q é um quiver finito, sem ciclos orientados, então a álgebra de caminhos kQ é hereditária, isto é, $\text{gl.dim}(kQ) \leq 1$. Portanto pela proposição anterior, temos que se A é uma álgebra hereditária por partes de dimensão finita, segue que A possui dimensão global finita.

Em [20], é apresentado o seguinte resultado que identifica a categoria derivada $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ com as categorias $\mathcal{K}^{-,b}(\text{proj } A)$ e $\mathcal{K}^{+,b}(\text{inj } A)$.

Proposição 1.4.6. *Seja A uma k -álgebra Noetheriana, com $k = \bar{k}$, então temos as seguintes equivalências trianguladas:*

$$\mathcal{D}^b(\text{mod } A) \cong \mathcal{K}^{-,b}(\text{proj } A) \quad e \quad \mathcal{D}^b(\text{mod } A) \cong \mathcal{K}^{+,b}(\text{inj } A).$$

No caso em que A possui dimensão global finita, tem-se

$$\mathcal{D}^b(\text{mod } A) \cong \mathcal{K}^b(\text{proj } A) \cong \mathcal{K}^b(\text{inj } A).$$

Demonstração. Ver [20], página 29. □

Posteriormente, quando formos construir o quiver de Auslander-Reiten da categoria $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, em que A é hereditária por partes, iremos utilizar a equivalência acima e representar os objetos como sendo complexos de módulos projetivos. Em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ um módulo $X \in \text{mod}(A)$ é representado pelo seguinte 0-complexo:

$$X^\bullet = \cdots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow X \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

Porém em $\mathcal{K}^b(\text{proj } A)$, representamos esse mesmo módulo $X \in \text{mod}(A)$ pela sua resolução projetiva. Ao longo do texto usaremos essas duas representações.

Neste trabalho estamos interessados em obter informações a respeito dos morfismos da categoria $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ a partir dos morfismos de $\text{mod}(A)$. O seguinte resultado nos fornece uma relação entre $\text{Hom}_A(X, Y)$ e $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(X, Y)$, para $X, Y \in \text{mod}(A)$.

Teorema 1.4.7. *Sejam A uma k -álgebra de dimensão finita e $X, Y \in \text{mod}(A)$, então:*

$$(i) \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(X[m], Y[n]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(X, Y[n - m]), \forall n, m \in \mathbb{Z};$$

$$(ii) \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(X, Y) \cong \text{Hom}_A(X, Y)$$

$$(iii) \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(X, Y[n]) \cong \text{Ext}_A^n(X, Y), \forall n > 0;$$

$$(iv) \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(X, Y[n]) = 0, \forall n < 0;$$

Demonstração. Ver [16], página 166 e também [30], página 14. □

1.5 Teoria inclinante

Definição 1.5.1. Um A -módulo T é chamado de inclinante se as seguintes condições são satisfeitas:

$$(T1) \text{p.dim}(T_A) \leq 1.$$

$$(T2) \text{Ext}_A^1(T, T) = 0.$$

$$(T3) \text{ Existe uma sequência exata curta } 0 \rightarrow A_A \rightarrow T'_A \rightarrow T''_A \rightarrow 0, \text{ com } T', T'' \in \text{add}T.$$

Observação 1.5.2. Posteriormente, foi provado em [12] que o axioma (T3) pode ser substituído pela seguinte condição.

(T3') O número de somandos diretos indecomponíveis de T (a menos de isomorfismo) é igual ao número de módulos simples definidos sobre a álgebra A (a menos de isomorfismo).

Cada A -módulo inclinante T induz um par de torção $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ na categoria $\text{mod}(A)$, em que:

$$\mathcal{T}(T) := \text{Gen}(T) = \{X \in \text{mod}(A); \text{Ext}_A^1(T, X) = 0\}$$

$$\mathcal{F}(T) := T^\perp = \{X \in \text{mod}(A); \text{Hom}_A(T, X) = 0\}.$$

Além disso, T também induz um par de torção $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ na categoria $\text{mod}(B)$, em que $B = \text{End}_A(T)$, dado por:

$$\mathcal{X}(T) = \{X \in \text{mod}(B); \text{Hom}_B(X, DT) = 0\} = \{X \in \text{mod}(B); X \otimes_B T = 0\}$$

$$\mathcal{Y}(T) = \{Y \in \text{mod}(B); \text{Ext}_B^1(Y, DT) = 0\} = \{Y \in \text{mod}(B); \text{Tor}_1^B(Y, T) = 0\}$$

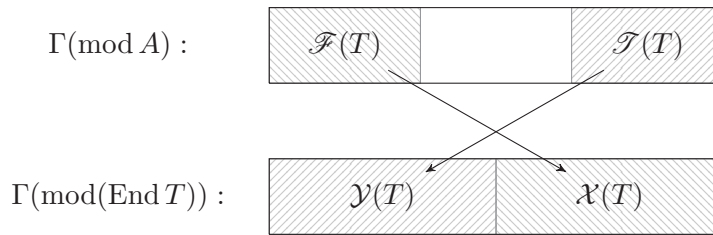
O Teorema de Brenner-Butler relaciona esses pares de torção entre as categorias $\text{mod}(A)$ e $\text{mod}(B)$, em que $B = \text{End}(T)$.

Teorema 1.5.3 (Brenner-Butler). *Considere T um A -módulo inclinante e $B = \text{End}(T)$. Sejam $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ e $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ os pares de torção induzidos por T em $\text{mod}(A)$ e $\text{mod}(B)$, respectivamente. Então seguem os seguintes resultados:*

- (a) Os funtores $\text{Hom}_A(T, _)$ e $_ \otimes_B T$ induzem uma equivalência entre $\mathcal{T}(T)$ e $\mathcal{Y}(T)$.
- (b) Os funtores $\text{Ext}_A^1(T, _)$ e $\text{Tor}_1^B(_, T)$ induzem uma equivalência entre $\mathcal{F}(T)$ e $\mathcal{X}(T)$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [4] na página 207. □

Definição 1.5.4. Seja T um A -módulo inclinante e $B = \text{End}(T)$. Então dizemos que T é cindido se o par de torção $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ é cindido em $\text{mod}(B)$, isto é, cada B -módulo indecomponível pertence a $\mathcal{X}(T)$ ou pertence a $\mathcal{Y}(T)$



Teorema 1.5.5. *Seja T um A -módulo inclinante e $B = \text{End}(T)$. Então T é cindido se, e somente se, $i.\dim(N) = 1$ para todo $N \in \mathcal{F}(T)$.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [4] na página 230. □

Se A é uma álgebra hereditária e T é um A -módulo inclinante, temos como consequência imediata que T é cindido, pois neste caso $\text{gl.dim}(A) \leq 1$.

Definição 1.5.6. Dizemos que B é uma álgebra inclinada se existe um módulo inclinante T sobre uma álgebra hereditária A tal que $B = \text{End}(T)$.

Definição 1.5.7. Dizemos que uma álgebra Λ é inclinada iterada de tipo Δ , se existe uma sequência finita de triplas $(A_i, T_i, \text{End}(T_i) = A_{i+1})_{0 \leq i \leq m-1}$, onde $A_0 = k\Delta$, $A_m = \Lambda$ e cada T_i é um A_i -módulo inclinante cindido.

No decorrer deste texto, iremos trabalhar com categorias derivadas de álgebras hereditárias por partes. Happel, Rickard e Schofield apresentaram, em [22], um resultado que fornece uma relação entre as álgebras hereditárias por partes e as álgebras inclinadas iteradas.

Teorema 1.5.8. *Se Λ é uma k -álgebra e Δ é um quiver finito e acíclico, então são equivalentes:*

(i) Λ é uma álgebra hereditária por partes do tipo Δ .

(ii) Λ é uma álgebra inclinada iterada do tipo Δ .

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [20] na página 179. \square

Lembremos que Λ é hereditária por partes do tipo Δ se existe uma equivalência triangulada entre $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ e $\mathcal{D}^b(\text{mod } k\Delta)$.

Proposição 1.5.9. *Seja Λ uma álgebra hereditária por partes do tipo Dynkin. Se X é um Λ -módulo indecomponível, então temos $\text{Ext}_{\Lambda}^i(X, X) = 0$ para $i \geq 1$.*

Demonstração. Denotemos por F o funtor da equivalência triangulada de $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ para $\mathcal{D}^b(\text{mod } k\Delta)$. Então temos que $F(X) \cong X'[j]$ para algum $X' \in \text{mod}(k\Delta)$ indecomponível e algum $j \in \mathbb{Z}$. Então

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\Lambda}^i(X, X) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(X, X[i]) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(k\Delta)}(F(X), F(X)[i]) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(k\Delta)}(X'[j], X'[j+i]) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(k\Delta)}(X', X'[i]) \\ &\cong \text{Ext}_{k\Delta}^i(X', X') \end{aligned}$$

Como Δ é Dynkin, então para todo X' indecomponível temos que $\text{Ext}_{k\Delta}^i(X', X') = 0$, para $i \geq 1$. Portanto segue que $\text{Ext}_{\Lambda}^i(X, X) = 0$ para $i \geq 1$. \square

Funtor derivado

Considere $T \in \text{mod}(A)$ um módulo inclinante e $B = \text{End}(T)$. Então existe uma equivalência triangulada $\mathcal{D}^b(\text{mod } A) \cong \mathcal{D}^b(\text{mod } B)$ dada pelo seguinte funtor derivado:

$$\mathbb{R} \text{Hom}(T, _) : \mathcal{D}^b(\text{mod } A) \rightarrow \mathcal{D}^b(\text{mod } B)$$

A seguir apresentaremos uma caracterização de como esse funtor age nos objetos da categoria $\text{mod}(A) \subset \mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, tal caracterização pode ser encontrada em [32], na página 355.

Proposição 1.5.10. *Seja T um A -módulo inclinante e $B = \text{End}(T)$. Então para $X \in \text{mod}(A)$, temos que $\mathbb{R} \text{Hom}(T, X)$ é um complexo tal que:*

$$H^n(\mathbb{R} \text{Hom}(T, X)) = \text{Ext}_A^n(T, X)$$

Mais detalhes sobre esse funtor derivado podem ser encontrados em [16], na página 194, e também em [27], na página 364.

Utilizando o resultado acima, podemos caracterizar os objetos $\mathbb{R}\mathrm{Hom}(T, X)$, em que $X \in \mathcal{T}(T)$ ou $X \in \mathcal{F}(T)$. De fato,

- Para $X \in \mathcal{T}(T)$:

$$\begin{cases} \mathrm{Ext}_A^0(T, X) = \mathrm{Hom}_A(T, X) \\ \mathrm{Ext}_A^1(T, X) = 0, \text{ pois } X \in \mathcal{T}(T) \\ \mathrm{Ext}_A^n(T, X) = 0, \forall n \geq 2, \text{ pois } \mathrm{p.dim}(T) \leq 1 \end{cases}$$

portanto temos:

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(T, X) = \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}_A(T, X)}_{\text{posição 0}} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

- Para $X \in \mathcal{F}(T)$:

$$\begin{cases} \mathrm{Ext}_A^0(T, X) = \mathrm{Hom}_A(T, X) = 0, \text{ pois } X \in \mathcal{F}(T) \\ \mathrm{Ext}_A^1(T, X) = \mathrm{Ext}_A^1(T, X) \\ \mathrm{Ext}_A^n(T, X) = 0, \forall n \geq 2, \text{ pois } \mathrm{p.dim}(T) \leq 1 \end{cases}$$

portanto temos:

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(T, X) = \dots \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \underbrace{\mathrm{Ext}_A^1(T, X)}_{\text{posição 1}} \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Disto segue que,

$$\mathbb{R}\mathrm{Hom}(T, X) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_A(T, X), & \text{se } X \in \mathcal{T}(T) \\ \mathrm{Ext}_A^1(T, X)[-1], & \text{se } X \in \mathcal{F}(T) \end{cases}$$

Esse resultado será muito útil quando formos analisar o comportamento de alguns morfismos na categoria derivada.

Capítulo 2

Triângulos de Auslander-Reiten na categoria derivada

Uma das técnicas mais eficientes para se estudar a estrutura da categoria de módulos de uma álgebra é a Teoria de Auslander-Reiten. Esta teoria permite explicitar as classes de módulos indecomponíveis e os geradores dos espaços de morfismos irredutíveis em sequências exatas curtas que quase cindem, chamadas sequências de Auslander-Reiten.

Embora a categoria de módulos e a categoria derivada possuam estruturas diferentes, uma é abeliana e a outra é triangulada, uma teoria similar, também conhecida como Teoria de Auslander-Reiten, existe no âmbito das categorias derivadas. Esta teoria foi desenvolvida por Dieter Happel. Neste contexto, o papel das sequências de Auslander-Reiten é desempenhado por triângulos de Auslander-Reiten, ou seja, os complexos indecomponíveis e os geradores de morfismos irredutíveis ocorrem em triângulos. O objetivo deste capítulo é provar dois resultados, os teoremas (2.2.5) e (2.2.6). Através dos quais, podemos fazer uma prova parcial do seguinte resultado.

Teorema: Seja $0 \rightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow 0$ uma sequência de Auslander-Reiten e w o seu elemento correspondente em $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(Z, X[1]) = \text{Ext}_A^1(Z, X)$. Então são equivalentes:

(i) $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ é um triângulo de Auslander-Reiten em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$.

(ii) $\text{i.dim}(X) \leq 1$ e $\text{p.dim}(Z) \leq 1$.

(iii) $\text{Hom}_A(I, X) = 0$ para todo injetivo I , e $\text{Hom}_A(Z, P) = 0$ para todo projetivo P .

Este resultado foi afirmado por Happel, em [20], sem apresentar uma prova. Aqui provaremos, como consequência dos teoremas (2.2.5) e (2.2.6), que (i) implica (ii).

2.1 Algumas propriedades gerais

Seja \mathcal{C} uma categoria triangulada tal que $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ é um k -espaço vetorial de dimensão finita, $\forall X, Y \in \mathcal{C}$. Além disso, assumamos que o anel de endomorfismo de um objeto indecomponível é local. Neste caso, temos que \mathcal{C} é uma categoria Krull-Schmidt.

Definição 2.1.1. Um triângulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$, em \mathcal{C} , é chamado de triângulo de Auslander-Reiten se as seguintes condições são satisfeitas:

(AR1) X e Z são indecomponíveis;

(AR2) $w \neq 0$;

(AR3) Se $f : W \rightarrow Z$ não é um epimorfismo que cinde, então existe $f' : W \rightarrow Y$ tal que $v \circ f' = f$.

Dizemos que \mathcal{C} possui triângulos de Auslander-Reiten se, para todo objeto indecomponível $Z \in \mathcal{C}$, existe um triângulo satisfazendo as condições acima.

Proposição 2.1.2. Dado um triângulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$, em \mathcal{C} , são equivalentes:

(i) $w \neq 0$;

(ii) u não é monomorfismo que cinde;

(iii) v não é epimorfismo que cinde.

Demonstração. Ver [18], página 642. □

Proposição 2.1.3. Dado um triângulo $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$, em \mathcal{C} , são equivalentes:

(i) A propriedade (AR3);

(ii) Se $f : W \rightarrow Z$ não é um epimorfismo que cinde, então $w \circ f = 0$;

Demonstração. É fácil ver que (i) implica (ii). Mostremos que (ii) implica (i). Como $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, _)$ é um funtor cohomológico, temos a seguinte sequência exata:

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, v)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Z) \xrightarrow{\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, w)} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, X[1])$$

Como $wf = 0$, temos $f \in \text{Ker}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, w)) = \text{Im}(\text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, v))$. Logo existe $f' \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(W, Y)$ tal que $f = vf'$. □

Teorema 2.1.4. Seja A uma k -álgebra de dimensão finita, então temos que as seguintes afirmações são válidas.

(i) Seja $Z^\bullet \in \mathcal{K}^{-,b}(\text{proj } A)$ indecomponível. Então existe um triângulo de Auslander-Reiten $X^\bullet \rightarrow Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow X^\bullet[1]$ se, e somente se, $Z^\bullet \in \mathcal{K}^b(\text{proj } A)$.

(ii) Seja $X^\bullet \in \mathcal{K}^{+,b}(\text{inj } A)$ indecomponível. Então existe um triângulo de Auslander-Reiten $X^\bullet \rightarrow Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow X^\bullet[1]$ se, e somente se, $X^\bullet \in \mathcal{K}^b(\text{inj } A)$.

Demonstração. Ver [18], página 644. □

Como consequência imediata do teorema anterior, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.1.5. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita. Então $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ possui triângulos de Auslander-Reiten se, e somente se, A possui dimensão global finita.*

2.2 Algumas propriedades homológicas

Dizemos que um complexo $X^\bullet \in \mathcal{C}(\text{proj } A)$ é um complexo projetivo minimal se, para $d^n : X^n \rightarrow X^{n+1}$, tem-se $\text{Im}(d^n) \subset \text{rad}(X^{n+1})$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. No caso em que A é uma k -álgebra de dimensão finita, com k algebricamente fechado, temos que todo complexo $X^\bullet \in \mathcal{C}(\text{proj } A)$ é isomorfo em $\mathcal{K}(\text{proj } A)$ a um complexo projetivo minimal. Para mais informações ver [17], página 2733.

Lema 2.2.1. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita e $M, N \in \text{mod}(A)$. Se $f : M \rightarrow N$ é um morfismo não nulo, tal que $\text{Im}(f) \subset \text{rad}(N)$, então f não é um epimorfismo e nem um monomorfismo que cinde.*

Demonstração. Suponha que f seja epimorfismo, então $f(M) = N$. Porém por hipótese temos $f(M) \subset \text{rad}(N)$, ou seja, $f(M) = N \subset \text{rad}(N)$ o que é uma contradição. Portanto f não é um epimorfismo. Agora suponha que f seja monomorfismo que cinde, ou seja, existe f' tal que $f'f = \text{Id}_M$. Denotando $U = \text{Coker}(f)$, temos que existe um isomorfismo $\psi : N \rightarrow M \oplus U$, tal que o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & U & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \psi & & \downarrow \text{id} & & \\ 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} & M \oplus U & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} & U & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

Aqui ψ é dada por $\psi = \begin{pmatrix} f' \\ g \end{pmatrix}$. Como f é monomorfismo que cinde, temos da igualdade $\psi \circ f = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{Id}_M$ que $\psi(f(M)) = M$. Como $f(M) \subset \text{rad}(N)$, então

$$M = \psi(f(M)) \subset \psi(\text{rad}(N)) \subset \text{rad}(M \oplus U) = \text{rad}(M) \oplus \text{rad}(U)$$

Analisando a construção da ψ , segue que $M = \psi(f(M)) \subset \text{rad}(M)$, o que é um absurdo, pois $\text{rad}(M)$ é um submódulo próprio de M . Portanto f não é um monomorfismo que cinde. □

Para as demonstrações dos próximos resultados, faremos uso da seguinte definição.

Definição 2.2.2. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita e considere \mathcal{A} uma subcategoria aditiva de $\text{mod}(A)$. Seja $Z^\bullet \in \mathcal{C}(\mathcal{A})$ um complexo satisfazendo $Z^i = 0$, $\forall i > 0$. Então, dado $n < 0$, definimos o*

complexo truncado Z_n^\bullet da seguinte maneira:

$$Z_n^i = \begin{cases} 0, & \text{se } i < n \\ Z^i, & \text{se } i \geq n \end{cases}, \quad \text{com } d_{Z_n}^i = d_Z^i, \forall i \geq n.$$

Note que, pela definição de Z_n^\bullet , existe um morfismo $\mu_n^\bullet : Z_n^\bullet \rightarrow Z^\bullet$ dado por:

$$\begin{cases} \mu_n^i = id, & \forall i \geq n \\ \mu_n^i = 0, & \forall i < n \end{cases}$$

Além disso, na categoria de homotopia, o cone de μ_n^\bullet é isomorfo ao complexo:

$$(Z'_n)^\bullet = \begin{cases} (Z'_n)^i = 0, & \forall i \geq n \\ (Z'_n)^i = Z^i, & \forall i < n \end{cases}, \quad d_{Z'_n}^i = \begin{cases} 0, & \forall i \geq n-1 \\ d_Z^i, & \forall i < n-1 \end{cases}$$

Denotamos por $\pi_n^\bullet : Z^\bullet \rightarrow (Z'_n)^\bullet$ o morfismo induzido dado por

$$\pi_n^i = \begin{cases} id, & \forall i < n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Note que d_Z^{n-1} induz um morfismo $d_n^\bullet : (Z'_n)^\bullet \rightarrow Z_n^\bullet[1]$. Em particular, obtemos o seguinte triângulo na categoria de homotopia:

$$Z_n^\bullet \xrightarrow{\mu_n^\bullet} Z^\bullet \xrightarrow{\pi_n^\bullet} (Z'_n)^\bullet \xrightarrow{d_n^\bullet} Z_n^\bullet[1]$$

$$\begin{array}{cccccccccccc} Z_n^\bullet & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Z^n & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Z^{-1} & \longrightarrow & Z^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ \mu_n^\bullet \downarrow & & & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow id & & & & \downarrow id & & \downarrow id & & \downarrow & & \\ Z^\bullet & & \dots & \longrightarrow & Z^{n-2} & \longrightarrow & Z^{n-1} & \longrightarrow & Z^n & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Z^{-1} & \longrightarrow & Z^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ \pi_n^\bullet \downarrow & & & & \downarrow id & & \downarrow id & & \downarrow 0 & & & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow & & \\ (Z'_n)^\bullet & & \dots & \longrightarrow & Z^{n-2} & \longrightarrow & Z^{n-1} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ d_n^\bullet \downarrow & & & & \downarrow 0 & & \downarrow d_Z^{n-1} & & \downarrow 0 & & & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow & & \\ Z_n^\bullet[1] & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Z^n & \xrightarrow{d_Z^n} & Z^{n+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & Z^0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Usaremos esta construção para auxiliar na demonstração dos seguintes resultados.

Lema 2.2.3. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita. Para $Z^\bullet \in \mathcal{K}^b(\text{proj } A)$ um complexo indecomponível minimal, considere Z_n^\bullet o complexo truncado de Z^\bullet , definido em (2.2.2). Neste caso, se $Z_n^\bullet \neq Z^\bullet$, então $\mu_n^\bullet : Z_n^\bullet \rightarrow Z^\bullet$ não é um epimorfismo que cinde.*

Demonstração. Como Z^\bullet é um complexo limitado, podemos supor que $Z^i = 0, \forall i > 0$, e que existe

$m \leq 0$ tal que $Z^m \neq 0$ e $Z^i = 0, \forall i < m$. Por hipótese temos $Z_n^\bullet \neq Z^\bullet$, ou seja, $n > m$. Lembremos que por construção existe o seguinte triângulo:

$$Z_n^\bullet \xrightarrow{\mu_n^\bullet} Z^\bullet \xrightarrow{\pi_n^\bullet} (Z'_n)^\bullet \xrightarrow{d_n^\bullet} Z_n^\bullet[1]$$

Suponha que μ_n^\bullet seja um epimorfismo que cinde, então, pela proposição (2.1.2), temos $\pi_n^\bullet = 0$.

$$\begin{array}{ccccccc} Z^\bullet : & 0 & \longrightarrow & Z^m & \xrightarrow{d^m} & Z^{m+1} & \longrightarrow \dots \\ \pi_n^\bullet \downarrow & \downarrow & & \downarrow id & & \downarrow h^{m+1} & \\ (Z'_n)^\bullet : & 0 & \longrightarrow & Z^m & \longrightarrow & (*) & \longrightarrow \dots \end{array}$$

Portanto temos que $id_{Z^m} = h^{m+1} \circ d^m$, isto é, d^m é monomorfismo que cinde. Neste caso, como Z^\bullet é um complexo projetivo minimal, pelo lema (2.2.1), temos que d^m não pode ser um monomorfismo que cinde. Portanto temos uma contradição e segue que μ_n^\bullet não é um epimorfismo que cinde. \square

Abaixo segue o resultado dual do lema anterior.

Lema 2.2.4. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita e $X^\bullet \in \mathcal{K}^b(\text{inj } A)$ um complexo indecomponível minimal. Considere um complexo truncado X_n^\bullet e um morfismo $f_n^\bullet : X^\bullet \rightarrow X_n^\bullet$, definidos como abaixo:*

$$X_n^\bullet = \begin{cases} X_n^i = 0, & \forall i > n \\ X_n^i = X^i, & \forall i \leq n \end{cases} \quad e \quad f_n^\bullet = \begin{cases} 0, & \forall i > n \\ id, & \forall i \leq n \end{cases}$$

Neste caso, se $X_n^\bullet \neq X^\bullet$, então o morfismo $f_n^\bullet : X^\bullet \rightarrow X_n^\bullet$ não é um monomorfismo que cinde.

Demonstração. A demonstração é dual a do lema (2.2.3). \square

Teorema 2.2.5. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita e $Z^\bullet \in \mathcal{K}^{-,b}(\text{proj } A)$ indecomponível, tal que $\ell(Z^\bullet) > 1$. Se existe um triângulo de Auslander-Reiten $X^\bullet \xrightarrow{u} Y^\bullet \xrightarrow{v} Z^\bullet \xrightarrow{w} X^\bullet[1]$, então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $Z^m \neq 0, Z^i = 0, \forall i < m$, e $H^{m+1}(X^\bullet) \neq 0$.*

Demonstração. Sabemos, do teorema (2.1.4), que $Z^\bullet \in \mathcal{K}^b(\text{proj } A)$. Portanto podemos considerar que $Z^i = 0, \forall i > 0$, e que existe $m \leq 0$ tal que $Z^m \neq 0$ e $Z^i = 0, \forall i < m$. Seja $n = m + 1$, então temos, pelo lema (2.2.3), que existe $\mu_n^\bullet : Z_n^\bullet \rightarrow Z^\bullet$ que não é epimorfismo que cinde. Portanto existe $f : Z_n^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ tal que $v \circ f = \mu_n^\bullet$. Disto segue que $w \circ \mu_n^\bullet = 0$, ou seja, é homotópico a zero. Denotando $X^\bullet[1] = W^\bullet$, temos que existem $h^i : Z_n^i \rightarrow W^{i-1}$ tais que:

$$w^i \mu^i = h^{i+1} d_{Z_n}^i + d_W^{i-1} h^i, \forall i \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 Z_n^\bullet & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Z^{m+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 \\
 \mu_n^\bullet \downarrow & & & & \downarrow & & \searrow^{h^{m-1}} & \downarrow & \searrow^{h^m} & \downarrow & \searrow^{h^{m+1}} & \downarrow & \searrow^{id} & & \\
 Z^\bullet & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Z^m & \longrightarrow & Z^{m+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 \\
 w^\bullet \downarrow & & & & \downarrow & & \searrow^{w^m} & \downarrow & \searrow^{w^{m+1}} & \downarrow & \searrow^{w^{m+1}} & \downarrow & \searrow^{w^{m+1}} & & \\
 W^\bullet & & \dots & \longrightarrow & W^{m-2} & \xrightarrow{d^{m-2}} & W^{m-1} & \xrightarrow{d^{m-1}} & W^m & \xrightarrow{d^m} & W^{m+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Como, $\mu^i = id$, para $i \geq n = m + 1$, então:

$$w^i = h^{i+1}d_Z^i + d_W^{i-1}h^i, \forall i \geq m + 1$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 Z_n^\bullet & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Z^{m+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 \\
 \mu_n^\bullet \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 Z^\bullet & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Z^m & \xrightarrow{d^m} & Z^{m+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0 \\
 w^\bullet \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 W^\bullet & & \dots & \longrightarrow & W^{m-2} & \longrightarrow & W^{m-1} & \xrightarrow{d^{m-1}} & W^m & \xrightarrow{d^m} & W^{m+1} & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Note que $W^m \neq 0$. De fato, suponha que $W^m = 0$, então $w^m = 0$, disso segue que $w^i = 0$ para $i \leq m$. Neste caso, como $w^i = h^{i+1}d_Z^i + d_W^{i-1}h^i, \forall i \geq m + 1$, segue que w^\bullet é homotópico a zero, o que contradiz o fato de $X^\bullet \xrightarrow{u} Y^\bullet \xrightarrow{v} Z^\bullet \xrightarrow{w} X^\bullet[1]$ ser um triângulo de A.R.. Portanto segue que:

$$X^{m+1} = (X[1])^m = W^m \neq 0 \quad \Rightarrow \quad X^{m+1} \neq 0.$$

Além disso, também temos que $H^{m+1}(X^\bullet) \neq 0$. De fato, se tivermos $H^m(W^\bullet) = 0$, então é possível construir $h^m : Z^m \rightarrow W^{m-1}$ tal que $w^m = h^{m+1}d_Z^m + d_W^{m-1}h^m$. Desta maneira teríamos que w^\bullet é homotópico a zero, o que é uma contradição. A construção de $h^m : Z^m \rightarrow W^{m-1}$ pode ser feita da seguinte maneira. Considere $(w^m - h^{m+1}d_Z^m) : Z^m \rightarrow W^m$, então:

$$\begin{aligned}
 d_W^m(w^m - h^{m+1}d_Z^m) &= d_W^m w^m - d_W^m h^{m+1}d_Z^m \\
 &= d_W^m w^m - (w^{m+1} - h^{m+2}d_Z^{m+1})d_Z^m \\
 &= d_W^m w^m - w^{m+1}d_Z^m \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Seja $\rho^{m-1}\pi^{m-1} = d_W^{m-1}$ a fatoraçoão canônica de d_W^{m-1} .

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & Z^m & \longrightarrow & Z^{m+1} & \\
 & & & \downarrow w^m & & \downarrow w^{m+1} & \\
 & & h^m & \swarrow & & \swarrow h^{m+1} & \\
 W^{m-1} & \xrightarrow{\pi^{m-1}} & \text{Ker}(d_W^m) & \xrightarrow{\rho^{m-1}} & W^m & \xrightarrow{d_W^m} & W^{m+1}
 \end{array}$$

Então existe $h' : Z^m \rightarrow \text{Ker}(d_W^m)$ tal que $\rho^{m-1}h' = (w^m - h^{m+1}d_Z^m)$. Como π^{m-1} é epimorfismo (pois $H^m(W^\bullet) = 0$) e Z^m é projetivo, temos que existe $h^m : Z^m \rightarrow W^{m-1}$ tal que $\pi^{m-1}h^m = h'$. Agora note que:

$$\begin{aligned}
 h^{m+1}d_Z^m + d_W^{m-1}h^m &= h^{m+1}d_Z^m + \rho^{m-1}\pi^{m-1}h^m \\
 &= h^{m+1}d_Z^m + \rho^{m-1}h' \\
 &= h^{m+1}d_Z^m + (w^m - h^{m+1}d_Z^m) \\
 &= w^m.
 \end{aligned}$$

Portanto se $H^m(W^\bullet) = 0$, temos que w^\bullet também é homotópico a zero. Disto segue que

$$H^{m+1}(X^\bullet) = H^m(X^\bullet[1]) = H^m(W^\bullet) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad H^{m+1}(X^\bullet) \neq 0.$$

□

A seguir apresentamos o caso dual do teorema (2.2.5).

Teorema 2.2.6. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita e $X^\bullet \in K^{+,b}(\text{inj } A)$ indecomponível, tal que $\ell(X^\bullet) > 1$. Se existe um triângulo de Auslander-Reiten $X^\bullet \xrightarrow{u} Y^\bullet \xrightarrow{v} Z^\bullet \xrightarrow{w} X^\bullet[1]$, então existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $X^m \neq 0$, $X^i = 0$, $\forall i > m$, e $H^{m-1}(Z^\bullet) \neq 0$.*

Demonstração. A demonstração é dual a do teorema (2.2.5). □

Como consequência imediata dos teoremas (2.2.5) e (2.2.6), temos o seguinte corolário.

Corolário 2.2.7. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita e $\delta : 0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$ uma seqüência de Auslander-Reiten em $\text{mod}(A)$. Se δ induz um triângulo de Auslander-Reiten $\Delta : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow X^\bullet[1]$ em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, então temos que $\text{i.dim}(X) = 1$ e $\text{p.dim}(Z) = 1$.*

Demonstração. Primeiramente lembremos que $\mathcal{D}^b(\text{mod } A) \cong \mathcal{K}^{-,b}(\text{proj } A) \cong \mathcal{K}^{+,b}(\text{inj } A)$. Como Δ é um triângulo de A.R. em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, temos, pelo teorema (2.2.5), que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $Z^m \neq 0$

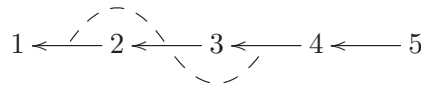
e $Z^i = 0, \forall i < m$. Além disso, $H^{m+1}(X^\bullet) \neq 0$. Porém como o triângulo é induzido por δ , temos que $X^\bullet \cong X[0]$ e portanto $H^j(X^\bullet) = 0$ para $j \neq 0$. Disto segue que $m = -1$, e como aqui estamos considerando o triângulo em $\mathcal{K}^{-,b}(\text{proj } A)$, segue que $\text{p.dim}(Z) = 1$. Analogamente, pelo teorema (2.2.6), temos que existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $X^m \neq 0$ e $X^i = 0, \forall i > m$. Além disso, $H^{m-1}(Z^\bullet) \neq 0$. Como o triângulo é induzido por δ , temos que $Z^\bullet \cong Z[0]$ e portanto $H^j(Z^\bullet) = 0$ para $j \neq 0$. Disto segue que $m = 1$, e como aqui estamos considerando o triângulo em $\mathcal{K}^{+,b}(\text{inj } A)$, segue que $\text{i.dim}(X) = 1$. Disto segue o resultado desejado. \square

Happel provou, em [19], que dado um triângulo de Auslander-Reiten

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

tem-se que u e v são morfismos irredutíveis. Vejamos um exemplo de sequência Auslander-Reiten na categoria de módulos que induz um triângulo de Auslander-Reiten na categoria derivada.

Exemplo 2.2.8. Considere Λ uma álgebra hereditária por partes, do tipo \mathbb{A}_5 , dada pelo quiver:



Neste caso, o quiver de Auslander-Reiten de $\text{mod}(\Lambda)$ é como abaixo:

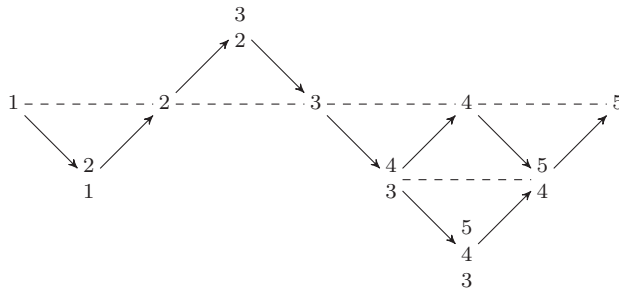


Figura 2.1: $\Gamma(\text{mod}(\Lambda))$

observe a seguinte sequência de Auslander-Reiten em $\text{mod}(\Lambda)$:

$$0 \longrightarrow 4 \longrightarrow \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \longrightarrow 5 \longrightarrow 0$$

Note que $\text{i.dim}(4) = 1$ e $\text{p.dim}(5) = 1$, portanto temos o seguinte triângulo de Auslander-Reiten em $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda) \cong \mathcal{K}^b(\text{proj } \Lambda)$:

$$(P_1 - P_2 - P_3 - P_4)[0] \longrightarrow (P_1 - P_2 - P_3 - P_5)[0] \longrightarrow (P_4 - P_5)[0] \longrightarrow (P_1 - P_2 - P_3 - P_4)[1]$$

Abaixo temos uma ilustração de $\text{mod}(\Lambda)$ mergulhada em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, em que podemos observar o triângulo acima.

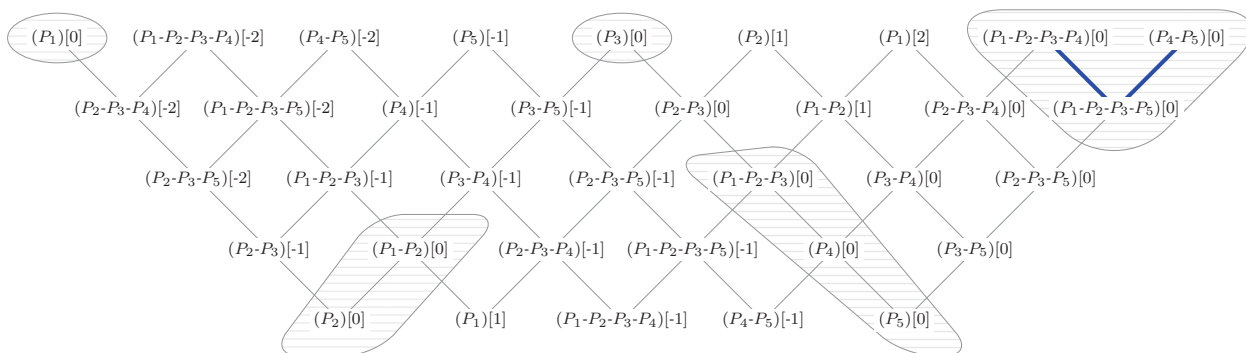


Figura 2.2: $\text{mod}(\Lambda) \subset \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$

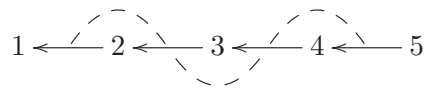
Capítulo 3

Morfismos irreduzíveis em álgebras hereditárias por partes

Considere Λ uma álgebra hereditária por partes. Sabemos, pelo teorema (1.4.2), que dado um morfismo $f : X \rightarrow Y$ em $\text{mod}(\Lambda)$, existe um mergulho $F : \text{mod}(\Lambda) \hookrightarrow \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ que leva o morfismo f em um morfismo \bar{f} em $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$, o qual é dado por:

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\ \bar{f} \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow f & & \downarrow & & \\ Y^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Em geral, dado um morfismo irreduzível $f \in \text{mod}(\Lambda)$ não temos, necessariamente, que \bar{f} é irreduzível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$. Por exemplo, considerando Λ como sendo a álgebra dada pelo seguinte quiver:



temos que o quiver de Auslander-Reiten de $\text{mod}(\Lambda)$ é dado como abaixo.

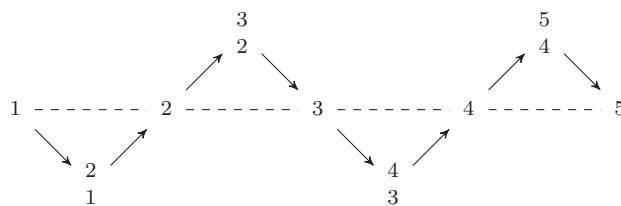


Figura 3.1: $\Gamma(\text{mod } \Lambda)$

A próxima figura ilustra os objetos de $\text{mod}(\Lambda)$ mergulhados em $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda) \cong \mathcal{K}^b(\text{proj } \Lambda)$.

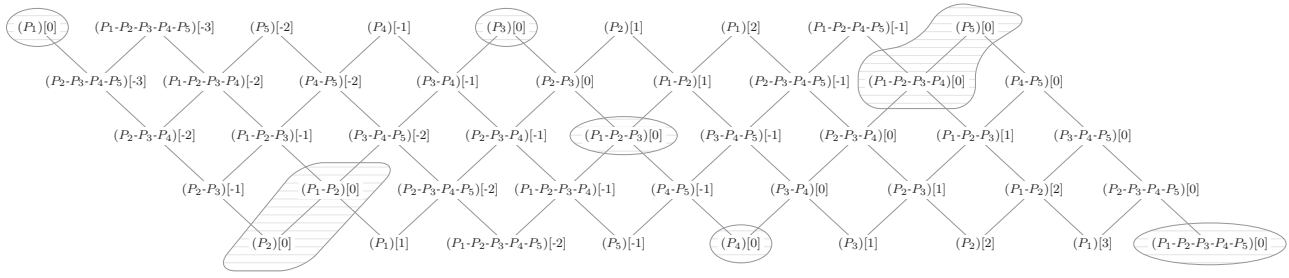


Figura 3.2: $\text{mod}(\Lambda) \subset \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod} \Lambda))$

Podemos observar que no mergulho $\text{mod}(\Lambda) \hookrightarrow \mathcal{D}^b(\text{mod}(\Lambda))$ temos apenas dois morfismos irreduzíveis $f, g \in \text{mod}(\Lambda)$ que foram levados em morfismos irreduzíveis $\bar{f}, \bar{g} \in \mathcal{D}^b(\text{mod}(\Lambda))$.

Neste capítulo vamos apresentar uma condição suficiente para a existência de morfismos que possuem essa propriedade, isto é, morfismos irreduzíveis na categoria derivada advindos de morfismos irreduzíveis da categoria de módulos. Sabemos, pelo teorema (1.5.8), que se Λ é uma álgebra hereditária por partes, então ela é uma álgebra inclinada iterada, portanto existe uma sequência finita de processos de inclinação, partindo de uma álgebra hereditária $k\Delta$ até Λ . Iremos realizar um estudo a respeito do que ocorre com os morfismos irreduzíveis em cada um desses processos, veremos que os morfismos de $\mathcal{D}^b(\text{mod}(\Lambda))$, que possuem a propriedade desejada, estão diretamente ligados aos morfismos de $\text{mod}(k\Delta)$.

3.1 Morfismos irreduzíveis em $\mathcal{T}(T)$ e $\mathcal{F}(T)$

Seja A uma k -álgebra de dimensão finita, T um A -módulo inclinante e $B = \text{End}(T)$. Sabemos, pelo Teorema de Brenner-Butler, que os funtores $\text{Hom}_A(T, _)$ e $\text{Ext}_A^1(T, _)$ induzem, respectivamente, as equivalências $\mathcal{T}(T) \cong \mathcal{Y}(T)$ e $\mathcal{F}(T) \cong \mathcal{X}(T)$. Porém note que esses funtores não fornecem uma equivalência entre as categorias $\text{mod}(A)$ e $\text{mod}(B)$. Como consequência disso, esses funtores não preservam, necessariamente, a irreduzibilidade dos morfismos de $\text{mod}(A)$ para $\text{mod}(B)$. Podemos encontrar em [4], página 212, um exemplo em que temos um morfismo irreduzível $f : X \rightarrow Y$ em $\mathcal{T}(T)$ tal que $\text{Hom}_A(T, f)$ não é irreduzível em $\mathcal{Y}(T)$.

O próximo teorema nos apresenta uma condição suficiente para que esses funtores preservem a irreduzibilidades dos morfismos entre essas duas categorias de módulos. Porém, para enunciar o teorema precisamos da definição se seguir.

Definição 3.1.1. Sejam A uma k -álgebra de dimensão finita e \mathcal{C} uma subcategoria plena de $\text{mod}(A)$. Então dizemos que \mathcal{C} é fechada para predecessores se para todo $X \in \text{mod}(A)$ indecomponível tal que

$\text{Hom}_A(X, Y) \neq 0$, para algum $Y \in \mathcal{C}$, tem-se que $X \in \mathcal{C}$. Analogamente, dizemos que \mathcal{C} é fechada para sucessores se para todo $X \in \text{mod}(A)$ indecomponível tal que $\text{Hom}_A(Y, X) \neq 0$, para algum $Y \in \mathcal{C}$, tem-se que $X \in \mathcal{C}$.

Teorema 3.1.2. *Sejam A uma k -álgebra de dimensão finita, T um A -módulo inclinante e $B = \text{End}(T)$. Se T é tal que $\mathcal{Y}(T)$ é fechado para predecessores e $\mathcal{X}(T)$ é fechado para sucessores, então valem os seguintes resultados.*

- (a) *Se $X, Y \in \mathcal{T}(T)$ e $f : X \rightarrow Y$ é um morfismo irredutível em $\text{mod}(A)$, então $\text{Hom}_A(T, f)$ é irredutível em $\text{mod}(B)$.*
- (b) *Se $X, Y \in \mathcal{F}(T)$ e $f : X \rightarrow Y$ é um morfismo irredutível em $\text{mod}(A)$, então $\text{Ext}_A^1(T, f)$ é irredutível em $\text{mod}(B)$.*

Demonstração. (a) O funtor $\text{Hom}_A(T, _)$ induz uma equivalência entre $\mathcal{T}(T)$ e $\mathcal{Y}(T)$. Como f é irredutível, então f não cinde, portanto $\text{Hom}_A(T, f)$ também não cinde. Denotemos $\varphi = \text{Hom}_A(T, f)$, mostremos que φ é irredutível em $\text{mod}(B)$. De fato, suponha que $\varphi = hg$, onde $g : \text{Hom}_A(T, X) \rightarrow Z$ e $h : Z \rightarrow \text{Hom}_A(T, Y)$. Como $\varphi \neq 0$, então $h \neq 0$ e portanto $Z \in \mathcal{Y}(T)$, pois $\mathcal{Y}(T)$ é fechado para predecessor. Neste caso existe $M \in \text{mod}(A)$ tal que $Z = \text{Hom}_A(T, M)$. Além disso, $g = \text{Hom}_A(T, g')$ e $h = \text{Hom}_A(T, h')$ para algum $g' : X \rightarrow M$ e $h' : M \rightarrow Y$. Disto segue que $f = h'g'$, e como f é irredutível, temos que h' é epimorfismo que cinde ou g' é monomorfismo que cinde. Portanto h é epimorfismo que cinde ou g é monomorfismo que cinde, ou seja, temos que φ é irredutível em $\text{mod}(B)$.

(b) O funtor $\text{Ext}_A^1(T, _)$ induz uma equivalência entre $\mathcal{F}(T)$ e $\mathcal{X}(T)$. Como f é irredutível, então f não cinde, portanto $\text{Ext}_A^1(T, f)$ também não cinde. Denotemos $\varphi = \text{Ext}_A^1(T, f)$, mostremos que φ é irredutível em $\text{mod}(B)$. De fato, suponha que $\varphi = hg$, onde $g : \text{Ext}_A^1(T, X) \rightarrow Z$ e $h : Z \rightarrow \text{Ext}_A^1(T, Y)$. Como $\varphi \neq 0$, então $g \neq 0$ e portanto $Z \in \mathcal{X}(T)$, pois $\mathcal{X}(T)$ é fechado para sucessor. Neste caso existe $M \in \text{mod}(A)$ tal que $Z = \text{Ext}_A^1(T, M)$. Além disso, $g = \text{Ext}_A^1(T, g')$ e $h = \text{Ext}_A^1(T, h')$ para algum $g' : X \rightarrow M$ e $h' : M \rightarrow Y$. Disto segue que $f = h'g'$, e como f é irredutível, temos que h' é epimorfismo que cinde ou g' é monomorfismo que cinde. Portanto h é epimorfismo que cinde ou g é monomorfismo que cinde, ou seja, temos que φ é irredutível em $\text{mod}(B)$. \square

Corolário 3.1.3. *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita e T um A -módulo inclinante cindido. Então os funtores $\text{Hom}_A(T, _)$ e $\text{Ext}_A^1(T, _)$ preservam a irredutibilidade dos morfismos de $\text{mod}(A)$ na categoria $\text{mod}(\text{End } T)$.*

Demonstração. Seja $B = \text{End}(T)$, como T é cindido, segue que o par de torção $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ cinde em $\text{mod}(B)$. Mostremos que $\mathcal{X}(T)$ é fechado para sucessor e $\mathcal{Y}(T)$ é fechado para predecessor. Note

que, da definição de par de torção, temos que $\text{Hom}_B(M, N) = 0$, para todo $M \in \mathcal{X}(T)$ e para todo $N \in \mathcal{Y}(T)$. Sejam $X \in \mathcal{X}(T)$, $Y \in \mathcal{Y}(T)$ e $Z \in \text{mod}(B)$ indecomponível, então temos:

$$\text{Hom}_B(X, Z) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Z \notin \mathcal{Y}(T) \quad \Rightarrow \quad Z \in \mathcal{X}(T)$$

$$\text{Hom}_B(Z, Y) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad Z \notin \mathcal{X}(T) \quad \Rightarrow \quad Z \in \mathcal{Y}(T)$$

Disto segue que $\mathcal{X}(T)$ é fechado para sucessor e $\mathcal{Y}(T)$ é fechado para predecessor. Portanto, pelo teorema (3.1.2), segue o resultado desejado. \square

Note que, se Λ é uma álgebra inclinada iterada do tipo Δ , então pela definição (1.5.7), existe uma sequência finita de triplas $(A_i, T_i, \text{End}(T_i) = A_{i+1})_{0 \leq i \leq m-1}$, onde $A_0 = k\Delta$, $A_m = \Lambda$ e cada T_i é um A_i -módulo inclinante cindido. Portanto, em cada processo, tem-se que os funtores $\text{Hom}_{A_i}(T_i, _)$ e $\text{Ext}_{A_i}^1(T_i, _)$ levam morfismos irredutíveis de $\text{mod}(A_i)$ em morfismos irredutíveis de $\text{mod}(A_{i+1})$.

3.2 Morfismos irredutíveis na categoria derivada

Considere $f \in \text{mod}(\Lambda)$, onde Λ é hereditária por partes do tipo Δ . Sabemos que se f é irredutível, não temos, necessariamente, que \bar{f} é um morfismo irredutível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$. Porém a próxima proposição nos garante que a recíproca é verdadeira.

Proposição 3.2.1. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo não nulo em $\text{mod}(\Lambda)$. Se o morfismo \bar{f} é irredutível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$, então temos que f é irredutível em $\text{mod}(\Lambda)$.*

Demonstração. Suponha que existam morfismos $g : X \rightarrow Z$ e $h : Z \rightarrow Y$ tais que $f = hg$. Mostremos que g é monomorfismo que cinde ou h é epimorfismo que cinde. De fato, vamos denotar por $F : \text{mod}(\Lambda) \hookrightarrow \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ o funtor que leva f em \bar{f} , então $\bar{f} = F(f) = F(hg) = F(h)F(g)$. Por hipótese, temos que \bar{f} é irredutível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$, portanto segue que $F(g)$ é monomorfismo que cinde ou $F(h)$ é epimorfismo que cinde. Se $F(g)$ for monomorfismo que cinde, então teremos que existe $\phi : F(Z) \rightarrow F(X)$, em $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$, tal que $\phi \circ F(g) = \text{id}_{F(X)}$. Porém, pelo teorema (1.4.2), F é fiel e pleno, portanto segue que existe $g' : Z \rightarrow X$ em $\text{mod}(\Lambda)$ tal que $\phi = F(g')$. Neste caso, temos:

$$\text{id}_{F(X)} = \phi \circ F(g) = F(g') \circ F(g) = F(g' \circ g) \quad \Rightarrow \quad g' \circ g = \text{id}_X$$

e portanto segue que g é monomorfismo que cinde. O resultado é análogo no caso em que supormos que $F(h)$ é epimorfismo que cinde. Disto, podemos concluir que f é um morfismo irredutível em $\text{mod}(\Lambda)$. \square

Em geral a recíproca da proposição (3.2.1) não é verdadeira, porém ela vale no caso em que Λ é uma álgebra hereditária.

Proposição 3.2.2. *Seja A uma k -álgebra hereditária de dimensão finita. Neste caso, temos que o mergulho $F : \text{mod}(A) \hookrightarrow \mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ leva todo morfismo irredutível $f \in \text{mod}(A)$ em um morfismo irredutível \bar{f} em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$.*

Demonstração. Dada uma sequência de Auslander-Reiten $0 \rightarrow X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \rightarrow 0$ em $\text{mod}(A)$, temos por Happel, em [20], que $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ é um triângulo de Auslander-Reiten em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ se, e somente se, $\text{i.dim}(X) \leq 1$ e $\text{p.dim}(Z) \leq 1$. Como A é uma álgebra hereditária, temos $\text{gl.dim}(A) \leq 1$ e portanto segue o resultado desejado. \square

O próximo teorema relaciona o resultado do corolário (3.1.3) com a irredutibilidade dos morfismos na categoria derivada de uma álgebra inclinada. Ao longo do capítulo sempre iremos considerar $\text{Hom}_A(T, _)$ e $\text{Ext}_A^1(T, _)$ como sendo funtores restritos, respectivamente, às subcategorias plenas $\mathcal{F}(T)$ e $\mathcal{F}(T)$ de $\text{mod}(A)$, em que T é um A -módulo inclinante.

Teorema 3.2.3. *Sejam A uma álgebra hereditária, T um A -módulo inclinante e $B = \text{End}(T)$. Considere $g \in \text{mod}(B)$ um morfismo da forma $\text{Hom}_A(T, f)$ ou $\text{Ext}_A^1(T, f)$. Neste caso, $\bar{g} \in \mathcal{D}^b(\text{mod } B)$ é irredutível se, e somente se, f irredutível em $\text{mod}(A)$.*

Demonstração. (\Leftarrow): Suponha que $g = \text{Hom}_A(T, f)$, para algum $f : X \rightarrow Y$ irredutível em $\text{mod}(A)$. Como A é hereditária, então T é cindido e portanto segue, do corolário (3.1.3), que g é irredutível em $\text{mod}(B)$. Mostremos agora que \bar{g} é irredutível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } B)$. De fato, como A é hereditária, sabemos que o mergulho $\text{mod}(A) \hookrightarrow \mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ leva f em um morfismo irredutível $\bar{f} \in \mathcal{D}^b(\text{mod } A)$. Além disso, como o funtor $\mathbb{R}\text{Hom}(T, _) : \mathcal{D}^b(\text{mod } A) \rightarrow \mathcal{D}^b(\text{mod } B)$ é uma equivalência, temos que $\mathbb{R}\text{Hom}(T, \bar{f})$ é um morfismo irredutível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } B)$. Note que, pela proposição (1.5.10), sabemos que $\mathbb{R}\text{Hom}(T, \bar{f})$ é da forma:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 \mathbb{R}\text{Hom}(T, X) & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(T, X) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\
 \downarrow \mathbb{R}\text{Hom}(T, \bar{f}) & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(T, f) & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 \mathbb{R}\text{Hom}(T, Y) & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(T, Y) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Por outro lado, existe um mergulho fiel e pleno $\text{mod}(B) \hookrightarrow \mathcal{D}^b(\text{mod } B)$ em que g é levado em \bar{g} . Note

que $g = \text{Hom}(T, f) : \text{Hom}(T, X) \rightarrow \text{Hom}(T, Y)$, portanto \bar{g} é dado por:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \text{Hom}(T, X)^\bullet & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(T, X) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \text{Hom}(T, f) & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \text{Hom}(T, Y)^\bullet & & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \text{Hom}(T, Y) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Como \bar{g} coincide com o morfismo $\mathbb{R} \text{Hom}(T, \bar{f})$ em $\mathcal{D}^b(\text{mod } B)$, segue que \bar{g} é irredutível. A prova para o caso em que $g = \text{Ext}_A^1(T, f)$, para algum $f \in \mathcal{F}(T)$, é feita de maneira análoga. Porém, neste caso, o morfismo \bar{g} coincidirá com o morfismo irredutível $\mathbb{R} \text{Hom}(T, \bar{f})[1] \in \mathcal{D}^b(\text{mod } B)$.

(\Rightarrow): Seja $\bar{g} \in \mathcal{D}^b(\text{mod } B)$ um morfismo irredutível, tal que $g = \text{Hom}_A(T, f)$ para algum f em $\mathcal{F}(T) \subset \text{mod}(A)$. Suponha que f não é irredutível em $\text{mod}(A)$, então pela proposição (3.2.1), temos que \bar{f} não é irredutível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ e segue que $\mathbb{R} \text{Hom}(T, \bar{f})$ não é um morfismo irredutível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } B)$. Porém isso contradiz a o fato de $\bar{g} \in \mathcal{D}^b(\text{mod } B)$ ser irredutível, pois $\mathbb{R} \text{Hom}(T, \bar{f})$ coincide com \bar{g} . Disto segue que f deve ser um morfismo irredutível em $\text{mod}(A)$. \square

A seguir apresentamos um exemplo de processo inclinação que ilustra o resultado do teorema (3.2.3).

Exemplo 3.2.4. Considere A como sendo a álgebra de caminhos dada pelo quiver:

$$1 \longleftarrow 2 \longleftarrow 3 \longleftarrow 4 \longleftarrow 5$$

Neste caso, o quiver de Auslander-Reiten de $\text{mod}(A)$ é dado por:

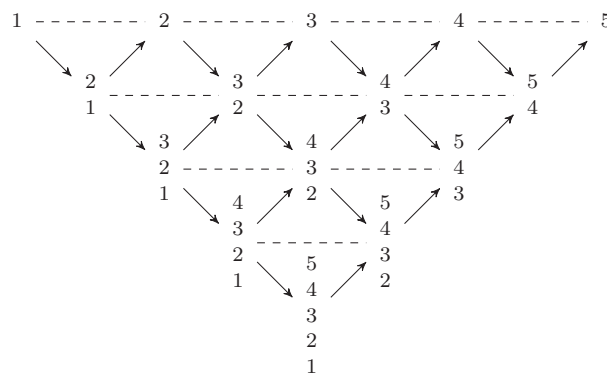
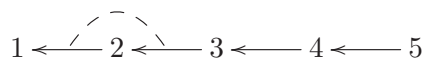


Figura 3.3: $\Gamma(\text{mod } A)$

Considere T como sendo o seguinte A -módulo inclinante:

$$T = 1 \oplus \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \oplus 5$$

Portanto $B = \text{End}_A(T)$ é a álgebra dada pelo quiver



Neste caso, temos que $\Gamma(\text{mod } B)$ é como abaixo:

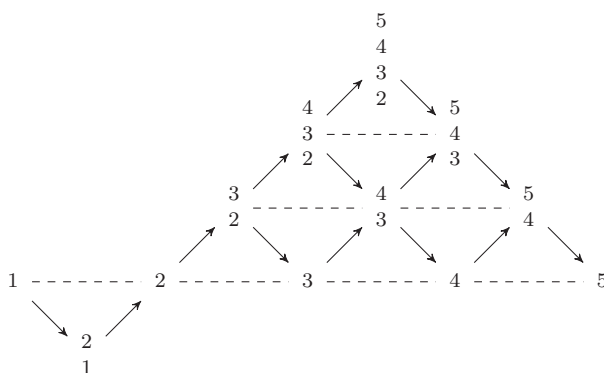


Figura 3.4: $\Gamma(\text{mod } B)$

Sabemos que T induz um par de torção $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ em $\text{mod}(A)$ e um par de torção $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ em $\text{mod}(B)$. A figura abaixo ilustra esses pares de torção.

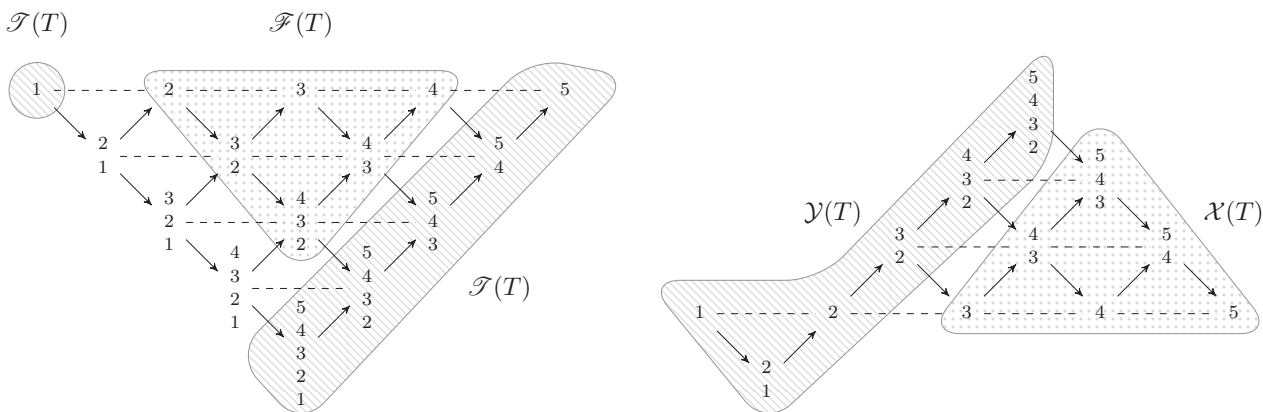


Figura 3.5: Processo de $\text{mod}(A)$ para $\text{mod}(B)$ induzido pelo A -módulo inclinante T .

Como $\text{mod}(B)$ é uma álgebra inclinada, podemos utilizar os resultados de Alvares, Fernandes e Giraldo, apresentados em [1], para escrevermos o quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada de

$\text{mod}(B)$.

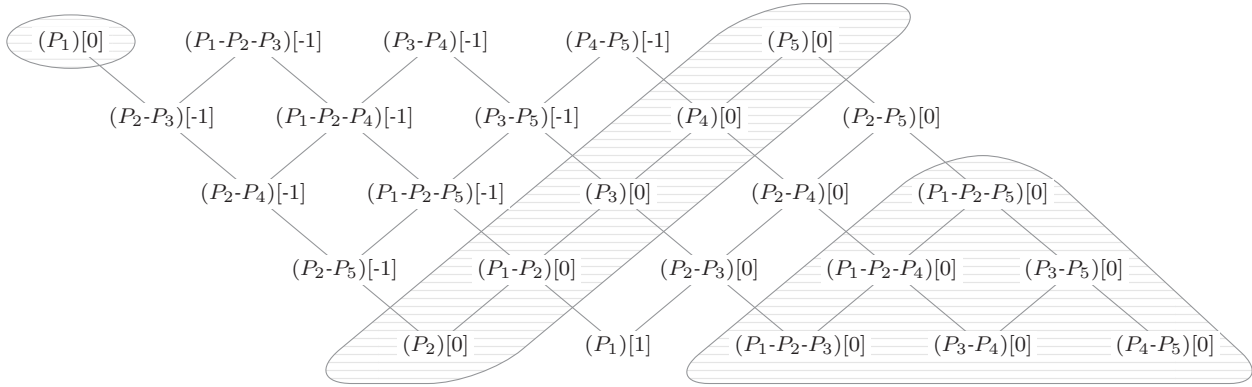


Figura 3.6: $\text{mod}(B) \subset \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } B))$

A figura acima ilustra os objetos de $\text{mod}(B)$ em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } B))$. Podemos observar que o morfismo $g : 1 \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ é irredutível em $\mathcal{Y}(T) \subset \text{mod}(B)$, porém $\bar{g} : (P_1)[0] \rightarrow (P_2)[0]$ não é irredutível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } B)$. Note que, apesar de g ser dado por

$$g = \text{Hom}_A(T, f), \quad \text{em que } f : 1 \rightarrow \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \text{ pertence a } \mathcal{T}(T) \subset \text{mod}(A),$$

temos que o morfismo f não é irredutível em $\text{mod}(A)$, portanto g não satisfaz as hipóteses do teorema (3.2.3). Observe que os únicos morfismos irredutíveis de $\text{mod}(B)$, que tiveram sua irredutibilidade preservada na categoria derivada $\mathcal{D}^b(\text{mod } B)$, são exatamente os morfismos g tal que $g = \text{Hom}_A(T, f)$ ou $g = \text{Ext}_A^1(T, f)$, para algum f irredutível em $\text{mod}(A)$.

Observação 3.2.5. Note que o teorema (3.2.3) nos diz que todo morfismo $g = \text{Hom}_A(T, f) \in \mathcal{Y}(T)$, com f irredutível em $\text{mod}(A)$, fornece um morfismo irredutível $\bar{g} \in \mathcal{D}^b(\text{mod } B)$. Sabemos que dado I um injetivo em $\text{mod}(A)$, tem-se que $I \in \mathcal{T}(T)$, pois $\text{Ext}_A^1(T, I) = 0$ para todo A -módulo T . Disto segue que todos os módulos injetivos de $\text{mod}(A)$ estão contidos em $\mathcal{T}(T)$. Portanto os morfismos irredutíveis, entre estes injetivos, induzem morfismos irredutíveis em $\mathcal{D}^b(\text{mod } B)$. Foi provado por Alvares, Fernandes e Giraldo, que tais injetivos de $\text{mod}(A)$ formam uma secção no quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada $\mathcal{D}^b(\text{mod } B)$. Em [1] é possível encontrar mais detalhes sobre esse resultado.

Agora observe que o teorema (3.2.3) não é válido no caso em que A não é uma álgebra hereditária. Vejamos no próximo exemplo, o que ocorre com os morfismos irredutíveis de $\text{mod}(B)$, do exemplo (3.2.4), ao realizarmos um segundo processo de inclinação.

Exemplo 3.2.6. Sejam A e $B = \text{End}_A(T)$ as álgebras dadas no Exemplo (3.2.4). Então sabemos que o quiver de Auslander-Reiten de $\text{mod}(B)$ é como abaixo.

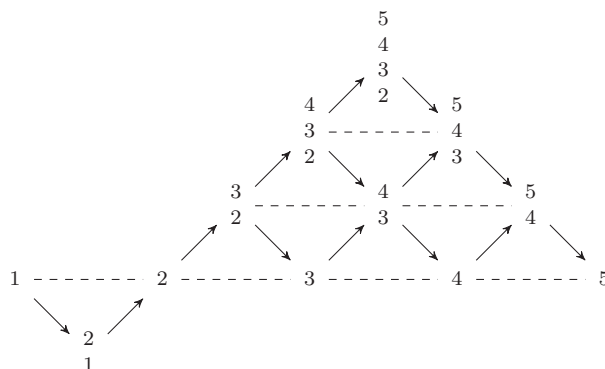
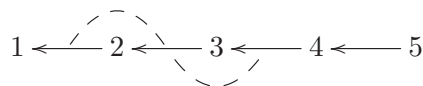


Figura 3.7: $\Gamma(\text{mod } B)$

Agora considere T' como sendo o B -módulo inclinante dado por

$$T' = 1 \oplus \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix} \oplus 5$$

portanto $C = \text{End}_B(T')$ é a álgebra dada pelo seguinte quiver:



Neste caso, temos que $\Gamma(\text{mod } C)$ é como abaixo:

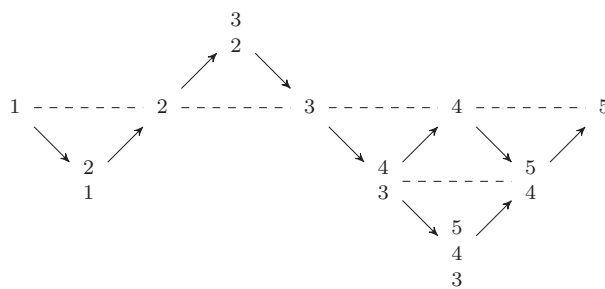


Figura 3.8: $\Gamma(\text{mod } C)$

Sabemos que T' induz um par de torção $(\mathcal{T}(T'), \mathcal{F}(T'))$ em $\text{mod}(B)$ e um par de torção $(\mathcal{X}(T'), \mathcal{Y}(T'))$ em $\text{mod}(C)$. A próxima figura ilustra esses pares de torção, em suas respectivas categorias.

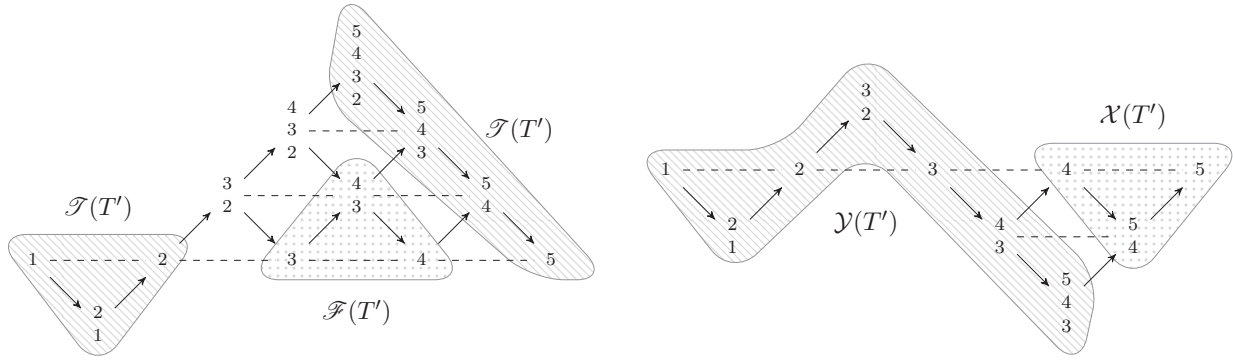


Figura 3.9: Processo de $\text{mod}(B)$ para $\text{mod}(C)$ induzido pelo B -módulo inclinante T' .

Note que o par de torção $(\mathcal{X}(T'), \mathcal{Y}(T'))$ cinde em $\Gamma(\text{mod } C)$, portanto o B -módulo inclinante T' é cindido. Então, pelo corolário (3.1.3), temos que os funtores $\text{Hom}_B(T', _): \mathcal{F}(T') \rightarrow \mathcal{Y}(T')$ e $\text{Ext}_B^1(T', _): \mathcal{F}(T') \rightarrow \mathcal{X}(T')$ preservam morfismos irredutíveis de $\text{mod}(B)$ para $\text{mod}(C)$. Porém isso não garante que tais morfismos tenham sua irredutibilidade preservada em $\mathcal{D}^b(\text{mod } C)$. A figura abaixo ilustra $\text{mod}(C)$ mergulhada em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } C))$.

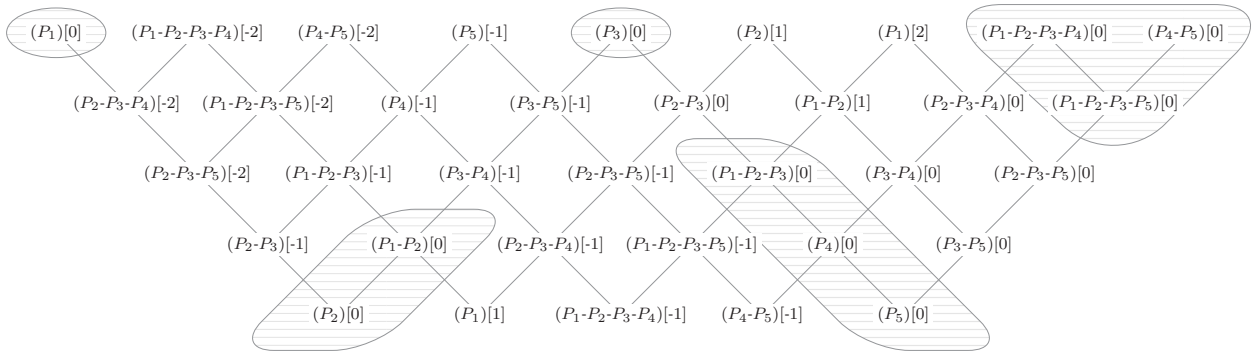


Figura 3.10: $\text{mod}(C) \subset \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } C))$

Note que em $\text{mod}(B)$, na figura (3.9), os morfismos $g_1 : 1 \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$ e $g_2 : \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$ são morfismos irredutíveis em $\mathcal{F}(T')$. Portanto g_1 e g_2 são levados nos seguintes morfismos irredutíveis de $\text{mod}(C)$,

$$h_1 = \text{Hom}_B(T', g_1) : 1 \rightarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \quad \text{e} \quad h_2 = \text{Hom}_B(T', g_2) : \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \rightarrow 3$$

Porém, temos que $\overline{h_1} : (P_1)[0] \rightarrow (P_2)[0]$ e $\overline{h_2} : (P_3)[0] \rightarrow (P_1 - P_2 - P_3)[0]$ não são irredutíveis em $\mathcal{D}^b(\text{mod } C)$.

Observação 3.2.7. Apesar de, no exemplo acima, os morfismos g_1 e g_2 não terem sua irredutibilidade preservada de $\text{mod}(B)$ para $\mathcal{D}^b(\text{mod } C)$, existem vários outros morfismos de $\text{mod}(B)$ que mantiveram sua irredutibilidade após serem levados para $\text{mod}(C)$ e serem mergulhados na categoria derivada

$\mathcal{D}^b(\text{mod } C)$. Ao analisarmos esses outros morfismos de $\text{mod}(B)$, podemos notar que todos são da forma $\text{Hom}_A(T, f)$ ou $\text{Ext}_A^1(T, f)$, para algum f irredutível em $\text{mod}(A)$. Observe que g_1 e g_2 não são dessa forma. De fato, temos que

$$g_1 = \text{Hom}_A(T, f), \quad \text{em que } f : \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \text{ pertence a } \mathcal{T}(T) \subset \text{mod}(A)$$

porém, podemos ver, na figura (3.5), que o morfismo f não é irredutível em $\text{mod}(A)$. Além disso, também podemos observar que $g_2 \notin \mathcal{Y}(T)$ e $g_2 \notin \mathcal{X}(T)$, portanto g_2 não é da forma $\text{Hom}_A(T, f)$ ou $\text{Ext}_A^1(T, f)$ para algum morfismo f em $\mathcal{T}(T) \vee \mathcal{F}(T)$.

Proposição 3.2.8. *Sejam A uma k -álgebra de dimensão finita, T um A -módulo inclinante e $B = \text{End}(T)$. Considere $g \in \text{mod}(B)$ um morfismo da forma $\text{Hom}_A(T, f)$ ou $\text{Ext}_A^1(T, f)$. Neste caso, $\bar{g} \in \mathcal{D}^b(\text{mod } B)$ é irredutível se, e somente se, \bar{f} é irredutível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$.*

Demonstração. Seja $g = \text{Hom}_A(T, f)$, para algum $f : X \rightarrow Y$ em $\mathcal{T}(T) \subset \text{mod}(A)$. Neste caso, pela proposição (1.5.10), sabemos que o morfismo $\bar{g} \in \mathcal{D}^b(\text{mod } B)$ coincide com o morfismo $\mathbb{R} \text{Hom}(T, \bar{f})$, em que $\bar{f} \in \mathcal{D}^b(\text{mod } A)$. Como $\mathbb{R} \text{Hom}(T, _): \mathcal{D}^b(\text{mod } A) \rightarrow \mathcal{D}^b(\text{mod } B)$ é uma equivalência, temos que \bar{g} é irredutível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } B)$ se, e somente se, \bar{f} é irredutível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$. \square

Note que a proposição acima, juntamente com o teorema (3.2.3), justificam o fato relatado na observação (3.2.7). Antes de enunciarmos o próximo teorema, precisamos da seguinte definição.

Definição 3.2.9. *Seja Λ uma álgebra inclinada iterada do tipo Δ , isto é, existe uma sequência finita de triplas $(A_i, T_i, A_{i+1} = \text{End}(T_i))_{0 \leq i \leq n-1}$ tal que $A_0 = k\Delta$ e $A_n = \Lambda$, em que cada T_i é um A_i -módulo inclinante cindido. Dizemos que um morfismo não nulo $\varphi \in \text{mod}(\Lambda)$ é induzido por um morfismo $f \in \text{mod}(k\Delta)$, se existe uma sequência de funtores $(\mathcal{F}_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ tal que:*

$$\mathcal{F}_{n-1} \circ \mathcal{F}_{n-2} \circ \dots \circ \mathcal{F}_0(f) = \varphi \in \text{mod}(\Lambda)$$

em que

$$\mathcal{F}_i = \text{Hom}_{A_i}(T_i, _) : \mathcal{T}(T_i) \rightarrow \mathcal{Y}(T_i) \quad \text{ou} \quad \mathcal{F}_i = \text{Ext}_{A_i}^1(T_i, _) : \mathcal{F}(T_i) \rightarrow \mathcal{X}(T_i)$$

para cada $0 \leq i \leq n-1$.

Considere Λ uma álgebra inclinada iterada do tipo Δ tal que $\Lambda = \text{End}_B(T_1)$, $B = \text{End}_A(T_0)$ e $A = k\Delta$. Então, pela definição acima, temos que um morfismo não nulo $\varphi \in \text{mod}(\Lambda)$ é induzido por

um morfismo $f \in \text{mod}(k\Delta)$ se, e somente se, φ é de uma das seguintes formas:

(i) se $\varphi \in \mathcal{Y}(T_1)$, temos:

$$\varphi = \text{Hom}_B(T_1, \text{Hom}_A(T_0, f)) \quad \text{ou} \quad \varphi = \text{Hom}_B(T_1, \text{Ext}_A^1(T_0, f))$$

(ii) se $\varphi \in \mathcal{X}(T_1)$, temos:

$$\varphi = \text{Ext}_B^1(T_1, \text{Hom}_A(T_0, f)) \quad \text{ou} \quad \varphi = \text{Ext}_B^1(T_1, \text{Ext}_A^1(T_0, f))$$

em que f pertence a $\mathcal{T}(T_0)$ ou $\mathcal{F}(T_0)$, respectivamente.

Teorema 3.2.10. *Seja Λ uma álgebra inclinada iterada do tipo Δ . Se existe um morfismo $\varphi \in \text{mod}(\Lambda)$ que é induzido por algum morfismo irredutível $f \in \text{mod}(k\Delta)$, então $\overline{\varphi}$ é irredutível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$.*

Demonstração. Se Λ é uma álgebra inclinada iterada do tipo Δ , então existe uma sequência finita de triplas $(A_i, T_i, A_{i+1} = \text{End}(T_i))_{0 \leq i \leq n-1}$ tal que $A_0 = k\Delta$ e $A_n = \Lambda$, onde cada T_i é um A_i -módulo inclinante cindido. Sejam f um morfismo irredutível em $\text{mod}(A_0)$ e T_0 um A_0 -módulo inclinante. Se $f \in \mathcal{T}(T_0)$ ou $f \in \mathcal{F}(T_0)$, então pelo teorema (3.2.3) temos que $\mathcal{F}_0(f) \in \text{mod}(A_1)$ é um morfismo irredutível tal que $\overline{\mathcal{F}_0(f)}$ é irredutível na categoria $\mathcal{D}^b(\text{mod } A_1)$.

Agora seja T_1 um A_1 -módulo inclinante cindido e suponha que $\mathcal{F}_0(f) \in \mathcal{T}(T_1)$ ou $\mathcal{F}_0(f) \in \mathcal{F}(T_1)$. Como $\overline{\mathcal{F}_0(f)}$ é irredutível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A_1)$, temos pela proposição (3.2.8) que $\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_0(f) \in \text{mod}(A_2)$ é um morfismo irredutível em $\text{mod}(A_2)$ tal que $\overline{\mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_0(f)}$ é irredutível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A_2)$. Portanto, seguindo esse processo repetidas vezes, usando a proposição (3.2.8), tem-se que $\mathcal{F}_{n-1} \circ \mathcal{F}_{n-2} \circ \dots \circ \mathcal{F}_0(f)$ é um morfismo em $\text{mod}(\Lambda)$ tal que $\overline{\mathcal{F}_{n-1} \circ \mathcal{F}_{n-2} \circ \dots \circ \mathcal{F}_0(f)}$ é irredutível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$. \square

No próximo exemplo vamos utilizar o teorema (3.2.10) para encontrar morfismos irredutíveis na categoria derivada de uma álgebra hereditária por partes, de radical quadrado zero, do tipo \mathbb{A}_5 .

Exemplo 3.2.11. Aqui vamos considerar A , B e C as álgebras envolvidas nos processos de inclinação dos exemplos (3.2.4) e (3.2.6). Abaixo apresentaremos o quiver de Auslander-Reiten das categorias de módulos dessas álgebras, assim como os pares de torção envolvidos em cada processo. Lembremos que tais processos foram induzidos pelo A -módulo inclinante T e pelo B -módulo inclinante T' , respectivamente, da seguinte maneira:

$$T = \begin{array}{ccccccc} & & & & 5 & & \\ & & & & 4 & & \\ & & & & 3 & & 5 \\ & & & & 2 & & 4 \\ & & & & 1 & & 3 \\ & & & & & & 5 \\ & & & & & & 4 \\ & & & & & & 5 \end{array}$$

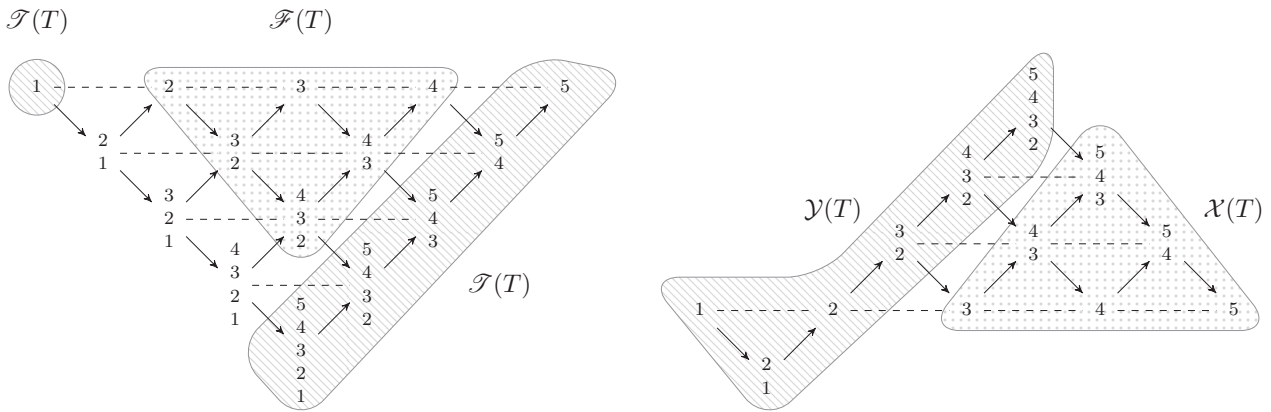


Figura 3.11: Processo de $\text{mod}(A)$ para $\text{mod}(B)$ induzido pelo A -módulo inclinante T .

$$T' = 1 \oplus \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 3 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \oplus 5$$

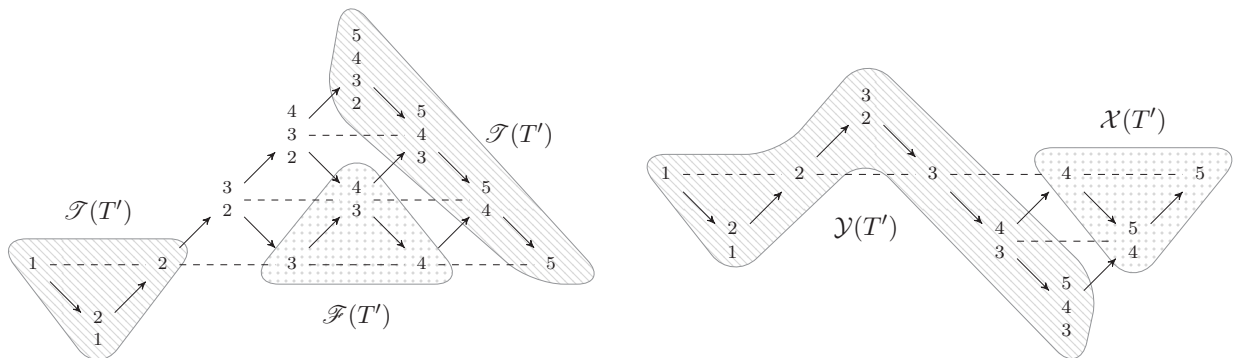
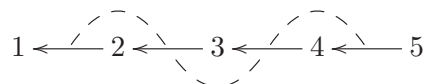


Figura 3.12: Processo de $\text{mod}(B)$ para $\text{mod}(C)$ induzido pelo B -módulo inclinante T' .

Agora vamos considerar um módulo inclinante cindido em $\text{mod}(C)$ dado por:

$$T'' = 1 \oplus \begin{matrix} 2 \\ 1 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \oplus \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} \oplus 5$$

Seja $\Lambda = \text{End}_C(T'')$, então temos que Λ é a álgebra dada pelo quiver



Sabemos que T'' induz um par de torção $(\mathcal{T}(T''), \mathcal{F}(T''))$ em $\text{mod}(C)$ e também induz um par de torção $(\mathcal{X}(T''), \mathcal{Y}(T''))$ em $\text{mod}(\Lambda)$. A próxima figura apresenta esses pares de torção.

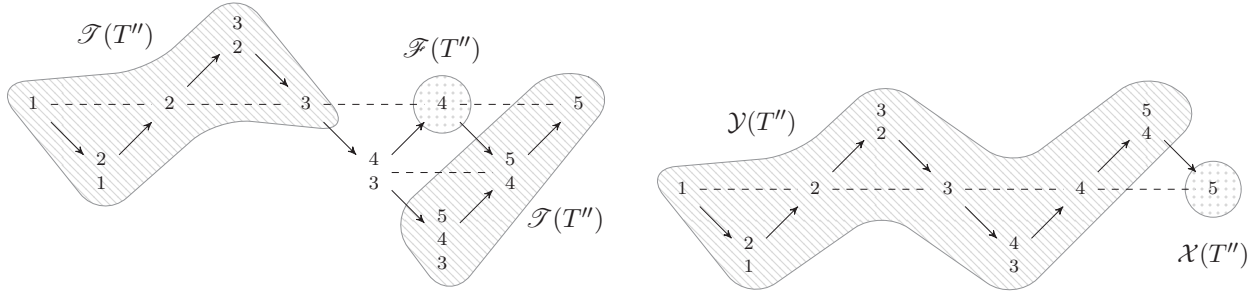


Figura 3.13: Processo de $\text{mod}(C)$ para $\text{mod}(\Lambda)$ induzido pelo C -módulo inclinante T'' .

Abaixo ilustramos a categoria $\text{mod}(\Lambda)$ mergulhada em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$.

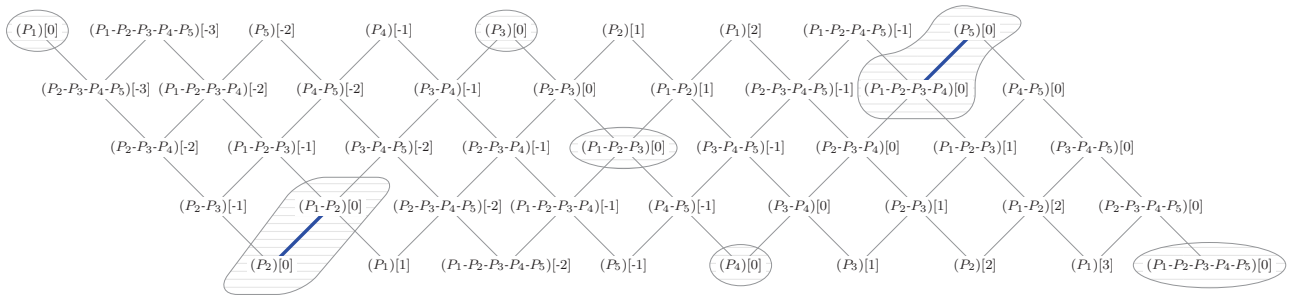


Figura 3.14: $\text{mod}(\Lambda) \subset \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$

Analisando $\Gamma(\text{mod } \Lambda)$ e $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, é possível observar que os únicos morfismos irredutíveis de $\text{mod}(\Lambda)$ que se preservam irredutíveis em $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ são:

$$\varphi_1 : \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow 2 \quad e \quad \varphi_2 : 4 \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Mostremos que tais morfismos são induzidos por morfismos irredutíveis $f, g \in \text{mod}(A)$, ou seja, que existem seqüências $(\mathcal{F}_i)_{0 \leq i \leq 2}$ e $(\mathcal{F}'_i)_{0 \leq i \leq 2}$ tais que:

$$\varphi_1 = \mathcal{F}_2 \circ \mathcal{F}_1 \circ \mathcal{F}_0(f) \quad e \quad \varphi_2 = \mathcal{F}'_2 \circ \mathcal{F}'_1 \circ \mathcal{F}'_0(g)$$

De fato,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 5 & & & & \\ & 4 & & & \\ & & f & & \\ & & & 4 & \\ & & & & 3 \\ & & & & & 2 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}}_{\text{mod}(A)} \xrightarrow[\mathcal{F}_0]{\text{Hom}_A(T, _)} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & \rightarrow & 2 \\ 1 & & \end{pmatrix}}_{\text{mod}(B)} \xrightarrow[\mathcal{F}_1]{\text{Hom}_B(T', _)} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & \rightarrow & 2 \\ 1 & & \end{pmatrix}}_{\text{mod}(C)} \xrightarrow[\mathcal{F}_2]{\text{Hom}_C(T'', _)} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & \xrightarrow{\varphi_1} & 2 \\ 1 & & \end{pmatrix}}_{\text{mod}(\Lambda)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & g \\ 2 & \rightarrow 3 \end{pmatrix}}_{\text{mod}(A)} \xrightarrow[\mathcal{F}'_0]{\text{Ext}_A^1(T, _)} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & \\ 3 & \rightarrow 4 \end{pmatrix}}_{\text{mod}(B)} \xrightarrow[\mathcal{F}'_1]{\text{Ext}_B^1(T', _)} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & \\ 4 & \rightarrow 5 \end{pmatrix}}_{\text{mod}(C)} \xrightarrow[\mathcal{F}'_2]{\text{Hom}_C(T'', _)} \underbrace{\begin{pmatrix} 4 & \varphi_2 & 5 \\ & & 4 \end{pmatrix}}_{\text{mod}(\Lambda)}$$

Podemos notar que f e g são os únicos morfismos irredutíveis em $\text{mod}(A)$ para os quais existem seqüências do tipo $(\mathcal{F}_i)_{0 \leq i \leq 2}$ levando morfismos de $\text{mod}(A)$ para $\text{mod}(\Lambda)$. É fácil ver que para qualquer outro morfismo irredutível $h \in \text{mod}(A)$, existe algum índice $0 \leq j \leq 2$ em que a composição da seqüência dos funtores $(\mathcal{F}_i)_{0 \leq i \leq 2}$ não está definida.

Capítulo 4

Categoria derivada de álgebras hereditárias por partes do tipo Dynkin

Seja Δ um quiver do tipo Dynkin, então é de conhecimento geral que a álgebra de caminhos $k\Delta$ é hereditária de dimensão finita. Neste caso, temos por [20], que sua categoria derivada $\mathcal{D}^b(\text{mod } k\Delta)$ pode ser escrita como $\bigvee_{n \in \mathbb{Z}} \text{mod}(k\Delta)[n]$. Porém a categoria derivada de $\text{mod}(\Lambda)$, em que Λ é uma álgebra hereditária por partes, não possui necessariamente essa mesma propriedade. Neste caso existem objetos em $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ que não são shifts de módulos de $\text{mod}(\Lambda)$, e por este motivo a construção desse tipo de categoria derivada é mais complexa.

O objetivo deste trabalho consiste em desenvolver um método intrínseco para a construção de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, em que Λ é uma álgebra hereditária por partes do tipo Dynkin. Apresentaremos um método para a construção de secções Σ de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, em que Σ é formada apenas por shifts de objetos indecomponíveis de $\text{mod}(\Lambda)$. Por exemplo, considere Λ uma álgebra hereditária por partes, de radical quadrado zero, do tipo \mathbb{A}_5 tal que $\Gamma(\text{mod } \Lambda)$ é como abaixo.

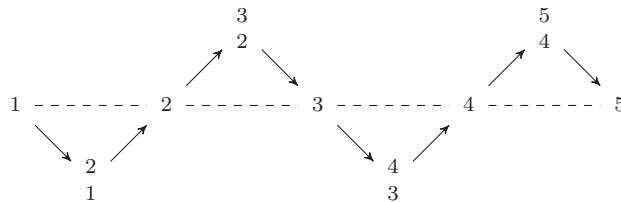


Figura 4.1: $\Gamma(\text{mod } \Lambda)$

Através de nosso método, é possível afirmar que o conjunto abaixo forma uma secção no quiver de Auslander-Reiten de $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$.

$$\{1[0], 2[-1], 3[-2], 4[-3], 5[-4]\}$$

Essa afirmação pode ser feita apenas analisando os módulos do quiver de Auslander-Reiten de $\text{mod}(\Lambda)$.

Neste capítulo apresentaremos o método para os casos \mathbb{A}_n e \mathbb{D}_n . O método para os casos \mathbb{E}_6 , \mathbb{E}_7 e \mathbb{E}_8 é muito parecido, porém para demonstrá-los foram utilizados alguns recursos computacionais e

por este motivo estes casos não serão desenvolvidos neste texto.

4.1 A categoria mesh $k\langle \mathbb{Z}\Delta \rangle$

Recordemos que dados dois quivers finitos Q e Q' , um morfismo de quivers $f : Q' \rightarrow Q$ consiste de um par de aplicações $f_0 : Q'_0 \rightarrow Q_0$ e $f_1 : Q'_1 \rightarrow Q_1$ tais que se $\alpha \in Q'_1$, com $s(\alpha) = x$ e $t(\alpha) = y$, então temos que $f_1(\alpha) \in Q_1$, $s(f_1(\alpha)) = f_0(x)$ e $t(f_1(\alpha)) = f_0(y)$. Dizemos que f é um isomorfismo de quivers se f_0 e f_1 forem aplicações bijetoras.

Definição 4.1.1. Seja Q um quiver finito, definimos o quiver de translação $\mathbb{Z}Q$ como sendo um quiver infinito tal que:

- O conjunto de vértices $(\mathbb{Z}Q)_0$ é dado por $\mathbb{Z} \times Q_0$.
- Para cada flecha $\alpha : i \rightarrow j$ em Q e para cada $n \in \mathbb{Z}$, temos as seguintes flechas:

$$(n, \alpha) : (n, i) \rightarrow (n, j) \quad e \quad \sigma(n, \alpha) : (n - 1, j) \rightarrow (n, i)$$

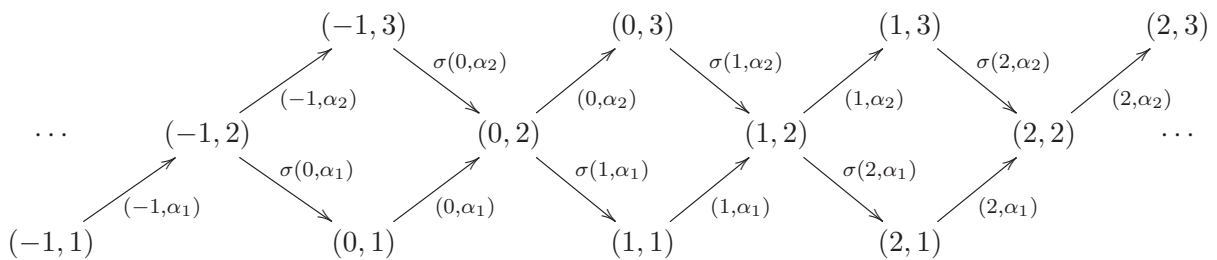
O quiver $\mathbb{Z}Q$ é munido de uma aplicação

$$\begin{aligned} \sigma : (\mathbb{Z}Q)_1 &\rightarrow (\mathbb{Z}Q)_1 \\ (n, \alpha) &\mapsto \sigma(n, \alpha) \\ \sigma(n, \alpha) &\mapsto (n - 1, \alpha) \end{aligned}$$

e de um automorfismo τ , dado por:

$$\begin{aligned} \tau : (\mathbb{Z}Q)_0 &\rightarrow (\mathbb{Z}Q)_0 & \tau : (\mathbb{Z}Q)_1 &\rightarrow (\mathbb{Z}Q)_1 \\ (n, i) &\mapsto (n - 1, i) & (n, \alpha) &\mapsto (n - 1, \alpha) \\ & & \sigma(n, \alpha) &\mapsto \sigma(n - 1, \alpha) \end{aligned}$$

Exemplo 4.1.2. Para $Q : 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3$, temos que o quiver $\mathbb{Z}Q$ é dado por:



Definição 4.1.3. Seja Γ um quiver, definimos a categoria de caminhos $k(\Gamma)$ como sendo uma categoria k -linear em que:

- Os objetos são os vértices de Γ .
- $\text{Hom}(i, j)$ é um k -espaço vetorial, cuja base é formada por todos os caminhos de i para j .
- A composição de morfismos é induzida pela concatenação dos caminhos.

Lembremos que um ideal I , em uma categoria k -linear \mathcal{C} , consiste de para cada $\text{Hom}(x, y)$ um subespaço $I(x, y)$ tal que para todo $f : x' \rightarrow x$, $h : y \rightarrow y'$ e $g \in I(x, y)$, tem-se que $h \circ g \circ f \in I(x', y')$. A categoria quociente \mathcal{C}/I possui os mesmos objetos de \mathcal{C} e

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}/I}(x, y) := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y)/I(x, y)$$

Definição 4.1.4. O ideal $\text{mesh}(\mathbb{Z}Q)$ é o ideal de $k(\mathbb{Z}Q)$, gerado pelas relações:

$$r_v = \sum_{\{\alpha; t(\alpha)=v\}} \alpha \sigma(\alpha) \in \text{Hom}_{k(\mathbb{Z}Q)}(\tau(v), v)$$

em que v percorre os vértices de $\mathbb{Z}Q$. Definimos a categoria $\text{mesh } k\langle \mathbb{Z}Q \rangle$ de $\mathbb{Z}Q$ como sendo a categoria $k(\mathbb{Z}Q)/\text{mesh}(\mathbb{Z}Q)$.

Teorema 4.1.5. *Seja $A = k\Delta$ uma k -álgebra hereditária de dimensão finita. Se Δ é um quiver do tipo Dynkin, então:*

- $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } k\Delta)) \cong \mathbb{Z}\Delta$.
- O isomorfismo acima se estende a uma equivalência de categorias $\text{ind}\mathcal{D}^b(\text{mod } k\Delta) \cong k\langle \mathbb{Z}\Delta \rangle$.

Demonstração. Ver [20], páginas 54 e 55. □

Note que, se Δ é um quiver Dynkin e Λ é uma álgebra hereditária por partes do tipo Δ , então temos $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda) \cong \mathcal{D}^b(\text{mod } k\Delta)$ e segue que:

$$\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)) \cong \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } k\Delta)) \cong \mathbb{Z}\Delta$$

Portanto podemos relacionar os objetos indecomponíveis de $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ com os vértices do quiver $\mathbb{Z}\Delta$, essa relação irá nos auxiliar nos resultados apresentados ao longo deste capítulo.

Antes de iniciarmos nossos estudos, recordemos da definição de secção, a qual também será utilizada nos próximos resultados.

Definição 4.1.6. Seja (Γ, τ) um quiver de translação conexo. Um subquiver pleno Σ de Γ é uma secção de Γ se as seguintes condições forem satisfeitas:

- (S1) Σ é acíclico.
- (S2) Para cada $x \in \Gamma_0$, existe um único $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\tau^n x \in \Sigma_0$.
- (S3) Se $x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_t$ é um caminho em Γ , com $x_0, x_t \in \Sigma_0$, então $x_i \in \Sigma_0$ para todo $0 \leq i \leq t$.

Um caminho $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_t$ em um quiver de translação é dito seccional se $\tau x_i \neq x_{i-2}$, para todo $3 \leq i \leq t$.

4.2 Álgebras hereditárias por partes do tipo \mathbb{A}_n

Nesta seção iremos estudar as álgebras Λ que são hereditárias por partes do tipo \mathbb{A}_n . Por definição, temos que existe uma equivalência triangulada entre $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ e $\mathcal{D}^b(\text{mod } k\Delta)$, em que Δ é um quiver do tipo \mathbb{A}_n . Portanto o quiver de Auslander-Reiten de $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ pode ser identificado com o quiver $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$, para algum $n \geq 1$. De acordo com [20], página 183, o quiver $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n$ é da seguinte forma:

- O vértices são pares (n, i) , onde $n \in \mathbb{Z}$ e $i \in \Delta_0$.
- Para cada $\alpha \in \Delta_1$, com $\alpha : i \rightarrow j$, existem duas flechas em $(\mathbb{Z}\Delta)_1$

$$(n, i) \rightarrow (n, j) \quad \text{e} \quad (n, j) \rightarrow (n + 1, i).$$

Assim, podemos visualizar o quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ como na figura a seguir.

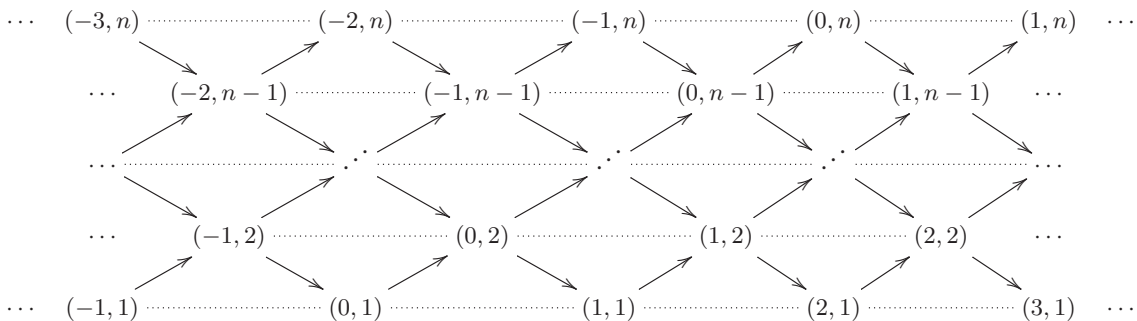


Figura 4.2: Parametrização de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$.

O quiver acima segue a parametrização dada de acordo com [20], pág. 183, em que cada par (i, j) é associado com até duas flechas:

$$\begin{cases} (i, j) \rightarrow (i, j + 1), & \text{para } 1 \leq j \leq n - 1 \\ (i, j) \rightarrow (i + 1, j - 1), & \text{para } 2 \leq j \leq n \end{cases}$$

Dado $X^\bullet \in \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ indecomponível, podemos identificar X^\bullet como sendo um vértice de coordenadas (i, j) em $\mathbb{Z}\mathbb{A}_n \cong \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$. O lema a seguir nos permite descrever com precisão as coordenadas do shift de X^\bullet em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, assim como as coordenadas de todo $Y^\bullet \in \text{ind}\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ tal que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(X^\bullet, Y^\bullet) \neq 0$ ou $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(Y^\bullet, X^\bullet) \neq 0$.

Lema 4.2.1. *Seja Λ uma álgebra hereditária por partes do tipo \mathbb{A}_n , então para cada objeto indecomponível $X^\bullet \in \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ existe um vértice $(i, j) \in \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ associado a este objeto. Neste caso, denotando $f_{X^\bullet} = \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(X^\bullet, _)$ e $g_{X^\bullet} = \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(_, X^\bullet)$, as seguintes afirmações são válidas.*

(i) o vértice associado a $X^\bullet[1]$ é dado por $(i, j)[1] = (i + j, n + 1 - j)$.

(ii) o vértice associado a $X^\bullet[-1]$ é dado por $(i, j)[-1] = (i + j - n - 1, n + 1 - j)$.

(iii) $\text{Supp}(f_{X^\bullet})$ é associado ao conjunto:

$$\{Y = (a, b) \in \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)); i \leq a \leq i + j - 1, i + j \leq a + b \leq n + i\}$$

(iv) $\text{Supp}(g_{X^\bullet})$ é associado ao conjunto:

$$\{Y = (a, b) \in \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)); i + j - n \leq a \leq i, i + 1 \leq a + b \leq i + j\}$$

em que $\text{Supp}(f_{X^\bullet})$ e $\text{Supp}(g_{X^\bullet})$ representam, respectivamente, o conjunto suporte de f_{X^\bullet} e g_{X^\bullet} .

Demonstração. Ver [20], página 184. □

Observação 4.2.2. Com o objetivo de facilitar a leitura do texto, por vezes iremos apenas escrever $X^\bullet = (i, j)$ para nos referirmos que o complexo X^\bullet está associado ao vértice (i, j) . Faremos uso desse abuso de linguagem para que o texto fique mais fluido para o leitor.

Definição 4.2.3. Seja Λ uma álgebra hereditária por partes do tipo Dynkin. Dado $X^\bullet \in \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ indecomponível, definimos L_{X^\bullet} e R_{X^\bullet} como sendo conjuntos, formados por objetos indecomponíveis de $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$, que satisfazem as seguintes propriedades:

$$(i) Y^\bullet \in L_{X^\bullet} \iff \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(Y^\bullet, X^\bullet) \neq 0 \quad e \quad \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(X^\bullet[-1], Y^\bullet) = 0.$$

$$(ii) Y^\bullet \in R_{X^\bullet} \iff \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(X^\bullet, Y^\bullet) \neq 0 \quad e \quad \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(Y^\bullet, X^\bullet[1]) = 0.$$

Seja $X^\bullet \in \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ um objeto indecomponível, tal que X^\bullet é representado pelo vértice $(i, j) \in \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, segundo a parametrização dada pela figura (4.2). Neste caso, os elementos dos conjuntos L_{X^\bullet} e R_{X^\bullet} também estão associados aos vértices de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$. Utilizando a caracterização dos conjuntos $\text{Supp}(f_{X^\bullet})$ e $\text{Supp}(g_{X^\bullet})$, do lema (4.2.1), podemos associar os conjuntos L_{X^\bullet} e R_{X^\bullet} aos vértices de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ da seguinte maneira.

$$L_{X^\bullet} = \text{Supp}(g_{X^\bullet}) \cap \text{Ker}(f_{X^\bullet[-1]}) = \text{Supp}(g_{X^\bullet}) \setminus (\text{Supp}(f_{X^\bullet[-1]}) \cap \text{Supp}(g_{X^\bullet}))$$

$$R_{X^\bullet} = \text{Supp}(f_{X^\bullet}) \cap \text{Ker}(g_{X^\bullet[1]}) = \text{Supp}(f_{X^\bullet}) \setminus (\text{Supp}(f_{X^\bullet}) \cap \text{Supp}(g_{X^\bullet[1]}))$$

O próximo resultado apresenta uma caracterização explícita desses conjuntos em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$.

Proposição 4.2.4. *Seja $X^\bullet = (i, j)$, então os conjuntos L_{X^\bullet} e R_{X^\bullet} são dados por:*

$$L_{X^\bullet} = \{Y = (i, b); 1 \leq b \leq j\} \cup \{Y = (a, b); a + b = i + j, 1 + j \leq b \leq n\}$$

$$R_{X^\bullet} = \{Y = (i, b); j \leq b \leq n\} \cup \{Y = (a, b); a + b = i + j, 1 \leq b \leq j - 1\}$$

Demonstração. Mostremos quem são os elementos de L_{X^\bullet} . Usando os ítems (ii) e (iii) do Lema (4.2.1), temos:

$$\text{Supp}(f_{X^\bullet[-1]}) = \{Y = (a, b); i + j - n - 1 \leq a \leq i - 1, i \leq a + b \leq i + j - 1\}$$

portanto,

$$\text{Supp}(f_{X^\bullet[-1]}) \cap \text{Supp}(g_{X^\bullet}) = \{Y = (a, b); i + j - n \leq a \leq i - 1, i + 1 \leq a + b \leq i + j - 1\}$$

Agora considere $Y = (a, b) \in L_{X^\bullet}$. Para $a = i$, temos:

$$i + 1 \leq \underbrace{a}_{=i} + b \leq i + j \quad \Rightarrow \quad 1 \leq b \leq j$$

Para $a \neq i$, temos $a + b = i + j$, onde $i + j - n \leq a \leq i - 1$. Como $a = i + j - b$, segue que:

$$i + j - n \leq (i + j - b) \leq i - 1 \quad \Rightarrow \quad -n \leq -b \leq -j - 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + j \leq b \leq n$$

Disto segue o resultado desejado. A demonstração de R_{X^\bullet} é análoga. □

Exemplo 4.2.5. A figura abaixo ilustra os conjuntos L_{X^\bullet} e R_{X^\bullet} .

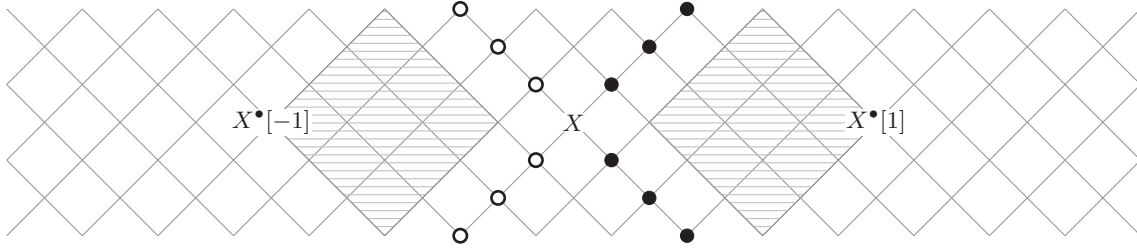


Figura 4.3: $L_{X^\bullet} = \{\circ\} \cup \{X\}$ e $R_{X^\bullet} = \{\bullet\} \cup \{X\}$

As partes hachuradas correspondem respectivamente ao $\text{Supp}(f_{X^\bullet[-1]})$ e $\text{Supp}(g_{X^\bullet[1]})$.

Lema 4.2.6. *Seja Λ uma álgebra hereditária por partes do tipo \mathbb{A}_n . Dado $X^\bullet \in \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, temos que os subquivers plenos de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ induzidos por L_{X^\bullet} e R_{X^\bullet} são secções em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$.*

Demonstração. O resultado segue diretamente da caracterização dada aos conjuntos L_{X^\bullet} e R_{X^\bullet} pela proposição anterior. \square

Observação 4.2.7. Sejam X e Y Λ -módulos indecomponíveis tal Λ é uma álgebra hereditária por partes do tipo Δ , em que Δ é um quiver Dynkin. Sabemos que existe uma equivalência $F : \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda) \rightarrow \mathcal{D}^b(\text{mod } k\Delta)$, logo, existem $X', Y' \in \text{mod}(k\Delta)$ indecomponíveis e $r, s \geq 0$ tais que:

$$F(X) = X'[r] \quad \text{e} \quad F(Y) = Y'[s]$$

Então temos que:

$$\begin{aligned} \text{Ext}_\Lambda^i(X, Y) &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(X, Y[i]) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(k\Delta)}(F(X), F(Y)[i]) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(k\Delta)}(X'[r], Y'[s+i]) \end{aligned}$$

Como $\text{ind}\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda) \cong \text{ind}\mathcal{D}^b(\text{mod } k\Delta) \cong k\langle \mathbb{Z}\Delta \rangle$, então podemos interpretar um elemento do conjunto $\text{Ext}_\Lambda^i(X, Y) \neq 0$ como sendo um caminho de irreduzíveis em $\mathbb{Z}\Delta$, cuja composição é não nula. Para dizer isso, estamos usando o fato de que todo morfismo não nulo em $\mathcal{D}^b(\text{mod } k\Delta)$ é soma de compostas de irreduzíveis, pois, pelo teorema (4.1.5), o isomorfismo $\text{ind}\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda) \cong k\langle \mathbb{Z}\Delta \rangle$ está dizendo que os morfismos entre indecomponíveis podem ser vistos como morfismos na categoria mesh. Este conceito é o que K. Bongartz e P. Gabriel chamam de componente standard, em [13].

Definição 4.2.8. Seja Λ uma álgebra hereditária por partes do tipo Dynkin. Então para $M \in \text{mod}(\Lambda)$ indecomponível, definimos $\Omega_p(M)$ e $\Omega_f(M)$ da seguinte maneira:

$$\Omega_p(M) := \{X[-i] \in \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda); \text{Hom}_\Lambda(M, X) = 0, \text{Ext}_\Lambda^1(M, X) = 0 \text{ e } \text{Ext}_\Lambda^i(X, M) \neq 0, \text{ para algum } i \geq 0\}$$

$$\Omega_f(M) := \{X[i] \in \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda); \text{Hom}_\Lambda(X, M) = 0, \text{Ext}_\Lambda^1(X, M) = 0 \text{ e } \text{Ext}_\Lambda^i(M, X) \neq 0, \text{ para algum } i \geq 0\}$$

em que $X \in \text{mod}(\Lambda)$ é indecomponível.

O próximo lema relaciona, através dos conjuntos Ω_p e Ω_f , os complexos de L_{X^\bullet} e R_{X^\bullet} com os objetos da categoria de módulos.

Lema 4.2.9. *Seja Λ uma álgebra hereditária por partes do tipo Dynkin. Então para todo $M \in \text{mod}(\Lambda)$ indecomponível, temos:*

$$(\Omega_p(M) \cup \{M^\bullet\}) \subset L_{M^\bullet} \quad \text{e} \quad (\Omega_f(M) \cup \{M^\bullet\}) \subset R_{M^\bullet}$$

Demonstração. Aqui faremos a demonstração apenas para L_{X^\bullet} , pois o caso R_{X^\bullet} é análogo. Pela proposição (1.5.9), temos $\text{Ext}_\Lambda^1(M, M) = \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(M^\bullet[-1], M^\bullet) = 0$ e como $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(M^\bullet, M^\bullet) \neq 0$, segue que $M^\bullet \in L_{M^\bullet}$. Portanto basta mostrar que $\Omega_p(M) \subset L_{M^\bullet}$, isto é, devemos mostrar que:

$$\Omega_p(M) \subset \{N \in \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda); \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(N, M) \neq 0 \text{ e } \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(M[-1], N) = 0\}$$

De fato, seja $N \in \Omega_p(M)$, então $N = X[-i]$ para algum $X \in \text{mod}(\Lambda)$ e $i \geq 0$. Como $N = X[-i] \in \Omega_p(M)$, temos:

$$0 \neq \text{Ext}_\Lambda^i(X, M) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(X, M[i]) = \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(X[-i], M)$$

Portanto segue que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(N, M) \neq 0$. Por outro lado temos,

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(M[-1], X[-i]) = \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(M, X[-i+1]) = \text{Ext}_\Lambda^{-i+1}(M, X)$$

como $i \geq 0$, tem-se $-i \leq 0$ e portanto $-i+1 \leq 1$. Logo,

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(M[-1], X[-i]) = \begin{cases} 0, & \text{se } -i+1 < 0 \\ \text{Hom}_\Lambda(M, X), & \text{se } -i+1 = 0 \\ \text{Ext}_\Lambda^1(M, X), & \text{se } -i+1 = 1 \end{cases}$$

Como $X[-i] \in \Omega_p(M)$, temos $\text{Hom}_\Lambda(M, X) = 0$ e $\text{Ext}_\Lambda^1(M, X) = 0$, logo $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(M[-1], N) = \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(M[-1], X[-i]) = 0$. Disto segue o resultado desejado. \square

O teorema a seguir nos fornece um método para construção de secções em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, a partir de $\text{mod}(\Lambda)$. Para isso, utilizaremos os conjuntos da definição (4.2.8), juntamente com o lema anterior.

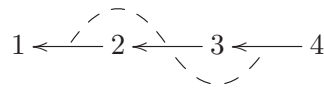
Teorema 4.2.10. *Seja Λ uma álgebra hereditária por partes do tipo \mathbb{A}_n . Se existe $M \in \text{mod}(\Lambda)$ indecomponível tal que $|\Omega_p(M)| = n - 1$, então existe uma secção Σ em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, cujos vértices correspondem aos complexos do conjunto $\Omega_p(M) \cup \{M^\bullet\}$. Além disso, M^\bullet é o único poço de Σ .*

Demonstração. Pelo lema (4.2.6), sabemos que L_{M^\bullet} induz uma secção Σ em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, então temos $|L_{M^\bullet}| = n$. Além disso, pelo lema (4.2.9), sabemos que $(\Omega_p(M) \cup \{M^\bullet\}) \subset L_{M^\bullet}$, portanto se $|\Omega_p(M)| = n - 1$, tem-se que $\Omega_p(M) \cup \{M^\bullet\} = L_{M^\bullet}$. Disto segue o resultado desejado. \square

Note que o Teorema (4.2.10) nos fornece uma maneira de encontrar uma secção na categoria derivada apenas analisando as relações entre os objetos da categoria de módulos. Mais precisamente, é necessário apenas escolhermos um módulo indecomponível M em $\text{mod}(\Lambda)$ e calcularmos o conjunto $\Omega_p(M)$. Caso $|\Omega_p(M)| < n - 1$, basta escolhermos outro módulo em $\text{mod}(\Lambda)$ tal que a cardinalidade do conjunto Ω_p desse módulo seja igual a $n - 1$. O método também funciona utilizando o conjunto Ω_f , isto é, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.2.11 (Dual). *Seja Λ uma álgebra hereditária por partes do tipo \mathbb{A}_n . Se existe $M \in \text{mod}(\Lambda)$ indecomponível tal que $|\Omega_f(M)| = n - 1$, então existe uma secção Σ em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, cujos vértices correspondem aos complexos do conjunto $\Omega_f(M) \cup \{M^\bullet\}$. Além disso, M^\bullet é a única fonte de Σ .*

Exemplo 4.2.12. Considere Λ a álgebra inclinada iterada do tipo \mathbb{A}_4 dada pelo quiver:



Neste caso, o quiver de Auslander-Reiten de $\text{mod}(\Lambda)$ é como abaixo.

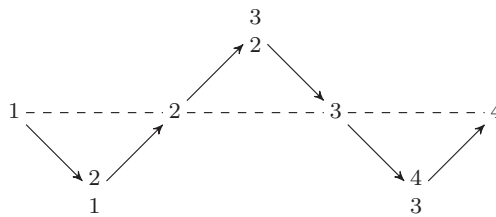


Figura 4.4: $\text{mod}(\Lambda)$

Tomemos $M = 2$ e analisemos quem são os elementos do conjunto $\Omega_p(M)$.

$$\Omega_p(M) = \{X[-i] \in \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda); \text{Hom}_\Lambda(M, X) = 0, \text{Ext}_\Lambda^1(M, X) = 0 \text{ e } \text{Ext}_\Lambda^i(X, M) \neq 0\}$$

Note que os seguintes módulos indecomponíveis de $\text{mod}(\Lambda)$, satisfazem as propriedades do conjunto $\Omega_p(M)$.

- Para $X = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$, temos:

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda} \left(M, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = 0, \quad \mathrm{Ext}_{\Lambda}^1 \left(M, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} \right) = 0 \quad e \quad \mathrm{Ext}_{\Lambda}^0 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, M \right) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} [0] \in \Omega_p(M)$$

- Para $X = 3$, temos:

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda} (M, 3) = 0, \quad \mathrm{Ext}_{\Lambda}^1 (M, 3) = 0 \quad e \quad \mathrm{Ext}_{\Lambda}^1 (3, M) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 3[-1] \in \Omega_p(M)$$

- Para $X = 4$, temos:

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda} (M, 4) = 0, \quad \mathrm{Ext}_{\Lambda}^1 (M, 4) = 0 \quad e \quad \mathrm{Ext}_{\Lambda}^2 (4, M) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 4[-2] \in \Omega_p(M)$$

Portanto segue que $\Omega_p(M)$ é dado como abaixo.

$$\Omega_p(M) = \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} [0], 3[-1], 4[-2] \right\}$$

Pelo teorema (4.2.10), sabemos que $\Omega_p(M) \cup \{M\}$ forma uma secção em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\mathrm{mod} \Lambda))$. Apenas nos resta analisar como é o quiver formado pelos elementos de $\Omega_p(M) \cup \{M\}$. De fato, note que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Ext}_{\Lambda}^0 \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, 2 \right) \cong \mathrm{Hom}_{\Lambda} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, 2 \right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} \left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, 2 \right) \\ \mathrm{Ext}_{\Lambda}^1 (3, 2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} (3[-1], 2) \\ \mathrm{Ext}_{\Lambda}^2 (4, 2) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} (4[-2], 2) \\ \mathrm{Ext}_{\Lambda}^1 (4, 3) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} (4[-1], 3) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} (4[-2], 3[-1]) \end{array} \right.$$

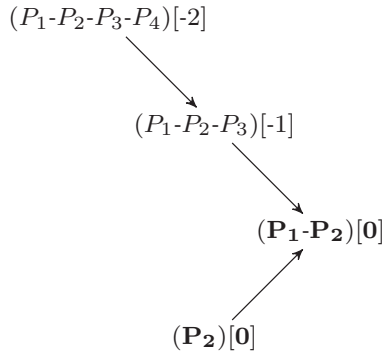
Portanto, é fácil ver que nosso quiver será da forma:

$$4[-2] \longrightarrow 3[-1] \longrightarrow 2 \longleftarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} [0]$$

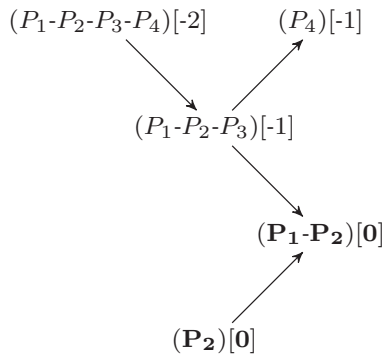
Agora reescrevendo o quiver acima em $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod} \Lambda) \cong \mathcal{K}^b(\mathrm{proj} \Lambda)$, temos:

$$(P_1 - P_2 - P_3 - P_4)[-2] \longrightarrow (P_1 - P_2 - P_3)[-1] \longrightarrow (P_1 - P_2)[0] \longleftarrow (P_2)[0]$$

Agora que temos a secção Σ formada pelos elementos de $\Omega_p(M) \cup \{M\}$, apenas nos resta recuperar por meio dessa secção os demais objetos da categoria derivada. Para isso, iremos utilizar os resultados de Alvares, Fernandes e Giraldo, apresentados em [1], através do qual podemos facilmente calcular os cones dos morfismos irredutíveis presentes em nossa secção Σ .

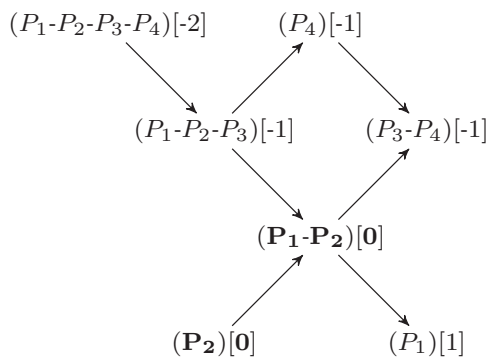


$$(P_1 - P_2 - P_3 - P_4)[-2] \xrightarrow{f_1} (P_1 - P_2 - P_3)[-1] \longrightarrow \underbrace{(P_4)[-1]}_{C_{f_1}}$$



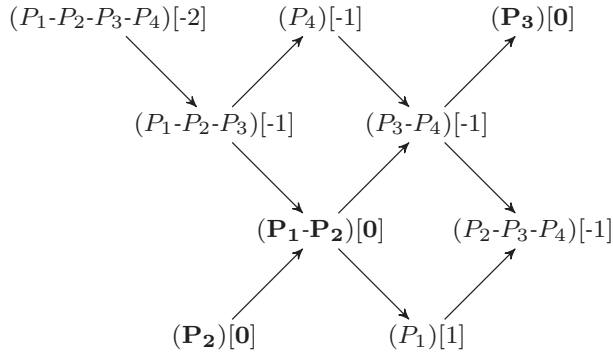
$$(P_1 - P_2 - P_3)[-1] \xrightarrow{f_2} (P_4)[-1] \oplus (P_1 - P_2)[0] \longrightarrow \underbrace{(P_3 - P_4)[-1]}_{C_{f_2}}$$

$$(P_2)[0] \xrightarrow{f_3} (P_1 - P_2)[0] \longrightarrow \underbrace{(P_1)[1]}_{C_{f_3}}$$



$$(P_4)[-1] \xrightarrow{f_4} (P_3 - P_4)[-1] \longrightarrow \underbrace{(P_3)[0]}_{C_{f_4}}$$

$$(P_1 - P_2)[0] \xrightarrow{f_5} (P_3 - P_4)[-1] \oplus (P_1)[1] \longrightarrow \underbrace{(P_2 - P_3 - P_4)[-1]}_{C_{f_5}}$$



Se continuarmos realizarmos esses cálculos, obtemos $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ como abaixo.

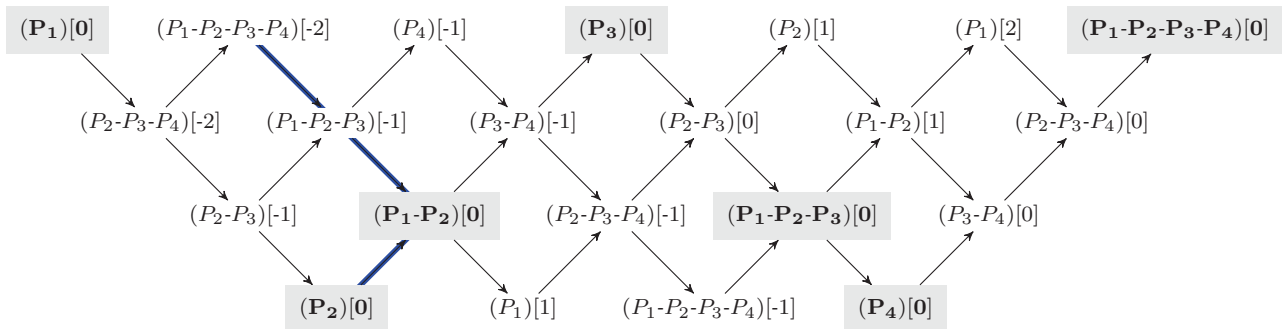
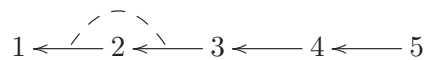


Figura 4.5: $\text{mod}(\Lambda) \subset \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$

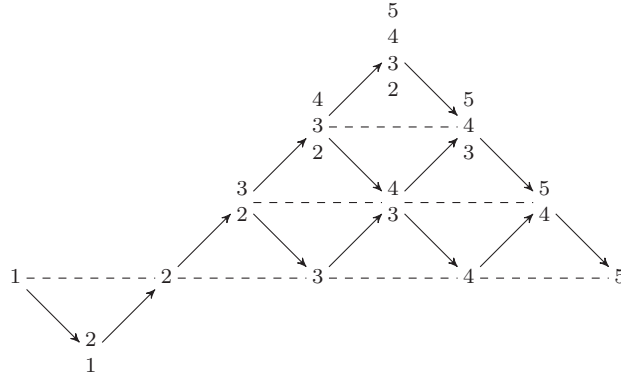
Os morfismos em destaque ilustram nossa secção e os objetos em destaque ilustram os objetos de $\text{mod}(\Lambda)$ em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$.

A seguir temos dois exemplos que ilustram de que maneira, utilizando o teorema (4.2.10), foram obtidas as categorias derivadas das álgebras B e C dos exemplos (3.2.4) e (3.2.6).

Exemplo 4.2.13. Considere Λ a álgebra inclinada do tipo A_5 dada pelo quiver:



neste caso, o quiver de Auslander-Reiten de $\text{mod}(\Lambda)$ é como abaixo.


 Figura 4.6: $\Gamma(\text{mod}(\Lambda))$

Como Λ é inclinada, sabemos que existe uma álgebra hereditária $k\Delta$ tal que $\Lambda = \text{End}(T)$ para algum $k\Delta$ -módulo inclinante T . Neste caso, sabemos, por [1], que existe uma secção em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ formada pelos Ext-injetivos de $\mathcal{Y}(T)$. Vamos utilizar o teorema (4.2.10) para encontrar alguma outra secção em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$.

Tomemos $M = 2$ e analisemos quem são os elementos do conjunto $\Omega_p(M)$.

$$\Omega_p(M) = \{X[-i] \in \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda); \text{Hom}_\Lambda(M, X) = 0, \text{Ext}_\Lambda^1(M, X) = 0 \text{ e } \text{Ext}_\Lambda^i(X, M) \neq 0\}$$

Note que os seguintes módulos indecomponíveis de $\text{mod}(\Lambda)$, satisfazem as propriedades do conjunto $\Omega_p(M)$.

- Para $X = \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$, temos:

$$\text{Hom}_\Lambda\left(M, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0, \quad \text{Ext}_\Lambda^1\left(M, \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Ext}_\Lambda^0\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, M\right) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}[0] \in \Omega_p(M)$$

- Para $X = 3$, temos:

$$\text{Hom}_\Lambda(M, 3) = 0, \quad \text{Ext}_\Lambda^1(M, 3) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Ext}_\Lambda^1(3, M) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 3[-1] \in \Omega_p(M)$$

- Para $X = \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$, temos:

$$\text{Hom}_\Lambda\left(M, \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = 0, \quad \text{Ext}_\Lambda^1\left(M, \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}\right) = 0 \quad \text{e} \quad \text{Ext}_\Lambda^1\left(\begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}, M\right) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}[-1] \in \Omega_p(M)$$

- Para $X = \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$, temos:

$$\mathrm{Hom}_\Lambda \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) = 0, \quad \mathrm{Ext}_\Lambda^1 \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \right) = 0 \quad e \quad \mathrm{Ext}_\Lambda^1 \left(\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{smallmatrix}, M \right) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{smallmatrix}[-1] \in \Omega_p(M)$$

Portanto segue que $\Omega_p(M)$ é dado como abaixo.

$$\Omega_p(M) = \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}[0], \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}[-1], \begin{smallmatrix} 5 \\ 3 \end{smallmatrix}[-1] \right\}$$

Pelo teorema (4.2.10), sabemos que $\Omega_p(M) \cup \{M\}$ forma uma secção em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\mathrm{mod} \Lambda))$. Apenas nos resta analisar como é o quiver formado pelos elementos de $\Omega_p(M) \cup \{M\}$. De fato, note que $\mathrm{Hom}_\Lambda(\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}, M) \neq 0$, portanto em $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod} \Lambda)$ temos:

$$\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}[0] \longrightarrow M[0] \tag{*}$$

Em $\mathrm{mod}(\Lambda)$ temos os morfismos $3 \rightarrow \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \rightarrow \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{smallmatrix}$, portanto em $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod} \Lambda)$ temos:

$$3[-1] \longrightarrow \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}[-1] \longrightarrow \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{smallmatrix}[-1] \tag{**}$$

Agora podemos unir (*) e (**) da seguinte maneira:

$$3[-1] \longrightarrow \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \end{smallmatrix}[-1] \longrightarrow \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{smallmatrix}[-1] \longrightarrow M[0] \longleftarrow \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}[0] \tag{***}$$

Sabemos que a união é feita dessa forma, pois esse quiver dá origem a uma secção em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\mathrm{mod} \Lambda))$, portanto ele deve ter o formato de um quiver do tipo \mathbb{A}_5 . Agora reescrevendo o quiver acima em $\mathcal{D}^b(\mathrm{mod} \Lambda) \cong \mathcal{K}^b(\mathrm{proj} \Lambda)$, temos:

$$\Sigma : (P_1 - P_2 - P_3[-1]) \rightarrow (P_1 - P_2 - P_4[-1]) \rightarrow (P_1 - P_2 - P_5[-1]) \rightarrow \underbrace{(P_1 - P_2[0])}_{M[0]} \leftarrow (P_2[0])$$

Agora que temos a secção Σ formada pelos elementos de $\Omega_p(M) \cup \{M\}$, apenas nos resta recuperar por meio dessa secção os demais objetos da categoria derivada. Para isso, iremos utilizar os resultados de Alvares, Fernandes e Giraldo, apresentados em [1], através do qual podemos facilmente calcular os cones dos morfismos irredutíveis presentes em nossa secção Σ . Após realizarmos esses cálculos,

obtemos $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ como abaixo.

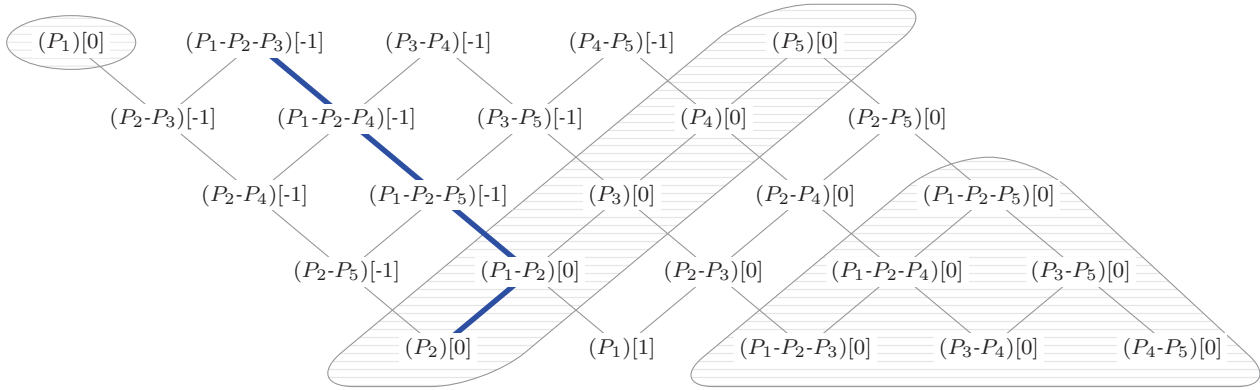
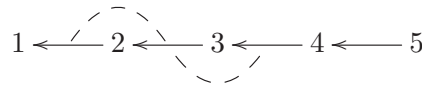


Figura 4.7: $\text{mod}(\Lambda) \subset \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$

Na figura acima ilustramos, em destaque, a secção Σ .

Exemplo 4.2.14. Considere Λ uma álgebra inclinada iterada do tipo \mathbb{A}_5 dada pelo quiver:



neste caso, o quiver de Auslander-Reiten de $\text{mod}(\Lambda)$ é como abaixo.

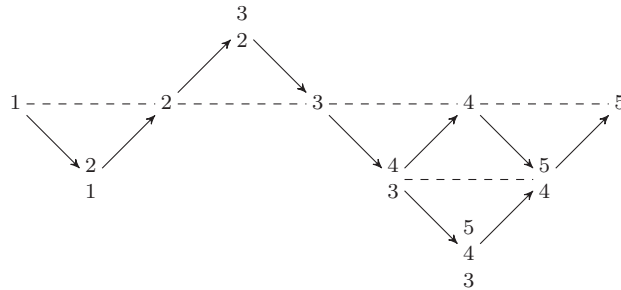


Figura 4.8: $\Gamma(\text{mod}(\Lambda))$

Considere $M = 1$ e calculemos o conjunto $\Omega_p(M)$.

- $\text{Hom}_\Lambda(M, 2) = 0, \text{Ext}_\Lambda^1(M, 2) = 0$ e $\text{Ext}_\Lambda^1(2, M) \neq 0 \Rightarrow 2[-1] \in \Omega_p(M)$.
- $\text{Hom}_\Lambda(M, 3) = 0, \text{Ext}_\Lambda^1(M, 3) = 0$ e $\text{Ext}_\Lambda^2(3, M) \neq 0 \Rightarrow 3[-2] \in \Omega_p(M)$.
- $\text{Hom}_\Lambda(M, \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}) = 0, \text{Ext}_\Lambda^1(M, \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}) = 0$ e $\text{Ext}_\Lambda^3(\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}, M) \neq 0 \Rightarrow \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}[-3] \in \Omega_p(M)$.
- $\text{Hom}_\Lambda(M, 4) = 0, \text{Ext}_\Lambda^1(M, 4) = 0$ e $\text{Ext}_\Lambda^3(4, M) \neq 0 \Rightarrow 4[-3] \in \Omega_p(M)$.

Portanto temos que o conjunto $\Omega_p(M)$ é dada como abaixo.

$$\Omega_p(M) = \left\{ 2[-1], 3[-2], \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}[-3], 4[-3] \right\}$$

Agora observe que, analisando os módulos em $\text{mod}(\Lambda)$, temos:

- $\text{Hom}_{\Lambda}(4, \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}) \neq 0 \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(4[-3], \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}[-3]) \neq 0.$
- $\text{Ext}_{\Lambda}^1(\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}, 3) \neq 0 \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}[-1], 3) \neq 0 \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(\begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}[-3], 3[-2]) \neq 0.$
- $\text{Ext}_{\Lambda}^1(3, 2) \neq 0 \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(3[-1], 2) \neq 0 \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(3[-2], 2[-1]) \neq 0.$
- $\text{Ext}_{\Lambda}^1(2, 1) \neq 0 \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(2[-1], 1) \neq 0.$

Neste caso, os elementos de $\Omega_p(M) \cup \{M\}$ formam, em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, o seguinte quiver.

$$4[-3] \rightarrow \begin{smallmatrix} 5 \\ 4 \end{smallmatrix}[-3] \rightarrow 3[-2] \rightarrow 2[-1] \rightarrow 1[0]$$

Portanto temos a seguinte secção em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$:

$$\Sigma : (P_1-P_2-P_3-P_4[-3]) \rightarrow (P_1-P_2-P_3-P_5[-3]) \rightarrow (P_1-P_2-P_3[-2]) \rightarrow (P_1-P_2[-1]) \rightarrow \underbrace{P_1[0]}_{M[0]}$$

Novamente utilizando o resultado apresentado em [1], para realizar o cálculo dos cones desses morfismos, obtemos $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ como abaixo.

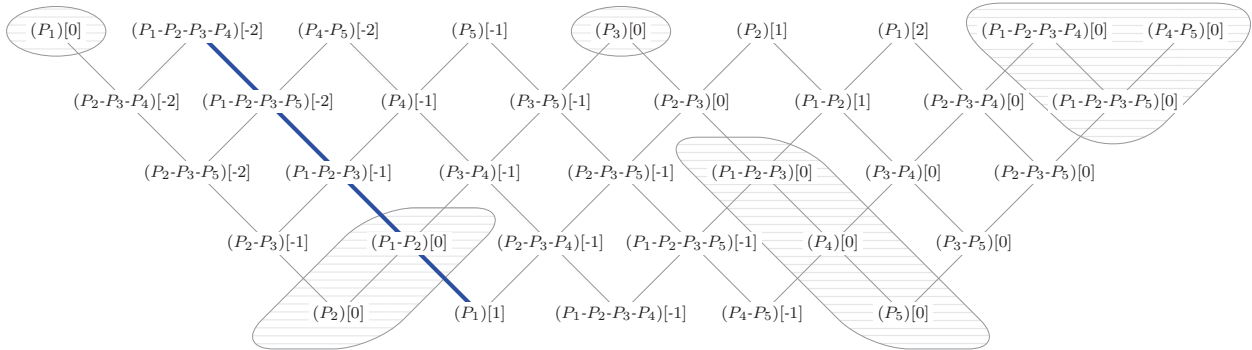


Figura 4.9: $\text{mod}(\Lambda) \subset \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$

Na figura acima ilustramos, em destaque, a secção $\Sigma[1]$.

Observação 4.2.15. Para obtermos a categoria derivada da álgebra Λ de radical quadrado zero, apresentada na figura (3.14), página 54, podemos tomar qualquer um dos conjuntos abaixo.

$$\Omega_p(1), \quad \Omega_p(2), \quad \Omega_f(4), \quad \Omega_f(5)$$

em que $\Gamma(\text{mod } \Lambda)$ é da seguinte forma:

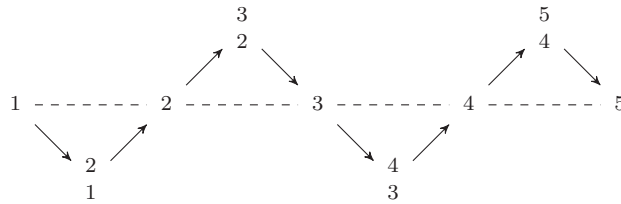


Figura 4.10: $\Gamma(\text{mod } \Lambda)$

Analisando o quiver de Auslander-Reiten de $\text{mod}(\Lambda)$, podemos notar que todos esses conjuntos satisfazem as hipóteses dos teoremas (4.2.10) e (4.2.11), e portanto induzem secções na categoria derivada $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$. A figura ilustra a secção gerada pelo conjunto $\Omega_p(2)$ e também apresenta $\text{mod}(\Lambda)$ mergulhada em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$.

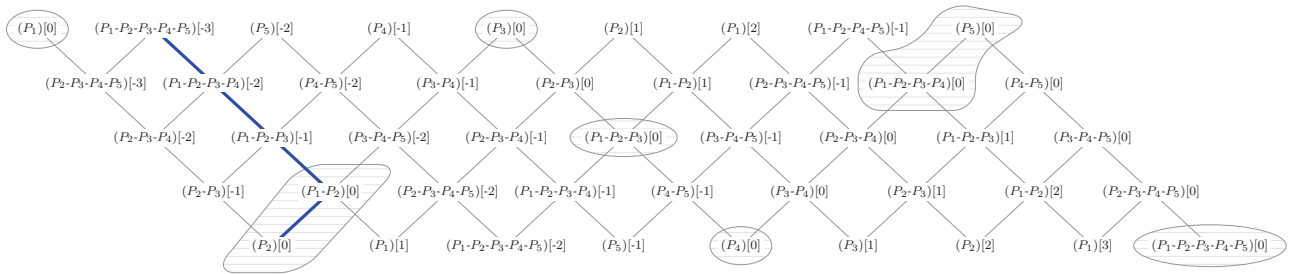


Figura 4.11: $\text{mod}(\Lambda) \subset \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$

4.3 Álgebras hereditárias por partes do tipo \mathbb{D}_n

Nesta seção iremos estudar as álgebras Λ que são hereditárias por partes do tipo \mathbb{D}_n . Sabemos que, neste caso, o quiver de Auslander-Reiten $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ é da forma $\mathbb{Z}\mathbb{D}_n$. A seguir temos uma figura que ilustra como é realizada a parametrização de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, em que Λ é uma álgebra hereditária por partes do tipo \mathbb{D}_5 .

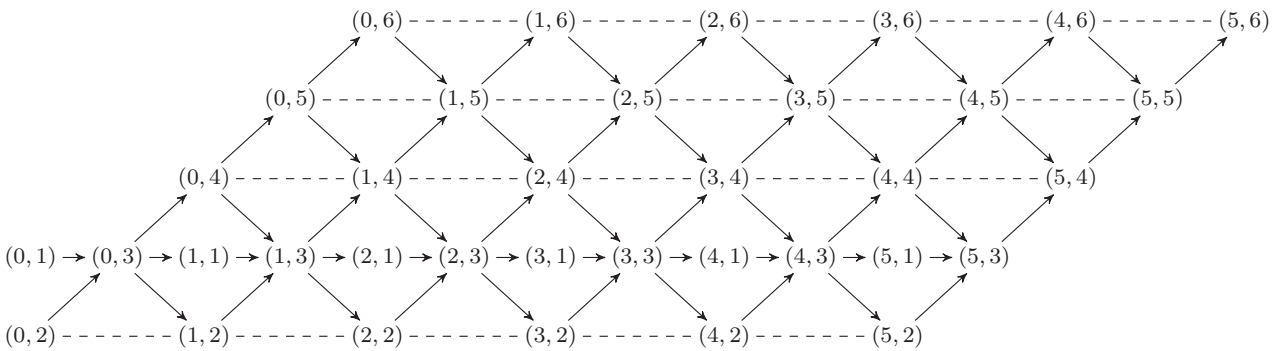


Figura 4.12: Parametrização de $\mathbb{Z}\mathbb{D}_5$.

Em geral, o quiver $\mathbb{Z}\mathbb{D}_n$ pode ser parametrizado da seguinte maneira. Cada vértice de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$

pode ser escrito como um par (i, j) , em que $i \in \mathbb{Z}$ e $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Além disso, para cada par (i, j) podemos associar no máximo até 3 flechas.

$$\left\{ \begin{array}{ll} (i, j) \rightarrow (i, j + 1), & \text{para } 2 \leq j \leq n - 1 \\ (i, j) \rightarrow (i + 1, j - 1), & \text{para } 3 \leq j \leq n \\ (i, j) \rightarrow (i, 3), & \text{para } j = 1 \\ (i, j) \rightarrow (i + 1, 1), & \text{para } j = 3 \end{array} \right.$$

Note que no caso em que $j = 3$ são associadas três flechas, e no caso em que $j \in \{1, 2, n\}$ é associada apenas uma flecha.

Dado $X^\bullet \in \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ indecomponível, podemos identificar X^\bullet como sendo um vértice de coordenadas (i, j) em $\mathbb{Z}\mathbb{D}_n \cong \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$. Analogamente, como foi feito no lema (4.2.1), página 60, iremos descrever com precisão as coordenadas do shift de X^\bullet em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, assim como as coordenadas de todo $Y^\bullet \in \text{ind}\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ tal que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(X^\bullet, Y^\bullet) \neq 0$ ou $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(Y^\bullet, X^\bullet) \neq 0$.

Analizando as coordenadas dos elementos de $\mathbb{Z}\mathbb{D}_n$

Considere Λ uma álgebra hereditária por partes do tipo \mathbb{D}_n . Seja $X^\bullet \in \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ um objeto indecomponível, então X^\bullet pode ser identificado por um vértice (i, j) em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)) \cong \mathbb{Z}\mathbb{D}_n$. Denotando $X^\bullet = (i, j)$, $f_{X^\bullet} = \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(X^\bullet, _)$ e $g_{X^\bullet} = \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(_, X^\bullet)$, temos que as seguintes afirmações são válidas.

- Para $2 < j$,

1. $X^\bullet[1] = (i + n - 1, j) \quad X^\bullet[-1] = (i - n + 1, j)$.

2. $\text{Supp}(f_{X^\bullet}) = \left\{ Y^\bullet = (a, b); \left\{ \begin{array}{ll} a + b = i + j + k & \text{para } 3 + k \leq b \leq j + k \\ e & \text{com } 0 \leq k \leq n - j \\ a = i + j - 2 + k & \text{para } 1 \leq b \leq n - k \end{array} \right. \right\}$

3. $\text{Supp}(g_{X^\bullet}) = \left\{ Y^\bullet = (a, b); \left\{ \begin{array}{ll} a + b = i + j + 2 - n + k & \text{para } 3 + k \leq b \leq j + k \\ e & \text{com } 0 \leq k \leq n - j \\ a = i + j - n + k & \text{para } 1 \leq b \leq n - k \end{array} \right. \right\}$

- Para $1 \leq j \leq 2$,

1. Se n é par, $X^\bullet[1] = (i + n - 1, j) \quad X^\bullet[-1] = (i - n + 1, j)$.
Se n é ímpar, $X^\bullet[1] = (i + n - 1, 3 - j) \quad X^\bullet[-1] = (i - n + 1, 3 - j)$.

$$\begin{aligned}
 2. \text{ Supp}(f_{X^\bullet}) &= \left\{ Y^\bullet = (a, b); \left\{ \begin{array}{l} i \leq a \leq i+n-3 \text{ com } 3 \leq b \leq i+n-a \\ e \\ i \leq a \leq i+n-2 \text{ com } b = \begin{cases} j, & \text{se } (a-i) \text{ é par} \\ 3-j, & c/c \end{cases} \end{array} \right. \right\} \\
 3. \text{ Supp}(g_{X^\bullet}) &= \left\{ Y^\bullet = (a, b); \left\{ \begin{array}{l} i+2-n \leq a \leq i-1 \text{ com } 3 \leq b \leq i+2-a \\ e \\ i+2-n \leq a \leq i \text{ com } b = \begin{cases} j, & \text{se } (i-a) \text{ é par} \\ 3-j, & c/c \end{cases} \end{array} \right. \right\}
 \end{aligned}$$

Observação 4.3.1. Lembremos que para $X^\bullet = (i, j)$, podemos expressar os conjuntos L_{X^\bullet} e R_{X^\bullet} por:

$$L_{X^\bullet} = \text{Supp}(g_{X^\bullet}) \setminus (\text{Supp}(f_{X^\bullet[-1]}) \cap \text{Supp}(g_{X^\bullet}))$$

$$R_{X^\bullet} = \text{Supp}(f_{X^\bullet}) \setminus (\text{Supp}(f_{X^\bullet}) \cap \text{Supp}(g_{X^\bullet[1]}))$$

em que L_{X^\bullet} e R_{X^\bullet} são os conjuntos da definição (4.2.3).

Daqui em diante iremos apresentar resultados relacionados apenas aos conjuntos L_{X^\bullet} , porém também são válidos resultados análogos para os conjuntos R_{X^\bullet} . A seguir temos um exemplo que ilustra esses dois conjuntos.

Exemplo 4.3.2. Considere $X = (i, j) \in \mathbb{ZD}_6$, então representando os conjuntos L_{X^\bullet} e R_{X^\bullet} por:

$$L_{X^\bullet} = \{\circ\} \cup \{X\} \quad \text{e} \quad R_{X^\bullet} = \{\bullet\} \cup \{X\}$$

temos que tais conjuntos são da seguinte forma:

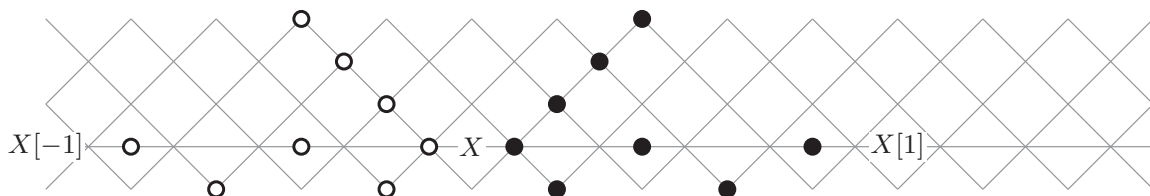


Figura 4.13: Para $j = 1$

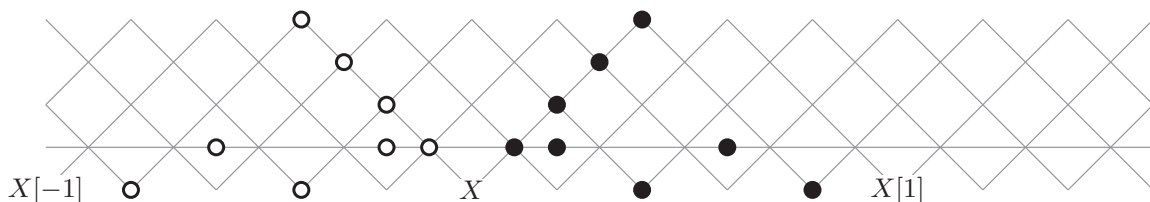


Figura 4.14: Para $j = 2$

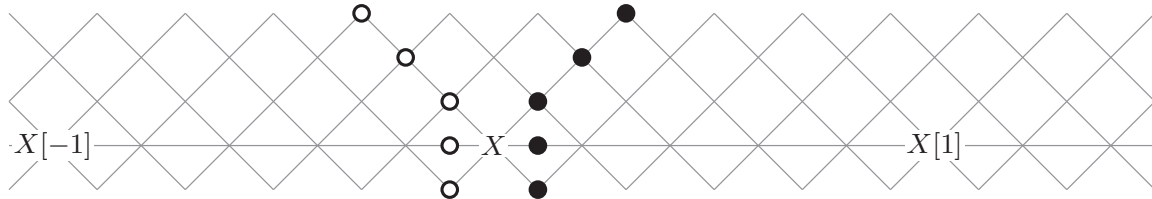


Figura 4.15: Para $j = 3$

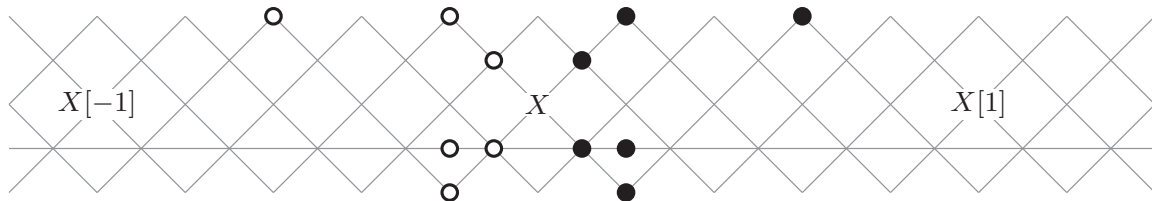


Figura 4.16: Para $j = 4$

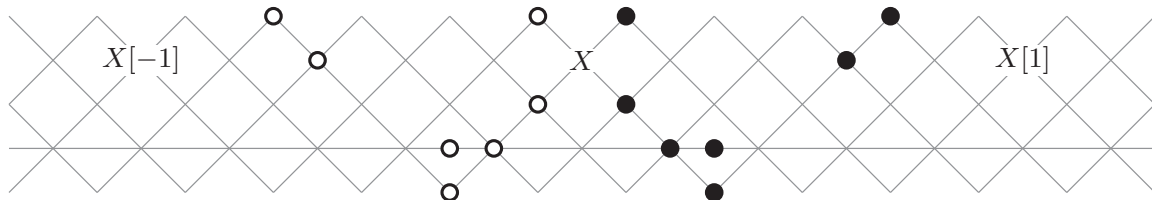


Figura 4.17: Para $j = 5$

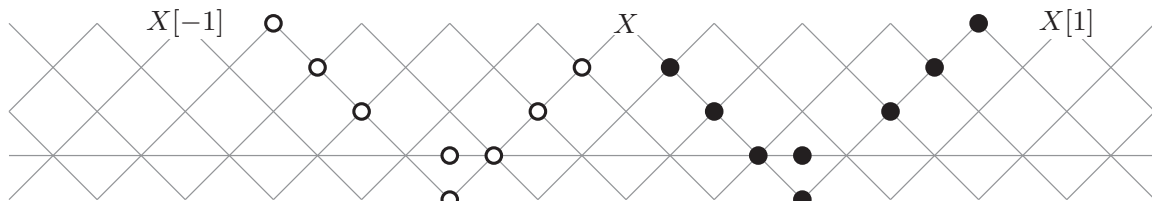


Figura 4.18: Para $j = 6$

Os próximos lemas apresentam uma descrição precisa a respeito de quem são os elementos dos conjuntos L_{X^\bullet} e R_{X^\bullet} .

Lema 4.3.3. *Seja $X^\bullet = (i, j) \in \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)) \cong \mathbb{Z}\mathbb{D}_n$, com $j > 2$, então temos que $L_{X^\bullet} = A \cup B \cup C$, onde os conjuntos A , B e C são definidos da seguinte forma:*

$$A = \{Y^\bullet = (a, b); a = i \text{ e } 1 \leq b \leq j\}$$

$$B = \{Y^\bullet = (a, b); a + b = i + 2 \text{ e } 4 + n - j \leq b \leq n\}$$

$$C = \{Y^\bullet = (a, b); a + b = i + j \text{ e } j + 1 \leq b \leq n\}$$

No caso em que $j = n$, considera-se $C = \emptyset$, e para o caso em que $j = 3$, considera-se $B = \emptyset$.

Demonstração. Primeiramente note que podemos escrever $\text{Supp}(g_{X^\bullet})$ da seguinte maneira:

$$\text{Supp}(g_{X^\bullet}) = \bigcup_{k=0}^{n-j} (G_1^k \cup G_2^k)$$

onde,

$$G_1^k = \{Y^\bullet = (a, b); a + b = i + j + 2 - n + k \quad e \quad 3 + k \leq b \leq j + k\}$$

$$G_2^k = \{Y^\bullet = (a, b); a = i + j - n + k \quad e \quad 1 \leq b \leq n - k\}$$

Utilizando essa notação, também podemos escrever quem é o conjunto $\text{Supp}(f_{X^\bullet[-1]})$ como:

$$\text{Supp}(f_{X^\bullet[-1]}) = \bigcup_{k=0}^{n-j} (F_1^k \cup F_2^k)$$

onde,

$$F_1^k = \{Y^\bullet = (a, b); a + b = i + j + 1 - n + k \quad e \quad 3 + k \leq b \leq j + k\}$$

$$F_2^k = \{Y^\bullet = (a, b); a = i + j - n - 1 + k \quad e \quad 1 \leq b \leq n - k\}$$

Primeiramente mostremos que $A \subset L_{X^\bullet}$. De fato, note que não existe $(a, b) \in \text{Supp}(f_{X^\bullet[-1]})$ tal que $a = i$. Disto segue que:

$$G_2^{n-j} \cap \text{Supp}(f_{X^\bullet[-1]}) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad G_2^{n-j} \subset L_{X^\bullet}$$

Como $G_2^{n-j} = A$, tem-se $G_2^{n-j} \cap L_{X^\bullet} = A$.

Agora vamos analisar os conjuntos G_2^k , para $0 \leq k < n - j$. Note que:

$$G_2^k \cap \text{Supp}(f_{X^\bullet[-1]}) = G_2^k \cap F_2^{k+1}$$

portanto vamos analisar os conjuntos $G_2^k \cap F_2^{k+1}$. Temos:

$$G_2^k \cap F_2^{k+1} = \{Y^\bullet = (a, b); a = i + j - n + k \quad e \quad 1 \leq b \leq n - k - 1\}$$

Portanto,

$$G_2^k \cap L_{X^\bullet} = G_2^k \setminus (G_2^k \cap F_2^{k+1}) = \{Y^\bullet = (a, b); a = i + j - n + k \quad e \quad b = n - k\}$$

Note que podemos reescrever o conjunto $G_2^k \cap L_{X^\bullet}$ como:

$$G_2^k \cap L_{X^\bullet} = \{Y^\bullet = (a, b); a + b = i + j \quad e \quad b = n - k\}$$

desta maneira, temos:

$$\bigcup_{k=0}^{n-j-1} G_2^k \cap L_{X^\bullet} = \{Y^\bullet = (a, b); a + b = i + j \quad e \quad j + 1 \leq b \leq n\} = C$$

Portanto até o momento concluímos que:

$$\bigcup_{k=0}^{n-j} G_2^k \cap L_{X^\bullet} = (G_2^{n-j} \cap L_{X^\bullet}) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n-j-1} G_2^k \cap L_{X^\bullet} \right) = A \cup C$$

resta mostrar quem é o conjunto $\bigcup_{k=0}^{n-j} G_1^k \cap L_{X^\bullet}$.

Note que $G_1^k \subset \text{Supp}(g_{X^\bullet}) \cap \text{Supp}(f_{X^\bullet[-1]})$, para $0 \leq k < n - j$. De fato,

$$G_1^k \cap F_1^{k+1} = \{Y^\bullet = (a, b); a + b = i + j + 2 - n + k \quad e \quad 4 + k \leq b \leq j + k\}$$

$$G_1^k \cap F_2^0 = \{Y^\bullet = (a, b); a + b = i + j + 2 - n + k \quad e \quad b = 3 + k\}$$

portanto, para $0 \leq k < n - j$, temos:

$$G_1^k = (G_1^k \cap F_1^{k+1}) \cup (G_1^k \cap F_2^0) \quad \Rightarrow \quad G_1^k \subset \text{Supp}(g_{X^\bullet}) \cap \text{Supp}(f_{X^\bullet[-1]})$$

disto segue que:

$$\bigcup_{k=0}^{n-j} G_1^k \cap L_{X^\bullet} = G_1^{n-j} \cap L_{X^\bullet}$$

Para o caso de G_1^{n-j} devemos notar que:

$$G_1^{n-j} \cap \text{Supp}(f_{X^\bullet[-1]}) = G_1^{n-j} \cap F_2^0$$

onde,

$$G_1^{n-j} \cap F_2^0 = \{Y^\bullet = (a, b); a + b = i + 2 \quad e \quad b = 3 + n - j\}$$

portanto,

$$G_1^{n-j} \cap L_{X^\bullet} = \{Y^\bullet = (a, b); a + b = i + 2 \quad e \quad 4 + n - j \leq b \leq n\}$$

disto segue que:

$$\bigcup_{k=0}^{n-j} G_1^k \cap L_{X^\bullet} = G_1^{n-j} \cap L_{X^\bullet} = \{Y^\bullet = (a, b); a + b = i + 2 \text{ e } 4 + n - j \leq b \leq n\} = B$$

Portanto podemos concluir que:

$$\text{Supp}(g_{X^\bullet}) \cap L_{X^\bullet} = (G_2^{n-j} \cap L_{X^\bullet}) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n-j} G_1^k \cap L_{X^\bullet} \right) \cup \left(\bigcup_{k=0}^{n-j-1} G_2^k \cap L_{X^\bullet} \right) = A \cup B \cup C$$

e segue o resultado desejado. □

Exemplo 4.3.4. A seguir ilustramos L_{X^\bullet} , para $X^\bullet = (5, 4)$, em \mathbb{D}_6 .

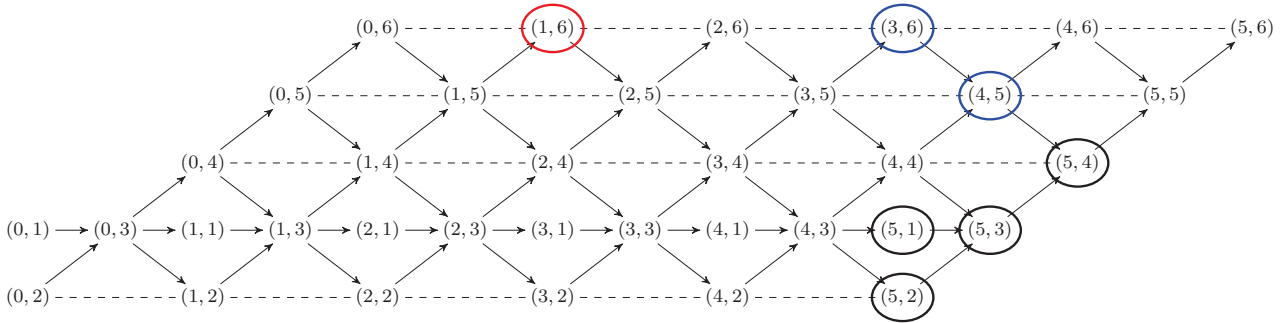


Figura 4.19: $L_{X^\bullet} = A \cup B \cup C$

Note que neste caso $X^\bullet = (5, 4)$ e $n = 6$, portanto temos:

$$L_{X^\bullet} = A \cup B \cup C, \text{ onde } \begin{cases} A = \{Y^\bullet = (a, b); a = 5 \text{ e } 1 \leq b \leq 4\} \\ B = \{Y^\bullet = (a, b); a + b = 7 \text{ e } 6 \leq b \leq 6\} \\ C = \{Y^\bullet = (a, b); a + b = 9 \text{ e } 5 \leq b \leq 6\} \end{cases}$$

Analisando este exemplo, podemos visualizar de uma forma mais clara quem são os subconjuntos A , B e C de L_{X^\bullet} . Também é fácil ver que ao calcularmos L_{X^\bullet} para algum $X^\bullet = (i, j)$, com $j = n$, tem-se $C = \emptyset$.

Lema 4.3.5. Seja $X^\bullet = (i, j) \in \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)) \cong \mathbb{Z}\mathbb{D}_n$, com $1 \leq j \leq 2$, então temos que $L_{X^\bullet} = A \cup B$, onde os conjuntos A e B são definidos da seguinte forma:

$$A = \{Y^\bullet = (a, b); a + b = i + 2 \text{ e } 3 \leq b \leq n\}$$

$$B = \{Y^\bullet = (a, b); i + 2 - n \leq a \leq i \text{ e } b = \begin{cases} j, & \text{se } (i - a) \text{ é par} \\ 3 - j, & \text{c/c} \end{cases} \}$$

Demonstração. Primeiramente note que podemos escrever $\text{Supp}(g_{X^\bullet})$ da seguinte maneira:

$$\text{Supp}(g_{X^\bullet}) = G_1 \cup G_2$$

onde,

$$G_1 = \{Y^\bullet = (a, b); i + 2 - n \leq a \leq i - 1 \quad e \quad 3 \leq b \leq i + 2 - a\}$$

$$G_2 = \{Y^\bullet = (a, b); i + 2 - n \leq a \leq i \quad e \quad b = \begin{cases} j, & \text{se } (i - a) \text{ é par} \\ 3 - j, & c/c \end{cases} \}$$

Utilizando essa notação, também podemos escrever quem é o conjunto $\text{Supp}(f_{X^\bullet[-1]})$ como:

$$\text{Supp}(f_{X^\bullet[-1]}) = F_1 \cup F_2$$

onde,

$$F_1 = \{Y^\bullet = (a, b); i + 1 - n \leq a \leq i - 2 \quad e \quad 3 \leq b \leq i + 1 - a\}$$

$$F_2 = \{Y^\bullet = (a, b); i + 1 - n \leq a \leq i - 1 \quad e \quad b = \begin{cases} j, & \text{se } (a - i + 1) \text{ é par} \\ 3 - j, & c/c \end{cases} \}$$

Primeiramente note que:

$$G_2 \cap \text{Supp}(f_{X^\bullet[-1]}) = G_2 \cap (F_1 \cup F_2) = \emptyset \quad \Rightarrow \quad G_2 \subset L_{X^\bullet}$$

portanto $G_2 \cap L_{X^\bullet} = G_2 = B$.

Agora analisando G_1 , temos que $G_1 \cap F_2 = \emptyset$, pois dado $(a, b) \in F_2$, tem-se $b \leq 2$. Portanto temos:

$$G_1 \cap \text{Supp}(f_{X^\bullet[-1]}) = G_1 \cap F_1$$

analisando o conjunto $G_1 \cap F_1$, temos que:

$$G_1 \cap F_1 = \{Y^\bullet = (a, b); i + 2 - n \leq a \leq i - 2 \quad e \quad 3 \leq b \leq i + 1 - a\}$$

e segue que:

$$G_1 \cap L_{X^\bullet} = G_1 \setminus (G_1 \cap F_1) = \{Y^\bullet = (a, b); i + 2 - n \leq a \leq i - 1 \quad e \quad b = i + 2 - a\}$$

Note que podemos reescrever o conjunto $G_1 \cap L_{X^\bullet}$ da seguinte maneira:

$$G_1 \cap L_{X^\bullet} = \{Y^\bullet = (a, b); a + b = i + 2 \text{ e } 3 \leq b \leq n\} = A$$

portanto temos:

$$\text{Supp}(g_{X^\bullet}) \cap L_{X^\bullet} = (G_1 \cap L_{X^\bullet}) \cup (G_2 \cap L_{X^\bullet}) = A \cup B$$

e segue o resultado desejado. □

Exemplo 4.3.6. A seguir ilustramos L_{X^\bullet} , para $X^\bullet = (5, 1)$, em \mathbb{D}_6 .

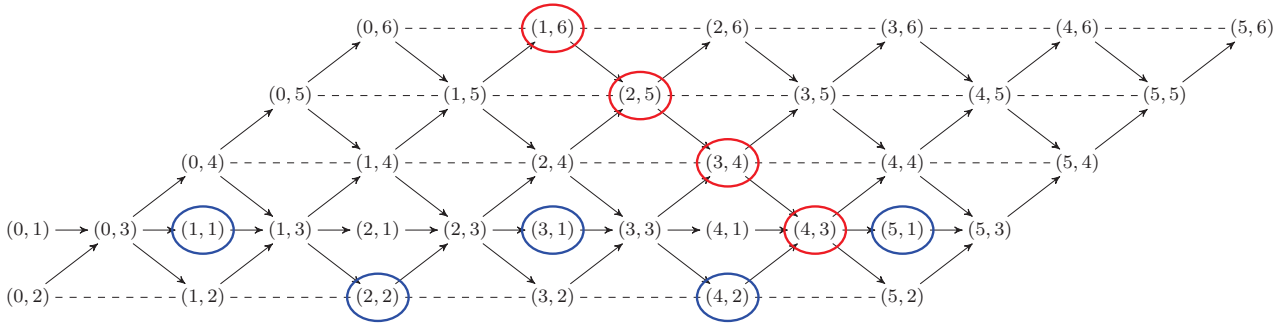


Figura 4.20: $L_{X^\bullet} = A \cup B$

Note que neste caso $X^\bullet = (5, 1)$ e $n = 6$, portanto temos:

$$L_{X^\bullet} = A \cup B, \text{ onde } \begin{cases} A = \{Y^\bullet = (a, b); a + b = 7 \text{ e } 3 \leq b \leq 6\} \\ B = \{Y^\bullet = (a, b); 1 \leq a \leq 5 \text{ e } b = \begin{cases} 1, & \text{se } (5 - a) \text{ é par} \\ 2, & \text{c/c} \end{cases} \end{cases}$$

Note que se formos calcular L_{X^\bullet} para $X^\bullet = (5, 2)$, iriamos obter o mesmo conjunto A acima, e o conjunto B sofreria alteração apenas na segunda coordenada de seus elementos.

Proposição 4.3.7. Para $X^\bullet = (i, j)$, com $1 \leq j \leq n$, tem-se que $n \leq |L_{X^\bullet}| \leq 2n - 3$. Em particular,

$$|L_{X^\bullet}| = \begin{cases} n + j - 3, & \text{se } j > 2 \\ 2n - 3, & \text{se } 1 \leq j \leq 2 \end{cases}$$

Demonstração. Segue diretamente da caracterização do conjunto L_{X^\bullet} dada pelos lemas (4.3.3) e (4.3.5). □

4.3.1 Secções em \mathbb{D}_n

Diferentemente do caso \mathbb{A}_n em que o conjunto L_{X^\bullet} já era uma secção, aqui no caso \mathbb{D}_n é necessário buscarmos um subconjunto de L_{X^\bullet} que constituirá a nossa secção desejada. Porém, com base no que foi visto até o momento e analisando as parametrizações do conjunto L_{X^\bullet} , apresentadas nos lemas (4.3.3) e (4.3.5), podemos notar que sempre existe um subconjunto Σ_0 de L_{X^\bullet} que contém uma secção em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$. Mais precisamente temos o seguinte resultado.

Proposição 4.3.8. *Seja $X^\bullet = (i, j)$ um complexo indecomponível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$, com Λ uma álgebra hereditária por partes do tipo \mathbb{D}_n . Então as seguintes afirmações são válidas.*

(a) *Se $j > 2$, existe uma secção Σ de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ cujos vértices são dados por:*

$$\Sigma_0 = L_{X^\bullet} \setminus B$$

onde B é o conjunto definido no lema (4.3.3).

(b) *Se $1 \leq j \leq 2$, existe uma secção Σ de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ cujos vértices são dados por:*

$$\Sigma_0 = (L_{X^\bullet} \setminus B) \cup \{(i, j), (i-1, 3-j)\}$$

onde B é o conjunto definido no lema (4.3.5).

Demonstração. Aqui vamos demonstrar apenas o item (a), pois a demonstração de (b) é análoga. Seja Σ o subquiver pleno de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ tal que $\Sigma_0 = L_{X^\bullet} \setminus B$, com B sendo o conjunto definido no lema (4.3.3). Mostremos que Σ satisfaz as propriedades da definição (4.1.6). De fato, é fácil ver que a propriedade (S1) é satisfeita, pois como $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ é acíclico, tem-se que o mesmo vale para Σ . Note que dado $x = (a, b) \in \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, tem-se que $\tau^n(a, b) := (a - n, b)$, ver [4] página 303. Como Σ_0 é dado por $\{(i, 1), (i, 2), \dots, (i, j)\} \cup \{(i-1, j+1), \dots, (i+j-n, n)\}$, temos que não existem dois elementos distintos $x, y \in \Sigma_0$ tal que $x = \tau^n(y)$ para algum $n \in \mathbb{Z}$, logo Σ satisfaz a propriedade (S2). A propriedade (S3) segue diretamente da parametrização de $\mathbb{Z}\mathbb{D}_n \cong \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ apresentada na página 72. \square

A proposição (4.3.8) nos diz que dado um objeto indecomponível $X^\bullet \in \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$, existe uma secção Σ de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ tal que $\Sigma_0 \subset L_{X^\bullet}$. Estamos interessados em encontrar uma secção em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ através da análise do quiver de Auslander-Reiten de $\text{mod}(\Lambda)$. Sabemos que dado $M \in \text{mod}(\Lambda)$ indecomponível, podemos calcular o conjunto $\Omega_p(M)$ da definição (4.2.8). Além disso, pelo

lema (4.2.9), temos que $(\Omega_p(M) \cup \{M^\bullet\}) \subset L_{M^\bullet}$. Portanto dado $M \in \text{mod}(\Lambda)$, temos que existe uma secção Σ de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ tal que $\Sigma_0 \subset L_{X^\bullet}$, e dependendo da escolha de M em $\text{mod}(\Lambda)$ pode ocorrer de que os complexos indecomponíveis de $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$ associados ao conjunto Σ_0 de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ estejam contidos no conjunto $(\Omega_p(M) \cup \{M^\bullet\}) \subset L_{M^\bullet}$. Neste caso, podemos formar a secção Σ utilizando os elementos do conjunto $(\Omega_p(M) \cup \{M^\bullet\})$.

De agora em diante, nosso objetivo é identificar quando nosso conjunto $(\Omega_p(M) \cup \{M^\bullet\})$ contém os elementos de Σ_0 . Além disso, pretendemos apresentar uma maneira de identificar Σ_0 dentro do conjunto $(\Omega_p(M) \cup \{M^\bullet\})$, caso isso ocorra. Faremos este estudo analisando as álgebras de endomorfismos desses conjuntos.

Observação 4.3.9. Por abuso de linguagem, dado \mathcal{S} um conjunto finito formado por complexos indecomponíveis, não isomorfos, de $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$, iremos denotar $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(\mathcal{S})$ como sendo dada por:

$$\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(\mathcal{S}) := \text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} \left(\bigoplus_{Z^\bullet \in \mathcal{S}} Z^\bullet \right)$$

A seguir, temos um exemplo de como é o quiver da álgebra de endomorfismo dos conjuntos L_{X^\bullet} dos exemplos (4.3.4) e (4.3.6).

Exemplo 4.3.10. Considere X^\bullet um vértice em $\mathbb{Z}\mathbb{D}_6$, como apresentado nos exemplos (4.3.4) e (4.3.6). Sendo $X^\bullet = (5, 4)$ como no exemplo (4.3.4), temos que $\text{End}(L_{X^\bullet})^{op}$ é dada pelo seguinte quiver conexo:

$$\begin{array}{ccccccc} & & (5, 1) & & & & \\ & \nearrow & & \searrow & & & \\ (1, 6) & & & & (5, 3) & \longrightarrow & X^\bullet & \longleftarrow & (4, 5) & \longleftarrow & (3, 6) \\ & \searrow & & \nearrow & & & \\ & & (5, 3) & & & & \end{array}$$

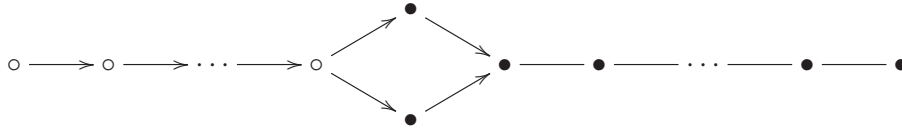
Agora considerando $X^\bullet = (5, 1)$, como no exemplo (4.3.6), temos que $\text{End}(L_{X^\bullet})^{op}$ é dada por:

$$\begin{array}{ccccccc} (1, 6) & \longrightarrow & (2, 5) & \longrightarrow & (3, 4) & \longrightarrow & (4, 3) & \longrightarrow & X^\bullet \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\ (1, 1) & \longrightarrow & (2, 2) & \longrightarrow & (3, 1) & \longrightarrow & (4, 2) & & \end{array}$$

Note que, dado $X^\bullet = (i, j) \in \mathbb{Z}\mathbb{D}_n$, já temos caracterizados os conjuntos L_{X^\bullet} , para $1 \leq j \leq n$. Portanto já conhecemos como são os quivers das álgebras $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(L_{X^\bullet})^{op}$. A próxima proposição nos garante que existe um único subconjunto $\mathcal{S} \subset L_{X^\bullet}$ tal que $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(\mathcal{S})$ é dado por um quiver do tipo \mathbb{D}_n .

Proposição 4.3.11. *Sejam Λ uma álgebra hereditária por partes do tipo \mathbb{D}_n e $X^\bullet = (i, j) \in \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, com $j > 2$. Então existe um único subconjunto $\mathcal{S} \subset L_{X^\bullet}$ tal que $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(\mathcal{S})^{op}$ é dada por um quiver do tipo \mathbb{D}_n . Além disso, os elementos de \mathcal{S} formam uma secção Σ em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$.*

Demonstração. Pelo lema (4.3.3), segue que $\text{End}(L_{X^\bullet})^{op}$ é dada pelo seguinte quiver:



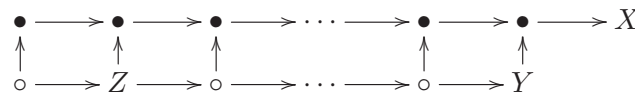
Lembremos que $L_{X^\bullet} = A \cup B \cup C$. Aqui o quiver está dividido em duas partes, os vértices denotados por (o) representam os elementos do conjunto B e os vértices denotados por (•) representam elementos do conjunto $A \cup C$. Pela definição dos conjuntos A , B e C , temos:

$$|A| = j, \quad |B| = j - 3 \quad \text{e} \quad |C| = n - j.$$

Portanto nosso quiver possui n vértices denotados por (•), e $j - 3$ vértices denotados por (o). Como $j \leq n$, podemos concluir que o único subconjunto $\mathcal{S} \subset L_{X^\bullet}$, em que temos $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(\mathcal{S})^{op}$ dado por um quiver do tipo \mathbb{D}_n , é justamente o subconjunto formado pelos elementos do conjunto $A \cup C$. Além disso, note que $A \cup C = L_{X^\bullet} \setminus B$, portanto segue pela proposição (4.3.8), ítem (a), que os elementos de \mathcal{S} formam uma secção Σ em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$. □

Proposição 4.3.12. *Sejam Λ uma álgebra hereditária por partes do tipo \mathbb{D}_n e $X^\bullet = (i, j) \in \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, com $1 \leq j \leq 2$. Então existem dois subconjuntos $\mathcal{S}, \mathcal{S}' \subset L_{X^\bullet}$ tais que $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(\mathcal{S})^{op}$ e $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(\mathcal{S}')^{op}$ são dadas por quivers do tipo \mathbb{D}_n . Além disso, os elementos de um desses subconjuntos formam uma secção Σ em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$.*

Demonstração. Pelo lema (4.3.5), segue que o quiver de $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(L_{X^\bullet})^{op}$ é da seguinte forma:



Lembremos que $L_{X^\bullet} = A \cup B$. Aqui o quiver está dividido em duas partes, os vértices denotados por (•) representam os elementos do conjunto A e os demais vértices representam o conjunto B . Aqui $X = (i, j)$, $Y = (i - 1, 3 - j)$ e $Z = (i + 3 - n, \ell)$, onde $\ell \in \{1, 2\}$. Note que só existem dois subconjuntos de L_{X^\bullet} , cuja álgebra de endomorfismo é dada por um quiver do tipo \mathbb{D}_n , são eles:

$$\mathcal{S} = A \cup \{X, Y\} \quad \text{e} \quad \mathcal{S}' = A \cup \{X, Z\}$$

Mostremos que \mathcal{S}' não forma uma secção em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ no caso em que $n \geq 5$. De fato, sabemos que no quiver $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ todo caminho de Z para X se fatora pelo elemento de coordenadas $(i + 3 - n, 3) \in \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, e tal elemento não pertence a \mathcal{S}' , pois o único elemento de \mathcal{S}' que possui a segunda coordenada igual a 3 é dado por $(i - 1, 3) \in A$, porém temos que $n \geq 5$. Portanto \mathcal{S}' não satisfaz a propriedade (S3) da definição (4.1.6), disto segue que \mathcal{S}' não forma uma secção no caso $n \geq 5$. Observe que no caso em que $n = 4$, temos que $Z = Y$ e portanto \mathcal{S} e \mathcal{S}' coincidem. Agora note que:

$$\mathcal{S} = A \cup \{X, Y\} = (L_{X^\bullet} \setminus B) \cup \{X, Y\}$$

portanto, pela proposição (4.3.8), item (b), segue que Σ forma uma secção em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$. \square

Lema 4.3.13. *Considere $\mathcal{S}' = A \cup \{X, Z\}$ como sendo o subconjunto de L_{X^\bullet} apresentado na proposição (4.3.12). Então, no caso em que $n \geq 5$, temos que existe $W \in \mathcal{S}'$ tal que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(W, Z[1]) \neq 0$.*

Demonstração. Pelo lema (4.3.5), sabemos que $L_{X^\bullet} = A \cup B$. Defina $W = (i - 1, 3)$, então temos que $W \in \mathcal{S}'$, pois $W \in A$. Agora note que:

$$Z = (i + 3 - n, \ell) \Rightarrow Z[1] = (i + 2, \ell), \text{ em que } \ell \in \{1, 2\} \text{ depende da paridade de } n.$$

Mostremos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(W, Z[1]) \neq 0$. De fato, basta analisar se $Z[1] \in \text{Supp}(\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(W, _))$. Sabemos que, pela parametrização apresentada na página (73), que:

$$\text{Supp}(\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(W, _)) = \left\{ Y^\bullet = (a, b); \left\{ \begin{array}{l} a + b = i + 2 + k \text{ para } 3 + k \leq b \leq 3 + k \\ e \\ a = i + k \text{ para } 1 \leq b \leq n - k \end{array} \right. , \text{ com } 0 \leq k \leq n - 3 \right\}$$

Note que se $n \geq 5$, então $n - 3 \geq 2$. Como $0 \leq k \leq n - 3$, tomando $k = 2$ temos:

$$\{(a, b); a = i + 2 \text{ e } 1 \leq b \leq n - 2\} \subset \text{Supp}(\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(W, _))$$

Portanto,

$$Z[1] \in \{(i + 2, 1), (i + 2, 2)\} \subset \text{Supp}(\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(W, _))$$

disto segue que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(W, Z[1]) \neq 0$. \square

Como verificar se $\mathcal{S} \subset L_{X^\bullet}$ forma uma secção

Seja $X^\bullet = (i, j)$ em $\mathbb{Z}\mathbb{D}_n$, e considere $\mathcal{S} \subset L_{X^\bullet}$ um subconjunto contendo X^\bullet tal que $\text{End}(\mathcal{S})^{op}$ é dada por um quiver Σ do tipo \mathbb{D}_n . Neste caso, vamos separar o problema em dois casos.

- (1) Se, no quiver Σ , X^\bullet recebe duas flechas, então temos que $2 < j < n$. De fato, isso é fácil de verificar analisando o formado de L_{X^\bullet} dado pela proposição (4.3.12). Neste caso, segue pela proposição (4.3.11) que os elementos de \mathcal{S} formam uma secção em $\mathbb{Z}\mathbb{D}_n$.
- (2) Agora no caso em que X^\bullet recebe apenas uma flecha, podemos ter $1 \leq j \leq 2$. Portanto segundo a proposição (4.3.12), se $n \geq 5$ há a possibilidade dos elementos de \mathcal{S} não formarem uma secção, pois nesse caso existem dois subconjuntos de L_{X^\bullet} tal que a álgebra de endomorfismo é dado por um quiver do tipo \mathbb{D}_n . Note que, neste caso, o lema (4.3.13) nos fornece uma maneira de verificar se \mathcal{S} é o subconjunto que induz a secção ou não. Na prática, podemos utilizar esse resultado seguindo dois passos, da seguinte maneira:

- 1º) Como X^\bullet só recebe uma flecha em Σ , e Σ é do tipo \mathbb{D}_n , temos que Σ possui apenas duas fontes. Denotemos por Y e Z as duas fontes de Σ , e por W vértice do qual X^\bullet recebe uma flecha.
- 2º) Se $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(W, Z[1]) = 0$ e $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(W, Y[1]) = 0$, então Σ é uma secção.

Com base nos resultados obtidos até o momento, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 4.3.14. *Seja Λ uma álgebra hereditária por partes do tipo \mathbb{D}_n . Se existe $M \in \text{mod}(\Lambda)$ tal que $|\Omega_p(M)| \geq n - 1$ e existe $\mathcal{S} \subset \Omega_p(M) \cup \{M\}$ tal que $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(\mathcal{S})^{op}$ é dada por um quiver Σ tipo \mathbb{D}_n , então as seguintes afirmações são verdadeiras.*

- (i) *Se, em Σ , existe mais de uma flecha chegando em M , então Σ é uma secção em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$.*
- (ii) *Se, em Σ , existe apenas uma flecha chegando em M , então:*

$$\Sigma \text{ é uma secção em } \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)) \iff \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(\Sigma_0, \Sigma_0[1]) = 0$$

Além disso, M é o único poço de Σ .

Demonstração. O resultado segue como consequência do lema (4.2.9), das proposições (4.3.11) e (4.3.12) e também do lema (4.3.13). \square

Note que, pelos comentários anteriores, ao verificarmos a condição (ii) do teorema acima, não é necessário calcularmos os morfismos entre todos os elementos de Σ_0 e $\Sigma_0[1]$.

Teorema 4.3.15 (Dual). *Seja Λ uma álgebra hereditária por partes do tipo \mathbb{D}_n . Se existe $M \in \text{mod}(\Lambda)$ tal que $|\Omega_f(M)| \geq n - 1$ e existe $\mathcal{S} \subset \Omega_f(M) \cup \{M\}$ tal que $\text{End}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(\mathcal{S})^{op}$ é dada por um quiver Σ tipo \mathbb{D}_n , então as seguintes afirmações são verdadeiras.*

- (i) Se, em Σ , existe mais de uma flecha saindo de M , então Σ é uma secção em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$.
- (ii) Se, em Σ , existe apenas uma flecha saindo de M , então:

$$\Sigma \text{ é uma secção em } \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)) \iff \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(\Sigma_0, \Sigma_0[1]) = 0$$

Além disso, M é a única fonte de Σ .

Observação 4.3.16. Note que, por definição, para $N, N' \in \Omega_p(M)$ distintos, existem $X, X' \in \text{mod}(\Lambda)$ e $i, j \geq 0$ tais que

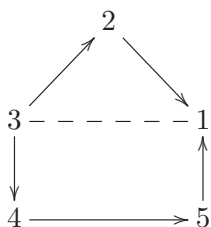
$$N = X[-i] \quad \text{e} \quad N' = X'[-j]$$

neste caso temos que:

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(N, N'[1]) = \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(X[-i], X'[-j+1]) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(X, X'[-j+1+i]) = \text{Ext}_{\Lambda}^{1+i-j}(X, X')$$

Desta maneira podemos verificar a condição (ii) do teorema (4.3.14) apenas analisando os objetos da categoria de módulos.

Exemplo 4.3.17. Considere Λ a álgebra inclinada iterada do tipo \mathbb{D}_5 dada pelo quiver:



Neste caso, o quiver de Auslander-Reiten de $\text{mod}(\Lambda)$ é como abaixo:

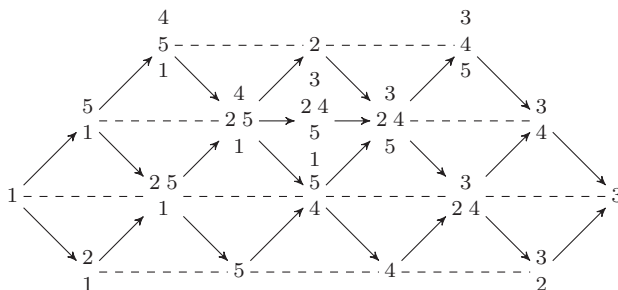


Figura 4.21: $\Gamma(\text{mod}(\Lambda))$

Se escolhermos $M = \begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ & 1 \end{smallmatrix}$, segue que:

$$\Omega_p(M) = \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} [0], \begin{smallmatrix} 5 \\ 1 \end{smallmatrix} [0], 4[-1], \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} [-1] \right\}$$

Neste caso temos $|\Omega_p(M)| = 4$, então satisfaz a hipótese de $|\Omega_p(M)| \geq n - 1$. Agora escrevendo o quiver formado pelos elementos de $\Omega_p(M) \cup \{M\}$, temos:

$$\begin{array}{ccccc} & & \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} [-1] & & \\ & & \swarrow & & \nwarrow \\ \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} [0] & \longrightarrow & M[0] & \longleftarrow & \begin{smallmatrix} 5 \\ 1 \end{smallmatrix} [0] & \longleftarrow & 4[-1] \end{array}$$

Note que não existe $\mathcal{S} \subset \Omega_p(M) \cup \{M\}$ tal que Σ é tipo \mathbb{D}_5 . Portanto não é possível construir uma secção com os elementos de $\Omega_p(M) \cup \{M\}$. A figura abaixo ilustra como estão espalhados os elementos de $\Omega_p(M) \cup \{M\}$ em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$.

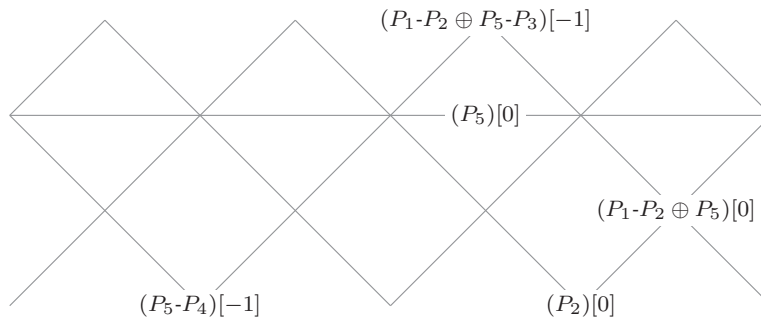


Figura 4.22: $(\Omega_p(M) \cup \{M\}) \subset \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$

Agora note que se tomarmos $M = \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 & 5 \\ & 1 \end{smallmatrix}$, temos:

$$\Omega_p(M) = \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} [0], \begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ & 1 \end{smallmatrix} [0], \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix} [0], 3[-1] \right\}$$

Neste caso $\mathcal{S} = (\Omega_p(M) \cup \{M\})$ forma o seguinte quiver:

$$\begin{array}{ccccc} & & 3[-1] & & \\ & & \downarrow & & \\ \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} [0] & \longrightarrow & \begin{smallmatrix} 2 & 5 \\ & 1 \end{smallmatrix} [0] & \longrightarrow & M[0] & \longleftarrow & \begin{smallmatrix} 4 \\ 1 \end{smallmatrix} [0] \end{array}$$

Note que o quiver formado por $(\Omega_p(M) \cup \{M\})$ representa diretamente um quiver Σ do tipo \mathbb{D}_5 . Como $M = M[0]$ recebe mais de uma flecha em Σ , temos pelo teorema (4.3.14) que existe uma secção $\Sigma = (\Omega_p(M) \cup \{M\})$ em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$ tendo M como seu único poço.

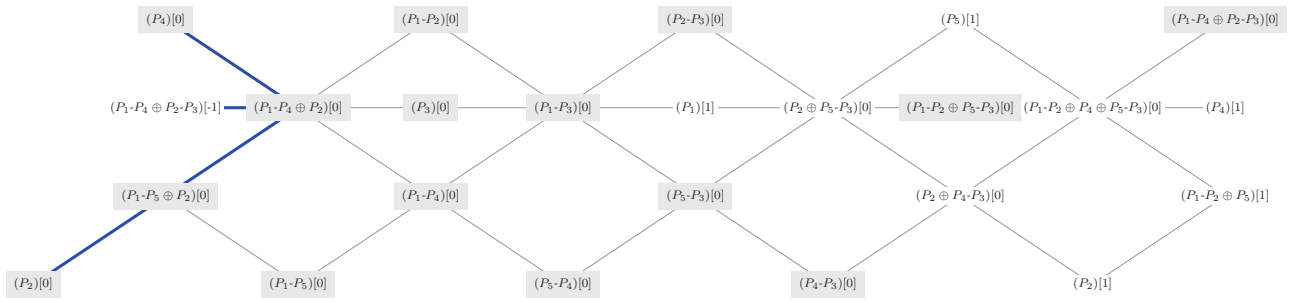
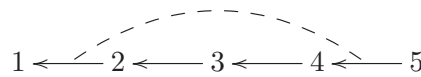


Figura 4.23: $\text{mod}(\Lambda) \subset \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$

A figura acima ilustra Σ em destaque.

O próximo exemplo apresenta um caso em que é necessário verificar a condição (ii) do teorema (4.3.15), isto é, se $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(\Sigma_0, \Sigma_0[1]) = 0$.

Exemplo 4.3.18. Considere agora Λ a álgebra inclinada do tipo \mathbb{D}_5 dada pelo quiver:



Neste caso, o quiver de Auslander-Reiten de $\text{mod}(\Lambda)$ é como abaixo:

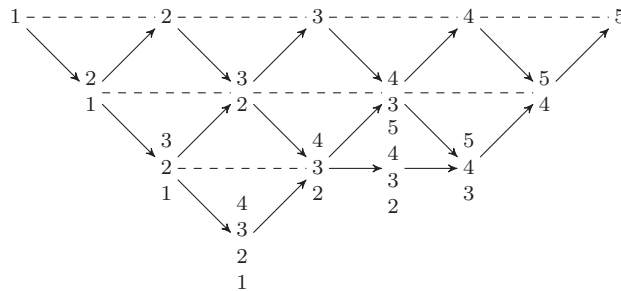


Figura 4.24: $\Gamma(\text{mod}(\Lambda))$

Note que o conjunto $\left\{ \begin{matrix} 4 & & 5 \\ 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 3, 4, 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{matrix} \right\}$ forma uma secção em $\Gamma(\text{mod } \Lambda)$. Foi provado em [1] que se existe uma secção na categoria de módulos de uma álgebra inclinada, então ela também será uma secção em sua respectiva categoria derivada. Vamos mostrar que ao utilizar o teorema (4.3.15) também chegamos a conclusão de que tal conjunto forma uma secção em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$. Considere

$M = \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix}$, então temos:

$$\Omega_f(M) = \left\{ \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} [0], \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} [0], \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} [0] \right\}$$

portanto o quiver formado por $(\Omega_f(M) \cup \{M\})$ é dado por:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 5 & & \\
 & & \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} [0] & \longrightarrow & \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} [0] & \longrightarrow & \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 4 \end{matrix} [0] \\
 & & 2 & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\
 M[0] & \longrightarrow & \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} [0] & \longrightarrow & \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} [0] & \longrightarrow & 4[0]
 \end{array}$$

Neste caso, temos dois subconjuntos \mathcal{S} e \mathcal{S}' tais que Σ e Σ' são do tipo \mathbb{D}_5 ,

$$\Sigma = \begin{array}{c} \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} [0] \\ \uparrow \\ M[0] \longrightarrow \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} [0] \longrightarrow \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} [0] \longrightarrow 4[0] \end{array} \quad \Sigma' = \begin{array}{c} \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} [0] \\ \uparrow \\ M[0] \longrightarrow \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} [0] \longrightarrow \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} [0] \longrightarrow 4[0] \end{array}$$

$$\Sigma_0 = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} [0], \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} [0], \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} [0], 4[0], \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} [0] \right\} \quad \text{e} \quad \Sigma'_0 = \left\{ \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{matrix} \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} [0], \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} [0], \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} [0], 4[0], \begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} [0] \right\}$$

Como em Σ e Σ' , existe apenas uma flecha saindo de M , devemos verificar se eles satisfazem a condição (ii) do teorema (4.3.15).

Iniciemos verificando Σ' . Como estamos utilizando a versão dual do teorema (4.3.14), iremos verificar se $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} \left(\begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} [0], \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} [1] \right) = 0$ e $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} \left(4[0], \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} [1] \right) = 0$. Note que:

$$\text{Ext}_{\Lambda}^1 \left(\begin{matrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{matrix} \right) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)} \left(\begin{matrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{matrix} [0], \begin{matrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{matrix} [1] \right) \neq 0$$

disto segue que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(\Sigma'_0, \Sigma'_0[1]) \neq 0$, ou seja, Σ' não forma uma secção na categoria derivada.

Ao analisarmos Σ , temos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(\Lambda)}(\Sigma_0, \Sigma_0[1]) = 0$. Portanto pelo teorema (4.3.15), tem-se que Σ é uma secção em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$.

Observação 4.3.19. No exemplo anterior encontramos uma secção Σ específica em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, porém podemos utilizar os teoremas (4.3.14) e (4.3.15) para encontrar outros tipos de secções na categoria derivada dessa mesma álgebra. Como no exemplo a seguir.

Exemplo 4.3.20. Considere $\text{mod}(\Lambda)$ a mesma categoria do exemplo anterior. Vamos encontrar uma secção Σ em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$, sendo que Σ não é uma secção na categoria de módulos.

Vamos tomar $M = \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix}$, neste caso temos:

$$\Omega_p(M) = \left\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} [0], \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} [0], 2[0], 5[-1] \right\}$$

e o quiver formado por $(\Omega_p(M) \cup \{M\})$ é dado por:

$$\begin{array}{ccccc} & & 5[-1] & & \\ & & \downarrow & & \\ \begin{smallmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{smallmatrix} [0] & \longrightarrow & M[0] & \longleftarrow & \begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix} [0] \longleftarrow 2[0] \end{array}$$

Note que $(\Omega_p(M) \cup \{M\})$ já é nos fornece um quiver Σ do tipo \mathbb{D}_5 . Como existe mais de uma flecha chegando em M , temos diretamente do teorema (4.3.14) que esse quiver dá origem a uma secção em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$.

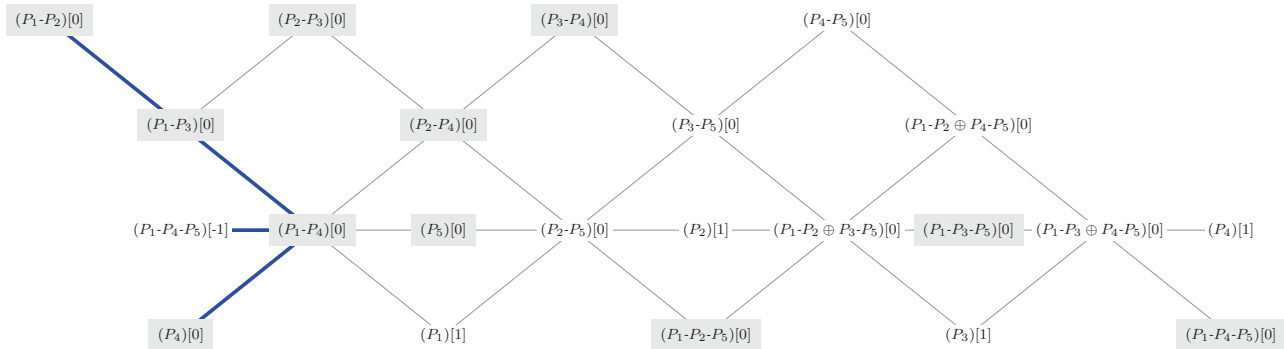


Figura 4.25: $\text{mod}(\Lambda) \subset \mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$

A figura acima ilustra, em destaque, essa secção.

Exemplo 4.3.21. Considere Λ uma álgebra hereditária por partes do tipo \mathbb{D}_5 , de radical quadrado zero. Seja $\Gamma(\text{mod } \Lambda)$ como na figura abaixo.

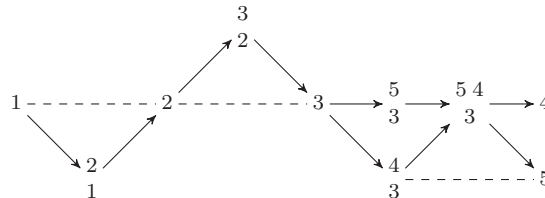
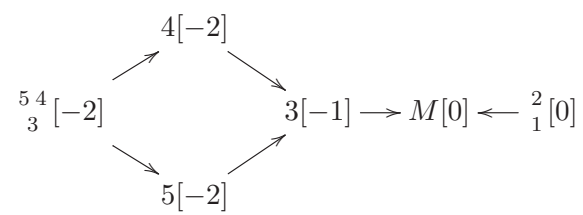


Figura 4.26: $\Gamma(\text{mod}(\Lambda))$

Neste caso se tomarmos $M = 2$, temos $\Omega_p(M) = \left\{ \begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix} [0], 3[-1], \begin{smallmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 3 \end{smallmatrix} [-2], 5[-2], 4[-2] \right\}$ e portanto o quiver formado por $(\Omega_p(M) \cup \{M\})$ é dado por:



Então segue, pelo teorema (4.3.14), item (i), que $\Sigma_0 = \left\{ {}^2_1[0], M[0], 3[-1], 4[-2], 5[-2] \right\}$ forma uma secção em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$.

Capítulo 5

Secções na categoria derivada de álgebras de radical quadrado zero

Neste capítulo iremos trabalhar com álgebras hereditárias por partes de radical quadrado zero. Através dos resultados de Bekkert e Drozd, em [10], tem-se condições necessárias e suficientes para que uma álgebra A de dimensão finita, e com $\text{rad}^2(A) = 0$, seja hereditária por partes.

Iremos trabalhar com álgebras do tipo manso, dadas por $A = kQ/R^2$, em que Q é um quiver que possui uma certa propriedade. Neste caso, iremos apresentar um método intrínseco para a construção de uma secção na componente transjectiva de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$. Tal método irá se basear em uma análise dos caminhos entre os vértices do quiver Q . Por meio dessa análise, será possível construir um complexo inclinante T^\bullet , cujos somandos indecomponíveis irão constituir uma secção em uma componente transjectiva de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$.

Para que tais complexos possam ser construídos, é necessário que o conjunto de vértices do quiver Q , da álgebra $A = kQ/R^2$, admita uma função graduação. É isso que iremos ver na primeira seção deste capítulo. A definição de graduação que iremos utilizar é similar a apresentada por Bautista e Liu, em [6].

5.1 Definindo complexos através de uma graduação em Q_0

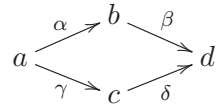
Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é um quiver finito e acíclico. Nestas condições, definimos uma função graduação em Q_0 como sendo uma função $\varphi : Q_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ que satisfaz:

$$\varphi(t(\alpha)) = \varphi(s(\alpha)) - 1$$

para todo $\alpha : s(\alpha) \rightarrow t(\alpha)$ em Q_1 . Se φ e φ' são duas funções graduações em Q , então existe um $m \in \mathbb{Z}$ tal que $\varphi' = \varphi + m$. Dizemos que Q é graduável se ele admite uma função graduação.

Note que Q é graduável se, e somente se, todos os caminhos entre dois vértices fixos tem o mesmo comprimento.

Exemplo 5.1.1. Seja Q um quiver dado por:



Neste caso podemos definir uma função gradação $\varphi : Q_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ da seguinte maneira:

$$\varphi(d) = 0, \quad \varphi(b) = 1, \quad \varphi(c) = 1 \quad \text{e} \quad \varphi(a) = 2$$

Observação 5.1.2. Dados $a, b \in Q_0$, denotaremos por $Q(a, b)$ o conjunto de todos os caminhos de a para b em Q . Além disso, dado $a \in Q_0$, denotaremos por $Q(-, a)$ o conjunto de todos os caminhos em Q que terminam no vértice a .

Proposição 5.1.3. Sejam $a \in Q_0$, $w \in Q(-, a)$ e $\varphi : Q_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função gradação, então:

(a) $\varphi(a) \leq \varphi(s(w))$.

(b) $\varphi(a) = \varphi(s(w)) \iff w = \epsilon_a$.

Demonstração. (a) Se w for o caminho trivial ϵ_a , então $s(w) = a$ e segue diretamente que $\varphi(a) = \varphi(s(w))$. Suponha que $w \neq \epsilon_a$, como $w \in Q(-, a)$, temos que $w = c_1 \dots c_r$ tal que $t(c_r) = a$ e $c_i \in Q_1$ para todo $1 \leq i \leq r$. Pela definição da função gradação, temos $\varphi(t(c_i)) = \varphi(s(c_i)) - 1$, portanto segue que $\varphi(s(c_i)) > \varphi(t(c_i))$ para todo $1 \leq i \leq r$. Como $t(c_i) = s(c_{i+1})$, segue que $\varphi(s(w)) = \varphi(s(c_1)) > \varphi(t(c_r)) = \varphi(a)$. \square

Lema 5.1.4. Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é um quiver graduável, com função gradação $\varphi : Q_0 \rightarrow \mathbb{Z}$. Dados dois vértices distintos $a, b \in Q_0$, considere P_a e P_b os projetivos indecomponíveis associados, respectivamente, a esses vértices. Neste caso temos:

(a) $\text{Hom}_A(P_a, P_b) \neq 0$ se, e somente se, existe um flecha $\alpha : b \rightarrow a$ em Q_1 .

(b) Se $\text{Hom}_A(P_a, P_b) \neq 0$, então $\varphi(b) = \varphi(a) + 1$.

Demonstração. (a) Sabemos que $\text{Hom}_A(P_a, P_b) \cong \text{Hom}_A(\bar{\epsilon}_a A, \bar{\epsilon}_b A) \cong \bar{\epsilon}_b A \bar{\epsilon}_a$, em que $\bar{\epsilon}_i = \epsilon_i + R^2$ denota os idempotentes ortogonais primitivos de A . Suponha que $\text{Hom}_A(P_a, P_b) \neq 0$, então existe $x \neq 0$ em A tal que $\bar{\epsilon}_b x \bar{\epsilon}_a \neq 0$. Por definição, temos:

$$\bar{\epsilon}_b x \bar{\epsilon}_a = \epsilon_b \left(\sum_{j=0}^r \lambda_j w_j \right) \epsilon_a + R^2$$

em que os $w_{j's}$ são caminhos em Q que não estão em R^2 . Portanto existe algum w_k , com $0 \leq k \leq r$, tal que $\epsilon_b w_k \epsilon_a \neq 0$. Como $w_k \notin R^2$, segue que w_k é uma flecha de b para a em Q_1 . Por outro lado, se existe $\alpha : b \rightarrow a$, então existe $f_\alpha \in \text{Hom}_A(P_a, P_b)$ não nulo, o qual é induzido pela multiplicação de α .

(b) Se $\text{Hom}_A(P_a, P_b) \neq 0$, então existe uma flecha $\alpha : b \rightarrow a$. Portanto pela definição da função graduação, temos que $\varphi(a) = \varphi(b) - 1$, ou seja, $\varphi(b) = \varphi(a) + 1$. \square

Note que a recíproca do item (b) não é válida, isto é, o fato de $\varphi(b) = \varphi(a) + 1$ não implica em $\text{Hom}_A(P_a, P_b) \neq 0$. Vejamos no próximo exemplo um caso que ilustra esse fato.

Exemplo 5.1.5. Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero, em que o quiver Q é dado por:

$$a \longleftarrow b \longleftarrow c \longrightarrow d$$

É fácil ver que tal quiver é graduável. Considere $\varphi : Q_0 \rightarrow \mathbb{Z}$, uma função graduação, tal que $\varphi(c) = 3$. Neste caso, temos $\varphi(b) = 2$, $\varphi(d) = 2$ e $\varphi(a) = 1$, ou seja, temos:

$$\varphi(d) = \varphi(a) + 1$$

Porém, como não existe uma flecha $\alpha : d \rightarrow a$, temos que $\text{Hom}_A(P_a, P_d) = 0$.

Observação 5.1.6. Dado Q um quiver graduável, denotaremos por $Q_\varphi^j(-, a)$ o conjunto formado por todos os caminhos w que terminam no vértice $a \in Q_0$ tal que $\varphi(s(w)) = j$, isto é,

$$Q_\varphi^j(-, a) = \{w \in Q(-, a); \varphi(s(w)) = j\}$$

Além disso, para cada $w \in Q_\varphi^j(-, a)$, definimos o seguinte conjunto:

$$w^- = \{v \in Q_\varphi^{j+1}(-, a); v = \alpha w, \text{ para algum } \alpha \in Q_1\}$$

A próxima proposição apresenta uma relação entre os conjuntos $Q_\varphi^j(-, a)$ e $Q_\varphi^{j+1}(-, a)$.

Proposição 5.1.7. *Sejam Q um quiver graduável e $a \in Q_0$. Então, para todo $j \geq \varphi(a)$, os elementos de $Q_\varphi^{j+1}(-, a)$ são induzidos pelos elementos de $Q_\varphi^j(-, a)$.*

Demonstração. De fato, seja $v \in Q_\varphi^{j+1}(-, a)$ qualquer, então temos que $v = \alpha_1 \dots \alpha_n$ tal que $\alpha_i \in Q_1$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Como $\varphi(s(v)) = \varphi(s(\alpha_1)) = j + 1$, tem-se $\varphi(s(\alpha_2)) = j$. Denotando $w = \alpha_2 \dots \alpha_n$, temos que $\varphi(s(w)) = \varphi(s(\alpha_2)) = j$, ou seja, $w \in Q_\varphi^j(-, a)$. Como $v = \alpha_1 w$, segue que $v \in w^-$, com isso podemos

concluir que para todo $v \in Q_\varphi^{j+1}(-, a)$, existe $w \in Q_\varphi^j(-, a)$ tal que $v \in w^-$. Portanto podemos escrever o conjunto $Q_\varphi^{j+1}(-, a)$ da seguinte forma:

$$Q_\varphi^{j+1}(-, a) = \bigcup_{w \in Q_\varphi^j(-, a)} w^-$$

□

Definição 5.1.8. Sejam $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero e φ uma função graduação em Q_0 . Então para cada $a \in Q_0$ definimos um complexo T_a^\bullet , em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, da seguinte maneira:

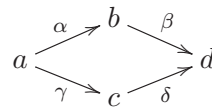
$$T_a^j = \bigoplus_{w \in Q_\varphi^j(-, a)} P_{s(w)}, \quad \text{para todo } j \text{ tal que } Q_\varphi^j(-, a) \neq \emptyset$$

No caso em que $Q_\varphi^j(-, a) = \emptyset$, define-se $T_a^j = 0$. Além disso, os diferenciais $d_a^j : T_a^j \rightarrow T_a^{j+1}$ são matrizes de dimensão $|Q_\varphi^{j+1}(-, a)| \times |Q_\varphi^j(-, a)|$ definidas a partir dos morfismos dados pelas multiplicações das flechas do quiver Q .

Definição 5.1.9. Diremos que f é um morfismo induzido por uma flecha α se ele for dado pela multiplicação de α , isto é, se ele for da forma $f(x) = \alpha x$.

Antes de apresentarmos formalmente como são gerados os diferenciais desses complexos, apresentamos a seguir um exemplo em que são escritos explicitamente todos os complexos gerados através do quiver Q do exemplo (5.1.1).

Exemplo 5.1.10. Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que o quiver Q é dado por:



em que a função graduação $\varphi : Q_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ é dada por:

$$\varphi(d) = 0, \quad \varphi(b) = 1, \quad \varphi(c) = 1 \quad \text{e} \quad \varphi(a) = 2$$

Portanto, pela definição (5.1.8), temos os seguintes complexos em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$:

$$\begin{aligned} T_a^\bullet : \quad & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P_a \longrightarrow 0 \\ T_b^\bullet : \quad & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P_b \xrightarrow{\alpha} P_a \longrightarrow 0 \\ T_c^\bullet : \quad & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P_c \xrightarrow{\gamma} P_a \longrightarrow 0 \\ T_d^\bullet : \quad & 0 \longrightarrow P_d \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}} P_b \oplus P_c \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}} P_a \oplus P_a \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

Neste exemplo, por abuso de linguagem, estamos utilizando a mesma notação das flechas para representar os morfismos induzidos por elas, isto é, os morfismos α, β, γ e δ são os morfismos definidos a partir da multiplicação das respectivas flechas. Além disso, como estamos trabalhando com álgebras de radical quadrado zero, temos que os morfismos representados acima são de fato diferenciais.

Observação 5.1.11. Dado $a \in Q_0$, pela proposição (5.1.7), temos que cada somando de T_a^{j+1} está associado a algum $w \in Q_\varphi^j(-, a)$. Portanto podemos escrever T_a^{j+1} da seguinte maneira:

$$T_a^{j+1} = \bigoplus_{v \in Q_\varphi^{j+1}(-, a)} P_{s(v)} = \bigoplus_{w \in Q_\varphi^j(-, a)} \left(\bigoplus_{v \in w^-} P_{s(v)} \right), \text{ pois } Q_\varphi^{j+1}(-, a) = \bigcup_{w \in Q_\varphi^j(-, a)} w^-$$

Essa caracterização dos somandos de T_a^{j+1} é essencial para que possamos escrever explicitamente os diferenciais do complexo T_a^\bullet . De fato, sabemos que cada $w_i \in \{w \in Q_\varphi^j(-, a); w^- \neq \emptyset\}$ induz um somando $\bigoplus_{v \in w_i^-} P_{s(v)}$ em T_a^{j+1} , neste caso temos um morfismo dado por:

$$f_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{r_i} \end{pmatrix} : P_{s(w_i)} \rightarrow \left(\bigoplus_{v \in w_i^-} P_{s(v)} \right)$$

tal que cada α_t , para $1 \leq t \leq r_i$, é o morfismo induzido pela flecha $\alpha_t : s(v) \rightarrow s(w_i)$, em que $v = \alpha_t w_i$. Portanto o diferencial $d_a^j : T_a^j \rightarrow T_a^{j+1}$ pode ser representado da seguinte forma:

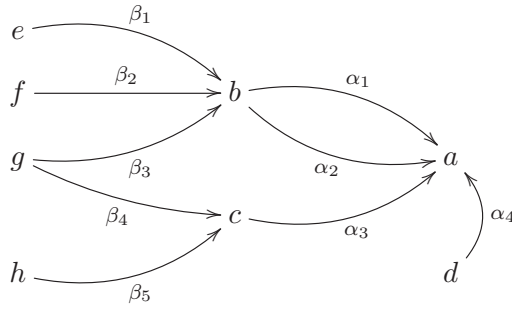
$$d_a^j : \bigoplus_{w \in Q_\varphi^j(-, a)} P_{s(w)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}} \bigoplus_{w \in Q_\varphi^j(-, a)} \left(\bigoplus_{v \in w^-} P_{s(v)} \right)$$

onde $n = \left| \{w \in Q_\varphi^j(-, a); w^- \neq \emptyset\} \right|$ e as colunas nulas estão associadas aos caminhos $w \in Q_\varphi^j(-, a)$

que não induzem somandos em T_a^{j+1} .

É fácil ver que se $w_i^- \neq \emptyset$, então o morfismo f_i existe, pois para cada $v \in w_i^-$, por definição existe $\alpha \in Q_1$ tal que $v = \alpha w_i$, ou seja, existe $\alpha : s(v) \rightarrow s(w_i)$ e portanto existe um morfismo em $\text{Hom}_A(P_{s(w_i)}, P_{s(v)})$ induzido por essa flecha.

Exemplo 5.1.12. Vamos analisar os diferenciais do complexo T_a^\bullet , em que o quiver Q é dado por:



Seja $\varphi : Q_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função gradação tal que:

$$\begin{aligned} \{a\} &\mapsto 0 \\ \{b, c, d\} &\mapsto 1 \\ \{e, f, g, h\} &\mapsto 2 \end{aligned}$$

Neste caso, os conjuntos $Q_\varphi^j(-, a) = \{w \in Q(-, a); \varphi(s(w)) = j\}$ são dados por:

$$\begin{aligned} Q_\varphi^0(-, a) &= \{\epsilon_a\} \\ Q_\varphi^1(-, a) &= \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\} \\ Q_\varphi^2(-, a) &= \{\beta_1\alpha_1, \beta_2\alpha_1, \beta_3\alpha_1, \beta_1\alpha_2, \beta_2\alpha_2, \beta_3\alpha_2, \beta_4\alpha_3, \beta_5\alpha_3\} \\ Q_\varphi^j(-, a) &= \emptyset, \forall j \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1, 2\} \end{aligned}$$

Portanto, pela definição (5.1.8), temos:

$$T_a^j = \bigoplus_{w \in Q_\varphi^j(-, a)} P_{s(w)}, \text{ para todo } j \text{ tal que } Q_\varphi^j(-, a) \neq \emptyset$$

ou seja,

$$T_a^\bullet : 0 \rightarrow \underbrace{P_a}_{T_a^0} \xrightarrow{d_a^0} \underbrace{P_b \oplus P_b \oplus P_c \oplus P_d}_{T_a^1} \xrightarrow{d_a^1} \underbrace{(P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus (P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus (P_g \oplus P_h)}_{T_a^2} \rightarrow 0$$

É fácil ver que o diferencial d_a^0 é da forma:

$$d_a^0 : P_a \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}} P_b \oplus P_b \oplus P_c \oplus P_d$$

Agora vamos construir o diferencial $d_a^1 : T_a^1 \rightarrow T_a^2$. Primeiramente vamos construir os morfismos f_i da observação (5.1.11).

$$f_1 : P_{s(\alpha_1)} \rightarrow \bigoplus_{v \in \alpha_1^-} P_{s(v)} \Rightarrow f_1 : P_b \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}} P_e \oplus P_f \oplus P_g$$

$$f_2 : P_{s(\alpha_2)} \rightarrow \bigoplus_{v \in \alpha_2^-} P_{s(v)} \Rightarrow f_2 : P_b \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}} P_e \oplus P_f \oplus P_g$$

$$f_3 : P_{s(\alpha_3)} \rightarrow \bigoplus_{v \in \alpha_3^-} P_{s(v)} \Rightarrow f_3 : P_c \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta_4 \\ \beta_5 \end{pmatrix}} P_g \oplus P_h$$

$$f_4 : P_{s(\alpha_4)} \rightarrow \bigoplus_{v \in \alpha_4^-} P_{s(v)} \Rightarrow \#f_4, \quad (\alpha_4^- = \emptyset)$$

Portanto temos $d_a^1 : T_a^1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & f_3 & 0 \end{pmatrix}} T_a^2$, isto é,

$$d_a^1 : P_b \oplus P_b \oplus P_c \oplus P_d \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta_1 & & & \\ \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_3 & & & \\ & \beta_1 & & \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 \\ & \beta_3 & & \\ 0 & 0 & \beta_4 & 0 \\ & & \beta_5 & \end{pmatrix}} (P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus (P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus (P_g \oplus P_h)$$

Proposição 5.1.13. *Sejam $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero, Q um quiver graduável e $\varphi : Q_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função gradação. Então, dado $a \in Q_0$, o complexo T_a^\bullet possui as seguintes propriedades:*

(a) $T_a^{\varphi(a)} = P_a$.

(b) Se $k = \max\{\varphi(w); w \in Q(-, a)\}$, então

$$T_a^j \neq 0 \iff \varphi(a) \leq j \leq k$$

ou seja, T_a^\bullet é da forma

$$\dots \longrightarrow 0 \longrightarrow T_a^{\varphi(a)} \longrightarrow T_a^{\varphi(a)+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow T_a^k \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Demonstração. (a) De fato, suponha que $P_{s(w)}$ é somando de $T_a^{\varphi(a)}$ para algum $w \in Q(-, a)$, então pela definição (5.1.8) temos que $\varphi(s(w)) = \varphi(a)$. Portanto segue, pela proposição (5.1.3), que $w = \epsilon_a$ e podemos concluir que $T_a^{\varphi(a)} = P_a$.

(b) O resultado segue diretamente da definição (5.1.8), pois para $j < \varphi(a)$ e $j > k$ temos que $Q_\varphi^j(-, a) = \emptyset$. \square

Proposição 5.1.14. *Seja T_a^\bullet o complexo da definição (5.1.8), então para $j \geq \varphi(a)$ temos que:*

$$\text{Hom}_A(T_a^j, P) \neq 0, \text{ para todo projetivo indecomponível } P \text{ somando de } T_a^{j+1}$$

Demonstração. De fato, temos por definição que $T_a^{j+1} = \bigoplus_{v \in Q_\varphi^{j+1}(-, a)} P_{s(v)}$, portanto, pela proposição (5.1.7), para cada $P_{s(v)}$ somando de T_a^{j+1} , existe $w \in Q_\varphi^j(-, a)$ e uma flecha $\alpha \in Q_1$ tal que $\alpha : s(v) \rightarrow s(w)$. Disto segue que existe um morfismo não nulo em $\text{Hom}_A(P_{s(w)}, P_{s(v)})$, o qual é induzido pela flecha α . Como $w \in Q_\varphi^j(-, a)$, temos que $P_{s(w)}$ é somando de T_a^j , portanto $\text{Hom}_A(T_a^j, P_{s(w)}) \neq 0$. \square

Proposição 5.1.15. *Seja $a \in Q_0$, então para cada diferencial não nulo $d_a^j : T_a^j \rightarrow T_a^{j+1}$, temos que a matriz do diferencial d_a^j possui todas as linhas não nulas, ou seja, todo somando indecomponível de T_a^{j+1} recebe um morfismo não nulo através do diferencial d_a^j .*

Demonstração. Pela definição (5.1.11), temos que:

$$d_a^j : \bigoplus_{w \in Q_\varphi^j(-, a)} P_{s(w)} \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}} \bigoplus_{w \in Q_\varphi^j(-, a)} \left(\bigoplus_{v \in w^-} P_{s(v)} \right)$$

onde cada f_i é um morfismo da forma:

$$f_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{r_i} \end{pmatrix} : P_{s(w_i)} \rightarrow \left(\bigoplus_{v \in w_i^-} P_{s(v)} \right)$$

Então basta mostrar que todas as linhas dos morfismos f_i 's são não nulas. De fato, seja $v \in w_i^-$, para algum $1 \leq i \leq n$. Então existe $\alpha \in Q_1$ tal que $v = \alpha w_i$, ou seja, existe $\alpha : s(v) \rightarrow s(w_i)$ e portanto existe um morfismo em $\text{Hom}_A(P_{s(w_i)}, P_{s(v)})$ induzido por essa flecha. Portanto segue que todas as

linhas do morfismo f_i são não nulas. Com isso, podemos concluir que todas as linhas da matriz d_a^j são não nulas. \square

Proposição 5.1.16. *Sejam $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero, Q um quiver graduável, $a \in Q_0$ e $d_a^j : T_a^j \rightarrow T_a^{j+1}$ um diferencial não nulo do complexo T_a^\bullet . Então para toda matriz M , com entradas em k , tal que $M \cdot d_a^j = 0$, tem-se que $M = 0$.*

Demonstração. De fato, sabemos que o diferencial d_a^j é da forma:

$$d_a^j = \begin{pmatrix} f_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f_n \end{pmatrix}$$

em que cada f_i é dado por:

$$f_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{r_i} \end{pmatrix} : P_{s(w_i)} \rightarrow \bigoplus_{v \in w_i^-} P_{s(v)}$$

Considere escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_{r_i} \in k$ tais que:

$$\sum_{t=1}^{r_i} \lambda_t \alpha_t = 0$$

Como os morfismos $\alpha_1, \dots, \alpha_{r_i}$ são induzidos por flechas distintas do quiver Q , tem-se que:

$$\sum_{t=1}^{r_i} \lambda_t \alpha_t = 0 \iff \lambda_t = 0, \forall t$$

Agora considere $M = (a_{ij})$ uma matriz, com entradas em k , mostremos que se $M \cdot d_a^j = 0$, então todas as linhas de M são nulas. De fato, se $M \cdot d_a^j = 0$, então a multiplicação da primeira linha de M pela primeira coluna de d_a^j deve ser nula, isto é,

$$\sum_{t=1}^{r_1} a_{1t} \alpha_t = 0 \implies a_{11}, \dots, a_{1r_1} = 0$$

Para garantir que as outras entradas da primeira linha da matriz M também são nulas, basta utilizarmos o resultado da proposição (5.1.15), tal proposição nos garante que todas as linhas da matriz d_a^j são não nulas. Portanto ao multiplicarmos a primeira linha da matriz M pelas demais colunas de d_a^j , chegaremos a conclusão de que a primeira linha da matriz M deve ser nula. De maneira análoga, segue que todas as linhas de M são nulas, ou seja, temos que $M = 0$. \square

5.2 Complexo inclinante $T^\bullet = \bigoplus_{a \in Q_0} T_a^\bullet$

Agora vamos mostrar que os complexos da definição (5.1.8) são indecomponíveis na categoria derivada $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, em que $A = kQ/R^2$. Para isso vamos iniciar mostrando que tais complexos são indecomponíveis na categoria dos complexos limitados $\mathcal{C}^b(\text{proj } A)$.

Proposição 5.2.1. *Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é um quiver graduável, com uma função gradação $\varphi : Q_0 \rightarrow \mathbb{Z}$. Então para cada $a \in Q_0$ o complexo da definição (5.1.8) é indecomponível em $\mathcal{C}^b(\text{proj } A)$.*

Demonstração. Seja $a \in Q_0$, então pela proposição (5.1.13) temos que o complexo T_a^\bullet é da seguinte forma:

$$T_a^\bullet : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow T_a^{\varphi(a)} \longrightarrow T_a^{\varphi(a)+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow T_a^k \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Suponha que $T_a^\bullet = X^\bullet \oplus Y^\bullet$, isto é,

$$T_a^\bullet : \dots \longrightarrow 0 \longrightarrow X^{\varphi(a)} \oplus Y^{\varphi(a)} \longrightarrow X^{\varphi(a)+1} \oplus Y^{\varphi(a)+1} \longrightarrow \dots \longrightarrow X^k \oplus Y^k \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

onde os diferenciais $d_a^j : T_a^j \rightarrow T_a^{j+1}$ são da forma $d_a^j = \begin{pmatrix} d_X^j & 0 \\ 0 & d_Y^j \end{pmatrix}$. Temos, pela proposição (5.1.13), que $T_a^{\varphi(a)}$ coincide com o projetivo indecomponível P_a . Portanto podemos supor, sem perda de generalidade, que $X^{\varphi(a)} = P_a$ e $Y^{\varphi(a)} = 0$, isto é,

$$T_a^\bullet : \dots \rightarrow \underbrace{P_a \oplus 0}_{T_a^{\varphi(a)}} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_X^{\varphi(a)} & 0 \\ 0 & d_Y^{\varphi(a)} \end{pmatrix}} \underbrace{X^{\varphi(a)+1} \oplus Y^{\varphi(a)+1}}_{T_a^{\varphi(a)+1}} \rightarrow \dots$$

Temos, pela proposição (5.1.15), que todo somando indecomponível de $T_a^{\varphi(a)+1}$ recebe um morfismo não nulo através do diferencial $d_a^{\varphi(a)} : T_a^{\varphi(a)} \rightarrow T_a^{\varphi(a)+1}$, portanto temos que $Y^{\varphi(a)+1} = 0$, pois caso contrário ele deveria receber um morfismo não nulo de $T_a^{\varphi(a)}$ através do diferencial $d_a^{\varphi(a)}$, porém $d_Y^{\varphi(a)} = 0$. Portanto temos:

$$T_a^\bullet : \dots \rightarrow P_a \oplus 0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_X^{\varphi(a)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} X^{\varphi(a)+1} \oplus 0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_X^{\varphi(a)+1} & 0 \\ 0 & d_Y^{\varphi(a)+1} \end{pmatrix}} X^{\varphi(a)+2} \oplus Y^{\varphi(a)+2} \rightarrow \dots$$

Podemos utilizar novamente a proposição (5.1.15) para mostrar que $Y^{\varphi(a)+2} = 0$, pois ele não recebe morfismos não nulo de $T_a^{\varphi(a)+1}$. Portanto, utilizando argumento análogo, temos que $Y^j = 0$, para todo $j \in \mathbb{Z}$, ou seja, $Y^\bullet = 0$. Disto segue que se $T_a^\bullet = X^\bullet \oplus Y^\bullet$, tem-se $Y^\bullet = 0$, portanto o complexo

T_a^\bullet é indecomponível em $\mathcal{C}^b(\text{proj } A)$. □

O próximo lema apresenta um resultado relacionando os objetos indecomponíveis em $\mathcal{C}^b(\text{proj } A)$ com objetos indecomponíveis de $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$.

Lema 5.2.2. *Sejam A uma álgebra de dimensão finita e P^\bullet um complexo projetivo minimal de $\mathcal{C}^b(\text{proj } A)$. Então P^\bullet é indecomponível em $\mathcal{C}^b(\text{proj } A)$ se, e somente se, P^\bullet é indecomponível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$.*

Demonstração. Ver [31], página 1465. □

Utilizando a proposição (5.2.1) e o lema (5.2.2), podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 5.2.3. *Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é um quiver graduável, com uma função gradação $\varphi : Q_0 \rightarrow \mathbb{Z}$. Então, para cada $a \in Q_0$, o complexo T_a^\bullet é um objeto indecomponível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$.*

Demonstração. A demonstração segue como consequência imediata da proposição (5.2.1) e do lema (5.2.2). □

Agora mostraremos que se $A = kQ/R^2$ é uma k -álgebra de radical quadrado zero, em que Q é um quiver graduável, então os complexos da definição (5.1.8) determinam um complexo inclinante em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$. Antes de demonstrarmos esse fato, vamos enunciar a definição de complexo inclinante na categoria derivada $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, tal definição pode ser encontrada em [26].

Definição 5.2.4. Um objeto T^\bullet na categoria derivada $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ é um complexo inclinante se:

- (i) $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T^\bullet, T^\bullet[i]) = 0, \forall i \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
- (ii) $\text{add}(T^\bullet)$ gera $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ como categoria triangulada.

Aqui $\text{add}(T^\bullet)$ consiste em todos os somandos diretos de somas finitas de cópias de T^\bullet . Dizemos que uma classe de objetos gera uma categoria triangulada \mathcal{C} como uma categoria triangulada se não existir subcategoria triangulada plena e própria de \mathcal{C} , fechada para isomorfismos, que contenha tal classe de objetos.

Um objeto $T^\bullet \in \mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ que satisfaz a condição (i) acima é chamado complexo inclinante parcial. A próxima proposição será muito útil para cálculos posteriores envolvendo complexos inclinantes, uma vez que podemos trocar a condição (ii) da definição de complexo inclinante apresentada anteriormente.

Proposição 5.2.5. *Seja $T^\bullet \in \mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ um complexo inclinante parcial livre de multiplicidade. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) $\text{add}(T^\bullet)$ gera $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ como categoria triangulada;

(b) O número de somandos diretos indecomponíveis de T^\bullet coincide com o posto do grupo de Grothendieck $K_0(\text{mod } A)$.

Demonstração. Ver [25], página 84. □

Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é um quiver graduável, com uma função gradação $\varphi : Q_0 \rightarrow \mathbb{Z}$. Então podemos definir um complexo dado por:

$$T^\bullet = \bigoplus_{a \in Q_0} T_a^\bullet$$

em que cada T_a^\bullet é o complexo da definição (5.1.8). A seguir iremos mostrar que T^\bullet é um complexo inclinante em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, para isso vamos iniciar apresentando alguns lemas que irão nos auxiliar nesse resultado.

Lema 5.2.6. *Considere $A = kQ/R^2$ uma k -álgebra de radical quadrado zero, em que Q é um quiver graduável. Então para $a, b \in Q_0$, não necessariamente distintos, temos:*

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet[n]) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$$

Demonstração. Suponha que existe $\phi^\bullet : T_a^\bullet \rightarrow T_b^\bullet[n]$ não nulo, para algum $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$.

$$\begin{array}{ccccccc} T_a^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & T_a^{j-1} & \longrightarrow & T_a^j & \longrightarrow & T_a^{j+1} & \longrightarrow & \cdots \\ \phi^\bullet \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ T_b^\bullet[n] : & \cdots & \longrightarrow & T_b^{j+n-1} & \longrightarrow & T_b^{j+n} & \longrightarrow & T_b^{j+n+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Como ϕ^\bullet é não nulo, temos que $\phi^j : T_a^j \rightarrow T_b^{j+n}$ é não nulo para algum j . Portanto existem P_c e P_d somandos indecomponíveis de T_a^j e T_b^{j+n} , respectivamente, tais que $\text{Hom}_A(P_c, P_d) \neq 0$. Por definição, temos que $\varphi(c) = j$ e $\varphi(d) = j + n$, como por hipótese $n \neq 0$, temos que $c \neq d$ e pelo Lema (5.1.4), segue que $\varphi(d) = \varphi(c) + 1$, isto é,

$$\text{Hom}_A(P_c, P_d) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(d) = \varphi(c) + 1 \quad \Rightarrow \quad j + n = j + 1 \quad \Rightarrow \quad n = 1$$

o que contradiz o fato de $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$. Portanto temos que para todo $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, temos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet[n]) = 0$ para quaisquer $a, b \in Q_0$. □

O próximo lema nos garante que se $A = kQ/R^2$, então dados $a, b \in Q_0$, todo morfismo $f \in$

$\text{Hom}_A(P_b, P_a)$ pode ser escrito como combinação linear dos morfismos induzimos pelas flechas de Q , isto é, morfismos $f_i : P_b \rightarrow P_a$ tais que $f(x) = \alpha_i x$, para alguma flecha $\alpha_i : a \rightarrow b$. Tal resultado é necessário para provarmos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet[1]) = 0$.

Lema 5.2.7. *Sejam $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero e $a, b \in Q_0$. Então o conjunto formado pelos morfismos de $\text{Hom}_A(P_b, P_a)$, que são induzidos pelas flechas $\alpha : a \rightarrow b$ de Q_1 , forma uma base para $\text{Hom}_A(P_b, P_a)$.*

Demonstração. De fato, como $A = kQ/R^2$, temos por definição que:

$$P_a = \epsilon_a A = \langle \{\alpha \in Q_1; s(\alpha) = a\} \cup \{\epsilon_a\} \rangle \quad \text{e} \quad P_b = \epsilon_b A = \langle \{\beta \in Q_1; s(\beta) = b\} \cup \{\epsilon_b\} \rangle$$

Seja $f \in \text{Hom}_A(P_b, P_a)$, então para todo $x \in P_b$, temos:

$$\begin{aligned} f : P_b &\rightarrow P_a \\ x &\mapsto f(x) = f(\epsilon_b x) = f(\epsilon_b)x \end{aligned}$$

Note que para todo $x \neq \epsilon_b$, segue que $f(x) = 0$. De fato,

$$f(x) = \underbrace{f(\epsilon_b)}_{\in P_a} x = \left(\sum_i \lambda_i \alpha_i + \lambda e_a \right) x = \sum_i \lambda_i \alpha_i x + \lambda e_a x$$

porém, temos que $\lambda e_a x = 0$, pois $t(\epsilon_a) \neq s(x)$, além disso:

$$\alpha_i x = \begin{cases} 0, & \text{para } t(\alpha_i) \neq b = s(x) \\ 0, & \text{para } t(\alpha_i) = b, \text{ pois, neste caso, } \alpha_i x \in R^2 \end{cases}$$

Com isso, podemos concluir que:

$$f \in \text{Hom}_A(P_b, P_a) \quad \Rightarrow \quad f(x) = 0, \quad \forall x \neq \epsilon_b$$

Além disso, temos:

$$f(\epsilon_b) = f(\epsilon_b^2) = f(\epsilon_b)\epsilon_b = \left(\sum_i \lambda_i \alpha_i + \lambda e_a \right) \epsilon_b = \sum_i \lambda_i \alpha_i \epsilon_b + \underbrace{\lambda e_a \epsilon_b}_0 = \sum_i \lambda_i \alpha_i \epsilon_b$$

como $\alpha_i \epsilon_b = 0$, para $t(\alpha_i) \neq b = s(\epsilon_b)$, temos que todo $f \in \text{Hom}_A(P_b, P_a)$ é da forma:

$$\begin{cases} f(x) = 0, & \forall x \neq \epsilon_b \\ f(\epsilon_b) = \sum_i \lambda_i \alpha_i, & \text{para } \alpha_i : a \rightarrow b \text{ em } Q_1 \end{cases}$$

isto é, todo morfismo $f \in \text{Hom}_A(P_b, P_a)$ pode ser escrito como combinação linear dos morfismos dados por:

$$\begin{aligned} f_i : P_b &\rightarrow P_a \\ f(x) &\mapsto \alpha_i x \end{aligned}$$

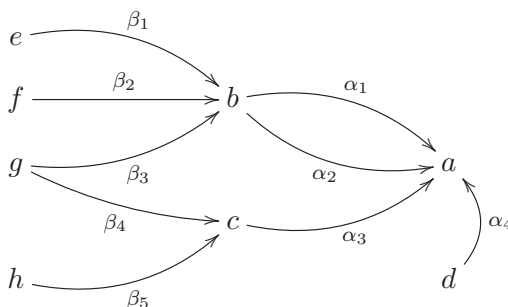
em que $\alpha_i : a \rightarrow b$ pertence a Q_1 . Neste caso, temos que f_i é um morfismo induzido por α_i . Agora, note que:

$$\dim_k(\epsilon_a A \epsilon_b) = \dim_k(\text{Hom}_A(\epsilon_b A, \epsilon_a A)) = \dim_k(\text{Hom}_A(P_b, P_a))$$

Disto segue que os morfismos $f_{i's}$, induzidos pelas flechas $\alpha_{i's} : a \rightarrow b$ do quiver Q , formam uma base para $\text{Hom}_A(P_b, P_a)$. □

Apresentamos, no próximo exemplo, uma maneira de utilizarmos o lema anterior para mostrar que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_a^\bullet[1]) = 0$, em que A é a álgebra do exemplo (5.1.12).

Exemplo 5.2.8. Considere o complexo T_a^\bullet do exemplo (5.1.12), cujo quiver Q é dado por:



Vamos utilizar o lema (5.2.7) para mostrar que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_a^\bullet[1]) = 0$. De fato, lembremos que

$$T_a^\bullet : 0 \rightarrow \underbrace{P_a}_{T_a^0} \xrightarrow{d_a^0} \underbrace{P_b \oplus P_b \oplus P_c \oplus P_d}_{T_a^1} \xrightarrow{d_a^1} \underbrace{(P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus (P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus (P_g \oplus P_h)}_{T_a^2} \rightarrow 0$$

em que,

$$d_a^0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad d_a^1 = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & & \\ \beta_2 & 0 & 0 & 0 & \\ \beta_3 & & & & \\ & \beta_1 & & & \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & \\ & \beta_3 & & & \\ 0 & 0 & \beta_4 & 0 & \\ & & \beta_5 & & \end{pmatrix}$$

Novamente, por abuso de linguagem, iremos utilizar a mesma notação das flechas do quiver Q para representar os morfismos induzidos por elas. Suponha que existe um morfismo $g^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_a^\bullet[1])$,

então temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_a^\bullet : 0 & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{d_a^0} & P_b^2 \oplus P_c \oplus P_d & \xrightarrow{d_a^1} & (P_e \oplus P_f \oplus P_g)^2 \oplus (P_g \oplus P_h) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow g^0 & & \downarrow g^1 & & \downarrow g^2 \\
 T_a^\bullet[1] : P_a & \xrightarrow{-d_a^0} & P_b^2 \oplus P_c \oplus P_d & \xrightarrow{-d_a^1} & (P_e \oplus P_f \oplus P_g)^2 \oplus (P_g \oplus P_h) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

Mostremos que g^\bullet é homotópico a zero, isto é, mostremos que existem δ^0, δ^1 e δ^2 tais que:

$$g^0 = -d_a^0 \circ \delta^0 + \delta^1 \circ d_a^0 \quad \text{e} \quad g^1 = -d_a^1 \circ \delta^1 + \delta^2 \circ d_a^1$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_a^\bullet : 0 & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{d_a^0} & P_b^2 \oplus P_c \oplus P_d & \xrightarrow{d_a^1} & (P_e \oplus P_f \oplus P_g)^2 \oplus (P_g \oplus P_h) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow g^0 & & \downarrow g^1 & & \downarrow g^2 \\
 T_a^\bullet[1] : P_a & \xrightarrow{-d_a^0} & P_b^2 \oplus P_c \oplus P_d & \xrightarrow{-d_a^1} & (P_e \oplus P_f \oplus P_g)^2 \oplus (P_g \oplus P_h) & \longrightarrow & 0 \longrightarrow 0.
 \end{array}$$

δ^0 (dashed arrow from P_a to P_a in the second row)
 δ^1 (dashed arrow from $P_b^2 \oplus P_c \oplus P_d$ to $P_b^2 \oplus P_c \oplus P_d$ in the second row)
 δ^2 (dashed arrow from $(P_e \oplus P_f \oplus P_g)^2 \oplus (P_g \oplus P_h)$ to $(P_e \oplus P_f \oplus P_g)^2 \oplus (P_g \oplus P_h)$ in the second row)

Sem perda de generalidade, vamos definir δ^0 como sendo a identidade. Uma vez definido δ^0 temos o seguinte morfismo:

$$g^0 + d_a^0 \circ \delta^0 = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{pmatrix} : P_a \rightarrow P_b^2 \oplus P_c \oplus P_d$$

em que $\phi_1, \phi_2 \in \text{Hom}_A(P_a, P_b)$. Temos, pelo lema (5.2.7), que os morfismos induzidos pelas flechas α_1 e α_2 formam uma base para $\text{Hom}_A(P_a, P_b)$, portanto temos que existem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ tais que:

$$\phi_1 = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 \quad \text{e} \quad \phi_2 = \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2$$

Analogamente, existem escalares ρ e η tais que:

$$\phi_3 = \rho \alpha_3 \quad \text{e} \quad \phi_4 = \eta \alpha_4$$

ou seja,

$$g^0 + d_a^0 \circ \delta^0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 \\ \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 \\ \rho \alpha_3 \\ \eta \alpha_4 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ \mu_1 & \mu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \end{pmatrix}}_{\delta^1} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix}}_{d_a^0}$$

Portanto existe δ^1 tal que:

$$g^0 = -d_a^0 \circ \delta^0 + \delta^1 \circ d_a^0$$

Procedendo de maneira análoga para $g^1 + d_a^1 \circ \delta^1$, temos:

$$g^1 + d_a^1 \circ \delta^1 = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & 0 & 0 \\ \phi_{21} & \phi_{22} & 0 & 0 \\ \phi_{31} & \phi_{32} & 0 & 0 \\ \phi_{41} & \phi_{42} & 0 & 0 \\ \phi_{51} & \phi_{52} & 0 & 0 \\ \phi_{61} & \phi_{62} & 0 & 0 \\ \phi_{71} & \phi_{72} & \phi_{73} & 0 \\ 0 & 0 & \phi_{83} & 0 \end{pmatrix} : P_b^2 \oplus P_c \oplus P_d \rightarrow (P_e \oplus P_f \oplus P_g)^2 \oplus (P_h \oplus P_h)$$

Note que, como $\text{Hom}_A(P_d, T_a^2) = 0$, temos que $g^1 + d_a^1 \circ \delta^1$ possui uma coluna nula. Agora, pelo lema (5.2.7) podemos reescrever o morfismo $g^1 + d_a^1 \circ \delta^1$ como:

$$g^1 + d_a^1 \circ \delta^1 = \begin{pmatrix} \lambda'_1 \beta_1 & \mu'_1 \beta_1 & 0 & 0 \\ \lambda'_2 \beta_2 & \mu'_2 \beta_2 & 0 & 0 \\ \lambda'_3 \beta_3 & \mu'_3 \beta_3 & 0 & 0 \\ \lambda'_4 \beta_1 & \mu'_4 \beta_1 & 0 & 0 \\ \lambda'_5 \beta_2 & \mu'_5 \beta_2 & 0 & 0 \\ \lambda'_6 \beta_3 & \mu'_6 \beta_3 & 0 & 0 \\ \lambda'_7 \beta_3 & \mu'_7 \beta_3 & \rho'_1 \beta_4 & 0 \\ 0 & 0 & \rho'_2 \beta_5 & 0 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda'_1 & 0 & 0 & \mu'_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda'_2 & 0 & 0 & \mu'_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'_3 & 0 & 0 & \mu'_3 & 0 & 0 \\ \lambda'_4 & 0 & 0 & \mu'_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda'_5 & 0 & 0 & \mu'_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'_6 & 0 & 0 & \mu'_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda'_7 & 0 & 0 & \mu'_7 & \rho'_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \rho'_2 \end{pmatrix}}_{\delta^2} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_2 & 0 & 0 & 0 \\ \beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_4 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_5 & 0 \end{pmatrix}}_{d_a^1}$$

Portanto existe δ^2 tal que:

$$g^1 = -d_a^1 \circ \delta^1 + \delta^2 \circ d_a^1$$

Disto segue que o morfismo $g^\bullet : T_a^\bullet \rightarrow T_a^\bullet[1]$ é homotópico a zero. Como isso vale para qualquer $g^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_a^\bullet[1])$, temos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_a^\bullet[1]) = 0$.

Lema 5.2.9. *Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é um quiver graduável. Então para cada $a \in Q_0$, tem-se:*

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_a^\bullet[1]) = 0$$

em que T_a^\bullet é o complexo da definição (5.1.8).

Demonstração. Seja $\varphi : Q_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ uma função gradação e suponha, sem perda de generalidade, que $\varphi(a) = 0$, então temos que o complexo T_a^\bullet é dado por:

$$T_a^\bullet : \quad 0 \longrightarrow P_a \xrightarrow{d_a^0} T_a^1 \xrightarrow{d_a^1} T_a^2 \xrightarrow{d_a^2} T_a^3 \xrightarrow{d_a^3} \dots$$

Suponha que existe $g^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_a^\bullet[1])$, isto é,

$$\begin{array}{ccccccccccc} T_a^\bullet : & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{d_a^0} & T_a^1 & \xrightarrow{d_a^1} & T_a^2 & \xrightarrow{d_a^2} & T_a^3 & \longrightarrow & \dots \\ g^\bullet \downarrow & & & \downarrow g^{-1} & & \downarrow g^0 & & \downarrow g^1 & & \downarrow g^2 & & \downarrow g^3 & & \\ T_a^\bullet[1] : & \dots & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{-d_a^0} & T_a^1 & \xrightarrow{-d_a^1} & T_a^2 & \xrightarrow{-d_a^2} & T_a^3 & \xrightarrow{-d_a^3} & T_a^4 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Mostremos que, para todo $j \in \mathbb{Z}$, existem morfismos δ^j e δ^{j+1} tais que:

$$g^j = -d_a^j \circ \delta^j + \delta^{j+1} \circ d_a^j$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} T_a^\bullet : & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{d_a^0} & T_a^1 & \xrightarrow{d_a^1} & T_a^2 & \xrightarrow{d_a^2} & T_a^3 & \longrightarrow & \dots \\ g^\bullet \downarrow & & & \downarrow g^{-1} & & \downarrow g^0 & & \downarrow g^1 & & \downarrow g^2 & & \downarrow g^3 & & \\ T_a^\bullet[1] : & \dots & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{-d_a^0} & T_a^1 & \xrightarrow{-d_a^1} & T_a^2 & \xrightarrow{-d_a^2} & T_a^3 & \xrightarrow{-d_a^3} & T_a^4 & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

(Note: In the original image, dashed arrows labeled δ^j connect P_a to T_a^j and T_a^j to T_a^{j+1} in the second row.)

Definindo, sem perda de generalidade, $\delta^0 : P_a \rightarrow P_a$ como sendo a identidade, mostremos por indução, que dado $\delta^j : T_a^j \rightarrow T_a^j$ existe um morfismo δ^{j+1} que satisfaz a equação acima. De fato, suponha que existe o morfismo δ^j , então temos:

$$g^j + d_a^j \circ \delta^j \in \text{Hom}_A(T_a^j, T_a^{j+1})$$

Por definição, sabemos que $T_a^j = \bigoplus_{w \in Q_\varphi^j(-, a)} P_{s(w)}$ e $T_a^{j+1} = \bigoplus_{v \in Q_\varphi^{j+1}(-, a)} P_{s(v)}$, portanto se $n =$

$|Q_\phi^j(-, a)|$ e $m = |Q_\phi^{j+1}(-, a)|$, temos:

$$g^j + d_a^j \circ \delta^j = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{m1} & \cdots & \phi_{mn} \end{pmatrix} : \bigoplus_{w \in Q_\phi^j(-, a)} P_{s(w)} \rightarrow \bigoplus_{v \in Q_\phi^{j+1}(-, a)} P_{s(v)}$$

tal que, para $1 \leq i \leq n$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \phi_{1i} \\ \vdots \\ \phi_{mi} \end{pmatrix} : P_{s(w_i)} \rightarrow \bigoplus_{v \in Q_\phi^{j+1}(-, a)} P_{s(v)}$$

Note que, se $\phi_{ri} : P_{s(w_i)} \rightarrow P_{s(v_r)}$ é não nulo, para algum $1 \leq r \leq m$, então existe uma flecha $\alpha : s(v_r) \rightarrow s(w_i)$ em Q . Logo, existe um caminho $v = \alpha w_i \in Q_\phi^{j+1}(-, a)$ tal que $s(v) = s(v_r)$, portanto o projetivo $P_{s(v_r)}$ é somando de $\left(\bigoplus_{v \in w_i^-} P_{s(v)}\right)$. Além disso, pela definição (5.1.11), o diferencial $d_a^j : T_a^j \rightarrow T_a^{j+1}$ é definido através dos morfismos f_i^s , os quais são dados por:

$$f_i = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\ell_i} \end{pmatrix} : P_{s(w_i)} \rightarrow \bigoplus_{v \in w_i^-} P_v$$

Note que, pelo lema (5.2.7) e pela definição de f_i , temos que os morfismos $\alpha_1, \dots, \alpha_{\ell_i}$ formam uma base para o $\text{Hom}_A\left(P_{s(w_i)}, \bigoplus_{v \in w_i^-} P_v\right)$. Desta maneira, para cada $\phi_{ri} : P_{s(w_i)} \rightarrow P_{s(v_r)}$, com $1 \leq r \leq m$, tem-se

$$\phi_{ri} = \sum_{t=1}^{\ell_i} \lambda_t \alpha_t \quad \Rightarrow \quad \phi_{ri} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_{\ell_i} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\ell_i} \end{pmatrix}$$

Denotando $\Lambda_{ri} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_{\ell_i} \end{pmatrix}$, tem-se

$$\phi_{ri} = \Lambda_{ri} \cdot f_i$$

Portanto existem $\Lambda_{1i}, \dots, \Lambda_{mi}$ tais que:

$$\begin{pmatrix} \phi_{1i} \\ \vdots \\ \phi_{mi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{1i} \\ \vdots \\ \Lambda_{mi} \end{pmatrix} \cdot f_i$$

Sem perda de generalidade, suponha que o diferencial d_a^j não possui colunas nulas, ou seja, que para cada $P_{s(w)}$ somando indecomponível de T_a^j , temos $\text{Hom}_A(P_{s(w)}, T_a^{j+1}) \neq 0$. Neste caso, realizando uma construção análoga para todos os somandos $P_{s(w)}$ de T_a^j , tem-se:

$$g^j + d_a^j \circ \delta^j = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{m1} & \cdots & \phi_{mn} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \cdots & \Lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{m1} & \cdots & \Lambda_{mn} \end{pmatrix}}_{\delta^{j+1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} f_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f_n \end{pmatrix}}_{d_a^j}$$

Portanto segue que existe δ^{j+1} tal que $g^j + d_a^j \circ \delta^j = \delta^{j+1} \circ d_a^j$, ou seja, temos:

$$g^j = -d_a^j \circ \delta^j + \delta^{j+1} \circ d_a^j$$

No caso em que d_a^j possui k colunas nulas, temos que existem k somandos indecomponíveis $P_{s(w_i)}$ de T_a^j tais que $\text{Hom}_A(P_{s(w_i)}, T_a^{j+1}) = 0$, portanto o morfismo $g^j + d_a^j \circ \delta^j$ é dado por:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \phi_{11} & \cdots & \phi_{1(n-k)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{m1} & \cdots & \phi_{m(n-k)} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right) = \underbrace{\begin{pmatrix} \Lambda_{11} & \cdots & \Lambda_{1(n-k)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{m1} & \cdots & \Lambda_{m(n-k)} \end{pmatrix}}_{\delta^{j+1}} \cdot \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc} f_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f_{(n-k)} & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)}_{d_a^j}$$

Portanto temos por indução que para todo $j \geq 0$, existem δ^j e δ^{j+1} tais que $g^j = -d_a^j \circ \delta^j + \delta^{j+1} \circ d_a^j$. Por hipótese $\varphi(a) = 0$, então temos $g^j = 0$, para todo $j < 0$, disto segue que g^\bullet é homotópico a zero. Com isso, concluímos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_a^\bullet[1]) = 0$, para todo $a \in Q_0$. \square

Lema 5.2.10. *Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é um quiver graduável. Então para todo $a, b \in Q_0$, não necessariamente distintos, tem-se:*

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet[n]) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

Demonstração. Temos, pelo lema (5.2.6), que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet[n]) = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$, portanto resta mostrar que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet[1]) = 0$. Porém, pelo lema (5.2.9), sabemos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_a^\bullet[1]) = 0$, para todo $a \in Q_0$. Então mostremos que para $a \neq b$ também segue que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet[1]) = 0$.

De fato, seja $g^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet[1])$, então temos:

$$\begin{array}{ccccccc} T_a^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & T_a^{j-1} & \xrightarrow{d_a^{j-1}} & T_a^j & \xrightarrow{d_a^j} & T_a^{j+1} & \xrightarrow{d_a^{j+1}} & \cdots \\ g^\bullet \downarrow & & & g^{j-1} \downarrow & & g^j \downarrow & & g^{j+1} \downarrow & & \\ T_b^\bullet[1] : & \cdots & \longrightarrow & T_b^j & \xrightarrow{-d_b^j} & T_b^{j+1} & \xrightarrow{-d_b^{j+1}} & T_b^{j+2} & \xrightarrow{-d_b^{j+2}} & \cdots \end{array}$$

Se $g^j = 0$, para todo $j \in \mathbb{Z}$, temos que $g^\bullet = 0$. Suponha que existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $g^j \neq 0$ e $g^i = 0$, $\forall i < j$. Como $g^j \in \text{Hom}_A(T_a^j, T_b^{j+1})$, temos:

$$g^j : \underbrace{\bigoplus_{w \in Q_\varphi^j(-, a)} P_{s(w)}}_{T_a^j} \rightarrow \underbrace{\bigoplus_{u \in Q_\varphi^{j+1}(-, b)} P_{s(u)}}_{T_b^{j+1}}$$

Se g^j é não nulo, então existe $P_{s(u)}$ somando de T_b^{j+1} tal que $\text{Hom}_A(T_a^j, P_{s(u)}) \neq 0$. Portanto existe algum $P_{s(w)}$ somando de T_a^j tal que $\text{Hom}_A(P_{s(w)}, P_{s(u)}) \neq 0$. Neste caso, pelo lema (5.1.4), existe uma flecha $\alpha : s(u) \rightarrow s(w)$ em Q_1 , disto segue que existe um caminho $v = \alpha w \in Q_\varphi^{j+1}(-, a)$ tal que $v : s(u) \rightsquigarrow a$, ou seja, $P_{s(u)} = P_{s(v)}$. Portanto segue que $P_{s(u)}$ é somando de $(\bigoplus_{v \in w^-} P_{s(v)})$. Além disso, por definição, temos:

$$T_a^{j+1} = \bigoplus_{w \in Q_\varphi^j(-, a)} \left(\bigoplus_{v \in w^-} P_{s(v)} \right)$$

portanto segue que $P_{s(u)}$ também é somando de T_a^{j+1} . Com isso podemos concluir que para todo $P_{s(u)}$ somando indecomponível de T_b^{j+1} , tal que $\text{Hom}_A(T_a^j, P_{s(u)}) \neq 0$, tem-se que $P_{s(u)}$ é somando de T_a^{j+1} . Portanto podemos escrever T_b^{j+1} da seguinte maneira:

$$T_b^{j+1} = X^{j+1} \oplus Y^{j+1}$$

em que X^{j+1} é constituído por todos os somandos indecomponíveis $P_{s(u)}$ de T_b^{j+1} tais que $\text{Hom}_A(T_a^j, P_{s(u)}) \neq 0$, ou seja, X^{j+1} é formado por somas de somandos de T_a^{j+1} . Neste caso, temos que todo morfismo não nulo $g^j \in \text{Hom}_A(T_a^j, T_b^{j+1})$ é da forma:

$$g^j = \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} : T_a^j \rightarrow X^{j+1} \oplus Y^{j+1}$$

Portanto temos que o morfismo $g^\bullet : T_a^\bullet \rightarrow T_b^\bullet[1]$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_a^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & T_a^{j-1} & \xrightarrow{d_a^{j-1}} & T_a^j & \xrightarrow{d_a^j} & T_a^{j+1} & \xrightarrow{d_a^{j+1}} & \cdots \\
 \downarrow g^\bullet & & & \downarrow 0 & & \downarrow g^j & & \downarrow g^{j+1} & & \\
 T_b^\bullet[1] : & \cdots & \longrightarrow & \underbrace{X^j \oplus Y^j}_{T_b^j} & \xrightarrow{-d_b^j} & \underbrace{X^{j+1} \oplus Y^{j+1}}_{T_b^{j+1}} & \xrightarrow{-d_b^{j+1}} & \underbrace{X^{j+2} \oplus Y^{j+2}}_{T_b^{j+2}} & \xrightarrow{-d_b^{j+2}} & \cdots
 \end{array}$$

Vamos definir $\delta^i : T_a^i \rightarrow T_b^i$, para todo $i \leq j$, como sendo o morfismo nulo. Portanto temos que:

$$g^i = -d_b^i \circ \delta^i + \delta^{i+1} \circ d_a^i, \quad \forall i < j$$

Agora mostremos que dado $\delta^i : T_a^i \rightarrow T_b^i$ existe um morfismo $\delta^{i+1} : T_a^{i+1} \rightarrow T_b^{i+1}$ tal que:

$$g^i = -d_b^i \circ \delta^i + \delta^{i+1} \circ d_a^i, \quad \forall i \geq j$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_a^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & T_a^{j-1} & \xrightarrow{d_a^{j-1}} & T_a^j & \xrightarrow{d_a^j} & T_a^{j+1} & \xrightarrow{d_a^{j+1}} & \cdots \\
 \downarrow g^\bullet & & & \downarrow 0 & & \downarrow g^j & & \downarrow g^{j+1} & & \\
 T_b^\bullet[1] : & \cdots & \longrightarrow & \underbrace{X^j \oplus Y^j}_{T_b^j} & \xrightarrow{-d_b^j} & \underbrace{X^{j+1} \oplus Y^{j+1}}_{T_b^{j+1}} & \xrightarrow{-d_b^{j+1}} & \underbrace{X^{j+2} \oplus Y^{j+2}}_{T_b^{j+2}} & \xrightarrow{-d_b^{j+2}} & \cdots
 \end{array}$$

δ^j (dashed arrow from T_a^j to T_b^j)
 δ^{j+1} (dashed arrow from T_a^{j+1} to T_b^{j+1})

De fato, sabemos que existe $\delta^j : T_a^j \rightarrow T_b^j$, então temos:

$$g^j + d_b^j \circ \delta^j \in \text{Hom}_A(T_a^j, T_b^{j+1})$$

isto é,

$$g^j + d_b^j \circ \delta^j = \begin{pmatrix} \mu^j \\ 0 \end{pmatrix} : T_a^j \rightarrow X^{j+1} \oplus Y^{j+1}$$

Como $\mu^j \in \text{Hom}_A(T_a^j, X^{j+1})$, e por definição todo somando indecomponível de X^{j+1} é somando de T_a^{j+1} , temos que μ^j se fatora pelo diferencial $d_a^j : T_a^j \rightarrow T_a^{j+1}$, pois as componentes de d_a^j formam uma base para $\text{Hom}_A(T_a^j, T_a^{j+1})$. Portanto segue que existe $\eta^{j+1} : T_a^{j+1} \rightarrow X^{j+1}$ tal que $\mu^j = \eta^{j+1} \circ d_a^j$, ou

seja, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} T_a^j & \xrightarrow{d_a^j} & T_a^{j+1} \\ \mu^j \downarrow & \nearrow \eta^{j+1} & \\ X^{j+1} & & \end{array}$$

Com isso podemos concluir que existe $\delta^{j+1} = \begin{pmatrix} \eta^{j+1} \\ 0 \end{pmatrix} : T_a^{j+1} \rightarrow T_b^{j+1}$ tal que:

$$g^j + d_b^j \circ \delta^j = \delta^{j+1} \circ d_a^j$$

ou seja,

$$g^j = -d_b^j \circ \delta^j + \delta^{j+1} \circ d_a^j$$

Portanto mostramos que se existe $\delta^j : T_a^j \rightarrow T_b^j$, então existe δ^{j+1} tal que $g^j = -d_b^j \circ \delta^j + \delta^{j+1} \circ d_a^j$. Seguido por indução, temos que, para todo $i \geq j$, existem δ^i e δ^{i+1} tais que:

$$g^i = -d_b^i \circ \delta^i + \delta^{i+1} \circ d_a^i$$

Portanto o morfismo $g^\bullet : T_a^\bullet \rightarrow T_b^\bullet[1]$ é homotópico a zero. Como g^\bullet é um elemento arbitrário de $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet[1])$, temos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet[1]) = 0$. \square

Note que o lema (5.2.10) nos garante que o complexo $T^\bullet = \bigoplus_{a \in Q} T_a^\bullet$ satisfaz a propriedade (i) da definição (5.2.4). Portanto agora devemos mostrar que tal complexo também satisfaz a condição (ii), porém temos pela proposição (5.2.5) que isso é equivalente a condição de que o número de somandos diretos indecomponíveis de T^\bullet coincida com o posto do grupo de Grothendieck $K_0(\text{mod } A)$. Porém essa condição é equivalente ao fato de o número de somandos diretos indecomponíveis (não isomorfos) de T^\bullet coincidir com a quantidade de elementos de Q_0 . Sabemos, pelo teorema (5.2.3), que para cada $a \in Q_0$ os complexos T_a^\bullet são indecomponíveis em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, portanto resta mostrar que tais complexos são não isomorfos. Para nos auxiliar neste resultado, iremos utilizar o próximo lema.

Lema 5.2.11. *Considere A uma álgebra de dimensão finita e sejam P^\bullet e Q^\bullet dois complexos projetivos minimais de $\mathcal{C}^b(\text{proj } A)$. Então $P^\bullet \cong Q^\bullet$ em $\mathcal{C}^b(\text{proj } A)$ se, e somente se, $P^\bullet \cong Q^\bullet$ em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$.*

Demonstração. Ver [31], página 1465. \square

Portanto, para mostrarmos que os somandos indecomponíveis de T^\bullet são não isomorfos em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, basta mostrarmos que são não isomorfos em $\mathcal{C}^b(\text{proj } A)$.

Lema 5.2.12. *Dados $a, b \in Q_0$, tem-se que $T_a^\bullet \cong T_b^\bullet$ em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ se, e somente se, $a = b$.*

Demonstração. É fácil ver que se $a = b$, temos $T_a^\bullet \cong T_b^\bullet$. Mostremos agora que se $a \neq b$, então os complexos T_a^\bullet e T_b^\bullet não são isomorfos em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$. De fato, pelo lema (5.2.11), basta mostrarmos que tais complexos não são isomorfos em $\mathcal{C}^b(\text{proj } A)$. Considere um morfismo arbitrário $g^\bullet : T_a^\bullet \rightarrow T_b^\bullet$ e suponha, sem perda de generalidade, que $\varphi(a) \geq \varphi(b)$. Então, pela proposição (5.1.13), temos que g^\bullet é dado por:

$$\begin{array}{ccccccccccc} T_a^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & P_a & \longrightarrow & T_a^{\varphi(a)+1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & & \downarrow g^{\varphi(b)} & & \downarrow g^{\varphi(b)+1} & & & & \downarrow g^{\varphi(a)} & & \downarrow g^{\varphi(a)+1} & & \\ T_b^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & P_b & \longrightarrow & T_b^{\varphi(b)+1} & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & T_b^{\varphi(a)} & \longrightarrow & T_b^{\varphi(a)+1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Note que se $\varphi(a) > \varphi(b)$, tem-se que $g^{\varphi(b)} : 0 \rightarrow P_b$. No caso em que $\varphi(a) = \varphi(b)$, temos $g^{\varphi(b)} : P_a \rightarrow P_b$. Portanto em ambos os casos o morfismo $g^{\varphi(b)}$ não é um isomorfismo, pois por hipótese temos $a \neq b$. Disto segue que $g^\bullet : T_a^\bullet \rightarrow T_b^\bullet$ não é um isomorfismo em $\mathcal{C}^b(\text{proj } A)$, pois caso contrário deveríamos ter que g^j é isomorfismo para todo $j \in \mathbb{Z}$. Como g^\bullet foi tomado de maneira arbitrária, segue que $T_a^\bullet \cong T_b^\bullet$ em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ se, e somente se, $a = b$. \square

Teorema 5.2.13. *Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é um quiver graduável. Então o complexo definido por $T^\bullet = \bigoplus_{a \in Q} T_a^\bullet$ é um complexo inclinante em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, em que cada T_a^\bullet é o complexo da definição (5.1.8).*

Demonstração. Pela proposição (5.2.5), para mostrar que T^\bullet é complexo inclinante, basta provar que ele satisfaz as seguintes condições:

- (i) $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T^\bullet, T^\bullet[n]) = 0, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$;
- (ii) O número de somandos diretos indecomponíveis de T^\bullet coincide com o posto do grupo de Grothendieck $K_0(\text{mod } A)$.

Note que a condição (i) segue como consequência imediata do lema (5.2.10). Além disso, a condição (ii) é equivalente ao fato de o número de somandos diretos indecomponíveis (não isomorfos) de T^\bullet coincidir com a quantidade de elementos de Q_0 . Pelo teorema (5.2.3), temos que, para cada $a \in Q_0$, o complexo T_a^\bullet é indecomponível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$. Além disso, pelo lema (5.2.12), temos que os somandos de $T^\bullet = \bigoplus_{a \in Q} T_a^\bullet$ são todos não isomorfos. Portanto temos que T^\bullet é um complexo inclinante em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$. \square

5.2.1 Um estudo sobre $\text{End}_{\mathcal{D}^b(A)}(T^\bullet)$

Aqui veremos como os morfismos de $\text{End}_{\mathcal{D}^b(A)}(T^\bullet)$ se relacionam com os caminhos do quiver Q . Mostraremos que cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ em Q_1 induz um morfismo $\Psi_\alpha : T_a^\bullet \rightarrow T_b^\bullet$. Antes de mostrarmos que tal morfismo existe, veremos que para cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$, temos uma cópia de T_a^j como somando de T_b^j , para todo $j \geq \varphi(a)$. Tal fato é essencial para a criação de cada morfismo $\Psi_\alpha : T_a^\bullet \rightarrow T_b^\bullet$.

Lema 5.2.14. *Considere T_a^\bullet e T_b^\bullet dois complexos, associados a dois vértices distintos $a, b \in Q_0$. Então se existe uma flecha $\alpha : a \rightarrow b$ em Q_1 , tem-se que T_a^j é somando de T_b^j , para todo $j \in \mathbb{Z}$. Além disso, para cada $\alpha : a \rightarrow b$, o complexo T_b^\bullet pode ser escrito da seguinte maneira:*

$$T_b^\bullet : 0 \longrightarrow P_b \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha \\ * \end{pmatrix}} P_{s(\alpha)} \oplus X^{\varphi(a)} \xrightarrow{d_b^{\varphi(a)}} \dots \longrightarrow \underbrace{T_a^j \oplus X^j}_{T_b^j} \xrightarrow{d_b^j} \underbrace{T_a^{j+1} \oplus X^{j+1}}_{T_b^{j+1}} \longrightarrow \dots$$

em que

$$d_b^j = \begin{pmatrix} d_a^j & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}, \forall j \geq \varphi(a)$$

Demonstração. Primeiro mostremos que cada T_a^j é somando de T_b^j . De fato, seja $P_{s(w)}$ um somando de T_a^j , então por definição temos $w \in Q_\varphi^j(-, a)$. Como existe $\alpha : a \rightarrow b$, segue que existe um caminho $v = w\alpha \in Q_\varphi^j(-, b)$ tal que $s(v) = s(w)$. Logo, temos $P_{s(w)} = P_{s(v)}$ e portanto segue que $P_{s(w)}$ é somando de T_b^j . Com isso podemos concluir que T_a^j é somando de T_b^j , para todo $j \in \mathbb{Z}$. Portanto segue que T_b^\bullet pode ser escrito como:

$$T_b^\bullet : \dots \longrightarrow \underbrace{T_a^j \oplus X^j}_{T_b^j} \xrightarrow{d_b^j} \underbrace{T_a^{j+1} \oplus X^{j+1}}_{T_b^{j+1}} \longrightarrow \dots$$

Agora mostremos que o diferencial d_b^j é dado por:

$$d_b^j = \begin{pmatrix} d_a^j & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} : T_a^j \oplus X^j \rightarrow T_a^{j+1} \oplus X^{j+1}$$

De fato, suponha que $\varphi(b) = 0$, então, como existe $\alpha : a \rightarrow b$, temos por definição que:

$$T_b^\bullet : \cdots \longrightarrow P_b \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha \\ * \end{pmatrix}} \underbrace{P_{s(\alpha)} \oplus X^1}_{T_b^1} \xrightarrow{d_b^1} T_b^2 \xrightarrow{d_b^2} T_b^3 \longrightarrow \cdots$$

Pela definição (5.1.11), sabemos que, para todo $j \in \mathbb{Z}$, o diferencial d_b^j é dado por:

$$d_b^j : \bigoplus_{v \in Q_\varphi^j(-, b)} P_{s(v)} \rightarrow \bigoplus_{v \in Q_\varphi^j(-, b)} \left(\bigoplus_{u \in v^-} P_{s(u)} \right)$$

em que as componentes de d_b^j são dadas por:

$$f_i : P_{s(v_i)} \rightarrow \left(\bigoplus_{u \in v_i^-} P_{s(u)} \right)$$

Portanto temos que o diferencial $d_b^1 : P_{s(\alpha)} \oplus X^1 \rightarrow T_b^2$ possui uma componente dada por:

$$f : P_{s(\alpha)} \rightarrow \left(\bigoplus_{u \in \alpha^-} P_{s(u)} \right)$$

Disto segue que:

$$d_b^1 = \begin{pmatrix} f & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} : P_{s(\alpha)} \oplus X^1 \rightarrow \underbrace{\left(\bigoplus_{u \in \alpha^-} P_{s(u)} \right) \oplus X^2}_{T_b^2}$$

Agora note que, como $s(\alpha) = a$, temos que:

$$P_{s(\alpha)} = P_a \quad \text{e} \quad \left(\bigoplus_{u \in \alpha^-} P_{s(u)} \right) = \left(\bigoplus_{u \in \epsilon_a^-} P_{s(u)} \right)$$

e pela natureza da componente f do diferencial d_b^1 , temos:

$$f = d_a^1 : P_a \rightarrow \underbrace{\left(\bigoplus_{u \in \epsilon_a^-} P_{s(u)} \right)}_{T_a^2}$$

Portanto segue que:

$$d_b^1 = \begin{pmatrix} d_a^1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} : P_a \oplus X^1 \rightarrow \underbrace{T_a^2 \oplus X^2}_{T_b^2}$$

De maneira análoga, temos que diferencial d_b^2 é dado por:

$$d_b^2 = \begin{pmatrix} d_a^2 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} : \underbrace{\left(\bigoplus_{u \in \alpha^-} P_{s(u)} \right) \oplus X^2}_{T_a^2} \rightarrow \underbrace{\bigoplus_{u \in \alpha^-} \left(\bigoplus_{v \in u^-} P_{s(v)} \right) \oplus X^3}_{T_a^3}$$

isto é, $d_b^2 = \begin{pmatrix} d_a^2 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} : T_a^2 \oplus X^2 \rightarrow T_a^3 \oplus X^3$. Aplicando essa mesma construção para os demais diferenciais de T_b^\bullet , podemos concluir que

$$d_b^j = \begin{pmatrix} d_a^j & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} : \underbrace{T_a^j \oplus X^j}_{T_b^j} \rightarrow \underbrace{T_a^{j+1} \oplus X^{j+1}}_{T_b^{j+1}}, \quad \forall j \geq \varphi(a)$$

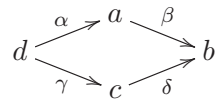
em que, para cada j , os somandos indecomponíveis presentes na cópia de T_a^j que aparecem na decomposição de T_b^j , são dados por:

$$P_{s(v)} \text{ tal que } v = w\alpha \text{ para algum } w \in Q_\varphi^j(-, a)$$

□

Note que não temos informações a respeito do somando X^j , da decomposição $T_b^j = T_a^j \oplus X^j$, pois isso depende exclusivamente do conjunto $Q_\varphi^j(-, b)$, podendo esse somando possuir alguns somandos de T_a^j ou até mesmo ser nulo. A seguir apresentamos dois exemplo que irão explicitar esses fatos.

Exemplo 5.2.15. Considere a álgebra do exemplo (5.1.1), em que o quiver Q é dado por:



Como existe uma flecha $\beta : a \rightarrow b$, temos, pelo lema (5.2.14), que o complexo T_b^\bullet pode ser escrito como $T_b^j = T_a^j \oplus X^j, \forall j \geq \varphi(a)$. Suponha que $\varphi(b) = 0$, então temos:

$$T_a^\bullet : \quad 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \underbrace{P_a}_{T_a^1} \xrightarrow{\alpha} \underbrace{P_d}_{T_a^2} \longrightarrow 0$$

$$T_b^\bullet : 0 \longrightarrow \underbrace{P_b}_{T_b^0} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}} \underbrace{P_a \oplus P_c}_{T_b^1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}} \underbrace{P_d \oplus P_d}_{T_b^2} \longrightarrow 0$$

Note que o diferencial $d_b^1 : T_b^1 \rightarrow T_b^2$ é dado por:

$$d_b^1 = \begin{pmatrix} d_a^1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} : T_a^1 \oplus \underbrace{X^1}_{P_c} \rightarrow T_a^2 \oplus \underbrace{X^2}_{P_d}$$

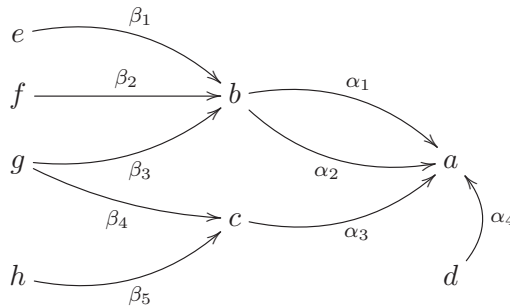
Aqui devemos nos atentar que, apesar de $T_b^2 = P_d \oplus P_d$, não podemos escolher arbitrariamente qual somando P_d representará T_a^2 na decomposição de $T_b^2 = T_a^2 \oplus X^2$. De fato, lembremos que por definição temos:

$$T_b^2 = \bigoplus_{w \in Q_\varphi^2(-, b)} P_{s(w)} = P_{s(\alpha\beta)} \oplus P_{s(\gamma\delta)} = P_d \oplus P_d$$

Como estamos usando o fato de existir $\beta : a \rightarrow b$ para aplicar o lema (5.2.14), temos por construção que as componentes T_a^j de T_b^j são os somandos provenientes de $\beta \in Q_1$. Portanto temos $T_a^2 = P_{s(\alpha\beta)}$ e $X^2 = P_{s(\gamma\delta)}$.

No próximo exemplo veremos o que ocorre quando existem duas flechas entre os vértices $a, b \in Q_0$. Mostraremos, através da construção realizada no lema (5.2.14), que cada flecha irá fornecer uma decomposição distinta.

Exemplo 5.2.16. Considere o complexo T_a^\bullet do exemplo (5.1.12), cujo quiver Q é dado por:



Suponha que $\varphi(a) = 0$, então temos:

$$T_a^\bullet : 0 \rightarrow \underbrace{P_a}_{T_a^0} \xrightarrow{d_a^0} \underbrace{P_b \oplus P_b \oplus P_c \oplus P_d}_{T_a^1} \xrightarrow{d_a^1} \underbrace{(P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus (P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus (P_g \oplus P_h)}_{T_a^2} \rightarrow 0$$

em que,

$$d_a^0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad d_a^1 = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & & \\ \beta_2 & 0 & 0 & 0 & \\ \beta_3 & & & & \\ & \beta_1 & & & \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & \\ & \beta_3 & & & \\ 0 & 0 & \beta_4 & 0 & \\ & & \beta_5 & & \end{pmatrix}$$

Como existem flechas $\alpha_1, \alpha_2 : b \rightarrow a$, podemos utilizar o lema (5.2.14) para escrever cada T_a^j como $T_a^j = T_b^j \oplus X^j$. De fato, sabemos que T_b^\bullet é dado por:

$$T_b^\bullet : 0 \rightarrow 0 \rightarrow \underbrace{P_b}_{T_b^1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix}} \underbrace{P_e \oplus P_f \oplus P_g}_{T_b^2} \rightarrow 0$$

Portanto é fácil ver que cada T_a^j pode ser escrito como $T_b^j \oplus X^j$, para todo $j \geq \varphi(b)$. Porém, pela construção do lema (5.2.14), tal decomposição depende diretamente de alguma flecha $\alpha : b \rightarrow a$. Como existem duas flechas distintas $\alpha_1, \alpha_2 : b \rightarrow a$, cada flecha irá fornecer uma decomposição distinta da forma:

$$T_a^\bullet : 0 \rightarrow \underbrace{P_a}_{T_a^0} \xrightarrow{d_a^0} \underbrace{T_b^1 \oplus P_b \oplus P_c \oplus P_d}_{T_a^1} \xrightarrow{d_a^1} \underbrace{T_b^2 \oplus (P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus (P_g \oplus P_h)}_{T_a^2} \rightarrow 0$$

e

$$T_a^\bullet : 0 \rightarrow \underbrace{P_a}_{T_a^0} \xrightarrow{d_a^0} \underbrace{P_b \oplus T_b^1 \oplus P_c \oplus P_d}_{T_a^1} \xrightarrow{d_a^1} \underbrace{(P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus T_b^2 \oplus (P_g \oplus P_h)}_{T_a^2} \rightarrow 0$$

(i) Para $\alpha_1 : b \rightarrow a$, temos:

$$d_a^1 = \begin{pmatrix} d_b^1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} : \underbrace{T_b^1 \oplus X^1}_{T_a^1} \rightarrow \underbrace{T_b^2 \oplus X^2}_{T_a^2}$$

em que $T_a^1 = T_b^1 \oplus X^1$ é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_b^1 = P_{s(\alpha_1)} \\ \quad = P_b \\ \\ X^1 = P_{s(\alpha_2)} \oplus P_{s(\alpha_3)} \oplus P_{s(\alpha_4)} \\ \quad = P_b \oplus P_c \oplus P_d \end{array} \right.$$

e $T_a^2 = T_b^2 \oplus X^2$ é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_b^2 = P_{s(\beta_1\alpha_1)} \oplus P_{s(\beta_2\alpha_1)} \oplus P_{s(\beta_3\alpha_1)} \\ \quad = P_e \oplus P_f \oplus P_g \\ \\ X^2 = (P_{s(\beta_1\alpha_2)} \oplus P_{s(\beta_2\alpha_2)} \oplus P_{s(\beta_3\alpha_2)}) \oplus (P_{s(\beta_4\alpha_3)} \oplus P_{s(\beta_5\alpha_3)}) \\ \quad = (P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus (P_g \oplus P_h) \end{array} \right.$$

(ii) Para $\alpha_2 : b \rightarrow a$, temos:

$$d_a^1 = \begin{pmatrix} d_b^1 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} : \underbrace{T_b^1 \oplus X^1}_{T_a^1} \rightarrow \underbrace{T_b^2 \oplus X^2}_{T_a^2}$$

em que $T_a^1 = T_b^1 \oplus X^1$ é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_b^1 = P_{s(\alpha_2)} \\ \quad = P_b \\ \\ X^1 = P_{s(\alpha_1)} \oplus P_{s(\alpha_3)} \oplus P_{s(\alpha_4)} \\ \quad = P_b \oplus P_c \oplus P_d \end{array} \right.$$

e $T_a^2 = T_b^2 \oplus X^2$ é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_b^2 = P_{s(\beta_1\alpha_2)} \oplus P_{s(\beta_2\alpha_2)} \oplus P_{s(\beta_3\alpha_2)} \\ \quad = P_e \oplus P_f \oplus P_g \\ \\ X^2 = (P_{s(\beta_1\alpha_1)} \oplus P_{s(\beta_2\alpha_1)} \oplus P_{s(\beta_3\alpha_1)}) \oplus (P_{s(\beta_4\alpha_3)} \oplus P_{s(\beta_5\alpha_3)}) \\ \quad = (P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus (P_g \oplus P_h) \end{array} \right.$$

Teorema 5.2.17. *Sejam Q um quiver graduável e $a, b \in Q_0$. Então para cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$, em Q_1 , existe um morfismo não nulo $\Psi_\alpha^\bullet : T_a^\bullet \rightarrow T_b^\bullet$ em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, em que $\Psi_\alpha^j : T_a^j \rightarrow T_b^j$ é a inclusão, para todo $j \geq \varphi(a)$.*

Demonstração. De fato, pelo lema (5.2.14), temos que cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ determina uma decomposição em T_b^j , para todo $j \geq \varphi(a)$. Portanto podemos definir um morfismo $\Psi_\alpha^\bullet : T_a^\bullet \rightarrow T_b^\bullet$, utilizando tal

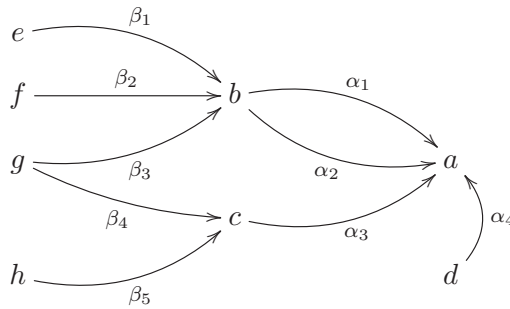
decomposição, da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_a^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & T_a^{j-1} & \xrightarrow{d_a^{j-1}} & T_a^j & \xrightarrow{d_a^j} & T_a^{j+1} & \longrightarrow & \cdots \\
 \Psi_\alpha^\bullet \downarrow & & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \downarrow & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \downarrow & & \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \downarrow & & \\
 T_b^\bullet : & \cdots & \longrightarrow & \underbrace{T_a^{j-1} \oplus X^{j-1}}_{T_b^{j-1}} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_a^{j-1} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}} & \underbrace{T_a^j \oplus X^j}_{T_b^j} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_a^j & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}} & \underbrace{T_a^{j+1} \oplus X^{j+1}}_{T_b^{j+1}} & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Note que o morfismo Ψ_α^\bullet não é homotópico a zero, pois $\text{Hom}_A(T_a^j, T_b^{j-1}) = 0$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. De fato, suponha que existe $s : T_a^j \rightarrow T_b^{j-1}$, então existem somandos indecomponíveis $P_{s(w)}$ e $P_{s(v)}$ de T_a^j e T_b^{j-1} , respectivamente, tais que $\text{Hom}_A(P_{s(w)}, P_{s(v)}) \neq 0$. Disto segue que existe uma flecha $\gamma : s(v) \rightarrow s(w)$ em Q_1 , porém neste caso devemos ter $\varphi(s(w)) < \varphi(s(v))$, o que não ocorre, pois $w \in Q_\varphi^j(-, a)$ e $v \in Q_\varphi^{j-1}(-, b)$. \square

Note que, dada uma flecha $\alpha : a \rightarrow b$, as inclusões Ψ_α^j , do morfismo $\Psi_\alpha^\bullet : T_a^\bullet \rightarrow T_b^\bullet$ do teorema (5.2.17), leva o projetivo indecomponível $P_{s(w)}$, somando de T_a^j , no projetivo $P_{s(w\alpha)}$, somando de T_b^j , em que $w \in Q_\varphi^j(-, a)$ e $w\alpha \in Q_\varphi^j(-, b)$.

Exemplo 5.2.18. Lembremos que o quiver Q , do exemplo (5.2.16), é dado por:



e os complexos T_b^\bullet e T_a^\bullet são:

$$\begin{array}{l}
 T_b^\bullet : 0 \rightarrow \underbrace{0}_{T_b^0} \rightarrow \underbrace{P_b}_{T_b^1} \xrightarrow{d_b^1} \underbrace{P_e \oplus P_f \oplus P_g}_{T_b^2} \rightarrow 0 \\
 \\
 T_a^\bullet : 0 \rightarrow \underbrace{P_a}_{T_a^0} \xrightarrow{d_a^0} \underbrace{P_b \oplus P_b \oplus P_c \oplus P_d}_{T_a^1} \xrightarrow{d_a^1} \underbrace{(P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus (P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus (P_g \oplus P_h)}_{T_a^2} \rightarrow 0
 \end{array}$$

Vimos, no exemplo (5.2.16), que as flechas $\alpha_1, \alpha_2 : b \rightarrow a$ induzem duas fatorações distintas em

cada $T_a^j, \forall j \geq \varphi(b)$. Portanto, pelo teorema (5.2.17), existem dois morfismos distintos $\Psi_{\alpha_1}^\bullet, \Psi_{\alpha_2}^\bullet : T_b^\bullet \rightarrow T_a^\bullet$, os quais são induzidos pelas fatorações geradas por cada uma dessas flechas.

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_b^\bullet : 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_b & \xrightarrow{d_b^1} & T_b^2 \longrightarrow 0 \\
 \Psi_{\alpha_1}^\bullet \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 T_a^\bullet : 0 & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ * \end{pmatrix}} & \underbrace{P_{s(\alpha_1)} \oplus P_{s(\alpha_2)} \oplus (P_c \oplus P_d)}_{T_a^1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_b^1 & 0 & 0 \\ 0 & d_b^1 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}} & \underbrace{T_b^2 \oplus T_b^2 \oplus (P_g \oplus P_h)}_{T_a^2} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_b^\bullet : 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_b & \xrightarrow{d_b^1} & T_b^2 \longrightarrow 0 \\
 \Psi_{\alpha_2}^\bullet \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 T_a^\bullet : 0 & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ * \end{pmatrix}} & \underbrace{P_{s(\alpha_1)} \oplus P_{s(\alpha_2)} \oplus (P_c \oplus P_d)}_{T_a^1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_b^1 & 0 & 0 \\ 0 & d_b^1 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}} & \underbrace{T_b^2 \oplus T_b^2 \oplus (P_g \oplus P_h)}_{T_a^2} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Além disso, note que existem dois caminhos $w_1, w_2 : e \rightsquigarrow a$ em Q , tais que $w_1 = \beta_1 \alpha_1$ e $w_2 = \beta_1 \alpha_2$. Como consequência do teorema (5.2.17), temos que existem dois morfismos não nulos $\Psi_{w_1}^\bullet, \Psi_{w_2}^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_e^\bullet, T_a^\bullet)$ dados por:

$$\Psi_{w_1}^\bullet = \Psi_{\alpha_1}^\bullet \circ \Psi_{\beta_1}^\bullet \quad \text{e} \quad \Psi_{w_2}^\bullet = \Psi_{\alpha_2}^\bullet \circ \Psi_{\beta_1}^\bullet$$

Neste caso, o morfismo $\Psi_{w_1}^\bullet$ é dado por:

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_e^\bullet : 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_e \longrightarrow 0 \\
 \downarrow \Psi_{\beta_1}^\bullet & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 T_b^\bullet : 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_b & \xrightarrow{d_b^1} & \underbrace{(P_e \oplus P_f \oplus P_g)}_{T_b^2} \longrightarrow 0 \\
 \downarrow \Psi_{\alpha_1}^\bullet & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 T_a^\bullet : 0 & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ * \end{pmatrix}} & \underbrace{P_{s(\alpha_1)} \oplus P_{s(\alpha_2)} \oplus (P_c \oplus P_d)}_{T_a^1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_b^1 & 0 & 0 \\ 0 & d_b^1 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}} & \underbrace{T_b^2 \oplus T_b^2 \oplus (P_g \oplus P_h)}_{T_a^2} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Aqui estamos denotando $\Psi_{\alpha_1}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : T_b^2 \rightarrow T_b^2 \oplus T_b^2 \oplus (P_g \oplus P_h)$ o morfismo dado por:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \underbrace{(P_e \oplus P_f \oplus P_g)}_{T_b^2} \rightarrow \underbrace{(P_e \oplus P_f \oplus P_g)}_{T_b^2} \oplus \underbrace{(P_e \oplus P_f \oplus P_g)}_{T_b^2} \oplus (P_g \oplus P_h)$$

portanto segue que:

$$\Psi_{w_1}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : P_e \rightarrow \underbrace{(P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus (P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus (P_g \oplus P_h)}_{T_a^2}$$

e $\Psi_{w_1}^j = 0$, para todo $j \neq 2$.

Analogamente temos que o morfismo $\Psi_{w_2}^\bullet$ é dado por:

$$\Psi_{w_2}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} : P_e \rightarrow \underbrace{(P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus (P_e \oplus P_f \oplus P_g) \oplus (P_g \oplus P_h)}_{T_a^2}$$

e $\Psi_{w_2}^j = 0$, para todo $j \neq 2$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_e^\bullet : 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_e & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \Psi_{\beta_1}^\bullet & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & \\
 T_b^\bullet : 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_b & \xrightarrow{d_b^1} & \underbrace{(P_e \oplus P_f \oplus P_g)}_{T_b^2} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow \Psi_{\alpha_1}^\bullet & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \\
 T_a^\bullet : 0 & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ * \end{pmatrix}} & \underbrace{P_{s(\alpha_1)} \oplus P_{s(\alpha_2)} \oplus (P_c \oplus P_d)}_{T_a^1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_b^1 & 0 & 0 \\ 0 & d_b^1 & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}} & \underbrace{T_b^2 \oplus T_b^2 \oplus (P_g \oplus P_h)}_{T_a^2} & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

Portanto temos dois morfismos não nulos $\Psi_{w_1}^\bullet, \Psi_{w_2}^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_e^\bullet, T_a^\bullet)$, induzidos pelos caminhos $w_1, w_2 : e \rightsquigarrow a$.

Corolário 5.2.19. *Sejam Q um quiver graduável, $a, b \in Q_0$ e $w : a \rightsquigarrow b$ um caminho dado por $w = \alpha_1 \dots \alpha_n$, com $\alpha_i \in Q_1$, para $1 \leq i \leq n$. Então existe um morfismo não nulo $\Psi_w^\bullet : T_a^\bullet \rightarrow T_b^\bullet$, em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, tal que $\Psi_w^\bullet = \Psi_{\alpha_n}^\bullet \circ \dots \circ \Psi_{\alpha_1}^\bullet$. Além disso, temos que Ψ_w^\bullet é dado por:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_a^\bullet : \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{d_a^{\varphi(a)}} & T_a^{\varphi(a)+1} & \longrightarrow & \dots \\
 \downarrow \Psi_w^\bullet & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \\
 T_b^\bullet : \dots & \longrightarrow & T_b^{\varphi(a)-1} & \xrightarrow{d_b^{\varphi(a)-1}} & \underbrace{P_{s(w)} \oplus X^{\varphi(a)}}_{T_b^{\varphi(a)}} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_a^{\varphi(a)} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}} & \underbrace{T_a^{\varphi(a)+1} \oplus X^{\varphi(a)+1}}_{T_b^{\varphi(a)+1}} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Demonstração. A demonstração segue diretamente do fato de os morfismos $\Psi_{\alpha_i}^\bullet$, do teorema (5.2.17), serem inclusões e também pelo fato de $s(w) = s(\alpha_1)$, o que implica em $\Psi_w^{\varphi(a)} : P_a \rightarrow P_{s(w)} \oplus X^{\varphi(a)}$ ser a inclusão de P_a em $P_{s(\alpha_1)} = P_{s(w)}$. Além disso, tal morfismo não será homotópico a zero pelo fato de $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^j, T_b^{j-1}) = 0, \forall j \in \mathbb{Z}$. \square

Note que, pelo corolário (5.2.19), dados $a, b \in Q_0$, temos que existe uma correspondência entre os caminhos $w_{i's} : a \rightsquigarrow b$ em Q e os morfismos não nulos $\Psi_{w_{i's}}^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet)$. Vejamos agora que existe uma correspondência biunívoca entre os morfismos não nulos de $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet)$ e os elementos de $\epsilon_a(kQ)\epsilon_b$. Antes de demonstrarmos esse resultado, vamos enunciar alguns lemas que nos fornecem algumas propriedades em relação aos morfismos não nulos de $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet)$.

Lema 5.2.20. *Sejam $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero, Q um quiver graduável e $a, b \in Q_0$ vértices distintos. Neste caso, para cada $\phi^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet)$ não nulo, tem-se que:*

(i) $\phi^{\varphi(a)} : P_a \rightarrow T_b^{\varphi(a)}$ é não nulo;

(ii) Cada morfismo não nulo $\phi^j : T_a^j \rightarrow T_b^j$ é representado por uma matriz de escalares;

(iii) Existe, pelo menos, um caminho $w : a \rightsquigarrow b$ em Q ;

(iv) A quantidade de caminhos $w : a \rightsquigarrow b$ coincide com a quantidade de cópias de P_a como somandos de $T_b^{\varphi(a)}$;

(v) Se existem n cópias de P_a em $T_b^{\varphi(a)}$, então existem escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tais que:

$$\phi^{\varphi(a)} = \begin{pmatrix} \Lambda \\ 0 \end{pmatrix} : P_a \rightarrow \underbrace{P_a^n \oplus Y}_{T_b^{\varphi(a)}}$$

em que, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t : P_a \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n P_{s(w_i)}$, para cada $w_i : a \rightsquigarrow b$.

Demonstração. (i) Suponha que existe $\phi^\bullet : T_a^\bullet \rightarrow T_b^\bullet$ não nulo, então temos que existe $j \in \mathbb{Z}$ tal que $\phi^j : T_a^j \rightarrow T_b^j$ é não nulo. Se $j = \varphi(a)$, tem-se que $\phi^{\varphi(a)} \neq 0$ e segue o resultado desejado. Agora suponha que $\phi^j \neq 0$ para algum $j \neq \varphi(a)$, temos que o morfismo ϕ_α^\bullet é da forma:

$$\begin{array}{ccccccc} T_a^\bullet : & \dots & \longrightarrow & T_a^{j-1} & \xrightarrow{d_a^{j-1}} & T_a^j & \xrightarrow{d_a^j} & T_a^{j+1} & \longrightarrow & \dots \\ & & & \downarrow \phi^{j-1} & & \downarrow \phi^j & & \downarrow \phi^{j+1} & & \\ \phi_\alpha^\bullet \downarrow & & & & & & & & & \\ T_b^\bullet : & \dots & \longrightarrow & T_b^{j-1} & \xrightarrow{d_b^{j-1}} & T_b^j & \xrightarrow{d_b^j} & T_b^{j+1} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Como $\phi^j : T_a^j \rightarrow T_b^j$ é não nulo, então existem $P_{s(w)}$ e $P_{s(v)}$ somandos indecomponíveis de T_a^j e T_b^j , respectivamente, tais que $\text{Hom}_A(P_{s(w)}, P_{s(v)}) \neq 0$. Pelo lema (5.1.4), isso implica que $P_{s(w)} = P_{s(v)}$, pois $s(w)$ e $s(v)$ possuem um mesmo grau j . Portanto segue que o morfismo $\phi^j : T_a^j \rightarrow T_b^j$ é dado por uma matriz de escalares. Com isso, temos que:

$$\phi^j \circ d_a^{j-1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad d_b^{j-1} \circ \phi^{j-1} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \phi^{j-1} \neq 0$$

Aplicando o mesmo argumento repetidas vezes, chegaremos a conclusão de que, para $\varphi(a) \leq n \leq j$, o morfismo ϕ^n é não nulo. Portanto temos que $\phi^{\varphi(a)} : P_a \rightarrow T_b^{\varphi(a)}$ é não nulo.

(ii) Note que se $\phi^j : T_a^j \rightarrow T_b^j$ é não nulo, então existem $P_{s(w)}$ e $P_{s(v)}$ somandos indecomponíveis de $T_a^j = \bigoplus_{w \in Q_\varphi^j(-, a)} P_{s(w)}$ e $T_b^j = \bigoplus_{u \in Q_\varphi^j(-, b)} P_{s(u)}$, respectivamente, tais que existe um morfismo não

nulo $f \in \text{Hom}_A(P_{s(w)}, P_{s(v)})$. Porém, pelo lema (5.1.4), segue que $s(w) = s(v)$, pois caso contrário, teríamos $\varphi(s(v)) = \varphi(s(w)) + 1$, o que contradiz o fato de ambos possuírem o mesmo grau j . Disto segue que o morfismo f é um múltiplo da identidade de $P_{s(w)}$.

(iii) Como $\phi^{\varphi(a)} : P_a \rightarrow T_b^{\varphi(a)}$ é não nulo, segue que existe $P_{s(w)}$ somando indecomponível de $T_b^{\varphi(a)}$ tal que $\text{Hom}_A(P_a, P_{s(w)}) \neq 0$. Como $\varphi(s(w)) = \varphi(a)$, segue, pelo lema (5.1.4), que $s(w) = a$. Como $w \in Q_\varphi^j(-, b)$, segue que w é um caminho de a até b .

(iv) Note que para cada $w : a \rightsquigarrow b$, tem-se que $s(w) = a$ e portanto $w \in Q_\varphi^{\varphi(a)}(-, b)$, ou seja, $P_{s(w)}$ é um somando de $T_b^{\varphi(a)}$. Por outro lado sabemos que os somandos de $T_b^{\varphi(a)}$ são da forma $P_{s(w)}$, com $w \in Q_\varphi^{\varphi(a)}(-, b)$. Portanto cada somando $P_{s(w)}$ de $T_b^{\varphi(a)}$ está associado a um caminho $w : s(w) \rightsquigarrow b$.

(v) Sejam $a, b \in Q_0$ dois vértices distintos, em que $\varphi(a) = 1$. Considere um morfismo não nulo $\phi^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet)$, portanto temos que $\phi^1 : P_a \rightarrow T_b^1$ é não nulo.

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_a^\bullet : & \dots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{d_a^0} & P_a & \xrightarrow{d_a^1} & T_a^2 & \longrightarrow & \dots \\
 & & & \downarrow \phi^0 & & \downarrow \phi^1 & & \downarrow \phi^2 & & \\
 T_b^\bullet : & \dots & \longrightarrow & T_b^0 & \xrightarrow{d_b^0} & T_b^1 & \xrightarrow{d_b^1} & T_b^2 & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Sabemos que as componentes do morfismo $\phi^1 : P_a \rightarrow T_b^1$ são dadas por escalares, isto é, se existem n somandos $P_{s(u_i)}$ de T_b^1 tais que $s(u_i) = a$, para $1 \leq i \leq n$, então existem escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, não todos nulos, tais que ϕ^1 pode ser escrito como:

$$\phi^1 = \begin{pmatrix} \Lambda \\ 0 \end{pmatrix} : P_a \rightarrow \underbrace{\left(\bigoplus_{i=1}^n P_{s(u_i)} \right)}_{T_b^1} \oplus Y$$

em que $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t$ e para todo somando indecomponível $P_{s(w)}$ de Y , tem-se que $s(w) \neq a$. \square

Teorema 5.2.21. *Sejam $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero, Q um quiver graduável e $a, b \in Q_0$. Então todo morfismo não nulo $\phi^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet)$ pode ser escrito como:*

$$\phi^\bullet = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Psi_{w_i}^\bullet$$

em que cada λ_i é um escalar e cada w_i é um caminho de a para b em Q . Para $a = b$, consideramos $\Psi_{e_a}^\bullet := id_{T_a^\bullet}$.

Demonstração. De fato, seja $\phi^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet)$ não nulo e suponha que $\varphi(a) = 1$. Como $\phi^\bullet \neq 0$, temos, pelo lema (5.2.20) que $\phi^{\varphi(a)} : P_a \rightarrow T_b^{\varphi(a)}$ é não nulo. Além disso, o complexo T_b^\bullet pode ser

escrito como:

$$T_b^\bullet : \dots \rightarrow T_b^0 \xrightarrow{d_b^0} \underbrace{(P_a)^n \oplus Y^1}_{T_b^1} \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_a^1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & d_a^1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix} d_b^1} \underbrace{(T_a^2)^n \oplus Y^2}_{T_b^2} \rightarrow \dots$$

em que n é o número de caminhos de a para b em Q . Também temos, pelo lema (5.2.20), que ϕ^\bullet é da forma:

$$\begin{array}{ccccccc} T_a^\bullet : \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{d_a^1} & T_a^2 \longrightarrow \dots \\ \downarrow \phi^\bullet & & \downarrow & & \downarrow \phi^1 = \begin{pmatrix} \Lambda \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \phi^2 \\ T_b^\bullet : \dots & \longrightarrow & T_b^0 & \xrightarrow{d_b^0} & \underbrace{(P_a)^n \oplus Y^1}_{T_b^1} & \xrightarrow{d_b^1} & \underbrace{(T_a^2)^n \oplus Y^2}_{T_b^2} \longrightarrow \dots \end{array}$$

em que, $\Lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^t : P_a \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n P_{s(w_i)}$. Agora vamos analisar $\phi^2 : T_a^2 \rightarrow (T_a^2)^n \oplus Y^2$. Tal morfismo pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\phi^2 = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \\ g \end{pmatrix} : T_a^2 \rightarrow (T_a^2)^n \oplus Y^2, \quad \text{tal que } g : T_a^2 \rightarrow Y^2$$

Note que:

$$d_b^1 \circ \phi^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 d_a^1 \\ \vdots \\ \lambda_n d_a^1 \\ 0 \end{pmatrix} : P_a \rightarrow (T_a^2)^n \oplus Y^2$$

Como $d_b^1 \circ \phi^1 = \phi^2 \circ d_a^1$, temos:

$$\phi^2 \circ d_a^1 = \begin{pmatrix} f_1 d_a^1 \\ \vdots \\ f_n d_a^1 \\ g d_a^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 d_a^1 \\ \vdots \\ \lambda_n d_a^1 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} (f_1 - \lambda_1 Id) d_a^1 = 0 \\ \vdots \\ (f_n - \lambda_n Id) d_a^1 = 0 \\ g \circ d_a^1 = 0 \end{cases}$$

Como cada $f_i : T_a^2 \rightarrow T_a^2$ é uma matriz cujas entradas são escalares, pela proposição (5.1.16), segue que:

$$(f_i - \lambda_i Id)d_a^1 = 0 \iff (f_i - \lambda_i Id) = 0 \iff f_i = \lambda_i Id, \quad \text{para todo } 1 \leq i \leq n$$

Agora note que, pelo lema (5.2.20) (ii), temos que o morfismo $g : T_a^2 \rightarrow Y^2$ também é uma matriz de escalares, portantoo:

$$g \circ d_a^1 = 0 \iff g = 0$$

Disto segue que:

$$\phi^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 Id \\ \vdots \\ \lambda_n Id \\ 0 \end{pmatrix} : T_a^2 \rightarrow (T_a^2)^n \oplus Y^2$$

De maneira análoga, para todo $j \geq \varphi(a)$, tem-se que:

$$\phi^j = \begin{pmatrix} \lambda_1 Id \\ \vdots \\ \lambda_n Id \\ 0 \end{pmatrix} : T_a^j \rightarrow (T_a^j)^n \oplus Y^j$$

ou seja, o morfismo $\phi^\bullet : T_a^\bullet \rightarrow T_b^\bullet$ é dado por:

$$\begin{array}{ccccccc} T_a^\bullet : & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{d_a^1} & T_a^2 & \longrightarrow & T_a^3 & \longrightarrow & \dots \\ \downarrow \phi^\bullet & & & \downarrow & & \downarrow \phi^1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \phi^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 Id \\ \vdots \\ \lambda_n Id \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \phi^3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 Id \\ \vdots \\ \lambda_n Id \\ 0 \end{pmatrix} & & \\ T_b^\bullet : & \dots & \longrightarrow & T_b^0 & \xrightarrow{d_b^0} & \underbrace{P_a^n \oplus Y^1}_{T_b^1} & \xrightarrow{d_b^1} & \underbrace{(T_a^2)^n \oplus Y^2}_{T_b^2} & \longrightarrow & \underbrace{(T_a^3)^n \oplus Y^3}_{T_b^3} & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

Por definição, sabemos que cada $\Psi_{w_i}^\bullet : T_a^\bullet \rightarrow T_b^\bullet$ é da forma:

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_a^\bullet : & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{d_a^1} & T_a^2 & \longrightarrow & T_a^3 & \longrightarrow & \dots \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & \Psi_{w_i}^\bullet & & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ Id \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ Id \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 T_b^\bullet : & \dots & \longrightarrow & T_b^0 & \xrightarrow{d_b^0} & \underbrace{(P_a)^n \oplus Y^1}_{T_b^1} & \xrightarrow{d_b^1} & \underbrace{(T_a^2)^n \oplus Y^2}_{T_b^2} & \longrightarrow & \underbrace{(T_a^3)^n \oplus Y^3}_{T_b^3} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

em que, $\Psi_{w_i}^1 : P_a \rightarrow (P_a)^n \oplus Y^1$ é a projeção que leva P_a em $P_{s(w_i)}$. Disto segue que:

$$\phi^\bullet = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Psi_{w_i}^\bullet$$

□

Corolário 5.2.22. *Considere $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero, com Q um quiver graduável. Para $a, b \in Q_0$ dois vértices distintos, temos que os morfismos $\Psi_{w_i}^\bullet$, do teorema (5.2.21), formam um base para $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet)$.*

Demonstração. Basta mostrarmos que os morfismos $\Psi_{w_i}^\bullet$, são linearmente independentes. De fato, considere $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero, com Q um quiver graduável. Sejam $a, b \in Q_0$ dois vértices distintos, tais que existem n caminhos de a para b em Q . Considere w_1, \dots, w_n como sendo todos os caminhos de a para b , mostremos que:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \Psi_{w_i}^\bullet = 0 \iff \lambda_i = 0, \text{ para } i = 1, \dots, n$$

De fato, suponha que $\sum_{i=1}^n \lambda_i \Psi_{w_i}^\bullet = 0$ em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, isto é, temos o seguinte morfismo nulo:

$$\begin{array}{ccccccc}
 T_a^\bullet : & \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{d_a^1} & T_a^{\varphi(a)+1} & \longrightarrow & \dots \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & \sum_{i=1}^n \lambda_i \Psi_{w_i}^\bullet & & \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \\ 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \lambda_1 Id \\ \vdots \\ \lambda_n Id \\ 0 \end{pmatrix} & & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 T_b^\bullet : & \dots & \longrightarrow & T_b^{\varphi(a)-1} & \xrightarrow{d_b^{\varphi(a)-1}} & \underbrace{P_a^n \oplus Y^1}_{T_b^{\varphi(a)}} & \xrightarrow{d_b^{\varphi(a)}} & \underbrace{(T_a^2)^n \oplus Y^2}_{T_b^{\varphi(a)+1}} & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

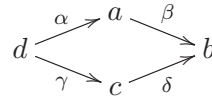
Sabemos que não existem morfismos $s^i : T_a^i \rightarrow T_b^{i-1}$, portanto $\sum_{i=1}^n \lambda_i \Psi_{w_i}^\bullet$ ser nulo em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A) \cong \mathcal{K}^b(\text{proj } A)$ implica em $\sum_{i=1}^n \lambda_i \Psi_{w_i}^\bullet$ ser nulo na categoria $\mathcal{C}^b(\text{proj } A)$. Disto segue que

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \Psi_{w_i}^\bullet = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_i = 0, \text{ para } i = 1, \dots, n$$

Portanto os morfismos $\Psi_{w_1}^\bullet, \dots, \Psi_{w_n}^\bullet$ são linearmente independentes e segue o resultado desejado. \square

Note que, dados $a, b \in Q_0$, existe uma correspondência biunívoca entre $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet)$ e $\epsilon_a(kQ)\epsilon_b$. De fato, pelo corolário (5.2.19), temos que para cada caminho $w : a \rightsquigarrow b$ em Q existe um morfismo não nulo $\Psi_w : T_a^\bullet \rightarrow T_b^\bullet$, em $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet)$, associado ao caminho w . Além disso, pelo teorema (5.2.21), temos que todo morfismo não nulo $\phi^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet)$ é da forma $\phi^\bullet = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Psi_{w_i}^\bullet$, onde cada λ_i é um escalar e cada w_i é um caminho em Q . Portanto, existe uma relação biunívoca que associa cada morfismo não nulo $\phi^\bullet = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Psi_{w_i}^\bullet$ de $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet)$ a um caminho $\sum_{i=1}^n \lambda_i w_i$ de $\epsilon_a(kQ)\epsilon_b$.

Exemplo 5.2.23. Considere a álgebra do exemplo (5.1.1), em que o quiver Q é dado por:



Sabemos que os elementos de $\epsilon_d(kQ)\epsilon_b$ são da forma:

$$\lambda_1(\alpha\beta) + \lambda_2(\gamma\delta)$$

em que $\lambda_1, \lambda_2 \in k$. Agora, vamos analisar quem são os morfismos de $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b}(T_d^\bullet, T_b^\bullet)$. Seja $\phi^\bullet : T_d^\bullet \rightarrow T_b^\bullet$, então:

$$\begin{array}{ccccccc} T_d^\bullet : & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_d & \longrightarrow & 0 \\ \phi^\bullet \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \phi^2 & & \\ T_b^\bullet : & 0 & \longrightarrow & \underbrace{P_b}_{T_b^0} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}} & \underbrace{P_a \oplus P_c}_{T_b^1} & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}} & \underbrace{P_d \oplus P_d}_{T_b^2} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Note que o morfismo ϕ^2 pode ser escrito como:

$$\phi^2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} : P_d \rightarrow P_{s(w_1)} \oplus P_{s(w_2)}$$

em que $w_1 = \alpha\beta$ e $w_2 = \gamma\delta$. Neste caso, podemos escrever:

$$\phi^\bullet = \lambda_1(\Psi_{w_1}^\bullet) + \lambda_2(\Psi_{w_2}^\bullet), \quad \text{ou seja,} \quad \phi^\bullet = \lambda_1(\Psi_\beta^\bullet \circ \Psi_\alpha^\bullet) + \lambda_2(\Psi_\delta^\bullet \circ \Psi_\gamma^\bullet)$$

De fato, temos que $(\Psi_\beta^\bullet \circ \Psi_\alpha^\bullet)$ e $(\Psi_\delta^\bullet \circ \Psi_\gamma^\bullet)$ são dados por:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 T_d^\bullet : \\
 \downarrow \Psi_\alpha^\bullet \\
 T_a^\bullet : \\
 \downarrow \Psi_\beta^\bullet \\
 T_b^\bullet :
 \end{array}
 \end{array}
 \left(\Psi_\beta^\bullet \circ \Psi_\alpha^\bullet \right)
 \begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_d \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_a & \xrightarrow{\alpha} & P_{s(\alpha)} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 0 & \longrightarrow & P_b & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}} & P_a \oplus P_c & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}} & P_{s(\alpha\beta)} \oplus P_{s(\gamma\delta)} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 T_d^\bullet : \\
 \downarrow \Psi_\gamma^\bullet \\
 T_c^\bullet : \\
 \downarrow \Psi_\delta^\bullet \\
 T_b^\bullet :
 \end{array}
 \end{array}
 \left(\Psi_\delta^\bullet \circ \Psi_\gamma^\bullet \right)
 \begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_d \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 1 \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_c & \xrightarrow{\gamma} & P_{s(\gamma)} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 0 & \longrightarrow & P_b & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}} & P_a \oplus P_c & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}} & P_{s(\alpha\beta)} \oplus P_{s(\gamma\delta)} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Portanto, temos:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{l}
 T_d^\bullet : \\
 \downarrow \\
 T_a^\bullet \oplus T_c^\bullet : \\
 \downarrow \\
 T_b^\bullet :
 \end{array}
 \end{array}
 \left(\Psi_\beta^\bullet \circ \Psi_\alpha^\bullet \right) + \left(\Psi_\delta^\bullet \circ \Psi_\gamma^\bullet \right)
 \begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_d \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_a \oplus P_c & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}} & P_{s(\alpha)} \oplus P_{s(\gamma)} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & & \downarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 0 & \longrightarrow & P_b & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}} & P_a \oplus P_c & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}} & P_{s(\alpha\beta)} \oplus P_{s(\gamma\delta)} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

ou seja,

$$\begin{array}{c}
 T_d^\bullet : \\
 \downarrow \\
 T_b^\bullet :
 \end{array}
 \begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & P_d \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \\
 0 & \longrightarrow & P_b & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}} & P_a \oplus P_c & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}} & P_{s(\alpha\beta)} \oplus P_{s(\gamma\delta)} \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Disto segue que os elementos de $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b}(T_d^\bullet, T_b^\bullet)$ são da forma $\lambda_1(\Psi_\beta^\bullet \circ \Psi_\alpha^\bullet) + \lambda_2(\Psi_\delta^\bullet \circ \Psi_\gamma^\bullet)$.

Teorema 5.2.24. *Considere $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero, em que Q é um quiver graduável, e seja T^\bullet o complexo inclinante do teorema (5.2.13). Então existe um isomorfismo de k -álgebras $\Psi : kQ \rightarrow \text{End}_{\mathcal{D}^b(A)}(T^\bullet)^{op}$, dado por $w \mapsto \Psi_w^\bullet$.*

Demonstração. Como Q é um quiver graduável, existe uma função graduação $\varphi : Q_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ e portanto podemos definir o complexo inclinante $T^\bullet = \bigoplus_{a \in Q_0} T_a^\bullet$. Sabemos que, dado um caminho $w = \alpha\beta : a \rightsquigarrow b$, existe um morfismo não nulo $\Psi_w^\bullet : T_a^\bullet \rightarrow T_b^\bullet$ em $\text{End}_{\mathcal{D}^b(A)}(T^\bullet)$, dado por $\Psi_w^\bullet = \Psi_\beta^\bullet \circ \Psi_\alpha^\bullet$. Desta maneira, vamos definir o seguinte morfismo:

$$\begin{aligned} \Psi : kQ &\rightarrow \text{End}_{\mathcal{D}^b(A)}(T^\bullet)^{op} \\ w &\mapsto \Psi_w^\bullet \end{aligned}$$

em que w é um caminho de kQ . Como a base de kQ são os caminhos, para definirmos Ψ em todo kQ , basta estendermos o morfismo por linearidade. Além disso, dados dois caminhos $\gamma, \delta \in kQ$, temos:

$$\Psi(\gamma\delta) = \Psi_{\gamma\delta}^\bullet = \Psi_\gamma^\bullet * \Psi_\delta^\bullet$$

em que $\Psi_\gamma^\bullet * \Psi_\delta^\bullet := \Psi_\delta^\bullet \circ \Psi_\gamma^\bullet$. Portanto Ψ é de fato um morfismo de álgebras. Note que, pelo teorema (5.2.21), temos que Ψ é sobrejetora. Agora vamos definir um morfismo $\Phi : \text{End}(T^\bullet)^{op} \rightarrow kQ$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \Phi : \text{End}_{\mathcal{D}^b(A)}(T^\bullet)^{op} &\rightarrow kQ \\ \Psi_w^\bullet &\mapsto w \end{aligned}$$

Note que:

$$\Phi(\Psi_\gamma * \Psi_\delta) = \Phi(\Psi_\delta \circ \Psi_\gamma) = \Phi(\Psi_{\gamma\delta}) = \gamma\delta$$

Portanto Φ é um morfismo de álgebras. Além disso, temos que:

$$\Phi(\Psi(w)) = \Phi(\Psi_w) = w$$

$$\Psi(\Phi(\Psi_w)) = \Psi(w) = \Psi_w$$

Portanto podemos concluir que $\Psi : kQ \rightarrow \text{End}_{\mathcal{D}^b(A)}(T^\bullet)^{op}$ é um isomorfismo. \square

Teorema 5.2.25. *Considere $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é um quiver graduável. Então temos que $\mathcal{D}^b(\text{mod } A) \cong \mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$ como categorias trianguladas.*

Demonstração. Como Q é graduável, pelo teorema (5.2.13), podemos definir o complexo inclinante

$T^\bullet \in \mathcal{D}^b(\text{mod } A)$. Além disso, pelo teorema (5.2.24), temos que $kQ \cong \text{End}_{\mathcal{D}^b(A)}(T^\bullet)^{op}$. Portanto, pelo teorema (6.5.1) de [32], tem-se que existe uma equivalência triangulada entre $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ e $\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$. \square

5.3 Morfismos irredutíveis e o funtor de Koszul

Nesta seção iremos mostrar que os complexos da definição (5.1.8) induzem uma secção na categoria derivada de $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, em que $A = kQ/R^2$ é uma álgebra de radical quadrado zero, com Q um quiver graduável e A do tipo manso. Para isso, primeiramente iremos estudar a existência de morfismos irredutíveis em $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet)$, com $a, b \in Q_0$.

Seja $f : X \rightarrow Y$ um morfismo não nulo, então dizemos que f é um *monomorfismo que cinde* (resp. *epimorfismo que cinde*) se, e somente se, existe um morfismo $h : Y \rightarrow X$ tal que $h \circ f = 1_X$ (resp. $f \circ h = 1_Y$). No caso em que f satisfaz qualquer umas das duas condições, dizemos que f cinde. Um morfismo f é dito *irredutível* se ele não cinde e além disso, para qualquer fatoração $f = h \circ g$, tem-se que g é um monomorfismo que cinde ou h é um epimorfismo que cinde.

Nesta seção nosso objetivo é mostrar que os morfismos Ψ_{α^\bullet} , do teorema (5.2.17), são irredutíveis em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$. Para isso iremos precisar de alguns resultados preliminares. A seguir iremos apresentar alguns resultados relacionando os morfismos irredutíveis de $\mathcal{C}^b(\text{proj } A)$ com os morfismos irredutíveis de $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, tais resultados podem ser encontrados em [28].

Definição 5.3.1. Dizemos que X^\bullet é um complexo contrátil se id_{X^\bullet} é homotópico a zero.

Proposição 5.3.2. Seja $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ um morfismo de complexos. Então temos que f^\bullet é homotópico a zero se, e somente se, f^\bullet se fatora por um complexo contrátil.

Demonstração. Suponha que $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ é um morfismo homotópico a zero, então temos

$$f^i = s^{i+1}d_X^i + d_Y^{i-1}s^i, \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

ou seja,

$$\begin{array}{ccccc} X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \\ f^{i-1} \downarrow & \swarrow s^i & \downarrow f^i & \swarrow s^{i+1} & \downarrow f^{i+1} \\ Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1} \end{array}$$

Mostremos que existe um complexo contrátil Z^\bullet tal que f^\bullet se fatora por Z^\bullet . De fato, seja Z^\bullet um

complexo contrátil dado por:

$$Z^\bullet = \dots \rightarrow X^i \oplus X^{i-1} \rightarrow X^{i+1} \oplus X^i \rightarrow X^{i+2} \oplus X^{i+1} \rightarrow \dots$$

Neste caso, temos que f^\bullet se fatora por Z^\bullet da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccccc}
 X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \\
 \left(\begin{smallmatrix} d_X^{i-1} \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \downarrow & & \downarrow \left(\begin{smallmatrix} d_X^i \\ 1 \end{smallmatrix} \right) & & \downarrow \left(\begin{smallmatrix} d_X^{i+1} \\ 1 \end{smallmatrix} \right) \\
 X^i \oplus X^{i-1} & \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right)} & X^{i+1} \oplus X^i & \xrightarrow{\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix} \right)} & X^{i+2} \oplus X^{i+1} \\
 \left(s^i, f^{i-1} - s^i d_X^{i-1} \right) \downarrow & & \downarrow \left(s^{i+1}, f^i - s^{i+1} d_X^i \right) & & \downarrow \left(s^{i+2}, f^{i+1} - s^{i+2} d_X^{i+1} \right) \\
 Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1}
 \end{array}$$

Agora suponha que f^\bullet é um morfismo de complexos que se fatora por um complexo contrátil Z^\bullet .

Neste caso, mostremos que f^\bullet é homotópico a zero. De fato, considere a seguinte fatoração de f^\bullet :

$$\begin{array}{ccccc}
 X^{i-1} & \xrightarrow{d_X^{i-1}} & X^i & \xrightarrow{d_X^i} & X^{i+1} \\
 g^{i-1} \downarrow & & \downarrow g^i & & \downarrow g^{i+1} \\
 Z^{i-1} & \xrightarrow{d_Z^{i-1}} & Z^i & \xrightarrow{d_Z^i} & Z^{i+1} \\
 id^{i-1} \downarrow & \swarrow s^i & \downarrow id^i & \swarrow s^{i+1} & \downarrow id^{i+1} \\
 Z^{i-1} & \xrightarrow{d_Z^{i-1}} & Z^i & \xrightarrow{d_Z^i} & Z^{i+1} \\
 h^{i-1} \downarrow & & \downarrow h^i & & \downarrow h^{i+1} \\
 Y^{i-1} & \xrightarrow{d_Y^{i-1}} & Y^i & \xrightarrow{d_Y^i} & Y^{i+1}
 \end{array}$$

Note que $id_Z^i = d_Z^{i-1} s^i + s^{i+1} d_Z^i$, então temos:

$$\begin{aligned}
 id_Z^i \circ g^i &= d_Z^{i-1} s^i g^i + s^{i+1} d_Z^i g^i \\
 &= d_Z^{i-1} s^i g^i + s^{i+1} g^{i+1} d_X^i
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h^i(id_Z^i \circ g^i) &= h^i d_Z^{i-1} s^i g^i + h^i s^{i+1} g^{i+1} d_X^i \\ &= d_Y^{i-1} \underbrace{h^{i-1} s^i g^i}_{t^i} + \underbrace{h^i s^{i+1} g^{i+1}}_{t^{i+1}} d_X^i \end{aligned}$$

Portanto temos que $f^i = h^i(id_Z^i \circ g^i) = d_Y^{i-1} t^i + t^{i+1} d_X^i$, ou seja, f^\bullet é homotópico a zero. \square

Os próximos resultados podem ser encontrados no trabalho de Giraldo e Merklen, para mais detalhes ver [17].

Lema 5.3.3. *Considere A uma álgebra de dimensão finita e sejam $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathcal{C}^{-,b}(\text{proj } A)$ complexos que não são contráteis. Então dado um morfismo $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$, temos:*

- (a) *Se Y^\bullet é indecomponível, então f^\bullet é epimorfismo que cinde em $\mathcal{C}^{-,b}(\text{proj } A)$ se, e somente se, f^\bullet é epimorfismo que cinde em $\mathcal{K}^{-,b}(\text{proj } A)$.*
- (b) *Se X^\bullet é indecomponível, então f^\bullet é monomorfismo que cinde em $\mathcal{C}^{-,b}(\text{proj } A)$ se, e somente se, f^\bullet é monomorfismo que cinde em $\mathcal{K}^{-,b}(\text{proj } A)$.*

Demonstração. (a) É fácil ver que se f^\bullet é epimorfismo que cinde em $\mathcal{C}^{-,b}(\text{proj } A)$, temos que f^\bullet é epimorfismo que cinde em $\mathcal{K}^{-,b}(\text{proj } A)$. Mostremos a recíproca. Suponha que f^\bullet é epimorfismo que cinde em $\mathcal{K}^{-,b}(\text{proj } A)$, então existe g^\bullet tal que $(f^\bullet g^\bullet) \sim id_{Y^\bullet}$, ou seja, $(f^\bullet g^\bullet - id_{Y^\bullet}) \sim 0$. Portanto temos que $(f^\bullet g^\bullet - id_{Y^\bullet}) : Y^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ se fatora por um complexo contrátil, denotemos tal complexo por M^\bullet , então temos:

$$\begin{array}{ccccc} Y^\bullet & \xrightarrow{s^\bullet} & M^\bullet & \xrightarrow{t^\bullet} & Y^\bullet \\ & \searrow & \curvearrowright & \nearrow & \\ & & f^\bullet g^\bullet - id_{Y^\bullet} & & \end{array}$$

Como $t^\bullet s^\bullet = f^\bullet g^\bullet - id_{Y^\bullet}$, temos que $id_{Y^\bullet} = f^\bullet g^\bullet - t^\bullet s^\bullet$. Portanto podemos reescrever essa equação como:

$$\begin{array}{ccccc} Y^\bullet & \xrightarrow{\begin{pmatrix} g^\bullet \\ -s^\bullet \end{pmatrix}} & X^\bullet \oplus M^\bullet & \xrightarrow{(f^\bullet, t^\bullet)} & Y^\bullet \\ & \searrow & \curvearrowright & \nearrow & \\ & & id_{Y^\bullet} & & \end{array}$$

Portanto temos que $\begin{pmatrix} g^\bullet \\ -s^\bullet \end{pmatrix}$ e (f^\bullet, t^\bullet) são monomorfismo que cinde e epimorfismo que cinde, respectivamente, donde segue que Y^\bullet é somando de $X^\bullet \oplus M^\bullet$. Como Y^\bullet não é contrátil, então Y^\bullet não pode ser somando de M^\bullet , disto segue que Y^\bullet é somando de X^\bullet . Portanto $f^\bullet \circ g^\bullet$ é um isomorfismo e segue que f^\bullet é um epimorfismo que cinde. A demonstração do item (b) é análoga. \square

Teorema 5.3.4. *Sejam $X^\bullet, Y^\bullet \in \mathcal{C}^{-,b}(\text{proj } A)$ complexos indecomponíveis que não são contráteis. Então dado $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$, temos que f^\bullet é irredutível em $\mathcal{C}^{-,b}(\text{proj } A)$ se, e somente se, f é irredutível em $\mathcal{K}^{-,b}(\text{proj } A)$.*

Demonstração. Seja $f^\bullet : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ um morfismo irredutível em $\mathcal{K}^{-,b}(\text{proj } A)$, então segue diretamente do lema anterior que f^\bullet é irredutível em $C^{-,b}(\text{proj } A)$. Agora suponha que f^\bullet é irredutível em $C^{-,b}(\text{proj } A)$ e sejam g^\bullet, h^\bullet morfismos tais que $g^\bullet h^\bullet \sim f^\bullet$ em $\mathcal{K}^{-,b}(\text{proj } A)$, ou seja, existe Z^\bullet tal que:

$$\begin{array}{ccc} X^\bullet & \xrightarrow{f^\bullet} & Y^\bullet \\ & \searrow h^\bullet & \nearrow g^\bullet \\ & & Z^\bullet \end{array}$$

Então temos que $g^\bullet h^\bullet - f^\bullet$ se fatora por um complexo contrátil, isto é, existe M^\bullet tal que:

$$\begin{array}{ccc} X^\bullet & \xrightarrow{g^\bullet h^\bullet - f^\bullet} & Y^\bullet \\ & \searrow s^\bullet & \nearrow t^\bullet \\ & & M^\bullet \end{array}$$

portanto temos que:

$$f^\bullet = (g, -t) \begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}$$

Disto segue que f^\bullet possui a seguinte fatoração em $C^{-,b}(\text{proj } A)$:

$$\begin{array}{ccc} X^\bullet & \xrightarrow{\begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}} & Z^\bullet \oplus M^\bullet & \xrightarrow{(g, -t)} & Y^\bullet \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & & & \\ & \xrightarrow{f^\bullet} & & & \end{array}$$

Portanto $\begin{pmatrix} h \\ s \end{pmatrix}$ é monomorfismo que cinde, ou $(g, -t)$ é epimorfismo que cinde, em $C^{-,b}(\text{proj } A)$. Disto segue que h é monomorfismo que cinde, ou g é epimorfismo que cinde, em $\mathcal{K}^{-,b}(\text{proj } A)$. Portanto temos que f^\bullet é um morfismo irredutível em $\mathcal{K}^{-,b}(\text{proj } A)$. □

Note que, pelo teorema (5.3.4), para mostrarmos que os morfismos Ψ_α^\bullet , apresentados no teorema (5.2.17), são irredutíveis em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, basta mostrarmos que eles são irredutíveis em $C^b(\text{proj } A)$.

Functor de Koszul

Seja Q um quiver graduável e $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero. Antes de mostrarmos a irredutibilidade dos morfismos Ψ_α^\bullet , iremos mostrar a existência de um morfismo irredutível em $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet)$, dado que existe uma flecha $\alpha : a \rightarrow b$, com $a, b \in Q_0$. Para provarmos esse resultado iremos utilizar o functor de Koszul. Antes de definirmos tal functor, vamos estabelecer algumas notações.

Definição 5.3.5. Seja Q um quiver graduável, com função gradação $\varphi : Q_0 \rightarrow \mathbb{Z}$. Então para cada

$n \in \mathbb{Z}$, definimos o seguinte subconjunto de Q_0 :

$$Q_\varphi^n = \{a \in Q_0; \varphi(a) = n\}$$

Seja M uma k -representação do quiver Q , então definimos o suporte de M como sendo o conjunto $\text{Supp}M = \{x \in Q_0; M(x) \neq 0\}$. Dizemos que M possui suporte localmente finito se $Q_\varphi^n \cap \text{Supp}M$ é um conjunto finito, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Denotamos por $\text{Rep}^*(Q)$ a subcategoria plena de $\text{Rep}(Q)$ gerada pelas representações que possuem suporte localmente finito.

Agora vamos definir um funtor F que associa uma representação do quiver Q^{op} com um complexo projetivo minimal. Aqui denotaremos por $RC(\text{proj } A)$ e $RC^{-,b}(\text{proj } A)$ as subcategorias plenas de $C(\text{proj } A)$ e $C^{-,b}(\text{proj } A)$, respectivamente, geradas por todos os complexos radicais, ou seja, complexos projetivos minimais. Seja M uma k -representação em $\text{Rep}^*(Q^{op})$, então para cada $n \in \mathbb{Z}$, podemos definir um projetivo em $\text{mod}(A)$ da seguinte maneira:

$$F(M)^n = \bigoplus_{a \in Q_\varphi^n} P_a \otimes_k M(a) \cong \bigoplus_{a \in Q_\varphi^n} (P_a)^{\dim_k(M(a))}$$

em que P_a é o projetivo indecomponível de $\text{mod}(A)$, associado ao vértice $a \in Q_0$, e $M(a)$ é um k -espaço vetorial da representação M , associado ao vértice a do quiver Q^{op} . Para mais informações, ver [7] e [8]. Agora considere um morfismo $(d_{F(M)}^n) : F(M)^n \rightarrow F(M)^{n+1}$ dado pela matriz:

$$(d_{F(M)}^n(b, a))_{(b,a) \in Q_\varphi^{n+1} \times Q_\varphi^n}$$

onde,

$$d_{F(M)}^n(b, a) = \sum_{\alpha \in Q_1(b,a)} f_\alpha \otimes_k M(\alpha^o) : P_a \otimes_k M(a) \rightarrow P_b \otimes_k M(b)$$

em que f_α denota o morfismo que realiza a multiplicação por $\bar{\alpha}$ e $M(\alpha^o) : M(a) \rightarrow M(b)$ é uma transformação k -linear, associada a k -representação M do quiver Q^{op} .

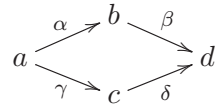
Como a álgebra $A = kQ/R^2$ é de radical quadrado zero, tem-se que os morfismos $(d_{F(M)}^n) : F(M)^n \rightarrow F(M)^{n+1}$ formam os diferenciais de um complexo $F(M)^\bullet$. Agora considere um morfismo não nulo $f : M \rightarrow N$ em $\text{Rep}^*(Q^{op})$, então para cada $n \in \mathbb{Z}$, podemos definir:

$$F(f)^n : \bigoplus_{a \in Q_\varphi^n} 1_{P_a} \otimes_k f(a) : \bigoplus_{a \in Q_\varphi^n} P_a \otimes_k M(a) \rightarrow \bigoplus_{a \in Q_\varphi^n} P_a \otimes_k N(a)$$

em que $f(a) : M(a) \rightarrow N(a)$ é o morfismo f associado ao vértice a das representações $M, N \in \text{Rep}^*(Q^{op})$. Neste caso, é fácil ver que $F(f)^\bullet = (F(f)^n)_{n \in \mathbb{Z}}$ é um morfismo de $F(M)^\bullet$ para $F(N)^\bullet$. Desta maneira, obtemos um funtor k -linear $F : \text{Rep}^*(Q^{op}) \rightarrow RC(\text{proj } A)$, chamado de funtor de Koszul. Em [6], podem ser encontradas mais informações a respeito desse funtor.

Agora vejamos que as imagens do funtor de Koszul, associadas as representações dos módulos projetivos indecomponíveis da álgebra $\Lambda = kQ^{op}$ coincidem com os complexos da definição (5.1.8). O próximo exemplo ilustra esse fato.

Exemplo 5.3.6. Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é dado por:



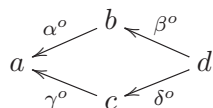
Defina em Q_0 a seguinte função graduação:

$$\begin{aligned}
 \varphi : Q_0 &\rightarrow \mathbb{Z} \\
 a &\mapsto 3 \\
 b, c &\mapsto 2 \\
 d &\mapsto 1
 \end{aligned}$$

Portanto, pela definição (5.1.8), temos os seguintes complexos em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$:

$$\begin{aligned}
 T_a^\bullet : \quad & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P_a \longrightarrow 0 \\
 T_b^\bullet : \quad & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P_b \xrightarrow{\alpha} P_a \longrightarrow 0 \\
 T_c^\bullet : \quad & 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P_c \xrightarrow{\gamma} P_a \longrightarrow 0 \\
 T_d^\bullet : \quad & 0 \longrightarrow P_d \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}} P_b \oplus P_c \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}} P_a \oplus P_a \longrightarrow 0
 \end{aligned}$$

Agora mostremos que os complexos T_c^\bullet e T_d^\bullet coincidem com as imagens $F(M)^\bullet$ e $F(N)^\bullet$ das representações $M, N \in \text{Rep}^*(Q^{op})$ associadas aos módulos projetivos indecomponíveis P_c e P_d de $\text{mod}(kQ^{op})$. De fato, temos que o quiver Q^{op} é dado por:



Seja $\Lambda = kQ^{op}$ e considere $P_c = \epsilon_c \Lambda$ e $P_d = \epsilon_d \Lambda$ os projetivos indecomponíveis de $\text{mod}(\Lambda)$ associados aos vértices $c, d \in Q^{op}$. Vamos denotar as representações correspondentes aos projetivos P_c e P_d , respectivamente, por M e N . Desta maneira, por [4] página 79, temos que as representações são dadas por:

$$M : \begin{array}{ccccc} & & M(\alpha^o) & M(b) = \langle 0 \rangle & M(\beta^o) \\ & & \swarrow & & \swarrow \\ M(a) = \langle \gamma^o \rangle & & & & M(d) = 0 \\ & & M(\gamma^o) & M(c) = \langle \epsilon_c \rangle & M(\delta^o) \end{array}$$

$$N : \begin{array}{ccccc} & & N(\alpha^o) & N(b) = \langle \beta^o \rangle & N(\beta^o) \\ & & \swarrow & & \swarrow \\ N(a) = \langle \beta^o \alpha^o, \delta^o \gamma^o \rangle & & & & N(d) = \langle \epsilon_d \rangle \\ & & N(\gamma^o) & N(c) = \langle \delta^o \rangle & N(\delta^o) \end{array}$$

Agora vamos analisar a imagem do funtor de Koszul em relação a essas duas representações. Vejamos primeiramente a representação M que está associada ao projetivo P_c . Temos que o complexo $F(M)^\bullet$ é dado por:

$$F(M)^n = \bigoplus_{a \in Q_0^n} P_a \otimes_k M(a) \cong \bigoplus_{a \in Q_0^n} (P_a)^{\dim_k(M(a))}$$

Note que,

$$\begin{cases} M(a) = \langle \gamma^o \rangle \\ M(c) = \langle \epsilon_c \rangle \\ M(x) = 0, \quad \forall x \in Q_0 \setminus \{a, c\} \end{cases}$$

portanto:

$$F(M)^3 = P_a \otimes_k \langle \gamma^o \rangle \cong (P_a)^1 = P_a$$

$$F(M)^2 = P_c \otimes_k \langle \epsilon_c \rangle \cong (P_c)^1 = P_c$$

$$F(M)^j = 0, \quad \forall j \neq 2, 3$$

disto segue que:

$$F(M)^\bullet : \quad 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P_c \xrightarrow{f_\gamma} P_a \longrightarrow 0$$

Analogamente, temos

$$\begin{cases} N(a) = \langle \beta^o \alpha^o, \delta^o \gamma^o \rangle \\ N(b) = \langle \beta^o \rangle \\ N(c) = \langle \delta^o \rangle \\ N(d) = \langle \epsilon_d \rangle \end{cases}$$

portanto:

$$F(N)^3 = P_a \otimes_k \langle \beta^o \alpha^o, \delta^o \gamma^o \rangle \cong (P_a)^2 = P_a \oplus P_a$$

$$F(N)^2 = (P_b \otimes_k \langle \beta^o \rangle) \oplus (P_c \otimes_k \langle \delta^o \rangle) \cong P_b \oplus P_c$$

$$F(N)^1 = P_d \otimes_k \langle \epsilon_d \rangle \cong P_d$$

disto segue que:

$$F(N)^\bullet : \quad 0 \longrightarrow P_d \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_\beta \\ f_\delta \end{pmatrix}} P_b \oplus P_c \xrightarrow{\begin{pmatrix} f_\alpha & 0 \\ 0 & f_\gamma \end{pmatrix}} P_a \oplus P_a \longrightarrow 0$$

Note que, por definição, os diferenciais dos complexos $F(N)^\bullet$ e $F(M)^\bullet$ coincidem com os diferenciais dos complexos da definição (5.1.8). Portanto podemos concluir que os complexos T_c^\bullet e T_d^\bullet coincidem com $F(M)^\bullet$ e $F(N)^\bullet$ em $RC(\text{proj } A)$.

Proposição 5.3.7. *Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é um quiver graduável. Então, para cada $a \in Q_0$, o funtor de Koszul leva a representação associada ao projetivo indecomponível $P_a = \epsilon_a \Lambda$, da álgebra $\Lambda = kQ^{op}$, em um complexo $F(M)^\bullet$ que coincide, em $RC(\text{proj } A)$, com o complexo T_a^\bullet da definição (5.1.8).*

Demonstração. A demonstração é consequência imediata da definição do funtor F e da definição das representações do módulos projetivos indecomponíveis de $\text{mod}(\Lambda)$. \square

A seguir apresentamos um lema a respeito do funtor F definido anteriormente, tal lema garante que dado um morfismo irredutível $f \in \text{Rep}^*(Q^{op})$, tem-se que $F(f)$ é irredutível em relação a imagem do funtor de Koszul.

Lema 5.3.8. *Seja $A = kQ/R^2$, em que Q é um quiver graduável e localmente finito. Então o funtor de Koszul*

$$F : \text{Rep}^*(Q^{op}) \rightarrow RC(\text{proj } A)$$

é fiel, pleno e exato.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [6], página 314. \square

Os próximos lemas apresentam algumas informações que nos auxiliam a descrever os objetos de $RC(\text{proj } A)$, tais resultados generalizam um pouco a proposição 7.7 apresentada em [7].

Lema 5.3.9. *Seja $A = kQ/R^2$, em que Q é um quiver graduável e localmente finito, e seja $F : \text{Rep}^*(Q^{op}) \rightarrow RC(\text{proj } A)$ o funtor de Koszul. Neste caso, se $Z^\bullet \in RC^{-,b}(\text{proj } A)$ é um complexo não*

nulo, então $Z^\bullet = Z_1^\bullet \oplus \cdots \oplus Z_m^\bullet$ tal que, para cada $1 \leq i \leq m$, tem-se $Z_i^\bullet \cong F(N_i)^\bullet[s_i]$ para alguma representação $N_i \in \text{Rep}^*(Q^{op})$ e algum $s_i \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [6], página 315. \square

Observação 5.3.10. Note que, para duas representações quaisquer $M, N \in \text{Rep}^*(Q^{op})$, temos que:

$$\text{Hom}_{RC(\text{proj } A)}(F(M)^\bullet, F(N)^\bullet[s]) = 0, \quad \forall s \in \mathbb{Z} \setminus \{0, 1\}$$

Essa propriedade segue diretamente da definição de tais complexos. De fato, observe que os somandos indecomponíveis de $F(M)^n$ são projetivos do tipo P_a tal que $a \in Q_\varphi^n$, porém os somandos indecomponíveis de $F(N)[s]^n$ são projetivos do tipo P_b tal que $b \in Q_\varphi^{n+s}$. Como A é de radical quadrado zero, temos que $\text{Hom}_A(P_a, P_b) \neq 0$ se, e somente se, existe uma flecha $\alpha : b \rightarrow a$ ou se temos $a = b$. Portanto, pela definição da função gradação, se existe um morfismo não nulo $f^\bullet : F(M)^\bullet \rightarrow F(N)^\bullet[s]$, tem-se que $s = 0$ ou $s = 1$. Note que, se $s = 1$, os morfismos $f^n : F(M)^n \rightarrow F(N)[s]^n$ são morfismos radicais, pois são induzidos pelas multiplicações de flechas $\bar{\alpha} : b \rightarrow a$, em que P_a é somando de $F(M)^n$ e P_b é somando de $F(N)[s]^n$.

Considere $A = kQ/R^2$ e $\Lambda = kQ^{op}$, em que Q é um quiver graduável. Sejam $a, b \in Q_0$ tais que existe uma flecha $\alpha : a \rightarrow b$ em Q_1 , então existe uma flecha $\alpha^o : b \rightarrow a$ em Q_1^{op} e um morfismo canônico $i : P_a \rightarrow P_b$ em $\text{mod}(\Lambda)$, o qual é um morfismo irredutível. Portanto, também temos um morfismo irredutível entre as representações desses módulos em $\text{Rep}^*(Q^{op})$, associada a essa inclusão. O próximo lema afirma que a imagem desse morfismo irredutível pelo funtor de Koszul permanece irredutível em $RC^{-,b}(\text{proj } A)$.

Lema 5.3.11. *Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é um quiver graduável finito. Então para cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ no quiver Q , temos que existe um morfismo irredutível em $\text{Hom}_{RC^{-,b}(\text{proj } A)}(F(M)^\bullet, F(N)^\bullet)$, em que $M, N \in \text{Rep}^*(Q^{op})$ são, respectivamente, as representações associadas aos projetivos indecomponíveis P_a e P_b de $\text{mod}(kQ^{op})$.*

Demonstração. Suponha que existe uma flecha $\alpha : a \rightarrow b$ em Q_1 , então existe uma flecha $\alpha^o : b \rightarrow a$ em Q_1^{op} . Portanto temos que existe um morfismo irredutível $i : P_a \rightarrow P_b$, em que $P_a, P_b \in \text{mod}(kQ^{op})$ são, respectivamente, os projetivos indecomponíveis associados aos vértices $a, b \in Q_0$. Considere $M, N \in \text{Rep}^*(Q^{op})$ as representações associadas aos projetivos P_a e P_b , respectivamente. Neste caso, temos que existe um morfismo irredutível $f : M \rightarrow N$ que provém do morfismo $i : P_a \rightarrow P_b$. Mostremos que o morfismo $F(f)^\bullet : F(M)^\bullet \rightarrow F(N)^\bullet$ é irredutível em $RC^{-,b}(\text{proj } A)$. De fato, suponha que existe

$Z^\bullet \in RC^{-,b}(\text{proj } A)$ tal que $F(f)^\bullet = h^\bullet \circ g^\bullet$, em que $g^\bullet : F(M) \rightarrow Z^\bullet$ e $h^\bullet : Z^\bullet \rightarrow F(N)^\bullet$.

$$\begin{array}{ccc} F(M)^\bullet & \xrightarrow{F(f)^\bullet} & F(N)^\bullet \\ & \searrow g^\bullet & \nearrow h^\bullet \\ & Z^\bullet & \end{array}$$

Pelo lema (5.3.9), temos que $Z^\bullet = Z_1^\bullet \oplus \cdots \oplus Z_m^\bullet$ tal que, para cada $1 \leq i \leq m$, tem-se $Z_i^\bullet \cong F(N_i)^\bullet[s_i]$ para alguma representação $N_i \in \text{Rep}^*(Q^{op})$ e algum $s_i \in \mathbb{Z}$, disto segue que:

$$\begin{array}{ccc} F(M)^\bullet & \xrightarrow{F(f)^\bullet} & F(N)^\bullet \\ & \searrow \begin{pmatrix} g_1^\bullet \\ \vdots \\ g_m^\bullet \end{pmatrix} & \nearrow (h_1^\bullet, \dots, h_m^\bullet) \\ & \underbrace{\bigoplus_{i=1}^m F(N_i)^\bullet[s_i]}_{Z^\bullet} & \end{array}$$

Sabemos que cada $g_i^\bullet : F(M)^\bullet \rightarrow F(N_i)^\bullet[s_i]$ é nulo, para $s_i \neq 0, 1$. Além disso, temos que cada $h_i^\bullet : F(N_i)^\bullet[s_i] \rightarrow F(M)^\bullet$ é nulo para $s_i \neq -1, 0$. Neste caso, se $h_i^\bullet g_i^\bullet$ é não nulo, para $1 \leq i \leq m$, então segue que:

$$Z^\bullet = \bigoplus_{i=1}^m F(N_i)^\bullet[0] = \bigoplus_{i=1}^m F(N_i)^\bullet = F\left(\bigoplus_{i=1}^m N_i\right)$$

Como o funtor F é aditivo, temos que ele preserva somas diretas finitas (ver [32], página 279). Portanto se f^\bullet se fatora por Z^\bullet , temos que Z^\bullet pertence a imagem do funtor de Koszul. Como F é fiel e pleno, segue que:

$$F(f)^\bullet = h^\bullet g^\bullet = F(h')^\bullet F(g')^\bullet = F(h'g')^\bullet \quad \Rightarrow \quad f = h'g'$$

Logo, como f é irredutível em $\text{Rep}^*(Q^{op})$, segue que g' é monomorfismo que cinde ou h' é epimorfismo que cinde. Disto segue que h^\bullet é epimorfismo que cinde ou g^\bullet é monomorfismo que cinde. Portanto $F(f)^\bullet$ é irredutível em $RC^{-,b}(\text{proj } A)$. \square

Teorema 5.3.12. *Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é um quiver graduável finito. Então para cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ em Q , tem-se que existe um morfismo irredutível em $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet)$, em que T_a^\bullet e T_b^\bullet são os complexos da definição (5.1.8).*

Demonstração. Pelo lema (5.3.11), temos que, para cada $\alpha : a \rightarrow b$, existe um morfismo irredutível em $\text{Hom}_{RC^{-,b}(\text{proj } A)}(F(M)^\bullet, F(N)^\bullet)$, em que $M, N \in \text{Rep}^*(Q^{op})$ são, respectivamente, as representações

associadas aos projetivos indecomponíveis P_a e P_b de $\text{mod}(kQ^{op})$. Porém temos, pela proposição (5.3.7), que os complexos $F(M)^\bullet$ e $F(N)^\bullet$ coincidem, respectivamente, com os complexos T_a^\bullet e T_b^\bullet em $RC(\text{proj } A)$. Por fim, pelo teorema (5.3.4), temos que tal morfismo também permanecerá irredutível em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$. \square

Corolário 5.3.13. *Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é um quiver graduável. Então para cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ em Q , tem-se que o morfismo $\Psi_\alpha : T_a \rightarrow T_b$, do teorema (5.2.17), é irredutível.*

Demonstração. O resultado segue como consequência imediata dos teoremas (5.2.17), (5.2.21) e (5.3.12). \square

5.4 Construção da componente transjectiva de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$

Nesta seção iremos apresentar um método para a construção da componente transjectiva do quiver de Auslander-Reiten da categoria derivada de álgebras de radical quadrado zero, que são hereditárias por partes do tipo mansa.

Vimos que, dado Q um quiver graduável e $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero, podemos definir um complexo inclinante T^\bullet na categoria derivada de $\text{mod}(A)$. Além disso, temos que para cada flecha $\alpha : a \rightarrow b$ em Q_1 , existe um morfismo irredutível $\Psi_\alpha : T_a \rightarrow T_b$ em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$. Mostremos que os somandos indecomponíveis de T^\bullet formam uma secção na componente transjectiva de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$. Para isso, mostremos primeiramente que todos esses somandos encontram-se numa mesma componente transjectiva de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$. O teorema, a seguir, nos apresenta um resultado que nos auxilia para a demonstração de tal afirmação.

Teorema 5.4.1. *Seja Λ uma álgebra hereditária, de tipo de representação finito ou mansa, e T^\bullet um complexo inclinante em $\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda)$, contendo $rkK_0(\Lambda)$ somandos indecomponíveis não isomorfos. Então existe um somando direto indecomponível de T^\bullet que está em uma componente transjectiva de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } \Lambda))$.*

Demonstração. Ver [29], página 50. \square

De forma não muito precisa, podemos dizer que a ideia da prova consiste em, a partir do complexo inclinante construir uma sequência de objetos excepcionais. Em um tubo, não podem existir $rkK_0(\Lambda)$ objetos excepcionais, logo um destes somandos do complexo deverá estar na componente transjectiva.

Teorema 5.4.2. *Considere $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero, em que Q é um quiver graduável, e seja T^\bullet o complexo inclinante do teorema (5.2.13). Então se kQ é uma álgebra hereditária*

do tipo de representação mansa, temos que todos os somandos de T^\bullet estão em uma mesma componente transjectiva de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$.

Demonstração. Sabemos que, dada uma álgebra $A = kQ/R^2$, em que Q é um quiver graduável, temos, pelo teorema (5.2.25), que $\mathcal{D}^b(\text{mod } A) \cong \mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$ como categorias trianguladas. Pela equivalência $F : \mathcal{D}^b(\text{mod } A) \rightarrow \mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$, temos que $F(T^\bullet)$ é um complexo inclinante em $\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ)$. Portanto se kQ é uma álgebra de tipo de representação mansa, temos, pelo teorema anterior, que existe um somando direto indecomponível de $F(T^\bullet)$ em uma componente transjectiva de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ))$. Sabemos que todos os somandos de T^\bullet estão relacionados por morfismos irredutíveis em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$, portanto o mesmo acontece com os somandos de $F(T^\bullet)$ em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ))$. Disto segue que, se um somando de $F(T^\bullet)$ está em uma componente transjectiva, todos os demais somandos de $F(T^\bullet)$ também estão na mesma componente, caso contrário teríamos morfismos irredutíveis entre objetos de uma componente transjectiva e uma componente regular. Agora mostremos que todos os somandos de T^\bullet estão numa mesma componente transjectiva de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$. De fato, suponha por absurdo que nosso complexo T^\bullet tenha um somando dentro de uma componente regular, neste caso, pelo mesmo argumento utilizado anteriormente, temos que todos os somandos de T^\bullet também estão nessa componente. Portanto existe um ciclo $x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow \dots \rightarrow x_1$ em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$ dado por morfismos irredutíveis e contendo um somando indecomponível T_i^\bullet de T^\bullet . Neste caso, deverá existir um ciclo em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ))$ contendo $F(T_i^\bullet)$, porém isso contradiz o fato de todos os somandos de $F(T^\bullet)$ estarem numa componente transjectiva. Portanto podemos concluir que nosso complexo T^\bullet não possui nenhum somando em uma componente regular de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$. \square

Lema 5.4.3. *Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é um quiver graduável finito. Neste caso, se existe um morfismo não nulo entre dois somandos indecomponíveis do complexo inclinante T^\bullet , do teorema (5.2.13), temos que existe um caminho seccional entre eles, em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$, gerado por morfismos irredutíveis entre somandos indecomponíveis de T^\bullet .*

Demonstração. De fato, pelo teorema (5.2.21), dados dois somandos indecomponíveis de T^\bullet , temos que todo morfismo não nulo $\phi^\bullet \in \text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet)$ é escrito como $\phi^\bullet = \sum_{i=1}^n \lambda_i \Psi_{w_i}^\bullet$, em que cada $\Psi_{w_i}^\bullet$ é uma composição de morfismos irredutíveis entre somandos indecomponíveis de T^\bullet . Portanto se $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_a^\bullet, T_b^\bullet) \neq 0$, existe um caminho $w : T_a^\bullet \rightarrow T_b^\bullet$ em Γ gerado por morfismos irredutíveis entre somandos de T^\bullet . Agora mostremos que tais caminhos são seccionais. De fato, suponha que existe um caminho $T_{x_1} \rightarrow T_{x_2} \rightarrow \dots \rightarrow T_{x_t}$ tal que $\tau T_{x_i} \cong T_{x_{i-2}}$, para algum $i \in \{3, \dots, t\}$. Neste caso, teríamos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_{x_{i-2}}, \tau T_{x_i}) \neq 0$, porém, pela dualidade de Serre, temos que $\text{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_{x_{i-2}}, \tau T_{x_i}) \cong$

$D \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_{x_i}, T_{x_{i-2}}[1])$, ou seja,

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_{x_{i-2}}, \tau T_{x_i}) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}^b(A)}(T_{x_i}, T_{x_{i-2}}[1]) \neq 0$$

Porém isso contradiz o fato de T^\bullet ser um complexo inclinante em $\mathcal{D}^b(\operatorname{mod} A)$, portanto segue que o caminho $T_{x_1} \rightarrow T_{x_2} \rightarrow \dots \rightarrow T_{x_n}$ é, de fato, seccional. \square

Em [2], Alvares, Le Meur e Marcos, provaram que se um complexo inclinante T^\bullet começa em uma componente transjectiva Γ , então existe uma secção Σ em Γ tal que toda fonte de Σ é um somando indecomponível de T^\bullet . As fontes de Σ são os somandos indecomponíveis S_1, \dots, S_r tais que $\operatorname{Hom}(S_i, S_j) = 0$, para $i \neq j$, e $\operatorname{Hom}(\oplus_{i=1}^r S_i, X) \neq 0$ para todo X somando indecomponível de T^\bullet pertencente a componente Γ . Vamos utilizar este resultado para mostrar que se $A = kQ/R^2$ é uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é um quiver graduável finito, então o complexo inclinante T^\bullet , do teorema (5.2.13), induz uma secção em uma componente transjectiva de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\operatorname{mod} A))$.

Antes de demonstrarmos o próximo teorema, vamos definir os conceitos de sucessor e predecessor em um quiver Q .

Definição 5.4.4. Sejam Q um quiver e $a, b \in Q_0$ vértices distintos. Se existe um caminho $a \rightsquigarrow b$ em Q , então dizemos que a é um predecessor de b e que b é um sucessor de a . Em particular, se existe uma flecha $a \rightarrow b$, então dizemos que a é predecessor imediato de b e que b é sucessor imediato de a .

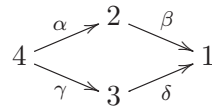
Teorema 5.4.5. *Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é um quiver graduável finito. Então os somandos indecomponíveis do complexo inclinante T^\bullet , do teorema (5.2.13), definem uma secção na componente transjectiva de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\operatorname{mod} A))$.*

Demonstração. Seja T^\bullet o complexo inclinante, do teorema (5.2.13), então temos, pelo teorema (5.4.2), que todos os somandos diretos indecomponíveis de T^\bullet estão em uma mesma componente transjectiva Γ de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\operatorname{mod} A))$. Portanto, por [2], existe uma secção Σ de Γ tal que as fontes de Σ são dadas por S_1, \dots, S_r , somandos diretos indecomponíveis de T^\bullet , tais que $\operatorname{Hom}(S_i, S_j) = 0$, para $i \neq j$, e $\operatorname{Hom}(\oplus_{i=1}^r S_i, X) \neq 0$ para todo X somando indecomponível de T^\bullet . Mostremos que todo somando indecomponível de T^\bullet está em Σ . De fato, vamos definir B como sendo o conjunto formado por todos os somandos diretos indecomponíveis de T^\bullet que não estão em Σ . Suponha que $B \neq \emptyset$, então existe $T_j \in B$, tal que T_j não é sucessor de nenhum elemento de B . Por definição, sabemos que existe $S_i \in \Sigma_0$ tal que $\operatorname{Hom}(S_i, T_j) \neq 0$, portanto existe um caminho seccional $w : S_i \rightsquigarrow T_j$ formado apenas por morfismos irredutíveis entre somandos de T^\bullet . Neste caso, existe uma flecha $\alpha : T_\ell \rightarrow T_j$, em que T_ℓ é o predecessor imediato de T_j no caminho w . Note que, como T_j não é sucessor de nenhum

elemento de B , tem-se que $T_\ell \in \Sigma_0$. Como existe uma flecha $\alpha : T_\ell \rightarrow T_j$ em Γ , por [4] página 304, temos que $T_j \in \Sigma_0$ ou $\tau(T_j) \in \Sigma_0$. Note que $\tau(T_j) \notin \Sigma_0$, pois neste caso, por definição de Σ , teríamos que existe S_k tal que $\text{Hom}(S_k, \tau(T_j)) \neq 0$ e, pela dualidade de Serre, isso implica em $\text{Hom}(T_j, S_k[1]) \neq 0$, o que contradiz o fato de T^\bullet ser um complexo inclinante. Portanto temos que $T_j \in \Sigma_0$. Com isso podemos concluir que $B = \emptyset$. Além disso, como $|\Sigma_0|$ coincide com a quantidade de somandos diretos indecomponíveis não isomorfos de T^\bullet , tem-se que os somandos de T^\bullet formam uma secção Σ na componente transjectiva Γ de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$. \square

A seguir vamos ilustrar, por meio de alguns exemplos, como podemos usufruir dessa secção para a construção da componente transjectiva do quiver de Auslander-Reiten da nossa categoria derivada hereditária por partes.

Exemplo 5.4.6. Seja $A = kQ/R^2$ uma álgebra de radical quadrado zero tal que Q é dado por:



Definindo uma função graduação $\varphi : Q_0 \rightarrow \mathbb{Z}$, podemos definir os somandos de nosso complexo inclinante da seguinte maneira:

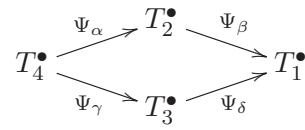
$$T_a^j = \bigoplus_{w \in Q_\varphi^j(-, a)} P_{s(w)}, \text{ para todo } j \text{ tal que } Q_\varphi^j(-, a) \neq \emptyset$$

Portanto, pela definição (5.1.8), temos os seguintes complexos em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$:

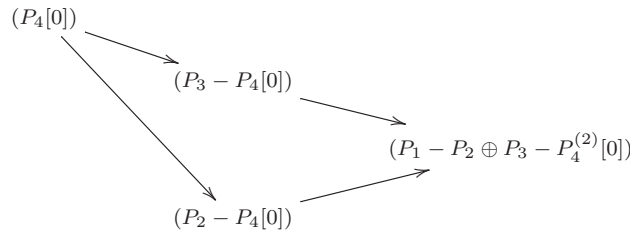
$$\begin{array}{l}
 T_4^\bullet : \quad 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P_4 \longrightarrow 0 \\
 T_3^\bullet : \quad 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P_3 \xrightarrow{\gamma} P_4 \longrightarrow 0 \\
 T_2^\bullet : \quad 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow P_2 \xrightarrow{\alpha} P_4 \longrightarrow 0 \\
 T_1^\bullet : \quad 0 \longrightarrow P_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}} P_2 \oplus P_3 \xrightarrow{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}} P_4 \oplus P_4 \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Agora pelos teoremas (5.2.24) e (5.3.12), temos que existem morfismos irredutíveis em $\mathcal{D}^b(\text{mod } A)$ entre os somandos indecomponíveis de T^\bullet . Além disso, sabemos pelo teorema (5.4.5), que tais so-

mandos geram a seguinte secção Σ em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$:



a qual irá aparecer em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$ da seguinte maneira:



Agora que temos a secção Σ formada pelos somandos de T^\bullet , apenas nos resta recuperar por meio desta secção os demais objetos da componente transjectiva de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$. Podemos utilizar os resultados de Alvares, Fernandes e Giraldo, apresentados em [1], para calcular os cones dos morfismos irredutíveis presentes em nossa secção Σ , e assim realizar a construção da componente transjectiva de $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$.

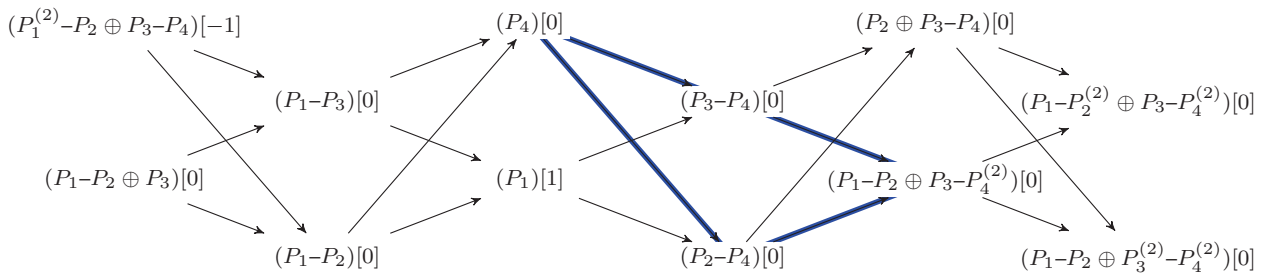


Figura 5.1: Secção em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$

Agora vamos tentar visualizar a categoria de módulos $\text{mod}(A)$ mergulhada em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$. Observe as próximas figuras.

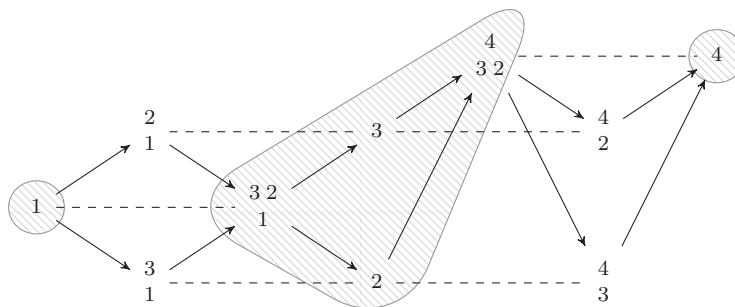


Figura 5.2: $\Gamma(\text{mod } A)$

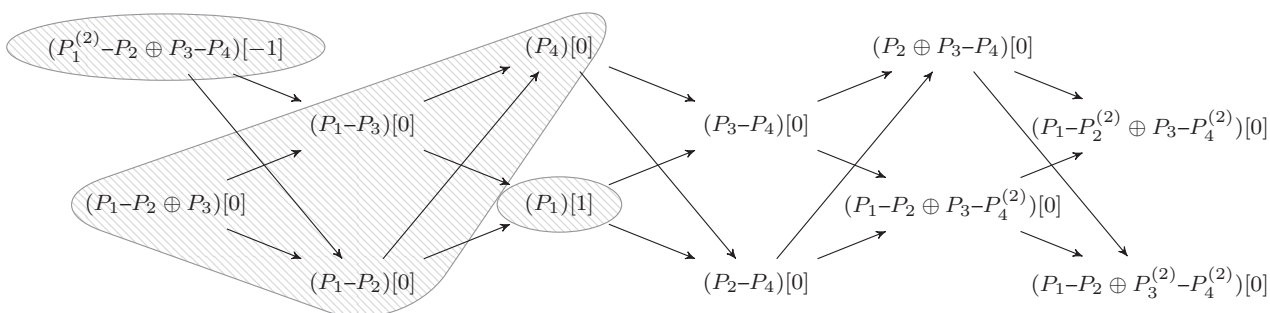


Figura 5.3: $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$

O triângulo hachurado em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$ destaca parte de $\text{mod}(A)$ mergulhada em $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$. Note que temos mais dois vértices em destaque, ali podemos ver $P_1[1]$ e também $I_4[-1]$, sendo que $P_1, I_1 \in \text{mod}(A)$ também estão destacados em $\Gamma(\text{mod } A)$.

Como $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A)) \cong \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ))$, podemos visualizar a categoria $\text{mod}(A)$ mergulhada no quiver de Auslander-Reiten da álgebra hereditária. Para melhorar a visualização, iremos reescrever o quiver $\Gamma(\text{mod } A)$.

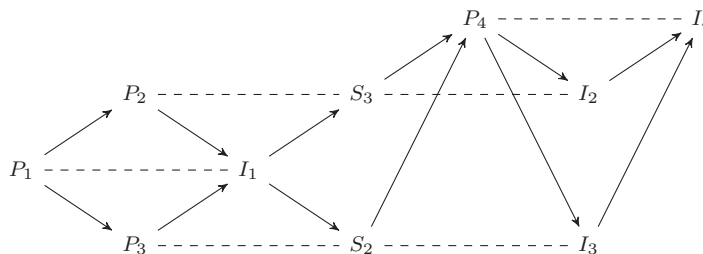


Figura 5.4: $\Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A))$

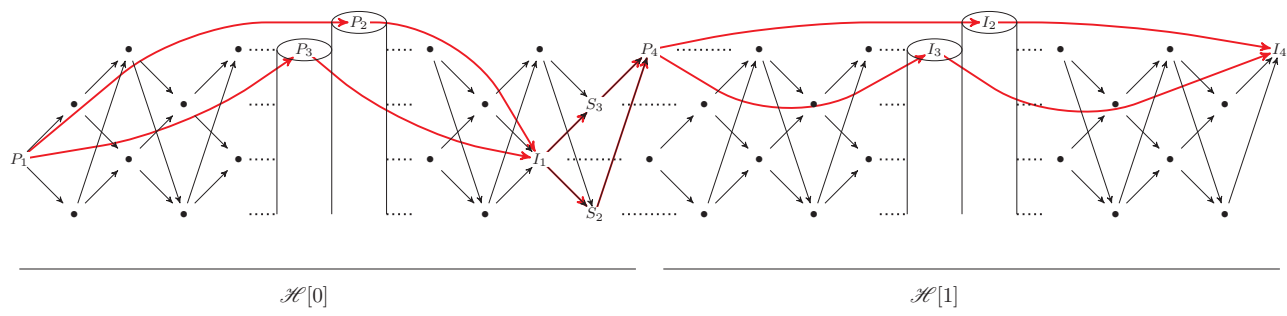


Figura 5.5: $\text{mod}(A) \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } A)) \cong \Gamma(\mathcal{D}^b(\text{mod } kQ))$

REFERÊNCIAS

- [1] E. R. Alvares, S. M. Fernandes and H. Giraldo. *Shapes of auslander-reiten triangles*. Algebras and Representation Theory, Springer, 23, pages 2257-2274, 2020.
- [2] E. R. Alvares, P. Le Meur and E. N. Marcos. *The strong global dimension of piecewise hereditary algebras*. Journal of Algebra, 481, pages 36-67, 2017.
- [3] I. Assem and F. U. Coelho. *Basic representation theory of algebras*. Graduate Texts in Mathematics 283, Cham: Springer, 2020.
- [4] I. Assem, D. Simson and A. Skowronski. *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1: Techniques of representation theory*. London Mathematical Society Student Texts, 65, Cambridge University Press, 2006.
- [5] M. Auslander, I. Reiten and S. O. Smalø. *Representation theory of Artin algebras*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 36, Cambridge University Press, 1997.
- [6] R. Bautista and S. Liu. *The bounded derived categories of an algebra with radical squared zero*. Journal of Algebra, 482, pages 303–345, 2017.
- [7] R. Bautista and S. Liu. *Covering theory for linear categories with application to derived categories*. Journal of Algebra, 406, pages 173–225, 2014.
- [8] R. Bautista, S. Liu and C. Paquette. *Representation theory of strongly locally finite quivers*. Proceedings of the London Mathematical Society. Third Series, 106, pages 97–162, 2013.
- [9] R. Bautista and M. J. S. Salorio. *Irreducible morphisms in the bounded derived category*. Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 215, 5, pages 866–884, 2011.
- [10] V. Bekkert and Y. Drozd. *Derived categories for algebras with radical square zero*. Algebras, representations and applications. Providence: American Mathematical Society, Contemp. Math. 483, pages 55–62, 2009.
- [11] V. Bekkert and H. A. Merklen. *Indecomposables in derived categories of gentle algebras*. Algebras and Representation Theory, Vol. 6, 3, pages 285-302, 2003.
- [12] K. Bongartz. *Tilted algebras*. Representations of algebras, Proc. 3° int. Conf., Puebla/Mex. 1980, Lect. Notes Math. 903, pages 26-38, 1981.

- [13] K. Bongartz and P. Gabriel. *Covering spaces in representation theory*. *Inventiones Mathematicae*, Vol. 65, pages 331-378, 1982.
- [14] S. Brenner and M. C. R. Butler. *Generalizations of the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors*. *Representation theory II, Proc. 2° int. Conf., Ottawa 1979, Lect. Notes Math. 832*, pages 103-169, 1980.
- [15] Y. A. Drozd. *Derived categories of modules and coherent sheaves*. *Singularities and computer algebra. Selected papers of the conference, Kaiserslautern, Germany, October 18–20, 2004 on the occasion of Gert-Martin Greuel's 60th birthday*, pages 79–128, Cambridge University Press, 2006.
- [16] S. Gelfand and Y. Manin. *Methods of homological algebra*. Springer Monographs in Mathematics, 2° ed, Berlin: Springer, 2003.
- [17] H. Giraldo and H. Merklen. *Irreducible morphisms of categories of complexes*. *Journal of Algebra*, Vol. 321, 10, pages 2716-2736, 2009.
- [18] D. Happel. *Auslander-Reiten triangles in derived categories of finite-dimensional algebras*. *Proceedings of the American Mathematical Society*, Vol. 112, 3, pages 641-648, 1991.
- [19] D. Happel. *On the derived category of a finite-dimensional algebra*. *Commentarii Mathematici Helvetici*, Vol. 62, pages 339-389, 1987.
- [20] D. Happel. *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*. London Mathematical Society Lecture Note Series, Vol. 119, Cambridge University Press, 1988.
- [21] D. Happel, B. Keller and I. Reiten. *Bounded derived categories and repetitive algebras*. *Journal of Algebra*, Vol. 319, 4, pages 1611-1635, 2008.
- [22] D. Happel, J. Rickard and A. Schofield. *Piecewise Hereditary Algebras*. *Bulletin of the London Mathematical Society*, Vol. 20, 1, pages 23-28, 1988.
- [23] H. Lenzing. *Hereditary Categories Lectures 1 and 2*. Advanced ICTP-school on Representation Theory and Related Topics, 2006.
- [24] F. B. Medeiros. *Dimensão global forte e complexidade na categoria derivada*. Tese de doutorado, Universidade de São Paulo, 2015.

- [25] H. Meltzer. *Exceptional vector bundles, tilting sheaves and tilting complexes for weighted projective lines*. Memoirs of the American Mathematical Society, Vol. 808, American Mathematical Society, 2004.
- [26] J. Rickard. *Morita theory for derived categories*. Journal of the London Mathematical Society. Second Series, Vol. 39, 3, pages 436-456, 1989.
- [27] J. J. Rotman. *An introduction to homological algebra*. Universitext, 2° ed. Berlin: Springer, 2009.
- [28] S. Scherotzke. *Finite and bounded Auslander-Reiten components in the derived category*. Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 215, 3, pages 232–241, 2011.
- [29] C. Schmidt. *Complexos Tilting e Dimensão Global Forte em Álgebras Hereditárias por Partes*. Tese de doutorado, Universidade Federal do Paraná, 2017.
- [30] A. Solotar and J. Redondo. *Derived categories and their applications*. Revista de la Unión Matemática Argentina, Vol. 48, 3, pages 1-26, 2007.
- [31] C. Zhang. *On algebras of strongly derived unbounded type*. Journal of Pure and Applied Algebra, Vol. 220, 4, pages 1462–1474, 2016.
- [32] A. Zimmermann. *Representation theory. A homological algebra point of view*. Algebra and Applications, Vol. 19, Cham: Springer, 2014.