

Hércules Alves de Oliveira Junior

**PARTÍCULAS INTERAGENTES NUM BILHAR COM
PAREDES SUAVES**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Física do Setor de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Física.

Orientador:
Marcus Werner Beims

Curitiba

2008

Dedico esta dissertação a minha mãe, a memória de meu pai, a meu irmão, a minha avó materna e a minha noiva, pelo apoio em todos os momentos e pelo amor incondicional recebido deles.
Deus seja Louvado.

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Universidade Federal do Paraná e ao departamento de Física pela oportunidade de estudo.

Ao professor e amigo Dr. Marcus W. Beims, pela paciência e tolerância nos momentos em que seu aluno se mostra inexperiente nos estudos. Por todo conhecimento transmitido, que foi extremamente necessário para meu crescimento na vida acadêmica. E pelo exemplo como profissional e pessoa.

Ao meu amigo e colega Cesar, que me ajudou com os problemas computacionais e conceituais do meu trabalho, além do incentivo dado.

Também devo citar minha avó Eloah, que desde pequeno está junto de mim passando por maus bocados para que eu pudesse estar aqui agora.

A meu irmão Rafael, a quem amo muito.

A minha noiva Isadora, que me acompanhou nessa etapa(mestrado) muito importante da minha vida. Agradeço por toda paciência e compreensão nos momentos em que abdiquei do meu tempo junto a ela para dedicar-me aos estudos e a construção do nosso futuro. A ela, o meu muito obrigado por todo amor que recebi. Isa eu te amo.

A memória de meu pai Hércules, já falecido, que se orgulharia do trabalho realizado por mim.

E a minha mãe Estela, que em todos esses anos lutou incansavelmente para que eu conseguisse chegar onde estou agora. Mãe, meu muito obrigado, eu te amo muito e é por você que luto todos os dias, e por uma vida melhor.

A CNPq pelo suporte financeiro.

*A mente que se abre a uma nova
idéia nunca voltará ao seu tamanho
original.*
Albert Einstein

RESUMO

Neste trabalho estudamos o problema de duas partículas clássicas, interagindo via potencial de Yukawa e aprisionadas num bilhar unidimensional de paredes suaves. As paredes são modeladas pela função “erro” de forma que o limite de paredes rígidas pode ser obtido. Obtemos expressões analíticas para a evolução do sistema no espaço de fases e no espaço tangente, que mostram a influência das paredes e da interação entre as partículas sobre a dinâmica não regular do sistema. Estudamos a distribuição dos expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito em termos da razão de massas entre as partículas, e a complexidade da dinâmica pode ser verificada nas respectivas Seções de Poincaré. Por meio destas distribuições encontramos evidências de trajetórias aprisionadas em torno de ilhas de regularidade, características de espaços de fases misto.

-Palavras chaves: Bilhares, Distribuição dos Expoentes de Lyapunov, Potencial de Yukawa, Partículas interagentes.

-Áreas de conhecimento: Sistemas complexos, Dinâmica não-linear.

Abstract

The problem of two classical interacting particles confined to a one-dimensional billiard with soft walls is considered. While the interaction between the particles is of Yukawa type, the soft walls are represented by “Error” functions, which allows us to analyze the hard walls limit. Analytical expressions for the system evolution in phase space and tangent space show the influence of the walls and of the interaction between the particles on the dynamics. The distribution of the finite-time Lyapunov exponents is analyzed as a function of the mass ratios, between particles. The complexity of the dynamics could be verified by the Poincaré Surface of Sections. With the Lyapunov distribution, evidences of trajectories trapped around regular islands were found.

-Keywords: Billiards, Distribution of Lyapunov Exponents, Yukawa Potential, Interacting particles.

-Knowledge area: Complex systems, Nonlinear dynamics.

Sumário

1	Introdução	12
2	Sistemas Dinâmicos	16
2.1	Sistemas Hamiltonianos	17
2.1.1	Coordenadas generalizadas e Formalismo Lagrangeano	17
2.1.2	Formalismo Hamiltoniano	19
2.1.3	Sistemas Hamiltonianos integráveis	20
2.1.4	Teorema KAM	20
2.2	Caos	22
2.2.1	Seção de Poincaré	23
2.2.2	Armadilhas dinâmicas	23
2.2.3	Expoente de Lyapunov	25
2.2.4	Cálculo do Expoente de Lyapunov Máximo a tempo finito	29
2.2.5	Distribuição dos Expoentes de Lyapunov Máximo a tempo finito	30
3	Extensão do algoritmo de Benettin	32
4	Bilhares com paredes suaves	35
4.1	Introdução	35
4.2	Bilhar com paredes suaves	37
5	Resultados	45
5.1	Resultados analíticos	45
5.1.1	Dinâmica de partículas não-interagentes colidindo com vários potenciais degrau	45
5.1.2	Dinâmica das partículas não-interagentes no espaço tangente	53

5.1.3	Expoentes de Lyapunov para partículas interagentes	56
5.2	Resultados Numéricos	60
5.2.1	Paredes aproximadamente rígidas ($\sigma = 5 \times 10^{-3}$)	60
5.2.2	Paredes Suaves com ($\sigma = 5 \times 10^{-2}$)	69
6	Considerações Finais	76

Lista de Figuras

2.1	Representação do movimento sobre uma superfície toroidal.	21
2.2	Representação da Seção de Poincaré. Nesta figura o fluxo que representa a evolução do sistema, atravessa uma seção Ω em vários pontos, formando a seção de Poincaré.	24
2.3	Exemplo de armadilha de ilha-hierárquica com um conjunto de ilhas auto-similares presentes na dinâmica do mapa padrão. (a) Espaço de fases completo. (b-d) Consecutivas ampliações na cadeia de ilhas. Figura extraída de [36].	26
2.4	Exemplo de armadilha de rede para o mapa padrão. A figura mostra uma armadilha de rede. Figura extraída de [36].	27
2.5	A figura mostra a evolução das estruturas internas das ilhas. (a) Estado inicial de um ponto elíptico. (b) Bifurcação e criação de duas selas e dois novos pontos elípticos. (c) Dois pontos elípticos imersos num mar caótico e separados por uma camada caótica. Figura extraída de [36].	28
2.6	Trajetórias principal e satélite obtidas da evolução do sistema. Esta figura mostra a divergência entre as trajetórias.	30
3.1	Representação da passagem de um estado à outro através de colisões no espaço de fases. Figura baseada em [21].	33
4.1	Representação do bilhar de Bunimovich.	36
4.2	Em (A) Órbitas periódicas no bilhar circular. Órbitas caóticas nos bilhares (B) Sinai e (C) Pascalian Snail.	36
4.3	Figura que representa o sistema de duas partículas em um bilhar unidimensional com paredes rígidas e paredes suaves.	38
4.4	Esta figura representa as paredes do bilhar utilizado neste trabalho. A suavidade das paredes é obtida pela variação de σ . Esta suavidade é mostrada com as diferentes paredes sobrepostas.	41
5.1	Aproximação do potencial suave em degraus. Em (A) potencial com apenas um degrau e 5 colisões. Em (B) representação de n degraus.	47
5.2	Bilhar com paredes aproximadamente rígidas $\sigma = 5 \times 10^{-3}$	62

5.3	Bilhar com paredes suaves $\sigma = 5 \times 10^{-2}$	62
5.4	Sobreposição das paredes aproximadamente rígidas (linha inteira) e paredes suaves (pontos).	62
5.5	Convergência dos expoentes de Lyapunov para 5 trajetórias, num tempo de evolução de 10^4 e $\tau = 0, 2$ para o tempo de evolução da trajetória satélite.	63
5.6	Valor médio do expoente de Lyapunov máximo a tempo-finito. Esta figura é construída com 400 trajetórias para $\sigma = 5 \times 10^{-3}$ (paredes aproximadamente rígidas) com linha tracejada. A curva com linha inteira representa os expoentes para paredes rígidas.	63
5.7	Distribuição $P(\Lambda_t, \gamma)$ dos expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito Λ_t em função da razão de massas γ das partículas. Em (a) temos o caso de paredes aproximadamente rígidas ($\sigma = 5 \times 10^{-3}$). Em (b) o caso de paredes rígidas.	65
5.8	Número de ocorrências dos expoentes de Lyapunov máximo de maior probabilidade $\Lambda_t^p(\gamma)$. Na parte de cima da figura temos o caso de paredes aproximadamente rígidas ($\sigma = 5 \times 10^{-3}$). Em baixo paredes rígidas.	66
5.9	Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 1, 0$ e $\sigma = 5 \times 10^{-3}$. Figura gerada para 100 trajetórias. A figura mostra ilhas de regularidade imersas num mar caótico.	67
5.10	Ampliação da figura (5.9). Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 1, 0$ e $\sigma = 5 \times 10^{-3}$	68
5.11	Segunda ampliação da figura (5.9). Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 1, 0$ e $\sigma = 5 \times 10^{-3}$. Formação de ilhas no espaço de fases.	68
5.12	Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 1, 8$ e $\sigma = 5 \times 10^{-3}$. A figura apresenta indícios de poucas ilhas no espaço de fases.	69
5.13	Valor médio do expoente de Lyapunov máximo a tempo-finito. Esta figura é contruída para 400 trajetórias para $\sigma = 5 \times 10^{-2}$ para linha inteira. Para a linha tracejada temos o caso de paredes aproximadamente rígidas ($\sigma = 5 \times 10^{-3}$).	70
5.14	Distribuição dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito $P(\gamma)$ em função da razões de massas γ das partículas. Caso de paredes suaves $\sigma = 5 \times 10^{-2}$	71
5.15	Número de ocorrências dos expoentes de Lyapunov máximo de maior probabilidade $\Lambda_t^p(\gamma)$ para $\sigma = 5 \times 10^{-2}$	72
5.16	Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 0, 8$ e $\sigma = 5 \times 10^{-2}$. Esta figura apresenta ilhas de regularidade no espaço de fases.	72
5.17	Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 1, 0$ e $\sigma = 5 \times 10^{-2}$. Observamos evidências do comportamento misto do sistema através de armadilhas dinâmicas imersas no mar caótico.	73

5.18	Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 1,0$ e $\sigma = 5 \times 10^{-2}$. Esta figura é uma ampliação da seção (5.17), que possibilita a melhor visualização das ilhas.	73
5.19	Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 1,0$ e $\sigma = 5 \times 10^{-2}$. Esta apresenta uma ampliação de (5.17) em outra região. Observamos o movimento regular coexistindo com o comportamento caótico.	74
5.20	Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 2,2$ e $\sigma = 5 \times 10^{-2}$. Apenas uma região não visitada é apresentada nesta figura.	74

Capítulo 1

Introdução

O problema de muitas partículas interagentes é de fundamental importância em todos os ramos da Física, como na mecânica celeste, física nuclear e de partículas. É conhecido que o número de constituintes (partículas), o tipo de interação entre estes constituintes, bem como as condições de contorno, são os fatores responsáveis pelo tipo de dinâmica presente no sistema. Normalmente sistemas com muitas partículas, ou seja, com muitos graus de liberdade, apresentam um comportamento irregular e caótico.

A investigação da origem do movimento caótico em bilhares, como o bilhar de Sinai [1], bilhar estádio de Bunimovich [2], ou do bilhar Anular [3], desempenhou um papel pioneiro desde o início da teoria do caos. Nestes sistemas, a dinâmica caótica de uma única partícula é consequência da geometria espacial do bilhar. Para sistemas com muitas partículas interagentes, o movimento caótico pode ser gerado pela combinação de efeito da força externa (paredes, forças oscilantes) e da interação mútua.

Quando o número de partículas é maior que um, o tratamento clássico e quântico destes sistemas pode ser bastante complexo. Nos sistemas clássicos, por exemplo, é possível construir Seções de Poincaré que permitam analisar a dinâmica das partículas no espaço de fases. Algumas estruturas como armadilhas dinâmicas ou Stickys podem aparecer. Uma ferramenta bastante útil para quantificar a existência de armadilhas no espaço de fases é a distribuição dos expoentes de Lyapunov. Mais especificamente, a variância [4] dos expoentes de Lyapunov pode ser usada para este fim, ou a variação do expoente de Lyapunov máximo de maior probabilidade de ocorrência, proposta recentemente [5] como uma ferramenta para determinar detalhes da dinâmica no espaço de fases.

O problema de duas partículas em uma caixa unidimensional com colisões rígidas, pode ser tratado como um caso particular do movimento de três partículas num anel finito [6, 7, 8]. A dinâmica de duas partículas também pode ser mapeada pelo movimento de uma partícula num bilhar triangular [9]. Bilhares triangulares têm sido usados no estudo da difusão de energia em sistemas unidimensionais [10].

Em [11] foi estudado um sistema com duas partículas num bilhar unidimensional, no qual Casati *et al.* mostraram que a dinâmica não é ergódica quando o ângulo θ , que relaciona as velocidades das partículas, é um múltiplo racional de π .

O problema envolvendo a interação entre as partículas, para razão de massas iguais, foi estudado em [13]. Duas partículas num bilhar unidimensional com interação Coulombiana foi considerado. Esse sistema exibe comportamento caótico e através das seções de Poincaré foram encontradas ilhas de regularidade no espaço de fases.

Um sistema clássico em que duas partículas estão confinadas num bilhar unidimensional foi apresentado em [5, 14]. Manchein *et al.* analisaram a dinâmica desse sistema variando a razão de massas entre as partículas. Para a interação das partículas foi considerado o potencial de Yukawa, para curto e longo alcance. O bilhar apresentou comportamento caótico para ambos os tipos de interação. Ilhas de regularidade afetam a distribuição dos expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito. Conforme aumenta-se a razão de massas, verifica-se o decaimento do valor dos expoentes de Lyapunov.

Nos bilhares mencionados acima as paredes são consideradas rígidas. Potenciais realísticos são, entretanto, suaves. Surge então a pergunta: qual o efeito de potenciais suaves sobre a dinâmica de partículas interagentes? Neste contexto, o bilhar óptico foi estudado, numericamente e experimentalmente por Kaplan *et al.* [15]. Esse bilhar é constituído pela ressonância de um laser, com alta frequência, num átomo de ^{85}Rb (Rubídeo). As paredes do bilhar foram modeladas através de um potencial Gaussiano. O bilhar tem comportamento caótico com presença de ilhas de regularidade no espaço de fases do sistema. Para esse sistema as paredes suaves são consideradas como uma perturbação ao sistema integrável, e a quebra dos toros são explicados pelo teorema KAM. O teorema de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) fornece uma ferramenta importante para o entendimento de sistemas Hamiltonianos integráveis submetidos a perturbações [16]. Quando a amplitude de uma perturbação cresce, alguns dos toros que descrevem a dinâmica de sistemas integráveis, começam a ser destruídos e a região caótica no espaço de fases aumenta. A sequência de quebra dos toros é fornecida pelo teorema KAM.

Bilhares quânticos são modelos feitos para o estudo da dinâmica de elétrons em pontos quânticos. Para este caso é utilizado um bilhar circular com paredes rígidas. Em [17] foi analisada a dinâmica de um sistema de duas partículas interagindo via potencial de Yukawa, sujeito a um campo magnético, e confinadas em um bilhar circular. Neste trabalho concluiu-se que quando a razão de massas aumenta, o sistema tende a um comportamento completamente caótico. Contudo, para específicos valores da razão de massas, existe regularidade no sistema. Outra situação bastante interessante foi mostrada por Van Vessen *et al.* [18] utilizando um sistema quântico formado por duas partículas confinadas num bilhar unidimensional. Neste trabalho mostrou-se que quando a razão de massas entre as partículas é diferente de 1, o comportamento apresentado pelo sistema possui características caóticas.

Neste trabalho estudamos o comportamento de duas partículas interagindo via potencial de Yukawa e confinadas a um bilhar unidimensional com paredes suaves. As paredes do bilhar são modeladas pela função “Erro”, de modo que o limite de paredes rígidas possa ser obtido. Para a análise da dinâmica do sistema é apresentada a distribuição dos expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito em função da razão de massas $\gamma = \frac{m_2}{m_1}$ das partículas. Apresentamos o número de ocorrência dos expoentes de Lyapunov máximo de maior probabilidade. Enquanto a média dos expoentes de Lyapunov quantificam o grau de caoticidade do sistema, a distribuição dos expoentes de Lyapunov, junto com o número de ocorrências do expoente mais provável, nos fornecem importantes informações sobre a existência de armadilhas dinâmicas no espaço de fases. A verificação da existência de trajetórias aprisionadas em torno de ilhas de regularidade no espaço de fases, presentes na distribuição dos expoentes de Lyapunov, é feita através da Seção de Poincaré do sistema.

Estudo semelhante foi apresentado em [20]. A dinâmica do Mapa Padrão foi analisada através da distribuição Bimodal dos Expoentes de Lyapunov Máximo a tempo finito em função das trajetórias do sistema. O espaço de fases do sistema apresentou armadilhas dinâmicas que diminuíram o valor do Expoente de Lyapunov, criando dois picos distintos na distribuição dos Expoentes.

Usando o método de Dellago *et al.* [21], uma extensão do método clássico desenvolvido por Benettin *et al.* [22] para o cálculo analítico do espectro dos expoentes de Lyapunov, encontramos expressões analíticas que fornecem a evolução do sistema no espaço de fases e no espaço tangente do bilhar. Fizemos uma aproximação das paredes, representadas pela função erro, através de n potenciais degrau. Essas aproximações nos fornecem as quantidades físicas, presentes nas matrizes de evolução, que levam a valores de expoentes de Lyapunov diferentes de zero, ou seja, nos mostram a influência dos mesmos no comportamento dinâmico do sistema. Um número maior de ilhas de regularidade no espaço de fases é encontrado devido à suavidade das paredes. Isto indica que para certas regiões do espaço de fases o sistema apresenta uma dinâmica regular.

No capítulo 2 faremos uma introdução aos conceitos de Sistemas dinâmicos tratando dos Formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano, passando por sistemas integráveis, teorema KAM, Seção de Poincaré, Armadilhas dinâmicas, Expoentes de Lyapunov, e pela Distribuição dos expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito.

No terceiro capítulo apresentaremos o método desenvolvido por Dellago *et al.*, citado anteriormente, para o cálculo analítico da matriz Monodrômica, que representa a evolução do sistema no espaço tangente e fornece os parâmetros que influenciam seu comportamento.

No capítulo 4 estudaremos os conceitos básicos sobre partículas aprisionadas em certas regiões do espaço, ou seja, em bilhares. Também trataremos do sistema desta dissertação.

No capítulo 5 são apresentados cálculos analíticos, que se baseiam na proposta feita no capítulo 3, e cálculos numéricos que visam qualificar o comportamento do

sistema estudado neste trabalho.

Por fim, no capítulo 6 faremos as conclusões finais sobre o trabalho, baseados nos resultados obtidos no capítulo anterior. Entre outros resultados, encontramos indícios de trajetórias aprisionadas no espaço de fases com a distribuição dos expoentes de Lyapunov. Através das seções de Poincaré obtemos a confirmação desses indícios e informações importantes sobre o espaço de fases do sistema.

Capítulo 2

Sistemas Dinâmicos

Em todos os ramos da ciência um dos conceitos centrais no entendimento dos fenômenos naturais é o de evolução no tempo. A descrição dinâmica, na qual o tempo exerce o papel essencial de variável independente, é utilizada nas mais variadas áreas da física, astronomia, matemática aplicada e engenharia. O tempo é considerado, nesta visão, como um parâmetro unidimensional, contínuo, representado matematicamente pela reta dos números reais. Mesmo com o advento da teoria da relatividade, que quebrou o conceito de um tempo absoluto e independente do observador, a continuidade do tempo e seu papel de parâmetro evolucionário básico permanece. Com o sucesso da mecânica newtoniana, nos séculos XVIII e XIX, no qual a evolução temporal dos sistemas é representada matematicamente pelas soluções das equações de Newton, outras áreas do conhecimento tiveram avanços significativos. Talvez a grande importância do estudo da dinâmica seja o fato de podermos prever o futuro dos sistemas. De fato, a previsibilidade (pelo menos em princípio), junto com o conceito de determinismo, é característica central da física clássica.

Neste capítulo falaremos sobre alguns conceitos de sistemas dinâmicos, em especial dos sistemas Hamiltonianos. Trataremos dos formalismos Lagrangeano e Hamiltoniano. Analisaremos também os sistemas integráveis e o teorema KAM. Na seção (2.2) de caos, faremos um breve estudo sobre Seção de Poincaré, Armadilhas dinâmicas, e finalmente sobre expoentes de Lyapunov, incluindo a distribuição dos mesmos.

Um sistema dinâmico é descrito por qualquer conjunto de grandezas, chamadas de variáveis dependentes, que variam no tempo. O tempo é chamado de variável independente. O estado do sistema é representado pelos valores, num dado instante de tempo, do conjunto completo de variáveis dependentes. O espaço de estados possíveis para um sistema é denominado *espaço de fases*. A evolução de tal sistema é descrita por um conjunto de equações discretas, por meio de mapas, ou contínuas, através de equações diferenciais, permitindo-nos a descrição do comportamento do sistema conforme o tempo evolui. O sistema dinâmico, no qual o tempo é uma

variável contínua, é expresso por N equações de primeira ordem autônomas [23]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = F_1[x_1, x_2, \dots, x_N], \\ \frac{dx_2}{dt} = F_2[x_1, x_2, \dots, x_N], \\ \vdots \\ \frac{dx_N}{dt} = F_N[x_1, x_2, \dots, x_N], \end{array} \right. \quad (2.1)$$

o qual nós podemos escrever em forma vetorial

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{F}[\vec{x}(t)], \quad (2.2)$$

onde \vec{x} é um vetor de dimensão N . Este é um sistema dinâmico porque para qualquer condição inicial do sistema $\vec{x}(0)$ podemos, em princípio, resolver a equação (2.2) obtendo assim o estado do sistema em um tempo futuro.

Para o caso de sistema com tempo discreto, ou seja, tempo com valores inteiros, podemos citar o exemplo de um mapa escrito em forma vetorial como

$$\vec{x}_{i+1} = \vec{M}(\vec{x}_i), \quad (2.3)$$

onde \vec{x}_i possui dimensão N . Dado um estado inicial \vec{x}_0 , podemos obter o estado no tempo $i = 1$ por $\vec{x}_1 = \vec{M}(\vec{x}_0)$. Determinando \vec{x}_1 podemos determinar o estado no tempo $i = 2$ através de $\vec{x}_2 = \vec{M}(\vec{x}_1)$, e assim os demais estados. Um sistema de tempo contínuo de dimensão N pode ser transformado num mapa de tempo discreto de dimensão $N - 1$, via técnica da Seção de Poincaré [23].

2.1 Sistemas Hamiltonianos

Sistemas Hamiltonianos são uma classe de sistemas dinâmicos cujo movimento é descrito pela solução das equações de Hamilton. Os sistemas Hamiltonianos diferem essencialmente de outros, por seu volume no espaço de fases ser constante. Pode-se citar como exemplo de dinâmicas Hamiltonianas, o problema de vários osciladores acoplados. Nesta seção trataremos das coordenadas generalizadas, passando pela equação de Lagrange, pelo formalismo Hamiltoniano, sistemas Hamiltonianos integráveis e finalmente pelo teorema KAM.

2.1.1 Coordenadas generalizadas e Formalismo Lagrangeano

O estado de um sistema Hamiltoniano num tempo qualquer é totalmente obtido a partir de uma função escalar $\mathcal{H}(q, p, t)$ e do estado inicial. Para se obter

esta configuração, devemos antes, encontrar a equação de Lagrange. Por isso primeiro introduziremos a formulação Lagrangeana, e em seguida analisaremos a formulação Hamiltoniana.

Em determinados sistemas é possível introduzir um certo número n de variáveis independentes, expressas genericamente por q_1, q_2, \dots, q_n e denominadas *coordenadas generalizadas* [24, 25]. No caso de um sistema tridimensional teremos como coordenadas q_1, q_2 e q_3 representando, por exemplo, as coordenadas cartesianas x, y e z . Um sistema mecânico constituído por N partículas submetidas a p vínculos holônomos [25] expressam suas equações da forma

$$\begin{cases} f_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0 \\ \vdots \\ f_p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) = 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Das $3N$ coordenadas $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_N, y_N, z_N)$ apenas $n = 3N - p$ podem ser tomadas como independente entre si, então o sistema possui N *graus de liberdade*. É possível introduzir N coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_N em termos de

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_N, t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.5)$$

para que as equações (2.4) sejam identicamente satisfeitas. Cada conjunto de valores atribuídos às coordenadas generalizadas definem uma configuração do sistema, por isso o espaço cartesiano, que possui coordenadas generalizadas como eixos, é chamado de *espaço de configuração* do sistema.

A segunda lei de Newton,

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (2.6)$$

relaciona a variação temporal do momento \vec{p} de um corpo à força \vec{F} que atua sobre ele. Pelo formalismo Lagrangeano essa lei pode ser reescrita de maneira equivalente em termos da energia cinética e da energia potencial associadas à força aplicada. Essa formulação advém de um princípio variacional escrito numa forma integral chamado de princípio de mínima ação [24]. O formalismo Lagrangeano consiste em escrever uma função com as variáveis do sistema chamada de Função de Lagrange descrita como

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - V(q), \quad (2.7)$$

onde T representa a energia cinética e V a energia potencial do sistema [24]. De posse desta função encontramos as equações de movimento do sistema denominadas Equações de Lagrange, que são escritas na forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

Essas equações constituem um sistema de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem que determinam univocamente os $q_k(t)$, desde que sejam dadas as

$2n$ condições iniciais. As equações de Lagrange descrevem as equações de movimento de uma forma mais simples do que a equação de Newton, pois envolvem o número mínimo de coordenadas, além de eliminar qualquer referência às forças de vínculos. Em lugar das forças e acelerações vetoriais que caracterizam a formulação Newtoniana, o método de Lagrange apenas lida com funções escalares, simplificando bastante nossos cálculos. Essas equações ainda nos permitem a utilização de qualquer sistema de coordenadas generalizadas que melhor se encaixa em cada problema.

2.1.2 Formalismo Hamiltoniano

Na seção anterior vimos que, na formulação Lagrangeana, o movimento de um sistema mecânico é descrito por equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no tempo. As equações de Lagrange, para um sistema com n graus de liberdade, constituem um conjunto de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem no tempo para as coordenadas generalizadas $q_1(t), \dots, q_n(t)$. O movimento do sistema é univocamente determinado desde que $2n$ condições iniciais sejam especificadas, e é descrito por uma curva no espaço de configuração.

Na formulação Hamiltoniana o quadro é diferente, temos $2n$ equações de primeira ordem no tempo para $2n$ variáveis independentes. O movimento do sistema é descrito por uma curva no *espaço de fases*, onde o estado do sistema é descrito pelas variáveis independentes \vec{q} e \vec{p} .

Para que haja uma descrição hamiltoniana deve-se realizar uma substituição das variáveis $(\vec{q}, \dot{\vec{q}})$ para (\vec{q}, \vec{p}) em todas as grandezas mecânicas. A Hamiltoniana, ou função de Hamilton, provém de uma *transformação de Legendre* [26] e é escrita como

$$\mathcal{H}(q, p, t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - \mathcal{L}(q, \dot{q}, t). \quad (2.9)$$

A partir da definição de momento generalizado [26] obtemos as equação de movimento do sistema, ou também chamadas *equações canônicas de Hamilton*, expressas como

$$\begin{aligned} \frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial \mathcal{H}(q, p, t)}{\partial p_j}, \\ \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial \mathcal{H}(q, p, t)}{\partial q_j}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

No caso em que a Hamiltoniana não dependa explicitamente do tempo teremos

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}(q, p)}{dt} &= \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \frac{dp_j}{dt} \right) \\ &= \sum_j \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_j} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_j} \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Isso mostra que \mathcal{H} é uma constante de movimento. Na situação em que podemos escrever a Hamiltoniana como uma soma, entre a energia cinética e a energia potencial do sistema, poderemos dizer que a função de Hamilton é igual a energia total do sistema, ou seja, $\mathcal{H} = E$, então o sistema é dito *conservativo*.

2.1.3 Sistemas Hamiltonianos integráveis

Consideramos um sistema Hamiltoniano com N graus de liberdade. Se a equação de Hamilton-Jacobi, expressa como

$$H\left(q_1, \dots, q_N, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_N}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0, \quad (2.12)$$

for separável em N equações independentes, uma para cada grau de liberdade, então podemos dizer que o movimento resultante é *integrável*. Na equação (2.12), $S = S(q_i, \alpha_i)$ é a função *Geratriz* [25] obtida da solução da equação de Hamilton-Jacobi. As constantes de separação α_i são escritas em termos das variáveis ação-ângulo $\alpha_i(\varphi_i, J_i)$, onde temos

$$J_i = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.13)$$

como a representação da variável ação, e a variável angular é descrita como

$$\varphi_i = \frac{\partial S}{\partial J_i}. \quad (2.14)$$

As constantes $\alpha_i(\varphi_i, J_i)$, são conhecidas como *integrais de movimento*, ou *invariantes de movimento*. Cada invariante isola um grau de liberdade pela propriedade $\partial \mathcal{H} / \partial p_i = f(q_i)$ [27].

Um sistema também é dito integrável se possuir m integrais de movimento $I_1(q, p), \dots, I_m(q, p)$ em *involução* [27, 24], ou seja,

$$\{I_k, I_l\} = 0, \quad k, l = 1, \dots, m. \quad (2.15)$$

Um sistema é dito *Super-integrável* quando possui mais constantes de movimento do que seus graus de liberdade.

2.1.4 Teorema KAM

O teorema KAM foi provado independentemente por Arnold [28] e Moser [29], seguindo uma conjectura proposta por Kolmogorov [30], por isso recebeu o nome de teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser).

Consideremos um sistema com dois graus de liberdade [27], onde a hamiltoniana é separável e escrita como função das coordenadas e dos momentos generalizados

(\vec{q}, \vec{p}) , e igual à energia total do sistema (E). Devemos considerar ainda, ω_1 e ω_2 , como sendo as frequências naturais do sistema. Essa relação implica que, conhecidos os valores de E e de três variáveis num instante t , pode-se obter o valor da quarta variável nesse mesmo instante. Portanto, uma vez que a condição inicial é escolhida, as trajetórias permanecem confinadas numa variedade tridimensional de energia constante. Neste exemplo podemos escrever a Hamiltoniana em termos das variáveis ação-ângulo $(\varphi_1, J_1, \varphi_2, J_2)$, da seguinte forma

$$K_0(J_1, J_2) = E, \quad (2.16)$$

e a evolução do sistema é dada por

$$\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + \omega_1 t, \quad \varphi_2(t) = \varphi_2(0) + \omega_2 t, \quad (2.17)$$

com J_1 e J_2 constantes. A condição inicial determina os valores das constantes $J_1, J_2, \varphi_1(0), \varphi_2(0)$. Como há duas constantes de movimento, E e J_1 (ou E e J_2), as trajetórias estão contidas numa variedade bidimensional. Representamos a evolução desse sistema sobre uma superfície toroidal. Sejam, respectivamente, J_1 e J_2 , os raios menor e maior do toro, e φ_1 e φ_2 , os ângulos poloidal e toroidal, de acordo com a figura (2.1). Como o movimento do sistema se dá sobre uma superfície $K_0 = E =$

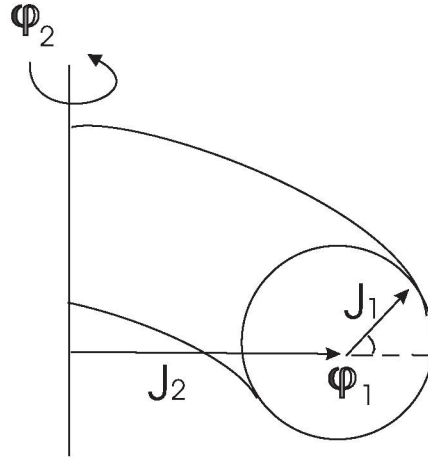


Figura 2.1: Representação do movimento sobre uma superfície toroidal.

constante, então cada valor de E corresponde a um toro de raios J_1 e J_2 . Essa superfície toroidal é obtida através de $J_1 = J_2(J_1, E)$ ou $J_2 = J_1(J_2, E)$. A variação temporal da posição angular de um ponto sobre o toro é determinada a partir das expressões para $\varphi_1(t)$ e $\varphi_2(t)$. Conforme o tempo passa, esse ponto descreve uma trajetória que tem a forma de uma hélice toroidal. Se a razão entre as frequências $q = \frac{\omega_1}{\omega_2}$, for um número racional, ou seja, se $q = \frac{n_1}{n_2}$, sendo n_1 e n_2 inteiros, então o toro no qual se encontra a trajetória helicoidal toroidal é denominada de *toro racional* ou superfície racional, e o toro percorrido pela trajetória do sistema é chamado de *toro ressonante*. Qualquer trajetória que pertença a esse toro se fecha após n_1 voltas

poloidais e n_2 voltas toroidais. Portanto, valores racionais de q implicam em um movimento *periódico*.

Se q é um número irracional, então tem-se um *toro irracional*, e a trajetória jamais se fecha. Assim, para $t \rightarrow \infty$, qualquer trajetória cobre toda a superfície do toro, nesse caso, diz-se que o movimento é *quase-periódico* e o toro percorrido pela trajetória do sistema é chamado de *toro não-ressonante*.

Agora consideremos a Hamiltoniana perturbada

$$K(\mathbf{J}, \varphi) = K_0(\mathbf{J}) + \varepsilon K_1(\mathbf{J}, \varphi) = E. \quad (2.18)$$

A Hamiltoniana K escrita em termos das variáveis ação-ângulo, é dada pela soma entre a Hamiltoniana K_0 , chamada de Hamiltoniana não-perturbada de um sistema integrável, com o termo perturbativo K_1 não-linear. Assume-se que a perturbação seja pequena de tal forma que $\varepsilon \ll |K_1|/|K_0|$. Supondo que essa perturbação quebre a integrabilidade do sistema, o problema agora é determinar se os toros são ou não destruídos pela perturbação. Em alguns casos, por menor que seja a perturbação, eles são destruídos [23]. Para os toros não-ressonantes, a resposta se obtém através do teorema KAM.

Este teorema nos diz que se as frequências de um sistema hamiltoniano integrável K_0 são racionalmente independentes e suficientemente irracionais, então, para ε suficientemente pequeno, as soluções do sistema perturbado são predominantemente quase-periódicos e só diferem ligeiramente das do sistema não-perturbado. Portanto, perturbações fracas não alteram, substancialmente, a maioria dos toros que contém trajetórias quase-periódicas. São destruídos apenas os toros mais próximos dos ressonantes [25, 26, 27]. A medida que a intensidade da perturbações cresce, todos os toros são sistematicamente destruídos. Pelo teorema KAM sabemos [26] que o último toro a ser destruído, é aquele cujo q é o número mais irracional possível, o chamado média de ouro dado por $q = \frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$.

2.2 Caos

O estudo do caos iniciou-se com Henri Poincaré entre 1886 e 1889, quando este elaborou soluções parciais para o problema de três corpos [31]. Esta pesquisa foi publicada em 1899 e Poincaré tinha o intuito de explicar a estabilidade do sistema solar. Desde então, vários cientistas deparam-se com inúmeros problemas dos quais não se podem encontrar soluções exatas. Um sistema pode ser completamente regular (não exibe caos) e ainda assim não possuir solução analítica explícita. É justamente o caso do pêndulo simples [32]. Na realidade, uma definição exata de caos torna-se bastante complicada devido à variedade e complexidade de sistemas existentes na natureza, mas como uma definição primária, usaremos a seguinte proposta feita por R. L. Devaney em [33]. Um sistema dinâmico é caótico se possuir dependência sensível às condições iniciais. Isso nos diz que, as equações de movimento, com duas condições iniciais próximas dadas pelas posições, geram trajetórias

exponencialmente divergentes no espaço de fases do sistema. A sensibilidade a pequenas variações, sobre determinados parâmetros contidos no sistema, faz com que apareça uma imprevisibilidade prática em tempos futuros.

2.2.1 Seção de Poincaré

Uma ferramenta bastante útil na transformação de um fluxo contínuo no espaço de fases em um mapa discreto, é a Seção de Poincaré. Esta transformação nos diz que modificamos um sistema de N equações diferenciais, em um mapa, com tempo discreto, num espaço de fases com dimensão $N - 1$. Tal método foi desenvolvido por H. Poincaré para o estudo do problema de três corpos.

O uso desse método nos fornece algumas vantagens tais como:

- 1) Redução Dimensional do espaço de fases do problema, um espaço de N para $N - 1$ dimensões.
- 2) Para sistemas com dimensões de ordem mais baixa, a integração numérica das equações de movimento do problema, expõe uma forma mais simples a dinâmica do sistema.
- 3) Essa técnica salienta alguns conceitos físicos importantes no estudo do sistema, que não apareciam em sua forma original. Como por exemplo o aparecimento das curvas KAM em sistemas Hamiltonianos.

Para construir uma seção de Poincaré consideramos um fluxo N -dimensional, representado por equações diferenciais do tipo

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{F}[\vec{x}(t)]. \quad (2.19)$$

Essas equações geram um espaço de fases dado pelas variáveis do sistema. Fazendo uma interseção num dado volume, nesse espaço, obtemos uma hiper-superfície Ω por onde o fluxo passará. Cada vez que uma trajetória gerada pela evolução do sistema, atravessa a hiper-superfície, é marcado um ponto representado por $\vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}, \vec{x}_{n+2}$ e assim sucessivamente. A marcação é feita num único sentido. Com esses pontos é escrito o *mapa de Poincaré* [26], que nos fornece a relação entre um ponto e outro. Na maioria dos casos não é possível achar uma expressão analítica para o mapa de Poincaré. Entretanto, na análise numérica esta ferramenta é bastante útil. Esse esquema pode ser visualizado melhor na figura (2.2).

2.2.2 Armadilhas dinâmicas

A Física Estatística considera sistemas dentro do chamado limite termodinâmico [34] com

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{N}{V} = \text{constante}, \quad (2.20)$$

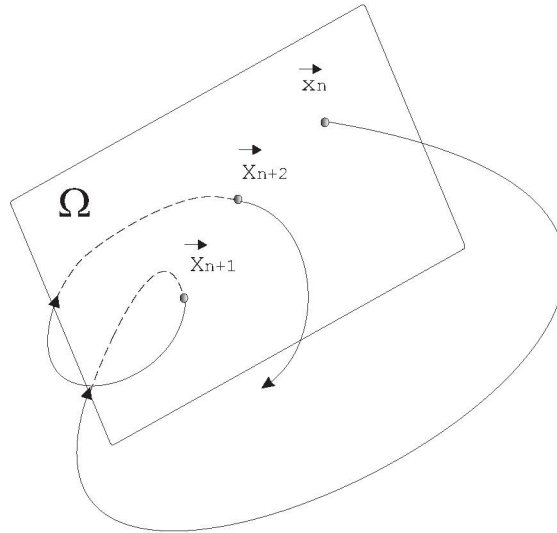


Figura 2.2: Representação da Seção de Poincaré. Nesta figura o fluxo que representa a evolução do sistema, atravessa uma seção Ω em vários pontos, formando a seção de Poincaré.

sendo N o número de partículas e V o volume que as limita. Certos sistemas dinâmicos caóticos, como o problema de uma partícula confinada num bilhar retangular com dois lados sendo semi-círculos (bilhar de Bunimovch), podem apresentar características diferentes das esperadas segundo a Física Estatística. As armadilhas dinâmicas podem ser definidas como regiões do espaço de fases, onde partículas (ou trajetórias) podem permanecer durante grandes intervalos de tempo, nos quais a dinâmica se torna quase-regular [35]. Uma das características de tais armadilhas, é a sua propriedade fractal [36].

Um dos principais objetivos desta dissertação é estudar as armadilhas dinâmicas existentes no espaço de fases do sistema. Sabemos que em quase todo espaço de fases de um sistema Hamiltoniano, podemos encontrar estruturas muito complicadas, onde regiões caóticas coexistem com regiões regulares ou quase-regulares [23, 27]. Uma consequência qualitativa da presença de armadilhas dinâmicas num sistema dinâmico, está relacionada com a diminuição do módulo do expoente de Lyapunov local na armadilha, ou seja, a influência das armadilhas aparecem no cálculo do expoente de Lyapunov, durante o intervalo de tempo que a trajetória permanece aprisionada. Podemos classificar as armadilhas dinâmicas, seguindo a literatura, como:

► *Armadilhas de Ilhas-hierárquicas*

Esta armadilha relaciona-se à existência de regiões no espaço de fases onde ocorre o aprisionamento de trajetórias por um certo intervalo de tempo, e que mantém uma auto-similaridade com diferentes partes do espaço de fases [36]. A figura (2.3) apresenta uma seção de Poincaré, para o mapa padrão dado por

$$p_{n+1} = p_n + K \text{sen}(x_n), \quad (2.21)$$

onde encontramos uma estrutura de armadilha de ilhas-hierárquicas.

► *Armadilhas de Rede*

Armadilhas de rede surgem através da variação de parâmetros de controle de um sistema dinâmico. O sistema pode apresentar diferentes bifurcações. Neste caso ocorre a criação de uma cadeia de ilhas que separam-se aos poucos, formando ilhas primárias [36, 37]. Um exemplo deste tipo de armadilha é visto no mapa padrão, esquematizado na figura (2.4), que foi retirada de [36].

► *Armadilhas de Camadas Caóticas*

A armadilha de camadas consiste numa ilha com um ponto elíptico imerso no mar caótico, conforme a figura (2.5-a). Com a mudança de um parâmetro de controle, uma bifurcação aparece na região onde há a criação de dois pontos elípticos adicionais e um hiperbólico, de acordo com a figura (2.5-b). As separatrizes apresentadas na figura (2.5-c) são destruídas por uma perturbação e substituídas por uma estreita camada caótica.

2.2.3 Expoente de Lyapunov

Uma das características de um sistema caótico é a sua sensibilidade à mudanças nas condições iniciais. Para medir a taxa de divergência de trajetórias, e portanto, quantificar a dependência sensitiva às condições iniciais utilizam-se os Expoentes Característicos de Lyapunov, ou simplesmente, Expoentes de Lyapunov [26, 32].

Num sistema de N equações diferenciais ordinárias, consideremos uma hiper-esfera de condições iniciais centradas num ponto $\vec{x}(t_0)$. A hiper-esfera se deforma com a evolução temporal do sistema. Assumindo que o raio inicial $d_j(t_0)$ varie exponencialmente no tempo ao longo da j -ésima dimensão, com $j = 1, 2, \dots, N$, temos a relação entre $d_j(t_0)$ e o valor correspondente ao instante t , dado por $d_j(t)$, expressa como

$$d_j(t) = d_j(t_0)e^{\Lambda_j(t-t_0)}. \quad (2.22)$$

Essa relação pode ser reescrita como

$$\Lambda_j = \lim_{(d_j(t_0) \rightarrow 0)} \lim_{((t-t_0) \rightarrow \infty)} \frac{1}{t-t_0} \ln \left[\frac{d_j(t)}{d_j(t_0)} \right] \quad (2.23)$$

Os números Λ_j são chamados de *expoentes de Lyapunov*. Um sistema de dimensão N possui N expoentes de Lyapunov, e estes podem ser escritos de forma decrescente $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_N$.

Num instante $t > t_0$, o volume $V(t)$ da hiper-esfera é proporcional ao produto das distâncias $d_j(t)$ que o caracterizam, isto é:

$$V(t) \propto \prod_{j=1}^n d_j(t) = V(t_0)e^{(t-t_0)\sum_{j=1}^n \Lambda_j}, \quad (2.24)$$

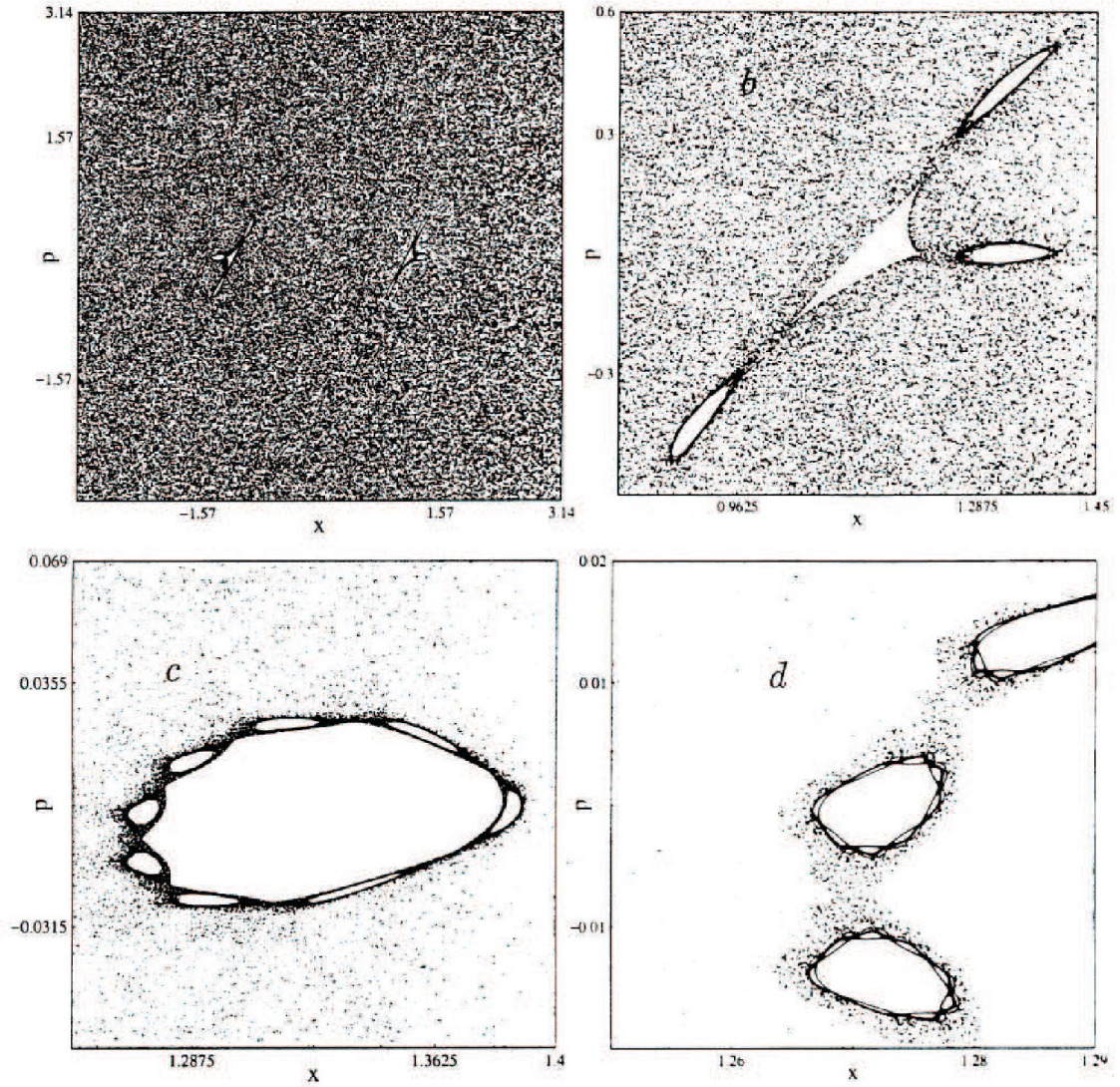


Figura 2.3: Exemplo de armadilha de ilha-hierárquica com um conjunto de ilhas auto-similares presentes na dinâmica do mapa padrão. (a) Espaço de fases completo. (b-d) Consecutivas ampliações na cadeia de ilhas. Figura extraída de [36].

sendo $V(t_0)$ o volume no instante inicial t_0 . Se o sistema é conservativo, então $V(t) = V(t_0)$, ou seja,

$$\sum_{j=1}^n \Lambda_j = 0, \quad (2.25)$$

para $t > t_0$. Isto mostra que, neste caso, o teorema de Liouville é válido [26, 32]. Se

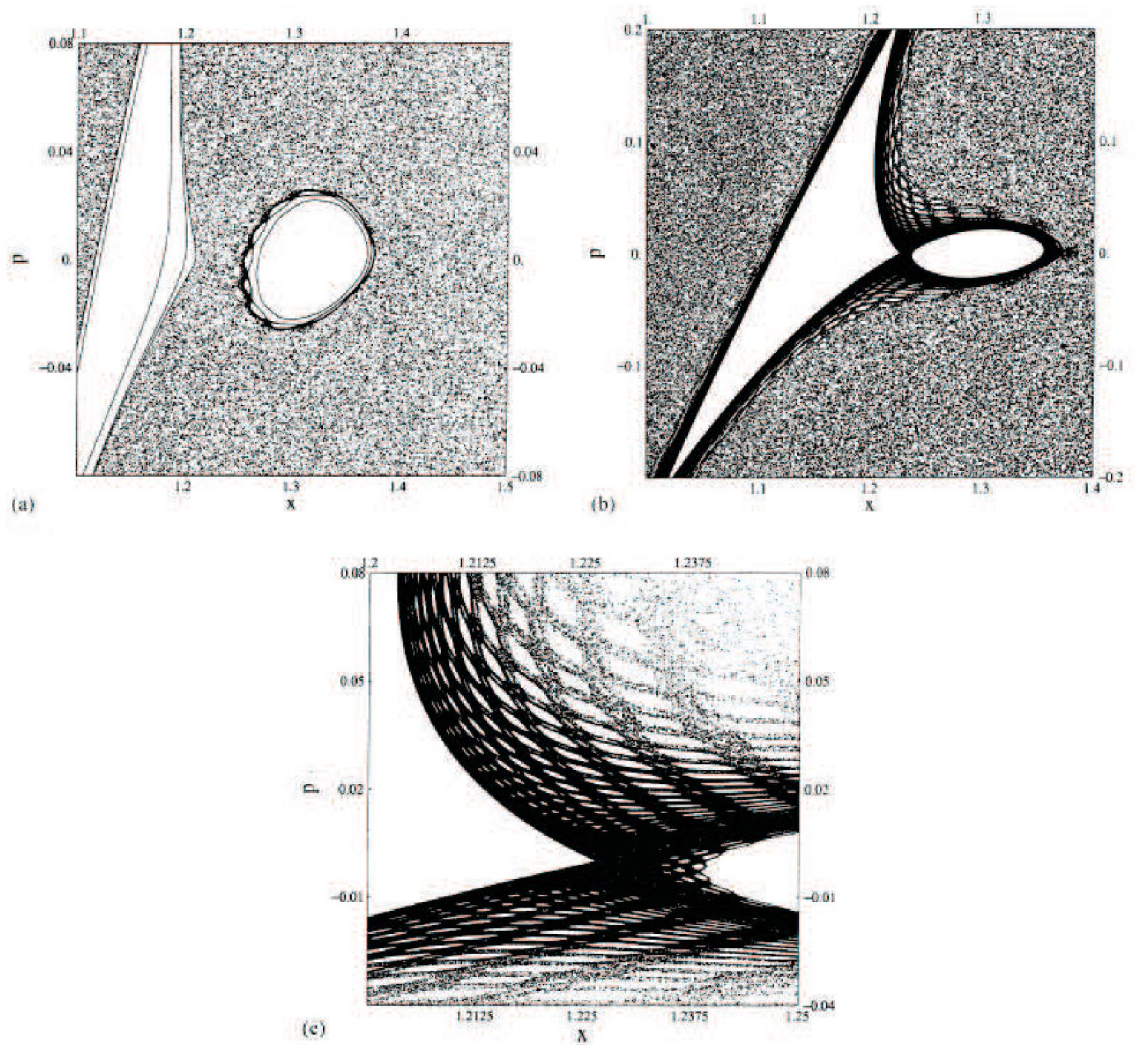


Figura 2.4: Exemplo de armadilha de rede para o mapa padrão. A figura mostra uma armadilha de rede. Figura extraída de [36].

o sistema é dissipativo, $V(t) < V(t_0)$ para $t > t_0$, o que equivale a

$$\sum_{j=1}^n \Lambda_j < 0. \quad (2.26)$$

Numa trajetória fechada, correspondente a uma solução periódica, a distância entre dois pontos se mantém constante, em média, com o passar do tempo, de modo que a expansão associada a essa direção é nula. Portanto, o expoente de Lyapunov correspondente a essa direção é nulo.

O comportamento caótico é caracterizado pela divergência exponencial de trajetórias vizinhas. Nesse caso, há pelo menos um expoente de Lyapunov positivo, o que implica a dependência sensível às condições iniciais e a existência de um atrator

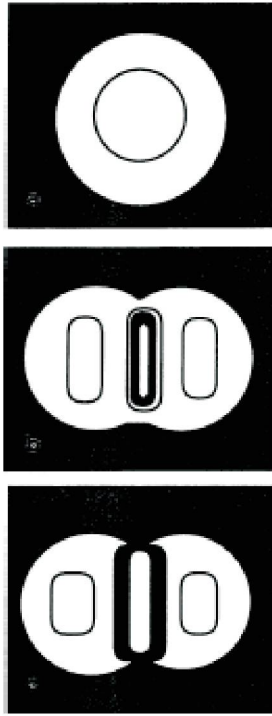


Figura 2.5: A figura mostra a evolução das estruturas internas das ilhas. (a) Estado inicial de um ponto elíptico. (b) Bifurcação e criação de duas selas e dois novos pontos elípticos. (c) Dois pontos elípticos imersos num mar caótico e separados por uma camada caótica. Figura extraída de [36].

no espaço de fases, quando a equação (2.26) é satisfeita. Podemos concluir que:

- a) a existência de um ou mais expoentes de Lyapunov positivos define uma instabilidade das órbitas nas direções associadas;
- b) para uma solução caótica, associada a um atrator, a dependência às condições iniciais implica na existência de pelo menos um expoente de Lyapunov $\Lambda_j > 0$;
- c) para uma solução periódica, ou quase periódica, pode-se esperar que deslocamentos na direção perpendicular ao movimento diminuam com o tempo, enquanto que ao longo da trajetória eles não devem se alterar, correspondendo a um simples deslocamento do ponto inicial.

Uma definição de *atrator* pode ser obtida em [26]. Neste, um atrator é um conjunto fechado de pontos no espaço de fases de um sistema dinâmico, no qual qualquer trajetória que começa no conjunto permanece nele por todo o tempo. Para informações detalhadas sobre a definição de atratores, o leitor pode consultar as referências [23, 26, 32].

Um sistema que possui mais de um expoente de Lyapunov positivo pode ser classificado como sendo *hipercaótico* [38]. Para que o sistema descrito por um fluxo, ou seja, descrito por equações diferenciais, possa ser chamado de hipercaótico as seguintes condições devem ser respeitadas [39, 40]:

- 1) O espaço de fases deve ter dimensão mínima igual a 4 para um sistema de tempo contínuo (fluxos).
- 2) O sistema deve possuir mais do que um expoente de Lyapunov positivo, e a somatória de seus expoentes deve ser zero no caso de sistemas conservativos.

Como exemplo da classificação de um sistema devido aos expoentes de Lyapunov encontrados, podemos citar um sistema que possua quatro expoentes de Lyapunov, organizados da seguinte maneira:

- a) $\Lambda_1 > 0$; $\Lambda_2 = 0$; $\Lambda_3 < 0$ e $\Lambda_4 < 0$, o sistema possui um atrator caótico.
- b) $\Lambda_1 = 0$; $\Lambda_2 < 0$; $\Lambda_3 < 0$ e $\Lambda_4 < 0$, o sistema converge para um ciclo limite, ou seja, este fica contido numa certa região do espaço.
- c) $\Lambda_1 > 0$; $\Lambda_2 > 0$; $\Lambda_3 = 0$ e $\Lambda_4 < 0$, o sistema é dito hipercaótico [39].

2.2.4 Cálculo do Expoente de Lyapunov Máximo a tempo finito

A primeira técnica utilizada neste trabalho para o cálculo do expoente de Lyapunov máximo, foi desenvolvida independentemente por Benettin *et al.* [41, 42] e por Shimada e Nagashima [43] entre 1976 e 1979. A técnica consiste em utilizar as soluções das equações diferenciais

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{F}[\vec{x}(t)], \quad (2.27)$$

que governam a dinâmica do sistema. Dada uma condição inicial $\vec{x}_0(t_0)$, o sistema gera uma determinada trajetória chamada de trajetória *principal*. Na sequência, tomamos uma segunda condição inicial $\vec{y}_0(t_0)$ próxima a anterior, tal que a separação entre elas é dada por $|\vec{x}_0(t_0) - \vec{y}_0(t_0)| = \varepsilon_0$. Com esta condição inicial as equações de movimento geram outra trajetória, chamada de trajetória *satélite*, próxima à trajetória principal.

Com a evolução temporal desse sistema até um tempo τ , olhamos para os novos pontos $\vec{x}_1(\tau)$ e $\vec{y}_1(\tau)$, agora separados por uma distância ε_1 . Neste intervalo τ , continuamos no mesmo ponto da trajetória principal $\vec{x}_1(\tau)$, mas escolhemos um novo ponto $\vec{y}_1(\tau)$ para a trajetória satélite, de tal forma que estes dois pontos possuem a mesma separação dos pontos no tempo $t = 0$, ou seja, $|\vec{x}_1(\tau) - \vec{y}_1(\tau)| = \varepsilon_0$.

Evoluímos novamente o sistema por um tempo τ e obtemos novos pontos, mas com uma separação ε_2 . Fazendo este procedimento várias vezes obtemos uma série de pontos da forma ε_i com $i = 1, 2, \dots, n$ [44] conforme mostra a figura (2.6). O módulo $|\varepsilon_0|$ é sempre o mesmo, mas o vetor $\vec{\varepsilon}_i$ no espaço de fases pode mudar.

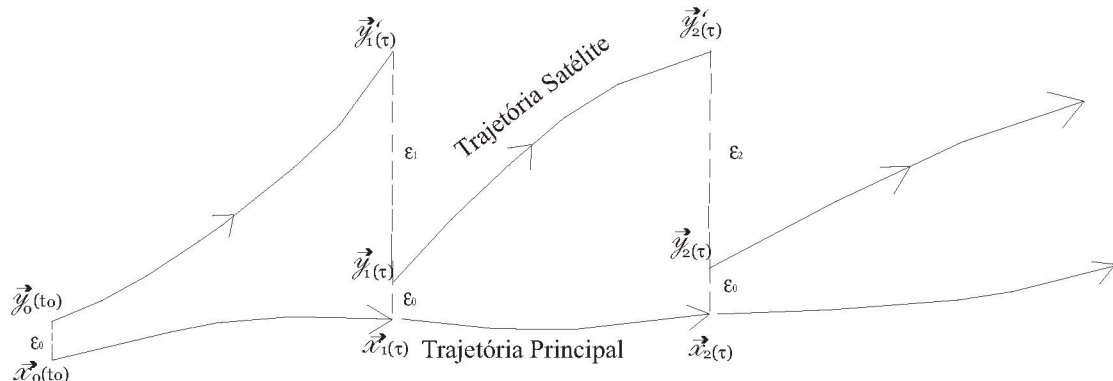


Figura 2.6: Trajetórias principal e satélite obtidas da evolução do sistema. Esta figura mostra a divergência entre as trajetórias.

Através do procedimento apresentado acima, Benettin, *et al.* [41] demonstrou que o expoente de Lyapunov máximo pode ser calculado com o auxílio da equação

$$\Lambda_{max} = \lim_{n \rightarrow +\infty} k_n, \quad (2.28)$$

com

$$k_n = \lim_{\varepsilon_0 \rightarrow 0} \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_0} \right), \quad (2.29)$$

sendo que, se o sistema for ergódico o cálculo de Λ_{max} , não dependerá da escolha das condições iniciais [45].

2.2.5 Distribuição dos Expoentes de Lyapunov Máximo a tempo finito

Utilizando o procedimento apresentado na seção anterior, encontramos os expoentes de Lyapunov máximo a tempo infinito. Para obtermos informações sobre o espaço de fases do sistema usamos a Distribuição dos Expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito $P(\Lambda_t)$. A distribuição destes expoentes consiste em armazenar as trajetórias geradas pelas equações de movimento e os expoentes de Lyapunov calculados para cada trajetória. Com esses dados geramos uma distribuição dos expoentes de Lyapunov em função das trajetórias, e se necessário, de outro parâmetro do sistema.

Vários pontos desta distribuição convergem para o mesmo valor de expoente de Lyapunov, formando o expoente de Lyapunov de maior probabilidade de

ocorrência Λ_t^p . Os pontos abaixo desta curva representam as armadilhas dinâmicas presentes no sistema em estudo.

Enquanto o valor médio dos expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito apenas quantifica o grau de caoticidade do sistema, o expoente de Lyapunov de maior probabilidade de ocorrência Λ_t^p , extraído da distribuição dos expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito, nos fornece informações significativas sobre estruturas regulares e trajetórias aprisionadas no espaço de fases. A distribuição dos Expoentes de Lyapunov Máximo a tempo finito, $P(\Lambda_t)$, tornou-se uma ferramenta bastante interessante para detectar ilhas de regularidade no espaço de fases [4, 5].

Em sistemas Hamiltonianos, os movimentos regulares e caóticos podem aparecer simultaneamente no espaço de fases. Isso causa uma grande variação na instabilidade local ao longo de uma trajetória caótica [46]. Essas variações podem ser quantificadas através dos expoentes de Lyapunov a tempo finito, que medem a separação entre trajetórias próximas durante um intervalo de tempo τ . Essa técnica consiste em calcular os expoentes de Lyapunov para várias condições iniciais.

Em geral, para um tempo infinito, os expoentes de Lyapunov Λ_∞ são bem definidos e não dependem das condições iniciais. Essa característica torna-se verdade para tempos relativamente longos, e quando o espaço de fases é ergódico. Neste caso, os expoentes de Lyapunov convergem rapidamente. Ergodicidade é uma propriedade de sistemas dinâmicos que ocorre quando a média temporal de uma função integrável no espaço de fases é igual a uma média espacial desta função [47]. Esta é chamada de função invariante por não depender das condições iniciais escolhidas.

Em sistemas quase-integráveis, trajetórias caóticas aprisionadas em torno de ilhas de regularidade fazem com que os valores dos expoentes de Lyapunov locais diminuam [5]. Isto afeta a convergência dos expoentes de Lyapunov Λ_t , que agora podem depender das condições iniciais. Por outro lado, isto implica que a distribuição $P(\Lambda_t, \gamma)$, calculada sobre muitas condições iniciais, contém informações sobre a quantidade de trajetórias aprisionadas no espaço de fases.

Em sistemas ergódicos, usualmente, para tempos longos mas finitos, $P(\Lambda_t)$ assume uma distribuição Gaussiana em torno da média dos expoentes de Lyapunov (ver referência [48]). Para $t \rightarrow \infty$ a distribuição $P(\Lambda_t)$, num espaço de fases completamente caótico tende a uma distribuição delta, ou seja, $P(\Lambda_t) = \delta(\Lambda - \Lambda_\infty)$ [49, 50]. Para um longo intervalo de tempo, a maior parte da distribuição pode-se aproximar de uma Gaussiana centrada em Λ_∞ , com largura tendendo a zero quando $t \rightarrow \infty$ [50, 51].

Capítulo 3

Extensão do algoritmo de Benettin

Neste capítulo mostraremos a extensão do algoritmo clássico desenvolvido por Benettin *et al.* [22], para o cálculo do espectro do expoente de Lyapunov para fluídos [52]. Este cálculo foi apresentado em 1996 por Dellago *et al.* [21], aplicado à sistemas mais gerais. Este método será aplicado ao nosso problema que será apresentado no capítulo 4.

Tipicamente, sistemas com muitos corpos possuem forte sensibilidade a variação da condições iniciais, neste caso dois pontos inicialmente separados por uma pequena distância no espaço de fases tendem à divergir exponencialmente, assim o sistema é dito caótico. Consideremos um sistema de N equações diferenciais ordinárias acopladas da forma da equação

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{G}(\vec{x}), \quad (3.1)$$

onde $\vec{G}(\vec{x})$ é um vetor N -dimensional no espaço de fases do sistema. Podemos relacionar um estado qualquer \vec{x}_f , descrito pelas equações (3.1), à um estado inicial \vec{x}_i do sistema através de

$$\vec{x}_f = \vec{M}(\vec{x}_i), \quad (3.2)$$

aplicado a tempos discretos $\{\tau_1, \tau_2, \dots\}$. O mapa $\vec{M}(\vec{x}_i)$ deve ser diferenciável com respeito as variáveis do espaço de fases. Os índices i e f denotam os estados inicial e final do mapa M . No intervalo de tempo $\tau_{i+1} - \tau_i$ a trajetória é determinada via integração da equação (3.1). Considerando os eventos de mapeamento singular nos instantes τ_i , a evolução completa nos espaços de fases e tangente, pode ser escrita como

$$\vec{x}(t) = \phi_{t-\tau_n} \cdot \vec{M} \cdot \phi_{t-\tau_{n-1}} \cdot \dots \cdot \phi_{\tau_2-\tau_1} \cdot \vec{M} \cdot \phi_{\tau_1} \cdot \vec{x}(0), \quad (3.3)$$

$$\delta\vec{x}(t) = L_{t-\tau_n} \cdot \vec{S} \cdot L_{t-\tau_{n-1}} \cdot \dots \cdot L_{\tau_2-\tau_1} \cdot \vec{S} \cdot L_{\tau_1} \cdot \delta\vec{x}(0), \quad (3.4)$$

onde \vec{L} e ϕ são os propagadores de \vec{x} e $\delta\vec{x}$ nos segmentos suaves, e \vec{S} é o mapa no espaço tangente correspondente a \vec{M} .

Para obter o estado do sistema num instante qualquer, devemos conhecer o seu estado inicial e o operador que fará a evolução temporal do sistema. A trajetória do sistema é obtida pela integração de (3.1). Para avaliarmos se o sistema é caótico faremos uso do expoente de Lyapunov, que determina a divergência entre duas trajetórias próximas chamadas de trajetória principal e satélite. A separação entre estas trajetórias é descrita por vetores no espaço tangente. Cada *evento*, no espaço tangente e no espaço real, é descrito como sendo uma *colisão* nesse espaço. Essa colisão pode representar a passagem de uma das partículas por um ponto, e até mesmo uma colisão real com a outra partícula ou com as paredes. Uma forma de visualizar essas colisões é através da figura (3.1) baseada na figura original de [21]. Nesta figura a trajetória principal é representada pela linha sólida e a trajetória satélite pela linha tracejada. A colisão da trajetória principal se dá no ponto x_i , no tempo τ_c . A colisão da trajetória satélite ocorreu em $x_i + \delta x_c$ e um tempo $\tau_c + \delta \tau_c$ da trajetória principal. O tempo de atraso $\delta \tau_c$ representa o tempo gasto pela trajetória satélite para atingir o ponto onde a trajetória principal colidiu, este pode ser positivo ou negativo.

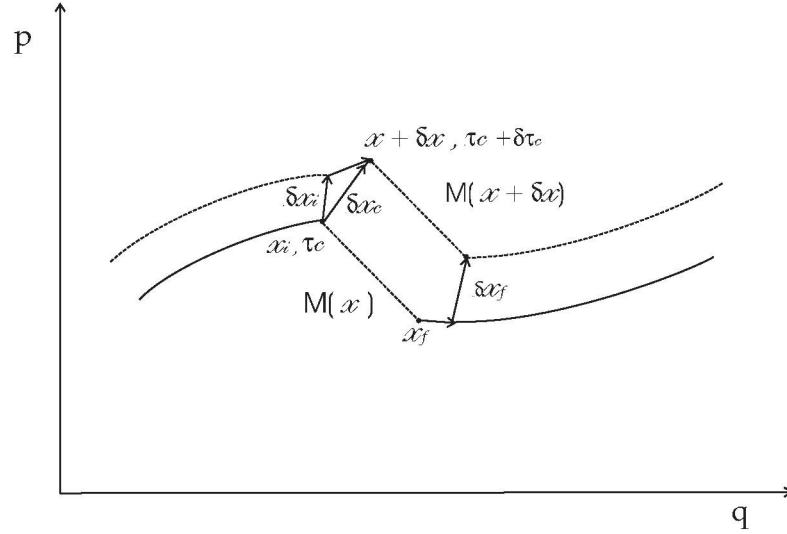


Figura 3.1: Representação da passagem de um estado à outro através de colisões no espaço de fases. Figura baseada em [21].

Da figura retiramos que o vetor $\delta \vec{x}_f$ imediatamente após as colisões é dado por:

$$\delta \vec{x}_f = \vec{M}(\vec{x}_i + \delta \vec{x}_c) - \vec{x}_f(\tau_c + \delta \tau_c). \quad (3.5)$$

Estamos tratando de tempos infinitesimais, então podemos linearizar $\vec{x}_f(\tau_c + \delta \tau_c)$ em torno de τ_c

$$\vec{x}_f(\tau_c + \delta \tau_c) = \vec{x}_f(\tau_c) + \frac{\partial \vec{x}_f}{\partial \tau_c} \delta \tau_c, \quad (3.6)$$

onde $\frac{\partial \vec{x}_f}{\partial t} = \vec{F}(\vec{x}_f)$, ou seja,

$$\vec{x}_f(\tau_c + \delta \tau_c) = \vec{x}_f(\tau_c) + \vec{F}(\vec{x}_f) \delta \tau_c. \quad (3.7)$$

Utilizando o mesmo procedimento para $\delta\vec{x}_c$ em torno de τ_c , obtemos

$$\delta\vec{x}_c = \delta\vec{x}_i + \vec{F}(\vec{x}_i)\delta\tau_c, \quad (3.8)$$

com $\vec{F}(\vec{x}_i) = \frac{\partial\vec{x}_i}{\partial\tau_c}$, então,

$$\delta\vec{x}_c = \delta\vec{x}_i + \frac{\partial\vec{x}_i}{\partial\tau_c}\delta\tau_c. \quad (3.9)$$

Expandindo \vec{M} em torno de \vec{x} temos

$$\vec{M}(\vec{x} + \delta\vec{x}) = \vec{M}(\vec{x}) + \frac{\partial\vec{M}}{\partial\vec{x}}\delta\vec{x}. \quad (3.10)$$

Mas desejamos obter

$$\vec{M}(\vec{x}_i + \delta\vec{x}_c) = \vec{M}(\vec{x}_i) + \frac{\partial\vec{M}}{\partial\vec{x}_i}\delta\vec{x}_c. \quad (3.11)$$

Substituindo (3.8) em (3.11) temos

$$\vec{M}(\vec{x}_i + \delta\vec{x}_c) = \vec{M}(\vec{x}_i) + \frac{\partial\vec{M}}{\partial\vec{x}_i} \left[\delta\vec{x}_i + \vec{F}(\vec{x}_i)\delta\tau_c \right]. \quad (3.12)$$

Substituindo (3.12) em (3.5), e lembrando que $\vec{x}_f = \vec{M}(\vec{x}_i)$ obtemos

$$\delta\vec{x}_f = \frac{\partial\vec{M}}{\partial\vec{x}_i}\delta\vec{x}_i + \left[\frac{\partial\vec{M}}{\partial\vec{x}_i}\vec{F}(\vec{x}_i) - \vec{F}[\vec{M}(\vec{x}_i)] \right] \delta\tau_c. \quad (3.13)$$

Essa equação nos permite quantificar a divergência entre as trajetórias principal e satélite imediatamente após as colisões. Esse procedimento será aplicado no capítulo 5, ao estudo do problema proposto para a dissertação. O tempo de atraso $\delta\tau_c$ é uma função de \vec{x}_i e de δx_i . Esta equação é obtida para aproximações lineares no tempo e no espaço de fases. Outros exemplos da aplicação desse método podem ser encontrados em [53, 54, 55].

Capítulo 4

Bilhares com paredes suaves

4.1 Introdução

Por um longo tempo, a influência do número de constituintes, tipos de interação e tipos de condições de contorno, medidos por parâmetros, foram estudados na dinâmica de bilhares. Contudo, poucos trabalhos consideraram a razão entre as massas das partículas que constituem o sistema [5, 11, 17], como um parâmetro de influência sobre o comportamento dinâmico.

Neste capítulo, trataremos dos bilhares nos quais partículas estão confinadas numa certa região do espaço e os aspectos citados há pouco desempenham um papel importantíssimo na dinâmica desses sistemas. Partículas interagentes dentro de um bilhar podem ser usadas para modelar a dinâmica de elétrons em pontos quânticos. Nesse sistema os elétrons são confinados dentro de um disco feito de material semicondutor, em que à interação do material com os elétrons [56]. A motivação para o estudo de bilhares clássicos vem do interesse em determinar o comportamento dinâmico do sistema (regular ou caótico), como descobrir quais as modificações no sistema quando variamos a interação e a razão de massas entre as partículas. Por fim, analisar o seu espaço de fases quando as paredes do bilhar sofrem modificações.

Pode-se definir um bilhar clássico como um sistema contendo uma ou mais partículas, que se movem livremente em um espaço delimitado por paredes rígidas. Estudos com bilhares revelaram que tais sistemas podem apresentar comportamento caótico devido à geometria do bilhar e à interação entre as partículas [5]. Exemplos destas características podem ser vistos no bilhar estádio de Bunimovich [2], no qual uma partícula se move entre paredes em forma de semi-círculo conectadas por linhas retas, conforme a figura (4.1). Este sistema é caótico devido às extremidades do bilhar serem arredondadas. No bilhar de Sinai [1], uma partícula move-se dentro de um bilhar quadrado com um círculo rígido fixado perto do centro. A origem do caos neste sistema se encontra na descentralização do círculo fixado dentro do bilhar quadrado, visto na figura (4.2-B). Sinai mostrou que a dinâmica apresentada por este sistema é ergódica [1, 57]. Uma partícula aprisionada num bilhar circular apresenta



Figura 4.1: Representação do bilhar de Bunimovich.

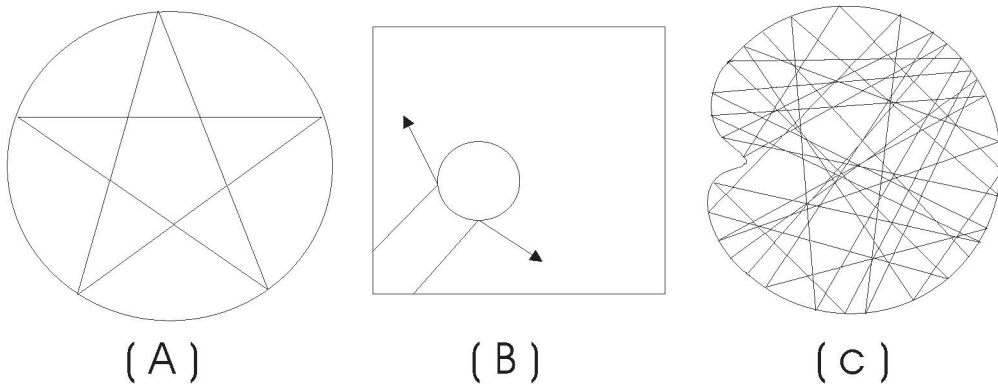


Figura 4.2: Em (A) Órbitas periódicas no bilhar circular. Órbitas caóticas nos bilhares (B) Sinai e (C) Pascalian Snail.

órbitas periódicas. Esse exemplo pode ser visto na figura (4.2-A). Se o bilhar circular tem sua geometria modificada ligeiramente, como na figura (4.2-C), que representa o bilhar de Pascalian Snail, a partícula confinada apresentará órbitas caóticas.

Em [61] Leonel *et al.* estudaram numericamente a dinâmica de um sistema constituído por uma partícula aprisionada num bilhar unidimensional com energia variável. Dentro do bilhar existia uma barreira de potencial que variava no tempo. Para o caso em que o sistema apresentava órbitas periódicas, a dinâmica é representada por um mapa bidimensional não-linear, que conserva a área no espaço de fases.

O estudo referente a duas partículas clássicas, interagindo num bilhar unidimensional, foi apresentado em [13] por Meza-Montes *et al.*. As partículas possuíam massas iguais, e interagiam via potencial de Coulomb. Esse trabalho mostrou, através da seção de Poincaré, que o sistema é caótico e apresenta ilhas de regularidade dentro do mar caótico.

Recentemente foi estudado [5] um sistema envolvendo o potencial de Yukawa para interação entre duas partículas confinadas num bilhar unidimensional com paredes rígidas. A razão de massas das partículas é tratada como parâmetro do sistema,

e as partículas sofrem colisões rígidas com as paredes. Nesse trabalho [5] o sistema apresenta comportamento caótico. O espaço de fases do sistema é misto (regular e caótico).

Bilhares poligonais são bons exemplos de sistemas estudados clássica e quanticamente [58]. O estudo destes bilhares tornam-se importantes, por tratarem de sistemas integráveis ou caóticos [59]. Em geral, bilhares poligonais são divididos em duas classes. Nos racionais todos os ângulos do bilhar são múltiplos racionais de π . Já os bilhares irracionais possuem pelo menos um dos ângulos do bilhar como múltiplo irracional de π .

Um sistema de duas partículas que sofrem colisões rígidas com as paredes, num bilhar unidimensional, foi estudado em [11]. Casati *et al.* mostraram que existe uma relação entre as velocidades iniciais e finais do sistema quando as partículas colidem com as paredes. Esta relação é expressa como $v_f = \cos \theta v_i$. A função $\cos \theta$ está relacionada à razão das massas das partículas através de

$$\cos \theta = \frac{1 - m_2/m_1}{1 + m_2/m_1} = \frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}, \quad (4.1)$$

com $\gamma = m_2/m_1$ sendo a razão de massas das partículas. O sistema não é ergódico se θ for um múltiplo racional de π , mais especificamente, escrevendo-se $\theta = \frac{m}{n}\pi$ com m e n inteiros. Com isso $4n$ velocidades distintas podem ser encontradas. Se θ for um número irracional de π , o espaço das velocidades torna-se denso.

Como exemplo quântico de estudo de bilhares com paredes suaves temos a análise dos autoestados e autofunções do bilhar Andreev [60]. Esse bilhar possui geometria retangular com paredes parabólicas. Libisch *et al.* [60] mostraram que é possível encontrar as autoenergias através da aproximação EBK. Outro trabalho a ser citado, foi o estudo de um sistema composto por poucas partículas interagentes num bilhar quântico unidimensional [18]. Neste trabalho foi apresentado a distribuição dos níveis de energia do sistema. Através destas distribuições verificou-se que o análogo clássico desse sistema, pode ser caótico. A condição para isso acontecer é fazer com que a razão de massas das partículas seja diferente de um.

4.2 Bilhar com paredes suaves

Um bilhar bidimensional com paredes suaves foi apresentado em [19]. Neste trabalho apresentou-se um tratamento analítico para dois caos distintos, uma e duas partículas interagentes. As paredes do bilhar eram descritas por um potencial Gaussiano. Mostrou-se que órbitas periódicas estáveis aparecem quando duas partículas, interagindo via potencial de curto alcance, movem-se num toro bidimensional.

Buscamos nesta dissertação estudar a dinâmica clássica conservativa do modelo físico de duas partículas rígidas e interagentes, aprisionadas num bilhar unidimensional com paredes suaves, em função da razão das massas das partículas. Na

figura (4.3) temos um desenho esquemático do bilhar com paredes rígidas e paredes suaves. As paredes do bilhar fixadas em $q = \pm 1$, são representadas pela função “erro”, de forma que esta passa a variar entre rígida e suave. A partícula 1 ficará do lado esquerdo do bilhar enquanto a partícula 2 estará do lado direito. Como tratamos de partículas rígidas, as mesmas não poderão trocar de lado, ou seja, a partícula 1 não pode estar no lado direito e a 2 do lado esquerdo. Esta organização do bilhar não impede que as duas partículas sintam a influência das duas paredes, esquerda e direita, separadamente. Tal fato se deve às paredes suaves. Então, quando as duas partículas estão próximas a uma das paredes ambas sentirão sua presença. Por exemplo, se a partícula 1 estiver perto da parede da direita (próximo a $q = 1$), mas do lado esquerdo da partícula 2, as duas partículas sentirão a força da parede.

O interesse principal deste trabalho é investigar o comportamento do sistema, quando existe interação entre as partículas. Também buscamos obter respostas como: qual a influência na dinâmica do sistema quando a razão de massas das partículas torna-se um parâmetro do sistema, e o comportamento do bilhar frente à mudança das paredes.

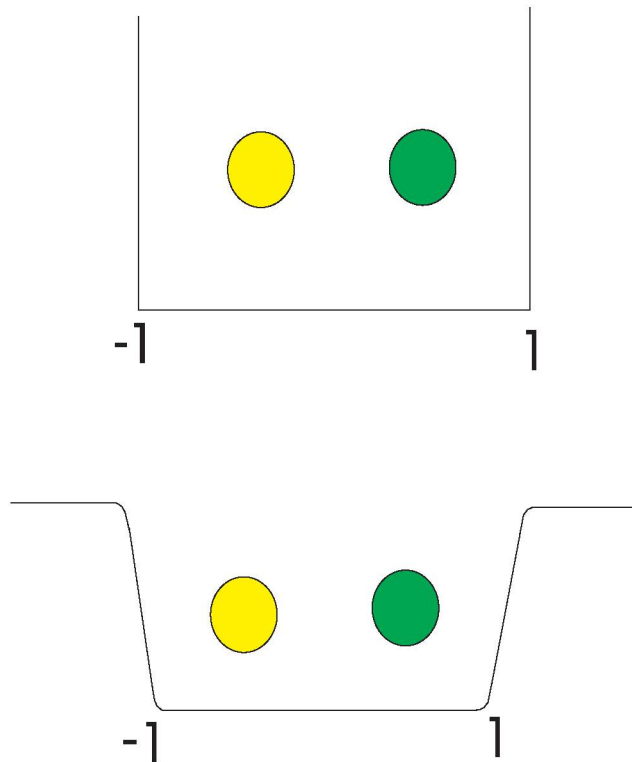


Figura 4.3: Figura que representa o sistema de duas partículas em um bilhar unidimensional com paredes rígidas e paredes suaves.

Agora descreveremos a construção da função de Hamilton e as equações de movimento do sistema. Como vimos no capítulo 2 as equações que descrevem a dinâmica de um sistema são expressas pelas equações de movimento no formalismo

Hamiltoniano [24]

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}, \quad (4.2)$$

onde q e p são as coordenadas e os momentos generalizados respectivamente e $\mathcal{H}(q, p)$ é a Hamiltoniana do sistema.

Para duas partículas aprisionadas num bilhar unidimensional podemos escrever as energias cinéticas para cada uma das partículas separadamente como

$$T_1 = \frac{1}{2}m_1\dot{q}_1^2, \quad T_2 = \frac{1}{2}m_2\dot{q}_2^2. \quad (4.3)$$

Para a interação entre as duas partículas, utilizaremos o potencial de Yukawa

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r}, \quad (4.4)$$

onde α é o parâmetro que controla a interação entre as partículas, sendo que para $\alpha = 0$ a interação é de longo alcance e $\alpha \neq 0$ temos interação de curto alcance. O módulo do vetor posição relativa é representado por $r = |q_1 - q_2|$. Quando $V_0 = 1$ e $\alpha = 0$ o potencial de Yukawa recai no potencial Coulombiano. O potencial de Yukawa, na forma apresentada aqui, possui o carácter repulsivo, a mudança do sinal de V_0 tornaria-o atrativo. Para descrevermos o potencial que representa as paredes suaves do bilhar, supomos que a força de interação entre as paredes e as partículas seja expressa por uma distribuição Gaussiana,

$$F = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(q-q_0)^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.5)$$

de modo que possamos obter

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} F = \delta(q - q_0). \quad (4.6)$$

Fazemos com que a partícula 1 esteja do lado esquerdo da caixa e a partícula 2 no lado direito. Com isso, a partícula 1 sofrerá colisões com a parede da esquerda e com a partícula 2. A partícula 2 sofrerá colisões com a parede da direita e com a partícula 1. Como estamos tratando de duas partículas rígidas, estas não poderão trocar de lugar dentro do bilhar. Assim mesmo, cada partícula sofrerá a ação das paredes opostas devido à sua suavidade. Para escrever as expressões das forças que são aplicadas pelas paredes nas partículas devemos antes fixar as paredes em $q = -1$ e 1. Então obtemos para a partícula 1

$$F_{1,1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(q_1+1)^2}{2\sigma^2}}, \quad F_{2,1} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(q_1-1)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.7)$$

Para a partícula 2, temos como força correspondente

$$F_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(q_2+1)^2}{2\sigma^2}}, \quad F_{2,2} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(q_2-1)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.8)$$

Generalizando essas expressões

$$F_{k,i} = (-1)^{k-1} \frac{F_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(q_i+(-1)^{k-1})^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.9)$$

com $i = 1, 2$ representando as partículas e $k = 1, 2$ sendo as paredes esquerda 1 e direita 2; o termo F_0 introduzido é uma constante que nos dá a intensidade da força aplicada.

O potencial que representa as paredes do bilhar é encontrado por

$$F(q) = -\frac{\partial V(q)}{\partial q}, \quad (4.10)$$

ou seja

$$V(q_i) = -\int_0^{q_i} F(x)dx, \quad (4.11)$$

escolhendo $V(q_0) = 0$, com $q_0 = 0$. Aplicando a integral a cada parede separadamente e sabendo que o centro do nosso bilhar está em $x_0 = 0$, encontramos o potencial para a partícula 1 como

$$V_1(q_1) = -\int_0^{q_1} \frac{F_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad V_2(q_1) = +\int_0^{q_1} \frac{F_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (4.12)$$

Para a partícula 2 temos

$$V_1(q_2) = -\int_0^{q_2} \frac{F_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x+1)^2}{2\sigma^2}} dx, \quad V_2(q_2) = +\int_0^{q_2} \frac{F_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (4.13)$$

Fazendo as trocas de variáveis $t_+^2 = \frac{(x+1)^2}{2\sigma^2}$ e $t_-^2 = \frac{(x-1)^2}{2\sigma^2}$, encontramos

$$t_+ = \frac{x+1}{\sigma\sqrt{2}} \quad \sigma\sqrt{2}dt_+ = dx \quad (4.14)$$

$$t_- = \frac{x-1}{\sigma\sqrt{2}} \quad \sigma\sqrt{2}dt_- = dx, \quad (4.15)$$

Agora faremos os cálculos do potencial devido às duas paredes sobre uma das partículas. Os resultados obtidos poderão ser generalizados às duas partículas e aos dois potenciais. Então

$$V_1(q_1) = -\int_0^{q_1} \frac{\sigma\sqrt{2}F_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-t_+^2} dt_+, \quad V_2(q_1) = +\int_0^{q_1} \frac{\sigma\sqrt{2}F_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-t_-^2} dt_-. \quad (4.16)$$

Simplificando temos

$$V_1(q_1) = -\frac{F_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{q_1} e^{-t_+^2} dt_+, \quad V_2(q_1) = +\frac{F_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{q_1} e^{-t_-^2} dt_-. \quad (4.17)$$

Estas duas equações são do tipo

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (4.18)$$

chamada de função erro de x [62]. Então

$$V_1(q_1) = -\frac{F_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{q_1} e^{-t_+^2} dt_+ = -\frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}(q_1 + 1) \right), \quad (4.19)$$

$$V_2(q_1) = +\frac{F_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{q_1} e^{-t_+^2} dt_+ = \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}(q_1 - 1) \right), \quad (4.20)$$

$$V_1(q_2) = -\frac{F_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{q_2} e^{-t_-^2} dt_- = -\frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}(q_2 + 1) \right), \quad (4.21)$$

$$V_2(q_2) = +\frac{F_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{q_2} e^{-t_-^2} dt_- = \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}(q_2 - 1) \right). \quad (4.22)$$

A expressão geral é escrita como

$$V_k(q_i) = (-1)^k \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}(q_i + (-1)^{k-1}) \right). \quad (4.23)$$

O comportamento do potencial, função erro, que representa as paredes do bilhar, pode ser visto na figura (4.4). A suavidade das paredes é obtida pela variação de σ . Esta suavidade é mostrada na figura com as diferentes paredes sobrepostas.

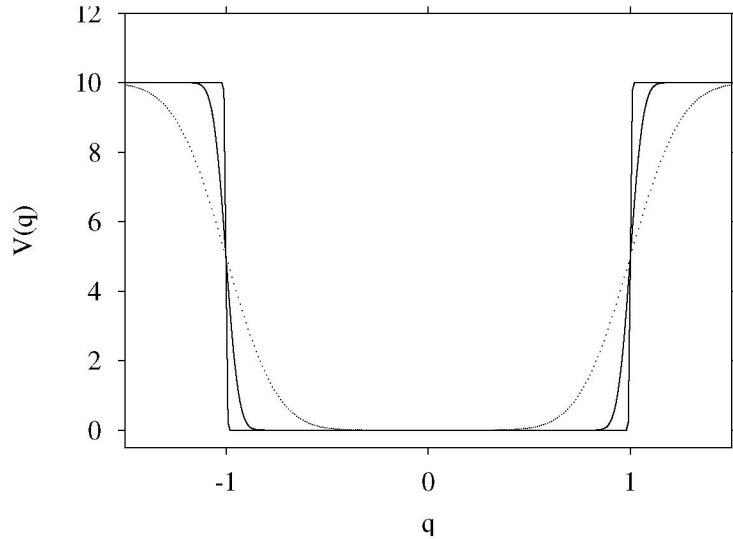


Figura 4.4: Esta figura representa as paredes do bilhar utilizado neste trabalho. A suavidade das paredes é obtida pela variação de σ . Esta suavidade é mostrada com as diferentes paredes sobrepostas.

Formulação de Hamilton

Nesta seção aplicaremos os conceitos vistos no capítulo 2, contruindo a função de Lagrange e a Hamiltoniana do sistema de duas partículas clássicas num bilhar unidimensional com paredes suaves e interagindo via potencial de Yukawa.

Função de Lagrange

Para mapear a dinâmica do sistema, precisamos encontrar as equações de movimento no formalismo Hamiltoniano. Para isso temos que obter primeiro a equação de Lagrange expressa como

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = T - V, \quad (4.24)$$

onde T é a energia cinética e V é a energia potencial da partícula.

A posteriori devemos encontrar a equação de Hamilton que é escrita como

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}. \quad (4.25)$$

Com esse objetivo a energia cinética total do sistema em estudo, é dado pela soma das energias cinéticas das partículas, expressa por

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2. \quad (4.26)$$

Nosso potencial total é escrito como a soma dos potenciais das paredes e da interação entre as partícula

$$V = V(r) + V_1(q_1) + V_2(q_1) + V_1(q_2) + V_2(q_2). \quad (4.27)$$

De forma geral

$$\begin{aligned} V = & V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} - \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} (q_1 + 1) \right) + \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} (q_1 - 1) \right) \\ & - \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} (q_2 + 1) \right) + \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} (q_2 - 1) \right), \end{aligned} \quad (4.28)$$

ou na forma simplificada

$$V = V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} + \sum_{k,i} (-1)^k \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} (q_i + (-1)^{k-1}) \right). \quad (4.29)$$

Então nossa equação de Lagrange é escrita como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2) = & \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{q}_2^2 - V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} + \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} (q_1 + 1) \right) \\ & - \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} (q_1 - 1) \right) + \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} (q_2 + 1) \right) - \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} (q_2 - 1) \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Função de Hamilton

Substituindo a equação (4.30) em (4.25) temos a Hamiltoniana do problema expressa por

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(q_1, q_2; p_1, p_2) = & \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} - \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}(q_1 + 1) \right) \\ & + \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}(q_1 - 1) \right) - \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}(q_2 + 1) \right) + \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}(q_2 - 1) \right) \end{aligned} \quad (4.31)$$

com $r = |q_1 - q_2|$, ou na forma simplificada

$$\mathcal{H}(q_1, q_2; p_1, p_2) = \sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} + V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} + \sum_{k,i} (-1)^k \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}(q_i + (-1)^{k-1}) \right). \quad (4.32)$$

Na Hamiltoniana acima é possível verificar que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \underbrace{\sum_i \frac{p_i^2}{2m_i}}_{\text{Energia Cinética Total}} + \underbrace{V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} + \sum_{k,i} (-1)^k \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}(q_i + (-1)^{k-1}) \right)}_{\text{Energia Potencial Total}} \\ = & \underbrace{E}_{\text{Energia Total do Sistema}}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

O sistema é dito conservativo, pois \mathcal{H} é uma constante de movimento, em que $\mathcal{H} = E$, como visto no capítulo 2.

Tendo em mãos a Equação de Hamilton do problema, podemos escrever as equações de movimento, que descrevem a dinâmica do sistema. As equações de movimento são escritas como

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}. \quad (4.34)$$

Para q_1 :

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m_1}, \quad (4.35)$$

e q_2

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m_2}. \quad (4.36)$$

A derivada temporal dos momentos tem a forma

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = -\left[\frac{\partial V(r)}{\partial q_1} + \frac{\partial V_1(q_1)}{\partial q_1} + \frac{\partial V_2(q_1)}{\partial q_1} \right], \quad (4.37)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2} = -\left[\frac{\partial V(r)}{\partial q_2} + \frac{\partial V_1(q_2)}{\partial q_2} + \frac{\partial V_2(q_2)}{\partial q_2} \right]. \quad (4.38)$$

As derivadas do potencial de Yukawa em relação às coordenadas do sistema ficam

$$-\frac{\partial V(r)}{\partial q_1} = \frac{V_0 e^{-\alpha r}}{r} \left(\frac{1}{r} + \alpha \right), \quad (4.39)$$

e

$$-\frac{\partial V(r)}{\partial q_2} = -\frac{V_0 e^{-\alpha r}}{r} \left(\frac{1}{r} + \alpha \right). \quad (4.40)$$

Para as paredes temos

$$-\frac{\partial V_1(q_1)}{\partial q_1} = F_{1,1} = \frac{F_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(q_1+1)^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.41)$$

$$-\frac{\partial V_2(q_1)}{\partial q_1} = F_{2,1} = -\frac{F_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(q_1-1)^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.42)$$

$$-\frac{\partial V_1(q_2)}{\partial q_2} = F_{1,2} = \frac{F_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(q_2+1)^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.43)$$

$$-\frac{\partial V_2(q_2)}{\partial q_2} = F_{2,2} = -\frac{F_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(q_2-1)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.44)$$

Substituindo estas expressões em (4.37) e (4.38), obtemos as equações de movimento

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_1} = \frac{V_0 e^{-\alpha r}}{r} \left(\frac{1}{r} + \alpha \right) + \frac{F_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(q_1+1)^2}{2\sigma^2}} - \frac{F_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(q_1-1)^2}{2\sigma^2}}, \quad (4.45)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_2} = -\frac{V_0 e^{-\alpha r}}{r} \left(\frac{1}{r} + \alpha \right) + \frac{F_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(q_2+1)^2}{2\sigma^2}} - \frac{F_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(q_2-1)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.46)$$

$$\dot{q}_1 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_1} = \frac{p_1}{m_1}, \quad (4.47)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_2} = \frac{p_2}{m_2}. \quad (4.48)$$

Com a variação dos parâmetros α e σ , podemos controlar a interação entre as partículas (curto e longo alcance), e a interação das partículas com as paredes (colisões elásticas com paredes rígidas, e com paredes suaves). A mudança dos valores de σ nos leva ao controle da suavidade das paredes e a de F_0 da intensidade da força aplicada por elas sobre as partículas.

Capítulo 5

Resultados

5.1 Resultados analíticos

5.1.1 Dinâmica de partículas não-interagentes colidindo com vários potenciais degrau

Apresentaremos nesta seção expressões analíticas para a evolução do sistema em termos das coordenadas relativas e do centro de massa. Encontramos a matriz que atua como operador de evolução do sistema no espaço de configuração. Esta matriz nos mostra quais são os parâmetros dentro do sistema, que são importantes para sua dinâmica.

A complexidade da função Erro e a suavidade das paredes tornam a construção da matriz de evolução muito complicada, por isso faremos uma aproximação nas paredes do bilhar. A função Erro, que descreve o potencial das paredes, será expressa em n potenciais degrau. Essa aproximação pode ser vista na figura (5.1).

Para o caso limite de paredes aproximadamente rígidas, quando $\sigma = 5 \times 10^{-3}$, desejamos encontrar, através da matriz de evolução, as grandezas físicas que descrevem a dinâmica do sistema. Para isso, vamos escrever grandezas envolvidas no sistema em termos das coordenadas relativas e do centro de massa:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \vec{r} = \vec{q}_1 - \vec{q}_2 & \text{Coordenadas relativas,} \\ \vec{R} = \frac{m_1 \vec{q}_1 + m_2 \vec{q}_2}{m_1 + m_2} & \text{coordenadas do Centro de massa,} \\ \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} & \text{Massa reduzida do sistema.} \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Para as colisões das partículas entre si, o momento do centro de massa (\vec{P}) é uma constante de movimento. Quando não há interação de longo alcance, ou seja $V_0 = 0$ no potencial de Yukawa, as partículas movem-se livremente. A partir de agora, para se obter a relação entre os estados iniciais e finais do sistema, consideraremos que

não há interação entre as partículas. Para essa situação podemos definir pontos no espaço de fase como

$$x_i = [r_i(t), R_i(t), v_i(t), V_i(t)]. \quad (5.2)$$

Entre as colisões, para a evolução temporal desses pontos usamos

$$x_{t_{i+1}} = D(t_{i+1} - t_i)x_{t_i}, \quad (5.3)$$

onde podemos dizer que $t_{i+1} - t_i = \Delta t$ é o intervalo de tempo que leva o sistema de um estado inicial ao estado final e $D(t_{i+1} - t_i)$ é a matriz que relaciona estes estados. Então

$$\left\{ \begin{array}{l} r(t_{i+1}) = r(t_i) + v(t_i)(t_{i+1} - t_i), \\ R(t_{i+1}) = R(t_i) + V(t_i)(t_{i+1} - t_i), \\ v(t_{i+1}) = v(t_i), \\ V(t_{i+1}) = V(t_i). \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Na forma matricial temos:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r(t_{i+1}) \\ R(t_{i+1}) \\ v(t_{i+1}) \\ V(t_{i+1}) \end{pmatrix}}_{x_{t_{i+1}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & (t_{i+1} - t_i) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (t_{i+1} - t_i) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D(t_{i+1} - t_i)} \underbrace{\begin{pmatrix} r(t_i) \\ R(t_i) \\ v(t_i) \\ V(t_i) \end{pmatrix}}_{x_{t_i}}. \quad (5.5)$$

Quando a colisão se dá entre as partículas, em $(r = 0)$, obedecemos a transformação [11]

$$v_{1f} = \kappa v_{1i} + (1 - \kappa)v_{2i} \quad (5.6)$$

$$v_{2f} = (1 + \kappa)v_{1i} - \kappa v_{2i}. \quad (5.7)$$

Com $\kappa = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}$, então,

$$v_f = -v_i. \quad (5.8)$$

As grandezas são escritas da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} r(t_{i+1}) = r(t_i), \\ R(t_{i+1}) = R(t_i), \\ v(t_{i+1}) = -v(t_i), \\ V(t_{i+1}) = V(t_i), \end{array} \right. \quad (5.9)$$

com as matrizes

$$\underbrace{\begin{pmatrix} r(t_{i+1}) \\ R(t_{i+1}) \\ v(t_{i+1}) \\ V(t_{i+1}) \end{pmatrix}}_{x_{i+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{D(t_{i+1}-t_i)} \underbrace{\begin{pmatrix} r(t_i) \\ R(t_i) \\ v(t_i) \\ V(t_i) \end{pmatrix}}_{x_i}. \quad (5.10)$$

Para a colisão entre as partículas e as paredes analisaremos a partícula 2, que se encontra no lado direito do bilhar. Para isso vamos tentar descrever a parede suave dada pela função erro, via n degraus conforme a figura (5.1). Obviamente que estes n degraus devem no limite de $n \rightarrow \infty$, satisfazer certas condições de contorno específicas para que isto seja verdade. Uma das condições é que a altura dos potenciais e a extensão de cada degrau sejam variáveis, para que se adaptem a curva original descrita pela função erro.

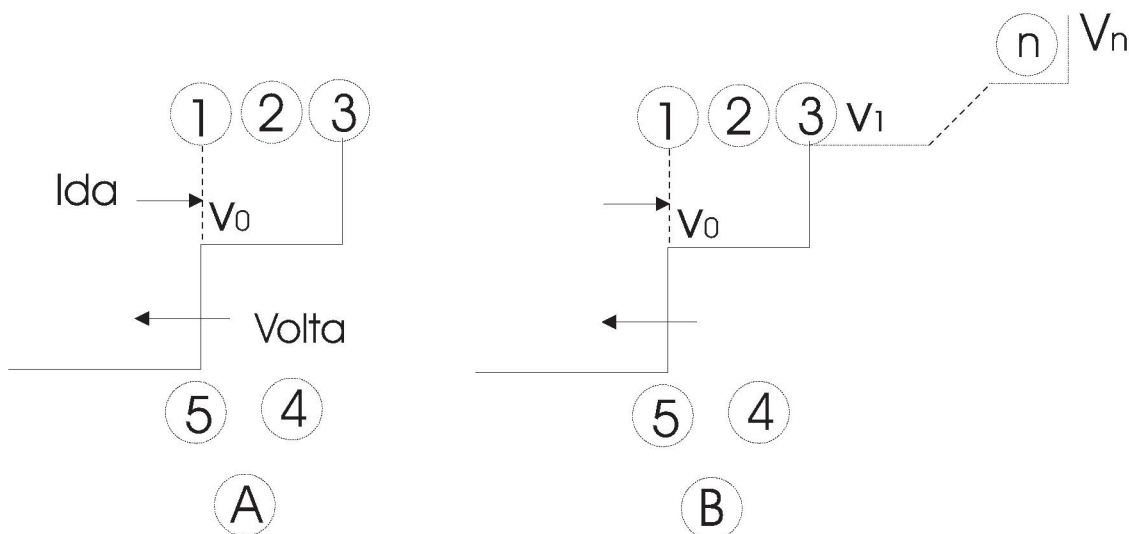


Figura 5.1: Aproximação do potencial suave em degraus. Em (A) potencial com apenas um degrau e 5 colisões. Em (B) representação de n degraus.

A matriz de evolução entre os estados iniciais e finais não é descrita apenas pela colisão das partículas com um degrau. Se isso fosse feito estaríamos desconsiderando a interação que existe entre a parede suave e cada partícula. Dessa forma, devemos considerar a passagem das partículas por cada região presente na figura (5.1). Cada partícula passará por n degraus existentes, colidirá com o último degrau escolhido pela energia e quantidade de degraus, e voltará até o início da parede, onde o potencial é zero.

Então vamos analisar a passagem da partícula 2 (direita) pela região 1, apresentado pela figura (5.1). Nesta figura é apresentada a transformação do potencial suave, dado pela função erro, em pequenos degraus com potenciais constantes V_n ,

onde $n = 0, 1, \dots, N$. A partícula 2, que deve ultrapassar o degrau tem sua velocidade alterada. A relação entre as velocidade, antes e depois da passagem pelo degrau, é relacionada através da conservação da energia mecânica, então

$$E_i = E_f \longrightarrow \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 + V_0. \quad (5.11)$$

Com isso v_{2f} é escrito como:

$$v_{2f} = \sqrt{v_{2i}^2 - \frac{2V_0}{m_2}} = \left(\sqrt{1 - \frac{2V_0}{m_2v_{2i}^2}} \right) v_{2i}, \quad (5.12)$$

onde faremos $A_0^- = \sqrt{1 - \frac{2V_0}{m_2v_{2i}^2}}$, então

$$\begin{cases} v_{1f} = v_{1i}, \\ v_{2f} = A_0^- v_{2i}. \end{cases} \quad (5.13)$$

A posição de cada partícula para essa colisão são escritas como:

$$\begin{cases} q_{1f} = q_{1i}, \\ q_{2f} = q_{2i}. \end{cases} \quad (5.14)$$

Em termos das coordenadas relativas e do centro de massa temos

$$r_i = q_{1i} - q_{2i}, \quad r_f = q_{1f} - q_{2f}, \quad (5.15)$$

então

$$\begin{cases} r_f = r_i, \\ R_f = R_i. \end{cases} \quad (5.16)$$

Já as velocidades antes da passagem são

$$v_i = v_{1i} - v_{2i}, \quad MV_i = m_1v_{1i} + m_2v_{2i}. \quad (5.17)$$

Isolando v_{1i} e v_{2i} em termos de v_i e V_i , obtemos

$$\begin{cases} v_{1i} = V_i + \frac{m_2}{M}v_i, \\ v_{2i} = V_i - \frac{m_1}{M}v_i, \end{cases} \quad (5.18)$$

ou na forma matricial

$$\begin{pmatrix} v_{1i} \\ v_{2i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{m_2}{M} \\ 1 & -\frac{m_1}{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_i \\ v_i \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Após a passagem temos:

$$v_f = v_{1f} - A_0^- v_{2f}, \quad MV_f = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} = m_1v_{1i} + A_0^- m_2v_{2i}. \quad (5.20)$$

Substituindo as equações (5.18) em (5.20), temos:

$$v_f = \left(\frac{A_0^- m_1 + m_2}{M} \right) v_i + (1 - A_0^-) V_i, \quad (5.21)$$

e

$$V_f = \frac{\mu}{M} (1 - A_0^-) v_i + \left(\frac{m_1 + A_0^- m_2}{M} \right) V_i. \quad (5.22)$$

Para simplificarmos estas expressões, faremos:

$$\zeta_0^- = \left(\frac{A_0^- m_1 + m_2}{M} \right), \quad \varrho_0^- = (1 - A_0^-), \quad \xi_0^- = \left(\frac{m_1 + A_0^- m_2}{M} \right), \quad (5.23)$$

onde o índice 0 está relacionado com A_0 . Então temos:

$$v_f = \zeta_0^- v_i + \varrho_0^- V_i, \quad (5.24)$$

e

$$V_f = \frac{\mu}{M} \varrho_0^- v_i + \xi_0^- V_i. \quad (5.25)$$

A matriz que relaciona as coordenadas iniciais e finais é escrita como:

$$\begin{pmatrix} r_f \\ R_f \\ v_f \\ V_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_0^- & \varrho_0^- \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{M} \varrho_0^- & \xi_0^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_i \\ R_i \\ v_i \\ V_i \end{pmatrix}. \quad (5.26)$$

Na região 2, a partícula 2 move-se livremente, com velocidade constante, e as posições iniciais e finais são escritas como:

$$\begin{cases} r_f = r_i + \Delta t_1 v_i, \\ R_f = R_i + \Delta t_1 V_i, \\ v_f = v_i, \\ V_f = V_i. \end{cases} \quad (5.27)$$

Ou na forma matricial

$$\begin{pmatrix} r_f \\ R_f \\ v_f \\ V_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_i \\ R_i \\ v_i \\ V_i \end{pmatrix}. \quad (5.28)$$

Na região 3 a partícula colide com a parede, então nossas grandezas, antes e depois da colisão, ficam:

$$\begin{cases} r_f = r_i, \\ R_f = R_i. \end{cases} \quad \begin{cases} v_{1f} = v_{1i}, \\ v_{2f} = -v_{2i}. \end{cases} \quad (5.29)$$

$$v_f = v_{1i} + v_{2i}, \quad MV_f = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} = m_1 v_{1i} - m_2 v_{2i}. \quad (5.30)$$

Substituindo (5.18) em (5.30), obtemos:

$$v_f = -\kappa v_i + 2V_i, \quad (5.31)$$

com $\kappa = \frac{m_1 - m_2}{M}$ e

$$V_f = \frac{2\mu}{M}v_i + \kappa V_i. \quad (5.32)$$

Então podemos escrever

$$\begin{pmatrix} r_f \\ R_f \\ v_f \\ V_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 2 \\ 0 & 0 & 2\frac{\mu}{M} & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_i \\ R_i \\ v_i \\ V_i \end{pmatrix}. \quad (5.33)$$

As matrizes de evolução do sistema, levando-se em conta a colisão da partícula 2 com a parede da direita, nas regiões 1, 2 e 3 são escritas como

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_0^- & \varrho_0^- \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{M}\varrho_0^- & \xi_0^- \end{pmatrix}, \quad (5.34)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.35)$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 2 \\ 0 & 0 & 2\frac{\mu}{M} & \kappa \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Agora devemos construir essas mesmas matrizes para o sistema, com a volta da partícula 2, sentido da direita para a esquerda. A primeira região que devemos olhar é a 4, onde a partícula movimenta-se livremente, então

$$\begin{cases} r_f = r_i - \Delta t_2 v_i, \\ R_f = R_i - \Delta t_2 V_i. \end{cases} \quad \begin{cases} v_{1f} = v_{1i}, \\ v_{2f} = v_{2i}. \end{cases} \quad (5.37)$$

Então

$$M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\Delta t_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta t_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.38)$$

A matriz M_4 difere de M_2 apenas pelo sinal negativo no tempo, isso se deve ao fato de que a velocidade da partícula mudou, ou seja, o movimento da mesma ocorre no sentido contrário. Na região 5 a partícula se depara com mais uma passagem entre

potenciais, no caso $V_i = V_0$ e $V_f = 0$. Para esta situação, fazemos uso novamente da conservação da energia mecânica do sistema, então

$$E_i = E_f \longrightarrow \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 + V_0 = \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2, \quad (5.39)$$

isolando v_{2f} obtemos

$$v_{2f} = \sqrt{v_{2i}^2 + \frac{2V_0}{m_2}} = \left(\sqrt{1 + \frac{2V_0}{m_2v_{2i}^2}} \right) v_{2i} = A_0^+ v_{2i}, \quad (5.40)$$

com $A_0^+ = \sqrt{1 + \frac{2V_0}{m_2v_{2i}^2}}$. A velocidade da partícula 1, a posição relativa e do centro de massa se mantém constantes, com isso temos

$$\begin{cases} r_f = r_i, \\ R_f = R_i, \\ v_{1f} = v_{1i}, \\ v_{2f} = A_0^+ v_{2i}. \end{cases} \quad (5.41)$$

A velocidade relativa é escrita como

$$v_f = v_{1f} - v_{2f} = v_{1i} - A_0^+ v_{2i}, \quad (5.42)$$

e a velocidade do centro de massa final é dada por

$$MV_f = m_1v_{1f} + m_2v_{2f} = m_1v_{1i} + A_0^+ m_2v_{2i}. \quad (5.43)$$

Com o auxílio de (5.18) obtemos

$$v_f = \left(\frac{A_0^+ m_1 + m_2}{M} \right) v_i + (1 - A_0^+) V_i, \quad (5.44)$$

e

$$V_f = \frac{\mu}{M} (1 - A_0^+) v_i + \left(\frac{m_1 + A_0^+ m_2}{M} \right) V_i. \quad (5.45)$$

Afim de simplificarmos estas expressões, faremos a seguinte substituição:

$$\zeta_0^+ = \left(\frac{A_0^+ m_1 + m_2}{M} \right), \quad \varrho_0^+ = (1 - A_0^+), \quad \xi_0^+ = \left(\frac{m_1 + A_0^+ m_2}{M} \right), \quad (5.46)$$

onde o índice 0 está relacionado com A_0^+ . Então temos:

$$v_f = \zeta_0^+ v_i + \varrho_0^+ V_i, \quad (5.47)$$

e

$$V_f = \frac{\mu}{M} \varrho_0^+ v_i + \xi_0^+ V_i. \quad (5.48)$$

Agora podemos escrever a matriz que relaciona as coordenadas finais e iniciais do sistema como

$$\begin{pmatrix} r_f \\ R_f \\ v_f \\ V_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_0^+ & \varrho_0^+ \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{M}\varrho_0^+ & \xi_0^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_i \\ R_i \\ v_i \\ V_i \end{pmatrix}. \quad (5.49)$$

A matriz encontrada para a região 5 será chamada de M_5 .

Todo o procedimento feito até aqui, consiste na passagem de uma partícula por um potencial degrau, uma colisão com a parede e sua volta, onde esta passará novamente pelo degrau inicial. O potencial, dado pela função erro, que representa a parede suave do bilhar, pode ser representada como uma soma ponderada sobre infinitos degraus entre um intervalo de Δx qualquer. As velocidades, das partículas que estarão nessas regiões, são $v_{j,n+1}$, onde os índice j representa a partícula. As matrizes genéricas para as duas partículas são escritas como:

- passagem pelos degraus na ida (expoente $-$), e volta (expoente $+$)

$$M_{j,n+1} = (-1)^j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_n^\mp & \varrho_n^\mp \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{M}\varrho_n^\mp & \xi_n^\mp \end{pmatrix}. \quad (5.50)$$

Entre os degraus temos

$$M_{j,n+2} = (-1)^j \begin{pmatrix} 1 & 0 & (\pm 1)\Delta t_{n+1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (\pm 1)\Delta t_{n+1} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.51)$$

com o sinal $+$ na frente do tempo para a ida, e $-$ para a volta. E para a colisão com a parede, que faz a mudança de sentido da partícula, a matriz de evolução é escrita como

$$M_{j,N} = (-1)^j \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 2 \\ 0 & 0 & 2\frac{\mu}{M} & \kappa \end{pmatrix}. \quad (5.52)$$

A relação entre as coordenadas, antes e depois do movimento da partícula dentro da região em que o potencial da parede atua, é feita através da multiplicação dessas matrizes com expressão

$$x_f = M_{j,n+1,-} \cdot \dots \cdot M_{j,n+2} \cdot \dots \cdot M_{j,N} \cdot \dots \cdot M_{j,n+2} \cdot \dots \cdot M_{j,n+1,+} \cdot x_i. \quad (5.53)$$

5.1.2 Dinâmica das partículas não-interagentes no espaço tangente

Nesta seção encontraremos a matriz de evolução do sistema no espaço tangente, seguindo o algoritmo apresentado no capítulo 3. Através de

$$x_f = D_j x_i, \quad (5.54)$$

podemos construir a trajetória principal em nosso espaço de fases, e expressar a trajetória satélite no espaço tangente como

$$\delta x(t) = M(t) \delta x(t_0), \quad (5.55)$$

onde $M(t)$ é a *matriz monodrômica*, que atua como operador de evolução no espaço tangente, e que pode ser escrita como

$$M(t) = \frac{dx(t)}{dx(t_0)}. \quad (5.56)$$

Durante o movimento livre entre as colisões, a dinâmica no espaço de fases é similar a dinâmica no espaço tangente, por isso a matriz monodrômica pode ser escrita como

$$M = D(t_{i+1} - t_i). \quad (5.57)$$

Essa matriz expressa o movimento livre das partículas e é descrita pela matriz (5.5) e (5.10) da seção anterior.

Quando temos colisões das partículas com as paredes e a passagem por um potencial degrau, precisamos construir equações que descrevam a dinâmica do sistema no espaço tangente. Para isso utilizaremos o algoritmo apresentado no capítulo 3, expresso por

$$\delta x_f = \frac{\partial M}{\partial x_i} \delta x_i + \left[\frac{\partial M}{\partial x_i} F(x_i) - F[M(x_i)] \right] \delta \tau. \quad (5.58)$$

Em nosso sistema temos,

$$F(x) = \dot{x} = (\dot{r}, \dot{R}, \dot{v}, \dot{V}), \quad (5.59)$$

que representa o movimento das partículas entre as colisões, existindo ou não interação entre elas. Considerando não existir interação entre as partículas temos a velocidade relativa e do centro de massa são constantes entre as colisões, então escrevemos

$$F(x) = \dot{x} = (\dot{r}, \dot{R}, 0, 0). \quad (5.60)$$

O termo $\delta \tau$, corresponde ao tempo de atraso que ocorre entre o instante de colisão da trajetória satélite em relação ao instante de colisão da trajetória principal. O tempo de atraso para a partícula 1(2) pode ser considerado muito pequeno nessas colisões, podendo expressá-lo como

$$\delta \tau_{1(2)} = -\frac{\delta q_{1(2)}}{v_{1(2)}}. \quad (5.61)$$

As velocidades das partículas 1(2), antes das colisões, em termos das coordenadas do centro de massa e relativo, são:

$$v_{1(2)} = V - (-1)^{1(2)} \frac{m_{2(1)}}{M} v, \quad (5.62)$$

e a evolução de diferença entre a da trajetória satélite e a trajetória principal é dada por

$$\delta q_{1(2)} = \delta R - (-1)^{1(2)} \frac{m_{2(1)}}{M} \delta r. \quad (5.63)$$

Se substituirmos (5.62) e (5.63) em (5.61), temos

$$\delta \tau_{1(2)} = - \frac{\delta R_i - (-1)^{1(2)} \frac{m_{2(1)}}{M} \delta r_i}{V_i - (-1)^{1(2)} \frac{m_{2(1)}}{M} v_i} = - \frac{M \delta R_i - (-1)^{1(2)} m_{2(1)} \delta r_i}{M V_i - (-1)^{1(2)} m_{2(1)} v_i}. \quad (5.64)$$

Com as equações (5.58), (5.64), e as matrizes encontradas na seção anterior, podemos contruir a matriz monodrômica MT_n que relaciona δx_f e δx_i nas colisões da partícula com a parede da direita ($j = 2$), em relação a partícula 2. A conexão entre δx_f e δx_i é dada pela equação (5.55). A construção dessa matriz deve respeitar cada região presente na figura (5.1), como havíamos feito na seção anterior. Analisaremos primeiramente o caso do potencial com um degrau e uma colisão, onde as partículas não interagem entre si. Na sequência, estenderemos essas equações para um caso mais geral. Na região 1 temos

$$F(x_i) = \begin{pmatrix} v_i \\ V_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.65)$$

$$F[M(x_i)] = \begin{pmatrix} \zeta_0^- v_i + \varrho_0^- V_i \\ \frac{\mu}{M} \varrho_0^- v_i + \xi_0^- V_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.66)$$

e

$$\frac{\partial M}{\partial x_i} = M_1, \quad (5.67)$$

de

$$x_f = M_j x_i. \quad (5.68)$$

Então

$$\delta x_f = \frac{\partial M}{\partial x_i} \delta x_i + \left[\frac{\partial M}{\partial x_i} F(x_i) - F[M(x_i)] \right] \delta \tau. \quad (5.69)$$

$$\delta x_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_0^- & \varrho_0^- \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{M} \varrho_0^- & \xi_0^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_i \\ \delta R_i \\ \delta v_i \\ \delta V_i \end{pmatrix} +$$

$$\left[\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_0^- & \varrho_0^- \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{M} \varrho_0^- & \xi_0^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ V_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \zeta_0^- v_i + \varrho_0^- V_i \\ \frac{\mu}{M} \varrho_0^- v_i + \xi_0^- V_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \delta\tau. \quad (5.70)$$

Podemos escrever a expressão acima na forma de equações

$$\delta r_f = \delta r_i + ((1 - \zeta_0^-)v_i - \varrho_0^- V_i)\delta\tau, \quad (5.71)$$

$$\delta R_f = \delta R_i + \left(-\frac{\mu}{M}\varrho_0^- v_i + (1 - \xi_0^-)V_i\right)\delta\tau, \quad (5.72)$$

$$\delta v_f = \zeta_0^- \delta v_i + \varrho_0^- \delta V_i, \quad (5.73)$$

$$\delta V_f = \frac{\mu}{M}\varrho_0^- \delta v_i + \xi_0^- \delta V_i. \quad (5.74)$$

Substituindo o tempo de atraso (5.64) em (5.71) e (5.72) determinamos

$$\delta r_f = \zeta_0^- \delta r_i + \varrho_0^- \delta R_i, \quad (5.75)$$

$$\delta R_f = \frac{\mu}{M}\varrho_0^- \delta r_i + \xi_0^- \delta R_i, \quad (5.76)$$

$$\delta v_f = \zeta_0^- \delta v_i + \varrho_0^- \delta V_i, \quad (5.77)$$

$$\delta V_f = \frac{\mu}{M}\varrho_0^- \delta v_i + \xi_0^- \delta V_i. \quad (5.78)$$

Então a matriz monodrômica para a região 1 e partícula 2 é expressa como:

$$MT_{2,1} = \begin{pmatrix} \zeta_0^- & \varrho_0^- & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{M}\varrho_0^- & \xi_0^- & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_0^- & \varrho_0^- \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{M}\varrho_0^- & \xi_0^- \end{pmatrix}. \quad (5.79)$$

As matrizes monodrômicas para as regiões 2 e 4, possuem a mesma forma das matrizes no espaço real, e são escritas como:

$$MT_{2,2(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (\pm 1)\Delta t_{2(4)} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (\pm 1)\Delta t_{2(4)} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.80)$$

A matriz que representa a colisão com a parede, é obtida da mesma forma e escrita como [5, 14]:

$$MT_{2,3} = \begin{pmatrix} -\kappa & 2 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\kappa & 2 \\ 0 & 0 & \frac{2\mu}{M} & \kappa \end{pmatrix}. \quad (5.81)$$

E por fim, a matriz que representa a passagem pela região 5, no espaço tangente, é escrita como:

$$MT_{2,5} = \begin{pmatrix} \zeta_0^+ & \varrho_0^+ & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{M}\varrho_0^+ & \xi_0^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_0^+ & \varrho_0^+ \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{M}\varrho_0^+ & \xi_0^+ \end{pmatrix}. \quad (5.82)$$

Usando uma equação análoga a equação (5.53), ou seja:

$$\delta x_f = M_j \delta x_i, \quad (5.83)$$

com $MT_{j,0}$ sendo:

$$MT_{j,0} = (-1)^j \begin{pmatrix} -\eta_0 & \Omega_0 & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{M}\Omega_0 & \Theta_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta_0 & \Omega_0 \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{M}\Omega_0 & \Theta_0 \end{pmatrix}, \quad (5.84)$$

com

$$\eta_0 = \left(\frac{A_0^+ A_0^- m_1 - m_2}{M} \right), \quad \Omega_0 = (A_0^+ A_0^- + 1), \quad \Theta_0 = \left(\frac{m_1 - A_0^+ A_0^- m_2}{M} \right). \quad (5.85)$$

Os autovalores da equação (5.84) nos fornecem importantes informações sobre o comportamento do sistema. Matriz (5.84) possui determinante igual a $\det(MT_{j,0}) = 1$, ficando claro pela matriz possuir blocos contendo coeficientes iguais a zero. Os autovalores desta matriz são $\mu = \{-1, 1\}$ com multiplicidade 2.

Os expoentes de Lyapunov quantificam a taxa média de expansão ou contração das diferenças infinitesimais entre a trajetória principal e a trajetória satélite. Eles são determinados pelos autovalores de $MT_{j,0}$, com a seguinte expressão

$$\Lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \mu_i(t), \quad (5.86)$$

sendo que $\mu_i(t)$ é o i -ésimo autovalor de MT .

Os autovalores da matriz (5.84) levam a expoentes de Lyapunov iguais a zero, como visto nos casos [5, 21]. A suavidade das paredes, quando não há interação entre as partículas, não modificam o caráter regular do sistema. Isso era esperado, pois trata-se de um sistema de 1 grau de liberdade independente do tempo. Consequentemente, podemos dizer que os expoentes de Lyapunov calculados para $t \rightarrow \infty$, serão iguais a zero independente do valor da razão de massas das partículas.

5.1.3 Expoentes de Lyapunov para partículas interagentes

Agora introduziremos a força de interação entre as partículas. A Hamiltoniana para o problema é dada por

$$\mathcal{H}(q_1, q_2; p_1, p_2) = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} - \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}(q_1 + 1) \right) + \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}(q_1 - 1) \right) - \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}(q_2 + 1) \right) + \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}(q_2 - 1) \right) \quad (5.87)$$

Para escrevermos \mathcal{H} em função das coordenadas relativa e do centro de massa, temos que expressar q_1 e q_2 em função de r e R .

$$r = q_1 - q_2, \quad R = \frac{m_1 q_1 + m_2 q_2}{M}, \quad M = m_1 + m_2. \quad (5.88)$$

Manipulando algebricamente as equações em (5.88) encontramos:

$$q_1 = \frac{m_2}{M}r + R \quad (5.89)$$

e

$$q_2 = -\frac{m_1}{M}r + R. \quad (5.90)$$

Podemos escrever estas expressões na forma matricial

$$\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_2}{M} & 1 \\ -\frac{m_1}{M} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ R \end{pmatrix}. \quad (5.91)$$

A Função de Hamilton fica

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(r, R; p, P) &= \frac{P^2}{2M} + \frac{p^2}{2\mu} + V_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} \\ &- \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \left(\frac{m_2}{M}r + R + 1 \right) \right) + \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \left(\frac{m_2}{M}r + R - 1 \right) \right) \\ &- \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \left(-\frac{m_1}{M}r + R + 1 \right) \right) + \frac{F_0}{2} \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2}} \left(-\frac{m_1}{M}r + R - 1 \right) \right) \end{aligned} \quad (5.92)$$

Utilizaremos a equação (5.58) para escrever a matriz no espaço tangente. A parede do bilhar pode ser escrita como uma série de degraus, como foi feito na seção anterior. Para a região 1, na figura (5.1) temos

$$F(x_i) = \begin{pmatrix} v_i \\ V_i \\ Q(r) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.93)$$

e

$$F[M(x_i)] = \begin{pmatrix} \zeta_0^- v_i + \varrho_0^- V_i \\ \frac{\mu}{M} \varrho_0^- v_i + \xi_0^- V_i \\ Q(r) \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (5.94)$$

onde $\dot{v} = Q(r) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r}$ representa a força de Yukawa.

$$\delta x_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_0^- & \varrho_0^- \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{M} \varrho_0^- & \xi_0^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r_i \\ \delta R_i \\ \delta v_i \\ \delta V_i \end{pmatrix} + \quad (5.95)$$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \zeta_0^- & \varrho_0^- \\ 0 & 0 & \frac{\mu}{M}\varrho_0^- & \xi_0^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_i \\ V_i \\ Q(r) \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \zeta_0^- v_i + \varrho_0^- V_i \\ \frac{\mu}{M}\varrho_0^- v_i + \xi_0^- V_i \\ Q(r) \\ 0 \end{pmatrix} \right] \delta\tau.$$

Podemos escrever a expressão acima na forma de equações

$$\delta r_f = \delta r_i + ((1 - \zeta_0^-)v_i - \varrho_0^- V_i)\delta\tau, \quad (5.96)$$

$$\delta R_f = \delta R_i + \left(-\frac{\mu}{M}\varrho_0^- v_i + (1 - \xi_0^-)V_i \right) \delta\tau \quad (5.97)$$

$$\delta v_f = \zeta_0^- \delta v_i + \varrho_0^- \delta V_i + (\zeta_0^- - 1) Q(r)\delta\tau, \quad (5.98)$$

$$\delta V_f = \frac{\mu}{M}\varrho_0^- \delta v_i + \xi_0^- \delta V_i + \frac{\mu}{M}\varrho_0^- Q(r)\delta\tau. \quad (5.99)$$

Neste caso o tempo de atraso $\delta\tau$, entre a colisão da trajetória principal e a colisão da trajetória satélite é encontrado da derivada da integral da ação em relação à energia do sistema [21]

$$\delta\tau_j = \frac{\partial S_j}{\partial E_j} = m_j \int_{q_0}^q \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial E_j} dq_j = \int_{q_0}^q \frac{dq_j}{\dot{q}_j}. \quad (5.100)$$

Com a integral da ação sendo expressa como [24]

$$S_j = \int p_j dq_j = \int m_j \dot{q}_j dq_j, \quad (5.101)$$

e lembrando que

$$\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial E} = \frac{1}{\dot{q}_j}. \quad (5.102)$$

Sabendo que

$$dq_{1(2)} = (-1)^{2(1)} \frac{m_{2(1)}}{M} dr + dR, \quad (5.103)$$

e

$$\dot{q}_{1(2)} = (-1)^{2(1)} \frac{m_{2(1)}}{M} v + V. \quad (5.104)$$

Substituindo essas duas expressões na integral para o tempo de atraso, obtemos

$$\delta\tau_j = -(A_j \delta R_i + B_j \delta r_i), \quad (5.105)$$

índice j representa as partículas 1 e 2, e A_j e B_j são escritos como:

$$A_{1(2)} = \frac{M}{MV_i - (-1)^{1(2)} m_{2(1)} v_i}, \quad (5.106)$$

$$B_{1(2)} = -(-1)^{1(2)} \frac{1}{\delta r_i} \int_{r_0}^r \frac{m_{2(1)} dr}{MV_i - (-1)^{1(2)} m_{2(1)} v_i}. \quad (5.107)$$

Substituimos $\delta\tau_2$ em (5.96), (5.97), (5.98) e (5.99), obtemos a matriz:

$$\begin{pmatrix} \delta r_f \\ \delta R_f \\ \delta v_f \\ \delta V_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_0^- & \varrho_0^- & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{M}\varrho_0^- & \xi_0^- & 0 & 0 \\ \frac{m_1}{M}\varrho_0^- Q(r) B_2 & \frac{m_1}{M}\varrho_0^- Q(r) A_2 & \zeta_0^- & \varrho_0^- \\ -\frac{\mu}{M}\varrho_0^- Q(r) B_2 & -\frac{\mu}{M}\varrho_0^- Q(r) A_2 & \frac{\mu}{M}\varrho_0^- & \xi_0^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta r^i \\ \delta R^i \\ \delta v^i \\ \delta V^i \end{pmatrix}. \quad (5.108)$$

Com a matriz monodrômica para a partícula 2, da forma:

$$MT_{Q_{2,1}} = \begin{pmatrix} \zeta_0^- & \varrho_0^- & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{M}\varrho_0^- & \xi_0^- & 0 & 0 \\ \frac{m_1}{M}\varrho_0^-Q(r)B_2 & \frac{m_1}{M}\varrho_0^-Q(r)A_2 & \zeta_0^- & \varrho_0^- \\ -\frac{\mu}{M}\varrho_0^-Q(r)B_2 & -\frac{\mu}{M}\varrho_0^-Q(r)A_2 & \frac{\mu}{M}\varrho_0^- & \xi_0^- \end{pmatrix}. \quad (5.109)$$

Para as regiões 2 e 4, ida e volta sobre o degrau, consideramos que a largura do degrau é muito pequena. Então o tempo que a partícula leva para atravessá-lo também será pequeno, por esse motivo podemos escrever as matrizes com

$$MT_{Q_{2,2}} = \begin{pmatrix} (1 + B_2\Delta t_2Q(r)) & A_2\Delta t_2Q(r) & \Delta t_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t_2 \\ B_2Q(r) & A_2Q(r) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.110)$$

$$MT_{Q_{2,4}} = \begin{pmatrix} (1 - B_2\Delta t_4Q(r)) & -A_2\Delta t_4Q(r) & -\Delta t_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\Delta t_4 \\ B_2Q(r) & A_2Q(r) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.111)$$

Para a colisão da partícula com a parede temos

$$MT_{Q_{2,3}} = \begin{pmatrix} -\kappa & 2 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 \\ \kappa_2 B_2Q(r) & \kappa_2 A_2Q(r) & -\kappa & 2 \\ \frac{2\mu}{M} B_2Q(r) & \frac{2\mu}{M} A_2Q(r) & \frac{2\mu}{M} & \kappa \end{pmatrix}, \quad (5.112)$$

onde $\kappa_j = (\kappa + (-1)^j)$, com $j = 1, 2$ representando as partículas 1 e 2.

$$MT_{Q_{2,5}} = \begin{pmatrix} \zeta_0^+ & \varrho_0^+ & 0 & 0 \\ \frac{\mu}{M}\varrho_0^+ & \xi_0^+ & 0 & 0 \\ \frac{m_1}{M}\varrho_0^+Q(r)B_2 & \frac{m_1}{M}\varrho_0^+Q(r)A_2 & \zeta_0^+ & \varrho_0^+ \\ -\frac{\mu}{M}\varrho_0^+Q(r)B_2 & -\frac{\mu}{M}\varrho_0^+Q(r)A_2 & \frac{\mu}{M}\varrho_0^+ & \xi_0^+ \end{pmatrix}. \quad (5.113)$$

Para se obter a matriz monodrômica no espaço tangente, escrita conforme a equação (5.55), devemos multiplicar as matrizes acima. Este procedimento é extremamente complicado por existirem muitos termos diferentes e por a matriz final ser muito complicada, não mostraremos esse resultado. É possível analisar essas matrizes encontradas sem precisar efetuar o procedimento dito anteriormente. Notamos que a diferença entre as matrizes de (5.79) à (5.82) e de (5.108) à (5.113), se dá através dos termos $A_2Q(r)$ e $B_2Q(r)$, devido ao potencial de Yukawa. Esses termos levam a expoentes de Lyapunov maiores que zero, calculados através de (5.86), gerando o comportamento caótico no sistema.

Generalizando estas expressões para N degraus com larguras e alturas variáveis e para as duas partículas, temos as matrizes das regiões 1 e 5 iguais a:

$$MT_{Q_{j,n+1}} = (-1)^j \begin{pmatrix} \left(\frac{m_1}{M}\varrho_n^\mp + 1\right) & -\varrho_n^\mp & 0 & 0 \\ -\frac{\mu}{M}\varrho_n^\mp & \left(\frac{m_2}{M}\varrho_0^\mp + 1\right) & 0 & 0 \\ -\frac{m_1}{M}\varrho_n^\mp Q(r)B_j & -\frac{m_1}{M}\varrho_n^\mp Q(r)A_j & \zeta_n^\mp & \varrho_n^\mp \\ \frac{\mu}{M}\varrho_n^\mp Q(r)B_j & \frac{\mu}{M}\varrho_n^\mp Q(r)A_j & \frac{\mu}{M}\varrho_n^\mp & \xi_n^\mp \end{pmatrix}. \quad (5.114)$$

Para as regiões 2 e 4

$$MT_{Q_{j,n+2}} = (-1)^j \begin{pmatrix} ((\pm 1)B_j\Delta t_{n+2}Q(r)) & (\pm 1)A_j\Delta t_{n+2}Q(r) & (\pm 1)\Delta t_{n+2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & (\pm 1)\Delta t_{n+2} \\ B_jQ(r) & A_jQ(r) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (5.115)$$

$$M_{T_{j,N}} = (-1)^j \begin{pmatrix} -\kappa & 2 & 0 & 0 \\ \frac{2\mu}{M} & \kappa & 0 & 0 \\ \kappa_j B_j Q(r) & \kappa_j A_j Q(r) & -\kappa & 2 \\ \frac{2\mu}{M} B_j Q(r) & \frac{2\mu}{M} A_j Q(r) & \frac{2\mu}{M} & \kappa \end{pmatrix}, \quad (5.116)$$

onde $\kappa_j = (\kappa + (-1)^j)$, com $j = 1, 2$ representando as partículas 1 e 2.

Para a interação de longo alcance ($\alpha = 0$), em cada colisão da partícula com a parede, a força de interação $Q(r)$ é finita e os expoentes de Lyapunov podem ser positivos. Quando temos interação de curto alcance ($\alpha \gg 0$) o potencial de interação $Q(r) \rightarrow 0$, se as partículas estão suficientemente afastadas os expoentes de Lyapunov são nulos. O sistema possui comportamento caótico, devido as duplas colisões das partículas, ou seja, quando uma partícula, por exemplo a partícula 2, está próxima a parede da direita, e a partícula 1 está próxima dessa partícula há a colisão de 2 com a parede e em seguida com 1. Esse evento pode acontecer várias vezes e $A_j Q(r)$ e $B_j Q(r)$ não serão necessariamente iguais a zero, resultando numa possível dinâmica caótica [5].

5.2 Resultados Numéricos

5.2.1 Paredes aproximadamente rígidas ($\sigma = 5 \times 10^{-3}$)

Nos resultados analíticos mostramos que o comportamento caótico do sistema surge devido ao potencial de Yukawa. Nesta seção estamos interessados em saber, qual a influência da suavidade das paredes do bilhar sobre a dinâmica das partículas aprisionadas. Para isso, estudaremos a distribuição $P(\Lambda_t, \gamma)$ dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito Λ_t , em função da razão de massas γ das partículas.

O procedimento numérico utilizado para o cálculo do expoente de Lyapunov máximo, é baseado no método desenvolvido por Benettin apresentados na seção

2.2.4. Primeiramente fixamos as paredes do bilhar, constituídas da função “erro”, em $q = \pm 1$. Em seguida geramos aleatoriamente 400 condições iniciais para a evolução das equações de movimento. O tempo de integração das equações de movimento foi de 10^4 , e o método de integração utilizado é o Runge-Kutta de ordem 4. Fixamos a energia do sistema em 0,5, e a intensidade do potencial de Yukawa com $V_0 = 1$ e $\alpha = 0$, ou seja, estudaremos o comportamento do sistema quando as partículas possuem uma interação de longo alcance (potencial Coulombiano), com intensidade $F_0 = 10$. A suavidade das paredes é feita através da variação do valor de σ , o qual utilizamos dois valores diferentes, $\sigma = 5 \times 10^{-3}$ que se aproxima de uma parede rígida, e $\sigma = 5 \times 10^{-2}$ para parede suave. A figura (5.2) apresenta o bilhar com paredes aproximadamente rígidas, a figura (5.3) mostra o bilhar com paredes suaves. A figura (5.4) mostra a sobreposição das duas paredes, aproximadamente rígidas com linha inteira, e paredes suaves com pontos.

Evoluímos 400 trajetórias para cada razão de massas $\gamma = \frac{m_2}{m_1}$, variando γ num passo de $\Delta\gamma = 0,01$, no intervalo de $0,01 \leq \gamma \leq 4,0$. Calculamos o expoente de Lyapunov local 10^5 vezes para cada trajetória, ou seja, para cada trajetória principal a trajetória satélite é reiniciada 10^5 vezes, conforme esquematizado na figura (2.6) no capítulo 2. A trajetória satélite evolui por um tempo de $\tau = 0,2$. Tanto o tempo de evolução da trajetória principal, quanto o tempo da trajetória satélite são suficientes para que o expoente de Lyapunov tenha boa convergência. A convergência dos expoentes de Lyapunov para o tempo de evolução de 10^4 de 5 trajetórias e $\tau = 0,2$, pode ser vista na figura (5.5). A separação inicial $|\varepsilon_0|$ tomada entre as trajetórias principal e satélite foi de 10^{-5} . Obtendo Λ_t , calculamos a distribuição destes expoentes $P(\Lambda_t, \gamma)$, e a distribuição de maior probabilidade de ocorrência $P_\Lambda(\gamma)$ de Λ_t^p , como função da razão de massas das partículas.

Como citado anteriormente, utilizamos 400 trajetórias para o cálculo do expoente de Lyapunov. Fizemos esse mesmo cálculo com 200 trajetórias diferentes para verificar se alguma mudança significativa ocorreria, mas não encontramos resultados diferentes. Apesar de observarmos uma densidade menor de pontos na distribuição dos expoentes de Lyapunov, qualitativamente o sistema apresentou o mesmo comportamento. Essa verificação havia sido feita em [14], para a evolução de 600 trajetórias diferentes e a conclusão foi a mesma que a nossa.

O cálculo da seção de Poincaré é feito da seguinte maneira: Quando uma partícula passa pela origem ($q = 0$) do bilhar, é marcado a posição q e o momento p da outra partícula. Para essa marcação é necessário escolher um único sentido, positivo ou negativo. Em nossos cálculos procedemos da seguinte maneira, quando a partícula 2, que se encontra no lado direito da partícula 1, passar pela posição $q_2 = 0$, no sentido positivo $p_2 > 0$, marcamos a posição q_1 e o momento p_1 , da partícula 1. Através destas seções mostramos que existem ilhas de regularidade no espaço de fases do sistema.

O primeiro caso a ser analisado é o bilhar com paredes aproximadamente rígidas, onde temos o valor de $\sigma = 5 \times 10^{-3}$. Na figura (5.6) temos a média dos

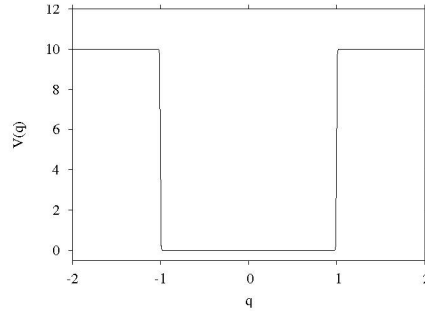


Figura 5.2: Bilhar com paredes aproximadamente rígidias $\sigma = 5 \times 10^{-3}$.

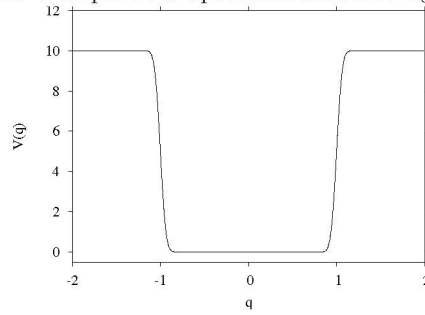


Figura 5.3: Bilhar com paredes suaves $\sigma = 5 \times 10^{-2}$.

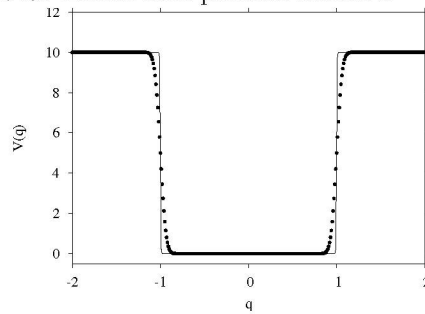


Figura 5.4: Sobreposição das paredes aproximadamente rígidias (linha inteira) e paredes suaves (pontos).

expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito $\langle \Lambda_t(\gamma) \rangle$ em função da razão de massas γ . A figura apresenta o caso de paredes rígidias [14] com linha tracejada, e o caso de paredes aproximadamente rígidias com linha inteira. Os valores médio $\langle \Lambda_t(\gamma) \rangle$, para o nosso problema de paredes aproximadamente rígidias, nos mostra que o sistema é caótico, devido ao fato de estes apresentarem valores positivos. O valor médio dos expoentes decai com o incremento da razão de massa das partículas, ou seja, o sistema torna-se mais regular. A média $\langle \Lambda_t(\gamma) \rangle$ decresce de valores próximos a 1, 2 a 0, 5 com a variação de γ entre 0, 01 e 4, 0. Através da figura (5.6) observamos que para razão de massas entre 0.01 e 3.0, o modelo construído por nós é compatível com o caso de paredes rígidias proposto por Manchein [5, 14].

Ainda não temos uma explicação física para os picos apresentados em $\gamma \sim$

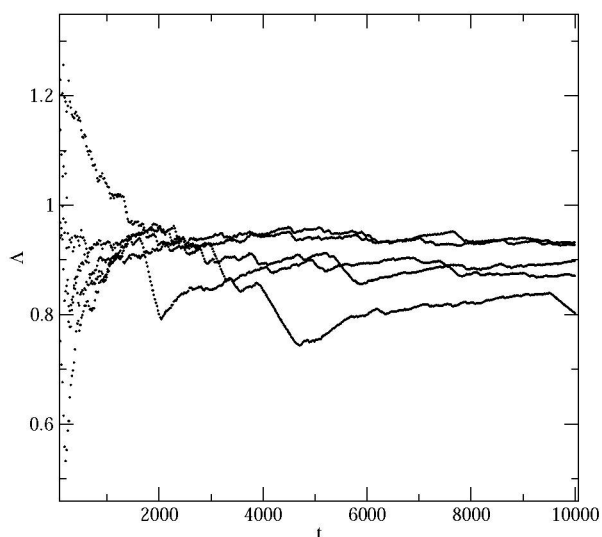


Figura 5.5: Convergência dos expoentes de Lyapunov para 5 trajetórias, num tempo de evolução de 10^4 e $\tau = 0,2$ para o tempo de evolução da trajetória satélite.

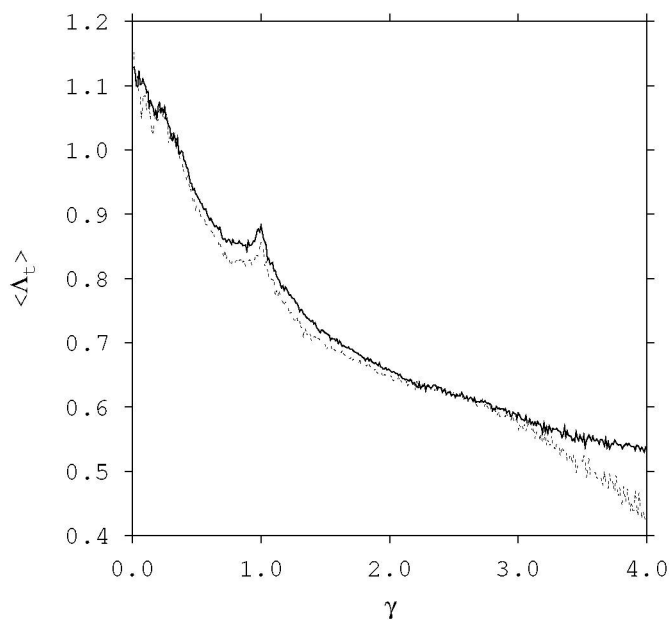


Figura 5.6: Valor médio do expoente de Lyapunov máximo a tempo-finito. Esta figura é construída com 400 trajetórias para $\sigma = 5 \times 10^{-3}$ (paredes aproximadamente rígidas) com linha tracejada. A curva com linha inteira representa os expoentes para paredes rígidas.

0,3 e $\gamma \sim 1,0$, mas recentemente foram discutidos em [63]. Nesse trabalho foi proposto uma relação entre parâmetros do sistema físico (razão de massas entre partículas) e uma propriedade dos números. A razão de massas de um sistema de duas partículas sofrendo colisões rígidas numa caixa unidimensional, possui uma relação com a estabilidade das órbitas periódicas geradas pelo mapa de Gauss. Essa

relação foi feita através da medida de Lebesgue zero. O mapa de Gauss é um mapa caótico dado por

$$G(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x} \right]. \quad (5.117)$$

em que $\left[\frac{1}{x} \right]$ representa a parte fracionária do mapa. Essas razões de massas referem-se aos casos onde o sistema seria integrável. Nesta dissertação não nos aprofundaremos nesse assunto, pelo fato dele ser um tema bastante amplo, em que gastaríamos um tempo grande para explicá-lo. Para maiores explicações consultar [63].

Na figura (5.7) temos a distribuição $P(\Lambda_t, \gamma)$ dos expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito em função da razão de massas γ das partículas. Em (5.7-a) o caso aproximadamente rígido, e em (5.7-b) o caso de paredes rígido [5, 14]. Estes gráficos são um corte das figuras tridimensionais das distribuições originais, onde os eixos daquelas figuras são a razão de massas γ , expoente de Lyapunov máximo Λ_t , e as trajetórias geradas pelo sistema. Este terceiro eixo, estaria saindo da folha na figura bidimensional. Tornar a figura bidimensional, tem como razão a possibilidade de visualizarmos o maior número de trajetórias, para um mesmo valor do expoente de Lyapunov, através da coloração mais escura.

A cor amarela, indica que nenhuma condição inicial com aquele valor de γ levou o sistema àquele valor de expoente de Lyapunov. A cor cinza, indica que temos uma baixa densidade de pontos no gráfico, ou seja, algumas condições iniciais levam aqueles expoentes de Lyapunov. As cores azuis representam uma densidade média de pontos e a cor preta, maior densidade de pontos.

Na parte onde há a maior concentração dos pontos, temos o expoente de Lyapunov máximo de maior probabilidade de ocorrência, definido como:

$$\left. \frac{\partial P(\Lambda_t, \gamma)}{\partial \Lambda_t} \right|_{\Lambda_t = \Lambda_t^p} = 0. \quad (5.118)$$

Na figura (5.7-a) as regiões entre $\Lambda_t \sim 1.2$ e $\Lambda_t \sim 0.5$, encontramos a curva em azul e preto nos dizendo que um grande número de condições iniciais levaram àquele valor de expoente de Lyapunov. Já os pontos cinzas abaixo da curva, nos indicam a existência de trajetórias aprisionadas no espaço de fases. Este resultado nos informa que existem armadilhas dinâmicas no espaço de fases, fazendo com que o valor do expoente de Lyapunov decaia. Algumas trajetórias geradas pelo sistema visitam mais vezes, durante seu tempo de evolução, certas regiões do espaço de fases. Pela distribuição, verificamos que o sistema é caótico, pois ele apresenta expoentes de Lyapunov máximo maiores que zero.

Pela figura (5.7-a) percebemos que um maior número de armadilhas dinâmicas aparecem entre $0,6 \leq \gamma \leq 1,5$ e $3,0 \leq \gamma \leq 4,0$ e o valor do expoente de Lyapunov máximo diminui conforme se aumenta a razão de massas entre as partículas. Também observamos nesta distribuição os mesmos picos apresentados em $\gamma \sim 0,3$ e $\gamma \sim 1,0$, vistos no gráfico da média dos expoentes de Lyapunov.

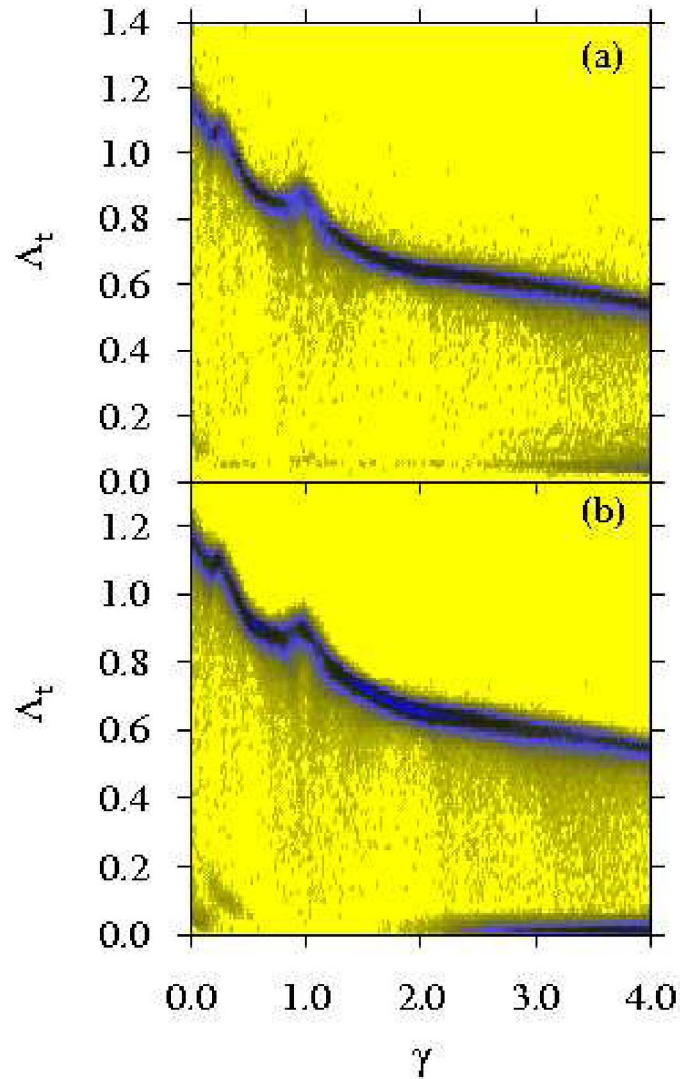


Figura 5.7: Distribuição $P(\Lambda_t, \gamma)$ dos expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito Λ_t em função da razão de massas γ das partículas. Em (a) temos o caso de paredes aproximadamente rígidas ($\sigma = 5 \times 10^{-3}$). Em (b) o caso de paredes rígidas.

Como discutido para a média dos expoentes de Lyapunov, a distribuição dos expoentes para o caso aproximadamente rígido, figura (5.7-a), está de acordo como a distribuição encontrada para o caso de paredes rígidas, figura (5.7-b), estudado por Manchein [5]. Na distribuição (5.7-a) observamos um menor número de pontos abaixo do expoente de Lyapunov de maior probabilidade, em relação a figura (5.7-b), caso de paredes rígidas. As curvas em azul e preto, para as duas distribuições são qualitativamente equivalentes. Nas duas figuras estão presentes os picos citados, nos

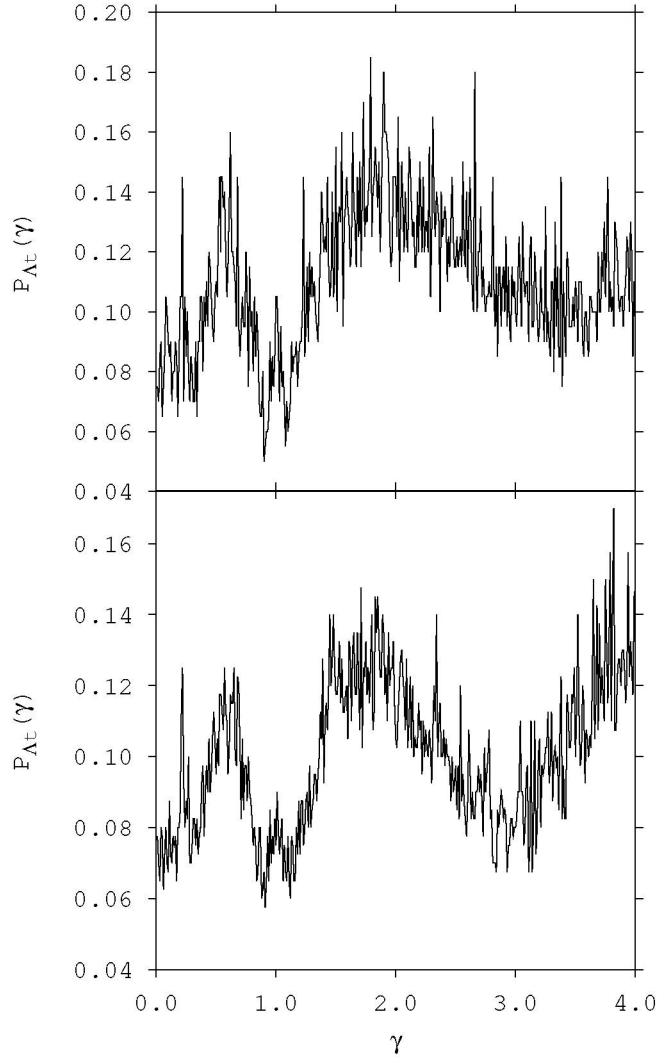


Figura 5.8: Número de ocorrências dos expoentes de Lyapunov máximo de maior probabilidade $\Lambda_t^p(\gamma)$. Na parte de cima da figura temos o caso de paredes aproximadamente rígidas ($\sigma = 5 \times 10^{-3}$). Em baixo paredes rígidas.

mesmos valores de γ e da mesma forma apresentada nas médias, tratadas em [63].

Na figura (5.8) é apresentada a distribuição $P_\Lambda(\gamma)$ dos expoentes de Lyapunov máximo de maior probabilidade de ocorrência Λ_t^p , em função da razão de massas γ . Este gráfico refere-se à distribuição dos expoentes de Lyapunov máximo apresentados em cores azul e preto na figura (5.7-a,b). Para obter o gráfico de $P_\Lambda(\gamma)$ é feito um corte em $P(\Lambda_t, \gamma)$, de tal forma que temos $P(\Lambda_t^p, \gamma) = P_\Lambda(\gamma)$, como função da razão

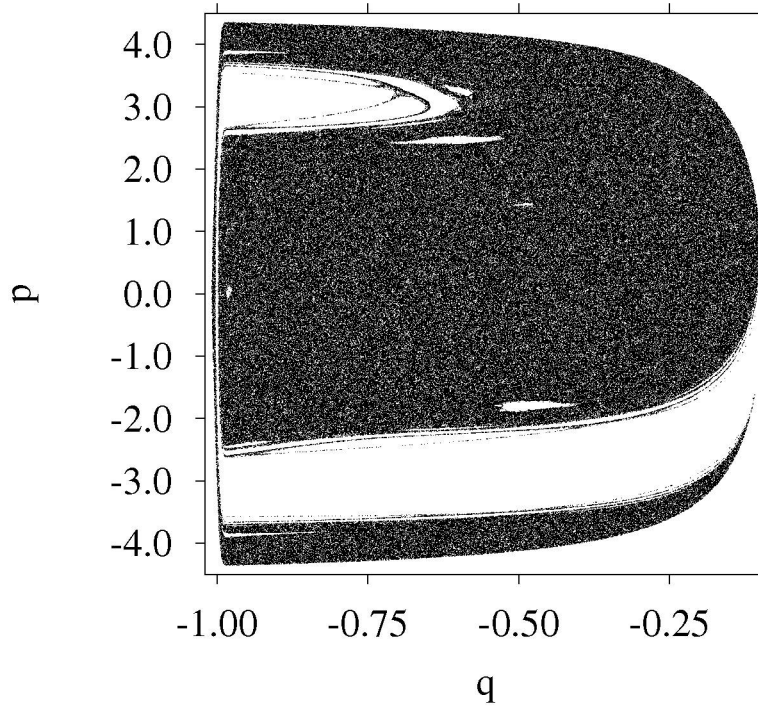


Figura 5.9: Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 1,0$ e $\sigma = 5 \times 10^{-3}$. Figura gerada para 100 trajetórias. A figura mostra ilhas de regularidade imersas num mar caótico.

de massas γ . Na parte de cima da figura (5.8) temos a distribuição para o caso de paredes aproximadamente rígidas, e na parte de baixo o caso de paredes rígidas.

Comparando as figura (5.7-a) e (5.8) na parte de cima, constatamos que na região onde $P_\Lambda(\gamma)$ tem um máximo, em $\gamma \sim 1,7$ e $\gamma \sim 2,5$, uma grande fração de condições iniciais levam ao mesmo valor de Λ_t , diminuindo a dispersão em torno de Λ_t^p . Isto é consequência da redução do número de armadilhas dinâmicas. As regiões de mínimo em (5.8), $0,7 \leq \gamma < 1,4$ e $3,0 < \gamma \leq 4,0$, indicam a presença de pontos abaixo do Lyapunov máximo mais provável, o que diminui a densidade de pontos em torno do mais provável. Este resultado nos informa sobre a existência de trajetórias aprisionadas no espaço de fases.

Como visto em [14], esses mínimos representam sinais dos casos integráveis remanescentes do problema de duas partículas rígidas colidindo frontalmente. A existência deles são observados pela dispersão dos expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito. Mais precisamente na distribuição do expoente de maior probabilidade de ocorrência.

Na figura (5.9) temos a Seção de Poincaré para a partícula 1. São plotados os momentos e as posições da partícula 1, no instante em que a partícula 2 passa pela origem do bilhar. Leva-se em conta apenas o sentido positivo da partícula 2, ou seja,

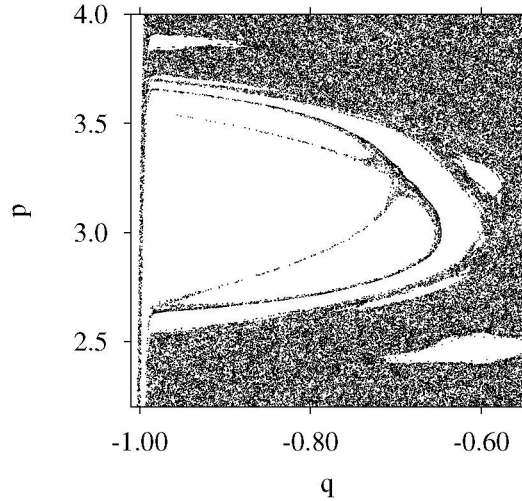


Figura 5.10: Ampliação da figura (5.9). Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 1,0$ e $\sigma = 5 \times 10^{-3}$.

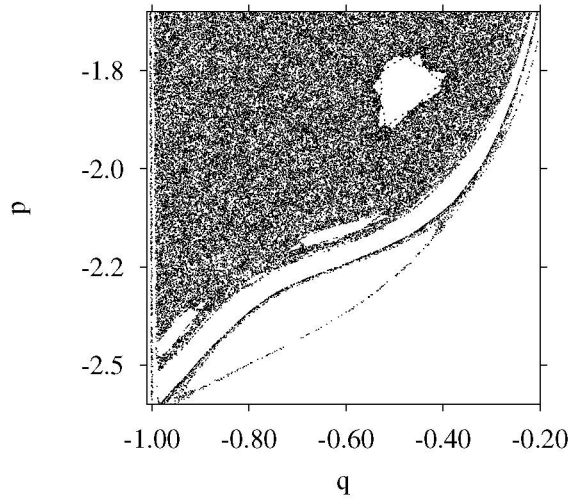


Figura 5.11: Segunda ampliação da figura (5.9). Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 1,0$ e $\sigma = 5 \times 10^{-3}$. Formação de ilhas no espaço de fases.

$p_2 > 0$. Esta figura foi feita com a evolução de 100 trajetórias e razão de massas $\gamma = 1,0$, para $\sigma = 5 \times 10^{-3}$. Nesta seção observamos indícios de ilhas de regularidade imersas no mar caótico. Este resultado confirma as afirmações feitas anteriormente para a figura (5.7-a), que apresentou pontos abaixo da curva do expoente de Lyapunov máximo de maior probabilidade de ocorrência. Apesar do aparecimento das armadilhas dinâmicas, não são encontradas curvas KAM. Nas figuras (5.10) e (5.11), temos ampliações da seção (5.9). Nestas figuras observamos com mais detalhes as regiões não visitadas no espaço de fases, em que observamos a formação de algumas

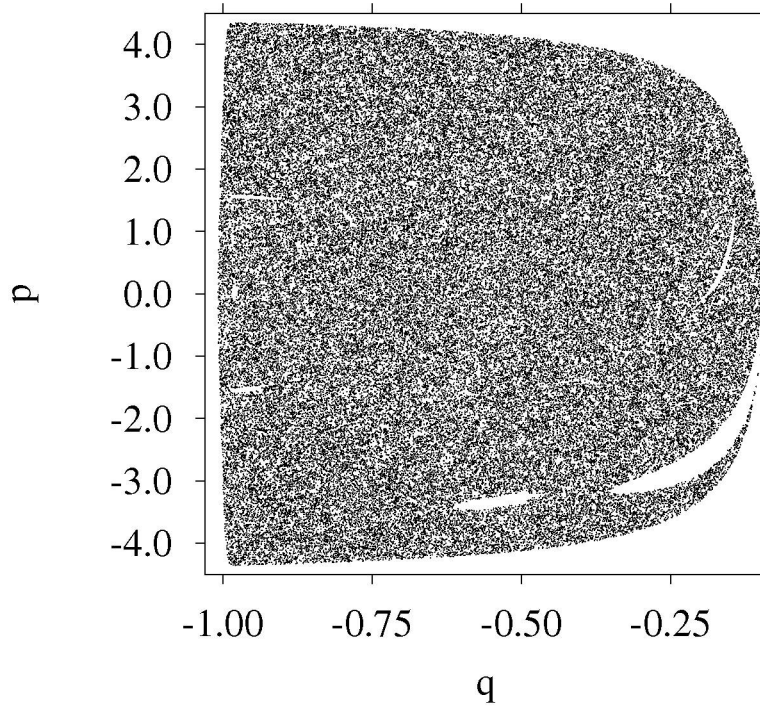


Figura 5.12: Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 1,8$ e $\sigma = 5 \times 10^{-3}$. A figura apresenta indícios de poucas ilhas no espaço de fases.

ilhas.

A figura (5.12), contém a seção de Poincaré para o mesmo valor de σ , mas com $\gamma = 1,8$. Esta nos mostra poucos indícios do aparecimento de armadilhas no espaço de fases. Como apresentado na distribuição (5.7-a), existe um menor número de ilhas de regularidade, portanto para esse valor de razão de massas o sistema é mais caótico. Os formatos curvos apresentados pelas seções de Poincaré, nas partes inferiores direitas, se devem a forma do potencial utilizado para a interação entre as partículas. Com as simplificações feitas inicialmente estamos utilizando o potencial de Coulomb ($1/r$) para esta interação.

5.2.2 Paredes Suaves com ($\sigma = 5 \times 10^{-2}$)

Nesta seção utilizamos o mesmo procedimento numérico da seção anterior. Na figura (5.13) é apresentada a média dos expoentes de Lyapunov máximos $\langle \Lambda_t(\gamma) \rangle$, referentes aos casos de paredes aproximadamente rígidas com linha tracejada, e paredes suaves com linha inteira, ou seja, $\sigma = 5 \times 10^{-3}$ e $\sigma = 5 \times 10^{-2}$ respectivamente. Observamos que o sistema é caótico por possuir expoentes de Lyapunov positivos. O valor destes expoentes diminui com o aumento da razão de massas. A média também apresenta dois picos para as razões de massas $\gamma \sim 0,4$ e $\gamma \sim 1,0$, como no

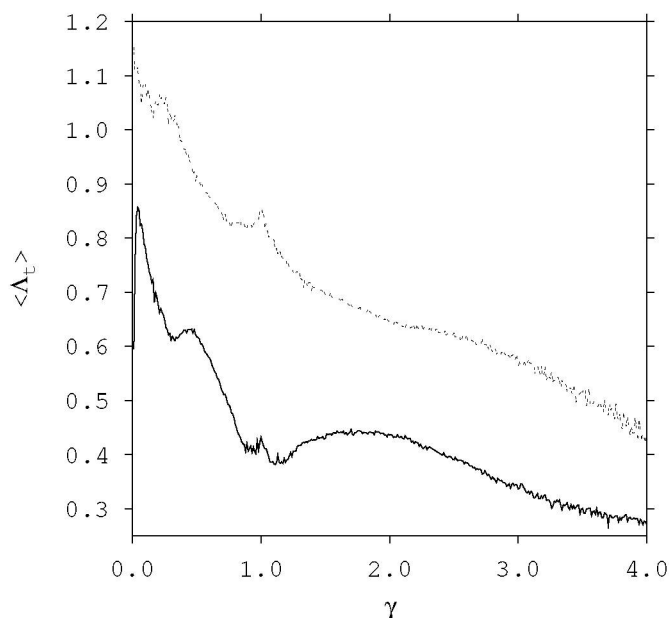


Figura 5.13: Valor médio do expoente de Lyapunov máximo a tempo-finito. Esta figura é construída para 400 trajetórias para $\sigma = 5 \times 10^{-2}$ para linha inteira. Para a linha tracejada temos o caso de paredes aproximadamente rígidas ($\sigma = 5 \times 10^{-3}$).

caso de paredes rígidas, mas nesse caso, como se pode perceber na figura (5.13), o pico para paredes suaves é muito menor que o apresentado para paredes aproximadamente rígidas. Esse fato se deve à maior dispersão do pico em torno de $\gamma = 1.0$ para o caso de paredes suaves, ou seja, pela maior regularidade do sistema. Apesar da pequena variação nas paredes, como visto na figura (5.4), observamos uma grande modificação no comportamento do sistema. Este fato é visto pela queda acentuada da média dos expoentes de Lyapunov.

Na figura (5.14) apresentamos a distribuição dos expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito com $\sigma = 5 \times 10^{-2}$, ou seja, o caso em que o bilhar apresenta paredes suaves. Notamos que a curva apresentada, para o expoente de maior probabilidade de ocorrência, é qualitativamente semelhante ao caso de paredes aproximadamente rígidas. O valor dos expoentes de Lyapunov máximo são menores do que os do caso anterior, variando de $1,0 \geq \Lambda_t \geq 0,0$. Através da figura pode-se verificar o aparecimento de uma série de pontos abaixo do expoente mais provável. Os intervalos em que isto ocorre estão situados em $0,1 \leq \gamma \leq 0,5$, $0,8 \leq \gamma \leq 1,3$ e $3,0 \leq \gamma \leq 4,0$. Estas regiões indicam, como no caso de parede aproximadamente rígidas, que muitas condições iniciais levaram a vários valores diferentes de expoente de Lyapunov. Este resultado também se refere a um maior número de trajetórias aprisionadas no espaço de fases.

O pico, que se encontrava em $\gamma \sim 0,3$ para o caso rígido, deslocou-se para $\gamma \sim 0,5$ no caso suave. O pico em $\gamma = 1,0$ se manteve na mesma posição, mas com uma maior dispersão de pontos a sua volta. Como visto em [63], mesmo quando

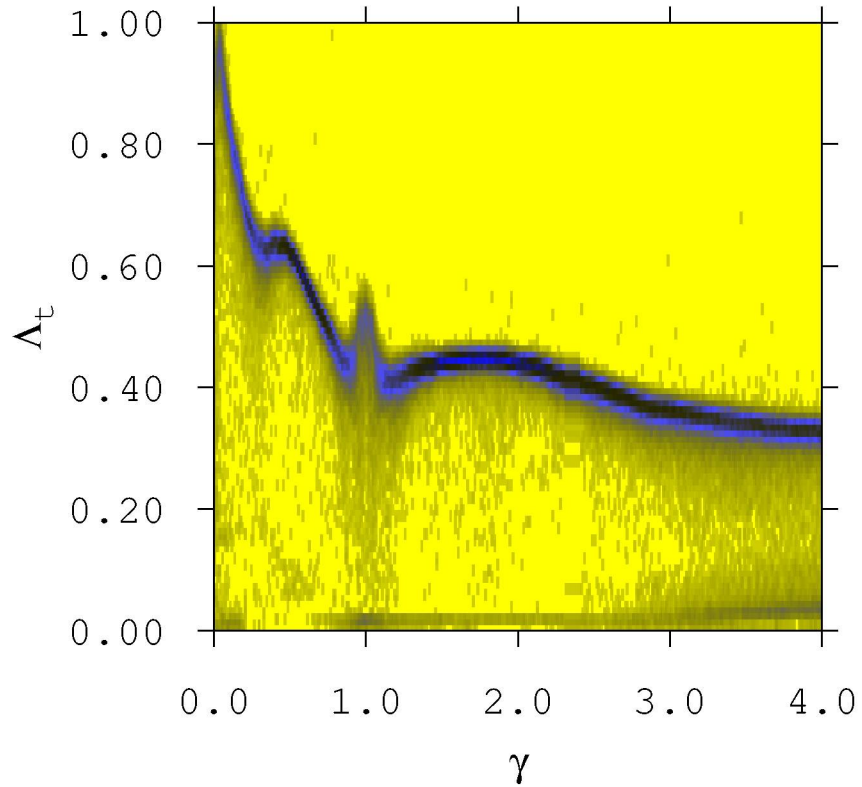


Figura 5.14: Distribuição dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito $P(\gamma)$ em função da razão de massas γ das partículas. Caso de paredes suaves $\sigma = 5 \times 10^{-2}$.

as paredes são suavizadas o sistema apresenta caos, mas ainda temos indícios de regularidade devido à dispersão dos valores dos expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito.

Na sequência apresentamos a figura (5.15) com a distribuição dos expoentes de Lyapunov máximo de maior probabilidade de ocorrência. Para os valores de razão de massas $0,4 \leq \gamma \leq 0,6$ e $1,3 \leq \gamma \leq 2,7$, muitas condições iniciais levam ao mesmo valor de expoente de Lyapunov. Já nos valores em torno de $\gamma = 1,0$ e entre $3,3 \leq \gamma \leq 3,4$ observamos que aparecem muitos pontos abaixo do expoente de Lyapunov máximo mais provável. Este resultado diz que existem armadilhas dinâmicas, ou seja, indícios de movimento regular no sistema.

A figura (5.16) foi gerada com 200 trajetórias e $\sigma = 5 \times 10^{-2}$. Nesta seção de Poincaré a razão de massas possui valor 0,8, e apresenta ilhas de regularidade, conforme visto na distribuição (5.15). Através dessa figura observamos a existência

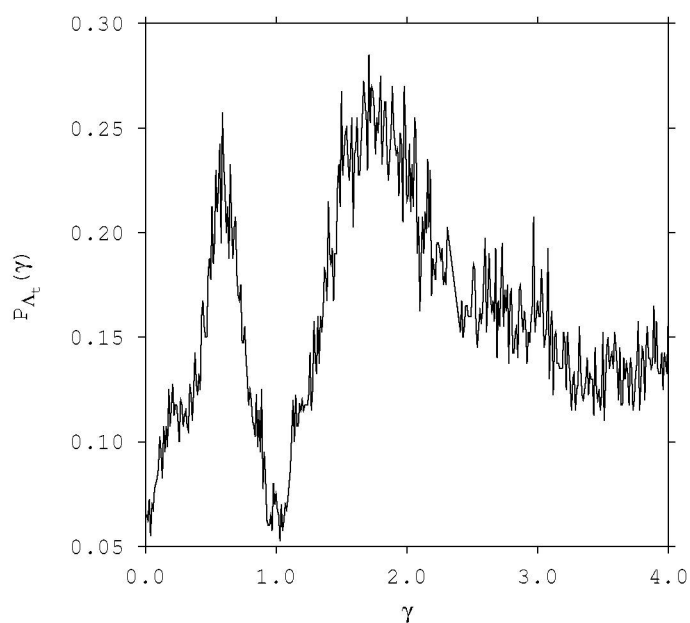


Figura 5.15: Número de ocorrências dos expoentes de Lyapunov máximo de maior probabilidade $\Lambda_t^p(\gamma)$ para $\sigma = 5 \times 10^{-2}$.

de ilhas de regularidade imersas num mar caótico. Com o aumento de σ (suavização das paredes) podemos observar que o sistema torna-se mais regular no espaço de fases.

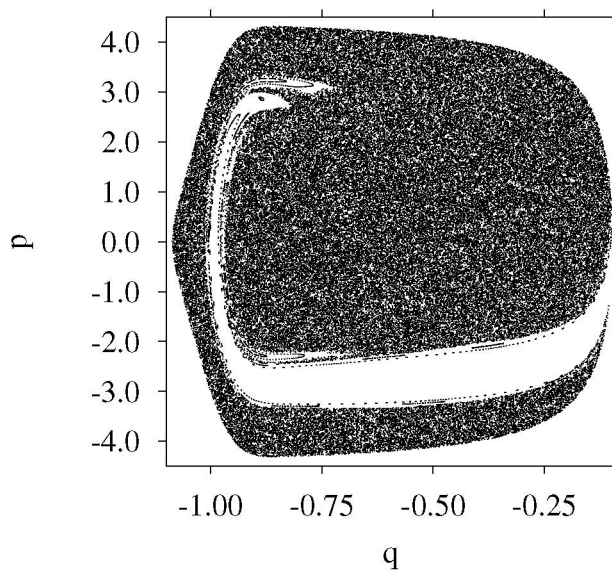


Figura 5.16: Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 0,8$ e $\sigma = 5 \times 10^{-2}$. Esta figura apresenta ilhas de regularidade no espaço de fases.

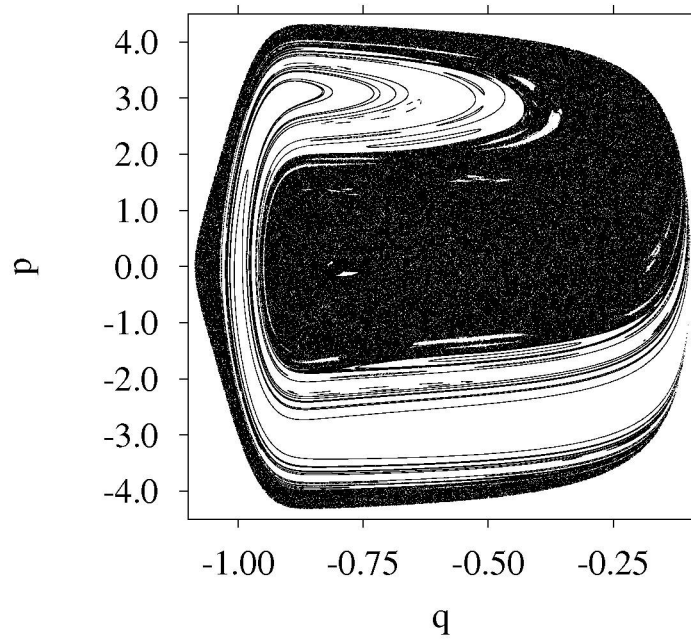


Figura 5.17: Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 1,0$ e $\sigma = 5 \times 10^{-2}$. Observamos evidências do comportamento misto do sistema através de armadilhas dinâmicas imersas no mar caótico.

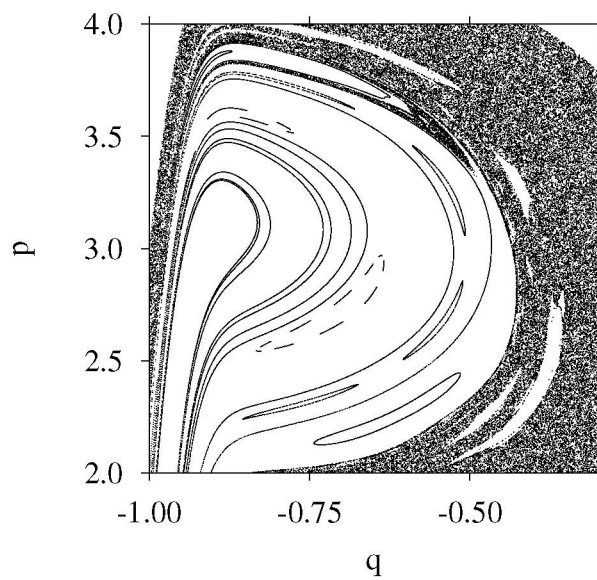


Figura 5.18: Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 1,0$ e $\sigma = 5 \times 10^{-2}$. Esta figura é uma ampliação da seção (5.17), que possibilita a melhor visualização das ilhas.

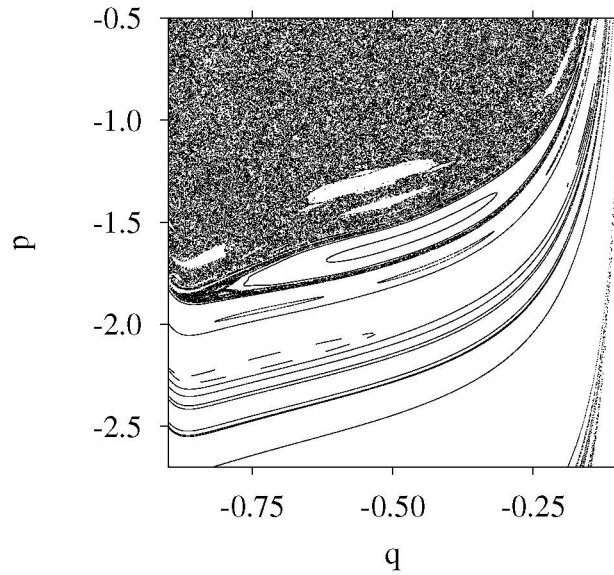


Figura 5.19: Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 1,0$ e $\sigma = 5 \times 10^{-2}$. Esta apresenta uma ampliação de (5.17) em outra região. Observamos o movimento regular coexistindo com o comportamento caótico.

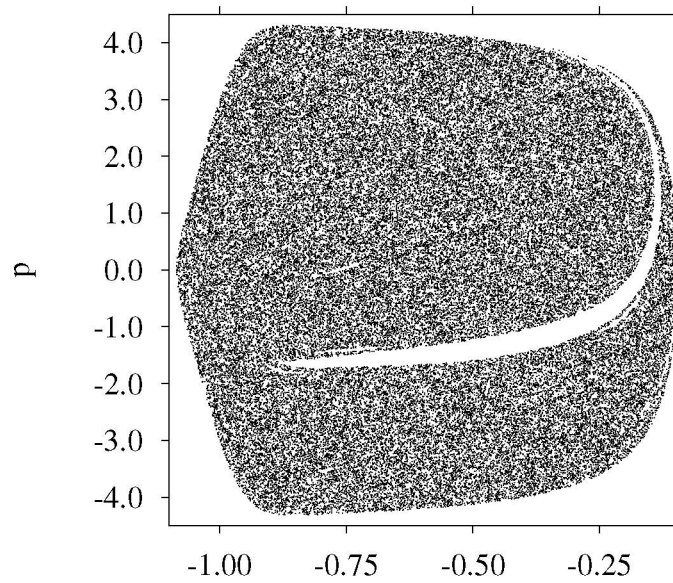


Figura 5.20: Seção de Poincaré da partícula 1, para razão de massas $\gamma = 2,2$ e $\sigma = 5 \times 10^{-2}$. Apenas uma região não visitada é apresentada nesta figura.

Na figura (5.17) temos a seção de Poincaré para a partícula 1, com $\sigma = 5 \times 10^{-2}$ para 100 trajetórias e $\gamma = 1,0$. Como visto na respectiva distribuição (5.14), observamos muitas ilhas de regularidade no espaço de fases. No entorno

de algumas ilhas são observadas uma maior densidade de pontos representando os chamados *grudes* (*stickiness*). Estes grudes indicam que as trajetórias visitam mais vezes essa região do que outras durante seu tempo de evolução. Isso faz com que o expoente de Lyapunov diminua e o sistema adquira um comportamento mais regular. Nas figuras (5.18) e (5.19), ampliações da seção (5.17), podemos observar com mais detalhes as ilhas presentes no retrato de fases do sistema. Nestas ampliações também observamos com maior clareza os grudes (*stickiness*) entorno das ilhas.

Na figura (5.20) temos a seção de Poincaré para $\gamma = 2, 2$. Nesta figura é apresentada regiões não visitadas no espaço de fases. Esta região indica a existência de armadilhas dinâmicas, mas não são observadas ilhas de regularidade. Isto é consequência da grande convergência das trajetórias do sistema a um mesmo valor do expoente de Lyapunov.

Através das seções de Poincaré para os dois tipos de paredes, podemos observar características interessantes sobre o movimento das partículas. O formato curvo na parte esquerda da figura (5.17) nos diz que, quando a partícula 1 está movimentando-se no sentido negativo ($p < 0$) sua velocidade diminui a medida que ela “sobe” o potencial suave da parede. Quando a partícula atinge o ponto máximo do potencial permitido a ela, obtido através da conservação de energia, a mesma tem o sentido do movimento invertido e sua velocidade começa a aumentar. Essa característica torna-se menos evidente no caso em que as paredes do bilhar são aproximadamente rígidas. Podemos observar este fato através da figura (5.9). Como a parede não tem sua forma totalmente rígida ainda observamos uma leve curva na parte esquerda da seção, mas praticamente a partícula encontra a parede e tem seu momento modificado, então a parede efetua a quebra da simetria translacional do sistema.

Capítulo 6

Considerações Finais

Bilhares são, aparentemente, exemplos simples de sistemas Hamiltonianos. Estes sistemas têm sido usados como modelos para o estudo da interrelação entre sistemas clássicos caóticos e sistemas quânticos. Em alguns bilhares, como no bilhar circular, retangular ou elíptico, a dinâmica é integrável, contudo nos casos do bilhar de Sinai e do bilhar Estádio de Bunimovich, o movimento é ergódico e caótico [1, 2], respectivamente. Mas o que acontece com um sistema caótico e ergódico quando o potencial que descreve as paredes do bilhar é modificado por uma função suave? Esta pergunta é especialmente interessante no contexto de entender o comportamento de partículas confinadas em bilhares com paredes representadas por potenciais realísticos [64].

Interessados em saber qual a influência da modificação das paredes num bilhar, e qual a origem do movimento caótico para esse sistema, buscamos caracterizar a dinâmica de duas partículas aprisionadas num bilhar unidimensional com paredes suaves, interagindo através do potencial de Yukawa. Como parte principal do trabalho, na descrição do comportamento do sistema, calculamos os expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito Λ_t para o caso de paredes suaves e no limite de paredes rígidas. Estes cálculos tiveram como base o método numérico desenvolvido por Benettin *et al.* [22]. Ele consiste em calcular a divergência entre trajetórias principais e trajetórias satélites. Realizamos os cálculos tomando-se uma média sobre a evolução de 400 trajetórias, para cada razão de massas $\gamma = \frac{m_2}{m_1}$ das partículas. O passo de variação da razão das massas utilizado foi $\Delta\gamma = 0,01$, com γ variando de 0,01 até 4,0. Feito este procedimento geramos as distribuições destes expoentes $P(\Lambda_t, \gamma)$ em função da razão de massas das partículas γ .

Após ter feito uma introdução ao sistemas dinâmicos no capítulo 2, apresentarmos o método de Dellago no capítulo 3, e falarmos dos Bilhares no capítulo 4, na seção (5.1.1) buscamos descrever a dinâmica do sistema com matrizes que relacionam os estados iniciais e finais das partículas no espaço de fases quando as paredes são suaves. Para que expressões analíticas para as matrizes fossem determinadas, fizemos uma aproximação nas paredes. A aproximação foi feita da seguinte forma, para

descrever o potencial constituído pela função “erro”, utilizamos n potenciais degrau, de forma que quando $\Delta x \rightarrow 0$ possamos obter a função original. Então escrevemos as posições e velocidades das partículas em termos das coordenadas do centro de massa e das coordenadas relativas, representadas por $x = (r, R, v, V)$. Analisando a passagem das partículas pelos degraus e a colisão com a parede, encontramos uma matriz que relaciona os estados antes e depois das partículas entrarem na região onde o potencial da parede atua.

Utilizamos o método desenvolvido por Dellago [21], apresentado no capítulo 3, para a obtenção de expressões analíticas que descrevem o movimento do sistema no espaço tangente. Essas expressões são importantes para o cálculo analítico dos expoentes de Lyapunov. A matriz encontrada, para o caso de partículas não-interagentes, nos revela um determinante igual a um e autovalores iguais a $\lambda = \{-1, 1\}$ com multiplicidade 2. Os expoentes de Lyapunov correspondentes são iguais a zero, e portanto o sistema apresenta comportamento regular.

Fazendo o mesmo procedimento, mas com o potencial de Yukawa como potencial de interação entre as partículas, foram encontrados elementos de matriz envolvendo a força de Yukawa $Q(r)$. Estas matrizes representam a evolução do sistema no espaço tangente. Os termos com a força de Yukawa fazem com que os autovalores das matrizes sejam diferentes de 1, e conseqüentemente os expoentes de Lyapunov diferentes de zero. Isso leva o sistema a um comportamento caótico.

Os resultados numéricos são apresentados na seção (5.2) primeiramente com os cálculos das médias dos expoentes de Lyapunov $\langle \Lambda_t \rangle$ para o caso de paredes aproximadamente rígidas, $\sigma = 5 \times 10^{-3}$. A média dos expoentes de Lyapunov para cada razão de massas possui valores maiores do que zero. Verificamos que o valor dos expoentes de Lyapunov diminuem conforme a razão de massas entre as partículas aumenta. Comparamos os casos de paredes rígidas [14] e paredes aproximadamente rígidas. O modelo construído por nós possui o mesmo comportamento do modelo feito anteriormente para paredes rígidas, indicando que o limite obtido neste trabalho é consistente com outros trabalhos.

Apresentamos as distribuições $P(\Lambda_t, \gamma)$ dos expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito, em função da razão de massas das partículas, para os casos de paredes aproximadamente rígidas e paredes rígidas. Nestes dois casos observamos que muitas trajetórias levam a um expoente de Lyapunov maior que zero, representando o movimento caótico do sistema, confirmando os resultados analíticos obtidos. Das distribuições retiramos a informação do número de ocorrência do expoente de Lyapunov máximo a tempo finito de maior probabilidade Λ_t^p . Este nos diz que, muitas condições iniciais levam a um mesmo valor de expoente de Lyapunov. Já os pontos abaixo de $P_{\Lambda_t}(\gamma)$ informam a existência de armadilhas dinâmicas no espaço de fases do sistema. Estas armadilhas fazem com que algumas trajetórias gastem mais tempo em determinadas regiões do espaço de fases, fazendo com que o valor dos expoentes de Lyapunov diminuam.

Na seqüência apresentamos a distribuição dos expoentes de Lyapunov de

maior probabilidade de ocorrência $P_{\Lambda_t}(\gamma)$, para os casos de paredes rígidas e paredes aproximadamente rígidas. Observamos o mesmo comportamento para os dois casos. As distribuições possuem mínimos em $\gamma = 1,0$ para os dois casos, e $\gamma \sim 3,3$ para o caso aproximadamente rígido, e $\gamma \sim 3,0$ para o caso rígido. Isto indica o maior aparecimento de pontos abaixo do expoente mais provável $P_{\Lambda_t}(\gamma)$ na distribuição dos expoentes de Lyapunov $P(\Lambda_t, \gamma)$, nos dizendo que para essas razões de massas existem mais armadilhas dinâmicas.

Para confirmar esses resultados, construímos as seções de Poincaré para a partícula 1, com $\gamma = 0,8$, e $\gamma = 1,8$. Plotamos p e q da partícula 1, quando a partícula 2 passa pela origem do bilhar. Elas confirmam as conclusões apresentadas pelas distribuições dos expoentes de Lyapunov, mostrando a existência de ilhas de regularidade imersas no mar caótico, indicando o comportamento misto do sistema.

O estudo do bilhar com paredes suaves ($\sigma = 5 \times 10^{-2}$) é apresentado na seção (5.2.2). Para este caso fizemos os mesmos cálculos descritos anteriormente para paredes aproximadamente rígidas, ou seja, encontramos a distribuição dos expoentes de Lyapunov máximo a tempo finito, a média dos expoentes de Lyapunov, o número de ocorrência a distribuição do expoente de Lyapunov mais provável, e a seção de Poincaré para a partícula 1. Da média dos expoentes de Lyapunov $\langle \Lambda_t \rangle$ notando que, para o caso de paredes suaves o valor médio dos expoentes diminuem com o aumento da razão de massas, da mesma forma que acontecia para o bilhar com paredes aproximadamente rígidas. O valor da média dos expoentes para $\sigma = 5 \times 10^{-2}$ é menor que para $\sigma = 5 \times 10^{-3}$. O pico apresentado em $\gamma = 1,0$ para paredes rígidas agora quase desaparece no caso de paredes suaves.

Na distribuição $P(\Lambda_t, \gamma)$ dos expoentes de Lyapunov em função da razão de massas γ , observamos valores menores para os expoentes de Lyapunov em comparação ao caso de paredes rígidas. A suavidade das paredes gera o aparecimento de um número maior de trajetórias aprisionadas no espaço de fases.

Analisamos a distribuição dos expoentes de Lyapunov de maior probabilidade de ocorrência $P_{\Lambda_t}(\gamma)$, para o caso de paredes suaves. Esta distribuição apresentou flutuações maiores do que no caso de paredes rígidas. Isto se deve ao maior número de pontos abaixo do expoente de Lyapunov mais provável no caso de paredes suaves, consequentemente temos o aparecimento de mais armadilhas dinâmicas no espaço de fases.

Através das seções de Poincaré, para o caso de paredes suaves, comprovamos a análise feita com número de ocorrência dos expoentes de Lyapunov máximos a tempo finito de maior probabilidade. Utilizando diferentes razões de massas, observamos o aparecimento de ilhas de regularidade imersas num mar caótico.

Como trabalhos futuros, podemos fazer as mesmas análises feitas nesta dissertação, mas para $\alpha \neq 0$, ou seja, interação de curto alcance entre as partículas. Também pode ser feito o cálculo analítico dos expoentes de Lyapunov através da matriz monodrômica do sistema.

Bibliografia

- [1] Sinai, I. G., *Func. Anal. Appl.*, v. 2, p. 61, 1968.
- [2] Bunimovich, L. A., *Func. Anal. Appl.*, v. 8, p. 254, 1974.
- [3] Bohigas, O.; Boosé, D.; Carvalho, R. E.; Marvulle, V., *Nucl. Phys. A*, v. 560, p. 197, 1993.
- [4] Crisant, A.; Paladin, G.; Vulpiani, A., *Products of random matrices in Statistical Physics*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1993.
- [5] Manchein, C.; Beims, M. W.; Rost, J. M., *Phys. Rev. E*, v. 76, p. 56203, 2007.
- [6] Glashow, L.; Mittag, J., *J. Stat. Phys.*, v. 87, p. 937, 1997.
- [7] Cox, G.; Ackland, G. J., *Phys. Rev. Lett.*, v. 84, p. 2362, 2000.
- [8] Casati, G.; Prosen, T., *Phys. Rev. Lett.*, v. 83, p. 4729, 1999.
- [9] Kornfeld, P.; Fomin, S. V.; Sinai, Y. G., *Ergodic Theory*, Springer, Berlin, 1982.
- [10] Cipriani, P.; Denison, S.; Politi, A., *Phys. Rev. Lett.*, v. 94, p. 244301, 2005.
- [11] Casati, G.; Ford, J., *J. Comp. Phys.*, v. 20, p. 97, 1976.
- [12] Arnold, V. I.; Avez, A., *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, Benjamin, New York, 1968.
- [13] Meza-Montes, L.; Ulloa, S. E., *Phys. Rev. E*, v. 55, p. 6319, 1997.
- [14] Manchein, C., *Duas partículas clássicas confinadas num bilhar unidimensional e interagindo via potencial de Yukawa*, Dissertação de Mestrado, (Curitiba, 2006).
- [15] Kaplan, A.; Friedman, N.; Andersen, M.; Davidson, N., *Physica D*, v. 187, p. 136, 2004.

- [16] Gutzwiller, M. C., *Chaos in Classical and quantum Mechanics*, New York, Springer-Verlag, 1990.
- [17] Xavier, E. P. S.; Santos, M. C.; Silva, L. G. G. V. D.; Luz, M. G. E. da; Beims, M. W., *Physica A*, v. 342, p. 377, 2004.
- [18] Vessen, M. van.; Santos, M. C.; Cheng, B. K.; Luz, M. G. E. da., *Phys. Rev. E*, v. 64, p. 026201, 2001.
- [19] Rapoport, A.; Rom-Kedar, V.; Turaev, D., *Commun. Math. Phys.*, v. 272, p. 567, 2007.
- [20] Szezech, J. D.; Lopes, S. R.; Viana, R. L., *Phys. Let. A*, n. 335, p. 394-401, 2005.
- [21] Dellago, C.; Posch, H. A.; Hoover, W. G., *Phys. Rev. E*, v. 53, n. 2, p. 1485, 1996.
- [22] Benettin, G.; Galgani, L.; Giorgilli, A.; Strelcyn; J.-M., *Meccanica*, v.15, n. 9, p. 9, 1980.
- [23] Ott, E., *Chaos in Dynamical Systems*, Maryland: Cambridge University Press, 1993.
- [24] Goldstein, H., *Classical Mechanics. Massachusetts*, Addison-Wesley, 1969
- [25] Lemos, N. A., *Mecânica Analítica.*, Livraria da Física, São paulo, 2000.
- [26] Monteiro, L. H. A., *Sistemas Dinâmicos.*, Livraria da Física, São paulo, Ed. 2, 2006.
- [27] Lichtenberg, A. J.; Lieberman, M. A., *Regular and Stochastic Motion*, Springer-Verlag, New York, 1983.
- [28] Arnold, V. I., *Uspekhi Math. Nauk.*, v. 18, p. 13, 1963.
- [29] Moser, J., *Nach. Akad. Wiss. Gottingen II Math. Phys.*, v. 1, p. 1, 1962.
- [30] Kolmogorov, A. N., *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, v. 98, p. 527, 1954.
- [31] Poincaré, H., *Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*, [S.I.]: Gauthier-Vilars, 1899.
- [32] Ferrara, N. F.; Prado, C. P. C., *Caos - Uma introdução*, 3ªedição, ed. Edgard Blucher LTDA. (São Paulo, 1994).
- [33] Devaney, R. L., *A First Course in Chaotic Dynamical System*, Perseus Book, 1992.
- [34] Pathria, R. K., *Statistical Mechanics*, Pergamon Press, 1978.

- [35] Meiss, J. D.; Ott, E., *Phys. Rev Lett. A*, v. 55, p. 2741, 1979.
- [36] Zaslavsky, G. M., *Physica D*, v. 168, p. 292, 2002.
- [37] Benkadda, S.; Kassibrakis, S.; Write, R. B., *Phys. Rev. E*, v. 55, p. 4909, 1995.
- [38] Rössler, O. E., *Phys. Rev Lett. A*, v. 71, p. 155, 1979.
- [39] Jia, Q., *Phys. Lett. A*, v. 366, p. 217, 2007.
- [40] Tam, L. M.; Chen, J. H.; Chen, H. K.; Tou, W. M. S., *Chaos Soliton Fractals*, In Press, doi: 10.1016/j.chaos.2007.01.039, 2007.
- [41] Benettin, G.; Galgani, L.; Strelcyn, J.-M., *Phys. Rev. A*, v.14, n. 6, p. 2338, 1976.
- [42] Benettin, G.; Strelcyn, J.-M., *Phys. Rev. A*, v.17, n. 2, p. 773, 1978.
- [43] Shimada, I.; Nagashima; T., *Prog. Theor. Phys.*, v.61, p. 1605, 1979.
- [44] Yu, J.; Wu, G., *Chem. Phys. Lett.*, v. 343, p. 375, 2001.
- [45] Oseledec, V. I., *Trans. Moscou Math.*, v. 19, p. 197, 1968.
- [46] Okushima, T., *Phys. Rev. Lett.*, v. 91, p. 254101, 2003.
- [47] Zon, R. van; Beijeren, H. van; Dorfman, J. R., *Phys. Rev. E*, v. 53, p. 1485, 1999.
- [48] Grassberger, P.; Badii, R.; Politi, A., *J. Stat. Phys.*, v. 51, p. 135, 1988.
- [49] Anteneodo, C., *Phys. Rev. E*, v. 69, p. 016207-1, 2004.
- [50] Schomerus, H.; Titov, M., *Phys. Rev. E*, v. 66, p. 066207, 2002.
- [51] Prasad, A.; Ramaswamy, R., *Phys. Rev. E*, v. 60, p. 2761, 1999.
- [52] Hoover, W. G.; Posch, H. A., *Phys. Rev. E*, v.49, p. 1913, 1994.
- [53] Dellago, Ch.; Posch, H. A., *Phys. Rev. E*, v. 52, n. 3, p. 2401, 1995.
- [54] Dellago, Ch.; Glatz, L.; Posch, H. A., *Phys. Rev. E*, v. 52, n. 5, p. 4817, 1995.
- [55] Dellago, Ch.; Posch, H. A., *Physica A*, v. 240, p. 68, 1997.
- [56] Reed, M. A.; Kirk, W. P., *Nanostructure and Fabrication*, Academic, Boston, 1997.
- [57] Sinai, I. G.; Bunimovich, L. A., *Commun. Math. Phys.*, v. 78, p. 247, 1980.

- [58] Richens, P. J.; Berry., M. V., *Physica*, v. 2D, p. 495, 1981.
- [59] Gorin, T., *J. Math. Phys.*, v. 34, p. 8281, 2001.
- [60] Libisch, F., *Dynamics of the Soft Wall Bunimovich Stadium*, Academic, Boston, 1997.
- [61] Leonel, E. D.; Silva, K. L., *Physica A*, v. 323, p. 181, 2003.
- [62] Butkov, E., *Física Matemática.*, Ed. LTC, São paulo, 1993.
- [63] Manchein, C., Beims.; M. W., *Chaos Solitons Fractals*, in Press, doi: 10.1016/j.chaos.2007.06.112, 2007.
- [64] Zaslavsky, G. M., *Phys. Today*, v. 52, p. 39, 1999.