

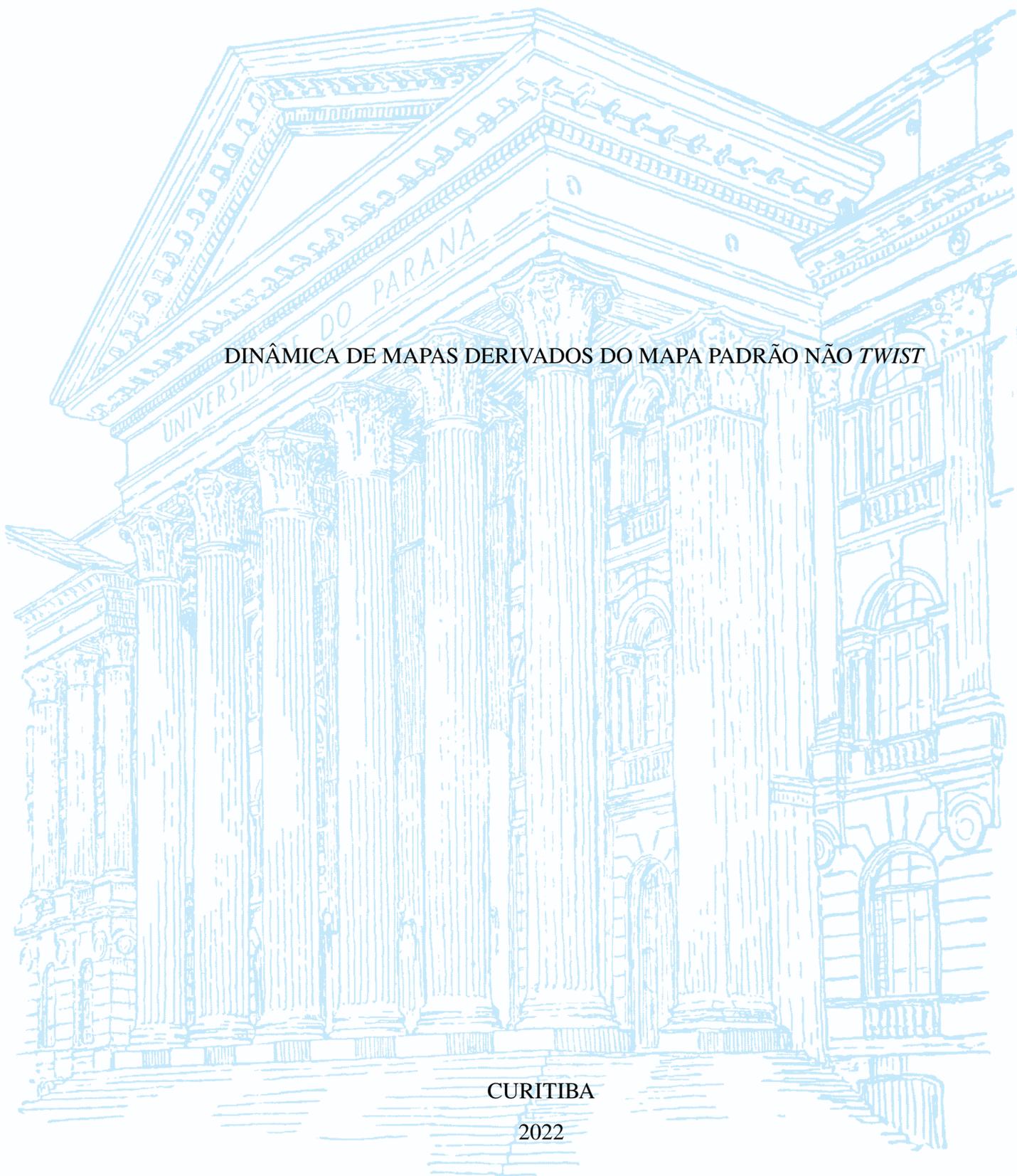
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

MICHELE MUGNAINE

DINÂMICA DE MAPAS DERIVADOS DO MAPA PADRÃO NÃO *TWIST*

CURITIBA

2022



MICHELE MUGNAINE

DINÂMICA DE MAPAS DERIVADOS DO MAPA PADRÃO NÃO *TWIST*

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física, no Setor de Ciências Exatas, na Universidade Federal do Paraná, como requisito parcial à obtenção do título de Doutora em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana.

Co-orientador: Prof. Dr. José Danilo Szezech Jr.

CURITIBA

2022

DADOS INTERNACIONAIS DE CATALOGAÇÃO NA PUBLICAÇÃO (CIP)
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ
SISTEMA DE BIBLIOTECAS – BIBLIOTECA CIÊNCIA E TECNOLOGIA

Mugnaine, Michele

Dinâmica de mapas derivados do mapa padrão não *twist* / Michele
Mugnaine. – Curitiba, 2022.
1 recurso on-line : PDF.

Tese (Doutorado) - Universidade Federal do Paraná, Setor de
Ciências Exatas. Programa de Pós-graduação em Física.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana.

Coorientador: Prof. Dr. José Danilo Szezech Jr

1. Mapa padrão não-*twist*. 2. Curvas *Shearless*. 3. Liapunov,
Funções de. 4. Teoria da bifurcação. I. Viana, Ricardo Luiz. II.
Szezech Jr., José Danilo. III. Universidade Federal do Paraná.
Programa de pós-Graduação em Física. IV. Título.

Bibliotecária: Roseny Rivelini Morciani CRB-9/1585

TERMO DE APROVAÇÃO

Os membros da Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação FÍSICA da Universidade Federal do Paraná foram convocados para realizar a arguição da tese de Doutorado de **MICHELE MUGNAINE** intitulada: "**Dinâmica de mapas derivados do mapa padrão não twist**", que após terem inquirido a aluna e realizada a avaliação do trabalho, são de parecer pela sua APROVAÇÃO no rito de defesa.

A outorga do título de doutora está sujeita à homologação pelo colegiado, ao atendimento de todas as indicações e correções solicitadas pela banca e ao pleno atendimento das demandas regimentais do Programa de Pós-Graduação.

CURITIBA, 16 de Setembro de 2022.

Assinatura Eletrônica
19/09/2022 08:12:05.0

RICARDO LUIZ VIANA
Presidente da Banca Examinadora

Assinatura Eletrônica
19/09/2022 14:27:42.0
IBERÊ LUIZ CALDAS

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO)

Assinatura Eletrônica
18/09/2022 09:55:27.0

MARCUS WERNER BEIMS

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ)

Assinatura Eletrônica
17/09/2022 19:34:36.0
EDSON DENIS LEONEL

Avaliador Externo (UNIVERSIDADE EST. PAULISTA JÚLIO DE MESQUITA FILHO)

Assinatura Eletrônica
17/09/2022 18:57:44.0

JOSÉ DANILO SZEZECH JÚNIOR

Avaliador Interno (UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço aos meus orientadores, Prof. Dr. Ricardo Luiz Viana e Prof. José Danilo Szezech Jr, por toparem participar desse processo que foi o doutorado. Agradeço pelas orientações, pelo apoio e pelas lições que levarei para minha vida acadêmica.

Agradeço aos meus pais Ruth e João Carlos, por me apoiarem, me ajudarem e me inspirarem durante toda a vida. Agradeço também a minha irmã Gisele, que sempre torceu por mim e me apoiou em todas as minhas escolhas.

Agradeço ao Lucas, que, longe ou perto, me apoiou, me escutou e aguentou muitas emoções durante essa jornada. Obrigada pelas conversas sobre a vida acadêmica, pelas aulas de Jornalismo a Decolonialidade, e por comemorar as conquistas obtidas nestes últimos anos.

Agradeço aos colegas do grupo de pesquisa e aos colegas da UFPR por me ajudarem a desenvolver esta pesquisa. Um agradecimento especial ao Grupo 105, que me acolheu no começo da graduação e ainda encontra um espacinho para mim em sua sala.

Agradeço aos professores Cristiano Francisco Woellner e Marcus Werner Beims por todas as correções e sugestões apresentadas na banca de qualificação que permitiram melhorar este trabalho. Agradeço novamente ao professor Cristiano Francisco Woellner e aos professores Sergio Roberto Lopes e Thiago de Lima Prado que participaram da banca da pré-defesa e tiveram contribuições essenciais para o trabalho.

Agradeço ao Programa de Pós-Graduação em Física da Universidade Federal do Paraná pela oportunidade de realizar o doutorado na instituição. Também agradeço a UFPR por toda estrutura que possibilitou esta pesquisa.

Agradeço ao CNPq pelo suporte financeiro que viabilizou esta pesquisa, a vida em Curitiba e a participação de eventos para divulgação do trabalho.

Como posso deixar de ver o que tenho diante dos olhos? Dois e dois são quatro.

George Orwell

RESUMO

Mapas não *twist* são modelos matemáticos discretos no tempo que descrevem propriedades de sistemas que violam a condição *twist*. Sistemas que não satisfazem esta condição apresentam características específicas, como a existência de um ponto de extremo para o perfil do número de rotação, a presença da curva *shearless* e de ilhas gêmeas no espaço de fase. O modelo matemático mais simples que viola a condição *twist* é o mapa padrão não *twist*, um mapa bidimensional, conservativo e simétrico que viola a condição localmente no espaço de fase. Por ser um sistema conservativo e perturbado, o mapa padrão não *twist* exibe uma coexistência de caos e regularidade, enquanto a sua simetria garante a existência de ilhas gêmeas e de transporte não direcionado no espaço de fase. Neste trabalho, nós estudamos três mapas derivados do mapa padrão não *twist* e analisamos quais modificações ocorrem na dinâmica e nas características bem estabelecidas do mapa. Para o primeiro mapa, nós consideramos uma nova perturbação senoidal e o mapa resultante é denominado mapa padrão não *twist* estendido. Para alguns parâmetros relacionados a esta nova perturbação, o mapa perde a sua simetria. Como consequência, o cenário de ilhas gêmeas é modificado e os pontos indicadores, utilizados para determinar a existência da curva *shearless*, não podem ser determinados. Posto isto, nós propomos um método baseado nas bacias de escape para determinar a existência de barreiras de transporte no espaço de fase. Estudando a possibilidade de transporte direcionado, é possível que trajetórias caóticas tenham uma direção preferencial em seu transporte no espaço de fase para um situação não simétrica do sistema. O segundo mapa estudado é o mapa padrão não *twist* dissipativo, uma versão não conservativa do mapa original. Com a dissipação, as soluções do caso conservativo são substituídas por atratores que podem ser periódicos, quase periódicos e caóticos. Pelo estudo dos diagramas de bifurcação e dos respectivos espaços de fase, nós encontramos a rota “difícil” e a rota de Curry-Yorke para o caos, rotas bem estabelecidas para sistemas *twist* dissipativos. Nós também observamos diferentes cenários de multiestabilidade no espaço de fase e utilizamos as entropias de bacia e de borda de bacia para analisar e diferenciar estes cenários. Por último, nós propomos um mapa unidimensional derivado do mapa padrão não *twist*, o mapa do seno-círculo não *twist*. Este novo mapa depende de três parâmetros e pode ser considerado uma aproximação local do mapa bidimensional. A partir do expoente de Lyapunov, nós identificamos soluções quase periódicas, periódicas e caóticas para o sistema. Também conseguimos determinar numericamente e analiticamente as linhas de bifurcação do sistema onde uma bifurcação do tipo sela-nó ocorre. A multiestabilidade é um cenário possível para o mapa unidimensional comprovado pela existência de histerese nos diagramas de bifurcação. Os espaços de parâmetros para os diferentes cenários de multiestabilidade mostram uma estrutura não trivial onde as fronteiras entre regiões de diferentes multiestabilidades não são simples ou suaves. Por fim, nós analisamos a crise dos atratores caóticos e identificamos crises interiores e de fronteira, esta última desempenhando um papel significativo na extinção da multiestabilidade.

Palavras-chaves: sistemas não-monotônicos; transporte direcionado; quebra de simetria; sistemas dissipativos; rota para o caos; análise de bifurcação; multiestabilidade; crise.

ABSTRACT

Nontwist maps are mathematical discrete models used to describe the properties of systems that violate the twist condition. When the system does not satisfy the twist condition, it exhibits specific characteristics, such as the existence of an extremum value for the winding number profile and the presence of the shearless curve and twin island chains in the phase space. The simplest mathematical model that violates the twist condition is the standard nontwist map, a two-dimensional conservative and symmetric map that violates the twist condition locally in the phase space. Once the map is a perturbed conservative system, the standard nontwist map exhibits a coexistence between chaos and regularity, while its symmetry ensures the existence of twin islands and an unbiased transport in the phase space. In this survey, we study three maps derived from the standard nontwist map and analyze what changes occur in the dynamics and in the well-established characteristics of the map. For the first map, we consider a new sinusoidal perturbation and the resulting map is denominated extended standard nontwist map. For some parameter related to the new perturbation, the map loses its symmetry and, as consequence, the twin island scenario is modified and the indicator points, applied to identify the existence of the shearless curve, can not be evaluated. Thus, we propose a method based in the escape basins to determine the existence of transport barriers in the phase space. Analyzing the possibility of a directed transport to exist in the phase space, we find a tendency of chaotic trajectories to go to a specific region in the phase space, for non-symmetrical cases. The second map we explore is the dissipative nontwist map, the non-conservative version of the original map. With dissipation, the solutions of the conservative map are replaced by periodic, quasi periodic and chaotic attractors. For the analysis of the bifurcation diagrams and the respective phase spaces, we identify the hard route and the Curry-Yorke route to chaos, well-established routes for dissipative twist systems. We also observe different scenarios of multistability in the phase space and we analyze them by the basin entropy and the boundary basin entropy. Lastly, we propose a new one-dimensional map derived from the standard nontwist map, the sine-circle nontwist map. The new map depends on three parameters and it can be considered a local approximation of the two-dimensional map. From the Lyapunov exponent computation, we identify quasi periodic, periodic and chaotic solutions for the system. We also numerically and analytically determine the bifurcation curves, where a saddle-node bifurcation occurs. Multistability is a possible scenario for the one-dimensional map which is confirmed by the hysteresis in the bifurcation diagrams. The parameter spaces for multistability reveal a non-trivial structure where the boundaries between regions that indicate different multistability scenarios are not simple or smooth. Finally, we analyze the crisis in chaotic attractors and we identify the interior and boundary crisis, the latter having a key role to the extinction of multistability.

Keywords: nonmonotonic systems; directed transport; symmetry breaking; dissipative systems; route to chaos; bifurcation analysis; multistability; crisis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

- Figura 1 – Exemplo esquemático de uma trajetória em um espaço de fase bidimensional. A partir da evolução temporal de uma condição inicial $(x_1(0), x_2(0))$ é possível determinar de forma única a posição $(x_1(t), x_2(t))$ em um tempo $t > 0$ qualquer. Neste exemplo, a trajetória é uma curva fechada indicando uma solução periódica que se repete após completar um período de tempo. 22
- Figura 2 – Exemplos de diferentes tipos de soluções de um sistema bidimensional discreto. Em (a), temos 5 curvas fechadas, indicando um movimento periódico. Uma vez que o sistema é discreto, a trajetória "salta" para diferentes ilhas em iteradas sucessivas, retornando para a ilha inicial após 5 iteradas. Para (b), temos uma curva no espaço de fase indicando um comportamento regular e quase periódico. Indicamos as 2 primeiras iteradas para apresentar como a solução preenche a curva. Já para (c), temos os pontos indicando as iteradas do sistema e as linhas tracejadas são apresentadas para indicar iteradas sucessivas. Neste último caso, temos um comportamento não regular e não periódico. 23
- Figura 3 – Representação de uma trajetória sobre a superfície de um toro, para um sistema bidimensional. Para uma energia fixa, os valores de J_1 e J_2 são constantes e, juntamente com os ângulos θ_1 e θ_2 , descrevem a superfície do toro. 26
- Figura 4 – Figura esquemática de um toro racional (curva cheia ao centro) e toros irracionais (curvas com setas) sem serem perturbados (figura a esquerda) e sob efeito de uma perturbação não nula $\epsilon \neq 0$ (figura a direita). Sob perturbação, os toros irracionais são apenas deformados enquanto o toro racionais é destruído e substituído por pares pontos fixos hiperbólicos e elípticos, indicados pelas setas em \times e pelos círculos concêntricos, respectivamente. 28
- Figura 5 – Para o mapa padrão não *twist*, (a) espaço de fase para $a = 0,65$ e $b = 0,6$ e (b) mapa de cor onde cada ponto representa uma condição inicial e a cor indicada representa o valor do expoente de Lyapunov λ para a solução gerada pela condição. As soluções regulares no espaço de fase, como as trajetórias quase periódicas indicadas pelas curvas em preto e as ilhas periódicas representadas pelas curvas coloridas em (a), exibem expoente de Lyapunov nulo, evidenciado pelos pontos pretos em (b). As soluções caóticas, representadas pelos pontos esparsos em (a) apresentam $\lambda > 0$, retratado pelos pontos coloridos em (b). 34
- Figura 6 – Curva *shearless* correspondente ao ponto de extremo no perfil do número de rotação. Em (a) temos o espaço de fase para o mapa padrão não *twist* com os parâmetros $(a, b) = (0,65; 0,6)$. A linha tracejada azul em (a) indica a reta na qual o perfil de número de rotação foi calculado. O resultado é o perfil não monotônico mostrado em (b). O perfil apresenta um ponto de extremo, neste caso um máximo. A ampliação do perfil de ω na região indicada pelo retângulo preto tracejado no painel (b) é mostrada em (c), onde o ponto de máximo é destacado. 36

Figura 7	– Mapa de cor para o número de rotação para o espaço de fase mostrado na Figura 5, tal que os parâmetros são $a = 0,65$ e $b = 0,6$. Para cada ponto no espaço, ω foi calculado segundo a equação (2.31) e uma cor foi atribuída para cada valor. Os pontos em branco indicam condições caóticas, onde o número de rotação não é definido. O valor de ω associado a cada cor pode ser conferido na barra de cores. Em (a) temos o espaço de fase completo e em (b) temos uma ampliação nas curvas quase periódicas, para destacar o valor máximo de ω na curva <i>shearless</i>	37
Figura 8	– Espaços de fase para o mapa padrão não <i>twist</i> para os parâmetros (a) $a = 0,8$ e $b = 0,6$, (b) $a = 0,65$ e $b = 0,65$. Em (a), observamos a solução do tipo meandro, destacada pela curva em vermelho. As soluções periódicas são indicadas pelas curvas coloridas nos dois espaços, enquanto o mar caótico é representado pelos pontos esparsos.	38
Figura 9	– Espaço de fase, linhas de simetria e curva não monotônica para o mapa padrão não <i>twist</i> com os parâmetros $a = 0,71$ e $b = 0,33$. As linhas de simetria, das equações (2.36) e (2.37) são as curvas ciano, azul, laranja e rosa, respectivamente. A curva tracejada indica a curva não monotônica $y = b \text{sen}(2\pi x)$, onde a condição <i>twist</i> é violada.	40
Figura 10	– Análise da curva <i>shearless</i> . (a) Espaço de parâmetros para a existência da curva <i>shearless</i> . Os pontos pretos em (a) indicam pares de parâmetros (a, b) onde há curva <i>shearless</i> , enquanto os pontos em branco indicam parâmetros para os quais a curva não existe. Em (b) e (c) temos os espaços de fase correspondentes aos parâmetros dos pontos marcados em vermelho ($a = 0,75$ e $b = 0,46$) e roxo ($a = 0,72$ e $b = 0,55$) no espaço de parâmetro em (a), respectivamente. Em (b), observamos um espaço de fase com a curva <i>shearless</i> (curva em vermelho) em oposição ao caso apresentado em (c), onde não há a curva. Os pontos coloridos em (b) e (c) indicam a posição dos quatro pontos indicadores apresentados na equação (2.39).	41
Figura 11	– (a) Transmissividade das órbitas caóticas, em função de a para dois tempos finais de iteração $n = 100$ (curva em roxo) e $n = 500$ (curva vermelha), para $b = 0,6$. O eixo das ordenadas correspondente ao tempo $n = 100$ ($n = 500$) está a esquerda (direita) do gráfico. Identificamos três casos em (a) e construímos os respectivos espaços de parâmetros: (b) transporte nulo - barreira total ($a = 0,80350$), (c) transporte alto ($a = 0,80545$) e (d) transporte apenas para um tempo de iteração mais longo - barreira parcial ($a = 0,80680$).	43
Figura 12	– Espaços de fase para o mapa padrão não <i>twist</i> estendido com os parâmetros $(a, b, c) = (0,805; 0,597; 0,005)$ e diferentes valores de m : (a)-(c) $m = 1$, (d)-(f) $m = 2$, (g)-(i) $m = 3$ e (j)-(l) $m = 4$. Todos os espaço de fase são compostos por mar caótico (pontos em preto) e duas cadeias de ilhas, uma indicada em roxo e outra em verde. Para cada valor de m , escolhemos duas ilhas, uma de cada cadeia, e fizemos uma ampliação ao redor dela. Cada ilha escolhida é destacada pelos retângulos em preto no espaço de fase e as respectivas ampliações são mostradas nos painéis inferiores de cada caso. As linhas de simetria para o caso m ímpar S_0, S_1, S_2 e S_3 são indicados pelas curvas em ciano, azul, laranja e rosa, respectivamente.	48

Figura 13 – Espaço de parâmetros para a existência da curva <i>shearless</i> para os casos (a) $m = 1$ e (b) $m = 3$, calculados a partir da análise das soluções geradas pelos pontos indicadores em (3.9). Os pontos coloridos indicam a existência da curva <i>shearless</i> , enquanto a região branca representa parâmetros onde a curva não existe. Os espaços para diferentes valores da amplitude c estão representados por diferentes cores, indicadas na legenda. Nesta figura, eles estão sobrepostos.	50
Figura 14 – Espaços de fase para o ponto $(a, b, m) = (0,857; 0,3; 3)$, indicado na Figura 13 (b), para os três valores de c estudados: (a) $c = 0,005$, (b) $c = 0,050$ e (c) $c = 0,100$. Os pontos coloridos são os pontos indicadores das equações (3.9) e a curva <i>shearless</i> está indicada pela curva em vermelho.	51
Figura 15 – Exemplos de bacias de escape para o mapa padrão não <i>twist</i> estendido. Os pontos roxos (laranjas) são condições iniciais cuja trajetória escapa pela linha $y = 1$ ($y = -1$) dentro do tempo de iteração $n = 1000$. Os pontos em branco são condições iniciais que geram trajetórias que não escapam durante o tempo de iteração, uma vez que representam soluções quase periódicas e periódicas. Os parâmetros utilizados para a construção das bacias são $a = 0,827$, $c = 0,005$ e $m = 2$, para os dois casos, e (a) $b = 0,48$ e (b) $b = 0,53$	52
Figura 16 – Espaços de parâmetros para a existência de barreiras totais no espaço de fase, calculados pelo método baseado nas barreiras de escape, para o caso não simétrico (a) $m = 2$ e (b) $m = 4$. Os valores de c são indicados pelas cores apresentadas na legenda. Os pontos coloridos indicam os pares de parâmetros para os quais ao menos uma barreira de transporte existe no espaço de fase.	53
Figura 17 – Estudo de transporte para os espaços de fase apresentados na Figura 12, onde os parâmetros são $a = 0,805$, $b = 0,597$ e $c = 0,005$ e $m = 1, 2, 3$ e 4 . Em (a), apresentamos a média da variável y em termos de 10^6 condições iniciais caóticas aleatoriamente distribuídas em $y = 0$, no instante inicial. Cada curva representa um diferente valor de m : ciano ($m = 1$), rosa ($m = 2$), laranja ($m = 3$) e azul ($m = 4$). As curvas ciano e laranja estão sobrepostas, uma vez que a média de y é nula para os dois casos simétricos. Os espaços de fase em (b)-(d) são formados pelas primeira $n = 1000$ iterações de 100 condições iniciais na linha vermelha $y = 0$ e (b) $m = 1$, (c) $m = 2$, (d) $m = 3$ e (e) $m = 4$	55
Figura 18 – Número de trajetórias caóticas, com condição inicial $y = 0$, que se movimentam para a região positiva (negativa) de y no espaço de fase. O número de órbitas que cruza $y = 1$ ($y = -1$), N_{up} (N_{down}), é representado pela curva em azul (rosa), enquanto a diferença D entre N_{down} e N_{up} é indicada pela curva em preto. Os parâmetros escolhidos são $a = 0,805$, $c = 0,050$, (a) $m = 1$, (b) $m = 2$, (c) $m = 3$ e (d) $m = 4$. Os valores de N_{up} e N_{down} para os casos simétricos $m = 1$ e $m = 3$ estão indicados pelos símbolos coloridos em (a) e (c) para evitar curvas sobrepostas, uma vez que $N_{up} = N_{down}$ para os dois casos.	57
Figura 19 – Espaço de parâmetros para o transporte direcionado. Os pontos em branco, indicam presença de barreira total no espaço da fase, e são correspondentes ao pontos coloridos dos espaços de parâmetros da Figura 16. Os pontos amarelos e roxos indicam um transporte direcionado para cima e para baixo, respectivamente. Os pontos pretos indicam o caso onde há transporte, mas ele não é direcionado ($D = 0$). Os valores de m são $m = 2$ para a linha superior e $m = 4$ para a linha inferior. Já para c , temos $c = 0,005$, $c = 0,050$ e $c = 0,1$ para a primeira, segunda e terceira coluna, respectivamente.	58

- Figura 20 – Espaços de fase para os parâmetros $a = 0,43$ e $b = 0,6$ para o mapa padrão não *twist* (a) conservativo ($\gamma = 0,0$) e (b) dissipativo ($\gamma = 0,1$). Para o caso conservativo, observamos a coexistência de caos e regularidade, uma vez que soluções periódicas e quase periódicas (curvas coloridas) estão imersas no mar caótico (pontos pretos esparsos). Já para o caso dissipativo, observamos apenas atratores, sendo eles quase periódicos (curva em vermelho), periódicos de período 1 (pontos em laranja e roxo) e de período 3 (pontos marrons e rosas). 61
- Figura 21 – Espaços de fase para o mapa padrão não *twist* para $\gamma = 0,1$ e diferentes valores de a e b . Em (a), temos $(a, b) = (0,3; 0,25)$ e um atrator quase periódico suave, enquanto em (b) os parâmetros são $(a, b) = (0,71; 0,59)$ e observamos um atrator periódico de período 20. Para (c) temos $(a, b) = (0,7125; 0,61)$ e um atrator caótico e, por último, para (d) os valores de a e b são $(a, b) = (0,712; 0,595)$ e o atrator é em bandas, onde cada segmento indica uma banda do atrator. 62
- Figura 22 – Diagrama de bifurcação e expoente de Lyapunov, em função de a , para $b = 0,58$ e $\gamma = 0,1$. Os pontos em preto indicam as 2000 últimas iteradas e a curva em vermelho representa o expoente de Lyapunov. O eixo referente ao diagrama (expoente de Lyapunov) está a esquerda (direita). As linhas tracejadas em rosa indicam atratores de interesse, onde (a) e (b) apontam atratores quase periódicos ($\lambda = 0$) enquanto (c) destaca um atrator caótico ($\lambda > 0$). 65
- Figura 23 – Atratores para os casos indicados na Figura 22, onde (a) $a = 0,7023$, (b) $a = 0,7060$ e (c) $a = 0,7076$. Em todos os casos $b = 0,58$ e $\gamma = 0,1$. Os pontos em rosa são os atratores "ghosts" (fantasmas) e eles são os atratores de parâmetros de valores próximos, tal que $a = 0,703$ em (a) e $a = 0,705$ em (b). 66
- Figura 24 – Expoente de Lyapunov (curva vermelha) e diagrama de bifurcação (pontos pretos) em função de a para $b = 0,6$ e $\gamma = 0,1$. Os eixos seguem a mesma disposição definida para a Figura 22. As linhas tracejadas destacam diferentes momentos do atrator durante a rota: a linha traceja (a) aponta quando o atrator é quase periódico, enquanto (b) e (c) indicam comportamento caótico. . . . 67
- Figura 25 – Atratores para $b = 0,6$, $\gamma = 0,1$ e para os valores de a destacados pelas linhas tracejadas da Figura 24: (a) $a = 0,7052$, (b) $a = 0,7118$ e (c) $a = 0,7124$. Os atratores fantasmas indicados pelos pontos azuis e rosas são referentes ao parâmetros (a) $a = 0,7063$ e (b) $a = 0,7118$ 67
- Figura 26 – Natureza dos atratores para diferentes parâmetros do mapa padrão não *twist* dissipativo. Em (a), apresentamos o espaço de parâmetros, onde a cor de cada ponto (a, b) indica o valor do expoente de Lyapunov de um atrator no espaço de fase para tal par de parâmetros. Os pontos em preto indicam atratores quase periódicos ($\lambda = 0$), os pontos em verde indicam que o atrator é periódico ($\lambda < 0$) e os pontos das outras cores indicam comportamento caótico. A ampliação ao redor dos intervalos dos diagramas de bifurcação das Figuras 22 e 24 é apresentado em (b), onde as linhas tracejadas em branco indicam o valor de b onde ocorre a rota "hard" ($b = 0,58$) e a rota de Curry-Yorke ($b = 0,6$) para o caos. 69

Figura 27 – Espaço de parâmetros para os períodos dos atratores periódicos indicados pelos pontos em verde na Figura 26. A ampliação em (b) é feita na mesma região da Figura 26 (b). O período de cada atrator é calculado analisando o tempo que a trajetória leva para voltar a condição inicial, após um tempo transiente de 10^4 iterações e está indicado pela escala de cores a direita.	70
Figura 28 – Diagramas de bifurcação em função de a para diferentes sentidos de variação. O diagrama em roxo indica o sentido de a crescente, enquanto o diagrama em verde indica o sentido decrescente. Os valores de parâmetro são $b = 0,6$ e $\gamma = 0,1$. As setas coloridas indicam o sentido de variação do parâmetro a . A distinção entre os dois diagramas indica a coexistência de diferentes atratores no espaço de fase. As linhas tracejadas (a)-(c) destacam diferentes cenários de coexistência de atratores.	72
Figura 29 – Espaços de fase e bacias de atração para os valores de a indicados pelas linhas tracejadas na Figura 28: $a = 0,38$ para (a) e (d), $a = 0,51$ para (b) e (e), e $a = 0,73$ em (c) e (f). No espaço de fase em (a) e, conseqüentemente, na bacia de atração em (d) temos dois pontos fixos, indicados pelos quadrado e pelo triângulo, e a curva <i>shearless</i> . Nos espaços em (b) e (c), e nas bacias em (e) e (f), temos a coexistência de diferentes atratores periódicos representados pelos diferentes símbolos.	73
Figura 30 – Séries temporais para diferentes soluções do mapa do seno-círculo. Em (a), temos $(\Omega, K) = (0,05; 0,5)$ e uma série temporal que converge para um ponto fixo. Para (b), $(\Omega, K) = (0,25; 0,5)$ e a solução preenche todo domínio de x de forma ordenada, indicando comportamento quase periódico. Por último, em (c), temos $(\Omega, K) = (0,3, 1,5)$ e uma trajetória que percorre todo o domínio de x de forma desordenada e irregular, apontando comportamento caótico. Para todas as séries, a condição inicial é $x_0 = 0,5$	79
Figura 31 – Invertibilidade para o mapa do seno-círculo. (a) Espaço de parâmetros para a invertibilidade do mapa, onde os pontos em branco indicam onde o mapa é invertível. Os pontos em preto indicam onde o mapa apresenta derivada nula, deixando de ser invertível e tornando soluções caóticas uma solução possível para o mapa. Os gráficos $x_{n+1} \times x_n$ nos painéis (b), (c) e (d) correspondem ao pares de parâmetros indicados pelos símbolos em vermelho, azul e laranja da Figura (a), respectivamente. As derivadas para cada caso estão representadas nas Figuras (e)-(g). As linhas em verde nas figuras (c),(d), (f) e (g) destacam a não invertibilidade do mapa: os pontos onde o gráfico $x_{n+1} \times x_n$ assume um valor extremo e onde a derivada, um valor nulo.	81
Figura 32 – Séries temporais para o mapa do seno-círculo não <i>twist</i> , para parâmetros $a = 0,6$, $\Omega = 0,5$ e diferentes valores de (b). Em (a), $b = 0,56$ e a série temporal converge para um ponto fixo após um transiente. Em (b), temos $b = 0,15$ e uma solução quase periódica que ocupa todo o domínio de x de forma ordenada, o contrário do caso observado em (c) onde $b = 0,79$ e a solução é caótica, preenchendo o domínio de forma desordenada. Para todas as séries, a condição inicial é $x_0 = 0,5$	84

Figura 33 – Invertibilidade para o mapa do seno-círculo não <i>twist</i> . Em (a), apresentamos o espaço de parâmetros para a invertibilidade do mapa, onde os pontos em preto indicam onde o mapa deixa de ser invertível, permitindo a existência de soluções caóticas. Os pontos em branco indicam parâmetros onde o mapa é invertível e apenas soluções periódicas e quase periódicas são possíveis. Os gráficos $x_{n+1} \times x_n$ correspondentes ao pares de parâmetros indicados pelos símbolos em vermelho, azul e laranja da Figura (a) estão nas Figuras (b), (c) e (d), respectivamente. As derivadas para cada caso estão representadas nas Figuras (e)-(g). As linhas em verde nos gráficos $x_{n+1} \times x_n$ e $M'(x_{n+1}) \times x_n$ indicam os pontos onde a derivada é nula e o mapa apresenta pontos de extremo locais.	85
Figura 34 – Diagrama de bifurcação e expoente de Lyapunov em relação ao parâmetro b , para $a = 0,1$ e (a) $\Omega = 0,5$, (b) $\Omega = -0,5$ e (c) $\Omega = 0,0$. A linha traceja evidencia $\lambda = 0$. Nos três diagramas, observamos um atrator quase periódico ($\lambda = 0$) sendo substituído por um atrator periódico ($\lambda < 0$) de período 1 que, posteriormente, bifurca em um atrator de período 2.	86
Figura 35 – Diagramas de bifurcação e expoentes de Lyapunov em relação ao parâmetro b , para os mesmos valores apresentados na Figura 34. O diagrama e o perfil do expoente de Lyapunov em azul (laranja) indicam o sentido de aumento (diminuição) de b . O sentido de variação do parâmetro também é indicado pelas setas coloridas. Os pontos em verde e em roxo indicam as bifurcações $b - \Omega = 1$ e $b + \Omega = 1$, respectivamente.	91
Figura 36 – Espaços de parâmetros para o cenário de multiestabilidade para o mapa do seno círculo não <i>twist</i> para (a) $\Omega = 0,3$, (b) $b = 0,4$ e (c) $a = 0,8$. Os cenários de atrator único (AU), comportamento caótico (C) e de multiestabilidade formado por diferentes atratores periódicos (ME - P + P), por atrator periódico e caótico (ME - P + C) e por diferentes bandas caóticas (CB + CB) são identificados por diferentes cores indicadas na barra de cor. As linhas verde e laranja são as curvas de bifurcação $b - \Omega = 1$ e $b + \Omega = 1$, respectivamente.	94
Figura 37 – Diagramas de bifurcação em função do parâmetro b , para $a = 0,8$ e $\Omega = -0,08$. Os pontos em azul e laranja correspondem ao sentido de aumento e diminuição do parâmetro b , respectivamente. As curvas em preto representam as órbitas periódicas instável enquanto as linhas coloridas destacam os pontos de crise $b \approx 0,9429$ (linha em vermelho), $b \approx 0,9609$ (linha pontilhada roxa) e $b \approx 0,9673$ (linha tracejada roxa).	96

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	– Áreas relativas da regiões coloridas dos espaços de parâmetros apresentados nas Figuras 13 e 16. Uma maior área relativa indica um maior número de parâmetros (a, b) que contêm barreiras de transporte no espaço de fase. . . .	54
Tabela 2	– Expoente de Lyapunov e natureza do atrator para os atratores apresentados na Figura 21	63
Tabela 3	– Entropia de bacia (S_B), entropia de borda de bacia (S_{bb}), número de atratores (N_A) e tipos de atratores presentes no espaço de fase para cada caso apresentado na Figura 29. As letras P e S na última coluna indicam que os atratores são periódicos ou são atratores <i>shearless</i> , respectivamente.	75
Tabela 4	– Expoente de Lyapunov para cada uma das séries temporais apresentadas na Figura 30. Na terceira coluna, temos o tipo de solução identificado a partir do valor de λ , onde $\lambda = 0$ indica comportamento quase regular, $\lambda > 0$ e $\lambda < 0$ indicam comportamento caótico e periódico, respectivamente.	80
Tabela 5	– Expoente de Lyapunov referente as três séries temporais apresentadas na Figura 32. A partir do expoente λ determinamos a natureza da solução apresentada: periódica ($\lambda < 0$), quase periódica ($\lambda = 0$) e caótica $\lambda = 0$. . .	84

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	17
2	SISTEMAS DINÂMICOS E O MAPA PADRÃO NÃO TWIST	21
2.1	SISTEMAS DINÂMICOS, DESCRIÇÃO MATEMÁTICA E ESPAÇO DE FASE	21
2.2	DESCRIÇÃO HAMILTONIANA E SISTEMAS DINÂMICOS CONSERVATIVOS E PERTURBADOS	24
2.2.1	Perturbação em toros irracionais e o teorema KAM	26
2.2.2	Perturbação em toros racionais e o teorema de Poincaré-Birkhoff	27
2.2.3	Condição de não degenerescência	28
2.3	MAPA PADRÃO NÃO TWIST	31
2.3.1	Expoente de Lyapunov	33
2.3.2	Propriedades não twist	35
2.3.3	Simetria, pontos indicadores e existência da curva shearless	38
2.3.3.1	Linhas de simetria	39
2.3.3.2	Pontos indicadores e curva <i>shearless</i>	40
2.3.4	Transporte de soluções caóticas	42
3	MAPA PADRÃO NÃO TWIST ESTENDIDO: QUEBRA DE SIMETRIA E TRANSPORTE DIRECIONADO	45
3.1	A EXTENSÃO DO MAPA PADRÃO NÃO TWIST	45
3.2	PROPRIEDADES DE SIMETRIA E O ESPAÇO DE FASE PARA O MAPA ESTENDIDO	46
3.3	ESPAÇO DE PARÂMETROS PARA O MAPA ESTENDIDO	49
3.3.1	Espaço de parâmetro para m ímpar	49
3.3.2	Espaço de parâmetro para m par	51
3.4	TRANSPORTE NO ESPAÇO DE FASE	54
4	MAPA PADRÃO NÃO TWIST DISSIPATIVO: ATRADORES, ROTAS PARA O CAOS E MULTIESTABILIDADE	59
4.1	O MAPA PADRÃO NÃO TWIST DISSIPATIVO	59
4.2	ATRADORES - SOLUÇÕES PARA O MAPA DISSIPATIVO	61
4.3	ROTA PARA O CAOS	64
4.4	ANÁLISE DOS ATRADORES E ESPAÇO DE PARÂMETROS	68
4.5	MULTIESTABILIDADE	71
4.6	ENTROPIA DE BACIA	74
5	MAPA DO SENO-CÍRCULO NÃO TWIST: UM MAPA UNIDIMENSIONAL DERIVADO DO MAPA PADRÃO NÃO TWIST	77
5.1	MAPA DO SENO-CÍRCULO	77
5.2	MAPA DO SENO-CÍRCULO NÃO TWIST	82
5.3	ANÁLISE DINÂMICA DO MAPA	86
5.3.1	Análise de bifurcação	87
5.4	MULTIESTABILIDADE	90
5.5	CRISE DE ATRADORES CAÓTICOS	95
6	CONCLUSÕES	98
	REFERÊNCIAS	102
	APÊNDICE 1 – MODELO EPIDEMIOLÓGICO SEIR BASEADO EM AUTÔMATO CELULAR	108
	APÊNDICE 2 – ARTIGOS PUBLICADOS	110

APÊNDICE 3 – PARTICIPAÇÕES EM ARTIGOS 112

1 INTRODUÇÃO

O tamanho da população de uma certa espécie, a posição e a velocidade de um pêndulo, a posição da Terra em relação ao Sol e a evolução de índices macroeconômicos são exemplos de grandezas cujo valor muda com o tempo. O estudo desta evolução temporal a partir de modelos matemáticos é a base da grande área da pesquisa que é a Dinâmica. Um dos precursores da dinâmica foi Sir Isaac Newton que, a partir de equações matemáticas, propôs as leis de movimento e da gravitação universal, o que levou à explicação das leis do movimento planetário de Kepler e também à resolução do problema de dois corpos interagindo gravitacionalmente [1]. Não foram apenas as leis de Newton que revolucionaram a forma de estudar a natureza, mas também a ideia que de fato estas leis existem [2]. A ideia de que é possível descrever as leis da Natureza por equações matemáticas tornou possível a compreensão de fenômenos relacionados à mecânica celeste, à elasticidade, ao calor, à luz, e tantos outros exemplos que podemos imaginar [2]. Utilizar ferramentas matemáticas para nos ajudar a entender um pouco mais o funcionamento da natureza é o que move a pesquisa nesta área até os dias de hoje.

Segundo a percepção de Laplace, se existisse uma equação que descrevesse o sistema e se soubéssemos o seu estado inicial, seria possível determinar um estado futuro único, para qualquer tempo [2, 3]. Dessa forma, nada seria incerto, tanto o futuro quanto o passado seriam determináveis. Este pensamento mecanicista e determinístico do universo foi preponderante até o estudo de Poincaré sobre a interação gravitacional entre mais de dois corpos. Com o objetivo de resolver a questão da estabilidade do sistema solar, Poincaré tentou resolver as equações para um problema mais simples: a interação de três corpos pela força gravitacional [2]. Partindo de uma abordagem geométrica e topológica, Poincaré percebeu que as soluções eram totalmente diferentes das soluções obtidas para dois corpos: elas eram complicadas, não podiam ser escritas por fórmulas matemáticas e podiam ser irregulares e desordenadas [1, 2]. Desta forma, a previsibilidade certa dos sistemas dinâmicos se tornou uma característica não garantida.

O comportamento irregular e não previsível observado por Poincaré, também foi observado no circuito eletrônico, elaborado por Balthazar van der Pol em 1926-1928, para simular um modelo matemático do coração [2]. Sob certas circunstâncias, o circuito apresentava uma oscilação não periódica. Oscilações irregulares e quase aleatórias também foram observadas pelo meteorologista Edward Lorenz em seu modelo de três equações para a convecção atmosférica [1, 2]. Além da irregularidade, Lorenz observou algo que impactaria o estudo de sistemas dinâmicos: a sensibilidade às condições iniciais. Ao realizar as mesmas simulações numéricas com condições iniciais minimamente diferentes entre si, esta diferença mínima era ampliada e os resultados das simulações se tornavam completamente diferentes [1, 2]. Lorenz constatou que esta sensibilidade era uma propriedade intrínseca do sistema, o que o tornava imprevisível.

Este comportamento irregular, aperiódico e imprevisível, decorrente de um sistema determinístico, é denominado comportamento caótico. De forma geral, um comportamento

caótico pode ser definido como um comportamento não periódico, não estável e imprevisível [4–7]. Esta última propriedade é devido a sensibilidade das condições iniciais que dificilmente são determinadas com exatidão. O comportamento caótico é frequentemente observado em sistemas não-lineares, sistemas com perturbações externas periódicas ou em sistemas com muitos graus de liberdade. Entretanto, sistemas relativamente simples podem apresentar comportamento caótico como uma solução possível [6]. A simplicidade das equações não determina se as soluções serão regulares ou não e, de fato, equações simples podem apresentar soluções caóticas [7].

O comportamento caótico pode ser observado em diferentes sistemas dinâmicos não lineares. Sistemas conservativos, onde a dissipação de energia pode ser desprezada, podem apresentar caos sob efeito de ações externas. Como exemplo, podemos citar o pêndulo perturbado e o rotor pulsado no plano, sistemas descritos por duas equações matemáticas que apresentam soluções caóticas para certas condições iniciais e para certos parâmetros de controle. Sistemas onde há dissipação de energia, os sistemas dissipativos, também podem apresentar comportamento caótico, como por exemplo o sistema de convecção atmosférica estudado por Lorenz. Sendo assim, vemos que diferentes tipos de sistemas dinâmicos, com diferentes propriedades, são capazes de apresentar comportamento caótico.

Dentre as classificações de sistemas dinâmicos, nós escolhemos os sistemas degenerados como objeto de estudo. Um sistema não degenerado é um sistema que satisfaz globalmente a condição de não degenerescência, também denominada condição *twist*¹ [8]. Esta condição garante uma relação monotônica entre velocidade e momento canônico, isto é, grandes velocidades implicam em grandes momentos canônicos [9]. Os sistemas que violam esta condição, localmente ou globalmente, são ditos ser degenerados ou não *twist*, e são amplamente aplicados no estudo de fenômenos relacionados a plasma, como a descrição de linhas de campo magnético, e a problemas de mecânica celeste, da física atmosférica, da dinâmica de fluídos, da física de aceleradores, da matéria condensada, entre outros exemplos [8–10].

Devido a violação da condição *twist*, novos fenômenos são observados no sistema. As principais propriedades de sistemas não *twist* podem ser estudados pelo mapa padrão não *twist*, um modelo matemático bidimensional a tempo discreto proposto por Morrison e del Castillo-Negrete, em seu trabalho publicado em 1993 [11]. Este mapa é conservativo e perturbado, e exhibe os principais fenômenos existentes em sistemas que violam a condição *twist*, como a coexistência de caos e regularidade, barreiras totais e parciais ao movimento coletivo de trajetórias caóticas, soluções periódicas gêmeas com mesmo período e número de rotação, colisão e reconexão de soluções quase regulares e não monotonicidade no perfil do número de rotação. Estas propriedades estão bem estabelecidas e a bibliografia relacionada é vasta. O estudo de órbitas periódicas e a transição para o caos, assim como análise da simetria do sistema e de transporte podem ser encontrados nas referências [8–10, 12–15].

As características do mapa padrão não *twist* são consequências de suas propriedades,

¹ Termo específico da área e, por este motivo, o manteremos na sua forma original.

como a simetria, a conservação de energia e a violação da condição *twist*. Caso uma dessas propriedades seja modificada, é possível que o cenário apresentado pelo mapa se modifique. Esta mudança de cenário é o que compõem o principal ponto de interesse deste trabalho. Como ficariam as estruturas do espaço de fase caso haja uma quebra de simetria no sistema? Qual o impacto da inclusão de uma dissipação no mapa? Qual o efeito destas mudanças no transporte das soluções caóticas? Estas são algumas perguntas que motivaram a nossa pesquisa e que estabeleceram o ponto de partida desta tese.

Nosso principal objetivo neste trabalho é estudar as consequências na dinâmica do mapa padrão não *twist* quando este é modificado. Em um primeiro momento, podemos considerar uma nova perturbação ao mapa, tal que o cenário de simetria e de transporte se altere. Como consequência, uma nova metodologia para o estudo da existência da curva *shearless* é necessária, assim como o estudo de um possível transporte direcionado pode ser desenvolvido. Neste trabalho, buscamos analisar este cenário utilizando como objeto de estudo o mapa padrão não *twist* estendido, proposto por Portela e seus colaboradores como uma expansão local do mapa padrão *twist* que descreve o efeito do limitador ergódico em um experimento de *tokamak* [16]. Nós analisamos o impacto da nova perturbação na simetria do mapa e no transporte de trajetórias caóticas, e também estudamos um método de identificar as barreiras de transporte para os casos não simétricos.

Além de uma nova perturbação, também podemos considerar a existência de dissipação no mapa padrão não *twist*. Neste caso, a conservação da energia e, conseqüentemente, a simetria temporal do sistema não são uma realidade e as soluções para o sistema conservativo são substituídas por atratores. Carvalho e Abud [17], mostraram a existência de atratores quase periódicos, denominados atratores *shearless*, no mapa padrão não *twist* labiríntico dissipativo, assim como a existência de comportamento caótico restritos a um atrator no toro no espaço de fase. Atratores caóticos no toro são conhecidos e bem estabelecidos para sistemas *twist*, assim como as rotas que descrevem como um atrator quase periódico se torna caótico no toro. Entretanto, estas rotas ainda não foram exploradas para sistemas não *twist*. Interessados no impacto da dissipação nas estruturas do espaço de fase, nas rotas para o caos em sistemas não *twist* e na possibilidade da coexistência de diferentes atratores no sistema, nós consideramos o mapa padrão não *twist* dissipativo, uma versão simplificada do mapa utilizado por Carvalho e Abud [17], que consiste no mapa padrão não *twist* com uma dissipação controlável.

Por último, nós podemos imaginar uma aproximação local do mapa padrão não *twist* e propor um novo mapa unidimensional. Este processo de aproximação foi previamente utilizado [18] com o mapa padrão *twist* como uma forma alternativa de obter o paradigmático mapa do seno-círculo, proposto por Arnold como uma solução para o problema de dois osciladores acoplados de forma não-linear [19]. O mapa do seno-círculo apresenta uma forma matemática simples e os resultados obtidos de sua análise permitem entender a transição para o caos a partir da sobreposição de ressonâncias assim como a rota quase periódica para o caos [20–22].

Outros resultados sobre o mapa do seno-círculo podem ser encontrados nas referências [20, 21, 23, 24]. A pergunta que nos surgiu durante a realização deste trabalho foi: qual seria o mapa unidimensional obtido se utilizássemos o mapa padrão não *twist* no mesmo processo de aproximação utilizado como alternativa para encontrar o mapa do seno-círculo? Para responder a esta questão, nós realizamos a aproximação e encontramos o mapa do seno-círculo não *twist*, um mapa unidimensional dissipativo, com uma dependência de três parâmetros, e que apresenta soluções periódicas, quase periódicas e caóticas, para diferentes parâmetros de controle. Nós buscamos analisar a dinâmica do mapa, assim como a evolução dos atratores e também os possíveis cenários de coexistência de diferentes atratores para um mesmo conjunto de parâmetros.

Nesta tese, apresentamos, primeiramente, um resumo sobre o mapa padrão não *twist* e o utilizamos como exemplo para apresentar as principais ferramentas e métodos utilizados para análise de sistemas dinâmicos que serão empregadas durante todo o trabalho. Tal resumo encontra-se no Capítulo 2. Nossas contribuições e resultados novos obtidos, relacionados ao mapa padrão não *twist* estendido, mapa padrão não *twist* dissipativo e mapa do seno-círculo não *twist*, são apresentados nos Capítulos 3, 4 e 5, respectivamente. Nossas conclusões são apresentadas no Capítulo 6. Ao final da tese, apresentamos os apêndices que contêm as capas dos artigos publicados, sendo eles relacionados diretamente a tese, não relacionados diretamente e também artigos resultantes de colaborações durante o desenvolvimento da tese.

2 SISTEMAS DINÂMICOS E O MAPA PADRÃO NÃO TWIST

Neste capítulo, buscamos apresentar os principais conceitos e as ferramentas mais utilizadas para análise e estudo de sistemas dinâmicos. Para isso, após expor brevemente alguns conceitos da dinâmica, apresentamos o mapa padrão não *twist*, um mapa conservativo e bidimensional que pode ser visto como o sistema discreto mais simples conhecido que viola a condição *twist*. Com este mapa, apresentamos conceitos fundamentais da dinâmica não linear e analisamos suas principais características e seus comportamentos. Este mapa é a base de todo trabalho, uma vez que nossas contribuições inéditas são análises de modificações aplicadas a este modelo matemático.

2.1 SISTEMAS DINÂMICOS, DESCRIÇÃO MATEMÁTICA E ESPAÇO DE FASE

Sistemas dinâmicos podem ser definidos como uma descrição matemática que rege a evolução temporal de um sistema [6]. Esta descrição pode ser feita de diversas maneiras, sendo as mais comuns as descrições que empregam equações diferenciais e equações de diferenças. A aplicação de modelagens matemáticas para estudar sistemas que evoluem temporalmente ocorre em diversas áreas da ciências, como nas ciências exatas e biológicas e também nas engenharias e na economia [1, 5, 25].

Alligood, Sauer e Yorke definem um sistema dinâmico como a união de um conjunto de estados possíveis com uma regra que determina o estado atual do sistema baseado em seu estado passado [5]. Sendo assim, uma vez que o sistema é determinístico e não inclui aleatoriedade, o estado atual é determinado de forma única a partir do estado inicial.

De forma geral, sistemas dinâmicos são descritos por equações do tipo [6],

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)), \quad (2.1)$$

para sistemas onde a variável temporal é contínua, ou,

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n), \quad (2.2)$$

para sistemas onde o tempo é uma variável discreta. O sistema descrito pela equação (2.1) é comumente denominado fluxo, e o vetor $\mathbf{x}(t)$ pode ser definido para qualquer $t > 0$ a partir da condição inicial $\mathbf{x}(0)$. Por sua vez, o sistema em (2.2) é denominado mapa, a variável temporal é usualmente nomeada iterada e para qualquer iterada n , o estado \mathbf{x}_n é definido de forma única para a condição inicial \mathbf{x}_0 . Para as equações acima, os vetores \mathbf{x} tem dimensão N , correspondente a dimensão do sistema, e a função \mathbf{f} e o mapa \mathbf{M} são as regras do sistema dinâmico.

Tanto para fluxos quanto para mapas, as soluções dos sistemas podem ser representadas de forma gráfica em um espaço N -dimensional denominado espaço de fase. Dessa forma, as

soluções das equações (2.1) e (2.2) podem ser visualizadas como o movimento de um ponto em um espaço N dimensional [1]. Na Figura 1 nós apresentamos um exemplo para uma solução, também denominada trajetória ou órbita, de um sistema bidimensional.

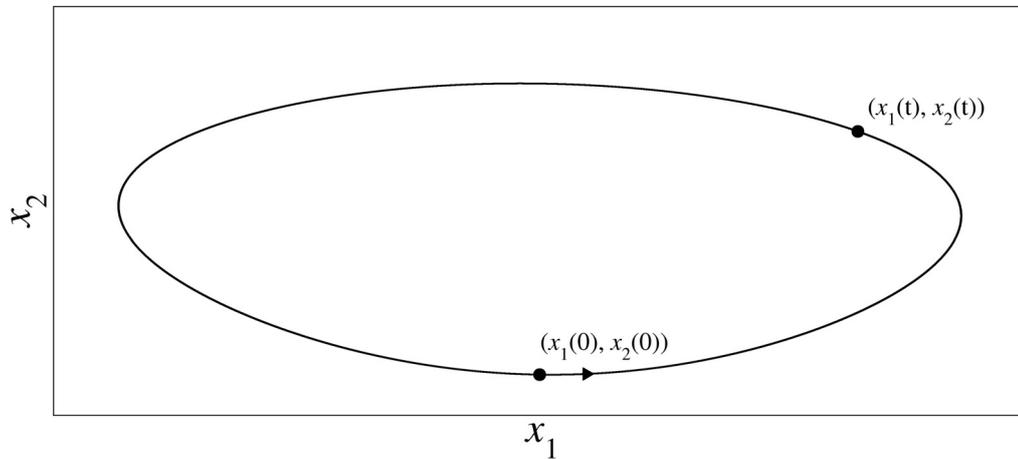


Figura 1 – Exemplo esquemático de uma trajetória em um espaço de fase bidimensional. A partir da evolução temporal de uma condição inicial $(x_1(0), x_2(0))$ é possível determinar de forma única a posição $(x_1(t), x_2(t))$ em um tempo $t > 0$ qualquer. Neste exemplo, a trajetória é uma curva fechada indicando uma solução periódica que se repete após completar um período de tempo.

Na Figura 1, temos a trajetória originada a partir da condição inicial $(x_1(0), x_2(0))$. O resultado é uma curva fechada, indicando um comportamento periódico, uma vez que a trajetória retorna ao ponto inicial após um certo período de tempo. A seta indica o sentido da trajetória, do movimento do ponto no espaço de fase. Neste caso, temos o movimento em sentido anti-horário e, para qualquer tempo t , o estado será representado pelo ponto $(x_1(t), x_2(t))$ que pertence a curva.

A forma da trajetória no espaço de fase nos traz a informação sob o tipo de comportamento que o sistema apresenta. Na Figura 1, o comportamento é periódico, uma vez que a trajetória fecha em si mesma. Porém, outros tipos de comportamento podem ser observados. Trazemos alguns exemplos na Figura 2.

Na Figura 2 temos três exemplos de soluções obtidas por mapas, sistemas a tempo discreto. Em (a), temos um espaço de fase formado por 5 curvas fechadas distintas. A condição inicial $(x_1(0), x_2(0))$ gera uma trajetória que visita as 5 curvas em iteradas sucessivas, como podemos ver pelos pontos $(x_1(n), x_2(n))$ para $n = 1, 2, 3, 4$ e 5. Após completar um período, nesse caso 5, observamos que a trajetória retorna para a curva inicial. Sendo assim, todas as curvas são apenas uma solução. Esse tipo de órbita é referente a um movimento periódico, um pouco mais complicado que o caso apresentado na Figura 1, uma vez que há mais de uma frequência associada ao movimento. Contudo, o comportamento é periódico e regular. No painel (b) da Figura 2, temos apenas uma curva no espaço de fase. De modo geral, soluções que apresentam esta forma no espaço de fase não apresentam apenas uma frequência, sendo muitas vezes um conjunto grande de frequências ou até mesmo frequências irracionais. Usualmente,

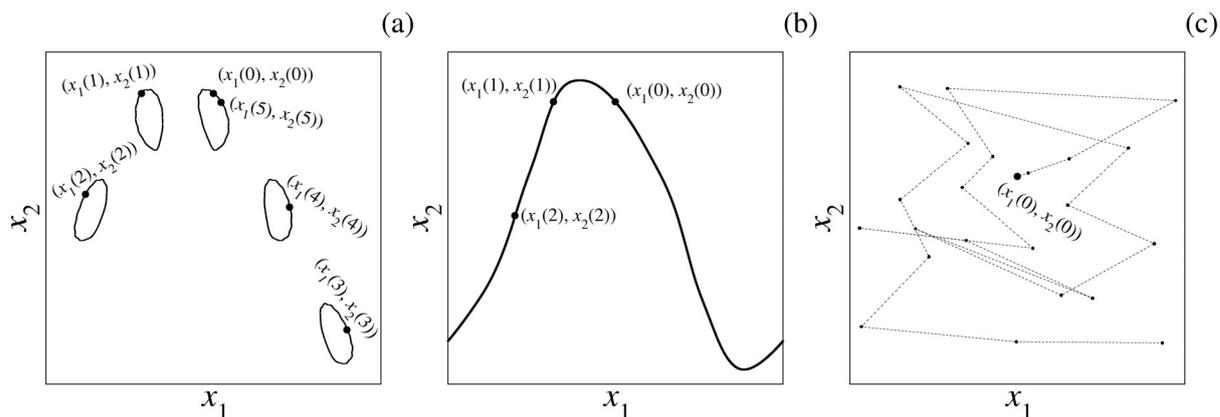


Figura 2 – Exemplos de diferentes tipos de soluções de um sistema bidimensional discreto. Em (a), temos 5 curvas fechadas, indicando um movimento periódico. Uma vez que o sistema é discreto, a trajetória "salta" para diferentes ilhas em iterações sucessivas, retornando para a ilha inicial após 5 iterações. Para (b), temos uma curva no espaço de fase indicando um comportamento regular e quase periódico. Indicamos as 2 primeiras iterações para apresentar como a solução preenche a curva. Já para (c), temos os pontos indicando as iterações do sistema e as linhas tracejadas são apresentadas para indicar iterações sucessivas. Neste último caso, temos um comportamento não regular e não periódico.

estas soluções são regulares e quase periódicas. Discutiremos com mais detalhes soluções quase periódicas em seções futuras.

Por último, na Figura 2 (c), temos um comportamento visualmente não periódico e não regular. As iterações do sistema são indicadas pelos pontos em preto e apresentamos as linhas tracejadas conectando os pontos para facilitar a identificação da evolução da trajetória. A fim de uma melhor visualização, apresentamos poucas iterações. Mas, se iterarmos por muito tempo, os pontos irão preencher todo o espaço de fase, não formarão curvas ou curvas fechadas, caracterizando assim um comportamento irregular e aperiódico. Caso uma condição inicial muito próxima à condição $(x_1(0), x_2(0))$ gere um órbita que divirja exponencialmente na órbita que observamos na Figura 2 (c), temos o caso de um comportamento caótico. Esse assunto será discutido com maior profundidade nas próximas seções.

Com toda a informação que os espaços de fase podem nos fornecer, eles são uma ferramenta essencial para o estudo de sistemas dinâmicos. De fato, ao saber apenas os valores das coordenadas para diferentes instantes de tempo, podemos construir o espaço de fase e identificar o tipo de comportamento do sistema sem necessariamente resolver analiticamente a equação diferencial ou a equação de diferença que o rege.

Tanto sistemas a tempo discreto quanto sistemas em tempo contínuo podem ser analisados pelo espaço de fase e outras ferramentas. Neste trabalho, focaremos em sistemas a tempo discreto, os mapas. Por mais que as equações diferenciais sejam a forma mais utilizada de descrever sistemas dinâmicos, os mapas também tem um papel importante e interessante nesta descrição. Eles podem ser utilizados como uma ferramenta para analisar soluções de equações diferenciais e também para modelar sistemas reais onde é mais conveniente tomar o tempo como uma variável discreta [1]. Por serem formados de equações iterativas de diferenças, os mapas são uma forma

mais simples de estudar o sistema e tem um custo computacional menor para os cálculos, ao comparar com o custo para os cálculos de integração numérica necessários para a resolução das equações diferenciais.

2.2 DESCRIÇÃO HAMILTONIANA E SISTEMAS DINÂMICOS CONSERVATIVOS E PERTURBADOS

Dentro do grande conjunto que forma os sistemas dinâmicos, há uma classe bem estabelecida que é a classe dos sistemas Hamiltonianos. Um sistema Hamiltoniano tem toda a sua dinâmica descrita por uma função H , denominada função Hamiltoniana, que depende das variáveis do sistema. Como exemplos de sistemas que são descritos pelo formalismo Hamiltoniano, podemos citar os problemas de mecânica onde o atrito ou qualquer perda de energia não existe ou pode ser negligenciado, a análise das linhas de campo magnético no plasma, o estudo de corpos celestes e da estabilidade do sistema solar, a questão da mistura de fluídos entre outros [6, 7, 26].

O formalismo Hamiltoniano combina conceitos de equações diferenciais com princípios variacionais [3]. Neste formalismo, a dinâmica do sistema é descrita pela função $H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$, onde \mathbf{p} e \mathbf{q} são vetores de dimensão N que contém os momentos e as coordenadas generalizadas do sistema [6, 26]. A dimensão N é definida pelo número de graus de liberdade do sistema [6]. A função Hamiltoniana é obtida a partir da transformada de Legendre aplicada a Lagrangiana do sistema, que por sua vez é definida por [4, 27],

$$L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) - U(\mathbf{q}, t), \quad (2.3)$$

onde $\dot{\mathbf{q}}$ e \mathbf{q} são os vetores das velocidades e das posições generalizadas, respectivamente. A função T indica a energia cinética, enquanto U é a energia potencial do sistema. Sendo assim, obtemos a função Hamiltoniana a partir de,

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t) \equiv \sum_i \dot{q}_i p_i - L(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t). \quad (2.4)$$

Os momentos p_i são obtidos a partir da Lagrangiana pela derivada,

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (2.5)$$

Após obter a função H pela equação (2.4), encontramos as equações de movimento a partir das equações de Hamilton, definidas por [3, 26],

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)}{\partial p_i}; \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)}{\partial q_i} \quad (2.6)$$

com $1 \leq i \leq N$. As soluções das equações (2.6) formam a trajetória (\mathbf{p}, \mathbf{q}) no espaço de fase de dimensão $2N$ e as variáveis $(p_i, q_i) \forall i$ são denominadas variáveis canonicamente conjugadas

[3, 4, 6, 26].

Se as equações que definem as coordenadas generalizadas não dependem explicitamente do tempo e se as forças atuantes no sistema podem ser derivadas de um potencial conservativo, temos que a função Hamiltoniana é igual a energia do sistema e pode ser calculada, de uma forma mais simples, como $H = T + U$ [28]. Se a função H não depende explicitamente do tempo, dizemos que o sistema é autônomo e podemos ver facilmente que $H(\mathbf{p}(t), \mathbf{q}(t))$ se mantém constante durante toda evolução temporal [3, 6]. Para um índice i genérico,

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} = \left(-\frac{dp_i}{dt} \right) \frac{dq_i}{dt} + \frac{dq_i}{dt} \frac{dp_i}{dt}, \\ \frac{dH}{dt} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Sendo assim, identificando H como a energia E do sistema, temos que para sistemas autônomos a energia é conservada durante a evolução temporal.

Com o auxílio das equações da Hamilton em (2.6), podemos calcular a derivada total de uma função arbitrária $\Upsilon = \Upsilon(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)$ em relação ao tempo.

$$\begin{aligned} \frac{d\Upsilon(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial q_i} \frac{dq_i}{dt} + \frac{\partial \Upsilon}{\partial p_i} \frac{dp_i}{dt} \right) + \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} = \sum_i \left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial \Upsilon}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial \Upsilon}{\partial t} \\ \frac{d\Upsilon(\mathbf{p}, \mathbf{q}, t)}{dt} &= [\Upsilon, H] + \frac{\partial \Upsilon}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Em um sistema onde o parênteses de Poisson $[\Upsilon, H]$ é nulo, ou seja, Υ comuta com a função Hamiltoniana e a função Υ não depende explicitamente do tempo, *i.e.*, $\partial \Upsilon / \partial t = 0$, a função Υ é dita ser uma constante do movimento e $d\Upsilon / dt = 0$ [4, 28]. Para o caso de sistemas conservativos, a Hamiltoniana, que é idêntica a energia, satisfaz estas duas condições. Logo, temos a energia como a constante de movimento.

As constantes de movimento tem um papel crucial para a determinação da integrabilidade do sistema. Caso um sistema Hamiltoniano autônomo de N graus de liberdade apresenta também N constantes de movimento independentes, o sistema é dito ser integrável [6]. O espaço de fase destes sistemas apresenta apenas comportamento regular, periódico e quase periódico [7], como as soluções apresentadas na Figura 2 (a) e (b).

A pergunta que emerge naturalmente é: o que ocorre caso o sistema perca a sua integrabilidade? A resposta para esta pergunta não é simples mas foi concebida por Kolmogorov, Arnold and Moser, o que levou a formulação do teorema KAM¹. Antes de apresentarmos os principais resultados obtidos a partir do teorema KAM, precisamos introduzir a ideia de estudar as trajetórias no espaço de fase como toros.

Considerando um sistema com dois graus de liberdade, a representação do toro para uma certa solução de um sistema integrável é mostrada na Figura 3.

¹ O termo KAM é um acrônimo formado a partir dos sobrenomes Kolmogorov, Arnold e Moser.

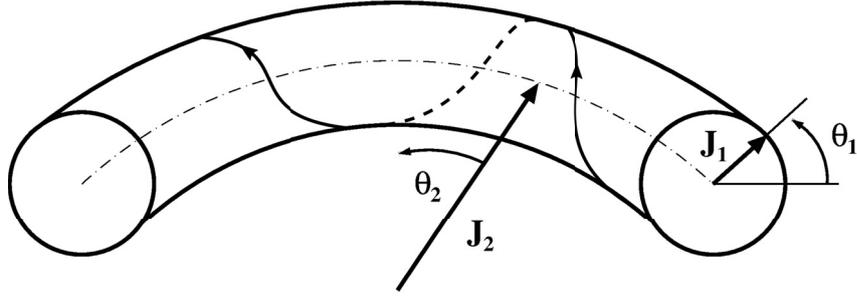


Figura 3 – Representação de uma trajetória sobre a superfície de um toro, para um sistema bidimensional. Para uma energia fixa, os valores de J_1 e J_2 são constantes e, juntamente com os ângulos θ_1 e θ_2 , descrevem a superfície do toro.

Na Figura 3, $\theta_{1,2}$ e $J_{1,2}$ são as variáveis de ângulo e ação, resultantes da transformação canônica de ângulo-ação aplicada as variáveis do sistema, definidas por [4],

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i, \quad \theta = \omega t + \beta, \quad (2.9)$$

com ω e β sendo constantes e θ uma função periódica de período 2π . O toro é uma superfície de energia: a trajetória sob ele tem uma energia constante durante todo o movimento, uma vez que J_1 e J_2 são constantes neste caso.

Considerando que o movimento na direção angular θ_1 e θ_2 tem frequências ω_1 e ω_2 , respectivamente, podemos definir uma função α [4],

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2}, \quad (2.10)$$

que é o número de rotação da solução.

O valor de α traz muitas informações sobre a natureza da solução. Caso α possa ser escrito como uma razão $\alpha = r/s$, as frequências são comensuráveis e o movimento da trajetória é periódico: a curva fecha em si mesma após r revoluções em θ_1 e s revoluções em θ_2 [4]. Caso α seja irracional, qualquer condição inicial irá gerar uma órbita que preencherá todo o toro e a solução é quase periódica. Desta forma, temos dois tipos de toros: toros racionais e toros irracionais.

Toros racionais e irracionais respondem de maneira diferente às perturbações do sistema [7]. Toros racionais tem uma frequência definida, efeitos perturbativos podem se acumular assim como efeitos de ressonâncias podem ocorrer [7]. Os toros irracionais tem um número de rotação irracional e espera-se que os efeitos perturbativos não se acumulem, mas sejam semelhantes ao longo de um período de tempo [7].

2.2.1 Perturbação em toros irracionais e o teorema KAM

O teorema KAM trata da ação da perturbação sobre toros irracionais, onde a trajetória preenche todo o toro em qual ela se encontra. O teorema foi conjecturado por Kolmogorov (1954)

e foi provado por Arnold para uma perturbação analítica, onde todas as derivadas existem e são definidas, em trabalhos publicados em 1961 e 1962 [4]. Com a contribuição de Moser, o teorema também foi provado para um número suficiente de derivadas contínuas da perturbação [4].

O teorema é válido para pequenas perturbações descritas por funções suficientemente suaves, e nesse caso, nem todos os toros são destruídos, alguns sobrevivem a ação da perturbação [4, 7]. O resultado principal do teorema nos informa que os toros irracionais cujo número de rotação α satisfaz a condição,

$$\left| \alpha - \frac{r}{s} \right| > \frac{K(\varepsilon)}{s^{5/2}}, \quad (2.11)$$

não são destruídos para qualquer aproximação racional r/s do número de rotação α , onde $K(\varepsilon)$ é uma constante que depende da amplitude da perturbação ε , e $K \rightarrow 0$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. [7]. Aqui, fizemos uma breve apresentação do resultado derivado do teorema KAM, que prova que alguns toros irracionais sobrevivem a perturbações externas. Uma discussão mais aprofundada sobre o teorema pode ser encontrada nas referências [4, 7].

Como dito, o teorema KAM só pode ser aplicado para estudar o destino de toros irracionais na presença de perturbação externa. Para toros onde o número de rotação pode ser escrito como uma razão $\alpha = r/s$, o destino das órbitas periódicas é descrito pelo teorema de Poincaré-Birkhoff.

2.2.2 Perturbação em toros racionais e o teorema de Poincaré-Birkhoff

Segundo o teorema de Poincaré-Birkhoff, toros racionais são destruídos sob a ação de uma perturbação e seu lugar é então ocupado por uma cadeia de pontos fixos elípticos e hiperbólicos que alternam entre si [7]. De forma mais precisa, sendo um toro racional de número de rotação $\alpha = r/s$, com a ação da perturbação o toro é destruído e substituído por um número par, $2ks$ de pontos fixos, com $k \in \mathbb{Z}$, [4].

Os pontos fixos são condições iniciais cuja solução gerada por elas retorna ao ponto inicial. De acordo com a estabilidade deste ponto fixo, podemos classificá-los de duas maneiras: como pontos elípticos ou pontos hiperbólicos. Pontos fixos elípticos são pontos de equilíbrio estável, logo, condições iniciais próximas geram soluções que orbitam ao redor deste ponto. Nas figuras 1 e 2 (a), temos exemplos destas órbitas que orbitam ao redor de pontos elípticos: no primeiro caso, um ponto de período 1, e no segundo, órbitas que orbitam ao redor de uma cadeia de pontos elípticos de período 5. Os pontos fixos hiperbólicos apresentam um equilíbrio instável. Neste caso, o ponto apresenta duas direções de estabilidade: uma direção estável por onde as soluções se aproximam, e uma direção instável, por qual as soluções se afastam do ponto. Uma síntese dos resultados dos dois teoremas é apresentada, de forma esquemática, na Figura 4.

Pela figura 4, vemos que, os toros irracionais representados pelas curvas com setas sobrevivem e são apenas deformados sob efeito da perturbação ($\varepsilon \neq 0$), se forem irracionais o

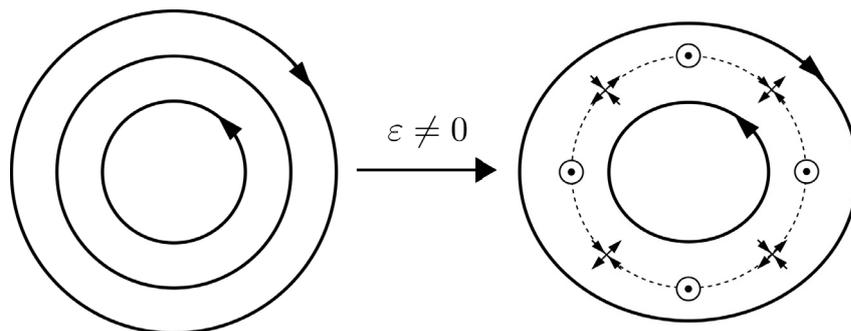


Figura 4 – Figura esquemática de um toro racional (curva cheia ao centro) e toros irracionais (curvas com setas) sem serem perturbados (figura a esquerda) e sob efeito de uma perturbação não nula $\varepsilon \neq 0$ (figura a direita). Sob perturbação, os toros irracionais são apenas deformados enquanto o toro racional é destruído e substituído por pares pontos fixos hiperbólicos e elípticos, indicados pelas setas em \times e pelos círculos concêntricos, respectivamente.

suficiente. As setas indicam o sentido do mapeamento dos pontos no toro (sentido horário e anti-horário). Já o toro racional ao centro, indicado pela curva sem setas, é destruído e substituído por oito pontos fixos: quatro pontos elípticos, representados pelos círculos concêntricos, alternando-se com quatro pontos hiperbólicos, indicados pelas setas em \times . As setas referentes ao ponto hiperbólico indicam as direções de estabilidade: setas apontando para o centro do ponto indicam a direção estável, enquanto as setas que se afastam, representam a direção instável.

Os pontos hiperbólicos podem ser vistos como fontes de comportamento caótico [7]. Desta forma, com a perturbação, além dos pontos fixos que já comentamos, a região onde estava o toro racional também é ocupado por órbitas caóticas [6]. Além disso, caso a amplitude ε da perturbação aumente, os toros irracionais também serão destruídos e substituídos por trajetórias caóticas [7]. É desta forma que o comportamento caótico surge nos sistemas onde a integrabilidade é destruída por uma perturbação. O comportamento caótico é caracterizado por irregularidade, aperiodicidade e imprevisibilidade, esta última é uma consequência da sensibilidade as condições iniciais. A solução caótica não retorna exatamente a seu ponto inicial e condições iniciais muito próximas divergem exponencialmente durante a evolução temporal, o que afeta a previsibilidade do sistema.

2.2.3 Condição de não degenerescência

Como visto, o teorema KAM garante a sobrevivência de toros irracionais para pequenas perturbações. Além da irracionalidade e de perturbação de pequena amplitude, o sistema em estudo precisa ser não-degenerado para que o teorema KAM seja válido [26,29]. Seja um sistema Hamiltoniano perturbado descrito por [9,29],

$$H = H_0(J) + \varepsilon H_1(J, \theta, t) \quad (2.12)$$

com $\varepsilon \ll 1$, θ e J sendo as variáveis de ângulo e ação, respectivamente, definidas pelas equações (2.9) para o sistema integrável. Em (2.12), H_0 representa a parte não perturbada e integrável

enquanto H_1 está relacionada a perturbação. Para um sistema ser não degenerado, ele deve satisfazer a condição [9, 26, 29],

$$\left| \frac{\partial^2 H_0(J)}{\partial J^2} \right| \neq 0, \quad (2.13)$$

para todos os pontos do espaço de fase. Caso em algum ponto a derivada em (2.13) seja nula, o sistema é degenerado.

A interpretação física da condição de não-degenerescência (2.13) é de que o sistema não perturbado deve ser não linear para que o teorema KAM seja válido [26, 29]. Para exemplificar, consideramos um sistema relacionado a oscilações lineares, isto é, $\omega = \partial H_0 / \partial J$ é uma constante e não depende da variável de ação I [26, 29]. Desta forma, ao substituir essa frequência na condição (2.13), temos que o resultado é nulo, a condição não é satisfeita e o teorema KAM não pode ser aplicado. Outra perspectiva sobre a condição de não degenerescência é que ela garante que grandes momentos canônicos implicam em grandes velocidades, há um comportamento monotônico nesta relação de momento e velocidade [9].

Para sistemas Hamiltonianos discretos escritos como na equação (2.12), o respectivo mapa pode ser escrito na forma [4, 10],

$$\begin{aligned} J_{n+1} &= J_n + g(J_{n+1}, \theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \mathcal{A}(J_{n+1}) + f(J_{n+1}, \theta_n), \end{aligned} \quad (2.14)$$

onde \mathcal{A} corresponde a frequência do sistema integrável não perturbado, $\mathcal{A} = \partial H_0 / \partial J$, e as funções f e g são referentes a perturbação H_1 . Para que o sistema seja conservativo e preserve a área, as funções f e g devem obedecer a relação $\partial f / \partial \theta_n + \partial g / \partial J_{n+1} = 0$ [8, 10]. Esta relação é obtida a partir da condição de que sistemas conservativos apresentam um valor unitário para o determinante da matriz Jacobiana [4]. A matriz Jacobiana é definida, para o mapa em (2.14), como,

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} & \frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{pmatrix}. \quad (2.15)$$

Utilizando as equação em (2.14), calculamos o valor da Jacobiana. Calculando cada termo da matriz em (2.15),

$$\frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} = 1 + \frac{\partial g}{\partial J_{n+1}} \frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} \quad \therefore \quad \frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} = \left(1 - \frac{\partial g}{\partial J_{n+1}} \right)^{-1}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} = \frac{\partial g}{\partial \theta_n} + \frac{\partial g}{\partial J_{n+1}} \frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} \quad \therefore \quad \frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} = \frac{\partial g}{\partial \theta_n} \left(1 - \frac{\partial g}{\partial J_{n+1}} \right)^{-1}, \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n} &= \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial J_{n+1}} \frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} + \frac{\partial f}{\partial J_{n+1}} \frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} \\ \therefore \quad \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n} &= \left(1 - \frac{\partial g}{\partial J_{n+1}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial J_{n+1}} + \frac{\partial f}{\partial J_{n+1}} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} &= 1 + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial J_{n+1}} \frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} + \frac{\partial f}{\partial \theta_n} + \frac{\partial f}{\partial J_{n+1}} \frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \therefore \quad \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} &= 1 + \frac{\partial f}{\partial \theta_n} + \frac{\partial g}{\partial \theta_n} \left(1 - \frac{\partial g}{\partial J_{n+1}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial J_{n+1}} + \frac{\partial f}{\partial J_{n+1}} \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Sendo a Jacobiana o determinante da matriz (2.15), temos,

$$\begin{aligned} |J| &= \frac{\partial J_{n+1}}{\partial J_n} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} - \frac{\partial J_{n+1}}{\partial \theta_n} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial J_n}, \\ |J| &= \left(1 - \frac{\partial g}{\partial J_{n+1}} \right) \left[1 + \frac{\partial f}{\partial \theta_n} + \frac{\partial g}{\partial \theta_n} \left(1 - \frac{\partial g}{\partial J_{n+1}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial J_{n+1}} + \frac{\partial f}{\partial J_{n+1}} \right)^{-1} \right] - \\ &\quad - \left[\frac{\partial g}{\partial \theta_n} \left(1 - \frac{\partial g}{\partial J_{n+1}} \right)^{-1} \left(1 - \frac{\partial g}{\partial J_{n+1}} \right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial J_{n+1}} + \frac{\partial f}{\partial J_{n+1}} \right)^{-1} \right], \\ |J| &= \left(1 - \frac{\partial g}{\partial J_{n+1}} \right)^{-1} \left(1 + \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \right). \end{aligned} \quad (2.20)$$

O mapa é conservativo caso $|J| = 1$. logo,

$$\left(1 - \frac{\partial g}{\partial J_{n+1}} \right)^{-1} \left(1 + \frac{\partial f}{\partial \theta_n} \right) = 1, \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{\partial f}{\partial \theta_n} = 1 - \frac{\partial g}{\partial J_{n+1}}, \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_n} + \frac{\partial g}{\partial J_{n+1}} = 0. \quad \square \quad (2.22)$$

Para mapas conservativos, *i.e.*, para mapas escritos como na equação (2.14) cujas funções relacionadas a perturbação satisfazem a equação (2.22), a condição de não-degenerescência pode ser escrita como,

$$\left| \frac{\theta_{n+1}}{J_n} \right| \neq 0, \quad (2.23)$$

e é denominada condição *twist* [8, 10]. Um mapa é dito ser *twist* quando a condição (2.23) é satisfeita em todos os pontos do espaço de fase. Caso a condição seja violada, o mapa é dito ser

não *twist*. A violação pode ocorrer global ou localmente, entretanto, apenas degenerescências locais são estruturalmente estáveis², e degenerescências globais se tornam locais devido às perturbações e ressonâncias do sistema [8]. O exemplo mais simples de um mapa não *twist* que viola a condição (2.23) localmente é o mapa padrão não *twist*, o mapa que forma a base para todo o trabalho apresentado nesta tese e também é o assunto discutido na próxima seção.

2.3 MAPA PADRÃO NÃO TWIST

O mapa padrão não *twist* foi proposto por del-Castillo Negrete e Morrison como uma maneira simplificada e discreta de descrever o transporte caótico em um fluxo "*shear*"³ nas ondas de Rossby⁴ [11]. Para estudar o transporte caótico, considerou-se o movimento de escalares passivos em um fluxo de cisalhamento simétrico com ondas de Rossby [11]. A função Hamiltoniana que rege tal sistema é definida por,

$$H = H_0(y) + \sum_i \varepsilon_i \phi_i \cos[k_i(x - c_i t)], \quad (2.24)$$

onde $[x(t), y(t)]$ é a trajetória Lagrangiana de uma partícula no fluido, H_0 é uma função assimétrica com um ponto de inflexão único e ϕ_i é uma função simétrica arbitrária com um ponto de máximo [11]. A função Hamiltoniana em (2.24) tem a mesma estrutura apresentada na Hamiltoniana perturbada em (2.12). Para este sistema, a parte integrável, $H_0(y)$, corresponde ao fluxo, enquanto a perturbação não integrável está relacionada com as ondas de Rossby [11].

Após realizar a discretização do sistema e aproximar as soluções em torno de $y = 0$, del-Castillo Negrete e Morrison chegaram ao mapa padrão não *twist* (em inglês, *Standard Nontwist Map* - SNM),

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n - b \operatorname{sen}(2\pi x_n), \\ x_{n+1} &= x_n + a(1 - y_{n+1}^2), \quad \text{mod } 1 \end{aligned} \quad (2.25)$$

com $x \in [0, 1]$ e $y \in \mathbb{R}$ [11]. O mapa apresenta dois parâmetros: o parâmetro a relacionado com o perfil do número de rotação, e o parâmetro b referente a amplitude da perturbação [32]. Os parâmetros a e b são reais e independentes entre si, e consideraremos como intervalos de interesse $a \in [0, 1]$ e $b \in \mathbb{R}$.

Aplicando a condição (2.23) ao mapa (2.25), sendo θ e J correspondentes a x e y ,

² Um sistema dinâmico é estruturalmente estável se sua topologia não é modificada por uma perturbação arbitrariamente pequena [1]. Uma discussão extensa sobre estabilidade estrutural pode ser conferida nas Referências [1, 30].

³ Fluxos "*shear*", ou fluxos de cisalhamento são fluxos que são gerados por uma força. Fluxos de cisalhamento ocorrem tanto em oceanos quanto na atmosfera, como por exemplo na corrente do Golfo e no jato polar noturno sobre a Antártida [11].

⁴ Ondas de Rossby são ondas que ocorrem de forma natural em fluidos em rotação [31]. Por exemplo, com a rotação da Terra, há ondas de Rossby na atmosfera e no oceano e elas desempenham um papel importante no clima. [31]

respectivamente, temos,

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} = -2a[y_n - b \operatorname{sen}(2\pi x_n)] = 0, \quad (2.26)$$

e assim, podemos verificar a violação da condição *twist*, uma vez que existe valores (x_n, y_n) para qual a relação (2.26) se anula. Os pontos onde a condição *twist* é violada pertencem a uma curva específica no espaço de fase: a curva não monotônica [33] que, pela equação (2.26), é definida por $y = b \operatorname{sen}(2\pi x)$.

O mapa padrão não *twist* é um sistema que viola a condição *twist* localmente, sendo assim, a condição (2.26) não é satisfeita apenas na curva monotônica e as propriedades "não *twist*" tem efeito apenas nesta curva e para soluções próximas, estas denominadas "pseudomonotônicas" [33, 34]. Para regiões externas, regiões acima e abaixo da curva não monotônica no espaço de fase, a condição *twist* é satisfeita e o comportamento observado é semelhante ao obtido por mapas *twist* [34].

A seguir, mostramos as principais características do mapa padrão não *twist*. Explicaremos de forma sucinta as consequências de ser um sistema conservativo e perturbado, mostraremos as principais propriedades "não *twist*" que são consequências da violação da condição (2.26), e por último, apresentaremos algumas análises de interesse para este sistema, como o estudo de simetria e do transporte de órbitas caóticas no espaço de fase.

O mapa padrão não *twist* (2.25) é um sistema Hamiltoniano sob ação de uma perturbação externa. A função Hamiltoniana do sistema é definida por [11],

$$H = -ay + \frac{a}{3}y^3 + b \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(x - 2\pi mt), \quad (2.27)$$

onde temos a representação de Fourier para a função delta. O mapa (2.25) pode ser obtido a partir da integração direta das equações de movimento (equações (2.6)) aplicadas a função (2.27) [11]. Podemos provar que o mapa é conservativo a partir do determinante da matriz Jacobiana, assim como fizemos para um caso genérico (Seção 2.1.3). Substituindo as equações (2.25) em (2.15), encontramos:

$$|\mathcal{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2\pi b \cos(2\pi x_n) \\ -2a[y_n - b \operatorname{sen}(2\pi x_n)] & 1 + 4\pi ab \cos(2\pi x_n)[y_n - b \operatorname{sen}(2\pi x_n)] \end{vmatrix},$$

$$|\mathcal{J}| = 1 + 4\pi ab \cos(2\pi x_n)[y_n - b \operatorname{sen}(2\pi x_n)] - \{[-2\pi b \cos(2\pi x_n)][-2a(y_n - b \operatorname{sen}(2\pi x_n))]\},$$

$$\begin{aligned}
|J| &= 1 + 4\pi abc \cos(2\pi x_n)[y_n - b \sin(2\pi x_n)] - 4\pi abc \cos(2\pi x_n)[y_n - b \sin(2\pi x_n)], \\
|J| &= 1,
\end{aligned} \tag{2.28}$$

verificando, assim, que o mapa padrão não *twist* é conservativo.

Sistemas Hamiltonianos perturbados tem como uma de suas características a coexistência de comportamento periódico e regular com comportamento caótico, resultante da quebra da integrabilidade do sistema. Para determinar se uma solução é caótica, precisamos calcular o expoente Lyapunov.

2.3.1 Expoente de Lyapunov

O expoente de Lyapunov de uma trajetória pode ser compreendido como a taxa exponencial média de convergência ou divergência das órbitas com condições iniciais próximas no espaço de fase [4, 35]. Em um comportamento caótico, uma solução nunca retorna exatamente para a sua condição inicial e duas soluções com condições iniciais arbitrariamente próximas se afastam exponencialmente entre si durante a evolução temporal. Este afastamento é responsável pela imprevisibilidade do sistema, que também pode ser denominada sensibilidade às condições iniciais. Para soluções periódicas e quase periódicas, não há essa divergência exponencial para soluções geradas por condições iniciais próximas.

O expoente de Lyapunov pode ser calculado tanto para sistemas de tempo contínuo quanto para tempo discreto. Considerando uma condição inicial \mathbf{x}_0 em um sistema com \mathcal{N} graus de liberdade. A condição inicial é o centro de uma hiperesfera de condições iniciais de dimensão \mathcal{N} . Ao iterar todas as condições iniciais internas a hiperesfera, está irá se deformar e se tornar um corpo hiperelipsoidal de dimensão \mathcal{N} [35]. Sendo $\rho_i(0)$ o raio da hiperesfera, na direção i , no instante inicial e $\rho_i(t)$ o raio, na mesma direção mas em um tempo futuro $t > 0$, o expoente de Lyapunov λ_i é definido pelo limite [35],

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \log \frac{\rho_i(t)}{\rho_i(0)}. \tag{2.29}$$

Cada direção i tem um expoente λ_i relacionado e eles são ordenados do maior para o menor [35]. Os expoentes de Lyapunov estão relacionados a taxa de expansão da esfera em cada direção e, consequentemente, a expansão e contração das diferentes direções no espaço de fase [35].

O valor do expoente de Lyapunov depende da condição inicial e ele pode assumir três valores: nulo, negativo ou positivo. Se o expoente é nulo, órbitas próximas não divergem e a solução é regular. Expoentes negativos indicam uma convergência das órbitas próximas, indicando a presença de um atrator. Já expoentes positivos são característicos de órbitas caóticas: trajetórias próximas divergem exponencialmente com o tempo. Para sistemas conservativos, a soma de todos os expoentes de Lyapunov é nula, uma vez que o volume do espaço de fase é conservado, por definição. Caso a soma seja negativa, o sistema é dissipativo, o volume é

contraído durante a evolução temporal. Para um sistema ser considerado caótico, ao menos um expoente de Lyapunov deve ser positivo.

O mapa padrão não twist é um mapa bidimensional conservativo, logo, haverá dois expoentes de Lyapunov, λ_1 e λ_2 , e eles serão opostos, uma vez que sua soma deve ser zero, *i.e.*, $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Sendo assim, podemos focar nossa atenção apenas no maior expoente, indicado então por λ , o que é suficiente para obter informações sobre o sistema e as soluções presentes no espaço de fase. Uma descrição detalhada de como os expoentes de Lyapunov são calculados numericamente pode ser encontrada na referência [35], para sistemas contínuos, e na referência [36] para sistemas discretos, como os mapas. Neste trabalho, sempre usaremos o último, o método descrito por Eckmann e Ruelle [36]. Numericamente, o maior expoente de Lyapunov é calculado pelo limite,

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|T_x^n u\| \quad (2.30)$$

onde T_x^n é o produto das matrizes de derivada em cada instante de tempo, isto é, $T_x^n = T(f^{n-1}(x))T(f^{n-2}(x))\dots T(f(x))T(x)$, e u é um autovetor de T_x^n [36, 37].

Para exemplificar a utilização dos expoentes de Lyapunov no estudo de sistemas dinâmicos, construímos o espaço de fase para o mapa padrão não *twist* para $a = 0,65$ e $b = 0,6$. Juntamente, calculamos o expoente de Lyapunov, para um tempo de 10^4 iterações, para a solução gerada por cada condição inicial no espaço de fase. Construímos então outro espaço onde a cor da condição inicial é referente ao valor do expoente de Lyapunov da solução gerada por esta condição. Estes espaços são apresentados na Figura 5.

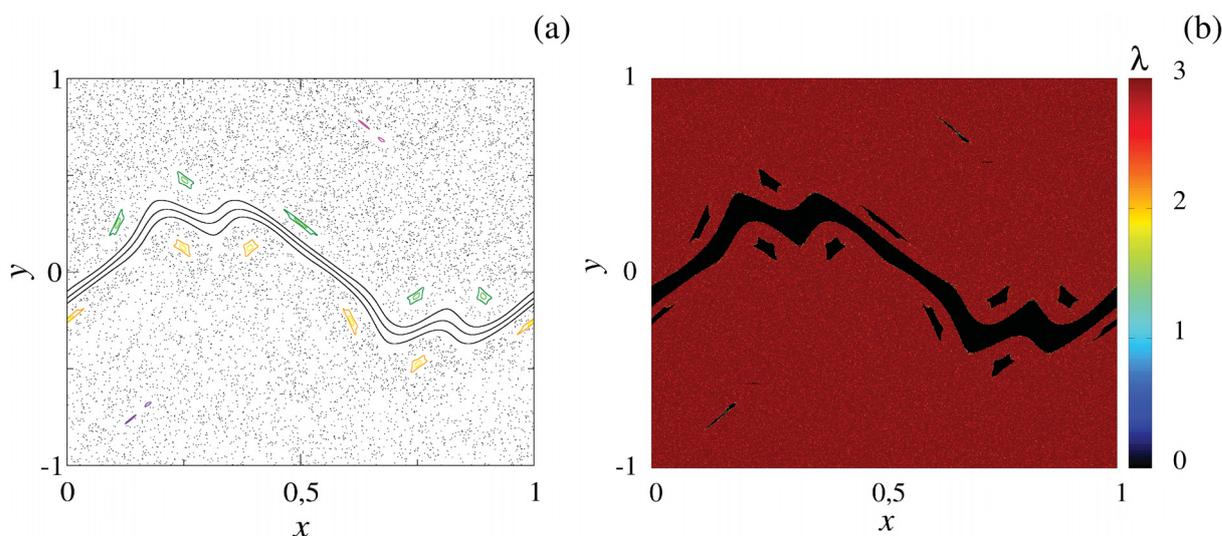


Figura 5 – Para o mapa padrão não *twist*, (a) espaço de fase para $a = 0,65$ e $b = 0,6$ e (b) mapa de cor onde cada ponto representa uma condição inicial e a cor indicada representa o valor do expoente de Lyapunov λ para a solução gerada pela condição. As soluções regulares no espaço de fase, como as trajetórias quase periódicas indicadas pelas curvas em preto e as ilhas periódicas representadas pelas curvas coloridas em (a), exibem expoente de Lyapunov nulo, evidenciado pelos pontos pretos em (b). As soluções caóticas, representadas pelos pontos esparsos em (a) apresentam $\lambda > 0$, retratado pelos pontos coloridos em (b).

Na Figura 5 (a) nós temos o espaço de fase para o mapa padrão não *twist*, com $(a, b) = (0,65 ; 0,6)$. Neste caso, a perturbação b é não nula e temos um sistema Hamiltoniano perturbado. Uma característica do espaço de fase de sistemas conservativos perturbados é a coexistência de regularidade e caos, o que observamos na figura. Na Figura 5 (b), temos o expoente de Lyapunov referente a trajetória gerada para cada ponto do espaço de fase. A partir da escala de cor, podemos identificar a natureza das soluções presentes no espaço de fase. Como estamos analisando o maior expoente de Lyapunov, não observamos expoentes negativos e, sendo assim, temos apenas $\lambda = 0$, indicado pelos pontos em preto, e $\lambda > 0$ para os pontos coloridos. Os pontos pretos esparsos no espaço de fase da Figura 5 (a) compõem o chamado mar caótico: toda condição inicial nessa região gerará soluções caóticas, com expoente $\lambda > 0$ representado pelos pontos coloridos na segunda figura. As curvas em preto, na Figura 5 (a), são soluções regulares quase-periódicas, isto é, um comportamento que é uma mistura de vários movimentos periódicos com frequências fundamentais diferentes [6]. Já as curvas fechadas coloridas são ilhas periódicas que orbitam ao redor de pontos elípticos, como discutido na Seção 2.2.2. Tanto soluções quase-regulares quanto soluções periódicas são indicadas pelos pontos em preto ($\lambda = 0$) na Figura 5 (b).

2.3.2 Propriedades não twist

Como dito anteriormente, a violação da condição *twist* tem grande influência nas estruturas presentes no espaço de fase. A seguir, enumeramos e ilustramos algumas propriedades decorrentes da violação da condição (2.26).

1. Ponto de extremo no perfil de número de rotação e a curva *shearless*

Uma vez que a condição *twist* é violada, o perfil do número de rotação não é mais monotônico: ele apresenta um ponto de extremo local, podendo ser um mínimo ou um máximo. Este ponto de extremo pertence a uma curva no espaço de fase denominada curva *shearless*. Esta curva é intitulada *shearless* (sem cisalhamento) porque ao longo dela, o "*shear*", definido por $\partial x_{i+1} / \partial y_i$, é nulo [8, 10].

O número de rotação de uma solução gerada por uma condição inicial (x, y) , designado por ω , pode ser calculado pelo limite [8],

$$\omega := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}, \quad (2.31)$$

onde $x_n \in \mathbb{R}$, ou seja, não é tomado o módulo 1. Se o limite é definido, a solução pode ser periódica (ω racional) ou quase periódica (ω irracional). Caso o limite não convirja, a solução é caótica.

Para ilustrar, voltamos ao espaço de fase apresentado na Figura 5, escolhemos a linha $x = 0,5$ e calculamos o número de rotação para cada ponto $(x, y) = (0,5; y)$, obtendo assim o perfil de número de rotação. O resultado é mostrado na Figura 6.

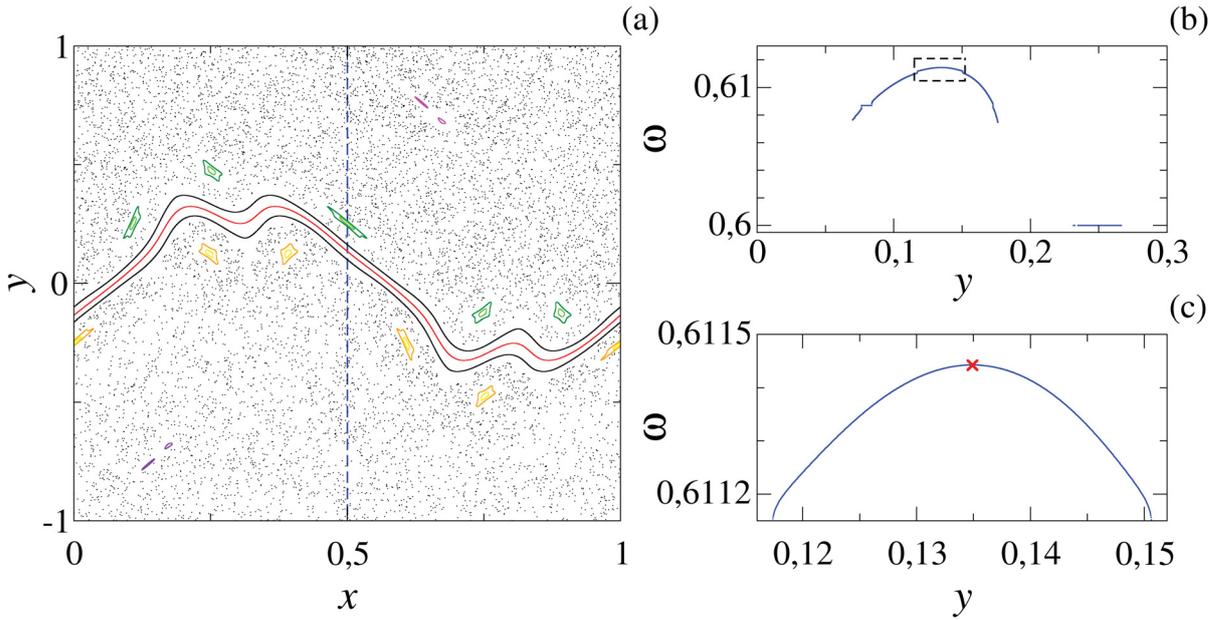


Figura 6 – Curva *shearless* correspondente ao ponto de extremo no perfil do número de rotação. Em (a) temos o espaço de fase para o mapa padrão não *twist* com os parâmetros $(a, b) = (0,65; 0,6)$. A linha tracejada azul em (a) indica a reta na qual o perfil de número de rotação foi calculado. O resultado é o perfil não monotônico mostrado em (b). O perfil apresenta um ponto de extremo, neste caso um máximo. A ampliação do perfil de ω na região indicada pelo retângulo preto tracejado no painel (b) é mostrada em (c), onde o ponto de máximo é destacado.

Na Figura 6 (a), temos o espaço de fase já apresentado na Figura 5 com a adição da linha $x = 0,5$, onde é calculado o perfil do número de rotação, mostrado na Figura 6 (b). Observando o perfil, vemos que ele não tem um comportamento monotônico, de fato sua forma lembra uma parábola. Só mostramos o intervalo $y \in [0; 0,3]$ pois fora deste intervalo o número de rotação não é definido. Como vemos na Figura 6 (a), a maioria das condições iniciais na linha são condições no mar caótico. Fazendo uma ampliação na parte superior do perfil, realçamos o caráter não monotônico. Na Figura 5 (c), observamos uma parábola e o ponto de máximo é destacado pelo \times em vermelho. Como vimos, esse ponto refere-se a curva *shearless*, a curva em vermelho no espaço de fase em (a).

Este comportamento se repete em todo o espaço de fase. Se calcularmos o número de rotação para cada ponto e associarmos uma cor para cada ω , podemos observar esse comportamento não monotônico. Na Figura 7, temos o espaço de fase construído de forma semelhante ao espaço na Figura 5 (b), mas com o valor do número de rotação indicado pela cor.

Os pontos em branco na Figura 7 indicam condições iniciais caóticas, onde o número de rotação não é definido. No painel (a), vemos todas as estruturas regulares do espaço de fase, as duas ilhas em preto, as cadeias de ilhas de período 5, em vermelho, e as curvas quase periódicas na região central, também em vermelho. Na ampliação, apresentada na Figura 7 (b), conseguimos destacar o comportamento não monotônico, onde o máximo de ω se encontra no meio do conjunto de curvas, correspondente a curva *shearless*, como vimos na Figura 6, .

2. Existência de meandros e cadeias de ilhas gêmeas no espaço de fase

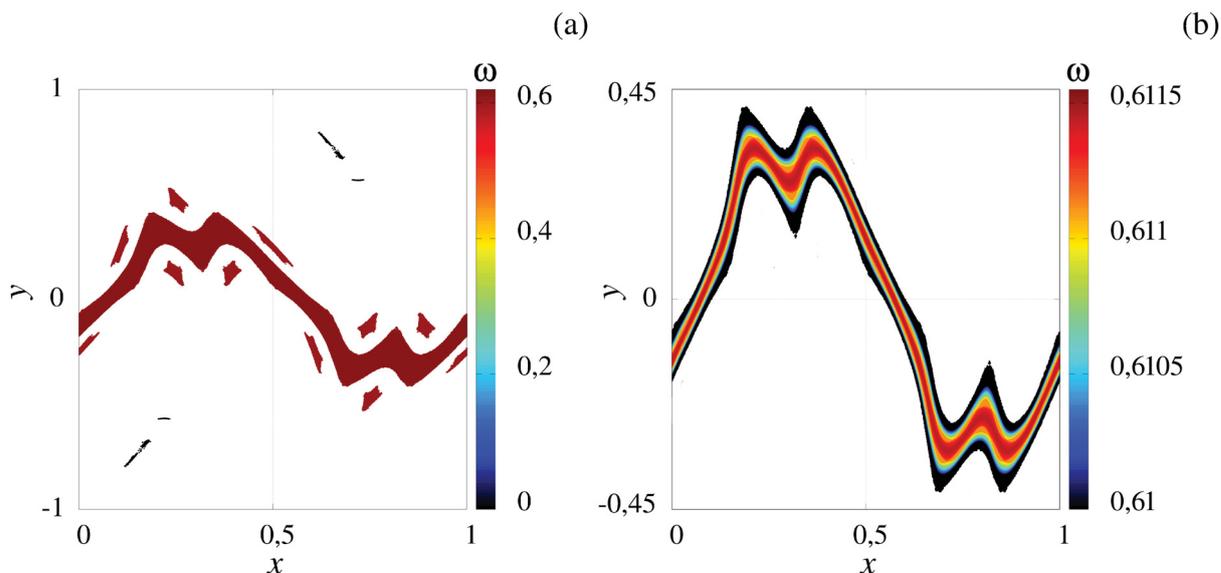


Figura 7 – Mapa de cor para o número de rotação para o espaço de fase mostrado na Figura 5, tal que os parâmetros são $a = 0,65$ e $b = 0,6$. Para cada ponto no espaço, ω foi calculado segundo a equação (2.31) e uma cor foi atribuída para cada valor. Os pontos em branco indicam condições caóticas, onde o número de rotação não é definido. O valor de ω associado a cada cor pode ser conferido na barra de cores. Em (a) temos o espaço de fase completo e em (b) temos uma ampliação nas curvas quase periódicas, para destacar o valor máximo de ω na curva *shearless*

Meandros são soluções quase periódicas representadas por curvas "dobradas" no espaço de fase [12]. Estas curvas não são gráficos $y(x)$, elas podem apresentar mais de um valor de y para o mesmo valor de x . A existência destas curvas é proibida em mapas *twist* pelo teorema de Birkhoff, mas pela violação da condição *twist*, sua existência é permitida em sistemas não *twist* [12].

Além dos meandros, como consequência da condição *twist* não ser válida em todo o espaço de fase, as órbitas periódicas se apresentam em pares, isto é, há duas órbitas periódicas iguais que apresentam o mesmo número de rotação [8]. Estas órbitas são iguais mas elas não compõem uma mesma solução no espaço de fase: uma trajetória em uma órbita periódica nunca será encontrada na outra. Por isto, estas duas órbitas são chamadas de soluções gêmeas, ou cadeia de ilhas gêmeas.

Na Figura 8, apresentamos dois espaços de fase exemplificando as estruturas de meandros e de ilhas gêmeas nos espaços de fase.

Nos espaços de fase da Figura 8, conseguimos observar as duas estruturas mencionadas. No painel (a), temos o meandro em vermelho, uma curva "dobrada" que não é um gráfico de x , uma vez que para o mesmo valor de x é possível encontrar múltiplos valores de y . Também podemos observar algumas cadeias de ilhas gêmeas de mesmo período, uma em cada lado do meandro: ilhas em azul e verde e as ilhas em rosa e roxo. A estrutura de ilhas gêmeas pode ser melhor observada na Figura 8 (b), onde temos a cadeia de ilhas em verde, chamada de cadeia superior, e a cadeia de ilhas em vermelho, denominada cadeia inferior. Estas ilhas tem o mesmo período 5 e apresentam o mesmo número de rotação. Essa estrutura se repete para as ilhas mais

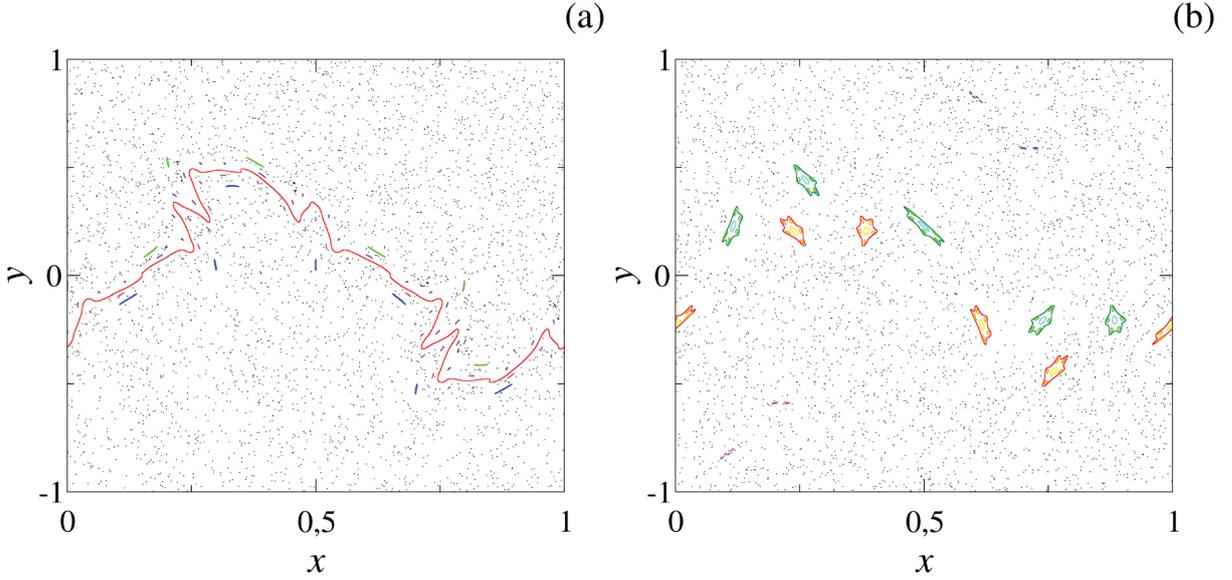


Figura 8 – Espaços de fase para o mapa padrão não *twist* para os parâmetros (a) $a = 0,8$ e $b = 0,6$, (b) $a = 0,65$ e $b = 0,65$. Em (a), observamos a solução do tipo meandro, destacada pela curva em vermelho. As soluções periódicas são indicadas pelas curvas coloridas nos dois espaços, enquanto o mar caótico é representado pelos pontos esparsos.

internas (ilhas em verde e azul claro e as ilhas em amarelo e laranja). Também há outro conjunto de ilhas gêmeas, as ilhas em rosa e em roxo na região inferior e superior do espaço de fase, respectivamente.

2.3.3 Simetria, pontos indicadores e existência da curva shearless

Um mapa M é dito ser simétrico em relação a uma transformação T_S se a relação $M = T_S^{-1}MT_S$ for satisfeita. Sendo $T_S T_S^{-1} = T_S^{-1} T_S = \mathbb{1}$, a relação de simetria pode ser escrita como $MT_S = T_S M$. Se o mapa obedecer esta relação, ele é simétrico e invariante em relação a transformação T_S , que também pode ser denominada simetria do sistema [8].

Segundo del-Castillo Negrete e Morrison, o mapa padrão não *twist* é um mapa simétrico em relação a transformação [8],

$$T_S(x, y) = \left(x \pm \frac{1}{2}, -y \right). \quad (2.32)$$

Podemos provar a propriedade de simetria do mapa substituindo as equações que o definem, equação (2.25), juntamente com a transformação (2.32) na relação $MT_S = T_S M$. Após a substituição, chegamos às relações,

$$\begin{aligned} x_n + a[1 - (y_n - b \sin(2\pi x_n))^2] \pm 1/2 &= x_n \pm 1/2 + a[1 - (-y_n - b \sin[2\pi(x_n \pm 1/2)])^2], \\ -y_n + b \sin(2\pi x_n) &= -y - b \sin[2\pi(x_n \pm 1/2)], \end{aligned} \quad (2.33)$$

onde deixamos $y_{n+1} = y_n - b \sin(2\pi x_n)$ explícito. Como $\sin[2\pi(x_n \pm 1/2)] = -\sin(2\pi x_n)$, as duas identidades se confirmam e demonstramos que o mapa é simétrico.

2.3.3.1 Linhas de simetria

Uma propriedade decorrente da simetria do sistema são as linhas de simetria, conjuntos invariantes formados pelos pontos $\mathbf{x} = (x, y)$, que formam a solução da equação $I_{0,1}\mathbf{x} = \mathbf{x}$ [8], onde $I_{0,1}$ são as involuções que compõem o mapa $M = I_1 \circ I_0$. Para o mapa padrão não *twist*,

$$M_{SNM}(x_n, y_n) = (x_n + a(1 - y_{n+1})^2, y_n - b \operatorname{sen}(2\pi x_n)), \quad (2.34)$$

as involuções $I_{0,1}$ que compõem o sistema, tal que $M_{SNM} = I_1 \circ I_0$, são [8],

$$\begin{aligned} I_0(x, y) &= (-x, y - b \operatorname{sen}(2\pi x)), \\ I_1(x, y) &= (-x + a(1 - y^2), y). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Partindo da definição das linhas de simetria, encontramos duas linhas de simetria S_i , associadas a cada involução I_i . São elas,

$$\begin{aligned} S_0 &:= \{(x, y) | x = 0\}, \\ S_1 &:= \left\{ (x, y) | x = \frac{a}{2}(1 - y^2) \right\}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Aplicando a transformação de simetria T_S nas linhas de simetria S_0 e S_1 , obtemos outras duas linhas, S_2 e S_3 , definidas por,

$$\begin{aligned} S_2 &:= \left\{ (x, y) | x = \frac{1}{2} \right\}, \\ S_3 &:= \left\{ (x, y) | x = \frac{a}{2}(1 - y^2) \pm \frac{1}{2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.37)$$

formando assim o conjunto de quatro linhas de simetria do mapa padrão não *twist*. As linhas de simetria são uma ferramenta que simplifica a procura por órbitas regulares no sistema: no lugar de fazer uma busca por soluções regulares em todo o domínio do espaço de fase (um problema bidimensional), podemos procurá-las nas linhas de simetria, reduzindo o problema para uma busca unidimensional. A posição das quatro linhas de simetria no espaço de fase está mostrada na Figura 9.

As ilhas gêmeas, discutidas na seção anterior, podem ser encontradas nas ilhas de simetria. Analisando as cadeias de período 3, presentes na região central do espaço de fase da Figura 9, as ilhas da cadeia superior interceptam as linhas S_2 e S_3 , enquanto as inferiores interceptam a linha "gêmea"⁵ S_0 e S_1 , respectivamente. Também observamos as ilhas gêmeas de período 1, uma próxima de $y = -1$, interceptada pelas linhas S_1 e S_0 e a outra próxima de $y = 1$, interceptada pelas linhas S_2 e S_3 . O mesmo é observado com as ilhas de período 2, interceptadas pelas linhas S_0 e S_2 . As linhas de simetria são uma ferramenta que facilita a identificação de órbitas

⁵ Utilizamos o termo "gêmea" pois elas estão relacionadas pela transformação de simetria T_S , da equação (2.32)

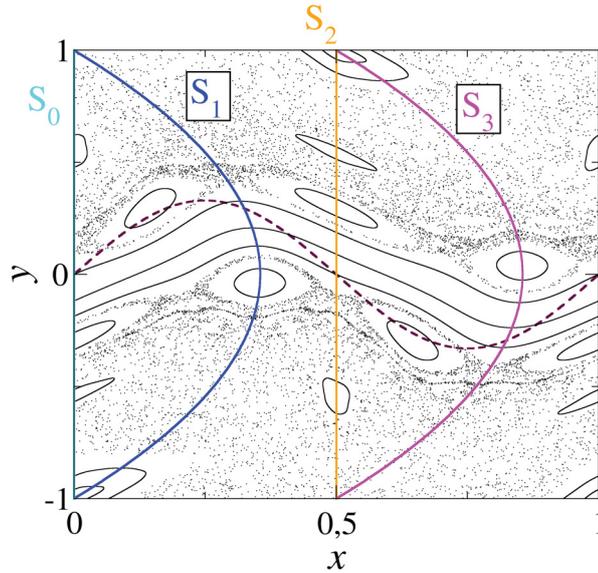


Figura 9 – Espaço de fase, linhas de simetria e curva não monotônica para o mapa padrão não twist com os parâmetros $a = 0,71$ e $b = 0,33$. As linhas de simetria, das equações (2.36) e (2.37) são as curvas ciano, azul, laranja e rosa, respectivamente. A curva tracejada indica a curva não monotônica $y = b \text{sen}(2\pi x)$, onde a condição *twist* é violada.

regulares, inclusive de ilhas gêmeas: uma ilha encontrada em S_0 ou S_1 terá a sua gêmea em S_2 e S_3 , respectivamente.

Juntamente com as linhas de simetria, também mostramos a curva não monotônica, onde a condição *twist* é violada. Observamos que ela intercepta as curvas invariantes na região central do espaço de fase e, conseqüentemente, a curva *shearless* (não destacada na figura).

2.3.3.2 Pontos indicadores e curva *shearless*

Uma vez que a condição *twist* é violada, não é possível utilizar o teorema KAM para determinar se a curva *shearless* existe ou não, como é possível determinar a existência de toros KAM para sistemas *twist*. É necessário um outro método para verificar esta existência. A determinação dos intervalos dos parâmetros a e b onde a curva *shearless* é destruída ou sofre processos de reconexão pode ser feita a partir da teoria de operadores de renormalização e do critério de resíduos de Greene [8, 10, 12].

Uma forma mais simples de determinar a existência da curva *shearless* no espaço de fase é a partir dos pontos indicadores [14], outra ferramenta baseada na simetria do sistema. O critério dos pontos indicadores parte do pressuposto que se estes pontos geram órbitas não limitadas a curva *shearless* não existe [13]. Caso a curva *shearless* exista, os pontos indicadores pertencem a ela. Para determinar se uma órbita é limitada, é verificado se ela permanece em um intervalo de y pequeno, por exemplo $y \in [-1, 1]$, durante todo tempo de iteração.

Os pontos indicadores \mathbf{z}_i são definidos como os pontos que são soluções da equação,

$$I_i \mathbf{z}_i = T_S \mathbf{z}_i, \quad i = 0, 1, \quad (2.38)$$

onde I_i são as involuções que compõem o mapa e T_S é a simetria do sistema. Para o mapa padrão não *twist*, os quatro pontos indicadores, obtidos a partir da substituição de (2.35) e (2.32) em (2.38), são,

$$\mathbf{z}_0^{(0,1)} = \left(\mp \frac{1}{4}, \mp \frac{b}{2} \right), \quad \mathbf{z}_1^{(0,1)} = \left(\frac{a}{2} \mp \frac{1}{4}, 0 \right), \quad (2.39)$$

onde os subíndice i indicam a involução utilizada para calcular o ponto \mathbf{z}_i e os índices 0 e 1 referem-se aos operadores superior e inferior, respectivamente.

A partir dos pontos indicadores, podemos determinar se a curva *shearless* existe para um par de parâmetros (a, b) específico. Baseando-se no método proposto por Shinohara e Aizawa [13], podemos construir um espaço de parâmetros $a \times b$ que nos mostre quando a curva *shearless* existe e para quais parâmetros ela já foi destruída. Definindo dois intervalos para a e b , comumente $a, b \in [0, 1]$, nós calculamos os quatro pontos indicadores em (2.39) e evoluímos todos por um tempo de iteração de $n = 10^6$ e estabelecemos $|y| < 10$ como limite para que a curva *shearless* seja considerada existente. Se todos os pontos indicadores gerarem soluções que permanecem neste intervalo durante toda a iteração, a curva *shearless* existe e marcamos o ponto dos respectivos parâmetros (a, b) no espaço de parâmetros. Caso alguma solução escape desse limite, a curva não existe e deixamos o ponto em branco. Na Figura 10, apresentamos o espaço de parâmetro para a existência da curva *shearless* e dois exemplos de espaço de fase para demonstrar a localização dos pontos indicadores.

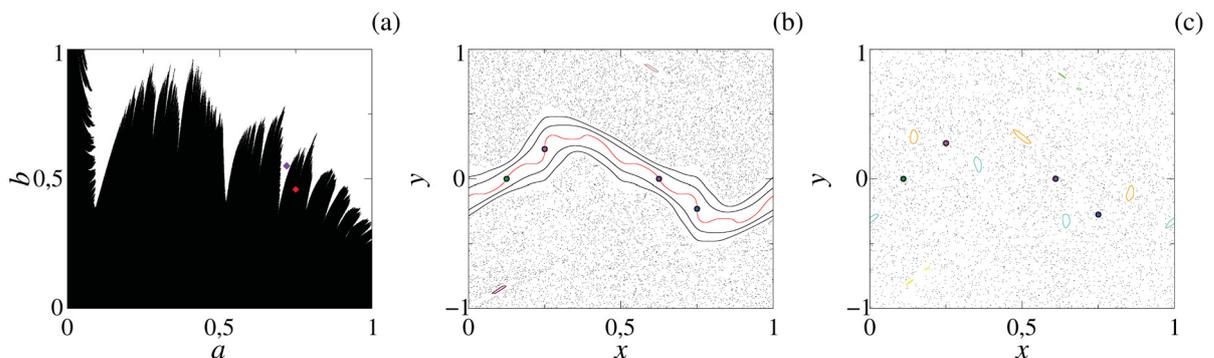


Figura 10 – Análise da curva *shearless*. (a) Espaço de parâmetros para a existência da curva *shearless*. Os pontos pretos em (a) indicam pares de parâmetros (a, b) onde há curva *shearless*, enquanto os pontos em branco indicam parâmetros para os quais a curva não existe. Em (b) e (c) temos os espaços de fase correspondentes aos parâmetros dos pontos marcados em vermelho ($a = 0,75$ e $b = 0,46$) e roxo ($a = 0,72$ e $b = 0,55$) no espaço de parâmetro em (a), respectivamente. Em (b), observamos um espaço de fase com a curva *shearless* (curva em vermelho) em oposição ao caso apresentado em (c), onde não há a curva. Os pontos coloridos em (b) e (c) indicam a posição dos quatro pontos indicadores apresentados na equação (2.39).

No espaço de parâmetro apresentado na Figura 10 (a), observamos a região em preto, indicando os pontos onde a curva *shearless* existe e também a região em branco, onde a existência da curva *shearless* não é identificada. A fronteira limite entre as duas regiões não é simples ou suave, ela apresenta um estrutura complicada de diversas incursões de uma região na outra.

De fato, essa fronteira é fractal, apresenta uma dimensão fracionária e autossimilaridade⁶. Um estudo descritivo e detalhado da fractabilidade da fronteira da região em preto pode ser conferido na Referência [38].

Para exemplificar a utilização do espaço de parâmetros e para demonstrar a posição dos pontos indicadores, escolhemos dois pares (a, b) , um na região onde existe a curva *shearless* e outro onde a curva já foi destruída, e construímos o espaço de fase. Na Figura 10 (b), temos o espaço de fase correspondente ao ponto em vermelho na Figura 10 (a), onde os parâmetros são $(a, b) = (0,75; 0,46)$. Neste espaço, vemos a coexistência de caos e regularidade e a curva *shearless* em vermelho. Os quatro pontos indicadores (2.39) estão representados pelos pontos coloridos e verificamos que todos estão sob a curva *shearless*. Para o ponto em roxo na Figura 10 (a), onde $(a, b) = (0,72; 0,55)$, a curva *shearless* não existe, o que é verificado no espaço de fase no painel (c). Os pontos indicadores, nesse caso, pertencem ao mar caótico e soluções geradas por eles irão para regiões de altos valores de $|y|$, apresentando um comportamento não limitado.

2.3.4 Transporte de soluções caóticas

Como vimos, o espaço de fase de sistemas Hamiltonianos perturbados é caracterizado pela coexistência de caos e regularidade. As trajetórias no mar caótico podem explorar toda a região disponível a elas. Entretanto, elas podem levar um tempo relativamente longo para isto, uma vez que podem existir barreiras a este movimento. De fato, podemos identificar duas barreiras que podem dividir o mar caótico: as barreiras totais e as barreiras parciais. As barreiras totais são curvas invariantes no espaço de fase, toros irracionais que sobrevivem a perturbação. Já as barreiras parciais são formadas por estruturas que foram destruídas com a perturbação, mas apresentam um efeito limite a movimentação de soluções caóticas.

O estudo sobre a movimentação de um grupo de soluções caóticas pelo espaço de fase e o tempo que estas soluções levam para sair de um ponto e chegar a outro está englobado no estudo de transporte no sistema [39]. A análise do transporte em sistemas Hamiltonianos tem aplicações práticas como a previsão dos tempos de confinamentos para plasmas em tokamaks [40], e cálculos da perda de partículas em plasmas e aceleradores, das taxas de reações químicas, da taxa de aquecimento das ondas em plasmas, entre outros exemplos [41].

No mapa padrão não *twist*, a curva *shearless* atua como uma barreira total no espaço de fase [8]. Quando todas as barreiras totais são destruídas, é possível que as cadeias de ilhas gêmeas atuem como uma barreira parcial para o sistema [15]. Esta parcialidade na barreira faz com que algumas trajetórias consigam atravessar o espaço de fase em um curto intervalo de tempo, enquanto outras levam um intervalo comparativamente maior.

A existência de barreiras totais é indicada pelo espaço de parâmetros da Figura 10, uma vez que, onde há curva *shearless* (região preta) há no mínimo uma barreira total de transporte. Mas o espaço de parâmetros não nos traz informações sobre barreiras parciais ou sobre o

⁶ Sua estrutura se repete em sucessivas ampliações na região

transporte das trajetórias em si. Para isso, nós utilizamos o conceito de transmissividade. A transmissividade T_n é definida como a fração das trajetórias caóticas que conseguem atravessar o espaço de fase, dentro de um certo tempo, no nosso caso dentro de um número n de iteradas [37]. Como as barreiras no SNM são curvas horizontais, a transmissividade T_n é calculada para o transporte no sentido vertical. Para o cálculo, um grande número de condições iniciais é disposta na região inferior do espaço de fase, e então todas são iteradas, até o valor definido para a iterada final, e então é contado quantas trajetórias conseguiram chegar a parte superior do espaço de fase. De forma matemática, a transmissividade é definida por,

$$T_n = \frac{N(n)}{N_T}, \quad (2.40)$$

onde N_T é o número de condições escolhidas e $N(n)$ é o número de órbitas que atravessaram o espaço de fase em um tempo de iteração n .

Para exemplificar, escolhemos $N_T = 10^6$ condições iniciais na linha $y = -1$ e iteramos todas até dois tempos finais de iteração: $n = 100$ e $n = 500$. Então, contamos quantas trajetórias chegam a $y = +1$. Escolhemos o parâmetro $b = 0,6$ e calculamos a transmissividade para cada valor de a no intervalo $a \in [0,803; 0,808]$. O resultado é apresentado na Figura 11 (a).

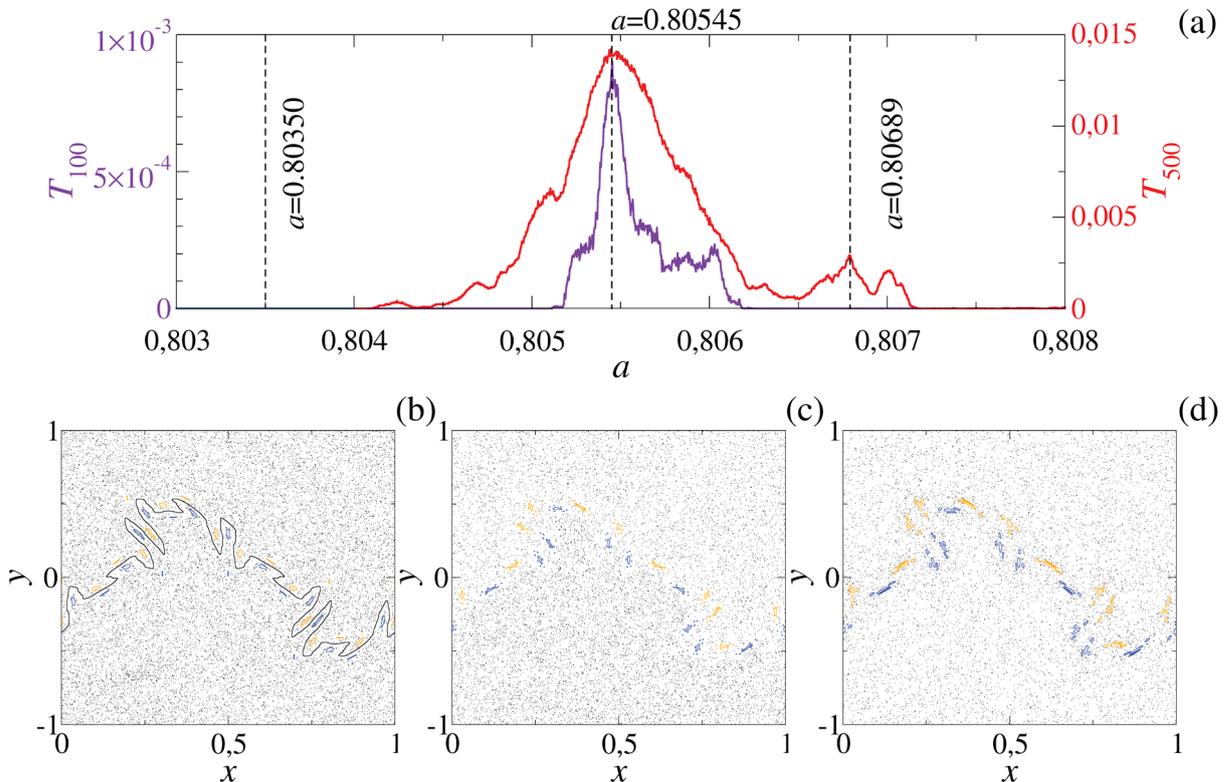


Figura 11 – (a) Transmissividade das órbitas caóticas, em função de a para dois tempos finais de iteração $n = 100$ (curva em roxo) e $n = 500$ (curva vermelha), para $b = 0,6$. O eixo das ordenadas correspondente ao tempo $n = 100$ ($n = 500$) está a esquerda (direita) do gráfico. Identificamos três casos em (a) e construímos os respectivos espaços de parâmetros: (b) transporte nulo - barreira total ($a = 0,80350$), (c) transporte alto ($a = 0,80545$) e (d) transporte apenas para um tempo de iteração mais longo - barreira parcial ($a = 0,80680$).

Observando a Figura 11 (a), conseguimos identificar pontos onde a transmissividade é nula para os dois valores de iteradas finais. Nestes casos, temos a presença de barreiras totais, como mostrado no espaço de fase da Figura 11 (b), para os parâmetros $(a, b) = (0,80350; 0,6)$. Também é possível identificar um máximo na curva de transmissividade, sugerindo uma situação de maior transporte no espaço de fase. Este caso de alto transporte ocorre, para os dois tempos de iteração, para os parâmetros $a = 0,80545$, $b = 0,6$, e o espaço de fase para este par de parâmetros está na Figura 11 (c).

Por último, temos o caso onde há uma diferença para a curva $n = 100$ e $n = 500$, o ponto $a = 0,80680$, onde a curva para o valor maior de iterada apresenta um pico enquanto o caso com o menor valor indica um transporte nulo. Este é o caso onde a barreira existente no espaço de fase é parcial, e é necessário um tempo maior para que as soluções caóticas atravessem o espaço de fase. A intensidade do efeito da barreira pode ser explicada pela proximidade dos pontos hiperbólicos de cada cadeia e pelas intersecções das variedades relacionadas a eles [15].

Comparando os dois espaços de fase sem barreiras de transporte, Figuras 11 (c) e (d), não há uma diferença significativa que indique a presença de barreiras parciais no último caso. Ambos espaços de fase são compostos apenas por mar caótico e duas cadeias de ilhas gêmeas. Dessa forma, temos que a transmissividade é uma ferramenta para quantificar o transporte de trajetórias caóticas no espaço de fase, algo que não pode ser analisado quantitativamente e qualitativamente pelos espaços de fase.

Na Figura 11 (a) utilizamos um valor de b fixo e um pequeno intervalo de a . A transmissividade para todo ponto (a, b) nos intervalos $a, b \in [0, 1]$ é apresentada no espaço de parâmetros da figura 5 da Referência [42].

Neste exemplo de transmissividade, calculamos apenas o sentido "para cima" do transporte: as condições iniciais partem de $y = -1$ e contamos quantas chegam a $y = +1$. É possível também calcular o sentido oposto, partindo de y positivo e analisando a sua chegada em y negativo. Entretanto, o resultado é o mesmo. Esta igualdade deve-se a simetria presente no mapa padrão não *twist*.

Os resultados apresentados de forma breve nesse capítulo levam em conta alguns fatores sobre o sistema. O sistema é conservativo, perturbado (para $b \neq 0$) e simétrico. Caso alguma dessas condições mude, os resultados podem ser diferentes. Nos próximos capítulos, apresentaremos alguns mapas derivados do mapa padrão não *twist*, estudaremos as suas propriedades e como as modificações no mapa podem afetar as características *twist* bem estabelecidas.

3 MAPA PADRÃO NÃO TWIST ESTENDIDO: QUEBRA DE SIMETRIA E TRANSPORTE DIRECIONADO

O mapa padrão não *twist* é um mapa inerentemente simétrico e esta simetria pode ser preservada ou quebrada com a adição de uma nova perturbação. Neste capítulo, apresentamos o mapa padrão não *twist* estendido que apresenta duas perturbações distintas ressonantes, construído pela inclusão de uma perturbação no mapa não *twist*. Aqui, estudamos as consequências desta nova perturbação tanto no espaço de fase quanto no transporte de trajetórias caóticas. Também mostramos um novo método para determinar a existência de barreiras de transporte no espaço de fase. Os resultados apresentados neste capítulo podem ser encontrados no artigo "Ratchet current in nontwist Hamiltonian systems", publicado em 23 de setembro de 2020, na revista *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*.

3.1 A EXTENSÃO DO MAPA PADRÃO NÃO TWIST

O mapa padrão não *twist* estendido foi proposto por Portela e seus colaboradores como uma expansão local ao redor da curva *shearless* de equilíbrio para um mapa não *twist* que descreve as linhas de campo magnético em um dispositivo de plasma toroidal com um limitador ergódico magnético [16, 43]. O mapa padrão não *twist* estendido (*Extended Standard Nontwist Mapa* - ESNM) é definido pelas equações [16],

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= y_n - b \operatorname{sen}(2\pi x_n) - c \operatorname{sen}(2\pi m x_n), \\x_{n+1} &= x_n + a(1 - y_{n+1}^2), \quad \text{mod } 1,\end{aligned}\tag{3.1}$$

onde $x \in [0, 1]$, $y \in \mathbb{R}$, a, b e c são parâmetros reais e m é um número inteiro. O parâmetro a , assim como no caso do mapa padrão não *twist*, está relacionado com o perfil do número de rotação, e os parâmetros b e c são amplitudes de perturbações distintas. Pelo ponto de vista aplicado, o termo $b \operatorname{sen}(2\pi x_n)$ corresponde aos efeitos toroidais do *tokamak* enquanto o termo adicional, $c \operatorname{sen}(2\pi m x_n)$, é consequência do limitador ergódico [16]. O parâmetro m é um fator geométrico e corresponde ao número de pares de segmentos de anel de corrente toroidal do limitador ergódico [16, 32], estando assim relacionando aos modos de ressonância do sistema [16, 44]. Caso $c = 0$, retornamos ao mapa padrão não *twist*, apresentado e discutido no capítulo anterior. O mapa (3.1) também é denominado mapa padrão não *twist* de duas frequências, nomenclatura utilizada por Wurm e Martini em seu trabalho sobre simetria e quebra de barreiras *shearless* neste mapa [43].

O mapa estendido, definido pelas equações (3.1), é um mapa conservativo que viola a condição *twist* [43]. Podemos provar calculando o determinante da matriz Jacobiana do mapa e aplicando a condição *twist* (2.23) às equações (3.1), assim como feito para o mapa padrão não

twist na seção 2.3. Para o mapa estendido, temos como determinante da matriz Jacobiana,

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} \\ -2ay_{n+1} & 1 - 2ay_{n+1} \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} \end{vmatrix},$$

$$|J| = 1 - 2ay_n + 1 \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} - \left(-2ay_{n+1} \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} \right),$$

$$|J| = 1,$$

confirmando a conservação da área para todo espaço de fase. Pela condição *twist*, $\left| \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \right| \neq 0$, temos que,

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} = -2a[y_n - b \operatorname{sen}(2\pi x_n) - c \operatorname{sen}(2\pi m x_n)], \quad (3.2)$$

e o mapa viola a condição *twist* na curva não monotônica $y_n = b \operatorname{sen}(2\pi x_n) + c \operatorname{sen}(2\pi m x_n)$.

3.2 PROPRIEDADES DE SIMETRIA E O ESPAÇO DE FASE PARA O MAPA ESTENDIDO

O mapa padrão não *twist* estendido é um mapa simétrico caso a condição $T_S M = M T_S$ seja válida para todo espaço de fase. Sendo $M = M_{ESNM}$, definido pelas equações (3.1), e T_S é a transformação de simetria do mapa padrão não *twist*, apresentada na equação (2.32), temos que a relação $T_S M = M T_S$ resulta em,

$$\begin{aligned} (-y) - b \operatorname{sen}[2\pi(x \pm 1/2)] - c \operatorname{sen}[2\pi m(x \pm 1/2)] &= -[y - b \operatorname{sen}(2\pi x) - c \operatorname{sen}(2\pi m x)], \\ (x \pm 1/2) + a(1 - y_{n+1}^2) &= [x + a(1 - y_{n+1}^2)] \pm 1/2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Como visto no capítulo anterior, o termo $\operatorname{sen}[2\pi(x \pm 1/2)]$ é equivalente a $-\operatorname{sen}(2\pi x)$. O termo, $\operatorname{sen}[2\pi m(x \pm 1/2)]$ pode ser desenvolvido como,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}[2\pi m(x \pm 1/2)] &= \operatorname{sen}(2\pi m x \pm \pi m) = \operatorname{sen}(2\pi m x) \cos(\pi m) \pm \cos(2\pi m x) \operatorname{sen}(\pi m) \\ \operatorname{sen}[2\pi m(x \pm 1/2)] &= (-1)^m \operatorname{sen}(2\pi m x). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Logo, a relação (3.3) se torna,

$$\begin{aligned} -y + b \operatorname{sen}[2\pi(x \pm 1/2)] + (-1)^{m+1} c \operatorname{sen}(2\pi m x) &= -y + b \operatorname{sen}(2\pi x) + c \operatorname{sen}(2\pi m x), \\ x + a(1 - y_{n+1}^2) \pm 1/2 &= x + a(1 - y_{n+1}^2) \pm 1/2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

e podemos concluir que a primeira igualdade só é verdadeira para valores ímpares de m . Sendo assim, temos que o mapa é simétrico apenas para valores de m que podem ser escritos como $m = 2k + 1$, com $k = 0, 1, 2, \dots$. Para valores pares de m , o sistema tem a sua simetria destruída

e ferramentas que aplicam a transformação de simetria T_S não são válidas.

Assim como para o SNM, o mapa estendido também pode ser escrito como uma composição de duas involuções [43], $M_{ESNM} = I_1 \circ I_0$, onde

$$\begin{aligned} I_0(x, y) &= (-x, y - b \operatorname{sen}(2\pi x) - c \operatorname{sen}(2\pi m x)), \\ I_1(x, y) &= (-x + a(1 - y^2), y). \end{aligned} \quad (3.6)$$

As involuções satisfazem as relações $M_{ESNM}^{-1} = I_i^{-1} M_{ESNM} I_i$ e $I_i^2 = \mathbb{1}$, para $i = 0, 1$, onde $\mathbb{1}$ é a identidade [43].

Como mencionado, as linhas de simetria são conjuntos unidimensionais invariantes resultantes da relação $I_{0,1} \mathbf{x} = \mathbf{x}$. Calculando as linhas de simetria para o mapa (3.1), temos,

$$\begin{aligned} S_0 &:= \{(x, y) | x = 0\}, \\ S_1 &:= \left\{ (x, y) | x = \frac{a(1 - y^2)}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Aplicando a transformação de simetria $T_S = (x \pm 1/2, -y)$, encontramos as outras duas linhas de simetria,

$$\begin{aligned} S_2 &:= \left\{ (x, y) | x = \frac{1}{2} \right\}, \\ S_3 &:= \left\{ (x, y) | x = \frac{a(1 - y^2)}{2} + \frac{1}{2} \right\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Para compreender as consequências de quebra de simetria no espaço de fase, visualizar a diferença de um caso simétrico e não simétrico e entender como isso se relaciona com as linhas de simetria, construímos quatro espaços de fase, juntamente com as linhas de simetria, para $a = 0,805$, $b = 0,597$, $c = 0,005$ e diferentes valores de m . Os espaços de fase são apresentados na Figura 12.

Pelos espaços de fase apresentados na Figura 12, observamos duas cadeias de ilhas, uma em roxo e outra em verde, imersas em um mar caótico. Também podemos observar as quatro linhas de simetria S_0 , S_1 , S_2 e S_3 em ciano, azul, laranja e rosa, respectivamente. Para analisar cada caso em específico, observamos as ilhas que estão nas linhas de simetria S_1 e S_3 , destacadas pelo retângulo em preto nos espaços de fase. Para melhor visualização, fazemos uma ampliação ao redor de cada ilha. Para $m = 1$ e $m = 3$, Figuras 12 (a)-(c) e (g)-(i), respectivamente, vemos que as cadeias de ilhas gêmeas continuam iguais. As ilhas são espelhadas em relação a y , mas são idênticas. Este caso não é observado para $m = 2$ e $m = 4$, Figuras 12 (d)-(f) e (j)-(l), respectivamente. Pelas ampliações, vemos que para $m = 2$ a ilha em roxo é menor e sua estrutura interna está passando por um processo de bifurcação, enquanto a ilha em verde é maior e o processo de bifurcação já ocorreu. Uma situação semelhante ocorre para $m = 4$, onde as ilhas

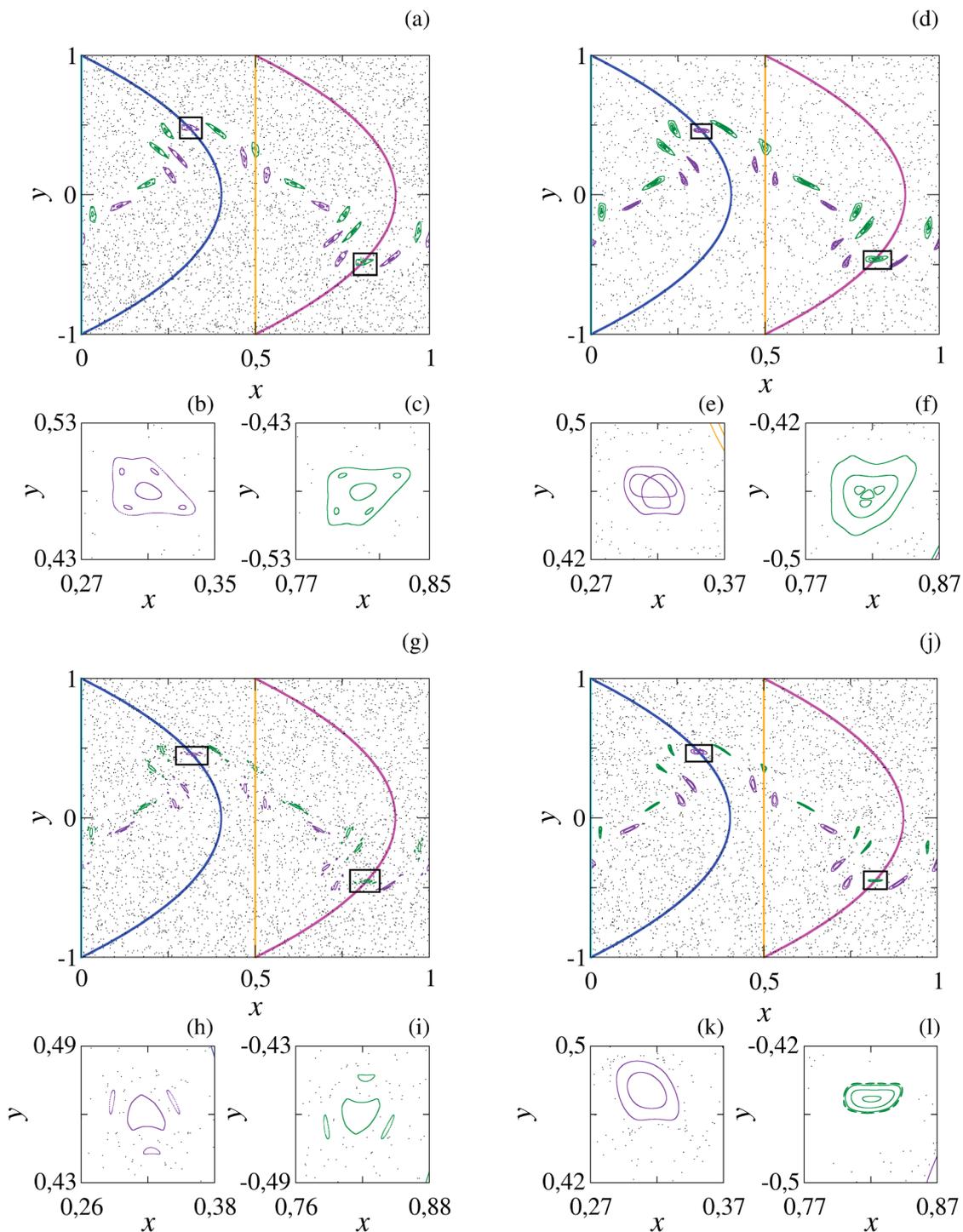


Figura 12 – Espaços de fase para o mapa padrão não *twist* estendido com os parâmetros $(a, b, c) = (0,805; 0,597; 0,005)$ e diferentes valores de m : (a)-(c) $m = 1$, (d)-(f) $m = 2$, (g)-(i) $m = 3$ e (j)-(l) $m = 4$. Todos os espaços de fase são compostos por mar caótico (pontos em preto) e duas cadeias de ilhas, uma indicada em roxo e outra em verde. Para cada valor de m , escolhemos duas ilhas, uma de cada cadeia, e fizemos uma ampliação ao redor dela. Cada ilha escolhida é destacada pelos retângulos em preto no espaço de fase e as respectivas ampliações são mostradas nos painéis inferiores de cada caso. As linhas de simetria para o caso m ímpar S_0, S_1, S_2 e S_3 são indicadas pelas curvas em ciano, azul, laranja e rosa, respectivamente.

são de tamanho diferentes e a sua estrutura é distinta: há apenas curvas fechadas em roxo e há uma cadeia de ilhas de período maior ao redor das ilhas em verde. Com isso, podemos afirmar

que o cenário de ilhas gêmeas é modificado pela quebra de simetria do sistema quando m assume um valor par, uma vez que as duas cadeias existem mas são diferentes. De fato, à medida que os valores são modificados, as cadeias de ilhas podem ser destruídas em pontos distintos, algo que não ocorre no sistema simétrico (m ímpar e SNM).

3.3 ESPAÇO DE PARÂMETROS PARA O MAPA ESTENDIDO

Como discutido na seção 2.3.3 do capítulo anterior, a partir das involuções e da transformação de simetria, é possível encontrar os pontos indicadores que irão indicar a existência ou ausência da curva *shearless*. Para m ímpar, o mapa padrão não *twist* estendido é simétrico, é possível calcular os pontos indicadores e estudar a existência da curva *shearless*. Entretanto, para m par o mapa perde sua simetria e a transformação de simetria assim como os pontos indicadores não são válidos. Sendo assim, precisamos de outra estratégia para determinar a presença de barreiras no espaço de fase. Nesta seção, discutiremos a construção dos espaços de parâmetros e os espaços em si para as duas situações: m ímpar e m par.

3.3.1 Espaço de parâmetro para m ímpar

Sendo a transformação de simetria válida para o mapa simétrico, podemos repetir o procedimento apresentado no capítulo anterior para o mapa padrão não *twist* e calcular os pontos indicadores para o mapa estendido. Lembrando que os pontos indicadores \mathbf{z} são soluções da equação $I_i \mathbf{z}_i = T_S \mathbf{z}_i$, onde I_i são as involuções do mapa e T_S é a transformação de simetria. Utilizando as involuções apresentadas nas equações (3.6) e a transformação de simetria em (2.32), encontramos os quatro pontos indicadores para o mapa padrão não *twist* estendido, apresentados na equação (3.9),

$$\mathbf{z}_0^{(0,1)} = \left(\mp \frac{1}{4}, \mp \frac{b}{2} + (-1)^{\frac{m \pm 1}{2}} \frac{c}{2} \right), \quad \mathbf{z}_1^{(0,1)} = \left(\frac{a}{2} \mp \frac{1}{4}, 0 \right). \quad (3.9)$$

Com o conjunto de pontos indicadores (3.9), podemos utilizar o mesmo método descrito na seção 2.3.3 para determinar o espaço de parâmetros para a existência da curva *shearless*. Para cada ponto (a, b) no espaço de parâmetros, iteramos os 4 pontos indicadores por um tempo de iteração $n = 10^6$ e verificamos se todos ficam contidos na região $|y| < 10$ no espaço de fase. Se os quatro pontos indicadores geram soluções que permanecem confinadas até o fim da iteração, consideramos que a curva *shearless* existe e marcamos um ponto no espaço $a \times b$, caso contrário, a curva foi destruída e deixamos o ponto em branco. O resultado para $m = 1, m = 3$, e para três diferentes valores de amplitude c , é apresentado na Figura 13.

Para $c = 0,0$, retomamos ao mapa padrão não *twist* e o espaço de parâmetro para a existência da curva *shearless* é o espaço mostrado na Figura 10 (a). Na Figura 13, focamos na região $a \in [0,8; 1]$ uma vez que os espaços de fase que apresentamos anteriormente (Figura 12) estão nesta região.

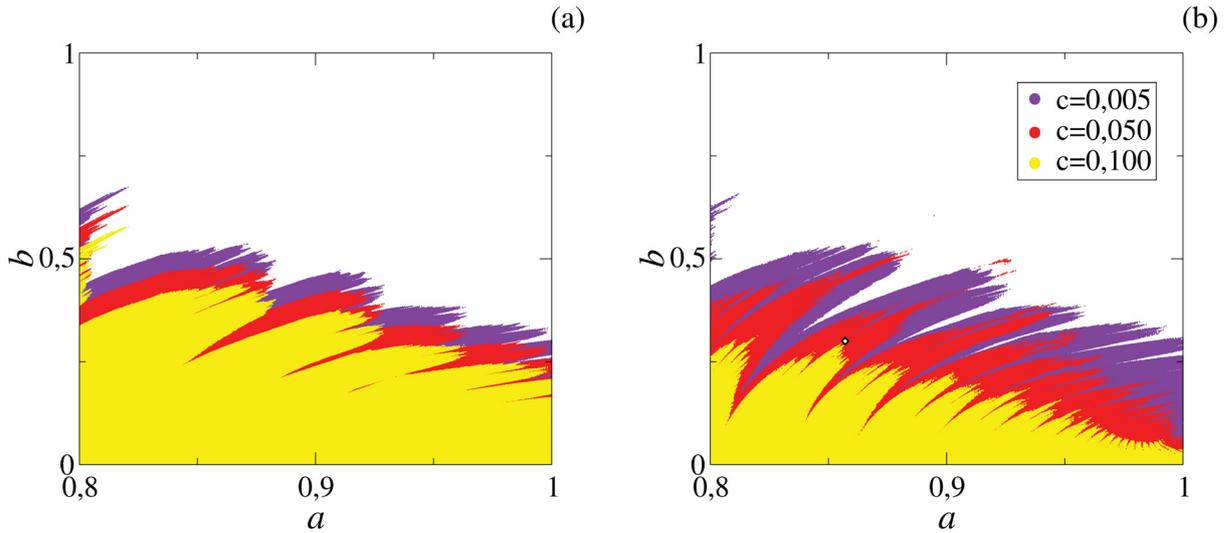


Figura 13 – Espaço de parâmetros para a existência da curva *shearless* para os casos (a) $m = 1$ e (b) $m = 3$, calculados a partir da análise das soluções geradas pelos pontos indicadores em (3.9). Os pontos coloridos indicam a existência da curva *shearless*, enquanto a região branca representa parâmetros onde a curva não existe. Os espaços para diferentes valores da amplitude c estão representados por diferentes cores, indicadas na legenda. Nesta figura, eles estão sobrepostos.

De forma geral, ao observar os espaços da Figura 13, à medida que o valor da amplitude c aumenta, a região do espaço de parâmetros onde a curva *shearless* existe (região colorida) diminui. Sendo assim, podemos afirmar que uma maior amplitude de perturbação c faz com que as curvas invariantes no espaço de fase sejam destruídas antes, isto é, para valores menores de b .

Ao comparar a forma da região colorida para os dois casos de m , observamos que para $m = 1$ a forma da região onde existe a curva *shearless* é semelhante para todos os valores de c escolhidos. Já para $m = 3$, vemos que as formas são distintas e, à medida que o valores de c aumentam, a estrutura se torna menos trivial. Mas, independente da aparência, um aumento na amplitude c sempre antecipa a quebra da curva *shearless*.

Assim como apresentamos a posição dos pontos indicadores e da curva *shearless* para o mapa padrão não *twist*, mostramos a seguir para o mapa estendido. Escolhemos os parâmetros $(a, b, m) = (0,857; 0,3; 3)$, indicado pelo ponto na Figura 13 (c), construímos o espaço de fase e calculamos os pontos indicadores para os três valores de c . O resultado é apresentado da Figura 14.

Nos espaços de fase das Figuras 14 (a) e (b), observamos as barreiras de transporte e a curva *shearless*, esta última indicada em vermelho. Confirmamos que os quatro pontos indicadores pertencem a curva *shearless* e por isso podem ser usados como indicadores para a sua existência. Já para o espaço de fase na Figura 14 (c), a curva *shearless* é destruída e os pontos indicadores pertencem ao mar caótico. Há uma concentração de pontos e uma estrutura de ilhas gêmeas próxima da região que a curva *shearless* ocupava. Possivelmente é uma consequência do seu desaparecimento.

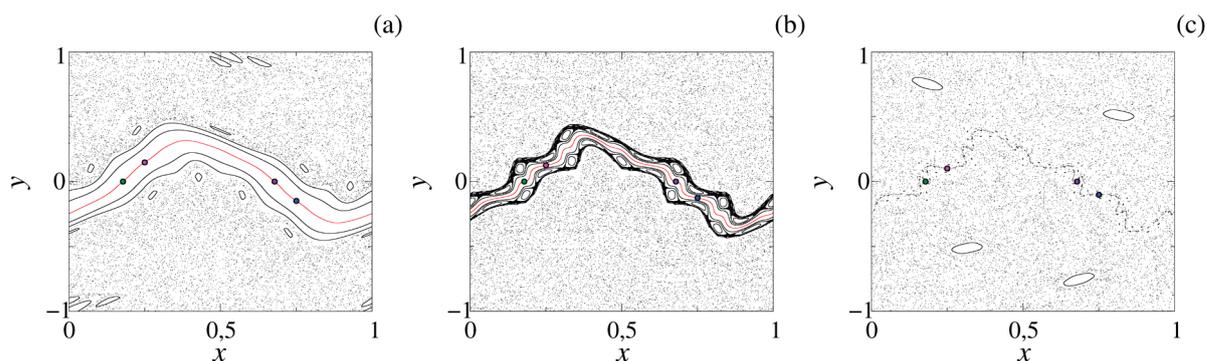


Figura 14 – Espaços de fase para o ponto $(a, b, m) = (0,857; 0,3; 3)$, indicado na Figura 13 (b), para os três valores de c estudados: (a) $c = 0,005$, (b) $c = 0,050$ e (c) $c = 0,100$. Os pontos coloridos são os pontos indicadores das equações (3.9) e a curva *shearless* está indicada pela curva em vermelho.

3.3.2 Espaço de parâmetro para m par

Uma vez que o mapa padrão não *twist* estendido é não simétrico para valores pares de m , precisamos de outra estratégia para determinar a presença de barreiras no espaço de fase, uma vez que os pontos indicadores não são válidos. O método que propomos é baseado na construção das bacias de escape. Uma bacia de escape é definida por um conjunto de condições iniciais no espaço de fase que geram trajetórias que escapam por uma saída específica pré-estabelecida. As saídas que escolhemos são a saída **A**, definida pela linha $y = 1$ e a saída **B**, representado por $y = -1$. Para calcular as bacias de escape, dispomos uma malha de 10000×20000 condições iniciais, uniformemente distribuídas no domínio $x \in [0, 1]$ e $y \in [-1, 1]$. Todas as condições são iteradas até um tempo $\tau = 1000$ e, durante a evolução temporal, observamos se as trajetórias escapam pelas saídas **A** ou **B**, e então marcamos no espaço de fase, a condição inicial com uma cor específica relacionada a saída. Na figura abaixo (Figura 15), temos que se a trajetória atravessa a linha $y = 1$ ($y = -1$), a condição inicial geradora dessa trajetória é marcada pela cor roxa (laranja). Se a trajetória não escapar por nenhuma das duas saídas até o tempo τ de iteração final, a condição inicial é deixada em branco. Este último caso representa as órbitas periódicas (ilhas) e quase periódicas (curva *shearless* e toros irracionais).

Na Figura 15 (a), observamos uma estrutura central branca, representando pontos que não escapam por nenhuma das duas saídas durante o tempo de iteração. Estas regiões indicam a presença de barreiras no espaço de fase: curvas invariantes e, dentre elas, a curva *shearless*. Estas regiões já não são encontradas em (b), onde a barreira total não existe mais.

Para identificar a presença de barreiras totais no espaço de fase, a partir das bacias de escape, nós realizamos o procedimento de dividir o espaço de fase em caixas. Ao dispor estas caixas sobre as bacias de escape, podemos observar algumas configurações de combinações de cores possíveis dentro das caixas. Observando as bacias de escape da Figura 15, temos que a caixa pode ter as seguintes configuração:

A - Pontos roxos e brancos.

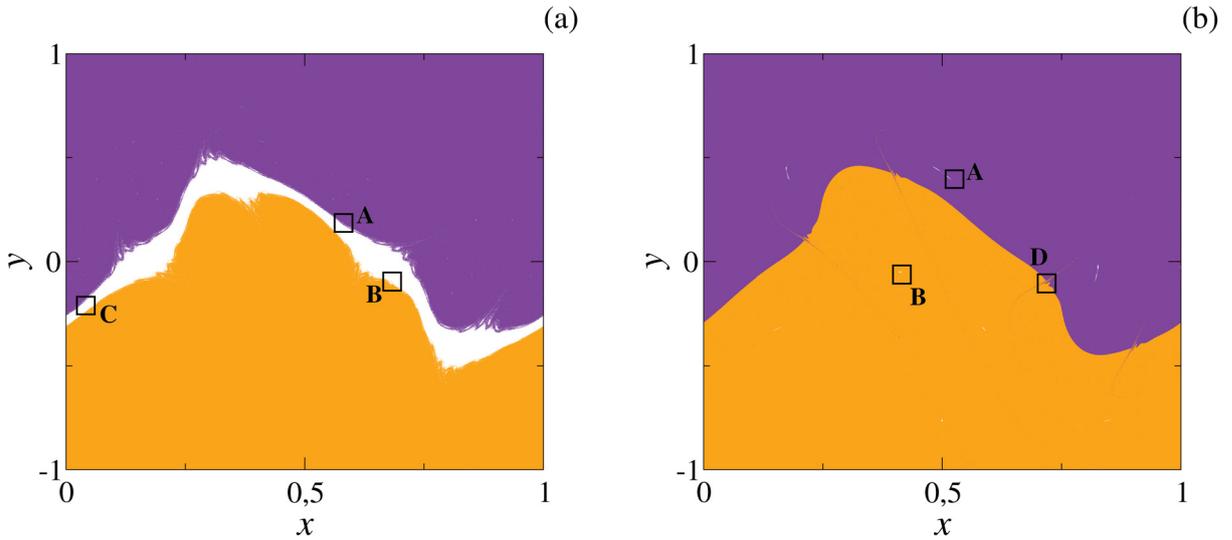


Figura 15 – Exemplos de bacias de escape para o mapa padrão não *twist* estendido. Os pontos roxos (laranjas) são condições iniciais cuja trajetória escapa pela linha $y = 1$ ($y = -1$) dentro do tempo de iteração $n = 1000$. Os pontos em branco são condições iniciais que geram trajetórias que não escapam durante o tempo de iteração, uma vez que representam soluções quase periódicas e periódicas. Os parâmetros utilizados para a construção das bacias são $a = 0,827$, $c = 0,005$ e $m = 2$, para os dois casos, e (a) $b = 0,48$ e (b) $b = 0,53$.

B - Pontos laranjas e brancos.

C - Pontos roxos, laranjas e brancos.

D - Pontos roxos e laranjas.

As configurações A, B e C podem ser encontradas no caso onde a barreira existe e também onde a barreira já foi destruída. O caso C não está indicado na Figura 15 (b), mas pode existir casos onde a caixa englobe a um pedaço de uma ilha (pontos brancos) e condições iniciais que gerem órbitas que escapam pelas duas saídas. Já o caso D, onde apenas pontos roxos e laranjas existem dentro do caixa, ocorre apenas no caso onde a barreira já foi destruída.

Partindo disso, podemos estabelecer o método para a construção do espaço de parâmetros para existência de barreiras de transporte no espaço de fase. É importante ressaltar que não temos como confirmar que a barreira identificada é a curva *shearless*, uma vez que não há certeza que a última barreira destruída em um sistema não *twist* é a curva *shearless* [45]. Por isso, dizemos que este método estima a existência de barreiras no espaço de fase, e que elas não são necessariamente uma curva *shearless*.

Para construir este espaço de parâmetros para a existência de barreiras totais, construímos as bacias de escape para cada ponto (a, b) , de forma idêntica a apresentada para a construção das Figuras 15. Então, distribuímos uniformemente um número $N_{cx} = 200 \times 400$ de caixas sobre as bacias e analisamos todas as caixas, em busca da configuração D. Caso essa configuração não seja encontrada, nós consideramos que uma barreira existe e marcamos o ponto (a, b) do espaço de parâmetros; caso alguma caixa apresente apenas pontos laranjas e roxos (configuração D),

temos que todas as barreiras foram destruídas e deixamos o ponto (a, b) em branco. Os espaços de parâmetros calculados a partir desse método, para $m = 2$ e $m = 4$, são mostrados na Figura 16.

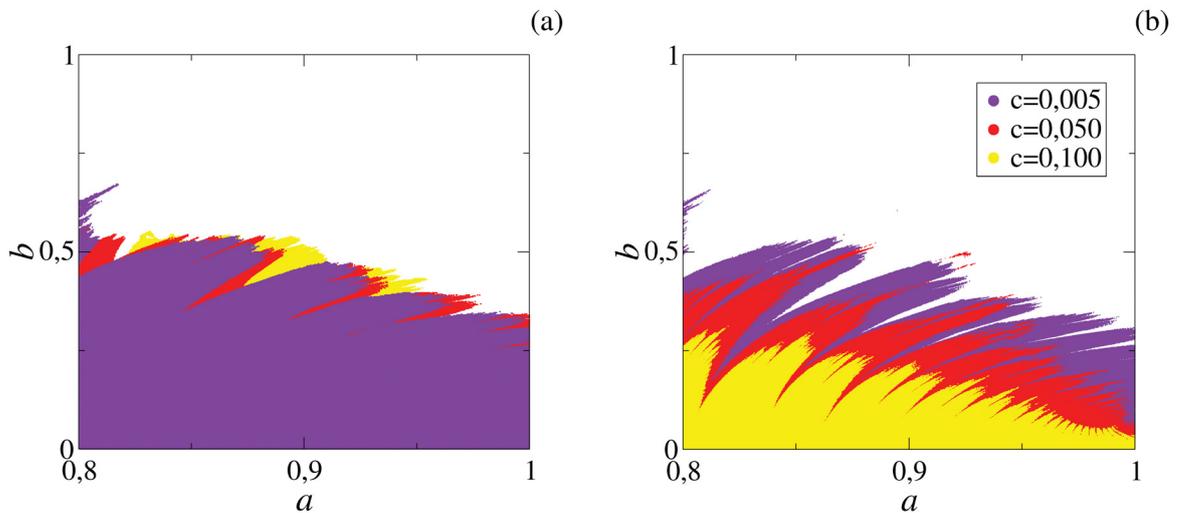


Figura 16 – Espaços de parâmetros para a existência de barreiras totais no espaço de fase, calculados pelo método baseado nas barreiras de escape, para o caso não simétrico (a) $m = 2$ e (b) $m = 4$. Os valores de c são indicados pelas cores apresentadas na legenda. Os pontos coloridos indicam os pares de parâmetros para os quais ao menos uma barreira de transporte existe no espaço de fase.

Observando estes espaços de parâmetros, vemos que um aumento na amplitude c da perturbação não implica em uma diminuição da região onde barreiras totais existem. De fato, para o caso $m = 2$, à medida que o valor de c aumenta, a região colorida tem uma área maior, o oposto observado para os casos de m ímpar. Para facilitar o entendimento deste resultado, nós mudamos a ordem de sobreposição dos espaços de parâmetros para diferentes c .

Para $m = 4$, o cenário é semelhante ao observado para $m = 3$, a área colorida reduz significativamente com o aumento de c e a forma dessa região não é simples ou trivial. De fato, para $c = 0,050$, podemos observar "buracos" na região vermelha, o que faz com que o espaço de parâmetros não apresente mais uma fronteira única entre a região que indica a existência de barreiras com a região que representa a quebra das curvas invariantes.

Para resumir a ação de c e m na preservação das barreiras de transporte no espaço de fase, construímos uma tabela com a área relativa das regiões coloridas. Essa área relativa é calculada pela fração da área onde existe barreira de transporte (região colorida) pela área total do espaço de parâmetros. As áreas estão mostradas na tabela 1.

Analisando os valores apresentados da tabela 1, observamos que para os casos $m = 1$, $m = 3$ e $m = 4$, um aumento da amplitude c tem como consequência uma diminuição da área relativa das regiões coloridas. A exceção desse comportamento é o caso $m = 2$, onde há um aumento do valor da área quando o valor de c passa de $c = 0,005$ e $c = 0,050$. Já para $c = 0,100$, o valor da área volta a diminuir. Mas, comparando os quatro casos de m , observamos que para $m = 2$ os valores das áreas são semelhantes para os diferentes valores de c . Para todos os outros casos, o valor da área diminui quando o valor de c aumenta.

	$c = 0,005$	$c = 0,050$	$c = 0,100$
$m = 1$	0,42	0,37	0,32
$m = 2$	0,43	0,45	0,42
$m = 3$	0,41	0,28	0,16
$m = 4$	0,42	0,28	0,11

Tabela 1 – Áreas relativas das regiões coloridas dos espaços de parâmetros apresentados nas Figuras 13 e 16. Uma maior área relativa indica um maior número de parâmetros (a, b) que contêm barreiras de transporte no espaço de fase.

3.4 TRANSPORTE NO ESPAÇO DE FASE

O mapa padrão não *twist* é um mapa simétrico, e por este motivo, a transmissividade em um sentido positivo de y (trajetórias se movendo de baixo para cima no espaço de fase) é igual a transmissividade em um sentido negativo (trajetórias de cima para baixo). A quebra de simetria do mapa padrão não *twist* estendido, quando m assume um valor par, pode alterar essa equivalência das transmissividades para diferentes sentidos de movimentação das trajetórias no espaço de fase. Nesta seção, estudamos a transmissividade para o ESNM e o transporte de trajetórias caóticas no espaço de fase.

O transporte direcionado é o transporte no espaço de fase com um sentido preferencial, sem a ação de uma força externa que gere este direcionamento. Este tipo de transporte se faz presente principalmente em sistemas dissipativos, onde há um quebra de simetria temporal: devido à dissipação, o sistema não é reversível temporalmente. Entretanto, o transporte direcionado já foi observado também em sistemas conservativos e a este fenômeno dá-se o nome de *ratchets* Hamiltonianos, ou correntes de catraca Hamiltoniana [46].

O efeito *ratchet* (catraca) é definido como a emergência de uma corrente direcionada, caracterizada pelo movimento direcionado das órbitas caóticas sem uma força externa [47–52]. Este efeito é uma consequência da quebra da simetria espacial e/ou temporal do sistema. Uma vez que não há uma força direcionada, as quebras de simetria são responsáveis por este transporte direcionado.

O efeito catraca foi estudado por Wang e coautores na extensão do mapa padrão, um sistema *twist* cuja simetria temporal e espacial é destruída por uma perturbação em pulsos ("kicks") que são espaçados de forma desigual e apresentam uma diferença de fase entre eles [53]. Como consequência desta quebra de simetria, há uma corrente de catraca não nula representada por um primeiro momento não nulo [53]. Este primeiro momento é a média do momento p . Um sistema parecido foi estudado por Gong e Brumer [46], onde um transporte direcionado foi observado para um sistema modificado de rotor pulsado, semelhante ao mapa padrão, onde a simetria espacial é quebrada. Para este último caso, os autores observaram que as órbitas sempre se encontravam aos pares, e devido a quebra de simetria espacial, a estrutura de pares de ilhas também é destruída, o que leva as trajetórias caóticas a terem uma tendência para se movimentarem em uma direção específica [46]. Este comportamento também foi observado

por Lopes e coautores no mapa do rotor pulsado dissipativo assimétrico (DAKRM), onde a assimetria no potencial resulta em trajetórias no espaço de fase que visitam as vizinhanças de pontos fixos de forma desigual, algo que não era observado no caso simétrico [54]. No DAKRM, o transporte direcionado também é um cenário possível e está relacionado com a bifurcação dos pontos fixos em diferentes valores do parâmetro de controle [54].

Com esses breves exemplos, vemos que o mapa padrão não *twist* estendido tem potencial para apresentar transporte direcionado. Como a estrutura de ilhas gêmeas é modificada pela quebra de simetria, é possível que isto altere o transporte no sistema. Uma primeira análise que realizamos é o estudo do primeiro momento y , assim como foi feito nas Referências [53, 54]. Para obter a média, escolhemos aleatoriamente um grande número de condições iniciais caóticas em $y = 0$, iteramos e calculamos a média $\langle y \rangle$ entre todas as soluções para cada iterada n . Seja $a = 0,805$, $b = 0,597$ e $c = 0,005$, a média $\langle y \rangle$ para diferentes valores de m é apresentada na Figura 17.

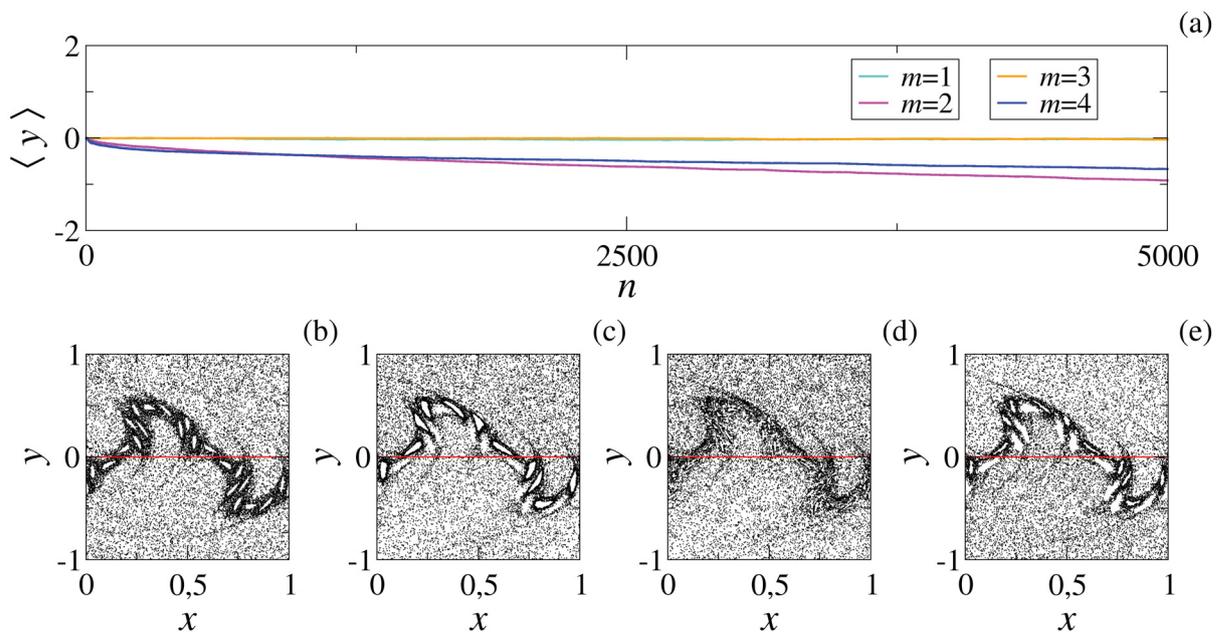


Figura 17 – Estudo de transporte para os espaços de fase apresentados na Figura 12, onde os parâmetros são $a = 0,805$, $b = 0,597$ e $c = 0,005$ e $m = 1, 2, 3$ e 4 . Em (a), apresentamos a média da variável y em termos de 10^6 condições iniciais caóticas aleatoriamente distribuídas em $y = 0$, no instante inicial. Cada curva representa um diferente valor de m : ciano ($m = 1$), rosa ($m = 2$), laranja ($m = 3$) e azul ($m = 4$). As curvas ciano e laranja estão sobrepostas, uma vez que a média de y é nula para os dois casos simétricos. Os espaços de fase em (b)-(d) são formados pelas primeira $n = 1000$ iterações de 100 condições iniciais na linha vermelha $y = 0$ e (b) $m = 1$, (c) $m = 2$, (d) $m = 3$ e (e) $m = 4$.

Pela Figura 17 (a), a média de y é nula durante toda evolução temporal, para $m = 1$ e $m = 3$. Assim, temos que as órbitas tendem a ir para cima e para baixo igualmente no espaço de fase, para m ímpar. Para m par, temos que a média de y tende para valores negativos, para toda iteração, indicando que há uma tendência das soluções caóticas assumirem valores negativos de y . Seguindo o trabalho de Gong e Brumer [46], como a média $\langle y \rangle$ é não nula, temos uma corrente de catraca Hamiltoniana para m par.

Este resultado corrobora com a ideia inicial de que sistemas não simétricos podem apresentar um transporte direcionado. Este efeito catraca pode ser evidenciado pela construção dos espaços de fase das Figuras 17 (b)-(e), onde mostramos as $n = 1000$ primeiras iteradas para 100 condições iniciais caóticas na linha vermelha $y = 0$. Para os casos com m ímpar, $m = 1$ e $m = 3$, vemos que as órbitas que começam no centro do espaço de fase permanecem ao redor das cadeias de ilhas de forma igual: não existe uma cadeia que está "mais rodeada" de órbitas; as soluções se movimentam para os dois sentidos de y de forma igual. O resultado é diferente quando observamos os casos para m par. Tanto para $m = 2$ quanto para $m = 4$, vemos que a cadeia de ilhas superior tem uma concentração maior de pontos ao redor das ilhas, enquanto a cadeia inferior não apresenta esta concentração. Esta diferença de concentração de pontos ao redor da ilhas indica que, quando as trajetórias se movem para a direção positiva de y , elas ficam presas ao redor das ilhas, enquanto as trajetórias que se movem para baixo não ficam aprisionadas e assim uma maior quantidade de trajetórias chega a $y = -1$ do que em $y = +1$. Esta diferença no "aprisionamento" das órbitas explica a média negativa de y .

Há diferentes maneiras de descrever as propriedades de transporte no sistema. Aqui, utilizamos um método semelhante a transmissividade apresentada no capítulo 2 para identificar o transporte direcionado no espaço de fase. Este método também investiga a tendência das trajetórias seguirem um sentido específico de y . O método consiste em escolher um grande número de condições iniciais caóticas em $y = 0$, evoluir todas temporalmente e contar quantas se movem para cima no espaço de fase, atravessando a linha $y = +1$, e quantas se direcionam para baixo, cruzando a linha $y = -1$. Estes números são então normalizados pelo número total de trajetórias e obtemos a fração do número de trajetórias que se direciona para cima (N_{up}) e para baixo (N_{down}). Como estamos interessados na tendência do transporte, calculamos a diferença $D = N_{up} - N_{down}$. Se $D > 0$ ($D < 0$), um maior número das trajetórias se direcionam para cima (baixo) no espaço de fase e há uma corrente de catraca que direciona o transporte para o sentido positivo (negativo) de y . Caso $D = 0$, não temos um transporte direcionado e a tendência das trajetórias irem para cima ou para baixo é igual.

Para estudar a possibilidade de um transporte direcionado em função dos parâmetros b e m do mapa padrão não *twist* estendido, fixamos $a = 0,805$ e $c = 0,050$, enquanto variamos $b \in [0,6; 1]$ e escolhemos $m = 1, 2, 3$ e 4 . Com o método proposto, calculamos N_{up} , N_{down} e a diferença D . Os resultados são mostrados na Figura 18.

Observando o cenário apresentado pela Figura 18, temos que a diferença D entre o número de trajetórias que se move para cima e para baixo no espaço de fase é nula para $m = 1$ e $m = 3$, os casos simétricos do mapa. Sendo assim, para os casos de m ímpar há um tendência igual das órbitas irem para cima ($N_{up} = 0,5$, curva azul com o símbolo \times em azul) ou para baixo ($N_{down} = 0,5$, curva rosa com asterisco em rosa).

Um cenário diferente é observado para o caso assimétrico, representado pelos valores pares de m nas Figuras 18 (b) e 18 (d). Neste caso, vemos que os números N_{up} e N_{down} oscilam

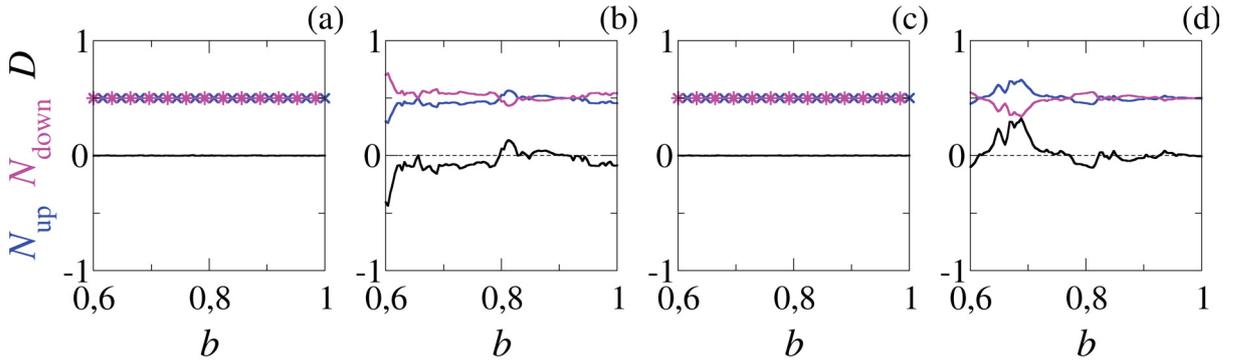


Figura 18 – Número de trajetórias caóticas, com condição inicial $y = 0$, que se movimentam para a região positiva (negativa) de y no espaço de fase. O número de órbitas que cruza $y = 1$ ($y = -1$), N_{up} (N_{down}), é representado pela curva em azul (rosa), enquanto a diferença D entre N_{down} e N_{up} é indicada pela curva em preto. Os parâmetros escolhidos são $a = 0,805$, $c = 0,050$, (a) $m = 1$, (b) $m = 2$, (c) $m = 3$ e (d) $m = 4$. Os valores de N_{up} e N_{down} para os casos simétricos $m = 1$ e $m = 3$ estão indicados pelos símbolos coloridos em (a) e (c) para evitar curvas sobrepostas, uma vez que $N_{up} = N_{down}$ para os dois casos.

ao redor do valor $N = 0,5$, mas eles diferem entre si para quase todos os valores de b . Sendo assim, $D \neq 0$ e há uma corrente de catraca presente no sistema. Este resultado é semelhante ao estudo da corrente líquida de transporte apresentado na Referência [54].

Para a construção da Figura 18, nós fixamos $a = 0,805$. Agora, com o objetivo de entender como o transporte direcionado depende dos dois parâmetros a e b , calculamos a diferença D para os mesmos intervalos de a e b dos espaços de parâmetros apresentados na Figura 16. Como o transporte direcionado existe apenas para valores pares de m , construímos os espaços de parâmetros apenas para $m = 2$ e $m = 4$. Para cada ponto (a, b) onde a barreira não existe (pontos em branco) calculamos D da mesma forma utilizada para a construção da Figura 18. No resultado apresentado na Figura 19, utilizamos uma escala de cor para indicar o valor de D para cada ponto (a, b) .

Nos espaços de parâmetros na Figura 19, observamos 4 possíveis situações. A primeira, é o caso de uma barreira total existir no sistema, onde não há transporte pelo espaço de fase. Este caso é indicado pelos pontos brancos, que correspondem às regiões coloridas dos espaços de parâmetros na Figura 16. A segunda situação, refere-se ao caso onde há transporte, mas ele não é direcionado, ou seja, o caso onde $D = 0$, indicado pelos pontos em preto. As duas últimas situações, se referem ao caso de um transporte direcionado: pontos roxos, indicando uma tendência das trajetórias irem para a região inferior do espaço de fase ($D < 0$) e os pontos em amarelo, indicando a tendência de um movimento para cima ($D > 0$).

Para os casos com $m = 2$, vemos que o transporte direcionado para baixo é uma preferência, para os três valores de c analisados. A região em roxo prevalece nos três espaços de parâmetros (Figura 19 (a)-(c)). Já para $m = 4$, vemos que a preferência é para o transporte direcionado para cima, uma vez que a região amarela é predominante, para os três valores de c (Figura 16 (d)-(f)).

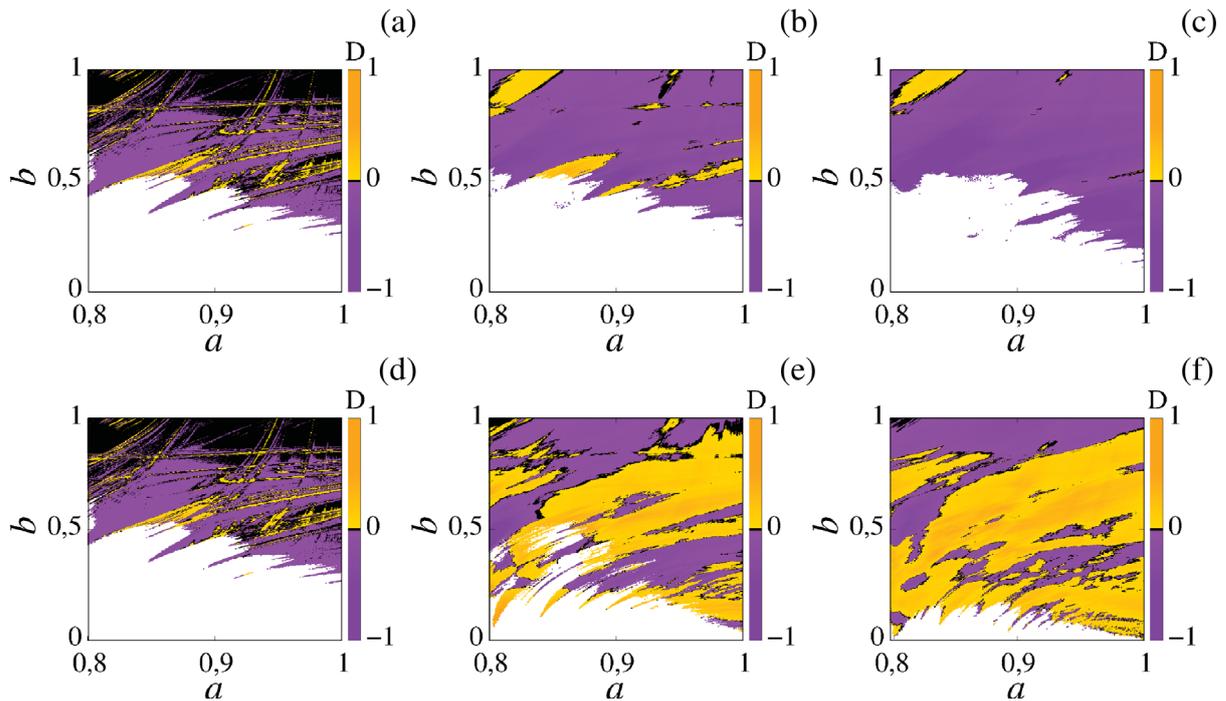


Figura 19 – Espaço de parâmetros para o transporte direcionado. Os pontos em branco, indicam presença de barreira total no espaço da fase, e são correspondentes aos pontos coloridos dos espaços de parâmetros da Figura 16. Os pontos amarelos e roxos indicam um transporte direcionado para cima e para baixo, respectivamente. Os pontos pretos indicam o caso onde há transporte, mas ele não é direcionado ($D = 0$). Os valores de m são $m = 2$ para a linha superior e $m = 4$ para a linha inferior. Já para c , temos $c = 0,005$, $c = 0,050$ e $c = 0,1$ para a primeira, segunda e terceira coluna, respectivamente.

Mesmo no caso assimétrico, é possível um transporte não direcionado. Este cenário é representado pelos pontos em preto na Figura 19 e está presente em todos os espaços de parâmetro, mas em uma fração relativamente menor, comparado com a fração do espaço que indica transporte direcionado. Para os casos $c = 0,005$ (Figura 19 (a) e (d)), a quantidade de pontos pretos é maior, mas diminui para os outros valores de c . Também apontamos que, para valores maiores de c , $c = 0,050$ e $c = 0,100$, estes pontos de transporte não direcionado estão, em sua maioria, na fronteira entre as regiões de direção oposta do transporte, isto é, os pontos pretos estão na fronteira entre as regiões amarelas e roxas.

De forma geral, a estrutura presente nos espaços de parâmetro da Figura 19 não é trivial. Não há uma estrutura simples que possibilite prever a direção preferencial do transporte, sendo necessário calcular a diferença D para cada ponto (a, b, c, m) . Este resultado está de acordo com a observação feita por Cheon e colaboradores, em seu trabalho de 2003: o transporte direcionado é controlável, mas não previsível [55].

4 MAPA PADRÃO NÃO TWIST DISSIPATIVO: ATRADORES, ROTAS PARA O CAOS E MULTIESTABILIDADE

Considerar dissipação em sistemas Hamiltonianos tem um interesse prático [56]. A introdução de dissipação em mapas não *twist* foi primeiramente considerada por Van der Weele e Valkering em 1990, quando eles estudaram a influência da dissipação no nascimento de órbitas periódicas e nos processos de reconexão em mapas não *twist* [56]. Outro exemplo de mapa não *twist* não conservativo é o mapa labiríntico não *twist* dissipativo, proposto por Carvalho e coautores [17]. Um resultado de grande interesse encontrado no estudo do mapa labiríntico dissipativo é a transformação das curvas *shearless* em atratores *shearless*, que podem apresentar um comportamento caótico para alguns valores de parâmetros [17, 57].

Neste capítulo, estudamos o mapa padrão não *twist* dissipativo, onde buscamos observar o atrator *shearless* e a existência de comportamento caótico neste atrator, como foi observado para o mapa labiríntico. Também buscamos entender como ocorre a transição de atratores quase periódicos para atratores caóticos neste sistema, investigando as possíveis rotas para o caos. Por último, investigamos a possibilidade de um cenário de coexistência de diferentes atratores no espaço de fase. Os resultados apresentados nesse capítulo foram publicados na revista *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, em 16 de fevereiro de 2021, no artigo "Curry–Yorke route to shearless attractors and coexistence of attractors in dissipative nontwist systems".

4.1 O MAPA PADRÃO NÃO TWIST DISSIPATIVO

O mapa padrão labiríntico não *twist* (*Labyrinthic Standard Nontwist Map* - LSNM) foi proposto como um novo mapa conservativo para estudar as propriedades de sistemas não *twist* [58]. Este mapa é uma modificação do mapa padrão não *twist*, onde, devido a consideração de uma nova perturbação, existe a criação de processos de reconexão que resultam em diferentes regiões de meandros, cada uma com sua curva *shearless* [58]. A versão dissipativa do LSNM, apresentada na referência [17], é definida pelas equações [17, 57],

$$\begin{aligned}y_{n+1} &= (1 - \gamma)y_n - b \operatorname{sen}(2\pi x_n) - b \operatorname{sen}(2\eta\pi x_n), \\x_{n+1} &= x_n - a(y_{n+1} - r_1)(y_{n+1} - r_2).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Os parâmetros a e b , na equação (4.1), são equivalentes aos parâmetros com mesma designação dos mapas apresentados anteriormente, o mapa padrão não *twist* e sua versão estendida. Os parâmetros r_1 e r_2 indicam a localização das ressonâncias isócronas¹ no espaço de fase e η é o parâmetro, de valor inteiro, responsável pelas bifurcações dos pontos fixos das cadeias de ilhas principais [17, 57, 58]. O mapa apresenta uma dinâmica mais rica, ao

¹ As ressonâncias isócronas é outra denominação para ilhas gêmeas no espaço de fase.

comparar com a dinâmica do mapa padrão não *twist*, e isso ocorre devido a superposição das duas perturbações (últimos dois termos da equação y_{n+1}) que leva a diferentes efeitos topológicos, como a existência de mais de uma curva *shearless* em diferentes regiões de meandros, e de regiões com vários atratores robustos [17, 57].

A dissipação no mapa labiríntico está relacionada com o parâmetro γ , um parâmetro real tal que $\gamma \in [0, 1)$ [17]. Calculando o determinante da matriz Jacobiana para o mapa labiríntico, temos,

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{J}| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \gamma & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} \\ -a(1 - \gamma)(2y_{n+1} - r_1 - r_2) & 1 - a\frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n}(2y_{n+1} - r_1 - r_2) \end{vmatrix}, \\
 |\mathcal{J}| &= (1 - \gamma) \left[1 - a\frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n}(2y_{n+1} - r_1 - r_2) \right] - \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} [-a(1 - \gamma)(2y_{n+1} - r_1 - r_2)] \\
 |\mathcal{J}| &= 1 - \gamma.
 \end{aligned}$$

Sendo assim, o mapa labiríntico definido pelas equações (4.1) é conservativo apenas para $\gamma = 0$. Caso $\gamma > 0$, o sistema apresenta dissipação.

Utilizando o mapa labiríntico dissipativo como base, consideramos $\eta = 0$, $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$. Desta forma, o mapa (4.1) se torna,

$$\begin{aligned}
 y_{n+1} &= (1 - \gamma)y_n - b \operatorname{sen}(2\pi x_n), \\
 x_{n+1} &= x_n + a(1 - y_{n+1}^2).
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Caso $\gamma = 0$, retornamos ao mapa padrão não *twist*, definido pelas equações (2.25), discutido no Capítulo 2. Sendo assim, quando $\gamma > 0$, há uma dissipação no mapa, comprovada pelo determinante da Jacobiana do mapa (4.2), que é igual a do mapa labiríntico dissipativo, $|\mathcal{J}| = 1 - \gamma$. Por este motivo, nomeamos o mapa em (4.2) como mapa padrão não *twist* dissipativo (*Dissipative Standard Nontwist Map* - DSNM). Calculando a condição *twist* (2.23) para o mapa em (4.2), temos,

$$\left| \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \right| = |-2a(1 - \gamma)[(1 - \gamma)y_n - b \operatorname{sen}(2\pi x_n)]|. \tag{4.3}$$

Logo, a condição *twist* é violada para qualquer ponto onde a equação (4.3) se anula, isto é, na curva não monotônica $y_n = \frac{b}{1 - \gamma} \operatorname{sen}(2\pi x_n)$.

Como o mapa padrão não *twist* é considerado o modelo não *twist* conservativo mais simples e uma aproximação para sistemas mais complexos, podemos considerar que o DSNM é o mapa não *twist* dissipativo mais simples e que os resultados obtidos para ele podem ser estendidos para sistemas dissipativos mais complexos.

4.2 ATRADORES - SOLUÇÕES PARA O MAPA DISSIPATIVO

Diferentemente do caso conservativo, sistemas dissipativos não preservam a área do espaço de fase. Sistemas com dissipação normalmente emergem de modelos físicos que envolvem fricção, viscosidade ou outro processo onde há perda de energia [1]. Sendo assim, os sistemas dissipativos são caracterizados pela presença de atratores, ou conjuntos atrativos, no espaço de fase [6]. Independente do estado inicial, a dinâmica do sistema irá convergir para este comportamento sustentado e assintótico representado pelo atrator, sendo que este comportamento pode ser periódico, quase-periódico e caótico [7]. Uma definição formal de atratores pode ser encontrada nas referências [1, 30].

Mapas não *twist* dissipativos apresentam dois atratores de grande interesse: os atratores *shearless* e os atratores caóticos no toro [17, 57]. Atratores *shearless* são atratores robustos, uma vez que tem sua origem no toro *shearless* (um toro robusto) e podem sobreviver a perturbações genéricas e diferentes intensidades de dissipação [17, 57]. Os atratores caóticos no toro são caracterizados pela existência de comportamento caótico restrito a uma curva no espaço de fase, a região que anteriormente era ocupada pelo toro quase periódico estável [59].

Para ilustrar a relação entre a curva e o atrator *shearless*, assim como a consequência da dissipação no mapa padrão não *twist*, construímos o espaço de fase para o caso conservativo ($\gamma = 0,0$) e dissipativo ($\gamma = 0,1$), para o mesmo par de parâmetros $(a, b) = (0,43; 0,6)$. Os dois espaços de fase são apresentados na Figura 20.

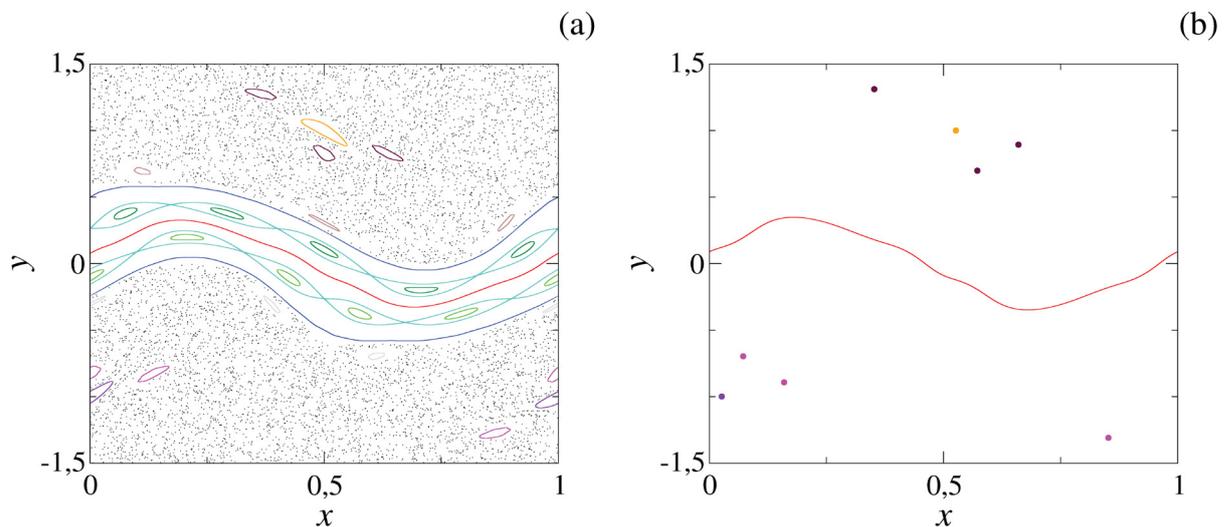


Figura 20 – Espaços de fase para os parâmetros $a = 0,43$ e $b = 0,6$ para o mapa padrão não *twist* (a) conservativo ($\gamma = 0,0$) e (b) dissipativo ($\gamma = 0,1$). Para o caso conservativo, observamos a coexistência de caos e regularidade, uma vez que soluções periódicas e quase periódicas (curvas coloridas) estão imersas no mar caótico (pontos pretos esparsos). Já para o caso dissipativo, observamos apenas atratores, sendo eles quase periódicos (curva em vermelho), periódicos de período 1 (pontos em laranja e roxo) e de período 3 (pontos marrons e rosas).

O caso conservativo (Figura 20 (a)) é um sistema Hamiltoniano conservativo perturbado, logo, seu espaço de fase consiste na coexistência de soluções caóticas, periódicas e quase

periódicas. Os pontos em preto na Figura 20 (a) formam o mar caótico, enquanto as curvas em azul são soluções quase periódicas, os toros irracionais. As curvas em ciano indicam as separatrizes que englobam cadeia de ilhas de período 5. Estas cadeias são duas cadeias de ilhas gêmeas, representadas pelas ilhas em verde escuro e em verde claro. Também observamos duas ilhas gêmeas de período um, indicadas pelas curvas fechadas em roxo e em laranja e, ao redor destas ilhas, identificamos uma outra solução periódica de período 3: as ilhas em marrom e as ilhas em rosa. A curva em vermelho no espaço de fase indica a curva *shearless*, construída a partir da iteração de um dos pontos indicadores da equação (2.39).

Quando consideramos a dissipação em sistemas dinâmicos, o espaço de fase se contrai e o comportamento estável está contido em uma superfície de dimensão menor que o espaço original [4]. Essa superfície é denominada atrator. Isso pode ser observado na Figura 20, onde o espaço de fase da Figura 20 (a) se torna os atratores na Figura 20 (b). No caso dissipativo, observamos um espaço de fase bem mais simples, que consiste em uma curva, dois pontos fixos de período 1 e dois atratores periódicos de período 3. Comparando os dois espaços de fases, verificamos que as cadeias de ilhas e o mar caótico desaparecem. As ilhas de período 1 superior (ilha laranja) e inferior (ilha roxa) se tornam os pontos fixos laranja e roxo, também de período 1. Isto também ocorre com as ilhas marrons e rosas de período 3, que se tornam os atratores em marrom e rosa. Ao observar as soluções quase periódicas, podemos ver que quase todas são destruídas e são substituídas apenas por um atrator no toro: o atrator *shearless*, representado pela curva em vermelho na Figura 20 (b).

Na Figura 21, apresentamos os espaços de fase para outros parâmetros a e b , com o intuito de mostrar outros possíveis atratores e comportamentos existentes para o mapa padrão não *twist* dissipativo. Para todos os espaços, utilizamos $\gamma = 0,1$.

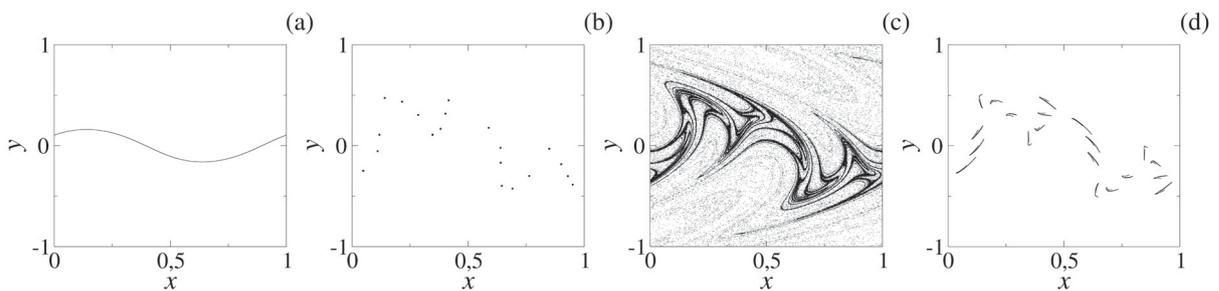


Figura 21 – Espaços de fase para o mapa padrão não *twist* para $\gamma = 0,1$ e diferentes valores de a e b . Em (a), temos $(a, b) = (0,3; 0,25)$ e um atrator quase periódico suave, enquanto em (b) os parâmetros são $(a, b) = (0,71; 0,59)$ e observamos um atrator periódico de período 20. Para (c) temos $(a, b) = (0,7125; 0,61)$ e um atrator caótico e, por último, para (d) os valores de a e b são $(a, b) = (0,712; 0,595)$ e o atrator é em bandas, onde cada segmento indica uma banda do atrator.

Pelos espaços de fase apresentados na Figura 21, nós observamos diferentes tipos de atratores representados por diferentes estruturas no espaço de fase. O primeiro espaço de fase, Figura 21 (a), temos o atrator *shearless* na região central o espaço. Já em (b), observamos 20 pontos dispersos caracterizando um atrator periódico de período 20. Em (c), observamos um conjunto de pontos no espaço com uma "curva" na região central com uma densidade maior

de pontos. E por último, na Figura 21 (d), temos pequenas estruturas no espaço de fase. Estas estruturas são denominadas bandas e são todas geradas por uma única condição inicial.

Para comprovar a natureza dos atratores, calculamos o expoente de Lyapunov, assim como fizemos para identificar a natureza das soluções para os sistemas Hamiltonianos SNM e ESNM. Utilizando o mesmo método aplicado nos capítulos anteriores, nós obtemos, a partir da simulação numérica, o maior expoente de Lyapunov λ . Caso $\lambda > 0$, temos um comportamento caótico onde há uma divergência de órbitas próximas. O comportamento periódico é caracterizado por um expoente negativo onde as órbitas próximas aos pontos fixos convergem para eles; já o comportamento quase-periódico é caracterizado por um expoente nulo. Os expoentes de Lyapunov para cada atrator apresentado na Figura 21 são apresentados na tabela 2.

<i>Figura 21</i>	<i>a</i>	<i>b</i>	λ	<i>Natureza do atrator</i>
(a)	0,3	0,25	$1,253 \cdot 10^{-7}$	Atrator quase periódico
(b)	0,71	0,59	$-2,634 \cdot 10^{-2}$	Atrator periódico
(c)	0,7125	0,61	$8,353 \cdot 10^{-2}$	Atrator caótico
(d)	0,712	0,595	$1,558 \cdot 10^{-2}$	Atrator caótico em bandas

Tabela 2 – Expoente de Lyapunov e natureza do atrator para os atratores apresentados na Figura 21

A partir do valor do expoente de Lyapunov apresentado na quarta coluna da tabela 2 podemos identificar a natureza de cada atrator apresentado na Figura 21. Para o primeiro caso (a), temos λ na ordem de grandeza de 10^{-7} , um valor muito pequeno. Neste caso, este valor de λ é o correspondente numérico para o caso de atrator quase periódico $\lambda = 0$. Em nossas análises, consideramos que o atrator quase periódico apresenta $\lambda \in [-0,004; 0,004]$ uma vez que, em simulações numéricas, não é possível obter um valor nulo exato. No segundo caso (b), correspondente aos 20 pontos dispersos no espaço de fase da Figura 21 (b), obtemos um valor negativo para o expoente de Lyapunov, confirmando o atrator periódico. Para os dois últimos casos, temos um valor de λ positivo, sendo que para (c) o valor é maior que o obtido para (d). Na Figura 21 (c), os pontos são dispersos no espaço de fase, caracterizando um comportamento caótico que é confirmado pelo expoente de Lyapunov. Para o espaço de fase em (d), temos que as estruturas apresentadas são um atrator caótico em bandas, isto é, a solução é caótica ($\lambda > 0$) e ela ocupa região distintas e bem estabelecidas no espaço de fase.

O estudo sobre a evolução de atratores em mapas não *twist* foi feito para o mapa labiríntico dissipativo [17, 57]. Neste trabalho, faremos um estudo semelhante para o mapa padrão não *twist* dissipativo. O sistema é mais simples, depende de um número menor de parâmetros e, como dissemos, os resultados podem ser generalizados para sistemas não *twist* mais complexos.

4.3 ROTA PARA O CAOS

Ao considerar a dissipação em um sistema, teremos atratores em seu espaço de fase. Como observamos nas Figura 20 (b) e 21 (a)-(d), o espaço de fase do mapa padrão não *twist* dissipativo apresenta atratores no toro (o atrator *shearless*) e pontos fixos, indicando um atrator periódico e também atratores caóticos em bandas. Há também o atrator caótico no toro, que foi observado para o mapa labiríntico no artigo de Carvalho e Abud [17] e é representado por uma curva não suave no espaço de fase. Este atrator também pode ser encontrado para o DSNM.

Nesta seção, buscamos estudar as estruturas dos atratores no espaço de fase e a sua evolução, à medida que um parâmetro do sistema é alterado. Sendo assim, examinamos as possíveis rotas para o caos, *i.e.*, como os atratores regulares evoluem para um atrator caótico no toro. Para sistemas que satisfazem a condição *twist*, a transição de um atrator quase regular para um atrator caótico no toro é bem estabelecida. Esta transição ocorre, de forma geral, quando o toro é destruído. Letellier, Massager e Gilmore analisaram a transição para o caos em um oscilador de van der Pol periodicamente forçado [60]. Nesta análise, eles estabeleceram duas rotas para o caos: a rota "*hard*" (difícil) onde o atrator quase periódico no toro passa por um "enrugamento" e então é substituído pelo atrator caótico, e a rota "*soft*", também denominada rota de Curry-Yorke, onde o atrator se torna caótico em bandas e então caótico no toro [59, 60]. A partir disto, estudamos a possibilidade da existências destas duas rotas para sistemas não *twist* dissipativos, no nosso caso, o mapa padrão não *twist* dissipativo.

Para a análise de rotas para o caos, construímos os diagramas de bifurcação, para um valor fixo de b e investigamos as formas e estruturas dos atratores para diferentes valores de a . O diagrama de bifurcação é construído da seguinte maneira: primeiro, fixamos um par de parâmetros (a, b) e então uma condição inicial é iterada por um longo intervalo de tempo. No diagrama, colocamos apenas os valores de y para as últimas iteradas. Após isto, mudamos o valor de a e realizamos o mesmo procedimento. Para cada mudança no valor de a , a condição inicial do próximo valor é igual a última iterada do valor anterior de a .

Juntamente com o diagrama de bifurcação, nós apresentamos o expoente de Lyapunov para a solução, calculado pelo método proposto por Eckmann e Ruelle para sistemas discretos [36], apresentado na equação (2.30). A partir desta análise construímos a Figura 22, onde apresentamos o diagrama de bifurcação e o perfil do expoente de Lyapunov para os parâmetros $b = 0,58$ e $\gamma = 0,1$. A primeira condição inicial escolhida para o primeiro par de parâmetros (a, b) é o ponto indicador do caso conservativo $z = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{b}{2}\right)$. Consideramos um tempo de iteração $n = 10^4$ e, para o diagrama de bifurcação, apenas as últimas 2000 iteradas são apresentadas. O expoente de Lyapunov foi calculado simultaneamente com o diagrama de bifurcação, onde descartamos as primeiras 5000 iterações e calculamos λ até o tempo de iteração final.

O diagrama de bifurcação da Figura 22 exhibe diferentes comportamentos. Para valores próximos de $a = 0,7$, observamos atratores que preenchem um certo domínio de y para vários

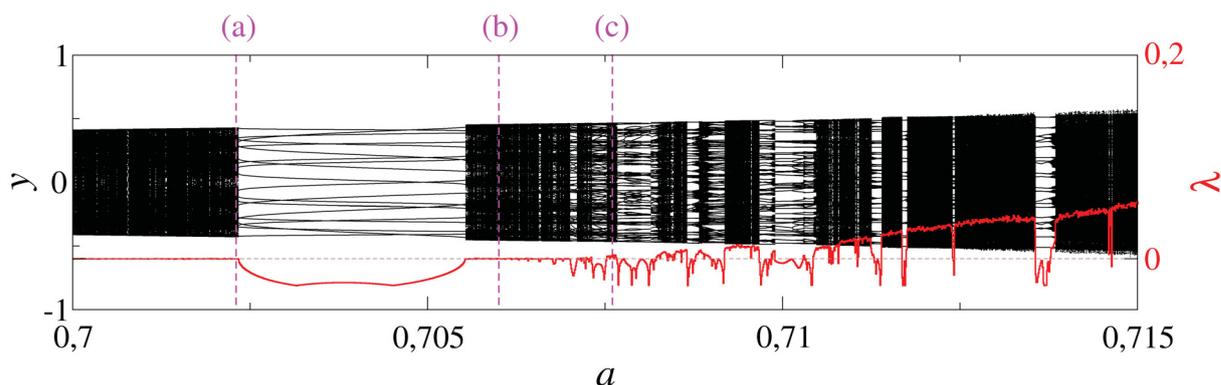


Figura 22 – Diagrama de bifurcação e expoente de Lyapunov, em função de a , para $b = 0,58$ e $\gamma = 0,1$. Os pontos em preto indicam as 2000 últimas iteradas e a curva em vermelho representa o expoente de Lyapunov. O eixo referente ao diagrama (expoente de Lyapunov) está a esquerda (direita). As linhas tracejadas em rosa indicam atratores de interesse, onde (a) e (b) apontam atratores quase periódicos ($\lambda = 0$) enquanto (c) destaca um atrator caótico ($\lambda > 0$).

valores de a , até o ponto indicado pela primeira linha tracejada rosa (a). Após este pontos, temos, para cada valor de a , um número de pontos distinguíveis, portanto, o atrator está apenas em alguns pontos de y . Estas duas estruturas se alternam durante todo o diagrama apresentado. A primeira estrutura pode representar dois casos: um atrator quase regular no toro ou um comportamento caótico na forma de um atrator caótico ou de uma solução caótica com a coordenada y restrita. Para diferenciar e identificar estas estruturas, recorreremos ao expoente de Lyapunov, indicado pela curva em vermelho no diagrama. A partir do valor de λ , vemos que para o começo do diagrama, com $a \in [0,7; 0,7075]$, os atratores são quase periódicos, uma vez que $\lambda = 0$. À medida que o valor de a aumenta, observamos que estas estruturas assumem uma valor positivo de λ , indicando a presença de atratores caóticos com a coordenada y restrita a um certo intervalo.

A segunda estrutura, onde há pontos distinguíveis no diagrama de bifurcação, representa atratores periódicos: pontos distintos para onde a solução é atraída e ela "salta" de ponto em ponto até retornar para o ponto inicial depois de completar um período. Estes atratores apresentam uma valor negativo para o expoente de Lyapunov. Apresentamos $\lambda = 0$ como uma linha tracejada no diagrama para destacar os valores positivos e negativos do expoente λ .

Para ilustrar os diferentes cenários de atratores existentes no diagrama de bifurcação da Figura 22, escolhemos três valores do parâmetro a e construímos os respectivos espaços de fase. Estes três parâmetros são indicados pelas linhas tracejadas em rosa e os valores de a são (a) $a = 0,7023$, (b) $a = 0,7060$ e (c) $a = 0,7076$. Os três espaços de fase são mostrados na Figura 23.

O atrator na Figura 23 (a) é uma curva no espaço de fase e, como Carvalho e Abud nomearam [17], é um atrator *shearless*, uma vez que sua forma é semelhante a curva *shearless* do caso conservativo. Na Figura 23 (b) e (c), observamos atratores em curvas não suaves. Os pontos em rosa nas figuras Figura 23 (a) e (b) são denominados "ghosts" (fantasmas) e representam órbitas estáveis de parâmetros próximos (vizinhos), que podem ter uma influência no atrator

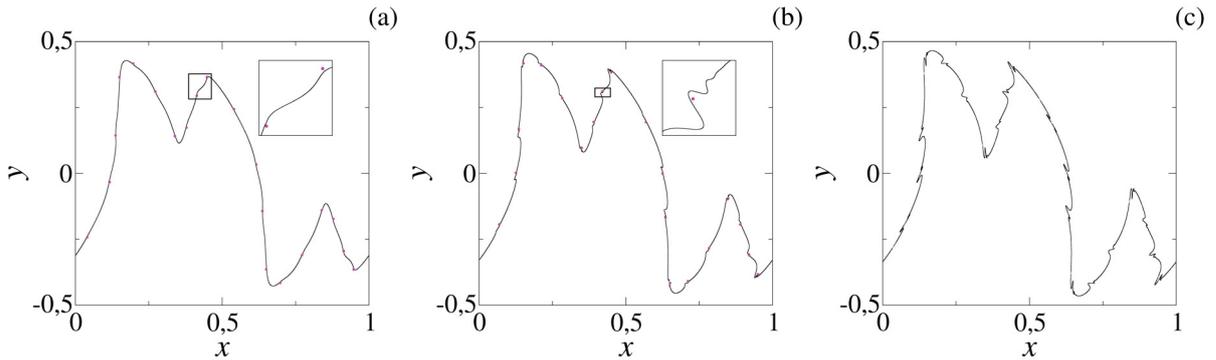


Figura 23 – Atratores para os casos indicados na Figura 22, onde (a) $a = 0,7023$, (b) $a = 0,7060$ e (c) $a = 0,7076$. Em todos os casos $b = 0,58$ e $\gamma = 0,1$. Os pontos em rosa são os atratores "ghosts" (fantasmas) e eles são os atratores de parâmetros de valores próximos, tal que $a = 0,703$ em (a) e $a = 0,705$ em (b).

quase periódico observado [60]. Neste caso, os fantasmas são atratores periódicos de período 20 de um parâmetro posterior (no caso da Figura 23 (a)), ou de um parâmetro anterior (como na Figura 23 (b)).

Os espaços de fase apresentados na Figura 23 seguem uma das rotas propostas por Letellier e colaboradores [60]: a rota com uma transição "hard" para o caos. Na Figura 23 (a) temos um atrator quase periódico no toro e, observando a ampliação no canto direito superior da figura, vemos que a curva é suave. Aumentando um pouco o parâmetro a , temos o atrator apresentado na Figura 23 (b) onde vemos que a curva não é mais suave: ela apresenta um "enrugamento" e, observando a ampliação, este enrugamento ocorre ao redor dos pontos fantasmas. Observando os expoentes de Lyapunov na Figura 22 para o caso (a) e (b), vemos que seu valor é nulo, logo, nenhum dos atratores é caótico, ambos são quase periódicos. Já para o atrator da Figura 23 (c), vemos que a curva é mais "enrugada" que o caso em (b). Ao verificar o valor do expoente de Lyapunov para esse caso, vemos que ele é positivo. Logo, para a Figura 23 (c) temos um atrator caótico no toro. Dessa forma, temos a rota "difícil" para o caos, onde um atrator quase periódico no toro se torna um atrator "enrugado" e após um atrator caótico no toro, à medida que o parâmetro de controle aumenta.

Uma vez que identificamos a rota *hard* para o caos, nosso objetivo é encontrar a rota "soft" (suave), também denominada rota de Curry-Yorke. Para isto, modificamos um pouco o valor de b , escolhendo $b = 0,6$. Seguindo exatamente as mesmas etapas utilizadas para a construção da Figura 22, calculamos o diagrama de bifurcação e o expoente de Lyapunov para $b = 0,6$. O resultado é apresentado na Figura 24.

As estruturas presentes no diagrama de bifurcação da Figura 24 são semelhantes as estrutura do diagrama na Figura 22: observamos atratores que ocupam um domínio de y e possuem expoente de Lyapunov nulo (atratores no toro), também vemos os atratores periódicos representados por pontos distinguíveis e expoente de Lyapunov negativo e possíveis atratores caóticos no toro, onde o atrator também preenche um intervalo de y mas tem o expoente λ positivo. Entretanto, para maiores valores de a , próximos do final do intervalo em estudo, vemos

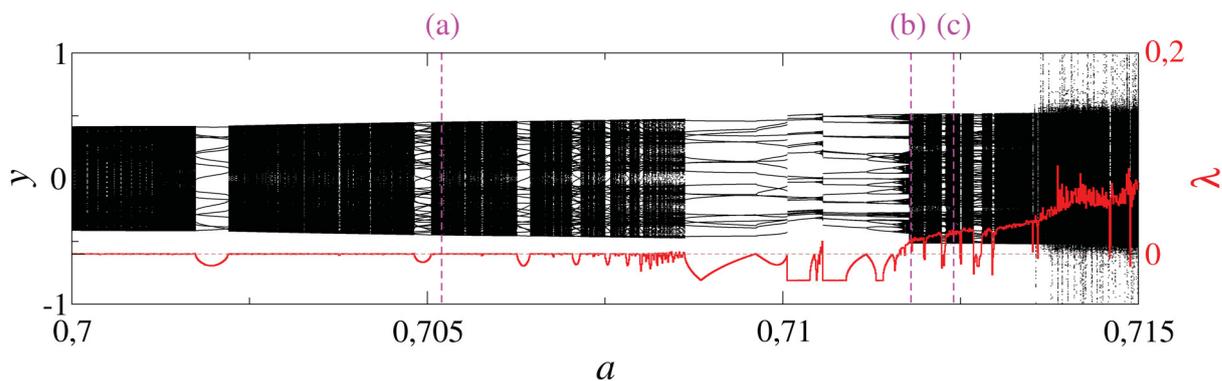


Figura 24 – Expoente de Lyapunov (curva vermelha) e diagrama de bifurcação (pontos pretos) em função de a para $b = 0,6$ e $\gamma = 0,1$. Os eixos seguem a mesma disposição definida para a Figura 22. As linhas tracejadas destacam diferentes momentos do atrator durante a rota: a linha traceja (a) aponta quando o atrator é quase periódico, enquanto (b) e (c) indicam comportamento caótico.

alguns pontos dispersos na direção y . Estas soluções tem um expoente de Lyapunov relativamente mais alto, configurando assim um comportamento caótico no sistema.

Escolhendo novamente três valores de a no diagrama da Figura 24, indicado pelas linhas tracejadas em rosa, construímos os espaços de fase para cada par de parâmetros $(a; b = 0,6)$. Os espaços de fase estão na Figura 25.

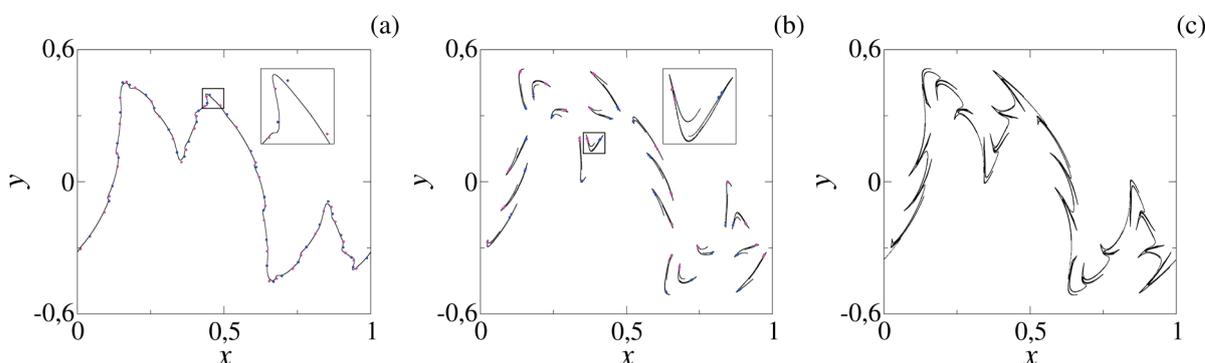


Figura 25 – Atratores para $b = 0,6$, $\gamma = 0,1$ e para os valores de a destacados pelas linhas tracejadas da Figura 24: (a) $a = 0,7052$, (b) $a = 0,7118$ e (c) $a = 0,7124$. Os atratores fantasmas indicados pelos pontos azuis e rosas são referentes ao parâmetros (a) $a = 0,7063$ e (b) $a = 0,7118$.

Analisando o atrator na Figura 25 (a), vemos um atrator suave quase regular no toro. Este atrator é rodeado por pontos fixos fantasmas. Novamente, estes pontos fantasmas são atratores periódicos de um parâmetro posterior ($a = 0,7063$). Neste caso, observamos duas cadeias de pontos fixos fantasmas: os pontos em rosa e os pontos em azul, ambos de período 37. Estas cadeias de pontos fixos são o correspondente dissipativo das cadeias de ilhas gêmeas, para o caso conservativo ($\gamma = 0$). Ao aumentar o parâmetro a , temos a situação apresentada na Figura 25 (b): um atrator formado por várias estruturas separadas no espaço de fase. Também observamos os atratores fantasmas de um parâmetro anterior e, neste caso, de período 40. Verificando a ampliação na Figura 25 (b), os pontos fixos aparentam ter passado por uma bifurcação de duplicação de período, uma vez que há dois pontos muito próximos um do outro. Uma solução

que está em uma estrutura do atrator na Figura 25 (b) visita todas as estruturas em sua evolução temporal. Por isto, este atrator é denominado atrator em bandas e, verificando o valor de seu expoente de Lyapunov na Figura 24, ele é um atrator caótico em bandas.

Para o último espaço de fase na Figura 25, observamos um atrator com uma forma mais complexa que é caótico, uma vez que seu expoente λ é positivo, como indicado pela linha tracejada (c) na Figura 24. A transição apresentada pelo digrama na Figura 24 e pela sequência de espaços de fase na Figura 25 é a rota de Curry-Yorke. Nessa rota "suave" para o caos, o atrator no toro é desestabilizado e substituído por um cenário de *phase-locking*, representado pelo atrator caótico em bandas, e então um atrator caótico no toro emerge [60, 61].

Os atratores quase periódicos desempenham um papel semelhantes a curva *shearless* enquanto os atratores periódicos fantasmas podem ser divididos em duas cadeias de pontos periódicos, uma característica própria de sistemas não *twist*. Com os resultados mostrados nesta seção, podemos dizer que as transições para o caos que ocorrem em sistemas *twist* também podem ser observadas em sistemas não *twist*, com suas especificidades.

4.4 ANÁLISE DOS ATRADORES E ESPAÇO DE PARÂMETROS

O estudo de bifurcações em um sistema que depende de dois parâmetros pode revelar rotas não triviais no espaço de parâmetros [60]. A análise realizada sobre os atratores no espaço de fase, na seção passada, estava restrita a valores de b e γ fixos e a um pequeno intervalo de a . Ao fixar $\gamma = 0,1$, temos que o sistema depende apenas de dois parâmetros: a e b . Sendo assim, é possível construir um espaço de parâmetros, semelhante ao estudado para a existência da curva *shearless* apresentado no Capítulo 2, mas para identificar a natureza das soluções no espaço de fase para diferentes valores de a e b .

O estudo de diagramas de bifurcação nos fornece a rota de bifurcação de uma solução quando um parâmetro do sistema é variado. Estudar estes diagramas quando dois parâmetros são variados é possível, mas é de difícil visualização e análise. Por este motivo, vamos utilizar apenas o expoente de Lyapunov para estudar a natureza dos atratores em um espaço de parâmetros $a \times b$.

A construção do espaço de parâmetros para a natureza dos atratores é feita da seguinte forma: primeiro fixamos um valor de a e, para o primeiro valor de b , escolhemos como condição inicial o ponto indicador $z = \left(-\frac{1}{4}, \frac{b}{2}\right)$, do mapa conservativo. A condição inicial é então iterada por um tempo $n = 10^4$, onde as 5000 primeiras iteradas são descartadas e o expoente de Lyapunov é calculado pelo método de Eckman e Ruelle [36]. O valor do expoente de Lyapunov λ obtido é utilizado como a escala de cor do ponto (a, b) no espaço de parâmetros. Para o próximo valor de b , a última iterada (x, y) do parâmetro anterior é utilizada como condição inicial, então calculamos λ para este valor de b e todo esse processo é repetido até $b = 1$. Para o próximo valor de a , a condição inicial volta a ser o ponto indicador z e todo processo é refeito. O resultado deste procedimento é o espaço de parâmetro apresentado na Figura 26.

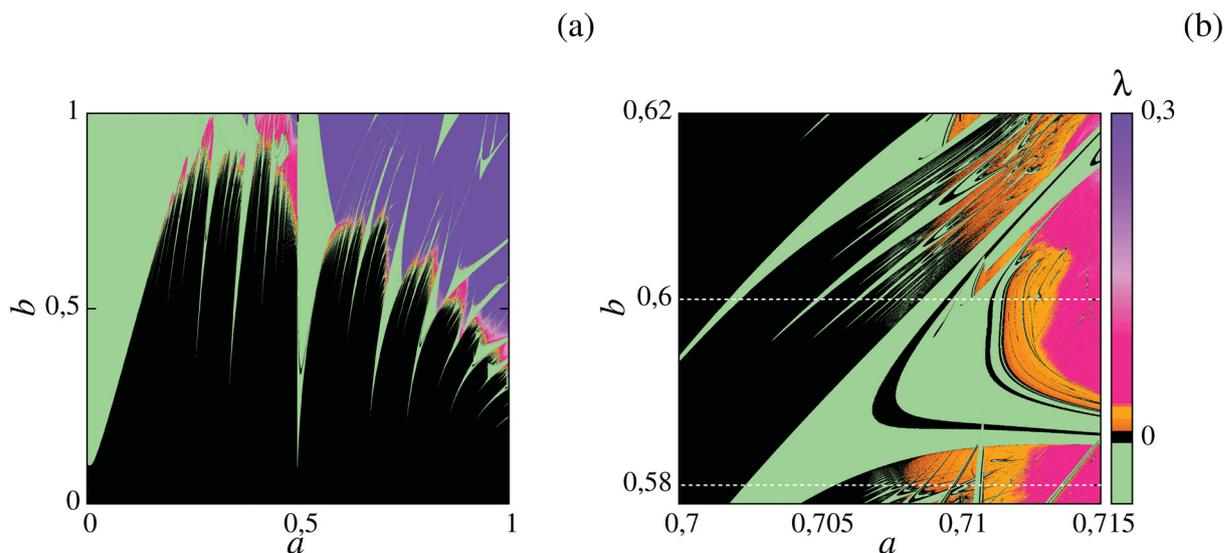


Figura 26 – Natureza dos atratores para diferentes parâmetros do mapa padrão não *twist* dissipativo. Em (a), apresentamos o espaço de parâmetros, onde a cor de cada ponto (a, b) indica o valor do expoente de Lyapunov de um atrator no espaço de fase para tal par de parâmetros. Os pontos em preto indicam atratores quase periódicos ($\lambda = 0$), os pontos em verde indicam que o atrator é periódico ($\lambda < 0$) e os pontos das outras cores indicam comportamento caótico. A ampliação ao redor dos intervalos dos diagramas de bifurcação das Figuras 22 e 24 é apresentado em (b), onde as linhas tracejadas em branco indicam o valor de b onde ocorre a rota "hard" ($b = 0,58$) e a rota de Curry-Yorke ($b = 0,6$) para o caos.

Na Figura 26 (a), temos o espaço de parâmetros, nos intervalos $a \in [0, 1]$ e $b \in [0, 1]$. Os pontos em pretos indicam um expoente de Lyapunov nulo, ou seja, soluções em atratores quase periódicos. De forma geral, esses pontos indicam a existência do atrator *shearless* e a estrutura da região que eles formam é bem semelhante a estrutura para a existência da curva *shearless* no caso conservativo (Figura 10). A semelhança entre o espaço de parâmetro para o atrator *shearless* e para a existência da curva *shearless* falha para valores pequenos de a , onde no caso dissipativo há uma tendência dos atratores serem periódicos (pontos verdes com $\lambda < 0$), enquanto para o caso conservativo, a curva *shearless* existe no espaço de fase.

Para valores maiores de a e b no espaço de parâmetros, verificamos que há uma tendência para o comportamento caótico, indicada pelos pontos coloridos com $\lambda > 0$. Entre os comportamentos quase regular (pontos pretos) e caótico com expoente de Lyapunov alto ($\lambda \approx 0,3$), vemos uma região com valor de λ entre $0 < \lambda < 0,03$, representada pelos pontos em laranja, uma região em rosa, com valores de λ entre $0,03 < \lambda < 0,18$, e a região roxa com $\lambda > 0,18$. Ao observar o expoente de Lyapunov para o atrator caótico em bandas na Figura 24 indicado pela linha (b), observamos um expoente de Lyapunov relativamente pequeno, $\lambda \approx 0,02$. Desta forma, podemos dizer que os pontos em laranja indicam parâmetros para uma possível existência de bandas caóticas no espaço de fase.

Na Figura 26 (b), temos a ampliação do espaço de parâmetro para a região que engloba os diagramas de bifurcação das Figuras 22 e 24. As linhas tracejadas brancas indicam as linhas onde estes diagramas de bifurcação foram calculados. Em ambas as linhas, conseguimos observar

uma transição do atrator quase periódico (região em preto) para um atrator periódico (região verde). Então, há um retorno para o atrator quase periódico e depois o comportamento caótico emerge, com um expoente de Lyapunov pequeno (região laranja). Esta sequência está de acordo com o perfil de expoente de Lyapunov apresentado nas Figuras 22 e 24.

Como última análise das soluções do sistema, analisamos agora os períodos dos atratores periódicos indicados pelos expoentes de Lyapunov negativos no espaço de parâmetro da Figura 26. Para calcular os períodos, selecionamos apenas os pontos (a, b) com expoente de Lyapunov negativo. Após calcular o expoente λ , verificamos se $\lambda < 0$, e, se este for o caso, nós utilizamos o último ponto da trajetória iterada para calcular λ como condição inicial para uma evolução temporal de 2000 iterações. Durante estas 2000 iterações, nós verificamos quando que a trajetória volta para a condição inicial, sendo que este intervalo de tempo é o período da órbita. Para verificar o valor do período, nós calculamos ele três vezes e verificamos se os três valores são iguais, caso seja, colocamos no ponto (a, b) do espaço de parâmetros a cor que representa esse período na escala de cores. O espaço de parâmetros para os períodos dos atratores periódicos está na Figura 27.

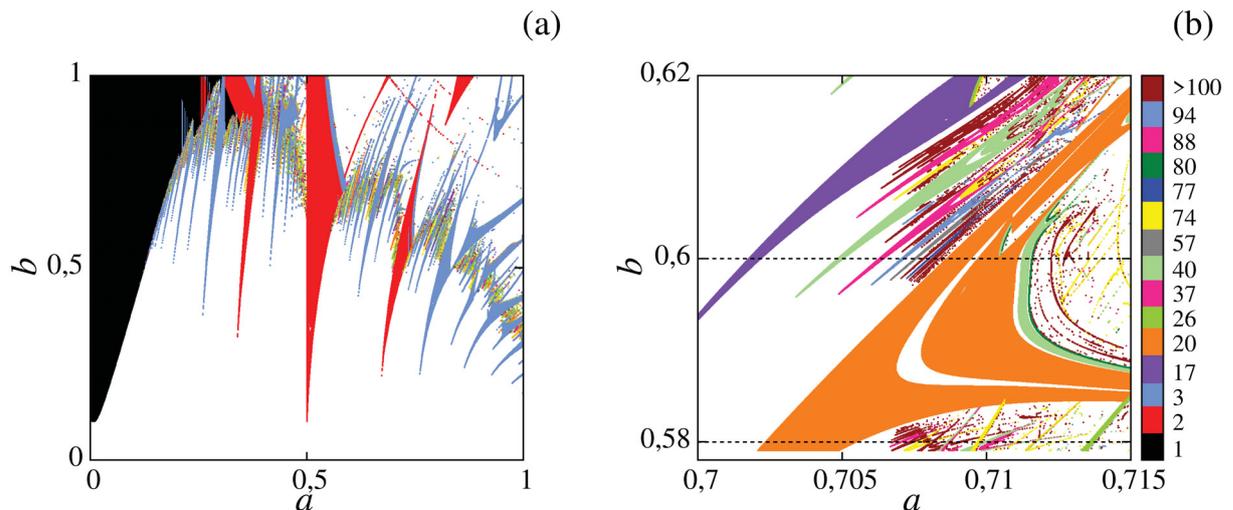


Figura 27 – Espaço de parâmetros para os períodos dos atratores periódicos indicados pelos pontos em verde na Figura 26. A ampliação em (b) é feita na mesma região da Figura 26 (b). O período de cada atrator é calculado analisando o tempo que a trajetória leva para voltar a condição inicial, após um tempo transiente de 10^4 iterações e está indicado pela escala de cores a direita.

No começo do espaço de parâmetros da Figura 27 (a), observamos uma região em preto, indicando que atratores periódicos de período 1 são mais prováveis de existir para valores menores de a . Outros atratores de períodos pequenos, como período 2 e 3, estão dispostos no espaço de parâmetros. Ao observar os pontos em vermelho, que indicam período 2, e os pontos em azul claro, que representam o período 3, vemos que eles se alternam entre si, de uma forma regular. De fato, esta estrutura é semelhante as línguas de Arnold [4, 62]. Pontos que indicam períodos maiores que 3, estão restritos a regiões entre as estruturas de período 2 e 3 e entre diferentes estruturas de período 3.

Observando a ampliação apresentada na Figura 27 (b), vemos as duas linhas pretas que indicam as linhas onde os diagramas de bifurcação das Figuras 22 e 24 foram calculados. Para $b = 0,58$, seguindo a linha no sentido do aumento de a , vemos que ela intercepta uma região laranja, de período 20. Este resultado está de acordo com os atratores periódicos fantasmas observados nas Figuras 23 (a) e (b). Avançando para maiores valores de a nessa linha, vemos que há um pequena região onde os atratores periódicos não existem mais, e depois há o surgimento de atratores periódicos de período maior, como 26, 74 e maior que 100. Já para $b = 0,6$, podemos encontrar os períodos observados nos atratores fantasmas das Figuras 25 (a) e (b). Para o caso em 25 (a), os pontos fixos tem período 37, região cortada pela linha $b = 0,6$ próxima de $a = 0,706$ (região rosa). Continuando por esta linha, temos a região laranja (período 20), depois uma região verde clara indicando período 40 dos atratores fantasmas da Figura 25 (b), e então uma pequena área verde escura, de período 80. Assim, verificamos uma rota de bifurcação de período para estes atratores periódicos. Esta duplicação de período também pode levar a um comportamento caótico no sistema, como apresentado nas Referências [59, 63], que observaram a transição para o caos a partir de uma duplicação de período na própria rota de Curry-Yorke.

Faz-se necessário enfatizar que se considerarmos outra condição inicial, os espaços de parâmetros apresentados nesta seção (Figuras 26 e 27) podem ser diferentes. Apenas pelo estudo do expoente de Lyapunov para uma condição inicial, não é possível ter certeza se existe apenas um atrator no espaço de fase ou o sistema apresenta multiestabilidade, caracterizada pela coexistência de múltiplos atratores, para um par (a, b) específico. A possibilidade de multiestabilidade no sistema é o assunto estudado na próxima seção.

4.5 MULTIESTABILIDADE

A multiestabilidade é definida pela coexistência de atratores distintos no espaço de fase para um certo conjunto de parâmetros do sistema [64–66]. Dessa forma, o sistema dissipativo apresenta diferentes estados finais possíveis e o estado para qual ele convergirá depende essencialmente da condição inicial [65, 66]. O fenômeno da multiestabilidade pode ser encontrado em várias áreas, como por exemplo na física de lasers e de semicondutores, na química, na ecologia, na neurociência, na dinâmica climática, na óptica, na matéria condensada, entre outros exemplos [64, 66].

Sistemas que apresentam multiestabilidade são denominados multiestáveis e exibem sensibilidade a qualquer perturbação, de forma que uma pequena perturbação pode desestabilizar o comportamento periódico e regular [65, 66]. Esta sensibilidade é devida a uma relação não trivial entre os atratores do espaço de fase [65], o que faz com que a dinâmica seja sensível à condição inicial e a mudanças nos valores dos parâmetros do sistema [64].

A forma mais simples de se obter um sistema multiestável é incluir uma pequena dissipação em um sistema conservativo [64, 66]. Esta é exatamente a construção para o mapa padrão não *twist* dissipativo estudado nesse capítulo. Como foi dito anteriormente, as ilhas e os

toros do caso conservativo se tornam atratores periódicos e atratores no toro com a inclusão da dissipação, respectivamente. As soluções caóticas de um sistema não integrável conservativo são transformadas em transiente caótico, quando se considera dissipação. Ao incluir esta pequena dissipação no sistema, o número de atratores periódicos é finito mas o quão grande é esse número depende da amplitude da perturbação e das propriedades do sistema em si [66].

Para investigar a existência de múltiplos atratores no DSNM, nós começamos o estudo pela histerese no diagrama de bifurcação. Calculando o diagrama de bifurcação em sentidos opostos, isto é, no sentido de aumento e de diminuição do parâmetro de controle, podemos observar a evolução de diferentes atratores, caso eles existam. Então, há uma distinção entre os dois diagramas, calculados em sentidos opostos da variação do parâmetro, caracterizando histerese e indicando multiestabilidade. Fixando $b = 0,6$, calculamos e comparamos os dois diagramas de bifurcação obtidos aumentando e diminuindo o valor de a , no intervalo $a \in [0, 1]$. Os diagramas foram calculados seguindo a mesma metodologia usada para a construção da Figura 22 e 24. Os resultados são mostrados na Figura 28.

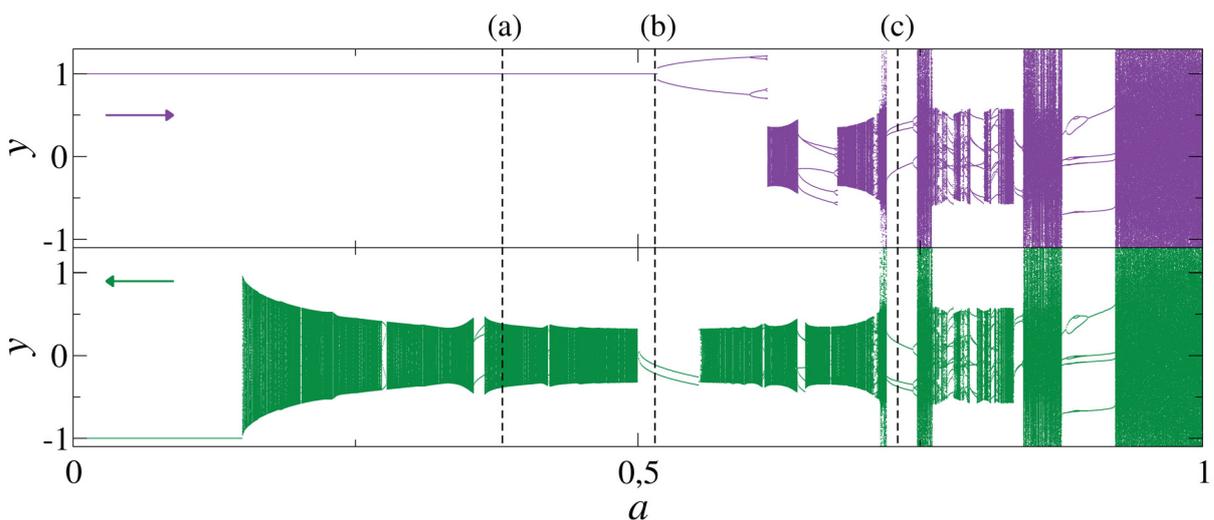


Figura 28 – Diagramas de bifurcação em função de a para diferentes sentidos de variação. O diagrama em roxo indica o sentido de a crescente, enquanto o diagrama em verde indica o sentido decrescente. Os valores de parâmetro são $b = 0,6$ e $\gamma = 0,1$. As setas coloridas indicam o sentido de variação do parâmetro a . A distinção entre os dois diagramas indica a coexistência de diferentes atratores no espaço de fase. As linhas tracejadas (a)-(c) destacam diferentes cenários de coexistência de atratores.

Pela comparação dos dois diagramas de bifurcação da Figura 28, observamos que eles são diferentes. No intervalo $a \in [0;0,5]$, podemos ver que enquanto no diagrama em roxo existe apenas um atrator periódico em $y = 1,0$, para diagrama em verde, temos um atrator periódico em $y = -1$ até $a \approx 0,2$ então uma sequência de atratores quase periódicos existe no espaço de fase. Os diagramas são diferentes até $a \approx 0,75$, onde então se tornam iguais até $a = 1,0$, apresentando um comportamento caótico (faixas que ocupam todo o domínio de y) e algumas janelas de atratores periódicos. Esta diferença entre os dois diagramas, como dito, caracteriza uma histerese, indicando a presença de diferentes atratores para um mesmo conjunto de parâmetros. Sendo assim, este sistema apresenta multiestabilidade.

Para ilustrar a coexistência dos atratores no espaço de fase, construímos o espaço de fase e as bacias de atração para alguns valores de a , indicados pelas linhas tracejadas em preto na Figura 28. Uma bacia de atração A_t de um atrator é o conjunto de condições iniciais que, ao serem evoluídas temporalmente, converge para o atrator em questão. Escolhemos então, três valores de a indicados na Figura 27: (a) $a = 0,38$, (b) $a = 0,51$ e (c) $a = 0,73$. Construímos o espaço de fase, evoluindo um número grande de condições iniciais por um tempo de iteração $n = 10^4$. Desconsiderando as primeiras 5000 iteradas, observamos no espaço de fase apenas as últimas iterações e, assim, conseguimos identificar a localização dos atratores. Anotando as coordenadas (x, y) de cada atrator, podemos construir as bacias de atração, onde dispomos $3 \cdot 10^3 \times 6 \cdot 10^3$ condições iniciais no intervalo $x \in [0, 1]$ e $y \in [-2, 2]$ e observamos para qual atrator cada trajetória converge. Para cada atrator, designamos uma cor específica, logo condições iniciais que convergem para o mesmo atrator são indicadas pela mesma cor no espaço de fase. Os atratores para cada valor de a escolhido são apresentados na Figura 29 (a)-(c) e os resultados para as bacias de atração estão na Figura 29 (d)-(f).

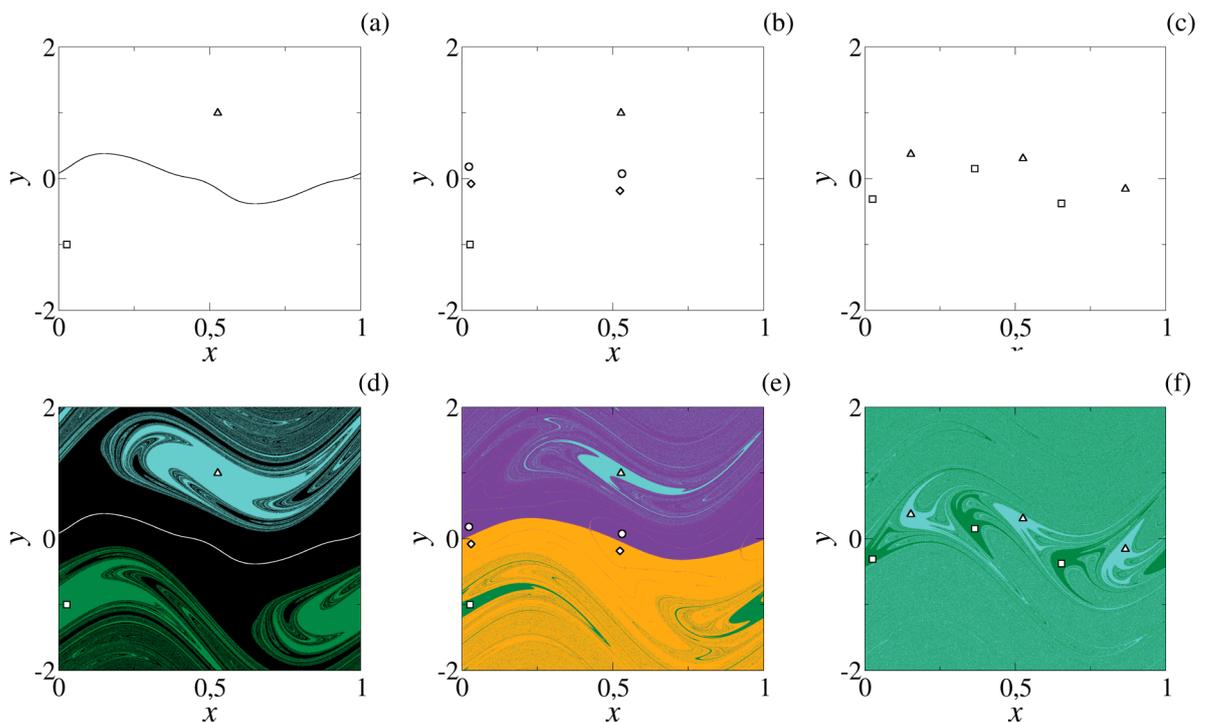


Figura 29 – Espaços de fase e bacias de atração para os valores de a indicados pelas linhas tracejadas na Figura 28: $a = 0,38$ para (a) e (d), $a = 0,51$ para (b) e (e), e $a = 0,73$ em (c) e (f). No espaço de fase em (a) e, consequentemente, na bacia de atração em (d) temos dois pontos fixos, indicados pelos quadrado e pelo triângulo, e a curva *shearless*. Nos espaços em (b) e (c), e nas bacias em (e) e (f), temos a coexistência de diferentes atratores periódicos representados pelos diferentes símbolos.

Nos espaços de fase apresentados, observamos a coexistência de diferentes atratores no sistema. No caso da Figura 29 (a), observamos a existência de um atrator *shearless*, indicado pela curva em preto e dois pontos fixos, indicados pelos símbolos, no espaço de fase. Para o caso das Figuras 29 (b) e (c), temos apenas atratores periódicos no espaço de fase, que também são

indicados por símbolos. Para (b), há dois atratores de período 1, indicados pelo triângulo e pelo quadrado. Neste mesmo espaço de fase, há outros dois atratores de período 2, representados pelo círculo e pelo losango. Para (c), há dois atratores periódicos de período 3, indicados pelo triângulo e pelo quadrado. Uma característica destes atratores periódicos é que eles obedecem a transformação de simetria $T_S(x, y) = (x \pm 1/2, -y)$ do mapa padrão não *twist* conservativo. Dessa forma, temos "atratores gêmeos" e nos casos apresentados, o atrator indicado pelo triângulo (círculo) é gêmeo do atrator assinalado com o quadrado (losango).

As bacias de atração para os atratores apresentados nas Figuras 29 (a), (b) e (c) estão apresentadas nas Figuras (d), (e) e (f), respectivamente. Em (d), temos que a curva *shearless* é indicada pela curva em branco, enquanto sua bacia de atração é formada pelos pontos em preto. As bacias de atração para os atratores periódicos são indicadas pelos pontos em ciano (atrator no triângulo) e em verde (atrator no quadrado). Para (e), temos quatro bacias de atração: ciano, verde, roxo e rosa indicando as condições iniciais que são atraídas para os atratores indicados pelo triângulo, quadrado, círculo e losango, respectivamente. Para o último caso, em (f), observamos duas bacias: verde e azul claro. Elas são bacias de atração para os atratores periódicos de período 3, com sua localização marcada pelo triângulo e pelo quadrado.

Ao observar as bacias de atração, vemos que elas não possuem uma estrutura suave ou simples. De fato, a fronteira entre elas não é bem determinada e há algumas regiões onde estas bacias se misturam. Esta região é caracterizada por uma incerteza, uma sensibilidade maior das condições iniciais: dois pontos vizinhos podem levar a comportamentos assintóticos (atratores) diferentes. As diferentes estruturas e interações das bacias pode ser analisada pelas entropias de bacia, assunto tratado na próxima seção.

4.6 ENTROPIA DE BACIA

Observando as bacias de atração apresentadas na Figura 29, podemos ver que, para o caso $a = 0,38$ e $a = 0,51$, existe uma região de tamanho significativo composta por uma cor só. Já para $a = 0,73$, a maioria do espaço é formado por uma mistura de pontos verde e azul e há uma pequena região sólida (uma cor apenas) ao redor dos atratores. Uma forma de analisar estes dois casos de convívio entre bacias de atração é a partir das entropias de bacia, ferramenta proposta por Daza e colaboradores em seu trabalho publicado em 2016 [67].

A ideia central do estudo de entropias de bacia é analisar a entropia em um espaço de fase discretizado para cada parâmetro. De forma semelhante ao que fizemos para a construção do espaço de parâmetros da Figura 16, nós distribuimos uniformemente um número finito de caixas N_{cx} para discretizar o espaço de fase. Sendo assim, nós obtemos um espaço de fase bidimensional com N_{cx} caixas não sobrepostas. Considerando que as caixas estão sobre as bacias de atração das Figuras 29 (d)-(f), temos que cada caixa terá pontos com certas cores em seu interior.

Para cada caixa i , podemos associar uma entropia, definida por [67],

$$S_i = \sum_{j=1}^{n_i} p_{i,j} \log \left(\frac{1}{p_{i,j}} \right) \quad (4.4)$$

onde n_i é a quantidade de diferentes cores dentro da caixa, com $n_i \in [1, N_A]$, sendo N_A o número de atratores no espaço de fase, e $p_{i,j}$ é a probabilidade de uma cor específica j existir na caixa i . A probabilidade $p_{i,j}$ é calculada pela razão do número de pontos de cor j pelo número total de pontos dentro da caixa. Neste trabalho, nós seguimos o valor utilizado por Daza *et al.* e consideramos caixas com 25 condições iniciais cada [67]. Pela definição da entropia em (4.4), vemos que a entropia será nula quando existir apenas uma cor dentro da caixa.

Após calcular a entropia S_i para cada uma das N_{cx} caixas, nós podemos calcular a entropia de bacia S_b e a entropia de borda de bacia S_{bb} , definidas por [67],

$$S_b = \frac{S}{N_{cx}} = \frac{1}{N_{cx}} \sum_{i=1}^{N_{cx}} S_i, \quad S_{bb} = \frac{S}{N_b} = \frac{1}{N_b} \sum_{i=1}^{N_{cx}} S_i, \quad (4.5)$$

onde N_b é o número de caixas na fronteira entre bacias, ou seja, caixas com mais de uma cor. A entropia de bacia está relacionada com a incerteza das bacias [67] e pode descrever as estruturas presentes no espaço de fase [68]. Os valores limites para S_b são $S_b = 0$ para o caso de um atrator único e $S_b = \log N_A$ para uma bacia completamente aleatória [67]. A entropia de borda de bacia está relacionada com a incerteza inerente apenas a fronteira entre as bacias [69].

Para os espaços de fase/bacias de atração da Figura 29, nós calculamos as entropia S_b e S_{bb} para uma malha de $N_{cx} = 2000 \times 4000$ caixas. Nós iteramos as 25 condições iniciais em cada caixa por $n = 10^4$ iterações para identificar a qual atrator ela irá convergir. Após isso, calculamos a entropia S_i para cada caixa e então calculamos as entropias de bacia e de borda de bacia. O resultado para cada caso está apresentado na tabela 3.

	S_b	S_{bb}	N_A	Tipos de atratores
$a = 0,38$	0,2367	0,6106	3	P, S
$a = 0,51$	0,1532	0,3622	4	P
$a = 0,73$	0,5993	0,6601	2	P

Tabela 3 – Entropia de bacia (S_B), entropia de borda de bacia (S_{bb}), número de atratores (N_A) e tipos de atratores presentes no espaço de fase para cada caso apresentado na Figura 29. As letras P e S na última coluna indicam que os atratores são periódicos ou são atratores *shearless*, respectivamente.

Observando os valores mostrados na tabela 3, podemos concluir que todas as bacias apresentam um certo grau de incerteza, uma vez que $S_b > 0$ para todo os casos. O caso com menor valor de S_b é para $a = 0,51$. Este resultado é explicado pela pequena região de *mixing* ("mistura") entre as bacias. De fato, só há um *mixing* entre as bacias roxa e ciano e entre as bacias verde e laranja, e a região é relativamente pequena em comparação com os outros dois casos. O valor de S_b para $a = 0,38$ também é baixo mas é maior que para o caso $a = 0,51$. Isto

ocorre porque a região de mistura entre as bacias dos atratores periódicos e a bacia do atrator *shearless* é maior. O último caso, $a = 0,73$ tem o maior valor de S_b , onde o *mixing* ocupa a maioria do espaço.

Analisando agora os valores para entropia de borda de bacia, encontramos um valor $S_{bb} > 0,6$ para $a = 0,38$ e $a = 0,73$ enquanto para $a = 0,51$ temos $S_{bb} = 0,3622$. Para $a = 0,38$ temos um baixo valor de S_b e um alto valor de S_{bb} . Este resultado pode ser explicado pelo fato de que há uma grande região sólida em preto correspondente a bacia do atrator *shearless*. Mas há uma região significativa de *mixing* próxima a $y = \pm 2$. Com isso, temos um valor significativo de S e um valor de N_B menor e, com esses dois fatores, há um aumento no valor de S_{bb} . Já para o caso $a = 0,51$, tanto S quanto N_B são pequenos e há um aumento no valor de N_b , comparando com o caso $a = 0,38$, pela fronteira entre a bacia roxa e laranja. Ambos resultados diminuem S_b e S_{bb} . Por último, temos o caso $a = 0,73$. O alto valor de S_{bb} para $a = 0,73$ pode ser explicado pela grande região de *mixing*: o valor de S é maior e mesmo que o valor de N_B seja maior também, a razão $S_{bb} = S/N_B$ é relativamente grande.

Por último, queremos destacar que os resultados das entropias para $a = 0,38$ e $a = 0,51$ são claramente diferentes, mesmo ambos apresentados a coexistência apenas de atratores periódicos no espaço de fase. Com isso, podemos ver que espaços de fase com atratores da mesma natureza podem apresentar diferentes cenários de interação entre as bacias de atração e estas diferenças podem ser identificadas pelos valores distintos de entropia de bacia e entropia de borda de bacia.

5 MAPA DO SENO-CÍRCULO NÃO TWIST: UM MAPA UNIDIMENSIONAL DERIVADO DO MAPA PADRÃO NÃO TWIST

Nos capítulos anteriores, estudamos o mapa padrão não *twist*, sua extensão não simétrica e simétrica e a sua versão dissipativa. Estes mapas são bem estabelecidos na literatura e nós analisamos alguns fatores que ainda não haviam sido estudados. Neste último capítulo, propomos um novo mapa, o mapa do seno-círculo não *twist*, um mapa unidimensional que segue a construção do mapa do seno-círculo original a partir do mapa de Chirikov-Taylor, mas baseado no mapa padrão não *twist*. Os resultados inéditos deste capítulo foram publicados na revista *Physical Review E* sob o título "Dynamics, multistability, and crisis analysis of a sine-circle nontwist map".

Antes de apresentarmos o novo mapa e nossas análises, fazemos uma breve revisão sobre o mapa do seno círculo. Apresentaremos sua construção a partir do mapa de Chirikov-Taylor e suas principais características.

5.1 MAPA DO SENO-CÍRCULO

O mapa de Chirikov-Taylor, também chamado de mapa do rotor pulsado e mais comumente conhecido como mapa padrão, é um mapa bidimensional definido pelas equações,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= I_n + \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi\theta_n), \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + I_{n+1}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

onde θ e I são as coordenadas conjugadas, ambas calculadas com mod 1. O parâmetro K refere-se a amplitude da perturbação que atua sobre a coordenada radial do sistema [32]. O mapa padrão é uma mapa conservativo, como podemos confirmar pelo cálculo do determinante da matriz Jacobiana,

$$|\mathcal{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial I_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & K \cos(2\pi\theta_n) \\ 1 & 1 + K \cos(2\pi\theta_n) \end{vmatrix} = 1, \quad (5.2)$$

que assume um valor unitário.

O mapa padrão pode ser descrito por um função Hamiltoniana, definida por [29],

$$H = \frac{1}{2}I^2 - K \cos(2\pi\theta) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right) \quad (5.3)$$

onde o primeiro termo refere-se ao sistema não perturbado e o segundo, à contribuição dos sucessivos "kicks" (impulsos) com período T . Ao aplicar as equações de Hamilton (2.6) na função (5.3) e integrando as equações entre dois impulsos consecutivos, n e $n + 1$, chegamos as equações que regem o mapa, as equações (5.1) [29].

O mapa padrão é um mapa *twist*, como podemos ver ao aplicar a condição *twist* (equação (2.23) para as equações em (5.1),

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial I_n} = \frac{\partial I_{n+1}}{\partial I_n} = 1 \quad (5.4)$$

Diferente do caso não *twist*, o mapa padrão *twist* apresenta uma derivada $\partial \theta_{n+1} / \partial I_n$ não nula para qualquer ponto (θ, I) no espaço de fase. De fato, $\partial \theta_{n+1} / \partial I_n = 1$ para qualquer ponto (θ, I) .

O mapa padrão é um paradigma para o estudo de sistemas dinâmicos, uma vez que ele emerge em muitos problemas físicos [29]. Grande parte dos resultados obtidos para este mapa continuam válidos para toda a classe de mapas *twist* [32], o que o torna de grande interesse para a descrição da dinâmica local de sistemas não lineares mais complexos [4, 32]. A transição para um regime caótico e o comportamento caótico em si podem ser compreendidos pela análise do mapa padrão, uma vez que o mapa fornece uma explicação abrangente sobre o efeito de perturbações ressonantes no sistema, como é descrito pelo teorema de Poincaré-Birkhoff e pelo teorema KAM [32].

O mapa do seno círculo pode ser obtido a partir das equações (5.1) que regem o mapa padrão. A partir de uma manipulação matemática, onde substituímos I_{n+1} em θ_{n+1} consideramos I_n um valor constante, $I_n = \Omega$, e fazemos a substituição $\theta = x$ e $K \rightarrow -K$, encontramos [18],

$$x_{n+1} = x_n + \Omega - \frac{K}{2\pi} \text{sen}(2\pi x_n), \quad \text{mod } 1 \quad (5.5)$$

conhecido como mapa do seno-círculo ou mapa do círculo padrão [70, 71]. O mapa (5.5) também pode ser obtido pelo mapa padrão dissipativo, como mencionado por Lichtenberg e Lieberman [4] e Bohr, Bak e Jansen [72], ou pela análise da fase de osciladores com um forçamento externo periódico [23]. O mapa do seno-círculo é comumente utilizado para descrever a dinâmica de um oscilador com frequência natural Ω acoplado a outro, de frequência unitária, com um acoplamento de amplitude K [22, 73].

O mapa do seno-círculo apresenta uma forma matemática simples, entretanto, sua dinâmica intrínseca é nada simples ou trivial, uma vez que a natureza das soluções depende do valor de K . Antes de apresentarmos o mapa que propomos e os novos resultados, fazemos uma breve revisão das principais propriedades do mapa do seno-círculo. Propomos esta revisão com o intuito de facilitar o entendimento dos novos resultados, referente ao mapa do seno-círculo não *twist*, que serão apresentados nas próximas seções.

1. Conservação de energia e atratores do sistema

Para determinar se um mapa unidimensional $x_{n+1} = M(x_n)$ é conservativo, calculamos o valor da derivada $\frac{dM}{dx_n}$. Para o mapa do seno-círculo definido pela equação (5.5), temos,

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 1 - K \cos(2\pi x_n), \quad (5.6)$$

que assume um valor não unitário para qualquer $K > 0$. Sendo assim, o mapa é dissipativo para $K \neq 0$. Para $K = 0$, correspondente ao caso onde não há acoplamento entre os osciladores [73], o mapa é conservativo.

A seguir, na Figura 30, apresentamos algumas soluções do mapa do seno-círculo para diferentes valores de K e Ω .

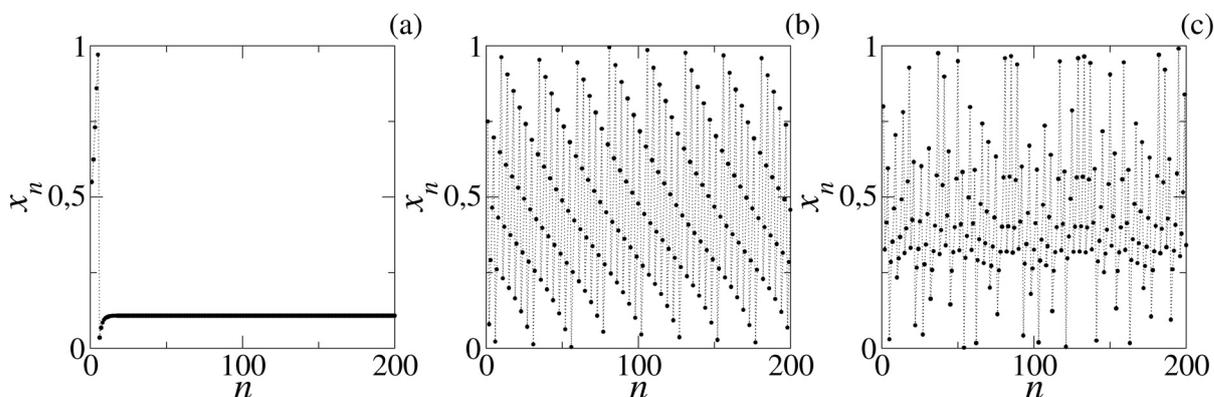


Figura 30 – Séries temporais para diferentes soluções do mapa do seno-círculo. Em (a), temos $(\Omega, K) = (0,05; 0,5)$ e uma série temporal que converge para um ponto fixo. Para (b), $(\Omega, K) = (0,25; 0,5)$ e a solução preenche todo domínio de x de forma ordenada, indicando comportamento quase periódico. Por último, em (c), temos $(\Omega, K) = (0,3, 1,5)$ e uma trajetória que percorre todo o domínio de x de forma desordenada e irregular, apontando comportamento caótico. Para todas as séries, a condição inicial é $x_0 = 0,5$.

Para a Figura 30 (a), observamos um comportamento transiente nas primeiras iterações. Esse comportamento é característico de sistemas dissipativos, onde as soluções tem um comportamento não permanente até "entrarem" em um atrator. Neste caso, o atrator é um ponto fixo de período 1. Observamos que a série temporal apresentada na Figura 30 (b) ocupa todo o domínio de x , mas de forma ordenada, indicando um comportamento quase regular. Diferentemente, na Figura 30 (c), a solução ocupa todo o domínio de forma desordenada, indicando um possível comportamento caótico no sistema.

2. Expoente de Lyapunov e natureza dos atratores

Como vimos no item anterior, as soluções do mapa do seno-círculo podem apresentar diferentes comportamentos para diferentes valores de K e Ω . Para identificar estes comportamentos, utilizamos novamente o expoente de Lyapunov, que para um mapa unidimensional, é

calculado diretamente por,

$$\lambda = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{T-1} \log |M'(x_n)|, \quad (5.7)$$

onde M' é a derivada do mapa M , *i.e.*, $M' \equiv dM(x)/dx$ [6].

Como o mapa é unidimensional, há apenas um expoente de Lyapunov cujo valor informa sobre a natureza da solução. Assim como vimos no capítulo anterior, um valor negativo para λ representa um atrator periódico enquanto um valor positivo indica comportamento caótico. Para $\lambda = 0$, temos um atrator quase periódico, um ponto de bifurcação ou uma órbita marginalmente estável [21, 35].

O valor do expoente de Lyapunov para as séries temporais apresentadas na Figura 30 estão na tabela 4. Para o cálculo de λ , utilizamos um tempo de iteração $n=10^6$.

<i>Série temporal</i>	λ	<i>Tipo de solução</i>
(a)	-0,493	Periódica
(b)	$-4,105 \times 10^{-7}$	Quase periódica
(c)	0,236	Caótica

Tabela 4 – Expoente de Lyapunov para cada uma das séries temporais apresentadas na Figura 30. Na terceira coluna, temos o tipo de solução identificado a partir do valor de λ , onde $\lambda = 0$ indica comportamento quase regular, $\lambda > 0$ e $\lambda < 0$ indicam comportamento caótico e periódico, respectivamente.

Os valores de λ apresentados na tabela 4 indicam o tipo de comportamento que as séries temporais da Figura 30 assumem. Para a série na Figura 30 (a), o valor de λ é negativo, indicando um comportamento periódico. Já para a série em (b), temos um valor de λ muito pequeno, que representa a situação com expoente nulo. Numericamente, obter $\lambda = 0$ é algo infactível, por isso consideramos, neste capítulo, que $|\lambda| < 10^{-4}$ indica expoente nulo. Para a última série da Figura 30, o expoente de Lyapunov é positivo, confirmando um comportamento caótico.

3. Criticalidade do mapa e o espaço de parâmetros

Os sistemas mais simples capazes de apresentar comportamento caótico são os mapas unidimensionais não invertíveis [6]. Um mapa $M(x)$ é dito ser invertível quando a função que o define é uma função bijetora, isto é, apresenta uma associação um-para-um [5]. Dessa forma, é possível encontrar o mapa inverso M^{-1} tal que seu domínio é a imagem de M . Um mapa invertível também apresenta um comportamento monotônico, isto é, se M varia monotonicamente com x , as soluções são regulares e o comportamento caótico não é possível. Quando o mapa perde a sua invertibilidade, este comportamento irregular pode surgir no sistema.

Para verificar a invertibilidade do mapa do seno-círculo, podemos calcular a derivada M' e verificar se ela assume um valor nulo para algum valor de Ω e K . Caso $M' = 0$, temos um valor extremo (máximo ou mínimo) para a função $M(x)$ o que configura um comportamento não

monotônico da função M , a não-invertibilidade do sistema e, conseqüentemente, a possibilidade de comportamento caótico.

Sendo a derivada do mapa do seno-círculo dada pela equação (5.6), temos que um valor nulo da derivada é possível apenas para $K \geq 1$. Para melhor compreensão deste resultados, podemos construir o espaço de parâmetros para a invertibilidade do mapa. Para cada valor de Ω e K , tal que $\Omega \in [0, 1]$ e $K \in [0, 2]$, calculamos o valor da derivada (5.6) para 10^5 valores de $x \in [0, 1]$. Se para algum desses valores de x , a derivada assumir um valor nulo, o mapa não é invertível e o ponto (Ω, K) é marcado no espaço de parâmetros. O resultado para o espaço de parâmetros para a invertibilidade do mapa é apresentado na Figura 31 (a).

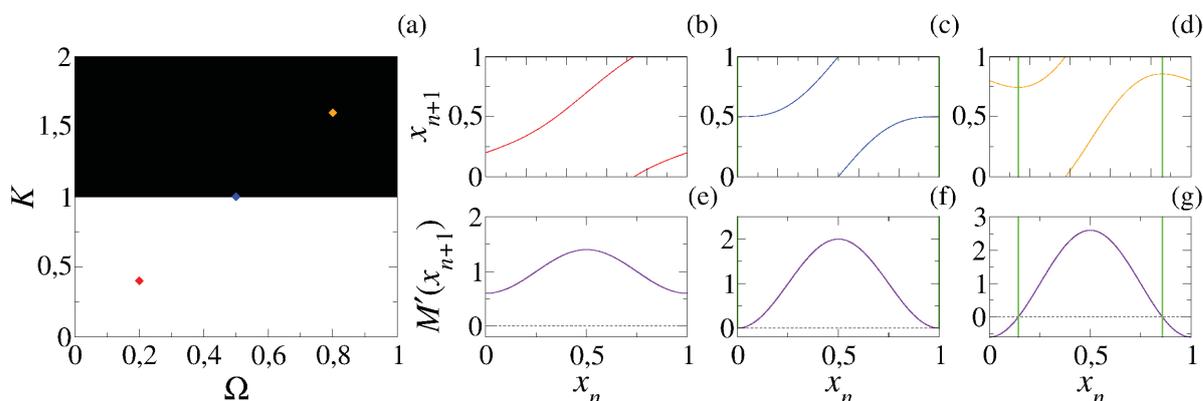


Figura 31 – Invertibilidade para o mapa do seno-círculo. (a) Espaço de parâmetros para a invertibilidade do mapa, onde os pontos em branco indicam onde o mapa é invertível. Os pontos em preto indicam onde o mapa apresenta derivada nula, deixando de ser invertível e tornando soluções caóticas uma solução possível para o mapa. Os gráficos $x_{n+1} \times x_n$ nos painéis (b), (c) e (d) correspondem ao pares de parâmetros indicados pelos símbolos em vermelho, azul e laranja da Figura (a), respectivamente. As derivadas para cada caso estão representadas nas Figuras (e)-(g). As linhas em verde nas figuras (c),(d), (f) e (g) destacam a não invertibilidade do mapa: os pontos onde o gráfico $x_{n+1} \times x_n$ assume um valor extremo e onde a derivada, um valor nulo.

Pelo espaço de parâmetros, na Figura 31 (a), observamos que o mapa deixa de ser invertível na linha $K = 1$, que é o parâmetro crítico do sistema. Para $K < 1$ o mapa é denominado subcrítico, não há um valor de x_n onde a derivada é nula, ele apresenta um comportamento monotônico, é invertível e apenas soluções periódicas e quase periódicas são possíveis [4,6,21,22]. Para $K > 1$, o mapa é dito ser supercrítico, ele perde sua invertibilidade e monotonicidade e exibe soluções caóticas [4, 22, 73]. A criticalidade para o mapa ocorre em $K = 1$, onde ocorre a perda da invertibilidade a partir de um ponto de inflexão de inclinação zero, por uma inflexão cúbica em $x = 0$ [4, 74, 75].

Para ilustrar os resultados de invertibilidade e criticalidade, apresentamos os gráficos $x_{n+1} \times x_n$ juntamente com as derivadas para as três situações discutidas: subcrítico $(\Omega, K) = (0,2; 0,4)$, crítico $(\Omega, K) = (0,5; 1,0)$ e supercrítico $(\Omega, K) = (0,8; 1,6)$, indicados pelos símbolos em vermelho, azul e laranja, respectivamente. Os gráficos são apresentados nas Figuras 31 (b)-(d) e as respectivas derivadas nos painéis (e)-(g). Para facilitar a observação, o gráfico $x_{n+1} \times x_n$ é apresentado na mesma cor que o referente ponto no espaço de parâmetros da Figura 31 (a).

Para a Figura 31 (b), temos o mapa no regime subcrítico, com $\Omega = 0,2$ e $K = 0,4$, onde ele é invertível e não apresenta comportamento caótico. Pelo gráfico $x_{n+1} \times x_n$, observamos um comportamento monotônico em relação a x , não havendo nenhum ponto extremo. Este último é verificado pelo valor da derivada, na Figura 31 (e), que não assume um valor nulo para nenhum valor de x . Essa situação é modificada para os casos apresentados nas Figuras 31 (c) e (d), onde $(\Omega, K) = (0,5; 1,0)$ e $(\Omega, K) = (0,8; 1,6)$, respectivamente. Para estes casos, a derivada assume um valor nulo, em $x = 0$ para $K = 1$ e $x \approx 0,143$ e $x \approx 0,857$ para $K = 1,6$. Colocamos no gráfico a linha tracejada $f'(x_{n+1}) = 0$ para facilitar a identificação de quando a derivada se anula. O mapa para $K = 1,0$, a derivada nula corresponde a um ponto de inflexão enquanto para $K = 1,6$, temos pontos de máximo e mínimo locais. Assim, podemos ver que, para $K > 1,0$, um valor de x_n corresponde a mais de um valor de x_{n+1} , quebrando assim a invertibilidade do mapa.

5.2 MAPA DO SENO-CÍRCULO NÃO TWIST

O mapa do seno-círculo pode ser obtido a partir de uma manipulação matemática simples sobre o mapa padrão. O que aconteceria se realizássemos o mesmo procedimento matemático mas tomando como ponto de partida o mapa padrão não *twist*? Para responder esta pergunta, nós obtemos e estudamos o mapa do seno-círculo não *twist*.

O mapa do seno-círculo não *twist* é obtido a partir do mapa padrão não *twist*, definido pelas equações (2.25), que repetimos aqui para relembrar,

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= y_n - b \operatorname{sen}(2\pi x_n), \\ x_{n+1} &= x_n + a(1 - y_n^2), \quad \text{mod } 1. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Repetindo a construção apresentada na seção passada, substituímos y_{n+1} em x_{n+1} e consideramos y_n constante, $y_n = \Omega$. Dessa forma, encontramos o mapa,

$$x_{n+1} = x_n + a\{1 - [\Omega - b \operatorname{sen}(2\pi x_n)]^2\}, \quad (5.9)$$

onde, seguindo os intervalos estipulados para o mapa padrão não *twist*, $x \in [0, 1]$, $a \in [0, 1]$, $b \in \mathbb{R}$ e $\Omega \in \mathbb{R}$. Uma vez que o SNM é uma aproximação ao redor de $y \approx 0$ [11], nós estipulamos $\Omega \in [-1, 1]$ como intervalo de interesse, para concordar com o intervalo $y \in [-1, 1]$ utilizado nas referências [15, 37, 38, 76–78].

Nós nomeamos o mapa (5.9) como mapa do seno-círculo não *twist* pois sua construção é idêntica a feita para o mapa do seno-círculo, mas utilizando o mapa padrão não *twist*. Ele é um mapa circular, uma vez que ele pode ser escrito como um mapa circular genérico, definido como [4, 72],

$$\theta_{n+1} = f(\theta_n) = \theta_n + \Omega + g(\theta_n), \quad (5.10)$$

tal que $g(\theta_n)$ satisfaz a condição de periodicidade $g(x_{n+1}) = g(x_n) \pmod{1}$. Para o nosso mapa, temos que ele pode ser escrito na forma (5.10), tal que,

$$x_{n+1} = x_n + \Phi + 2ab\Omega \operatorname{sen}(2\pi x_n) - ab^2 \operatorname{sen}^2(2\pi x_n) \quad (5.11)$$

onde $\Phi = a - a\Omega^2$ e $g(x_n) = 2ab\Omega \operatorname{sen}(2\pi x_n) - ab^2 \operatorname{sen}^2(2\pi x_n)$ satisfaz $g(x_n) = g(x_{n+1}) \pmod{1}$.

O mapa do seno círculo não *twist* pode ser considerado uma aproximação local do mapa padrão não *twist* ou uma extensão do mapa do seno-círculo, uma vez que podemos escrever o mapa (5.9) como,

$$x_{n+1} = x_n + \Phi - K_1 \operatorname{sen}(2\pi x_n) + K_2 \operatorname{sen}^2(2\pi x_n) \quad (5.12)$$

onde $K_1 = -2ab\Omega$, $K_2 = -ab^2$ e $\Phi = a - a\Omega^2$. Comparando as equações (5.5) e (5.12), vemos que o formato é o mesmo, com exceção do último termo $K_2 \operatorname{sen}^2(2\pi x_n)$, que corresponde a extensão. Os termos Ω e Φ são correspondentes, uma vez que eles são o número de rotação quando a perturbação é nula ($K = K_1 = K_2 = 0$) [4].

Após apresentar o nosso mapa, provar que ele é circular e que pode ser considerado uma extensão do mapa do seno-círculo clássico, voltamos agora às três características estudadas na seção anterior, e analisamos as mesmas propriedades para o mapa do seno-círculo não *twist*.

1. Conservação de energia e atratores do sistema

Sendo a derivada do mapa (5.9) definida por,

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 1 + 4\pi ab[\Omega \cos(2\pi x_n) - b \operatorname{sen}(2\pi x_n) \cos(2\pi x_n)] \quad (5.13)$$

temos que o mapa não é conservativo e não preserva a área $\left(\frac{dx_{n+1}}{dx_n} \neq 1\right)$ para qualquer $a, b \neq 0$. Sendo assim, temos que o mapa é um sistema dissipativo com dependência em três parâmetros, a , b e Ω . Por isto, não existe uma curva de criticalidade simples no espaço de parâmetros, o que torna impossível prever o comportamento caótico no sistema. Então utilizamos o expoente de Lyapunov para identificar o comportamento caótico.

2. Expoente de Lyapunov e natureza dos atratores

Uma vez que é difícil identificar a perda da invertibilidade para o mapa (5.9), por ele depender de três parâmetros, utilizamos o expoente de Lyapunov para determinar a natureza dos atratores. Utilizando a definição do expoente de Lyapunov para um mapa unidimensional apresentada na equação (5.7) com a derivada do mapa da equação (5.13), podemos calcular o valor de λ e determinar se a solução é quase periódica ($\lambda = 0$), periódica ($\lambda < 0$) ou caótica ($\lambda > 0$).

Na Figura 32, apresentamos três séries temporais do mapa do seno-círculo não *twist*. Apresentamos a série apenas no intervalo $n \in [0, 300]$ para ressaltar o seu comportamento estacionário e também destacar o transiente inicial. Calculamos o expoente de Lyapunov para cada série com um tempo de iteração $n = 10^6$ e apresentamos na tabela 5.

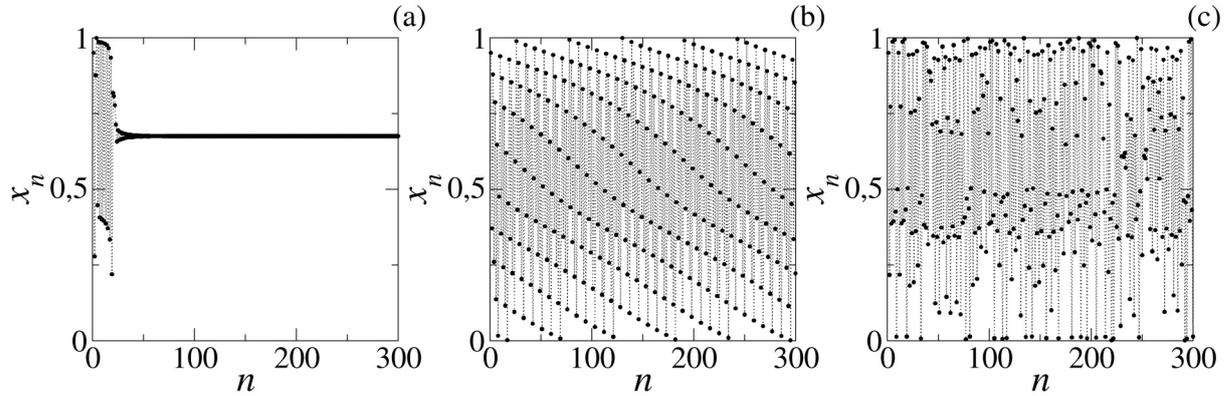


Figura 32 – Séries temporais para o mapa do seno-círculo não *twist*, para parâmetros $a = 0,6$, $\Omega = 0,5$ e diferentes valores de b . Em (a), $b = 0,56$ e a série temporal converge para um ponto fixo após um transiente. Em (b), temos $b = 0,15$ e uma solução quase periódica que ocupa todo o domínio de x de forma ordenada, o contrário do caso observado em (c) onde $b = 0,79$ e a solução é caótica, preenchendo o domínio de forma desordenada. Para todas as séries, a condição inicial é $x_0 = 0,5$.

Série temporal	λ	Tipo de solução
(a)	$-0,104$	Periódica
(b)	$-2,975 \times 10^{-7}$	Quase periódica
(c)	$0,625$	Caótica

Tabela 5 – Expoente de Lyapunov referente as três séries temporais apresentadas na Figura 32. A partir do expoente λ determinamos a natureza da solução apresentada: periódica ($\lambda < 0$), quase periódica ($\lambda = 0$) e caótica ($\lambda > 0$).

As três séries temporais na Figura 32 apresentam comportamentos distintos entre si, o que é confirmado pelos diferentes valores do expoente de Lyapunov na tabela 5. Para a Figura 32 (a), temos uma solução periódica de período 1, um ponto fixo e expoente λ negativo, $\lambda = -0,104$. Já para a Figura 32 (b), nós observamos pontos distribuídos no intervalo $x \in [0, 1]$ que preenchem todo o intervalo e apresentam um comportamento ordenado. Este é o comportamento quase regular que é verificado pelo valor nulo do expoente de Lyapunov (numericamente $\lambda = -2,975 \times 10^{-7}$). No último caso, apresentado na Figura 32 (c), observamos um comportamento irregular, com pontos distribuídos de uma forma desorganizada no domínio de x . Esta solução apresenta um comportamento caótico, confirmado pelo valor positivo do expoente de Lyapunov, $\lambda = 0,625$.

3. Criticalidade e o espaço de parâmetros

Para identificar a invertibilidade do mapa do seno-círculo não *twist*, nós repetimos o procedimento realizado para construir o espaço da parâmetros da Figura 31 (a). Como exemplo,

fixamos $\Omega = 0,3$ e estudamos a invertibilidade no intervalo $a \in [0, 1]$ e $b \in [0, 2]$. O espaço de parâmetros resultante é apresentado na Figura 33 (a).

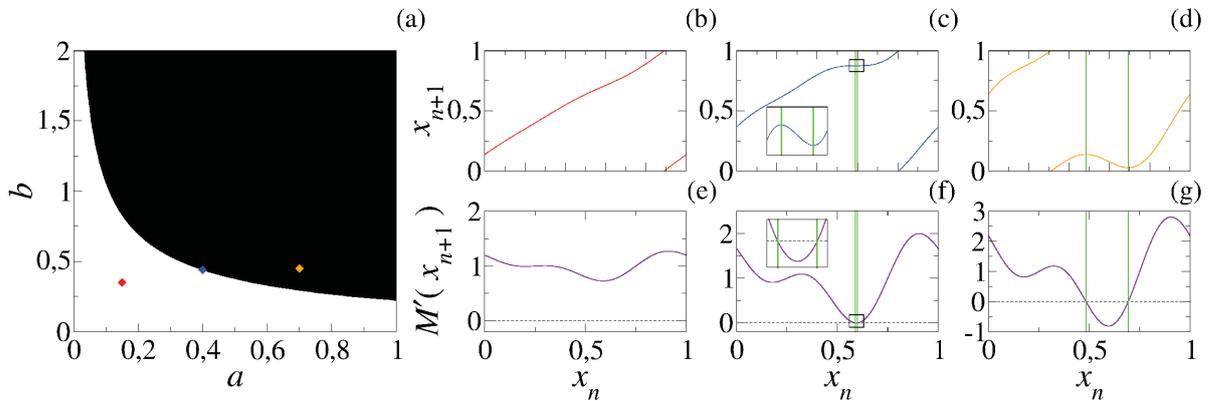


Figura 33 – Invertibilidade para o mapa do seno-círculo não *twist*. Em (a), apresentamos o espaço de parâmetros para a invertibilidade do mapa, onde os pontos em preto indicam onde o mapa deixa de ser invertível, permitindo a existência de soluções caóticas. Os pontos em branco indicam parâmetros onde o mapa é invertível e apenas soluções periódicas e quase periódicas são possíveis. Os gráficos $x_{n+1} \times x_n$ correspondentes aos pares de parâmetros indicados pelos símbolos em vermelho, azul e laranja da Figura (a) estão nas Figuras (b), (c) e (d), respectivamente. As derivadas para cada caso estão representadas nas Figuras (e)-(g). As linhas em verde nos gráficos $x_{n+1} \times x_n$ e $M'(x_{n+1}) \times x_n$ indicam os pontos onde a derivada é nula e o mapa apresenta pontos de extremo locais.

Comparando os espaços de parâmetros para a invertibilidade do mapa do seno-círculo clássico (Figura 31 (a)) e do mapa do seno-círculo não *twist* (Figura 33 (b)), observamos que para o novo mapa a linha crítica não é tão simples como uma função constante, o que torna mais difícil encontrar os pares de parâmetros críticos (a, b) . De fato, como não conseguimos encontrar a linha crítica analiticamente, o método numérico que utilizamos nos fornece uma estimativa de quando o mapa perde sua invertibilidade.

Para este novo mapa, também escolhemos três pares de parâmetros indicando quando o sistema está no regime subcrítico (ponto vermelho, $a = 0,15$ e $b = 0,35$), crítico (ponto em azul, $a = 0,4$ e $b = 0,44$) e supercrítico (ponto em laranja, $a = 0,7$ e $b = 0,45$). O gráfico $x_{n+1} \times x_n$ de cada ponto estão nas Figuras 33 (b)-(d), onde novamente escolhemos a mesma cor do ponto referente. As derivadas referentes às Figuras (b), (c) e (d) são apresentadas nas Figuras (e), (f) e (g), respectivamente.

Para o caso subcrítico, onde o mapa é invertível, observamos um comportamento monotônico no gráfico $x_{n+1} \times x_n$ da Figura 33 (a), comprovado pela derivada, no painel (e), que não assume valor nulo no domínio de x . Para o caso crítico, observamos que a derivada assume um valor nulo para $x \approx 0,6$. De fato, fazendo uma ampliação ao redor deste valor, encontramos que a derivada assume um valor nulo para dois pontos $x \approx 0,589$ e $x \approx 0,599$. Esta é a limitação do método utilizado para constatar a invertibilidade, como temos apenas uma estimativa, é possível que não encontremos exatamente o valor crítico, apenas um valor aproximado. Por último, para o caso supercrítico, observamos um ponto de mínimo e máximo local na Figura 33 (d), verificados pelo valor nulo da derivada.

Para demonstração da invertibilidade, fixamos Ω e construímos o espaço de parâmetro $a \times b$. Mas podemos b ou a e construir os espaços $\Omega \times a$ e $\Omega \times b$. Os espaços resultantes também apresentam uma curva crítica mais complexa que a linha constante do caso do mapa do seno-círculo original.

5.3 ANÁLISE DINÂMICA DO MAPA

Na seção anterior, vimos que os atratores apresentam diferentes comportamentos para diferentes valores de parâmetros (Ω, a, b) . Nesta seção, analisamos a evolução dos atratores à medida que o valor de um parâmetro é modificado. Esta análise é baseada nos diagramas de bifurcação, que mostram a posição e a forma do atrator no domínio de x , e no expoente de Lyapunov, que nos informa a natureza do atrator.

Em nosso trabalho, nós analisamos a evolução dos atratores com a variação do parâmetro b , fixando a e Ω . Como estamos interessados na evolução dos atratores, os diagramas de bifurcação são construídos da seguinte maneira. Primeiro, escolhemos como condição inicial $x_0 = 0,5$ para o primeiro valor de b . Então, evoluímos a solução por 10^4 iteradas e apresentamos no diagrama os últimos 2000 pontos, evitando assim o comportamento transiente. De forma simultânea, calculamos o expoente de Lyapunov como explicado na seção anterior e apresentamos seu valor na mesma figura, com o intuito de identificar a solução apresentada no diagrama. Para o próximo valor de b , a condição inicial é a última iterada da solução do parâmetro b anterior.

Os diagramas de bifurcação para $a = 0,1$, $\Omega = \pm 0,5$ e $\Omega = 0,0$, e valor de b variando entre $b \in (0, 2]$, juntamente com o perfil do expoente de Lyapunov, são apresentados na Figura 34.

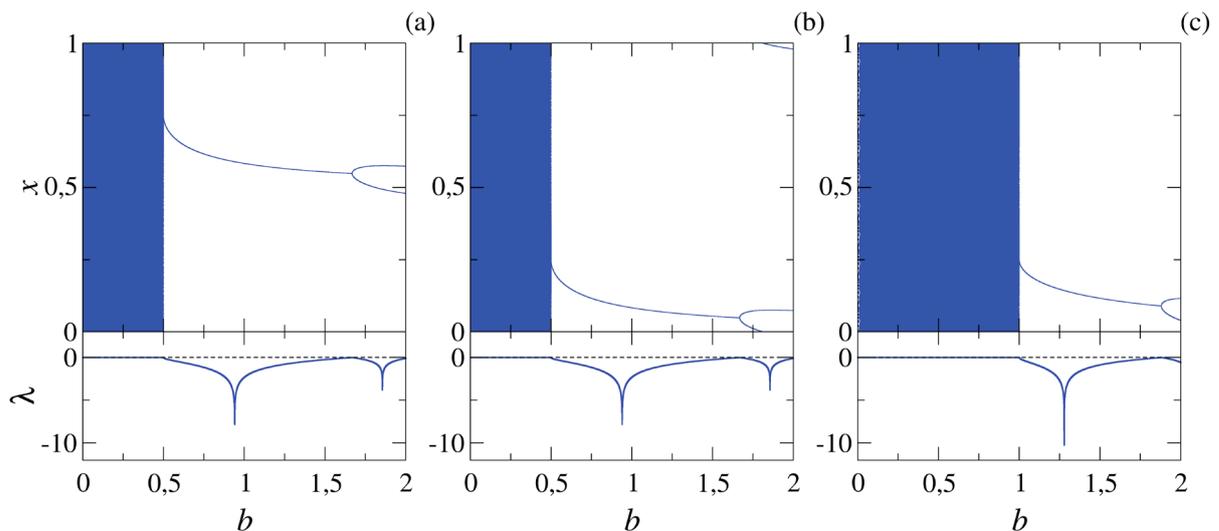


Figura 34 – Diagrama de bifurcação e expoente de Lyapunov em relação ao parâmetro b , para $a = 0,1$ e (a) $\Omega = 0,5$, (b) $\Omega = -0,5$ e (c) $\Omega = 0,0$. A linha traceja evidencia $\lambda = 0$. Nos três diagramas, observamos um atrator quase periódico ($\lambda = 0$) sendo substituído por um atrator periódico ($\lambda < 0$) de período 1 que, posteriormente, bifurca em um atrator de período 2.

A partir dos diagramas de bifurcação juntamente com os expoentes de Lyapunov apre-

sentados na Figura 34, identificamos dois tipos de atratores, um atrator que preenche o domínio de x que bifurca em um atrator periódico de período 1. Este cenário é observado para os três valores de Ω . Pelo expoente de Lyapunov apresentado nos painéis inferiores, observamos que os atratores que preenchem o domínio são atratores quase periódicos, caracterizados por um expoente nulo, $\lambda = 0$, que sofrem uma bifurcação onde um atrator periódico, com $\lambda < 0$, emerge. A bifurcação ocorre aproximadamente em $b = 0,5$ para $\Omega = \pm 0,5$ e em $b = 1,0$ para $\Omega = 0,0$. O ponto fixo de período 1 que emerge da bifurcação eventualmente sofre uma bifurcação de duplicação de período e é substituído por um atrator de período 2, para $b > 1,5$, para os três valores de Ω analisados.

Os três diagramas de bifurcação da Figura 34 apresentam bifurcações comuns para todos os valores de Ω estudados. Uma vez que o mapa é unidimensional, podemos tentar analisar a bifurcação analiticamente.

5.3.1 Análise de bifurcação

Bifurcação é definida como uma mudança qualitativa na dinâmica do sistema quando o parâmetro de controle é variado [6]. Esta mudança no sistema ocorre em um ponto específico, denominado ponto de bifurcação, localizado no valor do parâmetro onde ocorre a bifurcação. O estudo de bifurcações tem grande relevância uma vez que podem ser a base de modelos para transições e instabilidades de sistemas físicos [1]. Em uma bifurcação, pontos fixos podem ser criados e destruídos, como na bifurcação do tipo sela-nó, ou a sua estabilidade destes pontos pode ser modificada, como na bifurcação transcritical [1]. Um estudo detalhado sobre bifurcações pode ser encontrado nas referências [1, 5, 6, 30].

Para mapas unidimensionais, podemos encontrar as bifurcações a partir da análise de suas derivadas, uma vez que as bifurcações ocorrem no ponto onde o módulo da derivada $\frac{dx_{n+1}}{dx_n}$ assume um valor unitário [5, 6]. Caso a derivada assuma um valor positivo, isto é $\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 1$, a bifurcação pode ser do tipo sela nó, forquilha¹ ou transcritical. Já se a derivada assumir um valor -1, a bifurcação que ocorre é do tipo duplicação de período [5, 6]. Caso a derivada seja positiva, também precisamos calcular a derivada em relação ao parâmetro do mapa: caso a derivada assuma um valor não nulo, a bifurcação é do tipo sela-nó, caso contrário, temos uma bifurcação transcritical/forquilha [5, 6]. Neste trabalho, não analisaremos a bifurcação de duplicação de período, focaremos na bifurcação que ocorre nos diagramas de bifurcação da Figura 34, onde um atrator quase periódico desaparece e um atrator de período um emerge.

O ponto de bifurcação (x^*, α^*) pode ser calculado pela equação,

$$\left. \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \right|_{x^*, \alpha^*} = 1. \quad (5.14)$$

onde α é o parâmetro que é variado na análise da bifurcação de atratores. Sendo a derivada

¹ Nos livros textos, a bifurcação forquilha também é denominada como *pitchfork*.

definida pela equação (5.13), temos,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \right|_{x^*} &= 1 + 4\pi ab \cos(2\pi x^*) [\Omega - b \sin(2\pi x^*)] = 1, \\ 4\pi ab \cos(2\pi x^*) [\Omega - b \sin(2\pi x^*)] &= 0, \\ \cos(2\pi x^*) [\Omega - b \sin(2\pi x^*)] &= 0. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Pela equação (5.15) apresentada acima, temos duas situações possíveis: $\cos(2\pi x^*) = 0$ ou $\Omega - b \sin(2\pi x^*) = 0$. Isto nos leva aos seguintes valores de x^* ,

$$\begin{cases} \cos(2\pi x^*) = 0 \\ \Omega - b \sin(2\pi x^*) = 0 \rightarrow x^* = \frac{1}{2\pi} \arcsen\left(\frac{\Omega}{b}\right). \end{cases} \begin{cases} x^* = \frac{1}{4}, \\ x^* = \frac{3}{4}, \end{cases} \quad (5.16)$$

Como dito, neste trabalho focamos na bifurcação onde um atrator quase periódico é substituído por um ponto fixo de período 1. Sendo assim, a iterada do ponto x^* deve ser idêntica a ele mesmo, isto é, $x_{n+1} = x_n$, com $x_n = x^*$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} x_{n+1}(x_n = x^*) &= x^*, \\ x^* &= x^* + a\{1 - [\Omega - b \sin(2\pi x^*)]^2\}, \\ b \sin(2\pi x^*) &= \Omega \pm 1. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Substituindo os pontos x^* da equação (5.16) na equação (5.17), obtemos os parâmetros Ω^* e b^* onde a bifurcação ocorre. Dessa forma, para $x^* = \frac{1}{4}$,

$$\begin{aligned} b^* \sin\left(2\pi \frac{1}{4}\right) &= \Omega^* \pm 1, \\ b^* - \Omega^* &= \pm 1. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Para $x^* = \frac{3}{4}$, temos,

$$\begin{aligned} b^* \sin\left(2\pi \frac{3}{4}\right) &= \Omega^* \pm 1, \\ b^* + \Omega^* &= \pm 1. \end{aligned} \quad (5.19)$$

Por último, para o ponto $x^* = \frac{1}{2\pi} \arcsen\left(\frac{\Omega}{b}\right)$, obtemos,

$$\begin{aligned} b^* \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{1}{2\pi} \arcsen\left(\frac{\Omega^*}{b^*}\right)\right) &= \Omega^* \pm 1, \\ \Omega^* &= \Omega^* \pm 1, \end{aligned} \quad (5.20)$$

tal que nenhum valor de Ω^* satisfaz a igualdade. Dessa forma, temos que $x^* = (1/2\pi) \arcsen(\Omega/b)$ não é um ponto fixo de período 1 e não será incluído na nossa análise.

Pelas relações em (5.18) e (5.19) é possível encontrar os valores de b^* e Ω^* , lembrando que os intervalos dos parâmetros são $b > 0$ e $-1 \leq \Omega \leq 1$. Sendo assim, para $x^* = 1/4$ e $x^* = 3/4$, a bifurcação ocorre quando $b^* - \Omega^* = 1$ e $b^* + \Omega^* = 1$, respectivamente. Este resultado está de acordo com a bifurcação observada nos três diagramas da Figura 34, onde a bifurcação ocorre em $x = 3/4$ para $b = 0,5$ e $\Omega = 0,5$ ($b + \Omega = 1$) e em $x = 1/4$ para $(\Omega, b) = (-0,5; 0,5)$ e para $(\Omega, b) = (0,0; 1,0)$, onde os dois casos satisfazem a relação $b - \Omega = 1$.

Com a análise que realizamos até agora, identificamos os pontos de bifurcação (Ω^*, b^*, x^*) onde ocorre uma bifurcação caracterizada por $\frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} \Big|_{(\Omega^*, b^*, x^*)} = 1$ e pela emergência de um ponto fixo de período 1. Para identificar o tipo de bifurcação que ocorre, precisamos analisar o valor da derivada do mapa em relação ao parâmetro de valor variável. Como dito, caso a derivada assuma um valor nulo, temos uma bifurcação transcítica, senão, a bifurcação é do tipo sela-nó. Calculando a derivada do mapa (5.9) em relação ao parâmetro b , temos,

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial b} = 2a \operatorname{sen}(2\pi x_n) [\Omega - b \operatorname{sen}(2\pi x_n)] \quad (5.21)$$

Para o ponto de bifurcação $(\Omega^*, b^* - \Omega^* = 1, x^* = 1/4)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial b} \Big|_{x^*=1/4, b-\Omega=1} &= 2a \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{1}{4}\right) \left[\Omega^* - b^* \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{1}{4}\right)\right], \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial b} \Big|_{x^*=1/4, b-\Omega=1} &= 2a[\Omega^* - b^*] = -2a, \end{aligned} \quad (5.22)$$

enquanto para o ponto $(\Omega^*, b^* + \Omega^* = 1, x^* = 3/4)$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial b} \Big|_{x^*=3/4, b^*+\Omega^*=1} &= 2a \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{3}{4}\right) \left[\Omega^* - b^* \operatorname{sen}\left(2\pi \frac{3}{4}\right)\right], \\ \frac{\partial x_{n+1}}{\partial b} \Big|_{x^*=3/4, b^*+\Omega^*=1} &= 2a[\Omega^* + b^*] = -2a. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Ao calcular o valor da derivada do mapa em relação ao parâmetro Ω , temos,

$$\frac{\partial x_{n+1}}{\partial \Omega} = -2a[\Omega - b \operatorname{sen}(2\pi x_n)]. \quad (5.24)$$

E, calculando o valor de (5.24) nos pontos de bifurcação, encontramos,

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial x_{n+1}}{\partial \Omega} \right|_{x^*=1/4, b^*-\Omega^*=1} &= -2a \left[\Omega^* - b^* \sin \left(2\pi \frac{1}{4} \right) \right] = -2a(\Omega^* - b^*) = 2a, \\ \left. \frac{\partial x_{n+1}}{\partial \Omega} \right|_{x^*=3/4, b^*+\Omega^*=1} &= -2a \left[\Omega^* - b^* \sin \left(2\pi \frac{3}{4} \right) \right] = -2a(\Omega^* + b^*) = -2a. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Para os dois pontos de bifurcação, a derivada do mapa em relação aos parâmetro b e Ω é não nula, para $a \neq 0$. Sendo assim, as bifurcações apresentadas nos diagramas da Figura 34 são do tipo sela-nó. Nos diagramas, observamos apenas uma bifurcação em cada caso: bifurcação no ponto $(\Omega^*, b^* + \Omega^* = 1, x^* = 3/4)$ para $\Omega = 0,5$ e no ponto $(\Omega^*, b^* - \Omega^* = 1, x^* = 1/4)$ para $\Omega = -0,5$ e $\Omega = 0,0$. Entretanto, a outra bifurcação pode ocorrer para outros atratores que podem coexistir com o atrator analisado. Mas, ela não é observada porque acompanhamos apenas a evolução de apenas um atrator.

5.4 MULTIESTABILIDADE

No capítulo anterior, estudamos o cenário de multiestabilidade no mapa padrão não *twist* dissipativo. Nós observamos a coexistência de atrator *shearless* e atratores periódicos, assim como a presença de bandas caóticas e atratores caóticos no toro. Nesta seção, investigamos a possibilidade de multiestabilidade no mapa unidimensional.

Como vimos, sistemas multiestáveis regularmente apresentam histerese no diagrama de bifurcação, isto é, quando variamos o parâmetro de controle em sentidos opostos, observamos a evolução de diferentes atratores e uma distinção entre os diagramas de bifurcação. Os diagramas apresentados na Figura 34 foram construídos variando o valor de b de $b = 0$ até $b = 2$. Agora, se construirmos o diagrama diminuindo o valor de b , podemos observar a evolução de outros atratores no diagrama. Sendo assim, utilizamos a mesma metodologia descrita na seção anterior, mas começamos em $b = 2$ e diminuimos o parâmetro até $b = 0$. Os diagramas construídos nos dois sentidos de variação de b são apresentados na Figura 35, juntamente com os expoentes de Lyapunov correspondentes.

Nos diagramas apresentados na Figura 35, observamos uma distinção entre os dois diagramas, que estão sobrepostos, para $b > 1,5$, nos casos $\Omega = \pm 0,5$, e para $b > 1,0$, quando $\Omega = 0,0$. A coexistência de pontos azuis e laranjas para um mesmo valor de b indicam a coexistência de diferentes atratores no sistema, logo, indicam multiestabilidade. Ao evoluir o parâmetro b , vemos que um atrator quase periódico, caracterizados por $\lambda = 0,0$, sofre uma bifurcação tipo sela-nó e um atrator de período 1 emerge, para $\Omega = \pm 0,5$. À medida que o parâmetro aumenta, em $b = 1,5$, ocorre novamente uma bifurcação sela-nó e um novo ponto fixo de período um emerge, como indicado pelo ponto de bifurcação verde e roxo nos diagramas (a) e (b) respectivamente. O atrator azul posteriormente sofre uma bifurcação de duplicação de período, bifurcação que não ocorre com o outro atrator no intervalo de b analisado. Esta

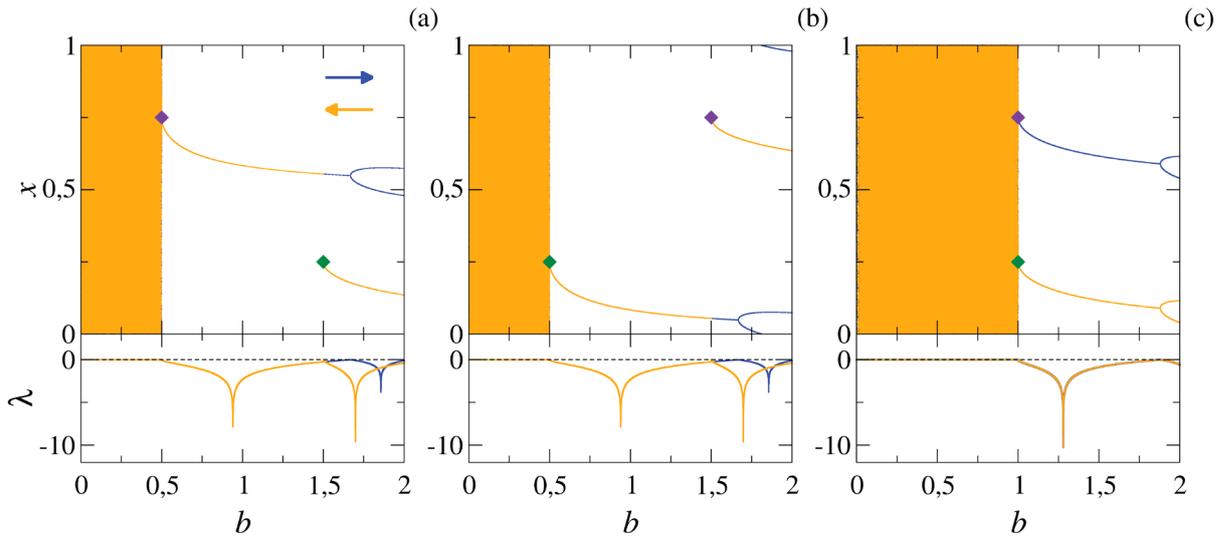


Figura 35 – Diagramas de bifurcação e expoentes de Lyapunov em relação ao parâmetro b , para os mesmos valores apresentados na Figura 34. O diagrama e o perfil do expoente de Lyapunov em azul (laranja) indicam o sentido de aumento (diminuição) de b . O sentido de variação do parâmetro também é indicado pelas setas coloridas. Os pontos em verde e em roxo indicam as bifurcações $b - \Omega = 1$ e $b + \Omega = 1$, respectivamente.

distinção entre os atratores também pode ser observada pelo Expoente de Lyapunov, onde há uma distinção entre as curvas laranja e azul para $b > 1,5$.

Para $\Omega = 0,0$ o cenário é diferente. As duas bifurcações $b + \Omega = 1$ e $b - \Omega = 1$ ocorrem no mesmo ponto. Sendo assim, na bifurcação sela-nó que ocorre em $b = 1$, observamos a emergência de dois pontos fixos de período 1 e ambos, posteriormente, sofrem uma bifurcação de duplicação de período. A distinção entre os dois atratores só é possível pelo diagrama de bifurcação, uma vez que o expoente de Lyapunov é equivalente para ambos atratores.

Analisando os pontos de bifurcação no diagramas, observamos que para $\Omega = \pm 0,5$, a bifurcação que ocorre em $b = 0,5$, destrói o atrator quase periódico e cria o atrator periódico de período 1. Já a bifurcação em $b = 1,5$, cria o cenário de multiestabilidade com a emergência de um segundo ponto fixo. Para $\Omega = 0,0$, as duas bifurcações ocorrem no mesmo ponto, e isso leva a um cenário de destruição do atrator quase periódico, à emergência dos pontos periódicos e ao cenário de multiestabilidade.

Com essa análise, nós concluímos que a bifurcação está relacionada com o cenário de multiestabilidade e com a mudança da natureza do atrator. Nos casos representados pelos diagramas da Figura 35, a multiestabilidade é composta por diferentes atratores periódicos. Mas nós não podemos afirmar que este sempre é o caso. Por este motivo, agora propomos uma metodologia para identificar os cenários de multiestabilidade possíveis para mapas unidimensionais não invertíveis.

O método que utilizamos para identificar os cenários de multiestabilidade é baseado no expoente de Lyapunov e na região ocupada pelo atrator no domínio de x . Se todas as condições iniciais estão na mesma bacia de atração, isto é, geram soluções que convergem para o

mesmo atrator, temos um cenário de atrator único. Numericamente, identificamos este cenário quando todas as soluções apresentam o mesmo expoente de Lyapunov e ocupam a mesma região de x , após algum transiente. Caso esse cenário não seja identificado, temos um cenário de multiestabilidade. A descrição do método é feita a seguir.

Para um conjunto de parâmetros (Ω, a, b) , nós escolhemos aleatoriamente uma condição inicial $x_0 \in [0, 1]$, evoluímos por 5×10^4 iterações e simultaneamente calculamos o expoente de Lyapunov, λ_{x_0} . Esta solução é a nossa solução de referência. Para identificar se todas as condições iniciais pertencem a mesma bacia de atração e, conseqüentemente, temos um cenário de atrator único, nós escolhemos outras 100 condições iniciais $x_i \in [0, 1]$, para $i = 1, 2, \dots, 100$ e evoluímos todas estas condições por 10^5 iterações. Evoluímos estas outras condições por um tempo maior porque estamos analisando o estado assintótico e utilizamos a última iterada da nossa solução de referência para identificar soluções periódicas. Simultaneamente a evolução temporal das soluções, nós calculamos os expoentes de Lyapunov, identificados por λ_{x_i} . A partir destas informações, nós dividimos os cenários de atratores para o sistema em cinco classes: atrator único, coexistência entre atratores periódicos, coexistência entre atrator periódico e caótico, caos e coexistência entre bandas caóticas. A identificação numérica de cada cenário é descrita abaixo.

1. Atrator único (AU)

Nós consideramos um cenário de atrator único quando todas as soluções convergem para um atrator periódico ou um atrator quase periódico. Para um cenário de atrator periódico único, temos que todas as soluções, x_i com $i = 0, 1, \dots, 100$, apresentam um expoente de Lyapunov negativo, numericamente $\lambda_i < -0,0001$. Para garantir que o atrator periódico é único, todas as 100 condições iniciais retornam ao valor de referência, isto é, considerando a última iterada da solução de referência, $x_0(5 \times 10^4)$, a condição $|x_i(n) - x_0(5 \times 10^4)| \leq 10^{-4}$ deve ser satisfeita por todas as soluções para $n > 5 \times 10^4$.

Caso a solução de referência x_0 convirja para um atrator quase periódico, numericamente $|\lambda_{x_0}| < -0,0001$, temos um cenário de atrator único. Para sistemas unidimensionais, o atrator quase periódico ocupa todo domínio de x , logo, ele é o único estado assintótico possível. Este não é o caso para sistemas de dimensões maiores, onde é possível a coexistência de diferentes atratores quase periódicos, como estudado nas referências [79–81] e também a coexistência de atrator quase periódico e atratores periódicos, como vimos no capítulo anterior para o mapa padrão não *twist* dissipativo

2. Coexistência de atratores periódicos (ME - P+P)

Em um cenário de multiestabilidade composto por diferentes atratores periódicos, os expoentes de Lyapunov de todas as soluções são negativos, isto é, $\lambda_{x_i} < 0$ (numericamente $\lambda_{x_i} < -0,0001$) para todo $i = 0, 1, \dots, 100$. Mas neste caso, as soluções não pertencem a mesma bacia de atração. Logo, a condição $|x_i(n) - x_0(5 \times 10^4)| \leq 10^{-4}$ não é satisfeita, no mínimo, por uma solução x_i . Se estas duas situações acontecerem, temos um cenário de multiestabilidade

formado por no mínimo dois atratores periódicos distintos.

3. Coexistência de atrator periódico e caótico (ME - P+C)

Para um cenário multiestável formado por atratores periódico e caótico, identificamos ao menos uma solução periódica e uma solução caótica. Em nossas simulações, nós analisamos as 101 soluções (condição de referência mais as 100 soluções x_i) e observamos seus expoentes de Lyapunov. Se, ao menos uma solução apresenta $\lambda_{x_i} < 0$ e outra apresenta $\lambda_{x_i} > 0$ (numericamente $\lambda_{x_i} > 0,0001$), a coexistência de periodicidade e caos é confirmada. Analisando as soluções, na maioria dos casos, o atrator caótico se apresenta como bandas caóticas, onde o comportamento caótico é restrito a uma região do domínio de x .

4. Caos (C)

O cenário de comportamento caótico no sistema descreve uma situação onde todas as soluções apresentam um comportamento caótico único. Este cenário é caracterizado por um expoente de Lyapunov positivo para todas as soluções, que necessariamente pertencem ao mesmo atrator, isto é, que ocupam a mesma região do domínio de x . Para constatar que todas as soluções estão na mesma região, nós comparamos a média temporal de todas as 5×10^4 iterações de todas as soluções. Nós consideramos que todas as soluções pertencem ao mesmo atrator se esta média temporal é inferior a 0,1, ou seja, $|\bar{x}_i - \bar{x}_1| < 0,1$, para todo $i = 2, 3, \dots, 100$. A média temporal é calculada por,

$$\bar{x}_i = \frac{1}{n_0 - n_1} \sum_{n=n_0}^{n_1} x_i(n) \quad (5.26)$$

com $n_0 = 5 \times 10^4$ e $n_1 = 10^5$. Neste caso, a solução de referência também apresenta um comportamento caótico ($\lambda_{x_0} > 0$).

5. Coexistência de bandas caóticas (ME - BC+BC)

O último cenário de multiestabilidade estudado é caracterizado pela coexistência de bandas caóticas, onde comportamentos caóticos ocupam diferentes regiões restritas no domínio de x . O procedimento para identificar esse cenário é o mesmo utilizado para identificar um comportamento caótico único, mas a condição $|\bar{x}_i - \bar{x}_1| < 0,1$ deve ser violada para ao menos uma solução. Caso isso ocorra, temos um cenário de multiestabilidade composto por diferentes bandas caóticas. O valor de restrição 0,1 na condição de que soluções residam na mesma banda caótica foi escolhido a partir dos cálculos das médias \bar{x}_i para casos onde diferentes bandas caóticas coexistem. Para isso, analisamos casos com diferentes bandas caóticas e calculamos a média para soluções que ocupam bandas distintas e fizemos uma estimativa da diferença mínima entre as médias.

Utilizando as descrições acima, nós realizamos a análise de multiestabilidade e construímos três espaços de parâmetros. Para isso, fixamos um parâmetro, variamos os outros dois, nos

intervalos já estudados, e identificamos qual dos 5 cenários de atratores descritos acima o mapa assume. Os espaços de parâmetros são: (a) $a \times b$ para $\Omega = 0,3$, (b) $\Omega \times a$, para $b = 0,4$ e (c) $\Omega \times b$ para $a = 0,8$. Cada cenário é identificado por uma cor diferente. Os espaços de parâmetros são apresentados na Figura 36.

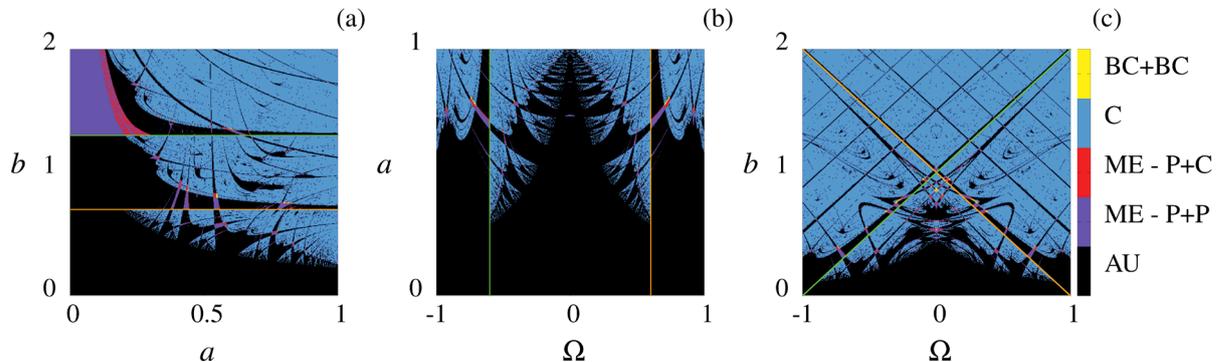


Figura 36 – Espaços de parâmetros para o cenário de multiestabilidade para o mapa do seno círculo não *twist* para (a) $\Omega = 0,3$, (b) $b = 0,4$ e (c) $a = 0,8$. Os cenários de atrator único (AU), comportamento caótico (C) e de multiestabilidade formado por diferentes atratores periódicos (ME - P + P), por atrator periódico e caótico (ME - P + C) e por diferentes bandas caóticas (CB + CB) são identificados por diferentes cores indicadas na barra de cor. As linhas verde e laranja são as curvas de bifurcação $b - \Omega = 1$ e $b + \Omega = 1$, respectivamente.

Nos espaços de parâmetros da Figura 36, os pontos em preto indicam para quais parâmetros há apenas um atrator no sistema, podendo ser ele periódico e quase periódico. Vemos que esse cenário é dominante na Figura 36 (a), com $\Omega = 0,3$ e na Figura 36 (b), para $b = 0,4$. Caso esse comportamento final único seja caótico, ele é representado pelos pontos em azul e é a situação dominante na Figura 36 (c), com $a = 0,8$.

Os três cenários possíveis de multiestabilidade são identificados pelos pontos em roxo, que indicam coexistência de diferentes atratores periódicos, em vermelho, onde atratores caótico e periódico coexistem, e em amarelo, onde há a existência de diferentes bandas caóticas. Observamos que os cenários de multiestabilidade ocupam uma região menor nos espaços de parâmetros, ao comparar com a região ocupada por atratores únicos, sejam eles periódicos ou quase periódicos (pontos em preto), ou caóticos (pontos em azul). Algumas regiões em roxo, onde atratores periódicos coexistem, são encontrados ao redor das linhas de bifurcação, o que está em concordância com a multiestabilidade observada nos diagramas de bifurcação da Figura 35. Mas está não é uma regra, uma vez que observamos pontos em roxo em regiões "anteriores" as linhas de bifurcação².

O comportamento caótico é predominante para valores maiores dos parâmetros de controle. Entretanto, como o sistema depende de três parâmetros, não é possível determinar com exatidão a emergência do caos no sistema, sendo necessário realizar a análise de expoente de Lyapunov para cada conjunto (Ω, a, b) para identificar comportamento caótico.

² Anterior a linha de bifurcação pode ser compreendido como valores menores que a linha no sentido de crescimento do parâmetro.

Pelos espaços de parâmetros apresentados, concluímos que é possível identificar os cenários de multiestabilidade, mas não conseguimos prever qual cenário ocorre para um conjunto de parâmetros específico. Isto é semelhante ao que ocorre no estudo de transporte direcionado para o mapa padrão não *twist* estendido, estudado no Capítulo 3 desta tese. A estrutura do espaço de parâmetro para a multiestabilidade apresenta uma estrutura não trivial e não há uma fronteira simples entre os diferentes cenários. De fato, esta fronteira é complexa e pode inclusive ser fractal. Nós não realizamos uma análise de fractabilidade destes espaços de parâmetro neste trabalho.

5.5 CRISE DE ATRADORES CAÓTICOS

Para a análise de multiestabilidade e para a construção dos espaços de parâmetros da Figura 36, nós consideramos a existência de bandas caóticas e também de atratores caóticos que preenchem todo o domínio de x . Entendendo que há diferentes estruturas caóticas no sistema, dedicamos esta última seção a análise da evolução destas estruturas à medida que um parâmetro é variado e também estudamos a possibilidade de crises destes atratores observados no sistema.

Uma crise pode ser definida como um evento onde um atrator caótico sofre uma mudança abrupta e descontínua, causada pela colisão de uma órbita periódica instável com o atrator [82]. Após a crise, o atrator caótico pode ser extinto e haverá apenas comportamento caótico transiente ou o seu tamanho pode sofrer um aumento abrupto [83]. Ao primeiro caso, dá-se o nome de crise de fronteira, onde o atrator desaparece após sua colisão com uma órbita periódica instável [82]. Para o segundo caso, a crise é denominada crise interior, a órbita periódica instável colide com a bacia do atrator que aumenta de tamanho abruptamente [82].

Para investigar os cenários de crise no mapa do seno círculo unidimensional, nós construímos o diagrama de bifurcação, para $a = 0,8$, $\Omega = -0,08$, e $b \in [0,9; 1,0]$. Como fizemos para a Figura 35, nós calculamos os diagramas nos dois sentidos de variação de b . Os diagramas são apresentados na Figura 37.

Os diagramas de bifurcação, construídos nos dois sentidos de variação de b , estão sobrepostos na Figura 37. O sentido de cada diagrama é indicado pela seta colorida com a cor correspondente. Observamos um cenário de multiestabilidade, indicado pela histerese do diagrama, nos intervalos $b \in [0,92; 0,955]$ e $b \in [0,961; 0,967]$. Nestes intervalos, o cenário de multiestabilidade é formado pela coexistência entre pontos periódicos e bandas caóticas, diferentes atratores periódicos e também diferentes bandas caóticas (no segundo intervalo destacado).

Acompanhando a evolução dos atratores, observamos que as bandas caóticas sofrem mudanças abruptas em seu tamanho, à medida que o parâmetro b varia. Analisando a primeira mudança, destacada pela linha em vermelho, vemos que a banda caótica em azul passa por um aumento abrupto em seu tamanho, em $b \approx 0,9429$. Para as duas mudanças destacadas em roxo, nós observamos a extinção do atrator azul em $b \approx 0,9673$, enquanto a banda caótica em laranja é

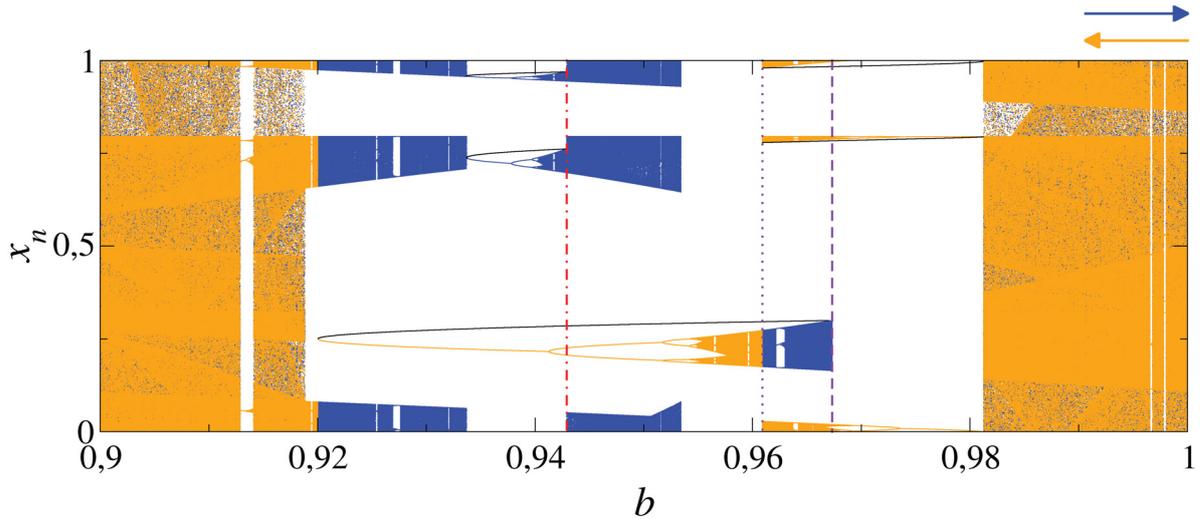


Figura 37 – Diagramas de bifurcação em função do parâmetro b , para $a = 0,8$ e $\Omega = -0,08$. Os pontos em azul e laranja correspondem ao sentido de aumento e diminuição do parâmetro b , respectivamente. As curvas em preto representam as órbitas periódicas instáveis enquanto as linhas coloridas destacam os pontos de crise $b \approx 0,9429$ (linha em vermelho), $b \approx 0,9609$ (linha pontilhada roxa) e $b \approx 0,9673$ (linha tracejada roxa).

extinguida em $b \approx 0,9609$. Estas mudanças abruptas indicam a presença das duas crises citadas anteriormente.

Para confirmar a presença de crise no sistema, nós calculamos e apresentamos juntamente com o diagrama as órbitas periódicas instáveis. Estas órbitas são obtidas da seguinte maneira. Após assumir um período T das órbitas, nós percorremos o domínio $x \in [0, 1]$ e calculamos a diferença $|x_T - x_0|$, onde $x_0 \in [0, 1]$ é a condição inicial que estamos analisando. Uma vez que as órbitas são instáveis, as soluções divergem rapidamente da condição inicial caso ela não seja próxima o suficiente do ponto fixo. Sendo assim, definimos que se $|x_T - x_0| < 10^{-6}$, x_0 pertence a órbita periódica. Para identificar se a órbita é instável ou estável, podemos calcular sua derivada e analisar seu valor numérico. Mas, neste trabalho, nós analisamos se as soluções próximas divergem ou convergem. Caso soluções próximas diverjam de x_0 , temos que x_0 é uma órbita instável. Os resultados desse procedimento são as órbitas instáveis de período 1 e período 2, representadas pelas curvas em preto na Figura 37.

Com o cálculo das órbitas periódicas instáveis, nós podemos confirmar a existência de crises no sistema. A crise interior ocorre quando a órbita periódica instável de período 2 colide com as bandas caóticas em azul. Observamos que após a colisão, destacada pela linha em vermelho, há um aumento abrupto do atrator, o que caracteriza a crise. A crise de fronteira é observada em dois pontos no diagrama de bifurcação. Primeiro, analisando o diagrama no sentido de crescimento de b , observamos a extinção da banda caótica em azul ao colidir com a órbita periódica de período 1. Esta crise é destacada pela linha tracejada em roxo. O outro ponto de crise, destacado pela linha pontilhada em roxo, indica a extinção das bandas caóticas em laranja, que colidem com as órbitas periódicas de período 2, ao acompanhar o diagrama de bifurcação no sentido de diminuição de b .

A extinção de atratores por crises de fronteira desempenha um papel significativo na multiestabilidade observada no sistema. Analisando o diagrama de bifurcação no sentido de crescimento de b , a crise que ocorre em $b \approx 0,9673$, a banca caótica em azul é extinta assim como a multiestabilidade, sendo que após esse ponto não há mais distinção entre os pontos em azul e em laranja. Se analisarmos o diagrama no sentido oposto, a crise que ocorre em $b \approx 0,9609$, que também é uma crise de fronteira, extingue as duas bandas caóticas em laranja e, após esse ponto, apenas uma banda caótica existe. Este cenário continua até $b \approx 0,953$, onde as bandas em azul emergem e o cenário de multiestabilidade retorna.

6 CONCLUSÕES

O mapa padrão não *twist*, proposto por del Castillo-Negrete e Morrison, pode ser considerado paradigmático para o estudo de sistemas Hamiltonianos que violam a condição de não degenerescência ou condição *twist*. O mapa não *twist* apresenta as principais características dos sistemas degenerados: existência da curva *shearless*, a existência de cadeias de ilhas gêmeas e um perfil de número de rotação não monotônico. Além disto o mapa é simétrico, tanto temporalmente, uma vez que o sistema é Hamiltoniano, quanto em relação a uma transformação de simetria T_S . Esta simetria tem um papel importante no transporte das soluções caóticas pelo espaço de fase: o transporte não apresenta um sentido preferencial, sendo equivalente quando analisamos o movimento das trajetórias de uma região inferior do espaço de fase para uma região superior ou vice-versa. Além do transporte não direcionado, a simetria garante a existência dos pontos indicadores, ferramenta que permite identificar a existência da curva *shearless* em função dos parâmetros (a, b) do sistema.

Neste trabalho, estudamos como as modificações no mapa padrão não *twist* alteram as propriedades de transporte, simetria e as estruturas no espaço fase. Pelos resultados obtidos nesta tese, podemos concluir que a adição de uma nova perturbação no mapa padrão não *twist* pode quebrar a simetria do sistema e, conseqüentemente, levar ao surgimento de um transporte direcionado no espaço de fase. O mapa escolhido para o estudo foi o mapa padrão não *twist* estendido (ESNM), formado pela adição de uma nova perturbação $c \sin(2\pi x)$ ao SNM, onde c é a amplitude da perturbação e m é um número inteiro. A quebra de simetria deste mapa está relacionada com a paridade de m : para m ímpar, o mapa satisfaz a condição de simetria enquanto que para m par, a relação não é satisfeita e a simetria é destruída.

Com a quebra de simetria para m par, algumas características fundamentais do mapa não *twist* são modificadas. Ao comparar o ESNM para m par com o caso de m ímpar e com o SNM, vemos que a quebra de simetria modifica o cenário de cadeias de ilhas gêmeas tal que as duas cadeias existem, mas as ilhas não são iguais. As ilhas que seriam correspondentes pela transformação de simetria, passam por bifurcações em diferentes parâmetros. Como consequência, é possível observar que uma cadeia de ilha em específico é mais rodeada por soluções caóticas do que outra, e este "desbalanceamento" é caracterizado por um primeiro momento de y não nulo.

Outra consequência da quebra de simetria é a impossibilidade de usar os pontos indicadores como indicativo para a existência de curva *shearless* para o caso de ESNM com m par. Para solucionar esta questão, propomos um novo método para estimar a existência de barreiras de transporte no espaço de fase baseado na construção das bacias de escape. Pelos espaços de parâmetros apresentados, observamos que um aumento na amplitude da perturbação não implica necessariamente em uma antecipação da quebra das barreiras. Também observamos que a estrutura do espaço de parâmetro para a existência de barreiras pode ser não trivial, uma vez

que não há uma fronteira única entre a região onde existe a barreira e a região onde a barreira já foi destruída.

Como última análise para o mapa estendido, verificamos se o transporte direcionado é algo possível no espaço de fase para o caso não simétrico. Estudando a diferença entre o número de trajetórias caóticas que se direcionam para cima e para baixo no espaço de fase, conseguimos identificar a direção preferencial do transporte. A partir dos espaços de parâmetros para o transporte direcionado, observamos três situações de transporte possíveis: transporte não direcionado, transporte direcionado para cima e transporte direcionado para baixo. A prevalência de uma direção depende do valor de c e de m e a previsão da direção para um certo conjunto de parâmetros (a, b, c, m) não é possível, uma vez que as estruturas do espaço de parâmetro são não triviais e não há uma fronteira simples entre as regiões que indicam diferentes direções de transporte. Dessa forma, é preciso analisar o transporte para cada conjunto de parâmetros de interesse.

Outra modificação realizada no mapa padrão não *twist* é a inclusão de uma pequena dissipação ao sistema, o que resulta no mapa padrão não *twist* dissipativo (DSNM). Os resultados obtidos para este mapa mostram que a coexistência entre soluções regulares e caóticas, característica de sistemas Hamiltonianos, é substituída pela existência e coexistência de atratores no espaço de fase. Esses atratores podem ser periódicos, quase periódicos e caóticos. Pelos espaços de fase apresentados nesse estudo, podemos ver que algumas ilhas periódicas são substituídas por atratores periódicos de mesmo período enquanto a maioria das soluções quase regulares são destruídas e substituídas por apenas um atrator quase regular, que seguindo a nomenclatura de Carvalho e Abud [17], é denominado atrator *shearless*.

Assim como tinha sido observado por Carvalho e Abud [17] e por Kato e Carvalho [57], nós também identificamos a existência de atratores caóticos em toros. Estes atratores são caracterizados por um expoente de Lyapunov positivo e estão restritos a uma curva no espaço de fase. Para sistemas *twist*, a rota que um atrator quase periódico segue até se tornar um atrator caótico no toro é bem estabelecida. Segundo o estudo realizado por Letellier, Messenger e Gilmore, há duas rotas para esta transição para o caos: a rota "difícil" (*hard route to chaos*) e a rota "suave" (*soft route to chaos*), também denominada rota de Curry-Yorke [60]. Com a pesquisa realizada e apresentada nesse trabalho, nós conseguimos observar estas duas rotas também em sistemas não *twist*, no mapa padrão não *twist* dissipativo. Dessa forma, podemos dizer que a rota "difícil" e a rota de Curry-Yorke também podem ser observadas em sistemas degenerados, com suas respectivas particularidades, como o atrator quase periódico no toro sendo um atrator *shearless* e os atratores periódicos que atuam como fantasmas e distorcem a forma do atrator podem surgir em pares, uma correspondência a cadeias de ilhas gêmeas do caso conservativo.

A descrição dinâmica dos atratores presentes no espaço de fase para o DSNM foi feita a partir do expoente de Lyapunov e da contagem dos períodos dos atratores periódicos. A partir dos resultados apresentados, observamos que para diferentes valores de parâmetros (a, b) nós temos

diferentes tipos de atratores. Pelos espaços de parâmetros, conseguimos observar uma persistência do atrator *shearless* para uma grande quantidade de pontos (a, b) , enquanto os atratores caóticos estão mais presentes para altos valores dos parâmetros. Os atratores periódicos ocupam uma região significativa do espaço de parâmetro e analisando seus períodos, podemos observar que eles se organizam em uma estrutura semelhante as línguas de Arnold, já conhecida para sistemas *twist*.

Observando a estrutura das bacias de atração a partir da entropia de bacia e da entropia de borda de bacia, podemos afirmar que existe uma incerteza no sistema para os casos apresentados. Esta incerteza é identificada pelo valor não nulo da entropia de bacia e é consequência da mistura que existe entre bacias de atração de diferentes atratores. Também nos resultados apresentados, podemos ver que espaços de fase para diferentes parâmetros que apresentam apenas atratores periódicos podem apresentar diferentes cenários de interação entre as bacias de atração. Estes diferentes cenários podem ser identificados pelas entropias relacionadas às bacias e à borda da bacia.

Por último, apresentamos o mapa do seno-círculo não *twist*, uma mapa unidimensional que depende de três parâmetros, a , b e Ω e que foi obtido a partir da manipulação matemática do mapa padrão não *twist*. A partir das nossas simulações numéricas e pelo cálculo do expoente de Lyapunov, nós identificamos diferentes soluções para o mapa, soluções periódicas, quase periódicas e caóticas. Este mapa pode ser interpretado como uma aproximação local para o SNM quando o valor de y é constante.

Para o mapa unidimensional, nós realizamos uma análise analítica das bifurcações que ocorrem durante a evolução dos atratores e encontramos que bifurcações do tipo sela-nó ocorrem quando $b \pm \Omega = 1$. Neste ponto de bifurcação, há a emergência de uma nova órbita periódica como solução do sistema. Este ponto de bifurcação também está relacionado com o início de algumas regiões de multiestabilidade.

A multiestabilidade é um cenário possível para o mapa do seno-círculo não *twist*. Apresentamos nesse trabalho um método para identificar os possíveis cenários de coexistência de atratores no sistema. Baseado no cálculo do expoente de Lyapunov e na análise da região do domínio de x ocupada pelas soluções, estabelecemos 5 cenários: atrator único, comportamento caótico único, coexistência de diferentes atratores periódicos, coexistência de atrator caótico e periódico, e coexistência de diferentes atratores caóticos em bandas. Os espaços de parâmetros para a multiestabilidade apresentados mostram uma prevalência de região de caos e atrator único para todos os casos analisados. As regiões correspondentes ao cenário de multiestabilidade ocupam uma porção menor dos espaços, indicando que multiestabilidade é uma situação menos comum mas ainda presente em nosso sistema.

Como última análise, estudamos a mudança brusca no tamanho dos atratores caóticos a partir da crise de atratores. As crises ocorrem quando há a colisão de uma órbita periódica instável com o atrator caótico e elas podem ser divididas em duas classes: crise interior, onde

há um aumento significativo no tamanho do atrator, e crise de fronteira, onde o atrator é extinto após a colisão. Nos diagramas de bifurcação analisados nesse trabalho, observamos as duas crises no sistema. Também conseguimos identificar uma relação entre as crises e o cenário de multiestabilidade no sistema. Enquanto a crise interior não afeta a multiestabilidade, a crise de fronteira está relacionada com a sua extinção.

As modificações incluídas no mapa padrão não *twist* neste trabalho podem ter uma aplicação prática em experimentos reais. Como dito, a perturbação extra no mapa estendido pode ser interpretada como a ação de um limitador ergódico em um experimento em *tokamaks*. Enquanto isso, a dissipação pode ser inevitável em alguns experimentos, o que torna importante o estudo de sistemas fracamente dissipativos construídos a partir da adição de um dissipação em sistemas Hamiltonianos, como é o caso do DSNM. Sendo assim, justificamos a importância o estudo destas modificação em um mapa tão importante para o estudo de sistemas degenerados.

REFERÊNCIAS

- 1 STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos with student solutions manual: With applications to physics, biology, chemistry, and engineering*. [S.l.]: CRC press, 2018. [17](#), [21](#), [22](#), [23](#), [31](#), [61](#), [87](#)
- 2 STEWART, I. *Em busca do infinito: uma história da matemática dos primeiros números à teoria do caos*. [S.l.]: Editora Schwarcz-Companhia das Letras, 2014. [17](#)
- 3 MACKAY, R. S.; MEISS, J. D. Survey of hamiltonian dynamics. In: *Hamiltonian Dynamical Systems*. [S.l.]: Taylor & Francis, 2020. p. 3–19. [17](#), [24](#), [25](#)
- 4 LICHTENBERG, M. A. L. A. J. *Regular and Stochastic Motion*. 2nd ed. ed. [S.l.]: Springer New York, 1983. (Applied Mathematical Sciences 38). ISBN 9780387977454,0387977457. [18](#), [24](#), [25](#), [26](#), [27](#), [29](#), [33](#), [62](#), [70](#), [78](#), [81](#), [82](#), [83](#)
- 5 ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *Chaos*. [S.l.]: Springer, 1996. [18](#), [21](#), [80](#), [87](#)
- 6 OTT, E. *Chaos in Dynamical Systems*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2002. [18](#), [21](#), [24](#), [25](#), [28](#), [35](#), [61](#), [80](#), [81](#), [87](#)
- 7 TÉL, T.; GRUIZ, M. *Chaotic dynamics: an introduction based on classical mechanics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2006. [18](#), [24](#), [25](#), [26](#), [27](#), [28](#), [61](#)
- 8 CASTILLO-NEGRETE, D. del; GREENE, J. M.; MORRISON, P. J. Area preserving nontwist maps: periodic orbits and transition to chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 91, n. 1-2, p. 1–23, 1996. [18](#), [29](#), [30](#), [31](#), [35](#), [37](#), [38](#), [39](#), [40](#), [42](#)
- 9 MORRISON, P. J. Magnetic field lines, hamiltonian dynamics, and nontwist systems. *Physics of Plasmas*, American Institute of Physics, v. 7, n. 6, p. 2279–2289, 2000. [18](#), [28](#), [29](#)
- 10 CASTILLO-NEGRETE, D. del; GREENE, J. M.; MORRISON, P. J. Renormalization and transition to chaos in area preserving nontwist maps. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, v. 100, n. 3, p. 311 – 329, 1997. ISSN 0167-2789. [18](#), [29](#), [30](#), [35](#), [40](#)
- 11 CASTILLO-NEGRETE, D. del; MORRISON, P. J. Chaotic transport by rossby waves in shear flow. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, American Institute of Physics, v. 5, n. 4, p. 948–965, 1993. [18](#), [31](#), [32](#), [82](#)
- 12 FUCHSS, K.; WURM, A.; APTE, A.; MORRISON, P. J. Breakup of shearless meanders and “outer” tori in the standard nontwist map. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, American Institute of Physics, v. 16, n. 3, p. 033120, 2006. [18](#), [37](#), [40](#)
- 13 SHINOHARA, S.; AIZAWA, Y. The breakup condition of shearless KAM curves in the quadratic map. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, v. 97, n. 3, p. 379–385, 1997. [18](#), [40](#), [41](#)
- 14 SHINOHARA, S.; AIZAWA, Y. Indicators of reconnection processes and transition to global chaos in nontwist maps. *Progress of Theoretical Physics*, Oxford University Press, v. 100, n. 2, p. 219–233, 1998. [18](#), [40](#)

- 15 MUGNAINE, M.; MATHIAS, A. C.; SANTOS, M. S.; BATISTA, A. M.; SZEZECH JR, J. D.; VIANA, R. L. Dynamical characterization of transport barriers in nontwist hamiltonian systems. *Physical Review E*, APS, v. 97, n. 1, p. 012214, 2018. [18](#), [42](#), [44](#), [82](#)
- 16 PORTELA, J. S. E.; CALDAS, I. L.; VIANA, R. L.; MORRISON, P. J. Diffusive transport through a nontwist barrier in tokamaks. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 17, n. 05, p. 1589–1598, 2007. [19](#), [45](#)
- 17 CARVALHO, R. E. D.; ABUD, C. V. Robust attractor of non-twist systems. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 440, p. 42–48, 2015. [19](#), [59](#), [60](#), [61](#), [63](#), [64](#), [65](#), [99](#)
- 18 WEISSTEIN, E. W. *Circle Map*. From *MathWorld—A Wolfram Web Resource*. <https://mathworld.wolfram.com/CircleMap.html>. [19](#), [78](#)
- 19 ARNOL'D, V. I. Small denominators. i. mapping the circle onto itself. *Izvestiya Rossiiskoi Akademii Nauk. Seriya Matematicheskaya*, Russian Academy of Sciences, Steklov Mathematical Institute of Russian, v. 25, n. 1, p. 21–86, 1961. [19](#)
- 20 BAK, P.; BOHR, T.; JENSEN, M. H. Mode-locking and the transition to chaos in dissipative systems. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 1985, n. T9, p. 50, 1985. [19](#), [20](#)
- 21 FEUDEL, U.; KURTHS, J.; PIKOVSKY, A. S. Strange non-chaotic attractor in a quasiperiodically forced circle map. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 88, n. 3-4, p. 176–186, 1995. [19](#), [20](#), [80](#), [81](#)
- 22 AFSAR, O.; TIRNAKLI, U. Probability densities for the sums of iterates of the sine-circle map in the vicinity of the quasiperiodic edge of chaos. *Physical Review E*, APS, v. 82, n. 4, p. 046210, 2010. [19](#), [78](#), [81](#)
- 23 VIANA, R. L.; CARVALHO, F. F. d. Sincronização entre um oscilador de fase e um forçamento externo. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, SciELO Brasil, v. 39, 2017. [20](#), [78](#)
- 24 OLINGER, D. J.; CHHABRA, A. B.; SREENIVASAN, K. R. The onset of chaos in the wake of an oscillating cylinder: Experiment and the dynamics of the circle map. *Pramana*, Springer, v. 48, n. 2, p. 693–703, 1997. [20](#)
- 25 DEVANEY, R. L. *An introduction to chaotic dynamical systems*. 2. ed. [S.l.]: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1989. [21](#)
- 26 ZASLAVSKY, G. M. *Hamiltonian chaos and fractional dynamics*. [S.l.]: Oxford University Press on Demand, 2005. [24](#), [25](#), [28](#), [29](#)
- 27 ARNOLD, V. I. *Graduate texts in mathematics*. [S.l.]: Springer New York:, 1989. xvi+–508 p. [24](#)
- 28 GOLDSTEIN, H.; POOLE, C.; SAFKO, J. *Classical mechanics*. [S.l.]: Addison-Wesley, 2002. [25](#)
- 29 ZASLAVSKY, G. M. *The physics of chaos in Hamiltonian systems*. [S.l.]: world scientific, 2007. [28](#), [29](#), [77](#), [78](#)
- 30 WIGGINS, S. *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*. [S.l.]: Springer, 2003. v. 2. [31](#), [61](#), [87](#)

- 31 NOAA. *What is a Rossby wave?* Disponível em: <https://oceanservice.noaa.gov/facts/rossby-wave.html>. Acesso em: 04 mai. 2022. 31
- 32 PORTELA, J. S. E.; CALDAS, I. L.; VIANA, R. L. Tokamak magnetic field lines described by simple maps. *The European Physical Journal Special Topics*, Springer, v. 165, n. 1, p. 195–210, 2008. 31, 45, 77, 78
- 33 PETRISOR, E. Nontwist area preserving maps with reversing symmetry group. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 11, n. 02, p. 497–511, 2001. 32
- 34 WURM, A.; APTE, A.; FUCHSS, K.; MORRISON, P. Meanders and reconnection–collision sequences in the standard nontwist map. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, American Institute of Physics, v. 15, n. 2, p. 023108, 2005. 32
- 35 WOLF, A.; SWIFT, J. B.; SWINNEY, H. L.; VASTANO, J. A. Determining lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 16, n. 3, p. 285–317, 1985. 33, 34, 80
- 36 ECKMANN, J.-P.; RUELLE, D. Ergodic theory of chaos and strange attractors. *The theory of chaotic attractors*, Springer, p. 273–312, 1985. 34, 64, 68
- 37 SZEZECH JR, J. D.; CALDAS, I. L.; LOPES, S. R.; VIANA, R. L.; MORRISON, P. J. Transport properties in nontwist area-preserving maps. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, American Institute of Physics, v. 19, n. 4, p. 043108, 2009. 34, 43, 82
- 38 MATHIAS, A. C.; MUGNAINE, M.; SANTOS, M. S.; SZEZECH JR, J. D.; CALDAS, I. L.; VIANA, R. L. Fractal structures in the parameter space of nontwist area-preserving maps. *Physical Review E*, APS, v. 100, n. 5, p. 052207, 2019. 42, 82
- 39 MEISS, J. D. Symplectic maps, variational principles, and transport. *Reviews of Modern Physics*, APS, v. 64, n. 3, p. 795, 1992. 42
- 40 MACKAY, R. S.; MEISS, J. D.; PERCIVAL, I. C. Stochasticity and transport in hamiltonian systems. *Physical Review Letters*, APS, v. 52, n. 9, p. 697, 1984. 42
- 41 MACKAY, R. S.; MEISS, J. D.; PERCIVAL, I. C. Transport in hamiltonian systems. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 13, n. 1-2, p. 55–81, 1984. 42
- 42 VIANA, R. L.; CALDAS, I. L.; SZEZECH JR, J. D.; BATISTA, A. M.; ABUD, C. V.; SCHELIN, A. B.; MUGNAINE, M.; SANTOS, M. S.; LEAL, B. B.; BARTOLONI, B. et al. Transport barriers in symplectic maps. *Brazilian Journal of Physics*, Springer, v. 51, n. 3, p. 899–909, 2021. 44
- 43 WURM, A.; MARTINI, K. M. Breakup of inverse golden mean shearless tori in the two-frequency standard nontwist map. *Physics Letters A*, Elsevier, v. 377, n. 8, p. 622–627, 2013. 45, 47
- 44 CALDAS, I. L.; VIANA, R. L.; JR, J. S.; PORTELA, J. S. E.; FONSECA, J.; ROBERTO, M.; MARTINS, C. G. L.; SILVA, E. D. Nontwist symplectic maps in tokamaks. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 17, n. 5, p. 2021–2030, 2012. 45
- 45 WURM, A.; APTE, A.; MORRISON, P. J. On reconnection phenomena in the standard nontwist map. *Brazilian Journal of Physics*, SciELO Brasil, v. 34, n. 4b, p. 1700–1706, 2004. 52

- 46 GONG, J.; BRUMER, P. Directed anomalous diffusion without a biased field: A ratchet accelerator. *Physical Review E*, APS, v. 70, n. 1, p. 016202, 2004. [54](#), [55](#)
- 47 CARUSELA, M. F.; FENDRIK, A. J.; ROMANELLI, L. Transport and dynamical properties of inertial ratchets. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 388, n. 19, p. 4017–4024, 2009. [54](#)
- 48 DANA, I.; ROITBERG, V. B. Weak-chaos ratchet accelerator. *Physical Review E*, APS, v. 83, n. 6, p. 066213, 2011. [54](#)
- 49 HUTCHINGS, N. A. C.; ISHERWOOD, M. R.; JONCKHEERE, T.; MONTEIRO, T. S. Chaotic hamiltonian ratchets for pulsed periodic double-well potentials: Classical correlations and the ratchet current. *Physical Review E*, APS, v. 70, n. 3, p. 036205, 2004. [54](#)
- 50 CELESTINO, A.; MANCHEIN, C.; ALBUQUERQUE, H. A.; BEIMS, M. W. Ratchet transport and periodic structures in parameter space. *Physical Review Letters*, APS, v. 106, n. 23, p. 234101, 2011. [54](#)
- 51 DENISOV, S.; KLAFTER, J.; URBACH, M.; FLACH, S. Dc currents in hamiltonian systems by lévy flights. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 170, n. 2, p. 131–142, 2002. [54](#)
- 52 NEUMANN, E.; PIKOVSKY, A. Quasiperiodically driven josephson junctions: strange nonchaotic attractors, symmetries and transport. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Springer, v. 26, n. 2, p. 219–228, 2002. [54](#)
- 53 WANG, L.; BENENTI, G.; CASATI, G.; LI, B. Ratchet effect and the transporting islands in the chaotic sea. *Physical Review Letters*, APS, v. 99, n. 24, p. 244101, 2007. [54](#), [55](#)
- 54 LOPES, S. R.; JR, J. D. S.; PEREIRA, R. F.; BERTOLAZZO, A.; VIANA, R. Anomalous transport induced by nonhyperbolicity. *Physical Review E*, APS, v. 86, n. 1, p. 016216, 2012. [55](#), [57](#)
- 55 CHEON, T.; EXNER, P.; ŠEBA, P. Extended standard map with spatio-temporal asymmetry. *Journal of the Physical Society of Japan*, The Physical Society of Japan, v. 72, n. 5, p. 1087–1091, 2003. [58](#)
- 56 WEELE, J. P. Van der; VALKERING, T. P. The birth process of periodic orbits in non-twist maps. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, Elsevier, v. 169, n. 1, p. 42–72, 1990. [59](#)
- 57 KATO, L. K.; CARVALHO, R. E. D. Transport barriers with shearless attractors. *Physical Review E*, APS, v. 99, n. 3, p. 032218, 2019. [59](#), [60](#), [61](#), [63](#), [99](#)
- 58 MARTINS, C. G. L.; CARVALHO, R. E. de; CALDAS, I. L.; ROBERTO, M. Labyrinthical standard non-twist map. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, IOP Publishing, v. 44, n. 4, p. 045102, 2010. [59](#)
- 59 BAPTISTA, M. d. S.; CALDAS, I. L. Dynamics of the two-frequency torus breakdown in the driven double scroll circuit. *Physical Review E*, APS, v. 58, n. 4, p. 4413, 1998. [61](#), [64](#), [71](#)
- 60 LETELLIER, C.; MESSENGER, V.; GILMORE, R. From quasiperiodicity to toroidal chaos: analogy between the curry-yorke map and the van der pol system. *Physical Review E*, APS, v. 77, n. 4, p. 046203, 2008. [64](#), [66](#), [68](#), [99](#)

- 61 PEREIRA, T.; BAPTISTA, M. d. S.; REYES, M. B.; CALDAS, I. L.; SARTORELLI, J. C.; KURTHS, J. A scenario for torus t2 destruction via a global bifurcation. *Chaos, Solitons & Fractals*, Elsevier, v. 39, n. 5, p. 2198–2210, 2009. [68](#)
- 62 ARNOLD, V. I. *Geometrical methods in the theory of ordinary differential equations*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2012. v. 250. [70](#)
- 63 BUSKIRK, R. V.; JEFFRIES, C. Observation of chaotic dynamics of coupled nonlinear oscillators. *Physical Review A*, APS, v. 31, n. 5, p. 3332, 1985. [71](#)
- 64 FEUDEL, U. Complex dynamics in multistable systems. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 18, n. 06, p. 1607–1626, 2008. [71](#)
- 65 PISARCHIK, A. N.; FEUDEL, U. Control of multistability. *Physics Reports*, Elsevier, v. 540, n. 4, p. 167–218, 2014. [71](#)
- 66 FEUDEL, U.; GREBOGI, C. Multistability and the control of complexity. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, American Institute of Physics, v. 7, n. 4, p. 597–604, 1997. [71](#), [72](#)
- 67 DAZA, A.; WAGEMAKERS, A.; GEORGEOT, B.; GUÉRY-ODELIN, D.; SANJUÁN, M. A. Basin entropy: a new tool to analyze uncertainty in dynamical systems. *Scientific Reports*, Nature Publishing Group, v. 6, n. 1, p. 1–10, 2016. [74](#), [75](#)
- 68 PUY, A.; DAZA, A.; WAGEMAKERS, A.; SANJUÁN, M. A. A test for fractal boundaries based on the basin entropy. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, v. 95, p. 105588, 2021. [75](#)
- 69 DAZA, A.; GEORGEOT, B.; GUÉRY-ODELIN, D.; WAGEMAKERS, A.; SANJUÁN, M. A. Chaotic dynamics and fractal structures in experiments with cold atoms. *Physical Review A*, APS, v. 95, n. 1, p. 013629, 2017. [75](#)
- 70 CHEN, Z.; PAN, S. W. Study of phase circle map model and its symbolic dynamics. In: ATLANTIS PRESS. *2015 International Conference on Electrical, Automation and Mechanical Engineering*. [S.l.], 2015. p. 729–733. [78](#)
- 71 TIRNAKLI, U.; TSALLIS, C.; LYRA, M. L. Circular-like maps: sensitivity to the initial conditions, multifractality and nonextensivity. *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, Springer, v. 11, n. 2, p. 309–315, 1999. [78](#)
- 72 BOHR, T.; BAK, P.; JENSEN, M. H. Transition to chaos by interaction of resonances in dissipative systems. ii. josephson junctions, charge-density waves, and standard maps. *Physical Review A*, APS, v. 30, n. 4, p. 1970, 1984. [78](#), [82](#)
- 73 CARTWRIGHT, J. H. E. Newton maps: fractals from newton’s method for the circle map. *Computers & Graphics*, Elsevier, v. 23, n. 4, p. 607–612, 1999. [78](#), [79](#), [81](#)
- 74 FIGUEIREDO, J. C. B. de; MALTA, C. P. Lyapunov graph for two-parameters map: Application to the circle map. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 8, n. 02, p. 281–293, 1998. [81](#)
- 75 CVITANOVIC, P.; SHRAIMAN, B.; SÖDERBERG, B. Scaling laws for mode lockings in circle maps. *Physica Scripta*, IOP Publishing, v. 32, n. 4, p. 263, 1985. [81](#)

- 76 SZEZECH JR, J. D.; CALDAS, I. L.; LOPES, S. R.; MORRISON, P. J.; VIANA, R. L. Effective transport barriers in nontwist systems. *Physical Review E*, APS, v. 86, n. 3, p. 036206, 2012. [82](#)
- 77 CALDAS, I. L.; VIANA, R. L.; ABUD, C. V.; FONSECA, J. C. D. d.; FILHO, Z. d. O. G.; KROETZ, T.; MARCUS, F. A.; SCHELIN, A. B.; SZEZECH JR, J. D.; TOUFEN, D. L. et al. Shearless transport barriers in magnetically confined plasmas. *Plasma Physics and Controlled Fusion*, IOP Publishing, v. 54, n. 12, p. 124035, 2012. [82](#)
- 78 SANTOS, M. S.; MUGNAINE, M.; SZEZECH JR, J. D.; BATISTA, A. M.; CALDAS, I. L.; BAPTISTA, M. S.; VIANA, R. L. Recurrence-based analysis of barrier breakup in the standard nontwist map. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, AIP Publishing LLC, v. 28, n. 8, p. 085717, 2018. [82](#)
- 79 LI, G.; YUE, Y.; GREBOGI, C.; LI, D.; XIE, J. Strange nonchaotic attractors and multistability in a two-degree-of-freedom quasiperiodically forced vibro-impact system. *Fractals*, World Scientific, v. 29, n. 04, p. 2150103, 2021. [92](#)
- 80 SINGH, J. P.; KOLEY, J.; LOCHAN, K.; ROY, B. K. Presence of megastability and infinitely many equilibria in a periodically and quasi-periodically excited single-link manipulator. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, World Scientific, v. 31, n. 02, p. 2130005, 2021. [92](#)
- 81 PRAKASH, P.; RAJAGOPAL, K.; SINGH, J. P.; ROY, B. K. Megastability in a quasi-periodically forced system exhibiting multistability, quasi-periodic behaviour, and its analogue circuit simulation. *AEU-International Journal of Electronics and Communications*, Elsevier, v. 92, p. 111–115, 2018. [92](#)
- 82 GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Chaotic attractors in crisis. *Physical Review Letters*, APS, v. 48, n. 22, p. 1507, 1982. [95](#)
- 83 GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Elsevier, v. 7, n. 1-3, p. 181–200, 1983. [95](#)

APÊNDICE 1 - MODELO EPIDEMIOLÓGICO SEIR BASEADO EM AUTÔMATO CELULAR

Durante o terceiro ano do doutorado, influenciados pelo estado de pandemia que estávamos vivendo, escolhemos estudar modelos epidemiológicos baseados em autômatos celulares. Como foi evidenciado pela pandemia, modelos matemáticos são uma ferramenta importante para prever o futuro de pandemias assim como para analisar os efeitos das medidas de mitigações na evolução da doença.

Em nosso trabalho, nós unimos dois modelos matemáticos: o modelo SEIR e o autômato celular. O modelo SEIR é um modelo de compartimentos, onde uma população de indivíduos pode pertencer a um dos quatro estados: suscetível (S), exposto (E), infectado (I) e recuperado (R). Indivíduos suscetíveis são aqueles que estão sujeitos a contrair a doença. Após eles serem contaminados, eles se tornam expostos, isto é, eles estão com a doença mas não infectam ou tem uma probabilidade muito menor de infectar, ao comparar com os indivíduos infectados. Após a infecção, o indivíduo entra no estado recuperado, não podendo ser infectado novamente.

Frequentemente, este modelo é descrito por equações diferenciais, quatro equações ordinárias que modelam a população dos indivíduos no decorrer do tempo. Este modelo é interessante quando não há uma preocupação com características individuais. Caso esteja interessado nos efeitos que o comportamento de um indivíduo tem sobre a propagação da doença, é necessário utilizar um modelo baseado no indivíduo. Em nosso trabalho, nós utilizamos o autômato celular, um modelo que discretiza o tempo e o espaço, e que o estado do indivíduo no futuro depende diretamente do estado de indivíduos vizinhos no passado.

De forma prática, nós construímos uma malha onde cada quadrado é ocupado por um indivíduo. O estado futuro do indivíduo é determinado, de forma probabilística, a partir das regras de transição relacionadas ao estado dos seus vizinhos. Nós também consideramos sítios vazios na malha, possibilitando assim a movimentação dos indivíduos no espaço. A evolução deste modelo proposto reproduz as séries temporais das populações S, E, I e R do modelo de equações diferenciais.

Como novidade, nós implementamos uma restrição na movimentação dos indivíduos no espaço, com intuito de mitigar a propagação da doença, isto é, diminuir a amplitude da curva de infectados e, conseqüentemente, diminuir o número total de indivíduos infectados. Nós observamos que se a restrição à movimentação for superior a 70% temos o decréscimo de 15% do número total de infectados. Também investigamos a possibilidade de uma segunda onda, caso as medidas de controle sejam retiradas. A situação de segunda onda foi observada em nosso modelo para algumas condições específicas.

Por último, nós analisamos a possibilidade de extinção da epidemia em um caso onde a reinfeção é possível, ou seja, um caso onde o indivíduo recuperado volta a ser suscetível após

um tempo. A extinção da doença é possível para poucos casos onde o tempo no qual o indivíduo permanece infectado é alto (maior que 180 gerações) e este tempo é fixo, desconsiderando casos onde, por exemplo, há uma nova variante e a imunidade adquirida não é mais suficiente para impedir uma nova reinfeção.

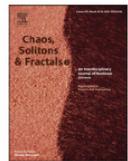
Os resultados desta pesquisa foram publicadas na revista *Chaos, Solitons and Fractals*, sob o título "Control attenuation and temporary immunity in a cellular automata SEIR epidemic model". Os autores do artigo assim como o resumo podem ser conferidos na imagem abaixo.

Chaos, Solitons and Fractals 155 (2022) 111784



Contents lists available at ScienceDirect

Chaos, Solitons and Fractals
Nonlinear Science, and Nonequilibrium and Complex Phenomena
journal homepage: www.elsevier.com/locate/chaos



Frontiers

Control attenuation and temporary immunity in a cellular automata SEIR epidemic model



Michele Mugnaine^{a,*}, Enrique C. Gabrick^b, Paulo R. Protachevicz^c, Kelly C. Iarosz^{d,e},
Silvio L.T. de Souza^f, Alexandre C.L. Almeida^g, Antonio M. Batista^{b,h}, Iberê L. Caldas^c,
José D. Szezech Jr.^{b,h}, Ricardo L. Viana^a

^a Department of Physics, Federal University of Paraná, Curitiba, PR, Brazil

^b Postgraduate Program in Sciences, State University of Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR, Brazil

^c Institute of Physics, University of São Paulo, São Paulo, SP, Brazil

^d Faculdade de Telêmaco Borba, FATEB, Telêmaco Borba, PR, Brazil

^e Graduate Program in Chemical Engineering Federal Technological University of Paraná, Ponta Grossa, PR, Brazil

^f Federal University of São João del-Rei, Campus Centro-Oeste, Divinópolis, MG, Brazil

^g Statistics, Physics and Mathematics Department, Federal University of São João del-Rei, Ouro Branco, MG, Brazil

^h Department of Mathematics and Statistics, State University of Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:

Received 20 August 2021

Revised 22 December 2021

Accepted 30 December 2021

Keywords:

Disease spread model

Cellular automaton

Restriction measures

Second wave of infections

Reinfection

ABSTRACT

Mathematical modeling is an important tool to analyze impacts and plan to mitigate epidemics in communities. In order to estimate the impact of control measures in a second wave of infections, we analyze the SEIR epidemic model based on stochastic cellular automata. The control measure is based on one of the key strategies to control the epidemic, which is the restriction of the mobility of individuals in space. For stronger restrictions, we observe a decrease larger than 15% in the total number of infected individuals during the epidemic. On the other hand, the total attenuation of control measures in the system can lead to a second wave scenario and even a situation in which the total number of infected individuals is close to the uncontrolled case. Additionally, we also include the possibility of reinfection, as the SEIRS model, where the recovered individuals can go to the susceptible state based on a fixed immunity time or a probabilistic rule. Our results show that an extinction of the epidemic occurs only for a fixed immunity time.

© 2022 Elsevier Ltd. All rights reserved.

APÊNDICE 2 - ARTIGOS PUBLICADOS

Os resultados apresentados no Capítulo 3 desta tese foram apresentados no artigo "*Ratchet current in nontwist Hamiltonian systems*", publicado em 23 de setembro de 2020, na revista *Chaos*.

Chaos

Ratchet current in nontwist Hamiltonian systems

Cite as: *Chaos* **30**, 093141 (2020); <https://doi.org/10.1063/5.0022073>

Submitted: 17 July 2020 . Accepted: 10 September 2020 . Published Online: 23 September 2020

Michele Mugnaine, Antonio M. Batista, Iberê L. Caldas, José D. Szezech , and Ricardo L. Viana 



View Online



Export Citation



CrossMark

Nosso estudo sobre o mapa padrão não *twist* dissipativo, cujo resultados foram apresentados no Capítulo 4, foi submetido como artigo para a revista *Chaos* e foi aceito no dia 22 de Janeiro de 2021. O artigo também foi escolhido como destaque dos editores (*Featured Article*) para a edição de fevereiro de 2021.

Chaos

Curry–Yorke route to shearless attractors and coexistence of attractors in dissipative nontwist systems

Cite as: *Chaos* **31**, 023125 (2021); <https://doi.org/10.1063/5.0035303>

Submitted: 27 October 2020 . Accepted: 22 January 2021 . Published Online: 16 February 2021

 Michele Mugnaine, Antonio M. Batista,  Iberê L. Caldas,  José D. Szezech, Ricardo Egydio de Carvalho, and  Ricardo L. Viana

COLLECTIONS

Paper published as part of the special topic on [Recent Advances in Modeling Complex Systems: Theory and Applications](#)

 This paper was selected as Featured



View Online



Export Citation



CrossMark

Os resultados sobre o mapa do seno círculo não *twist*, apresentados no Capítulo 5, foram submetidos a revista *Physical Review E* sob o título "Dynamics, multistability, and crisis analysis of a sine-circle nontwist map" e o artigo foi publicado no dia 06 de setembro de 2022.

PHYSICAL REVIEW E **106**, 034203 (2022)

Dynamics, multistability, and crisis analysis of a sine-circle nontwist map

Michele Mugnaine ^{*}

Department of Physics, Federal University of Paraná, 80060-000 Curitiba, PR, Brazil

Matheus Rolim Sales 

Graduate Program in Science – Physics, State University of Ponta Grossa, 84030-900 Ponta Grossa, PR, Brazil

José Danilo Szezech, Jr. 

*Graduate Program in Science – Physics, State University of Ponta Grossa, 84030-900 Ponta Grossa, PR, Brazil
and Department of Mathematics and Statistics, State University of Ponta Grossa, 84030-900 Ponta Grossa, PR, Brazil*

Ricardo Luiz Viana 

*Department of Physics, Federal University of Paraná, 80060-000 Curitiba, PR, Brazil
and Institute of Physics, University of São Paulo, 05508-900 São Paulo, SP, Brazil*



(Received 6 May 2022; accepted 3 August 2022; published 6 September 2022)

APÊNDICE 3 - PARTICIPAÇÕES EM ARTIGOS

Durante o período do doutorado, participei de alguns artigos desenvolvidos por outros alunos da UFPR e também por pesquisadores de outras universidades. O título dos artigos em que participei, assim como a lista completa de autores e o resumo podem ser conferidos abaixo.

PHYSICAL REVIEW E **100**, 052207 (2019)

Fractal structures in the parameter space of nontwist area-preserving maps

A. C. Mathias¹, M. Mugnaine¹, M. S. Santos¹, J. D. Szezech Jr.², I. L. Caldas³, and R. L. Viana^{1,*}

¹*Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, Paraná 81531-980, Brazil*
²*Departamento de Matemática e Estatística, Universidade Estadual de Ponta Grossa, Ponta Grossa, PR 84030-900, Brazil*
³*Departamento de Física Aplicada, Instituto de Física da Universidade de São Paulo, São Paulo, SP 05508-090, Brazil*

 (Received 8 July 2019; published 18 November 2019)

Fractal structures are very common in the phase space of nonlinear dynamical systems, both dissipative and conservative, and can be related to the final state uncertainty with respect to small perturbations on initial conditions. Fractal structures may also appear in the parameter space, since parameter values are always known up to some uncertainty. This problem, however, has received less attention, and only for dissipative systems. In this work we investigate fractal structures in the parameter space of two conservative dynamical systems: the standard nontwist map and the quartic nontwist map. For both maps there is a shearless invariant curve in the phase space that acts as a transport barrier separating chaotic orbits. Depending on the values of the system parameters this barrier can break up. In the corresponding parameter space the set of parameter values leading to barrier breakup is separated from the set not leading to breakup by a curve whose properties are investigated in this work, using tools as the uncertainty exponent and basin entropies. We conclude that this frontier in parameter space is a complicated curve exhibiting both smooth and fractal properties, that are characterized using the uncertainty dimension and basin and basin boundary entropies.

DOI: [10.1103/PhysRevE.100.052207](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.100.052207)

Brazilian Journal of Physics (2021) 51:899–909
<https://doi.org/10.1007/s13538-021-00894-8>



GENERAL AND APPLIED PHYSICS



Transport Barriers in Symplectic Maps

R. L. Viana¹, I. L. Caldas², J. D. Szezech Jr.³, A. M. Batista³, C. V. Abud⁴, A. B. Schelin⁵, M. Mugnaine¹, M. S. Santos², B. B. Leal², B. Bartoloni², A. C. Mathias¹, J. V. Gomes¹, P. J. Morrison⁶

Received: 2 February 2021 / Accepted: 12 March 2021 / Published online: 7 April 2021
© Sociedade Brasileira de Física 2021

Abstract

Chaotic transport is a subject of paramount importance in a variety of problems in plasma physics, specially those related to anomalous transport and turbulence. On the other hand, a great deal of information on chaotic transport can be obtained from simple dynamical systems like two-dimensional area-preserving (symplectic) maps, where powerful mathematical results like KAM theory are available. In this work, we review recent works on transport barriers in area-preserving maps, focusing on systems which do not obey the so-called twist property. For such systems, usual KAM theory no longer holds everywhere and novel dynamical features show up as non-resistive reconnection, shearless curves, and shearless bifurcations. After presenting some general features using a standard nontwist mapping, we consider magnetic field line maps for magnetically confined plasmas in tokamaks.

Simulation of deterministic compartmental models for infectious diseases dynamics

Antonio M. Batista^{1,2,3}, Silvio L. T. de Souza⁴, Kelly C. Iarosz^{*3,5,6},
Alexandre C. L. Almeida⁷, José D. Szezech Jr^{1,2}, Enrique C. Gabrick¹,
Michele Mugnaine⁸, Gefferson L. dos Santos^{1,5}, Iberê L. Caldas³

¹Universidade Estadual de Ponta Grossa, Programa de Pós-Graduação em Ciências, Ponta Grossa, PR, Brasil.

²Universidade Estadual de Ponta Grossa, Departamento de Matemática e Estatística, Ponta Grossa, PR, Brasil.

³Universidade de São Paulo, Instituto de Física, São Paulo, SP, Brasil.

⁴Universidade Federal de São João del-Rei, Divinópolis, MG, Brasil.

⁵Faculdade de Telêmaco Borba, Telêmaco Borba, PR, Brasil.

⁶Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química, Ponta Grossa, PR, Brasil.

⁷Universidade Federal de São João del-Rei, Departamento de Estatística, Física e Matemática, Ouro Branco, MG, Brasil.

⁸Universidade Federal do Paraná, Departamento de Física, Curitiba, PR, Brasil.

Received on May 07, 2021. Revised on May 26, 2021. Accepted on May 31, 2021.

Infectious diseases are caused by pathogenic microorganisms and can spread through different ways. Mathematical models and computational simulation have been used extensively to investigate the transmission and spread of infectious diseases. In other words, mathematical model simulation can be used to analyse the dynamics of infectious diseases, aiming to understand the effects and how to control the spread. In general, these models are based on compartments, where each compartment contains individuals with the same characteristics, such as susceptible, exposed, infected, and recovered. In this paper, we cast further light on some classical epidemic models, reporting possible outcomes from numerical simulation. Furthermore, we provide routines in a repository for simulations.

Keywords: Compartmental model, computational simulation, infectious diseases, COVID-19.



Unpredictability in Hamiltonian systems with a hierarchical phase space

Matheus R. Sales^a, Michele Mugnaine^b, Ricardo L. Viana^b, Iberê L. Caldas^c,
José D. Szezech Jr.^{a,d,*}

^a Postgraduate Program in Physics, State University of Ponta Grossa, 84030-900, Ponta Grossa, PR, Brazil

^b Department of Physics, Federal University of Paraná, 80060-000, Curitiba, PR, Brazil

^c Institute of Physics, University of São Paulo, 05508-900, São Paulo, SP, Brazil

^d Department of Mathematics and Statistics, State University of Ponta Grossa, 84030-900, Ponta Grossa, PR, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:

Received 22 October 2021

Received in revised form 1 February 2022

Accepted 4 February 2022

Available online 10 February 2022

Communicated by M. Perc

Keywords:

Uncertainty exponent

Stickiness

Conservative chaos

Weighted Birkhoff averages

ABSTRACT

One of the main consequences of the complex hierarchical structure of chaotic regions and stability islands in the phase space of a typical nonlinear Hamiltonian system is the phenomenon of stickiness. The chaotic orbits that approach an island are trapped in its neighborhood for arbitrarily long times, in which the orbits behave similarly as quasiperiodic orbits. In this paper, we characterize the boundary between chaos and regular motion in the phase space of the standard map for distinct parameter values. The orbits are distinguished between regular and chaotic employing a recently proposed method of weighted Birkhoff averages. We quantify the dimension of the boundaries of the islands using the uncertainty exponent. In our simulations, we show that the dimension of the island's boundary depends on the scale of the initial condition uncertainty and the level of the hierarchical structure. We also show that the trapping in the vicinity of the islands causes an obstruction in the predictability of the final state of an orbit. We present how this loss of predictability results in larger dimensions at the inner levels of the islands.

© 2022 Elsevier B.V. All rights reserved.



Contents lists available at ScienceDirect

Physica A

journal homepage: www.elsevier.com/locate/physa

Effect of two vaccine doses in the SEIR epidemic model using a stochastic cellular automaton

Enrique C. Gabrick^{a,*}, Paulo R. Protachevitz^{b,1}, Antonio M. Batista^{a,c,1},
 Kelly C. Iarosz^{d,e,1}, Silvio L.T. de Souza^{f,1}, Alexandre C.L. Almeida^{g,1},
 José D. Szezech Jr.^{a,c,1}, Michele Mugnaine^{h,1}, Iberê L. Caldas^{b,1}

^a Postgraduate Program in Sciences, State University of Ponta Grossa, 84030-900, Ponta Grossa, PR, Brazil

^b Physics Institute, University of São Paulo, 05508-090, São Paulo, SP, Brazil

^c Department of Mathematics and Statistics, State University of Ponta Grossa, 84030-900, Ponta Grossa, PR, Brazil

^d Faculdade de Telêmaco Borba, FATEB, Telêmaco Borba, PR, Brazil

^e Graduate Program in Chemical Engineering Federal Technological University of Paraná, Ponta Grossa, PR, Brazil

^f Federal University of São João del-Rei, Campus Centro-Oeste, 35501-296, Divinópolis, MG, Brazil

^g Statistics, Physics and Mathematics Department, Federal University of São João del-Rei, Ouro Branco, MG, Brazil

^h Department of Physics, Federal University of Paraná, Curitiba, PR, Brazil

ARTICLE INFO

Article history:

Received 15 July 2021

Received in revised form 23 February 2022

Available online 18 March 2022

Keywords:

SEIR

COVID-2019

Vaccine

Cellular automata

Stochastic model

Spread disease

ABSTRACT

In this work, to support decision making of immunisation strategies, we propose the inclusion of two vaccination doses in the SEIR model considering a stochastic cellular automaton. We analyse three different scenarios of vaccination: (i) unlimited doses, (ii) limited doses into susceptible individuals, and (iii) limited doses randomly distributed overall individuals. Our results suggest that the number of vaccinations and time to start the vaccination is more relevant than the vaccine efficacy, delay between the first and second doses, and delay between vaccinated groups. The scenario (i) shows that the solution can converge early to a disease-free equilibrium for a fraction of individuals vaccinated with the first dose. In the scenario (ii), few two vaccination doses divided into a small number of applications reduce the number of infected people more than into many applications. In addition, there is a low waste of doses for the first application and an increase of the waste in the second dose. The scenario (iii) presents an increase in the waste of doses from the first to second applications more than the scenario (ii). In the scenario (iii), the total of wasted doses increases linearly with the number of applications. Furthermore, the number of effective doses in the application of consecutive groups decays exponentially overtime.

© 2022 Elsevier B.V. All rights reserved.