ANDREY DE MELLO MOURA

APLICAÇÃO DA TEORIA DO CONTROLE ÓTIMO PARA ECONOMIA AO NÍVEL DE GRADUAÇÃO

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Departamento Acadêmico de Ciências Econômicas como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel no Curso Superior em Ciências Econômicas da Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Maurício Vaz Lobo Bittencourt

CURITIBA

2011

TERMO DE APROVAÇÃO

Andrey de Mello Moura

APLICAÇÃO DA TEORIA DO CONTROLE ÓTIMO PARA ECONOMIA AO NÍVEL DE GRADUAÇÃO

Monografia aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Bacharel em Ciências Econômicas, pelo Departamento de Economia, do Setor Socias Aplicadas, da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Maurício Bittencourt

Prof. Dr. Maurício Vaz Lobo Bittencourt
Universidade Federal do Paraná

Armando Vaz Sampaio

Prof. Dr. Armando Vaz Sampaio
Universidade Federal do Paraná

Fernando Motta Correia

Prof. Dr. Fernando Motta Correia
Universidade Federal do Paraná

Dedico este trabalho ao Senhor e por tudo que ELE fez e faz na minha vida, à minha esposa pelo apoio e compreensão e a minha família pelo suporte.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos colegas de classe Ana Luíza Valério, Marina Andriolli e Rita Bacik pela ajuda durante esses quatro anos. Agradeço aos professores pela paciência com as minhas digressões. Agradeço a PRAE (PRÓ-REITORIA DE ASSUNTOS ESTUDANTIS) pelas bolsas concedidas durante minha graduação.

The only thing that counts is faith expressing itself through love. Galatians 5:6

RESUMO

MOURA, Andrey D.M. APLICAÇÃO DA TEORIA DO CONTROLE ÓTIMO PARA ECONOMIA AO NÍVEL DE GRADUAÇÃO. 39 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso Superior em Ciências Econômicas, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2011.

A Teoria do Controle Ótimo vem sendo muito utilizada nos estudo de Finanças, Macroeconomia Moderna e Economia dos Recursos Naturais. Contudo, esta técnica não está sendo explorada como deveria nos cursos de graduação. Os graduandos que não prosseguem para a pós graduação podem não ter a oportunidade aprender e aplicar estes conhecimentos em suas análises econômicas. O propósito deste trabalho é prencher este lacuna e fornecer uma breve introdução ao estudo da teoria do controle ótimo.

Palavras-chave: Controle Ótimo, Excel, Otimização

ABSTRACT

MOURA, Andrey D.M. OPTIMAL CONTROL THEORY AND ITS APPLICATIONS IN ECONOMICS AT THE LEVEL FOR UNDERGRADUATES. 39 f. Trabalho de Conclusão de Curso – Curso Superior em Ciências Econômicas, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2011.

Optimal Control Theory is largely used in Finance, Macroeconomics and Resources Economics. However this method is not very well explored as it should with undergraduates. Many of them will not pursue any postgraduate studies and would have not the opportunitty to enhance their economics analysis with this method of optimization. The aim of this paper is fill up this gap and give a short introduction to the study of optimal control theory.

Keywords: Optimal Control, Excel, Optimization

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – DISCIPLINAS DE MATEMÁTICA NOS CURSOS DE ECONOMIA .. 13
FIGURA 2 – RESULTADO DO PANORAMA 13
FIGURA 3 – TRAJETÓRIA ÓTIMA DE $\lambda(T)$ E $X(T)$ 21
FIGURA 4 – ESTRUTURA DO PROBLEMA 25
FIGURA 5 – FERRAMENTA SOLVER 26
FIGURA 6 – OTIMIZAÇÃO DO CONSUMO DO BOLO 26
FIGURA 7 – FÓRMULAS DO MODELO DE RAMSEY 30
FIGURA 8 – MODELO COMPLETO NÃO ÓTIMO 31
FIGURA 9 – FERRAMENTA SOLVER 32
FIGURA 10 – TRAJETÓRIA ÓTIMA DO MODELO DE RAMSEY 32
FIGURA 11 – MODELO DE RAMSEY - ALTERAÇÃO TECNOLÓGICA NO 1° ANO 34
FIGURA 12 – MODELO DE RAMSEY - ALTERAÇÃO TECNOLÓGICA 35

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO **9**
2 PANORAMA DO ENSINO DE MATEMÁTICA NOS CURSOS DE ECONOMIA **11**
3 A TEORIA DO CONTROLE ÓTIMO **15**
3.1 ASPECTOS HISTÓRICOS 15
3.2 IMPORTÂNCIA DA TEORIA 16
3.3 ASPECTOS TEÓRICOS 17
3.3.1 Recursos Naturais 18
3.4 EXERCÍCIO DIDÁTICO - SOLUÇÃO ANALÍTICA 19
4 PROBLEMAS ILUSTRATIVOS DE CONTROLE ÓTIMO **23**
4.1 O PROBLEMA DE COMER UM BOLO 23
4.2 O MODELO DE RAMSEY 27
5 CONCLUSÃO **37**
REFERÊNCIAS **39**

1 INTRODUÇÃO

Durante a trajetória da minha graduação sempre fiquei intrigado por não estudar os temas básicos dos problemas mais interessantes (complexos) da economia. Em outras profissões, o futuro profissional a partir da graduação já consegue se aprofundar em problemas reais de sua especialidade e buscar possíveis soluções. Atualmente, as teorias que providenciam um arcabouço robusto para tratar de problemas com uma ótica mais dinâmica e realista na ciência econômica, são ensinadas com mais intensidade nos cursos de pós graduação em economia. Entretanto, um grande número de economistas que exercem funções de analistas no setor público ou privado, e que não buscaram uma pós-graduação em economia, não terão ao seu dispor os conhecimentos necessários para realizar análises de problemas dinâmicos. A primeira hipótese deste trabalho, refere-se ao arcabouço estudado em grande parte dos cursos de graduação em economia no Brasil, que falha em abordar a perspectiva dinâmica dos problemas econômicos com profundidade. A Ênfase das graduações encontra-se na análise estática ou de equilíbrio. Segundo Chiang (2006), a definição de equilíbrio pode ser compreendida como uma constelação de variáveis inter-relacionadas selecionadas, ajustadas umas às outras de tal maneira que mudanças ao longo do tempo não prevalecerão no modelo. Nesta concepção as variáveis serão analisadas no mesmo estado de repouso. Portanto, admite-se que o equilíbrio é encontrado dentro das forças do modelo, considerando os fatores externos como fixos, e não considerando mudanças no decorrer do tempo.

Na segunda hipótese, os estudantes de graduação em economia são considerados capazes de ao longo do curso, serem introduzidos às teorias avançadas como a teoria do controle ótimo. A introdução deste assunto na graduação poderia contribuir com os acadêmicos que forem realizar estudos de pós-graduação e para os que não forem, habilitando-os assim a buscarem soluções para problemas reais, utilizando métodos computacionais com um embasamento teórico avançado.

O objetivo deste trabalho é auxiliar o futuro egresso do curso de economia na introdução da teoria do controle ótimo com uma metodologia direta e prática (sem demonstrações). Com o auxilio do software Microsoft Office - Planilha eletrônica Microsoft Excel, e as ferramentas

Atingir Meta e Solver, demonstraremos de uma forma didática como resolver problemas de controle ótimo.

Desta forma, buscaremos iniciar os acadêmicos no tratamento de problemas dinâmicos, diminuindo assim o abismo entre os alunos que frequentam a pós-graduação dos que não frequentam. O estudante com no mínimo um ano de exposição ao cálculo diferencial, e uma introdução à algebra linear e equações diferenciais será capaz de acompanhar a resolução dos problemas.

O trabalho está dividido em quatro capítulos. No segundo capítulo é feito um levantamento do estado da arte do ensino dos fundamentos matemáticos necessários para a análise dinâmica. No terceiro capítulo, procurou-se ressaltar a as origens da teoria , sua importância e a apresentação formal da teoria com exemplos. No capítulo quarto são retratados as aplicações da teoria para problemas econômicos. No quinto capítulo as conclusões finais são apresentadas.

2 PANORAMA DO ENSINO DE MATEMÁTICA NOS CURSOS DE ECONOMIA

A formação do economista no Brasil tem suas peculiaridades de acordo com universidade e a corrente dominante do departamento do curso. O estudante de economia que se interessar em analisar problemas dinâmicos deverá cursar disciplinas que lhe proporcione os fundamentos matemáticos mínimos para resolver problemas desta complexidade.

Foram analisados trinta e cinco cursos de graduação em economia, dos centros de pós-graduação em economia associados à ANPEC (Associação Nacional dos Centros de Pós Graduação em Economia). O objetivo desta análise comparativa foi de buscar compreender se a formação matemática dos economistas do Brasil possibilita o tratamento de problemas dinâmicos, e se fornece os conhecimentos necessários para o estudo da Teoria do Controle Ótimo.

Devido às divergência no conteúdo programático das disciplinas entre os cursos, foi necessário encontrarmos parâmetros de comparação no conteúdo das disciplinas para prosseguirmos com a análise. As disciplinas de cálculo I e cálculo II não divergiram muito entre os cursos analisados. Já as disciplinas de cálculo III e economia matemática houve bastante divergência. Por isso, optamos por tratar a disciplina de economia matemática como uma introdução à otimização dinâmica, pois na amostra esta disciplina foi dividida em otimização dinâmica e otimização estática com algebra linear. Já a disciplina de cálculo III foi tratada como um estudo completo de otimização dinâmica, devido a cobertura de grande parte dos tópicos do tema com exclusividade. A comparação foi feita com base nas seguintes ementas:

1. Cálculo I - Cálculo Diferencial e Integral I. Funções e Curvas. Limites. Continuidade. Derivadas. Aplicações de Derivadas. Integrais Definidas e Indefinidas.

2. Cálculo II - Funções de duas ou mais variáveis. Limites. Continuidade. Derivadas Parciais. Diferenciabilidade de funções de duas ou mais variáveis. Plano Tangente. Gradiente. Regra da Cadeia. Máximos e Mínimos Locais, Máximos e Mínimos condicionados. Método dos Multiplicadores.

3. Cálculo III - Modelagem com equações diferenciais. Equações lineares de primeira

ordem, equações separáveis. Equações lineares de segunda ordem, homogênea, não homogênea, método dos coeficientes a determinar, método da variação de parâmetros. Solução em séries. Método de Euler. Equações diferenciais em R: retrato de fase, pontos de equilíbrio, estabilidade. Equações diferenciais em R^2: estabilidade de sistemas lineares via autovalores, estabilidade de sistemas não lineares; retrato de fase, pontos de equilíbrio. Equações a diferenças finitas.

4. Álgebra Linear - Matrizes. Sistemas de equações lineares e matrizes. Método de Gauss para resolução de sistemas de equações. Determinante e matriz inversa. Propriedade de determinantes. Espaços vetoriais reais. Subespaços. Combinação linear. Dependência e independência linear. Base de um espaço vetorial. Mudança de base. Transformações lineares. Autovalores autovetores. Bases ortogonais e projeção ortogonal. Ortogonalização de Gram-Schmidt.

5. Economia Matemática Introdução à Equações Diferenciais e Diferença - Otimização, aplicações na Economia. Álgebra Linear e Modelos de Análise estática.

A Tabela 1 (abaixo) ilustra o panorama geral das graduações em economia considerando as disciplinas ofertadas por centro de pós graduação. Na tabela 2 (abaixo) é apresentado as porcentagens de oferta das disciplinas de fundamentos matemáticos nos cursos de economia.

Tabela1. Panorama do Ensino de Matemática na Graduação
Dos Centros de Pós Graduação em Economia do Brasil

	Cursos de Economa Dos Centros da ANPEC	Cálculo 1	Cálculo 2	Cálculo 3 Modelagem ED eEDO	Álgebra Linear	Economia Matemática-Otimização, AE e intro ED e EOD	Pontuação
1	UFCE	1	1	1	1	0	4
4	FGV-RJ	1	1	1	1	0	4
11	UFV	1	1	0	1	1	4
20	UFRGS	1	1	1	1	0	4
24	USP-RP	1	1	1	0	1	4
35	UNESP-Araraquara	1	1	1	1	0	4
5	FGV-EESP	1	1	1	0	0	3
6	UFRJ	1	1	0	1	0	3
7	UNICAMP	1	1	1	0	0	3
8	USP-FEA	1	1	1	0	0	3
10	UFES	1	1	0	1	0	3
13	UFPE	1	0	0	1	1	3
15	UERJ	1	1	0	0	1	3
18	UFPB	1	1	0	0	1	3
22	UFU	1	1	0	0	1	3
25	UFJF	1	1	0	1	0	3
27	UFSCAR-Sorocaba	1	1	1	0	0	3
28	UFRN	1	1	0	0	1	3
30	**PUC-Rio**	1	1	0	1	0	3
33	UFF	1	1	0	0	1	3
2	UFMG	1	0	0	0	1	2
9	UFAL	1	0	0	0	1	2
12	UEM	1	1	0	0	0	2
16	UFPR	1	0	0	0	1	2
21	UFSC	1	1	0	0	0	2
26	USP-ESALQ	1	0	0	0	1	2
29	UFPel	1	0	0	0	1	2
34	UnB	1	0	0	0	1	2
14	UEL	0	0	0	0	1	1
19	PUCRS	1	0	0	0	0	1
23	UNISINOS	1	0	0	0	0	1
3	UFBA	-	-	-	-	-	0
17	UFPA	-	-	-	-	-	0
31	PUC/SP	-	-	-	-	-	0
32	UCB	-	-	-	-	-	0

Fonte: Projeto Pedagógico e Estrutura Curricular dos respectivos Cursos. Elaboração Própria.

Figura 1: Disciplinas de Matemática nos Cursos de Economia

Tabela 2. Resultado do Panorama	
Cursos que ensinam Cálculo I Diferenciação e integração de uma variável	93.55%
Cursos que ensinam Cálculo II Differenciação e integração várias variáveis	64.52%
Cursos que ensinam Modelagem Dinâmica EDO e ED	29.03%
Cursos que ensinam Algebra Linear como disciplina isolada	29.03%
Cursos que ensinam Análise Estática, Otimização e Introdução à EDO e ED	48.39%
Fonte:Elaboração Própria	

Figura 2: Resultado do Panorama

As disciplinas de cálculo I, cálculo II e álgebra linear foram consideradas como ferramental básico para análise estática, e as disciplinas de cálculo III e economia matemática foram classificadas como fundamentos básicos para a análise dinâmica. Contudo, 29,03% da amostra dos cursos de economia ensinam a análise dinâmica como disciplina exlcusiva e obrigatória. Se considerarmos os cursos que ensinam a disciplina de economia matemática teríamos 48,39% dos cursos da amostra.

Podemos constatar que para tratar problemas dinâmicos com a profundidade devida, os cursos de graduação de economia deveriam ofertar uma disciplina (depois de cálculo I, II e álgebra linear) que abordasse esta temática por completo. Mas, somente nove centros dos trinta e cinco analisados realizam este feito, e apenas quinze centros ofertam este conteúdo junto com outros temas. Contudo, 77% dos cursos analisados ofertam os conhecimentos necessários para que os estudantes de economia possam ser introduzidos na Teoria do Controle Ótimo.

Com esta breve análise, foi possível observar que apenas 30% dos acadêmicos de economia no brasil estão sendo instruidos com profundidade na análise dinâmica para resolver problemas econômicos. O restante dos acadêmicos não tem a sua disposição os conteúdos de análise dinâmica na forma de disciplina curricular e obrigatória em suas grades. A maioria dos cursos, apenas mistura conteúdo de análise dinâmica junto com outros temas. Para o economista, é fundamental dominar as ferramentas de análise dinâmica para modelar decisões econômicas. Temos como propósito contribuir para o preenchimento desta lacuna com este trabalho, introduzindo no próximo capítulo Teoria do Controle Ótimo. Neste próximo capítulo trataremos sobre as origens, a importância e definição da teoria.

3 A TEORIA DO CONTROLE ÓTIMO

Neste capítulo descreveremos primeiramente os aspectos históricos da teoria do controle ótimo, sua origem e os maiores matemáticos que contribuiram para o desenvolvimento da teoria. Em seguida, trataremos das principais aplicações desta teoria no campo da economia e sua importância para o acadêmico de economia. O capítulo é encerrado com a apresentação formal da Teoria do Controle Ótimo com exemplos.

3.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

A teoria do controle ótimo trata-se de uma extensão do cálculo de variações, onde o problema principal é determinar a função que maximiza um funcional (função de uma função com as variáves de estado e de controle). A origem do cálculo de variações é datada logo após a formalização do cálculo por Newton e Leibniz, sendo que o problema central no cálculo era encontrar o ponto no qual a função atingisse o máximo ou mínimo. Como é de se esperar, os problemas de cálculo de variações tem um nível maior de dificuldade do que os problemas de cálculo, que consiste em buscar máximos e mínimos de funções contínuas definidas sobre algum espaço funcional, ou simplesmente encontrar o máximo ou mínimo valor da integral ou do funcional em questão. Esses funcionais são formados por integrais envolvendo uma função incógnita e suas derivadas. O objetivo é analisar as funções extremas onde o funcional atinge um valor de máximo ou de mínimo, ou de funções fixas onde a taxa de variação do funcional é precisamente zero. Um problema bem famoso do cálculo de variações é o chamado de *Braquistócrona* foi proposto por Bernoulli em 1696, e foi resolvido por ele e seu irmão, independentemente, em 1697. Os fundadores e contribuidores do cálculo de variações foram Euler, Lagrange, os irmãos Bernoulli, Newton e Legendre (SETHI; THOMPSON, 2000, p.10).

O nascimento da teoria de controle ótimo ocorreu com base na publicação em russo (1958) e em inglês (1962) da obra, The Mathematical Theory of Optimal Process, por Pontryagin, Boltyanskii, Gamkrelidze, e Mischenko. Este livro foi importante para a formalização do cálculo com variações com variáveis de controle restritas, e na prova do princípio máximo para problemas de controle ótimo. A conversão de um problema de cálculo de variações, para um problema de controle ótimo necessita de uma extensão conceitual: a adição de variáveis de controle na equação de estado, ou seja na equação diferencial do sistema. Mas, o que vem a ser problemas de controle ótimo?

Um problema pode ser considerado de controle ótimo quando tiver dependência de tempo e restrição nas variáveis de estado e controle mutuamente. A seção 3.3 irá apresentar este assunto em detalhes. Primeiramente, veremos a importância de estudar esta teoria.

3.2 IMPORTÂNCIA DA TEORIA

A definição popular da economia refere-se a ciência que estuda a alocação de recursos escassos. Esta definição *per se* apresenta um problema de otimização intertemporal, se considerarmos que o processo de alocação esta inserido em horizonte temporal.

O estudo da teoria do controle ótimo esta inserido em um contexto, onde os agentes (firmas e indivíduos) buscam cada vez mais maximizar seus retornos. Para realizar este processo de maximização, a simples análise de custo-benefício não oferece muita precisão. Para analisar oportunidades ao longo do tempo buscando o lucro máximo, necessita-se de um arcabouço mais robusto. O economista que souber aplicar os fundamentos matemáticos e recursos computacionais para buscar solucionar esta necessidade intrínseca dos agentes terá um instrumental poderoso ao seu dispor.

Desde da descoberta dos anos 1960 sobre o princípio máximo, a teoria do controle ótimo tem sido um instrumental promitente nas pesquisas das ciências econômicas. Embora seu desempenho em macroeconomia e na teoria do crescimento não tenha atendido as expectativas, estas aplicações produziram conhecimento e capital humano que geraram surpreendentemente altos retornos para a economia e outras ciências. Uma pesquisa significante e produtiva tem sido conduzida em aplicar modelos de controle ótimo para economia gerencial e economia dos recursos naturais não renováveis (ZILBERMAN, 1982, p.396-397).

No campo de pesquisa operacional, a empresa tem que decidir quanto de insumo solicitar em cada período do tempo para se adequar com a demanda de seus produtos. Entretanto, existe um custo em manter insumos estocados, e o custo oportunidade do dinheiro despendido para comprar o mesmo. O problema descrito pode ser resolvido com a teoria do controle ótimo, que requer um balanço entre os benefícios de uma produção contínua versus os custos de ter insumos estocados (SETHI; THOMPSON, 2000, p.154).

Na Teoria de Finanças as empresas se deparam com um problema básico, o problema de caixa mínimo. Se a firma mantém muito dinheiro em caixa, ela perde dinheiro em termos de custo de oportunidade. Se deixar poucos recursos disponível em caixa, quando precisar de dinheiro terá que vender títulos ou ações, e terá que arcar com os custos de corretagem. É possível calcular a quantidade de recursos ideal para o tradeoff entre dinheiro em caixa e investimentos financeiros com a otimização dinâmica (SETHI; THOMPSON, 2000, p.120).

Na Teoria do Crescimento Econômico, ambas as vertentes, teoria do crescimento neoclássico ou crescimento endógeno, aplicam a teoria do controle ótimo de tempo contítnuo para seus modelos dinâmicos. Os estudantes que desejarem embarcar sobre o estudo do crescimento econômico, deverão buscar se familiarizar com a teoria do controle ótimo, para acompanhar a literatura deste tema.

3.3 ASPECTOS TEÓRICOS

Intuitivamente a técnica do controle ótimo pode ser caracterizada como a dinâmica da otimização estática. Diferentemente da otimização estática que preocupa-se em encontrar um ponto x para que a $f(x)$ encontre seu valor máximo(ou mínimo), na teoria do controle ótimo o objetivo é encontrar a trajetória de x em $x(t)$, sobre um intervalo fixo, $T_0 \leq T \leq T_1$, tal que o funcional V, obtenha o valor extremo. O problema clássico de controle ótimo pode ser expresso como seguinte:

$$\max V(x_0, \bar{u}) = \int_0^T C(x(t), u(t))\, \mathrm{d}t \tag{1}$$

$$Sujeito\ \grave{a} : \dot{x}(t) = g(x(t), u(t), t)) \tag{2}$$

A variável $u(t)$ na equação (1) e (2) é referida como a variável de controle ou de decisão que influencia a variável de estado $x(t)$ em cada ponto do tempo. A maneira como $u(t)$ controla a variável de estado é determinado pela equação (2).

Para encontrar a soluçcão para o problema, primeiramente temos que satisfazer as condiçcões necessárias do teorema a seguir:

O Teorema das Condições necessárias para encontrar solução problemas de Controle Ótimo. deve satisfazer as seguintes condições:

- A variável de controle (ou decisão) é escolhida para maximizar a função Hamiltoniana ($H[x(t), u(t), \lambda(t), t] = F[x(t), u(t), t] + \lambda(t) G[x(t), u(t), t]$) em cada ponto de tempo. O $u(t)$ que maximiza $H[x(t), u(t), a(t), t]$ que é igual à:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \tag{3}$$

- A trajetória de $x(t)$ e $\lambda(t)$, variável de estado e co-estado, são obtidas pela solução do seguinte sistema de equações diferenciais:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{4}$$

$$\dot{x} = g[x(t), u(t), t] \tag{5}$$

- As duas condições usadas para resolver o sistema de equações diferencias são dadas:

$$x(0) = X_0; \quad \lambda(T) = 0 \tag{6}$$

Os modelos de controle ótimo descrevem o envolvimento de um sistema num horizonte temporal e determinam o nível ótimo das variáveis de decisão no tempo. O estado do sistema em qualquer ponto no tempo é caracterizado como variáveis de estado. As mudanças no tempo sobre as variáveis de estado ocorrem de acordo com as equações de movimento (equações diferenciais) que são funções das variáveis de estado, variáveis de controle e variáveis aleatórias no momento da mudança. O Objetivo do agente ou tomador de decisão é maximizar o somatório dos valores esperados no tempo, considerando as funções de utilidade temporal, que são funções do tempo, e o nível das variáveis de controle e aleatórias em cada momento no tempo. Portanto, um problema de controle ótimo determina os controles que maximizam o valor da função objetivo sujeito as equações diferenciais do sistema e as condições inicias das variáveis de estado (ZILBERMAN, 1982, p.395).

3.3.1 Recursos Naturais

O campo de estudo da economia de recursos naturais preocupa-se com alocação ótima dos recursos. No que se refere aos recursos não renováveis , qual deveria ser a taxa de extração destes recursos? Consideremos o caso de uma mina de ouro, na qual o ativo principal é o próprio metal. No tempo zero (t_0) a extração de ouro produz um certo lucro. O mais interessante para o tomador de decisão seria saber o valor dos lucros futuros da mina. Esta seria um visão mais realista com o objetivo da firma, que é maximizar a soma dos lucros sobre um intervalo de tempo a partir do tempo presente (t_0).

Neste exemplo a seguir, o funcional ou função objetivo, representa uma série de de fluxos de caixa a serem descontados para o valor presente durante o perído de extração de ouro, até o perído T, que é representado da seguinte forma:

$$V(x_0, \bar{u}) = \int_0^T C(u(t))e^{-rt}\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

$$\dot{x} = -u(t) \tag{8}$$

A função de objetivo $V(x_0, \bar{u})$, indica que extraindo $u(t)$ de ouro produz um fluxo de caixa de $C(u(t))$ em t. Em cada ponto do tempo a extração de ouro determina a redução da mina conforme a equação 8. Vamos assumir que na extração de ouro os retornos sejam decrescentes para tornar o exemplo mais realista. O fluxo de caixa que ocorrerá no futuro é descontado pelo fator de desconto e^{-rt} a uma taxa de preferência do agente. O valor da mina de ouro depende da reserva de ouro inicial e da trajetória de extração $\bar{u}$ durante o tempo inicial ao final $(0, T)$. $V(x_0, \bar{u})$ é também chamada de funcional porque depende da forma da função $\bar{u}$ que é a extração de ouro durante todo o tempo da mina.

Neste sistema, o agente controla diretamente a variação na quantidade de ouro extraída, pelo controle da taxa de extração $\bar{u}$, que é equivalente à equação de estado do sistema ou equação diferencial. Portanto, a hípotese principal refere-se a escolha ótima da trajetória de extração $\bar{u}$, que maximiza o valor da mina, considerando seu fator de desconto. Este problema de otimização dinâmica no qual o agente tem controle sobre a variável de estado do sistema, pode ser resolvido com cálculo de variações, usando a equação de Euler [1]. Para um problema ser caracterizado como de controle ótimo, o sistema deverá envolver mais restrições na equação diferencial do sistema. Na próxima seção apresentaremos um problema com mais restrições na equação diferencial do sistema.

3.4 EXERCÍCIO DIDÁTICO - SOLUÇÃO ANALÍTICA

Em problemas de controle ótimo as variáveis são divididas em duas classes, variáveis de estado e de controle ou decisão. O movimento destas variáveis é determinado por uma equação diferencial. O problema a seguir trata a variável de decisão $U(t)$ como contínua dentro de um intervalor fechado $\leq 0 < t \leq< 1$, tendo a função objetivo $f(X, U, T) = -\frac{1}{2}(X^2 + U^2)$ e sua restrição, o problema pode ser descrito da seguinte forma:

$$\max V(X_0, \bar{U}) = \int_0^1 -\frac{1}{2}(X^2 + U^2)\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

$$Sujeito\ \grave{a} : \dot{X} = f(X, U, T) = -X^3 + U \tag{10}$$

$$X(0) = 5 \tag{11}$$

Para encontrar a solução basta seguir os passos [2]:

[1] Ver (KAMIEN; SCHWARTZ, 1991, p.16)

[2] Ver (HOY et al., 2001, p.1004)

Passo 1 Montar o Hamiltoniano

$$H(X(t),U(t),\lambda(t)) = -\frac{1}{2}(X^2+U^2)+\lambda(-X^3+U) \tag{12}$$

Passo 2 Conseguir a 1 condição necessária para a otimização.

$$\frac{\partial H}{\partial U} = 0 \Longrightarrow U(t) = \lambda(t) \tag{13}$$

Passo3 Conseguir a 2° condição necessária para a otimização.

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial X} \quad ou \quad = -\frac{\partial H}{\partial X} = -(-X-3X^2\lambda) \tag{14}$$

Reorganizando (14) temos:

$$\dot{\lambda} = X+3X^2\lambda \tag{15}$$

Inserindo (13) na equação diferencial (10) temos:

$$\dot{X} = -X^3+\lambda \tag{16}$$

Para soluci onar o sistema de equações diferenciais temos que encontrar a trajetória ótima da variável $U(t)$ que maximiza a equação objetivo. Para saber como solucionar sistemas de equações diferenciais ver Hoy (2001, p.929).

$$\dot{\lambda} = X+3X^2\lambda \tag{17}$$

$$\dot{X} = -X^3+\lambda \tag{18}$$

Vamos usar a planilha eletrônica Microsoft Excel - Ferramenta Atingir Meta para solucionar este sistema de equações diferenciais. Ao utilizarmos a planilha eletrônica para solucionarmos problemas de otimização dinâmica, temos que transformar os problemas que vierem na forma contínua (Função objetivo na forma de integral) para a forma discreta (função objetivo na forma de somatório). Nos próximos exemplos, a função objetivo já estará na forma discreta. Ao trocar a variável $\dot{\lambda}$ por $\frac{\lambda(t+\Delta t)-\lambda(t)}{\Delta t}$ e $\dot{X}$ por $\frac{X(t+\Delta t)-X(t)}{\Delta t}$ temos um sistema discreto que reorganizado é:

$$\lambda(t\dot{+}\Delta t) = \lambda(t)+(U(T)+(3X(t)^2)\lambda)\Delta t \tag{19}$$

$$\dot{X} = X(t)+(-X(t)^3+\lambda(t))\Delta t \tag{20}$$

Os passos seguintes devem ser seguidos para a solução na planilha eletrônica (SETHI; THOMPSON, 2000, p.64).

Passo 1 Digite $-0,2$ na célula $A2$.

Passo 2 Digite 5 na célula $B2$.

Passo 3 Digite $= A2 + (B2 + 3 * (B2^2) * A2) * 0.01$ na célula $A3$

Passo 4 Digite $= B2 + (-B2^3 + A2) * 0.01$ na célula $B3$

O valor de $X(0)$é 5 e para $\lambda(0)$ vamos inserir um valor fictício $-0,2$, para usarmos depois a ferramenta atingir meta e descobrimos o real valor para este problema.

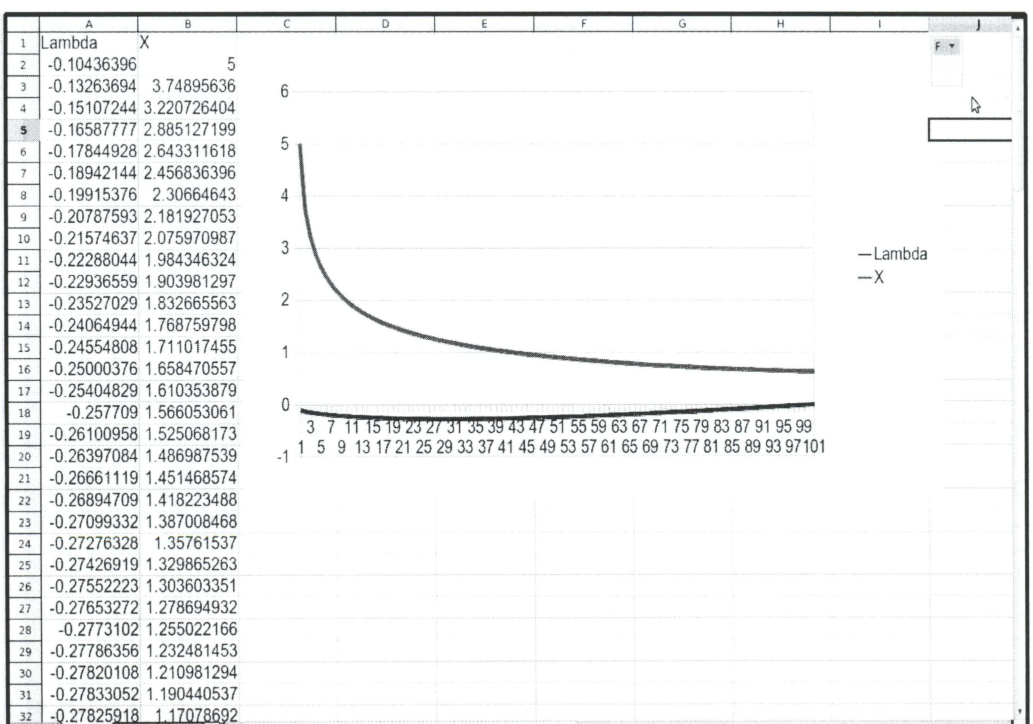
Passo 5 Selecione $A3$ e $B3$ e arraste até as células $A102$ e $B102$.

Passo 6 Depois deixe a célula $A3$ selecionada e vá para o menu ferramentas e escolha a opção atingir meta.

Passo 7 Com a ferramenta aberta digite $A103$ na célula de formula, Valor meta $= 0$ e a célula que varia é a $A2$.

Desta forma encontramos o $\lambda(t) = -0.10436$. Que segundo (13) é igual a $U(t)$, a trajetória de U que otimiza $V(X_0, \bar{U})$ é $\lambda(t)$ com o valor inicial de $\lambda(0) = U(0) = -0.10436$.

A figura abaixo mostra a trajetória da variável $\lambda(t)$ e $X(t)$.



	A	B
1	Lambda	X
2	-0.10436396	5
3	-0.13263694	3.74895636
4	-0.15107244	3.220726404
5	-0.16587777	2.885127199
6	-0.17844928	2.643311618
7	-0.18942144	2.456836396
8	-0.19915376	2.30664643
9	-0.20787593	2.181927053
10	-0.21574637	2.075970987
11	-0.22288044	1.984346324
12	-0.22936559	1.903981297
13	-0.23527029	1.832665563
14	-0.24064944	1.768759798
15	-0.24554808	1.711017455
16	-0.25000376	1.658470557
17	-0.25404829	1.610353879
18	-0.257709	1.566053061
19	-0.26100958	1.525068173
20	-0.26397084	1.486987539
21	-0.26661119	1.451468574
22	-0.26894709	1.418223488
23	-0.27099332	1.387008468
24	-0.27276328	1.35761537
25	-0.27426919	1.329865263
26	-0.27552223	1.303603351
27	-0.27653272	1.278694932
28	-0.2773102	1.255022166
29	-0.27786356	1.232481453
30	-0.27820108	1.210981294
31	-0.27833052	1.190440537
32	-0.27825918	1.17078692

Figura 3: Trajetória Ótima de $\lambda(t) e X(t)$

A ferramenta *AtingirMeta* busca calcular com os dados fornecidos o valor inicial, considerando a magnitude do valor meta inserido. Esta função está baseada na análise de sensibilidade, que trata-se de um estudo das variações do resultado de um modelo estátistico, que podem ser atribuídos à variações nos dados do modelo. Portanto, a ferramenta busca com base nos outros dados, encontrar o seu valor ótimo. Suas aplicações são comuns em física, quimica e finanças.

Neste capítulo foi possível comprender os principais aspectos da teoria do controle ótimo. Primeiramente, ficou evidente que esta teoria é bem recente na literatura, se comparada com cálculo diferencial. O seu surgimento foi com base no cálculo de variações, que consolidou-se com a publicação da obra de The Mathematical Theory of Optimal Process, por Pontryagin e seus alunos. A diferença de um problema de controle ótimo para um problema de cálculo de variações se trata da adição de mais variáveis de restrição na equação diferencial do sistema.

As razões para estudar esta teoria decorrem do fato de que a maioria dos cursos de economia do Brasil não apresentarem este tipo de ferramental nos cursos de graduação em economia, como descrito no capítulo 2. O seu estudo proporciona diversas aplicações, como em economia de recursos naturais, pesquisa operacional, marketing e finanças, preparando o acadêmico para resolver problemas de otimização intertemporal e para os estudos de modelos mais complexos apresentado nos cursos de pós-graduação. Por último foi apresentado, as condições necessárias da teoria e um exemplo analítico. No próximo capítulo trataremos de alguns problemas recorrentes na literatura econômica, mais especificamente na macroeconomia. Com o auxilio da planilha eletrônica, buscaremos analisar e solucionar estes problemas numericamente.

4 PROBLEMAS ILUSTRATIVOS DE CONTROLE ÓTIMO

4.1 O PROBLEMA DE COMER UM BOLO

Um exemplo muito discutido na introdução de problemas macroeconômicos é o problema de comer um bolo (Cake eating problem). O problema retrata um agente que enfrenta um dilema, comer todo o bolo ou deixar o bolo para o futuro. Após uma análise complexa do agente, ele percebe que o primeiro pedaço de bolo produz uma satisfação maior do que os pedaços subsequentes. Portanto, se comer o bolo de uma vez sua satisfação será praticamente nula. O agente então decide em comer somente um pedaço ao dia. Entretanto, o agente sabe que o bolo não poderá ser consumido se mantido por mais de 9 dias. Contudo, o agente decide comer o bolo nos primeiros 10 dias. Qual deverá ser a porção ideal a ser ingerida diariamente? O agente imaginou que se comer o mesmo pedaço no período resolveria o problema. Mas se comer o bolo hoje é melhor do que esperar para comer o bolo depois, como poderá ser melhor comer o mesmo pedaço hoje e amanhã. O agente concluiu que se ele comer menos amanhã e mais hoje ele teria uma satisfação maior. Ele comeria diariamente um pouco menos do que o dia anterior, e o bolo duraria os 10 dias e no final não sobraria nada (DELLAS; SCHMIDHEINY, 2003, p.18).

Vamor assumir que as preferências do agente assumem a seguinte função utilidade:

$$U(c_t) = \ln c_t \tag{21}$$

Onde c_i é tamanho do bolo consumido no período t. Esta função utilidade produz utilidade marginal decrescente. O consumo futuro é descontado pelo fator de desconto $\beta = \frac{1}{1+r} < 1$. A função objetivo ou funcional apresentado anteriormente, é representado na sua forma discreta neste problema, este funcional nada mais é do que a soma dos valores presente da utilidade descontada que pode ser representada por:

$$V(c_0, c_1, ..., c_T) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t U(c_t) \tag{22}$$

Onde T é o último dia de consumo. Na estória do agente acima T é 9 e o tempo presente é 0. As preferências são aditivas intertemporais. O agente busca maximizar (22) escolhendo seu consumo no período $t = 0, ..., T$.

O tamanho do bolo no período t dado pelo seu tamanho anterior menos o consumo anterior:

$$k_t = k_{t-1} - c_{t-1} \tag{23}$$

O consumo do bolo não pode exceder o tamanho do bolo no período. Contudo, o tamanho do bolo deve ser não negativo em qualquer período:

$$k_t \geq= 0 \ \ para \ \ t = 1...T+1 \tag{24}$$

Este problema do bolo contém a estrutura matemática de um modelo de controle ótimo de crescimento na macroeconomia moderna. É o famoso modelo de Ramsey (ROMER, 1996, p.39) que em princípio pode ser reduzido ao problema do bolo. Onde, uma sociedade tem que escolher entre consumo e investimento. Quanto mais a sociedade investe, menos ela pode consumir instantaneamente, mas mais ela poderá produzir e depois consumir no futuro. Os modelos de crescimento ótimo determinam o nível ótimo de investimento em cada período.

Para resolver este problema numericamente, como retratado na figura 4, vamos utilizar a Ferramenta Solver do Microsoft Office -Excel. Primeiramente, precisamos entender a estrutura do problema. A equação de especificação é idêntica a equação 22. A equação de diferenças de restrição refere-se à equação 23. O parâmentro β representa o fator de desconto para o consumo futuro, a uma taxa de juros r=25% que foi escolhida arbitrariamente. O parâmetro $k0$ refere-se ao tamanho inicial do bolo, que é 100, também foi escolhido arbitrariamente. No momento incial a utilidade do agente é zero, pois não fizemos os cálculos. Na planilha, a linha período t represente o tempo, a linha de consumo representa o quanto ele vai consumir (incialmente preenchemos com valores aleatórios, pois, após os cálculos serão inseridos os valores ótimos de consumo), a linha tamanho do bolo representa a equação de diferenças de restrição 23. A linha de utilidade do período, temos somente o cálculo da utilidade, que de acordo com a equação 22 é $ln(c_t)$. Na última linha da planilha temos a equação 22 calculada para cada período, ou seja, a fórmula $\beta^t ln(c_t)$ para cada ano. Na célula utilidade total, que trata-se do somatório da linha utilidade descontada, representa o valor do funcional ou da função objetivo da equação 22.

Passo 0 Formate a planilha de acordo com a Figura 4:

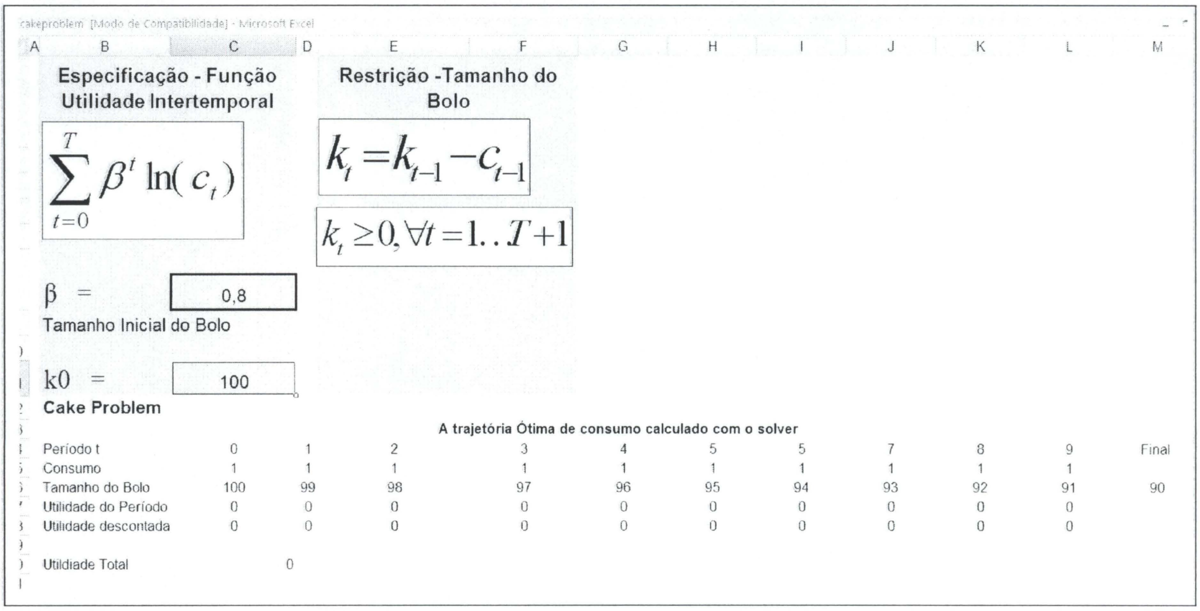


Figura 4: Estrutura do Problema

Passo 1 Na linha 15 Consumo - $C15 : L15$ entraremos qualquer valor para montarmos o problema.

Passo 2 Na linha 16 Tamanho do bolo - a célula $C16$ recebe o valor de $k_0 = C11$, pressione $F4$ para fixar o valor. A partir da célula $D16$ usaremos a equação de restrição e entraremos com a fórmula $D16 - D15$. Para copiar esta fórmula para as outras células basta clicar na parte inferior direita da célula $D16$ e arrastar até a $M16$.

Passo 3 Na linha utilidade do período - célula $C17$ entrar com a fórmula $= LN(C15)$. Para copiar esta fórmula para as outras células basta clicar nas parte inferior direita da célula $C17$ e arrastar até a $L17$.

Passo 4 Na linha utilidade descontada - célula $C18$ entrar com a fórmula $= (C8^{C14}) * C17$. A célula $C8$ precisa estar fixada. Para copiar esta fórmula para as outras células basta clicar na parte inferior direita da célula $C18$ e arrastar até a $L18$.

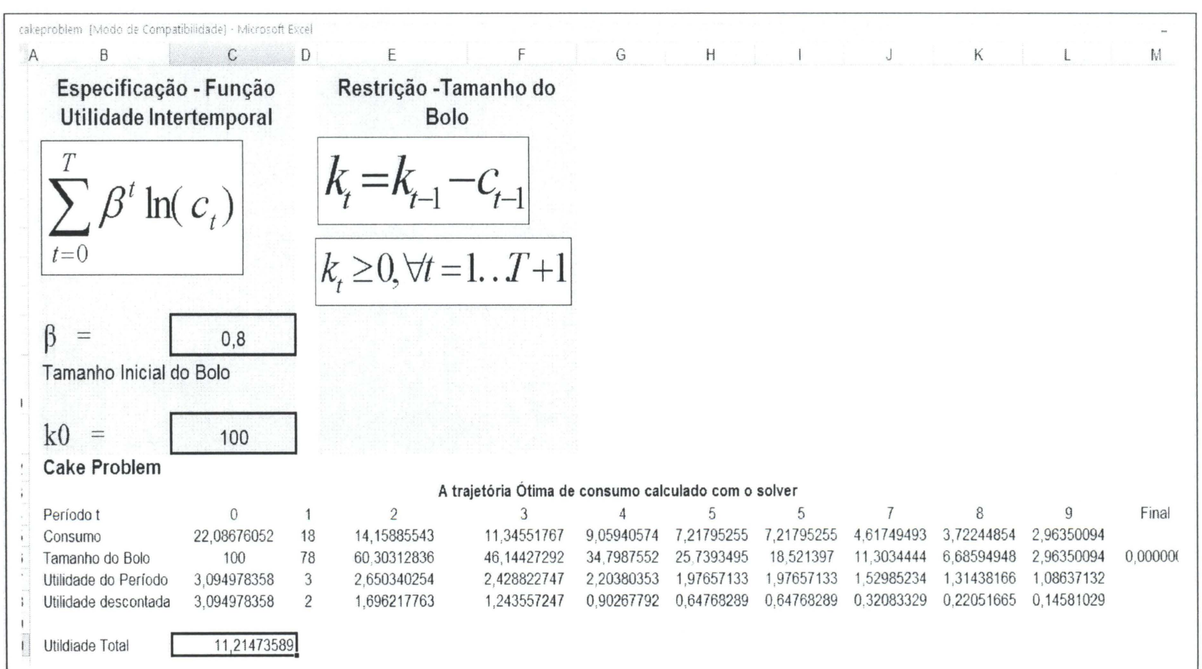
Passo 5 Na linha Utilidade total temos o valor somatório da utilidade descontada, na célula $C20$ entrar com a fórmula $= soma(C18 : L18)$.

Para encontrarmos a solução ótima vamos usar a ferramenta solver do Microsoft Excel. Ao abrirmos a ferramenta, o quadro que será preenchido esta representado na figura 5.

Figura 5: Ferramenta Solver

Passo 6 Defina a célula de destino $C20$. A linha de consumo $C15 : L15$ são as células variáveis. Serão nestas células que o algoritmo do solver mostrará a porção de bolo que deve ser ingerida para otimizar a utilidade do agente. No campo submeter a restrição, adicionar o intervalo do tamanho do bolo, restringindo esse intervalo a valores positivos $D16 : M16 \geq 0$. Após isso, clicar em resolver.

A solução encontrada deverá estar de acordo com a figura 6 :



Período t	0	1	2	3	4	5	5	7	8	9	Final
Consumo	22,08676052	18	14,15885543	11,34551767	9,05940574	7,21795255	7,21795255	4,61749493	3,72244854	2,96350094	
Tamanho do Bolo	100	78	60,30312836	46,14427292	34,7987552	25,7393495	18,521397	11,3034444	6,68594948	2,96350094	0,00000(
Utilidade do Período	3,094978358	3	2,650340254	2,428822747	2,20380353	1,97657133	1,97657133	1,52985234	1,31438166	1,08637132	
Utilidade descontada	3,094978358	2	1,696217763	1,243557247	0,90267792	0,64768289	0,64768289	0,32083329	0,22051665	0,14581029	

Utildiade Total	11,21473589

Figura 6: Otimização do Consumo do Bolo

A teoria do controle ótimo e a ferramenta Solver nos auxiliaram neste problema a encontrar a trajetória ótima do consumo do bolo, que maximiza a utilidade total do agente representativo. Após os cálculos do Solver, a linha de consumo ótima do bolo que maximiza a utilidade do agente foi encontrada, o consumo do bolo ideal inicia-se com uma porção de 22.06 no primeiro período e termina com uma porção de 2.96 no último período. A linha de utilidade do período e a linha de utilidade descontada que dependiam dos valores da linha de consumo, foram alteradas respectivamente. A utilidade de comer 22.08 do bolo é de 3.09 de utilidade para o agente no primeiro período, analisando os períodos subsequentes, podemos confirmar que utilidade marginal do agente é decrescente, confirmando a teoria. A utilidade descontada do agente é igual a utilidade do período no $t0$, porque o $\beta^0 = 1$ para $t = 0$, nos outros períodos o β^té diferente de 1, e multiplica os valores da linha utilidade do período. O resultado do problema encontra-se no valor da célula Utilidade Total, que representa o nosso funcional $V(c_0, c_1, ..., c_T)$ da equação 22. Este valor representa a soma das utilidades de comer o bolo, descontando as utilidades futuras a uma taxa $r = 25\%$. O valor da soma das utilidades descontadas é de 11.21 de utilidade para o agente representativo, ou seja, o agente tem uma ganho de 11.21 na sua utilidade ao consumir o bolo.

4.2 O MODELO DE RAMSEY

O modelo neoclássico de crescimento, alicerçado nos trabalhos de Ramsey (1928) e Solow (1956), providencia a estrutura básica para grande parte da macroeconomia moderna. O modelo de crescimeto de Solow tem três ingredientes: uma função de produção que permite um substiuição dos fatores capital e trabalho na produção dos bens, acumulação de capital fixa em cada período e uma oferta de mão de obra que cresce a uma taxa exógena (WALSH, 2003, p.43).

Segundo Weber (2005), a contribuição de Ramsey constitui na adição de um comportamento dinâmico ao modelo de crescimento de Solow-Swan, modelando as decisões de prospectivas de consumo e poupança dos consumidores. Este exercício é apresentado na forma contínua em Blanchard e Fisher (1989) e na forma discreta em Walsh (2003). Os acadêmicos do curso de economia que realizarem este exercício, poderão melhorar o aproveitamento da leitura de artigos cièntificos de macroeconomia.

A função objetivo ou funcional do consumidor representativo é:

$$V(k_0, \bar{c}) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t u(c_t) \tag{25}$$

No ano t, o consumidor se satisfaz com a utilidade, $u(c_t)$, sendo c_t o consumo anual. $\beta = \frac{1}{1+r}$ é o fator de desconto subjetivo a taxa de preferência pessoal do consumidor. A equação 25 mede o valor da utilidade da vida do consumidor, na expectativa de que ele viva T anos, aplicando o fator de desconto β. Para facilitar o exercício, iremos utilizar uma forma popular de função utilidade, na qual o consumidor representativo têm aversão ao risco e sua função utilidade com risco constante, tal qual $u(c_t) = \frac{(c_t^{1-\gamma}-1)}{1-\gamma}$. Substituindo em 25, temos:

$$V(k_0,\vec{c}) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \frac{(c_t^{1-\gamma}-1)}{1-\gamma} \tag{26}$$

O parâmetro γ determina a curvatura da função utilidade anual $u(c_t)$. Um valor alto de γ, indica fortemente utilidade marginal anual do consumo decrescente. Portanto, a elasticidade intertemporal de substituição será baixa, porque a mudança do consumo de um ano para o outro, reduz fortemente a utilidade no primeiro, e aumenta muito pouco a utilidade no segundo. O valor presente da utilidade da vida do consumidor é o funcional $V(k_0,\vec{c})$, onde o valor do consumo depende do nível de capital físico, k_0, e da trajetória do consumo, $\vec{c}$, escolhida pelo consumidor. Neste exercício, o capital físico é a única forma de riqueza.

Assumindo que os indivíduos são consumidores e trabalhadores, e produzem produto de acordo com uma função Cobb-Douglas com retornos constantes de escala:

$$y_t = Ak_{t-1}^{\alpha} \tag{27}$$

Sendo y_t o produto percapita no ano t, que depende do capital percapita do ano anterior k_{t-1}. Os parâmetros A e α determinam a tecnologia disponível.A equação 27 é baseada no modelo de crescimento econômico Solow-Swan, que descreve a mecânica da acumulação de capital (WALSH, 2003, p.47):

$$k_t = (Ak_{t-1}^{\alpha} - c_t) + \frac{1-\delta}{1+n} k_{t-1} \tag{28}$$

Os componentes em parêntenses representam: Ak_{t-1}^{α} o produto, menos, o consumo c_t, que é a poupança. δ é a taxa de depreciação do capital físico e n é a taxa de crescimento da população medidos em percentagem por ano. Portanto, o segundo componente da equação 28 representa o valor de capital percapita do período $t-1$ que é trazido para o período t, considerando a depreciação e taxa de crescimento da população. A equação de diferenças 28 é uma restrição tecnolólogica que limita a disponibilidade de capital em cada ano. O valor do capital por trabalhador irá aumentar se a poupança superar a redução de capital por trabalhador devido à depreciação e crescimento populacional. A objetivo é maximizar a equação 26, sujeita à restrição dinâmica - a equação 28. O consumidor enfrenta um dilema como no exercício de comer um bolo, neste caso a escolha pelo consumo imediato reduz o consumo futuro pela diminuição da acumulação de capital e do crescimento do produto.

Calculando o estado estacionário com a equação 27 e 28 , podemos deduzir o valor de capital por trabalhador, resolvendo $kt = k_{t-1} = k*$. Walsh (2003, p.53) e Weber (2005, p.9) demonstram que o valor do capital por trabalhador do estado estacionário pode ser encontrado pela resolução da equação 28 para o k ótimo ($k*$):

$$k* = \left[\frac{A\alpha(1+n)}{(1+n)(1+r)-(1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}} \tag{29}$$

Para encontrar o valor da produção no estado estacionário basta substituir o $k*$ na equação 27 e o consumo ótimo poderá ser encontrado através da equação:

$$c* = Ak^{\alpha} - \frac{n+d}{1+n}k* \tag{30}$$

A resposta ótima para o consumidor representativo agir diante dos choques econômicos determina a resposta agregada da economia. A transição de um estado estacionário para outro pode durar muitos anos, e a ferramenta solver do microsoft excel não suportaria. Entretanto, se usarmos parâmetros básicos para economia podemos encontrar um novo estado estacionário com uma simulação de 20 anos ($n = 20$). De acordo com Weber (2005, p.17), o Solver suporta no máximo $n = 30$ ao calcular o Modelo de Ramsey.

Primeiramente, vamos visualisar o problema, para depois exportamos para Excel.

Função Objetivo

$$V(k_0, \bar{c}) = \sum_{t=0}^{T} \beta^t \frac{(c_t^{1-\gamma} - 1)}{1-\gamma})$$

Restrição

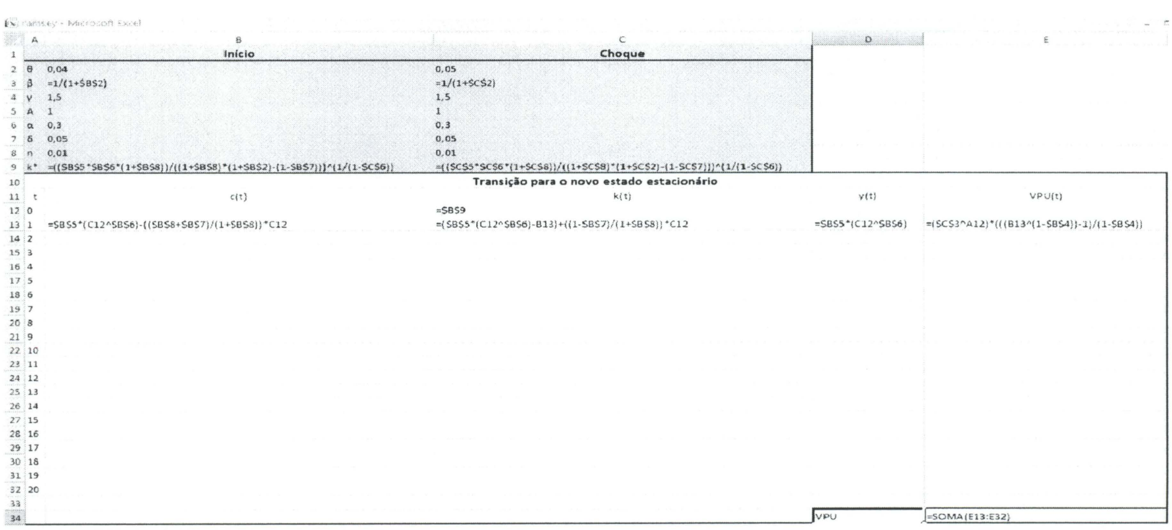
$$k_t = (Ak_{t-1}^{\alpha} - c_t) + \frac{1-\delta}{1+n}k_{t-1}$$

O valor de capital inicial

$$k* = \left[\frac{A\alpha(1+n)}{(1+n)(1+r)-(1-\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

O objetivo neste problema é encontrar o valor presente ótimo da utilidade do agente ao longo do período considerado, que depende do seu nível de riqueza $k0$, que no modelo de Ramsey é o $k*$. A restrição da utilidade do agente, depende do que ele produz, menos seu consumo, mais os parâmetros $\frac{1-\delta}{1+n}$ multiplicado por k_{t-1}, que é o nivel de riqueza passado. Podemos perceber, que até este momento, a diferença do problema de Ramsey para o problema de comer um bolo, trata-se praticamente das condições iniciais, que no problema de comer um bolo representava seu tamanho, igual a 100. Neste problema as condições iniciais são dadas pela necessidade da poupança de igualar $\frac{1-\delta}{1+n}$ para compensar os efeitos da depreciação, δ, e de n crescimento populacional, sobre a magnitude do capital por trabalhador.

A figura 7 apresenta o problema estruturado na planilha eletrônica. De acordo com Weber (2005, p.9) os parâmetros utilizados no problema, foram pesquisados na literatura da teoria dos ciclos reais de negócios. Na coluna *Início* são apresentados os parâmetros para o cálculo do problema. O θ representa a taxa de juros do modelo, no valor de 4%, o β o fator de desconto que considera a taxa de juros. O parâmetro γ indica o formato da função de utilidade do consumo, se seu valor fosse igual a 1, a função de utilidade do consumo seria semelhante a equação 21 do problema do bolo, neste problema o valor atribuído a γ foi de 1.5. O parâmetro A representa a tecnologia na equação 27, na litearatura este valor é geralmente considerado 1, como neste problema. O parâmetro α representa o impacto do aumento do insumo capital (riqueza) nos retornos da produção, o valor considerado foi de 0.3, o que indica a presença de retornos decrescentes ($\alpha < 1$) para o aumento do insumo capital na produção. A depreciação simbolizada por δ foi considerada a uma taxa de 5%, e o crescimento populacional, n, considerado pela taxa de 1%. A equacão 29 foi introduzida no parâmentro $k*$ da planilha, considerando os valores dos parâmentros mencionados anteriormente. Na coluna *Choque* é apresentado os mesmos parâmentros com exceção da mudança no valor da variável θ que após o choque assume o valor de 5%.



	A	B	C	D	E
1		Início	Choque		
2	θ	0,04	0,05		
3	β	=1/(1+$B$2)	=1/(1+$C$2)		
4	γ	1,5	1,5		
5	A	1	1		
6	α	0,3	0,3		
7	δ	0,05	0,05		
8	n	0,01	0,01		
9	k*	=(($B$5*$B$6*(1+$B$8))/((1+$B$8)*(1+$B$2)-(1-$B$7)))^(1/(1-$C$6))	=(($C$5*$C$6*(1+$C$8))/((1+$C$8)*(1+$C$2)-(1-$C$7)))^(1/(1-$C$6))		
10			Transição para o novo estado estacionário		
11	t	c(t)	k(t)	y(t)	VPU(t)
12	0		=$B$9		
13	1	=$B$5*(C12^$B$6)-(($B$8+$B$7)/(1+$B$8))*C12	=($B$5*(C12^$B$6)-B13)+((1-$B$7)/(1+$B$8))*C12	=$B$5*(C12^$B$6)	=($C$3^A12)*(((B13^(1-$B$4))-1)/(1-$B$4))
14	2				
15	3				
16	4				
17	5				
18	6				
19	7				
20	8				
21	9				
22	10				
23	11				
24	12				
25	13				
26	14				
27	15				
28	16				
29	17				
30	18				
31	19				
32	20				
33					
34				VPU	=SOMA(E13:E32)

Figura 7: Fórmulas do Modelo de Ramsey

Para a transição do modelo para o novo estado estacionário precisamos estruturar o cálculo em quatro fases. Primeiramente, calcularemos a equação 30 de consumo ótimo nas células B13:B32. O cálculo da trajetória de acumulação, deverá ser inserido na células C12:C32, iniciando com o valor de $k*$ em t_0, para os próximos períodos a equação 28 deverá ser incluída, substituindo k_{t-1} pelo valor de k* inserido anteriormente. A terceira parte do cálculo diz respeito à equação 27, que deverá ser inserida nas células D13:D32. Na última parte, do cálculo estaremos calculando o valor presente da utilidade do consumidor, representado pela equação 25, nas células E13:E32. O valor da soma das utilidades do período será apresentado na célula E34.

A figura 8 apresenta o modelo completo, porém não ótimo, pois, não sabemos quais são os valores da trajetória de consumo que respeita a restrição e proporciona a maior utilidade. Após completar as equações para todos as células do período, pode se perceber que os valores de consumo, capital e produção são constantes e respectivamente, 1.31, 4.84 e 1.64. Estes valores não representam o cálculo ótimo ainda, para isso precisamos aplicar a ferramenta Solver nas células de consumo. Contudo, já podemos perceber que o valor da utilidade decresce de acordo com o progresso no tempo. Este fato é decorrente do fator de desconto β.

ramsey - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E
1		Início	Choque		
2	θ	0,04	0,05		
3	β	0,961538462	0,952380952		
4	γ	1,5	1,5		
5	A	1	1		
6	α	0,3	0,3		
7	δ	0,05	0,05		
8	n	0,01	0,01		
9	k*	4,845052094	4,225022948		
10		Transição para o novo estado estacionário			
11	t	c(t)	k(t)	y(t)	VPU(t)
12	0		4,845052094		
13	1	1,3176	4,8451	1,6054	0,2576
14	2	1,3176	4,8451	1,6054	0,2454
15	3	1,3176	4,8451	1,6054	0,2337
16	4	1,3176	4,8451	1,6054	0,2226
17	5	1,3176	4,8451	1,6054	0,2120
18	6	1,3176	4,8451	1,6054	0,2019
19	7	1,3176	4,8451	1,6054	0,1923
20	8	1,3176	4,8451	1,6054	0,1831
21	9	1,3176	4,8451	1,6054	0,1744
22	10	1,3176	4,8451	1,6054	0,1661
23	11	1,3176	4,8451	1,6054	0,1582
24	12	1,3176	4,8451	1,6054	0,1506
25	13	1,3176	4,8451	1,6054	0,1435
26	14	1,3176	4,8451	1,6054	0,1366
27	15	1,3176	4,8451	1,6054	0,1301
28	16	1,3176	4,8451	1,6054	0,1239
29	17	1,3176	4,8451	1,6054	0,1180
30	18	1,3176	4,8451	1,6054	0,1124
31	19	1,3176	4,8451	1,6054	0,1071
32	20	1,3176	4,8451	1,6054	0,1020
33					
34				VPU	3,3713

Figura 8: Modelo Completo não Ótimo

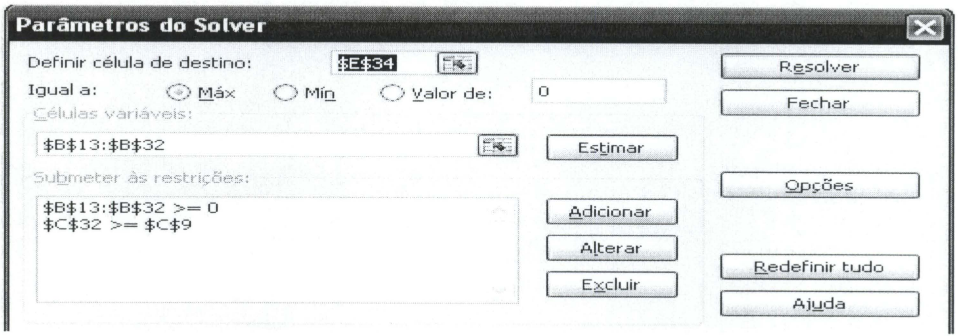


Figura 9: Ferramenta Solver

Na figura 10 temos o resultado do cálculo ótimo do modelo. A trajetória do consumo e o valor presente da utilidade decrescem ao longo do tempo, confirmando a teoria. O nível inicial de riqueza do agente é de $4,84$ e o novo estado estacionário após o modelo é de $4,22$. O nível de produção também decresce ao longo do tempo, confirmando os rendimentos descrescentes. O objetivo do cálculo é descobrir o valor presente da utilidade do consumidor, considerando o nível de riqueza $4,84$, a trajetória de consumo (variável decisão) e a produção do agente (ou trabalhador). Dentro destas condições, no primeiro período o agente deverá consumir 1.37, e acumular capital (riqueza) no valor de 4.78, e produzir 1.60, desta forma o agente maximizaria sua utilidade no valor de 0.2961. A VPU é a soma de todas as utilidades do período descontadas, e seu valor para esta economia é de 3.54. Se o agente seguir esta trajetória de consumo e produção , dada as condições iniciais, ele estará maximizando sua utilidade.

10	Transição para o novo estado estacionário				
11	tempo	c(t)	k(t)	y(t)	VPU(t)
12	0		4,84505		
13	1	1,3778	4,7848	1,6054	0,2961
14	2	1,3694	4,7306	1,5994	0,2771
15	3	1,3624	4,6812	1,5940	0,2599
16	4	1,3560	4,6360	1,5889	0,2440
17	5	1,3501	4,5948	1,5843	0,2293
18	6	1,3448	4,5572	1,5801	0,2157
19	7	1,3399	4,5227	1,5762	0,2031
20	8	1,3355	4,4912	1,5726	0,1914
21	9	1,3315	4,4622	1,5693	0,1806
22	10	1,3279	4,4354	1,5663	0,1704
23	11	1,3247	4,4106	1,5634	0,1610
24	12	1,3219	4,3875	1,5608	0,1523
25	13	1,3195	4,3658	1,5584	0,1441
26	14	1,3174	4,3451	1,5560	0,1366
27	15	1,3156	4,3251	1,5538	0,1295
28	16	1,3143	4,3056	1,5517	0,1229
29	17	1,3132	4,2861	1,5496	0,1167
30	18	1,3125	4,2665	1,5475	0,1109
31	19	1,3121	4,2462	1,5453	0,1055
32	20	1,3121	4,2250	1,5431	0,1005
33					
34				VPU	3,54775

Figura 10: Trajetória Ótima do Modelo de Ramsey

Passo 1 Formatar a planilha de acordo com o modelo da figura 7. Na célula $B9$ e $C9$ a equação 29 deverá ser digitada. Os valores hipotéticos dos parâmetros deverão estar nas células correspondentes.

Passo 2 Na célula $B13$ a equação 30 deverá ser digitada. A Célula $C12$ terá o valor da de $B9$. A célula $C13$ deve ter a equação 28. Já em D14, a equação 27 deve ser digitada e em E13 a equação funcional 26 deve ser digitada com o novo valor de β após o choque dos juros.

Passo 3 Clicar em célula com fórmulas da linha 13 e e arrastar at a linha 32. Na célula $E32$ dever conter um somatório das linhas $E13 : E32$. Comparar resultado de acordo com a figura 8:

Passo 4 Selecionar a célula $E32$ e clicar em Ferramentas-Solver. Preencher o quadro de acordo com a Figura 9:

Se realizarmos algumas alterações estruturais no modelo podemos ver o impacto no valor do somatório da utilidade descontada. Se alterarmos A, α, d,e n encontraremos outro estado estacionário. Contudo, se alterarmos γ somente, a trajetória da economia para o novo estado estacionário será alterada. Simularemos um choque tecnológico que pode ser via alteração do parmetro ou adição de uma constante z a função de produção. O choque ocorrerá com a adição de uma constante arbitrária 0.2. Portanto, na célula $D13$ adicionaremos 0.2. Após incluir a constante encontraremos o novo valor ótimo do consumo para o modelo.

A figura 11 apresenta o choque somente para primeiro ano. Como este impacto tecnológico ocorreu somente na produção, de acordo com a equação 28, a poupança e a produção seriam afetadas. A trajetória do consumo diminui, ficou abaixo do período anterior ao choque. A trajetória de acumulação inciou em 4.8450, alcançando o novo estado estacionário em 4.8451. A produção teve um incremento em sua trajetória, no período inicial com 1.80, atingindo no período final 1.60.

ramsey2 - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E
1		**Início**	**Choque**		
2	θ	0,04	0,04		
3	β	0,961538462	0,961538462		
4	γ	1,5	1,5		
5	A	1	1		
6	α	0,3	0,3		
7	δ	0,05	0,05		
8	n	0,01	0,01		
9	k*	4,845052094	4,845052094		
10	**Transição para o novo estado estacionário**				
11	t	c(t)	k(t)	y(t)	VPU(t)
12	0		4,845052094		
13	1	1,3424	5,0202	1,8054	0,2738
14	2	1,3403	5,0043	1,6226	0,2620
15	3	1,3384	4,9897	1,6211	0,2508
16	4	1,3367	4,9763	1,6197	0,2401
17	5	1,3351	4,9639	1,6183	0,2300
18	6	1,3337	4,9525	1,6171	0,2204
19	7	1,3324	4,9419	1,6160	0,2113
20	8	1,3312	4,9321	1,6150	0,2026
21	9	1,3301	4,9230	1,6140	0,1943
22	10	1,3292	4,9145	1,6131	0,1864
23	11	1,3283	4,9065	1,6123	0,1788
24	12	1,3276	4,8990	1,6115	0,1716
25	13	1,3269	4,8918	1,6108	0,1648
26	14	1,3264	4,8848	1,6101	0,1582
27	15	1,3259	4,8781	1,6094	0,1519
28	16	1,3255	4,8715	1,6087	0,1459
29	17	1,3252	4,8650	1,6081	0,1402
30	18	1,3249	4,8585	1,6074	0,1347
31	19	1,3248	4,8518	1,6068	0,1295
32	20	1,3247	4,8451	1,6061	0,1245
33					
34				VPU	3,7718

Figura 11: Modelo de Ramsey - Alteração Tecnológica no 1 ano

Contudo, o valor presente da utilidade, teve um incremento considerável, no período anterior ao choque foi de 3.54, depois do choque, 3.77. Os ganhos do choque de tecnologia em um único ano providenciaram um aumento dos valores da trajetória do capital (riqueza), com isso aumentando o valor presente da utilidade do modelo.

O choque tecnológico da figura 11 foi temporário, pois a alteração foi realizada somente no ano 1. A figura 12 mostra uma alteração tecnológica para todos os anos de produção, ou seja adição da constante arbitrária 0.2. Neste cenário, a trajetória do consumo no primeiro período aumenta de 1.37 antes do choque, para 1.51. A trajetória de acumulação de capital e da produção se mantiveram estáveis, bem próxima de seus valores iniciais. O valor presente da utilidade total aumentou de 3.54 antes do choque tecnológico, para 5.32. Ficou evidente de que o aumento da tecnologia impactou positivamente a VPU do agente representativo.

ramsey2 - Microsoft Excel

	A	B	C	D	E
1		**início**	**choque**		
2	θ	0,04	0,04		
3	β	0,96154	0,96154		
4	γ	1,5	1,5		
5	A	1	1		
6	α	0,3	0,3		
7	δ	0,05	0,05		
8	n	0,01	0,01		
9	k*	4,84505	4,84505		
10	**Transição para o novo estado estacionário**				
11	tempo	c(t)	k(t)	y(t)	VPU(t)
12	0		4,84505		
13	1	1,5176	4,8450	1,8054	0,3765
14	2	1,5175	4,8452	1,8054	0,3620
15	3	1,5176	4,8452	1,8054	0,3481
16	4	1,5177	4,8451	1,8054	0,3347
17	5	1,5177	4,8450	1,8054	0,3219
18	6	1,5177	4,8449	1,8054	0,3095
19	7	1,5177	4,8448	1,8054	0,2976
20	8	1,5176	4,8448	1,8054	0,2861
21	9	1,5176	4,8448	1,8054	0,2751
22	10	1,5175	4,8448	1,8054	0,2645
23	11	1,5175	4,8449	1,8054	0,2543
24	12	1,5175	4,8450	1,8054	0,2445
25	13	1,5175	4,8451	1,8054	0,2351
26	14	1,5175	4,8451	1,8054	0,2261
27	15	1,5176	4,8452	1,8054	0,2174
28	16	1,5176	4,8451	1,8054	0,2091
29	17	1,5177	4,8450	1,8054	0,2010
30	18	1,5177	4,8449	1,8054	0,1933
31	19	1,5176	4,8449	1,8054	0,1859
32	20	1,5175	4,8451	1,8054	0,1787
33					
34				VPU	5,32147

Figura 12: Modelo de Ramsey - Alteração Tecnológica

Clique em $D13$ e copie a fórmula para os outros anos e digite o valor do consumo do estado estacionário $1,3176$ na em C13:C32. Utilize o solver para encontrar a nova trajetória ótima para o modelo.

Neste capítulo abordamos dois problemas práticos sobre a teoria do controle ótimo. Com o problema do bolo, podemos compreender a estrutura da teoria de maneira bem simples. A função objetivo e a equação de diferenças do problema, contribuiu para entendermos e encontrarmos numericamente a trajetória ótima da variável de decisão, o nível de consumo. No problema do modelo de Ramsey, foi possível fixar o conceito de função objetivo com uma função de utilidade muito presente na literatura econômica, a CRRA (Constant Relative Risk Aversion). A equação de restrição dependendo de outra função, agregou conhecimento relativo a interdependência do sistema. O fato de no modelo ser necessário calcular o $k*$ e $c*$, incrementou ainda mais a análise para encontrar o estado inicial do modelo. Por fim, a variação na estrutura do modelo com o parâmetro tecnologia, permitiu perceber sua importância para aumentar a produção e o valor presente da utilidade descontada do agente.

5 CONCLUSÃO

Em muitas áreas do conhecimento como, física, biologia, química e economia, se estudam o desenvolvimento do tempo nos sistemas. O objetivo da teoria do controle ótimo, como foi apresentado, trata-se de determinar as variáveis de controle que satisfazem as retrições físicas, e ao mesmo tempo minimizam ou maximizam o desempenho do sistema. Esta teoria tem estado bem presente nas análises dinâmicas dos economistas. Na década de 80 os *policymakers* buscavam analisar problemas macroeconômicos e de crescimento por esta ótica. Contudo, seus problemas não foram todos resolvidos como desejado. Entretanto, as contribuições da teoria do controle ótimo para a economia são evidentes e presentes nos artigos e revistas da literatura econômica. Por se tratar de uma teoria recente e de necessidade razoável de fundamentos matemáticos, não se têm abordado este assunto na graduação como disciplina obrigatória.

A hipótese inicial do capítulo 2 de que os alunos dos cursos de economia do Brasil, não são expostos às teorias avançadas para tratamento de problemas dinâmicos, não se verificou (excluindo a Teoria do Controle Ótimo). Cerca de 29,03% das escolas de economia associadas a ANPEC, ensinam uma disciplina englobando na ementa somente assuntos de análise dinâmica (equações diferenciais), e 48.39% dos centros ensinam uma disciplina contendo assuntos de análise dinâmica (introdução à equações diferenciais). O conteúdo de análise dinâmica ensinados nos cursos como disciplina obrigatória, não se refere a teoria do controle ótimo introduzida neste trabalho.

As aplicações da teoria são diversas, como foi explicitado no capítulo 3, variam de finanças, teoria do crescimento, economia dos recursos naturais e pesquisa gerencial. Os estudantes de economia possuem os conhecimentos mínimos para serem introduzidos nesta teoria e para usar este conhecimento como instrumental de análise. Independente, se o acadêmico for proseguir para os estudos de pós graduação ou não, este conhecimento poderá contribuir muito como diferencial em suas análises no setor público ou privado.

No capítulo 4 foi demonstrado 2 sistemas dinâmicos, nos quais o objetivo final foi de obter a variável de controle (consumo) que causaria ambos os sistemas de se comportarem da maneira determinada, ou seja ótima, proporcionando o maior utilidade para o agente representativo, demonstrando a fácil utilização da teoria com a planilha eletrônica.

O objetivo do trabalho foi introduzir o ensino da teoria do controle ótimo ao nível de graduação para os cursos de economia. O assunto não foi tratado com a profundidade que é apresentado nos cursos de pós graduação, para facilitar o acompanhamento dos estudantes com pouca exposição às disciplinas de fundamentos matemáticos. A acadêmico necessitará de realizar os problemas para fixar a estrutura matemática e compreender os principíos de otimização envolvidos.

REFERÊNCIAS

BLANCHARD, O.; FISCHER, S. **Lectures on Macroeconomics**. Cambridge: MIT PRESS, 1989.

CHIANG, A. C.; WAINWRIGHT, K. **Matemática para Economistas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2006.

DELLAS, H.; SCHMIDHEINY, K. **Teaching to do economics with the computer**. 2003. Disponível em: <http://repec.org/sce2005/up.19941.1105982657.pdf>.

HOY, M. et al. **Mathematics for Economics**. 2. ed. Cambridge: MIT PRESS, 2001.

KAMIEN, M.; SCHWARTZ, N. **Dynamic Optimization: The Calculus of Variations and Optimal Control in Economics and Management**. New York: North-Holland, 1991.

RAMSEY, F. P. A mathematical theory of saving. **Economic Journal**, v. 38, p. 543–559, 1928.

ROMER, D. **Advanced Macroeconomics**. New York: McGraw-Hill, 1996.

SETHI, S.; THOMPSON, G. P. **Optimal Control Theory: Applications to Management Science and Economics**. 2. ed. New York: Springer, 2000.

WALSH, C. E. **Economics Monetary Theory and Policy**. Cambridge: MIT PRESS, 2003.

WEBER, E. Optimal control theory for undergraduates using the microsoft excel solver tool. **CHEER**, v. 19, 2005.

ZILBERMAN, D. The use and potential of optimal control models in agricultural economics. **Western Journal of Agricultural Economics**, v. 7, n. 2, p. 395–405, 1982.