

PAULO DE OLIVEIRA CAMARGO

**CONTROLE DE QUALIDADE APLICADO AO
FILTRO DE KALMAN**

Dissertação apresentada ao Curso de Pós-
Graduação em Ciências Geodésicas para
a obtenção do Título de Mestre em Ciên-
cias pela Universidade Federal do Paraná.

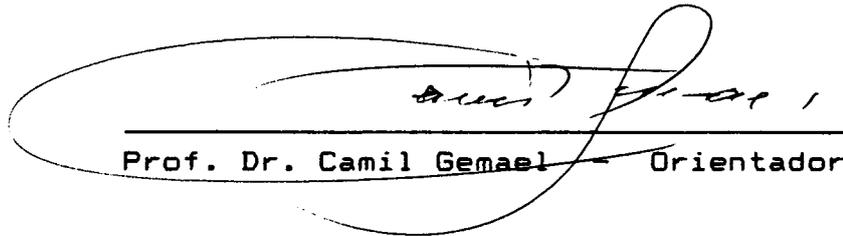
CURITIBA
1992

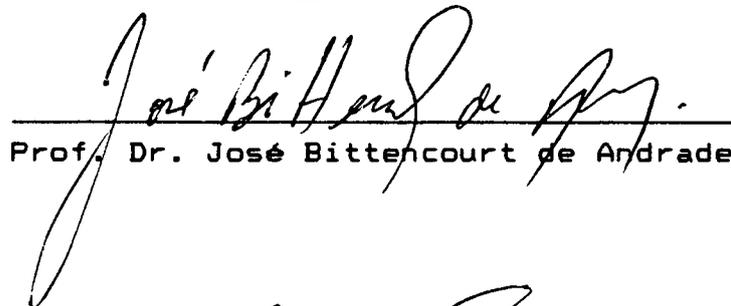
CONTROLE DE QUALIDADE APLICADO AO FILTRO DE KALMAN

por

Paulo de Oliveira Camargo
Engenheiro Cartógrafo

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas da Universidade Federal do Paraná, pela comissão formada pelos professores.


Prof. Dr. Camil Gemael - Orientador


Prof. Dr. José Bittencourt de Andrade


Prof. Msc. Romualdo Wandresen

Curitiba, 15 de maio de 1992.

AGRADECIMENTOS

Desejo manifestar meus agradecimentos às pessoas e entidades abaixo relacionadas:

Ao Professor Dr. Camil Gemael, pela orientação deste trabalho.

Ao Professor e colega Msc. João Francisco Galera Mônico, pela co-orientação.

Aos Professores Msc. Aluir Porfírio Dal Poz e Mauricio Galo pelas críticas e discussões sobre o trabalho.

Ao Professor Msc. Antonio Garcia Maria Tommaselli, pelo enriquecimento na pesquisa, através de bibliografias.

A minha eterna namorada e esposa, pelo apoio, carinho, compreensão à renúncia de muitos finais de semanas juntos.

Aos meus pais e irmão, pelo apoio e incentivo.

Aos amigos, pelo incentivo.

Aos Professores da Universidade Federal do Paraná, pela formação.

Ao Departamento de Cartografia da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual Paulista (FCT/UNESP), Campus de Presidente Prudente, pela concessão do afastamento necessário à realização deste trabalho.

Ao Programa Institucional de Capacitação de Docentes e a Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal do Ensino Superior (PICD/CAPES), pelo apoio financeiro, durante a realização do curso.

SUMÁRIO

TÍTULO	i
TERMO DE APROVAÇÃO	ii
AGRADECIMENTOS	iii
SUMÁRIO	iv
LISTA DE FIGURAS	vi
LISTA DE TABELAS	vii
RESUMO	viii
ABSTRACT	ix
1 INTRODUÇÃO	01
1.1 Considerações Iniciais	01
1.2 Objetivos	02
1.3 Conteúdo do Trabalho	03
2 FILTRO DE KALMAN	04
2.1 Introdução	04
2.2 Definições	06
2.3 Formulação Matemática	08
2.3.1 Filtro de Kalman para Sistemas Lineares	10
2.3.1.1 Predição ou Ciclo de Propagação	14
2.3.1.2 Filtragem ou Ciclo de Atualização	16
2.3.2 Filtro de Kalman para Sistemas não Lineares	24
2.3.3 Filtro de Kalman Linearizado	25
2.3.3.1 Predição ou Ciclo de Propagação	26
2.3.3.2 Filtragem ou Ciclo de Atualização	27
2.3.4 Filtro de Kalman Estendido	31
2.3.4.1 Predição ou Ciclo de Propagação	31
2.3.4.2 Filtragem ou Ciclo de Atualização	32
2.3.5 Processo Iterativo Aplicado ao Filtro de Kalman.	34
3 CONTROLE DE QUALIDADE	38
3.1 Introdução	38
3.2 Testes Estatísticos	41
3.2.1 Teste Estatístico para Detecção de Erros	41
3.2.2 Teste Estatístico para localização das Observações com Erro	44
3.2.3 Adaptação	46
3.2.4 Níveis de Significância dos Testes	47
3.3 Implementação dos Testes Estatísticos no Filtro de Kalman	48
3.3.1 Sequência de Inovação e Resíduo Predito	48
3.3.2 Teste Estatístico para Processamento em Tempo Real	49
3.3.2.1 Teste Estatístico para Detecção de Erro em Tempo Real	49
3.3.2.2 Teste Estatístico para Localização das Observações com Erro em Tempo Real	52
3.3.2.3 Adaptação	53
3.2.3 Teste Estatístico para Processamento em Lote ..	54
3.2.3.1 Teste Estatístico na forma Recursiva para Detecção de Erros	55

3.2.3.2	Teste Estatístico na Forma Recursiva para Localização das Observações com Erro	56
3.2.3.3	Adaptação	62
4	EXPERIÊNCIAS	64
4.1	Introdução	64
4.2	Aplicação do Filtro de Kalman	64
4.2.1	Problema de Estimação	64
4.2.2	Montagem do Modelo Dinâmico	65
4.2.3	Montagem do Modelo de Medida	67
4.2.4	Resolução do Problema com o Filtro de Kalman .	69
4.3	Controle de Qualidade	71
4.3.1	Teste Estatístico para Processamento em Tempo Real	72
4.3.2	Teste Estatístico para Processamento na forma Recursiva	79
5	CONSIDERAÇÕES, CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES	89
5.1	Considerações	89
5.2	Conclusões	90
5.3	Recomendações	91
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	92

LISTA DE FIGURAS

Fig. 01 - Três tipos de problemas de estimação	7
Fig. 02 - Ciclo de Propagação e Atualização	22
Fig. 03 - Teste Estatístico Recursivo $W^{l,k}$ uni-dimensio- nal	58
Fig. 04 - Teste Estatístico Recursivo $W^{l,k}$ uni-dimensio- nal com: (a) nenhuma janela, (b) janela movente com $N = 3$ e $M = 0$, e (c) janela movente com $N = 3$ e $M = 1$	60

LISTA DE TABELAS

Tab. 01	- Resumo das equações do Filtro de Kalman discreto-linear	23
Tab. 02	- Resumo das equações do Filtro de Kalman discreto-linearizado	30
Tab. 03	- Resumo das equações do Filtro de Kalman discreto-estendido	33
Tab. 04	- Resumo das equações do Filtro de Kalman discreto-estendido com iterações	37
Tab. 05	- Observações simuladas para as diversas épocas .	66
Tab. 06	- Resultados obtidos para teste em tempo real - Situação 01	74
Tab. 07	- Resultados obtidos para teste em tempo real - Situação 02	74
Tab. 08	- Resultados obtidos para teste em tempo real - Situação 03	75
Tab. 09	- Resultados obtidos para teste em tempo real - Situação 04	75
Tab. 10	- Resultados obtidos para teste em tempo real - Situação 05	76
Tab. 11	- Resultados obtidos para teste em tempo real - Situação 06	76
Tab. 12	- Resultados obtidos para teste em tempo real - Situação 07	77
Tab. 13	- Resultados obtidos para teste em tempo real - Situação 08	77
Tab. 14	- Resultados obtidos para teste em tempo real - Situação 09	78
Tab. 15	- Resultados obtidos para teste em tempo real - Situação 10	78
Tab. 16	- Resultados obtidos para a situação 01 - teste estatístico na forma recursiva, com $N=7$ e $M=0$.	81

RESUMO

O Filtro de Kalman é um método empregado para estimar o vetor estado de um sistema dinâmico a partir de observações. Este método foi introduzido na área da Engenharia Elétrica em 1960 por R.E. KALMAN, sendo atualmente empregado com ótimos resultados nos mais diversos campos de engenharia. Neste trabalho será apresentada uma das formas alternativas de obtenção das originais fórmulas do Filtro de Kalman, para sistemas discretos, baseada no princípio do método dos mínimos quadrados. Na segunda parte, os conceitos de controle de qualidade são discutidos e apresentados os testes estatísticos para processamento em tempo real e na forma recursiva. São também apresentados os procedimentos dos testes que consistem em detecção, localização e adaptação das observações eivadas de erro, baseados na seqüência de inovação. Ao final, simulou-se um problema, com objetivo de familiarizar com a utilização do Filtro de Kalman e testes estatísticos. Algumas considerações, conclusões e recomendações sobre o assunto pesquisado são apresentadas.

ABSTRACT

The Kalman Filter is a method employed for estimating the state vector of the dynamic system from observations. This method was introduced in the Electric Engineering field in 1960 by R.E. KALMAN, and now it is used with optimal results in several fields of engineering. This work presents one of the alternative forms to derive the original Kalman Filter equations for discrete time linear dynamic systems, based on the principle of the least squares method. In the second part the concepts of quality control are discussed and followed by the presentation of statistical tests for processing in real-time and in the recursive form. The testing procedures are also presented, which consist in detection, identification and adaptation of observations contaminated with error. In the final part, a simple problem was simulated, in order to familiarize with the Kalman Filter and statistical testing. Some considerations, conclusions and recommendations about the researched subject are presented.

1 INTRODUÇÃO

1.1 Considerações Iniciais

O Filtro de KALMAN é um método empregado para estimar o vetor estado, que na comunidade geodésica é conhecido como vetor dos parâmetros com variação temporal, de um sistema dinâmico estocástico a partir de observações com flutuações probabilísticas. Pode ser ainda classificado como um algoritmo recursivo ótimo para processamento de dados. Tal Filtro é recursivo no sentido de que não há necessidade de se armazenar todas as informações recebidas; isto significa que o algoritmo trabalha com as últimas estimativas e as informações mais recentes, sendo muito empregado para processamento em tempo real. É ótimo no sentido de que as estimativas são de variância mínima.

Este método foi introduzido na área de Engenharia Elétrica em 1960 por KALMAN [09], sendo atualmente empregado com ótimos resultados nos mais diversos campos da engenharia, estatística e navegação. Para sua utilização é necessário o conhecimento da dinâmica do sistema e do processo de observações (modelos funcionais), da descrição estatística das correções das incertezas do sistema dinâmico e das observações (modelos estocásticos) e de informações disponíveis sobre as condições iniciais das variáveis de interesse [17].

No entanto, erros de especificação nos modelos funcionais e/ou estocásticos ou nas observações invalidam os resultados, bem como algumas conclusões baseadas neles.

Portanto é necessário dispor de meios para validar os modelos assumidos, o que nos conduz ao domínio do controle de qualidade.

O controle de qualidade em Ciências Geodésicas ou afins é um sistema amplo e complexo, abrangendo todos os setores de um projeto, em um esforço comum e cooperativo, tendo em vista estabelecer, melhorar e assegurar a qualidade do projeto, em termos de três fatores: economia, precisão e confiabilidade, para satisfazer o desejo do contratante e dos usuários. A economia expressa o custo do projeto, a precisão manifesta a dispersão dos resultados na ausência de erros nos modelos ou nas observações e a confiabilidade descreve a capacidade das observações redundantes em detectar erros grosseiros e sistemáticos, com certa probabilidade [22]. Então, modelos matemáticos inadequados e/ou erros grosseiros ou sistemáticos nas observações afetam a precisão e a confiabilidade, sendo portanto necessário o emprego de testes estatísticos para a sua detecção e identificação.

1.2 Objetivos

Os objetivos principais deste trabalho têm a finalidade básica de :

a) apresentar uma revisão sobre a filtragem recursiva de KALMAN (Filtro de Kalman), assunto pouco pesquisado e estudado na área de Ciências Geodésicas em nosso país;

b) implementar o controle de qualidade, através de teste estatístico, na técnica de filtragem recursiva para

detectar observações com variações não randômicas e/ou modelos matemáticos inadequados á realidade física, com a finalidade de validação dos mesmos e conseqüentemente aplicar teste estatístico para localizar observações eivadas de erros e fazer a adaptação dos resultados;

c) contribuir como subsidio à bibliografia nacional.

1.3 Conteúdo do Trabalho

O conteúdo desta pesquisa está dividido em cinco capítulos. No capítulo 2 será apresentado o Filtro de Kalman, tipos de estimativas, obtenção das equações a partir do princípio do método dos mínimos quadrados, considerando os modelos lineares ou linearizados e aplicação do processo iterativo no algoritmo . No capítulo 3 será apresentada a teoria do controle de qualidade, e também os testes estatísticos para validação dos resultados, e o procedimento do teste recursivo a ser implementado, o qual é baseado em 3 passos: detecção, identificação ou localização e adaptação. Para verificar o procedimento implementado no algoritmo do Filtro de KALMAN, com a finalidade de detectar e localizar as observações com erro sistemático e grosseiro, bem como adaptar os resultados, serão realizados testes com dados simulados, os quais serão apresentados no capítulo 4. Com base na pesquisa realizada, ou seja no assunto objeto, algumas conclusões, recomendações e comentários serão apresentados no capítulo 5.

2 FILTRO DE KALMAN

2.1 Introdução

Uma certa quantidade de trabalhos e desenvolvimentos de métodos para processamento de dados (observações) com variáveis randômicas, pode ser encontrada para resolver os problemas de estimação. As famosas contribuições para a teoria podem ser destacadas [05], [13], [26], como as de GAUSS E LEGENDRE, que por volta de 1800, trabalhando independente e simultaneamente, lançaram o fundamento determinístico dos mínimos quadrados para os problemas de estimação, que rotineiramente os geodestas empregam em seus trabalhos. As de FISCHER, que por volta de 1910, trabalhando com funções densidade de probabilidade, introduziu a estimação por máxima verossimilhança. As de KOLMOGOROV e WIENER, que na década de 1940, reintroduziram e reformularam o problema linear dos mínimos quadrados, utilizando a teoria desenvolvida do processo estocástico, propondo então pela primeira vez uma solução recursiva do problema de estimação. E finalmente, as de KALMAN que tratou da técnica de estimação recursiva ótima baseada no domínio do tempo, ou seja, estimação do processo estocástico não estacionário.

O método dos mínimos quadrados (MMQ), de natureza determinística, ao contrário dos outros métodos de estimativa, não depende de nenhuma distribuição de probabilidade. Desde seu lançamento vem sendo generalizado e estendido. Dentre os principais avanços no método dos mínimos quadrados podem ser

destacados entre outros, o ajustamento sequencial e o "collocation".

Na técnica determinística do MMQ, usada rotineiramente no ajustamento de observações pela Geodésia e demais Ciências afins, os parâmetros de interesse têm sido considerados invariantes, constituindo assim o processo estático ou estacionário. Portanto, com as novas técnicas que possibilitam cálculos de parâmetros em tempo real, como por exemplo, o posicionamento cinemático por GPS, a navegação por sistema inercial e a fotogrametria on-line, o conhecimento da variação temporal dos parâmetros torna-se importante, constituindo-se assim um processo conhecido como dinâmico.

Um algoritmo muito empregado para processamento de sistema dinâmico ou cinemático, como é tratado por alguns autores, é o chamado de FILTRO DE KALMAN.

A dedução original das equações do Filtro de KALMAN é dado em KALMAN [09], baseado no princípio do erro médio quadrático mínimo, porém com terminologia diferente das empregadas pelos geodestas. Fato que levou os mesmos a obter as equações com o emprego da terminologia rotineiramente usada em Geodésia, a partir do princípio do MMQ conforme apresentado por KRAKIWSKY [13] e TEUNISSEM E SALZMANN [23], ou aplicando o BLUE (Best Linear Unbiased Estimate) ao Modelo de Regressão da Estatística, apresentado por KOCH [12].

2.2 Definições

O Filtro de Kalman é um estimador Bayesiano, não tendencioso, consistente, eficiente e de variância mínima. É portanto um método de se estimar o vetor estado de um modelo dinâmico a partir de observações randômicas. O Filtro de Kalman, apesar de ser um método não amplamente difundido nas Ciências Geodésicas, produz estimadores do vetor estado com propriedades estatísticas bem definidas. Tais propriedades são ótimas no sentido de serem não-tendenciosas, e de variância mínima, dentre a classe dos estimadores não-tendenciosos [25].

Kalman [09] descreveu três tipos de operações com filtro nos problemas de estimação, para uma mesma época t_k , sendo que para:

- a) $t < t_k$ tem-se a estimativa predita;
- b) $t = t_k$ tem-se a estimativa filtrada e
- c) $t > t_k$ tem-se a estimativa suavizada, onde t denota o período disponível de observações ou dados.

Na predição, utiliza-se na estimativa somente dados anteriores a época t_k .

Na filtragem, utiliza-se na estimativa dados obtidos desde uma época anterior até à época t_k .

E na suavização ou interpolação utiliza-se na estimativa dados anteriores e posteriores a época t_k .

Os dois primeiros tipos de estimativas podem ser obtidos em tempo real.

Os três conceitos descritos acima podem ser relatados e melhor ilustrados através da figura 01 [05] e do exemplo

abaixo |18|:

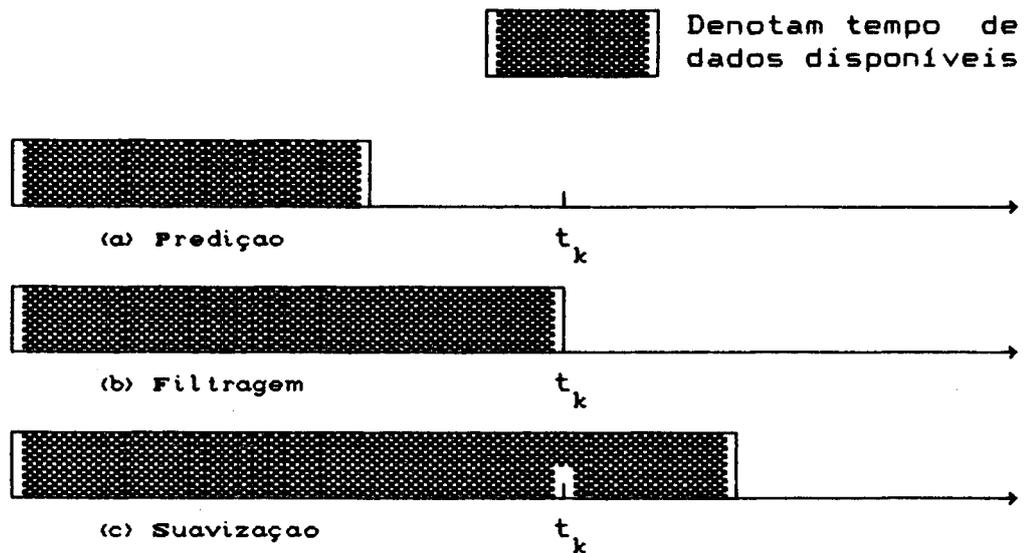


Figura 01 - Três tipos de problemas de estimação (estimativa desejada para a época t_k)

Exemplo: vamos assumir um veículo, terrestre, marítimo ou aéreo, em movimento e os parâmetros de interesse são as posições instantâneas para algum tempo t_k . O processo de cálculo visando obter os parâmetros que fornecem a posição do veículo, em tempo real, para a posição esperada numa subsequente época t_k , baseado nas medidas anteriores a t_k é chamado de predição. O mesmo cálculo, para uma posição na época t_k , baseado nas observações realizadas até esta época, é designado filtragem. Já a estimação dos parâmetros da posição do veículo para a época t_k , usando as observações realizadas a priori e a posteriori a época t_k , é referido como suavização.

O chamado Filtro de Kalman é uma combinação de predição e filtragem.

2.3 Formulação Matemática

Um dos pontos de realce nesta síntese é a obtenção das equações do Filtro de Kalman, usando a mesma metodologia convencional empregada na dedução do caso padrão do ajustamento pelo MMQ. Diversas literaturas apresentam a deduções baseadas em diferentes conceitos, sendo que a original é dada por KALMAN [09], e as derivações alternativas podem ser encontradas em KOCH [12], KRAKIWSKY [1], TEUNISSEN E SALAZMANN [23]. Em geral o uso de diferentes princípios, tais como erro médio quadrático mínimo, métodos de máxima verossimelhança, mínimos quadrados e máximo a posteriori, conduzem a diferentes estimadores. Contudo, no caso de sistemas lineares, todos os métodos conduzem aos mesmos estimadores desde que as funções densidade de probabilidade possuam distribuição normal ou gaussiana [23].

As fórmulas de Kalman reduzem-se às do ajustamento seqüencial pela simples desconsideração da variação temporal dos parâmetros, conforme demonstrado por GEMAEL [07] e WELLS e KRAKIWSKY [26]. E, ainda, segundo KRAKIWSKY [13], em 1969, Morrison mostrou que as equações do Filtro de Kalman e as do Filtro de Bayes são matematicamente equivalentes, mas são significativamente diferentes do ponto de vista computacional. Este mesmo autor cita que, em 1974, Tapley e Schuts fizeram uma comparação dos mínimos quadrados original (incluindo parâmetros com peso) com o "collocation", por meio das expressões de Filtragem de Kalman, concluindo que os dois correspondentes conjuntos de expressões, Kalman e

"collocation", para a solução do vetor são equivalentes. O método de "collocation", atualmente é considerado como um caso especial do Filtro de Kalman, conforme CZOMPÓ [03].

A formulação a ser apresentada será baseada no princípio do MMQ, que é adequado para o estabelecimento de teste estatístico [22], utilizando a metodologia rotineira em Geodésia. Desta forma facilita-se a implementação do teste estatístico no Filtro de Kalman, ou seja, na filtragem recursiva ou seqüencial.

O Filtro de Kalman é encontrado em várias versões [05], [08], [10]:

a) FILTRO DE KALMAN DISCRETO, na qual o modelo dinâmico e o modelo de medida são considerados discretos,

b) FILTRO DE KALMAN CONTÍNUO, onde ambos modelos são funções contínuas no tempo,

c) FILTRO DE KALMAN CONTÍNUO-DISCRETO, com o modelo dinâmico considerado contínuo e o modelo de medida discreto e

d) FILTRO DE KALMAN DISCRETO-CONTÍNUO, onde o modelo dinâmico é discreto e o modelo de medida é contínuo.

Estas versões são encontradas para o caso de modelos lineares e linearizados ou estendidos.

Neste trabalho será apresentada a dedução das fórmulas do Filtro de Kalman Discreto, sendo que a formulação para a versão contínua é obtida a partir das equações da versão discreta, fazendo com que o intervalo de tempo tenda a zero, ou seja [05]:

$$t_k - t_{k-1} = \Delta t \rightarrow 0 \quad (2.1)$$

Desse modo pode-se também obter as versões Contínuo-Discreto, e vice-versa.

Primeiro será derivada a versão em que ambos os modelos são considerados lineares.

2.3.1 Filtro de Kalman para Sistemas Lineares

Considerando o modelo matemático linear que constitui a base do Filtro de Kalman, para épocas e observações discretas [05], [23], com notações matriciais e nomenclaturas usuais em Geodésia, tem-se:

$$X_k = T_{k,k-1} X_{k-1} + W_k \quad (2.2)$$

$$L_k^b = A_k X_k + V_k \quad (2.3)$$

A equação (2.2) representa o modelo dinâmico e a (2.3) o modelo de medida ou observação, formando assim um sistema de equações lineares. O índice k nas equações acima refere-se a época t_k , que pode assumir valores entre $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, não necessariamente equidistantes.

Na equação (2.2) X_k é o vetor estado, definido como vetor de variáveis randômicas para época t_k , conhecido em Geodésia como vetor dos parâmetros; X_{k-1} é o vetor estado de uma época anterior à época t_k , ou seja da época t_{k-1} , sendo ambos de dimensões iguais ao número de parâmetros incógnitos (u), e $T_{k,k-1}$, a função de dimensão ($u \times u$) que interliga os dois vetores estado, conhecida como matriz de transição. Ela

faz a transformação linear do vetor da época t_{k-1} para a época t_k . O vetor W_k das correções ao modelo dinâmico, de dimensão $(u \times 1)$, afeta o estado durante o intervalo entre as épocas t_{k-1} e t_k [23]. Ele é também designado por vetor dos ruídos brancos gaussianos do sistema [05], vetor do processo randômico gaussiano do sistema [09] e vetor das perturbações do modelo [12], [23].

As componentes x_{ki} , $i = 1, 2, \dots, u$, do vetor estado X_k são chamadas de variáveis estado.

O vetor W_k das correções ao modelo dinâmico é assumido ser distribuído normalmente com a seguinte estatística para a sua média:

$$E \{ W_k \} = 0, \quad (2.4)$$

onde o operador $E \{ . \}$ indica esperança matemática, e para a sua matriz variância-covariância (MVC) [23], [25]:

$$E \{ W_k W_l^T \} = \sum_{Wk} \delta_{kl} \quad (2.5)$$

onde o índice τ indica uma operação transposta e δ_{kl} delta Kronecher, isto é, $\delta_{kl} = 1$ para $k = l$ e $\delta_{kl} = 0$ caso contrário. Em notação estatística tem-se:

$$W_k \sim N(0, \Sigma_{Wk}) \quad (2.6)$$

com N representando a distribuição normal.

A matriz de transição T tem as seguintes

propriedades |09|:

$$T_{k,k} = I \quad (2.7)$$

$$T_{k,s} T_{s,r} = T_{k,r} \quad (2.8)$$

$$T_{k,s}^{-1} = T_{s,k} \quad (2.9)$$

onde k , s e r são inteiros e indicam épocas. Se o modelo for estacionário, ou seja tempo-invariante:

$$T_{k+1,k} = T_{k+1-k} = T_1 = \text{constante} \quad (2.10)$$

Na equação (2.3), X_k é o vetor de estado das variáveis randômicas para época tk de dimensão $(u \times 1)$, L_k^b é o vetor das observações ou medidas de dimensão $(n_k \times 1)$, com n_k igual ao número de observações (n_k) coletadas na época tk , com MVC representada por $\Sigma_{L_k^b}$, A_k é a matriz que relaciona as observações ao vetor estado, de dimensão $(n_k \times u)$, e V_k é o vetor das correções ao modelo de observação de dimensão $(n_k \times 1)$, também encontrado com o nome de vetor dos ruídos brancos gaussianos do modelo de medida |05|, vetor dos erros do modelo |12| e de ruídos das medidas |23|.

O vetor randômico das correções ao modelo de medida é assumido ser gaussiano com a seguinte estatística conhecida, para a sua média:

$$E \{ V_k \} = 0 \quad (2.11)$$

e para a sua MVC |23|, |25|:

$$E \{ V_k V_l^T \} = \Sigma_{V_k} \delta_{kl} \quad (2.12)$$

que em notação estatística é representado por:

$$V_k \sim N(0, \Sigma_{V_k}) \quad (2.13)$$

Dadas as descrições das variáveis envolvidas nos modelos (2.2 e 2.3), resta ainda fazer algumas considerações necessárias para desenvolver o Filtro de Kalman:

a) Que as matrizes variância-covariâncias das correções ao modelo dinâmico e correções ao modelo de medida sejam positivas definidas.

b) Que além de admitir que os vetores das correções do modelo dinâmico e das correções do modelo de medida sejam distribuídos normalmente, deve-se considerar a independência estatística entre os mesmos, ou seja que :

$$E \{ W_k V_l^T \} = E \{ V_k W_l^T \} = 0 \quad (2.14)$$

para todo k e l .

c) Que o vetor estado inicial X_0 seja considerado um vetor com variáveis de distribuição normal e de estatística conhecida, representada por:

$$E \{ X_0 \} = \hat{X}_{0/0} \quad (2.15)$$

e

$$E \{ (X_o - \hat{X}_{o/o}) (X_o - \hat{X}_{o/o})^T \} = \Sigma_{\hat{X}_{o/o}} \quad (2.16)$$

onde $\hat{X}_{o/o}$ denota a média do vetor estado para a época $t_k = t_o$ e $\Sigma_{\hat{X}_{o/o}}$ é a MVC para a época t_o .

d) Assume-se a independência estatística entre o estado inicial e o vetor das correções:

$$E \{ W_k X_o^T \} = 0 \quad (2.17)$$

e

$$E \{ V_k X_o^T \} = 0 \quad (2.18)$$

para todo k .

Os modelos matemáticos discutidos, bem como todas as condições assumidas acima, proporcionam a base para a montagem das equações do Filtro de Kalman, que consiste numa combinação de predição e filtragem.

2.3.1.1 Predição ou Ciclo de Propagação

Neste tipo de problema de estimação deseja-se obter a estimativa do vetor estado X_k , baseado em informações anteriores a época t_k , ou seja no vetor estado da época t_{k-1} , sendo este tipo de operação chamada de predição.

Para resolver este problema é empregado somente o modelo dinâmico (2.2), pois o vetor será estimado sem o uso de observações. A estimação, pelo princípio do MMQ, não poderá ser empregado devido a falta de redundância, pois o modelo

dinâmico consiste de um sistema de u equações com u parâmetros incógnitos (X_k). Então aplicando o operador esperança (E) membro a membro na equação (2.2) tem-se:

$$E\{X_k\} = T_{k,k-1} E\{X_{k-1}\} + E\{W_k\}, \quad (2.19)$$

onde a estimativa do vetor das correções ao modelo dinâmico é considerada nula, pois da expressão (2.4): $E\{W_k\} = 0$; então tem-se:

$$\hat{X}_{k/k-1} = T_{k,k-1} \hat{X}_{k-1/k-1} \quad (2.20)$$

A MVC do vetor estado predito ou da estimativa $\hat{X}_{k/k-1}$ é obtida aplicando a lei de propagação de covariâncias [06] à equação dada por (2.19):

$$\Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} = G \Sigma G^T \quad (2.21)$$

sendo G a matriz Jacobiana constituída pelos coeficientes da estimativa vetor estado da época $tk-1$ e do vetor das correções ao modelo dinâmico, que em notação matricial é dada por:

$$G = \begin{bmatrix} T_{k,k-1} & \vdots & I \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

com I representando a matriz identidade de dimensão ($u \times u$).

A MVC das variáveis envolvidas na propagação é formada pela MVC do vetor estado da época $tk-1$ e pela MVC das correções ao modelo dinâmico, ou seja:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{X_{k-1}/k-1} & 0 \\ 0 & \Sigma_{Wk} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

Substituindo a matriz Jacobiana (2.22) e a MVC dada por (2.23) na equação da lei de propagação de covariância dada por (2.21), resulta para a MVC do vetor estado predito para a época t_k :

$$\hat{\Sigma}_{X_{k/k-1}} = T_{k,k-1} \hat{\Sigma}_{X_{k-1}/k-1} T_{k,k-1}^T + \Sigma_{Wk} \quad (2.24)$$

As equações (2.20) e (2.24) constituem as equações de predição, também conhecidas como equações atualizadas da época do Filtro Kalman Discreto para sistemas lineares, formando assim o chamado ciclo de propagação [05]. A equação (2.20) dá a melhor estimativa do vetor estado para a época t_k , usando todas as observações anteriores à época t_k e a (2.24) a sua MVC.

2.3.1.2 Filtragem ou Ciclo de Atualização

Neste tipo de problema de estimação deseja-se obter a estimativa do vetor estado X_k , baseado em todas as observações obtidas até a época t_k .

Na filtragem, as equações do modelo dinâmico (2.2) e de medida (2.3) são utilizadas para resolver o problema de

estimação.

Deseja-se então obter o estimador $\hat{X}_{k/k}$ de X_k para a época t_k , com base nas observações e estimativas preditas para a época. Neste caso, o princípio do MMQ pode ser aplicado, pois os modelos (2.2) e (2.3) formam um sistema redundante, com n_k graus de liberdade, constituído de $(n_k + u)$ equações a u parâmetros incógnitos. Então aplicando o MMQ, onde impõe-se que a soma dos quadrados das estimativas das correções dos vetores W_k e V_k , homogeinizadas pelos pesos, sejam mínimas. Nesse caso a forma quadrática fundamental é dada por:

$$\phi = \hat{W}_k^T P_{\hat{X}_{k/k-1}} \hat{W}_k + \hat{V}_k^T P_{Lk} \hat{V}_k = \text{mínimo} \quad (2.25)$$

onde P representa matriz peso, sendo a matriz peso do vetor estado predito dada por:

$$P_{\hat{X}_{k/k-1}} = \sigma_0^2 \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1} \quad (2.26)$$

e a matriz peso das observações

$$P_{Lk} = \sigma_0^2 \Sigma_{Lk}^{-1} \quad (2.27)$$

onde σ_0 é a variância da unidade de peso a priori.

Atribuindo valor unitário à variância da unidade de peso a priori ($\sigma_0^2 = 1$), e substituindo-a juntamente com as matrizes peso dadas por (2.26) e (2.27) na forma quadrática

fundamental, resulta:

$$\phi = \hat{W}_k^T \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1} \hat{W}_k + \hat{V}_k^T \Sigma_{L_k^b}^{-1} \hat{V}_k = \text{mínimo} \quad (2.28)$$

Expressando as equações dos modelos em função das estimativas das correções, obtêm-se:

$$\hat{W}_k = \hat{X}_{k/k} - \hat{X}_{k/k-1} \quad (2.29)$$

$$\hat{V}_k = L_k^b - A_k \hat{X}_{k/k} \quad (2.30)$$

Substituindo as equações acima na forma quadrática fundamental dada pela expressão (2.28), resulta:

$$\begin{aligned} \phi = & (\hat{X}_{k/k} - \hat{X}_{k/k-1})^T \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1} (\hat{X}_{k/k} - \hat{X}_{k/k-1}) + \\ & + (L_k^b - A_k \hat{X}_{k/k})^T \Sigma_{L_k^b}^{-1} (L_k^b - A_k \hat{X}_{k/k}) = \text{mínimo} \end{aligned} \quad (2.31)$$

sendo que $\hat{X}_{k/k}$ é o estimador de X_k e $\hat{X}_{k/k-1}$ a estimativa da predição,

Desenvolvendo a (2.31) e minimizando a forma quadrática fundamental resultante em relação a $\hat{X}_{k/k}$, ou seja, igualando a zero a primeira derivada, tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \hat{X}_{k/k}} = & (\Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1}) \hat{X}_{k/k} - (\Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1} \hat{X}_{k/k-1}) + \\ & + (A_k^T \Sigma_{L_k^b}^{-1} A_k) \hat{X}_{k/k} - (A_k^T \Sigma_{L_k^b}^{-1} L_k^b) = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

ou

$$(\hat{\Sigma}_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1} + A_k^T \Sigma_{L_k}^{-1} A_k) \hat{X}_{k/k} - (\hat{\Sigma}_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1} \hat{X}_{k/k-1} + A_k^T \Sigma_{L_k}^{-1} L_k^b) = 0 \quad (2.33)$$

A equação matricial acima representa um sistema de u equações normais, cuja solução é dada pelo vetor estado:

$$\hat{X}_{k/k} = (\hat{\Sigma}_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1} + A_k^T \Sigma_{L_k}^{-1} A_k)^{-1} (\hat{\Sigma}_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1} \hat{X}_{k/k-1} + A_k^T \Sigma_{L_k}^{-1} L_k^b) \quad (2.34)$$

Aplicando a lei de propagação de covariâncias à equação (2.32), obtém-se a MVC da estimativa do vetor estado para época t_k :

$$\hat{\Sigma}_{\hat{X}_{k/k}} = G \Sigma G^T \quad (2.35)$$

A matriz Jacobiana é constituída pelos coeficientes do vetor estado predito e do vetor das observações, que em notação matricial é dada por:

$$G = \begin{bmatrix} N^{-1} & \hat{\Sigma}_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1} & \vdots & N^{-1} & A_k^T & \Sigma_{L_k}^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

sendo:

$$N = (\hat{\Sigma}_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1} + A_k^T \Sigma_{L_k}^{-1} A_k) \quad (2.37)$$

A MVC envolvida na propagação é formada pelas MVCs do vetor estado predito e do vetor das observações, representada

por:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \hat{\Sigma}_{X_{k/k-1}} & 0 \\ 0 & \Sigma_{L_k^b} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Substituindo a matriz Jacobiana (2.36) e a MVC (2.38) na equação de propagação de covariância dada por (2.35), resulta a MVC do vetor estado filtrada da época t_k .

$$\hat{\Sigma}_{X_{k/k}} = (\hat{\Sigma}_{X_{k/k-1}}^{-1} + A_k^T \Sigma_{L_k^b}^{-1} A_k)^{-1} \quad (2.39)$$

As equações (2.34) e (2.39) constituem as equações de filtragem, conhecidas como equações atualizadas das medidas, formando assim o ciclo de atualização [05]. A equação (2.34) dá a melhor estimativa do estado para a época t_k , usando informações do estado predito e das observações e a equação (2.39) a MVC.

Aplicando a propriedade de matriz inversa apresentada abaixo [13], [15], [23], chegaremos as expressões apresentadas por Kalman, porém com notações usadas em Geodésia. Seja então:

$$(C^{-1} + B^T D^{-1} B)^{-1} = C - C B^T (D + B C B^T)^{-1} B C \quad (2.40)$$

onde C e D são matrizes positivas definidas.

A igualdade acima é conhecida como identidade de

SHURR, e pode ser verificada através da pré-multiplicação por $(C^{-1} + B^T D^{-1} B)$.

Então fazendo a equivalência do primeiro membro da expressão (2.40) com as equivalentes nas equações de filtragem dadas por (2.34) e (2.39), resulta que:

$$\hat{X}_{k/k} = \hat{X}_{k/k-1} + K_k (L_k^b - A_k \hat{X}_{k/k-1})$$

e

(2.41)

$$\hat{\Sigma}_{X_{k/k}} = (I - K_k A_k) \hat{\Sigma}_{X_{k/k-1}}$$
(2.42)

onde

$$K_k = \hat{\Sigma}_{X_{k/k-1}} A_k^T (A_k \hat{\Sigma}_{X_{k/k-1}} A_k^T + \Sigma_{L_k^b})^{-1}$$
(2.43)

A matriz K_k , conhecida como matriz ganho de Kalman, leva a uma estimativa ótima, ou seja, a uma estimativa de variância mínima.

As equações (2.20) e (2.24), juntamente com as (2.41), (2.42) e (2.43) formam o conjunto de equações do Filtro de Kalman discreto para sistemas lineares, com o qual a estimativa do vetor estado e da MVC são calculadas recursivamente a partir dos valores iniciais.

$$\hat{X}_{0/0} \quad e \quad \hat{\Sigma}_{X_{0/0}} \quad ; \quad t_k = 0$$

para as estimativas das últimas épocas:

$$\hat{X}_{N/N} \quad e \quad \hat{\Sigma}_{X_{N/N}} \quad ; \quad t_k = N$$

Analisando as expressões formadas pelos grupos dados pelas equações (2.34 e 2.39) e (2.41, 2.42 e 2.43), verifica-se a vantagem do segundo grupo, no qual inverte-se somente u'a matriz de ordem ($n_k \times n_k$), enquanto que no primeiro deve-se inverter duas matrizes de ordem ($u \times u$). E no processo de filtragem o número de observações (n_k) é usualmente menor que o número de variáveis estado (u) [15].

A figura abaixo ilustra os ciclos de propagação e atualização do Filtro de Kalman, juntamente com os elementos envolvidos.

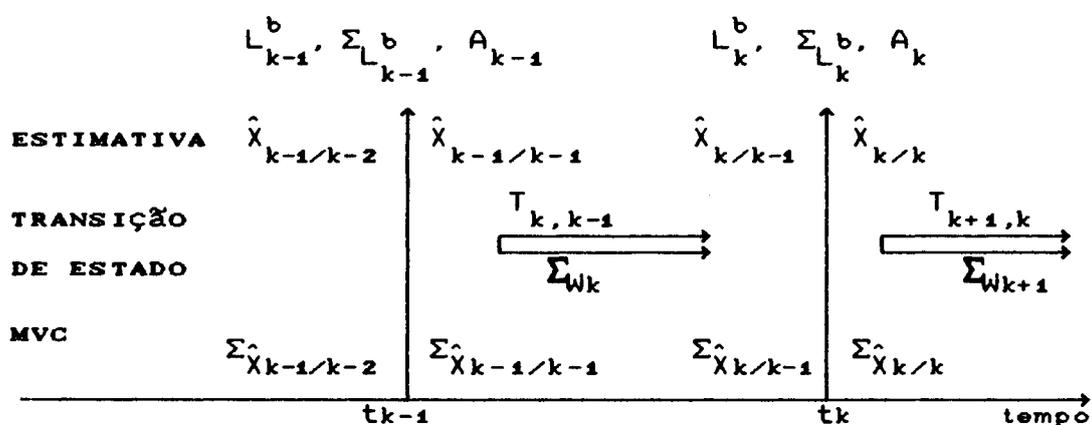


Figura 02 - CICLO DE PROPAGAÇÃO E ATUALIZAÇÃO

No ciclo de propagação ou predição estão envolvidos os seguintes elementos: matriz de transição, estimativa do estado da época $k-1$ e a respectiva MVC, e a MVC das correções ao modelo dinâmico. E no ciclo de atualização ou filtragem, a estimativa e MVC predita, as observações da época k e sua MVC, e a matriz A_k .

Abaixo mostra-se uma tabela resumo das equações do Filtro de Kalman discreto para sistemas lineares.

Tabela 01 - RESUMO DAS EQUAÇÕES DO FILTRO DE KALMAN DISCRETO LINEAR

Modelo dinâmico	$X_k = T_{k,k-1} X_{k-1} + W_k$ $W_k \sim N(0, \Sigma_{Wk})$
Modelo de medida	$L_k^b = A_k X_k + V_k$ $V_k \sim N(0, \Sigma_{Vk})$
Condições iniciais	$E\{X_0\} = \hat{X}_0$ $E\{(X_0 - \hat{X}_0)(X_0 - \hat{X}_0)^T\} = \Sigma_{\hat{X}_{0/0}}$
Outras suposições	$E\{W_k V_l^T\} = E\{V_k W_l^T\} = 0$ <p style="text-align: right;">para todo k, l</p> $E\{W_k X_0^T\} = E\{V_k X_0^T\} = 0$ <p style="text-align: right;">para todo k</p>
CICLO DE PROPAGAÇÃO - PREDIÇÃO	
Estimativa	$\hat{X}_{k/k-1} = T_{k,k-1} \hat{X}_{k-1/k-1}$
MVC	$\Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} = T_{k,k-1} \Sigma_{\hat{X}_{k-1/k-1}} T_{k,k-1}^T + \Sigma_{Wk}$
CICLO DE ATUALIZAÇÃO - FILTRAGEM	
Estimativa	$\hat{X}_{k/k} = \hat{X}_{k/k-1} + K_k (L_k^b - A_k \hat{X}_{k/k-1})$
MVC	$\Sigma_{\hat{X}_{k/k}} = (I - K_k A_k) \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}}$
Ganho de Kalman	$K_k = \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} A_k^T (A_k \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} A_k^T + \Sigma_{L_k^b})^{-1}$

2.3.2 Filtro de Kalman para Sistemas não Lineares

Nesta seção estende-se a discussão de estimação ótima dos sistemas estocásticos lineares para o caso mais geral, dado por sistemas estocásticos não lineares. Isto se deve ao fato que em aplicações práticas da teoria de estimação frequentemente depara-se com sistemas em que a não linearidade está presente.

Seja então o modelo dinâmico e o modelo de medida constituído por um sistema discreto não linear, representado por:

$$X_k = f_{k,k-1}(X_{k-1}) + W_k \quad (2.44)$$

$$L_k^b = g_k(X_k) + V_k \quad (2.45)$$

Na equação (2.44) $f_{k,k-1}(X_{k-1})$ é uma função de transição de estado não linear que depende do estado da época t_{k-1} ; e na equação de medida (2.45) $g_k(X_k)$ é também uma função não linear que depende do estado da época t_k . Os demais elementos dos modelos já foram descritos nas seções anteriores.

Para obter o algoritmo de estimação, uma técnica muito empregada é desenvolver as funções do modelo dinâmico e do modelo de medidas pela série de Taylor e desprezar os termos de segunda ordem e superiores. Se no cálculo da estimativa predita e filtrada, for empregado um valor próximo ao da estimativa do estado, o algoritmo é conhecido como

linearizado; porém se for a estimativa da época corrente, o algoritmo é conhecido como estendido [05], [15]. O primeiro caso é empregado quando a trajetória nominal, ou seja, a linha descrita pelo corpo é conhecida, podendo portanto obter os valores aproximados. A segunda versão é empregada quando não se conhece a trajetória.

2.3.3 Filtro de Kalman Linearizado

Linearizando as funções dadas em (2.44) e (2.45) com a série de Taylor e calculando-as respectivamente nos pontos \bar{X}_{k-1} e \bar{X}_k , que representam respectivamente o vetor estado aproximado para a época t_{k-1} e t_k , tem-se então:

$$f_{k,k-1}(X_{k-1}) = f_{k,k-1}(\bar{X}_{k-1}) + \left. \frac{\partial f_{k,k-1}(X_{k-1})}{\partial X_{k-1}} \right|_{X_{k-1} = \bar{X}_{k-1}} (X_{k-1} - \bar{X}_{k-1}) \quad (2.46)$$

e

$$g_k(X_k) = g_k(\bar{X}_k) + \left. \frac{\partial g_k(X_k)}{\partial X_k} \right|_{X_k = \bar{X}_k} (X_k - \bar{X}_k) \quad (2.47)$$

Fazendo:

$$X_{k/k-1}^0 = f_{k,k-1}(\bar{X}_{k-1}) \quad (2.48)$$

$$T_{k,k-1} = \left. \frac{\partial f_{k,k-1}(X_{k-1})}{\partial X_{k-1}} \right|_{X_{k-1} = \bar{X}_{k-1}} \quad (2.49)$$

$$L_k^o = g_k(\bar{X}_k) \quad (2.50)$$

e

$$A_k = \left. \frac{\partial g_k(X_k)}{\partial X_k} \right|_{X_k = \bar{X}_k} \quad (2.51)$$

e substituindo-as em (2.44) e (2.45) obtêm-se:

$$X_k = X_{k/k-1}^o + T_{k,k-1} (X_{k-1} - \bar{X}_{k-1}) + W_k \quad (2.52)$$

e

$$L_k^b = L_k^o + A_k (X_k - \bar{X}_k) + V_k, \quad (2.53)$$

que constituem os modelos linearizados.

2.3.3.1 Predição ou Ciclo de Propagação

A equação atualizada da época tk , para o cálculo do vetor estado predito, é obtida aplicando a definição de esperança na equação (2.52), que resulta:

$$\hat{X}_{k/k-1} = X_{k/k-1}^o + T_{k,k-1} (\hat{X}_{k-1/k-1} - \bar{X}_{k-1}) + E\{W_k\} \quad (2.54)$$

onde $\hat{X}_{k/k-1}$ é a estimativa predita de X_k .

Considerando que os valores da estimativa do vetor das correções ao modelo dinâmico são nulos, ou seja $E\{W_k\} = 0$:

$$\hat{X}_{k/k-1} = X_{k/k-1}^o + T_{k,k-1} (\hat{X}_{k-1/k-1} - \bar{X}_{k-1}) \quad (2.55)$$

Aplicando a lei de propagação de covariâncias em (2.54), obtém-se a MVC de $\hat{X}_{k/k-1}$, ou seja:

$$\Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} = T_{k,k-1} \Sigma_{\hat{X}_{k-1/k-1}} T_{k,k-1}^T + \Sigma_{W_k} \quad (2.56)$$

As equações (2.55) e (2.56) representam as equações de predição aproximadas para sistemas linearizados, formando assim o ciclo de predição aproximado.

2.3.3.2 Filtragem ou Ciclo de Atualização

As equações linearizadas dos modelos dadas por (2.52) e (2.53) podem ser expressas em função das estimativas das correções, isto é:

$$\hat{W}_k = \hat{X}_{k/k} - \hat{X}_{k/k-1} \quad (2.57)$$

$$\hat{V}_k = L_k^b - (L_k^o + A_k (\hat{X}_{k/k} - \bar{X}_k)) \quad (2.58)$$

Aplicando o critério do MMQ nas expressões acima, como apresentado em (2.28), chega-se a seguinte forma quadrática fundamental:

$$\begin{aligned} \phi = & (\hat{X}_{k/k} - \hat{X}_{k/k-1})^T \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} (\hat{X}_{k/k} - \hat{X}_{k/k-1}) + \\ & + (L_k^b - A_k (\hat{X}_{k/k} - \bar{X}_k))^T \Sigma_{L_k^b} (L_k^b - A_k (\hat{X}_{k/k} - \bar{X}_k)) = \min \end{aligned} \quad (2.59)$$

com:

$$L_k = L_k^b - L_k^o \quad (2.60)$$

Desenvolvendo a (2.59) e minimizando a forma quadrática fundamental resultante em relação a estimativa de X_k , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial \hat{X}_{k/k}} &= (\Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1}) \hat{X}_{k/k} - (\Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1} \hat{X}_{k/k-1}) + \\ &+ (A_k^T \Sigma_{L_k}^{-1} A_k) \hat{X}_{k/k} - (A_k^T \Sigma_{L_k}^{-1} L_k) - \\ &- (A_k^T \Sigma_{L_k}^{-1} A_k \bar{X}_k) = 0 \end{aligned} \quad (2.61)$$

ou

$$\begin{aligned} (\Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1} + A_k^T \Sigma_{L_k}^{-1} A_k) \hat{X}_{k/k} - (\Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1} \hat{X}_{k/k-1} + \\ + A_k^T \Sigma_{L_k}^{-1} L_k + A_k^T \Sigma_{L_k}^{-1} A_k \bar{X}_k) = 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

A equação acima representa um sistema de n equações normais, e cuja solução é dada pelo vetor estado:

$$\begin{aligned} \hat{X}_{k/k} &= (\Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1} + A_k^T \Sigma_{L_k}^{-1} A_k)^{-1} (\Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1} \hat{X}_{k/k-1} + \\ &+ A_k^T \Sigma_{L_k}^{-1} L_k + A_k^T \Sigma_{L_k}^{-1} A_k \bar{X}_k) \end{aligned} \quad (2.63)$$

Aplicando a lei de propagação de covariância na expressão acima, obtém-se a MVC da época t_k :

$$\Sigma_{\hat{X}_{k/k}} = (\Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}}^{-1} + A_k^T \Sigma_{L_k}^{-1} A_k)^{-1} \quad (2.64)$$

As equações (2.63) e (2.64) constituem as equações de filtragem, porém aproximadas, conhecidas como equações aproximadas atualizadas das medidas, ou seja, ciclo de atualização aproximado.

Aplicando a Identidade de SCHURR nas equações de filtragem (2.63) e (2.64), encontra-se respectivamente, para a expressão da estimativa e MVC do vetor estado as seguintes expressões:

$$\hat{X}_{k/k} = \hat{X}_{k/k-1} + K_k [(L_k^b - L_k^o) - A_k (\hat{X}_{k/k-1} - \bar{X}_k)] \quad (2.65)$$

$$\Sigma_{\hat{X}_{k/k}} = (I - K_k A_k) \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}}, \quad (2.66)$$

onde a matriz ganho de Kalman é dada por:

$$K_k = \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} A_k^T (A_k \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} A_k^T + \Sigma_{L_k^b})^{-1} \quad (2.67)$$

O algoritmo acima desenvolvido com a linearização por série de Taylor, com valores aproximados para o vetor estado para as épocas t_{k-1} e t_k é conhecido como versão linearizada do Filtro de Kalman discreto para modelos discretos.

Abaixo apresentaremos um resumo do algoritmo desenvolvido acima:

Tabela 02 - RESUMO DAS EQUAÇÕES DO FILTRO DE KALMAN DISCRETO LINEARIZADO

Modelo dinâmico Linearizado	$X_k = X_{k/k-1}^o + T_{k,k-1} (X_{k-1} - \bar{X}_{k-1}) + W_k$ $W_k \sim N(0, \Sigma_{Wk})$
Modelo de medida Linearizado	$L_k^b = L_k^o + A_k (X_k - \bar{X}_k) + V_k$ $V_k \sim N(0, \Sigma_{Vk})$
Condições iniciais	$E\{X_0\} = \hat{X}_0$ $E\{(X_0 - \hat{X}_0)(X_0 - \hat{X}_0)^T\} = \Sigma_{\hat{X}_0/0}$
Outras suposições	$E\{W_k V_l^T\} = E\{V_k W_l^T\} = 0$ <p style="text-align: right;">para todo k, l</p> $E\{W_k X_0^T\} = E\{V_k X_0^T\} = 0$ <p style="text-align: right;">para todo k</p>
CICLO DE PROPAGAÇÃO - PREDIÇÃO	
Estimativa	$\hat{X}_{k/k-1} = X_{k/k-1}^o + T_{k,k-1} (\hat{X}_{k-1/k-1} - \bar{X}_{k-1})$
MVC	$\Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} = T_{k,k-1} \Sigma_{\hat{X}_{k-1/k-1}} T_{k,k-1}^T + \Sigma_{Wk}$
CICLO DE ATUALIZAÇÃO - FILTRAGEM	
Estimativa	$\hat{X}_{k/k} = \hat{X}_{k/k-1} + K_k (L_k^b - L_k^o) -$ $- K_k A_k (\hat{X}_{k/k-1} - \bar{X}_k)$
MVC	$\Sigma_{\hat{X}_{k/k}} = (I - K_k A_k) \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}}$
Ganho de Kalman	$K_k = \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} A_k^T (A_k \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} A_k^T + \Sigma_{L_k^b})^{-1}$
com:	
$X_{k/k-1}^o = f_{k,k-1}(\bar{X}_{k-1})$	$T_{k,k-1} = \left. \frac{\partial f_{k,k-1}(X_{k-1})}{\partial X_{k-1}} \right _{X_{k-1} = \bar{X}_{k-1}}$
$L_k^o = g_k(\bar{X}_k)$	$A_k = \left. \frac{\partial g_k(X_k)}{\partial X_k} \right _{X_k = \bar{X}_k}$

2.3.4 Filtro de Kalman Estendido

Substituindo no algoritmo da versão linearizada os vetores estados aproximados pelas estimativas das épocas correntes t_{k-1} e t_k , dadas respectivamente por $\hat{X}_{k-1/k-1}$ e $\hat{X}_{k/k-1}$, chega-se a versão conhecida como estendida.

2.3.4.1 Predição ou Ciclo de Propagação

As equações de predição são obtidas substituindo \bar{X}_{k-1} por $\hat{X}_{k-1/k-1}$, nas equações da versão linearizada dada por (2.55) e (2.56); então a estimativa predita passa a ser dada por:

$$\hat{X}_{k/k-1}^o = X_{k/k-1}^o \quad (2.68)$$

e a sua MVC como:

$$\Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} = T_{k,k-1} \Sigma_{\hat{X}_{k-1/k-1}} T_{k,k-1}^T + \Sigma_{W_k} \quad (2.69)$$

neste caso as expressões (2.48) e (2.49) passam a ser dadas por:

$$X_{k/k-1}^o = f_{k,k-1}(\hat{X}_{k-1/k-1}) \quad (2.70)$$

$$T_{k,k-1} = \left. \frac{\partial f_{k,k-1}(X_{k-1})}{\partial X_{k-1}} \right|_{X_{k-1} = \hat{X}_{k-1/k-1}} \quad (2.71)$$

2.3.4.2 Filtragem ou Ciclo de Atualização

As equações de filtragem são obtidas substituindo \bar{X}_k por $\hat{X}_{k/k-1}$ nas equações do algoritmo linearizado (2.65), (2.66) e (2.67), portanto:

$$\hat{X}_{k/k} = \hat{X}_{k/k-1} + K_k (L_k^b - L_k^o) \quad (2.72)$$

$$\Sigma_{\hat{X}_{k/k}} = (I - K_k A_k) \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} \quad (2.73)$$

$$K_k = \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} A_k^T (A_k \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} A_k^T + \Sigma_{L_k^b})^{-1} \quad (2.74)$$

com:

$$L_k^o = g_k(\hat{X}_{k/k-1}) \quad (2.75)$$

e

$$A_k = \left. \frac{\partial g_k(X_k)}{\partial X_k} \right|_{X_k = \hat{X}_{k/k-1}} \quad (2.76)$$

As equações (2.68) e (2.69) juntamente com as (2.72), (2.73) e (2.74) formam o algoritmo do Filtro de Kalman Estendido.

O algoritmo linearizado produz filtragem menos acurada do que o estendido [05], [15], pois o vetor estado aproximado usualmente não concorda com a trajetória nominal. Entretanto, oferece vantagem computacional, pois a matriz ganho de Kalman pode ser computada fora de linha ("off-line") e armazenada na memória do computador, já que o vetor estado aproximado \bar{X}_k é conhecido a priori. Na versão estendida, o algoritmo tem de ser calculado em tempo real, à medida que os dados tornam-se disponíveis.

A síntese abaixo representa a versão estendida:

Tabela 03 - RESUMO DAS EQUAÇÕES DO FILTRO DE KALMAN DISCRETO ESTENDIDO

Modelo dinâmico estendido	$X_k = T_{k,k-1}^o + T_{k,k-1} (X_{k-1} - \hat{X}_{k-1/k-1}) + W_k$ $W_k \sim N(0, \Sigma_{Wk})$
Modelo de medida estendido	$L_k^b = L_k^o + A_k (X_k - \hat{X}_{k/k-1}) + V_k$ $V_k \sim N(0, \Sigma_{Vk})$
Condições iniciais	$E\{X_o\} = \hat{X}_o$ $E\{(X_o - \hat{X}_o)(X_o - \hat{X}_o)^T\} = \Sigma_{Xo/o}$
Outras suposições	$E\{W_k V_l^T\} = E\{V_k W_l^T\} = 0$ <p style="text-align: right;">para todo k, l</p> $E\{W_k X_o^T\} = E\{V_k X_o^T\} = 0$ <p style="text-align: right;">para todo k</p>
CICLO DE PROPAGAÇÃO - PREDIÇÃO	
Estimativa	$\hat{X}_{k/k-1} = X_{k/k-1}^o$
MVC	$\Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} = T_{k,k-1} \Sigma_{\hat{X}_{k-1/k-1}} T_{k,k-1}^T + \Sigma_{Wk}$
CICLO DE ATUALIZAÇÃO - FILTRAGEM	
Estimativa	$\hat{X}_{k/k} = \hat{X}_{k/k-1} + K_k (L_k^b - L_k^o)$
MVC	$\Sigma_{\hat{X}_{k/k}} = (I - K_k A_k) \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}}$
Ganho de Kalman	$K_k = \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} A_k^T (A_k \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} A_k^T + \Sigma_{Lk}^b)^{-1}$
COM:	
$X_{k/k-1}^o = f_{k,k-1}(\hat{X}_{k-1/k-1})$	$T_{k,k-1} = \left. \frac{\partial f_{k,k-1}(X_{k-1})}{\partial X_{k-1}} \right _{X_{k-1} = \hat{X}_{k-1/k-1}}$
$L_k^o = g_k(\hat{X}_{k/k-1})$	$A_k = \left. \frac{\partial g_k(X_k)}{\partial X_k} \right _{X_k = \hat{X}_{k/k-1}}$

2.3.5 Processo Iterativo Aplicado ao Filtro de Kalman

Uma vez que foi procedida a linearização dos modelos, o método deve ser repetido para melhorar a estimativa do vetor estado, repetindo-se o cálculo de K_k , $\hat{X}_{k/k}$ e $\Sigma_{X_{k/k}}$, sendo que em cada época a linearização é efetuada sobre a mais recente estimativa.

Então, para o desenvolvimento deste algoritmo, denotamos a i -ésima estimativa de X_k por $\hat{X}_{k/k}^i$, para $i = 0, 1, \dots, N$, N sendo igual ao número de iterações.

No procedimento de linearização, dependendo do vetor estado usado para o cálculo das funções, tem-se a versão linearizada ou estendida. Porém, na realização das iterações visando melhorar a estimativa do vetor estado, a linearização é realizada sobre a estimativa mais recente, sendo este processo conhecido como a versão estendida com iterações.

Representando $g_k(X_k)$ na forma iterativa, tem-se:

$$g_k(X_k^i) = L_k^i + A_k^i (X_k - \hat{X}_{k/k}^i) \quad (2.77)$$

com:

$$L_k^i = g_k(\hat{X}_{k/k}^i) \quad (2.78)$$

$$A_k^i = \left. \frac{\partial g_k(X_k)}{\partial X_k} \right|_{X_k = \bar{X}_{k/k}^i} \quad (2.79)$$

Se $i = 0$, as equações reduzem ao linearizado ou ao estendido, dependendo de $\hat{X}_{k/k}^0 = \bar{X}_k$ ou $\hat{X}_{k/k}^0 = \hat{X}_{k/k-1}$,

respectivamente.

Substituindo a expressão acima nas equações de filtragem dada por (2.72), (2.73) e (2.74) obtém-se a seguinte forma iterativa para a estimativa, matriz ganho de Kalman e MVC:

$$\hat{X}_{k/k}^{i+1} = \hat{X}_{k/k-1} + K_k^i (L_k^b - L_k^i) - K_k^i A_k^i (\hat{X}_{k/k-1} - \hat{X}_{k/k}^i) \quad (2.80)$$

$$\Sigma_{X_{k/k}}^{i+1} = (I - K_k^i A_k^i) \Sigma_{X_{k/k-1}} \quad (2.81)$$

$$K_k^i = \Sigma_{X_{k/k-1}} A_k^{iT} (A_k^i \Sigma_{X_{k/k-1}} A_k^i + \Sigma_{L_k^b})^{-1} \quad (2.82)$$

Pode-se também planejar uma iteração para melhorar a estimativa e a MVC do ciclo de propagação, tais técnicas de iteração podem significativamente reduzir cálculos do ciclo de atualização.

Seja então o modelo dinâmico linearizado e representado na forma iterativa:

$$f_{k,k-1}(X_{k-1}^i) = X_{k/k-1}^{oi} + T_{k,k-1}^i (X_{k-1} - \hat{X}_{k/k-1}^i) \quad (2.83)$$

com:

$$X_{k/k-1}^{oi} = f_{k,k-1}(\hat{X}_{k-1}^i) \quad (2.84)$$

$$T_{k,k-1}^i = \frac{\partial f_{k,k-1}(X_{k-1})}{\partial X_{k-1}} \Big|_{X_{k-1} = \hat{X}_{k/k-1}^i} \quad (2.85)$$

Substituindo as expressões acima nas equações de predição dadas por (2.68) e (2.69), resulta a forma iterativa do ciclo de propagação:

$$\hat{X}_{k/k-1}^{i+1} = X_{k/k-1}^{0i} + T_{k,k-1}^i (\hat{X}_{k-1/k-1} - \hat{X}_{k/k-1}^i) \quad (2.86)$$

$$\Sigma_{k/k-1}^{i+1} = T_{k,k-1}^i \Sigma_{k-1/k-1} T_{k,k-1}^{iT} + \Sigma_{Wk} \quad (2.87)$$

O resumo a seguir é a versão estendida do filtro de Kalman adequada ao processo iterativo:

Tabela 04 - RESUMO DAS EQUAÇÕES DO FILTRO DE KALMAN DISCRETO ESTENDIDO COM ITERAÇÕES

Modelo dinâmico estendido	$X_k = X_{k/k-1}^{oi} + T_{k,k-1}^i (X_{k-1} - \hat{X}_{k/k-1}^i) + W_k$ $W_k \sim N(0, \Sigma_{Wk})$
Modelo de medida estendido	$L_k^b = L_k^i + A_k^i (X_k - \hat{X}_{k/k}^i) + V_k$ $V_k \sim N(0, \Sigma_{Vk})$
Condições iniciais	$E\{X_0\} = \hat{X}_0$ $E\{(X_0 - \hat{X}_0)(X_0 - \hat{X}_0)^T\} = \Sigma_{X_0/0}$
Outras suposições	$E\{W_k V_l^T\} = E\{V_k W_l^T\} = 0$ <p style="text-align: right;">para todo k, l</p> $E\{W_k X_0^T\} = E\{V_k X_0^T\} = 0$ <p style="text-align: right;">para todo k</p>
CICLO DE PROPAGAÇÃO - PREDIÇÃO	
Estimativa	$\hat{X}_{k/k-1}^{i+1} = X_{k/k-1}^{oi} + T_{k,k-1}^i (\hat{X}_{k-1/k-1} - \hat{X}_{k/k-1}^i)$
MVC	$\Sigma_{Xk/k-1}^{i+1} = T_{k,k-1}^i \Sigma_{Xk-1/k-1} T_{k,k-1}^{iT} + \Sigma_{Wk}$
CICLO DE ATUALIZAÇÃO - FILTRAGEM	
Estimativa	$\hat{X}_{k/k}^{i+1} = \hat{X}_{k/k-1} + K_k^i (L_k^b - L_k^i) - K_k^i A_k^i (\hat{X}_{k/k-1} - \hat{X}_{k/k}^i)$
MVC	$\Sigma_{Xk/k}^{i+1} = (I - K_k^i A_k^i) \Sigma_{Xk/k-1}$
Ganho de Kalman	$K_k^i = \Sigma_{Xk/k-1}^{i+1} A_k^{iT} (A_k^i \Sigma_{Xk/k-1}^{i+1} A_k^i + \Sigma_{Lk}^b)^{-1}$
com:	$X_{k/k-1}^{oi} = f_{k,k-1}(\hat{X}_{k-1}^i)$ $T_{k,k-1}^i = \left. \frac{\partial f_{k,k-1}(X_{k-1})}{\partial X_{k-1}} \right _{X_{k-1} = \hat{X}_{k/k-1}^i}$ $L_k^i = g_k(\hat{X}_{k/k}^i)$ $A_k^i = \left. \frac{\partial g_k(X_k)}{\partial X_k} \right _{X_k = \hat{X}_{k/k}^i}$

3 CONTROLE DE QUALIDADE

3.1 Introdução

O controle de qualidade em Ciências Geodésicas é um sistema amplo e complexo, com objetivo de estabelecer, melhorar e assegurar a qualidade de um produto ou serviço, para certas condições de consumo ou utilização. Os fatores considerados no controle de qualidade de maior importância em um produto ou serviço, dividem-se em economia, precisão e confiabilidade. Como visto anteriormente a economia é um fator importante num projeto, pois expressa o custo total, envolve operações de planejamento, execução, coleta de dados, processamento, etc; a precisão manifesta a dispersão dos resultados na ausência de erros, sendo expressa pela matriz variância-covariância; e a confiabilidade descreve a capacidade das observações redundantes em detectar erros nos modelos e ou nas observações, com certo nível de confiança; ou seja, confiabilidade é a probabilidade de um sistema ou parte dele ter desempenho satisfatório, sem falhas, em certas condições de uso, durante um período específico de tempo.

Confiabilidade, de um modo geral, pode ser entendida como a capacidade de detectar erros, ou seja, exercer o controle sobre os modelos e observações. O tamanho máximo do erro não detectado foi definido por BAARDA [01] como confiabilidade interna, e o seu efeito no resultado como confiabilidade externa. A confiabilidade ou capacidade de controlar erros no modelo funcional e/ou nas observações pode

ser realizada com ajuda de um teste estatístico.

Este trabalho dentro da área de controle de qualidade se restringirá a detecção e localização das observações com erro, bem como a retirada da observação do processamento ou das suas influências nos resultados. O algoritmo a ser apresentado será baseado principalmente nos trabalhos de CHEN et al. [02], KRAKIWSKY e BIACS [14], SALZMANN e TEUNISSEN [21] e TEUNISSEN e SALZMANN [23], [24].

No entanto, por mais eficiente que seja o controle de qualidade, ele normalmente garante com determinada probabilidade que o produto ou serviço terá o resultado planejado satisfatório quando em consumo ou utilização. É importante ressaltar que um produto ou serviço é considerado de qualidade, isto é, reúne um conjunto das melhores características ou fatores, quando for adequado ao uso a que se destina.

Erros no modelo matemático (funcional ou estocástico) e/ ou nas observações podem influenciar os resultados e sua interpretação; os procedimentos dos testes a serem aplicados para eliminar tais erros consistem em três passos: detecção, localização e adaptação.

Um procedimento geral será apresentado para detectar erros nos modelos (funcional e estocástico) e nas observações, baseado na estatística Qui-quadrado. Após a detecção de erros, a identificação ou localização da possível fonte causadora é necessária. A identificação consiste de passos de procura entre todos os candidatos prováveis causadores de erros, no caso das observações ou do modelo funcional, por exemplo, o

teste estatístico "data snooping" é empregado. Finalmente, localizado ou identificado o modelo ou a observação mais provável, a adaptação é necessária para eliminar as tendências nos parâmetros incógnitos.

As metodologias disponíveis para localização de erros nas observações, segundo CHEN et al. [02], podem ser agrupadas de acordo com duas concepções básicas:

a) Aquela em que a média da observação sofre um deslocamento de λ (parâmetro de tendenciosidade), isto é, a observação remota tem distribuição $N(\mu+\lambda, \sigma)$ em lugar de $N(\mu, \sigma)$; e

b) Aquela na qual a variância sofre alterações, ou seja, a observação tem distribuição $N(\mu, a^2\sigma^2)$, com $a^2 > 1$.

De acordo ainda com o mesmo autor, as metodologias baseadas na primeira concepção foram desenvolvidas por Baarda (1968), Pope (1976), Heck (1981), Koch (1985) e outros, enquanto as que fundamentaram na segunda concepção, e que utilizam uma idéia de iterações, onde as observações são re-ponderadas, com base no tamanho dos resíduos, foram apresentadas por Krarup et al (1980), Kubik (1982) e outros, sendo estes conhecidos como estimadores robustos.

A seguir serão apresentados os testes estatísticos para a detecção e localização de observações com erros, onde o fator de variância σ_o^2 é assumido ser conhecido, visando a implementação deste teste no algoritmo do Filtro de Kalman, para processamento em tempo real, pois na obtenção das equações do Filtro de Kalman o valor de σ_o^2 foi assumido ser conhecido e igual a unidade.

3.2 Testes Estatísticos

O teste estatístico proposto é baseado em duas etapas, uma que consiste de um teste geral, com objetivo de detectar erros, seja nas observações ou nos modelos, e a outra num teste uni-dimensional, com a finalidade de localizar a possível fonte causadora. O teste estatístico utilizado para detectar é o teste da estimativa do fator de variância, também chamado teste geral ou n-dimensional. E o teste conhecido como uni-dimensional, com objetivo de localizar as observações com erro é o "data snooping", ou seja, uma técnica desenvolvida por BAARDA [01] para o teste dos resíduos padronizados.

3.2.1 Teste Estatístico para Detecção de Erros

O teste estatístico aplicado com a finalidade de detectar erros de um forma geral, seja no modelo matemático (funcional ou estocástico) ou nas observações, é o teste da estimativa do fator de variância, que verifica a compatibilidade das observações com o modelo matemático.

Este teste leva a formação de duas hipóteses, conhecidas com hipótese nula e hipótese alternativa, representadas respectivamente por H_0 e H_a , que são apresentadas da seguinte maneira [14]:

$$H_0: E \{ \hat{\sigma}_0^2 \} = \sigma_0^2 \quad \text{versus} \quad H_a: E \{ \hat{\sigma}_0^2 \} \neq \sigma_0^2 \quad (3.1)$$

ou

$$H_0: E\{\hat{\sigma}_0^2\} = \sigma_0^2 \quad \text{versus} \quad H_a: E\{\hat{\sigma}_0^2\} > \sigma_0^2 \quad (3.2)$$

onde $\hat{\sigma}_0^2$ é a estimativa não tendenciosa do fator de variância a priori, conhecido como fator de variância a posteriori.

A hipótese acima pode ser verificada com base na distribuição Qui-quadrado com $(n-u)$ graus de liberdade, onde a estatística a ser testada é dada por:

$$T = \frac{V^T P V}{\sigma_0^2} \sim \chi^2(n-u) \quad (3.3)$$

com V representando o vetor dos resíduos, P a matriz peso das observações, n o número de observações e u o número de parâmetros.

A razão (3.3) é empregada no teste bilateral para a hipótese (3.1) e unilateral para (3.2), com um determinado nível de significância (α) especificado, conforme:

$$\chi_{\alpha/2, n-u}^2 < T < \chi_{1-\alpha/2, n-u}^2 \quad (3.4)$$

ou

$$T < \chi_{\alpha, n-u}^2 \quad (3.5)$$

onde $\chi_{\alpha/2, n-u}^2$ e $\chi_{1-\alpha/2, n-u}^2$ ou $\chi_{\alpha, n-u}^2$ são valores obtidos da tabela da distribuição Qui-quadrado.

A hipótese nula não é rejeitada em favor da hipótese alternativa, se a estatística calculada (T) pertencer a distribuição Qui-quadrado com $(n-u)$ graus de liberdade, a

certo nível de significância (α), como apresentado nos testes (3.4) e (3.5).

Portanto se o intervalo acima (3.4 ou 3.5) não contiver a estatística T , as possíveis razões ou circunstâncias diversas para a falha no teste podem ter como causas:

a) Modelo funcional não adequado à realidade física.

b) A matriz variância e covariância das observações não está apropriadamente determinada, ou seja, modelo estocástico não apropriado.

c) Erros grosseiros ou sistemáticos, ou seja, erros não randômicos presentes nos dados observados.

Os modelos matemáticos (funcionais e estocásticos) são bem conhecidos no campo da Geodésia, Fotogrametria e demais Ciências afins, portanto não preocupam os profissionais. Então os testes são aplicados com a finalidade de detectar as observações com erros não randômicos. Geralmente as influências sistemáticas são eliminadas ou parametrizadas.

O teste acima descrito é empregado para detectar erros nos modelos e nas observações, portanto, para a localização da observação com erro é aplicado geralmente o teste estatístico uni-dimensional, isto é, um teste que verifica uma observação por vez.

3.2.2 Teste Estatístico para Localização das Observações com Erro

O teste estatístico "data snooping" ou o método de Baarda é o teste aplicado para a detecção e localização das observações eivadas de erros, é aplicado ao residuo padronizado. A suposição de que exista um único erro grosseiro no conjunto das observações, faz com que o método seja pouco eficiente no caso em que estão presentes muitos erros.

De forma resumida apresentaremos a formulação matemática do teste, que pode ser encontrada nos trabalhos de Baarda [01]. No teste estatístico de Baarda, são duas as variáveis utilizadas na determinação de observações afetadas de erros grosseiros, conhecidas por número de redundância ou redundância parcial (C) e a correção normalizada (W).

A localização da observação eivada de erro, usando o método de Baarda, é feita, através dos valores calculados por meio de [01], [14], [23]:

$$W = \frac{C^t Q_{Lb}^{-1} \hat{V}}{\sigma_0 \sqrt{C^t Q_{Lb}^{-1} Q_v^{-1} Q_{Lb}^{-1} C}} \quad (3.6)$$

com Q_{Lb} e Q_v representando a matriz cofatora das observações e da estimativa dos resíduos, respectivamente.

O vetor C é um vetor n-dimensional, contendo unidade para as observações a serem testadas, e zero para as outras posições. O numerador da equação (3.6) representa o chamado

resíduo transformado e o denominador o erro estimado. O resultado é a estatística W , conhecida como correção normalizada, cujo valor é empregado no teste estatístico.

No caso de teste de um resíduo por vez, e por causa da estrutura diagonal da MVC das observações, a expressão (3.6) é reduzida a chamada equação de "data snooping" |14|:

$$W_i = \frac{\hat{V}_i}{\sigma_0 \sqrt{q_{ii}}} = \frac{\hat{V}_i}{\sigma_{vi}} \quad (3.7)$$

com $1 \leq i \leq n$, onde W_i é a estatística conhecida como correções normalizadas, q_{ii} é o i -ésimo elemento da diagonal da matriz cofatora dos resíduos (Q_v^{-1}), \hat{V}_i é a estimativa do resíduo da observação i e σ_0 o desvio padrão da unidade de peso a priori.

A estatística W_i é distribuída como a raiz quadrada da distribuição F com graus de liberdade 1 e ∞ , ou $\sqrt{F_\alpha(1, \infty)}$ |01|, |02|. A raiz quadrada da distribuição F tem distribuição normal padrão, ou seja, $\sqrt{F_\alpha(1, \infty)} = N_{\alpha/2}(0, 1)$, então |02|:

$$W_i \sim N_{\alpha/2}(0, 1) \quad (3.8)$$

As hipóteses formuladas neste teste, descrevem que na hipótese nula a observação i não contém erro de magnitude ∇l_i , versus uma hipótese alternativa que supõe o oposto, ou seja |14|:

$$H_0 : \nabla l_i = 0 \quad \text{versus} \quad H_a : \nabla l_i \neq 0 \quad (3.9)$$

A hipótese nula é verdadeira, isto é, nenhum erro está presente na observação i , a um certo nível de significância (α_0), se a estatística W_i estiver situada no intervalo da correspondente distribuição normal padrão a uma porcentagem α_0 , ou:

$$-N_{\alpha_0/2} < W_i < N_{\alpha_0/2} \quad (3.10)$$

caso contrário a observação i contém erro.

Como trata-se de um teste, que verifica somente uma observação por vez e dependendo da magnitude de Δl_i , mais do que um resíduo pode exceder os valores críticos, ou seja mais do que uma observação pode estar sendo declarada errada, então, neste caso é excluída a observação de estatística máxima e o teste é repetido novamente até que todas as observações com erro sejam eliminadas. A existência de múltiplas observações com erro decresce a eficiência do teste estatístico. Neste caso o processo deve ser repetido, para eliminar as observações com erro, onde vão sendo eliminadas as observações de estatística máxima.

3.2.3 Adaptação

Realizados os testes apresentados com a finalidade de detectar e localizar as observações com erro, o próximo passo, caso tenha sido indicado alguma observação, é eliminar a sua influência nos resultados, essa etapa é conhecida como adaptação. A adaptação depende do tipo de processamento,

geralmente consiste do cálculo da influência a ser retirada dos parâmetros incógnitos, devido ao erro das observações, ou do re-processamento, sem a utilização da observação eivada de erro. Porém cuidados devem ser tomados quanto a redundância do sistema.

3.2.4 Níveis de Significância dos Testes

Os níveis de significância para os testes de detecção e localização deverão estar relacionados para que as conclusões, baseadas nas equações (3.4 ou 3.5) e (3.10), sejam compatíveis. Chen et al. [02] apresentam uma relação baseada na desigualdade de Bonferroni; seja α_0 o nível de significância para os testes individuais das observações, então o nível de significância α para o teste do fator de variância ou de todas as observações é calculado, respectivamente, da seguinte maneira para o teste bilateral e unilateral:

$$\alpha = n \alpha_0 \quad (3.12)$$

e

$$\alpha = 2 n \alpha_0 \quad (3.13)$$

onde n é o número de resíduos ou observações.

Segundo KRAKIWSKY e BIACS [14] este teorema especifica que se os resíduos são não correlacionados, a probabilidade de ocorrer o erro tipo I (rejeitar H_0 , quando H_0 é verdadeiro)

para o conjunto dos resíduos testados será α , e se os resíduos forem correlacionados esta probabilidade será menor do que α .

Um problema consiste em fixar o nível de significância para o teste, geralmente um assunto de experiência pessoal. É selecionado costumeiramente para redes geodésicas o nível de 0.1% para o teste uni-dimensional [14].

3.3. Implementação dos Testes Estatísticos no Filtro de Kalman

A implementação dos testes no algoritmo do Filtro de Kalman com objetivo de detectar e localizar erros nas observações, será apresentada a seguir. Estes testes podem ser aplicados de duas maneiras: uma quando são requeridos em tempo real, para estimação do vetor estado em tempo real, e a outra quando é admitido um retardo no processamento dos dados, propiciando assim um teste do tipo lote, porém de forma recursiva. Os testes são baseados na seqüência de inovação, isto é, na transição entre o ciclo de propagação e o de atualização, que tem as propriedades estatísticas bem definidas. Quando o Filtro é ótimo, o resíduo predito exerce um papel importante no processo de teste [23].

3.3.1. Seqüência de Inovação e Resíduo Predito

A seqüência de inovação ocorre entre o ciclo de propagação e o de atualização, têm-se nessa transição o vetor estado predito para a época t_k e as observações para a mesma época, que serão utilizadas na filtragem.

Nesta fase pode-se obter uma estimativa do vetor dos resíduos, chamado de vetor dos resíduos predito e representado por V_k , e sendo definido como a diferença entre as observações e as observações preditas para a mesma época, dado por [21], [23], [24], [25]:

$$V_k = L_k^b - A_k \hat{X}_{k/k-1} \quad (3.13)$$

O resíduo predito representa a nova informação trazida pelas últimas observações, sob condições normais o resíduo predito tem propriedade estatística bem definida:

$$V_k \sim N(0, \Sigma_{V_k}) \quad (3.14)$$

onde:

$$\Sigma_{V_k} = (\Sigma_{L_k}^b + A_k \Sigma_{\hat{X}_{k/k-1}} A_k^T) \quad (3.15)$$

é a MVC dos resíduos preditos, obtida com aplicação da lei de propagação de covariância, a partir da equação (3.13).

O vetor dos resíduos predito e a respectiva MVC são disponíveis durante cada medida realizada. Portanto com estes elementos estamos aptos a aplicar os testes estatísticos.

3.3.2 Teste Estatístico para Processamento em Tempo Real

Na seção (3.2) foi apresentado o teste estatístico da estimativa do fator de variância para detecção e o teste estatístico "data snooping" para localização das observações com erro, que agora serão implementados ao Filtro de Kalman.

Estes testes dependem das observações realizadas na época t_k , da matriz A da época, do modelo de medida, do vetor estado predito para a mesma época e da MVC do vetor estado predito. Este teste é também conhecido como teste estatístico local.

3.3.2.1 Teste Estatístico para Detecção de Erro em Tempo Real

Substituindo na expressão (3.3) o resíduo e a matriz peso por seus valores preditos, obtém-se a estatística:

$$T^k = \frac{V_k^T P_k V_k}{\sigma_o^2} \sim \chi^2(n_k) \quad (3.16)$$

onde o índice k representa a época em que se está realizando o teste e n_k representa o número de observações dessa mesma época. No processo de filtragem as observações n_k representam as observações superabundantes, ou seja, os graus de liberdade.

A matriz peso predita, é dada por:

$$P_k = \sigma_o^2 \Sigma_{V_k}^{-1} \quad (3.17)$$

que substituída em (3.16) resulta:

$$T^k = V_k^T \Sigma_{V_k}^{-1} V_k \quad (3.18)$$

As hipóteses a serem testadas, para filtragem recursiva, serão formuladas da seguinte forma:

$$H_0: E\{\hat{\sigma}_{ok}^2\} = 1 \quad \text{versus} \quad H_a: E\{\hat{\sigma}_{ok}^2\} > 1 \quad (3.19)$$

onde $\hat{\sigma}_{ok}^2$ representa o fator de variância da unidade de peso a posteriori predito, calculados com valores da inovação, e o fator de variância a priori σ_o^2 é assumido ser igual a unidade, pois para obter-se as fórmulas do Filtro de Kalman pelo MMQ foi assumido tal suposição.

A estatística T^k é sempre empregada no teste unilateral, e se a desigualdade:

$$T^k < \chi_{\alpha, n}^2 \quad (3.20)$$

verificar, a um certo nível de significância (α) a hipótese nula é aceita, isto significa que não existem erros, caso contrário algum erro de especificação nos modelos e/ou nas observações pode ter ocorrido. Neste caso as possíveis fontes de erros são:

a) Erro no sistema dinâmico, isto é, no modelo dinâmico e/ou no modelo de medida.

b) Erro na matriz variância-covariância das observações e/ou na matriz variância-covariância das correções ao modelo dinâmico.

c) Erro nas observações da época t_k .

Uma vez detectado que existe erro, o próximo passo é identificar a fonte produtora, ou seja a observação eivada de erro ou o modelo matemático inadequado.

3.3.2.2 Teste Estatístico para Localização das Observações com Erro em Tempo Real

Após ser realizado o teste estatístico da estimativa do fator de variância, onde o erro de especificação tenha sido detectado, a localização da fonte potencial do erro é necessária. Aplicando o teste estatístico apresentado na seção (3.2.2.), na seqüência de inovação, e substituindo a estimativa do resíduo e a MVC da equação (3.6) pelos valores preditos obtém-se a estatística:

$$W^k = \frac{C_{V_k}^T \Sigma_{V_k}^{-1} V_k}{(C_{V_k}^T \Sigma_{V_k}^{-1} C_{V_k})^{1/2}} \quad (3.21)$$

onde:

$$P_k = Q_{V_k}^{-1} = \Sigma_{V_k}^{-1} \quad (3.22)$$

Se uma observação for suspeita, aplica-se o teste estatístico "data snooping", onde o vetor C_{V_k} toma a forma:

$$C_{V_k} = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T \quad (3.23)$$

$\begin{matrix} 1 & & i & & n_k \end{matrix}$

para $i = 1, \dots, n_k$, com i representando a observação a ser verificada.

As hipóteses formuladas neste teste, descrevem que a hipótese nula é aquela em que a observação não contém erro de magnitude ∇l_i , e a alternativa é que contém erro de magnitude ∇l_i :

$$H_0 : \nabla l_i = 0 \quad \text{versus} \quad H_a : \nabla l_i \neq 0 \quad (3.24)$$

A hipótese nula é verdadeira, isto é, nenhum erro está presente na observação i , a um certo nível de significância, se a estatística W_i^k estiver situada no intervalo da correspondente distribuição a uma porcentagem α_0 , seja:

$$-N_{\alpha_0/2} < W_i^k < N_{\alpha_0/2} \quad (3.25)$$

Caso contrário a observação i contém erro. A observação que tem a máxima estatística W_i^k poderá ser considerada a mais provável de conter erros. Então no caso de múltiplas observações com erros, deve-se eliminar a que tiver a maior estatística e repetido os cálculos para as estatísticas, para um novo teste.

3.2.2.3 Adaptação

Neste tipo de processamento a adaptação torna-se fácil, é suficiente no ciclo de atualização ou nas equações atualizadas das medidas não considerar as observações rejeitadas pelo teste, assim desta maneira, obtém-se o vetor estado filtrado livre das influências dos erros, ou seja, não considera no modelo de medida as observações rejeitadas no teste estatístico "data snooping".

3.2.3 Teste Estatístico para Processamento em Lote

Os testes estatísticos realizados nas diversas épocas, através das estatísticas T^k e W_i^k , calculadas para cada época, por meio da inovação V_k e da respectiva MVC, e executados paralelamente em tempo real com as equações do Filtro de Kalman, apresentam vantagens e desvantagens. A vantagem é que uma ação corretiva pode ser feita em tempo real, porém a desvantagem é que os testes acima são locais, ou seja, realizados para cada época, e portanto podem não estar aptos para detectar tendências globais não modeladas, devido ao fato da redundância local (n_k) ser pequena e/ou da matriz Σ_{V_k} não apresentar diagonal dominante, o que facilita passarem despercebidos vários erros [21], [23], [24], [25].

Uma alternativa seria armazenar todas as observações e processar com um algoritmo do tipo lote, para posterior detecção e localização de erros, porém, há duas desvantagens. A primeira é que a propriedade de recursividade do filtro é perdida, e a segunda é que uma ação em tempo real não pode ser realizada quando um erro de especificação é detectado. Contudo, dependendo do problema um retardo no processamento pode ser admissível, se o mesmo for pequeno, justificado pelo fato de que é mais importante detectar um erro com uma possível demora do que não detectar. Um teste estatístico recursivo do tipo lote, conhecido também como teste estatístico global, apresentado nas duas formas, recursivo para o fator de variância e para o teste "data snooping" é empregado neste caso.

3.2.3.1 Teste Estatístico na Forma Recursiva para Detecção de Erros

Conhecido também como teste estatístico global n-dimensional, onde as hipóteses são as mesmas do teste estatístico da estimativa do fator de variância para o ciclo de atualização. Neste caso as hipóteses consideram todas as épocas:

$$H_0 : E \{ \hat{\sigma}_0^2 \} = 1 \quad \text{versus} \quad H_a : E \{ \hat{\sigma}_0^2 \} > 1 \quad (3.26)$$

onde $\hat{\sigma}_0^2$ representa a média de todos os fatores de variância da unidade de peso a posteriori preditos, das épocas consideradas no teste.

As hipóteses acima serão testadas por meio da estatística [25]:

$$T^{l,k} = \sum_{i=l}^k V_i^T \Sigma_{V_i}^{-1} V_i \quad (3.27)$$

conseqüentemente, $T^{l,k}$ pode ser calculado recursivamente por:

$$T^{l,k} = T^{l,k-1} + T^{k,k} \quad (3.28)$$

Verifica-se portanto que esse teste é fácil de ser executado, bastando apenas armazenar na memória do computador os valores da estatística T de cada época. Isto pode ser feito porque os testes estatísticos são mutuamente independentes,

devido a não correlação dos resíduos de épocas distintas [23]. O teste é realizado da seguinte forma:

$$T^{l,k} < \chi_{\alpha, \sum_{i=1,l}^k n_i}^2 \quad (3.29)$$

com os graus de liberdade igual $\sum_{i=1,n}^k n_i$, que representa a soma das observações compreendidas entre as épocas consideradas.

Se a desigualdade acima (3.29) for verdadeira, a um certo nível de significância (α), não existe erro nas observações ou nos modelos, portanto aceita-se a hipótese H_0 ; caso contrário algum erro deve ter ocorrido numa das épocas consideradas no teste, portanto deve ser realizado um teste para localizar as falhas compreendidas entres as épocas envolvidas. No caso de erro em observações o teste estatístico "data snooping" deve ser empregado para localização da observação com suposto erro.

3.2.3.2 Teste Estatístico na Forma Recursiva para Localização das Observações com Erro

As hipóteses a serem lançadas neste tipo de teste, quando um erro ou falha tenha sido detectado, para a localização de erro em observações serão formuladas como:

$$H_0 : \nabla l_i^k = 0 \quad \text{versus} \quad H_a : \nabla l_i^k \neq 0 \quad (3.30)$$

com $k = t_1, \dots, t_k$, $i = 1, \dots, n_k$, sendo n_k igual para todas as épocas.

O cálculo da estatística a ser testada é complicado, pois não é a somatória das estatísticas obtidas em tempo real, devido ao fato de que um erro numa observação influencia diretamente a inovação através da observação e indiretamente através do estado predito.

A influência ou efeito do erro no vetor dos resíduos é representada por $C_{Lb,k} \nabla l$, que no modelo de medida, a partir de um época t_l é dado por:

$$L_k^b = A_k X_k + C_{Lb,k} \nabla l + V_k \quad (3.31)$$

com $C_{Lb,k} = 0$ para $k < l$.

A estrutura recursiva para uma única falha no vetor das observações da época t_l , é obtida através da propagação de $C_{Lb,k}$ sobre a seqüência de inovação, mostrada a partir das equações do Filtro de Kalman atualizadas da época e da medida, de onde obtém-se [25]:

$$C_{Vi} = C_{Lb,k} - A_i X_{i,l}; \quad i = l, \dots, k \quad (3.32)$$

$$X_{i+1,l} = T_{i+1,i} [X_{i,l} + K_i C_{Vi}]; \quad X_{l,l} = 0$$

onde o vetor $C_{Lb,k}$ é escolhido como em (3.23), para $k \geq l$

Com as equações acima, torna-se possível calcular recursivamente o teste estatístico. A estatística que permite realizar o teste para localização da observação com erro é dada por:

$$W^{l,k} = \frac{\sum_{i=l}^k C_{v_i}^T \Sigma_{v_i}^{-1} v_i}{\sqrt{\sum_{i=l}^k C_{v_i}^T \Sigma_{v_i}^{-1} C_{v_i}}} \quad (3.33)$$

Para o teste estatístico de localização, utilizado com a finalidade de verificar uma observação por vez, toma-se $C_{Lb,k} = C_i$ do teste "data snooping", com a qual obtém-se a estatística $W_i^{l,k}$, e se:

$$-N_{\alpha_0/2} < W_i^{l,k} < N_{\alpha_0/2} \quad (3.34)$$

a desigualdade acima verificar ao nível de significância α_0 a hipótese H_0 é aceita, caso contrário deve ser rejeitada a observação. O índice k da estatística indica a época em que foi localizado o erro e o índice l a época em que foi realizada a observação.

O cálculo das estatísticas $W_i^{l,k}$, a serem testadas podem ser apresentadas da seguinte forma:

$$\left[\begin{array}{c} W_1^{1,1} \\ \left[\begin{array}{c} W_2^{1,1} \\ W_1^{1,2} \\ W_2^{2,2} \\ \vdots \\ W_1^{3,3} \\ \vdots \\ W_1^{4,4} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{cc} W_9^{1,1} & W_9^{1,2} \\ W_2^{1,2} & W_2^{1,3} \\ W_1^{1,3} & W_1^{1,4} \\ W_2^{2,4} & W_2^{3,4} \\ W_9^{4,4} & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ W_2^{4,4} \end{array} \right] \end{array} \right] \left[\begin{array}{cccc} W_{nk}^{1,1} & W_{nk}^{1,2} & W_{nk}^{1,3} & W_{nk}^{1,4} \\ W_{nk}^{2,2} & W_{nk}^{2,3} & W_{nk}^{2,4} & \\ W_9^{1,4} & W_{nk}^{2,4} & W_{nk}^{3,4} & \\ W_9^{2,4} & W_9^{3,4} & W_9^{4,4} & \\ W_9^{4,4} & & & \end{array} \right]$$

Figura 03 - TESTE ESTATÍSTICO RECURSIVO $W^{l,k}$ UNI-DIMENSIONAL

Cuja falha, numa época t_k qualquer, é identificada com o teste (3.34), para $1 \leq l \leq k$, para as observações i , com $i = 1, \dots, n_k$.

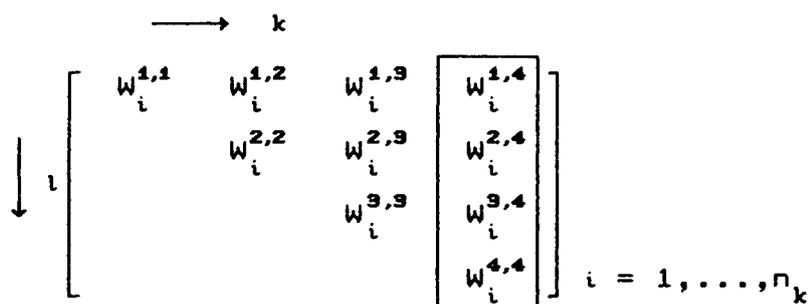
Este processo envolve um processamento do tipo lote, onde têm que ser armazenados todos os dados envolvidos no algoritmo e sem nenhum intervalo, ou seja, sem janela, como apresentado na figura 4a. TEUNISSEN [25] e TEUNISSEN e SALZMANN [23], [24] sugeriram a introdução de uma janela com deslocamento e de comprimento N , afim de reduzir o número de cálculos e atraso no tempo dos testes, injuncionando l por:

$$K - N + 1 \leq l \leq K, \quad (3.35)$$

isto é mostrado na figura 4b, com esta janela o tempo de atraso da detecção é no máximo igual a $N-1$. Uma outra forma de injunção para l é dada por:

$$K - N + 1 \leq l \leq K - M, \quad (3.36)$$

mostrado na figura 4c.



$$\begin{array}{c}
 \longrightarrow k \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 W_i^{1,1} & W_i^{1,2} & W_i^{1,3} & \circ \\
 & W_i^{2,2} & W_i^{2,3} & \boxed{W_i^{2,4}} \\
 & & W_i^{3,3} & W_i^{3,4} \\
 & & & W_i^{4,4}
 \end{array} \right] i = 1, \dots, n_k
 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{c}
 \longrightarrow k \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 \circ & W_i^{1,2} & W_i^{1,3} & \circ \\
 & \circ & W_i^{2,3} & \boxed{W_i^{2,4}} \\
 & & \circ & W_i^{3,4} \\
 & & & \circ
 \end{array} \right] i = 1, \dots, n_k
 \end{array}$$

(c)

Figura 04 - TESTE ESTATÍSTICO RECURSIVO $W^{l,k}$ UNI-DIMENSIONAL com (a) nenhuma janela, (b) janela movente com $N = 3$ e $M = 0$, e (c) janela movente com $N = 3$ e $M = 1$.

Os parâmetros N e M devem ser escolhidos de modo que as informações utilizadas no cálculo de $W_i^{l,k}$ não sejam poucas e nem computacionalmente excessivas.

Ainda relacionado com a imposição, ou seja a injunção apresentada para l , o teste estatístico com $T^{l,k}$ pode ser também insensitivo para detectar erros se $l > K - M$ [24].

A escolha dos parâmetros N e M é primeiramente determinada pela medida de detectabilidade da hipótese alternativa e pela medida de discriminabilidade entre diferentes hipóteses alternativas. Mas eles também dependem do tempo admissível de atraso na detecção [23].

A detectabilidade é dada pelo escalar [23]:

$$r_{\nabla}^2 = \frac{\sigma_o^2}{C_{\nabla k}^T \Sigma_{\nabla k}^{-1} C_{\nabla k}} \quad (3.37)$$

com $\sigma_o^2 = 1$, para o Filtro de Kalman; o valor do comprimento da janela é dado pela raiz quadrada do escalar obtido com a fórmula (3.37).

A raiz quadrada do resultado da equação (3.37) representa, quando substituí o valor de σ_o por σ_w , onde σ_w é igual a estatística W , cujo valor é obtido da tabela da distribuição normal com nível de significância α , a estimativa $\hat{\nabla}1$ da magnitude do erro da observação que o teste estatístico "data snooping" é capaz de localizar, ou seja:

$$\hat{\nabla}1 = \frac{W}{(C_{\nabla k}^T \Sigma_{\nabla k}^{-1} C_{\nabla k})^{1/2}} \quad (3.38)$$

Quanto maior r_{∇}^2 , menor será a capacidade de detectar a correspondente hipótese alternativa.

A medida de discriminabilidade das hipóteses alternativas Ha_i e Ha_j , entre duas épocas é dada por [23]:

$$s_{ij} = \frac{C_{\nabla i}^T \Sigma_{\nabla k}^{-1} C_{\nabla j}}{(C_{\nabla i}^T \Sigma_{\nabla k}^{-1} C_{\nabla i})^{1/2} (C_{\nabla j}^T \Sigma_{\nabla k}^{-1} C_{\nabla j})^{1/2}} \quad (3.39)$$

O valor do parâmetro M é determinado através do coeficiente de correlação s_{ij} .

O valor de s_{ij} é igual ao coeficiente de correlação das

estimativas $\hat{\nabla}l_i$ e $\hat{\nabla}l_j$, que também é igual ao coeficiente de correlação entre as estatísticas W_i e W_j . Quanto maior s_{ij} , menor será a habilidade em separar as hipóteses alternativas.

Os testes recursivos entre épocas se reduzem aos testes de processamento em tempo real para $t_k = 1$.

3.2.3.2 Adaptação

Após a localização da hipótese alternativa mais provável, a adaptação do filtro recursivo é necessária para eliminar a influência do erro no vetor estado, porém esta correção não é possível em tempo real, e sim entre épocas. Para a correção, quando o processamento é do tipo lote, os dados do intervalo $[K-N, K]$ devem ser armazenados, e a seguinte aproximação pode ser adotada para calcular recursivamente a estimativa do erro $\hat{\nabla}^{l,k}$ para cada hipótese alternativa [24], [25]:

$$\hat{\nabla}^{l,k} = \frac{\sum_{i=l}^k C_{vi}^T \Sigma_{vi}^{-1} V_i}{\sum_{i=l}^k C_{vi}^T \Sigma_{vi}^{-1} C_{vi}} \quad (3.40)$$

Para a época t_k , na qual tenha sido identificada a hipótese correta, pode-se corrigir o vetor estado como:

$$\hat{X}_{k/k}^{corr} = \hat{X}_{k/k} - X_{k,l} \hat{\nabla}^{l,k} \quad (3.41)$$

onde $X_{k,l}$ pode ser calculado recursivamente usando a segunda

fórmula de (3.31). A matriz variância-covariância corrigida do erro é dada pela propagação de (3.39):

$$\hat{\Sigma}_{\mathbf{x}_{k/k}}^{\text{corr}} = \hat{\Sigma}_{\mathbf{x}_{k/k}} + \mathbf{X}_{k,l} \hat{\Sigma}_{\nabla,l,k} \mathbf{X}_{k,l}^T \quad (3.42)$$

com:

$$\hat{\Sigma}_{\nabla,l,k} = \left[\sum_{i=1}^k \mathbf{C}_i^T \Sigma_{\mathbf{v}_i}^{-1} \mathbf{C}_i \right]^{-1} \quad (3.43)$$

Então o estado e a matriz variância-covariância corrigidos são usados para iniciar o estado para a época t_k , neste sentido o estado pode ser imediatamente reparado para a época t_k de detecção.

4 EXPERIÊNCIAS

4.1 Introdução

Para familiarizar com a utilização do Filtro de Kalman e controle de qualidade, referente a aplicação de testes estatísticos para detecção e localização de erros grosseiros, será simulado um exemplo de um veículo em movimento, cujas observações das posições serão geradas aleatoriamente. Numa primeira abordagem do problema de estimação as observações serão consideradas isentas de erros grosseiros, objetivando mostrar o desenvolvimento do algoritmo do Filtro de Kalman.

Em uma segunda etapa serão lançados, ou seja, introduzidos artificialmente erros grosseiros nas observações, com objetivo de verificar se o teste estatístico é funcional.

Para a realização das etapas acima foram programadas as fórmulas apresentadas nos capítulos 2 e 3, referentes respectivamente, ao Filtro de Kalman para sistema linear e discreto e as dos testes estatísticos para processamento em tempo real e na forma recursiva.

4.2 Aplicação do Filtro de Kalman

4.2.1 Problema de Estimação

O problema de estimação que será apresentado foi simulado. Supor um veículo se deslocando na direção nordeste, azimute (α) de 45 graus, com velocidade de 20 km/h. Esta

velocidade é considerada constante, exceto para os efeitos de atrito, que no caso de navegação pode se citar como exemplo as rajadas de vento e ação das ondas. Deseja-se a estimativa da posição e da velocidade a cada intervalo Δt de tempo. Supondo para a época de partida (t_0) que a posição (X_0 e Y_0) e a velocidade (V_0) do veículo são conhecidas, bem como a sua MVC, sendo dadas respectivamente por:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0.00 \text{ m} \\ 0.00 \text{ m} \\ 20000 \text{ m/h} \end{bmatrix}$$

e

$$\Sigma_{X_0} = \begin{bmatrix} 10.0\text{m}^2 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 10.0\text{m}^2 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 2500\text{m}^2/\text{h}^2 \end{bmatrix}$$

Se X_k , Y_k e V_k indicam a posição e a velocidade do veículo para cada época, então deseja-se determinar a estimativa para a posição e velocidade do veículo a cada intervalo Δt de tempo.

4.2.2 Montagem do Modelo Dinâmico

A primeira tarefa é montar o modelo dinâmico. Durante a cada intervalo (Δt) o veículo desloca-se com velocidade V_{k-1} e sua posição (X_k, Y_k) mudará de acordo com as épocas, então:

$$X_k = X_{k-1} + V_{k-1} \Delta t \sin(\alpha) \quad (4.1)$$

$$Y_k = Y_{k-1} + V_{k-1} \Delta t \cos(\alpha) \quad (4.2)$$

A quantidade V_k , será igual a V_{k-1} , já que a velocidade é constante, contudo para modelar os efeitos incógnitos do atrito será adicionada uma correção (W_{vk}), tal que:

$$V_k = V_{k-1} + W_{vk} \quad (4.3)$$

As expressões (4.1), (4.2) e (4.3) dispostas em forma matricial constituem o modelo dinâmico (2.2), ou seja:

$$\begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ V_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta t \sin(\alpha) \\ 0 & 1 & \Delta t \cos(\alpha) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{k-1} \\ Y_{k-1} \\ V_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ W_{vk} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

com W_k independente de $X_0^T = [X_0, Y_0, V_0]^T$ para todas as épocas.

Supor que observações anteriores de deslocamento do veículo na região têm demonstrado que W_{vk} não tem nenhum efeito sobre a média da velocidade, mas o seu efeito sobre a velocidade pode ser descrita pela função densidade de probabilidade da distribuição normal, com variância correspondente a 05% da velocidade, ou seja, W_{vk} tem média zero e variância igual a $1000 \text{ m}^2/\text{h}^2$.

A MVC das correções ao modelo dinâmico, neste problema considerada constante para todas épocas, é dada por:

$$\Sigma_{Wk} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1000\text{m}^2/\text{h}^2 \end{bmatrix}$$

4.2.3. Montagem do Modelo de Medida

Agora supor que para cada intervalo Δt , de 05 minutos, entre as épocas $K = 1, 2, 3, \dots, 10$, sejam realizadas observações que proporcionam a posição do veículo em relação ao ponto de partida.

Antes de incorporar estas novas informações as estimativas X_k , Y_k e V_k , é necessário formular o modelo do processo de medida. A situação acima pode ser representada como:

$$X_k^b = X_k + V_{xk} \quad (4.6)$$

$$Y_k^b = Y_k + V_{yk} \quad (4.7)$$

que expresso na forma matricial constituem o modelo de medida (2.3):

$$\begin{bmatrix} X_k^b \\ Y_k^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_k \\ Y_k \\ V_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V_{xk} \\ V_{yk} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

onde X_k^b e Y_k^b são observações de cada época.

As observações relativas as diversas épocas, num total de dez neste problema de estimação, foram geradas

aleatoriamente, com desvio padrão igual a 5 metros, a partir de um programa da calculadora TEXAS TI 58. Os valores aleatórios foram gerados com base nas posições atribuídas ao veículo. As posições do veículo foram obtidas de forma seqüencial, ou seja, as coordenadas para a época seguinte foram calculadas após o processo de filtragem dos valores aleatórios da época, sendo considerado constante o deslocamento do veículo entre as épocas. O desvio padrão foi utilizado para montar a MVC.

Na tabela abaixo são apresentadas as posições atribuídas ao veículo e as geradas aleatoriamente, consideradas como observações.

TABELA 05 - OBSERVAÇÕES SIMULADAS PARA AS DIVERSAS ÉPOCAS

POSIÇÕES				
ÉPOCA	VALORES ATRIBUÍDOS		VALORES ALEATÓRIOS	
	X_k (m)	Y_k (m)	X_k^b *	Y_k^b *
1	1178,51	1178,51	1180,06	1177,44
2	2357,52	2356,77	2356,57	2363,34
3	3537,07	3537,10	3537,06	3529,75
4	4713,93	4713,95	4720,36	4709,06
5	5893,75	5891,52	5901,18	5897,60
6	7076,70	7074,29	7076,69	7080,91
7	8257,67	8256,05	8251,05	8258,35
8	9435,16	9434,48	9425,55	9434,53
9	10610,46	10610,63	10603,51	10612,18
10	11787,30	11786,76	11789,95	11789,15
* OBSERVAÇÕES COM DESVIO PADRÃO IGUAL A 5,0 metros				

4.2.4 Resolução do Problema com o Filtro de Kalman

Aplicando as fórmulas do Filtro de Kalman, apresentadas na tabela 01, obtêm-se as estimativas do vetor estado procurado para as diversas épocas. As condições iniciais são:

$$\hat{X}_{0/0} = X_0 \quad \text{e} \quad \Sigma_{\hat{X}_{0/0}} = \Sigma_{X_0}$$

Para $k = 1$, com Δt correspondendo a 05 minutos, tem-se no ciclo de propagação que a estimativa do vetor estado e a MVC predita são dadas respectivamente por:

$$\hat{X}_{1/0} = T_{1/0} \hat{X}_{0/0} = \begin{bmatrix} 1178,51 \text{ m} \\ 1178,51 \text{ m} \\ 20000,00 \text{ m/h} \end{bmatrix}$$

e

$$\Sigma_{\hat{X}_{1/0}} = T_{1/0} \Sigma_{\hat{X}_{0/0}} T_{1/0}^T + \Sigma_{\hat{W}_1} = \begin{bmatrix} 18,68\text{m}^2 & 8,68\text{m}^2 & 147,31\text{m}^2/\text{h} \\ 8,68\text{m}^2 & 18,68\text{m}^2 & 147,31\text{m}^2/\text{h} \\ 147,31\text{m}^2/\text{h} & 147,31\text{m}^2/\text{h} & 3500,00\text{m}^2/\text{h}^2 \end{bmatrix}$$

Agora incluindo o efeito das observações $L_1^b = [1180,06\text{m}, 1174,44\text{m}]^T$, obtêm-se a estimativa do vetor estado e da MVC filtrada para a primeira época:

$$\hat{X}_{1/1} = \hat{X}_{1/0} + K_1 (L_1^b - A_1 \hat{X}_{1/0}) = \begin{bmatrix} 1178,01 \text{ m} \\ 1178,26 \text{ m} \\ 20001,34 \text{ m/h} \end{bmatrix}$$

e

$$\hat{\Sigma}_{\hat{X}_{1/1}} = (I - K_1 A_1) \hat{\Sigma}_{\hat{X}_{0/0}} = \begin{bmatrix} 10,10\text{m}^2 & 2,96\text{m}^2 & 70,34\text{m}^2/\text{h} \\ 2,96\text{m}^2 & 10,10\text{m}^2 & 70,34\text{m}^2/\text{h} \\ 70,34\text{m}^2/\text{h} & 70,34\text{m}^2/\text{h} & 2671,09\text{m}^2/\text{h}^2 \end{bmatrix}$$

com:

$$K_1 = \hat{\Sigma}_{\hat{X}_{1/0}} A_1^T (A_1 \hat{\Sigma}_{\hat{X}_{1/0}} A_1^T + \Sigma_{L_1}^b)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,404 & 0,118 \\ 0,118 & 0,404 \\ 2,813 & 2,813 \end{bmatrix}$$

Para a segunda época, $k=2$, com o mesmo intervalo de tempo, a atualização pela época nos fornece as seguintes estimativas para o vetor estado e MVC predita:

$$\hat{X}_{2/1} = T_{2/1} \hat{X}_{1/1} = \begin{bmatrix} 2357,60\text{m} \\ 2356,85\text{m} \\ 20001,34\text{m}/\text{h} \end{bmatrix}$$

com: $T_{2/1} = T_{1/0}$, e

$$\hat{\Sigma}_{\hat{X}_{2/1}} = T_{2/1} \hat{\Sigma}_{\hat{X}_{1/1}} T_{2/1}^T + \Sigma_{W_2}^b = \begin{bmatrix} 27,67\text{m}^2 & 20,52\text{m}^2 & 227,73\text{m}^2/\text{h} \\ 20,52\text{m}^2 & 27,67\text{m}^2 & 227,73\text{m}^2/\text{h} \\ 227,73\text{m}^2/\text{h} & 227,73\text{m}^2/\text{h} & 3671,09\text{m}^2/\text{h}^2 \end{bmatrix}$$

Então incluindo as observações $L_2^b = [2356,57\text{m}, 2363,34\text{m}]^T$, obtém-se a estimativa do vetor estado e da MVC filtrada para a segunda época:

$$\hat{X}_{2/2} = \hat{X}_{2/1} + K_2 (L_2^b - A_2 \hat{X}_{2/1}) = \begin{bmatrix} 2358,56 \text{ m} \\ 2359,48 \text{ m} \\ 20018,32 \text{ m}/\text{h} \end{bmatrix}$$

e

$$\hat{\Sigma}_{\hat{X}_{2/2}} = (I - K_2 A_2) \hat{\Sigma}_{\hat{X}_{2/1}} = \begin{bmatrix} 11,01\text{m}^2 & 5,45\text{m}^2 & 77,79\text{m}^2/\text{h} \\ 5,45\text{m}^2 & 11,01\text{m}^2 & 77,79\text{m}^2/\text{h} \\ 77,79\text{m}^2/\text{h} & 77,79\text{m}^2/\text{h} & 2253,94\text{m}^2/\text{h}^2 \end{bmatrix}$$

com:

$$K_2 = \hat{\Sigma}_{\hat{X}_{2/1}} A_2^T (A_2 \hat{\Sigma}_{\hat{X}_{2/1}} A_2^T + \Sigma_{L_2}^b)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,440 & 0,218 \\ 0,218 & 0,440 \\ 3,112 & 3,112 \end{bmatrix}$$

Os cálculos assim processados sucessivamente nos levam até a época 10 do problema, resultando para a estimativa do vetor estado, que fornece as posições e velocidade do veículo, e para a sua MVC os seguintes valores:

$$\hat{X}_{10/10} = \begin{bmatrix} 11788,45 \text{ m} \\ 11787,89 \text{ m} \\ 19996,89 \text{ m/h} \end{bmatrix}$$

e

$$\hat{\Sigma}_{\hat{X}_{10/10}} = \begin{bmatrix} 9,11\text{m}^2 & 7,11\text{m}^2 & 66,21\text{m}^2/\text{h} \\ 7,11\text{m}^2 & 9,11\text{m}^2 & 66,21\text{m}^2/\text{h} \\ 66,21\text{m}^2/\text{h} & 66,21\text{m}^2/\text{h} & 2080,24\text{m}^2/\text{h}^2 \end{bmatrix}$$

4.3 CONTROLE DE QUALIDADE

Agora considerando o problema anterior, serão introduzidos erros grosseiros artificialmente em algumas das observações das distintas épocas, com a finalidade de aplicar os testes estatísticos de detecção e localização.

Os testes a serem apresentados serão realizados com o nível de significância (α) de 10% e 05% para detecção. Uma vez que em cada época têm-se duas observações, obtém-se através da fórmula (3.12) que os erros grosseiros serão localizados com nível de significância (α_0) de 2,5% e 1,25%, respectivamente.

Com a expressão (3.38), pode-se calcular a estimativa do erro mínimo capaz de ser localizado no problema simulado, que representa a confiabilidade interna.

Então com os valores da estatística W para o teste de localização, obtidos da tabela de distribuição normal, dados respectivamente por 2,24 e 2,50, para o nível de significância (α_0) 2,5% e 1,25%, juntamente com o valor mínimo de 0,022 obtido para o denominador da equação (3.38), a partir do problema simulado e resolvido na seção (4.2.3), obtém-se que:

$$\hat{V}_1 = 3,02 \sigma$$

para $\alpha_0 = 2,5\%$ e

$$\hat{V}_1 = 3,37 \sigma$$

para $\alpha_0 = 1,25\%$, com σ igual a 5 metros.

4.3.1 Teste Estatístico para Processamento em Tempo Real

Visando aplicar a metodologia estudada neste trabalho para teste estatístico para processamento em tempo real, foram adicionados artificialmente erros nas observações das distintas épocas. Numa primeira experiência foram introduzidos os erros mínimos calculados em somente um dos valores atribuídos para as posições das distintas épocas, gerando assim 40 testes individuais para cada nível de significância.

E na outra foram geradas dez situações diferentes, com 2 ou 3 observações em que foram introduzidos artificialmente os erros mínimos calculados, onde as cinco primeiras foram realizadas com o nível de significância (α) para detecção igual a 10% e as demais com $\alpha = 5\%$.

As estatísticas T para o teste de detecção e W_1 e W_2 para a localização são calculadas, respectivamente, com as equações (3.18) e (3.21) e comparadas através dos testes (3.20) e (3.24) com os valores obtidos na tabela da distribuição qui-quadrado e distribuição normal, dados respectivamente por $T = \chi_{0,10,2}^2 = 4,61$ e $W = N_{0,025} = \pm 2,24$ para nível de significância (α) igual a 10% e $T = \chi_{0,05,2}^2 = 5,99$ e $W = N_{0,025} = \pm 2,50$ para $\alpha = 5\%$.

Dos testes realizados na primeira experiência, com os dois níveis de significância, resultou que 81,25 % dos erros mínimos introduzidos artificialmente foram detectados em tempo real e destes, 65% foram localizados. Das observações não localizadas, 15% dos erros introduzidos interferiram nas épocas posteriores, detectando erro onde não existia, sendo que metade desta porcentagem localizou a observação em que não continha erro.

Na segunda experiência cujas situações e resultados obtidos são apresentados nas tabelas 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13, 14 e 15, onde as estatísticas T , W_1 e W_2 calculadas são apresentadas nas colunas 04, 06 e 07 e os valores críticos correspondentes no rodapé da tabela, conforme segue:

TABELA 06 - RESULTADOS OBTIDOS PARA TESTE EM TEMPO REAL -
SITUAÇÃO 01

SITUAÇÃO 01 - TESTE EM TEMPO REAL										
ÉPOCA	ERRO EM		ESTATÍSTICA T_k	DETECÇÃO SIM/NÃO	ESTATÍSTICA		LOCALIZAÇÃO SIM/NÃO	ADAPTAÇÃO		
	X_k	Y_k			W_{k1}	W_{k2}		T_k	W_{k1}	W_{k2}
1			0,10		0,27	-0,21				
2	+3,02		4,29	NÃO	1,87	0,10	NÃO			
3			5,14	SIM	-0,67	-1,68				
4		-3,02	7,09	SIM	1,45	-2,64	SIM	0,14	0,37	----
5	+3,02		10,54	SIM	-3,22	2,03	SIM	0,20	----	0,45
6			1,03		-0,77	0,98				
7			1,97		-1,39	0,77				
8			2,44		-1,56	0,73				
9			1,38		0,88	-1,10				
10			0,52		0,37	0,37				

DETECÇÃO (unilateral): $\alpha = 10\%$, $g1 = n_k = 2 \Rightarrow T = 4,61$ (TABELA QUI-QUADRADO)
 LOCALIZAÇÃO: $\alpha_D = \alpha / 2n_k = 2,5\% \Rightarrow W = \pm 2,24$ (TABELA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO)
 ADAPTAÇÃO: OS VALORES OBSERVADOS COM ERROS SÃO RETIRADOS ANTES DO CÁLCULO DO VETOR ESTADO E DA MVC FILTRADA.

TABELA 07 - RESULTADOS OBTIDOS PARA TESTE EM TEMPO REAL -
SITUAÇÃO 02

SITUAÇÃO 02 - TESTE EM TEMPO REAL										
ÉPOCA	ERRO EM		ESTATÍSTICA T_k	DETECÇÃO SIM/NÃO	ESTATÍSTICA		LOCALIZAÇÃO SIM/NÃO	ADAPTAÇÃO		
	X_k	Y_k			W_{k1}	W_{k2}		T_k	W_{k1}	W_{k2}
1			0,10		0,27	-0,21				
2			1,08		-0,53	1,03				
3		+3,02	4,27	NÃO	-1,01	2,06	NÃO			
4	+3,02		10,06	SIM	2,11	-3,04	SIM	0,85	0,92	----
5			3,18		-0,12	-1,47				
6			0,42		-0,60	0,05				
7	+3,02		5,97	SIM	2,44	-1,18	SIM	0,02	----	-0,14
8			1,82		-1,30	0,37				
9			2,33		1,27	-1,33				
10			0,89		0,74	0,20				

DETECÇÃO (unilateral): $\alpha = 10\%$, $g1 = n_k = 2 \Rightarrow T = 4,61$ (TABELA QUI-QUADRADO)
 LOCALIZAÇÃO: $\alpha_D = \alpha / 2n_k = 2,5\% \Rightarrow W = \pm 2,24$ (TABELA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO)
 ADAPTAÇÃO: OS VALORES OBSERVADOS COM ERROS SÃO RETIRADOS ANTES DO CÁLCULO DO VETOR ESTADO E DA MVC FILTRADA.

TABELA 08 - RESULTADOS OBTIDOS PARA TESTE EM TEMPO REAL -
SITUAÇÃO 03

SITUAÇÃO 03 - TESTE EM TEMPO REAL										
ÉPOCA	ERRO EM		ESTATÍSTICA T_k	DETECCÃO SIM/NÃO	ESTATÍSTICA		LOCALIZAÇÃO SIM/NÃO	ADAPTAÇÃO		
	X_k	Y_k			W_{k1}	W_{k2}		T_k	W_{k1}	W_{k2}
1			0,10		0,27	-0,21				
2			1,08		-0,53	1,03				
3	-3,02		5,08	SIM	-1,86	-0,37	NÃO			
4			5,41	SIM	2,30	-0,65	SIM	0,12	----	0,35
5			6,60	SIM	1,80	0,64				
6		-3,02	7,59	SIM	1,32	-2,75	SIM	0,02	0,13	----
7			1,09		-1,04	0,57				
8		-3,02	5,94	SIM	0,37	-1,99	NÃO			
9			1,97		1,40	-0,61				
10			0,88		0,50	0,48				

DETECCÃO (unilateral): $\alpha=10\%$, $g1=n_k=2 \Rightarrow T = 4,61$ (TABELA QUI-QUADRADO)
 LOCALIZAÇÃO: $\alpha_0 = \alpha/2n_k = 2,5\% \Rightarrow W = \pm 2,24$ (TABELA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO)
 ADAPTAÇÃO: OS VALORES OBSERVADOS COM ERROS SÃO RETIRADOS ANTES DO CÁLCULO DO VETOR ESTADO E DA MVC FILTRADA.

TABELA 09 - RESULTADOS OBTIDOS PARA TESTE EM TEMPO REAL -
SITUAÇÃO 04

SITUAÇÃO 04 - TESTE EM TEMPO REAL										
ÉPOCA	ERRO EM		ESTATÍSTICA T_k	DETECCÃO SIM/NÃO	ESTATÍSTICA		LOCALIZAÇÃO SIM/NÃO	ADAPTAÇÃO		
	X_k	Y_k			W_{k1}	W_{k2}		T_k	W_{k1}	W_{k2}
1			0,10		0,27	-0,21				
2			1,08		-0,53	1,03				
3			1,83		0,43	-1,34				
4			2,03		1,33	-1,02				
5			1,35		0,77	0,46				
6			0,82		-0,63	0,86				
7	+3,02		4,40	NÃO	2,01	-0,89	NÃO			
8	-3,02		15,58	SIM	-3,67	0,31	SIM	2,12	----	-1,46
9	-3,02		13,50	SIM	-2,92	-0,34	SIM	4,95	----	-2,23
10			0,16		-0,33	0,37				

DETECCÃO (unilateral): $\alpha=10\%$, $g1=n_k=2 \Rightarrow T = 4,61$ (TABELA QUI-QUADRADO)
 LOCALIZAÇÃO: $\alpha_0 = \alpha/2n_k = 2,5\% \Rightarrow W = \pm 2,24$ (TABELA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO)
 ADAPTAÇÃO: OS VALORES OBSERVADOS COM ERROS SÃO RETIRADOS ANTES DO CÁLCULO DO VETOR ESTADO E DA MVC FILTRADA.

TABELA 10 - RESULTADOS OBTIDOS PARA TESTE EM TEMPO REAL -
SITUAÇÃO 05

SITUAÇÃO 05 - TESTE EM TEMPO REAL										
ÉPOCA	ERRO EM		ESTATÍSTICA T_k	DETECÇÃO SIM/NÃO	ESTATÍSTICA		LOCALIZAÇÃO SIM/NÃO	ADAPTAÇÃO		
	X_k	Y_k			W_{k1}	W_{k2}		T_k	W_{k1}	W_{k2}
1		+3,02	5,27	SIM	-0,22	2,28	SIM	0,05	0,23	----
2			0,81		-0,56	0,88				
3	+3,02		9,36	SIM	2,74	-2,40	SIM	1,18	----	-1,37
4			2,29		1,47	-1,04				
5			1,33		0,76	0,47				
6			0,83		-0,63	0,86				
7			1,98		-1,41	0,60				
8	+3,02		5,34	SIM	2,31	-1,13	SIM	0,02	----	-0,14
9			2,26		0,47	-1,46				
10			0,19		0,18	0,27				

DETECÇÃO (unilateral): $\alpha=10\%$, $gl=n_k=2 \Rightarrow T = 4,61$ (TABELA QUI-QUADRADO)
 LOCALIZAÇÃO: $\alpha_0 = \alpha/2n_k = 2,5\% \Rightarrow W = \pm 2,24$ (TABELA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO)
 ADAPTAÇÃO: OS VALORES OBSERVADOS COM ERROS SÃO RETIRADOS ANTES DO CÁLCULO DO VETOR ESTADO E DA MVC FILTRADA.

TABELA 11 - RESULTADOS OBTIDOS PARA TESTE EM TEMPO REAL -
SITUAÇÃO 06

SITUAÇÃO 06 - TESTE EM TEMPO REAL										
ÉPOCA	ERRO EM		ESTATÍSTICA T_k	DETECÇÃO SIM/NÃO	ESTATÍSTICA		LOCALIZAÇÃO SIM/NÃO	ADAPTAÇÃO		
	X_k	Y_k			W_{k1}	W_{k2}		T_k	W_{k1}	W_{k2}
1			0,10		0,27	-0,21				
2			1,08		-0,53	1,03				
3			1,83		0,43	-1,34				
4			2,03		1,33	-1,02				
5		-3,37	10,82	SIM	2,28	-3,11	SIM	1,13	1,06	----
6			0,99		-0,60	0,99				
7			2,01		-1,42	0,65				
8			2,66		-1,63	0,60				
9			1,52		0,84	-1,18				
10	+3,37		7,12	SIM	2,61	-0,68	SIM	0,29	----	0,54

DETECÇÃO (unilateral): $\alpha=05\%$, $gl=n_k=2 \Rightarrow T = 5,99$ (TABELA QUI-QUADRADO)
 LOCALIZAÇÃO: $\alpha_0 = \alpha/2n_k = 1,25\% \Rightarrow W = \pm 2,50$ (TABELA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO)
 ADAPTAÇÃO: OS VALORES OBSERVADOS COM ERROS SÃO RETIRADOS ANTES DO CÁLCULO DO VETOR ESTADO E DA MVC FILTRADA.

TABELA 12 - RESULTADOS OBTIDOS PARA TESTE EM TEMPO REAL -
SITUAÇÃO 07

SITUAÇÃO 07 - TESTE EM TEMPO REAL										
ÉPOCA	ERRO EM		ESTATÍSTICA T_k	DETECÇÃO SIM/NÃO	ESTATÍSTICA		LOCALIZAÇÃO SIM/NÃO	ADAPTAÇÃO		
	X_k	Y_k			W_{k1}	W_{k2}		T_k	W_{k1}	W_{k2}
1			0,10		0,27	-0,21				
2	+3,37		5,34	NÃO	2,13	-0,01	NÃO			
3			5,74		-0,79	-1,71				
4			1,02		0,68	-0,96				
5			1,21		0,43	0,74				
6		-3,37	6,17	SIM	0,74	-2,46	NÃO			
7			4,96		-0,89	2,22				
8			3,57		-1,69	1,50				
9			0,50		0,46	-0,68				
10			0,45		-0,12	0,64				

DETECÇÃO (unilateral): $\alpha=05\%$, $g1=n_k=2 \Rightarrow T = 5,99$ (TABELA QUI-QUADRADO)
 LOCALIZAÇÃO: $\alpha_0 = \alpha/2n_k = 1,25\% \Rightarrow W = \pm 2,50$ (TABELA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO)
 ADAPTAÇÃO: OS VALORES OBSERVADOS COM ERROS SÃO RETIRADOS ANTES DO CÁLCULO DO VETOR ESTADO E DA MVC FILTRADA.

TABELA 13 - RESULTADOS OBTIDOS PARA TESTE EM TEMPO REAL -
SITUAÇÃO 08

SITUAÇÃO 08 - TESTE EM TEMPO REAL										
ÉPOCA	ERRO EM		ESTATÍSTICA T_k	DETECÇÃO SIM/NÃO	ESTATÍSTICA		LOCALIZAÇÃO SIM/NÃO	ADAPTAÇÃO		
	X_k	Y_k			W_{k1}	W_{k2}		T_k	W_{k1}	W_{k2}
1			0,10		0,27	-0,21				
2			1,08		-0,53	1,03				
3			1,83		0,43	-1,34				
4			2,03		1,33	-1,02				
5	+3,37		5,76	NÃO	2,24	-0,16	NÃO			
6			1,39		-1,18	0,60				
7		+3,37	10,85	SIM	-2,69	2,88	SIM	2,55	-1,60	----
8			2,64		-1,62	1,00				
9			1,04		0,81	-0,92				
10	-3,37		8,49	SIM	-2,82	1,90	SIM	0,51	----	0,71

DETECÇÃO (unilateral): $\alpha=05\%$, $g1=n_k=2 \Rightarrow T = 5,99$ (TABELA QUI-QUADRADO)
 LOCALIZAÇÃO: $\alpha_0 = \alpha/2n_k = 1,25\% \Rightarrow W = \pm 2,50$ (TABELA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO)
 ADAPTAÇÃO: OS VALORES OBSERVADOS COM ERROS SÃO RETIRADOS ANTES DO CÁLCULO DO VETOR ESTADO E DA MVC FILTRADA.

TABELA 14 - RESULTADOS OBTIDOS PARA TESTE EM TEMPO REAL -
SITUAÇÃO 09

SITUAÇÃO 09 - TESTE EM TEMPO REAL										
ÉPOCA	ERRO EM		ESTATÍSTICA T_k	DETECÇÃO SIM/NÃO	ESTATÍSTICA		LOCALIZAÇÃO SIM/NÃO	ADAPTAÇÃO		
	X_k	Y_k			W_{k1}	W_{k2}		T_k	W_{k1}	W_{k2}
1			0,10		0,27	-0,21				
2			1,08		-0,53	1,03				
3			1,83		0,43	-1,34				
4	+3,37		8,88	SIM	2,94	-1,70	SIM	0,26	----	-0,51
5	+3,37		7,52	SIM	2,42	-0,14	NÃO			
6		+3,37	8,11	SIM	-2,05	2,68	SIM	0,96	-0,98	----
7			2,37		-1,54	0,88				
8			2,89		-1,70	0,80				
9			1,16		0,75	-1,02				
10			0,48		0,26	0,46				

DETECÇÃO (unilateral): $\alpha = 05\%$, $gl = n_k = 2 \Rightarrow T = 5,99$ (TABELA QUI-QUADRADO)
 LOCALIZAÇÃO: $\alpha_D = \alpha / 2n_k = 1,25\% \Rightarrow W = \pm 2,50$ (TABELA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO)
 ADAPTAÇÃO: OS VALORES OBSERVADOS COM ERROS SÃO RETIRADOS ANTES DO CÁLCULO DO VETOR ESTADO E DA MVC FILTRADA.

TABELA 15 - RESULTADOS OBTIDOS PARA TESTE EM TEMPO REAL -
SITUAÇÃO 10

SITUAÇÃO 10 - TESTE EM TEMPO REAL										
ÉPOCA	ERRO EM		ESTATÍSTICA T_k	DETECÇÃO SIM/NÃO	ESTATÍSTICA		LOCALIZAÇÃO SIM/NÃO	ADAPTAÇÃO		
	X_k	Y_k			W_{k1}	W_{k2}		T_k	W_{k1}	W_{k2}
1			0,10		0,27	-0,21				
2		+3,37	6,62	SIM	-1,13	2,57	SIM	0,02	----	-0,14
3			0,74		0,61	-0,83				
4			1,72		1,30	-0,72				
5			1,39		0,64	0,63				
6			1,08		-0,79	0,95				
7			2,42		-1,56	0,67				
8	+3,37		6,05	SIM	2,46	-1,18	NÃO			
9		-3,37	15,15	SIM	0,02	-3,50	SIM	2,93	-1,71	----
10			1,06		-0,70	-0,26				

DETECÇÃO (unilateral): $\alpha = 05\%$, $gl = n_k = 2 \Rightarrow T = 5,99$ (TABELA QUI-QUADRADO)
 LOCALIZAÇÃO: $\alpha_D = \alpha / 2n_k = 1,25\% \Rightarrow W = \pm 2,50$ (TABELA DISTRIBUIÇÃO NORMAL PADRÃO)
 ADAPTAÇÃO: OS VALORES OBSERVADOS COM ERROS SÃO RETIRADOS ANTES DO CÁLCULO DO VETOR ESTADO E DA MVC FILTRADA.

Analisando as tabelas acima, pôde-se verificar que 78,57% dos erros mínimos introduzidos nas observações foram detectados e destes 60,71% localizados. Nestes testes ocorreu uma localização errada da observação e uma detecção e localização numa época isenta de erro.

A adaptação para este tipo de teste é fácil de ser realizada, basta não considerar no cálculo do vetor estado e MVC filtrada a observação que contém erro, obtendo assim um resultado isento das influências do erro.

4.3.2 Teste Estatístico na Forma Recursiva

Os dados utilizados para os testes em tempo real serão também empregados para os testes na forma recursiva, com a finalidade de detectar e localizar as observações em que foram introduzidos os erros.

As estatísticas $T^{l,k}$ e $W_i^{l,k}$, para $i=2$, utilizadas neste teste foram calculadas com as fórmulas (3.27) e (3.32) e apresentadas, respectivamente, na forma matricial. Os valores críticos para detecção são constante para a época corrente, e variáveis entre as épocas, pois os graus de liberdade dependem da quantidade de observações envolvidas no cálculo, já para o teste de localização o valor para a estatística W é constante.

Para o teste realizado na forma recursiva, onde as estatísticas para comparação com os valores críticos são apresentadas sob a forma matricial, todos os dados envolvidos no algoritmo têm que ser armazenados. Então para reduzir o número de cálculos e atraso no tempo de testes, com as

fórmulas (3.37) e (3.39), obteve-se respectivamente, os valores para os parâmetros N e M, utilizando dados do problema simulado. Para o parâmetro N resultou um valor médio de 6,4 e para M o valor médio de 0,4, o que nos conduz a adotar $N = 7$ e $M = 0$.

Nos testes em que foram introduzidos erros em somente uma observação, detectou-se 98,75%, sendo localizados 92,5% dos erros.

Nos testes em que foram adicionados os erros mínimos em mais de uma observação das distintas épocas, para as mesmas situações apresentadas para o teste em tempo real, considerando os mesmos níveis de significância, todos os erros introduzidos artificialmente foram detectados e 96,43% localizados. Dos dez testes realizados será apresentada somente uma tabela, devido a extensão da mesma, onde são apresentados no fim da tabela os valores críticos. Na tabela abaixo apresentaremos o resultado obtido com a situação 01.

Tabela 16 - RESULTADOS OBTIDOS PARA A SITUAÇÃO 01 - TESTE ESTADÍSTICO NA FORMA RECURSIVA, COM N=7 E M=0

SITUAÇÃO 01 - TESTE RECURSIVO	
ÉPOCA 1	
ESTATÍSTICA :	
$T^{1,1}$:	$W^{1,1}$, para $i = 1,2$
$[0,10]$	$[-0,21]$ $[0,27]$
ÉPOCA 2	
ESTATÍSTICA :	
$T^{l,2}$, para $l = 1,2$	$W_i^{l,2}$, para $i = 1,2$ $l = 1,2$
$\begin{bmatrix} 0,10 & 4,39 \\ & 4,29 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,21 & -0,69 \\ 0,27 & -0,70 \end{bmatrix}$ $0,10$ $1,87$
ÉPOCA 3	
ESTATÍSTICA :	
$T^{l,3}$, para $l = 1,3$	$W_i^{l,3}$, para $i = 1,2$ $l = 1,3$
$\begin{bmatrix} 0,10 & 4,39 & 9,58 \\ & 4,29 & 9,43^* \\ & & 5,14 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,21 & -0,69 & -0,25 \\ 0,27 & -0,70 & -0,45 \\ & 1,87 & 2,56^{**} \\ & & -1,68 \end{bmatrix}$ $1,29$ $-1,68$
* DETECTOU ERRO NA ÉPOCA : 2 $T^{2,3} = 9,43 > T = 7,78$	
** LOCALIZOU OBSERVAÇÃO : X $W_1^{2,3} = 2,56 > W = 2,50$	
ADAPTAÇÃO: É retirada a influência que a observação com erro produz na estimativa do vetor estado e na MVC	
$\begin{bmatrix} 0,10 & 0,90 & 2,96 \\ & 0,80 & 2,86 \\ & & 2,06 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0,21 & -0,60 & -0,24 \\ 0,27 & -0,27 & -0,42 \\ & . & . \\ & & 0,98 \end{bmatrix}$ $1,45$ $-1,98$

Continua ...

ÉPOCA 4

ESTATÍSTICA :

 $T^{l,4}$, para $l = 1,4$ W_i , para $i = 1,2$
 $l = 1,4$

$$\begin{bmatrix} 0,10 & 0,90 & 2,96 & 11,00 \\ & 0,80 & 2,86 & 10,90 \\ & & 2,06 & 10,10 \\ & & & 8,04^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,21 & -0,60 & -0,24 & 0,06 \\ 0,27 & 0,27 & 0,42 & 0,19 \\ . & . & . & . \\ & & 0,98 & 0,18 \\ & & & 1,97 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,89 \\ 0,52 \\ -2,68^{**} \end{bmatrix}$$

* DETECTOU ERRO NA ÉPOCA : 4 $T^{4,4} = 8,04 > T = 4,61$ ** LOCALIZOU OBSERVAÇÃO : Y $W_2^{4,4} = -2,68 > W = -2,50$

ADAPTAÇÃO : A observação Y não é considerada no cálculo do vetor estado e da MVC filtrada.

$$\begin{bmatrix} 0,10 & 0,90 & 2,96 & 9,80 \\ & 0,80 & 2,86 & 9,70 \\ & & 2,06 & 2,90 \\ & & & 0,84 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,21 & -0,60 & -0,24 & -0,24 \\ 0,27 & 0,27 & 0,42 & 0,22 \\ . & . & . & . \\ & & 0,98 & -0,20 \\ & & & 0,92 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,45 \\ -1,98 \\ . \end{bmatrix}$$

ÉPOCA 5

ESTATÍSTICA :

 $T^{l,5}$, para $l = 1,5$

$$\begin{bmatrix} 0,10 & 0,90 & 2,96 & 9,80 & 12,56 \\ & 0,80 & 2,86 & 9,70 & 12,46 \\ & & 2,06 & 2,90 & 11,66 \\ & & & 0,84 & 9,60 \\ & & & & 8,76^* \end{bmatrix}$$

Continua ...

$w_i^{l,5}$, para $i = 1, 2$
 $l = 1, 5$

$$\begin{bmatrix} -0,21 & -0,60 & -0,24 & -0,24 & -0,70 \\ 0,27 & 0,27 & 0,42 & 0,22 & 0,44 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0,38 & -0,20 & 0,46 \\ . & . & . & 0,92 & 1,74 \\ . & . & . & . & -2,94^{**} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,92 \\ -0,98 \\ . \\ 1,78 \\ . \end{bmatrix}$$

* DETECTOU ERRO NA ÉPOCA: 5 $T^{4,4} = 8,76 > T = 4,61$

** LOCALIZOU OBSERVAÇÃO : X $V_2^{4,4} = -2,94 > V = -2,50$

ADAPTAÇÃO : A observação X não é considerada no cálculo de vetor estado e da MVC filtrada

$$\begin{bmatrix} 0,10 & 0,90 & 2,96 & 3,80 & 3,91 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0,80 & 2,86 & 3,70 & 3,81 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & 2,06 & 2,90 & 3,01 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0,84 & 0,95 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & 0,11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -0,21 & -0,60 & -0,24 & -0,24 & -0,25 \\ 0,27 & 0,27 & 0,42 & 0,22 & 0,22 \\ . & . & . & . & . \\ . & . & 0,38 & -0,20 & -0,20 \\ . & . & . & 0,92 & 0,92 \\ . & . & . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,95 \\ -1,98 \\ . \\ 0,93 \\ . \end{bmatrix}$$

Continua ...

ÉPOCA 6

ESTADÍSTICA :

 $T^{l,6}$, para $l = 1,6$

0,10	0,90	2,96	3,80	3,91	4,49
	0,80	2,96	3,70	3,81	4,39
		2,06	2,90	3,01	3,59
			0,84	0,95	1,53
				0,11	0,68
					0,58

 $W_i^{l,8}$, para $i = 1,2$ e $l = 1,6$

						-2,21	-0,60	-0,24	-0,24	-0,25	-0,26
0,27	0,27	0,42	0,22	0,22	0,33	1,30					
.	-1,45					
		0,38	-0,20	-0,20	-0,16	.					
			0,92	0,92	0,64	-0,00					
				.	.	0,75					
						-0,51					

ÉPOCA 7

ESTADÍSTICA :

 $T^{l,7}$, para $l = 1,7$

0,10	0,90	2,96	3,80	3,91	4,49	6,00
	0,80	2,86	3,70	3,81	4,39	5,90
		2,06	2,90	3,01	3,59	5,10
			0,84	0,95	1,53	3,04
				0,11	0,68	2,19
					0,58	2,09
						1,51

Continua ...

$$W_i^{l,7}, \text{ para } i = 1,2 \text{ e } l = 1,7$$

	-0,21	-0,60	-0,24	-0,24	-0,25	-0,26	-0,22	
0,27	0,27	0,42	0,22	0,22	0,33	0,40		1,18
		-1,59
		0,38	-0,20	-0,20	-0,16	-0,17		.
			0,92	0,92	0,64	0,82		0,02
				.	.	.		0,87
					-0,51	0,02		0,52
								-1,29

ÉPOCA 08

ESTATÍSTICA :

$$T_8^{l,8}, \text{ para } l = 2,8$$

0,10	0,90	2,96	3,80	3,91	4,49	6,00	.
	0,80	2,86	3,70	3,81	4,39	5,90	7,94
		2,06	2,90	3,01	3,59	5,10	7,14
			0,84	0,95	1,53	3,04	5,08
				0,11	0,68	2,19	4,23
					0,58	2,09	4,13
						1,51	3,55
							2,04

$$W_i^{l,8}, \text{ para } i = 1,2 \text{ e } l = 2,8$$

	-0,21	-0,60	-0,24	-0,24	-0,25	-0,26	-0,22	.
0,27	0,27	0,42	0,22	0,22	0,33	0,40	.	1,15
	-1,73
		0,38	-0,20	-0,20	-0,16	-0,17	-0,16	.
			0,92	0,92	0,64	0,82	0,73	-0,18
				0,90
					-0,51	0,02	0,28	0,76
						-1,23	-0,57	0,49
								-1,42

Continua ...

ÉPOCA 10

ESTATÍSTICA :

 $T^{l,10}$, para $l = 4,10$

0,10	0,90	2,96	9,80	9,91	4,49	6,00	.	.	.
	0,80	2,86	9,70	9,81	4,39	5,90	7,94	.	.
		2,06	2,90	9,01	9,59	5,10	7,14	9,06	.
			0,84	0,95	1,59	9,04	5,08	7,00	7,49
				0,11	0,68	2,19	4,23	6,15	6,64
					0,58	2,09	4,13	6,05	6,54
						1,51	9,55	5,47	5,96
							2,04	9,96	4,45
								1,92	2,41
									0,49

 $W_i^{l,10}$, para $i = 1,2$ e $l = 4,10$

	-0,21	-0,60	-0,24	-0,24	-0,25	-0,26	-0,22	.	.	.
0,27	0,27	0,42	0,22	0,22	0,99	0,40

		0,98	-0,20	-0,20	-0,16	-0,17	-0,16	-0,29	.	.
			0,92	0,92	0,64	0,82	0,79	0,65	0,58	-0,19
				1,05
					-0,51	0,02	0,28	0,12	0,19	0,96
						-1,29	-0,57	-0,64	-0,58	0,56
							-1,42	-1,26	-1,36	-1,45
								1,01	0,58	0,22
										0,50

DETECÇÃO : $\alpha = 10\%$ (tabela Qui-quadrado)

gl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	14
T	3,84	5,99	7,61	9,49	11,1	12,6	14,1	15,5	16,9	18,9	29,7

LOCALIZAÇÃO: $\alpha_0 = 2,5\% \Rightarrow W = \pm 2,24$ (tab. dist. normal padrão)

A adaptação nos testes apresentados sob a forma recursiva é feita retirando a influência do erro no valor da estimativa do vetor estado e da MVC, empregando respectivamente as fórmulas (3.41) e (3.43) obtém-se as estimativas corrigidas.

5 COMENTÁRIOS, CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.

5.1 Comentários

Nesta pesquisa, apresenta-se uma revisão sobre Filtro de Kalman, onde as equações foram derivadas a partir do MMQ e controle de qualidade, referente aos testes estatísticos aplicados na técnica de filtragem recursiva com fins de detectar, localizar observações com variações não randômicas e em seguida a adaptação, ou seja a retirada da observação com erro ou de sua influência nos resultados.

O teste de detecção, tem um significado especial, já que examina simultaneamente a compatibilidade das observações com o modelo funcional e estocástico. O teste de localização de observação com erro é feito através do resíduo padronizado, aplicando a técnica "data snooping". E a adaptação é realizada com objetivo de apresentar os resultados e sua interpretação livre da influência dos erros.

As conclusões e recomendações referentes aos testes estatísticos não serão baseadas nos experimentos realizados, onde focalizou-se a atenção na detecção, localização dos erros introduzidos nas médias das observações, e na adaptação, pois os mesmos objetivam mostrar o funcionamento dos testes apresentados. Vale lembrar ainda que todos os testes estatísticos são em função da sequência de inovação e que os resultados servem para ajudar a tomar uma decisão.

5.2 Conclusões

O Filtro de Kalman, é um método de estimação não amplamente difundido nas Ciências Geodésicas. É um algoritmo recursivo, pois não há necessidade de armazenar todas as informações recebidas, é muito empregado para processamento em tempo real, e de fácil programação.

Focalizando a atenção nos algoritmos dos testes estatísticos apresentados no trabalho, conclui-se que o teste para processamento em tempo real, também conhecido como teste local, é muito facilmente executado. Porém, geralmente devido a falta de redundância local e ao fato da MVC dos resíduos preditos não apresentar diagonal dominante, isto ocorre quando os resíduos são correlacionados, é grande probabilidade de que vários erros passem despercebidos, como pôde-se verificar nos testes realizados.

No teste estatístico global, apresentado na forma recursiva pôde-se diagnosticar erros não detectados no teste local, porém a propriedade de recursividade do filtro é perdida e uma ação em tempo real não pode ser realizada quando um erro é detectado. Sua implementação deve ser considerada especialmente nas situações onde a detectabilidade com os testes em tempo real é pobre. Como no caso do exemplo apresentado, devido a falta de redundância local e a MVC não apresentar diagonal dominante.

Que além da pesquisa é necessária a aplicação destes testes em problemas de GPS, navegação, Fotogrametria, Geodésia Física e demais áreas das Ciências Geodésicas.

5.3 Recomendações

Do exposto acima, tendo em vista os comentários e conclusões apresentados, recomenda-se utilizar o Filtro de Kalman para os problemas de estimação em tempo real, devido a sua recursividade e facilidade de programação.

Referente aos testes estatísticos recomenda-se, desde que seja permitido um retardo no processamento, empregar o teste global nos problemas resolvidos com as equações do Filtro de Kalman, com a finalidade de detectar e localizar as observações com erro, se o teste local apresentar falta de redundância local e a diagonal da MVC dos resíduos preditos não for dominante.

Recomenda-se também, o estudo da possibilidade de implementar o controle de qualidade no modelo de predição, pois um erro na predição pode tornar os resultados inválidos e comprometer o teste das observações. E ainda que o teste estatístico para processamento em tempo real, devido a sua facilidade de programação, seja implementado nos pacotes que envolvem o Filtro de Kalman.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- |01| BAARDA,W. A testing procedure for use in geodetic networks. Netherlands Geodetic Commission - Publication on Geodesy - News Series, Delft, v.2, n.5, 1968. 97p.
- |02| CHEN,Y.Q. et al. A strategy for detection of outlying observations in measurements of high precision. The Canadian Surveyor, Ottawa, v.41, n.4, p.529-540, Winter 1987.
- |03| CZOMPÓ,J. Kalman-filtering and its application in inertial geodesy. Acta Geodaetica, Geophysica et Montanistica Hungarica, Budapest, v.23, n.2/4, p.237-249, 1988.
- |04| DAL POZ,A. P. Aplicação do Filtro de Kalman na Correção Geométrica de Imagens HVR-SPOT no nível 2B. Curitiba, 1991. 62p. Seminário - Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná.
- |05| GELB,A. et al. Applied Optimal Estimation. 7.ed. Cambridge: The M.I.T. Press, 1982. 374p.
- |06| GEMAEL,C. Introdução ao Ajustamento de Observações: Aplicações Geodésicas. Cadernos Técnicos - DAST, Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, ref.103/84, 1984. 205p.
- |07| ———. Notas sobre o Filtro de Kalman. Curitiba, 1991, 12p. Curso de Pós Graduação em Ciências Geodésicas, Universidade Federal do Paraná.
- |08| JAZWINSKI,A. H. Stochastic Processes And Filtering Theory. 2.ed. Nova York : Academic Press, Inc, 1972. 376p.
- |09| KALMAN,R.E. A new approach to linear filtering and prediction problems. ASME Journal of Basic Engineering, v.82D, p.35-45, mar.1960.

- |10| KENNETH,S.M., DONALD,M.L. An Introduction to Kalman Filtering with Applications, 1.ed. Malabar: Robert E. Krieger Publishing Co.,Inc, 1987. 113p.
- |11| KÖSTERS,A.J.M., MAREL, H. van der. Statistical testing and quality analysis of 3-D networks-part I: theory. IN: THE GLOBAL POSITIONING SYSTEM AND OTHER RADIO TRACKING SYSTEMS, 1989, Edinburgh. Proceedings... Edinburgh, 1989. p.282-289.
- |12| KOCH,K.R. Kalman filter and optimal smoothing derived by the regression model. Manuscripta Geodaetica, Berlin, v.7, n.2, p.133-144, Aug.1982.
- |13| KRAKIWSKY,E.J. A synthesis of recent advances in the method of least squares. Department of Surveying Engineering -Lectures Notes, University of New Brunswick, Fredericton, n.42, may 1975. 125p.
- |14| KRAKIWSKY,E.J., BIACS,Z.F. Least squares collocation and statistical testing. Bulletin Géodésique, Paris, v.64, n.01, p.73-87, 1990.
- |15| LEWIS,F.L. Optimal Estimation with an Introduction to Stochastic Control Theory. New York: John Wiley & Sons, 1986. 391p.
- |16| MAREL,H.van der, KÖSTERS,A.J.M. Statistical testing and quality analysis of 3-D networks - part I: application to GPS. IN: THE GLOBAL POSITIONING SYSTEM AND RADIO TRACKING SYSTEMS, 1989, Edinburgh. Proceeding... Edinburgh, 1989. p.290-297.
- |17| MAYBECK,P.S. Stochastic Models, Estimation and Control - Volume 1, New York: Academic Press, Inc, 1982. 423p. (Mathematics in Science and Engineering - Volume 141)
- |18| MERMINOD,B., RIZOS,C. A surveyor's perspective of Kalman filtering. Australian Journal Geodesy Photogrammetry and Surveying. Sydney, n.49, p.1-38, dec.1988.
- |19| MORITZ, H. Advanced least squares methods. Reports of the Department of Geodetic Science. The Ohio States University, Columbus, Report n.175, jun.1972. 129p.

- |20| ———. Stepwise and Sequential Collocation. Reports of the Department of Geodetic Science. The Ohio States University, Columbus, Report n. 203, mar.1973. 43p.
- |21| SALZMANN,M.A., TEUNISSEN,P.J.G. Quality Control in Kinematic data processing. IN: INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON LAND VEHICLE NAVIGATION, 2., 1989, Münster. Proceeding... Münster, 1989. p.355-366.
- |22| TEUNISSEN,P.J.G. Quality Control in geodetic networks. In : OPTIMIZATION and design of geodetic networks. Berlin : Springer-Verlag, 1985, 606p., p.526-547.
- |23| TEUNISSEN,P.J.G., SALZMANN,M.A. Performance Analysis of Kalman filters. Reports of the Faculty of Geodesy, Mathematical and Physical Geodesy. Delft, Report 88.2, sep.1988. 18p.
- |24| TEUNISSEN,P.J.G., SALZMAN,M.A. A recursive slippage teste for use state-space filtering. Manuscripta Geodaetica, Berlin, v.14, n.6, p.383-390. 1989.
- |25| TEUNISSEN,P.J.G. Quality control in integrated navigation systems. IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, New York, v.5, n.7, p..35-41. july 1990.
- |26| WEEL,D.E. KRAKIWSRY,E.J. The method of least squares. Department of Surveying Engineering - Lecture Notes, University of New Brunswick, Frederiction, n.18, may 1971. 180p.