

ALEXANDRE MANOEL DOS SANTOS

**DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DE UMA MÉTRICA DE QUALIDADE
DE MALHAS-2D TRIANGULARES: A “RELAÇÃO PERIMETRAL – RP”**

**CURITIBA
2003**

ALEXANDRE MANOEL DOS SANTOS

**DESENVOLVIMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DE UMA MÉTRICA DE QUALIDADE
DE MALHAS-2D TRIANGULARES: A “RELAÇÃO PERIMETRAL – RP”**

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre em Ciências, no Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Área de Concentração em Mecânica Computacional, Setor de Tecnologia, Departamento de Construção Civil, Centro de Estudos da Engenharia Civil – CESEC, da Universidade Federal do Paraná - UFPR.

Orientador: Prof. Sérgio Scheer – D.Sc

**CURITIBA
2003**

TERMO DE APROVAÇÃO

Alexandre Manoel dos Santos

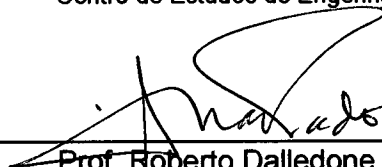
Desenvolvimento e Implementação de uma Métrica de Qualidade de Malhas-2D Triangulares: a Relação Perimetral – RP

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia – Área de Concentração em Mecânica Computacional, Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:



Prof. Sergio Scheer, D.Sc.
Centro de Estudos de Engenharia Civil - CESEC, UFPR



Prof. Roberto Dalledone Machado, D.Sc.
Centro de Estudos de Engenharia Civil - CESEC, UFPR



Prof. Luiz Fernando Martha
Departamento de Engenharia Civil PUC/Rio

Curitiba, 26 de setembro de 2003.

**À meus pais,
Manoel e Leda,
Amor sem condição...**

**À minhas irmãs,
Cristiane e Marcelina,
Laços permanentes de corpo, mente e alma...**

**Às três da minha vida,
Giórgia. Manoela e Catarina,
Tempo e Sonhos compartilhados...**

AGRADECIMENTOS

À Professora Mildred Ballin Hecke, pela visão e sensibilidade, pois percebeu o meu potencial na área de Geração de Malhas no momento oportuno. Encaminhou-me para a direção certa, sob orientação do Professor Sérgio Scheer.

CESEC – prédio e alma, sabemos o que vivemos nesse espaço. Aos idealizadores, meu muito obrigado.

Aos professores do CESEC, em especial ao Professor Roberto Dalledone Machado, cuja habilidade no uso do giz e do quadro negro é impar.

Aos funcionários do CESEC, em particular à Maristela Bandil (carisma em pessoa) e Elizeu dos Santos.

A Universidade do Contestado – UnC, *Campus* Universitário de Canoinhas, pelo apoio dispensado.

SUMÁRIO

TERMO DE APROVAÇÃO.....	ii
LISTA DE ILUSTRAÇÕES.....	viii
LISTA DE FIGURAS.....	ix
LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E ACRÔNIMOS.....	xii
RESUMO.....	xv
ABSTRACT.....	xvi
1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO.....	2
2 COMPREENSÃO DO CONCEITO DE MESHING.....	6
2.1 CONTEXTO DA MECÂNICA COMPUTACIONAL E A APLICAÇÃO DOS PRINCIPAIS MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA – MNE.....	8
2.2 MALHAS.....	12
2.2.1 O Domínio Geométrico.....	14
2.2.2 A Discretização do Domínio.....	17
2.2.3 A Finalidade do Domínio Discretizado.....	18
2.2.4 Malhas: Conceituação Básica.....	20
2.3 CLASSIFICAÇÃO E TIPOLOGIA DE MALHAS.....	24
2.3.1 Malhas Estruturadas.....	27
2.3.2 Malhas Não-Estruturadas.....	33
2.3.2.1 Técnica QUADTREE/OCTREE.....	34
2.3.2.2 Técnica da TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY.....	37
2.3.2.3 Técnica do avanço da fronteira.....	48
3 MÉTRICAS DE QUALIDADE DE MALHAS-2D.....	51
3.1 MÉTRICAS BASEADAS NA APLICAÇÃO DA SOLUÇÃO NUMÉRICA.....	54
3.1.1 Métricas Baseadas na “Taxa de Convergência”.....	56
3.1.2 Métricas Baseadas nos “Erros de Discretização”.....	57
3.1.3 Métricas Baseadas nos “Erros de Interpolação”.....	58
3.1.4 Métricas baseadas no “Condicionamento da Matriz de Rigidez”.....	64
3.2 MÉTRICAS BASEADAS NA GEOMETRIA DOS ELEMENTOS DA MALHA.....	69

3.2.1 Métrica Baseada nos Ângulos Internos de um Elemento Triangular	70
3.2.2 Métrica Baseada na Área de um Elemento Triangular	75
3.2.3 Métrica Baseada no Comprimento das Arestas de um Elemento Triangular...	76
3.2.4 Métrica Baseada na Taxa Circumradius-To-Shortest-Edge Ratio	77
4 UMA NOVA MÉTRICA DE QUALIDADE DE MALHAS-2D TRIANGULARES: “RELAÇÃO PERIMETRAL – RP”	81
4.1 AS PROPOSIÇÕES DA MÉTRICA “RP”	82
4.1.1 Primeira Proposição: O Triângulo Ideal Equivalente – “TEI”	82
4.1.2 Segunda Proposição: A Relação Perimetral – “RP”	84
4.1.3 Terceira Proposição: O Índice de Qualidade Local - “IRP” de Um Elemento..	85
4.1.4 Quarta Proposição: O Espectro de Qualidade – “EQ”	86
4.1.5 Quinta Proposição: O Índice de Qualidade Global – “irp” de uma Malha	89
4.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÉTODO “RELAÇÃO PERIMETRAL – RP”	91
4.3 O PROCESSO DE ACOMPANHAMENTO DOS REFINAMENTOS SUCESSIVOS.....	92
5 IMPLEMENTAÇÃO DA MÉTRICA “RP” EM UM CONTEXTO COMPUTACIONAL: APLICAÇÃO WEB PARA GERAÇÃO DE MALHAS-2D E AVALIAÇÃO DA SUA QUALIDADE.....	95
5.1 INTRODUÇÃO	96
5.2 A APLICAÇÃO WEB	97
5.3 O PROCESSO DE ANÁLISE DE QUALIDADE DA MALHA	99
5.4 O PROCESSO DE REFINAMENTO DE UMA MALHA.....	102
5.5 AS ESTRUTURAS DE DADOS DA APLICAÇÃO WEB.....	105
5.6 A INTERFACE DE DESENVOLVIMENTO INTEGRADO (IDE) UTILIZADA PARA IMPLEMENTAR A APLICAÇÃO WEB	109
5.7 AS MEDIDAS DE QUALIDADE LOCAL E GLOBAL, ATRAVÉS DA MÉTRICA “RP”, APRESENTADAS PELA APLICAÇÃO WEB.....	112
6 ESTUDOS DE CASO: USO DA MÉTRICA “RP” NOS PROCESSOS DE AVALIAÇÃO DA QUALIDADE DE UM CONJUNTO DE MALHAS-2D TRIANGULARES	114

6.1 PRIMEIRO ESTUDO DE CASO: A UTILIZAÇÃO DA MÉTRICA “RP” NO PROCESSO DE REFINAMENTO SUCESSIVO DE UMA MALHA-2D	115
6.1.1 O Índice de Qualidade Global – “irp” em cada Refinamento Sucessivo	115
6.1.2 A Assinatura de Qualidade em Cada Refinamento Sucessivo	118
6.2 SEGUNDO ESTUDO DE CASO: A UTILIZAÇÃO DA MÉTRICA “RP” NO PROCESSO DE AVALIAÇÃO DA QUALIDADE GLOBAL DE UM CONJUNTO DE TRÊS MALHAS DISTINTAS QUE REPRESENTAM A MESMA GEOMETRIA: O LAGO DENOMINADO “LAKE SUPERIOR”	121
7 CONSIDERAÇÕES FINAIS	126
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	130

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

QUADRO 1: APRESENTAÇÃO DOS PRINCIPAIS SOFTWARES GERADORES DE MALHAS ESTRUTURADAS E SUAS APLICAÇÕES.....	32
QUADRO 2: MÉTRICAS DESENVOLVIDAS PARA O ESTABELECIMENTO DE LIMITES DE ERRO DE INTERPOLAÇÃO.....	62

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: ÁREAS DO CONHECIMENTO RELACIONADAS À MECÂNICA COMPUTACIONAL.....	9
FIGURA 2: MODELO REPRESENTATIVO DO CONTEXTO DA MECÂNICA COMPUTACIONAL.....	10
FIGURA 3: CONTEXTO DA MECÂNICA COMPUTACIONAL, DE ACORDO COM OS MÉTODOS DE SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM ENGENHARIA.....	12
FIGURA 4: O DOMÍNIO GEOMÉTRICO DE UMA DADA PEÇA.....	14
FIGURA 5: DOMÍNIO GEOMÉTRICO DE UMA PARTE DA PEÇA.....	15
FIGURA 6: TIPOS DE DOMÍNIOS GEOMÉTRICOS EM DUAS DIMENSÕES: SIMPLES, COM BURACOS, MÚLTIPLOS E CURVOS	16
FIGURA 7: A DISCRETIZAÇÃO DE UM DADO DOMÍNIO GEOMÉTRICO EM ELEMENTOS QUADRILATERAIS.....	17
FIGURA 8: FORMA DOS PRINCIPAIS ELEMENTOS UTILIZADOS NO PROCESSO DE DISCRETIZAÇÃO EM MECÂNICA COMPUTACIONAL	18
FIGURA 9: A APLICAÇÃO DE FEM PARA DETERMINAR AS TENSÕES DE VON MISES SOBRE UM DOMÍNIO GEOMÉTRICO DISCRETIZADO	19
FIGURA 10: SUPERFÍCIES RECONSTRUÍDAS A PARTIR DE UM DOMÍNIO DISCRETIZADO	20
FIGURA 11: AS FASES DO PROCESSO DE GERAÇÃO DE MALHAS.....	21
FIGURA 12: DISCRETIZAÇÕES COINCIDENTE (A) E NÃO COINCIDENTE (B) COM A FRONTEIRA, NUM MESMO DOMÍNIO GEOMÉTRICO.....	25
FIGURA 13: CLASSIFICAÇÃO DE MALHAS COINCIDENTES COM A FRONTEIRA.....	26
FIGURA 14: UM MESMO DOMÍNIO DISCRETIZADO POR MALHAS DIFERENTES: ESTRUTURADAS (A) E NÃO ESTRUTURADAS (B)	28
FIGURA 15: DOMÍNIO COMPUTACIONAL (À ESQUERDA) E DOMÍNIO FÍSICO: A MALHA ESTRUTURADA (À DIREITA).....	28
FIGURA 16: OS PRINCIPAIS TIPOS DE MAPEAMENTOS QUE GERAM MALHAS ESTRUTURADAS.....	31

FIGURA 17: REPRESENTAÇÃO <i>QUADTREE</i> , DE UM DADO DOMÍNIO GEOMÉTRICO	34
FIGURA 18: O LAGO “ <i>LAKE SUPERIOR</i> ”.....	36
FIGURA 19: O PROCESSO DE TRIANGULAÇÃO QUALQUER T(V) DE UMA NUVEM “V “ DE PONTOS	38
FIGURA 20: CRITÉRIO DE <i>DELAUNAY</i> UTILIZADO PARA DEFINIR A TRIANGULAÇÃO DE UMA NUVEM S DE QUATRO PONTOS	40
FIGURA 21: DESCRIÇÃO DO ALGORITMO QUE IMPLEMENTA O CRITÉRIO DE <i>DELAUNAY</i>	41
FIGURA 22: UMA TRIANGULAÇÃO QUALQUER, A TRIANGULAÇÃO DE <i>DELAUNAY</i> E O SEU RESPECTIVO DIAGRAMA DE <i>VORONOI</i>	44
FIGURA 23: TÉCNICA DE TRIANGULAÇÃO DE UMA NUVEM DE PONTOS, VIA O CRITÉRIO DE <i>DELAUNAY</i> , A ENVOLTÓRIA CONVEXA (<i>CONVEX HULL</i>) E, À DIREITA, A MALHA COM ORELHAS, BURACOS E FUROS ESPECIFICADOS	45
FIGURA 24: TÉCNICA DE AVANÇO DA FRONTEIRA: FASE INICIAL (A) E FINAL (B).....	49
FIGURA 25: OS TIPOS DE MÉTRICAS DE QUALIDADE DE MALHAS-2D	53
FIGURA 26: ELEMENTOS GEOMÉTRICOS ASSOCIADOS AOS LIMITES DE ERROS DE INTERPOLAÇÃO.....	63
FIGURA 27: A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS ÂNGULOS INTERNOS Φ_1 , Φ_2 E Φ_3 DE UM ELEMENTO TRIANGULAR DE UMA MALHA.....	72
FIGURA 28: OS ELEMENTOS “R” E “D” DA MÉTRICA “ <i>CIRCUMRADIUS-TO-SHORTEST-EDGE RATIO</i> ”	78
FIGURA 29: A MÉTRICA “ <i>CIRCUMRADIUS-TO-SHORTEST-EDGE RATIO</i> ” COMO MEDIDA PARA ESCOLHER ELEMENTOS “ <i>SKINNY</i> ” E PROCESSAR A OPERAÇÃO DE INSERÇÃO DE UM NOVO PONTO “ <i>VERTEX - V</i> ”	80
FIGURA 30 – A DEFINIÇÃO DE TRIÂNGULO IDEAL EQUIVALENTE – TIE ASSOCIADO A UM DADO ELEMENTO TRIANGULAR.....	83
FIGURA 31 – A DEFINIÇÃO DE RELAÇÃO PERIMETRAL – RP	84
FIGURA 32 – A DEFINIÇÃO DO ÍNDICE DE QUALIDADE – IRP DE UM ELEMENTO TRIANGULAR.....	86
FIGURA 33 – O ESPECTRO DE QUALIDADE – EQ DA MÉTRICA RELAÇÃO PERIMETRAL.....	88

FIGURA 34 – O ÍNDICE DE QUALIDADE GLOBAL – “IRP” DA MÉTRICA RP	91
FIGURA 35 – AS FASES DE CONSTRUÇÃO DE UMA APLICAÇÃO WEB	98
FIGURA 36 – A NUVEM DE PONTOS E A SUA PRIMEIRA MALHA, VIA INTERFACES DA APLICAÇÃO WEB.....	100
FIGURA 37 – O MODELO DO PROCESSO DE ANÁLISE DE QUALIDADE QUE A APLICAÇÃO <i>WEB</i> IMPLEMENTA	101
FIGURA 38 – O PROCESSO DE REFINAMENTO DE UMA MALHA-2D TRIANGULAR, VIA APLICAÇÃO WEB	104
FIGURA 39 – DIAGRAMA DE CLASSES (AS PRINCIPAIS) E SEUS RELACIONAMENTOS	107
FIGURA 40 – A CLASSE “ALX_TOOLS_2D”, E SEUS RELACIONAMENTOS, USANDO A NOTAÇÃO UML	109
FIGURA 41 – A CLASSE “ALX_CANVAS_MESHER” PARCIALMENTE ESPECIFICADA ATRAVÉS DA <i>IDE</i> JUILDER 7.0	110
FIGURA 42 – ELEMENTOS DE APRESENTAÇÃO DA QUALIDADE LOCAL E GLOBAL PERTENCENTES À APLICAÇÃO <i>WEB</i>	112
FIGURA 43 – A MALHA INICIAL, CUJO “irp” VALE 370 E APÓS O SEU PRIMEIRO REFINAMENTO, COM “irp” VALENDO 314	116
FIGURA 44 – O SEGUNDO (“irp” = 110) E O TERCEIRO (“irp” = 31) REFINAMENTO SUCESSIVO SOBRE A NUVEM INICIAL DE PONTOS.....	117
FIGURA 45 – AS ASSINATURAS DE QUALIDADE GLOBAL NOS TRÊS REFINAMENTOS SUCESSIVOS	119
FIGURA 46 – OS ELEMENTOS DA MALHA FINAL (ESQUERDA) E O ÍNDICE DE QUALIDADE LOCAL “IRP” DO OITAVO ELEMENTO ESCOLHIDO.....	120
FIGURA 47 – AS TRÊS MALHAS DO LAGO “LAKE SUPERIOR” E SUAS RESPECTIVAS ASSINATURAS DE QUALIDADE GLOBAL.....	123
FIGURA 48 – O ÍNDICE DE QUALIDADE LOCAL “IRP” DE UM ELEMENTO ESCOLHIDO EM CADA MALHA	125

LISTA DE ABREVIATURAS, SIGLAS E ACRÔNIMOS

ACURÁCIA DE UM MODELO

Capacidade do modelo de representar um fenômeno com uma certa “fidelidade”, descrita através de uma métrica prestabelecida. Em Mecânica Computacional, pode-se citar a acurácia do modelo de refinamento de malha, que a cada iteração oferece uma nova aproximação de FEM, que podem levar a margens de erros cada vez menores.

ADAPTATIVE MESHING

De forma interativa, um sistema computacional fornece uma interface para *remeshing* (refinamento com melhoria da acurácia em cada interação) de uma malha para a solução de um problema, geralmente através de FEM.

APPLETS

Programas, escritos em Java, projetados para serem transportados pela *Internet* e executados em sistemas navegadores (*browsers*) da *Word Wide Web* – *WWW* – que suportam Java.

BEM

Boundary Element Method

CAD

Computer Aided Design

CAE

Computer Aided Engineering

CESEC

Centro de Estudos em Engenharia Civil, na UFPR, conforme [CESEC_02].

CFD

Computational Fluid Dynamics

EDGE

Termo que faz referência a uma aresta, ou a um conjunto delas, em uma malha.

E-TOOLS

Ferramentas de Apoio ao Ensino e à Aprendizagem em Engenharia. Trata-se de um *site*, e ao mesmo tempo um projeto cooperado, concebido no CESEC/UFPR, sob coordenação do Prof. Sérgio Scheer, com o objetivo principal de fornecer informações e ferramentas a respeito das principais técnicas utilizadas na resolução de problemas de engenharia. Também é um repositório de *links* e textos que facilitam o entendimento dos conceitos utilizados nas diversas abordagens de resolução de problemas.

ELEMENT	Uma peça poligonal (2-D) ou poliédrica (3-D) de uma malha. Geralmente, esta peça tem a forma triangular (2-D), quadrilateral (2-D), tetraédrica (3-D) ou hexaédrica (3-D).
EMAG	Referência a <i>Eletromagnetics</i> .
FEA	<i>Finite Element Analysis</i>
FEM	<i>Finite Element Method</i> .
IDE	<i>Integrated Development Environment</i> .
MESH	Termo que faz referência a uma Malha, ou a um conjunto de várias delas.
MESH GENERATION	Atividade específica de Geração de Malhas.
MESHING	Termo que faz referência a um conjunto de uma ou várias Técnicas de Geração de Malhas. Também pode denotar a geração de malhas que, de maneira geral, descreve o processo de geração de nós conectados (através de, por exemplo, triangulação) a partir de um dado domínio (tipicamente 2-D ou 3-D)
MNE	Métodos Numéricos em Engenharia.
NODE	<i>A vertex in the mesh</i> . O mesmo que nó.
OOP	<i>Object Oriented Programming</i> .
PDE	<i>Partial Differential Equation</i> .
STRUCTURED MESH	Todos os elementos da malha, e seus respectivos nós, possuem a mesma topologia, isto é, possuem o mesmo número de vizinhos.
TRIANGULATION	Tarefa de construção de uma malha constituída por triângulos, onde os seus vértices, conectados entre si por arestas, representam os pontos de um dado conjunto de pontos (nuvem) pertencentes a um domínio prestabelecido.
UNSTRUCTURED MESH	Os elementos e nós de uma malha não estruturada podem ter diferentes topologias. Geralmente, eles são obtidos a partir da subdivisão triangular arbitrária sobre uma nuvem de pontos ou sobre a especificação de um dado domínio geométrico (curvas e superfícies).

VEM

Volume Element Method.

VERTEX

Um novo ponto a ser inserido em uma malha. Esta inserção mantém a propriedade de “*Delaunay*” sobre a malha porque sua localização atende o critério de “*Delaunay*”. Trata-se de um ponto de *Steiner*.

RESUMO

Malhas podem ser definidas genericamente como o resultado obtido através da realização de um processo de quebra de um determinado domínio físico em um conjunto de elementos menores, com o objetivo de facilitar a obtenção de uma solução numérica para uma determinada Equação Diferencial Parcial (PDE). Este processo de discretização de domínio tem sido automatizado através da utilização de vários tipos de algoritmos implementados em diversos sistemas computacionais, com o objetivo de atender à crescente demanda por *Meshing Technology*. Uma das principais facilidades oferecidas por tais tecnologias está voltada para a busca de soluções de problemas de engenharia onde o Método dos Elementos Finitos (MEF) é aplicável. De fato, especialistas nestas técnicas desejam discretizar domínios geométricos bastante complexos, freqüentemente constituídos de milhares ou até mesmo de milhões de elementos, com o menor número de interações possível. A despeito dos benefícios auferidos pela aplicação destas tecnologias, dados pelo alto nível de transparência, um importante aspecto é levantado: como desenvolver a sensibilidade necessária para analisar o relacionamento existente entre a qualidade de uma malha, num senso global, e a qualidade do elemento, em um senso local, com um mínimo de interações? O propósito desta dissertação é fornecer uma nova medida de qualidade para avaliar e comparar tanto malhas-2D não-estruturadas, num senso global, como avaliar e comparar seus próprios elementos triangulares, em um senso local, denominada “Relação Perimetral – RP” (*perimetral ratio*). Este conceito introduz cinco proposições e um elemento virtual de comparação, denominado “Triângulo Ideal Equivalente – TIE” (*equivalent ideal triangle*). Através de sua aplicação, demonstra-se que esta nova medida pode ser usada como uma “assinatura” de qualidade de malhas e de seus elementos triangulares. Espera-se, também, contribuir tanto para o entendimento do processo de geração de malhas como para justificar a sua relevância na solução numérica para problemas de engenharia. Sua aplicabilidade e funcionalidade são melhores compreendidas através de uma simples e didática aplicação *Web*, geradora de malhas-2D, que permite a avaliação de uma dada malha, ou de um conjunto delas, oferecendo uma medida de qualidade global e uma respectiva métrica de qualidade local para cada um de seus elementos. Para demonstrar a aplicabilidade da nova medida de qualidade “RP” e as capacidades da aplicação *Web*, dois estudos de caso são apresentados. Em um deles, um conjunto de três malhas que representam o mesmo domínio geométrico é avaliado. Este domínio geométrico descreve um lago localizado na região norte dos EUA, denominado “Lake Superior”, e é muito utilizado por cientistas e geometristas para demonstrar as suas técnicas e algoritmos de geração de malhas não-estruturadas. A nuvem de pontos de cada malha foi obtida diretamente de Schewchuk, [SHEW_97], que apresenta as três malhas geradas pelo processo denominado “*Delaunay Refinement*”, com restrições para ângulos internos mínimos dos elementos triangulares de, respectivamente, 0°, 5° e 15°.

ABSTRACT

Meshing can be defined as the process of breaking up a physical domain into smaller elements in order to facilitate the numerical solution of a partial differential equation. This process has been automatized through several algorithms under various computational systems to attempt the increasing “push” of meshing technology. In fact, analysts expect to mesh complex domains constituted of thousands or even billions of elements with low level of interactions. In spite of high transparency, one difficulty arises: how to develop the necessary sensitivity to analyse the relationship between the mesh quality, in global sense, and the element quality, in local sense, with a minimum number of interactions? The objective of this dissertation is to provide a new quality measure to evaluate and compare both unstructured 2D-Meshes, in global sense, and their triangular elements, in local sense, called ‘perimetral ratio’ (“Relação Perimetral – RP”). This concept introduces five propositions and a virtual element of comparison, called ‘equivalent ideal triangle’ (“Triângulo Ideal Equivalente – TIE”). Its functionality becomes clear through a simple and didactic two dimensional meshing web application, that permits the evaluation of a given mesh, or a set of meshes, offering a measure of global quality and a respective local metric for each one of the elements. The author hopes to contribute to the understanding of the meshing process and to its relevance in numerical solution. The web application was designed in an object oriented fashion using Java Language, in order to increase the access and to facilitate the ability for meshing construction and analysis. To demonstrate the process and the application capabilities, a set of Lake Superior’s meshes, that was generated by the Delaunay Refinement process, are measured.

Key words: *Meshing, Mesh Quality, Quality Measure, Web Application.*

1 INTRODUÇÃO

*"Errare humanum est, perseverare
in errore est diabolicum"*
(Provérbio Latino)

Esta dissertação é resultado de cinco atividades principais. Cada uma delas é apresentada em um capítulo específico e utiliza conceitos e terminologias adequadas para o atendimento de um duplo objetivo: i) de fornecer uma base para a definição de uma nova medida de qualidade de malhas, denominada "Relação Perimetral – RP", e ii) descrever as propriedades e as formas de utilização desta nova medida. Os capítulos 2 e 3 fornecem a base para o atendimento do primeiro objetivo. O capítulo 4 propõe a própria métrica "RP" e os capítulos 5 e 6 descrevem o atendimento do segundo objetivo, através da apresentação, respectivamente, do contexto computacional onde a métrica "RP" é implementada e de dois estudos de caso onde a mesma é utilizada.

A métrica "RP" é aplicável somente ao caso de Malhas-2D triangulares e fornece condições para que uma malha com esta característica seja analisada por especialista. A qualidade é medida tanto em termos de um índice de qualidade global, denominado "irp" como em termos de uma assinatura de qualidade específica, medida através de seu "Espectro de Qualidade - EQ". Esta métrica também fornece um índice capaz de medir a qualidade de cada um dos elementos da malha considerada. Este último índice é denominado "Índice de Qualidade Local – IRP".

Espera-se, também, contribuir tanto para o entendimento do processo de geração de malhas, como para justificar a sua relevância na solução numérica para problemas de engenharia. A aplicabilidade e funcionalidade desta nova métrica são melhor compreendidas através de uma aplicação *Web*, simples e didática, geradora de malhas-2D, que permite a avaliação de uma dada malha, ou de um conjunto delas, oferecendo uma medida de qualidade global e uma métrica respectiva de qualidade local para cada um de seus elementos. Para demonstrar a aplicabilidade da nova medida de qualidade "RP" e as capacidades da aplicação *Web*, dois estudos de caso são apresentados.

1.1 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

O capítulo 2 trata, de forma breve, do levantamento e da apresentação das principais características do processo de geração de malhas, conhecido como “*meshing*”. Uma breve contextualização da área do conhecimento definida pela Mecânica Computacional é necessária realizar, traçando-se a sua relação com os principais Métodos Numéricos em Engenharia – MNE. De forma geral, estes métodos buscam oferecer uma solução computacional para sistemas de equações que representam a realidade de campos (e fluxos) de forças, de temperaturas, de pressões, entre outros, que atuam sobre um certo domínio espacial. Estes domínios são representados neste contexto por malhas adequadamente construídas em função da natureza do problema estudado. Malhas são classificadas e apresentadas neste capítulo com o objetivo de delimitar ainda mais o assunto a ser estudado, já que a métrica “RP” é aplicável unicamente às malhas-2D triangulares não-estruturadas. As três principais técnicas de geração não-estruturadas são apresentadas, no item 2.3.2, com o objetivo de preparar a apresentação, no próximo capítulo, das principais métricas de qualidade de malhas atualmente existentes.

No capítulo 3 o objetivo é apresentar, resumidamente, as principais métricas de qualidade de malhas triangulares, em duas dimensões, que são utilizadas para descrever as técnicas de refinamento destas malhas e de melhoria de sua qualidade. Uma classificação destas métricas é apresentada para um melhor entendimento sobre as características relevantes de cada uma delas. Dividiram-se as principais métricas em dois tipos básicos, a saber: i) métricas baseadas na aplicação de métodos numéricos em engenharia, e ii) métricas baseadas na geometria dos elementos triangulares, constitutivos de uma malha. Ao total, são apresentadas oito métricas, quatro para cada tipo. Uma atenção especial foi dedicada à métrica denominada “*circumradius-to-shortest-edge*”, utilizada por diversos autores na implementação de suas próprias técnicas de refinamento e de melhoria da qualidade de malhas triangulares.

O capítulo 4 apresenta formalmente a proposição da nova medida de qualidade de malhas-2D triangulares: a Relação Perimetral – RP. Para descrever o conceito associado à definição desta métrica, apresentam-se cinco proposições e introduz-se um elemento virtual de comparação, denominado “Triângulo Ideal

Equivalente – TIE”. Através de sua aplicação, demonstra-se que esta nova medida pode ser utilizada como uma “assinatura” de qualidade global de malhas e como uma medida de qualidade local de cada um de seus elementos triangulares. Um dos pontos fortes desta nova medida é que ela é suficientemente completa para descrever a variação da qualidade de uma malha que está sujeita a um processo constituído por sucessivos refinamentos. A cada refinamento pode-se associar uma medida de qualidade. Ela pode ser também utilizada para descrever e comparar malhas de diferentes qualidades que possuem topologias semelhantes, e que um especialista não consegue classificá-la, mesmo fazendo uso de toda a sua experiência, através da análise visual sobre sua topologia. Este caso é especialmente importante porque a métrica “RP” pode ser usada para diferenciar malhas cujas medidas básicas não são suficientes para distinguí-las entre si, como os ângulos internos, as áreas dos seus elementos e os comprimentos de suas arestas, mesmo a clássica medida “*circumradius-to-shortest-edge*”. Além disso, a métrica “RP” pode ser utilizada para medir a qualidade de malhas triangulares produzidas por diferentes algoritmos de triangulação que “operam” sobre uma mesma nuvem de pontos. Ainda neste caso, ela poderia indicar o melhor algoritmo como sendo aquele que fornece uma malha com melhor assinatura ou com melhor índice “irp”. Após a apresentação de cada uma de suas proposições, é fornecida uma interpretação geométrica para a métrica “RP” e discutido o processo de acompanhamento dos refinamentos sucessivos que ocorrem dentro da atividade de análise da qualidade de uma malha triangular.

No capítulo 5 são discutidas as questões referentes à implementação da nova métrica em um contexto computacional. O objetivo deste capítulo é apresentar uma aplicação *Web*, simples e didática, geradora de malhas-2D não-estruturadas, que permite a avaliação de uma dada malha utilizando-se a métrica “RP” como principal medida de qualidade. São explicadas as suas características e os seus elementos funcionais básicos esperados, além das estruturas de dados necessárias para que o funcionamento deste *software* represente adequadamente o processo de avaliação de qualidade de uma da malha que, em tempo de execução se submete a um processo de refinamento sucessivo. Em cada fase sua qualidade é medida e avaliada. Para tanto, dois processos foram exclusivamente especificados para a aplicação *Web*. O primeiro descreve a atividade de análise de qualidade que

um analista realiza utilizando esta aplicação. O segundo processo trata das atividades de refinamentos sucessivos que podem ser operacionalizadas, sobre a malha, pelo analista mediante o uso de interfaces com o usuário específicas desta aplicação. Para descrever as medidas de qualidade da métrica “RP”, a aplicação *Web* faz uso de diagramas especialmente acoplados a interfaces amigáveis. Um medidor de qualidade local, denominado “lerrepímetro” em português, ou “*IRP Meter*” em inglês, juntamente com um histograma de frequência de ocorrência sobre o domínio do “Espectro de Qualidade – EQ” são disponibilizados em contextos gráficos específicos, associados às malhas que estão sendo avaliadas pela aplicação *Web*.

O capítulo 6 apresenta dois estudos de caso onde a nova métrica “RP” é utilizada no processo de avaliação da qualidade de malhas, através da aplicação *Web* descrita anteriormente. No primeiro estudo, uma nuvem inicial de pontos é triangulada. A malha resultante da triangulação inicial é então submetida a um processo de refinamento sucessivo. Em cada fase deste refinamento, a sua qualidade é avaliada e analisada. Este estudo de caso apresenta uma prova cabal da capacidade da métrica “RP” de representar adequadamente a variação da qualidade desta malha em cada fase de refinamento. No segundo estudo, o foco de atenção está localizado sobre um conjunto de três malhas diferentes, pertencentes a um mesmo domínio geométrico: o lago denominado “*Lake Superior*”, localizado na região norte dos EUA. Trata-se de uma geometria muito utilizada nos estudos teóricos sobre triangulação em duas dimensões. Estas três malhas foram geradas pelo algoritmo de Richard Shewchuk, [SHEW_99], com restrições para ângulos internos mínimos de, respectivamente, 0°, 5° e 15°. Neste estudo de caso, cada uma delas foi avaliada pela métrica “RP”, cujos valores para o índice global “irp” medem, respectivamente, 765, 483 e 159. Estes valores descrevem uma significativa variação da qualidade entre estas malhas. Provou-se que a assinatura de qualidade da métrica “RP” descreve a qualidade de cada malha de uma maneira adequada e mais completa do que a medida de ângulos internos mínimos.

No capítulo 7 são apresentadas as considerações finais e a conclusão do trabalho realizado. Ele representa o resultado de um processo de busca e investigação vinculado a uma filosofia, bastante simples, presente desde o seu início: a busca por uma forma mais didática para a abordagem da problemática da

geração de malhas em duas dimensões. Como pressuposto, busca-se descrever o impacto causado por modificações locais (na geometria dos elementos) na qualidade global de uma dada malha triangular. A métrica “RP” surge como uma solução capaz de descrever a qualidade de uma malha, tanto em termos globais, quanto em termos locais. Para provar que ela está alinhada com a filosofia previamente estabelecida, um conjunto de interfaces adequadas, pertencentes à aplicação *Web*, oferece ao analista a oportunidade de analisar a qualidade de uma malha, observando, didaticamente, a sua variação, em termos da métrica “RP”, quando submetida a um processo de refinamento sucessivo. Como consequência, conseguiu-se mostrar que esta métrica atende ao referido pressuposto, pois é possível medir o impacto que pequenas alterações sobre os elementos causam sobre a qualidade global da malha.

2 COMPREENSÃO DO CONCEITO DE *MESHING*

“Educação – o melhor investimento
do mundo”.
Anônimo

O objetivo principal deste capítulo é levantar e apresentar as principais características da atividade de “*meshing*” dentro no contexto definido pela Mecânica Computacional, área do conhecimento que resume um conjunto considerável de abordagens e ferramentas para a solução de problemas específicos em Engenharia. Neste caso, constitui o foco de atenção a utilização de malhas e *meshing* através das ferramentas concebidas para Métodos Numéricos em Engenharia - MNE.

Obviamente, malhas e *meshing* poderiam também ser apresentadas sob outros ângulos, dentro de outros contextos. Por exemplo, poder-se-ia descrevê-los em termos da Computação Gráfica, onde problemas envolvendo o tratamento de imagens e a reconstrução de superfícies seriam o foco de atenção. Mas não é o caso. Entretanto, há de se perceber as fronteiras existentes entre a Mecânica Computacional e a Computação Gráfica. Não se pode ignorar a área dada pela Visualização Científica, representada pela intersecção destes dois contextos. Assim, de forma indireta, ao estar-se estudando a aplicação de malhas no contexto da Mecânica Computacional, é inevitável que se estude também a sua aplicação dentro do contexto da Computação Gráfica, através dos preceitos estabelecidos pela Visualização Científica.

Uma vez escolhido o contexto da Mecânica Computacional, pretende-se discorrer sobre malhas desde a sua conceituação básica e as suas classificações, passando pela análise das funcionalidades dos seus principais métodos geradores, até as suas aplicações nas diversas metodologias de abordagem de solução dos problemas em Engenharia. A princípio, tem-se a impressão de que pretende-se uma investigação exaustiva de todas as técnicas existentes sobre *mesh*. Mas não é esse o propósito do presente capítulo. Seu foco de atenção se dá em dois eixos principais: o levantamento e a apresentação das principais características de *meshing*.

O primeiro eixo, dado pelo levantamento das principais características da atividade de geração de malhas, é um dos objetivos a serem perseguidos neste capítulo sem contudo transformá-lo em uma obsessão. Neste sentido, o levantamento do estado da arte em *meshing* se dará muito mais pela busca dos elementos informacionais necessários e suficientes para que tanto o conceito de malhas como as definições das suas principais técnicas de geração sejam compreendidas, do que pela busca de totalidade das técnicas existentes no mundo científico.

Já o segundo eixo, dado pela apresentação das principais características da atividade de geração de malhas, é outro objetivo a ser perseguido de forma especial. Tem-se o desafio de colocar tanto os conceitos envolvidos como as suas técnicas à disposição dos alunos de graduação em Engenharia, de forma que estes possam compreender as suas aplicações nas soluções de problemas específicos. Os principais tipos de problemas que motivam a aplicação das técnicas de *meshing* são também apresentados neste capítulo.

A razão pela qual foram escolhidos os dois eixos para descrever os conceitos envolvendo *meshing* é que eles fornecem uma maneira bastante simples e fácil de compreendê-los, sem ter que entrar profundamente no mérito de uma outra questão, tão importante quanto, que é a necessidade de compreensão da disciplina denominada “Métodos Numéricos em Engenharia”. Esta disciplina descreve, em detalhes, os métodos através dos quais malhas e *meshing* são utilizadas e aplicadas na busca por um espaço de soluções possíveis para determinados problemas em Engenharia.

O presente capítulo tem também a missão de demonstrar a interdisciplinaridade envolvida no processo de aplicação das técnicas de geração de malhas. Esta interdisciplinaridade está identificada no fato de que os problemas de engenharia exigem abordagens de solução que baseiam-se, em sua maioria, em preceitos teóricos provenientes de diversas áreas do conhecimento.

Como exemplo, poder-se-ia encenar a seguinte problemática: A construção de um modelo computacional “preditivo” do comportamento de um determinado domínio, quando sujeito a um conjunto de esforços e/ou campos de tensão, poderia exigir a construção de sistemas complexos de medição da propagação destes esforços ao longo deste domínio, e ainda considerar a sua variação no tempo.

Estas métricas poderiam ser calculadas através da solução de um conjunto de equações diferenciais, que representariam o fenômeno em estudo, ou também, alternativamente, através da aplicação de um determinado método numérico, para o fornecimento de uma solução aproximada, em termos de *FEM*, *BEM* ou outra técnica. Em ambos os casos, uma métrica de erro deveria ser estabelecida com o intuito de analisar a acurácia do modelo. De qualquer maneira, o engenheiro analista precisaria de um sistema computacional para a descrição tanto do domínio e sua discretização, quanto da variação de tensão causada pelos esforços sobre cada elemento do referido domínio, ao longo do tempo. Este problema, que é abstrato, descreve um “certo” nível de complexidade e exige a aplicação de técnicas interdisciplinares. Continuando, poderia-se imaginar ainda o engenheiro analista utilizando, finalmente, um conjunto de técnicas de visualização científica e de computação gráfica necessárias para analisar o fenômeno e propor um conjunto de alternativas de soluções possíveis para o problema.

Este exemplo demonstra claramente que *meshing* faz parte de um conjunto de ferramentas interdisciplinares. Esta característica estará presente em praticamente todas as seções deste estudo.

Assim, espera-se que o presente capítulo estimule a percepção do leitor a respeito das características apontadas anteriormente, e também, em especial, que os mesmos creditem a devida importância desta matéria como um ferramental técnico útil para a abordagem aos problemas de Engenharia. E esse aspecto é fundamental para a compreensão do conceito de malhas, uma vez que ele representa uma condição *sine qua non* para o entendimento das principais técnicas de *meshing*, abordadas no terceiro capítulo.

2.1 CONTEXTO DA MECÂNICA COMPUTACIONAL E A APLICAÇÃO DOS PRINCIPAIS MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA – MNE

De acordo com CESEC/UFPR [CESEC_02], a Mecânica Computacional consagrou-se no meio acadêmico e técnico como um conjunto moderno e abrangente de diversas áreas do conhecimento, todas relacionadas com o uso de computadores e com o uso de métodos numéricos aplicáveis para resolução de

problemas complexos em Engenharia. É praxe definir a Mecânica Computacional como sendo constituída pelas áreas do conhecimento descritas na Figura 1.

FIGURA 1: ÁREAS DO CONHECIMENTO RELACIONADAS À MECÂNICA COMPUTACIONAL



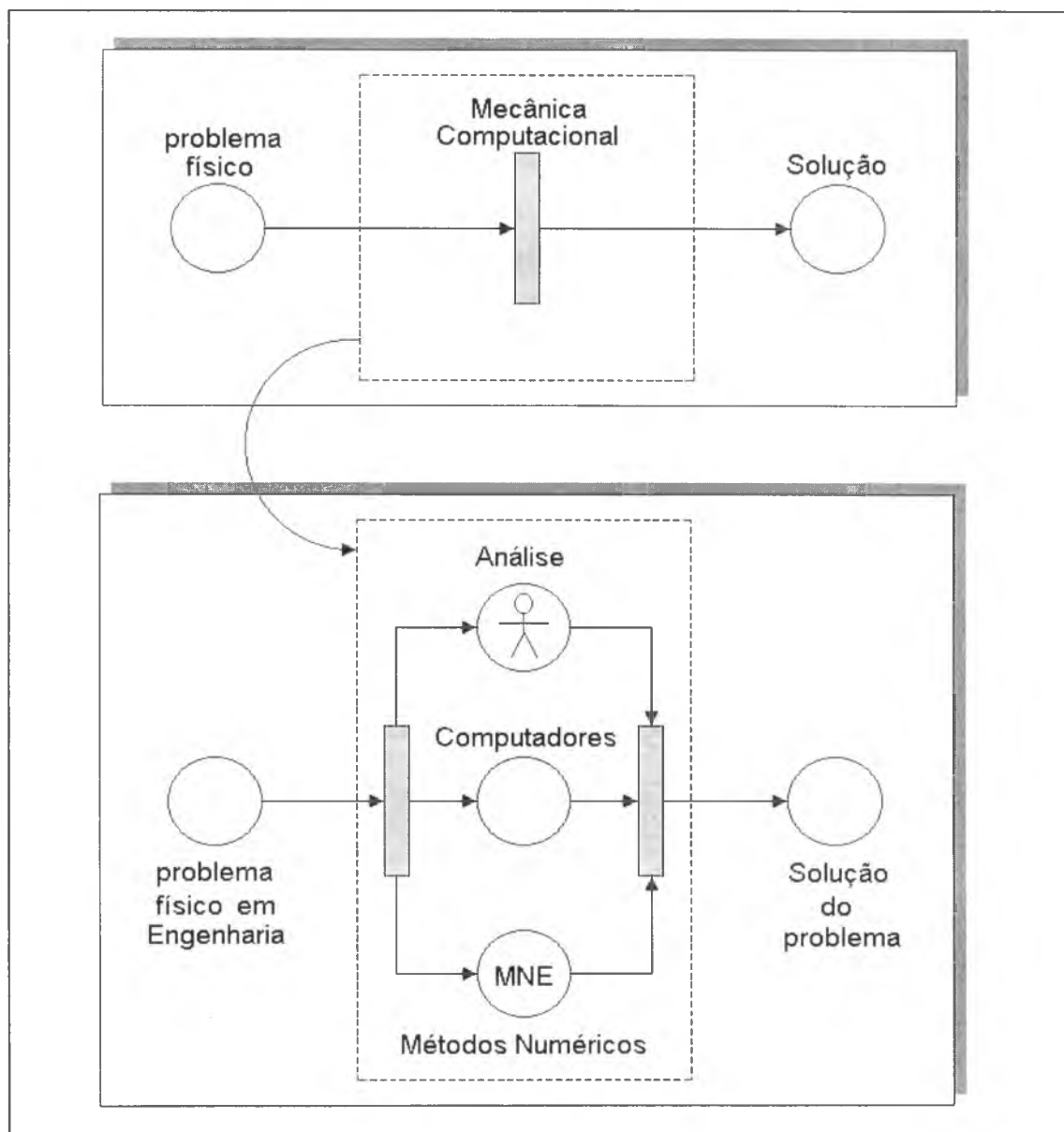
Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2002)

Atualmente, a Mecânica Computacional vem recebendo contribuições de outras áreas do conhecimento. Isto significa dizer que novos assuntos ainda podem ser a ela adicionados desde que estes sejam, de alguma forma, tratados e considerados através da aplicação de métodos numéricos na solução de problemas. Então, de maneira geral, pode-se afirmar que são os Métodos Numéricos em Engenharia – MNE que imputam à Mecânica Computacional a característica de universalidade de abordagens e soluções aos problemas de Engenharia. Obviamente, o interesse do presente trabalho concentra-se apenas sobre a área do conhecimento dada pela Geração de Malhas, conforme mostrado na Figura 1.

A Mecânica Computacional não é área da Ciência da Computação e sim um conjunto de áreas do conhecimento que possibilita a aplicação dos conceitos e idéias da Ciência da Computação para o desenvolvimento de sistemas computacionais adequados à solução de problemas de Engenharia.

Em outras palavras, a busca por um conjunto de soluções possíveis para um determinado problema de Engenharia é realizada por um especialista, geralmente um engenheiro, que se ocupa da tarefa de análise do problema, utilizando-se das ferramentas da Mecânica Computacional, fazendo uso de um conjunto de Métodos Numéricos em Engenharia aplicados através de sistemas computacionais. Este processo pode ser observado na Figura 2.

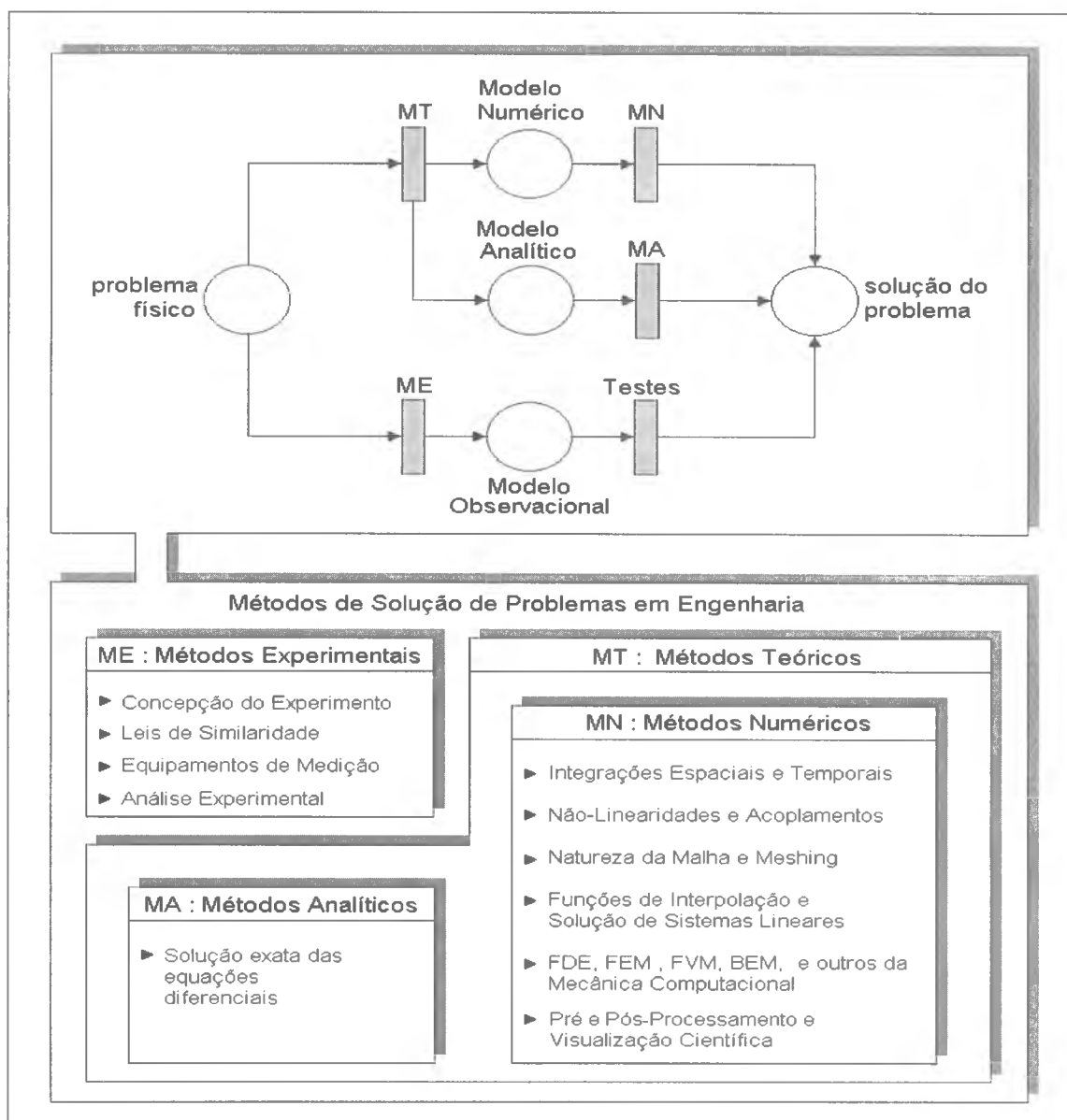
FIGURA 2: MODELO REPRESENTATIVO DO CONTEXTO DA MECÂNICA COMPUTACIONAL



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2002)

Pode-se ainda descrever o contexto da Mecânica Computacional como uma área do conhecimento que utiliza diversos métodos de solução de problemas. Cada um deles tem o objetivo de possibilitar a construção de modelos que servirão de base para a obtenção da solução do problema. Não é raro utilizar-se de Métodos Experimentais - ME para se obter a descrição completa das condições de contorno. Estas condições serão utilizadas pelos Métodos Teóricos - MT na busca de uma determinada solução. Estes, por sua vez, se desdobram em Métodos Analíticos - MA e Métodos Numéricos -MN. Aplicam-se os primeiros se o fenômeno em estudo puder ser representado por um conjunto de equações diferenciais, cuja solução é possível e viável. Caso contrário, utilizam-se os métodos numéricos. São raros os casos em que, na busca pelo conjunto de soluções possíveis para problemas em Engenharia, a Mecânica Computacional utilize todos os métodos de solução. Este contexto pode ser melhor entendido através da observação sobre a Figura 3, que representa uma adaptação dos métodos de solução de problemas apresentados em MALISKA [MALI_95].

FIGURA 3: CONTEXTO DA MECÂNICA COMPUTACIONAL, DE ACORDO COM OS MÉTODOS DE SOLUÇÃO DE PROBLEMAS EM ENGENHARIA



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2002)

2.2 MALHAS

O objetivo desta seção é apresentar uma conceituação sobre Malhas, dentro do contexto da Mecânica Computacional, expondo de forma preliminar três importantes aspectos do seu processo de definição, que são: i) a especificação de

um domínio geométrico; ii) a utilização de uma determinada técnica (ou de um conjunto delas) de discretização deste domínio; e iii) o conhecimento a respeito de sua finalidade. Uma vez tendo-se esclarecido estes aspectos, pode-se partir para a própria definição de Malhas, nos seguintes termos: a) o que são Malhas?; b) como elas são construídas?; e, c) para que elas servem?. Desta forma, espera-se uma melhor compreensão sobre a utilização de *Mesh* e *Meshing* no referido contexto.

De maneira geral, tem-se que o Domínio Geométrico descreve a representação computacional de um objeto real, pertencente a um certo domínio real, físico, que está sob o foco de atenção da Mecânica Computacional, sobre o qual uma malha será construída e um problema será resolvido. Trata-se da especificação do domínio do problema a ser abordado, utilizando-se tanto de um formalismo matemático como de estruturas de dados. Já a discretização do domínio geométrico representa a aplicação de um conjunto de métodos e ferramentas, através do qual uma malha (ou várias malhas) é construída sobre o domínio do problema. Obviamente, existem muitos métodos e numerosas ferramentas para realizar a discretização. Por último, entende-se o aspecto da finalidade da malha como sendo aquele que justifica todo o esforço a ser realizado pela Mecânica Computacional ao focalizar o problema. Em outras palavras, é preciso conhecer as razões pelas quais um determinado problema em Engenharia persiste no tempo e exige uma solução exeqüível, a um certo “custo”, através do uso de Malhas. Trata-se de responder a seguinte pergunta: qual a finalidade do uso de malhas na solução do problema? Geralmente a acurácia da solução obtida em Engenharia é altamente dependente do tipo de discretização adotado.

Malhas têm recebido muita atenção nos últimos anos, de modo que diversas definições têm sido propostas por autores provenientes de diferentes áreas do conhecimento. Obviamente, cada um deles procura apresentar o capítulo de uma forma mais convenientemente próxima da sua especialidade, geralmente no formato de *Meshing*, onde busca-se traçar uma relação deste formato com o tipo de problema a ser resolvido.

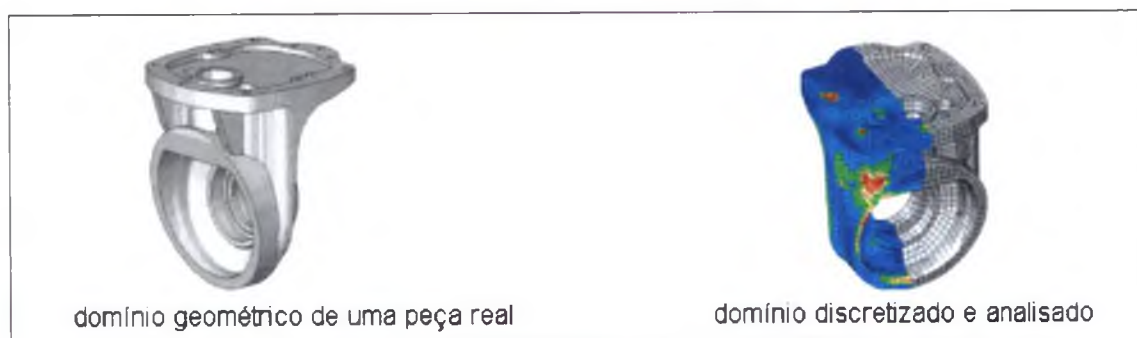
Apesar da multiplicidade de definições existentes sobre Malhas, a maioria delas reúne aspectos que são comuns entre si e que foram levemente mencionados nos parágrafos anteriores e merecem ainda ser considerados. É o que será feito nas seções seguintes.

2.2.1 O Domínio Geométrico

Em Mecânica Computacional, malhas representam a própria discretização do domínio em estudo. Entende-se por domínio em estudo como sendo um domínio real, de fato um objeto do mundo real, descrito na forma de um domínio geométrico, a ser discretizado por alguma razão justificável. Já o domínio geométrico é a própria representação espacial, constituída por elementos (forma, estruturas de dados e formalismos matemáticos) que são suficientes para descrever aquele domínio em estudo, de forma que se possa investigá-lo, estudando-se os fenômenos que incidem sobre ele, tornando possível o processo de modelagem do comportamento destes fenômenos em função tanto do espaço do domínio como do tempo.

Assim, um objeto real pode ser descrito por um determinado domínio geométrico, podendo este ser constituído por um conjunto de formas e/ou estruturas de dados. Por exemplo, poderia-se tomar uma peça estrutural para estudo, descrita através de seu modelo geométrico, conforme a Figura 4. Nela, percebe-se que peça estrutural, que é real, está representada através de seu modelo geométrico.

FIGURA 4: O DOMÍNIO GEOMÉTRICO E DISCRETIZADO DE UMA DADA PEÇA



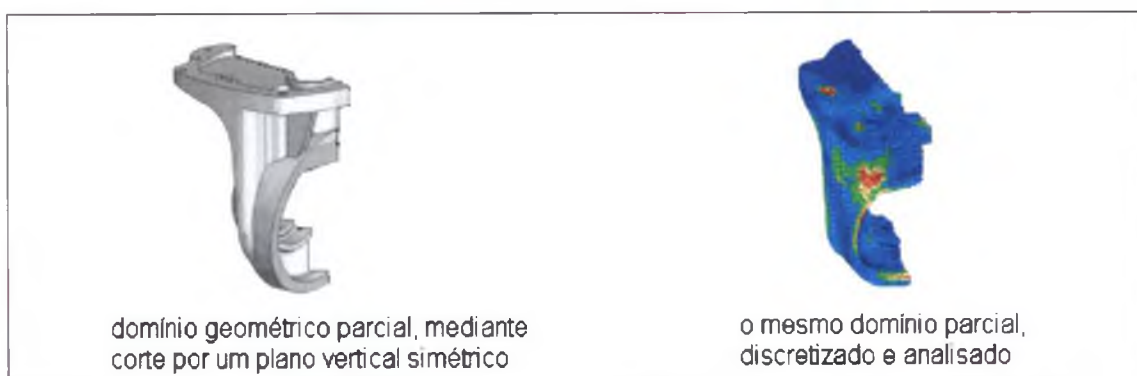
Fonte: adaptação de [GIAN_01]

Se toda a peça está sendo observada, pode-se afirmar que o domínio em estudo está representado pelo próprio modelo geométrico¹. O modelo geométrico é o próprio domínio geométrico daquela peça. Entretanto, se somente parte da peça

¹ Os softwares de Elementos Finitos (EF) permitem que todo um domínio seja discretizado e que somente parte dele seja visualizado. Assim, nem sempre o que está sendo visualizado é o que foi modelado.

estrutural será observada, pode-se afirmar que o domínio geométrico fará referência apenas àquela parte. E isto pode ser observado na Figura 5.

FIGURA 5: DOMÍNIO GEOMÉTRICO E DISCRETIZADO DE UMA PARTE DA PEÇA



Fonte: adaptado de [GIAN_01]

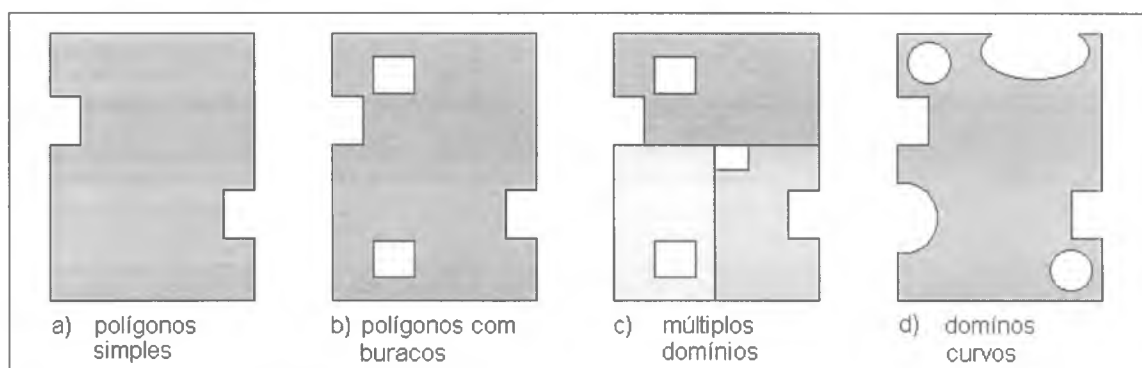
De qualquer modo, o domínio geométrico é sempre definido de forma mais adequada ao engenheiro analista, em função da sua própria abordagem, tendo-se em vista a solução do problema específico em Engenharia. Obviamente, o engenheiro analista exerce um papel fundamental na escolha do domínio geométrico do problema. Geralmente ele usa o termo “domínio do problema”, para fazer referência ao termo “domínio geométrico do problema”.

Toda a análise sobre um domínio real é realizada sobre o domínio geométrico que o representa. Para que o processo de análise seja possível de ser realizado, é necessário que o domínio esteja descrito através de elementos descritivos (mencionados anteriormente), bem como as estruturas de dados, formas e formalismos matemáticos. Existem diversas maneiras de se especificar e modelar domínios geométricos. Geralmente, os modelos de representação de domínios se classificam em três categorias básicas: Modelos por Decomposição, Modelos Construtivos e Modelos de Contorno. Em GATTAS, [GATT_91], pode-se encontrar uma boa compilação desta classificação. Cada uma destas categorias demanda uma sustentação teórica bastante densa, cuja descrição não é do escopo deste trabalho.

Será assumido, a princípio, que os domínios geométricos aqui apresentados estarão sob a forma de sua representação de contorno, em 2-D, sem o compromisso

com especificação exata de sua forma, de seu formalismo matemático e/ou estrutura de dados. Basicamente, serão apresentados de acordo com a classificação descrita na Figura 6.

FIGURA 6: TIPOS DE DOMÍNIOS GEOMÉTRICOS EM DUAS DIMENSÕES: SIMPLES, COM BURACOS, MÚLTIPLOS E CURVOS



Fonte: adaptado de [BERN_92].

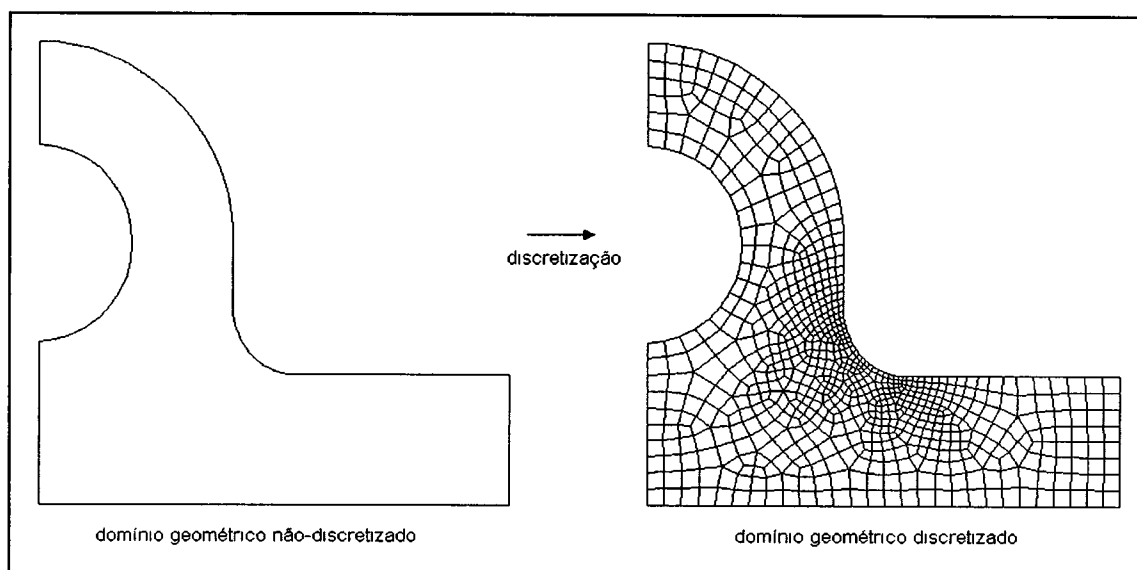
Faz-se necessário uma breve explanação dos domínios descritos na figura acima. Esta é uma adaptação de [BERN_92]. Em termos gerais, os domínios descritos por polígonos simples são aqueles que incluem tanto o contorno como o seu interior. Este é o caso do primeiro domínio descrito na Figura 6.a. Ao citar-se os domínios com buracos, está-se referenciando tanto o seu contorno como o seu interior, excluindo-se o interior dos seus buracos. Este é o caso do segundo domínio, na Figura 6.b. Um domínio múltiplo é descrito por múltiplos polígonos ligados internamente entre si. Geralmente são utilizados para descrever objetos reais constituídos por mais de um tipo de material. É o caso do domínio descrito na Figura 6.c. Por último, na Figura 6.d, temos os domínios curvos, cujos lados curvos são descritos por curvas algébricas, como as denominadas curvas *Splines*. Estes podem ter, ou não, buracos e múltiplos contornos internos.

Em termos de 3-D, pode-se considerar que existem tipos análogos aos 2-D, denominados poliedros. Entretanto, é comum fazer uso de uma representação em 2-D para descrever um domínio em 3-D, seja pela utilização de uma seção ou corte como de um polígono gerador.

2.2.2 A Discretização do Domínio

Em Mecânica Computacional, discretização é o processo de subdivisão de um dado domínio geométrico em pequenas e simples formas, chamadas de elementos. Segundo [OWEN_02] e [BERN_92], a forma dos elementos é dependente do espaço utilizado para descrever o domínio geométrico que os contém. Caso o espaço seja 2-D, os elementos podem ter a forma triangular ou quadrilateral. No espaço 3-D, os elementos podem ter forma tetraédrica, hexaédrica ou ainda piramidal. A Figura 7 mostra um domínio geométrico 2-D, em dois momentos: antes e depois de uma discretização em elementos quadrilaterais.

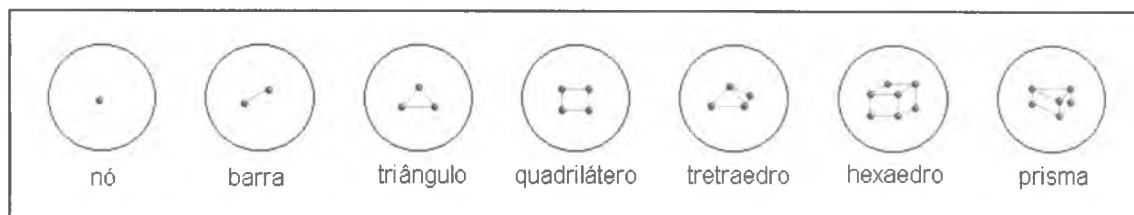
FIGURA 7: A DISCRETIZAÇÃO DE UM DADO DOMÍNIO GEOMÉTRICO EM ELEMENTOS QUADRILATERAIS



Fonte: adaptação de [GIAN_01]

A parte à esquerda da figura acima descreve a representação do domínio através das suas linhas de contorno. A parte localizada à direita da mesma descreve o mesmo domínio geométrico na sua representação discretizada. Como foi dito, a discretização leva um domínio geométrico a um conjunto finito de elementos que o constituem. Na Figura 8, têm-se as principais formas dos elementos usados na atividade de *Meshing* pela Mecânica Computacional.

FIGURA 8: FORMA DOS PRINCIPAIS ELEMENTOS UTILIZADOS NO PROCESSO DE DISCRETIZAÇÃO EM MECÂNICA COMPUTACIONAL



Fonte: Adaptado de [OWEN_02]

Na Figura 8, o termo “nó” designa um vértice de um dado elemento de uma malha. O termo barra faz referência a uma aresta que une dois vértices distintos em uma malha. Obviamente, um elemento triangular tem três arestas e três vértices. Dois elementos distintos em uma malha somente compartilham vértices e arestas se mantiverem uma relação de adjacência entre si. Malhas em 3-D possuem elementos adjacentes que compartilham de uma mesma face ou aresta elementar.

2.2.3 A Finalidade do Domínio Discretizado

Da seção anterior conheceu-se as características básicas do processo de discretização de um dado domínio geométrico. É preciso, agora, conhecer a razão pela qual tal discretização se faz necessária.

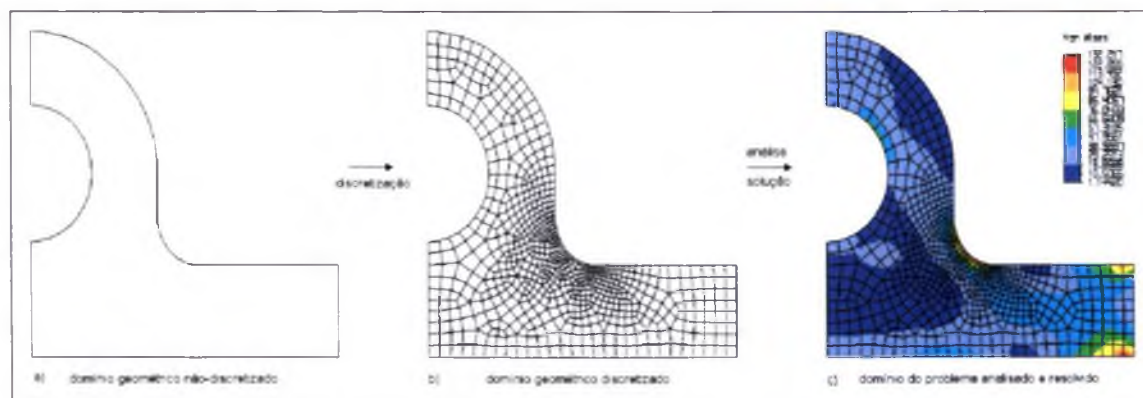
De acordo com Steve Owen, [OWEN_03], o processo de discretização tem como principal objetivo a operacionalização de uma solução numérica para uma Equação Diferencial Parcial – PDE. Esta equação diferencial parcial seria aquela responsável pela descrição do comportamento de um dado fenômeno que ocorre sobre um certo domínio geométrico. Em outras palavras, a Mecânica Computacional se preocupa em encontrar uma solução numérica, aproximada, que tenha um certo grau de acurácia e que substitua satisfatoriamente uma solução analítica² para um conjunto de equações diferenciais parciais de um problema em Engenharia. Para tanto, a Mecânica Computacional faz uso tanto do processo (*meshing*) de discretização de domínios (malhas) como de Métodos Numéricos em Engenharia - MNE.

² Nem sempre se conhece uma solução analítica para substituir. Neste caso a solução numérica é a única alternativa.

Uma das soluções numéricas mais utilizadas tem sido o Método dos Elementos Finitos - *FEM*, o Método dos Elementos de Contorno - *BEM* e o Método dos Volumes Finitos - *FVM*. Cada uma delas possui suas próprias vantagens e desvantagens frente um dado problema e estão detalhadamente descritas, respectivamente, em [ODEN_84], [BREB_84] e [BART_94].

A questão relativa ao melhor “custo/benefício”, quando a favor da utilização de um dos métodos numéricos existentes, se dá devido ao fato de que alguns fenômenos somente podem ser considerados problemas em Engenharia se estiverem descritos na forma de um conjunto de equações diferenciais parciais, geralmente de grau acima de dois, cuja solução analítica é inviável, ou ainda proibitiva, para a sua aplicação no domínio do problema. A figura 8 descreve o mesmo domínio geométrico descrito pela figura 6, agora sendo analisado sob o ponto de vista da aplicação de *FEM*.

FIGURA 9: A APLICAÇÃO DE FEM PARA DETERMINAR AS TENSÕES DE VON MISES SOBRE UM DOMÍNIO GEOMÉTRICO DISCRETIZADO

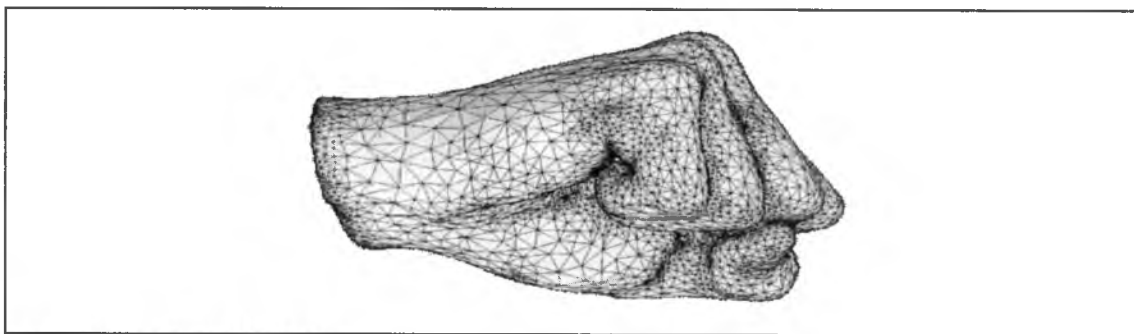


Fonte: adaptação de [GIAN_01].

Pode-se observar que a Figura 9 apresenta um domínio discretizado e analisado através de *FEM*. O resultado obtido pelo referido método está descrito na Figura 9.c cuja visualização permite analisar o problema sobre o ponto de vista das variações das tensões de *Von Mises*, expressas em uma gradação de cores, ao longo de todo o domínio geométrico que foi discretizado. Esta é uma das finalidades do processo de discretização.

Existem outras finalidades do processo de discretização. Cabe aqui salientar aquela finalidade relativa à Computação Gráfica, imprescindível para determinados algoritmos de construção e reconstrução de superfícies. Um famoso algoritmo de reconstrução de superfícies é aquele proposto por [AMEN_98], intitulado *A New Voronoi-Based Surface Reconstruction Algorithm*, cuja característica principal é a reconstrução de superfícies a partir de um conjunto de vértices isolados. A figura 10 representa um exemplo clássico deste algoritmo, onde o autor coloca que as características relevantes de uma superfície de pequeno tamanho exigem densa amostragem de vértices isolados.

FIGURA 10: SUPERFÍCIES RECONSTRUÍDAS A PARTIR DE UM DOMÍNIO DISCRETIZADO



Fonte: adaptação de [AMEN_98]

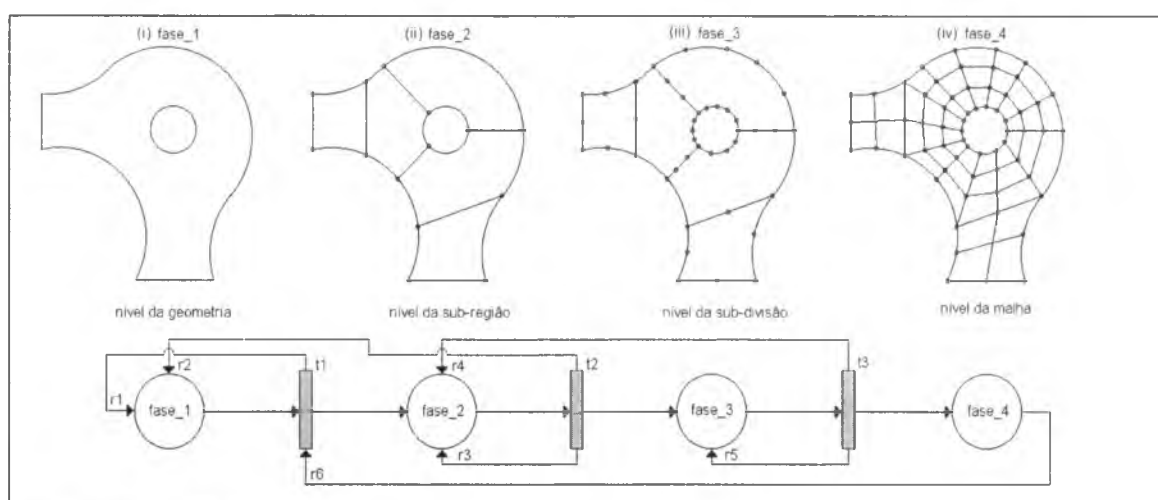
2.2.4 Malhas: Conceituação Básica

Tendo-se entendido os aspectos básicos, pode-se partir para a apresentação de um conjunto de definições sobre Malhas. De acordo com [OWEN_02], onde diversos autores são especializados na geração de malhas e na aplicação de um conjunto de técnicas de FEM, definem-se malhas da seguinte forma:

- malha é o resultado de um processo de discretização de um dado domínio geométrico. É a subdivisão de um determinado domínio físico em subdomínios, denominados elementos (do domínio), com o objetivo de facilitar a obtenção de uma solução numérica para uma equação diferencial parcial específica;
- malha é o próprio domínio discretizado.

Existem muitos processos de geração de malhas no Contexto da Mecânica Computacional. De acordo com [GATT_91], um número significativo de processos de geração de malhas exige que um dado domínio seja dividido em sub-regiões específicas, de modo que sobre cada uma delas seja possível aplicar uma técnica de geração de malha diferente e mais apropriada à sua geometria. Este tipo de processo está descrito abaixo, na Figura 11.

FIGURA 11: AS FASES DO PROCESSO DE GERAÇÃO DE MALHAS



Fonte: adaptação de [GATT_91]

Assim, uma vez subdividido o domínio, cada uma das suas sub-regiões poderá ser discretizada no seu contorno e ainda aplicado uma determinada técnica de geração de malha. Esta operação pode ser constituída por quatro níveis hierárquicos distintos, ou fases, a saber:

- i) nível da geometria, descrito pelo domínio geométrico. Geralmente o domínio geométrico se apresenta com sua forma descrita através de seu contorno³. Obviamente, uma estrutura de dados e um formalismo matemático são necessários para a manipulação computacional do domínio geométrico. Esta fase pode ser observada na Figura 11, através do estado denominado “Fase_1”;

³ Os atributos da modelagem (propriedades dos materiais, carregamentos, condições de suporte, entre outros) são aplicados no modelo neste nível. Isto caracteriza uma “modelagem baseada na geometria”. Estes atributos serão passados automaticamente as entidades da malha que são geradas nos níveis inferiores.

- ii) nível da sub-região, descrito pelas sub-regiões que constituem o domínio. A maioria dos sistemas computacionais de geração de malhas permite a um especialista a definição das sub-regiões através do uso de uma interface específica. A fase correspondente a este nível pode ser observada na Figura 11, através do estado denominado “Fase_2”, do diagrama de estados. Nela, a imagem (ii) descreve o domínio geométrico em (i) subdividido em cinco regiões distintas⁴. Cada uma destas sub-regiões possui contorno próprio. Este contorno será discretizado na fase seguinte;
- iii) nível da subdivisão, descrito pela discretização dos contornos de cada sub-região. Nesta fase, os contornos de cada sub-região do domínio geométrico são discretizados (subdivididos) visando obter uma determinada densidade de malha. Em outras palavras, uma densidade maior exige uma maior subdivisão do contorno de uma dada sub-região. Por exemplo, as duas sub-regiões extremas da figura 2.11, com quatro elementos cada, possuem uma densidade de malha menor do que as outras três sub-regiões, das quais duas possuem 12 elementos e uma delas possui 15 elementos. Obviamente, as sub-regiões com maior densidade de malha possuem os seus contornos com uma maior subdivisão⁵. Alguns sistemas computacionais também possuem uma interface de interação para que a densidade de uma malha em uma dada região seja uma escolhida por um especialista, de acordo com a abordagem utilizada. Esta fase está descrita na figura 11 pelo estado denominado “Fase_3” do diagrama de estados; e, por fim,
- iv) nível da malha, onde são representados os elementos finitos que constituem a malha. Obviamente, esta fase representa a aplicação de uma determinada técnica de geração de malhas, resultando na especificação completa dos elementos constituintes do domínio discretizado, na forma de nós (vértices), arestas e faces pertencentes a cada um dos elementos.

⁴ Este processo de decomposição em sub-regiões tem como único objetivo a geração da malha: escolhe-se o algoritmo de geração de malha que for mais apropriado para cada sub-região.

⁵ Este nível também tem por finalidade garantir a compatibilidade entre as malhas geradas nas diversas sub-regiões.

A Figura 11 descreve as fases envolvidas no processo de geração de malhas, conforme exemplo apresentado pelo referido autor. Nela, uma pequena adaptação foi realizada com a inclusão de um diagrama de transição de estados (de fases) do processo. Esta adaptação tem o intuito de ampliar a discussão sobre a relação existente entre o processo de geração de malhas e o conjunto de técnicas de geração de malhas existentes e aplicáveis no processo. Esta relação trata de dois aspectos importantes do processo de geração de malhas, que são:

- o independência do tipo de técnica utilizado na geração de malhas: Este modelo permite descrever o processo de geração de malhas como um todo, de forma sistêmica, sem especificar qual a técnica de geração de malhas a ser utilizado. Assim, ele pode ser utilizado para testar a eficiência das diferentes técnicas de geração de malhas. Dois exemplos de testes merecem destaque. O primeiro teste é aquele que, a partir de uma sub-região preestabelecida de um determinado domínio geométrico, responde a seguinte pergunta: Qual técnica de geração de malhas forneceria uma melhor malha para a geometria daquela sub-região? O segundo teste permite também obter a resposta para a próxima pergunta: Qual tipo de geometria de sub-regiões forneceria uma melhor malha para uma determinada técnica de geração de malhas? Algumas das principais técnicas de geração de malhas serão apresentadas posteriormente;
- o análise do processo de geração de malhas por um especialista: Este modelo permite também que um determinado engenheiro analista realize a tarefa de análise e de acompanhamento da qualidade do processo de geração de malhas, em cada uma das suas fases. Em outras palavras, o processo de geração de malhas é realizado mediante um conjunto de quatro fases, cuja regra de transição é estabelecida pelo engenheiro analista, através de uma explícita interação com o processo. Por exemplo, a transição “t1”, na Figura 11, representa duas regras possíveis de serem atendidas e aprovadas pelo engenheiro analista: (i) ou as sub-regiões não foram bem estabelecidas e devem ser redefinidas, por efeito de “r2”, mantendo-se na fase 1; (ii) ou elas foram bem definidas, estando na fase 2, e se

preparam para a aplicação das regras estabelecidas pela transição “t2”. Percebe-se a importância da participação do especialista. Muitos dos sistemas computacionais geradores de malhas utilizam este modelo em seu processo de geração automática de malhas. Na atividade de interação com sistemas computacionais, “r2”, “r3”, “r4”, “r5” e “r6” representam, no modelo as regras que implementam os famosos “UNDO” e as transições “t1”, “t2” e “t3” representam as regras, aprovadas pelo engenheiro analista, que implementam o “DO” e, alternativamente, o “REDO”.

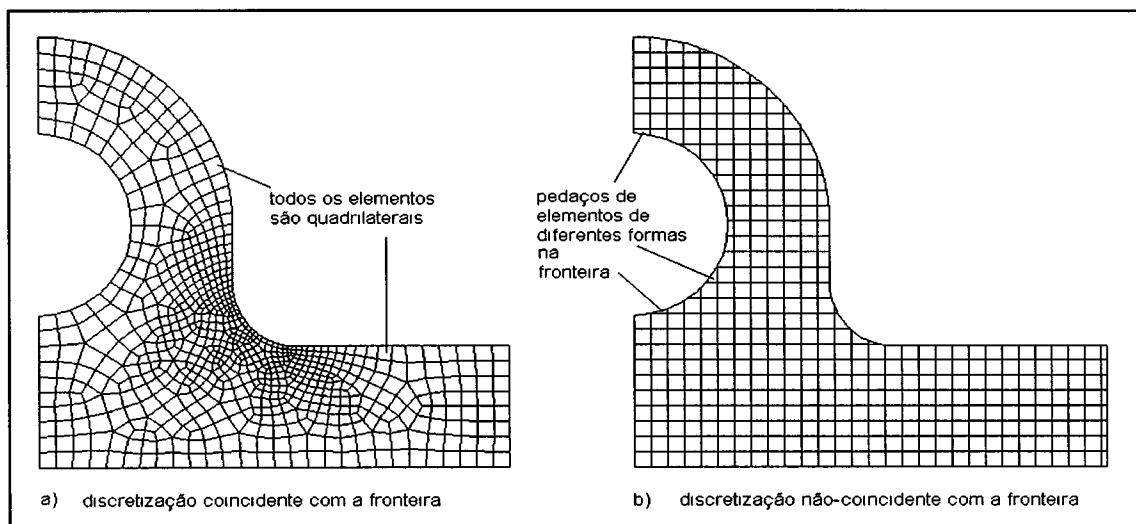
Outros processos de geração de malhas existem e são apresentados por diversos autores especializados. Geralmente, estão diretamente associados às próprias técnicas de geração de malhas, que são aplicáveis a um determinado tipo de abordagem em Engenharia. Conforme foi dito anteriormente, em [OWEN_02] tem-se uma grande coleção de autores e abordagens reconhecidos internacionalmente.

2.3 CLASSIFICAÇÃO E TIPOLOGIA DE MALHAS

O objetivo desta seção é apresentar Malhas de acordo com as suas classificações e tipologias mais largamente utilizadas no contexto da Mecânica Computacional. Neste contexto, é praxe considerar que um dado domínio físico de um problema seja representado por uma geometria, cuja discretização deve ocorrer de forma coincidente com a sua fronteira, seja ela externa ou interna. Isto porque, em Engenharia, não interessam as discretizações que não sejam coincidentes com as fronteiras dos domínios geométricos, pois a não coincidência leva a discretizações constituídas por “pedaços” de elementos localizados nas fronteiras⁶. Estes pedaços dificultam a aplicação de Métodos Numéricos na solução do problema. Tal situação fica ainda mais complicada, quando a geometria do domínio é irregular. De acordo com [MALI_95], é preferível utilizar e considerar somente as discretizações coincidentes com as fronteiras.

⁶ Nem sempre é possível aproximar as discretizações com as geometrias. Mesmo assim, essa “não coincidência” não inviabiliza a análise.

FIGURA 12: DISCRETIZAÇÕES COINCIDENTE (A) E NÃO COINCIDENTE (B) COM A FRONTEIRA, NUM MESMO DOMÍNIO GEOMÉTRICO



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2002)

A Figura 12 apresenta a principal diferença entre as duas discretizações de um mesmo domínio. Nela, percebe-se a presença de “pedaços” de elementos junto à fronteira do respectivo domínio, na discretização não coincidente⁷. Estes “pedaços” imputam um atributo indesejável à malha, dado pela existência de elementos que se localizam parte dentro do domínio e parte fora dele, no outro lado da fronteira, de difícil controle e aplicação dos métodos numéricos, quando se busca uma solução para um dado problema.

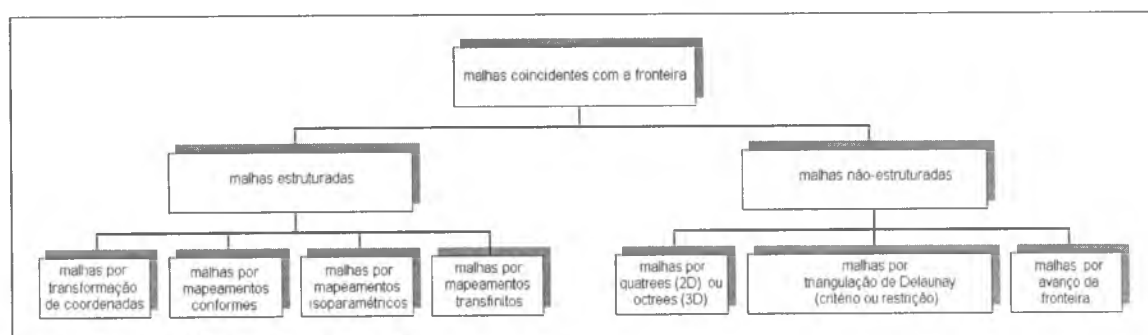
A maior dificuldade na aplicação de métodos numéricos sobre domínios geométricos discretizados, de forma não coincidente com as suas fronteiras, se resume no fato de que é muito difícil aplicar sobre os pedaços de elementos as condições de contorno do problema, sendo necessário realizar um esforço adicional na determinação dos comprimentos entre a fronteira e os pontos nodais internos e externos dos elementos localizados na fronteira do domínio. Isto significa dizer que o algoritmo de aplicação das condições de contorno é fortemente dependente da geometria do problema e da malha empregada. Por consequência, tem-se uma menor dificuldade de aplicação dos métodos numéricos se a discretização do domínio geométrico for coincidente com as suas fronteiras. Neste caso, conforme

⁷ Na verdade não existem elementos cortados pela metade. O termo “pedaço” faz referência à parte do elemento que pertence ao domínio geométrico.

[MALI_95], todos os elementos da discretização ficam dentro do domínio de solução, facilitando a implementação do modelo numérico, mesmo diante do desafio de concentrar as malhas nas fronteiras de domínios cujas geometrias são complexas e irregulares.

A seguir, na Figura 13, é apresentada sucintamente a classificação dos principais tipos de malhas coincidentes com as fronteiras para discretização de um dado domínio geométrico, numa adaptação das informações produzidas por Steven Owen, contidas em [OWEN_03].

FIGURA 13: CLASSIFICAÇÃO DE MALHAS COINCIDENTES COM A FRONTEIRA DE ACORDO COM [MALI_95]



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2002)

Esta classificação resume os principais tipos de malhas 2D dentro de duas categorias, a saber: i) malhas estruturadas, e ii) malhas não estruturadas. Cada uma delas se subdivide, respectivamente, em quatro e duas subcategorias. Estas subcategorias, por sua vez, são responsáveis pela aplicação de uma determinada técnica de geração de malha coincidente com a fronteira. Suas características e propriedades serão descritas posteriormente.

Uma caracterização importante e geral (vale tanto para malhas estruturadas quanto para malhas não-estruturadas) a respeito de malhas para Elementos Finitos é que uma malha é uma decomposição celular do domínio onde a intersecção em duas células, no caso de superfícies, é um vazio, um vértice ou uma aresta completa. No caso sólido (3-D), a intersecção também pode ser uma face completa.

A partir deste momento, sempre que se fizer referência a malhas, e aos seus respectivos tipos, dar-se-á ênfase a malhas coincidentes com a fronteira. Não será considerado aqui o tipo não coincidente com a fronteira.

2.3.1 Malhas Estruturadas

Malhas estruturadas são aquelas malhas que são obtidas através de processos de discretização, a partir de um sistema de coordenadas. Assim, cada um dos seus elementos internos possui o mesmo número de vizinhos, geralmente numerados de forma naturalmente seqüencial. São também denominadas *Structured Grid*.

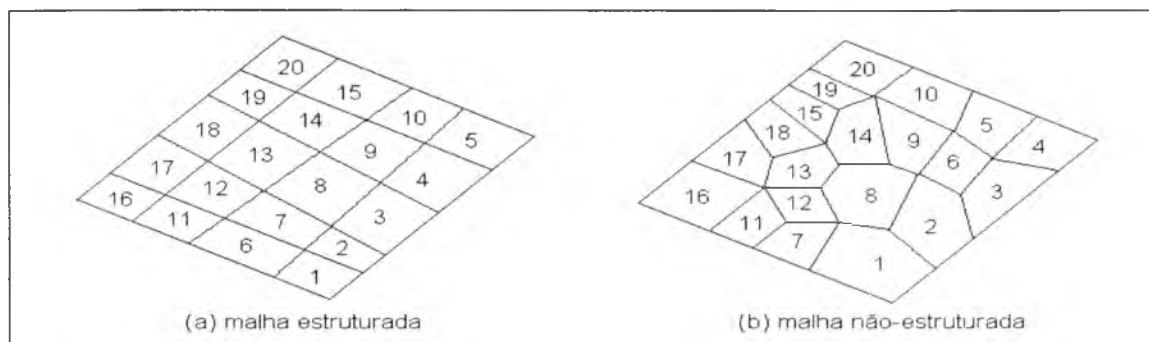
Malhas estruturadas levam em conta a valência nodal, de forma que a quantidade de elementos no seu interior compartilhando de um mesmo vértice seja sempre constante⁸.

Por conta da topologia de seus elementos, uma malha estruturada possui vantagens na solução de problemas em Engenharia, todas elas relativas à facilidade com que determinados sistemas e cálculos computacionais são implementados, conforme abaixo:

- a regra de ordenamento dos elementos da malha estruturada: a topologia dos seus elementos simplifica significativamente as tarefas de implementação e de operacionalização de rotinas computacionais;
- manipulação de matrizes com banda fixa: segundo [MALI_95], a aplicação de MNE sobre malhas estruturadas permite a geração de matrizes com diagonais fixas, de modo que algoritmos para manipulação de matrizes com banda fixa sejam implementados, o que é muito conveniente;
- topologia sob controle: os elementos de uma malha estruturada são obtidos a partir de um sistema coordenado generalizado (ξ, η, γ) . Desta forma, é possível garantir que cada elemento interno tenha um mesmo número de vizinhos e que estejam todos relacionados entre si através de uma regra de ordenamento específico, de modo que uma numeração seqüencial natural identifique a posição de cada um deles na malha.

⁸ Esta característica confere às malhas estruturadas uma topologia regular que é muito útil na aplicação de métodos numéricos.

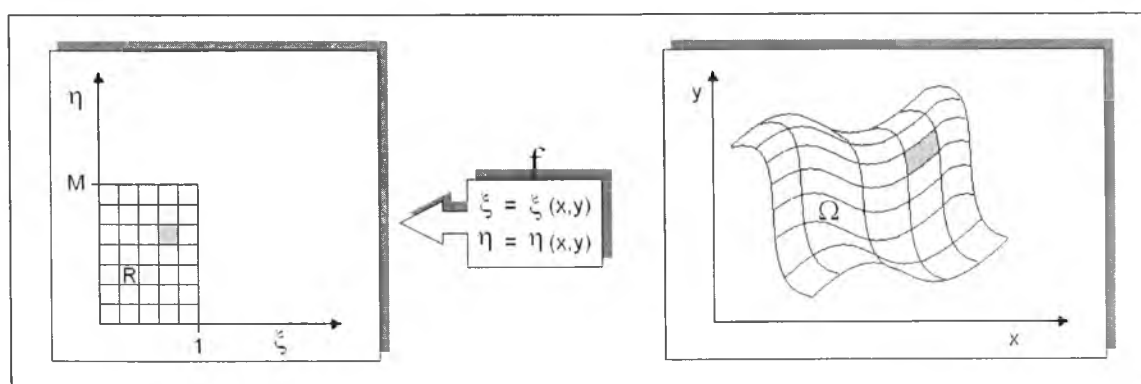
FIGURA 14: UM MESMO DOMÍNIO DISCRETIZADO POR MALHAS DIFERENTES: ESTRUTURADAS (A) E NÃO ESTRUTURADAS (B)



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2002)

A Figura 14 descreve duas malhas diferentes, sobre um mesmo domínio geométrico. Em Figura 14(a), tem-se uma malha estruturada, onde todos os seus elementos internos, sem exceção, possuem o mesmo número de vizinhos e estão ordenados de forma seqüencial. Tais características estão ausentes nas malhas não-estruturadas, descritas em Figura 14(b). Estas serão apresentadas posteriormente. De acordo com [MALI_95], as malhas estruturadas são obtidas a partir de um sistema coordenado generalizado (ξ, η, γ) . Então, é possível encontrar uma transformação, e sua respectiva inversa, onde os mapeamentos entre um sistema coordenado cartesiano (x, y, z) e um sistema coordenado generalizado (ξ, η, γ) são possíveis e exeqüíveis para um dado domínio geométrico. Estes dois sistemas coordenados estão descritos na Figura 15.

FIGURA 15: DOMÍNIO COMPUTACIONAL (À ESQUERDA) E DOMÍNIO FÍSICO: A MALHA ESTRUTURADA (À DIREITA)



Fonte: adaptação de [MALI_95]

Em Mecânica Computacional, a transformação obtida é utilizada para transformar as equações de conservação (que regem a natureza do problema) no novo sistema de coordenadas generalizadas. Neste novo sistema, opera-se numericamente as integrações daquelas equações. O sistema cartesiano é denominado “domínio físico”, enquanto que o sistema generalizado é denominado “domínio computacional” ou “domínio transformado”. Normalmente, a implementação computacional é realizada em duas fases. Na primeira fase, gera-se a malha estruturada, a partir da geometria física do problema, obtendo-se o novo sistema coordenado e as métricas da transformação $\xi = \xi(x, y)$ e $\eta = \eta(x, y)$, conforme Figura 15. Na segunda fase, a partir das informações obtidas na fase anterior, é resolvido o sistema de equações diferenciais. Os resultados desta segunda fase são entregues a um Pós-Processador para obter os gráficos e as visualizações necessárias. Estas atividades resumem, de forma muito simplificada, o ciclo de vida do processo de busca de uma solução para um problema de Engenharia, seja pela aplicação dos métodos *FEM*, *BEM* ou *FVM*, entre outros.

De acordo com [BERN_92], malhas estruturadas oferecem simplicidade e eficiência na implementação, porque requerem menos memória (aproximadamente um fator de três) do que malhas não-estruturadas para um mesmo número de elementos. Isto ocorre porque é possível definir a conectividade com elementos vizinhos implicitamente. São eficientes porque também podem economizar tempo de processamento quando se está percorrendo a lista de elementos vizinhos, bastando o incremento ou decremento de um dado índice. Entretanto, pode ser difícil, ou até mesmo impossível, computar uma malha estruturada para domínios geométricos complicados. Além disso, tem-se como desvantagem o fato de que malhas estruturadas não oferecem uma variação significativa na densidade da malha. Em outras palavras, não é possível variar significativamente o tamanho dos seus elementos.

Em [MALI_95]; [GATT_91]; [BERN_92], são apresentados os principais tipos de mapeamentos de sistemas coordenados generalizados, utilizados para gerar malhas estruturadas. De forma bastante sucinta, pode-se apresentar os quatro principais tipos de mapeamentos para geração das seguintes Malhas Estruturadas:

- Malhas por Transformação de Coordenadas: a geração de malhas estruturadas por transformação de coordenadas é o tipo mais simples

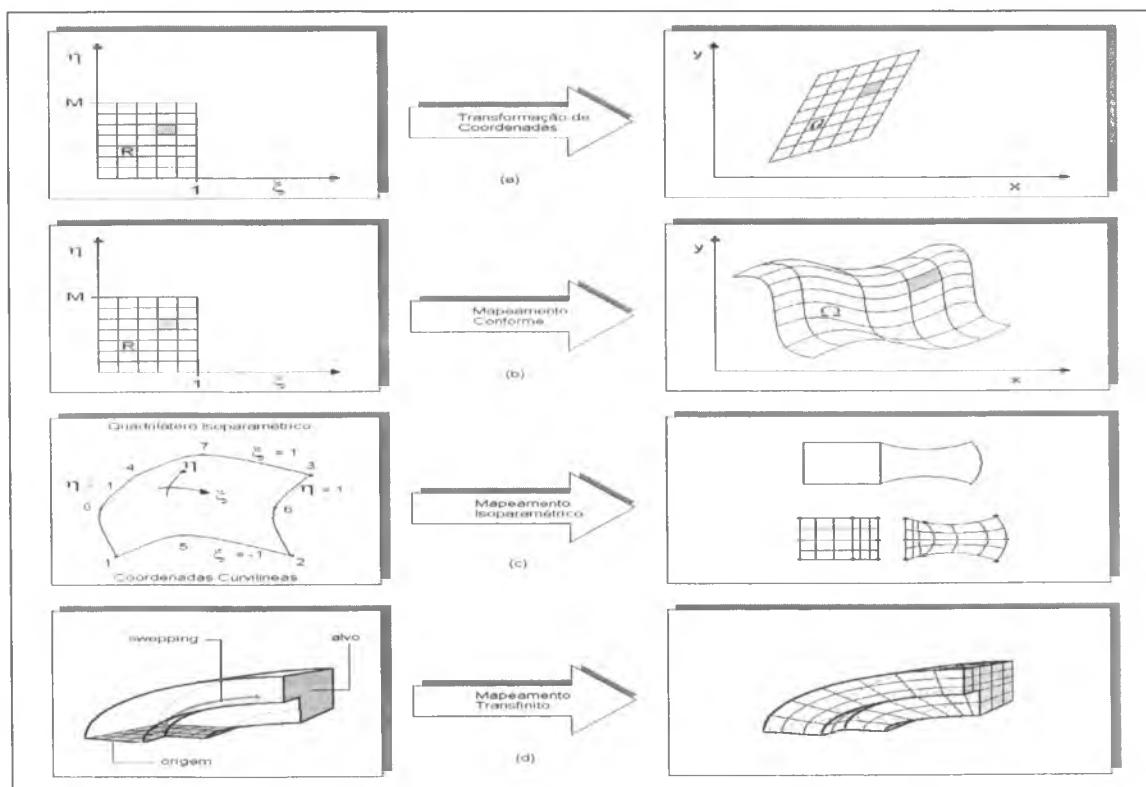
de mapeamento. Um exemplo deste tipo está descrito na Figura 16(a). Como desvantagem, é necessário conhecer uma transformação de coordenadas que faça o mapeamento do domínio transformado no domínio físico. Nem sempre isto é possível;

- Malhas por Mapeamento Conforme: As malhas geradas por este tipo de mapeamento são aquelas cujo mapeamento de um domínio físico Ω , num plano complexo, denominado “Mapeamento Conforme”, preserva os ângulos. Em outras palavras, o ângulo entre duas curvas, cuja intersecção ocorre num dado ponto $z \in \Omega$ é preservado pelo mapeamento. Um exemplo deste tipo pode ser verificado na Figura 16(b). Logo, usando-se um mapeamento conforme para mapear uma malha ortogonal do domínio transformado para o domínio físico, obtém-se também outra malha ortogonal. De acordo com [GATT_91], o Teorema de Riemann propõe que para qualquer disco topológico Ω existe um mapeamento conforme f que leva o interior de Ω , numa relação *one-to-one*, dentro do interior de qualquer outro disco topológico (disco ou quadrado unitário);
- Malhas por Mapeamento Isoparamétricos: Este método utilizado para gerar este tipo de malha, consiste em se obter os nós internos da malha a partir dos nós especificados nas fronteiras, utilizando-se de funções de interpolação. Em outras palavras, deve-se utilizar os pontos do contorno do domínio para interpolar estes pontos, aproximando-se o contorno. A mesma função de interpolação é utilizada para mapear a malha no interior do domínio. Segundo [GATT_91], se uma dada região, na qual se deseja gerar uma malha, puder ser descrita adequadamente por um conjunto de quadriláteros curvos, num sistema de coordenadas curvilíneas, como mostra a Figura 16(c), então é possível gerar automaticamente uma malha, utilizando-se dos seguintes dados de entrada: a) as Coordenadas dos Pontos nodais das regiões; b) a especificação da Conectividade das regiões e c) o número de sub-divisões nas direções que representam os eixos coordenados do sistema transformado. Este mapeamento permite um procedimento

natural para gerar a topologia dos elementos automaticamente, já que a mesma permanece inalterada no domínio físico;

- Malhas por Mapeamento Transfinitos: As malhas geradas por este tipo de mapeamento descrevem uma superfície ou um volume aproximados e coincidentes com a superfície ou volume reais (ou idealizados) em um conjunto não enumerável de pontos. Segundo [GATT_91], esta característica contrasta com os mapeamentos isoparamétricos, já que são coincidentes com a superfície real somente nos pontos utilizados na interpolação. Um exemplo deste tipo de mapeamento, em 3-D, está descrito na Figura 16.(d). Os mapeamentos transfinitos utilizam-se do conceito de Projetor “P”, que descrevem um dado operador linear, idempotente, que mapeia a superfície real em uma superfície aproximada, estando sujeita a um conjunto específico de restrições.

FIGURA 16: OS PRINCIPAIS TIPOS DE MAPEAMENTOS QUE GERAM MALHAS ESTRUTURADAS



Fonte: adaptação de [MALI_95] e de [GATT_91]

No Quadro 1, são apresentados os principais *softwares* de geração de malhas estruturadas, juntamente com a especificação da empresa (companhia/organização) responsável pela sua distribuição no mercado. Este quadro representa uma simplificação das informações contidas em [OWEN_02]. Nela é possível encontrar características técnicas detalhadas do *software* fornecido e informações adicionais a respeito de cada um de seus fornecedores.

QUADRO 1: APRESENTAÇÃO DOS PRINCIPAIS SOFTWARES GERADORES DE MALHAS ESTRUTURADAS E SUAS APLICAÇÕES

Softwares Geradores de Malhas Estruturadas			
Software	Companhia / Organização	Plataforma	Disciplina / Área de Aplicação
3DMAGGS	NASA , Langley & Lockheed	Win / Unix	Struct / CFD / EMAG / Thermal / Environ.
BUDMESH2D	BUD Calcul Tech.et Scient.	Win	Structural
CAGI	ERC, Miss. State	Unix	CFD
CHALMESH	Chamers U., Sweden	Unix	CFD / EMAG
CSCMDO	CSC / NASA - LaRC	Unix	Struct / CFD / EMAG / Thermal / Environ.
EMC2	INRIA	Mac / Unix	Structural
GENIE++	ERC, Miss. State	Unix	CFD / EMAG
GeoCad	Industrial Research	Win / Unix	Environmental
GiD	CIMNE	Win / Unix	Struct / CFD / EMAG / Thermal / Environ.
GridCAD	Beaver Discovery	Unix	CFD
Gridgen	Pointwise	Win / Unix	CFD
Gridomatic	VKI, UCDavis	Unix	CFD
gridpack	Rutgers University	Unix	Struct / CFD / EMAG / Thermal / Environ.
GridPro	CLE GmbH and PDC	Win / Unix	CFD / EMAG / Environmental
GUM-B	ERC, Miss. State	Unix	CFD
ICEM-CFD	ICEM-CFD	Win / Unix	Struct / CFD / Thermal / Environmental
MegaCads	DLR, IDA & MEGAFLOW	Unix	CFD
OVERGRID	NASA, Ames	Unix	CFD
Overture	CASC, LLNL	Unix	CFD
QuickGrid	Perspective Edge	Win	Structural
TIGER II	Catalpa Research, Inc	Unix	CFD
TrueGrid	XYZ Sci. Apps., Inc	Win / Unix	Struct / CFD / EMAG / Thermal
UNAMALLA	UNAM	Win / Unix	CFD
VGM	NASA, Langley & Lockheed	Win / Unix	Struct / CFD / EMAG / Thermal / Environ.
Xcog	Chamers U., Sweden	Unix	CFD / EMAG

Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2002)

2.3.2 Malhas Não-Estruturadas

As Malhas Não-Estruturadas não levam em conta a valência nodal, permitindo que qualquer número de elementos de seu interior possa compartilhar de um mesmo vértice. Além disso, malhas não-estruturadas utilizam-se de técnicas de discretização de um dado domínio físico, onde a principal característica, comum a todas elas, é identificada pela ausência total de mapeamentos de elementos e vértices, ou transformações, através de um sistema de coordenadas generalizadas. Uma característica única que distingue malhas estruturadas das malhas não-estruturadas é aquela dada pela aplicabilidade dos algoritmos iterativos de suavização, que só podem ocorrer sobre o primeiro tipo.

Segundo [MALI_95], obtém-se maior versatilidade na discretização de domínios complexos, utilizando-se este tipo de malhas. Existem casos em que a geometria de um dado domínio físico é tão complexa que somente malhas não-estruturadas podem fornecer uma discretização adequada. É importante salientar que os algoritmos que são utilizados para encontrar a solução numérica das equações diferenciais valem tanto para malhas estruturadas como para malhas não-estruturadas.

Como consequência destas características, as malhas não-estruturadas possuem as propriedades, conforme [BERN_92], de apresentar flexibilidade na construção e representação de domínios complicados, de fornecer uma rápida e adequada gradação de tamanho entre elementos pequenos e grandes, presentes na malha, e ainda a propriedade de ser relativamente fácil a operacionalização do processo envolvendo refinamentos sucessivos e de seus respectivos *UnDo*⁹.

A maioria das vantagens sobre as malhas estruturadas é decorrente de um único fato: a discretização não-estruturada pode ocorrer diretamente sobre um dado domínio físico do problema, muitas vezes representado por um simples conjunto (uma nuvem) de pontos representativos da sua geometria. As malhas estruturadas, por sua vez, necessitam que uma transformação, ou um mapeamento, seja especificada (conhecida) preliminarmente para que a geometria do problema seja gerada.

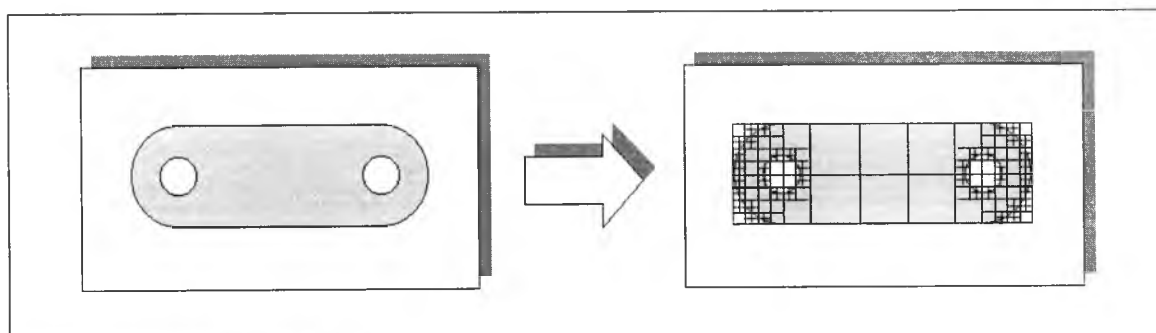
⁹ As operações de *UnDo* também são possíveis em sistemas computacionais operadores de malhas estruturadas.

De acordo com Steve Owen, em [OWEN_03], métodos utilizados tanto na academia quanto na indústria geram malhas estruturadas utilizando-se geralmente de elementos triangulares ou quadrilaterais, no caso 2D, e ainda hexaédricos ou tetraédricos, no caso 3D. A maioria destes métodos geradores pode ser classificada dentro de três principais categorias, que são: i) A Técnica *Quadtree/Octree*; ii) A Técnica da Triangulação de *Delaunay*, e iii) A Técnica do Avanço de Fronteira. Cada uma destas técnicas é resumidamente apresentada a seguir.

2.3.2.1 Técnica QUADTREE/OCTREE

Uma boa referência a respeito da história da utilização de *Quadtree/Octree* na geração de malhas não-estruturadas pode ser encontrada em [OWEN_03]. Steve Owen afirma que esta técnica foi primeiramente desenvolvida na década de 1980, pelo grupo de pesquisa liderado pelo pesquisador Mark Shephard. Através deste método, cubos contendo um modelo geométrico, são recursivamente subdivididos até que uma resolução adequada seja alcançada. A Figura 17 descreve uma decomposição equivalente à 3D, em termos de uma decomposição *Quadtree*, em 2D, de um dado modelo geométrico. Células irregulares são então criadas nos locais onde os cubos intersectam a superfície do modelo geométrico. Para definir os elementos da malha no contorno da geometria, tetraedros são gerados a partir destas células irregulares. Já os elementos do interior da malha são gerados a partir das células internas regulares.

FIGURA 17: REPRESENTAÇÃO *QUADTREE*, DE UM DADO DOMÍNIO GEOMÉTRICO



Fonte: adaptado de [OWEN_03]

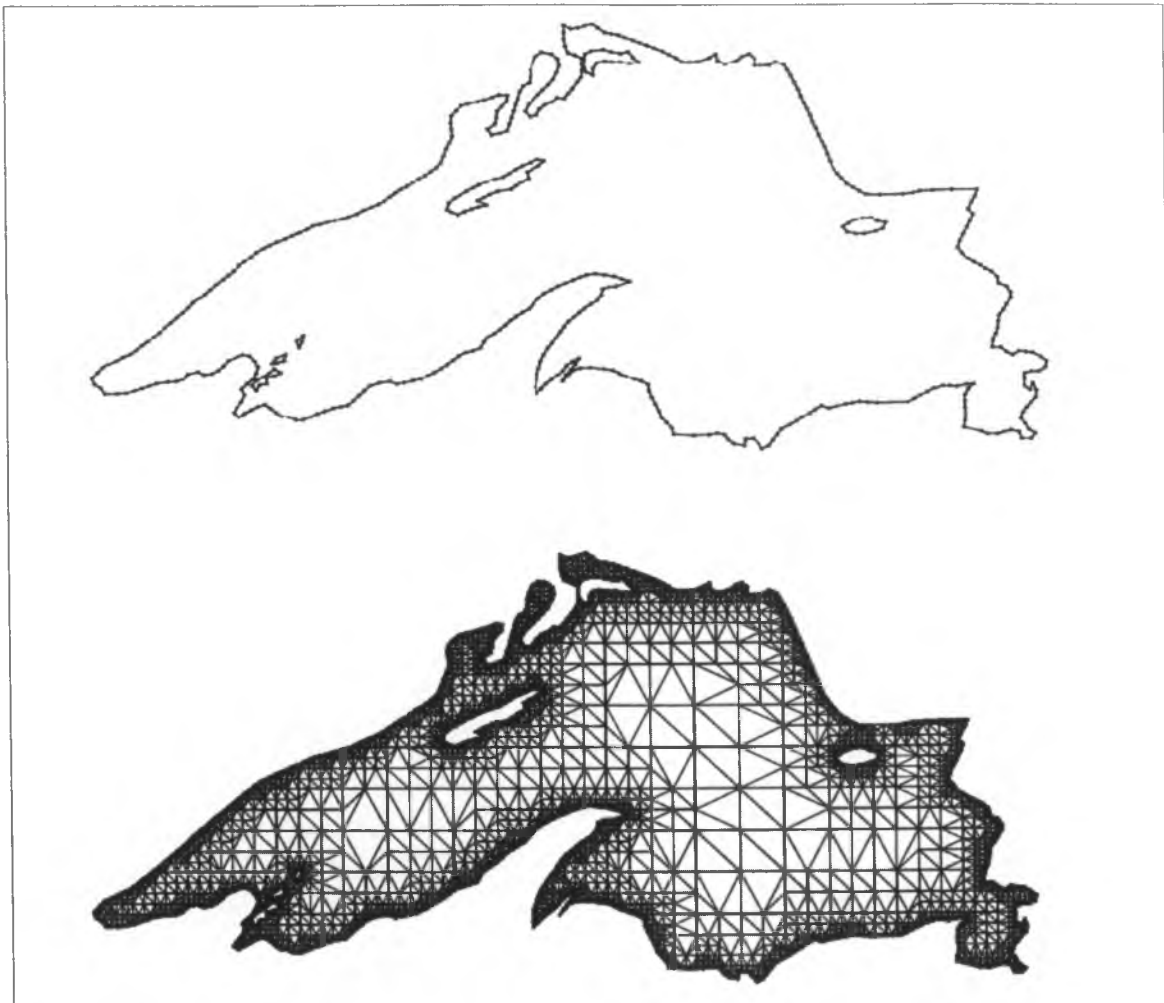
Segundo [BERN_92], um gerador *Quadtree* de malhas não-estruturadas inicia seu processo através do fechamento completo de um dado domínio Ω por um quadrado maior, vinculado a um sistema de eixos, denominado “Quadrado Raiz”. Este *root square*, por sua vez, é sub-dividido em quatro quadrados congruentes. Cada um destes quatro quadrados é recursivamente sub-dividido até que um quadrado mínimo, denominado “Quadrado Folha”, intersecta Ω de uma forma simples. Este processo está resumidamente descrito na Figura 18, que representa uma adaptação de [SHEW_99] para o caso de uma representação em duas dimensões do lago denominado “Lake Superior”, localizado entre EUA e Canadá. Assim, os quadrados desta estrutura *Quadtree* são sub-divididos até que se conformem com o contorno do lago (dado por Ω). Um passo final de triangulação fornece uma malha não-estruturada triangular. Segundo [SCHEW_99], esta malha foi gerada por um algoritmo baseado na estrutura *QuadTree*, produzido por Bern-Eppstein-Gilbert ([BERN_90]).

Esta técnica pode ser estendida a domínios com curvaturas diversas e tem a propriedade de representar mais graciosamente os domínios curvos do que as técnicas da triangulação de *Delaunay* e de Avanço da Fronteira, porque a fase de sub-divisão pode automaticamente adaptar-se às referidas curvaturas.

A técnica *Octree*, que é uma generalização da estrutura *Quadtree* para 3D, não exige uma superfície de malha pré-definida, como nas técnicas de Avanço de Fronteira e de Triangulação de *Delaunay*. Em vez disso, facetas são formadas sempre que uma estrutura interna da *Octree* intercepta o contorno. Para evitar que o tamanho dos elementos da malha variem dramaticamente, impõe-se uma limitação para a diferença máxima no nível de subdivisão entre cubos adjacentes. Usa-se, geralmente, o valor 1 para este limite. Operações de suavização e de limpeza podem ser empregadas para melhorar a forma dos elementos.

Na Figura 18 O Lago “Lake Superior” cuja nuvem de pontos é triangulada pelo algoritmo de Bern-Eppstein-Gilbert ([BERN_90]), numa adaptação de [SHEW_99]. Exemplo clássico de uso da estrutura *Quadtree* no processo de geração de malhas triangulares.

FIGURA 18: O LAGO "LAKE SUPERIOR"



Fonte: adaptação de [SHEW_99]

De acordo com Jonathan Shewchuk, em [SHEW_99], a especificação de uma estrutura *quadtree/octree* para representar um determinado domínio geométrico, é um processo que pode ser resumido nos seguintes passos:

- cada vértice é armazenado em um nó folha;
- dividir qualquer nó folha contendo mais de C vértices, onde C é empiricamente escolhido;
- a busca é recursiva: para qualquer nó não-folha visitado, deve-se visitar os quadrados filhos que intersectam a faixa de busca R . Para qualquer nó folha visitado, inserir qualquer vértice pertencente à R em uma lista.

2.3.2.2 Técnica da Triangulação de *Delaunay*

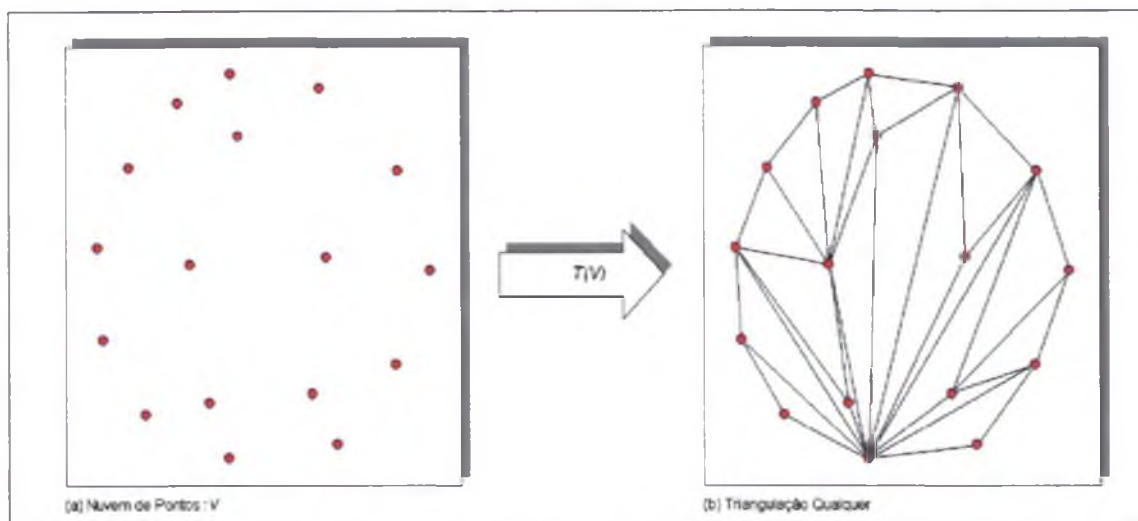
A Triangulação de *Delaunay* é uma das mais populares técnicas para a geração de malhas tanto em 3D, caso de formação de elementos tetraédricos, como em 2D, onde os elementos são triangulares.

Antes de apresentar a definição da técnica da Triangulação de Delaunay é necessário apresentar a definição do termo “Triangulação”, ou “Triangulação Qualquer”. Esta definição antecipada é conveniente para fornecer uma melhor compreensão da referida técnica. De acordo com Jonathan Shewchuk, em [SHEW_99], tem-se tanto a definição de uma triangulação qualquer como as implicações dela decorrentes:

- Triangulação Qualquer: seja V um conjunto de pontos, ou uma nuvem de pontos, conforme Figura 19. Uma Triangulação T de V , denominada $T(V)$, descrita na Figura 19(b) é um conjunto de triângulos tal que: (i) cada triângulo em T possui três pontos de V assumindo o papel de seus vértices; (ii) nenhum triângulo em T intersecta qualquer “Vertex” de V ; (iii) nenhum triângulo em T se intersecta, nem no contorno, tampouco no interior com outro triângulo de T ; (iv) Todo ponto na envoltória convexa de V é alcançado por um triângulo de T ;
- Implicações da definição de triangulação: Como principais implicações da definição acima, tem-se que: i) O conjunto de triângulos T é uma partição da envoltória convexa dada por V . Isto quer dizer que se V descreve uma nuvem de pontos que representa um certo domínio geométrico, a triangulação T não “percebe” a existência de furos, buracos ou orelhas neste domínio. Em outras palavras, T somente “percebe” uma envoltória convexa, e todos os pontos são alcançados por triângulos de T ; ii) Os triângulos de T somente se intersectam em arestas completas e compartilhadas, e também nos vértices comuns. Esta implicação é a mais significativa, pois define a própria topologia global da malha gerada pela triangulação.

A Figura 19 descreve uma triangulação de uma nuvem de pontos qualquer, em conformidade com a definição apresentada em [SHEW_99].

FIGURA 19: O PROCESSO DE TRIANGULAÇÃO QUALQUER $T(V)$ DE UMA NUVEM V DE PONTOS



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2002)

Como pode ser observada, a triangulação nada mais é do que uma forma de conectar um conjunto de pontos, obtendo como resultado um conjunto de triângulos que obedece a definição apresentada anteriormente. Existem várias maneiras diferentes de realizar o processo de triangulação. No que diz respeito ao processo de geração de malhas para solução de problemas em Engenharia, a triangulação mais utilizada é aquela conhecida como triangulação de Delaunay, a ser apresentada a seguir.

Uma vez definido o processo de triangulação, pode-se partir para a definição da Técnica da Triangulação de *Delaunay* que, de forma grosseira, é uma técnica que utiliza o critério de Delaunay para realizar o processo de triangulação de uma nuvem de pontos. O termo "Triangulação de Delaunay" faz referência a um conjunto de técnicas e/ou algoritmos que utilizam um determinado critério, denominado "Critério de Delaunay", cuja principal finalidade é especificar a posição, o tamanho e a forma de um elemento em uma determinada malha.

Este critério serve também para especificar a posição de novos vértices a serem inseridos no interior de um contorno geométrico pré-estabelecido. Em outras palavras, o critério de Delaunay, descreve a maneira pela qual um conjunto de pontos, ou um dado domínio geométrico por ele representado, é totalmente

triangulado, formando uma malha de elementos triangulares. A seguir, é apresentada a proposição de *Delaunay*:

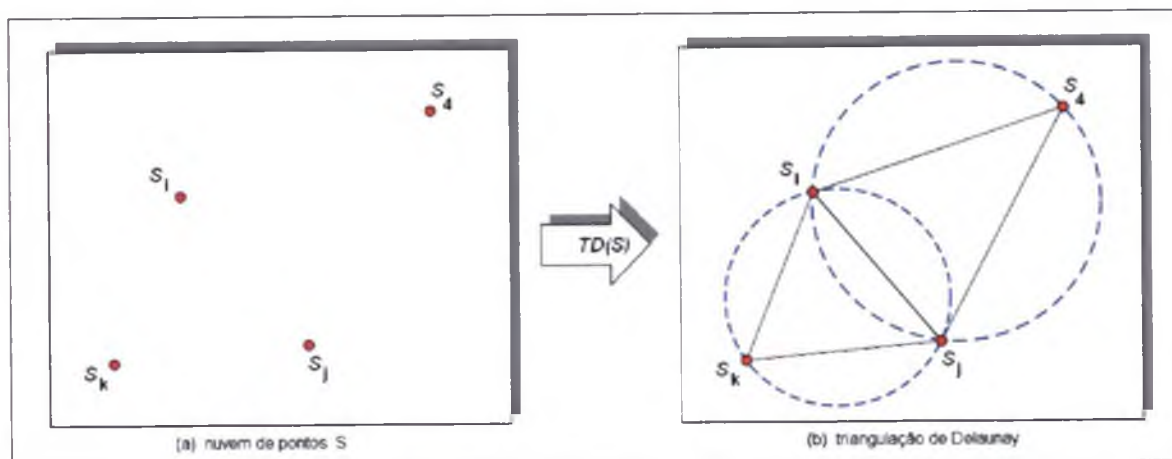
- Proposição de *Delaunay*: de acordo com N. Delaunay, em [BORI_34], todo triângulo pode ser circunscrito por uma única circunferência. Isto quer dizer que sempre será possível encontrar uma circunferência que passa pelos três vértices de um dado triângulo. Ela é única e pode ser observada a Figura 20(b). Em 3D, a mesma proposição estabelece que todo tetraedro pode ser circunscrito por uma única esfera. Em outras palavras, sempre será possível encontrar uma esfera cuja superfície passa por todos os vértices de um tetraedro. Ela também é única.

Esta proposição forneceu condições adequadas para que cientistas, pesquisadores e geometristas pudessem tirar proveito da relação unívoca existente num triângulo (seus três vértices) e a circunferência que o circunscreve para definir formalmente um critério de triangulação, conhecido como “Critério de *Delaunay*” ou “Triangulação de *Delaunay*”. Este critério assume importância fundamental em praticamente todas as técnicas e algoritmos que implementam o processo de geração de malhas não-estruturadas com elementos triangulares, desenvolvidos por diversos autores. Em [OWEN_03] é possível acessar mais de uma centena de trabalhos que utilizam este critério combinado a técnicas específicas. A definição formal do Critério de *Delaunay* ¹⁰ é apresentada a seguir:

- Definição do “Critério de *Delaunay*” para 2D: conforme [BERN_92], a Triangulação de *Delaunay* de um conjunto de pontos $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ é definido pela condição de círculo vazio: um triângulo $s_i s_j s_k$ atende a Triangulação de *Delaunay* $TD(S)$ somente se a circunferência que o circunscreve não contiver nenhum outro ponto de S , além dos vértices $s_i s_j s_k$. O conjunto S também é denominado “nuvem” de pontos. Existe uma exceção para pontos de S em uma posição especial: se o círculo vazio passa por quatro ou mais pontos de S , então estes pontos podem ser triangulados arbitrariamente. Desta forma, assim definida, $DT(S)$ é uma Triangulação de *Delaunay* de uma envoltória convexa de S (*convex hull*).

¹⁰ Uma característica importante do Critério de *Delaunay*: a Triangulação de *Delaunay* usa este critério e representa um processo de geração de triângulos cujas formas são as mais próximas possíveis da forma do triângulo equilátero. Trata-se de um importante diferencial em relação a outros processos de triangulação.

FIGURA 20: CRITÉRIO DE *DELAUNAY* UTILIZADO PARA DEFINIR A TRIANGULAÇÃO DE UMA NUVEM S DE QUATRO PONTOS



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

A Figura 20 descreve o processo de triangulação de uma nuvem S de 4 pontos de acordo com o Critério de *Delaunay*. O resultado deste processo é a formação de dois triângulos formados, respectivamente, pelos conjuntos de vértices $\{s_l, s_j, s_k\}$ e $\{s_l, s_j, s_4\}$. Em cada triângulo pode-se observar que somente uma única circunferência é capaz de circunscrevê-lo. Constatase também que nenhum outro ponto da nuvem encontra-se dentro de cada circunferência, atendendo a condição de círculo vazio. Se houvesse ao menos um único ponto de S dentro deste círculo, a triangulação de seu triângulo circunscrito não seria possível.

Um outro aspecto importante, a respeito da definição do Critério de *Delaunay*, é que ele fornece sempre a mesma triangulação, quando se referencia a mesma nuvem de pontos. Isto significa que o “Critério de *Delaunay*” descreve uma forma não ambígua de geração de *elementos* triangulares. Esta propriedade é derivada da relação unívoca existente entre o triângulo e a circunferência que o circunscreve e é muito conveniente no processo de implementação em sistemas computacionais. A Figura 21 descreve o algoritmo de implementação do Critério de *Delaunay*, segundo [HSUA_97].

FIGURA 21: DESCRIÇÃO DO ALGORITMO QUE IMPLEMENTA O CRITÉRIO DE DELAUNAY

```

//...input : ...point set "P[]", point quantity "n" ...
//...output : ...Delaunay triangulation of "P[]" ...
boolean pointFree;
for ( i = 0; i < ( n - 2 ); i ++ )      {
    for ( j = 0; j < ( n - 1 ); j ++ )  {
        if ( j == i ) continue;
        for ( int k = ( j + 1 ); k < n; k ++ ) {
            if ( ( k == i ) || ( k == j ) ) continue;
            pointFree = true;
            for ( l = 0; l < n; l ++ ) {
                if ( ( l == i ) || ( l == j ) || ( l == k ) ) continue;
                if ( P[l] is located inside the circle which passes through P[i], P[j] and P[k] ) {
                    pointFree = false;
                    break;
                }
            }
        }
        if ( pointFree ) {
            connect P[i], P[j] and P[k] into a Delaunay triangle;
        }
    }
}

```

Fonte: adaptação de [HSUA_97]

Apesar das vantagens oferecidas pelo Critério de *Delaunay* para triangulação de uma nuvem de pontos, existem outros aspectos técnicos que restringem a sua aplicação direta nos processos de triangulação de domínios geométricos mais complexos. Geralmente, este critério é utilizado em conjunto com outras técnicas, visando melhorar a medida de complexidade do algoritmo de triangulação ou melhorar a qualidade de forma e tamanho dos elementos gerados. A qualidade dos elementos gerados será apresentada posteriormente.

As duas principais restrições à aplicação direta do Critério de *Delaunay* são apresentadas a seguir:

- a complexidade do algoritmo $O(n^4)$: apesar da facilidade de implementação, conforme pode ser observado na Figura 21, o algoritmo que implementa puramente o Critério de Delaunay para a triangulação de um domínio geométrico não é eficiente do ponto de vista do tempo necessário para investigar as combinações possíveis e verificar quais delas satisfazem o referido critério. Dependendo do tamanho do conjunto de pontos, sua aplicabilidade é proibitiva, já que sua complexidade é da ordem de $O(n^4)$. Isto quer dizer que o algoritmo que implementa este critério pode estar sujeito a uma explosão combinatória durante o seu

processo de investigação. Em termos práticos, somente para exemplificar, o último elemento triangular de uma malha gerada por este critério a partir de uma nuvem de 1000 pontos, seria definido após uma investigação de mais de 41,4 bilhões de combinações possíveis. Isso tudo considerando ainda que uma malha gerada por uma nuvem de 1000 pontos é entendida como sendo uma malha muito pequena. Em problemas de Engenharia complexos, domínios geométricos podem ser representados por malhas constituídas de milhões, ou até mesmo bilhões, de elementos;

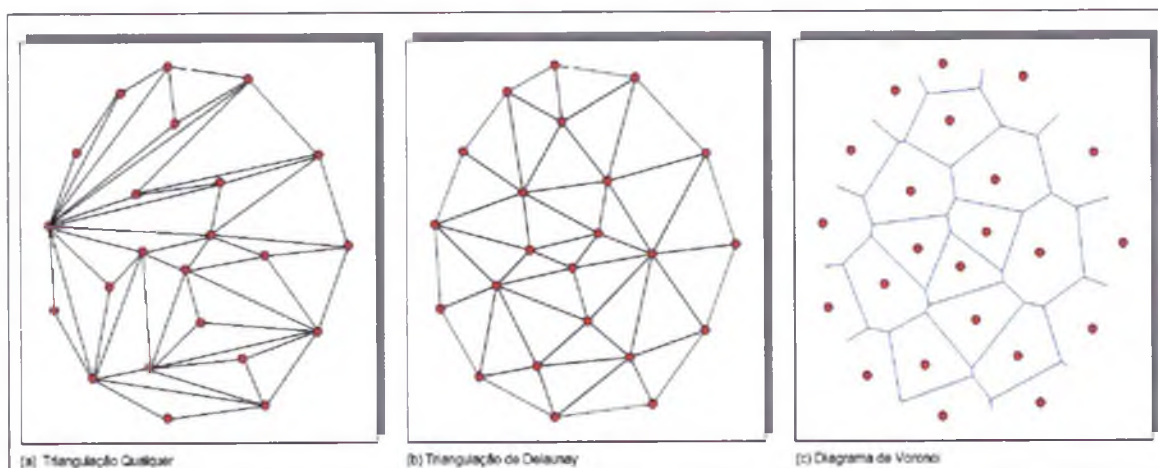
- a geometria do domínio do problema: Nem sempre a aplicação direta do critério de *Delaunay* oferece a solução esperada para a triangulação de uma nuvem de pontos. Geralmente, a geometria do domínio do problema apresenta características que não podem ser descritas simplesmente através de uma superfície limitada por uma envoltória convexa (*convex hull*). A existência de elementos como furos, buracos e orelhas, além da especificação de contornos internos, em domínios geométricos, exige que um tratamento adicional, que deve ser realizado sempre após a triangulação direta, via Critério de *Delaunay*. Além disso, uma nuvem de pontos geralmente representa um conjunto de pontos constituído da menor quantidade de pontos possível para representar um certo domínio geométrico. Estes pontos definem o contorno externo, o contorno interno, os buracos, as orelhas e os furos que fazem parte do domínio do problema. O que acontece é que os pontos da nuvem não são suficientes para oferecer uma densidade de malha adequada no interior do domínio geométrico, após a aplicação direta do referido critério. Um tratamento adicional também é necessário para refinar a malha com o objetivo de buscar uma melhoria tanto no tamanho como na forma dos elementos triangulares obtidos.

Obviamente, as vantagens da utilização do Critério de *Delaunay* motivaram diversos autores a desenvolver técnicas próprias para superar ou minimizar os efeitos impostos pelas suas restrições. Segundo Hsuang-Cheng Lin, em [HSUA_97], a complexidade do algoritmo que implementa o critério de *Delaunay* pode ser reduzida de $O(N^4)$ para $O(N^2)$, se for utilizada uma técnica de três passos. No primeiro passo, encontram-se os dois vértices mais próximos existentes na nuvem.

Obtém-se então uma primeira aresta, direcionada, cujo vértice inicial é dado pelo ponto da nuvem de menor índice na coleção e cujo vértice final é dado pelo outro ponto mais próximo a ele, de índice maior. No segundo passo, é preciso encontrar um terceiro vértice, de menor índice na coleção (mais próximo da aresta escolhida), que esteja à esquerda da aresta escolhida no passo anterior. Neste passo é preciso traçar o círculo de *Delaunay* passando sobre os dois pontos da aresta e o terceiro ponto escolhido. Executa-se o teste do círculo vazio com apenas o sub-conjunto de vértices que estão à esquerda. Se o teste for satisfeito, gera-se o primeiro triângulo. Da mesma forma, busca-se o próximo triângulo à direita da aresta escolhida. No terceiro e último passo, repete-se o segundo passo para as próximas arestas, até que todas as arestas forem continuamente criadas e checadas.

Existem também outras técnicas utilizadas para promover a triangulação de uma nuvem de pontos sem utilizar o Critério de *Delaunay*. Estas triangulações atendem a definição de uma triangulação qualquer, conforme [SHEW_99], a ser apresentada posteriormente. Entretanto, os resultados obtidos por técnicas são altamente dependentes da escolha da aresta inicial para o processo de triangulação da nuvem. Em outras palavras, cada vez que se escolhe uma dupla de pontos diferente para se iniciar a triangulação, a malha resultante é constituída por elementos de tamanhos e formas diferenciadas, resultando em uma topologia geral diferenciada. Já com a utilização do Critério de *Delaunay* isto não ocorre. Isto quer dizer que, diferentemente do critério do círculo vazio, estas técnicas descrevem formas ambíguas de geração de elementos triangulares, o que dificulta a sua implementação computacional. Além disso, conforme [HSUA_97], os elementos gerados por técnicas que não utilizam o Critério de *Delaunay* tendem a apresentar ângulos internos mínimos de menor valor, resultando numa qualidade global da malha de valor também inferior.

FIGURA 22: UMA TRIANGULAÇÃO QUALQUER, A TRIANGULAÇÃO DE DELAUNAY E O SEU RESPECTIVO DIAGRAMA DE VORONOI



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

A Figura 22, acima, descreve duas triangulações sobre uma mesma nuvem de pontos. Na Figura 22(a), é apresentada uma triangulação qualquer, enquanto que, na Figura 22(b), é apresentada a triangulação de utilizando o Critério de *Delaunay*. Observando as duas é possível notar que os elementos da segunda triangulação possuem melhor forma e tamanho, bem como uma melhor topologia de malha. Na Figura 22(c), tem-se o Diagrama de *Voronoi*, representativo da triangulação observada em 22(b).

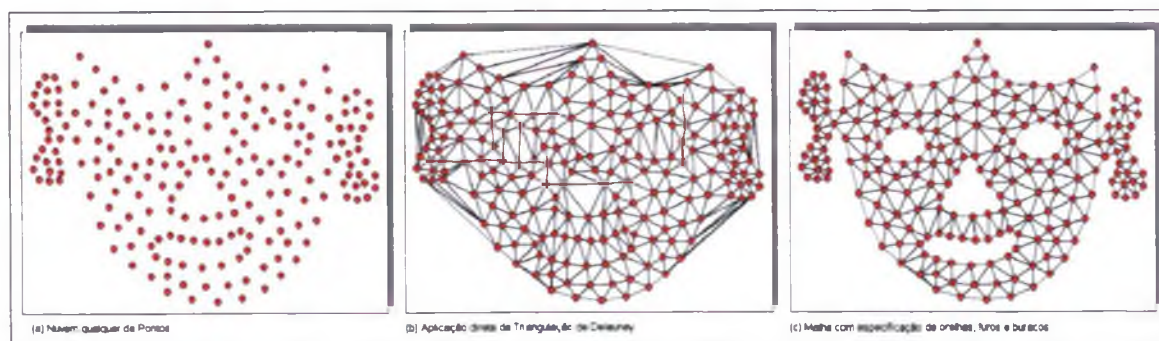
O Diagrama de Voronoi é uma outra forma de representar geometricamente a Triangulação de *Delaunay*, onde linhas perpendiculares à cada uma das arestas de cada elemento, denominadas mediatrizes, conectam-se ao centro de cada circunferência que circunscreve cada elemento triangular. Em termos geométricos, o Diagrama de Voronoi e a Triangulação de *Delaunay* são entendidos como sendo elementos que mantêm uma relação de dualidade entre si. Por exemplo, é possível obter um a partir da especificação do outro, e vice-versa. A seguir é apresentada a definição do Diagrama de Voronoi:

- Diagrama de Voronoi: conforme David Eppstein, em [EPPS_02], o Diagrama de Voronoi de uma coleção de objetos geométricos é uma partição do espaço em células, onde cada uma delas está mais próxima de um certo objeto geométrico do que qualquer outro objeto da

coleção. Estes diagramas, os seus contornos (mediatrizes) e seus duais (Triangulação de *Delaunay*) têm sido reinventados ou “batizados” com diferentes nomes, generalizados, estudados e aplicados muitas vezes sobre diferentes campos de estudo. Geralmente, a utilização deste diagrama ocorre onde o espaço deve ser particionado dentro de “esferas de influência”. Como exemplo, o autor cita os modelos de crescimento de células e de cristais, assim como os modelos de análise de volume de moléculas de proteínas.

Como foi mencionado anteriormente, o processo de triangulação de um dado domínio geométrico pode ser operacionalizado através de várias técnicas diferenciadas. Cada técnica, por sua vez, utiliza um conjunto de algoritmos com o objetivo de alcançar um nível desejado de triangulação de um certo domínio geométrico. A Triangulação de *Delaunay* representa uma destas técnicas que essencialmente implementam o Critério de *Delaunay*. A Figura 23(b) descreve esta triangulação sobre uma nuvem de pontos, descrita pela Figura 23(a).

FIGURA 23: TÉCNICA DE TRIANGULAÇÃO DE UMA NUVEM DE PONTOS, VIA O CRITÉRIO DE DELAUNAY, A ENVOLTÓRIA CONVEXA (CONVEX HULL) E, À DIREITA, A MALHA COM ORELHAS, BURACOS E FUROS ESPECIFICADOS



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

O processo de descrição de domínios geométricos mais complexos exige a especificação de buracos, furos e orelhas. Estes elementos somente podem fazer parte de uma malha se, de alguma forma, após a aplicação da triangulação, um algoritmo for capaz de realizar um conjunto específico de operações cuja finalidade é

modificar, total ou parcialmente, a envoltória convexa (*convex hull*) delimitada pelo domínio geométrico inicial (nuvem de pontos).

Estas operações podem ser reunidas em praticamente três operações principais:

- Remoção de Elementos Triangulares Indesejados: A aplicação direta de uma triangulação sobre um domínio geométrico constituído de furos, buracos e orelhas (de maior complexidade) não é suficiente para garantir uma malha triangular adequada. Como resultado, obtém-se uma envoltória convexa, totalmente triangulada, que é pobre na descrição do domínio real. Tal situação é percebida na Figura 23(b), onde os elementos “olhos”, “nariz”, “boca”, que são do tipo “furo” apresentam elementos triangulares no seu interior. O mesmo acontece com os elementos “orelhas” que apresentam as suas saliências e buracos preenchidos também com elementos triangulares. Para convergir para uma malha adequada, como descrita na Figura 23(c), faz-se necessário realizar uma operação de remoção dos elementos indesejados;
- Especificação de Contornos Internos: Existem situações em que um determinado contorno interno de um domínio geométrico precisa ser especificado antecipadamente para que o processo de triangulação apresente elementos constituídos por vértices e arestas cujos tamanhos ou posições devem ser fixados permanentemente na malha. As razões desta especificação recaem geralmente sobre a necessidade de realização de algum tipo de controle, monitoramento ou acompanhamento, além da análise, sobre uma região específica do domínio geométrico do problema. Além disso, alguns algoritmos utilizam as facilidades da especificação antecipada para informar ao processo malhador que determinadas regiões internas, delimitadas pelo contorno interno, não devem ser trianguladas. Por exemplo, o processo de triangulação apresentado na Figura 23 poderia utilizar o conhecimento que tem sobre o contorno dos elementos “olhos” e “nariz” para restringir a triangulação no seu interior. Desta forma, operações de remoção de elementos triangulares poderiam ser

evitadas. Uma maneira de tornar um processo capaz de perceber a existência de contornos internos é utilizar estruturas de dados do tipo *PSLG (Planar Straight Line Graphs)* em sua implementação. Em [HSUAN_97], encontra-se uma abordagem que apresenta uma implementação completa desta estrutura de dados em um malhador triangular sobre vários estudos de caso;

- Inserção de Pontos de Steiner: Geralmente, uma nuvem de pontos se apresenta como um conjunto de pontos formado pela menor quantidade de pontos necessários para descrever completamente um domínio geométrico¹¹. Ao ser aplicada uma técnica de triangulação sobre esta nuvem, obtém-se uma envoltória convexa constituída de elementos triangulares cuja forma e tamanho são, na sua maioria, indesejados. Para agravar a situação, a distribuição destes elementos na malha é ruim. É praxe realizar um processo de inserção de pontos visando corrigir as propriedades não desejadas. O processo de inserção de pontos no interior da envoltória que utiliza o Critério de *Delaunay* para especificar a posição destes pontos em uma localização mais adequada no interior da envoltória denomina-se “Processo de Inserção de Pontos de Steiner” ou *Steiner’s Points Insertion*, ou ainda *Steiner Triangulation*, conforme [HSUAN_97].

A implementação da técnica de triangulação de *Delaunay* sobre um dado domínio geométrico, combinando variantes das operações acima descritas formam todo o conjunto de técnicas utilizadas para triangulação de uma nuvem de pontos. Cada técnica possui características gerais que a tornam mais adequada para a sua aplicação em uma determinada área do conhecimento ou na solução de problema específico. Muitas vezes utiliza-se o termo “Triangulação de *Delaunay*” para descrever todo este conjunto de técnicas. Entretanto, é possível encontrar na literatura várias nomenclaturas diferenciadas, conforme o autor, para fazer uma referência específica para cada tipo de técnica. Por exemplo, pode-se encontrar em [SHEW_99] as seguintes técnicas distintas de triangulação de uma nuvem de pontos

¹¹ Neste caso, presume-se que uma nuvem inicial de pontos será primeiramente triangulada e somente após esta triangulação é que a malha será refinada. Então, uma nuvem inicial de pontos deve ter a quantidade necessária e suficiente para descrever a geometria de um dado domínio.

que utilizam o critério de *Delaunay*: i) A triangulação de *Delaunay* propriamente dita, que trata da aplicação direta e exclusiva do Critério de *Delaunay*; ii) O diagrama de Voronoi, que também trata da aplicação direta do Critério de *Delaunay*, via diagrama de Voronoi, com redução da complexidade de seu algoritmo denominado “*Voronoi-Segment Point Insertion Method*”. Neste algoritmo, um segmento de *Voronoi* pode ser definido como a linha entre o centro da circunferência que passa por dois centros das circunferências que circunscrevem dois elementos triangulares adjacentes; iii) a triangulação de *Delaunay* Restrita¹², que permite que alguns elementos triangulares não satisfaçam o Critério de *Delaunay* e, por último, iv) a triangulação de *Delaunay* Conforme por uma PLSG, cuja principal característica é a especificação antecipada de *Steiner Points*, onde todos os elementos triangulares, sem exceção, obedecem ao Critério de *Delaunay*. As duas últimas técnicas também são conhecidas como “*Boundary Constrained Triangulation*”.

2.3.2.3 Técnica do Avanço da Fronteira

Genericamente, a técnica do Avanço da Fronteira é uma técnica de triangulação de um dado domínio geométrico, cuja descrição ocorre somente em termos de seu contorno externo. Uma vez conhecido o contorno, e obtida uma aresta inicial como “ponto” de partida, busca-se a triangulação de seu interior até que não exista nenhuma outra aresta que não faça parte de um elemento triangular.

A técnica do Avanço da Fronteira descreve uma família de algoritmos de geração de malhas triangulares (2D) ou de malhas tetraédricas (3D). Tal família recebe internacionalmente os nomes de “*Advancing Front Method*” e “*Moving Front Method*”. Os principais colaboradores deste método são os professores Sr. Rainald Lohner, da Universidade George Mason, e Sr. S.H. Lo, da Universidade de Hong Kong, conforme [SHEW_97].

Em termos específicos, de acordo com [SHEW_97], este método estabelece que um novo elemento da malha é construído progressivamente a partir de uma curva (2D) ou superfície (3D), denominada “*front*”. Um “*front*” ativo é mantido sempre que um novo elemento da malha é formado. A Figura 24(a) representa uma

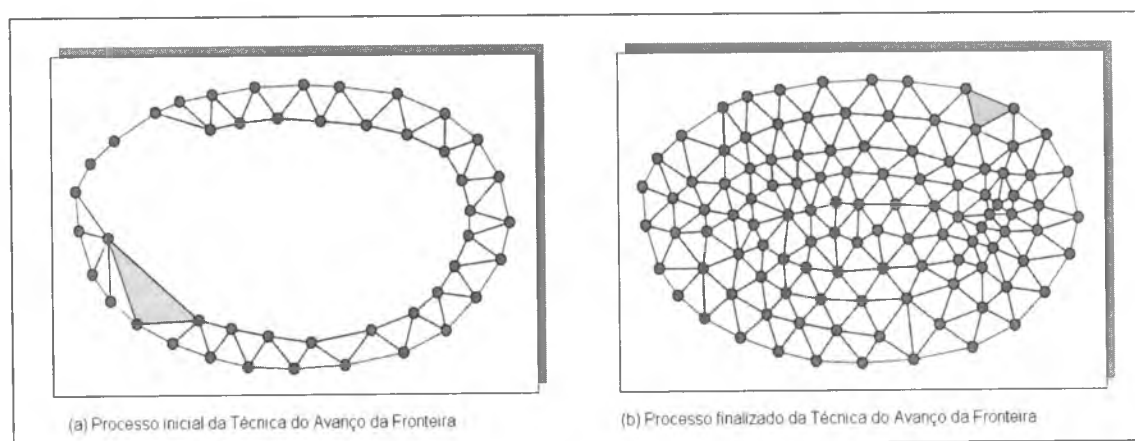
¹² Existem situações em que as restrições geométricas sobre o domínio do problema impedem que todos os elementos da malha satisfaçam o Critério de *Delaunay*.

adaptação do diagrama do autor, onde os triângulos têm sido formados no contorno. Observa-se que o mais recente está hachurado. Como o algoritmo progride, o “*front*” atual avançará com o objetivo de preencher a área restante com elementos triangulares. Um conjunto de verificações é necessário para garantir que, tanto em 2D como em 3D, os novos elementos gerados a partir do “*front*” somente se intersectem com os elementos já existentes em regiões autorizadas pelas regras de triangulação. Outros controles também devem ser operacionalizados pelo algoritmo. Por exemplo, para tratar a convergência para uma malha final com densidade de elementos controlada, é preciso implementar um conjunto de funções de forma e tamanho adicional.

Ainda de acordo com o autor supra mencionado, uma das formas do método do Avanço da Fronteira é chamada de “*Advancing Layers*” e é muito utilizada para a geração de faixas de contorno em aplicações para Mecânica do Fluido Computacional (CFD) e princípios variacionais de *Navier-Stokes*. Este método oferece um controle adequado do tamanho dos elementos próximo ao contorno.

A Figura 24 descreve a utilização do método do Avanço da Fronteira em duas fases. Na primeira fase, descrita em 24(a), observa-se a formação de um novo elemento triangular na área hachurada. Na segunda fase, descrita em 24(b), tem-se o domínio geométrico totalmente triangulado por este método.

FIGURA 24: TÉCNICA DE AVANÇO DA FRONTEIRA: FASE INICIAL E FINAL



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2002)

Conforme William D. Henshaw, em [HENS_01], o método do Avanço da Fronteira gera uma malha não-estruturada pelo “surgimento” de novos elementos a partir de um conjunto inicial de curvas (2D) ou superfícies (3D) na qual descrevem um domínio conectado. As representações discretizadas destas curvas ou superfícies são conhecidas como “*front*” na qual são sucessivamente avançados até que o domínio seja totalmente preenchido com uma malha não-estruturada. O avanço do “*front*” faz referência a um processo pelo qual novos elementos são criados.

Este processo pode ser resumido nas seguintes atividades¹³:

1. Escolha e realize a discretização de um contorno inicial;
2. Selecione uma face para assumir o “*front*” atual e avance;
3. Encontre todos os vértices vizinhos já existentes;
4. Calcule os possíveis novos vértices;
5. Escolha o novo vértice da lista contendo os vértices novos e existentes;
6. Desconsidere o “*front*” atual e adicione as novas faces;
7. Retorne ao passo 2 e repita a operação até o “*front*” estar vazio.

Inicialmente, o domínio geométrico deve ser especificado em termos de seu contorno externo. Assumindo que uma das faces deste contorno é considerado como a face “*front*” inicial, a geração da malha consiste na construção de novos elementos a partir destas faces no “*front*”. As faces usadas são desconsideradas do “*front*”, enquanto que as novas faces geradas são adicionadas à ele. Quando nenhuma outra nova face estiver associada ao “*front*”, então tem-se que a malha está completamente definida.

A seguir, é apresentado um capítulo específico para abordar as questões relativas à qualidade de uma dada malha triangular.

¹³ Existem outras técnicas, como a de S.H. Lo, em que todos os nós do interior são gerados previamente, antes da aplicação do avanço da fronteira.

3 MÉTRICAS DE QUALIDADE DE MALHAS-2D

“Os modelos existem para serem usados,
não para acreditarmos neles”.
(Henri THEIL)

O objetivo deste capítulo é apresentar, resumidamente, as principais métricas de qualidade de malhas em duas dimensões, triangulares, que são utilizadas para descrever as técnicas de refinamento destas malhas e de melhoria de sua qualidade. Tais considerações são fundamentais para a apresentação e entendimento de uma nova medida de qualidade de malha que será apresentada no capítulo seguinte.

Obviamente, a qualidade de uma malha pode ser observada sob vários ângulos diferentes. Algumas avaliações são puramente subjetivas, enquanto que outras são totalmente quantitativas. Além disso, a noção de qualidade de uma dada malha é uma função que depende de seu propósito ou de sua aplicação. Assim, as considerações sobre qualidade que serão apresentadas neste capítulo dizem respeito somente àquelas malhas cuja finalidade maior é a sua aplicação, direta ou indireta, da forma mais adequada possível, de *FEM* ou de outros métodos numéricos de solução de equações diferenciais parciais.

É importante destacar que existe um consenso na comunidade científica de que o entendimento a respeito do relacionamento existente entre a geometria da malha e a acurácia numérica, assim como com o próprio condicionamento da matriz de rigidez, permanece incompleto. Mesmo quarenta anos após a invenção do *FEM*. Richard Shewchuk, em [SHEW_02], alega que: “toda a experiência da engenharia e o esforço de matemáticos não são ainda suficientes para construir um conjunto de proposições matemáticas capaz de escolher o melhor elemento entre dois elementos de qualidade intermediária”.

Mesmo diante destas dificuldades, as métricas aqui apresentadas de fato servem como guia para que engenheiros analistas, especialistas em métodos numéricos e geometristas construam algoritmos de geração e refinamento de malhas que busquem, cada qual à sua maneira, uma forma de melhor especificar o relacionamento entre a geometria de uma malha e a acurácia da solução computacional sobre ela aplicada.

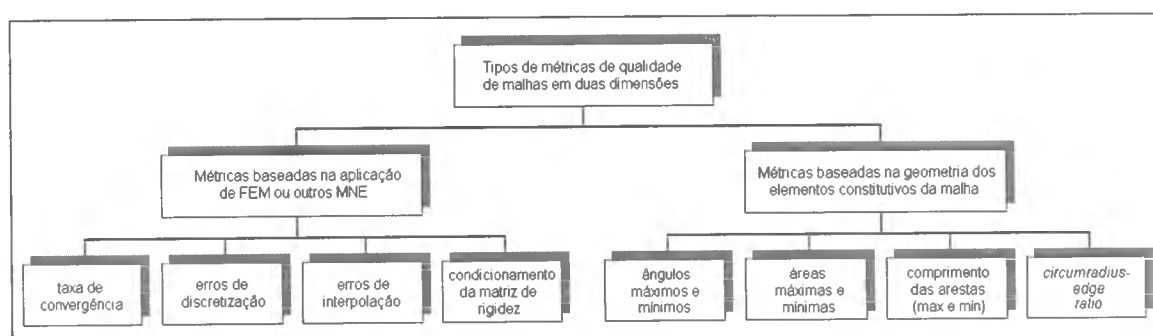
Apesar do fato de que este capítulo tem como objetivo a descrição das principais métricas de qualidade de malhas atualmente consideradas nas técnicas de refinamento e de melhoria de sua qualidade, espera-se também que ele possa contribuir para um melhor entendimento sobre o que vem a ser qualidade de malhas, dentro do contexto definido pela sua aplicação em problemas de engenharia, apresentando-se os principais conceitos que estão a ela relacionados, incluindo-se aqui as métricas de qualidade mais utilizadas. Para tanto, faz-se necessário apresentar previamente as principais abordagens desenvolvidas por autores que estudam o problema de como refinar uma malha e impor uma “certa” melhoria à sua qualidade. Isto é feito muito resumidamente. Assim, cada abordagem visa resolver este problema de uma maneira particular, utilizando-se de técnicas, algoritmos e heurísticas próprias. Desta forma pode-se perceber quais são as métricas de qualidade que estão encapsuladas em cada uma destas abordagens e ainda verificar como elas são utilizadas para medir a qualidade de uma malha, ou ainda inferir sobre a sua variação.

De maneira geral, as medidas de qualidade de uma dada malha podem ser classificadas em dois tipos básicos. Neste capítulo, o primeiro tipo de medidas faz referência às métricas de qualidade que estão diretamente relacionadas à acurácia da malha. Isto quer dizer que estas medidas devem descrever a capacidade de uma malha em representar com fidelidade o fenômeno atuante sobre a geometria do problema, dentro de uma margem de erro aceitável. Naturalmente, estas métricas apresentam-se como formas adequadas de medir o erro obtido durante a utilização da malha em uma solução numérica de um problema cuja solução real é previamente conhecida. Além disso, o conhecimento sobre a taxa de convergência de uma aplicação sobre uma malha pode fornecer uma boa indicação a respeito de sua qualidade. Entretanto, para acompanhar o processo de melhoria da qualidade da malha por este tipo de medida é necessário submetê-la sistematicamente a um pós-processador, o que significa aumentar o custo computacional para o processo de acompanhamento de sua qualidade. Para evitar este custo adicional, analistas, especializados na aplicação de *FEM*, desenvolveram métricas capazes de relacionar a forma e o tamanho dos elementos de uma malha com estimativas de erros e de condicionamento associadas com a aplicação do referido método numérico.

O segundo tipo faz referência às métricas de qualidade que estão diretamente relacionadas com a topologia da malha. Isto quer dizer que estas medidas devem descrever quanto uma dada malha é constituída por elementos considerados “bons” de forma e de tamanho, em termos geométricos. Trata-se de métricas que utilizam a geometria destes elementos para fornecer medidas de qualidade e, baseada nelas, suportar a aplicação de algoritmos e heurísticas cuja finalidade principal é o refinamento da malha e a melhoria da sua qualidade, através dos processos de inserção de novos pontos, da geração de novos elementos ou ainda através do processo de suavização da malha. Sabe-se que os dois primeiros processos alteram a topologia da malha, enquanto que o terceiro mantém a sua topologia, mesmo havendo alteração da forma e tamanho dos elementos.

O diagrama da Figura 25, descreve a classificação dos dois principais tipos de medidas de qualidade de malhas a serem apresentadas nesta seção. Nesta classificação, verificamos a existência de quatro tipos distintos de métricas de qualidade que são baseadas na aplicação de MNE sobre uma dada malha triangular. São aquelas relativas à taxa de convergência do MNE, ao erro de discretização, aos erros de interpolação e relativas ao condicionamento da matriz de rigidez. Através destas métricas é possível medir a adequação dos elementos de uma malha, em termos de forma e tamanho, e verificar se ela fornece um valor dentro de um limite preestabelecido. Caso o erro medido esteja acima do referido limite, um processo de refinamento e melhoria da malha deve ser realizado. Este tipo de métrica será apresentado no próximo capítulo.

FIGURA 25: OS TIPOS DE MÉTRICAS DE QUALIDADE DE MALHAS-2D



Fonte: Alexandre Manoel dos santos (2003)

Com relação às métricas de qualidade baseadas na geometria dos elementos, verifica-se que existem também quatro medidas principais que são implementadas na maioria dos algoritmos de melhoria e de refinamento das malhas. Trata-se de métricas baseadas nos ângulos internos, nas áreas e nos comprimentos das arestas dos elementos. Além dessas, especial atenção foi dedicada à uma quarta métrica, denominada “*circumradius-edge ratio*”, muito utilizada por diversos autores na implementação de suas próprias técnicas de refinamento e melhoria de malhas triangulares. Para apresentar estas medidas e descrever como são utilizadas, foi escolhida a técnica denominada *Delaunay Refinement*, que implementa todas as quatro medidas deste tipo de forma clara e elegante, conforme será visto na seção 3.2.

A apresentação das medidas de qualidade de forma separada e em conformidade com a classificação descrita na Figura 25 representa uma maneira conveniente de abordar as diversas linhas de trabalho que alguns pesquisadores vêm desenvolvendo ao longo do tempo, no sentido de justificar a importância de suas técnicas de refinamento de malhas, e de melhoria de suas qualidades, na solução de problemas de Engenharia.

Não se pretende aqui estabelecer um novo padrão de classificação das medidas existentes. Trata-se apenas de uma forma de apresentação organizada, visando facilitar a compreensão das principais medidas de qualidade de malhas, “preparando o terreno” para que uma nova medida de qualidade possa ser “semeada” e apresentada no capítulo seguinte.

Assim, a apresentação das principais métricas de qualidade de malhas será realizada levando-se em consideração a classificação supra mencionada. A primeira classe a ser apresentada é aquela baseada no erro medido na aplicação de MNE.

3.1 MÉTRICAS BASEADAS NA APLICAÇÃO DA SOLUÇÃO NUMÉRICA

Quando uma malha de elementos triangulares, ou tetraédricos, é usada para formar uma aproximação linear por partes de uma função, a acurácia da aproximação depende do tamanho e da forma destes elementos.

Esta seção apresenta as conexões matemáticas existentes entre a geometria da malha e a acurácia da solução numérica adotada, para resolver o

problema em engenharia associado. Geralmente, estas conexões estão expressas em termos de taxas de convergência, de limites aceitáveis de erros e em termos de medidas de qualidade de elementos.

Métricas baseadas na aplicação de *FEM* (*VEM*, *BEM*, *CFD*, entre outros) continuam a ser desenvolvidas por diversos autores, cuja principal preocupação é a identificação, em termos quantitativos, dos efeitos sobre a acurácia de uma determinada solução aproximada, causados tanto pelas características topológicas de uma malha como pelas características geométricas de cada um de seus elementos. Trata-se de um problema ainda em aberto, pois não se encontrou uma medida capaz de descrever a adequação de um dado elemento de uma malha, ou da própria malha como um todo, de forma unificada, correta, completa e coerente em relação às suas várias aplicações possíveis na solução de problemas em engenharia.

A cada nova abordagem sobre este capítulo, pesquisadores, engenheiros analistas e aplicadores de MNE estabelecem novas medidas para avaliar a capacidade de uma determinada solução numérica, obtida por aproximação, de representar com fidelidade um fenômeno atuante sobre a geometria de um problema, descrita através de uma malha, com a melhor taxa de convergência possível.

Em termos práticos, as abordagens e as técnicas que geram as métricas pertencentes a este grupo de medidas são caracterizadas em função do momento em que as medidas são valoradas. Em outras palavras, as abordagens e técnicas não só se diferenciam pelas métricas que implementam como também se diferenciam em função delas serem aplicáveis à fase de pré ou pós-processamento da aplicação numérica. Este aspecto é importante porque o momento em que as medidas são valoradas pode “falar” um pouco sobre a natureza da métrica implementada e sobre suas características relevantes. E isto é útil para o entendimento de como estas métricas funcionam. Por exemplo, será visto na seção seguinte que a taxa de convergência é uma métrica que descreve a eficiência de um processo de aplicação sobre uma dada malha.

3.1.1 Métricas Baseadas na “Taxa de Convergência”

Este tipo de métrica tem sido muito utilizado por pesquisadores que estudam os problemas referentes à quantificação dos efeitos causados por malhas de qualidade inferior, portanto consideradas “malhas pobres”, na eficiência da solução computacional. Muitos destes estudos pertencem à área do conhecimento dada por CFD. Assim, técnicas de refinamento de malha e de melhoria de sua qualidade são críticas para a eficiência do processo de solução numérica.

O pesquisador Michel Batdorf alega que, em [BATD_97], malhas com elementos distorcidos tornam as soluções mais difíceis de computar, caracterizadas ainda por uma menor acurácia. Neste artigo, está claro que a existência de uma relação direta de causa e efeito entre a qualidade de uma malha e o conjunto de sintomas, constituído tanto pela eficiência como pela acurácia das soluções aplicadas aos campos de CFD e FEM, faz parte do saber partilhado entre toda a comunidade que estuda a qualidade de malhas baseadas na solução computacional.

Pesquisadores, que utilizam esta métrica, acreditam que a melhor maneira de avaliar a qualidade de uma malha é através da observação sobre os valores da taxa de convergência dos métodos numéricos realizados por “resolvedores” computacionais. Assim, a qualidade de uma malha, ou a sua própria variação, somente pode ser observada e medida após o devido pós-processamento da malha. Trata-se da defesa da idéia de que a qualidade de uma malha é totalmente dependente da análise sobre a solução numérica obtida. Assim, malhas diferentes podem ser comparadas em função das taxas de convergência associadas à operacionalização da fase de pós-processamento sobre cada uma delas. A melhor taxa de convergência indica a melhor malha. Desta forma, pode-se verificar a necessidade de se realizar um novo refinamento da malha ou ainda implementar uma técnica de melhoria de sua qualidade conforme o valor da referida taxa.

A taxa de convergência como medida de qualidade de uma malha pode ser também utilizada para medir a eficiência das técnicas de refinamento destas malhas, que são realizadas na fase de pré-processamento. De acordo com [BATD_97], as técnicas de refinamento que estabelecem políticas de inserção e exclusão de pontos de uma malha podem ser encontradas em [OLIV_95] e [RIVA_84]. Aquelas técnicas responsáveis pela implementação de políticas de re-conexão local de pontos de uma

malha são encontradas em [JOE_89] e [JOE_95]. Técnicas de suavização de malhas, que são aquelas que reposicionam o *grid* de pontos sem alterar a topologia da malha podem ser encontradas em [AMEZ_95], [CANA_93] e [PART_91]. A eficiência destas técnicas pode ser avaliada e comparada, entre si, utilizando-se a taxa de convergência como métrica.

Além disso, os defensores desta métrica justificam a sua importância pela alegação de que o custo envolvido nos procedimentos de melhorias de malhas, juntamente com o tempo levado para obter-se malhas de “alta” qualidade, são menores que os custos envolvidos na solução numérica sobre malhas de qualidade “pobres”.

3.1.2 Métricas Baseadas nos “Erros de Discretização”

As métricas baseadas nos erros de discretização são aquelas utilizadas para medir a diferença entre a solução computada, através de *FEM*, e a solução verdadeira.

Naturalmente, as técnicas de refinamento de malhas e de melhoria de sua qualidade que utilizam estas métricas necessitam de uma fase de pós-processamento, onde o erro de discretização é medido e comparado com algum limite preestabelecido.

De acordo com [SHEW_02], uma dificuldade explícita na utilização direta desta métrica reside no fato de que é necessário o conhecimento prévio da solução verdadeira sobre a geometria de um dado problema, o que nem sempre é possível obter¹⁴. Para agravar ainda mais a dificuldade do seu uso, tem-se que medidas de erro diferentes são obtidas sobre a mesma geometria, quando a solução computacional varia em sua aplicação numérica. Conforme o autor, os erros de discretização dependem, em parte, da equação diferencial parcial associada ao problema e, em parte, do método de discretização utilizado para gerar a malha. Assim, com relação à primeira dependência, é necessária uma boa dose de experiência em análise e na aplicação de FEM sobre problemas de engenharia¹⁵. Com relação à dependência do método de discretização, uma outra dose de

¹⁴ Esta é a razão pela qual atualmente existem muitos métodos para avaliação ou estimativas de erros, tanto *a priori* quanto *a posteriori*.

¹⁵ Entretanto, estes requisitos são básicos para quem deseja utilizar o Método dos Elementos Finitos.

experiência é necessária para definir os aspectos geométricos e topológicos da malha no momento de sua geração. Um exemplo claro deste aspecto é a definição da densidade de elementos em determinadas regiões da malha, antes de ser considerada pronta para o pós-processamento.

Independentemente das dificuldades de sua utilização, os pesquisadores que defendem a sua aplicação acreditam que o erro de discretização descreve a verdadeira discrepância entre a aproximação e a solução real, de forma que não há como discutir a qualidade de uma dada malha sem levar em consideração a medida do erro obtida durante o pós-processamento. Nos casos em que a solução real é impossível de ser especificada, acredita-se que é possível minimizar os valores deste tipo de erro selecionando elementos da malha, cuja forma e tamanho são definidos para controlar os erros de interpolação, uma vez que, conforme [SHEW_02], este tipo de erro está muito proximalmente relacionado com os erros de discretização.

Estas métricas são também utilizadas em conjunto com aquelas que são baseadas na taxa de convergência para medir a eficiência de determinados algoritmos de refinamento e melhoria de malhas. Geralmente, técnicas diferentes que atendem um certo limite de erro de discretização são comparadas em termos de sua eficiência, medida através da taxa de convergência.

3.1.3 Métricas Baseadas nos “Erros de Interpolação”

Uma outra maneira de medir a adequação dos elementos de uma malha ao processo de solução numérica é através dos valores referentes aos erros de interpolação. O pesquisador M. Berzins, em [BERZ_97] e [BERZ_98], apresenta uma coleção de referências para estudos sobre quando uma dada malha é apropriada para representar a solução numérica, em termos de erros de interpolação.

A acurácia e a velocidade de alguns métodos numéricos ficam comprometidas devido a um pequeno conjunto de elementos “ruins”. Entende-se por “bons”, aqueles elementos cujas formas se aproximam da “equilaterial”, e como elementos “ruins”, aqueles distantes desta forma, também denominados “*skinny*”.

De acordo com Richard Shewchuk, em [SHEW_02], a acurácia da interpolação é importante para a maioria das tarefas numéricas. Em termos de *FEM*, os erros de interpolação são tão importantes quanto os erros de discretização e o condicionamento da matriz de rigidez. Espera-se que algoritmos de geração e melhoria de malhas produzam elementos tão “bons” quanto possível.

De maneira geral, o processo de interpolação sobre uma dada malha triangular constrói uma função que pretende aproximar alguma função “verdade”, cuja identidade exata pode ou não ser conhecida. Existem dois tipos de erro de interpolação associados ao processo de interpolação e que são relevantes para a maioria das aplicações:

- a diferença entre a função interpolada e a função verdadeira: se a função verdadeira é suave, então o erro na função interpolada pode ser reduzido simplesmente aplicando-se uma redução sobre o tamanho dos elementos da malha. Em outras palavras, este erro pode ser minimizado aumentando-se a densidade de elementos em uma região específica da malha (técnica conhecida como “refino h ”);
- a diferença entre o gradiente da função interpolada e o gradiente da função verdadeira: por experiência, tem-se que este tipo de erro é extremamente afetado pela forma e pelo tamanho dos elementos. Em *FEM* este erro contribui para a existência de erros de discretização (relacionados à ordem do polinômio interpolador).

Existe uma relação direta entre os erros de interpolação e os elementos da malha, cuja geometria apresentam ângulos grandes. Em [SHEW_02], encontra-se uma referência aos ângulos grandes dos elementos como sendo os verdadeiros “inimigos” para a tarefa de minimização dos erros de interpolação, uma vez que os erros de gradiente podem crescer muito arbitrariamente, quando os ângulos dos elementos se aproximam de 180° . De forma análoga, Babuska e Aziz, em [BABU_76], demonstraram que a acurácia da solução obtida por *FEM* sobre malhas triangulares degrada seriamente com ângulos que são permitidos se aproximarem de 180° . Assim, conclui-se que os ângulos pequenos não são nocivos à acurácia da interpolação ou aos erros de discretização, apesar de serem nocivos ao condicionamento da matriz de rigidez. Anteriormente ao trabalho de Babuska e Aziz, os pesquisadores acreditavam que ângulos pequenos deveriam ser proibidos.

Naturalmente, os erros de interpolação são difíceis de computar. É necessário conhecer antecipadamente o fenômeno atuante sobre a geometria do problema. Isto significa que é preciso conhecer a função verdadeira ou o seu gradiente em todo o seu domínio. E isso não é trivial. Além disso, uma boa dose de experiência em FEM é necessária para especificar a função de interpolação mais adequada na aplicação do método, e outra dose ainda maior é necessária para perceber o relacionamento entre o erro medido e a geometria dos elementos da malha. Em outras palavras, não basta medir o erro. É preciso avaliar o seu significado em relação à malha e em relação às suas regiões, onde os elementos apresentam erros fora do limite, para que ações de intervenção e refinamento possam ser propostas.

A utilização desta métrica como meio de comparação entre dois elementos constituídos de formas diferentes e de qualidade intermediária ocorre através da especificação de um limite de erro, cujo valor serve de comparação com o valor do erro de interpolação medido para uma dada malha ou elemento. Então, uma malha com erro de interpolação menor é considerada uma malha melhor do que outra, cujo erro de interpolação seja maior, mesmo que o erro medido de ambas encontre-se dentro do limite preestabelecido. Muitas vezes, também, utiliza-se o limite de erro preestabelecido como parâmetro de julgamento sobre a necessidade, ou não, de se efetuar um novo refinamento da malha.

Um dos aspectos mais importantes para a utilização desta métrica na avaliação da qualidade de uma malha é a especificação dos valores dos limites superior e inferior de erro. O artigo de Richard Shewchuk descreve, em [SHEW_02], um conjunto completo de proposições e parâmetros cuja finalidade é fornecer estes limites de erro de interpolação em função da geometria da malha. Eles estão resumidamente apresentados a seguir (as provas foram omitidas):

- definição de uma Aproximação Linear por Partes - $g(p)$: Seja T uma malha triangular. Seja $f(p)$ uma função escalar contínua definida sobre a malha T . Então, uma $g(p)$ pode ser definida como sendo uma aproximação linear por partes de $f(p)$, onde $g(v) = f(v)$ em cada vértice “v” de T e $g(p)$ é linear sobre cada elemento de T ;
- máximo valor do erro de interpolação sobre um dado elemento: é definido como $\|f(p) - g(p)\|_{\infty}$;

o máximo valor do erro do gradiente interpolado sobre um dado elemento: é definido como $\|\nabla f(p) - \nabla g(p)\|_{\infty}$;

Para a tarefa de aplicação de um limite de erro é preciso restringir a função $f(p)$ de alguma forma. Em seu artigo o autor supra citado sugere que $f(p)$ assuma um comportamento tal que seja suave e que sua curvatura absoluta seja limitada, em cada elemento “ t ” de T , por alguma constante $2C_t$. Neste caso, “ C_t ” representa um limite de curvatura por elemento, obtida a partir de estimativas de erro, baseada sobre o conhecimento a respeito da função a ser interpolada. Isto implica que esta curvatura exista em termos de sua derivativa segunda. Desta forma, assume-se que seja considerada “bem comportada” no domínio geométrico dado pela malha T . Assim, presume-se que: $\|f''(p)\| \leq 2C_t$.

Os referidos limites, apresentados no Quadro 2, são utilizados para avaliar e melhorar a malha. Em outras palavras, o autor sugere que os erros máximos de interpolação que podem ocorrer em uma solução computacional *FEM*, sobre uma dada malha T , sejam limitados através de limites de erro calculados sobre uma análise geométrica de cada elemento da malha, conforme o Quadro 2 e a Figura 26 apresentada a seguir. Assim, utiliza-se um só valor para limites de erro, superior e inferior, a serem impostos em cálculos de erro entre a função escalar e a função aproximada como sendo igual à $C_t * r_{mc}^2$. Quando o erro considerado ocorre sobre a diferença do gradiente destas funções, então estes limites encontram-se em conformidade com a segunda coluna do referido quadro.

QUADRO 2: MÉTRICAS DESENVOLVIDAS PARA O ESTABELECIMENTO DE LIMITES DE ERRO DE INTERPOLAÇÃO

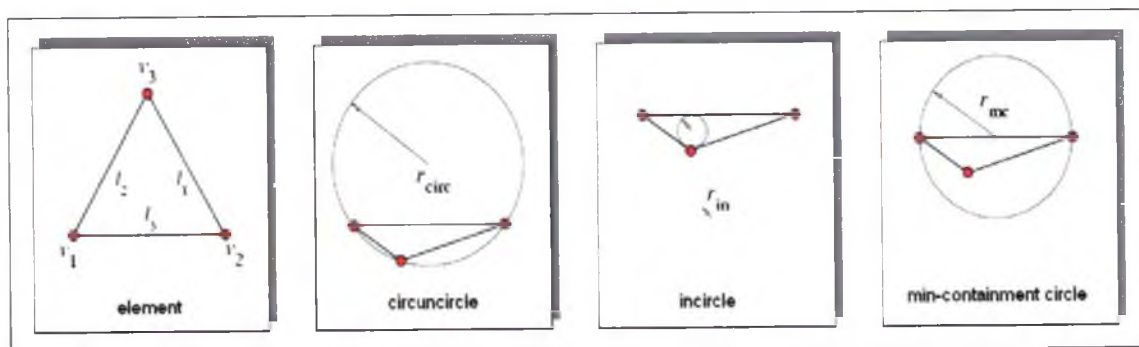
Estabelecimento de Limites de Erro de Interpolação		
limite	diferença: $\ f(p) - g(p)\ $	diferença: $\ \nabla f(p) - \nabla g(p)\ $
limite superior	$[C_t * r_{mc}^2]$	$[(C_t * l_{max} * l_{med} * (l_{min} + 4 * r_{in})) / 2A]$
limite inferior	$[C_t * r_{mc}^2]$	$[C_t \max\{r_{circ}, a_{max}, (l_{max} - a_{med}^2)^{1/2}\}]$
r_{mc}	“Min-containment circle” – o raio do menor círculo que contém o elemento triangular. O diâmetro deste círculo passa pela maior aresta do triângulo nele contido.	
$l_{max}, l_{med}, l_{min}$	O máximo, médio e mínimo comprimento de aresta de um elemento triangular.	
r_{in}	O raio da circunferência inscrita no elemento triangular. Ver Figura 3.2	
A	O valor da área do elemento triangular.	
r_{circ}	O valor do raio da circunferência que circunscreve o elemento triangular	
a_{max}	O valor da altura máxima de um elemento triangular: $a_{max} = 2A/l_{min}$.	
a_{med}	O valor da altura média de um elemento triangular: $a_{max} = 2A/l_{med}$.	

Fonte: em [SHEW_02] e criadas por [SHAY_98]

O quadro acima descreve apenas os limites de erro de interpolação, inferiores e superiores, para o caso de malhas-2D, com elementos triangulares. Para malhas-3D, com elementos tetraédricos, deve-se consultar [SHEW_02] e [MILL_95].

Caso exista algum elemento cujo valor do erro de interpolação medido ultrapasse o limite preestabelecido, a malha deve ser refinada. Esta abordagem foi inicialmente desenvolvida por Shayne Waldron, em [WALD_98], que propõe que a mesma técnica seja aplicada quando o erro de interpolação medido ocorre sobre o gradiente entre as duas funções envolvidas. Neste caso, basta aplicar os limites cujos valores também estão estabelecidos no Quadro 2, na sua terceira coluna à direita, onde se pode observar que o limite superior é uma função da forma do elemento, através das medidas de sua área e dos comprimentos de suas arestas. Os elementos geométricos associados aos limites de erro deste tipo de métrica, estão descritos na Figura 26.

FIGURA 26: ELEMENTOS GEOMÉTRICOS ASSOCIADOS AOS LIMITES DE ERROS DE INTERPOLAÇÃO



Fonte: adaptado de [SHEW_02]

O erro sobre o gradiente é muito mais sensível às formas “ruins” dos elementos, quando eles possuem ângulos próximos a 180° do que quando eles possuem ângulos próximos a zero. Somente para ilustrar esta questão, pode-se imaginar um triângulo isósceles, cujo maior ângulo se aproxima de 180° . Com estas características, ele teria uma área aproximadamente zero, sem haver uma grande variação no comprimento de suas arestas, já que a sua forma é isósceles. Assim, o seu limite de erro cresceria muito arbitrariamente. Agora, imagine-se um outro triângulo isósceles, constituído por um ângulo muito pequeno e por outros dois ângulos próximos a 90° . Neste caso, o menor ângulo se aproxima de zero, a área de seu elemento também se aproxima de zero, mas a medida l_{min} e r_{in} também se aproximam de zero na mesma proporção. Então, o limite de erro muda pouco. Esta é a prova de que ângulos próximos de 180° são nocivos aos erros de interpolação, enquanto que aqueles próximos a zero são benignos.

Esta é a maneira utilizada por aqueles que estudam o erro de interpolação como medida para avaliação da qualidade de uma malha. Geralmente, estes pesquisadores preferem escolher a forma dos elementos de uma malha, via geradores de malhas específicos, controlando mais a diferença sobre o gradiente, dada por $\|\nabla f(p) - \nabla g(p)\|$, do que controlando a diferença direta entre as funções, dada por $\|f(p) - g(p)\|$. É importante salientar que os limites de erros apresentados no Quadro 2 descrevem um relacionamento entre a geometria do elemento e o erro de interpolação, obtido pela aplicação de *FEM*. A seguir, são apresentadas as

considerações sobre o condicionamento da matriz de rigidez pertencente ao método *FEM* de aplicação da solução computacional.

3.1.4 Métricas baseadas no “Condicionamento da Matriz de Rigidez”

Esta seção apresenta o quarto e último tipo de métrica baseada na aplicação da solução numérica. O seu objetivo é apresentar um pequeno conjunto de técnicas e métricas baseadas no condicionamento da matriz de rigidez, que são utilizadas para controlar o seu número de condicionamento, em um cenário representado por um problema de engenharia, onde *FEM* é aplicável. Não se trata do levantamento de todas as métricas e técnicas deste tipo que foram desenvolvidas pela comunidade científica. Entretanto, aqueles interessados no levantamento do estado da arte podem iniciar sua investigação, tomando como ponto de partida as bibliografias referenciadas nesta seção.

O condicionamento da matriz de rigidez assume um importante papel na aplicação de *FEM*. A solução numérica obtida através deste método é altamente afetada por matrizes mal condicionadas. Neste caso, por consequência, tem-se que os sistemas solucionadores de equações lineares tornam-se mais lentos e providos de menor acurácia, já que os seus resultados apresentam erros numéricos acima do limite aceitável.

O imperativo da performance e da acurácia sobre *FEM* levou tanto pesquisadores como aplicadores deste método ao desenvolvimento de um conjunto de técnicas e métricas capazes de auxiliá-los na tarefa de acompanhar o condicionamento da matriz de rigidez associada a um dado problema de engenharia.

A principal motivação para a apresentação desta seção é a descrição do relacionamento existente entre o número de condicionamento de uma matriz de rigidez e a qualidade dos elementos constitutivos de uma malha-2D triangular, em termos de sua forma geométrica. A partir do entendimento deste relacionamento, é possível perceber, então, os impactos causados pela geometria de uma malha sobre a acurácia e a performance da aplicação de *FEM*. Naturalmente, estes impactos são limitados pela imposição de limites superiores e inferiores, cujos valores são funções da geometria dos elementos de uma malha, conforme será descrito posteriormente.

Uma importante questão sobre o referido relacionamento é que tanto ângulos pequenos quanto ângulos grandes podem causar um “pobre” condicionamento da matriz. Uma vez quantificado, este relacionamento pode ser utilizado para comparar elementos de formas diferentes. Os diferentes tipos de medidas levam diretamente às distintas métricas e técnicas baseadas no condicionamento da matriz de rigidez.

De acordo com Michael Batdorf, Lori Freitag e Carl Ollivier-Gooch, em [BATD_97], o condicionamento da matriz de rigidez, nestas circunstâncias, é representado por um número de condicionamento cujo valor deve ser controlado e tomado como o menor possível. O condicionamento da matriz de rigidez possui as seguintes características:

- o diferentemente dos erros de interpolação, o condicionamento da matriz de rigidez é afetado pela forma dos elementos, no que diz respeito aos seus ângulos internos com valores grandes ou pequenos;
- o o relacionamento entre a forma dos elementos de uma malha e o condicionamento da matriz de rigidez associada à malha via *FEM*, depende da equação diferencial parcial que está sendo resolvida e depende também das funções bases e funções testes usadas na discretização.

Para conhecer a natureza e as funcionalidades destas métricas é necessário entrar previamente no mérito da aplicação de *FEM*. Por questões de praticidade, este método será apresentado nesta seção de forma “brevíssima”. Aqueles interessados em uma discussão mais ampla sobre *FEM*, ou ainda em uma investigação sobre como o método é aplicado, indica-se Becker, Carey e Oden, tanto em [ODEN_81] como em [ODEN_84], além de Claes Johnson, em [JOHN_97], Gilbert Strange, em [STRA_73], Huebner, em [HUEB_74] e Robert em [COOK_74]. Na *Internet*, indica-se também Philippe Devloo, em [DEVL_02]. Cada uma destas referências possui uma coleção de outras referências sobre, praticamente, todos os aspectos teóricos, práticos e computacionais envolvidos na aplicação de *FEM*.

De forma muito simplificada, pode-se entender o método dos elementos finitos como um método que, no momento adequado, constrói uma matriz “ K_i ” de rigidez para cada elemento “ i ”, com tamanho $(d+1) \times (d+1)$, onde d é a dimensão da

malha que contém os referidos elementos (geralmente 2D ou 3D). Estas matrizes são montadas dentro de uma outra matriz, denominada “Matriz Global de Rigidez - K ”, com tamanho $n \times n$, onde “ n ” é o número de elementos da malha. O processo de montagem “leva” as entradas da matriz de rigidez de cada elemento para as entradas da matriz global de rigidez “ K ”.

Uma das maneiras de se descrever a dificuldade para resolver um dado sistema de equações lineares através de *FEM*, cuja constituição é representada parcialmente pela referida “Matriz Global de Rigidez - K ”, é associá-la ao seu número de condicionamento, denominado “Número de Condicionamento - κ ”. Assim, considerando que $\lambda_{\max}^k$ e $\lambda_{\min}^k$ são, respectivamente, o maior e o menor autovalores de K , tem-se:

$$\kappa = [\lambda_{\max}^k / \lambda_{\min}^k] \quad (3.1)$$

A expressão (3.1) é avaliada por Richard Shewchuk, em [SHEW_02]. Um grande valor de κ significa que os sistemas computacionais iterativos, responsáveis pela solução do sistema de equações associado a uma matriz global de rigidez K , convergiriam para a solução de forma muito mais lenta, vagarosa. Quando não, estes sistemas computacionais se tornariam instáveis. Já os sistemas computacionais não-iterativos, considerados sistemas diretos, convergiriam para a solução, incorrendo em excessivos erros numéricos (de arredondamento).

Em sua abordagem para descrever o relacionamento existente entre a forma dos elementos de uma malha e o condicionamento da matriz de rigidez a ela associada por *FEM*, I. Fried, em [FRIE_72], introduziu dois limites adequados para controlar os valores de κ da expressão (3.1), através dos valores de $\lambda_{\max}^k$. Ele provou que $\lambda_{\max}^k$ pode ser arbitrariamente muito grande se um único elemento da malha for geometricamente “mal-formado”. Em outras palavras, $\lambda_{\max}^k$ está relacionado aos maiores autovalores da matriz global de rigidez que, por sua vez, aqueles autovalores estão relacionados tanto aos ângulos internos muito pequenos como aos ângulos internos muito grandes.

Com relação aos limites adequados citados no parágrafo anterior, temos que para cada elemento “ t ”, onde $\lambda_{\max}^t$ é o maior autovalor da matriz de rigidez associada àquele elemento. I. Fried em [FRIE_72], descreve “ M ” como o número máximo de elementos que se encontra em um simples vértice para limitar o valor de $\lambda_{\max}^k$

através da expressão (3.2), provando que κ é rigorosamente proporcional ao maior autovalor entre todas as matrizes elementares de rigidez.

$$\text{Max}_t \lambda_{\max}^t \leq \lambda_{\max}^k \leq M^* (\text{Max}_t \lambda_{\max}^t) \quad (3.2)$$

Para descrever o relacionamento entre a geometria de um dado elemento triangular “ t ” e o seu $\lambda_{\max}^t$, o referido autor apresenta a seguinte matriz de rigidez associada à geometria deste elemento “ t ”, denominada “ K_t ”, descrita em termos do comprimento de suas arestas $\{L_1, L_2, L_3\}$ e da sua área $\{A\}$ ¹⁶, descrita pela expressão (3.3), abaixo.

$$K_t = \frac{1}{8A} * \begin{bmatrix} 2L_1^2 & L_3^2 & L_1^2 & L_2^2 & L_2^2 & L_1^2 & L_3^2 \\ L_3^2 & L_1^2 & L_2^2 & 2L_2^2 & L_1^2 & L_2^2 & L_3^2 \\ L_2^2 & L_1^2 & L_3^2 & L_1^2 & L_2^2 & L_3^2 & 2L_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Esta matriz de rigidez associada ao elemento “ t ”, expressa em (3.3) pode ser reescrita em termos dos ângulos internos deste elemento, conforme a expressão (3.4), abaixo.

$$K_t = \frac{1}{2} * \begin{bmatrix} \text{Cot}(\theta_2) + \text{Cot}(\theta_3) & \text{Cot}(\theta_3) & \text{Cot}(\theta_2) \\ \text{Cot}(\theta_3) & \text{Cot}(\theta_1) + \text{Cot}(\theta_3) & \text{Cot}(\theta_1) \\ \text{Cot}(\theta_2) & \text{Cot}(\theta_1) & \text{Cot}(\theta_1) + \text{Cot}(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

A partir da análise sobre a expressão (3.4) é possível compreender a abordagem de I. Fried em [FRIED_72], na qual estabelece que:

- se um dos ângulos internos do elemento “ t ”, denominados θ_1 , θ_2 ou θ_3 , se aproximar de 0° ou de 180° , então sua cotangente aproxima-se do infinito. Conseqüentemente, o valor associado ao $\lambda_{\max}^t$ também. Isto significa que tanto ângulos muito grandes como ângulos muito pequenos podem arruinar o condicionamento da matriz;
- os autovalores de K_t são as raízes do polinômio característico $P(\lambda)$. De acordo com Richard Shewchuk, em [SHEW_02], este polinômio

¹⁶ Como a associação realizada pelo autor citado é geométrica, não se está considerando as propriedades dos materiais.

associado a elementos triangulares é dado pela expressão (3.5), abaixo:

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \left[\frac{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2}{4A} \right] * \lambda^2 + \frac{3}{4} * \lambda \quad (3.5)$$

- o as raízes deste polinômio são $\lambda_1 = 0$, λ_2 e λ_3 , onde as duas últimas raízes estão descritas conforme a expressão (3.6), a seguir:

$$\lambda_{2,3} = \left(\frac{(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2) \pm \sqrt{(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2)^2 - (48 * A^2)}}{8A} \right) \quad (3.6)$$

- o esta representa uma das principais abordagens que relacionam a geometria da malha com o condicionamento da matriz de rigidez associada à solução numérica de um problema de engenharia, via FEM. O autor I. Fried em [FRIE_72] sugere a utilização de um nível de controle sobre os limites superiores e inferiores para descrever um $\lambda_{\max}^t$ como uma métrica de qualidade da forma de um elemento triangular, dentro de um certo limite, conforme a expressão (3.7), abaixo:

$$\left[\frac{(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2)}{8A} \right] \leq [\lambda_{\max}^t] \leq \left[\frac{(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2)}{4A} \right] \quad (3.7)$$

- o a expressão (3.7) representa o fato de que tanto o limite inferior como o limite superior sobre o menor autovalor $\lambda_{\min}^k$ é proporcional à área do menor triângulo. Então, malhas com elementos não uniformes sofrem com um pior condicionamento.

Todas estas questões levantam também um importante aspecto a ser considerado sobre o condicionamento da matriz: o processo de refinamento de uma malha que modifica o tamanho dos elementos, para otimizar os erros de interpolação e os erros de discretização podem levar a sérios problemas de condicionamento.

Para aqueles interessados em uma investigação mais aprofundada sobre a utilização de métricas baseadas no condicionamento da matriz de rigidez, tem-se que, além de [FRIE_72], os autores Patrick Knupp, em [KNUP_99], e Lori Freitag, em [FREI_99], apresentam considerações importantes sobre elementos triangulares (2D) e sobre elementos tetraédricos (3D). A seguir, é apresentado o grupo de métricas baseadas na geometria dos elementos de uma malha.

3.2 MÉTRICAS BASEADAS NA GEOMETRIA DOS ELEMENTOS DA MALHA

Em termos ideais, a geração de malhas, ou mesmo a sua melhoria, é um processo que deveria otimizar a “fidelidade” da superfície interpolada sobre uma malha específica. Esta superfície interpolada estaria associada a uma representação de um certo fenômeno físico. Em outras palavras, estes processos deveriam otimizar a acurácia da solução aproximada de um sistema de equações diferenciais parciais. Porém, este ideal é difícil de medir e muito caro, quando considerada a problemática de alocação de recursos computacionais. Para contornar o problema, geralmente os algoritmos de geração e melhoria de malhas utilizam uma medida de qualidade dos elementos da malha fácil de computar e avaliar. No caso mais geral, estes algoritmos objetivam maximizar um ângulo mínimo presente na geometria de um elemento.

Existem diversas métricas baseadas na geometria dos elementos triangulares¹⁷. Elas encontram-se referenciadas diretamente nos trabalhos de vários autores ou indiretamente, através da implementação de suas técnicas de refinamento de malhas. Entre as técnicas desenvolvidas, destacam-se aquelas apresentadas por David A. Field, em [FIEL_00], por Marshall Bern e seus colegas, em [BERN_90] e [BERN_92], por Siu-Wing Cheng, em [CHEN_02] e [CHEN_03], por Paul Chew, em [CHEW_89] e Jim Ruppert, tanto em [RUPP_92] como [RUPP_95], além das técnicas desenvolvidas por Jonathan Richard Shewchuk, em suas quatro referências: {[SHEW_95], [SHEW_97], [SHEW_99], [SHEW_02]}. Cada uma destas referências mapeia um conjunto de outras importantes referências que utilizam métricas de qualidade, baseadas na geometria de um elemento triangular.

Nesta seção, serão abordados quatro tipos delas, que praticamente são utilizadas pela maioria das técnicas atuais de refinamento e de melhoria da qualidade de uma dada malha. Estas métricas de qualidade representam o segundo e último, grupo de métricas abordadas neste capítulo. Diferentemente das medidas classificadas dentro do primeiro grupo, o processo de análise de qualidade de uma dada malha que utiliza métricas baseadas na geometria dos seus elementos não se preocupa diretamente com a acurácia da solução numérica obtida sobre a malha,

¹⁷ A maioria delas utiliza as medidas dos ângulos internos, dos comprimentos de arestas e das áreas dos elementos triangulares de uma malha. Muitas são derivadas diretamente destas medidas.

mas com a geometria de cada elemento e com a topologia geral da malha por eles constituída. Conforme a Figura 25, este grupo é constituído por quatro tipos distintos de medidas geométricas: (i) medidas de ângulos máximos e mínimos; (ii) medidas de áreas máximas e mínimas; (iii) medidas de comprimentos de arestas máximos e mínimos; e por último, (iv) medidas das taxas entre o raio da circunferência que circunscreve um elemento triangular e a sua menor aresta. Esta última medida é conhecida como “*circumradius-edge ratio*”.

Esta seção apresenta estas métricas em duas fases distintas. Na primeira fase, cada métrica é apresentada isoladamente como uma função da geometria de um dado elemento. É o momento oportuno para apresentar a sua formulação analítica e estabelecer o relacionamento, em termos matemáticos, entre suas medidas e a própria geometria do elemento. A formulação analítica descreve como uma métrica é medida, valorada, a partir da geometria de um elemento específico. Na segunda fase, todas as métricas, citadas nesta seção, são utilizadas em conjunto na descrição de uma técnica específica de refinamento de malha, denominada *Delaunay Refinement*. A descrição desta técnica é importante porque revela aspectos importantes que justificam a existência das referidas métricas no processo de refinamento de uma malha. Além disso, será visto uma nova métrica, a ser apresentada no quarto capítulo, que também poderá ser utilizada pela referida técnica com o objetivo de gerar a melhor triangulação de uma nuvem de pontos. A seguir, é apresentada a métrica de qualidade baseada nos ângulos internos de um elemento triangular.

3.2.1 Métrica Baseada nos Ângulos Internos de um Elemento Triangular

Dentre todas as métricas de qualidade que são baseadas na geometria dos elementos triangulares, a mais óbvia é aquela que se apresenta através das medidas dos seus ângulos internos. Algoritmos que buscam melhorar a qualidade de uma malha geralmente medem os valores destes ângulos para cada um de seus elementos e os comparam com uma faixa de valores preestabelecidos por um limite superior e inferior. Os elementos cujos ângulos encontram-se fora desse limite, geralmente sofrem um processo de divisão denominado “*Splitting*”. Esta divisão é

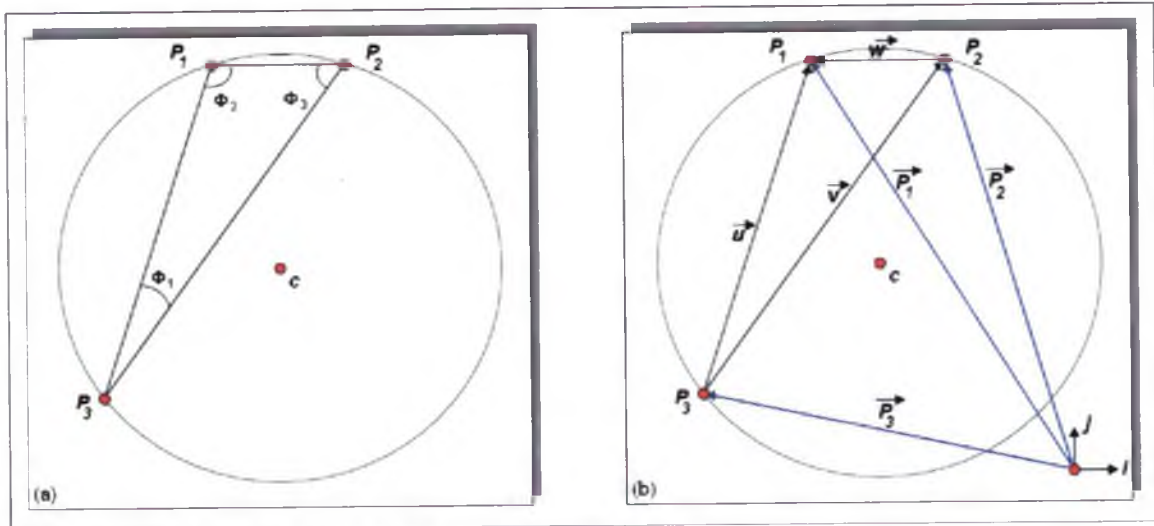
operacionalizada de maneiras diferenciadas, conforme a técnica de refinamento que é utilizada.

Para abordar a problemática da discussão sobre a qualidade de um elemento triangular através das medidas de seus ângulos internos, é necessário descrevê-lo dentro de um contexto geométrico. Sobre este contexto, é possível realizar uma interpretação geométrica, tanto sobre a sua forma como sobre o seu tamanho, a partir das entidades básicas que constituem a sua geometria. Assim, os valores dos seus ângulos internos podem ser derivados e, posteriormente, avaliados.

As entidades básicas, que constituem a geometria de um elemento triangular são os seus três vértices, descritos em termos de um sistema coordenado específico, o círculo que o circunscreve este elemento, o centro desta circunferência e os seus ângulos internos, cujos valores se deseja obter. Cada uma destas entidades estão descritas na Figura 27(a) e identificadas, respectivamente, pelo conjunto $\{P_1, P_2, P_3, c, \phi_1, \phi_2, \phi_3\}$. Os valores dos ângulos internos ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 podem ser obtidos a partir da aplicação dos conceitos da Álgebra Linear, cujos preceitos estabelecem que o produto escalar de dois vetores é definido como uma função do ângulo entre eles e do valor do módulo de cada um. Então, a análise vetorial sobre a geometria do elemento triangular é fundamental para o fornecimento dos valores dos ângulos internos.

A Figura 27(b) descreve a geometria de um elemento triangular sob o ponto de vista da análise vetorial. Percebe-se que o elemento triangular $\Delta P_1P_2P_3$ está circunscrito pela sua correspondente circunferência de *Delaunay*. Seus vértices $\{P_1, P_2, P_3\}$ estão descritos em R^2 através de seus vetores $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ e $\vec{P}_3$. Cada aresta do elemento triangular pode ser descrita sob a forma de um vetor específico. Por exemplo, o vetor u representa a aresta entre o ponto “ P_3 ”, dito inicial, e o ponto “ P_1 ”, dito final. Já o vetor v representa a aresta entre os pontos “ P_3 ” e “ P_2 ”. A terceira aresta deste elemento é representada pelo vetor w , cujo ponto inicial é dado por “ P_2 ” e o final é dado por “ P_1 ”.

FIGURA 27: A INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DOS ÂNGULOS INTERNOS Φ_1 , Φ_2 E Φ_3 DE UM ELEMENTO TRIANGULAR DE UMA MALHA



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

Conforme os autores Howard Anton, em [ANTO_01], Bernard Kolman, em [KOLM_98], e Seymour Lipschutz, em [LIPS_94], é possível determinar com precisão o valor de cada um dos ângulos internos de um elemento triangular, a partir dos vetores posição de cada um de seus respectivos vértices.

Estes valores estão descritos nas expressões a seguir:

$$\cos(\phi_1) = \left[\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| * \|\vec{v}\|} \right] \rightarrow \phi_1 = \arccos \left(\left[\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| * \|\vec{v}\|} \right] \right) \quad (3.8)$$

$$\cos(\phi_2) = \left[\frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\| * \|\vec{w}\|} \right] \rightarrow \phi_2 = \arccos \left(\left[\frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{\|\vec{u}\| * \|\vec{w}\|} \right] \right) \quad (3.9)$$

$$\phi_3 = \pi - \phi_4 = \pi - (\phi_1 + \phi_2) \quad (3.10)$$

$$\cos(\phi_4) = \left[\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| * \|\vec{w}\|} \right] \rightarrow \phi_4 = \arccos \left(\left[\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| * \|\vec{w}\|} \right] \right) \quad (3.11)$$

As expressões de (3.8) a (3.11) descrevem os valores de $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4\}$. O ângulo ϕ_4 representa o ângulo externo ao elemento triangular entre os vetores v e w . Estas expressões descrevem também a própria definição do produto escalar entre dois vetores, aplicada ao estudo da geometria de um elemento triangular.

Observa-se, na Figura 27(b), que os pontos $\{P_1, P_2, P_3\}$ estão definidos no espaço bidimensional, tanto pelos seus pares coordenados como pelos seus respectivos vetores posição, conforme as expressões abaixo:

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_1, y_1) \therefore \vec{P}_1 = (x_1)\vec{i} + (y_1)\vec{j} \\ P_2 &= (x_2, y_2) \therefore \vec{P}_2 = (x_2)\vec{i} + (y_2)\vec{j} \\ P_3 &= (x_3, y_3) \therefore \vec{P}_3 = (x_3)\vec{i} + (y_3)\vec{j} \end{aligned} \quad (3.12)$$

Os vetores u , v e w são definidos em função dos vetores posição acima descritos. As expressões abaixo descrevem como obtê-los a partir de um conjunto de operações vetoriais.

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{P}_3 &= \vec{P}_1 \rightarrow \vec{u} = \vec{P}_1 - \vec{P}_3 \rightarrow \vec{u} = [(x_1 - x_3)\vec{i} + (y_1 - y_3)\vec{j}] \\ \vec{v} + \vec{P}_3 &= \vec{P}_2 \rightarrow \vec{v} = \vec{P}_2 - \vec{P}_3 \rightarrow \vec{v} = [(x_2 - x_3)\vec{i} + (y_2 - y_3)\vec{j}] \\ \vec{w} + \vec{P}_2 &= \vec{P}_1 \rightarrow \vec{w} = \vec{P}_1 - \vec{P}_2 \rightarrow \vec{w} = [(x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j}] \end{aligned} \quad (3.13)$$

De acordo com os autores supra mencionados, o produto escalar de dois vetores quaisquer também pode ser definido em termos de suas componentes. Então:

$$\vec{s} \bullet \vec{t} = s_1 t_1 + s_2 t_2 + s_3 t_3 \quad (3.14)$$

No caso específico do elemento triangular, descrito na Figura 27, os vetores envolvidos na operação “produto escalar” estão descritos nas expressões abaixo:

$$\begin{aligned} \vec{u} \bullet \vec{v} &= [(x_1 - x_3) * (x_2 - x_3) + (y_1 - y_3) * (y_2 - y_3)] \\ \vec{u} \bullet \vec{w} &= [(x_1 - x_3) * (x_1 - x_2) + (y_1 - y_3) * (y_1 - y_2)] \\ \vec{v} \bullet \vec{w} &= [(x_2 - x_3) * (x_1 - x_2) + (y_2 - y_3) * (y_1 - y_2)] \end{aligned} \quad (3.15)$$

As normas dos vetores u , v e w são definidas de acordo com as expressões em (3.16).

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}\| &= \sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \\
\|\vec{v}\| &= \sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \\
\|\vec{w}\| &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Tendo-se descrito os vetores u , v e w em termos de suas respectivas normas, conforme a expressão (3.16), e em termos dos produtos escalares, conforme a expressão (3.15), pode-se reescrever os ângulos internos do elemento triangular, $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ e o ângulo externo ϕ_4 , definidos na Figura 27, de acordo com as expressões (3.17) a (3.21), a seguir apresentadas.

$$\phi_1 = \arccos \left[\frac{[(x_1 - x_3) * (x_2 - x_3) + (y_1 - y_3) * (y_2 - y_3)]}{\left(\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \right) * \left(\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \right)} \right] \leftrightarrow 0 \leq \phi_1 \leq \pi \tag{3.17}$$

$$\phi_2 = \arccos \left[\frac{[(x_1 - x_3) * (x_1 - x_2) + (y_1 - y_3) * (y_1 - y_2)]}{\left(\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \right) * \left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \right)} \right] \leftrightarrow 0 \leq \phi_2 \leq \pi \tag{3.18}$$

$$\phi_3 = [\pi - \phi_4] \leftrightarrow 0 \leq \phi_3 \leq \pi \tag{3.19}$$

$$\phi_4 = \arccos \left[\frac{[(x_2 - x_3) * (x_1 - x_2) + (y_2 - y_3) * (y_1 - y_2)]}{\left(\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \right) * \left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \right)} \right] \leftrightarrow 0 \leq \phi_4 \leq \pi \tag{3.20}$$

Os ângulos internos do elemento triangular $\{\phi_1, \phi_2, \phi_3\}$ estão definidos pelas expressões (3.17), (3.18) e (3.19). Praticamente, estas expressões descrevem a própria medida dos ângulos internos de cada elemento triangular que são utilizadas pelas técnicas de refinamento e de melhorias de malhas. Elas representam as métricas que são comparadas com os limites máximos e mínimos para os ângulos internos de um elemento triangular.

A seguir, é apresentada a métrica de qualidade baseada nas áreas máxima e mínima de cada elemento triangular.

3.2.2 Métrica Baseada na Área de um Elemento Triangular

De forma análoga às métricas baseadas nos ângulos internos de um elemento triangular, as métricas que são baseadas na área de um elemento utilizam esta medida num processo de comparação entre este valor e os valores descritos como limites superiores e inferiores, preestabelecidos através de uma técnica ou algoritmo específico. Por isso, elementos cujos valores de área se encontram fora do limite devem ser refinados até que todos eles atendam as restrições especificadas.

Para utilizar a área como medida de comparação, as técnicas que implementam esta métrica precisam descrever a forma de obtenção dos seus valores para cada elemento da malha. A Figura 27(b) pode ser aproveitada também para descrever a forma de cálculo da área do triângulo $\Delta P_1P_2P_3$.

Segundo os autores, referenciados na seção anterior, o produto vetorial é um vetor obtido através de um tipo de multiplicação especial aplicável somente ao espaço tridimensional. Este vetor tem direção perpendicular ao plano formado pelos vetores participantes do produto vetorial e sentido dado pela regra da mão direita, que gira no sentido do primeiro vetor para o segundo. A expressão (3.21) descreve o produto vetorial entre os vetores quaisquer s e t de R^3 .

$$\begin{aligned}
 \vec{s} &= \left[(s_1)\vec{i} + (s_2)\vec{j} + (s_3)\vec{k} \right] \\
 \vec{t} &= \left[(t_1)\vec{i} + (t_2)\vec{j} + (t_3)\vec{k} \right] \\
 \vec{s} \times \vec{t} &= \left[(s_2t_3 - s_3t_2)\vec{i} + (s_3t_1 - s_1t_3)\vec{j} + (s_1t_2 - s_2t_1)\vec{k} \right] \\
 \vec{s} \times \vec{t} &= \left[\begin{pmatrix} s_2 & s_3 \\ t_2 & t_3 \end{pmatrix} \vec{i} + \begin{pmatrix} -s_1 & s_3 \\ -t_1 & t_3 \end{pmatrix} \vec{j} + \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix} \vec{k} \right]
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

Aplicando-se o conceito de produto vetorial, descrito acima ao caso do elemento triangular, descrito na Figura 27, e utilizando-se das especificações dos vetores u e v em R^2 na expressão 3.13, tem-se que uma adaptação deve ser realizada sobre os vetores u e v de forma que eles sejam descritos em R^3 . Assim, tem-se que:

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= [(x_1 - x_3)\vec{i} + (y_1 - y_3)\vec{j} + (0)\vec{k}] \\
\vec{v} &= [(x_2 - x_3)\vec{i} + (y_2 - y_3)\vec{j} + (0)\vec{k}] \\
\vec{u} \times \vec{v} &= \left[\begin{pmatrix} (y_1 - y_3) & 0 \\ (y_2 - y_3) & 0 \end{pmatrix} \vec{i} + \begin{pmatrix} -(x_1 - x_3) & 0 \\ -(x_2 - x_3) & 0 \end{pmatrix} \vec{j} + \begin{pmatrix} (x_1 - x_3) & (y_1 - y_3) \\ (x_2 - x_3) & (y_2 - y_3) \end{pmatrix} \vec{k} \right] \\
\vec{u} \times \vec{v} &= [(x_1 - x_3)*(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)*(y_1 - y_3)]\vec{k}
\end{aligned} \tag{3.22}$$

A expressão (3.22) apresenta duas formas para o produto vetorial entre os vetores u e v . Pode-se perceber que o vetor resultante é perpendicular ao plano formado por u e v uma vez que ele possui apenas uma componente na direção do vetor unitário k . Os autores Howard Anton, em [ANTO_01], Bernard Kolman, em [KOLM_98], e Seymour Lipschutz, em [LIPS_94], apresentam um teorema onde é possível estabelecer uma relação geométrica entre a área de um triângulo e o produto vetorial entre estes dois vetores: **“Teorema da Área de um Paralelogramo:** Se s e t são vetores em R^3 então $\|s \times t\|$ é igual à área do paralelogramo determinado por s e t ”.

Aplicando o teorema acima ao caso específico do elemento triangular, descrito na Figura 27, tem-se que a área deste elemento, cuja forma é triangular, é igual à metade do valor da norma do produto vetorial entre u e v . Assim:

$$\begin{aligned}
\text{Área_de_um_Elemento_Triangular} &= \left(\frac{1}{2} * \|\vec{u} \times \vec{v}\| \right) \\
\text{Área_de_um_Elemento_Triangular} &= \left[\frac{1}{2} * ((x_1 - x_3)*(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)*(y_1 - y_3)) \right]
\end{aligned} \tag{3.23}$$

A seguir é apresentada a métrica baseada nos comprimentos das arestas de um elemento triangular.

3.2.3 Métrica Baseada no Comprimento das Arestas de um Elemento Triangular

O comprimento das arestas de um elemento triangular de uma malha representa o terceiro tipo de medida baseada na geometria do elemento, conforme a classificação descrita na Figura 25.

As técnicas que utilizam este tipo de medida se baseiam mais na análise sobre o tamanho do elemento do que na sua forma. Isto acontece porque as

medidas das arestas de um elemento triangular, quando tomadas isoladamente, não permitem uma descrição consistente da forma de um elemento. Em outras palavras, elementos distintos com arestas, cujos comprimentos são ligeiramente diferentes possuem formas bastante diversificadas. Entretanto, a maioria das técnicas de refinamento e de melhoria da qualidade de malhas utiliza esta métrica como elemento intermediário para a obtenção de outras métricas que possibilitam uma maior sensibilidade a respeito da forma de um elemento triangular. Este aspecto será mostrado na seção 3.2.4.

Para se obter o valor do comprimento das arestas do elemento triangular, descrito na Figura 27 utiliza-se a análise vetorial como ferramental. Por exemplo, o comprimento da aresta identificada entre os pontos P3 e P1 é calculado através da norma do vetor u , cuja descrição vetorial vem da expressão (3.13) e é descrito pela expressão (3.24), abaixo. Analogamente, os vetores v e w também são utilizados para determinar os comprimentos das outras duas arestas daquele elemento triangular.

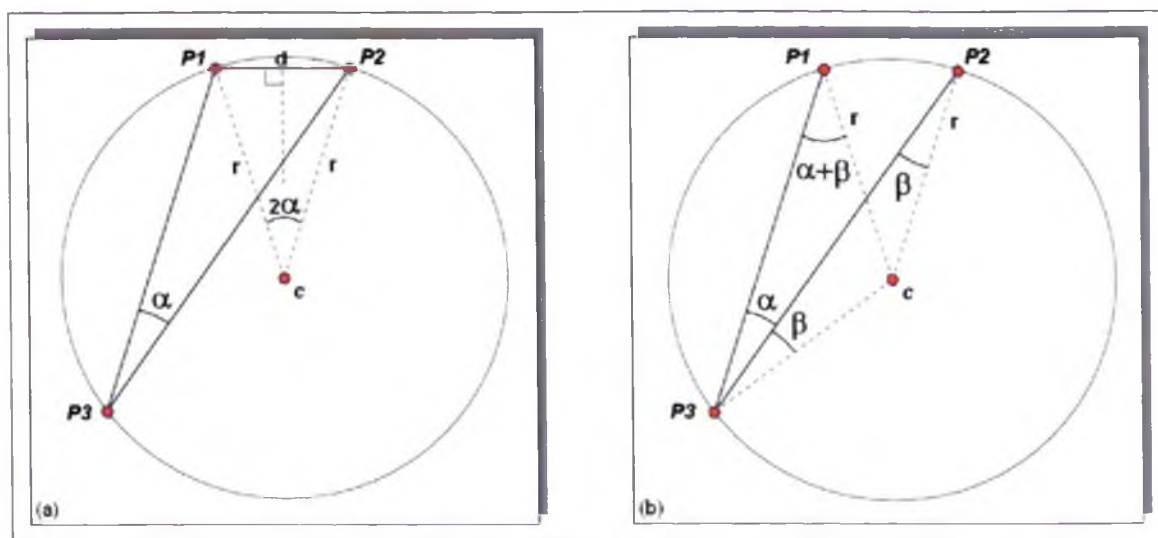
$$\begin{aligned} \text{Aresta } \overline{P_3P_1} &= \|\vec{u}\| = \left[\sqrt{(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2} \right] \\ \text{Aresta } \overline{P_3P_2} &= \|\vec{v}\| = \left[\sqrt{(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2} \right] \\ \text{Aresta } \overline{P_2P_1} &= \|\vec{w}\| = \left[\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \right] \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.2.4 Métrica Baseada na Taxa *Circumradius-To-Shortest-Edge Ratio*

Este é o quarto, e último, tipo de métrica abordado neste capítulo. Esta métrica é considerada por Richard Shewchuk, em [SHEW_97], a mais natural e elegante métrica desenvolvida para análise de técnicas de refinamento cujos algoritmos implementam o processo de refinamento, denominado “*Delaunay Refinement*”.

O cálculo do valor desta taxa, para cada elemento triangular de uma malha, é simples e fácil de computar: a taxa “*circumradius-to-shortest-edge ratio*” de um elemento é tomada como o resultado da divisão entre o raio “ r ” da circunferência que circunscreve este elemento e o comprimento “ d ” da sua menor aresta. Estas duas entidades podem ser observadas na Figura 28.

FIGURA 28: OS ELEMENTOS “R” E “D” DA MÉTRICA “CIRCUMRADIUS-TO-SHORTEST-EDGE RATIO”



Fonte: adaptado de [SHEW_97]

No processo de análise da qualidade de forma de um elemento triangular, através desta métrica, tem-se que quanto menor o valor desta taxa, maior é a sua qualidade de forma. Assim, as diversas técnicas procuram identificar quais os elementos de uma malha, denominados “Skinny” possuem esta taxa acima de um dado limite preestabelecido. Desta forma, operações de “Splitting” são realizadas sobre estes elementos, até que nenhum elemento possua a referida medida fora dos limites; isto é, até que todos os elementos da malha possuam qualidade de forma dentro de um padrão “aceitável”.

Salienta-se que, em duas dimensões, a métrica “circumradius-to-shortest-edge ratio” aplicada sobre um elemento triangular estabelece, indiretamente, um relacionamento entre o comprimento da sua menor aresta “d” e o menor ângulo interno “α” do elemento. Isto quer dizer que o comprimento da menor aresta é uma função do menor ângulo interno do elemento. Para explicar este relacionamento, utiliza-se a Figura 28(a) para, primeiramente, apresentar a geometria do elemento e, posteriormente, quantificar este relacionamento. Assim, deseja-se mostrar que o triângulo $\Delta P_1P_2P_3$ possui o menor ângulo “α” relacionado ao menor ângulo do triângulo isósceles ΔP_1CP_2 de valor “2.α”. Isto é possível através das seguintes considerações geométricas sobre a Figura 28(b):

- Para o triângulo isósceles ΔP_3CP_1 , tem-se que seu maior ângulo interno, aqui denominado " γ_1 ", é dado por:

$$\gamma_1 = 180 - 2 * (\alpha + \beta) \quad (3.25)$$

- Para o triângulo isósceles ΔP_3CP_2 , tem-se que seu maior ângulo interno, aqui denominado " γ_2 ", é dado por:

$$\gamma_2 = 180 - 2 * (\beta) \quad (3.26)$$

- Para o triângulo isósceles ΔP_1P_2C , tem-se que seu menor ângulo interno, aqui denominado " γ_3 ", é dado pela diferença entre os dois ângulos " γ_1 " e " γ_2 ", conforme a expressão (3.27):

$$\gamma_3 = [\gamma_2 - \gamma_1] \rightarrow \gamma_3 = [(180 - 2 * \beta) - (180 - 2 * (\alpha + \beta))] \rightarrow \gamma_3 = [2\alpha] \quad (3.27)$$

- Ainda sobre este último triângulo, existe uma relação trigonométrica importante entre a aresta "d" e o ângulo " γ_3 " conforme abaixo:

$$\text{Sen}(\alpha) = \left(\frac{d}{2 * r} \right) \quad (3.28)$$

Assim, está provado que se um dado elemento triangular possui sua menor aresta denominada "d", então " α " é o seu menor ângulo. Esta aresta encontra-se no lado oposto ao ângulo " α ". Desta forma, algoritmos e técnicas diferenciadas propõem um dado limite superior para o valor da métrica "*circumradius-to-shortest-edge ratio*" aplicado sobre cada elemento da malha. Por exemplo, supondo-se que este limite superior, para todo elemento de uma dada malha, seja considerado um valor genérico, denominado "B", então não haverá nenhum elemento triangular desta malha com ângulo mínimo menor do que o valor dado pela expressão (3.29), a seguir apresentada:

$$\begin{aligned} \text{circumradius_to_shortest_edge_ratio} &= \text{taxa} = \frac{d}{r} \\ \text{limite_superior_para_taxa} &= B \\ \text{Sen}(\alpha) &= \frac{1}{2 * \text{taxa}} \xrightarrow{\text{dentro_do_limite}} \alpha = \left[\text{arcSen} \left(\frac{1}{2 * B} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.29)$$

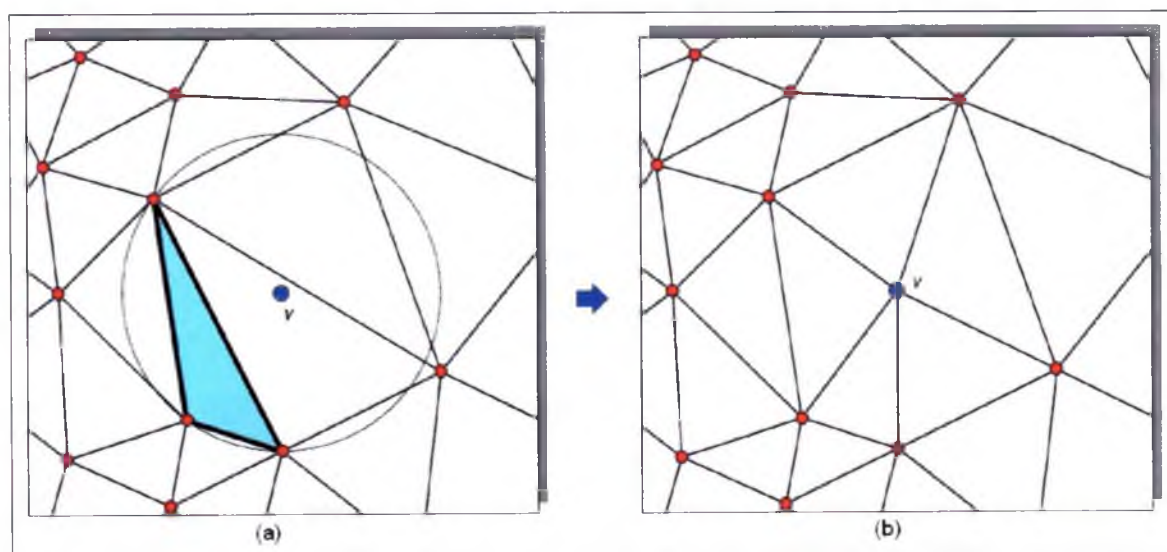
Um gerador de malhas triangulares, que implementa algoritmos baseados nesta métrica, teria a missão de gerar malhas com o menor B possível. Os autores Paul Chew, [CHEW_89], e Jim Ruppert, em [RUPP_92], usam em seus algoritmos valores de B=1. Ainda com relação ao limite "B" imposto à métrica por um

determinado algoritmo de refinamento, a técnica que o implementa, denominada “Delaunay Refinement”, possui uma função central baseada na inserção de um novo vértice sempre que um dado elemento possui esta métrica acima do limite especificado. O referido processo de inserção segue o critério básico que leva o nome de “Delaunay Refinement” e é descrito por Richard Shewchuk, na página 43, em [SHEW_97], como:

[...] qualquer elemento triangular de uma malha cuja taxa ‘*circumradius-to-shortest-edge ratio*’ é maior que algum limite superior ‘B’ é dividido em outros elementos pela inserção de um ‘*vertex*’ na posição determinada pelo centro da circunferência que circunscreve este elemento. Desta forma, a propriedade de ‘Delaunay’ sobre a malha é mantida e aquele elemento é eliminado, onde toda nova aresta possui comprimento no mínimo ‘B’ vezes o comprimento da menor aresta do triângulo considerado pobre.

Para exemplificar o processo de divisão, denominado “*splitting*”, sobre um elemento triangular de baixa qualidade de forma, denominado “*skinny*”, é apresentada a Figura 29. Nela o algoritmo implementado pela técnica “*Delaunay Refinement*” descreve o processo de inserção de um novo ponto “v”, que satisfaz a condição de Delaunay. A este novo ponto, com estas condições, dá-se o nome de “*vertex*”.

FIGURA 29: A MÉTRICA “CIRCUMRADIUS-TO-SHORTEST-EDGE RATIO” COMO MEDIDA PARA ESCOLHER ELEMENTOS “SKINNY” E PROCESSAR A OPERAÇÃO DE INSERÇÃO DE UM NOVO PONTO “VERTEX - V”



Fonte: adaptado de [SHEW_97]

4 UMA NOVA MÉTRICA DE QUALIDADE DE MALHAS-2D TRIANGULARES: “RELAÇÃO PERIMETRAL – RP”

“Nosso século, que tanto fala de economia,
é um esbanjador:
esbanja o mais precioso, o espírito”.

“O valor da vida não pode ser avaliado”.

“Ninguém pode construir em teu lugar
as pontes que precisarás passar,
para atravessar o rio da vida – ninguém, exceto tu, só tu”
(NIETZSCHE)

O objetivo deste capítulo é apresentar uma nova métrica de qualidade de malhas, baseada na geometria dos seus elementos constitutivos. Esta métrica utiliza um conceito denominado “Relação Perimetral – RP”. Este novo conceito, concebido neste capítulo através de cinco proposições adequadas, estabelece que a qualidade de um elemento da malha pode ser medida através do conhecimento antecipado do valor de sua área, através da qual um mapeamento específico determina a relação entre o perímetro deste elemento e o perímetro de um elemento “virtual” de comparação, denominado “Triângulo Ideal Equivalente – TIE”. A variação perimetral, denominada “Índice de Qualidade Local – IRP”, fornece um índice capaz de descrever o quanto um dado elemento triangular encontra-se distante de seu próprio “TIE” ideal, medida em pontos por mil. Para analisar a qualidade global de uma malha, utiliza-se um histograma adequado, denominado “Espectro de Qualidade - EQ”, onde se apresentam todos os valores dos IRP’s dos elementos desta malha, na forma de uma descrição completa da frequência de ocorrência destes valores, dentro do referido espectro de qualidade. Sobre este espectro também incidem os valores de qualidade global de uma malha, denominados “Índice de Qualidade Global – irp”¹⁸.

Além das medidas objetivas fornecidas pelos índices “IRP” e “irp”, a métrica RP fornece também um conjunto de valores a eles associados, que são subjetivos. Estes valores estão classificados em sete categorias distintas e também servem para descrever o referido espectro de qualidade “EQ”.

¹⁸ A métrica “RP” apresenta dois índices diferentes que possuem a mesma sigla: “IRP” e “irp”. É importante distingui-los. O primeiro, cujas letras são maiúsculas, define o índice de qualidade local, aplicado sobre de um dado elemento triangular da malha. O segundo, com letras minúsculas, define o índice de qualidade global, que representa a média aritmética dos valores “IRP” de todos os elementos da malha. Ambos possuem o mesmo domínio.

O conjunto de todos estes elementos que fazem parte da métrica “RP” permite que ela seja utilizada para a construção de uma malha-2D triangular de qualidade. Desta forma, uma vez avaliada por esta métrica, uma malha terá sua qualidade medida e identificada por uma “assinatura” de qualidade única. Esta assinatura, por sua vez, pode ser comparada com outras assinaturas de qualidade, num processo de acompanhamento da variação da qualidade de uma malha que ocorre durante os seus sucessivos refinamentos.

O ponto forte desta métrica caracteriza-se pelo fato de que, ao ser utilizada em um sistema computacional interativo de geração de malhas, é possível perceber o quanto um dado elemento da malha, cuja medida de qualidade pode ser calculada isoladamente, “afeta” a qualidade global desta malha. Esta característica pode ser utilizada para melhorar a sensibilidade do analista que interage com um gerador de malhas não-estruturadas.

4.1 AS PROPOSIÇÕES DA MÉTRICA “RP”

O conceito denominado “Relação Perimetral – RP” é formado por cinco proposições baseadas na geometria dos elementos que constituem uma dada malha triangular. Cada uma destas proposições está descrita nos itens a seguir.

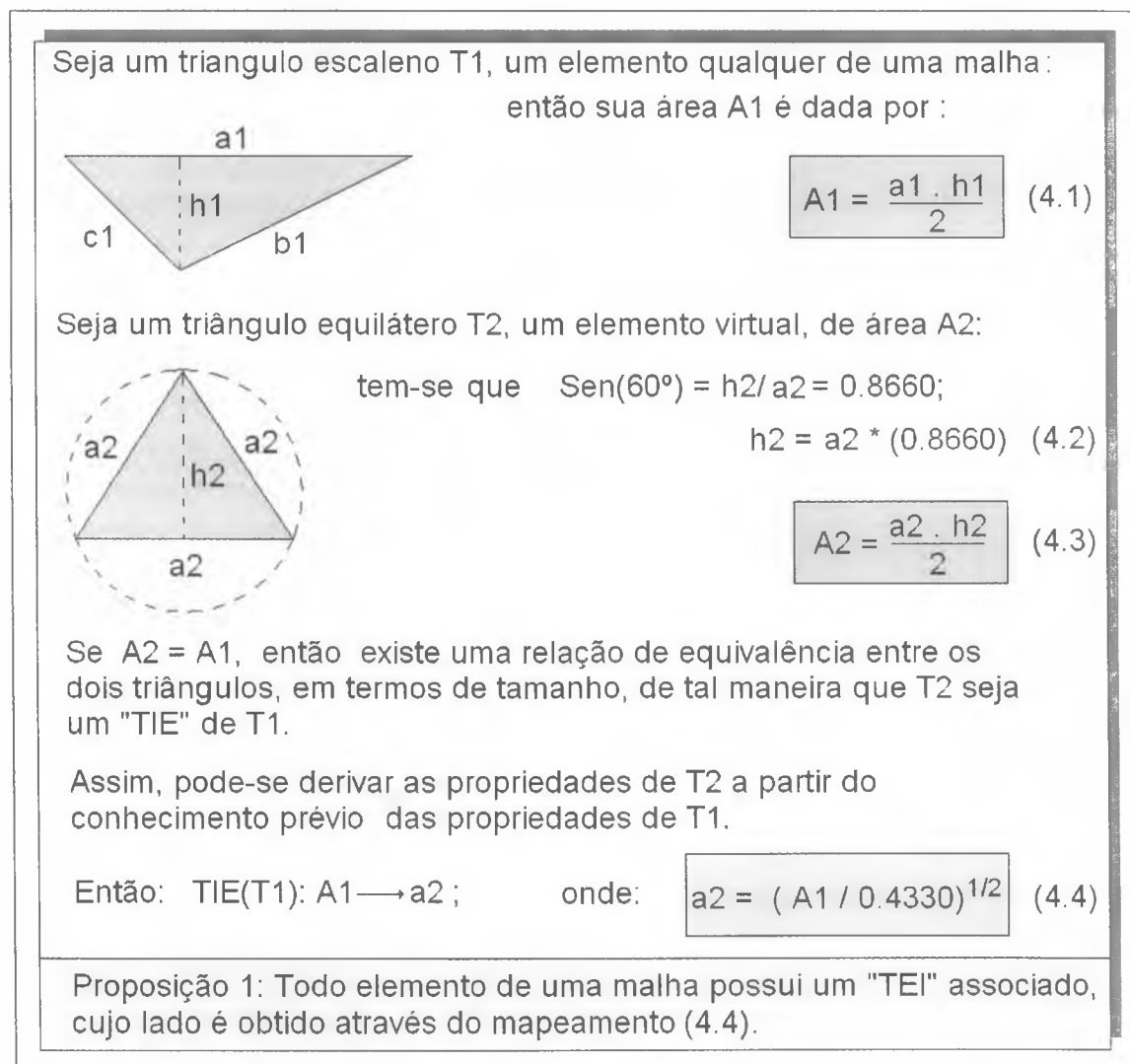
4.1.1 Primeira Proposição: O Triângulo Ideal Equivalente – “TEI”

Esta proposição apresenta o conceito denominado “Triângulo Ideal Equivalente – TIE”.

A Figura 30, descreve a proposição que introduz o conceito de TIE na métrica RP. Em outras palavras, esta define como obter um elemento virtual de comparação TIE a partir dos atributos do elemento triangular de uma malha a ele associado. A expressão (4.4) apresenta o valor do lado “a2” de um TIE como sendo uma função do valor da área “A1” do elemento triangular a ele associado. Isto quer dizer que, se existe um elemento triangular de uma malha, cujo valor da área é “A1”, então haverá associado a este elemento um triângulo virtual TIE, eqüilátero e de mesma área, cujo lado vale “a2”. Este valor é fundamental para a apresentação da

próxima proposição da métrica RP, que é a apresentação do conceito denominado "Relação Perimetral – RP".

FIGURA 30 – A DEFINIÇÃO DE TRIÂNGULO IDEAL EQUIVALENTE – TIE ASSOCIADO A UM DADO ELEMENTO TRIANGULAR



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

Um TIE é um triângulo que possui as seguintes características no contexto estabelecido pela métrica "RP":

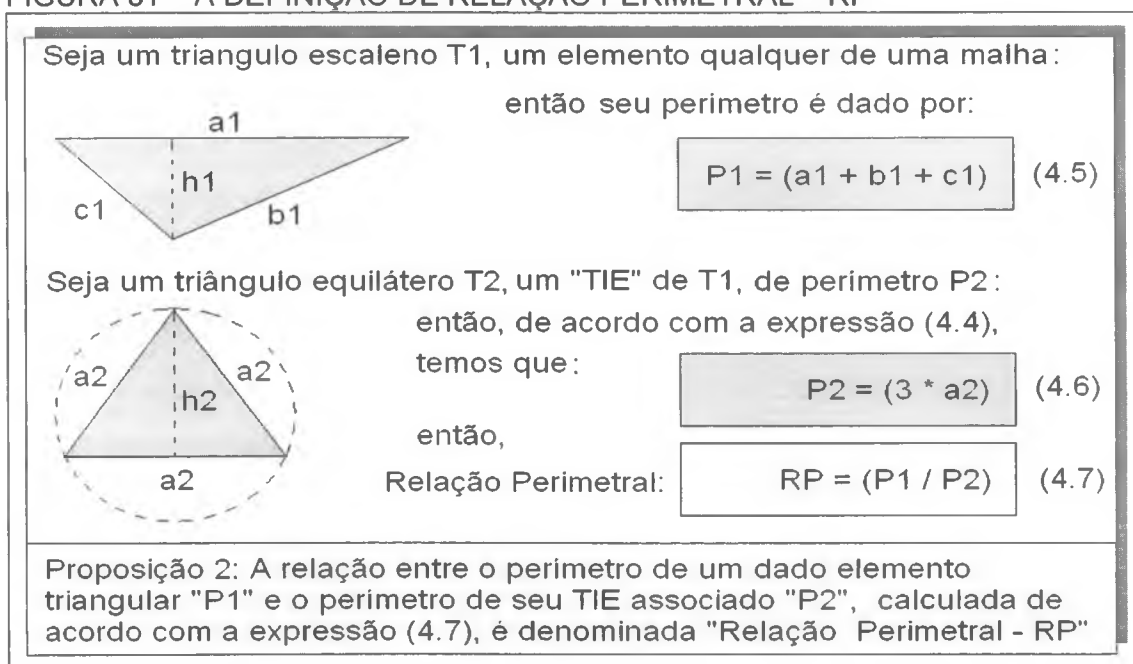
- Um TIE é um triângulo equilátero virtual. Ele não pertence à malha;
 - Cada elemento triangular de uma malha possui um TIE associado.
- Esta associação está descrita na expressão (4.4) da Figura 30;

- Um TIE associado a um elemento triangular possui a mesma área deste elemento;
- Um TIE e o seu elemento triangular associado possuem perímetros que podem ser iguais ou diferentes. Entretanto, devido à própria geometria de um triângulo equilátero, o perímetro de um TIE nunca será maior do que o perímetro de seu elemento triangular associado;
- Um TIE é um elemento ideal equivalente utilizado na métrica RP como elemento virtual de comparação. Esta métrica estabelece que a forma ideal para qualquer elemento triangular de uma malha é a forma equilátera.

4.1.2 Segunda Proposição: A Relação Perimetral – “RP”

Esta proposição representa o próprio núcleo da métrica “RP” proposta neste capítulo. A Relação Perimetral RP descreve uma taxa aplicável, isoladamente, sobre cada elemento triangular de uma malha. Seu valor é calculado através da relação entre o perímetro de um elemento triangular e o perímetro de seu TIE associado, conforme a expressão (4.7), descrita na Figura 31.

FIGURA 31 – A DEFINIÇÃO DE RELAÇÃO PERIMETRAL – RP

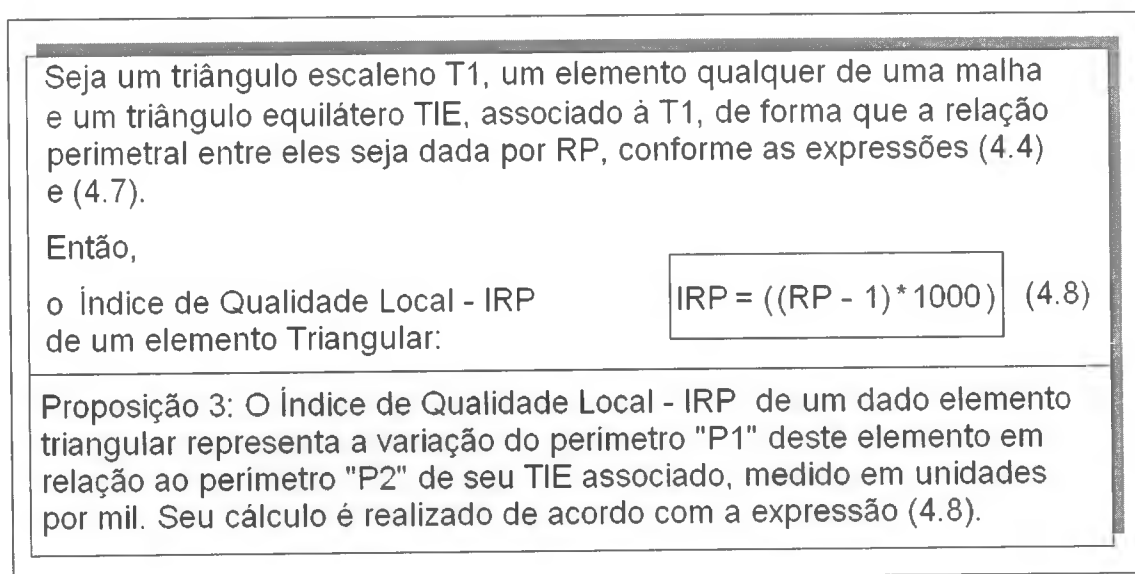


Uma importante questão a respeito do domínio dos valores de RP é que ele sempre será maior ou igual a 1. Isto ocorre porque, para quaisquer triângulos de mesma área, o triângulo equilátero é aquele que fornece o menor perímetro. Como o TIE é um elemento virtual de forma equilátera, os valores de RP de qualquer elemento de uma malha serão sempre maiores ou iguais à unidade.

4.1.3 Terceira Proposição: O Índice de Qualidade Local – “IRP” de Um Elemento

Esta proposição apresenta o índice de qualidade de forma de um dado elemento triangular de uma malha, denominado “Índice de Qualidade Local – IRP”. Este índice descreve a variação da forma de um elemento em relação à forma de seu TIE associado, medido em unidades por mil. Em outras palavras, este índice descreve quanto a forma de um dado elemento triangular está distante da sua forma ideal. A forma ideal é representada pelo TIE deste elemento, que é equilátero. Esta proposição está descrita na Figura 32.

FIGURA 32 – A DEFINIÇÃO DO ÍNDICE DE QUALIDADE LOCAL – IRP DE UM ELEMENTO TRIANGULAR



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

O IRP é considerado um índice de qualidade local dentro do contexto da métrica RP, porque ele se aplica à forma de um único elemento de cada vez. Então,

cada elemento de uma malha tem seu próprio IRP. Os valores deste índice são sempre maiores ou iguais a zero. Quanto maior o valor deste índice, menor é a sua qualidade de forma. O valor zero, para o IRP de um elemento triangular, representa o melhor índice de qualidade de forma possível e significa que sua forma é idêntica à de seu TIE associado, que é equilátero.

Através do IRP, é possível comparar a qualidade de forma de dois ou mais elementos triangulares. Este índice representa o núcleo da métrica RP e é identificado pelas letras maiúsculas. Esta convenção é importante para diferenciar este índice daquele cuja função é descrever o índice de qualidade global, denominado “irp”, convencionado nesta métrica em letras minúsculas.

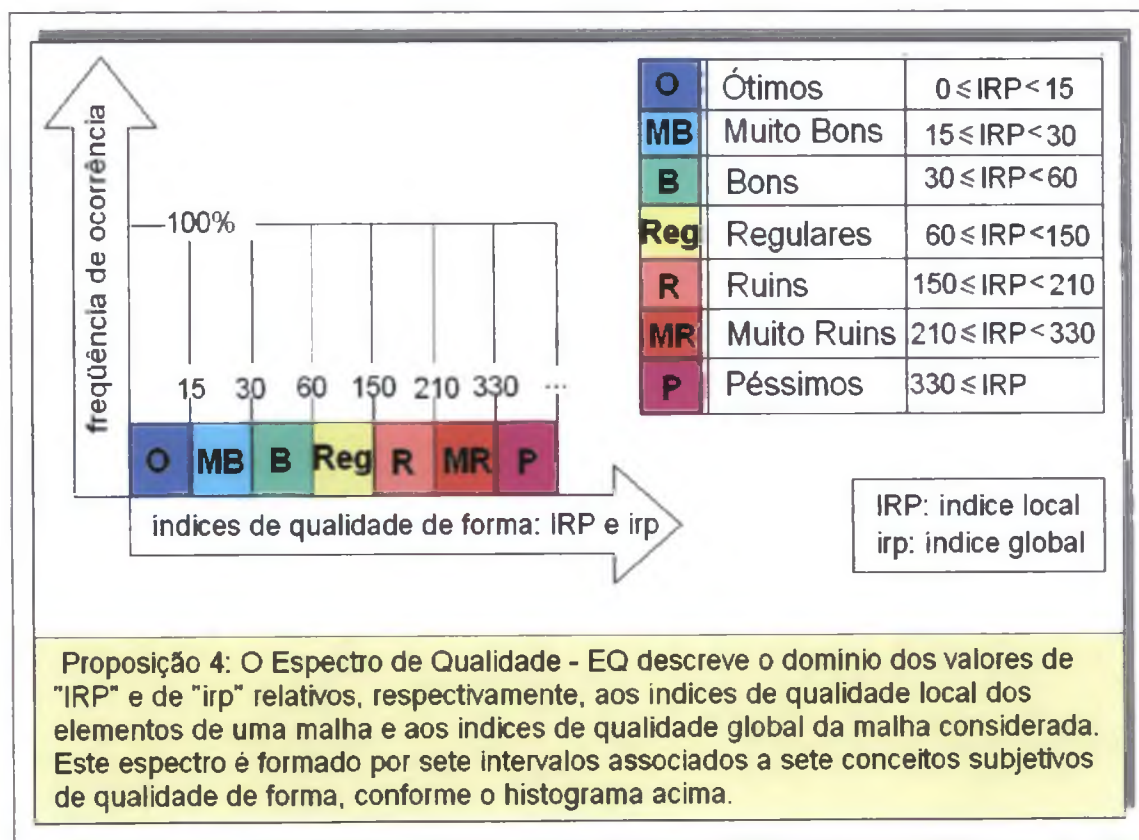
4.1.4 Quarta Proposição: O Espectro de Qualidade – “EQ”

A métrica RP, abordada neste capítulo, descreve também um conjunto de conceitos “subjetivos” de qualidade, denominado “Espectro de Qualidade - EQ”, sobre o qual recaem os valores do IRP de todos os elementos de uma dada malha triangular.

O espectro EQ divide o domínio dos valores do IRP em sete intervalos distintos, que representam sete classes de qualidade de forma. Estes intervalos são denominados “Ótimos – O”, “Muito Bons – MB”, “Bons – B”, “Regulares – Reg”, “Ruins – R”, “Muito Ruins – MR” e “Péssimos – P”, conforme pode ser observado na Figura 33, que também descreve a faixa de valores inicial e final associada a cada um deles.

A faixa de valores associada a cada categoria deste espectro foi definida empiricamente. Isto significa que um analista poderia estabelecer um novo critério para os valores dos limites das bandas que constituem o espectro de qualidade e ainda assim seria possível utilizar a métrica “RP” acompanhar a variação dos índices de qualidade durante os processos de refinamentos sucessivos de uma dada malha. Esta característica confere a métrica “RP” uma flexibilidade considerável, já que pode ser adaptada ao estilo e à experiência do analista que a utiliza.

FIGURA 33 – O ESPECTRO DE QUALIDADE – EQ DA MÉTRICA RELAÇÃO PERIMETRAL



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

Da análise direta sobre a Figura 33, pode-se perceber que um elemento triangular somente é considerado de "Ótima" qualidade, dentro do contexto da métrica RP, se ele tiver um IRP menor do que 15. Isto significa dizer que, em termos geométricos, este elemento triangular deverá possuir um perímetro, cujo valor não deve exceder o limite de até 1,5% acima do perímetro de seu TIE, exclusive. Em outras palavras, sua forma deve ser tal que seus ângulos internos deverão estar muito próximos de 60°. Caso contrário, sua qualidade ficará entre uma das demais classes do espectro, cujo intervalo contenha o seu respectivo IRP.

O objetivo do espectro de qualidade EQ, dentro do contexto da métrica RP, é fornecer condições para que um analista possa acompanhar a variação da qualidade global de uma malha, quando ele encontra-se participando, interativamente, tanto do processo de refinamento como do processo de análise de

sua qualidade. Estes processos envolvem operações de inserção de novos elementos e operações de remoção de elementos existentes na malha, de modo que seja possível perceber o impacto destas operações, que são locais, nas características de qualidade globais da malha.

Para cumprir com a sua “missão”, o espectro de qualidade oferece um conjunto de funcionalidades. Estas funcionalidades tornam a métrica RP capaz de:

- apresentar a qualidade local, de forma, de cada elemento de uma malha triangular, através da associação de seu IRP a um conceito subjetivo de qualidade. Assim, cada elemento triangular avaliado pela métrica “IRP” possui um conceito de qualidade associado, que pode variar desde o melhor conceito, quando um elemento é entendido como sendo de qualidade de forma denominada “Ótima”, até o pior conceito, quando sua forma é entendida como de qualidade “Péssima”;
- relacionar elementos de uma malha que possuem similaridades, em termos de seus respectivos IRP e de suas categorias de qualidade de forma. Através do EQ é possível observar a frequência de ocorrência de todos os elementos de uma malha dentro das categorias do espectro. Então, é possível saber qual o percentual de elementos de uma malha que compõe cada uma das sete classes do espectro. Se, ao longo do processo de refinamento, o percentual de elementos considerados “Ótimos” aumentar, pode-se inferir que o referido processo “melhora” a qualidade local de forma dos elementos e a qualidade global da própria malha;
- apresentar a qualidade global, de forma, de uma malha ou de um conjunto de malhas. Através do índice de qualidade global “irp”, que será apresentado posteriormente, uma malha, ou um conjunto delas, podem ter seus respectivos índices de qualidade global associados a um conceito subjetivo de qualidade, podendo ser comparadas entre si;
- apresentar o impacto causado na qualidade global da malha pelas operações de definição e manipulação das propriedades de seus elementos constitutivos. Isto ocorre mediante a variação tanto do “irp”

global como da frequência de ocorrência dos IRP de todos os elementos da malha sobre as categorias do espectro.

Para que o EQ seja utilizado plenamente dentro da métrica RP, é preciso definir o índice de qualidade global de uma malha, denominado “irp”, cujos valores também recaem sobre este espectro. É o que será feito a seguir na quinta, e última, proposição desta métrica.

4.1.5 Quinta Proposição: O Índice de Qualidade Global – “irp” de uma Malha

A quinta proposição da métrica RP estabelece que a qualidade global de uma malha, denominada “Índice de Qualidade Global – irp”, é obtida a partir da média aritmética simples, envolvendo os valores IRP de todos os elementos triangulares que pertencem a esta malha. Esta definição está descrita na Figura 34.

No contexto da métrica RP, a qualidade global de uma malha também pode ter seu domínio de valores associado ao espectro de qualidade EQ. Então, uma malha, ou um conjunto delas, pode ser avaliada e ter suas qualidades globais comparadas entre si a cada refinamento, tanto através do “irp” como pelas suas respectivas categorias de qualidade global associadas. Somente para exemplificar, uma malha considerada pela métrica RP como tendo o índice “irp” associado ao intervalo “Ótimo” do espectro EQ seria aquela cuja média aritmética dos IRP de todos os seus elementos fosse inferior a 15. A frequência de ocorrência estabelecida para esta malha sobre o espectro poderia informar quais elementos possuem qualidade de forma “distante” desta média, de modo que futuros refinamentos poderiam atuar sobre eles. Outra maneira de refinar todos os elementos cujo “IRP” estivesse acima de um dado limite preestabelecido.

Obviamente, o “irp” pode indicar que, na média, uma malha pode ser muito boa e ainda assim poderia possuir diversos elementos com “IRP” muito ruim. Neste caso, bastaria observar a assinatura de qualidade para identificar quais elementos encontram-se em categorias indesejáveis do espectro. A própria assinatura apresenta a quantidade de elementos contidos em cada categoria.

FIGURA 34 – O ÍNDICE DE QUALIDADE GLOBAL – “IRP” DA MÉTRICA RP

Seja uma malha triangular constituída de "n" elementos, cada qual com seu próprio índice de qualidade local "IRP". Então, o índice de qualidade global, denominado "irp", desta malha é dado por:

Índice de Qualidade Global - irp:

$$irp = \frac{\sum_{i=1}^n IRP(i)}{n} \quad (1.9)$$

Proposição 5: O Índice de Qualidade Global - "irp" de uma malha triangular é obtido pela média aritmética simples sobre todos os IRP dos elementos que a constituem.

Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

Um detalhe importante do índice "irp" é que ele pode ser utilizado para comparar várias malhas entre si. Obviamente, não faz sentido comparar a qualidade global entre duas ou mais malhas que representam domínios geométricos diferenciados. Entretanto, esta comparação é fundamental para apoiar analistas que acompanham uma mesma malha que sofre sucessivos refinamentos. Então, para uma mesma representação geométrica, tem-se um mesmo domínio geométrico, que pode estar sendo representado por malhas diferentes, formadas por diferentes topologias ou por diferentes elementos triangulares. Estas malhas podem ser comparadas entre si através do índice de qualidade global "irp". Isto quer dizer que é possível acompanhar a variação da qualidade global de uma malha através de seus sucessivos refinamentos e verificar se, dentro do critério da métrica RP, estes refinamentos convergem, ou não, para uma malha de qualidade "melhorada".

Neste sentido, o "irp" assume grande importância, pois pode servir como referência para o acompanhamento do impacto causado sobre a qualidade global de uma malha mediante pequenas alterações nas propriedades geométricas de cada um de seus elementos. Esta parece ser a maior contribuição da métrica RP¹⁹.

¹⁹ Isto também pode ser feito por outras métricas. Entretanto, a métrica "RP" é mais didática e seu uso parece ser mais intuitivo.

Quando implementada em um sistema computacional, o índice de qualidade global “irp”, juntamente com os valores do índice de qualidade local “IRP”, medido para cada elemento, facilita o processo de interação entre o analista e o sistema malhador.

4.2 INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO MÉTODO “RELAÇÃO PERIMETRAL – RP”

O conceito apresentado por trás de todo o conjunto de medidas da métrica RP é simples. Basicamente, a métrica RP utiliza um critério geométrico para medir a qualidade de forma de um elemento triangular de uma malha. Este critério estabelece que cada elemento possui um elemento virtual de comparação associado, de mesma área, cujo perímetro é o menor possível. Então, a relação entre os perímetros fornece um parâmetro adequado para medir as diferenças entre os dois. A medida desta diferença, batizada como índice “IRP”, descreve quanto a forma do elemento está distante da forma ideal, eqüilátera. Isto é possível porque existe uma relação direta entre o perímetro de um triângulo eqüilátero e a sua forma.

A métrica RP tira proveito de uma característica geométrica peculiar do triângulo eqüilátero:

- Seja M um conjunto finito de triângulos distintos, possuindo como característica comum o mesmo valor de área. Se M representa todas as combinações possíveis de triângulos diferentes, incluindo-se nele um de forma eqüilátera, então, não haverá neste conjunto um triângulo de menor perímetro senão aquele que é eqüilátero.

Em termos geométricos, esta característica define o próprio domínio dos índices “IRP” e “irp”. Como o perímetro do TEI é sempre menor do que o perímetro de seu elemento associado, os valores possíveis destes índices são sempre maiores, ou iguais, a zero. A métrica RP estende esta característica geométrica a todos os elementos de uma malha, fornecendo um valor de IRP específico. Então, elementos de formas similares, considerados como de “qualidade intermediária” podem ser comparados²⁰ através de seus valores IRP. O menor valor deste índice indica o elemento de melhor forma geométrica.

²⁰ Foi justamente para a comparar elementos que as métricas baseadas na geometria foram criadas.

A métrica RP também estende esta característica à própria malha como um todo. Por esta razão é que o processo de comparação de qualidade global envolvendo malhas distintas pode contar com a métrica RP de qualidade, cuja medida é dada pelo índice “irp”.

4.3 O PROCESSO DE ACOMPANHAMENTO DOS REFINAMENTOS SUCESSIVOS

Esta seção tem como objetivo mostrar a importância da utilização da métrica RP no processo de análise de qualidade de uma malha que está sujeita a sucessivos refinamentos.

Num processo de refinamento sucessivo de uma malha, a fase de análise de sua qualidade sempre representou um desafio aos engenheiros analistas. Para enfrentá-lo, além de “uma boa dose de” experiência, é necessário um conjunto adequado de métricas de qualidade e de ferramentas capazes de responder a um conjunto simples de perguntas que sempre surgem durante a fase de refinamento:

- O que acontece com a qualidade de uma malha se um processo de inserção de um ou mais pontos na nuvem for disparado?
- O que acontece com a qualidade de uma malha se um processo de remoção de um ou mais pontos na nuvem for disparado?
- O que acontece com a qualidade de uma malha se um processo de movimentação de um ou mais pontos na nuvem for disparado?
- Ao final das contas, após um dado refinamento, a qualidade da malha melhorou ou piorou? e esta variação pode ser medida em pontos percentuais?;
- Existe um conjunto de malhas que, mesmo após os respectivos refinamentos, são similares. em que aspectos se diferenciam?

Obviamente, cada analista que é responsável pelo processo de análise de qualidade de uma dada malha, que sofre sucessivos refinamentos, possui um conjunto próprio de questões a serem respondidas no momento em que realiza o seu trabalho.

As questões acima apenas representam um simples exemplo das dúvidas comuns que surgem ao se analisar a qualidade de uma malha e que a métrica RP,

através de suas medidas de qualidade, pode responder com muita facilidade quando implementada em um sistema computacional.

As três primeiras questões dizem respeito ao impacto que pequenas alterações locais na malha causam sobre a sua qualidade global. Isto quer dizer que, se a métrica RP fornece as respostas para estas questões, então ela de fato auxilia o analista a desenvolver sua sensibilidade nesta relação de causa-efeito.

A quarta questão diz respeito à própria qualidade de uma malha após o seu refinamento. Em outras palavras, a métrica RP fornece um valor específico de "irp" para cada malha e ainda classifica-a dentro de um conjunto de qualidade subjetiva. Isto quer dizer que uma malha sempre terá associado a ela uma medida de qualidade e uma classificação de qualidade. Por exemplo, após um dado refinamento de uma malha qualquer, cuja qualidade antes do refinamento era considerada como "Ruim", de valor $irp = 160$, passou a ter sua qualidade classificada como "Regular", com $irp = 140$. Em termos percentuais, sua qualidade "melhorou" 12,50%. Neste caso, a métrica RP é utilizada para descrever a variação de qualidade de uma dada malha, após o refinamento.

- A Métrica RP, através de seu espectro de qualidade EQ, apresenta uma verdadeira "assinatura" de qualidade, tanto para elementos triangulares como para a própria malha. Por meio desta assinatura, a métrica RP oferece um mecanismo de distinção entre elementos e malhas de qualidade "intermediária".

A quinta questão diz respeito à fase de comparação entre duas ou mais malhas, todas resultantes de um conjunto de refinamentos sucessivos. Para o analista é difícil perceber visualmente as diferenças entre malhas que apresentam similaridades em termos topológicos e em termos de seus elementos triangulares. Para responder esta questão, a métrica RP oferece uma medida para descrever estas diferenças, de modo que a tarefa de comparação da qualidade de malhas que são similares seja realizada através dos valores "irp" e das categorias de qualidade associadas. Por exemplo, em um caso extremo, pode-se imaginar duas ou mais malhas distintas com o mesmo valor de "irp". A métrica RP ainda assim fornece condições para uma comparação. Basta observar a frequência de ocorrência dos IRP dentro do espectro de qualidade EQ. Neste caso, uma malha se diferenciaria da outra pela composição do espectro de qualidade. Uma teria mais elementos

considerados “Ruins”, enquanto que as outras poderiam apresentar uma quantidade diferente de elementos nas demais categorias. O espectro de qualidade EQ representa uma “assinatura” de uma malha. E esta assinatura é de fundamental importância para o processo de análise de qualidade. Para a métrica RP, elementos e malhas com mesma assinatura representam elementos e malhas de mesma qualidade de forma.

A métrica RP está implementada neste trabalho, no capítulo 6, onde um conjunto de malhas distintas, que representam a geometria do lago denominado “*Lake Superior*”, é avaliado e exemplificado em um estudo de caso. Cada malha do exemplo possui uma assinatura própria e distinta, procurando destacar as características desta métrica.

5 IMPLEMENTAÇÃO DA MÉTRICA “RP” EM UM CONTEXTO COMPUTACIONAL: APLICAÇÃO WEB PARA GERAÇÃO DE MALHAS-2D E AVALIAÇÃO DA SUA QUALIDADE

“A fool with a tool is still a fool”.
(Anônimo)

De maneira geral, malhas podem ser definidas como o resultado obtido através da realização de um processo de quebra de um determinado domínio físico em um conjunto de elementos menores, com o objetivo de facilitar a obtenção de uma solução numérica para uma determinada Equação Diferencial Parcial (PDE), conforme [BERN_92], [GEOR_91] e [BERN_95].

O processo de discretização de domínio tem sido automatizado através da utilização de vários tipos de algoritmos implementados em diversos sistemas computacionais, com o objetivo de atender à crescente demanda por *Meshing Technology*. Uma das principais facilidades oferecidas por tais tecnologias está voltada para a busca de soluções de problemas onde as técnicas de FEM (*Finite Element Method*) são aplicáveis. De fato, especialistas nestas áreas desejam discretizar domínios geométricos bastante complexos, freqüentemente constituídos de milhares ou até mesmo de milhões de elementos, com o menor número de interações possíveis.

O propósito deste capítulo é apresentar uma aplicação *Web*, simples e didática, geradora de malhas não-estruturadas em duas dimensões, que permite a avaliação de qualidade uma dada malha, ou de um conjunto delas, no que diz respeito tanto à sua qualidade global como à qualidade local de seus elementos constitutivos, fazendo uso da métrica de qualidade “RP”, proposta no capítulo anterior. Para tanto, um conjunto de operações de definição e de manipulação das propriedades dos elementos da malha é realizado de forma interativa, de modo que tanto a variação da qualidade local destes elementos como a variação da qualidade global da malha, sejam acompanhadas por meio de suas interfaces. Com a apresentação desta aplicação *Web* espera-se:

- Contribuir para o entendimento do processo de geração de malhas;
- Justificar a relevância da geração de malhas na solução numérica de problemas de engenharia;

- Comprovar a utilidade da Métrica RP no processo de análise da qualidade de malhas-2D não estruturadas e no processo de análise de qualidade de seus elementos constitutivos;
- Aumentar a sensibilidade do analista que utiliza a métrica “RP” para “perceber” o impacto que um dado elemento, cuja qualidade local “IRP” é conhecida, causa sobre a qualidade global da malha.

5.1 INTRODUÇÃO

A despeito dos benefícios auferidos pela aplicação das tecnologias de geração de malhas, dados pelo alto grau de transparência, um importante aspecto é levantado: como desenvolver a sensibilidade necessária para analisar o relacionamento existente entre a qualidade de uma malha, num senso global, e a qualidade de um de seus elementos, em um senso local, com um número mínimo de interações?

Sabe-se que o processo de geração de malhas consiste na discretização de um dado domínio geométrico em pequenos e simples elementos. Estes elementos podem assumir formas triangulares ou quadrilaterais, no caso de malhas em duas dimensões, ou ainda, no caso de malhas em três dimensões, formas tetraédricas ou hexaédricas. Foi visto, no capítulo 3 que as malhas, em 2D ou em 3D, podem ser tanto do tipo Estruturadas como do tipo Não-Estruturadas. Tipicamente malhas estruturadas em duas dimensões utilizam elementos quadrilaterais, enquanto que malhas não-estruturadas utilizam elementos triangulares²¹. Alguns autores, especificamente [BERN_95], apresentam ainda malhas classificadas como do tipo Híbridas, que são derivadas dos dois tipos mencionados anteriormente. Obviamente, a multiplicidade de tipos de malhas induz o aparecimento de uma quantidade ainda maior de processos e de técnicas de geração. Cada qual possui um conjunto de aspectos positivos e negativos em relação à sua aplicabilidade em um determinado tipo de problema de engenharia ou de domínio geométrico.

A descrição dos principais tipos de malhas existentes, como das várias técnicas e algoritmos utilizados para sua geração não faz parte do escopo deste capítulo. Também está fora de discussão o processo de construção e de

²¹ Entretanto, as malhas estruturadas triangulares são também utilizadas.

modelagem de domínios geométricos. Neste capítulo simplesmente ir-se-á assumir que estes domínios se apresentam mediante uma nuvem de pontos, cuja estrutura de dados poderia ser importada ou obtida através de uma interface específica da aplicação *Web*.

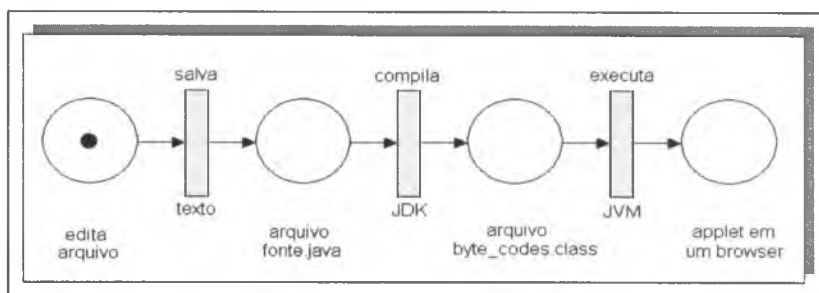
5.2 A APLICAÇÃO *WEB*

Para comprovar a utilidade da Métrica RP no processo de análise da qualidade de malhas-2D não-estruturadas e no processo de análise de qualidade de seus elementos constitutivos, foi desenvolvida uma aplicação *Web*, mais conhecida como *applet*.

De acordo com Peter Jandl, em [JAND_02], o processo de criação de *applets* JAVA, que são pequenos programas que rodam em uma máquina cliente e que são capazes de operar adequadamente em um ambiente JAVA instalado em qualquer sistema, deve obedecer a uma série de etapas, conforme a Figura 35. Estas etapas representam, em termos gerais, as seguintes atividades: (i) atividades de edição de um programa, (ii) da sua compilação e (iii) da sua posterior execução. A atividade de edição pode ser realizada por meio de qualquer editor de texto capaz de salvar arquivos no formato *ASCII*. A extensão deste arquivo fonte deve ter o nome de extensão “.java”. Desta forma o compilador *Java*, denominado “*javac*”, que se encontra na biblioteca do *Java SDK*, poderá encontrar o arquivo fonte e transformá-lo em um outro arquivo cujo formato intermediário da plataforma JAVA é denominado “*bytecode*” e cuja extensão recebe o nome de “.class”. Este último arquivo é que é carregado na memória da máquina cliente e executado pela máquina virtual JAVA nela instalada, denominada JVM.

Uma das características das aplicações *Web* geradas pela plataforma JAVA é que elas possuem um tempo de execução um pouco mais lento em relação às aplicações geradas por código nativo compilado diretamente, para operar especificamente sobre um dado sistema operacional. Em contrapartida, este custo de performance é compensado pelos ganhos auferidos de interoperabilidade e independência de plataforma desta linguagem. Estes ganhos representam a possibilidade de efetivamente trabalhar-se com sistemas distribuídos, sobre uma arquitetura de plataformas heterogêneas.

FIGURA 35 – AS FASES DE CONSTRUÇÃO DE UMA APLICAÇÃO WEB



Fonte: adaptado de [JAND_02]

Maiores detalhes sobre *applets* e tecnologia JAVA podem ser encontrados em [DEIT_01], [DEIT_03], [INGR_97] e [COHE_96]. Outras referências são apresentadas posteriormente, quando os aspectos de estruturas de dados e de computação gráfica forem abordados.

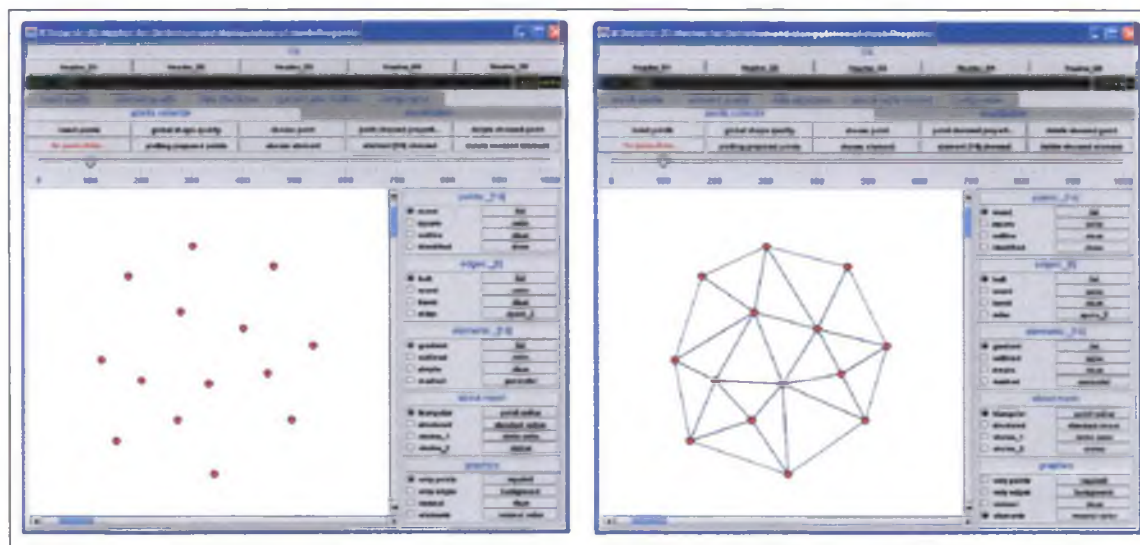
Especificamente, tem-se que a aplicação *Web* deste trabalho, desenvolvida para implementar a métrica “RP”, oferece um conjunto de funcionalidades para a realização de operações de definição e de manipulação das propriedades dos elementos da malha, com o objetivo de acompanhar a variação da sua qualidade global.

Estas funcionalidades foram implementadas em conformidade com um processo específico de análise de qualidade e um processo particular de refinamentos sucessivos.

Será mostrada na seção 5.2 que o ponto de partida para todo o processo de análise da qualidade de uma malha é identificado pela nuvem inicial de pontos, cuja malha gerada pela primeira vez representa o seu *convex hull*, conforme está descrito na Figura 36.

O processo de refinamentos sucessivos de uma malha, via aplicação *Web*, está descrito na seção 5.3.

FIGURA 36 – A NUVEM DE PONTOS E A SUA PRIMEIRA MALHA, VIA INTERFACES DA APLICAÇÃO WEB



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

Observando a Figura 36, percebe-se que aplicação *Web* fornece um conjunto de funcionalidades. Cada uma delas está associada à nuvem inicial de pontos e a uma malha, gerada a partir desta nuvem. Trata-se de dois elementos básicos da aplicação, tomados como ponto de partida para a operacionalização dos processos de refinamento da malha e de análise de sua qualidade. Cada um destes processos é apresentado a seguir.

5.3 O PROCESSO DE ANÁLISE DE QUALIDADE DA MALHA

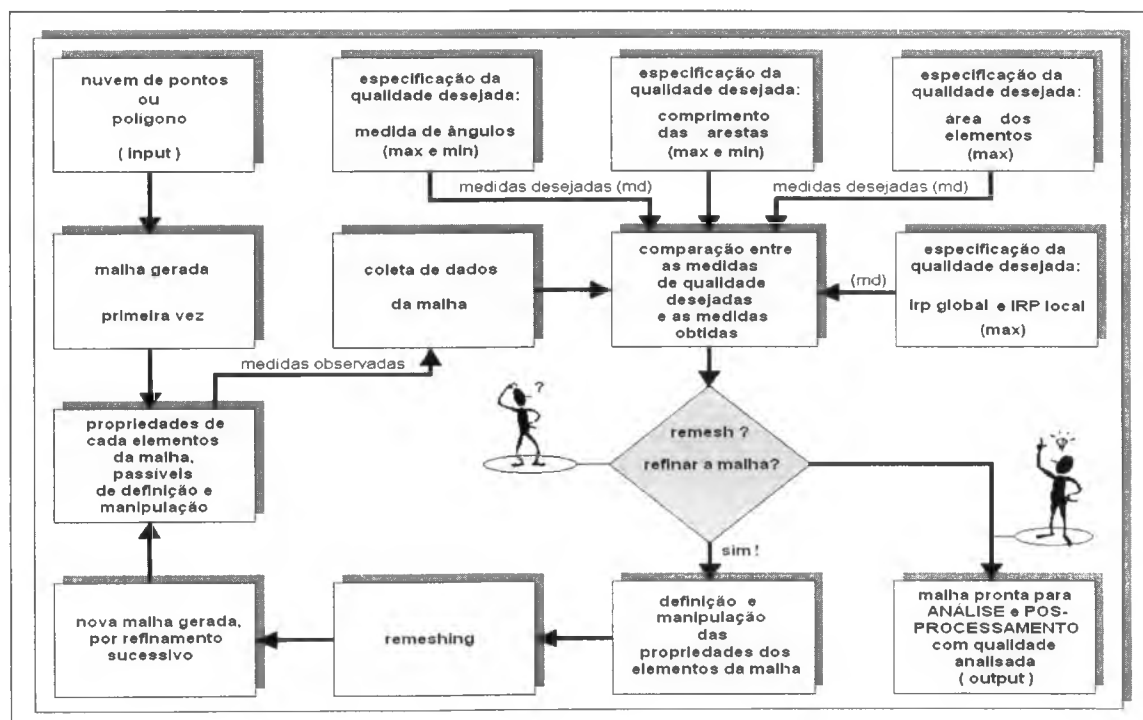
Se todo sistema malhador gerasse automaticamente malhas de boa qualidade, ter-se-ia como input deste sistema apenas a especificação do domínio geométrico a ser discretizado. Como *output*, uma malha de qualidade garantida. Obviamente, esta situação é pouco freqüente e mais rara ainda quando se trata de processos de geração de malhas não-estruturadas. Desta forma, a introdução de uma fase de análise da qualidade global de uma malha, por um especialista, durante o processo de refinamento sucessivo, é fundamental para garantir a convergência para uma qualidade final aceitável. Além disso, sob o ponto de vista do analista, é

sempre interessante ter à disposição a oportunidade de realização de um novo refinamento.

A aplicação *Web* fornece um conjunto de cinco medidas de qualidade para serem usadas no processo de análise de qualidade de uma malha, todas baseadas na geometria dos seus elementos constitutivos. São elas: ângulos internos, áreas, comprimentos das arestas, “*circumradius-to-shortest_edge_ratio*” e IRP. Estas medidas podem ser capturadas, quantificadas e observadas pelo analista, em tempo de execução, através de uma interface específica. Entretanto, a principal métrica de qualidade de malhas, utilizada pela aplicação *Web*, para permitir a análise da qualidade de malhas por ela gerada, é a métrica IRP, desenvolvida e apresentada no capítulo anterior.

A Figura 37 descreve o modelo do processo de análise de qualidade que esta aplicação implementa. Isto quer dizer que a aplicação *Web* foi implementada de modo que suas funcionalidades foram desenvolvidas de acordo com o processo de análise de qualidade nela descrita.

FIGURA 37 – O MODELO DO PROCESSO DE ANÁLISE DE QUALIDADE QUE A APLICAÇÃO *WEB* IMPLEMENTA



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

No diagrama apresentado na Figura 37, é possível perceber as várias fases do ciclo de vida do referido processo. Em termos práticos, todo o processo de análise de qualidade de uma malha, através desta aplicação *Web*, começa com o fornecimento de uma nuvem de pontos.

A partir do momento em que a nuvem de pontos encontra-se totalmente especificada, pode-se gerar uma malha inicial e observar as suas características geométricas e topológicas. Esta primeira malha representa a própria envoltória convexa (*convex hull*) da nuvem de pontos e, geralmente, está longe de ser uma malha definitiva, ou plenamente representativa, da geometria do problema que a nuvem descreve. Entretanto, as medidas de qualidade global e local associadas à malha já podem ser quantificadas e comparadas com as medidas desejadas, que foram previamente especificadas em uma interface específica da aplicação. Estas medidas desejadas, por sua vez, também podem ser re-especificadas em tempo de execução, dando uma maior flexibilidade ao processo de refinamento.

Operações de especificação de orelhas, furos e buracos, além de contornos internos, exigem que o processo de análise da qualidade da malha ofereça ainda uma fase de definição e de manipulação das propriedades dos seus elementos, antes que o sub-processo de refinamento, denominado “*remeshing*”, seja realizado. Outras operações também fazem parte desta fase, como a inserção de novos pontos, ou a própria retirada de alguns deles. Estas operações estão descritas na seção 5.4 deste capítulo, que aborda o processo de refinamento sucessivo de uma malha.

Uma vez especificados os valores para as propriedades dos seus elementos, uma malha pode ser refinada. Neste ponto do processo de análise, entende-se por “*remeshing*” como o nome de um sub-processo cuja finalidade é a geração de uma nova malha, tomando-se como entrada os valores mais recentes para as propriedades da malha anterior.

Tendo-se gerado uma nova malha, pode-se, novamente, observar os seus aspectos geométricos e topológicos, onde as medidas quantificadas para a qualidade local dos seus elementos e também a sua métrica global podem ser comparadas com as mesmas medidas desejadas. Assim, o analista tem a oportunidade de refinar sucessivamente a malha, de forma interativa com a

aplicação *Web*, até que ela seja considerada adequada para o pós-processamento. Fecha-se o ciclo do processo de análise da qualidade de uma malha.

É importante salientar que um dos objetivos do presente trabalho é demonstrar como a métrica IRP pode ser utilizada no processo de análise da qualidade de uma malha. O ponto forte²² desta abordagem é que este processo ocorre de forma didática, de tal maneira que o analista perceba o impacto de suas manipulações locais sobre os aspectos locais da malha, após o devido refinamento. O impacto global na malha é medido pela variação do valor do índice de qualidade global da malha “irp”, quando os valores da qualidade local de cada elemento da malha, denominados “IRP”, são atualizados e/ou modificados.

Então, pode-se imputar à aplicação *Web* a propriedade de contribuir para o desenvolvimento da sensibilidade do analista, porquê ela implementa um modelo adequado de análise de qualidade e utiliza uma métrica adequada de qualidade, a métrica “RP”, capaz de descrever, didaticamente, a variação da qualidade global de uma malha causada pela variação da qualidade local de cada um de seus elementos constitutivos. Resumindo, através deste modelo de processo de análise e da métrica “RP”, esta aplicação *Web* permite o acompanhamento da variação da qualidade de uma malha que passa por um conjunto de refinamentos sucessivos.

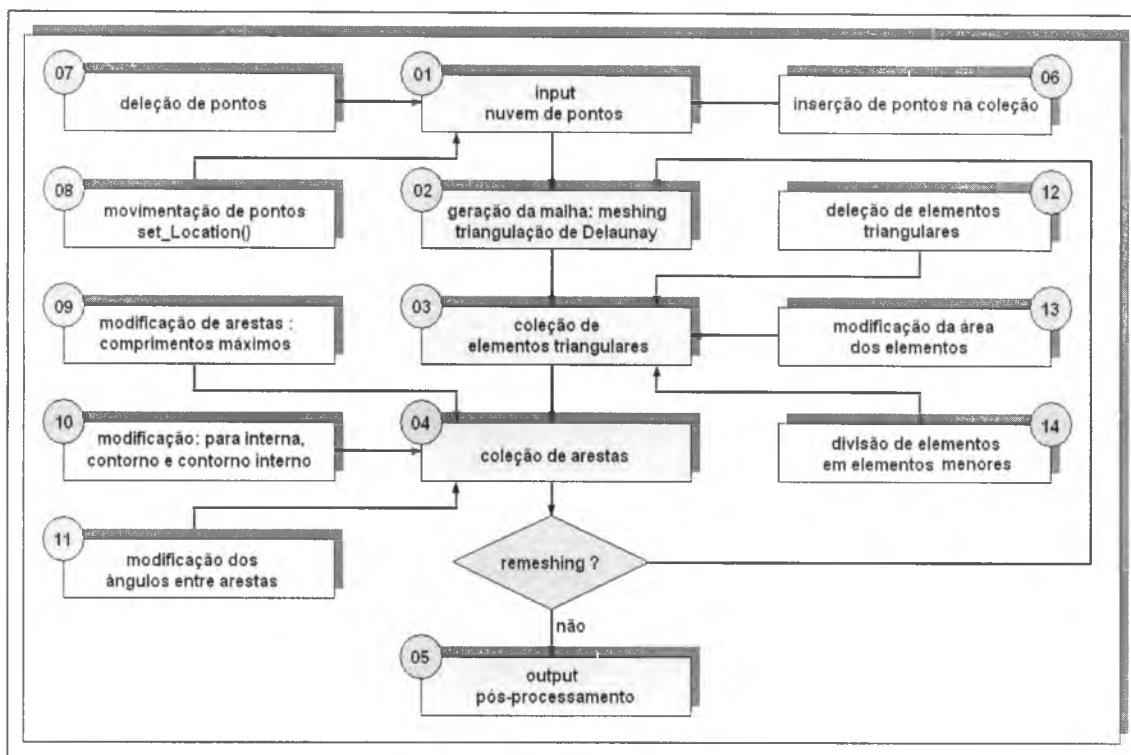
5.4 O PROCESSO DE REFINAMENTO DE UMA MALHA

Conforme foi visto anteriormente, a aplicação *Web* oferece um conjunto de interfaces adequadas que permitem que um analista realize as tarefas de alteração das propriedades de uma malha buscando um “melhor” refinamento.

A Figura 38 descreve o modelo do processo de refinamento que é implementado por esta aplicação.

²² Esta é a maior contribuição do presente trabalho.

FIGURA 38 – O PROCESSO DE REFINAMENTO DE UMA MALHA-2D TRIANGULAR, VIA APLICAÇÃO WEB



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

As operações de definição e de manipulação das propriedades de uma malha que um analista pode realizar, dentro do contexto computacional da aplicação *Web*, estão descritas pela Figura 38. Estas operações “realizam” a função maior do processo de refinamento de uma malha: elas permitem a modificação de todos os elementos que caracterizam o “estado” de uma dada malha em um determinado instante de tempo. Em outras palavras, se um analista considera que uma dada malha ainda precisa ser refinada, então ele tem à sua disposição um conjunto de operações básicas para que esta malha seja modificada e tenha sua qualidade de forma, tanto local como global, avaliada e acompanhada em cada fase do refinamento.

Para exemplificar a maneira pela qual a aplicação *Web* operacionaliza o processo de refinamento descrito pela figura acima, apresenta-se o seguinte cenário: suponha-se que um analista deseja alterar a área máxima prevista para os

elementos pertencentes a uma coleção de elementos de uma dada malha, diminuindo-a ainda mais.

De acordo com a Figura 38, o analista estaria interessado em disparar a operação descrita pelo sub-processo número 13. Conseqüentemente, tem-se que este processo repercutirá na cardinalidade da coleção de pontos (nuvem), da coleção de arestas e da própria coleção de elementos, pois este sub-processo exigiria a inserção de novos elementos. Para escolher o novo valor do limite máximo da área dos elementos, ele poderia “chamar” o serviço computacional para apresentar a área de um dado elemento da malha que ele considera “adequado”. Além da área, ele poderia também observar outras propriedades deste elemento, de forma que estas observações o auxiliem na identificação daquele limite e ainda na busca de outros parâmetros que sejam úteis na definição das condições e das restrições necessárias ao refinamento da malha. Neste momento, o analista poderia contar com a métrica “RP” para avaliar o quanto estas modificações locais afetaram a própria qualidade global da malha.

Analogamente, em um outro cenário, o analista poderia estar interessado em especificar contornos internos ao domínio geométrico, descrito pela nuvem de pontos, com o objetivo de caracterizar furos, buracos e orelhas nele existentes. Para tanto, seria necessária a realização das atividades descritas pelos sub-processos de números 10, 11 e 12, no mínimo. A especificação de um contorno interno em um domínio geométrico impõe algumas restrições importantes sobre o processo de refinamento que o sistema computacional deve considerar. Um exemplo clássico é dado quando um certo ponto, pertencente ao contorno interno do domínio geométrico, é solicitado para ser excluído da coleção de pontos. Neste caso, o sistema computacional deveria emitir um aviso sobre a impossibilidade de realização desta operação, uma vez que poderia descaracterizar completamente a representação geométrica daquele domínio.

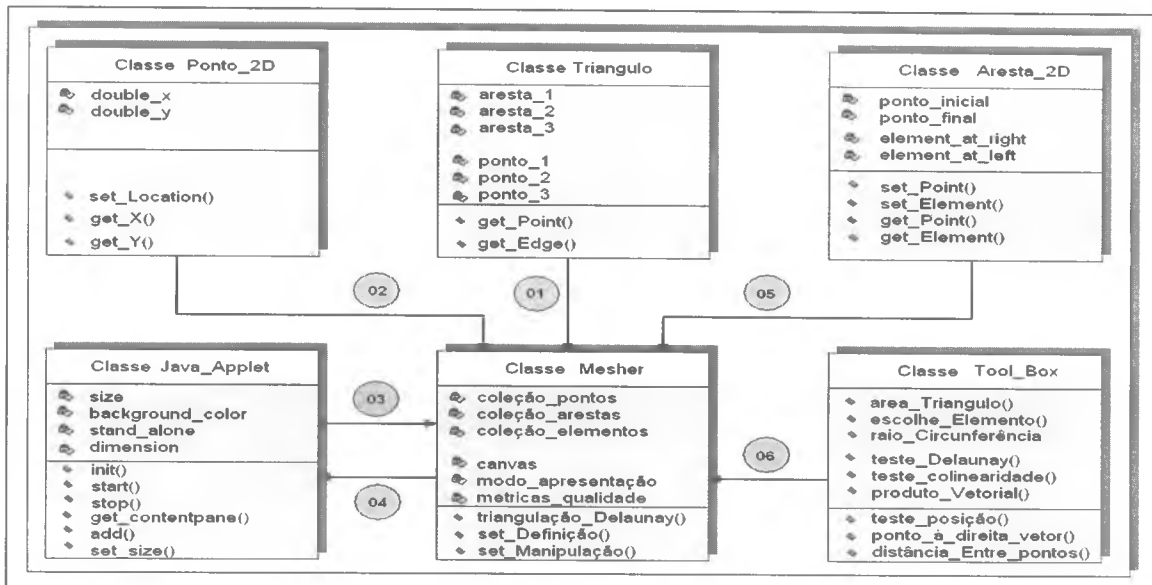
O processo de refinamento implementado fornece condições para que o analista realize uma interação direta com as estruturas de dados da aplicação *Web* que são responsáveis pelas coleções de pontos, de elementos e de arestas, podendo definir e manipular seus dados. A cada operação de definição, ou a cada operação de manipulação, é possível avaliar a qualidade global da malha. Desta forma, espera-se que o processo de refinamento sucessivo que a aplicação *Web*

implementa, através de suas interfaces, possibilite uma maior convergência para um refinamento mais adequado de uma malha, com um menor número de interações.

5.5 AS ESTRUTURAS DE DADOS DA APLICAÇÃO *WEB*

O objetivo desta seção é apresentar, de forma bastante simplificada, as estruturas de dados que são utilizadas para a implementação dos algoritmos que estabelecem o correto funcionamento das facilidades oferecidas pela aplicação *Web*. Estas estruturas de dados estão representadas por meio de objetos instanciados a partir de cinco classes informacionais exclusivas que, através de seus métodos e atributos, permitem a estes objetos trocar entre si mensagens, em tempo de execução, de modo a manter o controle de todas as operações realizadas por este sistema computacional. Estas classes foram implementadas na linguagem de programação JAVA, cuja versão é dado pelo pacote de desenvolvimento de *software* denominado “J2SDK_1.4.1”. Por se tratar de uma aplicação *Web*, o funcionamento deste sistema pode ser observado utilizando-se um *browser* qualquer. Entretanto, devido ao fato de que algumas de suas funcionalidades foram implementadas usando-se a biblioteca “*javax.swing*”, convém utilizar versões equivalentes (ou superiores) à versão 4.0 dos sistemas “*Netscape*” e “*Explorer*”. A Figura 39, descreve conceitualmente as principais classes, e seus relacionamentos, que a aplicação *Web* implementa.

FIGURA 39 – DIAGRAMA DE CLASSES (AS PRINCIPAIS) E SEUS RELACIONAMENTOS



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

As classes descritas no diagrama da Figura 39 são conceituais e representam, de forma simplificada, as estruturas de dados da aplicação *Web*. Estas classes estão em conformidade com a terminologia descrita pela Modelagem de Objetos através da UML (*Unified Modeling Language*), apresentada por Craig Larman, em [LARM_00] e por José D. Furlan, em [FURL_98], além de Grady Booch, em [BOOC_97].

Os relacionamentos existentes entre estas classes simbolizam as trocas de mensagens, em tempo de execução, necessárias para que as interfaces deste sistema possam oferecer as funcionalidades aos seus usuários. Pode-se perceber que a nuvem de pontos, os elementos triangulares e as suas arestas, representados pelas instâncias das respectivas classes “Ponto_2D”, “Triângulo” e “Aresta_2D”, estão sob controle da classe “Mesher”.

A classe “Mesher” praticamente centraliza todo o controle sobre o funcionamento da aplicação *Web*, pois ela controla os processos de coleta de pontos e de geração da primeira malha. Além disso, ela controla também os processos de análise da qualidade da malha e de refinamentos sucessivos, através das atividades de definição e de manipulação das suas propriedades.

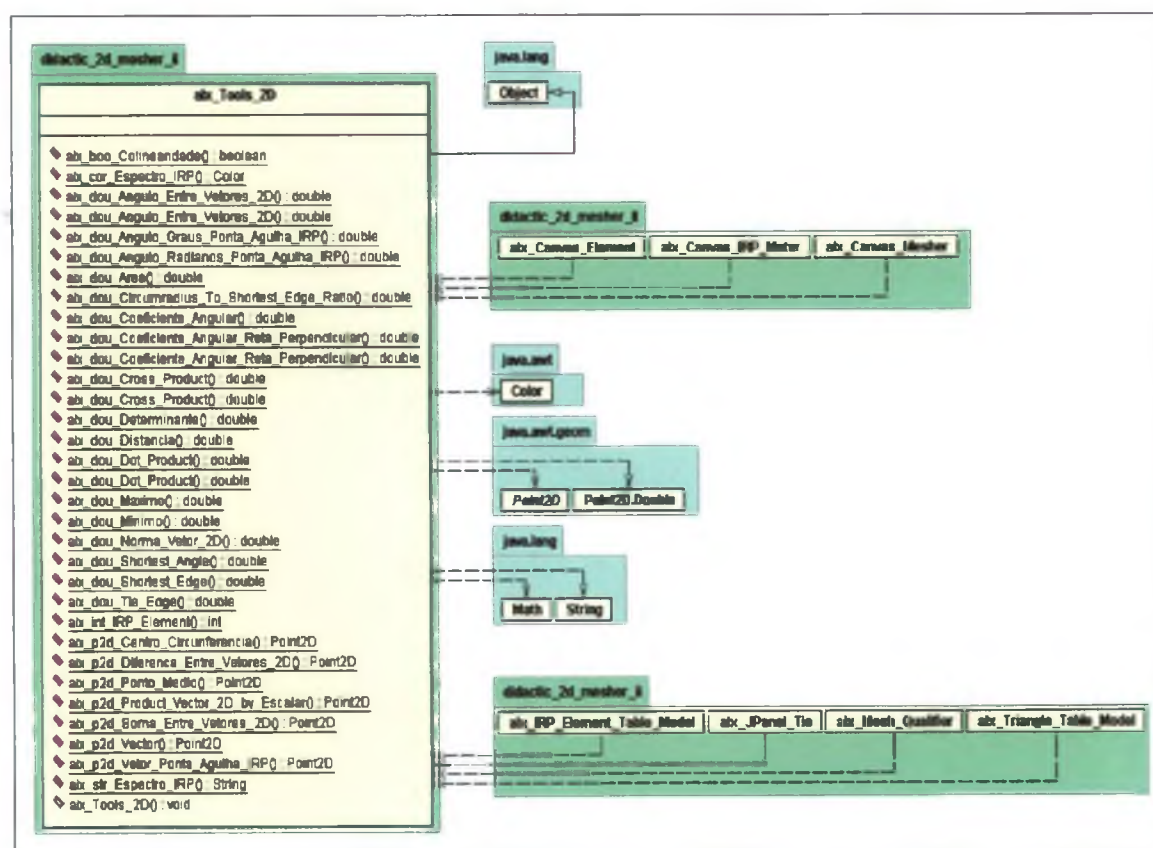
Da observação sobre o diagrama de classes acima, percebe-se que os relacionamentos “01”, “02” e “05” descrevem as trocas de mensagens existentes entre os objetos da classe “*Mesher*” e das classes “*Ponto_2D*”, “*Triângulo*” e “*Aresta_2D*”. Com a primeira, troca mensagens no sentido de controlar as coleção de pontos e todas as atividades de definição e de manipulação destes dentro da referida coleção. Com a classe “*Triângulo*”, a troca de mensagens se dá com o objetivo de garantir com que os seus atributos atuem corretamente como “ponteiros” para a posição dos mesmos nas devidas coleções. Em outras palavras, espera-se que um triângulo esteja corretamente especificado, em termos de suas duas triplas: de pontos e de arestas que unem estes pontos. Cada vértice da classe “*Triângulo*” aponta para uma posição na coleção de pontos, que está sob controle da classe “*Mesher*”. Da mesma forma, cada aresta da classe “*Triângulo*” aponta para uma posição específica na coleção de arestas da classe “*Mesher*”. Além desta correspondência, a classe “*Mesher*” garante com que todo o processo de definição e de manipulação dos valores, representado pelas coleções, ocorra dentro dos princípios de consistência e integridade dos dados, mantendo a representatividade da malha. Por último, a classe “*Mesher*” troca ainda mensagens com a classe “*Aresta_2D*”. Deste relacionamento percebe-se a maneira pela qual uma aresta aponta para a coleção de pontos. Assim, uma instância da classe “*Aresta_2D*” possui dois atributos para descrever dois pontos, um inicial e outro final, e ainda dois atributos cuja principal função é descrever os elementos triangulares que se encontram posicionados à direita e à esquerda desta aresta.

Além das quatro classes mencionadas no parágrafo anterior, existem duas classes que estão no diagrama e que merecem algumas considerações. A classe “*Tool_Box*” representa um conjunto de métodos estáticos que permitem que a classe “*Mesher*” realize cálculos matemáticos necessários à operacionalização dos processos de geração de malhas, de análise de sua qualidade e de seus refinamentos sucessivos. Com relação à última classe do diagrama, denominada “*Java_Applet*”, ela fornece toda a biblioteca de classes e de métodos, pertencentes à tecnologia *Java*, que são necessários para que a classe “*Mesher*” controle o funcionamento completo da aplicação *Web*. Para tantos controles, esta classe utiliza um grande conjunto de estruturas de dados, todas encapsuladas em classes específicas. Por motivos de simplificação, admite-se que estas estruturas de dados

estão representadas pelos atributos e métodos das classes descritas pelo diagrama da Figura 39, além, obviamente, dos seus relacionamentos.

A Figura 40, descreve a classe “*alx_Tools_2D*”, usando a notação UML. Ela representa a implementação real da classe conceitual “*Tool_Box*”, descrita anteriormente e apresenta seus métodos estáticos e os seus relacionamentos com as demais classes implementadas no contexto computacional da aplicação *Web*. Por ser uma classe estática ela não possui propriedades privadas.

FIGURA 40 – A CLASSE “*ALX_TOOLS_2D*”, E SEUS RELACIONAMENTOS, USANDO A NOTAÇÃO UML



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

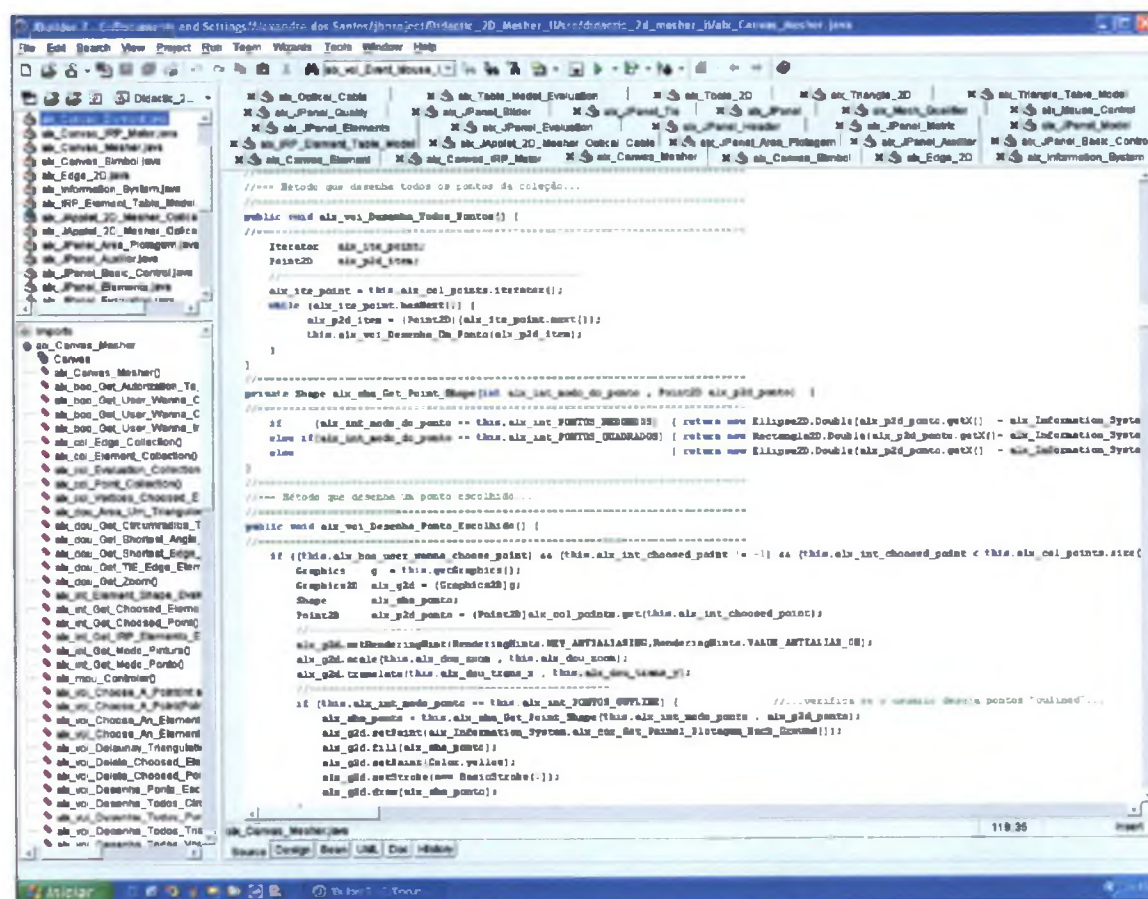
A classe “*alx_Tools_2D*” é derivada diretamente da classe “*java.lang.Object*”, que é classe de mais alto nível da hierarquia de classes da linguagem Java. O pacote denominado “*didactic_2d_mesher*” representa uma coleção de classes exclusivas da aplicação *Web*. Os demais pacotes fazem referência à estrutura de classes e dados da própria linguagem Java.

5.6 A INTERFACE DE DESENVOLVIMENTO INTEGRADO (IDE) UTILIZADA PARA IMPLEMENTAR A APLICAÇÃO WEB

Para o desenvolvimento e implementação da aplicação *Web*, foi utilizada a ferramenta *JBuilder*, versão 7.0, modelo *Trial-Version*, de distribuição e utilização gratuita, por tempo limitado. Este *software* foi baixado da Internet, por *download*, diretamente da empresa proprietária: *Borland Corporation*. Esta ferramenta é considerada uma das mais produtivas no processo de desenvolvimento de aplicações, utilizando-se a linguagem de programação *Java*, da *Sun Microsystems*, sobre a plataforma *Windows 95/98/NT/XP*, da *Microsoft Corporation*.

A Figura 41 descreve a implementação de uma das interfaces de desenvolvimento da aplicação *Web* através da ferramenta *JBuilder 7.0*.

FIGURA 41 – A CLASSE “ALX_CANVAS_MESHER” PARCIALMENTE ESPECIFICADA ATRAVÉS DA IDE JUILDER 7.0



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

A tecnologia JAVA oferece plenas condições para que o ciclo de vida de um dado sistema computacional seja realizado através do componente denominado “SDK”. O “SDK” é um acrônimo para o termo “*Kit de Desenvolvimento de Software*”, formado por um conjunto de ferramentas do tipo “console” onde é possível escrever um programa, compilá-lo e instalá-lo em um dado caminho de uma determinada arquitetura de computadores e ainda colocá-lo em funcionamento. Por ser de distribuição gratuita, o “SDK” não oferece interfaces gráficas além daquelas representadas pelo modo “console”. É natural que seja assim. Muitos desenvolvedores de sistemas utilizam as interfaces do “SDK”. Entretanto, alguns procuram as facilidades oferecidas através de interfaces gráficas mais amigáveis. As tarefas de testes, de correção de erros, de buscas de referências e de acoplamento de novas classes ao projeto ficam mais “leves” quando se utiliza uma *IDE*.

A *Sun Microsystems* também disponibiliza ambientes gráficos de desenvolvimento, denominados FORTE e NETBEANS. Por uma simples questão de performance²³ destes dois ambientes funcionando no sistema operacional *Windows XP*, foi escolhido o JBuilder 7.0 como interface gráfica de desenvolvimento da aplicação *Web*. Através desta *IDE*, foram construídas todas as classes específicas da aplicação, as interfaces de interação com o usuário, além de utilizadas as classes da própria biblioteca de classes da linguagem JAVA, necessárias para o seu funcionamento.

Como JAVA é uma linguagem totalmente orientada a objetos, a implementação da aplicação *Web* exigiu um esforço adicional para que este conceito fosse plenamente aplicado. Assim, as características de abstração, de herança, de polimorfismo e de encapsulamento, inerentes à Linguagem JAVA, permitiram com que o processo real de geração e de avaliação de malhas, de acordo com a métrica RP seja representado em um contexto computacional de forma bastante produtiva, sempre respeitando a boa praxe da Engenharia de *Software*, que leva em consideração os demais aspectos técnicos referentes ao ciclo de vida de um sistema computacional.

²³ Como FORTE e NETBEANS são ambientes totalmente escritos em JAVA, os seus processos de utilização no *Windows XP* para a construção da aplicação *Web* são mais lentos do que o processo de utilização do JUILDER 7.0 no mesmo sistema operacional, pois este último ambiente é escrito na linguagem de programação C.

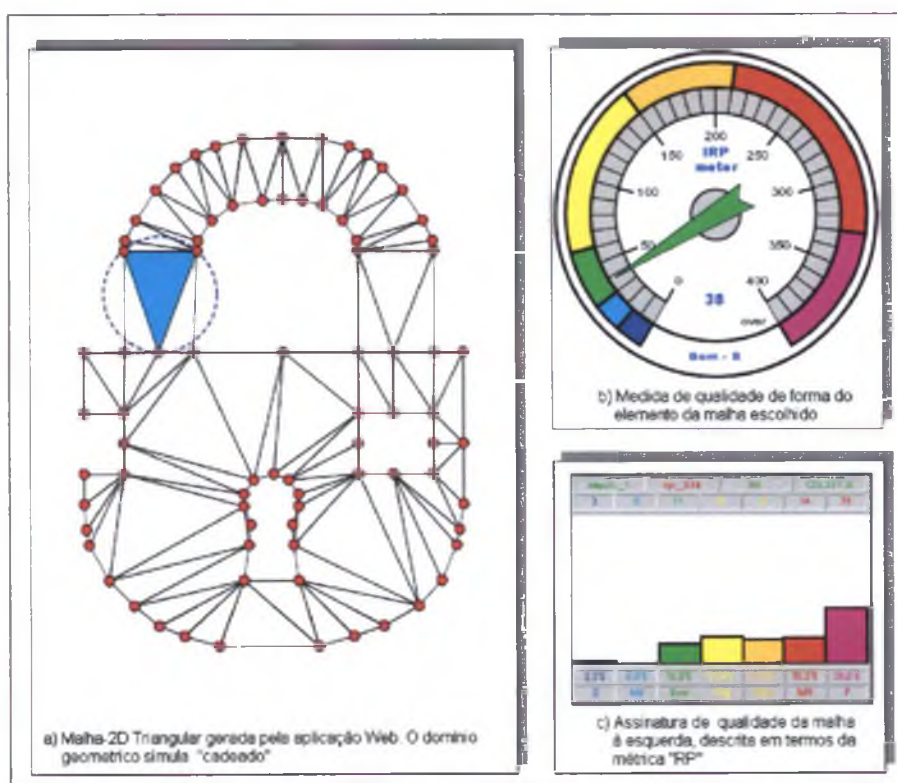
Nestes termos, algumas referências foram fundamentais para o desenvolvimento desta aplicação com a ferramenta de desenvolvimento escolhida. São elas:

- para os detalhes de utilização da linguagem JAVA na construção de *applets frames*, e sobre suas características funcionais, tem-se [HOPS_97] e [COHE_96];
- para detalhes a respeito da construção de classes, e de seus respectivos métodos, responsáveis pelo grafismo dos pontos, arestas e elementos de uma malha, além dos processos gráficos relativos à avaliação de uma malha e de elementos, tem-se [AMME_98], [LASZ_02] e [KNUD_99];
- para detalhes de como alocar dinamicamente memória, utilizando-se de listas, filas, pilhas e coleções, tem-se [GOOD_02], [PREI_98], [WATT_01] e [STAA_00];
- para detalhes referentes à implementação computacional dos princípios da Computação Gráfica tem-se [CUNN_92], [FOLE_90], [ROGE_84], [VELH_94] e [VELH_98];
- para detalhes do desenvolvimento de interfaces gráficas do usuário (GUI), tem-se [DEIT_01], [DEIT_03] e [JAND_02];

5.7 AS MEDIDAS DE QUALIDADE LOCAL E GLOBAL, ATRAVÉS DA MÉTRICA “RP”, APRESENTADAS PELA APLICAÇÃO WEB

A aplicação *Web* apresenta uma interface específica tanto para apresentar a medida de qualidade local de um elemento triangular, denominada “IRP”, como a medida de qualidade global, denominada “irp”, de uma malha triangular.

FIGURA 42 – ELEMENTOS DE APRESENTAÇÃO DA QUALIDADE LOCAL E GLOBAL PERTENCENTES À APLICAÇÃO WEB



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

A aplicação *Web* apresenta um medidor de qualidade local, denominado “*IRP meter*” em inglês ou “lerrepímetro”, em português. Este medidor descreve a medida de qualidade local de um elemento da malha que foi escolhido por um usuário. O elemento escolhido, neste caso, está representado pelo elemento hachurado e circunscrito por uma circunferência, apresentado na Figura 42.a.

A medida de qualidade local do elemento escolhido está descrita e quantificada pelo medidor “*IRP meter*”, na Figura 42.b. Observando-a, percebe-se

que o medidor aponta para um valor entre 30 e 40 na escala do IRP, estando muito mais próximo do segundo valor. O valor exato está apresentado entre o início e o fim do domínio, com valor 38, que equivale a classificação “Bom” na escala subjetiva. Desta forma, segundo a métrica “RP”, este elemento é considerado um elemento bom de forma.

A medida de qualidade global da malha está descrita na Figura 42.c. Esta medida representa a própria assinatura de qualidade de forma da malha, que descreve um histograma de frequência de ocorrência dos valores “IRP” de cada um de seus elementos dentro da classificação subjetiva de qualidade de forma que a métrica “RP” implementa. Assim, para o caso desta malha, percebe-se que dos 86 elementos totais da malha, dois são considerados “Ótimos”, nenhum foi avaliado como “Muito Bom”, sendo onze deles do tipo “Bons”, quinze “Regulares”, treze “Ruins”, quatorze “Muito Ruins” e, por último, trinta e um elementos do tipo “Péssimos”. Isto quer dizer que, tendo 36% de elementos do pior tipo, esta malha, com “irp” igual a 374, foi avaliada como “Muito Ruim”. E não é difícil relacionar a forma desta malha, que realmente é ruim, com a sua medida de qualidade global através da Métrica “RP”.

Assim, o processo de análise de qualidade de uma malha, e o seu processo de refinamento sucessivo, podem ser acompanhados e avaliados por um analista, através do uso das interfaces que a aplicação *Web* oferece. Através delas, são apresentadas informações sobre a geometria da malha e sobre as medidas de qualidade global e local, de acordo com a métrica “RP”.

6 ESTUDOS DE CASO: USO DA MÉTRICA “RP” NOS PROCESSOS DE AVALIAÇÃO DA QUALIDADE DE UM CONJUNTO DE MALHAS-2D TRIANGULARES

[...] por deverem ser os historiadores muito pontuais, verdadeiros, e nada apaixonados, sem que nem interesse, nem temos, nem ódio, nem afeição, os desviem do caminho direito da verdade, que é a filha legítima de quem historia, êmula do tempo, depósito dos feitos, testemunha do passado, exemplo e conselho do presente, e ensino do futuro.

(Miguel de CERVANTES
Dom Quixote)

Uma vez tendo-se definido e apresentado a métrica de qualidade denominada “Relação Perimetral – RP”, no capítulo 4 desta dissertação, e tendo-se ainda descrito um contexto computacional, no seu capítulo 5, onde esta métrica foi implementada, faz-se necessário agora apresentar a sua utilidade em um estudo de caso prático.

O objetivo deste capítulo é demonstrar a aplicabilidade da métrica “RP” no processo de refinamento sucessivo de uma dada malha e no processo de análise da qualidade de um conjunto de Malhas-2D triangulares. Para tanto, foram escolhidos dois estudos de caso distintos:

- No primeiro estudo de caso, uma nuvem inicial de pontos é triangulada. Esta nuvem, que representa a geometria de uma placa de aço, na forma de um “cadeado”, é refinada sucessivamente de modo que seja possível perceber, didaticamente, a variação da qualidade de sua malha em cada fase de refinamento. A métrica “RP” fornece, através da aplicação *Web*, uma medida de qualidade global desta malha, que representa a sua própria assinatura da qualidade em cada fase de refinamento;
- Um conjunto constituído por três malhas distintas é utilizado no segundo estudo de caso. As malhas deste conjunto representam um único domínio geométrico dado pelo lago denominado “Lake Superior”, localizado na região norte dos EUA. Trata-se de uma geometria muito utilizada nos estudos teóricos sobre triangulação-2D, referenciada tanto em [BERN_90] e [RUPP_95] como em [SHEW_97]. Neste estudo de caso, não tão didático quanto o

primeiro, as três malhas foram geradas pelo algoritmo de Richard Shewchuk com restrições de ângulos internos mínimos valorados em: a) nenhuma restrição; b) ângulo mínimo de 5° e c) ângulo mínimo de 15° . Para cada uma delas, foi aplicada a métrica “RP” e obtida a assinatura de qualidade. Como são malhas distintas que representam o mesmo domínio geométrico, suas assinaturas podem ser comparadas e analisadas, de acordo com a métrica “RP”, para descrever as diferenças existentes entre elas.

A demonstração da aplicabilidade da métrica “RP”, em cada estudo de caso, tem uma implicação importante: a métrica “RP” pode diferenciar malhas de qualidades similares e descrever a qualidade de malhas geradas por diferentes algoritmos.

6.1 PRIMEIRO ESTUDO DE CASO: A UTILIZAÇÃO DA MÉTRICA “RP” NO PROCESSO DE REFINAMENTO SUCESSIVO DE UMA MALHA-2D

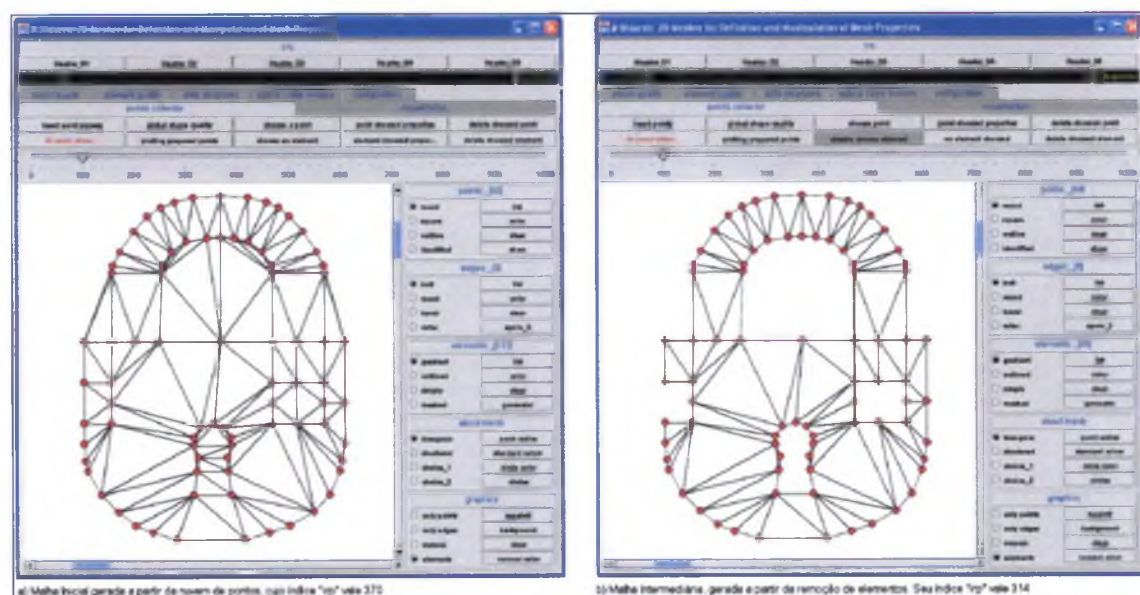
Nesta seção, um estudo de caso é apresentado com o objetivo de utilizar a métrica “RP” em um processo de refinamento sucessivo que é realizado sobre uma dada malha. Esta malha representa a geometria de uma chapa de aço, na forma de um “cadeado”, através de uma nuvem inicial contendo 80 pontos. Pretende-se também demonstrar que a métrica “RP”, através de seu Índice de Qualidade Global (irp) e da sua assinatura de qualidade, é adequada para descrever a qualidade global de uma malha, e a sua própria variação, em um dado momento de um processo de refinamento. Para tanto, foram realizadas quatro medidas de qualidade em três fases distintas de refinamentos sucessivos, envolvendo operações de remoção e de inserção de elementos. O objetivo é melhorar a qualidade global da malha a cada refinamento.

6.1.1 O Índice de Qualidade Global – “irp” em cada Refinamento Sucessivo

A Figura 43.a descreve a nuvem de 80 pontos deste “cadeado”, já triangulada pela primeira vez, de acordo com o critério de *Delaunay*. É importante aqui salientar que a nuvem inicial de pontos sempre representa o menor conjunto possível de pontos, que são suficientes para descrever a geometria da peça em

estudo. Assim, a medida de qualidade da primeira malha é geralmente ruim. Pela métrica 'RP', ela é considerada como de "Péssima" qualidade, pois possui o índice "irp" igual a 370 pontos por mil.

FIGURA 43 – A MALHA INICIAL, CUJO "irp" VALE 370 E APÓS O SEU PRIMEIRO REFINAMENTO, COM "irp" VALENDO 314

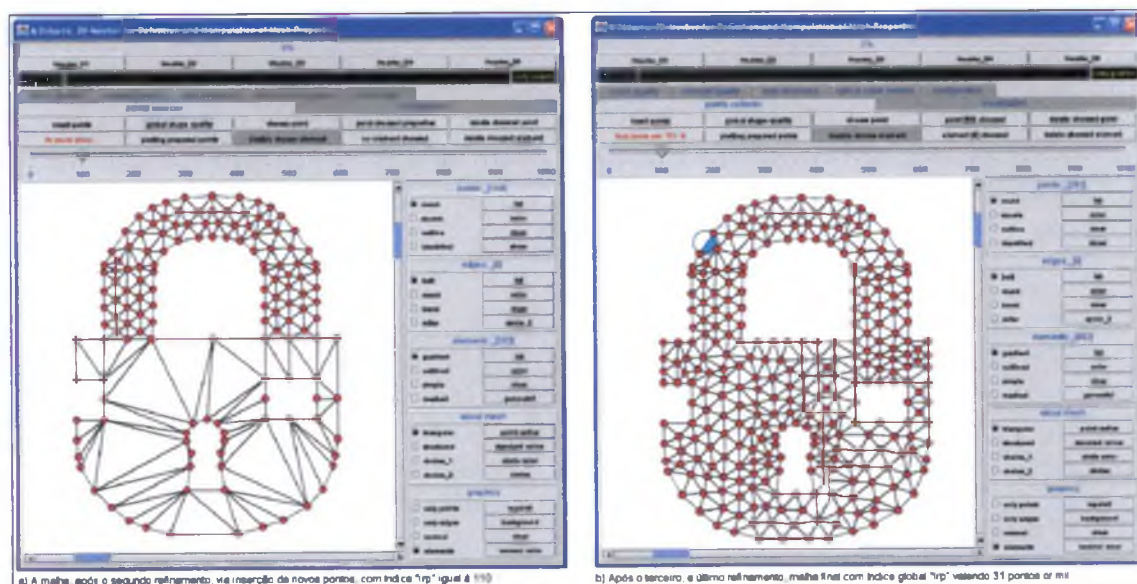


Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

O primeiro refinamento sobre a malha descreve um conjunto de operações de remoção de elementos triangulares, conforme pode ser observado na Figura 43.b. A malha refinada descreve adequadamente os contornos externos e internos que a nuvem pretende representar, apresentando corretamente os buracos, furos e orelhas característicos de um "cadeado". Neste refinamento houve a redução de 122 para 86 elementos triangulares. Não houve inserção de pontos. Aplicando-se a métrica "RP" sobre esta malha intermediária, obteve-se o índice "irp" igual a 314 pontos por mil. Este novo valor, de acordo com o espectro de qualidade da métrica "RP", representa uma malha de qualidade denominada "Muito Ruim". Então, tem-se que o primeiro refinamento "melhorou" a malha, em termos de "irp", de 370 para 314. Em termos qualitativos, a malha, que inicialmente era de "Péssima" qualidade, passou a ser considerada como "Muito Ruim".

O segundo refinamento descreve um conjunto de operações de inserção de 64 novos pontos na parte superior do “cadeado”. A malha resultante é mostrada na Figura 44, onde se pode perceber, visualmente, que os elementos gerados nesta região da malha possuem formas geométricas mais próximas do triângulo equilátero. O número de pontos na malha subiu de 80 para 144. Aplicando-se a métrica “RP”, obtém-se para esta malha o valor de 110 para o índice “irp”. Os novos elementos “influenciaram” a medida de qualidade da malha, melhorando o referido índice de 314 para 110. Qualitativamente, a malha passa para um nível de qualidade denominado “Regular”.

FIGURA 44 – O SEGUNDO (“irp” = 110) E O TERCEIRO (“irp” = 31) REFINAMENTO SUCESSIVO SOBRE A NUVEM INICIAL DE PONTOS



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

O terceiro refinamento descreve um outro conjunto de inserções de 149 novos pontos, localizados na parte inferior do “cadeado”. O número final de pontos da malha subiu de 144 para 293. A malha final é mostrada na Figura 44.b. O número de elementos subiu significativamente para 482. Aplicando-se a métrica “RP”, obtém-se para esta malha final o valor 31 para o seu índice “irp”. Então, os novos elementos “influenciaram” a medida de qualidade da malha, melhorando ainda mais

o referido índice de 110 para 31. Qualitativamente, a malha foi refinada para um nível de qualidade denominado “Bom”.

Obviamente, cada fase de refinamento descreve uma malha diferente que representa a geometria de um mesmo “cadeado”. A métrica “RP”, através de seu índice de qualidade global “irp”, descreve as diferenças entre as quatro malhas. Para tornar a descrição destas diferenças de forma ainda mais detalhada, a referida métrica apresenta a assinatura de qualidade de cada malha refinada.

6.1.2 A Assinatura de Qualidade em Cada Refinamento Sucessivo

A assinatura de qualidade de uma malha, conforme a definição da métrica “RP”, descreve a frequência de ocorrência dos índices de qualidade local “IRP” de cada elementos de uma malha, dentro de sete categorias pertencentes ao espectro de qualidade “EC”. Ela serve para descrever a qualidade global de uma malha e para diferenciar malhas distintas com o mesmo valor de “irp”.

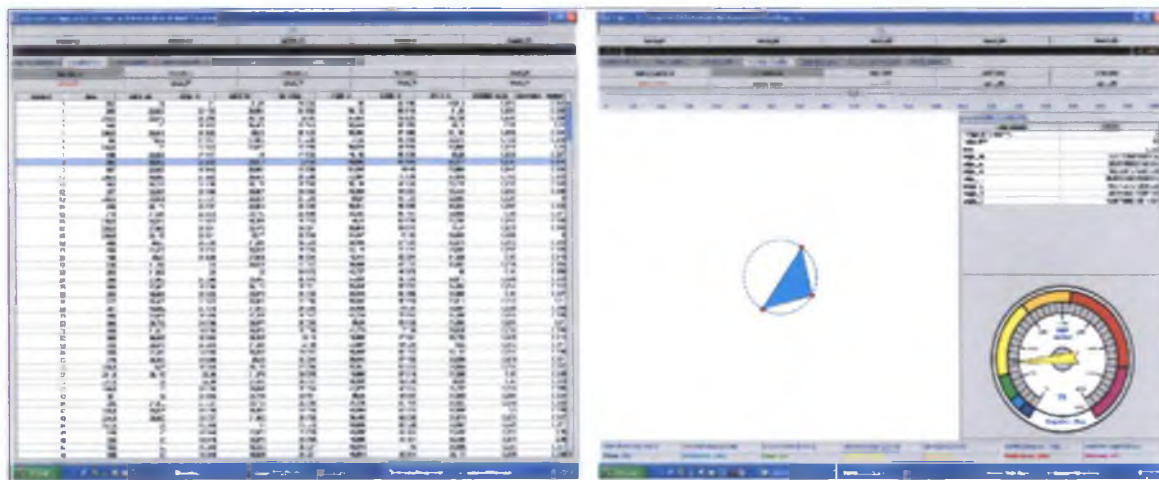
Neste estudo de caso, foram obtidas quatro medidas para o índice de qualidade global “irp” e quatro assinaturas, uma para cada momento de refinamento da malha. Estas assinaturas encontram-se apresentadas na Figura 45.

No alto à esquerda desta figura, tem-se a assinatura da malha inicial, equivalente a sua topologia, descrita na Figura 43.a. No alto à direita, tem-se a assinatura da malha final, cuja topologia é descrita pela Figura 44.b. O objetivo desta seção é utilizar as assinaturas de qualidade acima, a as suas próprias diferenças entre si, para perceber a variação na qualidade global da malha em cada instante de seu refinamento.

Na seção 6.1.1, foi visto que a qualidade global “melhorou” de 370 para 31, em termos do índice “irp”. Nesta seção, pode-se perceber que a assinatura de qualidade da malha varia com os refinamentos, demonstrando que a quantidade de elementos considerados “Ruins”, “Muito Ruins” e “Péssimos”, aproximadamente 60% de todos os elementos da malha inicial, caem para menos de 3% na malha final.

A Figura 46. descreve, à direita, a escolha do oitavo elemento da malha final, com valores de área, dos comprimentos das arestas e das medidas dos ângulos internos. À esquerda, tem-se a apresentação de seu respectivo índice de qualidade local "IRP", cujo valor é 75, equivalente a um elemento de qualidade "Regular".

FIGURA 46 – OS ELEMENTOS DA MALHA FINAL (ESQUERDA) E O ÍNDICE DE QUALIDADE LOCAL "IRP" DO OITAVO ELEMENTO ESCOLHIDO



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

A operação inversa também é possível: a partir do conhecimento de um dado elemento "ruim", é possível observar onde ele se encontra na malha. Assim, o processo de refinamento e o processo de acompanhamento da variação da qualidade global da malha são realizados de forma interativa, resultando na ampliação da sensibilidade do humano analista e ainda desenvolvendo a sua percepção sobre o impacto causado na qualidade global da malha, através da realização de operações de definição e de manipulação de seus elementos constitutivos.

6.2 SEGUNDO ESTUDO DE CASO: A UTILIZAÇÃO DA MÉTRICA “RP” NO PROCESSO DE AVALIAÇÃO DA QUALIDADE GLOBAL DE UM CONJUNTO DE TRÊS MALHAS DISTINTAS QUE REPRESENTAM A MESMA GEOMETRIA: O LAGO DENOMINADO “LAKE SUPERIOR”

Para demonstrar a aplicabilidade da nova medida de qualidade “RP” e as capacidades da aplicação *Web*, um conjunto de três malhas que representam o mesmo domínio geométrico é avaliado. Este domínio geométrico descreve um lago localizado na região norte dos EUA, denominado “*Lake Superior*”, e é muito utilizado por cientistas e geometristas para demonstrar as suas técnicas e algoritmos de geração de malhas não-estruturadas. As nuvens de pontos de cada malha foram obtidas diretamente de Shewchuk em [SHEW_97], que apresenta as três malhas geradas pelo processo denominado “*Delaunay Refinement*”, com restrições para ângulos internos mínimos dos elementos triangulares de, respectivamente, 0°, 5° e 15°. A partir das três nuvens iniciais de pontos obtidas em [SHEW_97], três respectivas malhas foram geradas pela aplicação *Web*. A métrica “RP” foi utilizada para descrever a qualidade de cada uma destas malhas e para comparar esta descrição de qualidade com a descrição de qualidade oferecida pelas medidas de ângulos internos mínimos, utilizada por Shewchuk. Foi possível demonstrar que a descrição de qualidade de malhas via métrica “RP” é mais completa que através das medidas de ângulos internos mínimos.

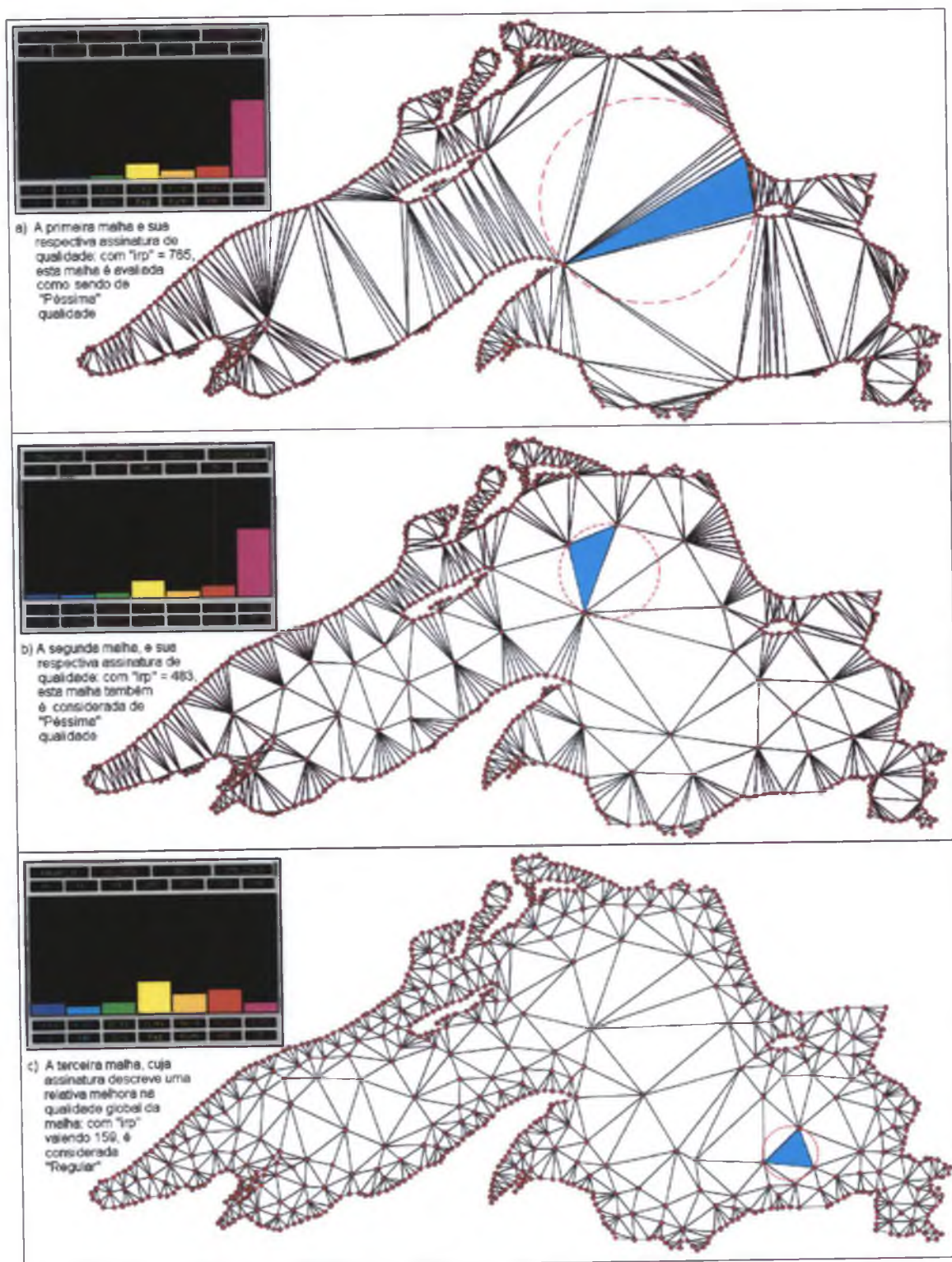
A razão para a escolha destas malhas é que elas tiveram sua qualidade avaliada, através da medida de ângulos internos mínimos, pelo processo referido no parágrafo anterior. Então, é natural utilizá-las para verificar se a métrica “RP” também descreve uma melhora na qualidade de malha, em termos da medida de qualidade global “irp”, quando os valores de seus ângulos internos mínimos são majorados. Deseja-se demonstrar como a medida “RP” pode fornecer informações suficientes para diferenciar a qualidade de malhas que são similares. A Figura 47 apresenta o referido conjunto de malhas, cada uma delas associada a uma respectiva assinatura de qualidade global.

A primeira malha, cuja nuvem possui 518 pontos, é constituída por 530 elementos triangulares e está apresentada na Figura 47.a. Nota-se que os ângulos internos dos seus elementos são realmente pequenos. Esta malha foi gerada sem nenhuma restrição para valores mínimos de ângulos internos. A aplicação *Web*

fornece a medida de qualidade global desta malha de acordo com a métrica “RP”, que vale 765 unidades por mil, em termos quantitativos. Em termos qualitativos, esta qualidade global enquadra-se com uma malha de “Péssima” qualidade. Observando sua assinatura de qualidade, verifica-se que 66,4% do total de elementos nesta malha são considerados de “Péssima” qualidade e somente 1,5% (8 elementos) são considerados “Ótimos”. Os elementos remanescentes estão distribuídos nas demais categorias.

A segunda malha, que descreve a geometria do referido lago com a restrição especificada em 5° para os valores dos ângulos internos mínimos dos seus elementos, foi gerada pela aplicação *Web* a partir de uma nuvem de 546 pontos, formando uma coleção de 584 elementos. Esta malha, descrita na Figura 47.b, apresenta uma significativa melhora da qualidade global em relação à primeira malha, pois apresenta uma redução do valor de “irp” para 483 unidades por mil.

FIGURA 47 – AS TRÊS MALHAS DO LAGO “LAKE SUPERIOR” E SUAS RESPECTIVAS ASSINATURAS DE QUALIDADE GLOBAL



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

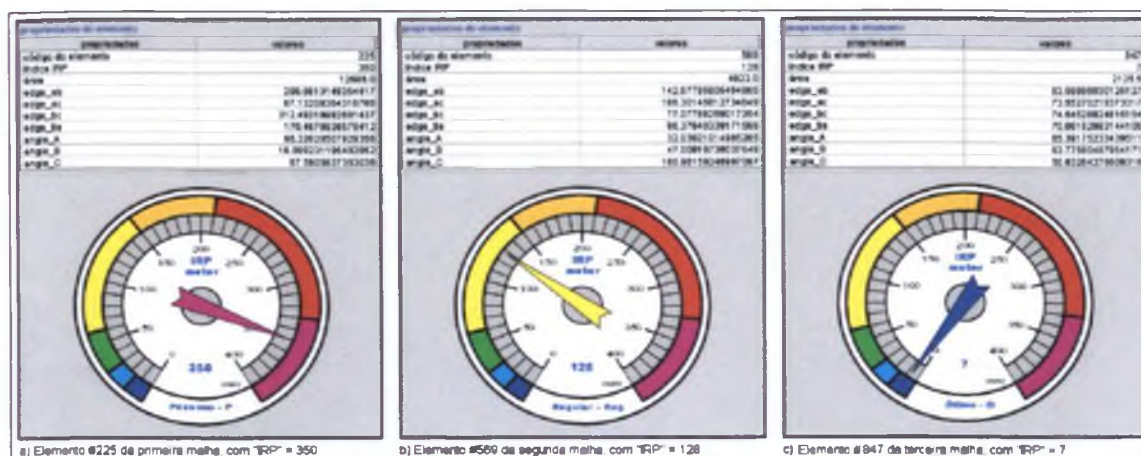
Em termos qualitativos, a segunda malha é ainda considerada como uma malha de qualidade “Péssima”. Porém, seu índice “irp” de qualidade global melhorou significativamente. Observando a sua assinatura de qualidade, percebe-se que o número de elementos considerados de “Péssima” qualidade é ainda muito grande, de 57,6%. São estes elementos que influenciam a baixa qualidade global da malha.

A terceira malha, apresentada na Figura 47.c, descreve a geometria do referido lago com a restrição especificada em 15° para os valores de ângulos internos mínimos dos seus elementos. Foi gerada pela aplicação *Web* a partir de uma nuvem de 704 pontos, formando uma coleção de 902 elementos triangulares. Com esta topologia, a sua qualidade global “irp” vale 159 unidades por mil. Trata-se de uma malha de qualidade considerada “Ruim” dentro do espectro de qualidade estabelecido pela métrica “RP”, e que representa uma malha significativamente melhor do que as duas primeiras. Observando sua assinatura de qualidade global, percebe-se que o número de elementos considerados “Péssimos” foi reduzido para menos de 9%. Para melhorá-la ainda mais, novos refinamentos são necessários. Para verificar se um refinamento resultou em uma nova malha de qualidade superior, basta aplicar a métrica “RP”. Ela fornecerá a medida e a assinatura de qualidade desta nova malha.

A métrica “RP” foi aplicada sobre o conjunto de malhas. Cada uma delas teve um valor quantificado para a qualidade global. Analisando as assinaturas de qualidade de cada uma destas malhas, pode-se perceber que a métrica “RP” é capaz de distinguir as três malhas através das medidas de suas qualidades. Por exemplo, as duas primeiras malhas possuem a mesma categoria, dada pela classe considerada de “Péssima” qualidade. Entretanto, suas assinaturas são totalmente diferentes. Percebe-se uma redução na frequência de ocorrência dos elementos considerados “Péssimos” e “Muito Ruins” na segunda malha, em relação à primeira, e na terceira malha, em relação à segunda.

A qualidade local de uma malha está representada pelos valores “IRP” de cada elemento de uma malha. A Figura 6.6 apresenta esta métrica para um elemento de cada malha do conjunto de malhas avaliado neste estudo de caso. Estes elementos estão descritos na Figura 47, como aqueles que estão hachurados e circunscritos pela circunferência de *Delaunay*.

FIGURA 48 – O ÍNDICE DE QUALIDADE LOCAL “IRP” DE UM ELEMENTO ESCOLHIDO EM CADA MALHA



Fonte: Alexandre Manoel dos Santos (2003)

A medida de qualidade “RP”, através de seu índice “IRP”, fornece a qualidade local de cada elemento de uma dada malha. Para tanto, basta informar qual elemento deve ser avaliado. Por meio da aplicação *Web*, o elemento escolhido para avaliação da qualidade local é sempre aquele que está hachurado e circunscrito na malha. No caso da Figura 48, foi escolhido, aleatoriamente, um elemento para cada uma das malhas. Assim, o elemento #225 da primeira malha, descrito na Figura 6.6.a possui o seu “IRP” quantificado em 350 unidades por mil. Trata-se de um elemento considerado como sendo de “Péssima” qualidade local. Isto significa que seu perímetro é 350% maior do que o perímetro de seu TIE equivalente. Sua qualidade inferior é corroborada pelo valor de seu menor ângulo interno (16,01°), conforme descrito na figura. Analogamente, a qualidade local do elemento escolhido da segunda malha, cujo código é #569, é dada pelo “IRP” igual a 128, de qualidade “Regular”. Já o da terceira malha, de código #847, vale 7 unidades por mil, de qualidade considerada “Ótima”.

Para percorrer os elementos de baixa qualidade local em uma malha, sem escolhê-los diretamente da malha, a aplicação *Web* fornece uma interface adequada. Então, pede-se uma lista de todos os piores elementos e eles são mostrados e identificados na malha. Trata-se de uma importante funcionalidade no processo de análise de qualidade e de refinamento de uma malha.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Uma característica marcante deste trabalho é que ele representa o resultado de um processo de busca e investigação, cujo referencial sempre esteve vinculado a uma filosofia, bastante simples, presente desde o seu início: a busca por uma forma didática para a melhor compreensão da problemática da geração de malhas em duas dimensões. Como pressuposto, buscava-se descrever o impacto causado por modificações locais (na geometria dos elementos) na qualidade global de uma dada malha triangular e ainda auxiliar no aumento da sensibilidade do analista envolvido no processo de análise de qualidade de uma malha.

A métrica “RP” surge como uma solução capaz de descrever a qualidade de uma malha, tanto em termos globais, através de seu índice de qualidade global “irp” e de sua assinatura de qualidade, definida pelo espectro de qualidade “EQ”, quanto em termos locais, através de seu índice de qualidade local “IRP”.

Para mostrar que a métrica “RP” está alinhada com a filosofia previamente estabelecida, um conjunto de interfaces adequadas, pertencentes à aplicação *Web*, especialmente construída para testar esta métrica, oferece ao analista a oportunidade de analisar a qualidade de uma malha observando didaticamente a sua variação quando submetida a um processo de refinamento sucessivo. Como consequência, conseguiu-se ainda mostrar que esta métrica atende o referido pressuposto, pois é possível medir o impacto que pequenas alterações sobre os elementos causam sobre a qualidade global da malha.

Além destas características, foi possível estabelecer, através dos dois estudos de caso apresentados, que a métrica “RP” fornece elementos mais completos para descrever a qualidade de uma malha do que as medidas de qualidade mais freqüentemente utilizadas pelos pesquisadores e construtores de algoritmos de triangulação. A assinatura de qualidade da métrica permite uma diferenciação eficaz de malhas que possuem topologias similares.

Outro aspecto que depõe a favor da métrica “RP” é que ela pode ser utilizada para indicar a melhor triangulação de uma nuvem de pontos, cujas malhas foram obtidas através de diferentes algoritmos. Desta forma, ela também pode servir de critério para medir a capacidade de diferentes algoritmos em produzir malhas de qualidades adequadas.

7.1 CONTRIBUIÇÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Neste trabalho a métrica “RP” foi concebida, caracterizada e utilizada como uma ferramenta adequada para a descrição da qualidade de malhas 2D triangulares em dois estudos de caso específicos. Entretanto, sua utilidade pode ainda ser estendida, aumentando-se o seu escopo de aplicação. A seguir são apresentadas algumas possibilidades de uso futuro tanto da métrica “RP” quanto da própria aplicação *Web* que a implementa.

7.1.1 Redução da complexidade do algoritmo de triangulação da aplicação *Web*

A aplicação *Web* apresentada nesta dissertação gera malhas 2D triangulares a partir de uma nuvem de pontos previamente estabelecida. O seu processo de geração de malhas implementa o algoritmo descrito na Figura 21, cuja complexidade é da ordem de $O(n^4)$. Conforme foi mencionado na seção 2.3.2.2, página 41, este algoritmo é de fácil implementação e é ineficiente²⁴ do ponto de vista o tempo necessário para investigar todas as combinações possíveis que satisfazem o Critério de *Delaunay*.

Para melhorar a eficiência do processo de triangulação realizada pela aplicação *Web* é necessário que seja implementado outros algoritmos de menor complexidade. Em [HSUA_97] e [JOE_95], existem um conjunto de referências para o clássico algoritmo de Barry Joe e David Watson cuja complexidade é da ordem de $O(n^2)$, e outras referências para aquele que é, atualmente, o de menor complexidade, desenvolvido por Preparata, cuja complexidade é da ordem de $O(n \log n)$. A implementação destes algoritmos exige um conhecimento muito mais apurado sobre estruturas de dados. A linguagem *JAVA* possui os elementos necessários e suficientes para a implementação destas estruturas.

Uma vez implementado na aplicação *Web*, ter-se-ia uma significativa melhora na eficiência no processo de triangulação de nuvens constituídas por um número grande (“ n ”) de pontos.

²⁴ Apesar da sua baixa eficiência, este algoritmo é suficiente para demonstração plena da utilidade da métrica “RP”, uma vez que esta métrica atua sobre uma malha, ou um conjunto delas, de forma independente do algoritmo de triangulação que a gerou.

7.1.2 Criação de uma interface entre a aplicação *Web* e um sistema computacional pós-processador

O processo de descrição da utilidade da métrica “RP” através do funcionamento da aplicação *Web* levantou uma importante expectativa: a possibilidade desta aplicação “interfacear” com sistemas computacionais aplicadores de métodos numéricos para resolução de problemas em Engenharia (Métodos de Elementos Finitos, entre outros). É importante que seja possível obter uma malha gerada, por exemplo, pelo sistema computacional ANSYS, analisá-la e modificá-la pela métrica “RP”, devolve-la ao ANSYS via aplicação *Web* e, já no contexto deste pós-processador, verificar a acurácia da solução obtida.

Desta forma, poder-se-ia verificar se, na fase de análise e de pós-processamento, a métrica “RP” e a aplicação *Web* efetivamente contribuem para uma melhora da acurácia da solução, através de modificações das características geométricas da malha. Trata-se da atividade de construção de interfaces onde os dois sistemas (aplicação *Web* e o sistema aplicador de métodos numéricos) “conversariam” entre si, de modo a trocar dados e informações para permitir mútua colaboração.

7.1.3 Criação de uma versão “RP” para malhas 3D não-estruturadas

O levantamento das novas características, que a métrica “RP” deveria possuir para que descrevesse adequadamente a qualidade (e a sua variação) de uma malha 3D não-estruturada representa uma tarefa importante.

7.1.4 Promoção da aplicação *Web* em um editor de malhas

Seria interessante ter a aplicação *Web* “promovida” a um editor de malhas com capacidade para exportar as estruturas de dados, que as representam, em diversos formatos. Estes formatos poderiam ser tais que vários outros sistemas malhadores pudessem importá-los, de modo que um novo padrão de importação/exportação fosse testado, desenvolvido e distribuído gratuitamente via Internet. Um novo protocolo poderia surgir para este fim.

7.2 CONCLUSÃO

Os objetivos desta dissertação foram alcançados: Desenvolvimento e Implementação de uma métrica. O primeiro trata da construção e da apresentação de uma métrica de qualidade de malhas 2D triangulares. O processo de sua caracterização lhe forneceu um nome (“RP”), uma forma constituída por um conceito de elemento virtual “TIE” e cinco entidades matemáticas (“RP”, “EQ”, “IRP”, “irp”, “Assinatura”), e finalmente, um tipo baseado na geometria dos elementos constitutivos de uma malha. Com estas características, a métrica “RP” foi implementada em uma aplicação Web, atendendo o segundo objetivo.

Os estudos de caso, descritos no Capítulo 6, apresentaram uma prova cabal de que a qualidade de uma malha é descrita de forma mais completa pela métrica “RP” do que pelas outras medidas apresentadas (medidas dos ângulos internos, ou das áreas dos elementos ou ainda pelos comprimentos das suas arestas).

Um terceiro objetivo, implícito e igualmente importante, foi alcançado no desenvolvimento deste trabalho: fazer com que esta métrica, juntamente com a própria aplicação Web que a implementa, tivesse uma forma “didática” de descrição da qualidade de malhas, de modo a permitir uma maior percepção do analista a respeito do impacto causado sobre a qualidade global de uma malha, quando sujeita à um processo de modificação local na geometria dos seus elementos, em cada fase de refinamento.

De fato, ao serem alcançados, estes três objetivos imputaram à métrica “RP” um atributo de “simpatia”. O processo de descrição da variação da qualidade de uma malha que sofre sucessivos refinamentos, através da aplicação Web, é agradável de ser observado. Seu uso é intuitivo. Entretanto, ela ainda não passou pelo “rigor” da Engenharia, onde um engenheiro a utiliza, juntamente com um pós-processador, na busca de uma solução numérica de um problema real. Para o bem de seu futuro, este parece ser o próximo passo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ANTO_01] ANTON, Howard; RORRES, Chris. **Álgebra linear com aplicações**. Tradução de Claus Ivo Doering. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- [AMEN_98] AMENTA, Nina; BERN, Marshall; KAMVYSSELIS, Manolis. **A new voronoi-based surface reconstruction algorithm**. SIBGRAPH'98, 1998.
- [AMEZ_95] AMEZUA, E., HORMAZA, M. V., HERNANDEZ, A.; AJURIA, M. **A method of the improvement of 3D solid finite-element meshes**. *Advances in Engineering Software*, 22:45-53, 1995.
- [AMME_98] AMMERAAL, Leen. **Computer graphics for Java programmers**. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- [BART_94] BARTH, T. J. *Aspects of unstructured grids and finite-volume solvers for the euler and navier-stokes equations*. **Technical Report, von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series**, 1994-05, 1994.
- [BABU_76] BABUSKA, I.; AZIZ, A. *On the angle condition in the finite element method*. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, 13:214-226, 1976.
- [BATD_97] BATDORF, Michel; FREITAG, Lori A.; OLIVIER-GOOCH, Carl. *Computational Study of the effect of unstructured mesh quality on solution efficiency*. **13th Annual AIAA Computational Fluid Dynamics**, AIAA97 – 1888, 1997.
- [BERN_90] BERN, Marshall; EPPSTEIN D.; GILBERT, J. R. *Probably Good Mesh Generation*. **In the 31st Annual Symposium on Foundations on Computer Science**, IEEE, p. 231-241, 1990.
- [BERN_92] BERN, Marshall; PLASSMANN, Paul. **Mesh Generation**. Material obtido por *download* a partir do seguinte endereço: <http://www1.ics.uci.edu/~eppstein/280g/Bern-Plassman-Meshgen.pdf>. [Capturado em 17 de fevereiro de 2003].
- [BERN_95] BERN, Marshall; EPPSTEIN David. **Mesh generation and optimal triangulation**. 2. ed. Singapura: World Cientific, 1995.
- [BERZ_97] BERZINS, M. *Solution-based Mesh Quality for Triangular and Tetrahedral Meshes*. IPP427-436 **In: Proceedings of 6th International Meshing RoundTable**, Sandia Report SAND 97-2399, 1997.

- [BERZ_98] BERZINS, M. *Mesh Quality: a function of Geometry, Error Estimates or Both?*. **Proceedings of 7th International Meshing RoundTable, Dearborn**. Michigan, 1998.
- [BOOC_97] BOOCH, Grady; RUMBAUGH, James; JACOBSON, Ivar. ***The unified modeling language for object-oriented development***, Documentation Set Version 1.1, sep. 1997. The most recent updates on the Unified Modeling Language are available via [www: http://www.rational.com](http://www.rational.com). [Capturado em 15 de outubro de 2002].
- [BORI_34] BORIS, N. Delaunay. **"Sur la Sphere"** Vide. *Izvestia Akademia Nauk SSSR, VII Seria, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk* v.7 p.793-800, 1934.
- [BREB_84] BREBBIA, C. A.; TELLES, J. C. F.; WROBEL, L. C. ***Boundary element techniques. Theory and Application in Engineering***. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [CANA_93] CANANN, Scott, STEPHENSON, Michael; BLACKER, Ted. ***Optismoothing: An optimization-driven approach to mesh smoothing***. *Finite elements in analysis and design*, 13:185-190, 1993.
- [CESEC_02] CESEC/UFPR. Curso de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia. Curitiba: Centro de Estudos em Engenharia Civil. Disponível *on line*: <http://www.cpgmne.ufpr.br> . [Capturado em janeiro, 2003].
- [CHEN_02] CHENG, Siu-Wing, DEY, Tamal K. *Quality meshing with wheighted delaunay refinement*. ***Pproceedings of the 13th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms***, p. 137-146, 2002.
- [CHEN_03] CHENG, Siu-Wing, POON, Sheung-Hung. *Graded conforming delaunay tetrahedralization with bounded radius-edge ratio*. ***Proceedings of the 14th Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms***, p.295-304, 2003.
- [CHEW_89] CHEW, L. Paul. ***Garanteed-Quality Triangular Meshes***. Technical Report PCS-TR90-147, Department of Computer Science, Cornell University, 1989.
- [COHE_96] COHEN, Shy et alli. ***Professional Java Fundamentals – advanced topics for Java professionals***. Canadá: Wrox Press Ltda., 1996.
- [COOK_74] COOK, Robert Davis. ***Concepts and appications of finite element analysis - A Treatment of the Finite Element Method as used for the Analysis of Displacement, Strain, and Stress***. New York: John Wiley & Sons, 1974.

- [CUNN_92] CUNNINGHAM, Steve *et alli*. **Computer graphics using object-oriented programming**. New York: Wiley Professional Computing, 1992.
- [DEIT_01] DEITEL, H. M. e DEITEL, P. J. **JAVA - Como programar**. 1. ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.
- [DEIT_03] DEITEL, H. M. e DEITEL, P. J. **JAVA - Como programar**. 4. ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.
- [DEVL_02] DEVLOO, Philippe R. B. **Mini-simpósio sobre elementos finitos adaptativos**. Disponível *on line*: <http://www.fec.unicamp.br/~phil/index.html>. [Capturado em 20 de julho de 2002].
- [EPPS_02] EPPSTEIN, David. **Geometry in Action**. Conjunto de informações sobre geração de malhas e de computação gráfica. Disponível *on line*: <http://www1.iss.uci.edu/~eppstein/geom.html>. [Capturado em 15 de outubro de 2002].
- [FIEL_00] FIELD, David A. *Qualitative measures for Initial meshes*. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 47:887-906, 2000.
- [FOLE_90] FOLEY, James D. *et alli*. **Computer graphics: principles and practice**. New York: Addison-Wesley, 1990.
- [FRIE_72] FRIED, I. *Condition of finite element matrices generated from nonuniform meshes*. **AIAA Journal**, 10:219-221, 1972.
- [FREI_99] FREITAG, Lori; KNUPP, Patrick M. *Tetrahedral mesh improvment via optimization of the element condition number*. In **Proceedings of the eighth international meshing roudtable**. Sandia International Laboratories, p. 247-258, 1999.
- [FURL_98] FURLAN, José Davi. **Modelagem de objetos através da UML – Análise e desenho orientado a objetos**. São Paulo: Makron-Books do Brasil, 1998.
- [GATT_91] GATTASS, Marcelo *et al*. *Computação gráfica aplicada ao método dos elementos finitos*. In: **[Mini curso apresentado no XIV Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC]**. Nova Friburgo – RJ: SBMAC – Sociedade Brasileira de matemática Aplicada e Computacional, 1991.
- [GEOR_91] GEORGE, P. L. **Automatic mesh generation**. New York: Wiley, 1991.

- [GIAN_01] GIANINI, Claudio. ***Analisi strutturali ad elementi finiti. Informazioni di base sulla progettazione assistita di strutture meccaniche: il CAE (Computer Aided Engineering).*** Disponível on line: <http://space.tin.it/computer/cgianin>. [Capturado em janeiro de 2002].
- [GOOD_02] GOODRICH, Michael T.; TAMASSIA, Robert. **Estruturas de dados e algoritmos em JAVA.** 2. ed.- Porto Alegre: Bookman, 2002.
- [HENS_01] HENSHAW, William D. ***Advancing Front Triangulation.*** Aspectos de implementação de algoritmos da técnica do Avanço da Fronteira, atualizado em 07/01/2001: <http://www.llnl.gov/casc/Overture/henshaw/documentation/unstructuredHTML/node11.html>. [Capturado em janeiro de 2002].
- [HOPS_97] HOPSON, K. C.; INGRAM, Stephen E. **Desenvolvendo applets com Java.** Rio de Janeiro: Campus, 1997.
- [HSUA_97] HSUAN-CHENG, Lin. ***JavaMesh – A Two Dimensional Triangular Mesh Generator for Finite Elements.*** University of Pittsburgh, 1974. [Submitted to the graduate Faculty of the School of Engineering in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Science in Civil Engineering].
- [HUEB_74] HUEBNER, Kenneth H. ***The finite element method for engeneers.*** NewYork: John Wiley & Sons, 1974.
- [INGR_97] INGRAM, Stephen E.; HOPSON, K. C. **Desenvolvendo applets com Java.** Rio de Janeiro: Campus, 1997.
- [JAND_02] JANDL Jr, Peter. **Introdução ao JAVA.** São Paulo: Berkeley, 2002.
- [JOE_89] JOE, Barry. *Three-dimensional triangulations from local transformations.* **SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing**, 16:1292-1307, 1995.
- [JOE_95] JOE, Barry. *Construction of three-dimensional improved quality triangulations using local transformations.* **SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing**, 10:718-741, 1989.
- [JOHN_87] JOHNSON, Claes. ***Numerical solution of Partial Differential Equations by the finite element method.*** Cambridge University Press, New York, 1987.
- [KNUD_99] KNUDSEN, Jonathan. **JAVA 2D graphics.** Sebastopol: 1999.
- [KNUP_99] KNUPP, Patrick. ***Matrix norms & the condition number: a general framework to improve mesh quality via Node-Movement.*** Eighth International Meshing Roundtable(lake Tahoe, California), p. 13-22, oct. 1999.

- [KOLM_98] KOLMAN, Bernard. **Álgebra linear com aplicações**. 7. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil , 1996.
- [KWON_96] KWON, Young W.; BANG, Hyochong. **The finite element method using MATLAB**. New York: CRC Press, 1996.
- [LASZ_02] LASZLO, Michael Jay. **Object-oriented programming featuring graphical applications in JAVA**. Addison-Wesley. Porto Alegre: Bookman, 2002.
- [LARM_00] LARMAN, Craig. **Utilizando UML e padrões: uma introdução à análise e ao projeto orientados a objetos**. Porto Alegre: Bookman, 2000.
- [LIPS_94] LIPSCHUTZ, Seymour. **Álgebra linear**. 3. ed. São Paulo: Makron Books , 1994. [Coleção Schaum].
- [MALI_95] MALISKA, Clóvis R. **Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional**. Rio de Janeiro – RJ: LTC-Livros Técnicos e Científicos, 1995.
- [MILL_95] MILLER, Gary L.; TALMOR, Dafna; TENG, Shang-Hua; WALKINGTON, Noel. **A delaunay based numerical method for three dimensions: Generation, Formulation and Partition**. *Proceedings of the Twenty-Seventh Annual ACM Symposium on the Theory of Computing (Las Vegas, Nevada), may*. 1995.
- [ODEN_81] ODEN, J. Tinsley; BECKER, Erick; CAREY, Graham F. **Finite elements – an introduction – The Texas finite element series**. New Jersey: Prentice-Hall, v. 1, 1981.
- [ODEN_84] ODEN, J. Tinsley; BECKER, Erick; CAREY, Graham F. **Finite elements – Computational aspects – The Texas finite element series**. New Jersey: Prentice-Hall, v. 3, 1984.
- [OLIV_95] OLIVIER-GOOCH, Carl F. **Multigrid acceleration of an upwind euler solver on unstructured meshes**. *AIAA Journal*, 33(10):1822-1827, oct. 1995.
- [OWEN_02] OWEN, Steven J. **Mesh Generation Tutorial**. A web site, called the *Meshing Research Corner*. Um conjunto de informações sobre a de geração de Malhas, de vários tipos, com mais de 700 referências diferentes. Disponível on line: <http://www.andrew.cmu.edu/user/sowen/mesh.html>. [Capturado em 30 de setembro de 2002].
- [OWEN_03] OWEN, Steven J. **Unstructured Mesh Generation – an introductory course**. Disponível on line:

http://www.andrew.cmu.edu/user/sowen/tutorial/tet_meshing.
[Capturado em 10 de janeiro de 2003].

- [PART_91] PARTHASARATHY, V. N. and KODIYALAM, Srinivas. **A constrained optimization approach to finite element mesh smoothing**. *Finite elements in analysis and Design*, 9:309-320, 1991.
- [PREI_98] PREISS, Bruno R. **Estruturas de dados e algoritmos – padrões de projetos orientados a objetos com JAVA**. Rio de Janeiro: Campus, 1998.
- [RIVA_84] RIVARA, M. *Mesh refinement processes based on the generalized bisection of simplices*. **SIAM Journal on Numerical analysis**, 21:604-613, 1984.
- [ROGE_84] ROGERS, David F. **Mathematical elements for computer graphics**. New York: MacGraw-Hill, 1984.
- [RUPP_92] RUPPERT, Jim. **A new and simple algorithm for quality 2-dimensional mesh generation**. Technical Report UCB/CSD 92/694, University of California at Berkeley, California, 1992.
- [RUPP_95] RUPPERT, Jim. *A delaunay refinement algorithm for quality 2-dimensional mesh generation*. **Journal of Algorithms** 18(3):548-585, may. 1995.
- [SHEW_95] SHEWCHUK, Jonathan Richard. **Triangle: A two-dimensional quality mesh generator and delaunay triangulator**. <http://www.cs.cmu.edu/%7EQuake/triangle.html>, 1995. [Capturado em 16 de agosto de 2003].
- [SHEW_97] SHEWCHUK, Jonathan Richard. **Delaunay refinement mesh generation**. PhD Thesis, Technical Report CMU-CS-97-137, School of Computer Science, Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania, 18 may. 1997.
- [SHEW_99] SHEWCHUK, Jonathan Richard. **Meshing & Triangulation**. <http://www.cs.berkeley.edu/~jrs/mesh//lecture.html> , 1999. [Capturado em 16 de agosto de 2003].
- [SHEW_02] SHEWCHUK, Jonathan Richard. **What is a Good Linear Element? Interpolation, Conditioning and Quality Measures**. *Eleventh International Meshing Roundtable(Ithaca, New York)*, p.115-126, Sandia National Laboratories, sep. 2002.
- [STAA_00] STAA, Arndt von. **Programação modular: desenvolvendo programas complexos de forma organizada e segura**. Rio de Janeiro: Campus, 2000.

- [STRA_73] STRANG, Gilbert; FIX, George J. ***An analysis of the finite element method***. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.
- [VELH_94] VELHO, Luiz; GOMES, Jonas. **Computação gráfica – imagem**. Rio de Janeiro – RJ: IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1994.
- [VELH_98] VELHO, Luiz; GOMES, Jonas. **Computação gráfica**. Rio de Janeiro – RJ: IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada, v. 1, 1998.
- [WALD_98] WALDRON, Shayne. *The error in linear interpolation at the vertices of a simplex*. **SIAM Journal on numerical analysis** 35(3):1191-1200, 1998.
- [WATT_01] WATT, David A.; BROWN, Deryck F. **JAVA Collections – An introduction to abstract data types, data structures and algorithms**. New York: John Wiley & Sons, 2001.