

**MARLY TEREZINHA QUADRI SIMÕES DA SILVA**

**ANÁLISE TÉRMICA TRANSIENTE E DE TENSÕES  
EM ESTRUTURAS EXECUTADAS EM CAMADAS**

**Dissertação apresentada como requisito  
Parcial à obtenção do grau de Mestre,  
Pelo Programa de Pós-Graduação em  
Métodos Numéricos em Engenharia -  
Área Mecânica Computacional, dos  
Setores de Exatas e Tecnologia da  
Universidade Federal do Paraná.**

**Orientador: Prof. Dr. Roberto Dalledone  
Machado**

**Co-Orientador: Prof. Dr.<sup>a</sup> Mildred Ballin  
Hecke**

**CURITIBA**

**2003**

À Deus, pela oportunidade de crescer no profissional, no espiritual, e me ensinar a sempre respeitar o próximo...

Às minhas filhas Andressa e Débora, pelos momentos que dediquei ao estudo ao invés de lhes dar carinho e atenção.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor e orientador Roberto Dalledone Machado, por acreditar no merecimento deste desafio e por participar da realização deste trabalho.

Agradeço à professora Mildred Ballin Hecke, pela oportunidade de crescer em engenharia, aos seus ensinamentos que foram oportunos ao trabalho e, pela pessoa especial e carinhosa.

Aos professores Chu Chia Gean e Luiz Russo Neto, ambos da PUC-PR, pela recomendação acadêmica.

Ao professor Carlos Henrique Marchi, pelas aulas de Transferência de Calor e por sempre estar pronto a esclarecer dúvidas.

Aos funcionários do CESEC, em especial à Maristela Bandil e Eliseu dos Santos, que sempre estiveram presentes com palavras de carinho e incentivo.

Ao professor Ney Augusto Nascimento pela gentileza de auxiliar na correção do resumo.

À Denise Krüger pela oportunidade de estudar através de sua tese e aos colegas mestrandos que vivenciaram as dificuldades durante o desenrolar desta tese.

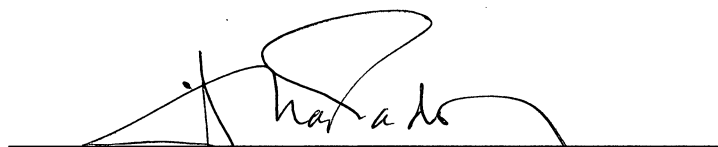
À CAPES pelo apoio financeiro.

MARLY TEREZINHA QUADRI SIMÕES DA SILVA

**ANÁLISE TÉRMICA TRANSIENTE E DE TENSÕES  
EM ESTRUTURAS EXECUTADAS EM CAMADAS**

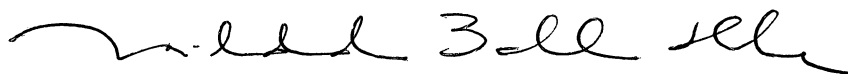
Dissertação aprovada, como requisito parcial, para a obtenção do grau de mestre em Ciências, no Curso de Pós-graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, na área de concentração de Mecânica Computacional, Setores de Tecnologia e de Ciências Exatas da Universidade Federal do Paraná, pela seguinte banca examinadora:

Orientador:



Prof. Roberto Dalledone Machado, D. Eng.  
Departamento de Construção Civil, UFPR

Co-orientador:



Prof. Mildred Ballin Hecke, D. Sc.  
Departamento de Construção Civil, UFPR



Prof. João Elias Abdalla Filho, PhD  
Departamento de Engenharia Mecânica, PUC -PR



Prof. Luiz Alkimin de Lacerda, D.Sc.  
LACTEC/PR

Curitiba, 26 de agosto de 2003

## RESUMO

Este artigo trata das estruturas executadas em camadas sujeitas a ações de origem térmica em cada etapa realizada. As camadas são lançadas com espessuras relativamente pequenas e em tempos pré-estabelecidos. Uma das grandes aplicações são as barragens de concreto compactadas por rolo.

Como conseqüência das reações químicas processadas durante a cura do concreto há uma geração adiabática de calor que, muitas vezes, pode produzir fissuras de origem térmica no corpo da barragem. O calor produzido em uma camada é afetado pelo gerado nas camadas anteriores e influenciará o das camadas posteriores.

A correta avaliação do campo de temperaturas é essencial para a determinação das tensões de origem térmica, com as quais será possível determinar, por exemplo, a distância entre juntas de dilatação. O problema é analisado pelo Método dos Elementos Finitos usando o software comercial ANSYS.

O processo construtivo é tratado empregando-se uma técnica disponível no programa denominada de “birth and death”, que ativa ou desativa camadas conforme a etapa considerada. Realiza-se análise térmica transiente, uma vez que a geração de calor é variável no tempo. O campo de tensões é determinado em uma análise subsequente, levando-se em consideração, em cada etapa, a distribuição de temperaturas daquele momento.

Este trabalho procura investigar a influência do tipo de malha empregada, do tipo de elemento adotado, das distorções inevitáveis do modelo de elementos finitos, e das condições de exposição sugerindo-se alguns procedimentos a serem seguidos em análises tenso-térmicas de quaisquer estruturas executadas em camadas. Alguns exemplos são apresentados para validar o estudo.

**Palavras-Chave:** Tensões Térmicas, Estruturas em Camadas, Método dos Elementos Finitos

## ABSTRACT

This article deals with structures built in layers and subjected to thermal actions in each stage of the construction. The layers have small thickness and are placed at pre-established times. As an example, it can be mentioned the rolled compacted concrete dams.

As a consequence of the chemical reactions that occur during the cure of the concrete, there is an adiabatic heat generation that, many times, may cause fissures of thermal origin in a dam body. The heat produced in one layer is affected by the heat generated in the previous layers, and it will influence the heat of the subsequent layers.

The correct evaluation of the temperatures map is essential for the determination of the thermal stresses, with which it will be possible to determine, for example, the distance between expansion joints. The problem is analyzed by the finite element method using the Ansys commercial software.

The building process is here taken into account making use of an available technique in the code denominated “birth and dead”, that activates or disables layers according to the stage under consideration. A transient thermal analysis is used, once the heat generation varies with the time. The stresses field is determined in a second analysis, considering in this case, for each stage, the temperatures distribution of that stage.

This work attempts to investigate the influence of the type of mesh, the type of element, the inevitable distortions of the finite element model and the exposure conditions, including also some suggestions to be followed for the stress-thermal analysis of any layered system. Some examples are included to validate this study.

**Key-words:** Thermal Stress, Structures in Layers, Finite Element Method.

## SUMÁRIO

<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>x</b>
<b>LISTA DE TABELAS.....</b>	<b>ix</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS.....</b>	<b>xvi</b>
<b>RESUMO.....</b>	<b>v</b>
<b>ABSTRACT.....</b>	<b>vi</b>
<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
1.1 GENERALIDADES.....	1
1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	1
1.2.1 Análise térmica.....	2
1.2.2 Análise de tensão.....	3
1.3 OBJETIVO E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	4
1.4 LIMITAÇÕES DO TRABALHO.....	4
<b>2 TRANSFERÊNCIA DE CALOR .....</b>	<b>6</b>
2.1 CONDUÇÃO.....	6
2.1.1 Equações governantes.....	6
2.2 CONVECÇÃO .....	11
2.3 RADIAÇÃO.....	12
<b>3 TENSÕES E DEFORMAÇÕES.....</b>	<b>13</b>
3.1 TENSÕES.....	13
3.1.1 Definições.....	13
3.1.2 Equações de Equilíbrio.....	15
3.1.3 Vetor de tensão em plano qualquer.....	18
3.1.4 Critérios de Escoamento.....	20
3.1.4.1 Critério de Mises ou Critério de Máxima Energia de Distorção.....	20
3.1.4.2 Critério de Tresca ou de Máxima Tensão de Cisalhamento.....	21
3.2 DEFORMAÇÃO.....	22

3.2.1 Definições.....	22
3.2.2 Componentes infinitesimais.....	23
<b>4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....</b>	<b>29</b>
4.1 DEFINIÇÕES.....	29
4.2 MEF APLICADO AO PROBLEMA PLANO DE DEFOMAÇÃO.....	31
4.2.1 Revisão das equações da Teoria da Elasticidade.....	31
4.2.2 Princípio dos Trabalhos Virtuais.....	33
4.2.3 Expressões do MEF para o problema plano de deformações.....	33
4.2.4 Consideração da variação de temperatura (deformação inicial).....	35
4.3 MEF E TEMPERATURA.....	36
<b>5 METODOLOGIA.....</b>	<b>39</b>
5.1 UTILIZAÇÃO DO ANSYS.....	40
5.2. APLICAÇÕES.....	46
5.2.1 Viga Bi-engastada.....	46
5.2.2 Bloco de Concreto.....	54
5.2.3 Viga de Serra da Mesa.....	78
<b>6 CONCLUSÕES.....</b>	<b>115</b>
<b>7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....</b>	<b>117</b>

## LISTA DE TABELAS

TABELA 5.1	- RESUMO DAS CONDIÇÕES ADOTADAS.....	47
TABELA 5.2	- RESUMO DAS SIMULAÇÕES.....	53
TABELA 5.3	- RESUMO DAS CONDIÇÕES ADOTADAS NAS SIMULAÇÕES.....	55
TABELA 5.4	- ELEVAÇÃO ADIABÁTICA DE TEMPERATURA E CURVA DE GERAÇÃO DE CALOR.....	56
TABELA 5.5A	- VALORES DE TEMPERATURAS MÁXIMAS NO TEMPO FINAL DE CADA ANÁLISE.....	73
TABELA 5.5B	- VALORES DE TENSÃO MÁXIMA NO TEMPO FINAL DE CADA ANÁLISE.....	73
TABELA 5.6	- ELEVAÇÃO ADIABÁTICA DE TEMPERATURA E CURVA DE GERAÇÃO DE CALOR.....	81
TABELA 5.7	- RESUMO DAS CONSIDERAÇÕES NAS SIMULAÇÕES.....	82
TABELA 5.8	- VALORES DE TENSÃO MÁXIMA NO TEMPO DE ANÁLISE horas.....	104
TABELA 5.9	- VALORES DE TEMPERATURA MÁXIMA NO TEMPO DE ANÁLISE DE 504 horas.....	104

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1	- PARALELEPÍPEDO INFINITESIMAL.....	7
FIGURA 2.2	- DOMÍNIO COM CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	10
FIGURA 2.3	- INTERFACE ENTRE DOIS MATERIAIS.....	11
FIGURA 3.1	- VETOR TENSÃO.....	14
FIGURA 3.2	- TENSÕES NAS FACES POSITIVAS.....	14
FIGURA 3.3	- ESTADO DE TENSÃO NO PONTO P EM COMPONENTES CARTESIANAS.....	15
FIGURA 3.4	- TENSÕES ATUANTES NUM ELEMENTO INFINITESIMAL.....	16
FIGURA 3.5	- VETOR DE TENSÃO EM UM PLANO QUALQUER.....	18
FIGURA 3.6	- ELIPSE DE MISES.....	21
FIGURA 3.7	- HEXÁGONO DE TRESCA.....	22
FIGURA 3.8	- VETOR DE DESLOCAMENTO DE UMA PARTÍCULA.....	23
FIGURA 3.9	- PARALELEPÍPEDO INFINITESIMAL NO ESTADO FINAL E INICIAL.....	24
FIGURA 3.10	- PROJEÇÃO DO PLANO $0xz$ .....	25
FIGURA 3.11	- PROJEÇÃO DO PLANO $0xy$ .....	26
FIGURA.4.1	- DISCRETIZAÇÃO DE UM DOMÍNIO $\Omega_i$ EM ELEMENTOS FINITOS.....	29
FIGURA 4.2	- CONDIÇÕES DE CONTORNO DE UM DOMÍNIO $\Omega_i$ .....	37
FIGURA 5.1	- EXECUÇÃO DA 1ª CAMADA.....	43
FIGURA 5.2	- EXECUÇÃO DA 2ª CAMADA.....	44
FIGURA 5.3	- EXECUÇÃO DA 3ª CAMADA.....	44
FIGURA 5.4	- METODOLOGIA PARA ANÁLISE TENSO-TÉRMICA.....	45
FIGURA 5.5	- VIGA BI-ENGASTADA DISCRETIZADA.....	46
FIGURA 5.6	- VG1 - TENSÃO PRINCIPAL - CAMADA ÚNICA – até 20.001 horas...	48
FIGURA 5.7	- VG2 - TENSÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X - CAMADA ÚNICA – até 20.001 horas.....	48

FIGURA 5.8	- VG2 - TENSÃO DE VON MISES – CAMADA ÚNICA - até 20.001 horas.....	49
FIGURA 5.9	- VG3 - TENSÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X - CAMADA ÚNICA - até 20.001 horas.....	49
FIGURA 5.10	- VG4 - TENSÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X - CAMADA ÚNICA - até 20.001 horas.....	50
FIGURA 5.11	- VG5 - TENSÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X - 1ª CAMADA - até 20.001 horas.....	50
FIGURA 5.12	- VG5 - TENSÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X - 2ª CAMADA - até 40.001 horas.....	51
FIGURA 5.13	- VG6 - TENSÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X - 1ª CAMADA - até 20.001 horas.....	51
FIGURA 5.14	- VG6 - TENSÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X - 2ª CAMADA - até 40.001 horas.....	52
FIGURA 5.15	- VG7 - TENSÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X - 1ª CAMADA - até 40.001 horas.....	52
FIGURA 5.16	- VG7 - TENSÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X - 2ª CAMADA - até 40.001 horas.....	53
FIGURA 5.17	- BLOCO DISCRETIZADO.....	54
FIGURA 5.18	- A1 - TEMPERATURA - CAMADA ÚNICA - até 110.001 horas.....	57
FIGURA 5.19	- A1 - TENSÃO PRINCIPAL - CAMADA ÚNICA.- até 110.001 horas...	57
FIGURA 5.20	- A1 - TEMPERATURA - CAMADA ÚNICA - até 144.001 horas.....	58
FIGURA 5.21	- A1 - TENSÃO PRINCIPAL - CAMADA ÚNICA.- até 144.001 horas...	58
FIGURA 5.22	- A1 - TENSÃO DE VON MISSES - CAMADA ÚNICA - até 144.001 horas.....	59
FIGURA 5.23	- A1- TEMPERATURA NODAL - até 144 horas.....	59
FIGURA 5.24	- A1 - TENSÃO NODAL - até 144 .001 horas.....	60
FIGURA 5.25	- A2 - TEMPERATURA - 1ª CAMADA - até 48.001 horas .....	60
FIGURA 5.26	- A2 - TENSÃO PRINCIPAL - 1ª CAMADA - até 48.001 horas.....	61
FIGURA 5.27	- A2 - TEMPERATURA - 2ª CAMADA - até 92.002 horas.....	61
FIGURA 5.28	- A2 - TENSÃO PRINCIPAL - 2ª CAMADA - até 92.002 horas.....	62

FIGURA 5.29	- A2 - TENSÃO VON MISSES - 2ª CAMADA - até 92.002 horas.....	62
FIGURA 5.30	- A2 - TEMPERATURA - 3ª CAMADA - até 144.003 horas.....	63
FIGURA 5.31	- A2 - TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA - até 144.003 horas.....	63
FIGURA 5.32	- A2 - TENSÃO VON MISSES - 3ª CAMADA - até 144.003 horas.....	64
FIGURA 5.33	- A2 - TEMPERATURA NODAL - até 144.003 horas.....	64
FIGURA 5.34	- A2 - TENSÃO PRINCIPAL NODAL - até 144.003 horas.....	65
FIGURA 5.35	- A3 - TEMPERATURA - 3ª CAMADA - até 144.003 horas.....	65
FIGURA 5.36	- A3 - TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA - até 144.003 horas.....	66
FIGURA 5.37	- A3 - TENSÃO DE VON MISSES - 3ª CAMADA - até 144.003 horas.....	66
FIGURA 5.38	- A3 - TEMPERATURA NODAL - até 144.003 horas.....	67
FIGURA 5.39	- A3 - TENSÃO NODAL - até 144.003 horas.....	67
FIGURA 5.40	- A4 - TEMPERATURA - 1ª CAMADA - até 48.001 horas.....	68
FIGURA 5.41	- A4 - TENSÃO PRINCIPAL - 1ª CAMADA - até 48.001 horas.....	68
FIGURA 5.42	- A4 - TENSÃO DE VON MISSES - 1ª CAMADA - até 48.001 horas.....	69
FIGURA 5.43	- A4 - TEMPERATURA - 2ª CAMADA - até 96.002 horas.....	69
FIGURA 5.44	- A4 - TENSÃO PRINCIPAL - 2ª CAMADA - até 96.002 horas.....	70
FIGURA 5.45	- A4 - TENSÃO DE VON MISES - 2ª CAMADA - até 96.002 horas.....	70
FIGURA 5.46	- A4 - TEMPERATURA - 3ª CAMADA - até 144.003 horas.....	71
FIGURA 5.47	- A4 - TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA - até 144.003 horas.....	71
FIGURA 5.48	- A4 - TENSÃO DE VON MISSES - 3ª CAMADA - até 144.003 horas.....	72
FIGURA 5.49	- A4 - TEMPERATURA NODAL - até 144.003 horas.....	72
FIGURA 5.50	- A4 - TENSÃO PRINCIPAL NODAL - até 144.003 horas.....	73
FIGURA 5.51A	- A4 - TEMPERATURA PARA NÓ I.....	74
FIGURA 5.51B	- A4 - TEMPERATURA PARA NÓ I.....	75
FIGURA 5.52A	- A4 - TEMPERATURA PARA NÓ II.....	75
FIGURA 5.52B	- A4 - TEMPERATURA PARA NÓ II.....	76
FIGURA 5.53A	- A4 - TENSÃO PARA NÓ I.....	76
FIGURA 5.53B	- A4 - TENSÃO PARA NÓ I.....	77
FIGURA 5.54A	- A4 - TENSÃO PARA NÓ II.....	77
FIGURA 5.54B	- A4 - TENSÃO PARA NÓ II.....	78
FIGURA 5.55	- SEÇÃO DA VIGA.....	79

FIGURA 5.56	- DISCRETIZAÇÃO DA VIGA EM ELEMENTOS FINITOS.....	80
FIGURA 5.57	- CURVA DE ELEVAÇÃO ADIÁBÁTICA.....	81
FIGURA 5.58	- CURVA DE GERAÇÃO DE CALOR.....	81
FIGURA 5.59	- V0 - TEMPERATURA - CAMADA ÚNICA - até 108.001 horas.....	83
FIGURA 5.60	- V0 - TENSÃO PRINCIPAL - CAMADA ÚNICA - até 108.001 horas....	83
FIGURA 5.61	- V0 - RESULTADO NODAL - TEMPERATURA - até 504.003 horas....	84
FIGURA 5.62	- V0 - RESULTADO NODAL - TENSÃO - até 504.003 horas.....	84
FIGURA 5.63	- V1 - TEMPERATURA - 2ª CAMADA - até 336.002 horas.....	85
FIGURA 5.64	- V1 - TENSÃO PRINCIPAL - 2ª CAMADA - até 336.002 horas.....	85
FIGURA 5.65	- V1 - RESULTADO NODAL - TEMPERATURA - até 504.003 horas....	86
FIGURA 5.66	- V1 - RESULTADO NODAL - TENSÃO - até 504.003 horas.....	86
FIGURA 5.67	- V1B - TEMPERATURA - 2ª CAMADA - até 336.002 horas.....	87
FIGURA 5.68	- V1B - TENSÃO PRINCIPAL - 2ª CAMADA - até 336.002 horas.....	87
FIGURA 5.69	- V1B - TEMPERATURA - 3ª CAMADA - até 504.003 horas.....	88
FIGURA 5.70	- V1B - TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA - até 504.003 horas.....	88
FIGURA 5.71	- V1B - RESULTADO NODAL - TEMPERATURA - até 504.003 horas..	89
FIGURA 5.72	- V1B - RESULTADO NODAL - TENSÃO - até 504.003 horas.....	89
FIGURA 5.73	- V1C - TEMPERATURA - 3ª CAMADA - até 504.003 horas.....	90
FIGURA 5.74	- V1C - TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA - até 504.003 horas.....	90
FIGURA 5.75	- V1C - RESULTADO NODAL - TEMPERATURA - até 504.003 horas..	91
FIGURA 5.76	- V1C - RESULTADO NODAL - TENSÃO - até 504.003 horas.....	91
FIGURA 5.77	- V2 - TEMPERATURA - 3ª CAMADA - até 1008 horas.....	92
FIGURA 5.78	- V2 - TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA - até 1008 horas.....	92
FIGURA 5.79	- V2 - RESULTADO NODAL - TEMPERATURA. – até 1008 horas.....	93
FIGURA 5.80	- V2 - RESULTADO NODAL - TENSÃO - até 1008 horas.....	93
FIGURA 5.81	- V3 - TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA – até 1512 horas.....	94
FIGURA 5.82	- V3 - TENSÃO VON MISES - 3ª CAMADA – até 1512 horas.....	94
FIGURA 5.83	- V3 - RESULTADO NODAL - TEMPERATURA – até 1512 horas.....	95
FIGURA 5.84	- V3 - RESULTADO NODAL - TEMPERATURA – até 1512 horas.....	95
FIGURA 5.85	- V4 - RESULTADO NODAL - TEMPERATURA – até 336.002 horas ..	96
FIGURA 5.86	- V4 - RESULTADO NODAL - TENSÃO - até 336.002 horas.....	96

FIGURA 5.87	- V5 - TENSÃO PRINCIPAL -3ª CAMADA - até 336.002 horas.....	97
FIGURA 5.88	- V5 - TENSÃO VON MISSES - 3ª CAMADA - até 336.002 horas.....	97
FIGURA 5.89	- V5 - RESULTADO NODAL - TEMPERATURA - até 336.002 horas....	98
FIGURA 5.90	- V5 - RESULTADO NODAL - TENSÃO - até 336.002 horas.....	98
FIGURA 5.91	- V6 - TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA - até 672.002 horas.....	99
FIGURA 5.92	- V6 - TENSÃO DE VON MISES - 3ª CAMADA - até 672.002 horas.....	99
FIGURA 5.93	- V6 - RESULTADO NODAL - TEMPERATURA - até 1008 horas.....	100
FIGURA 5.94	- V6 - RESULTADO NODAL - TENSÃO - até 1008 horas.....	100
FIGURA 5.95	- V7 - TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA - até 1008 horas.....	101
FIGURA 5.96	- V7 - TENSÃO DE VON MISES - 3ª CAMADA - até 1008 horas.....	101
FIGURA 5.97	- V7 - RESULTADO NODAL - TEMPERATURA - até 1008 horas.....	102
FIGURA 5.98	- V7 - RESULTADO NODAL - TENSÃO - até 1008 horas.....	102
FIGURA 5.99	- V8 - RESULTADO NODAL - TEMPERATURA - até 1008 horas.....	103
FIGURA 5.100	- V8 - RESULTADO NODAL - TENSÃO - até 1008 horas.....	103
FIGURA 5.101A	- TEMPERATURA GERAL DA VIGA NO I.....	105
FIGURA 5.101B	- TEMPERATURA DA VIGA NO I - 168 horas.....	105
FIGURA 5.101C	- TEMPERATURA DA VIGA NO I - 336 horas.....	106
FIGURA 5.101D	- TEMPERATURA DA VIGA NO I - 504 horas.....	106
FIGURA 5.102A	- TEMPERATURA GERAL DA VIGA NO II.....	107
FIGURA 5.102B	- TEMPERATURA DA VIGA NO II - 168 horas.....	108
FIGURA 5.102C	- TEMPERATURA DA VIGA NO II - 504 horas.....	108
FIGURA 5.102D	- TEMPERATURA DA VIGA NO II - 336 horas.....	109
FIGURA 5.103A	- TENSÃO GERAL DA VIGA NO I.....	110
FIGURA 5.103B	- TENSÃO DA VIGA NO I - 168 horas .....	110
FIGURA 5.103C	- TENSÃO DA VIGA NO I - 504 horas.....	111
FIGURA 5.103D	- TENSÃO DA VIGA NO I - 336 horas.....	111
FIGURA 5.104A	- TENSÃO GERAL DA VIGA NO II.....	112
FIGURA 5.104B	- TENSÃO DA VIGA NO II - 336 horas.....	113
FIGURA 5.104C	- TENSÃO DA VIGA NO II - 168 horas.....	113

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\{ \}$	vetor
$[ ]$	matriz
$S$	área da superfície
$a_j$	parâmetros nodais , graus de liberdade, deslocamentos ou forças internas
$b$	força de corpo
$\{b\}$	vetor contendo as componentes da força de corpo
$\{b\}^i$	vetor contendo as componentes da força de corpo do elemento $i$
$\alpha$	coeficiente de expansão térmica
$\sigma$	constante de Stefan-Boltzmann
$\rho$	massa específica do meio contínuo
$\Gamma$	domínio do contorno analisado
$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$	condições de contorno de um domínio $\Omega$
$\bar{e}$	vetor unitário
$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$	versores unitários dos eixos $x, y, z$
$\varepsilon_0$	deformação inicial
$\{\varepsilon\}$	vetor contendo as componentes do campo de deformações
$\{\varepsilon\}^i$	vetor contendo as componentes do campo de deformações do elemento $i$
$\varepsilon_1$	emissividade da superfície cinzenta
$E$	módulo de elasticidade
$[B]$	matriz de interpolação
$[C]$	matriz de capacitância
$[D]$	matriz contendo parâmetros elásticos
$[D]^i$	matriz contendo parâmetros elásticos para o elemento $i$
$\mathcal{D}$	operador diferencial das deformações

$k$	condutividade térmica
$[k_{elem}]^i$	matriz de rigidez do elemento $i$
$[K_G]$	matriz global de rigidez
$[K]$	matriz de condutividade térmica
$[K_C]$	matriz de convecção
$[K_R]$	matriz de radiação
$ds$	comprimento da face normal a $n$
$dx$	comprimento na direção $x$
$dy$	comprimento na direção $y$
$\{f_{elem}\}^i$	vetor dos carregamentos nodais do elemento $i$
$\{\bar{f}_{elem}\}^i$	vetor dos carregamentos nodais do elemento $i$ considerando deformação inicial
$\{F_G\}$	vetor global dos carregamentos nodais do sistema
$\sum F_n$	somatório das forças na direção normal
$\sum F_t$	somatório das forças na direção tangencial
$p$	força externa
$q$	fluxo de calor
$Q$	energia interna
$c_v$	calor específico para volume constante
$h_c$	coeficiente convectivo, coeficiente de transferência de calor
$H_i$	radiação solar direta, radiação incidente na superfície $i$ por unidade de tempo e área
$i$	número de elementos por nó
$j$	número de nó
$I$	invariantes
$I_1, I_2, I_3$	invariantes principais
$[N]^i$	matriz contendo as funções de forma
$n$	número total de elementos

$\vec{n}$	vetor normal
$n_x, n_y, n_z$	componentes do vetor normal a um plano qualquer
$p$	força de superfície
$\{p\}$	vetor contendo as componentes da força de superfície
$\{p\}^i$	vetor contendo as componentes da força de superfície do elemento $i$
$q_c''$	fluxo de calor convectivo por unidade de área
$q_{rs}''$	fluxo de calor radiativo por unidade de área
$q_x'', q_y'', q_z''$	componentes da taxa de transferência de calor por unidade de área
$q_x, q_y, q_z$	componentes do vetor fluxo de calor por unidade de área
$\partial\Omega_\sigma$	região do contorno do domínio $\Omega$ onde as forças são aplicadas
$\partial\Omega_u$	região do contorno do domínio $\Omega$ onde os deslocamentos são aplicadas
$\partial\Omega$	contorno
$\Delta T$	variação de temperatura
$\{T\}$	vetor das temperaturas nodais
$T$	temperatura do meio contínuo
$T_0$	temperatura de referência
$T_e$	temperatura externa
$\Omega$	domínio do corpo
$\Omega^i$	domínio do corpo
$\Pi$	energia
$U_{int}$	energia interna de deformação
$U_{ext}$	energia externa devido às cargas aplicadas
$\phi_j$	funções de forma
$\nu$	coeficiente de Poisson
$U$	vetor global dos deslocamentos nodais
$v(x, y, z)$	função incógnita
$\bar{\sigma}_n$	vetor tensão em um plano qualquer de normal $\vec{n}$

$\{\sigma_0\}$	tensão devido a uma deformação inicial
$\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$	componentes cartesianas do vetor tensão $\bar{\sigma}$ atuante nos planos coordenados
$\bar{\sigma}_{nx}, \bar{\sigma}_{ny}, \bar{\sigma}_{nz}$	componentes cartesianas do vetor tensão $\bar{\sigma}$ atuante a um plano normal $\bar{n}$
$\sigma^*$	tensão em relação aos novos eixos $(l, m, n)$
$\{\sigma\}$	representação vetorial do tensor de tensões
$[\sigma]$	representação matricial do tensor de tensões
$\{\sigma\}^i$	vetor contendo as componentes de tensor de tensões para o elemento $i$
$\sigma_n$	tensão normal
$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz},$ $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yx},$ $\sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$	componentes de tensão
$\tau_n$	tensão tangencial
$\delta$	delta de Kronecker
$\{u\}$	vetor que contém o campo de deslocamentos
$u_x$	componente $x$ do campo de deslocamentos
$u_y$	componente $y$ do campo de deslocamentos
$\{U\}^i$	vetor que coleciona os deslocamentos nodais do elemento $i$
$\{U\}$	vetor que coleciona os deslocamentos nodais do corpo
$U_x^j$	deslocamento do nó $j$ na direção $x$
$U_y^j$	deslocamento do nó $j$ na direção $y$
$l, m, n$	novo eixo referencial
$x, y, z$	referencial cartesiano inicial

# **1 INTRODUÇÃO**

## **1.1 GENERALIDADES**

A cada dia o desenvolvimento tecnológico se torna mais competitivo. Isto faz com que as indústrias, a construção civil e as empresas de modo geral se obriguem a elaborar melhor os projetos de suas peças, maquinários, estruturas e edificações. O objetivo é aumentar a qualidade dos produtos com maior segurança minimizando os custos e material utilizado no processo construtivo.

Deve-se considerar sempre em um projeto que todo corpo analisado, seja de qualquer material, sofre variação geométrica devida à forças externas, à temperatura ou outro fator qualquer. Assim a Mecânica do Contínuo deve ser utilizada para avaliar o comportamento dos materiais sujeitos a diferentes condições de contorno.

Problemas devidos a transferência de calor entre um material e o ambiente são abordados com freqüência. A importância se deve à necessidade de avaliar a integridade estrutural afetada por tensões de origem térmica.

As técnicas numéricas são variadas e o avanço computacional facilita o surgimento de novas formas de solução. O objetivo está na obtenção de melhores resultados para otimizar a qualidade dos produtos industriais e melhorar a qualidade das obras civis.

Estudos em várias universidades e órgãos particulares já conseguem prever quando e qual a dimensão dos problemas de origem térmica em diversos tipos estruturais. Aplicações destes estudos podem ser encontradas nas indústrias quando da fabricação de peças, maquinários, autopeças, tubulações, estruturas automobilísticas, nas estruturas aeroespaciais, e nas estruturas civis.

Muitas são as estruturas executadas por camadas na construção civil: como silos, caixas de água, barragens compactadas por rolo. Outras aplicações podem ser encontradas em indústrias que trabalham com processos de injeção ou fusão de peças.

## **1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA**

### 1.2.1 Análise Térmica

A transferência de calor faz parte em todos os processos industriais e também nas mais variadas estruturas. Todo corpo material passa a ser objeto de estudo a fim de se revelar onde sua integridade pode ser afetada .

Em indústrias de estruturas metálicas, é necessária a determinação da tensão resultante da temperatura em alguns processos de soldagem que passam por aquecimento, fusão e solidificação. O calor pode ser originado a laser, solda elétrica, maçarico ou irradiação de elétrons. As propriedades do material metálico que dependem do calor transiente podem causar expansão e contração térmica provocando deformação plástica. Como resultado, da tensão residual, deformações são permanentemente produzidas nas estruturas. Altas tensões residuais podem provocar fratura e fadiga durante ou após a soldagem [ZHU e CHAO (2002)].

Outra investigação importante é a transferência de calor interfacial no processo de solidificação na moldagem de metais devido ao significado físico dos seus coeficientes durante a soldagem. A obtenção destes coeficientes depende de inúmeros de fatores como a espessura das camadas, enchimentos isolantes, geometria das matrizes das peças, a temperatura, a composição da mistura, a temperatura do molde. As propriedades do metal líquido durante a solidificação podem ser alteradas para cada mudança de volume ocasionando tensões significativas nas peças metálicas [LEWIS e RANSING (2002)].

Outros exemplos da importância da transferência de calor podem ser vistos na Engenharia Mecânica com a utilização de barras metálicas na forma de serpentina para resfriamento de turbinas [TATSUMI *et al.* (2002)], nas aberturas enrugadas de canais de transporte de fluido viscoso industrial [WANG e CHEN (2002)], no controle de fluxo de calor em estruturas aeroespaciais [HORN *et al.* (1997)], na indústria de transporte de oleodutos e gás com tubulação enterrada [ PENTLAND *et al.* (2000)].

Nas grandes construções como em barragens, experiências mostram que a temperatura induz a fissuras. Estudos envolvendo análise de temperatura e suas conseqüências neste tipo de obra apresentam resultados que dependem de vários fatores desde o tipo de material utilizado, modo de aplicação destes e a influência do meio ambiente como visto no trabalho de KRÛGER (2001). As mudanças diurnas de temperatura pela radiação solar e evaporação influencia evolução da temperatura nas camadas de barragens com CCR (Concreto Compactado por Rolo).

### 1.2.2 Análise de tensões

A deformação estrutural, devido a ação de agentes externos e internos, determina as tensões que são condições para a verificação da estabilidade do corpo ou da estrutura. As tensões oriundas das variações térmicas devem ser examinadas em vários tipos estruturais. É preciso que estas tensões sejam estimadas preferencialmente antes da execução das estruturas para que possam ser evitadas fissuras que coloquem em risco a vida útil das estruturas.

Vários são os métodos para calcular as tensões. Algumas técnicas possuem mais eficiência sobre outras sem contar com o meio computacional utilizado que varia conforme a necessidade e tipo de projeto a ser analisado. PRATHAP e NAGANARAYANA (1995), numa aplicação computacional usaram o princípio dos trabalhos virtuais e o teorema de Hu-Washuzu para cálculo de tensões em barras simples.

ISHIKAWA (1991) afirma que a análise de tensões térmicas de estruturas de concreto tem duas fases: a análise de transferência de calor e a análise de tensão térmica usando resultados da transferência de calor.

Alguns estudos sobre a construção de estruturas de concreto indicam que o calor de hidratação da massa de cimento resulta em um acréscimo em temperatura logo após a colocação do concreto. Para WANG e CHEN (2002), ÖZSAN e AKIN (2002), além das condições geológicas, o estado de tensão de construções hidráulicas depende das propriedades mecânicas das rochas. Nas encostas e nos leitos dos rios, as rochas têm diferentes propriedades e deformações.

A fissuração devido aos efeitos térmicos é um dos problemas mais importantes durante a fase de construção de barragens de concreto. Em consequência da hidratação do cimento, há um gradiente térmico no corpo das barragens que pode comprometer a estabilidade [ARAÚJO e AWRUCH (1998), AZMI e PAULTRE (2002), ISHIKAWA (1991), BUDHU *et. al* (1994)]. Estudos tenso-térmicos também foram verificados na barragem de Cenza construída por concreto compactado por rolo (CCR) [CALVO *et. al* (1995)].

Muitos pacotes comerciais ANSYS, ABAQUS estão interessados na obtenção da análise térmica.

### **1.3 OBJETIVO E ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO**

Este trabalho tem por objetivo propor uma sistemática para determinação das tensões resultantes das temperaturas em estruturas executadas por camadas.

O método adotado foi o Método dos Elementos Finitos em regime transiente. Inicialmente, determinam-se as temperaturas nas sucessivas camadas das estruturas. A análise a seguir leva em consideração os resultados das temperaturas para o cálculo dos deslocamentos nas camadas e assim chega-se a análise de tensões sofridas pela estrutura. O software adotado foi o ANSYS® / Multiphysics (1994), versão 5.3.

O estudo segue a seguinte estrutura:

No Capítulo 2 apresentam-se conceitos sobre transferência de calor com suas equações constitutivas, convecção e radiação.

No Capítulo 3 é feita uma revisão sobre conceitos básicos de tensão e deformação. Apresentam-se conceitos de tensões principais, critérios de escoamento, equações de equilíbrio.

No Capítulo 4 revisa-se o MEF. Descreve-se o método dos elementos finitos, a representação de elementos finitos na transferência de calor, na deformação e tensão, princípio dos trabalhos virtuais.

No Capítulo 5 apresentam-se a metodologia adotada e exemplos de aplicação do método: viga simples bi-engastada, bloco simples e uma viga da Hidrelétrica de Serra Mesa.

O Capítulo 6 analisam-se os resultados e conclui-se o trabalho sugerindo futuros desenvolvimentos.

O Capítulo 7 apresenta-se a bibliografia utilizada no trabalho.

### **1.4 LIMITAÇÕES DO TRABALHO**

Na realização do trabalho algumas limitações foram observadas, tanto no que diz respeito a realização do programa quanto a utilização do software:

- As estruturas consideradas não levam em conta o peso próprio.
- Os resultados de temperatura foram comparados com o trabalho de KRÜGER (2001).

- Os resultados de tensão foram comparados com a validação da viga-biengastada.
- Nenhuma simulação considerou matérias variando com o tempo.
- Não foi considerada a variação do módulo de elasticidade.
- Não foi considerada a variação da deformação lenta.
- Não foi considerado nenhum critério de resistência.
- Para a realização limitou-se o uso da versão 5.3 do ANSYS®/ MULTIPHYSICS (1994) e o uso da linguagem própria, APDL, Ansys Parametric Design Language.

## 2 TRANSFERÊNCIA DE CALOR

No processo de execução de certas estruturas em camadas a transferência de calor é relevante. Sendo assim uma breve revisão do assunto facilitará o entendimento.

A energia é transferida por meio do trabalho e calor entre o sistema e o meio. Havendo diferença de temperatura entre um ou mais meios ocorre transferência de calor.

Os processos de transferência de calor podem ser condução, convecção e radiação térmica. A condução ocorre quando existe gradiente de temperatura em um meio estacionário, sólido ou fluido.

A convecção é devida à transferência de calor entre a superfície de um corpo e um fluido em movimento com diferentes temperaturas.

Já a radiação térmica ocorre com a superfície em temperatura finita emitindo ondas eletromagnéticas. Na falta de um meio interveniente, haverá pelo menos, transferência de calor por radiação entre duas superfícies em temperaturas diferentes [INCROPERA e DEWITT (1990), BEJAN (1984), BEJAN (1996), KRÜGER (2001)].

### 2.1 CONDUÇÃO

A condução segundo INCROPERA e DEWITT (1990), BEJAN (1996), ÖZISIK (1979), pode ser considerada como uma forma de transferência de energia entre partículas que contém mais energia para as que tem menos.

A energia é devido aos movimentos aleatórios de translação de rotação e vibração das moléculas. As temperaturas mais elevadas associam-se às energias mais altas, isto é, há uma maior colisão entre as moléculas, diminuindo esse movimento para as regiões mais frias.

Ocorrendo gradiente de temperatura entre pontos diferentes, há transferência por condução que ocorre na direção da diminuição da temperatura (da região mais quente para a mais fria).

#### 2.1.1 Equações governantes

As equações que governam a condução de calor podem ser determinadas pelo Princípio de Conservação de Energia sobre o volume de um sólido infinitesimal que está limitado por um contorno conforme a figura 2.1 [INCROPERA e DEWITT (1990), BEJAN (1984), BEJAN (1996), KRÜGER (2001)].

É possível escrever a variação da taxa de calor no domínio  $\Omega$  como sendo igual ao fluxo de calor através do contorno  $\Gamma$  de domínio  $\Omega$  mais o calor interno gerado no domínio  $\Omega$ .

Considera-se um paralelepípedo infinitesimal com os lados  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  paralelos aos eixos cartesianos  $x, y, z$  conforme a fig. 2.1

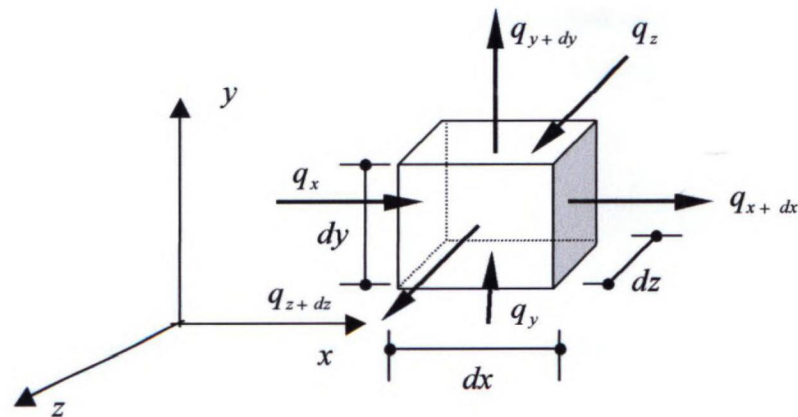


FIGURA 2.1 - PARALELEPÍPEDO INFINITESIMAL

A taxa de transferência de calor  $q''$  por unidade de área através das componentes cartesianas pode ser definida como

$$q'' = i q_x'' + j q_y'' + k q_z'' \quad (2.1)$$

$$q_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$q_y'' = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (2.3)$$

$$q_z'' = -k \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.4)$$

sendo:  $T$  temperatura

$k$  coeficiente de condutividade térmica

As taxas de condução de calor  $q$  analisadas num elemento infinitesimal são expressas através dos fluxos de calor por unidade de área

$$q_x = q_x'' dy dz = -k \frac{\partial T}{\partial x} dy dz \quad (2.5)$$

$$q_y = q_y'' dx dz = -k \frac{\partial T}{\partial y} dx dz \quad (2.6)$$

$$q_z = q_z'' dx dy = -k \frac{\partial T}{\partial z} dx dy \quad (2.7)$$

O calor que é transmitido pela superfície para fora do elemento pode ser expresso por

$$q_{x+dx} = q_x'' \frac{\partial q_x}{\partial x} dx = \left[ \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left( -k \frac{\partial T}{\partial x} \right) dx \right] dy dz \quad (2.8)$$

$$q_{y+dy} = q_y'' \frac{\partial q_y}{\partial y} dy = \left[ \left( -k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -k \frac{\partial T}{\partial y} \right) dy \right] dx dz \quad (2.9)$$

$$q_{z+dz} = q_z'' \frac{\partial q_z}{\partial z} dz = \left[ \left( -k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( -k \frac{\partial T}{\partial z} \right) dz \right] dx dy \quad (2.10)$$

A energia  $Q$  gerada internamente no elemento pode ser obtida como sendo

$$Q dx dy dz \quad (2.11)$$

A taxa de variação de calor no elemento infinitesimal ao longo do tempo será dada por

$$\left[ \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right] dx dy dz \quad (2.12)$$

sendo:  $\rho$  massa específica do meio contínuo

Pode-se obter o calor específico  $c$ , capaz de aumentar a temperatura por unidade de massa no meio contínuo, a partir de

$$c = \frac{du}{dt} \quad (2.13)$$

sendo:  $u$  energia específica interna do meio contínuo

Pelo Princípio de Conservação de Energia, o calor que entra no volume adicionada ao calor gerado internamente subtraindo o calor que sai, será igual a variação do calor no elemento e definido por

$$(q_x + q_y + q_z) + Q dx dy dz - (q_{x+dx} + q_{y+dy} + q_{z+dz}) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (2.14)$$

Substituindo -se as equações (2.5), (2.10) em (2.14) tem-se

$$-\frac{\partial q_x}{\partial x} dx - \frac{\partial q_y}{\partial y} dy - \frac{\partial q_z}{\partial z} dz + Q dx dy dz = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} dx dy dz \quad (2.15)$$

Em casos como o de um meio anisotrópico a condução dependerá de  $k = k(x, y, z)$ , condutividade, resultando em

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.16)$$

Considerando a difusividade térmica  $\alpha$  sendo

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} \quad (2.17)$$

é possível escrever a equação do fluxo de calor para materiais com condutividade  $k$  e calor  $\rho c$  específico constante como sendo

$$\nabla^2 T + \frac{Q}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.18)$$

onde  $\nabla^2$  é o operador laplaciano definido como

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (2.19)$$

No caso das propriedades térmicas constantes, a expressão (2.18) fica

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.20)$$

No caso particular das propriedades térmicas constantes e regime permanente, tal expressão toma a forma

$$\nabla^2 T + \frac{Q}{k} = 0 \quad (2.21)$$

Finalmente, em regime permanente sem geração de calor a expressão (2.18) fica

$$\nabla^2 T = 0 \quad (2.22)$$

É importante definir as condições de contorno, lineares ou não lineares, em um domínio  $\Omega$  limitado pela superfície  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$  onde  $\Gamma_1$  é a parcela do contorno com temperatura prescrita e  $\Gamma_2$  é a parcela do contorno com são os fluxos de calor prescritos.

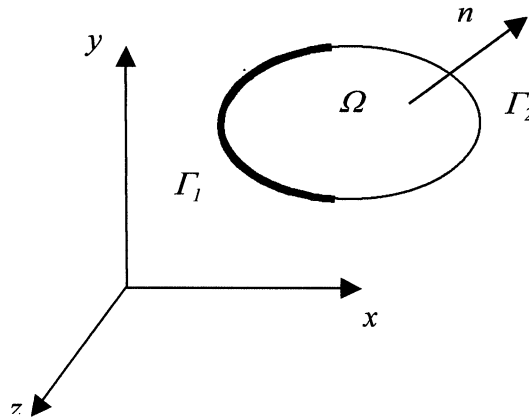


FIGURA 2.2 - DOMÍNIO COM CONDIÇÕES DE CONTORNO

Nos problemas em regime permanente, a solução será única desde que sejam especificadas as condições de contorno apropriadas. As condições de contorno iniciais deverão considerar uma distribuição de temperatura obrigatoriamente impostas no tempo zero em função das coordenadas  $x, y, z$ , isto é,

$$T(x, y, z, t) = T_0(x, y, z, t = 0) \quad (2.23)$$

As condições de que impõe temperatura prescrita são conhecidas como condições de contorno essencial ou de Dirichlet [ASSAN (1999)], isto é,

$$T(x, y, z, t) = f_\Gamma(x, y, z, t) \quad em (x, y, z, t) \in \Gamma_1 \quad (2.24)$$

sendo:  $f_\Gamma$  função conhecida

$(x, y, z)$  coordenadas

$t$  tempo

Para um contorno qualquer, num ponto cuja normal é  $\vec{n}$ , o fluxo de calor por unidade de área, usando a lei de Fourier pode ser determinada por

$$q'' = -k \frac{\partial T}{\partial n} = q_c'' + q_{rs}'' \quad (2.25)$$

onde  $q_c'' = h_c(T_e - T)$  convectivo (expresso pela Lei de Convecção de Newton)

$$q_c'' = h_c(T_e - T) \quad em (x, y, z) \in \Gamma_2 \quad (2.26)$$

e  $q_{rs}''$  a quantidade de calor por radiação solar é dada por

$$q_{rs}'' = \sigma \epsilon T^4 - \alpha H_i \quad (2.27)$$

sendo:  $H_i$  radiação solar direta

Num domínio com dois ou mais materiais é aplicada a condição de contorno contínua para temperatura e de equilíbrio do fluxo de calor na interface dos materiais (2.28 e 2.29) para que a solução seja única, tal como ilustrado na figura 2.3. Este conceito será utilizado pelo ANSYS.

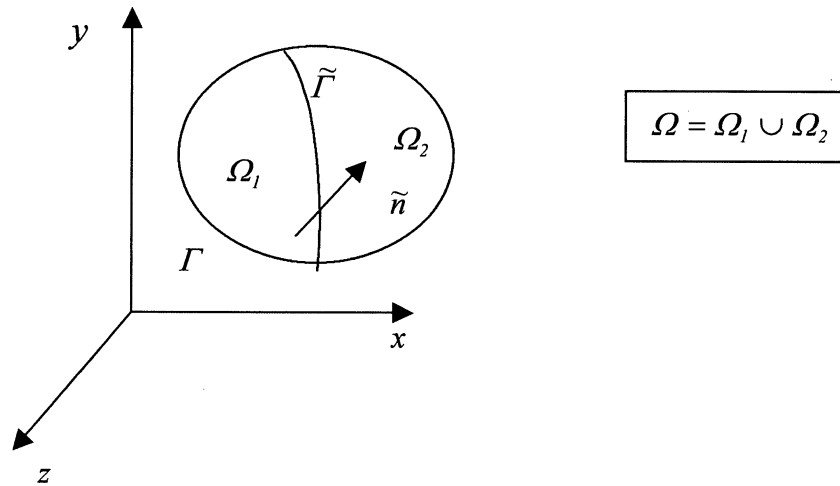


FIGURA 2.3 – INTERFACE ENTRE DOIS MATERIAIS

As condições de contorno na interface  $\tilde{\Gamma}$ , dos materiais  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , podem ser escritas como

$$T_1(x, y, z, t) = T_2(x, y, z, t) \quad \text{em } (x, y, z) \in \tilde{\Gamma} \quad (2.28)$$

$$\left( k \frac{\partial T}{\partial \tilde{n}} \right)_1 = \left( k \frac{\partial T}{\partial \tilde{n}} \right)_2 \quad \text{em } (x, y, z) \in \tilde{\Gamma} \quad (2.29)$$

## 2.2 CONVECÇÃO

Convecção é o transporte de energia com a ação da condução de calor, armazenamento da energia e movimento de massa. O modo de transferência compreende dois mecanismos: movimento molecular aleatório e movimento de massa do fluido.

A transferência de calor que mais interessa é a que ocorre entre um fluido em movimento e uma superfície limitante com as temperaturas diferentes. Pode ser classificada de acordo com a natureza do escoamento. Será forçada quando o escoamento for provocado por meios externos e

livre quando for provocada pelas forças de empuxo originadas das diferenças de densidade devido a variações de temperatura no fluido [INCROPERA e DEWITT (1990), BEJAN (1984), BEJAN (1996), KRÜGER (2001)].

Independente da natureza do processo de transferência de calor por convecção, a equação do fluxo de calor é dada por

$$q'' = h(T_s - T_\infty) \quad (2.30)$$

onde:  $q''$  é o fluxo de calor convectivo ,por exemplo, em  $W/m^2$

$h$  é o coeficiente de transferência convectiva de calor

$T_s$  temperatura na superfície

$T_\infty$  temperatura do fluido

## 2.3 RADIAÇÃO

A radiação não será utilizada neste trabalho, porém é importante conhecer certos conceitos. Radiação é o calor que se transmite à distância de um corpo de temperatura elevada para outro de temperatura mais baixa sem contato direto ou indireta. A energia que se transmite pelo corpo negro com temperatura maior que o zero absoluto dado por diferentes [INCROPERA e DEWITT (1990), BEJAN (1984), BEJAN (1996), KRÜGER (2001)]

$$q_{rs} = \sigma A_1 T^4 \quad (2.31)$$

sendo:  $\sigma$  constante de Stefan-Boltzmann  $5,67051 \times 10^{-8} W/(m^2 \cdot K^4)$

$T$  temperatura

Os corpos reais emitem radiação inferior a dos corpos negros e o calor transferido por radiação de  $T_1$  para o corpo negro que esteja em  $T_2$  será

$$q_r = \sigma A_1 \varepsilon_1 (T_1^4 - T_2^4) \quad (2.32)$$

sendo:  $A_1$  área da superfície

$\varepsilon_1$  emissividade da superfície

$T_1$  temperatura do corpo 1

$T_2$  temperatura do corpo 2

### 3 TENSÕES E DEFORMAÇÕES

Na análise de um sólido submetido a ações externas, consideram-se os estados de tensão e deformação em seu interior. Para esta avaliação, são admitidas as hipóteses básicas de continuidade dos meios.

Para a determinação das equações diferenciais de uma estrutura devidamente carregada, consideram-se as equações de equilíbrio entre forças e tensões, as equações de compatibilidade entre deformações e deslocamentos e as equações constitutivas que relacionam tensões e deformações, além de se impor as condições de contorno adequadas ao problema.

Assim, é de grande utilidade rever conceitos básicos de tensões e deformações facilitando o entendimento das análises desenvolvidas neste trabalho.

#### 3.1 TENSÕES

##### 3.1.1 Definições

Para conceituar tensão, pode-se analisar através do corte em um sólido. Para avaliar suas forças internas, considera-se uma das partes como mostra a fig. 3.1, onde a parte do corte retirada é substituída por forças internas.

Na superfície  $\Delta S$  do plano de corte do sólido em torno do ponto  $P$ , pode-se reduzir a ação de um dos lados do sólido sobre o outro a um sistema equivalente de uma força distribuída definida por  $\Delta \vec{F}$  (fig. 3.1) tendo como componentes  $\Delta F_x, \Delta F_y$  e  $\Delta F_z$  e um vetor binário  $\Delta \vec{M}$  dados por [HECKE (1984), MALVERN (1969), BRANCO (1985), LAI (1993)]

$$\vec{\sigma}_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta S} \quad (3.1)$$

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{M}}{\Delta S} = 0 \quad (3.2)$$

sendo  $\vec{n}$  normal ao plano de corte

$\vec{\sigma}_n$  vetor tensão

$\vec{F}_i$  força exterior

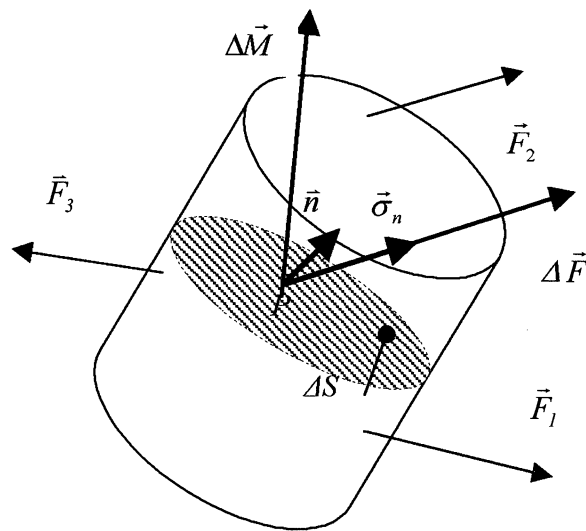


FIGURA 3.1 – VETOR TENSÃO

Toma-se em torno do ponto  $P$ , um paralelepípedo infinitesimal com faces paralelas aos planos coordenados, com lados quaisquer conforme mostra a (fig 3.2). Usa-se a seguinte notação: as faces positivas possuem a normal exterior coincidente com o sentido dos eixos.

A ação da parte removida pode ser reduzida a vetores tensão em cada face. Assim  $\vec{\sigma}_{nx}$  é o vetor tensão que age na face positiva que tem como versor normal  $\vec{n}_x$ , enquanto que  $\vec{\sigma}_{ny}$  e  $\vec{\sigma}_{nz}$  agem na face positiva contendo como normais  $\vec{n}_y$  e  $\vec{n}_z$ .

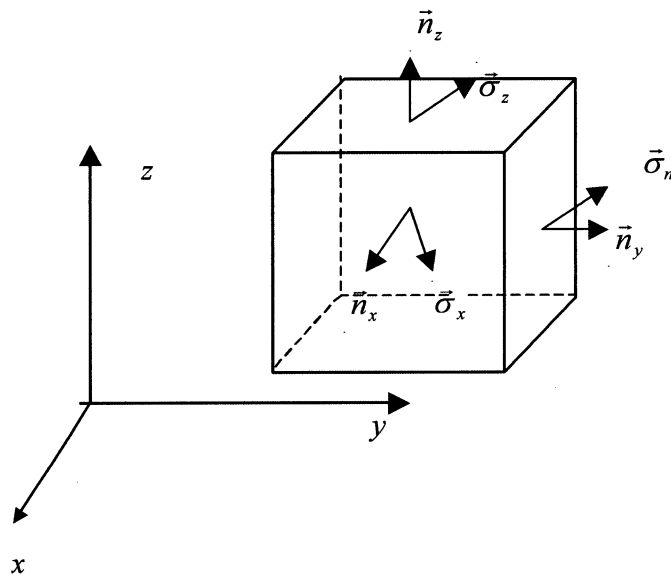


FIGURA 3.2 – TENSÕES NAS FACES POSITIVAS

Decompondo-se os vetores de tensão em componentes cartesianas (fig.3.3), tem-se

$$\vec{\sigma}_x = \sigma_{xx}\vec{i} + \tau_{xy}\vec{j} + \tau_{xz}\vec{k} \quad (3.3)$$

$$\vec{\sigma}_y = \tau_{yx}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \tau_{yz}\vec{k} \quad (3.4)$$

$$\vec{\sigma}_z = \tau_{zx}\vec{i} + \tau_{zy}\vec{j} + \sigma_{zz}\vec{k} \quad (3.5)$$

Identifica-se três tensões normais e seis tensões tangenciais. Nas tensões  $\sigma_{ij}$ , o primeiro índice  $i$  indica a face onde a tensão atua e o segundo índice  $j$ , a sua direção (fig 3.3).

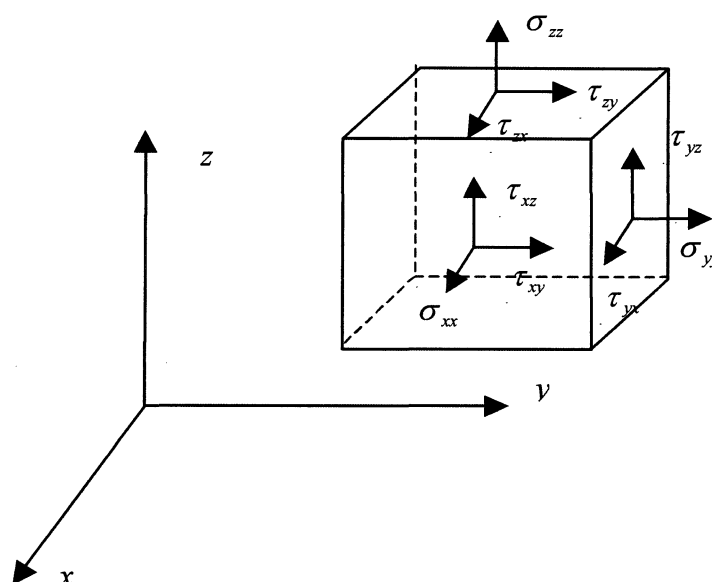


FIGURA 3.3 – ESTADO DE TENSÃO NO PONTO P EM COMPONENTES CARTESIANAS

Em componentes cartesianas, conforme fig. 3.3, verifica-se que o estado de tensão poderá ser representado em forma matricial como

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

### 3.1.2 Equações de equilíbrio

Para determinar as tensões distribuídas em sólidos é considerado o equilíbrio estático em todos os pontos do sólido, ou seja, é satisfeita a condição de equilíbrio em todos os elementos diferenciais [HECKE (1984)].

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0 \quad (3.7)$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0 \quad (3.8)$$

Sendo um elemento infinitesimal de um corpo com forças externas atuantes  $X, Y, Z$  por unidade de volume nas direções  $x, y, z$  demonstrado na fig. 3.4

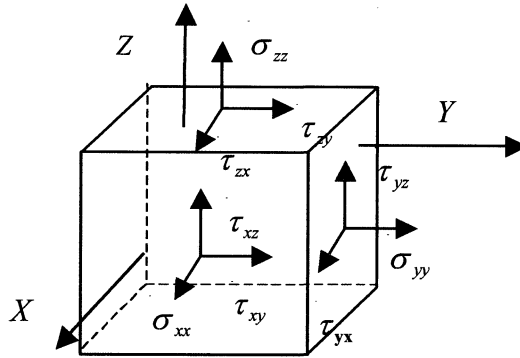


FIGURA 3.4 - TENSÕES ATUANTES NUM ELEMENTO INFINITESIMAL

Considerando o equilíbrio de forças no elemento nas direções  $x, y, z$  dado por

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz + X dx dy dz = 0 \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dx dy dz + Y dx dy dz = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dx dy dz + Z dx dy dz = 0 \quad (3.11)$$

Simplificando-se e rearranjando-se as equações (3.9) a (3.11) chega-se a

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = 0 \quad (3.14)$$

Estas equações mostram que as variações das componentes de tensão quando submetidas a forças não são mutuamente independentes.

Sabendo que a tensão considerando variação de temperatura  $\sigma_0$  tem a forma  $\sigma_0 = D\varepsilon - D\varepsilon_0$  (ver capítulo 4) o equilíbrio de forças no elemento nas direções  $x, y, z$  terá a forma agora como segue

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dx dy dz + X dx dy dz = 0 \quad (3.15)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dx dy dz + Y dx dy dz = 0 \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx dy dz + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dx dy dz + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} dx dy dz + Z dx dy dz = 0 \quad (3.17)$$

Simplificando as equações (3.14) a (3.16) obtém-se

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = 0 \quad (3.20)$$

Aplicando-se a equação (3.8), de maneira similar ao procedimento utilizado para o equilíbrio de tensões na equação (3.7) e considerando-se que são infinitesimais  $dx, dy$  e  $dz$  chega-se a

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (3.21)$$

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (3.22)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (3.23)$$

mostrando que as tensões tangenciais são simétricas. Assim o estado de tensão em  $P$  é definido por seis componentes de tensão independentes

$$\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (3.24)$$

Uma forma eficiente da representação da tensão  $[\sigma]$  é na forma vetorial

$$\{\sigma\} = \{\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx} \quad \tau_{xy}\}^T \quad (3.25)$$

### 3.1.3 Vetor de tensão em plano qualquer

A tensão em um plano qualquer de um ponto  $P$  em um sólido, cuja normal  $\vec{n}$  é exterior e o vetor de tensão  $\vec{\sigma}$  está representada na (fig. 3.5) [HECKE (1984), MALVERN (1969), LAI (1993)]

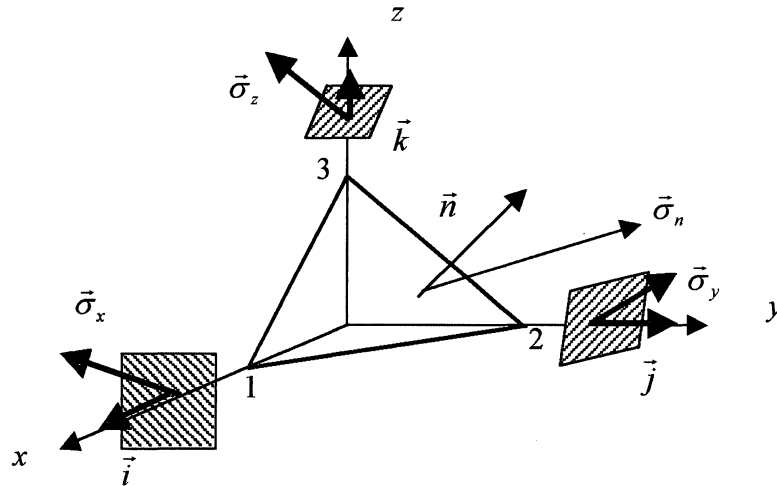


FIGURA 3.5 – VETOR DE TENSÃO EM UM PLANO QUALQUER

O vetor normal  $\vec{n}$  ao plano 1,2,3, dado por

$$\vec{n} = n_x \vec{i} + n_y \vec{j} + n_z \vec{k} \quad (3.26)$$

tem componentes denominadas cossenos diretores definidas por

$$n_x = \cos(\vec{i}, \vec{n}) \quad n_y = \cos(\vec{j}, \vec{n}) \quad n_z = \cos(\vec{k}, \vec{n}) \quad (3.27)$$

Seja  $dS$  a área da face normal a  $\vec{n}$ . Para as expressões das áreas nas outras faces deve-se considerar

$$dS_x = n_x dS \quad (3.28)$$

$$dS_y = n_y dS \quad (3.29)$$

$$dS_z = n_z dS \quad (3.30)$$

O vetor de tensão  $\vec{\sigma}_n$ , neste plano, pode ser decomposto em relação ao sistema cartesiano em

$$\vec{\sigma}_n = \vec{\sigma}_{nx} \vec{i} + \vec{\sigma}_{ny} \vec{j} + \vec{\sigma}_{nz} \vec{k} \quad (3.31)$$

Estando em equilíbrio e conhecidas  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$  atuando nas faces paralelas aos eixos coordenados  $x, y, z$  chega-se a

$$\begin{aligned}\sigma_{nx} &= \sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z \\ \sigma_{ny} &= \tau_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z \\ \sigma_{nz} &= \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z\end{aligned}\quad (3.32)$$

Considerando que as tensões  $\sigma_{nx}, \sigma_{ny}, \sigma_{nz}$  podem ser obtidas

$$\begin{aligned}\sigma_{nx} &= \sigma_n n_x \\ \sigma_{ny} &= \sigma_n n_y \\ \sigma_{nz} &= \sigma_n n_z\end{aligned}\quad (3.33)$$

Fazendo a igualdade entre as expressões (3.32) e (3.33) o resultado será

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= \sigma_n n_x \\ \tau_{yx} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{yz} n_z &= \sigma_n n_y \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + \sigma_{zz} n_z &= \sigma_n n_z\end{aligned}\quad (3.34)$$

O sistema de equações fica assim determinado

$$\begin{aligned}(\sigma_{xx} - \sigma_n) n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{xz} n_z &= 0 \\ \tau_{yx} n_x + (\sigma_{yy} - \sigma_n) n_y + \tau_{yz} n_z &= 0 \\ \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y + (\sigma_{zz} - \sigma_n) n_z &= 0\end{aligned}\quad (3.35)$$

O sistema de equações para ter solução deve ser

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_n & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_n & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_n \end{vmatrix} = 0\quad (3.36)$$

Para determinação do valor das tensões principais resolve-se a equação característica

$$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 + I_2 \sigma_n - I_3 = 0\quad (3.37)$$

onde os valores  $I_1, I_2, I_3$  são designados invariantes pois assumem os mesmos valores independentemente do sistema de eixos adotado

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}\quad (3.38)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xz} \\ \tau_{zx} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix}\quad (3.39)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{xy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (3.40)$$

As três raízes da equação (3.22) darão origem aos valores das três tensões principais  $\sigma_{n1}$ ,  $\sigma_{n2}$  e  $\sigma_{n3}$ . Da equação 3.22 tem-se os invariantes

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad (3.41)$$

$$I_2 = \sigma_1 \sigma_1 + \sigma_2 \sigma_2 + \sigma_3 \sigma_3 \quad (3.42)$$

$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad (3.43)$$

As tensões principais caracterizam o estado de tensões em um ponto. Em um estado bidimensional de tensões, estas tensões são chamadas de  $\sigma_1, \sigma_2$  e podem ser obtidas (TIMOSHENKO (1970))

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.44)$$

$$\sigma_2 = \sigma_{\min} = \frac{(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad (3.45)$$

### 3.1.4 Critérios de escoamento

Nas análises de tensões, deseja-se saber se o estado de tensões pode ou não levar o material a atingir alguma condição limite. Uma destas condições é a plastificação que pode ser considerada por alguns dos seguintes critérios: Critério de Mises ou Critério de Máxima Energia de Distorção e Critério de Tresca ou da Máxima Tensão de Cisalhamento sólido [MALVERN (1969), BRANCO (1985), LAI (1993), HECKE (1984)].

#### 3.1.4.1 Critério de Mises ou Critério de Máxima Energia de Distorção

Este critério segue a determinação da energia de distorção, ou seja, relacionada a mudanças na forma do material. Interessa a tensão equivalente dada por

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_1 + \sigma_2)^2} \quad (3.46)$$

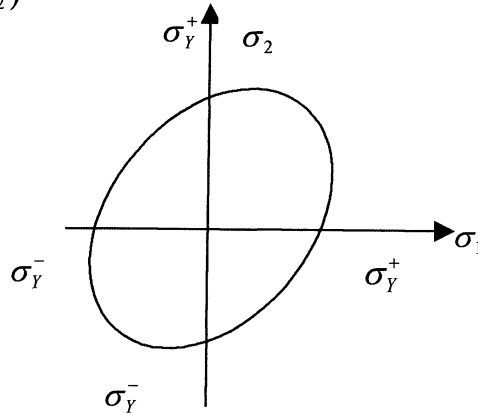


FIGURA 3.6 - ELIPSE DE MISES

O material permanece ao regime elástico quando

$$\sigma_{eq} \leq \sigma_Y \quad (3.47)$$

sendo:  $\sigma_Y$  tensão de escoamento do material

Verifica-se a representação na fig.3.6, onde o ponto de coordenadas  $\sigma_1, \sigma_2$  representa o estado de tensões no corpo. A região interna a elipse de Mises indica que o ponto do corpo encontra-se no regime elástico. O contorno indica plastificação e a região externa é inacessível.

### 3.1.4.2 Critério de Tresca ou da Máxima Tensão de Cisalhamento

Neste critério considera-se a hipótese do escoamento dos materiais dúcteis ser causado por deslizamento do material ao longo de superfícies oblíquas. Este deslizamento devido principalmente a tensões cisalhantes. Assim as tensões são pertencem ao regime elástico quando

$$\sigma_1 \sigma_2 > 0 \quad \rightarrow \quad |\sigma_1| \leq \sigma_Y \quad e \quad |\sigma_2| \leq \sigma_Y \quad (3.48)$$

$$\sigma_1 \sigma_2 < 0 \quad \rightarrow \quad |\sigma_1 - \sigma_2| < \sigma_Y \quad (3.49)$$

Graficamente a representação deste critério aparece na figura 3.7 A região interna indica o regime elástico. O contorno indica plastificação e a região externa é inacessível

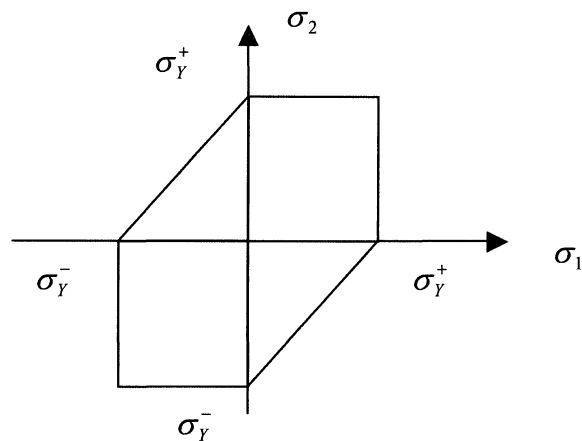


FIGURA 3.7 - HEXÁGONO DE TRESCA

## 3.2 DEFORMAÇÃO

### 3.2.1 Definições

Analisando um ponto  $M$  inicialmente em  $x, y, z$  que passa a ser  $M'$  de coordenadas  $x', y', z'$ . Sendo o vetor [HECKE (1984)]

$$\vec{u} = (x' - x)\vec{i} + (y' - y)\vec{j} + (z' - z)\vec{k} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k} \quad (3.50)$$

é denominado de vetor deslocamento da partícula e  $u, v, w$  são as projeções nos eixos  $x$  coordenados.

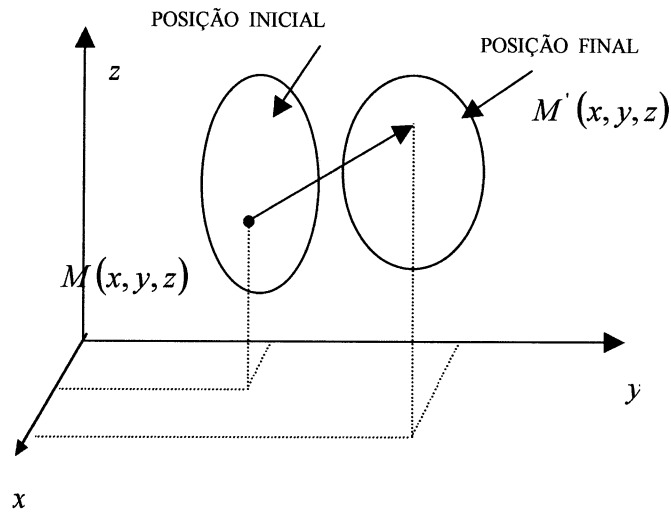


FIGURA 3.8 - VETOR DESLOCAMENTO DE UMA PARTÍCULA

Sendo a posição de um ponto alterada diz-se que houve deformação. Os deslocamentos dos pontos em um meio contínuo podem ser decompostos em: um movimento de um corpo rígido e uma deformação.

### 3.2.2 Componentes infinitesimais

Considerando a fig.3.8 e supondo-se que os pontos sofrem deslocamentos, estes são funções da forma

$$u_x = u_x(x, y, z) \quad u_y = u_y(x, y, z) \quad u_z = u_z(x, y, z) \quad (3.51)$$

Considerando-se um paralelepípedo infinitesimal fig. 3.11 de arestas com comprimentos  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Sabendo-se que os deslocamentos variam ponto a ponto e que o deslocamento do ponto  $M$  seja

$$d_M = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \quad (3.52)$$

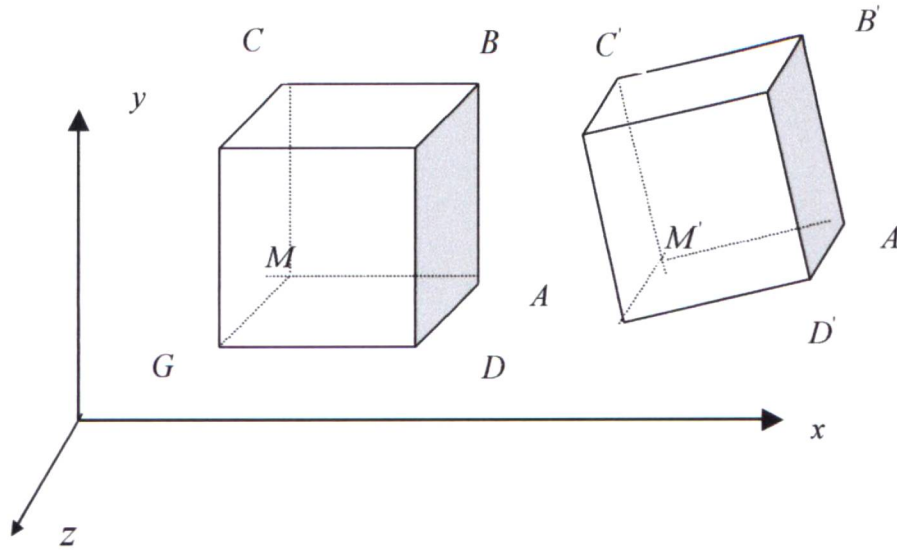


FIGURA 3.9 - PARALELEPÍPEDO INFINITESIMAL NO ESTADO FINAL E INICIAL

Assim as componentes do vetor deslocamento, em um dos pontos de coordenadas  $x + dx, y + dy, z + dz$  ficam determinadas por

$$u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz \quad (3.53)$$

$$u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx + \frac{\partial u_y}{\partial y} dy + \frac{\partial u_y}{\partial z} dz \quad (3.54)$$

$$u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx + \frac{\partial u_z}{\partial y} dy + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz \quad (3.55)$$

As componentes longitudinais da deformação normal nas direções coordenadas são dadas por

$$\varepsilon_x = \frac{\overline{M'A'} - \overline{MA}}{\overline{MA}} = \frac{\overline{C'B'} - \overline{CB}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{G'D'} - \overline{GD}}{\overline{GD}} = \frac{\overline{F'E'} - \overline{FE}}{\overline{FE}} \quad (3.56)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\overline{M'C'} - \overline{MC}}{\overline{MC}} = \frac{\overline{A'B'} - \overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{D'E'} - \overline{DE}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{G'F'} - \overline{GF}}{\overline{GF}} \quad (3.57)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\overline{M'G'} - \overline{MG}}{\overline{MG}} = \frac{\overline{C'F'} - \overline{CF}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{B'E'} - \overline{BE}}{\overline{BE}} = \frac{\overline{A'D'} - \overline{AD}}{\overline{AD}} \quad (3.58)$$

que são os encurtamentos ou alongamentos ao longo dos eixos coordenados.

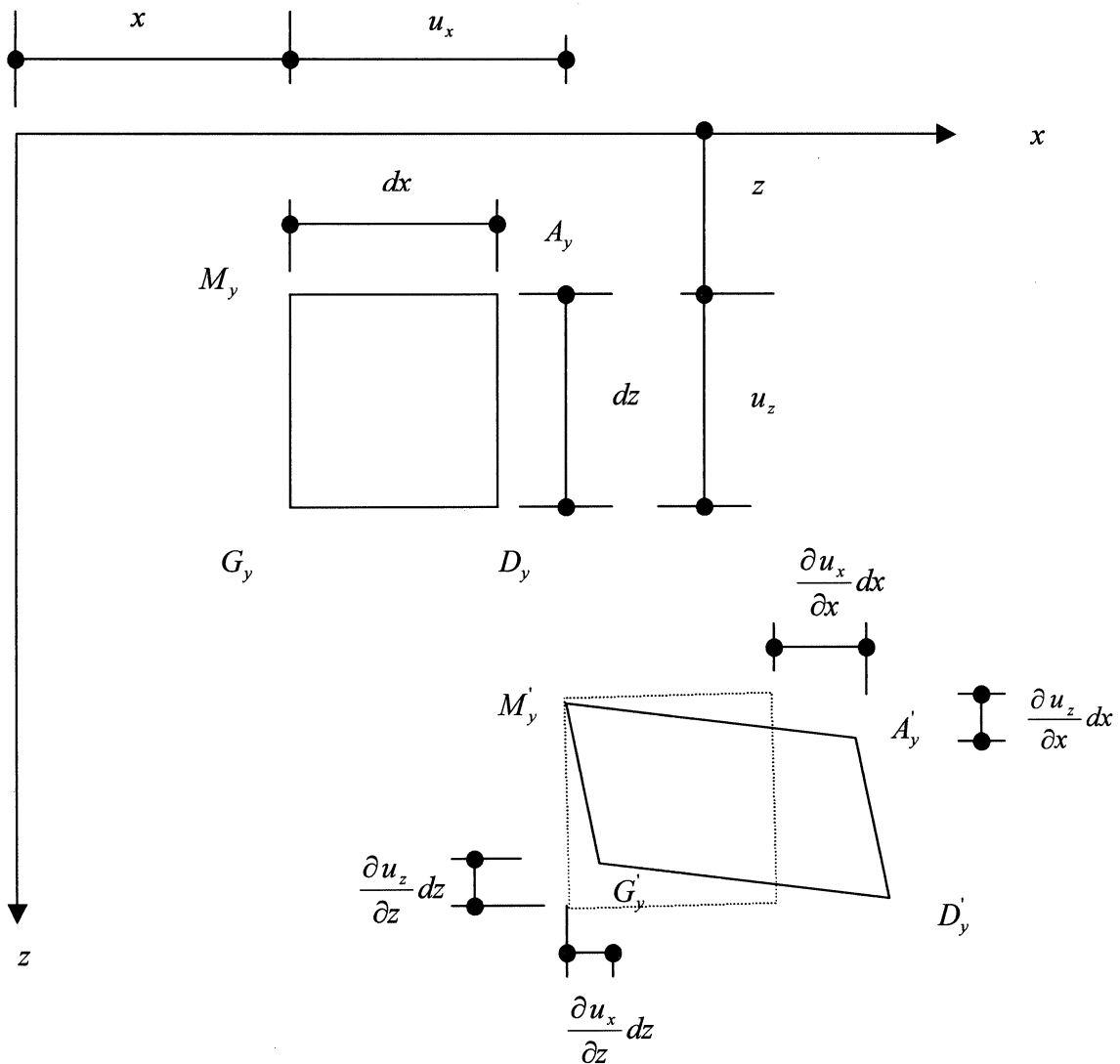


FIGURA 3.10 - PROJEÇÃO DO PLANO  $0xz$

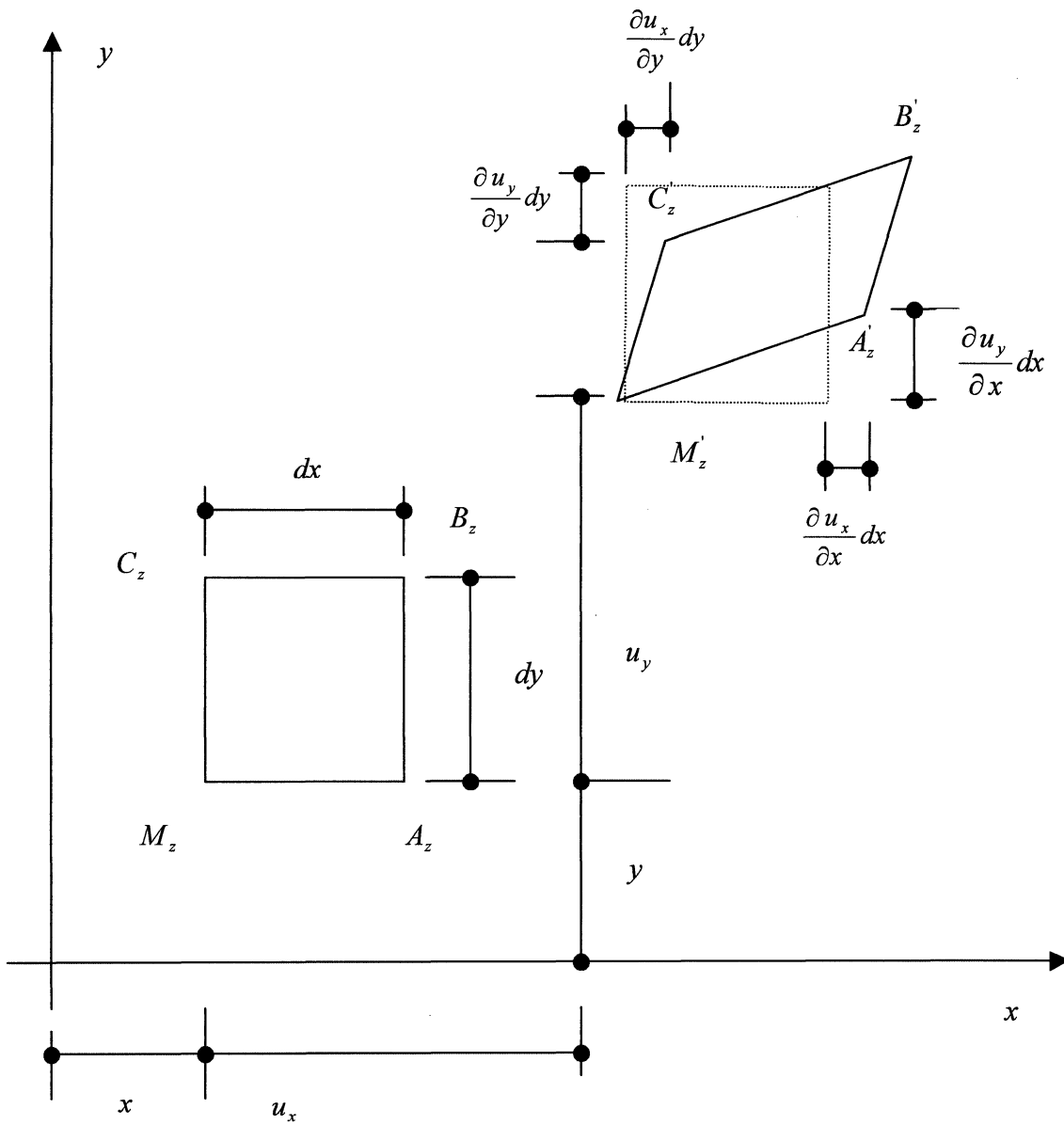


FIGURA 3.11 - PROJEÇÃO DO PLANO  $0xy$

Para o estado indeformado as arestas são

$$\overline{MA} = \overline{CB} = \overline{GD} = \overline{FE} = dx \quad (3.59)$$

$$\overline{MC} = \overline{AB} = \overline{DE} = \overline{GF} = dy \quad (3.60)$$

$$\overline{MG} = \overline{AD} = \overline{BE} = \overline{CF} = dz \quad (3.61)$$

O segmento  $\overline{M'A'}$  com as projeções

$$\text{no eixo } x \text{ de } dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} + dx \quad (3.62)$$

$$\text{no eixo } y \text{ de } \frac{\partial u_y}{\partial x} + dx \quad (3.63)$$

$$\text{no eixo } z \text{ de } \frac{\partial u_z}{\partial x} + dx \quad (3.64)$$

Definindo-se linearidade em função do grau das derivadas, considera-se para o caso de pequenos deslocamentos e deformações infinitesimais chega-se a

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (3.65)$$

As componentes de deformação de corte  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ , que são as distorções dos ângulos retos formados pelas arestas. Considerando-se deformações infinitesimais tem-se

$$\gamma_{xy} \cong \text{sen } \gamma_{xy} = \text{sen} (90^\circ - \angle A'M'C') \quad (3.66)$$

portanto

$$\gamma_{xy} = \cos \gamma_{xy} (\angle A'M'C') \quad (3.67)$$

Para pequenos deslocamentos e deformações infinitesimais os termos não lineares são desprezados e

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (3.68)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \quad (3.69)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \quad (3.70)$$

Assim, verifica-se que as expressões são simétricas e são definidas por

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \quad (3.71)$$

As componentes de deformação na forma matricial são dadas por

$$[\boldsymbol{\varepsilon}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \lambda_{xy} & \lambda_{xz} \\ \lambda_{yx} & \varepsilon_{yy} & \lambda_{yz} \\ \lambda_{zx} & \lambda_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

Na forma vetorial

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\}^T = \{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \lambda_{xy} \quad \lambda_{yz} \quad \lambda_{xz}\}^T \quad (3.73)$$

As relações deformação-deslocamentos assumem a forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \lambda_{xy} \\ \lambda_{yz} \\ \lambda_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (3.74)$$

## 4 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Nos problemas de engenharia em que a solução exata se torna difícil a utilização de um método numérico de aproximação se faz necessário. Um dos métodos mais utilizados é o Método dos Elementos Finitos (MEF). O MEF pode ser utilizado nos problemas de engenharia que envolve a transferência de calor, análise de tensão, eletromagnetismo e fluxo de fluido entre outros.

### 4.1 DEFINIÇÕES

O Método dos Elementos Finitos é um procedimento numérico para solucionar vários problemas na engenharia. Neste método o domínio é dividido (discretizado) em elementos finitos.

O meio considerado é separado por regiões ou elementos ligados entre si por pontos nodais. Os graus de liberdade de cada ponto nodal para problemas estruturais são, por exemplo, os deslocamentos. Em problemas térmicos, os graus de liberdade são as temperaturas a serem determinadas.

Na fig. 4.1 pode-se observar um corpo discretizado em elementos finitos segundo conceito de alguns pesquisadores como BRANCO (1985), ZIENKIEWICZ (1971), BATHE (1996), CRAIG (1981).

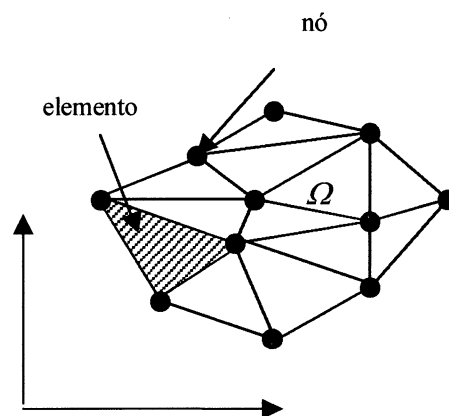


FIGURA 4.1 - DISCRETIZAÇÃO DE UM DOMÍNIO  $\Omega$  EM ELEMENTOS FINITOS

O objetivo do MEF é, a partir de uma interpolação proposta, encontrar uma solução aproximada que solucione o problema proposto. Na análise do problema proposto pode-se identificar, para o elemento  $i$  um funcional associado à energia  $\Pi_i$ , cuja soma com outros elementos formam um funcional  $\Pi$  para todo o domínio  $\Omega$  [BRANCO (1985), ZIENKIEWICZ (1977), ASSAN (1999)]

$$\Pi(v(x, y, z)) = \sum_{i=1}^n \Pi_i(v(x, y, z)) \quad i = 1, n \quad (4.1)$$

sendo:  $\Pi$  funcional energia

$n$  número de elementos

$(v(x, y, z))$  função incógnita associada ao fenômeno estudado

Para obter a solução, este funcional deverá ser minimizado. Visando resolver este problema de uma forma aproximada, propõe-se uma interpolação da forma

$$v(x, y, z) = \sum_{j=1}^m a_j \phi_j(x, y, z) \quad (4.2)$$

onde:  $a_j$  parâmetros nodais (graus de liberdade, deslocamentos, forças internas)

$\phi_j(x, y, z)$  funções de interpolação ou de forma proposto

A representação de um funcional do domínio total de um corpo fica sendo [BRANCO (1985), ASSAN (1999)]

$$\Pi(a_j) = \sum_{i=1}^n \Pi_i(a_j) \quad (4.3)$$

onde:  $i$  variável que percorre " $n$ " elementos

$j$  variável que percorre " $m$ " nós

A condição de estacionariedade ou de mínimo (ASSAN (1999)) dará origem a um sistema de equações lineares como

$$\delta \Pi(a_j) = \sum_{i=1}^n \delta \Pi_i(a_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Pi_i(a_j)}{\partial a_j} = 0 \quad (4.4)$$

Resolvendo estas equações tem-se os valores dos parâmetros nodais  $a_j$  (deslocamentos, forças internas, temperaturas).

## 4.2 O MEF APLICADO AO PROBLEMA PLANO DE DEFORMAÇÃO

### 4.2.1 Revisão das equações da Teoria da Elasticidade

No caso particular do problema plano de deformação [TIMOSHENKO (1970)], a função incógnita  $v(x, y, z)$  é de natureza vetorial e contém duas componentes que são identificadas como as componentes do deslocamento  $u_x$  e  $u_y$ , segundo as direções  $x$  e  $y$ , ou seja [HECKE (1984)]

$$v(x, y, z) = \{u\} = [u_x \quad u_y]^T \quad (4.5)$$

A deformação decorrente dos deslocamentos é da forma

$$\{\varepsilon\} = [\mathcal{D}]\{u\} \quad (4.6)$$

onde

$$\mathcal{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Ou as deformações são representadas por

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \quad (4.9)$$

Para determinar o valor da tensão em relação a deformação considera-se, para um material elástico linear, a relação constitutiva [BRANCO (1985), ZIENKIEWICZ (1971), ASSAN (1999), CRAIG (1981)]

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (4.10)$$

O valor  $\sigma$  representa a tensão, a matriz  $D$  contém os parâmetros elásticos e o vetor das deformações é representado por  $\varepsilon$ , como segue

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.11)$$

$$\text{onde: } D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

A deformação  $\varepsilon$  variando com o temperatura pode ser encontrada na resolução das matrizes

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \{\sigma\} + \{\varepsilon_0\} \quad (4.12)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

$$\text{onde: } G = \frac{1-\nu}{2}$$

A deformação inicial devido a mudança de temperatura é dada por

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \Delta T \\ \alpha \Delta T \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.14)$$

onde o valor de  $\alpha$  é o coeficiente de expansão térmica,  $\Delta T$  é a mudança de temperatura. Para encontrar a tensão no caso em que o material tenha deformação inicial devido a temperatura tem-se como equações constitutivas

$$\{\sigma_0\} = [D] \{(\varepsilon - \varepsilon_0)\} \quad (4.15)$$

onde  $\varepsilon_0$  são as deformações iniciais,  $D$  é matriz com o parâmetros elásticos. O cálculo da tensão no estado de plano de deformações na forma matricial fica

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{x0} \\ \sigma_{y0} \\ \sigma_{z0} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \left( \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x0} \\ \varepsilon_{y0} \\ \gamma_{xy0} \end{Bmatrix} \right) \quad (4.16)$$

#### 4.2.2 Princípio dos Trabalhos Virtuais

No caso particular do problema plano de deformações, o funcional energia  $\Pi(v(x, y, z))$  é a energia potencial total que é dada pela soma da energia interna de deformação  $U_{int}$  e da energia externa devido às cargas aplicadas  $U_{ext}$ . Para um material elástico fica [ZIENKIEWICZ (1977), HECKE (1984)]

$$U_{int} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} [\sigma]^T \{\varepsilon\}^i d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \gamma_{xy}) d\Omega \quad (4.17)$$

$$U_{ext} = - \int_{\Omega} [u]^T \{b\}^i d\Omega - \int_{\partial\Omega_{\sigma}} [u]^T \{p\}^i d\partial\Omega \quad (4.18)$$

onde:  $\partial\Omega_{\sigma}$  região do contorno  $\Omega$  onde as forças estão aplicadas

Portanto, a energia potencial total de cada elemento pode ser considerada como sendo

$$\Pi_i = U_{int} + U_{ext} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{\varepsilon\}^{iT} \{\sigma\}^i d\Omega - \int_{\Omega} \{u\}^{iT} \{b\}^i d\Omega - \int_{\partial\Omega_{\sigma}} \{u\}^{iT} \{p\}^i d\partial\Omega \quad (4.19)$$

A condição de estacionariedade, dada pela expressão (4.4), reflete neste caso, o Princípio dos Trabalhos Virtuais

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^{iT} \{\sigma\}^i d\Omega - \int_{\Omega} \{\delta u\}^{iT} \{b\}^i d\Omega - \int_{\partial\Omega_{\sigma}} \{\delta u\}^{iT} \{p\}^i d\partial\Omega = 0 \quad (4.20)$$

ou

$$\int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^{iT} \{\sigma\}^i d\Omega = \int_{\Omega} \{\delta u\}^{iT} \{b\}^i d\Omega + \int_{\partial\Omega_{\sigma}} \{\delta u\}^{iT} \{p\}^i d\partial\Omega \quad (4.21)$$

#### 4.2.3 Expressões do MEF para o problema plano de deformações

No MEF, as componentes do campo de deslocamento, dadas pela expressão (4.5) são aproximadas usando-se uma interpolação da forma proposta na relação (4.2), ou seja [HECKE (1984)]

$$u_x(x, y) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x, y) U_x^j \quad (4.22)$$

$$u_y(x, y) = \sum_{j=1}^n \phi_j(x, y) U_y^j \quad (4.23)$$

onde  $U_x^j$  e  $U_y^j$  são os deslocamentos do nó  $j$  nas direções de  $x$  e  $y$

Matricialmente, pode-se escrever, para o elemento  $i$

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x(x, y) \\ u_y(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1(x, y) & 0 & \dots & \phi_n(x, y) & 0 \\ 0 & \phi_1(x, y) & \dots & 0 & \phi_n(x, y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_x^1 \\ U_y^1 \\ \vdots \\ U_x^n \\ U_y^n \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

$$v(x, y, z) = \{u\} = [N]^i \{U\}^i \quad (4.25)$$

onde:  $[N]^i$  é a matriz das funções de forma para o elemento  $i$

$\{U\}^i$  é o vetor que coleciona os deslocamentos nodais do elemento  $i$

As componentes das deformações são, utilizando-se a expressão (4.6) e (4.25)

$$\{\varepsilon\} = \mathcal{D} [N] \{U\} \quad (4.26)$$

e chamando-se

$$\{B\} = \mathcal{D} [N]^i \quad (4.27)$$

obtem-se

$$\{\varepsilon\} = [B]^i [U]^i \quad (4.28)$$

Substituindo-se a expressão (4.28) em (4.21), para o elemento  $i$ , fica

$$\int_{\Omega} \{\delta U\}^{iT} \{B\}^{iT} [D] \{B\} \{U\}^i d\Omega = \int_{\Omega} \{\delta U\}^{iT} \{N\}^T \{b\}^i d\Omega + \int_{\partial\Omega_s} \{\delta U\}^{iT} \{N\}^T \{p\}^i d\partial\Omega \quad (4.29)$$

ou ainda, considerando que  $\delta U$  é um deslocamento virtual tem-se

$$[k_{elem}]^i \{U\}^i = \{f\}^i \quad (4.30)$$

onde a matriz de rigidez para o elemento  $i$  é da seguinte forma

$$[k_{elem}]^i = \int_{\Omega} \{B\}^{iT} [D] \{B\} d\Omega \quad (4.31)$$

e o vetor das cargas nodais para o elemento  $i$  fica determinado por

$$\{f_{elem}\}^i = \int_{\Omega} [N]^{iT} \{b\}^i d\Omega + \int_{\partial\Omega_{\sigma}} [N]^{iT} \{p\}^i d\partial\Omega \quad (4.32)$$

A matriz de rigidez para todos os elementos será

$$[K_G] = \sum_{i=1}^n [k_{elem}] \quad (4.33)$$

e o vetor das cargas nodais para todos os elementos fica determinado por

$$[F_G] = \sum_{i=1}^n [f_{elem}] \quad (4.34)$$

Portanto, o sistema de equações para cada elemento  $i$  será determinado por

$$[k_{elem}] \{U\} = \{f_{elem}\} \quad (4.35)$$

e a representação global do sistema de equações ficará

$$[K_G] \{U\} = \{F_G\} \quad (4.36)$$

#### 4.2.4 Consideração da variação de temperatura (deformação inicial)

A energia de deformação já definida com variação de temperatura pode ser encontrada na seguinte expressão

$$U_{int} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \{(\varepsilon - \varepsilon_0)\}^{iT} \{\sigma_0\}^i d\Omega \quad (4.37)$$

Com a variação da deformação  $\varepsilon$ , a energia total varia, mas a variação da deformação inicial será nula, portanto

$$\delta U_{int} = \int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma_0\} d\Omega \quad (4.38)$$

$$\delta U_{int} = \int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^{iT} [D]^i \{\varepsilon\}^i d\Omega - \int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^{iT} [D]^i \{\varepsilon_0\}^i d\Omega \quad (4.39)$$

ou

$$\delta U_{int} = \int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^{iT} \{\sigma\}^i d\Omega - \int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^{iT} \{\sigma_0\}^i d\Omega \quad (4.40)$$

Estabelecendo a igualdade do trabalho externo com o interno chega-se ao seguinte teremos o funcional

$$\int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^{iT} \{\sigma\}^i d\Omega = \int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^{iT} \{\sigma_0\}^i d\Omega + \int_{\Omega} \{\delta u\}^{iT} \{b\}^i d\Omega + \int_{\partial\Omega_{\sigma}} \{\delta u\}^{iT} \{p\}^i d\partial\Omega \quad (4.41)$$

Substituindo-se as tensões iniciais dadas pela equação (4.15) tem-se para a equação (4.41) a seguinte forma

$$\int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^{iT} \{\sigma\}^i d\Omega = \int_{\Omega} \{\delta \varepsilon\}^{iT} [D] \{\varepsilon_0\}^i d\Omega + \int_{\Omega} \{\delta u\}^{iT} \{b\}^i d\Omega + \int_{\partial\Omega_{\sigma}} \{\delta u\}^{iT} \{p\}^i d\partial\Omega \quad (4.42)$$

Utilizando-se a interpolação proposta em (4.25) a expressão (4.28) em (4.42) obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \{\delta U\}^{iT} \{B\}^{iT} [D] \{B\} \{U\}^i d\Omega &= \int_{\Omega} \{\delta U\}^{iT} \{B\}^{iT} [D] \{\varepsilon_0\}^i d\Omega + \int_{\Omega} \{\delta U\}^{iT} \{N\}^T \{b\}^i d\Omega \\ + \int_{\partial\Omega_{\sigma}} \{\delta U\}^{iT} \{N\}^T \{p\}^i d\partial\Omega & \end{aligned} \quad (4.43)$$

Assim a matriz de rigidez para o elemento  $i$  considerando a deformação inicial  $\varepsilon_0$ , fica representada como a equação (4.35) e a matriz de rigidez para todos os elementos também será representada pela equação (4.36).

O vetor das cargas nodais, considerando as deformações iniciais, para o elemento  $i$  é definido por

$$\{f_{elem}\}^i = \int_{\Omega} \{B\}^{iT} [D] \{\varepsilon_0\}^i d\Omega + \int_{\Omega} [N]^T \{b\}^i d\Omega + \int_{\partial\Omega_{\sigma}} [N]^T \{p\}^i d\partial\Omega \quad (4.44)$$

e para todos os elementos, o vetor das cargas nodais assumirá a forma da equação (4.34).

### 4.3 MEF E TEMPERATURA

Quando o problema envolve encontrar a temperatura, cuja distribuição é função do espaço e tempo a função aproximadora assume a forma , segundo HÜBNER et al.(1995) e KRÜGER (2001) da seguinte forma

$$T = \sum_i^n [N]^i \{T\}^i \quad (4.45)$$

sendo:  $N$  matriz das funções de forma

$T$  temperatura para cada nó

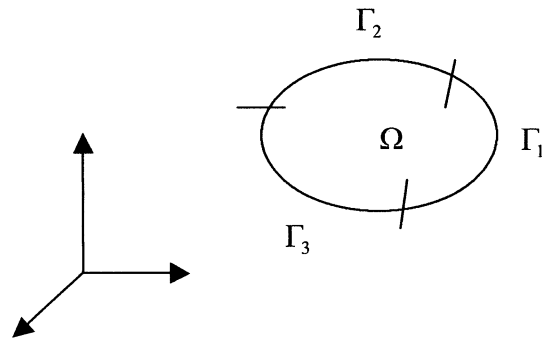
A equação de condução de calor está representada por

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.46)$$

Pelo teorema de Gauss os fluxos de calor no contorno [HÜBNER et al.(1995), KRÜGER (2001)] se apresentam como

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} [N]^i d\Omega - \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial N}{\partial x} \quad \frac{\partial N}{\partial y} \quad \frac{\partial N}{\partial z} \right]^i \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \int_{\Omega} Q [N]^i d\Omega - \int_{\Gamma} (q n) [N]^i d\Gamma \quad (4.47)$$

Quando no contorno  $\Gamma$  as condições forem conforme fig. 4.2



$\Gamma_1$  = temperatura prescrita     $\Gamma_2$  = fluxo de calor prescrito     $\Gamma_3$  = convecção prescrita

FIGURA 4.2 - CONDIÇÕES DE CONTORNO DE UM DOMÍNIO  $\Omega$ ,

A equação de Fourier em meio anisotrópico fica

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = -[k][A]\{T\} \quad (4.48)$$

sendo:  $k$  condutividade térmica

$q_x, q_y, q_z$  gradientes de temperatura

Para problemas térmicos lineares transientes

$$[C] \left\{ \frac{dT}{dt} \right\} + [[K] + [K_c]] \{T\} = \{R_Q\} + \{R_q\} + \{R_c\} \quad (4.49)$$

Sendo as matrizes :  $[C]$  capacitância,  $[K]$  condutividade,  $[K_c]$  convecção,  $\{R_T\}$  temperatura nodal prescrita . Os vetores :  $\{R_Q\}$  calor de geração,  $\{R_c\}$  convecção,  $\{R_q\}$  fluxo de calor. O funcional tem a forma

$$\int_{\Omega} \rho c [N]^T [N] \left\{ \frac{dT}{dt} \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \{B\}^i [k] \{B\}^{iT} \{T\}^i d\Omega + \int_{\Gamma_3} h [N]^i [N]^{iT} \{T\}^i d\Gamma =$$

$$- \int_{\Omega} Q [N]^T d\Omega - \int_{\Gamma_2} q_s [N] d\Gamma + \int_{\Gamma_3} h_s \{T\}^i [N] d\Gamma \quad (4.50)$$

## 5 METODOLOGIA

A proposta desta metodologia é a análise das estruturas submetidas a estados tenso-térmicos levando-se em consideração o processo construtivo. Através das análises realizadas, é possível avaliar se em decorrência do campo de temperatura podem ocorrer tensões além das permissíveis que venham a acarretar fissuras comprometendo a estrutura. A metodologia desenvolvida para análise tenso-térmica serve para qualquer estrutura executada por camadas.

A análise da transferência de calor depende de vários fatores que podem influenciar o resultado na análise de tensões. Alguns destes fatores são:

- propriedades do material;
- temperatura de lançamento do material;
- tempo para lançamento da próxima camada;
- altura adotada de cada camada;
- geometria da estrutura em estudo;
- condições ambientais.

Os dados de temperatura diária levantados na obra podem servir de comparação para a metodologia térmica. Não sendo possível obter valores das propriedades dos materiais para a análise, adotam-se valores de bibliografia ou consideram-se valores de materiais semelhantes aos utilizados. Neste trabalho os valores adotados, em sua maioria, se referem ao trabalho de KRÜGER (2001).

Nas estruturas executadas por camadas através da técnica adotada considera à princípio a estrutura discretizada em sua totalidade, já no início da análise. Trabalha-se camada por camada ativando-as ou desativando-as, somente quando solicitada levando-se em consideração as camadas anteriores e visando estimar o valor das temperaturas de cada camada.

Ao término da análise térmica os valores devem ser armazenados para o cálculo dos deslocamentos e assim chegar ao resultado das tensões. A análise não é acoplada, ou seja, primeiro chega-se aos valores das temperaturas para só então calcular as tensões. A forma de cálculo de tensão assemelha-se aos passos dos cálculos da temperatura mudando: as propriedades, condições de contorno, tipo de elemento, etc. Tudo isso é feito automaticamente, de acordo com a rotina implementada.

## 5.1 UTILIZAÇÃO DO ANSYS

O software para a análise tenso-térmica numérica adotada foi o ANSYS®/MULTIPHYSICS (1994) - VERSÃO 5.3. A seqüência da rotina de análise obedeceu a comandos na linguagem APDL (Ansys Parametric Design Language).

A técnica utilizada que permite tratar o processo construtivo é denominada Birth & Death onde os elementos de uma malha são ativados ou desativados por comandos específicos do ANSYS. Desativando (EKILL) os elementos da malha não significa que desapareçam da representação gráfica. Na desativação do elemento, aplica-se um redutor na matriz (condutividade, rigidez) e anulam-se os carregamentos no elemento. A ativação é realizada através do comando Birth que traz novamente os valores de carregamentos e propriedades na matriz (condutividade, rigidez) do elemento.

A análise térmica é feita com a temperatura nodal definida como carga na camada em um intervalo de tempo. Na análise tenso-térmica a seqüência resumidamente dos passos a serem seguidas num programa, é a que segue (fig.5.4):

- 1 - Definição da estrutura (geometria):
  - Tipo de análise -Térmica e estrutural;
  - Tipo do elemento - linear 4 nós ou 8 nós;
  - Propriedade dos materiais; Módulo de elasticidade; Massa específica; Coeficiente de dilatação térmica; Condutividade térmica;
  - Definição da estrutura (definição dos pontos e áreas) e discretização em elementos finitos;
- 2 - Início da análise:
  - Tipo de análise - Transiente;
  - Métodos usados: Método de Newton-Raphson Completo - (Full); Método de Solução Frontal (Frontal Solver);
- 3 - Dados de entrada:
  - Temperatura ambiente;
  - Temperatura inicial;
  - Tempo de lançamento da camada;

- Intervalo de tempo entre camadas;
- Tempo de lançamento da próxima camada;
- Elevação adiabática-curva de geração de calor;
- 4 - Selecionar e desativar todos os elementos;
- 5 - Definir:
  - Número de camadas;
  - Passos de carga;
- 6 - Início da análise transiente:
  - Ativar a camada executada;
  - Selecionar a área correspondente à camada;
  - Selecionar todos os elementos da camada;
  - Ativar os elementos selecionados - EALIVE;
- 7 - Definir o tempo:
  - Definir o tempo de lançamento da camada - tempo de início da análise transiente;
  - Definir o intervalo de tempo entre as camadas e o incremento de tempo das análises;
- 10 - Aplicação das condições de contorno:
  - Temperatura inicial da camada ativada;
  - Restringir os graus de liberdade dos nós inativos;
  - Forças de superfície - fluxo de calor;
  - Forças de superfície - convecção (coeficiente de filme e temperatura ambiente);
  - Forças de corpo - calor de geração;
- 11 - Limpar cargas nodais iniciais e condições de contorno;
- 12 - Reaplicar condições de contorno da camada a ser executada;
- 13 - Resolver análise térmica da camada selecionada para todos os passos de carga;
- 14 - Final da análise transiente;
- 15 - Listar e plotar resultados;
- 16 - Repetir os passos 6 a 15 para o número de camada da estrutura;
- 17 - Retorno ao pré-processador e alterar:
  - O tipo de elemento - térmico para estrutural (o programa altera automaticamente o

tipo de elemento térmico para o compatível elemento estrutural usando comando ETCHG do ANSYS);

-Propriedades dos materiais: módulo de elasticidade; coeficiente de Poisson; Coeficiente de dilatação térmica;

-Métodos usados: Método de Newton-Raphson Completo - (Full); Método de Solução Frontal (Frontal Solver);

18 - Selecionar e desativar todos os elementos;

19 - Definir:

-Número de camadas;

-Passos de carga;

20 - Início da análise transiente:

-Ativar a camada executada:

-Selecionar a área correspondente à camada;

-Selecionar todos os elementos da camada;

-Ativar os elementos selecionados - EALIVE;

21- Definir o tempo:

-Definir o tempo de lançamento da camada; intervalo de tempo entre as camadas e o incremento de tempo das análises;

22 - Aplicação das condições de contorno:

-Restringir os graus de liberdade dos nós a serem engastados;

23 - Limpar cargas nodais iniciais e condições de contorno;

24 - Reaplicar condições de contorno da camada;

25 - Resolver análise de tensão da camada para todos os passos de carga;

26 - Final da análise transiente de tensões;

27 - Listar e plotar resultados;

28 - Repetir os passos 20 a 28 para o número de camadas da estrutura.

A seqüência da análise tenso-térmica está representada nas figuras 5.1, 5.2 e 5.3 para o caso hipotético de uma estrutura executada em três camadas.

Inicialmente ativando-se as camadas na medida em que são solicitadas (fig. 5.1) permanecendo desativadas as camadas não solicitadas tanto para o cálculo da temperatura como

para o de tensões. Assim, o processo se inicia pela ativação da primeira camada e desativação das demais.

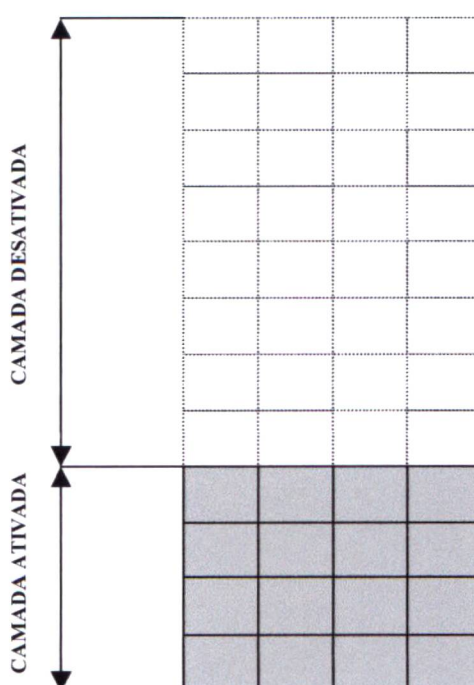


FIGURA 5.1 - EXECUÇÃO DA 1ª CAMADA

Em seguida, ativando-se a segunda camada (fig. 5.2), permanecendo desativadas as camadas não solicitadas tanto para o cálculo da temperatura como para o de tensões. No cálculo de temperatura e tensões os seus valores da primeira camada já calculados estão armazenados e o cálculo da segunda camada pode ser realizado sem prejuízo.

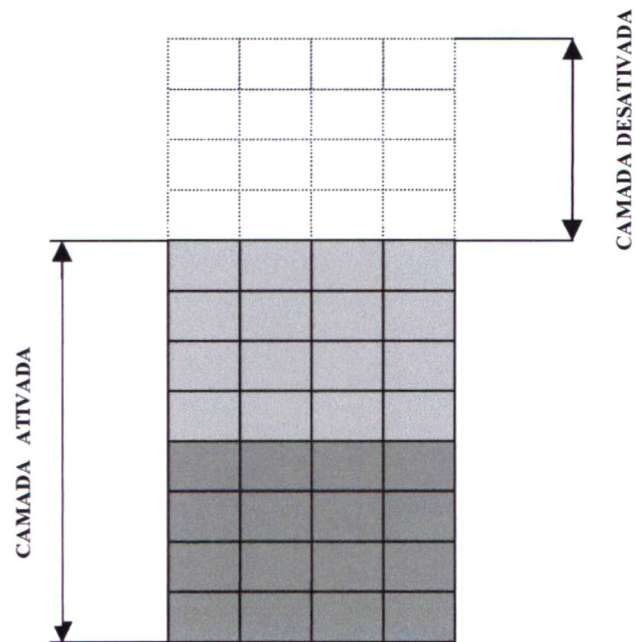


FIGURA 5.2 - EXECUÇÃO DA 2ª CAMADA

Por fim, ativando-se a última camada (fig. 5.3). No cálculo de temperatura e tensões os seus valores da primeira e segunda camada já calculados estão armazenados e o cálculo da terceira camada pode ser realizado.



FIGURA 5.3 - EXECUÇÃO DA 3ª CAMADA

A fig.5.4 ilustra, esquematicamente, a seqüência dada na página 38.

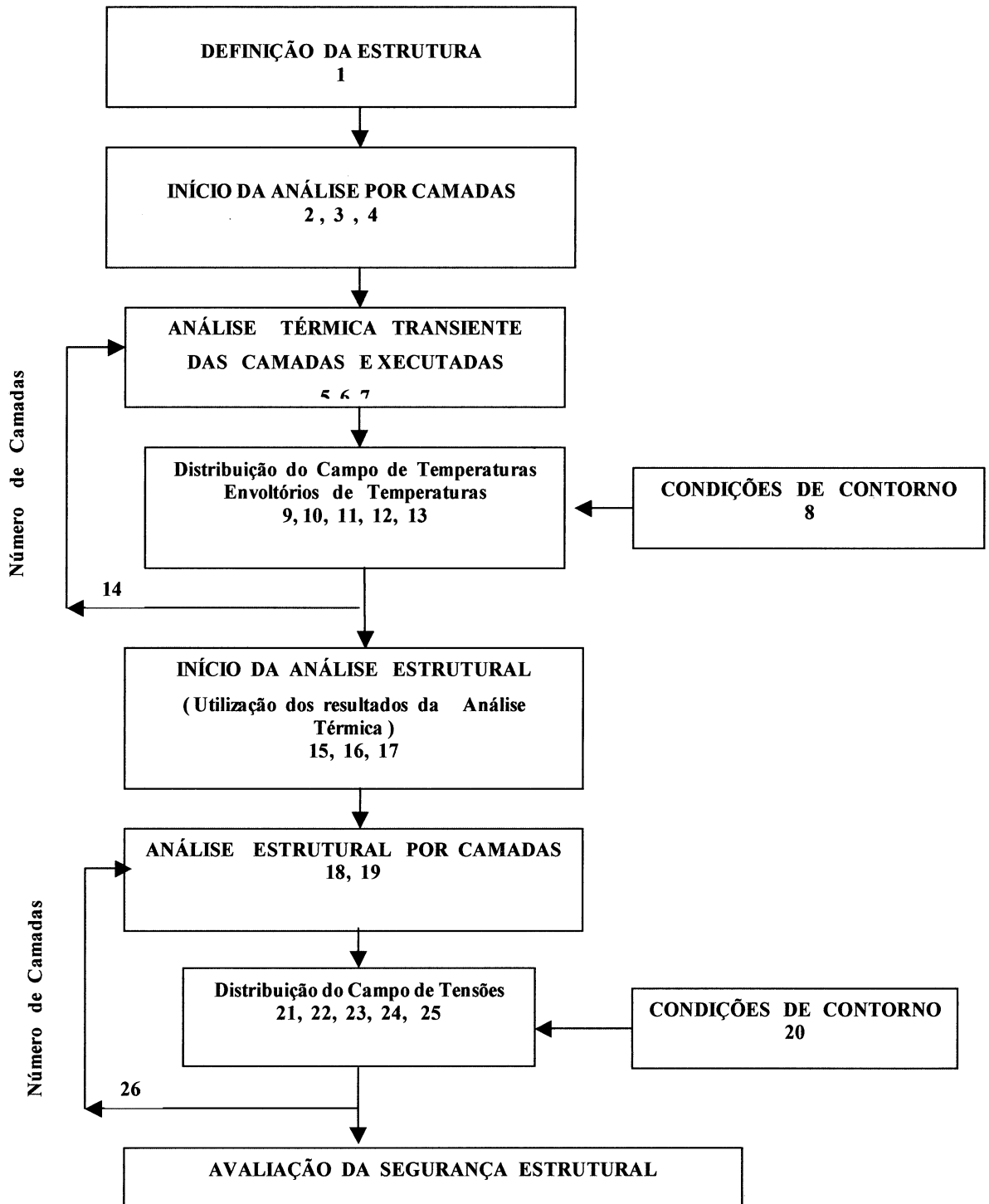


FIGURA 5.4 – METODOLOGIA PARA ANÁLISE DE TENSO-TÉRMICA

## 5.2 APLICAÇÕES

Para a validação da metodologia foram analisados modelos hipotéticos como uma viga bi-engastada, blocos superpostos e uma concreto para apoio de ponte rolante da casa de força da Usina Hidrelétrica serra Mesa. Foram considerados problemas de origem térmica para usar o resultado no cálculo de tensões. Nenhum dos casos levou em consideração a deformação lenta do material nem a variação do módulo de elasticidade ao longo do tempo. Não foi considerado o peso próprio, uma vez que o objetivo deste trabalho é avaliar e compreender os efeitos térmicos em campo de tensões.

### 5.2.1 Viga Bi-Engastada

Para validar a metodologia e comparar o resultado com a solução analítica foi idealizada uma viga duas camadas com dimensões como mostra a fig 5.5 . O exemplo procura comparar a análise em camadas com um caso simples de problema térmico.

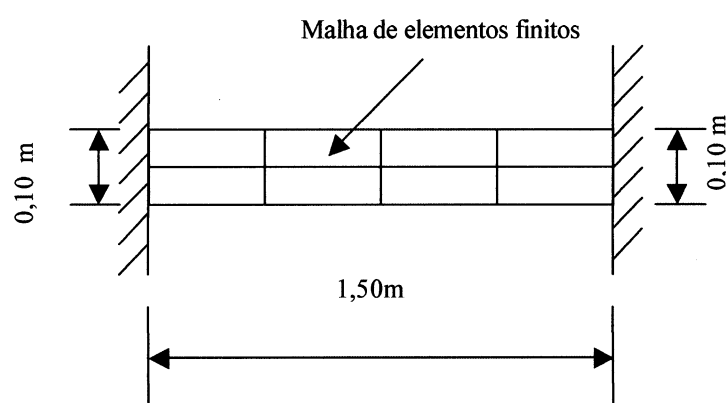


FIGURA 5.5 – VIGA BI-ENGASTADA DISCRETIZADA

A viga está engastada em suas extremidades, as expansões térmicas longitudinais estão impedidas e conseqüentemente, vão surgir tensões de coação decorrentes da variação térmica. Cada análise foi denominada pela letra VG (viga) adicionado do número de cada hipótese

analisada. Não foi considerada a geração de calor. Sendo assim para cada análise as seguintes condições estão relacionadas nas tabelas 5.1A e 5.1B sendo que, em todos os casos considerou-se temperatura ambiente de 20°C, a temperatura de lançamento do material de 20°C e o intervalo entre as camadas de 5 horas. O elemento considerado para a análise da temperatura foi o 4 nós PLANE 55 e para a análise de tensão foi considerado o PLANE 42.

A tabela 5.1 mostra o resumo das condições utilizadas para as análises da viga bi-engastada

TABELA 5.1 - RESUMO DAS CONDIÇÕES ADOTADAS

HIPÓTESE	NÚMERO DE CAMADAS	ESPESSURA DAS CAMADAS (m)	MALHA (m)
VG1	1	0,10	0,50 X 0,10
VG2	1	0,10	0,05 X 0,05
VG3	1	0,10	0,025 X 0,025
VG4	1	0,10	0,0125 X 0,0125
VG5	2	0,05	0,05 X 0,05
VG6	2	0,05	0,0125 X 0,0125
VG7	2	0,05	0,0833 X 0,0833

As propriedades, para as hipóteses, obedeceram aos seguintes valores

- Coeficiente de dilatação térmica de  $16,67 E - 6 / ^\circ C$  ;
- Módulo de elasticidade de 210000 MPa ;
- Massa específica de  $2388,00 Kg/m^3$  ;
- Calor específico utilizado de  $1105,00 J/Kg^\circ C$  ( $1105,00 J/Kg^\circ K$ );
- Condutividade térmica de  $6445,93 J/mh^\circ C$  ( $1,79 W/mK$ );
- Coeficiente de transferência de calor considerado concreto-ar de  $50232,00 J/m^2 h^\circ C$  ( $12 kcal/mh^\circ C = 13,95 W/mK$ );
- Coeficiente de Poisson 0,3 .

A solução analítica para a viga bi-engastada isotrópica, homogênea de uma camada levando-se em consideração apenas os efeitos axiais, pode ser determinada pela Resistência dos Materiais resultando na tensão  $\sigma = 70,140 Mpa$ . Esta solução poderá ser comparada com a tensão na direção do eixo X obtida pelo ANSYS verificada através das análises a seguir.

A distribuição de tensões no eixo X ( $\sigma_x$ ) pode ser visualizada nas fig. 5.6, 5.7. e 5.9 para os casos VG1, VG2 e VG3, respectivamente. Observa-se que os valores encontrados de tensão foram - 75,711 MPa para VG1, -72,266 MPa para VG2 e - 71,132 MPa para VG3.

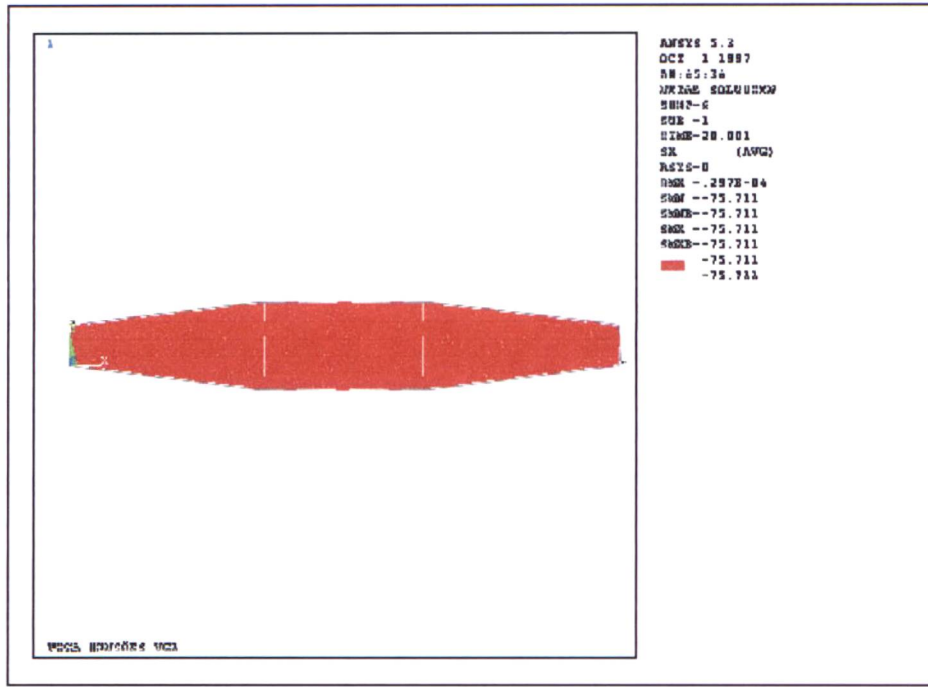


FIGURA 5.6 - VG1 - TENSÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X - CAMADA ÚNICA - até 20.001 horas

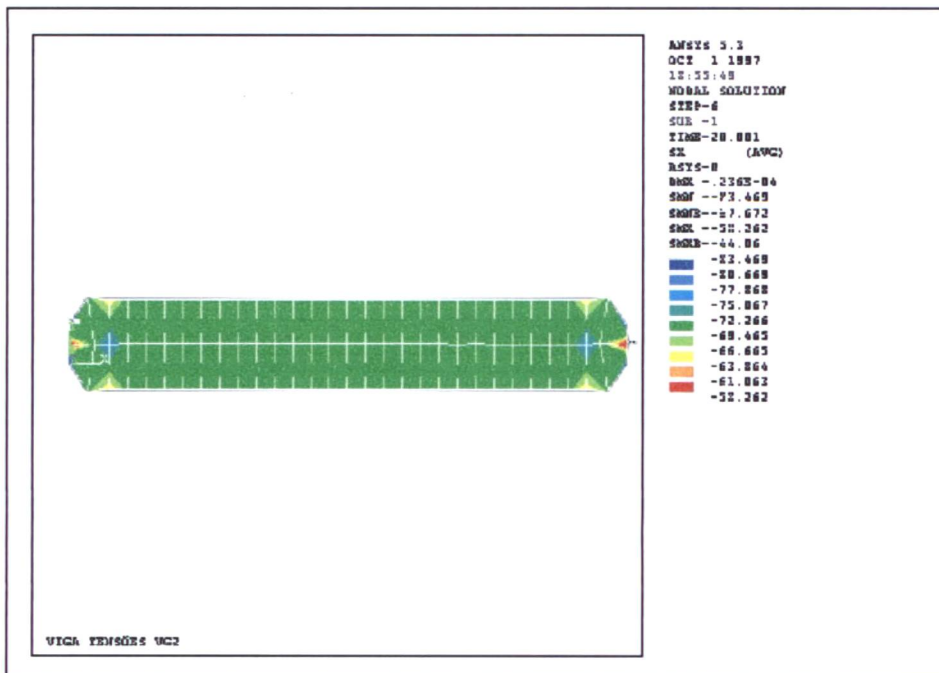


FIGURA 5.7 - VG2 - TENSÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X - até 20.001 horas

No caso da VG2, a distribuição de tensões equivalentes de Von Mises resultou numa faixa que varia entre - 68,572 MPa até - 71,392 MPa, tal como mostra a fig. 5.8.

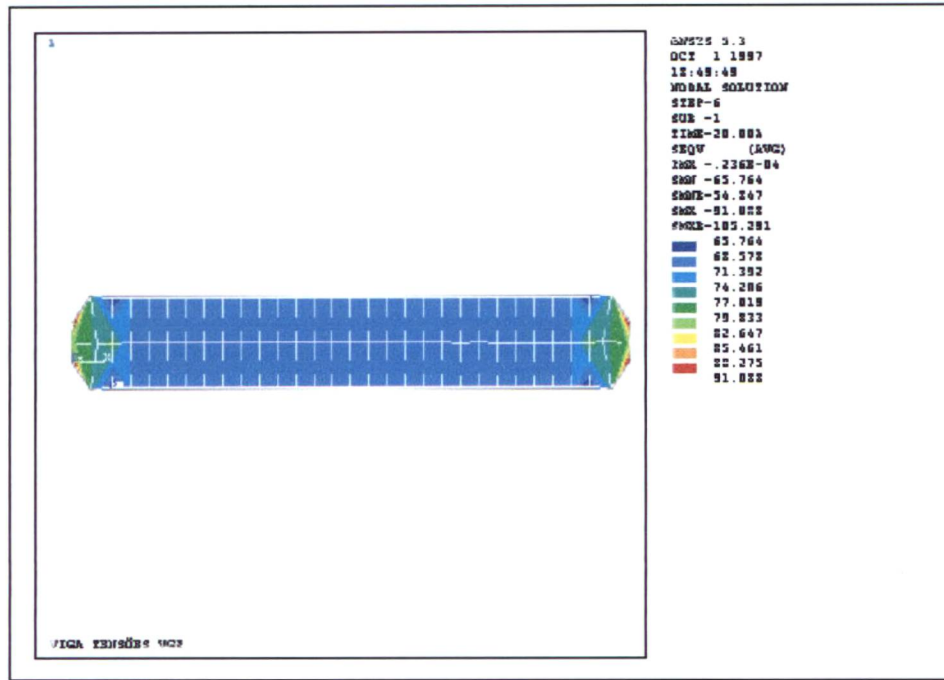


FIGURA 5.8 - VG2 - TENSÃO DE VON MISES - CAMADA ÚNICA – até 20.001 horas

Observa-se que na fig. 5.9 a tensão na direção do eixo X ficou em -71,132 MPa na camada.

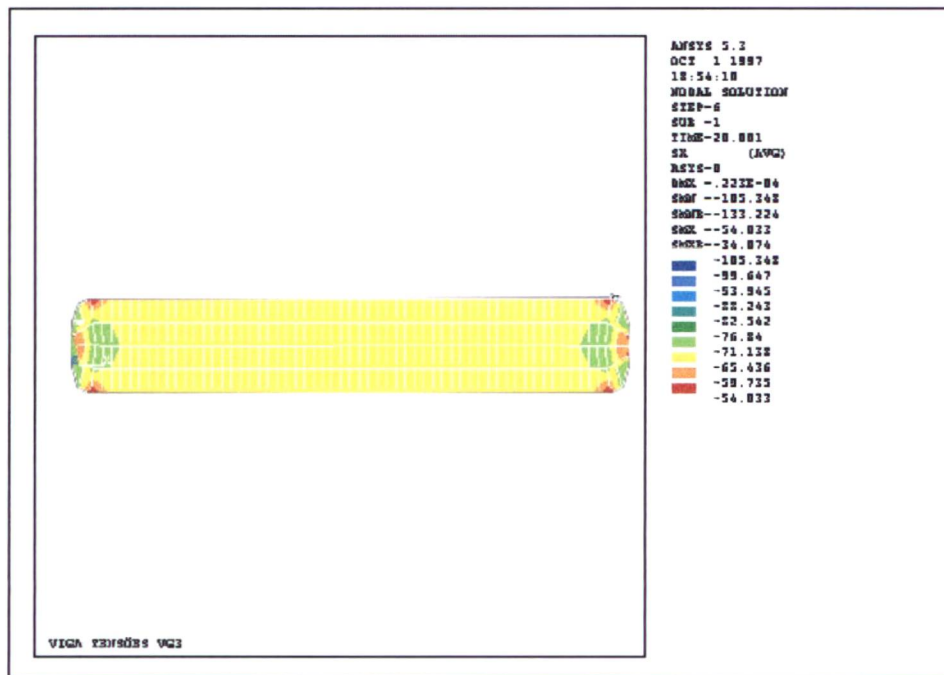


FIGURA 5.9 - VG3 - TENSÃO NA DIREÇÃO X - CAMADA ÚNICA – até 20.001 hora

Na hipótese VG4, fig. 5.10 a tensão na direção do eixo X ficou em -71,099 MPa na camada.

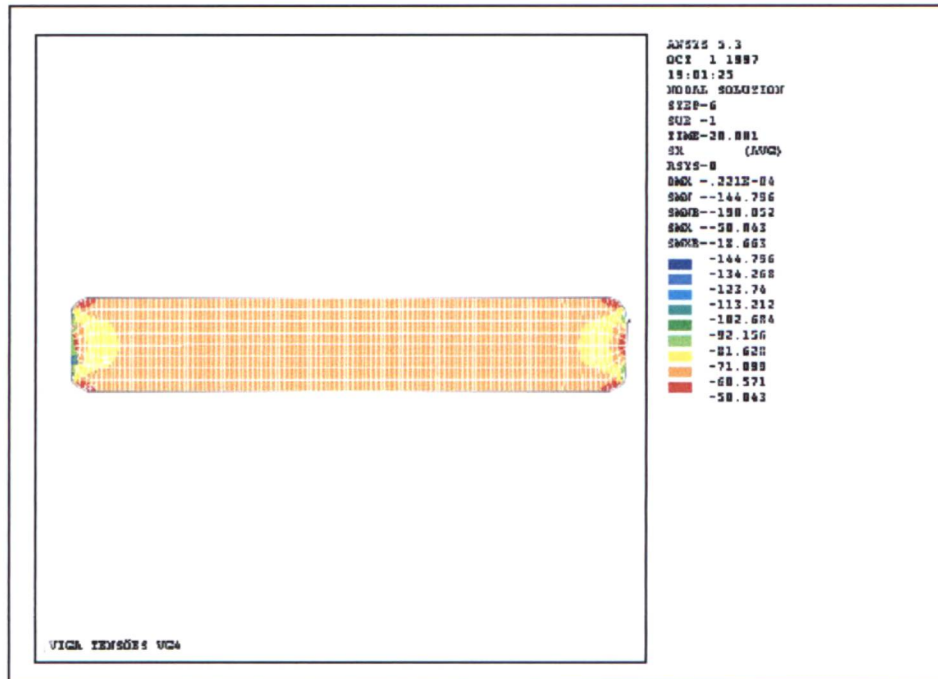


FIGURA 5.10 - VG4 - TENSÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X - CAMADA ÚNICA – até 20.001 horas

Considerando-se agora o caso de duas camadas, observa-se que na fig. 5.11, análise VG5, apresenta a distribuição de tensão na direção do eixo X de -70,667 MPa na 1ª camada e de 4,605 MPa máxima na 2ª camada, após o lançamento destas sobre a outra.

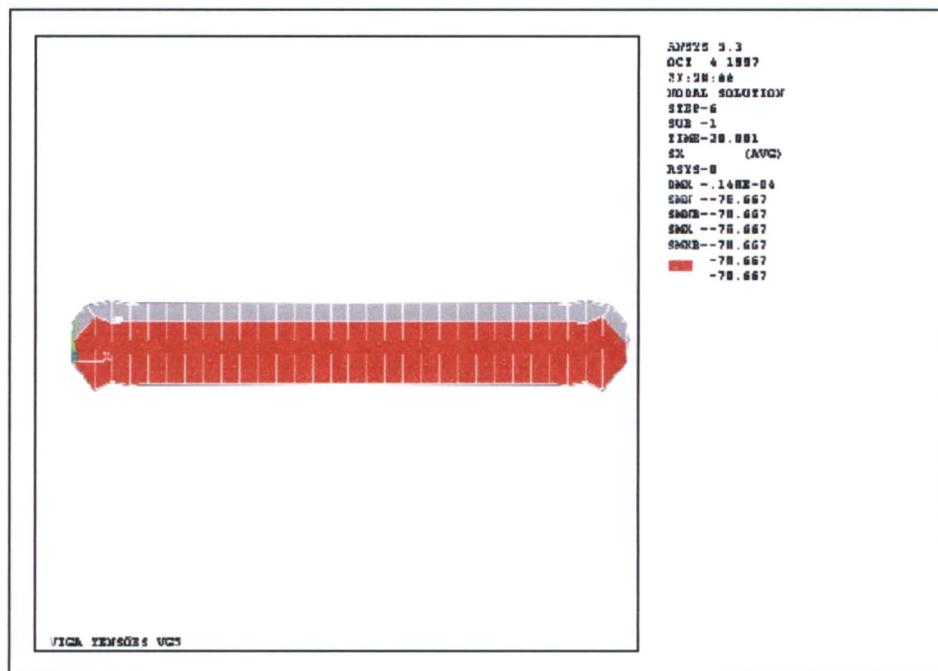


FIGURA 5.11 - VG5 - TENSÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X – 1ª CAMADA – até 20.001 horas

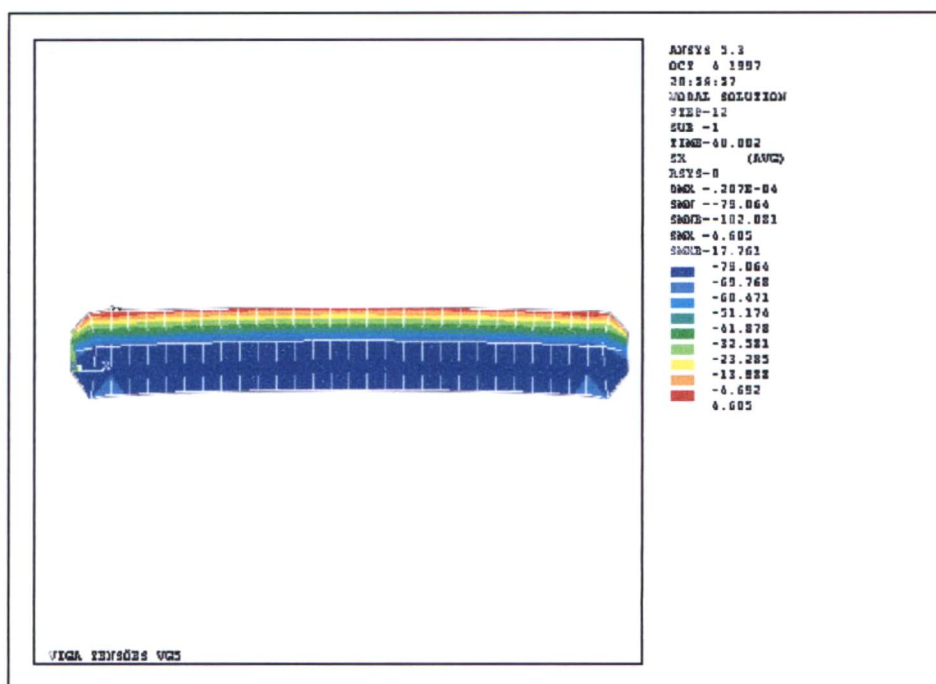
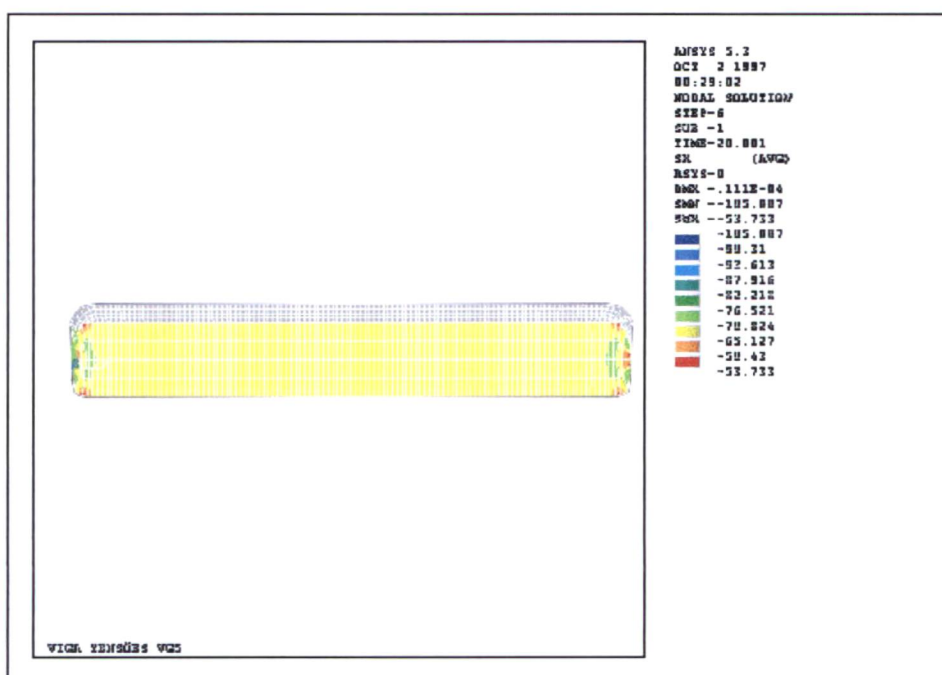


FIGURA 5.12 - VG5 - TENSÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X - 2ª CAMADA – até 40.001 horas

Considerando-se agora outro modelo, VG6, pode-se observar na fig. 5.13, que a tensão na direção do eixo X é -70,824 MPa na 1ª camada após 20 horas. Quando são passadas 40 horas, fig.5.14, após o lançamento da 2ª camada, a tensão de - 72,033 MPa no meio da camada.



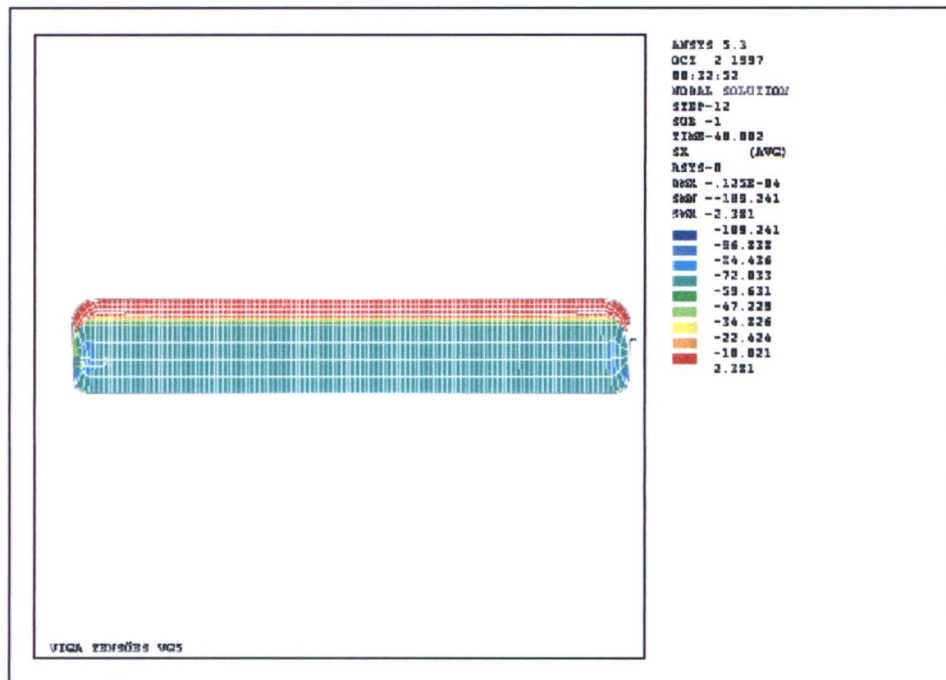


FIGURA 5.14 - VG6 - TENSÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X - 2ª CAMADA – até 40.001 horas  
 Resultado semelhante foi obtido no caso VG7, quando se observou uma tensão de -70,974 MPa na direção X, ainda na 1ª camada, conforme a fig. 5.15.

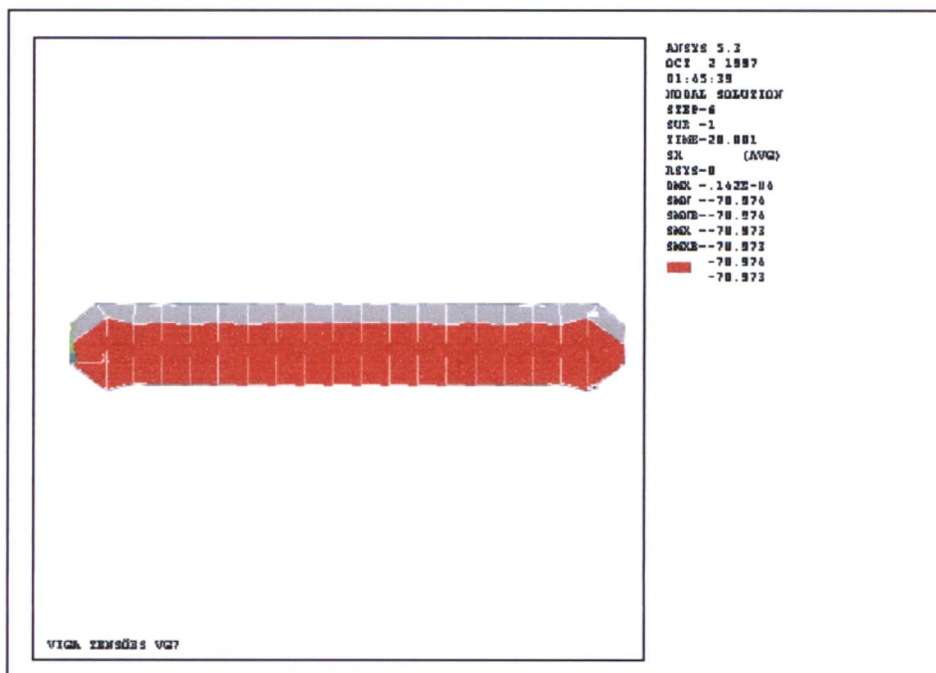


FIGURA 5.15 - VG7 - TENSÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X - 1ª CAMADA – até 20.001 horas

Após o lançamento da 2ª camada, a distribuição de tensão e a deformada estão mostradas na fig. 5.16.

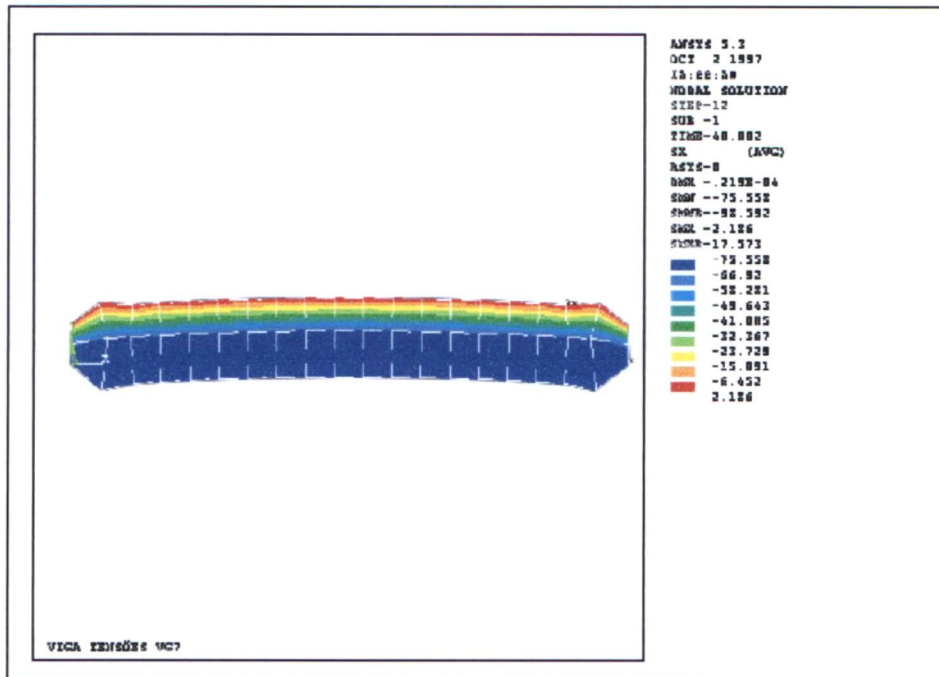


FIGURA 5.16 - VG7 - TENSÃO NA DIREÇÃO DO EIXO X - 2ª CAMADA – até 20.001 horas

TABELA 5.2 - RESUMO DAS SIMULAÇÕES

HIPÓTESE	CAMADA	TENSÃO ( na direção X)
VG1	ÚNICA	75,71
VG2	ÚNICA	72,26
VG3	ÚNICA	71,13
VG4	ÚNICA	71,09
VG5	PRIMEIRA	70,67
VG5	SEGUNDA	79,06
VG6	PRIMEIRA	70,82
VG6	SEGUNDA	72,03
VG7	PRIMEIRA	70,97
VG7	SEGUNDA	72,55

Como conclusão das simulações da viga bi-engastada, pode-se observar que todas as tensões na direção do eixo x se aproximaram da solução analítica. Quanto mais refinada a malha, chega-se mais próximo do resultado analítico.

Nas simulações que consideraram o caso de duas camadas como na VG5, VG6 e VG7, observou-se na primeira camada que as tensões na direção do eixo x possuem valor próximo da solução analítica. Na segunda camada, surpreendentemente o valor fica muito alto.

A tabela 5.2 mostra o resumo das simulações e se observa uma boa aproximação de resultados, com valores mais precisos determinados nos casos de malha mas refinadas. É importante destacar a curvatura que a peça sofre quando a estrutura é executada em camadas. Isso não ocorre no caso de camada única.

### 5.2.2 Blocos de concreto

Outra aplicação da metodologia foi realizada considerando-se um bloco hipotético com dimensões arbitrárias como mostra a fig. 5.17 com três camadas distintas [KRÜGER, (2001)]. Resultados de tensões serão mostrados particularmente para os nós I e II indicado na fig. 5.17.

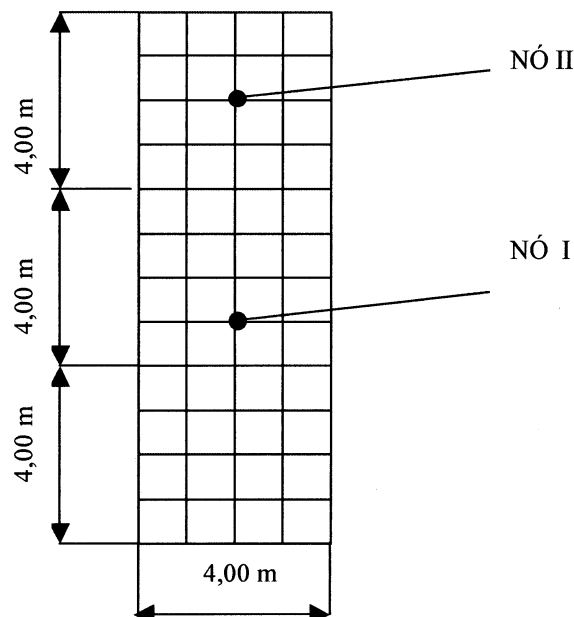


FIGURA 5.17 - BLOCO DISCRETIZADO

As propriedades utilizadas para a simulação de todas as hipóteses obedeceram os seguintes valores:

- A massa específica de  $2388,00 \text{ Kg}/\text{m}^3$ ;
- O calor específico utilizado de  $1105,00 \text{ J}/\text{Kg}^\circ \text{C}$  ( $1105,00 \text{ J}/\text{Kg}^\circ \text{K}$ );
- A condutividade térmica de  $6445,93 \text{ J}/\text{mh}^\circ \text{C}$  ( $1,79 \text{ W}/\text{mK}$ );
- O coeficiente de dilatação térmica  $7,07.10^{-6} /^\circ \text{C}$  ( $7,07.10^{-6} /\text{K}$ );
- O coeficiente de transferência de calor considerado concreto-ar de  $50232,00 \text{ J}/\text{m}^2 \text{ h}^\circ \text{C}$  ( $12 \text{ kcal}/\text{mh}^\circ \text{C} = 13,95 \text{ W}/\text{mK}$ );
- O módulo de elasticidade de  $14211 \text{ MPa}$
- O coeficiente de Poisson  $0,15$  .

Foram realizadas diversas simulações desenvolvidas de acordo com a seguinte programação:

- A1, A2, A4, são hipóteses onde elemento considerado para temperatura foi o quadrilateral de 4 nós, ou seja, o PLANE 55 e para tensão o PLANE 42.
- A3, hipótese onde elemento considerado para temperatura foi o quadrilateral de 4 nós, ou seja, o PLANE 77 e para tensão o PLANE 82.
- A2, A3, A4, hipóteses com incremento de tempo considerado de 2 horas, o intervalo de tempo entre as camadas de 48 horas (2 dias), a temperatura ambiente considerada foi de  $20^\circ \text{C}$ .
- A temperatura do lançamento do concreto foi de  $45^\circ \text{C}$  para todas as hipóteses.

A tabela 5.3 a seguir mostra o resumo das condições utilizadas para as análises do bloco

TABELA 5.3 - RESUMO DAS CONDIÇÕES ADOTADAS NAS SIMULAÇÕES

HIPÓTESE	NÚMERO DE CAMADAS (m)	ALTURA DAS CAMADAS (m)	MALHA (m)
A1	1	12,00	1 X 1
A2	3	4,00	1 X 1
A3	3	4,00	1 X 1
A4	3	4,00	0,25 X 0,25

A elevação adiabática de temperatura, como mostra a tabela 5.4, foi transformada em uma curva de geração de calor através da equação de Fourier [KRÜGER, (2001)].

TABELA 5.4 - ELEVAÇÃO ADIABÁTICA DE TEMPERATURA E CURVA DE GERAÇÃO DE CALOR

TEMPO		T (°C)	Q (J \ m <sup>3</sup> h)
(dias)	(horas)		
0	0	0,00	1.125.216
1	24	8,06	643.772
2	48	11,78	296.679
3	72	13,57	176.318
5	120	15,30	65.195
7	168	16,15	37.956
10	240	16,82	14.253
14	336	17,30	10.769
20	480	17,67	4.646
28	672	17,92	591

Os resultados obtidos podem ser verificados nas figuras a seguir. Foram comparados com o teste adiabático [KRÜGER, (2001)].

Como condições de contorno para análise da temperatura foram considerados:

- Fluxo de calor considerado nulo na face inferior da primeira camada.
- Convecção que representa a interface concreto-ar nas laterais e na face superior da camada que foi executada.

Na análise de tensão a condição de contorno considerada:

- Foram engastados os nós da superfície inferior do bloco

Na fig 5.18, análise A1, verifica-se após 110 horas como fica a temperatura do bloco. A máxima 59,633 °C ocorreu na região central do bloco e a mínima de 21,434 °C está nas laterais do bloco e na superfície superior.

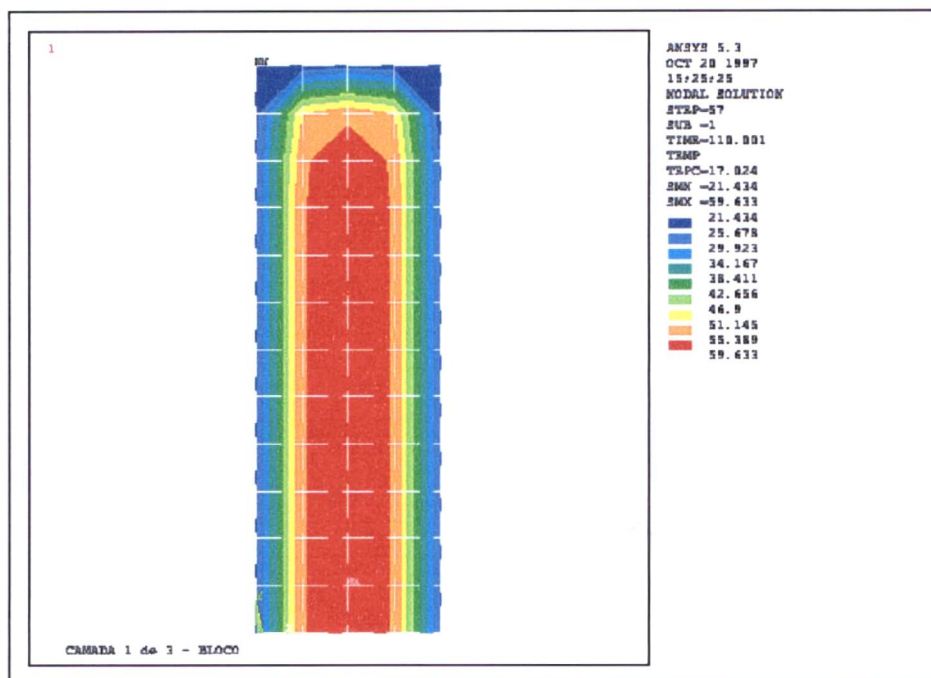


FIGURA 5.18 - A1 - TEMPERATURA - CAMADA ÚNICA – até 110.001 horas

O valor da tensão principal do bloco é mostrado na, fig. 5.19. A máxima tensão 5,662 MPa nas laterais do bloco e a mínima de 0 MPa está na superfície superior.

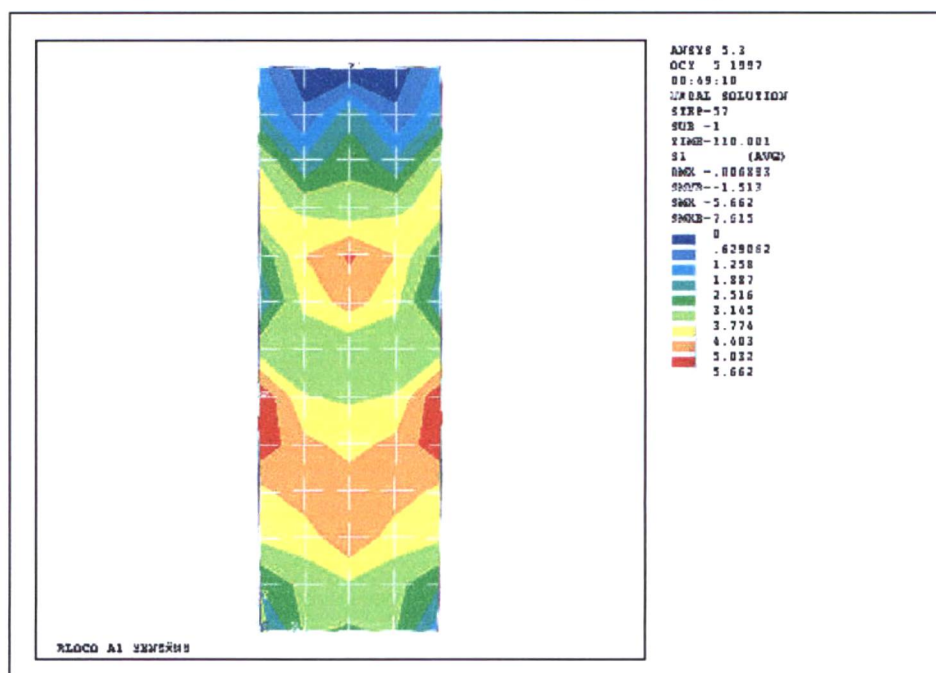


FIGURA 5.19 - A1 - TENSÃO PRINCIPAL - CAMADA ÚNICA – até 110.001 horas

Na análise A1, a temperatura máxima do bloco foi de 58,749 °C na região central, fig.5.20. A mínima de 21,248 °C nas laterais do bloco, cantos e superfície superior do bloco.

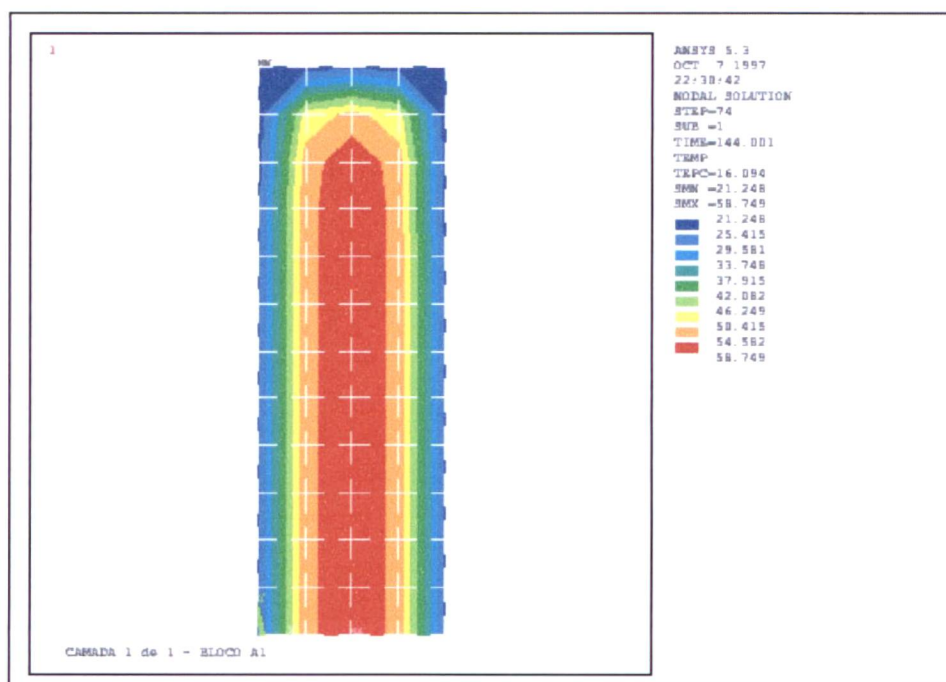


FIGURA 5.20 - A1 -TEMPERATURA – CAMADA ÚNICA – até 144.001 horas

A tensão principal, fig. 5.21 máxima de 1,029 MPa ocorreu no meio do bloco e a mínima de 0 MPa está na região inferior da primeira camada e central da segunda.

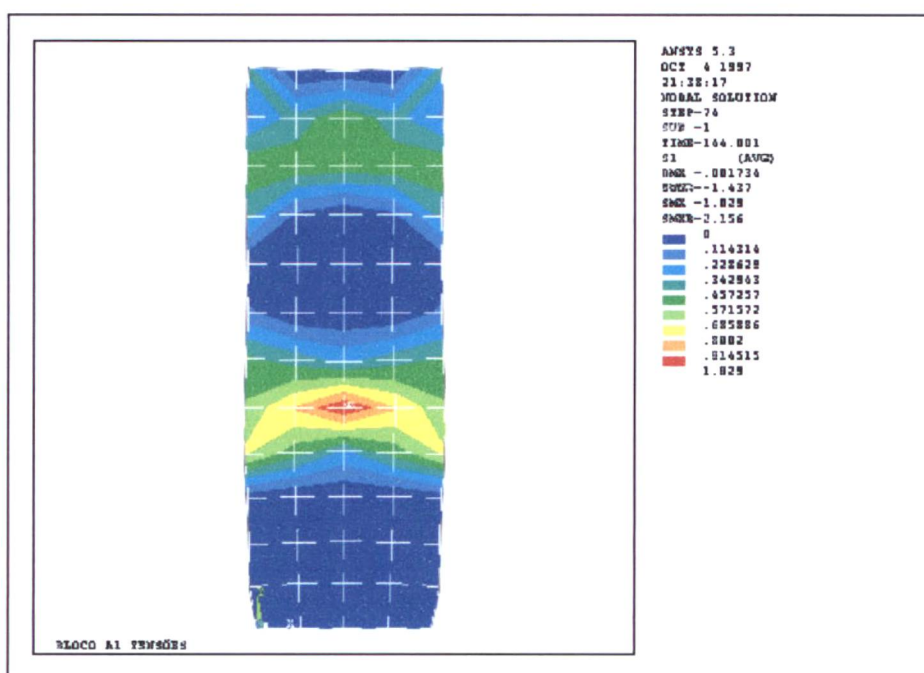


FIGURA 5.21 - A1 - TENSÃO PRINCIPAL - CAMADA ÚNICA - até 144.001 horas

Na análise A1, verifica-se o valor da tensão de Von Mises do bloco, fig. 5.22. A máxima de 6,82 MPa ocorreu nos cantos inferiores e a mínima de 0,567881 MPa está presente na terceira camada do bloco.

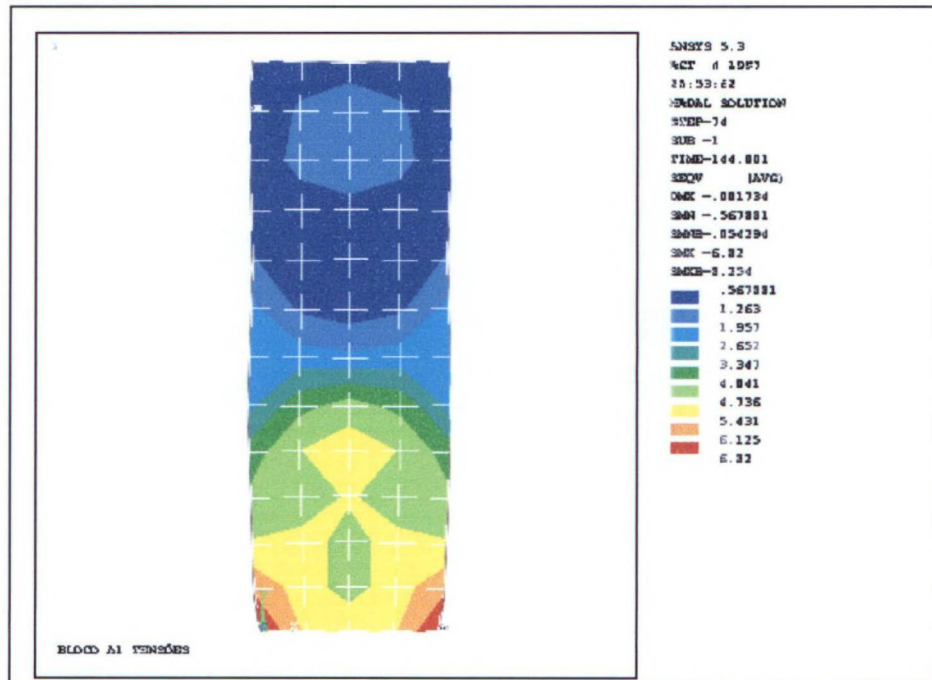


FIGURA 5.22 - A1 - TENSÃO DE VON MISES – CAMADA ÚNICA – até 144.001 horas

A variação dos resultados de temperaturas e de tensões principais são mostradas nas fig. 5.23 e 5.24, para o caso dos nós I e II.

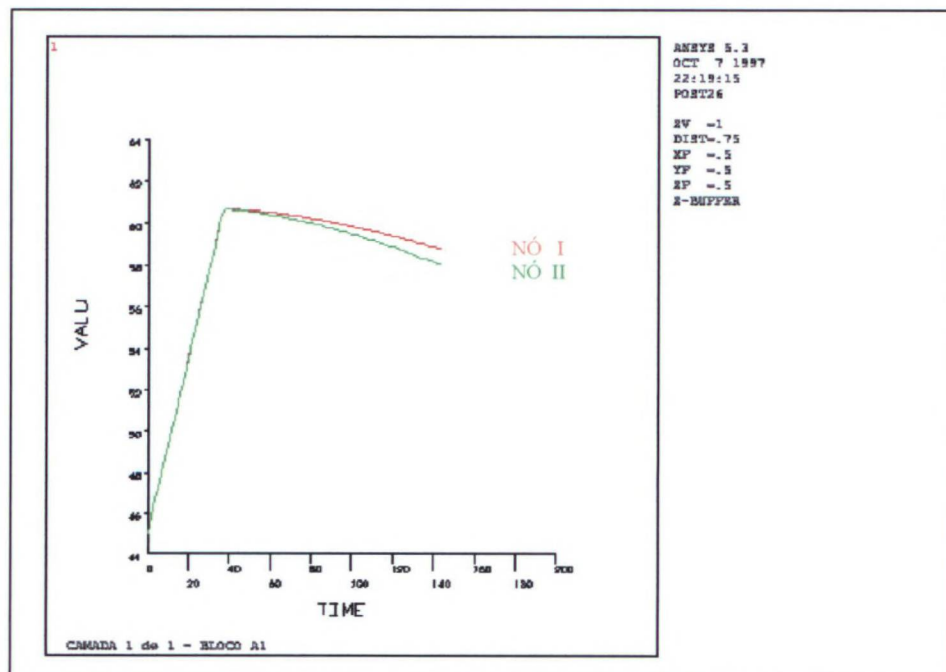


FIGURA 5.23 - A1 - TEMPERATURA NODAL - até 144.001 horas

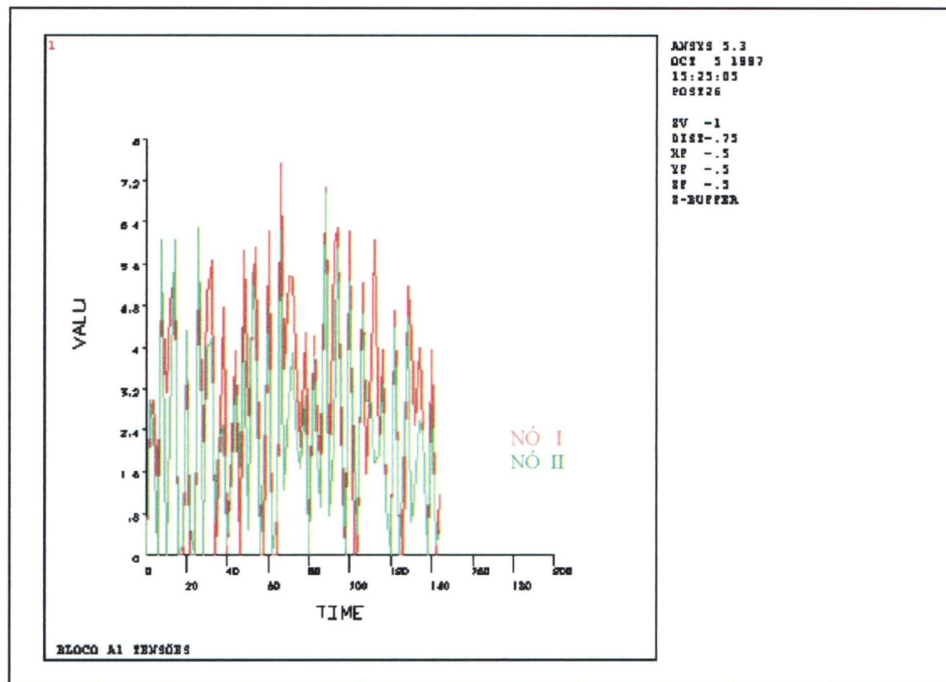


FIGURA 5.24 - A1 - TENSÃO NODAL – até 144.001 horas

Na análise A2, a temperatura máxima na primeira camada foi de 60,632 °C na região central do bloco, fig. 5.25. As camadas desativadas, como era de se esperar, ficaram com valor de 0 °C.

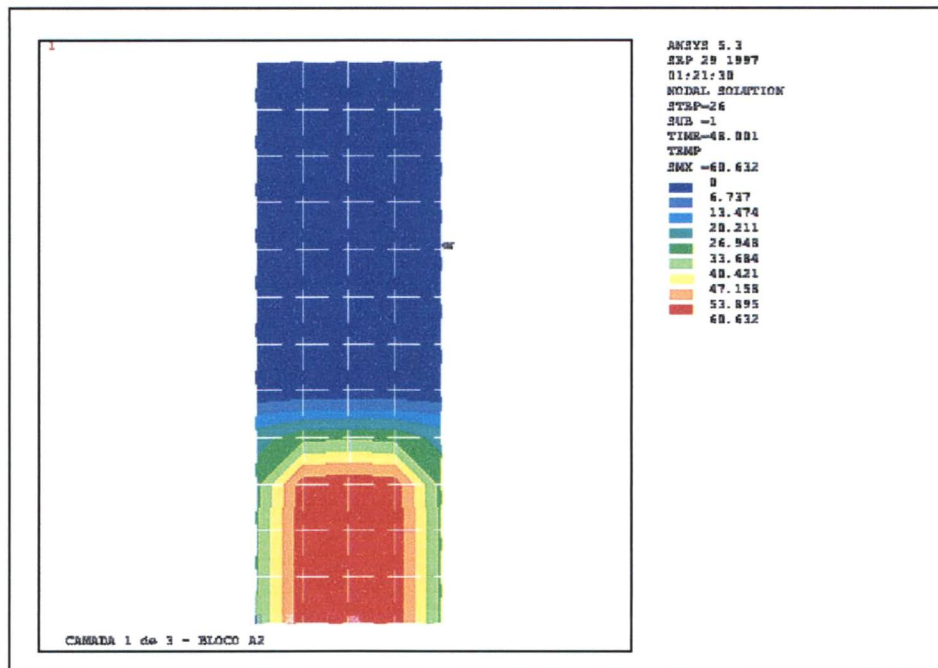


FIGURA 5.25 - A2 - TEMPERATURA -1ª CAMADA - até 48.001 horas

Na análise A2 , fig. 5.26, a tensão principal máxima 6,625 MPa ocorreu no meio do bloco na primeira camada. Nas demais camadas o valor de 0 MPa representa desativação das camadas.

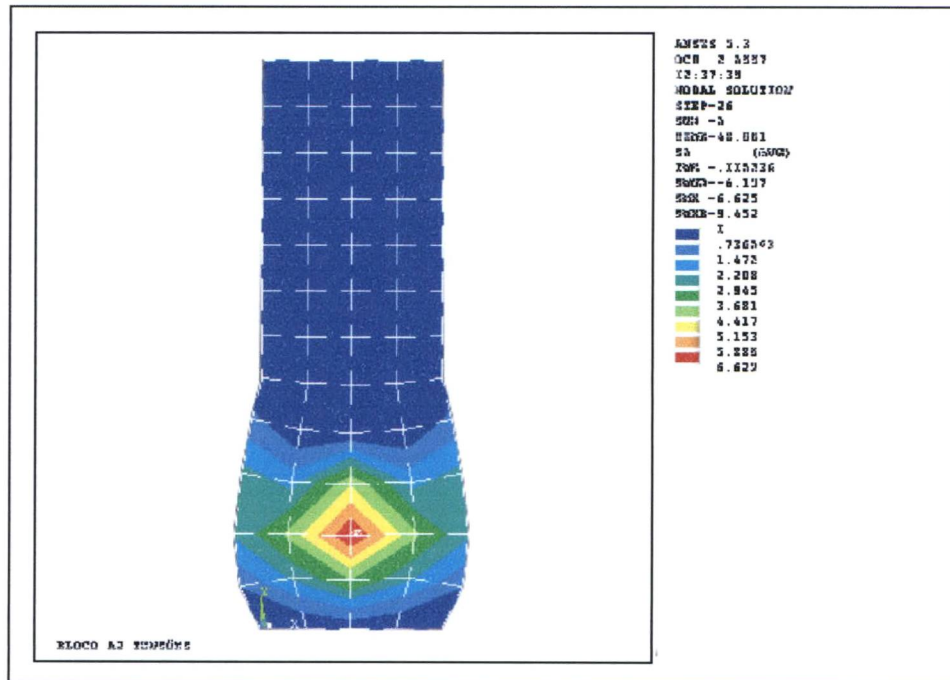


FIGURA 5.26 - A2 - TENSÃO PRINCIPAL – 1ª CAMADA – até 48.001 horas

Na análise A2, a temperatura máxima foi de 60,551 °C na região central do bloco, fig. 5.27. A mínima de 6,728 °C ocorreu na superfície superior da camada.

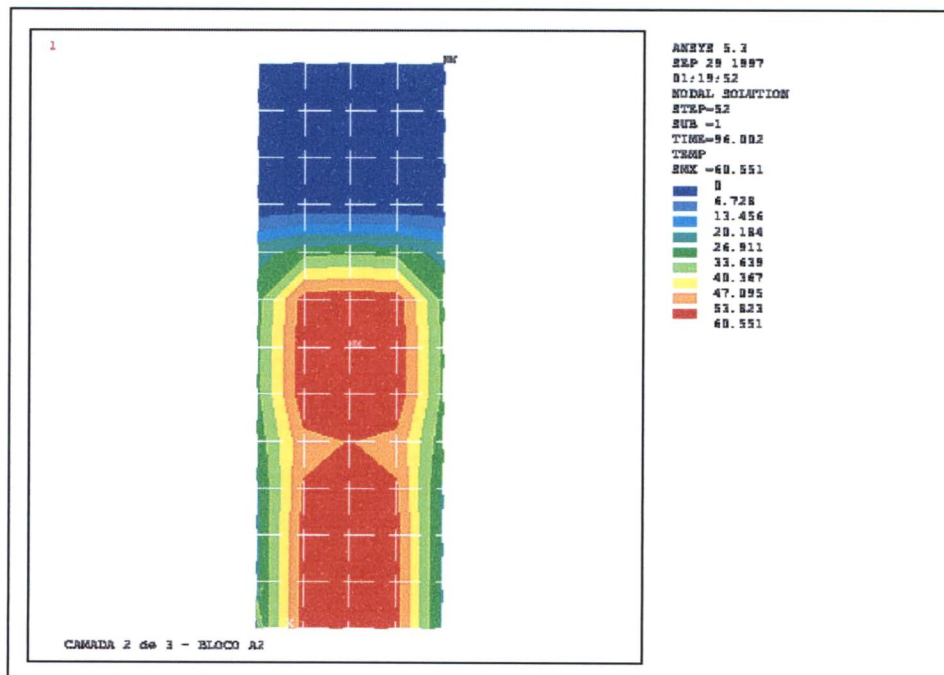


FIGURA 5.27 - A2 - TEMPERATURA - 2ª CAMADA – até 96.002 horas

Na análise A2, na segunda camada, o valor da tensão principal do bloco, fig. 5.28. A máxima tensão 3,322 MPa ocorreu no meio do bloco, na segunda camada. A camada desativada aparece com o valor de 0 Mpa.

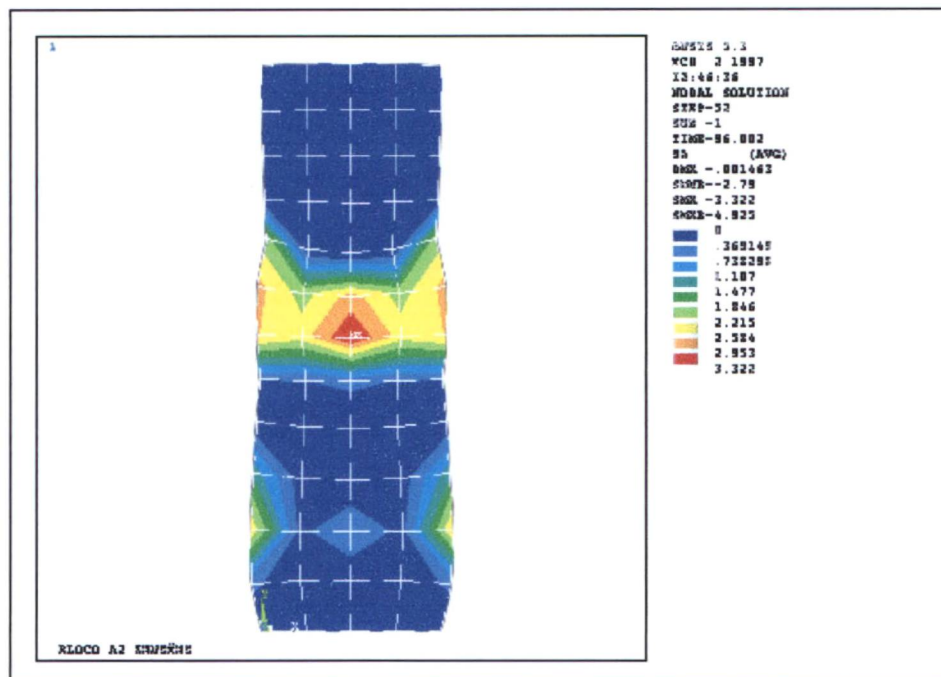


FIGURA 5.28 - A2 - TENSÃO PRINCIPAL - 2ª CAMADA – até 96.002 horas

A tensão de Von Mises do bloco na segunda camada, fig. 5.29 possui máxima tensão 6,001 MPa ocorreu região inferior do bloco e central da segunda camada.

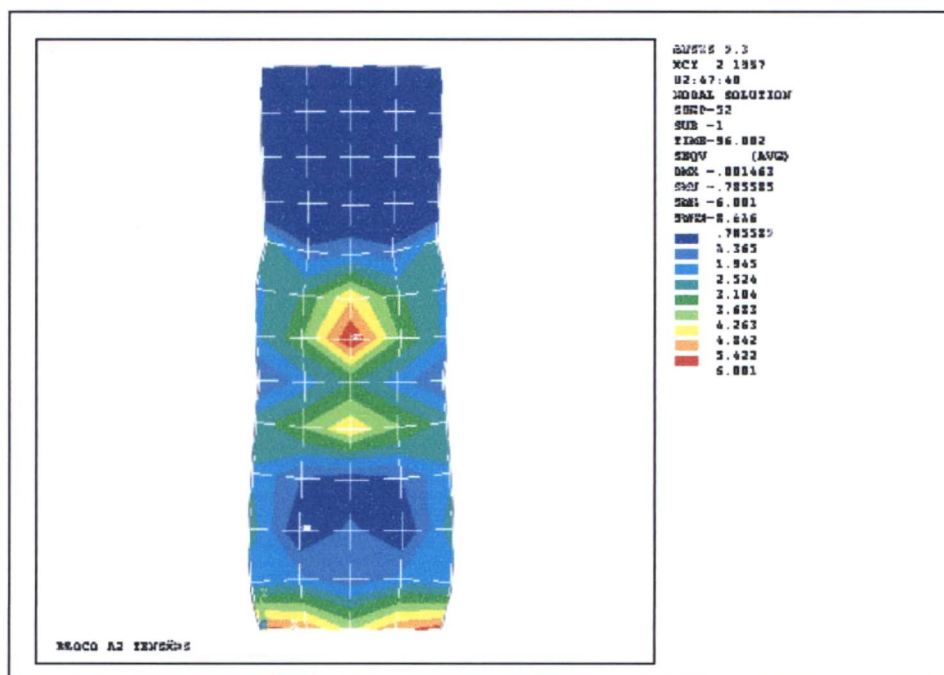


FIGURA 5.29 - A2 - TENSÃO VON MISES - 2ª CAMADA – até 96.002 horas

A temperatura máxima do bloco na análise A2 chegou a 60,551 °C no meio das três camadas ativadas, após 144 horas. A temperatura mínima é de 23,847 °C nas laterais e cantos superiores do bloco, fig.5.30.

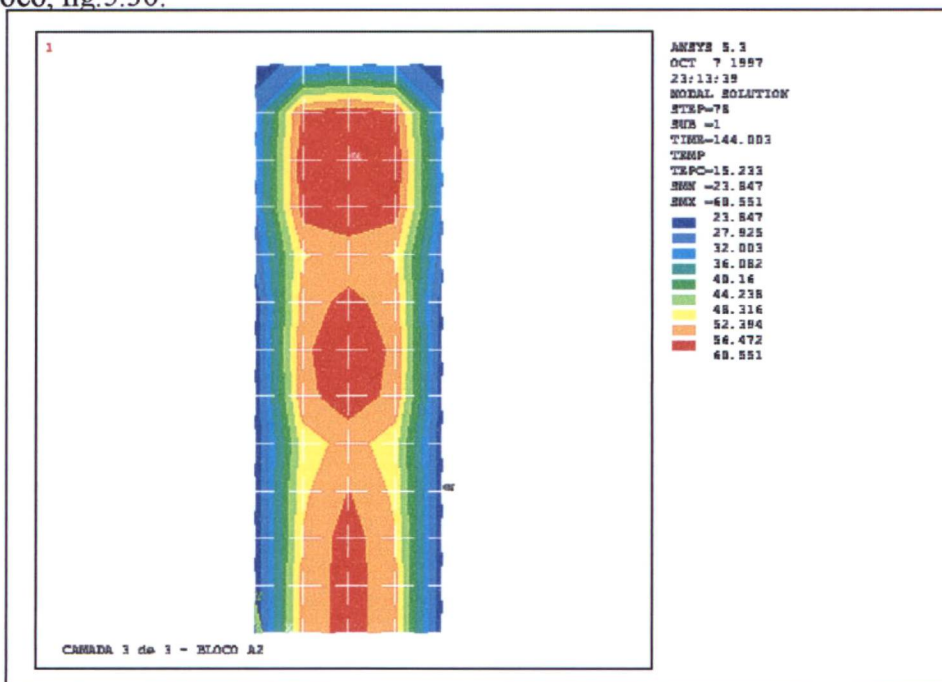


FIGURA 5.30 - A2 -TEMPERATURA - 3ª CAMADA - até 144.003 horas

O valor da tensão principal do bloco, fig.5.31.A máxima tensão 6,795 MPa ocorreu no meio do bloco e a mínima de 0 MPa na superfície superior. Ocorreu deformação nas laterais.

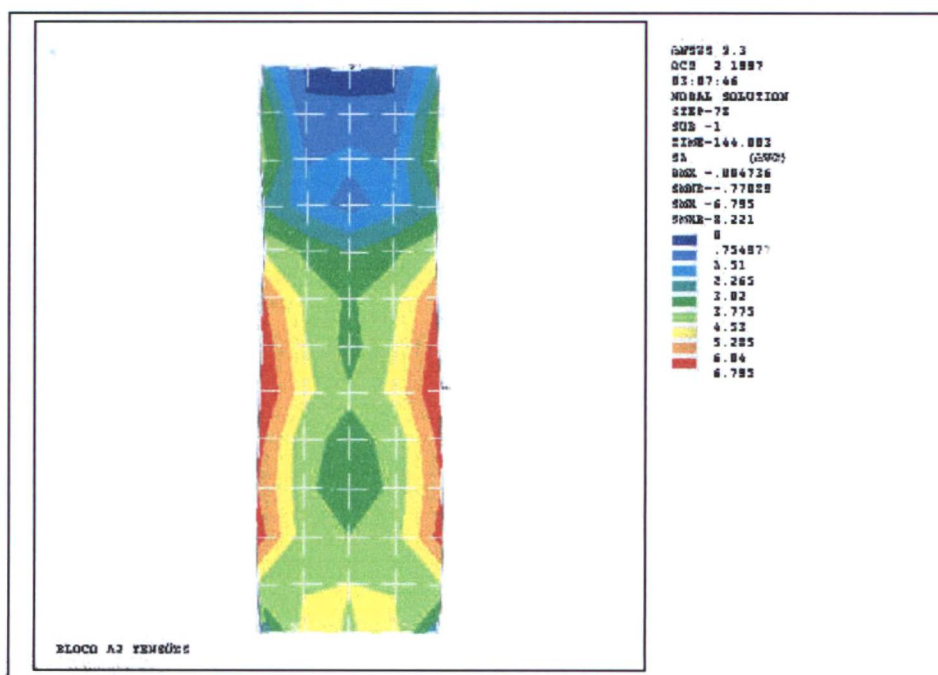


FIGURA 5.31 - A2 - TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA – até 144.003 horas

Na análise A2, verifica-se o valor da tensão de Von Mises do bloco, fig.5.32. A máxima tensão 7,843 MPa ocorreu na superfície inferior do bloco e a mínima de 0,852835 MPa está no meio da terceira camada.

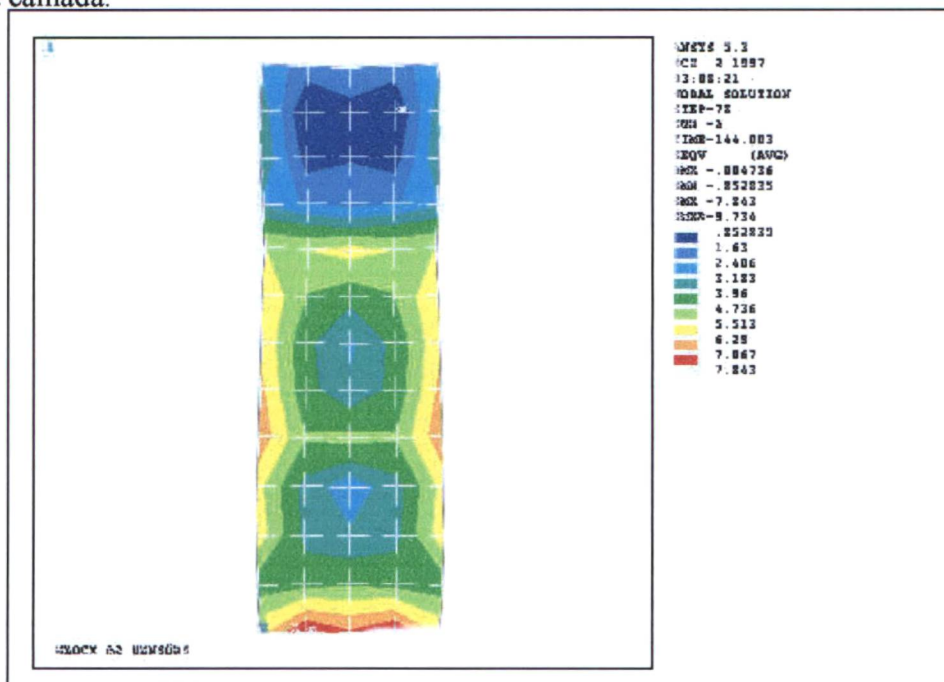


FIGURA 5.32 - A2 - TENSÃO DE VON MISES - 3ª CAMADA – até 144.003 horas

Os resultados nodal I e II de temperatura na fig.5.33 e da tensão, fig. 5.34, permitem observar a repercussão no campo de tensões quando ocorrem variações de temperatura.

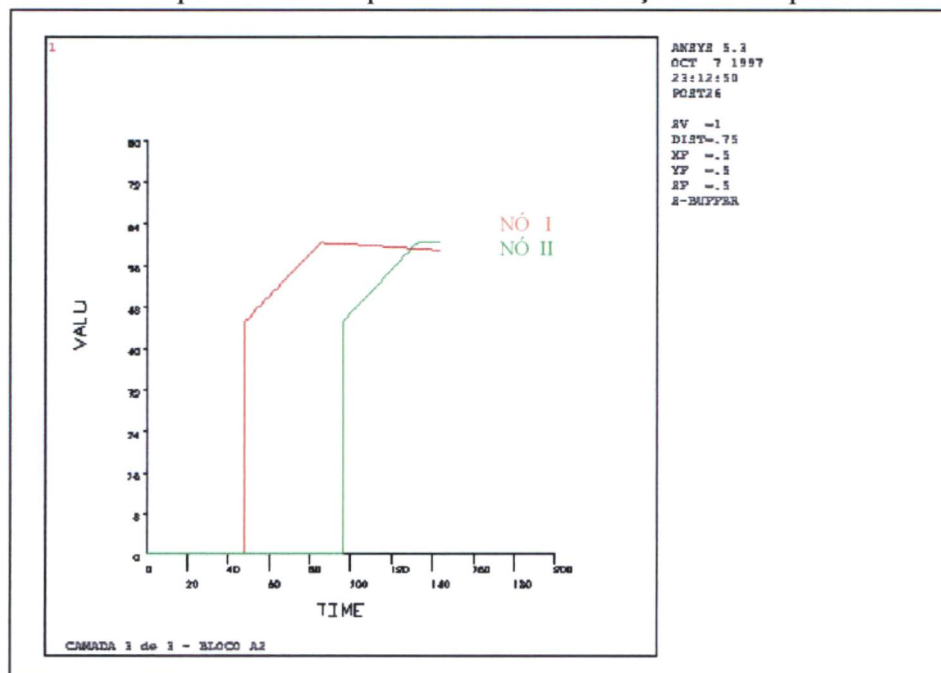


FIGURA 5.33 - A2 - TEMPERATURA NODAL - até 144.003 horas

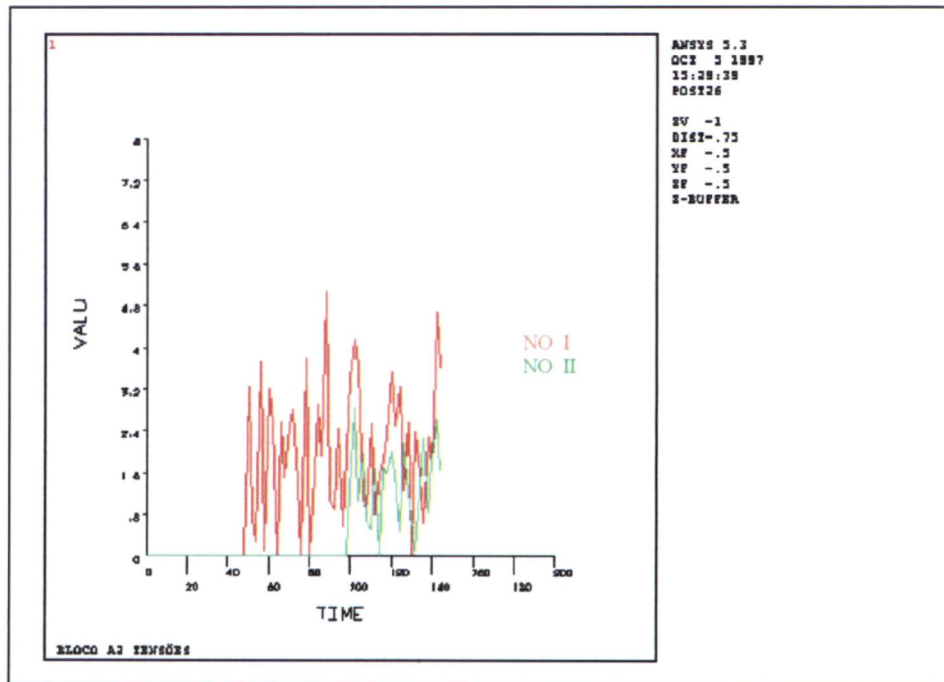


FIGURA 5.34 - A2 – TENSÃO PRINCIPAL NODAL – até 144 horas

Na análise A3, a temperatura máxima do bloco foi de 60,768 °C na região central do bloco, fig.5.35. A mínima de 21,809 °C ocorreu nas laterais do bloco, cantos e superfície superior do bloco.

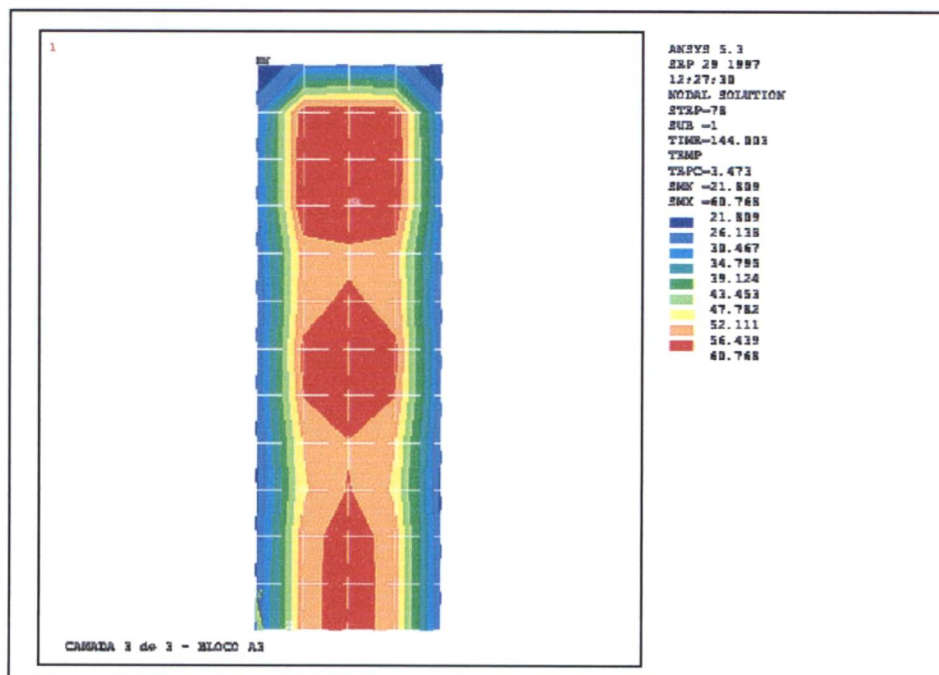


FIGURA 5.35 - A3 -TEMPERATURA - 3ª CAMADA – até 144.003 horas

Na análise A3, estando as três camadas ativadas, verifica-se o valor da tensão principal do bloco, fig.5.36. A máxima tensão 11,725 MPa ocorreu nas laterais da primeira camada e a mínima de 0 MPa na superfície superior.

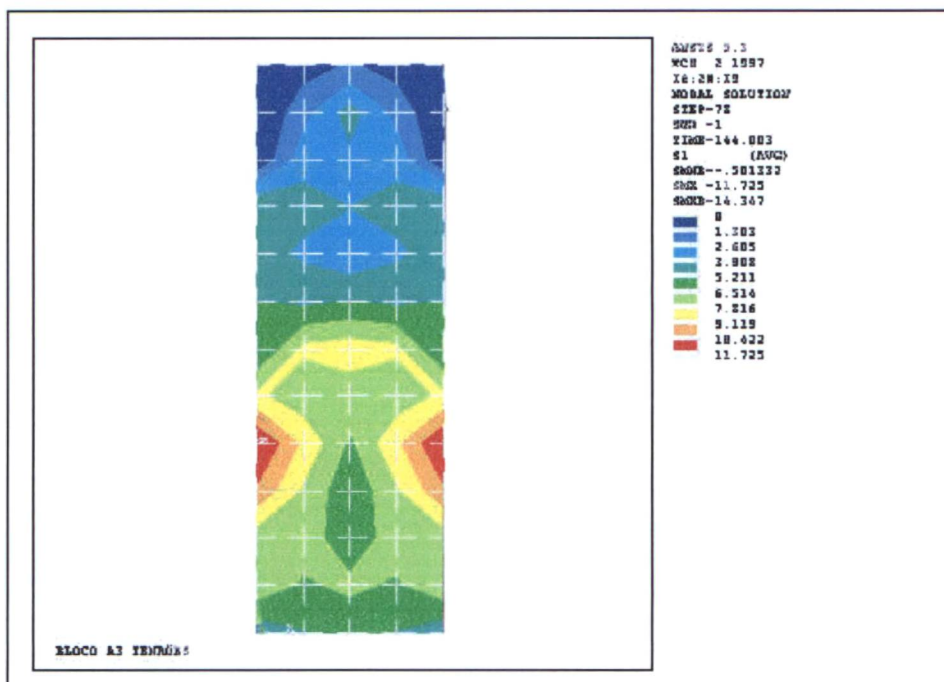


FIGURA 5.36 - A3 -TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA – até 144.003 horas

A tensão de Von Mises do bloco, fig. 5.37, máxima de 11,467 MPa ocorreu no lado inferior do bloco e a mínima de 0,314045 MPa na parte superior.

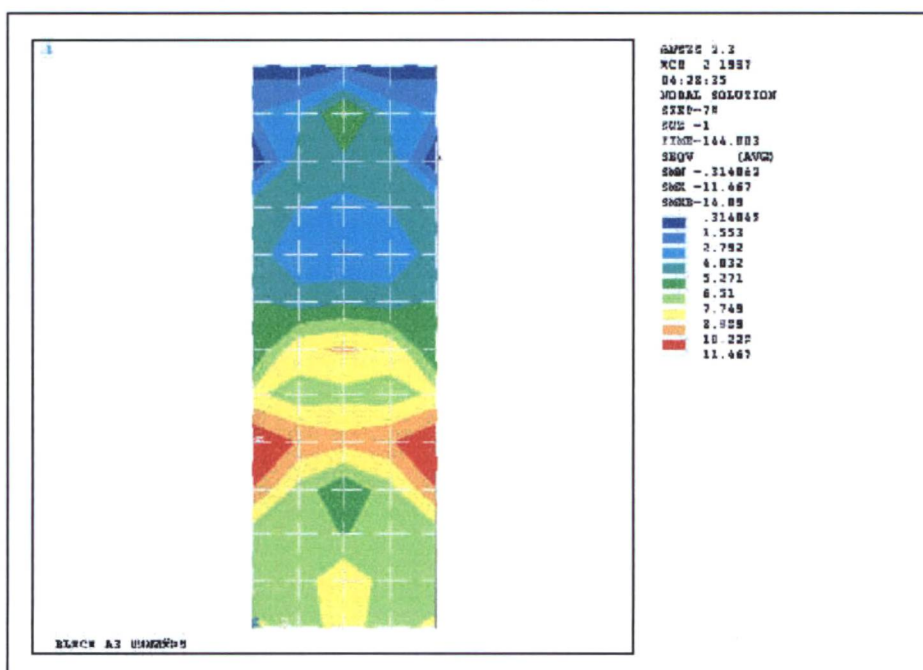


FIGURA 5.37 - A3 - TENSÃO DE VON MISSES - 3ª CAMADA – até 144.003 horas

O gráfico faz referência ao resultado nodal I e II da temperatura na fig.5.38 e na fig. 5.39 o resultado da tensão.

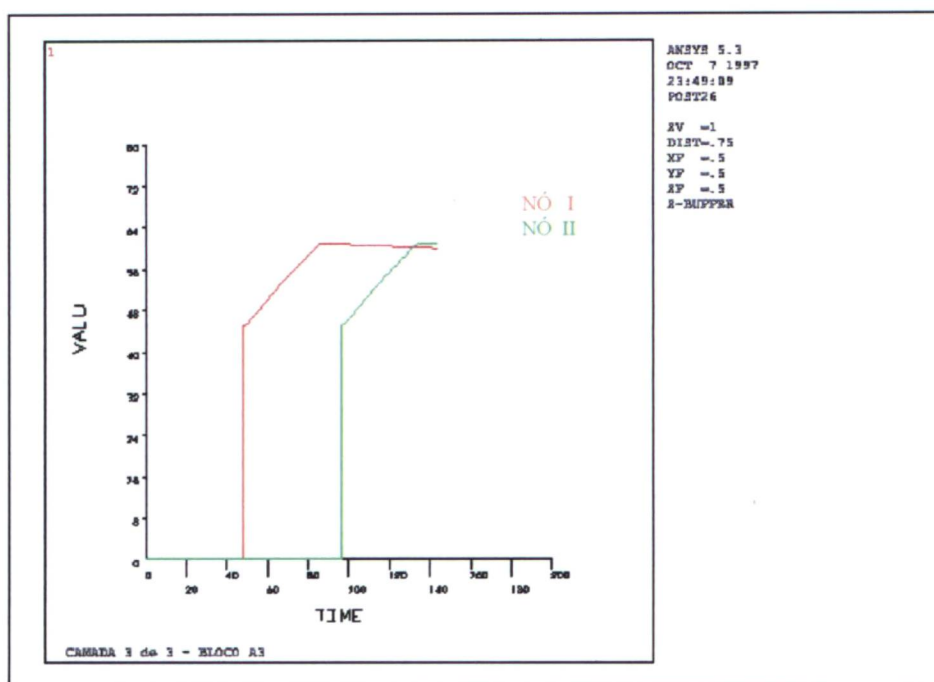


FIGURA 5.38 - A3 -TEMPERATURA NODAL - até 144.003 horas

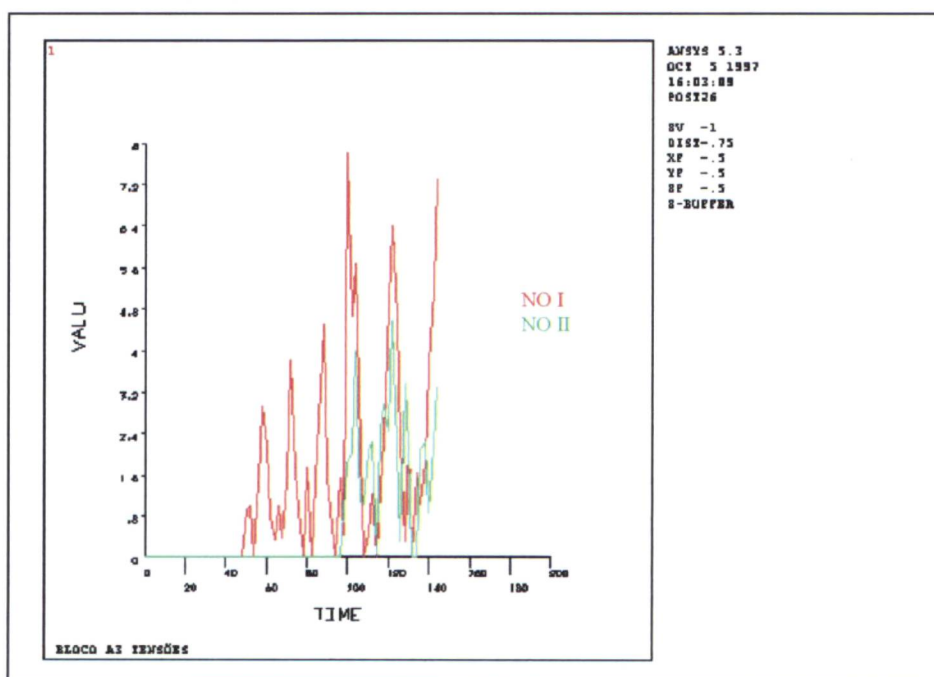


FIGURA 5.39 - A3 -TENSÃO PRINCIPAL - até 144.003 horas

Na fig. 5.40 pode ser verificado que após o tempo de 48 horas a temperatura já começa evoluir e atingir seu máximo em  $60,773^{\circ}\text{C}$ , considerando nulo as camadas inativas.

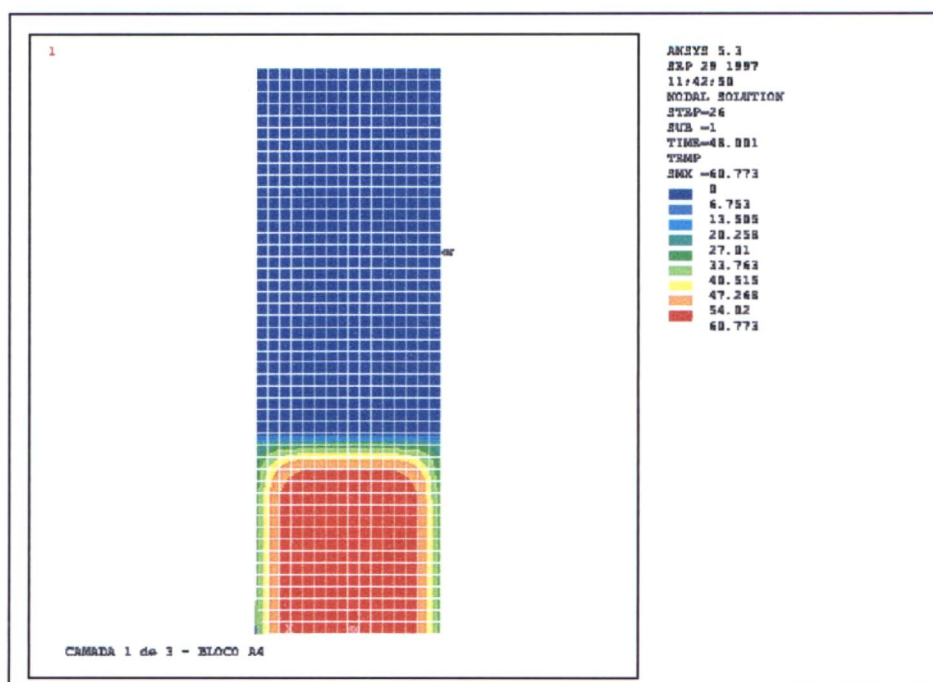


FIGURA 5.40 - A4 – TEMPERATURA - 1ª CAMADA – até 48.001 horas

A tensão de principal do bloco, fig. 5.41 máxima atingiu  $6,107\text{ MPa}$  no meio do bloco nas laterais do bloco. As segundas e terceiras camadas estão desativadas.

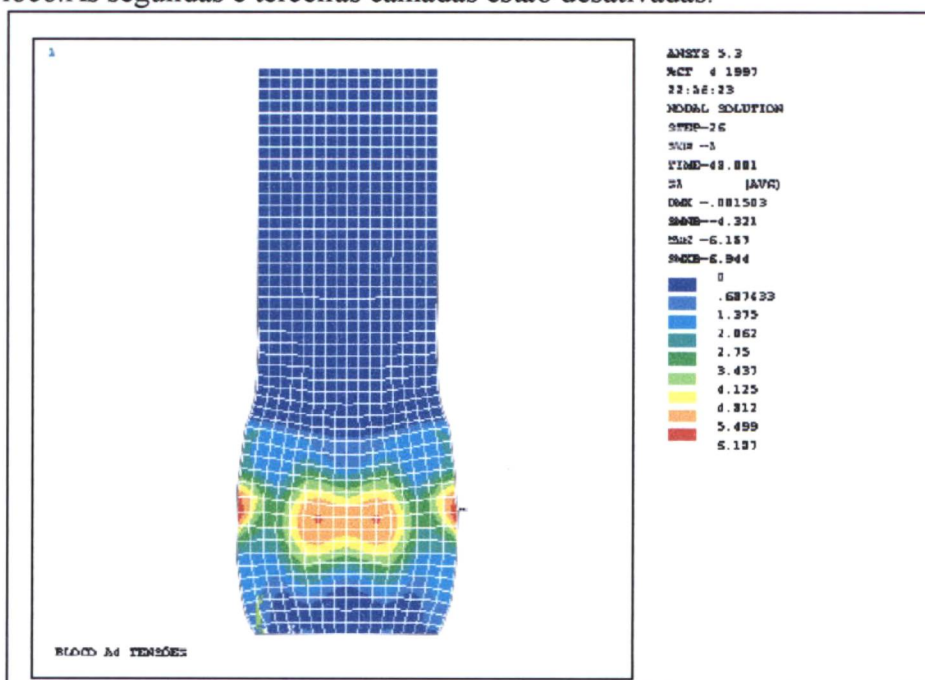


FIGURA 5.41 - A4 - TENSÃO PRINCIPAL - 1ª CAMADA – 48.001 horas

Na análise A4, verifica-se o valor da tensão de Von Mises, fig.5.42. A máxima de 14,667 MPa ocorreu no canto inferior e a mínima de 0,364919 MPa nas parte superior da primeira camada.

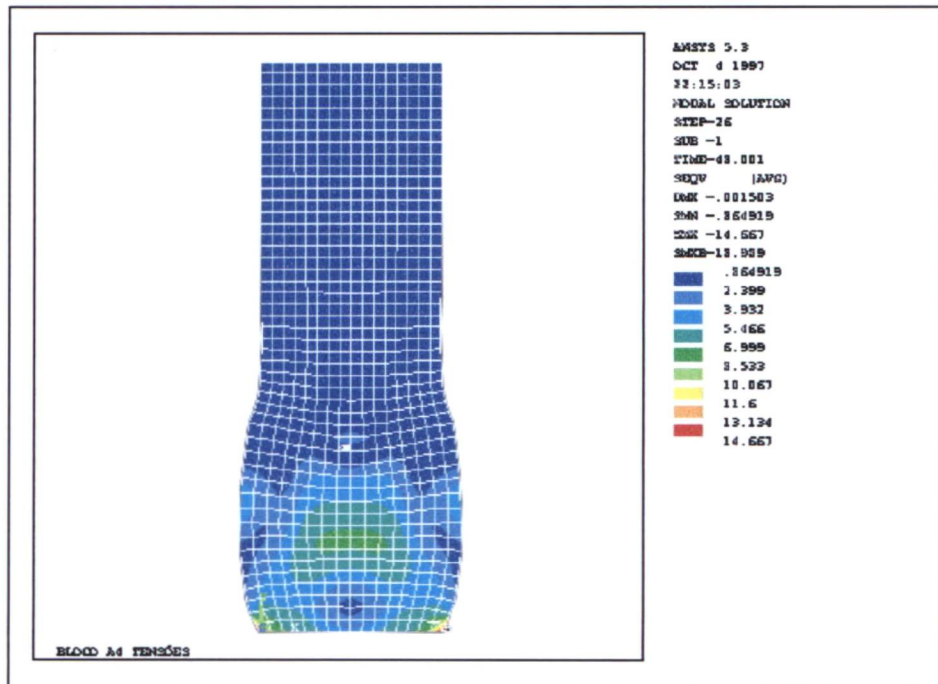


FIGURA 5.42 - A4 - TENSÃO DE VON MISES -1ª CAMADA - até 48.001 horas

Na análise A4, a temperatura máxima foi de 60,771 °C na região central, fig.5.43.

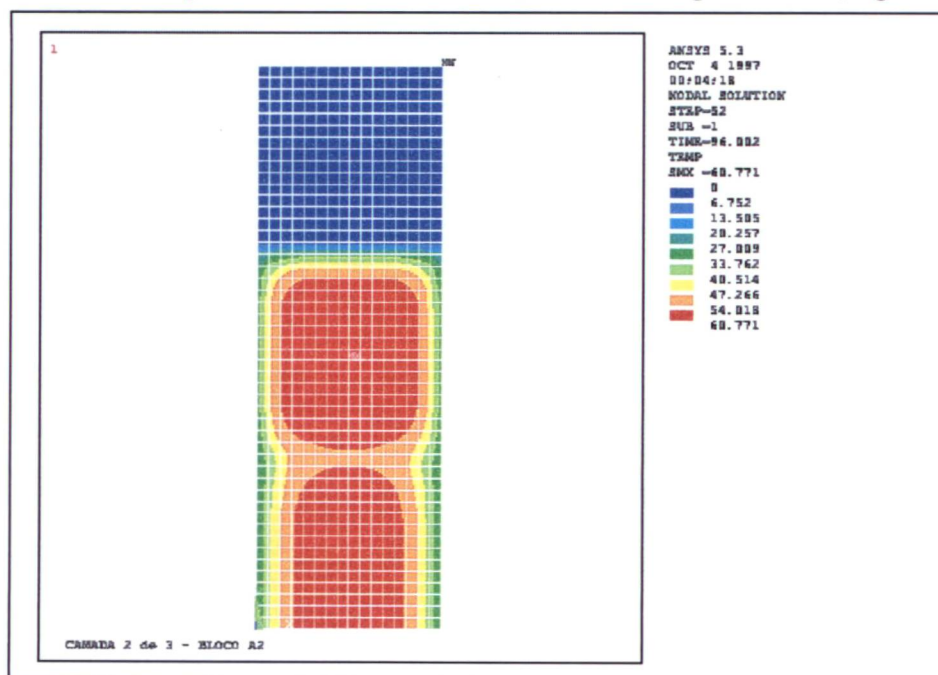


FIGURA 5.43 - A4 - TEMPERATURA - 2ª CAMADA - até 96.002 hora

Na análise A4, verifica-se o valor da tensão de principal do bloco, fig. 5.44. A máxima tensão 3,601 MPa ocorreu na superfície das laterais do bloco. A terceira camada está desativada.

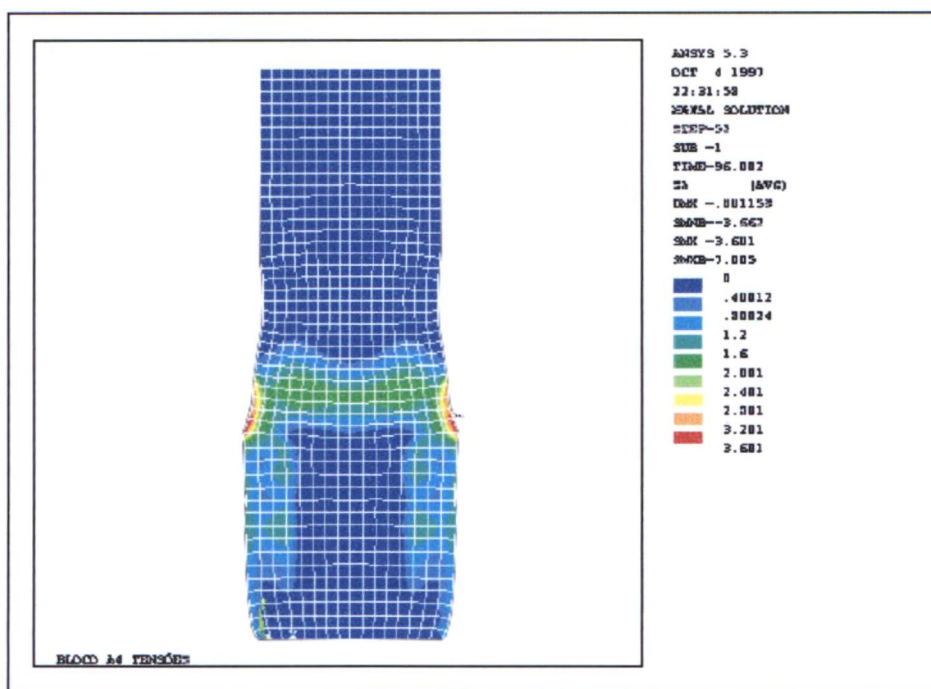


FIGURA 5.44 - A4 - TENSÃO PRINCIPAL - 2ª CAMADA - 96.002 horas

Para o valor da tensão de Von Mises, fig. 5.45 a máxima foi de 10,244 MPa nos cantos inferiores. A terceira camada está desativada.

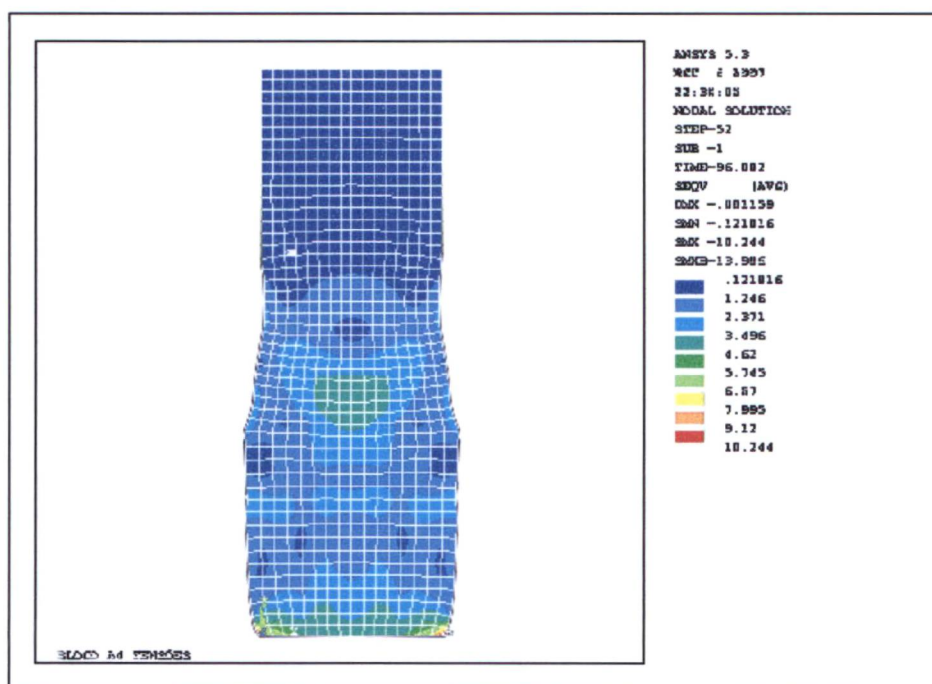


FIGURA 5.45 - A4 - TENSÃO DE VON MISES - 2ª CAMADA – até 96.002 horas

Na análise A4, a temperatura máxima do bloco foi de 60,771 °C na região central do bloco, fig.5.46.

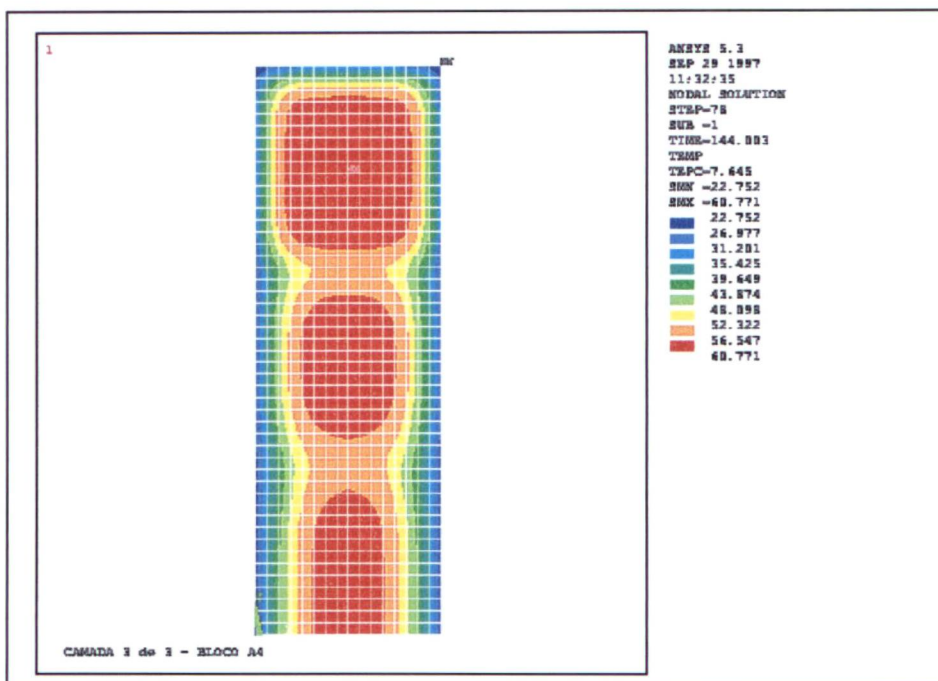


FIGURA 5.46 -A4 TEMPERATURA -3ª CAMADA – até 144.003 horas

A tensão de principal, fig. 5.47 foi de 8,833 MPa máxima e ocorreu nas laterais da primeira e segunda camada e a mínima de 0 MPa nos cantos superiores.

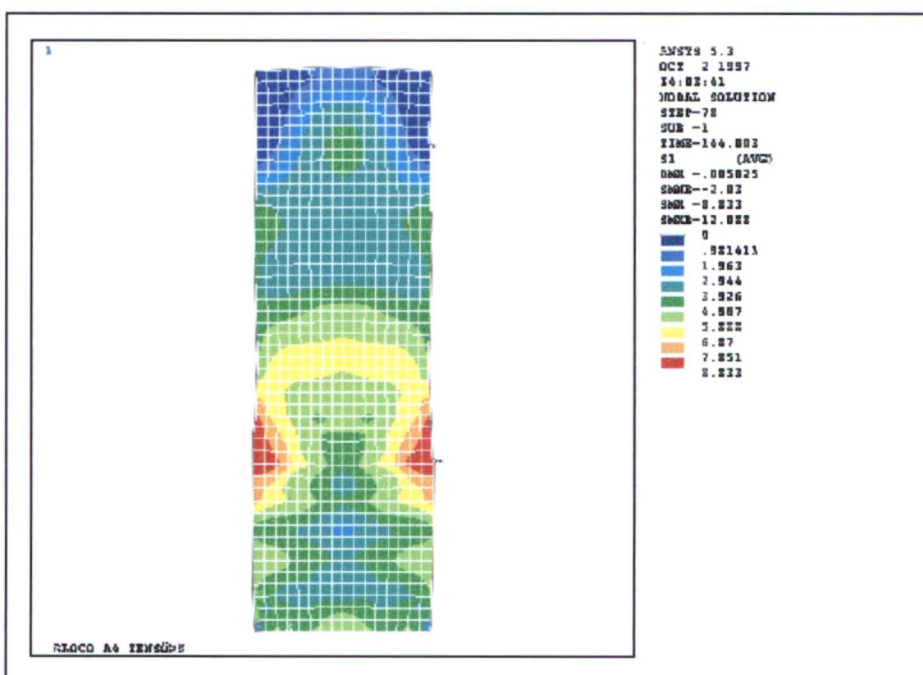


FIGURA 5.47 - A4 -TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA – até 144.003 horas

Na análise A4, a tensão de Von Mises, fig.5.48. A máxima tensão 8,904 MPa ocorreu na superfície inferior e laterais da primeira e segunda camada.

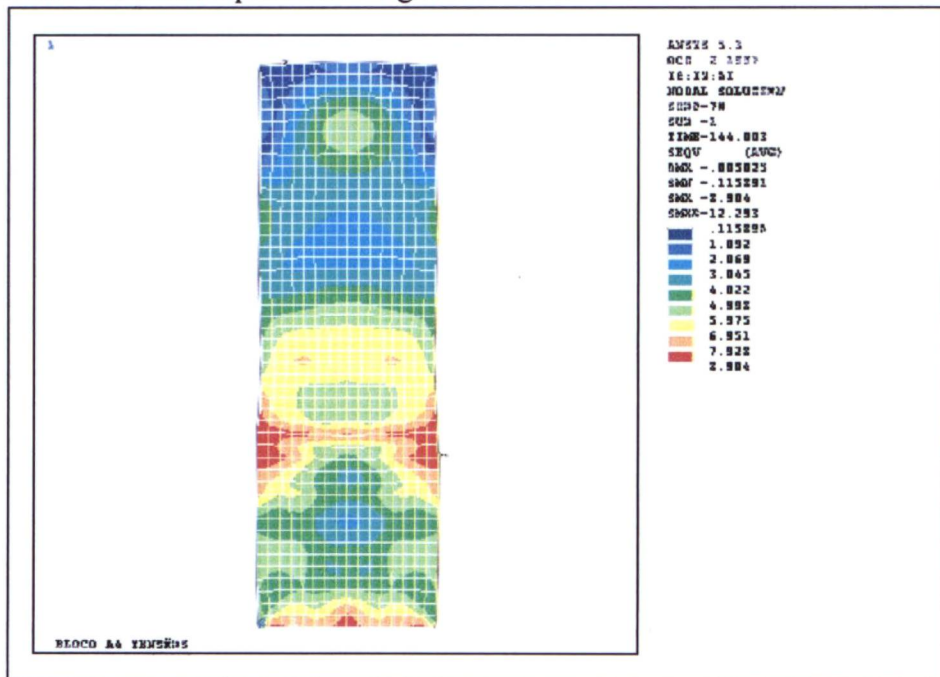


FIGURA 5.48 – A4 -TENSÃO DE VON MISES -3ª CAMADA – até 144.003 horas

O gráfico faz referência ao resultado nodal I e II da temperatura na fig. 5.49 e na fig. 5.50 o resultado da tensão principal

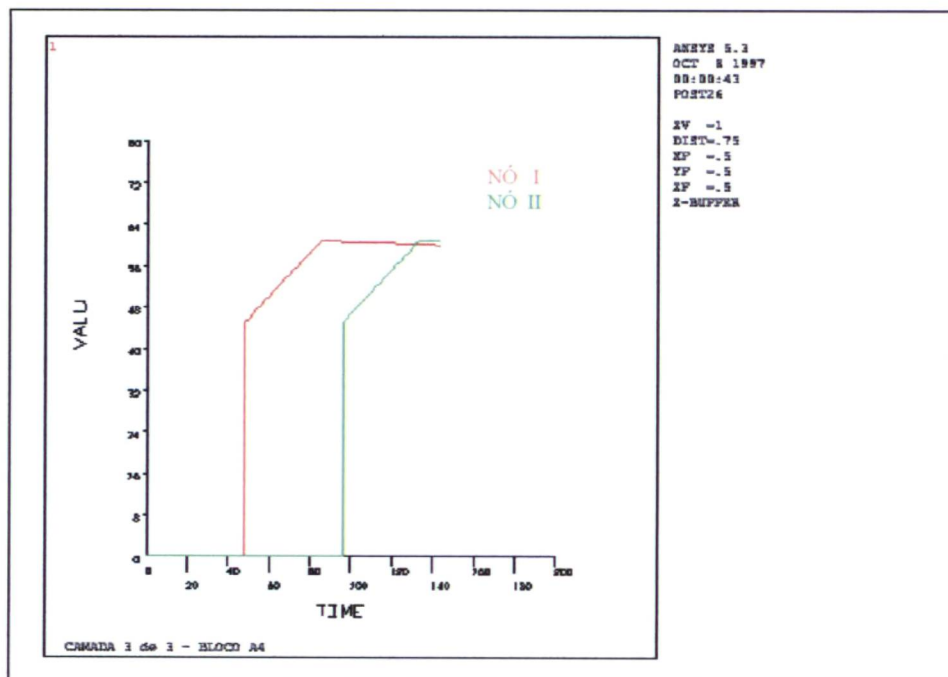


FIGURA 5.49 - A4 -TEMPERATURA NODAL – até 144.003 horas

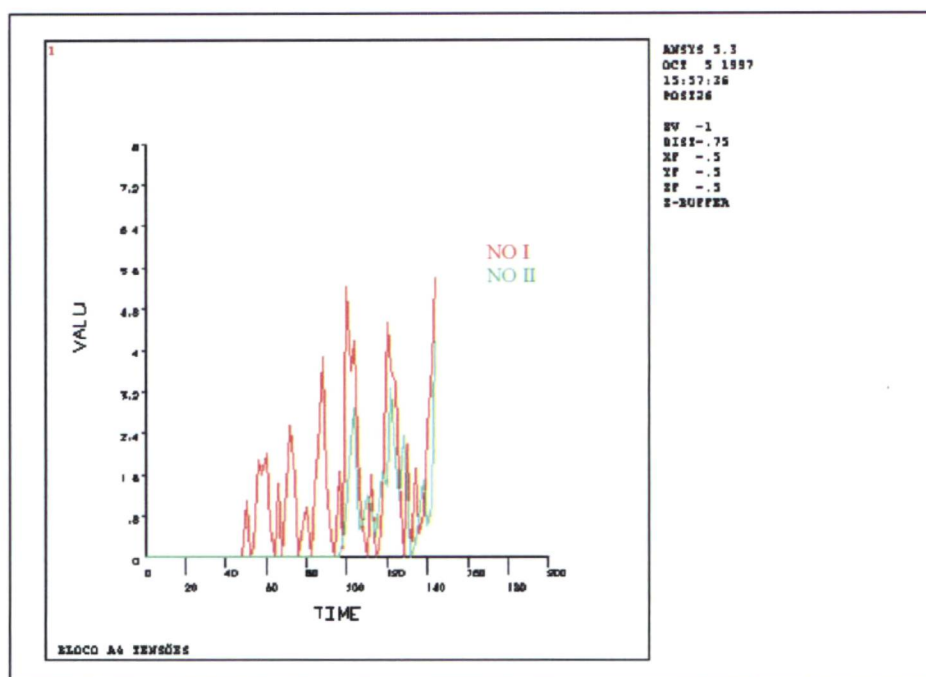


FIGURA 5.50 - A4 –TENSÃO PRINCIPAL NODAL – até 144.003 horas

A seguir, apresenta-se um resumo dos valores encontrados nas análises dos blocos denominados A1, A2, A3, A4 para temperatura e tensão.

TABELA 5.5A - VALORES DE TEMPERATURAS MÁXIMAS NO TEMPO FINAL DE CADA ANÁLISE

BLOCO			A1	A2	A3	A4
			TEMPERATURA (°C)	TEMPERATURA (°C)	TEMPERATURA (°C)	TEMPERATURA (°C)
NO I 144 (horas)	X (m)	2,00	58,74	58,89	59,97	59,93
	Y (m)	5,00				
NO II 144 (horas)	X (m)	2,00	57,96	60,55	60,64	60,77
	Y (m)	10,00				

TABELA 5.5B - VALORES DE TENSÃO MÁXIMA NO TEMPO FINAL DE CADA ANÁLISE

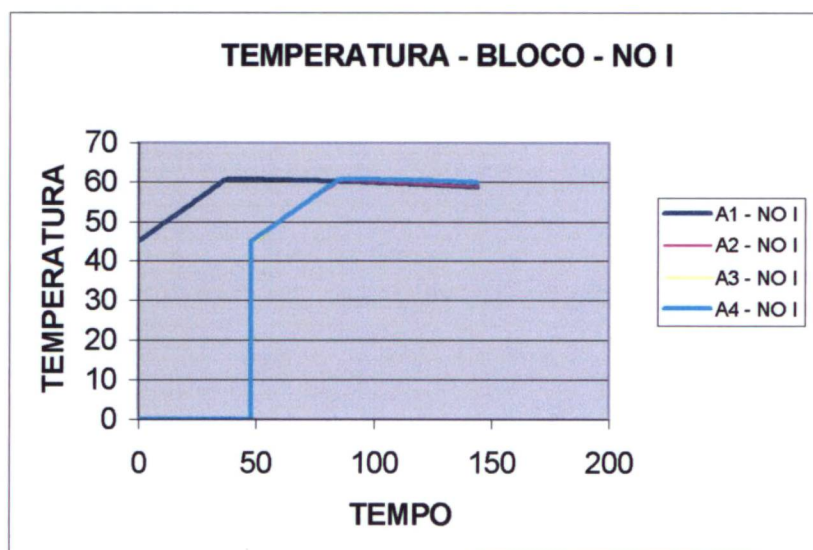
BLOCO			A1	A2	A3	A4
			TENSÃO (MPa)	TENSÃO (MPa)	TENSÃO (MPa)	TENSÃO (MPa)
NO I 144 (horas)	X (m)	2,00	1,19	3,60	7,32	5,42
	Y (m)	5,00				
NO II 144 (horas)	X (m)	2,00	0,49	1,63	3,33	4,18
	Y (m)	10,00				

Analisando o resultado da tabela 5.5A conclui-se que as temperaturas para todas as análises no tempo de 144 horas foram próximas. A análise A1 apresentou menor temperatura para o nó I e nó II.

A tabela 5.5B apresentou resultados de tensão e a maior ocorreu na análise A3 para o nó I e para o nó II a maior na ocorreu na análise A4. A menor para o nó I aparece na análise A1 no nó II a menor na A1 no tempo de 144 horas. A tensão não mostrou proximidade de valores entre as simulações como no caso da temperatura.

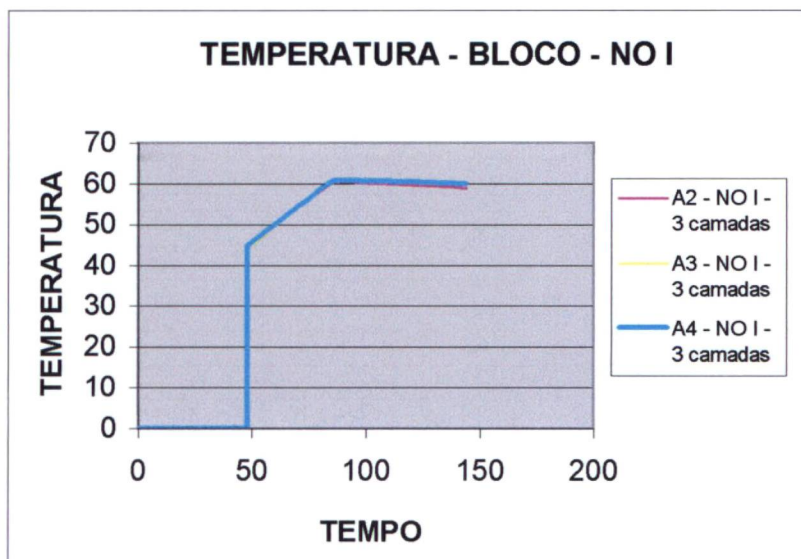
Os resultados de temperaturas e tensão podem ser representados graficamente. O gráfico comparativo de temperatura entre todas as hipóteses de simulações A1, A2, A3 e A4 em relação ao tempo do bloco para o nó I é representado pela fig.5.51A.

FIGURA 5.51A -TEMPERATURA PARA NÓ



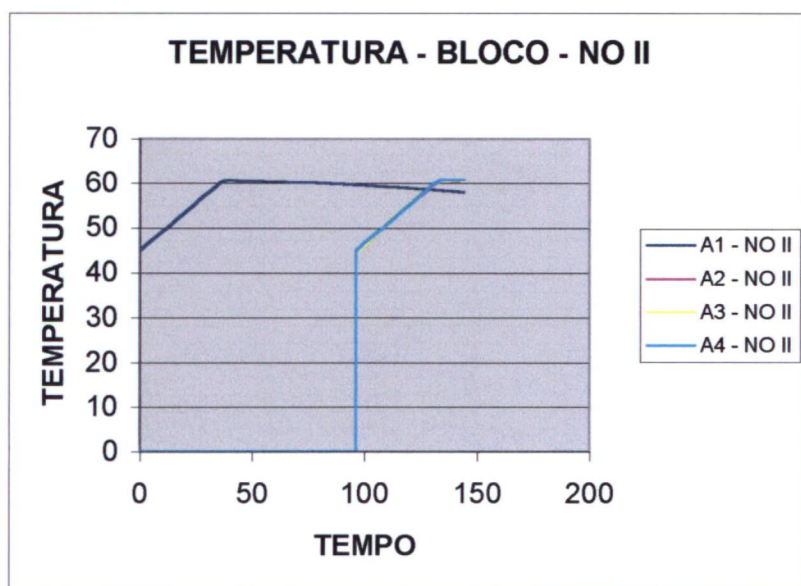
O gráfico comparativo de temperatura entre as hipóteses de simulações A2, A3 e A4 em relação ao tempo do bloco para o nó I pode ser analisado na fig.5.51B.

FIGURA 5.51B -TEMPERATURA PARA NÓ I –144 horas



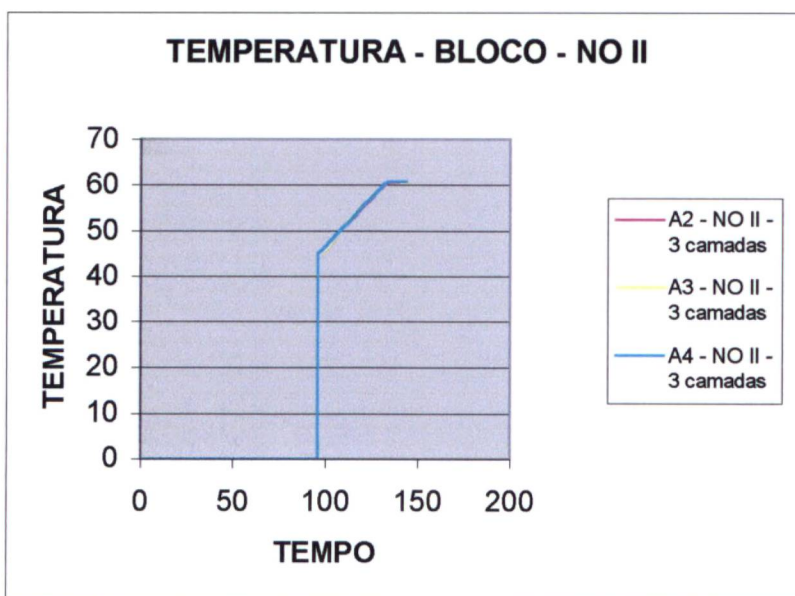
Na comparação de todas as hipóteses de simulações A1, A2, A3 e A4 de temperatura em relação ao tempo do bloco para o nó II são representados pela fig.5.52A

FIGURA 5.52A -TEMPERATURA PARA NÓ II



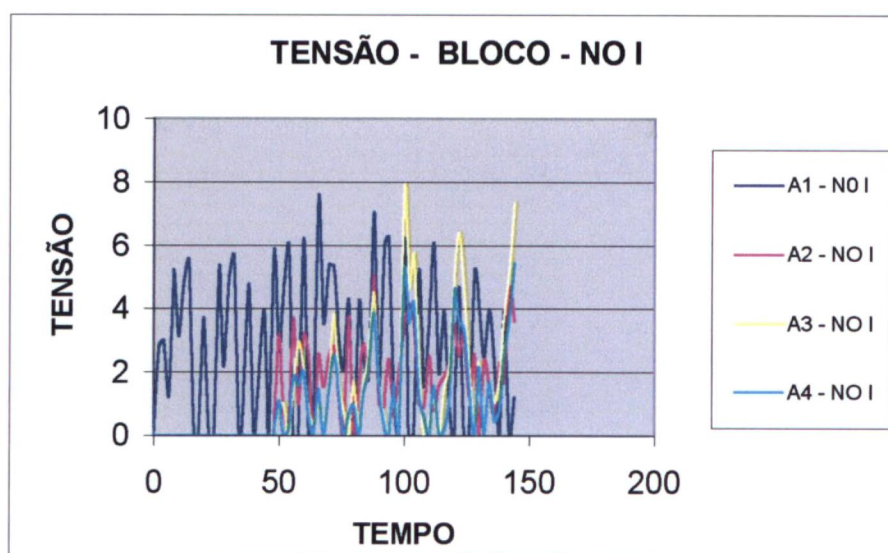
A comparação das hipóteses de simulações A2, A3 e A4 de temperatura em relação ao tempo do bloco para o nó II verifica-se pela fig.5.52B.

FIGURA 5.52B-TEMPERATURA PARA NÓ II



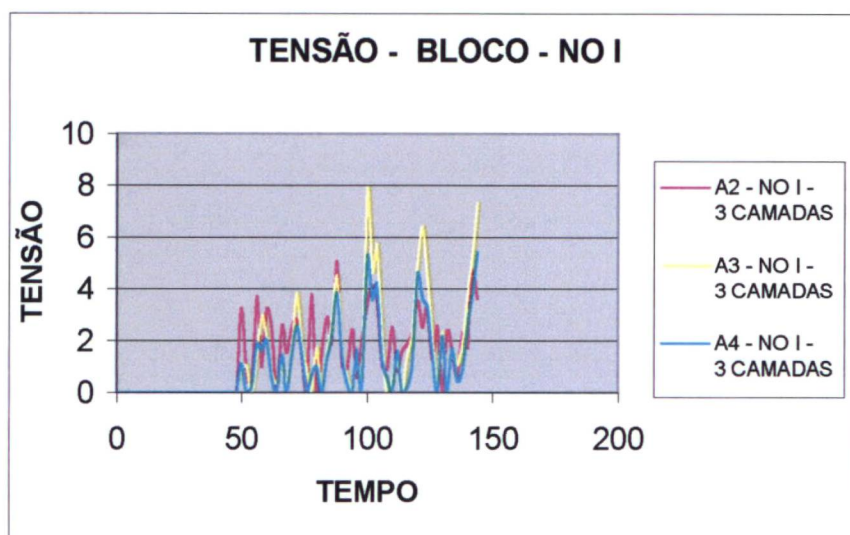
O gráfico comparativo de tensão entre as hipóteses de simulações A1, A2, A3 e A4 em relação ao tempo do bloco para o nó I está representado pela fig. 5.53A.

FIGURA 5.53A - TENSÃO PARA NÓ I



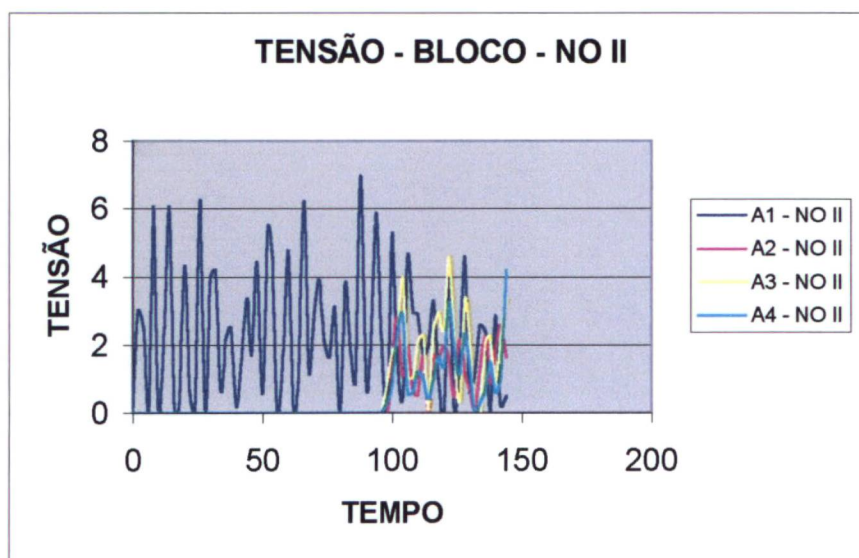
Comparando todas as hipóteses A2, A3 e A4 de tensão em relação ao tempo do bloco para o nó I verifica-se o resultado na fig.5.53B.

FIGURA 5.53B - TENSÃO PARA NÓ I – 144 horas



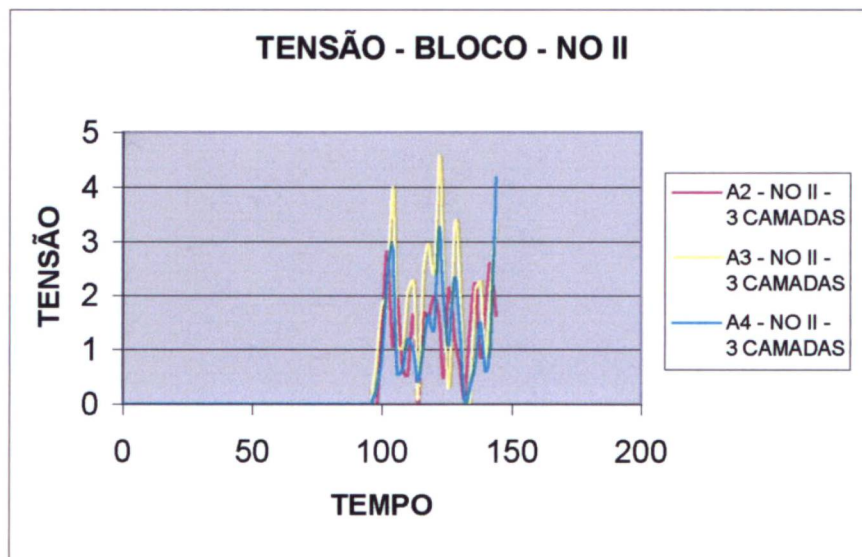
Nas simulações A1, A2, A3 e A4 de tensão em relação ao tempo do bloco para o nó II são representados pela fig.5.54A os resultados.

FIGURA 5.54A - TENSÃO PARA NÓ II



Analisando todas as hipóteses de simulações A1, A2, A3 e A4 de temperatura em relação ao tempo do bloco para o nó II são representados pela fig.5.54B

FIGURA 5.54B - TENSÃO PARA NÓ II – 144 horas



Nas figuras 5.51A e 5.51B o gráfico das simulações de temperatura apresentou semelhança na curva ascendente para as hipóteses A2, A3 e A4 para nó I e nó II. O mesmo ocorreu nas figuras 5.52A e 5.52B.

Na figura 5.53A o gráfico das simulações de tensão não apresentou semelhança nas linhas tempo x tensão. Houve grande oscilação na variação com o tempo. Todas apresentaram valores diferentes. Na hipótese A1 a linha inicia-se de zero por ter sido o bloco de camada única. Na figuras 5.53B comparou apenas A2, A3 e A4 e todas as hipóteses iniciaram a partir de determinado período por ser o bloco lançado em três camadas. Nesta figura conclui-se que A3 apresenta grande valor para tensão para nó I. A figura 5.53B conclui-se que A3 apresenta maior tensão e a menor aparece na hipótese A2 para nó I.

A figura 5.54A apresenta resultado de tensão para todas as hipóteses A1, A2, A3 e A4 e também apresentou variação nas linhas tensão x tempo. Nesta figura conclui-se que A1 apresenta grande valor para tensão para nó II. A figura 5.54B conclui-se que A3 apresenta maior tensão e a menor aparece na hipótese A2 para nó II.

### 5.2.3. Viga Serra Mesa – Temperatura e Tensão

Outra análise para validação do método foi a consideração do exemplo apresentado por ANDRADE (1997). Uma viga de suporte das pontes rolantes da casa de força da Usina Hidrelétrica Serra Mesa com 130 m de comprimento sendo atirantada no maciço rochoso da casa de força em caverna [KRÜGER, (2001)] Estas vigas possuem as dimensões conforme a fig.5.55.

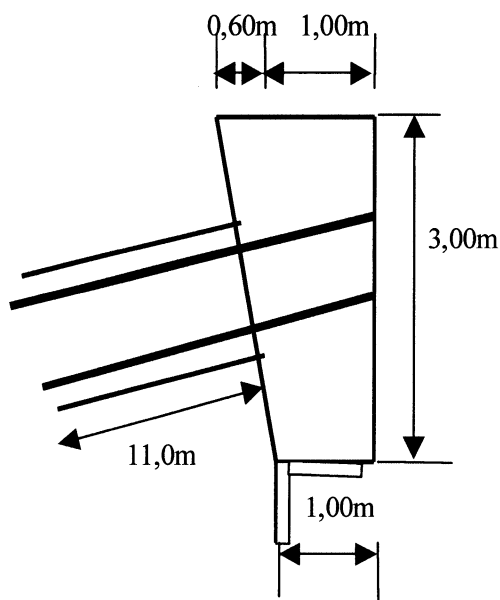


FIGURA 5.55 - SEÇÃO DA VIGA

As propriedades térmicas adotadas para análise da viga foram:

- Massa específica de  $2295 \text{ Kg}/\text{m}^3$  ;
- Calor específico de  $1063 \text{ J}/\text{Kg}^\circ \text{C}$  ( $1063 \text{ J}/\text{Kg K}$ );
- Condutividade térmica de  $8172 \text{ J}/\text{m h}^\circ \text{C}$  ( $2,27 \text{ W}/\text{m K}$ );
- Coeficiente de dilatação térmica de  $12,5 \cdot 10^{-6}/^\circ \text{C}$  ( $12,5 \cdot 10^{-6}/\text{K}$ );
- Coeficiente de transferência de calor do concreto-forma de madeira de  $8374 \text{ J}/\text{m}^2 \text{ h}^\circ \text{C}$  ( $2 \text{ kcal}/\text{m h}^\circ \text{C} = 2,33 \text{ W}/\text{m K}$ );
- Módulo de elasticidade  $14211 \text{ MPa}$ .

A viga foi discretizada por meio do Método dos Elementos Finitos através do ANSYS e a malha empregada tem a forma como mostra a fig. 5.56.

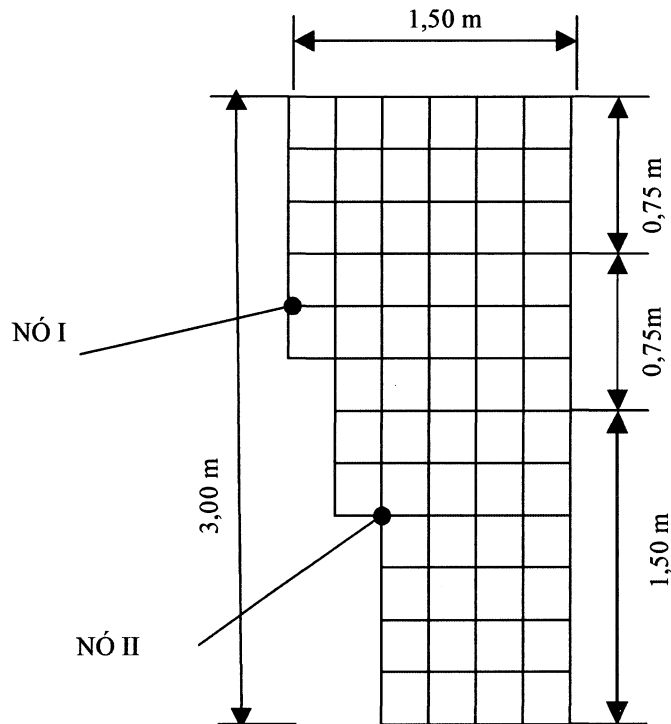


FIGURA 5.56 - DISCRETIZAÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL DA VIGA

A curva de elevação adiabática da temperatura do concreto, transformada em curva de geração de calor, da Usina Hidrelétrica de Serra da Mesa, conforme a Lei de Fourier [KRÜGER, (2001)], pode ser visto na tabela 5.6 e nas figuras 5.57 e 5.58.

Como condições de contorno para análise da temperatura foram considerados [KRÜGER, (2001)]:

- Fluxo de calor nulo na face inferior da primeira camada.
- Convecção na interface concreto-ar na lateral direita e na face superior da camada que foi executada.

Na análise de tensões a condição considerada foi:

- Engastamento dos nós do lado esquerdo da viga.

TABELA 5.6 -ELEVAÇÃO ADIABÁTICA DE TEMPERATURA E CURVA DE GERAÇÃO DE CALOR

TEMPO		T (°C)	Q (J \ m <sup>3</sup> h)
(dias)	(horas)		
0	0	0,00	1.974.031
1	24	16,02	1.282.815
1,5	36	21,48	825.359
2	48	24,75	527.686
3	72	28,22	247.001
4	96	29,94	134.525
5	120	30,94	81.624
7	168	32,02	37.176
10	240	32,79	15.689
15	360	33,35	5.758
28	672	33,84	1.202

Na fig. 5.57 verifica-se a curva de elevação adiabática e na fig. 5.58 [KRÜGER, (2001)].

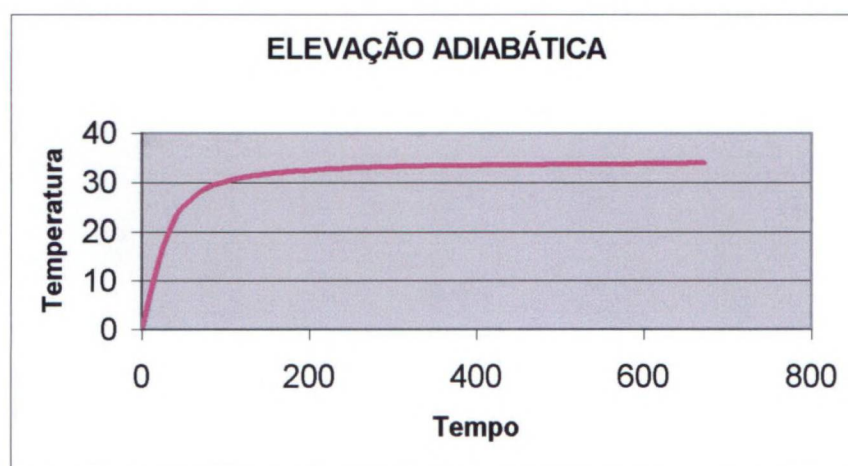


FIGURA 5.57 - CURVA DE ELEVAÇÃO ADIABÁTICA

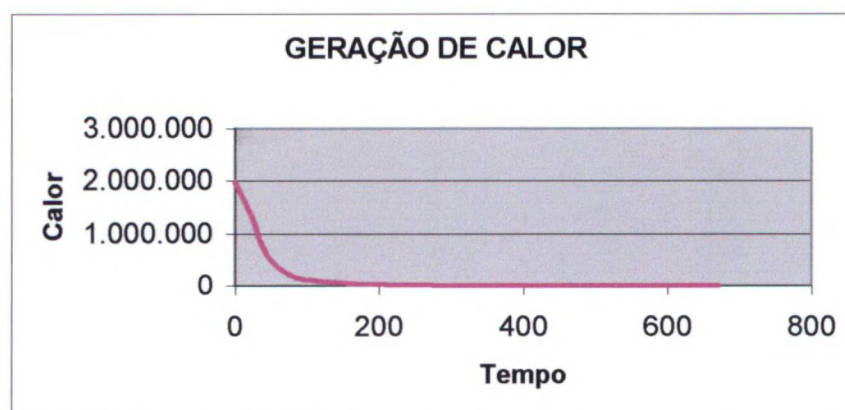


FIGURA 5.58 - CURVA DE GERAÇÃO DE CALOR

Para a identificação das análises foram consideradas as seguintes hipóteses :

- Para todas as hipóteses o elemento considerado para temperatura foi o quadrangular de 4 nós, ou seja, o PLANE 55 e para tensão o PLANE 42. O incremento de tempo considerado foi de 12 horas.
- Em todas as hipóteses a temperatura ambiente considerada foi de 25,5° C.

Com a análise de temperatura, em todas as hipóteses, os resultados são utilizados para encontrar tensões. As tabelas 5.7A e 5.7B apresentam resumidamente os dados de cada hipótese.

TABELA 5.7A - RESUMO DAS CONSIDERAÇÕES NAS SIMULAÇÕES

HIPÓTESE TEMPERATURA E TENSÃO	ALTURA DAS CAMADAS (m)			INTERVALO DE LANÇAMENTO (horas)	TEMPERATURA DO CONCRETO (°C)	MALHA (m)
	1ª	2ª	3ª			
V0	3,00	-	-	-	27	0,25 X 0,25
V1	1,5	0,75	0,75	168	27	0,25 X 0,25
VIB	1,5	0,75	0,75	168	27	0,125 X 0,125
VIC	1,5	0,75	0,75	168	27	0,0625 X 0,0625
V2	1,5	0,75	0,75	336	27	0,25 X 0,25
V3	1,5	0,75	0,75	504	27	0,25 X 0,25
V4	1,5	0,75	0,75	168	30	0,25 X 0,25
V5	1,5	1,5	-	168	27	0,25 X 0,25
V6	1,5	1,5	-	336	27	0,25 X 0,25
V7	1,5	1,5	-	504	27	0,25 X 0,25
V8	1,5	1,5	-	504	30	0,25 X 0,25

A primeira análise denominada de V0, o campo de temperatura na camada única pode ser verificada na fig.5.59 atingindo um máximo de 55,011° C e um mínimo de 26,754° C. Na fig. 5.60 a tensão principal atinge um máximo de 6,516 MPa e um mínimo de 0 Mpa.

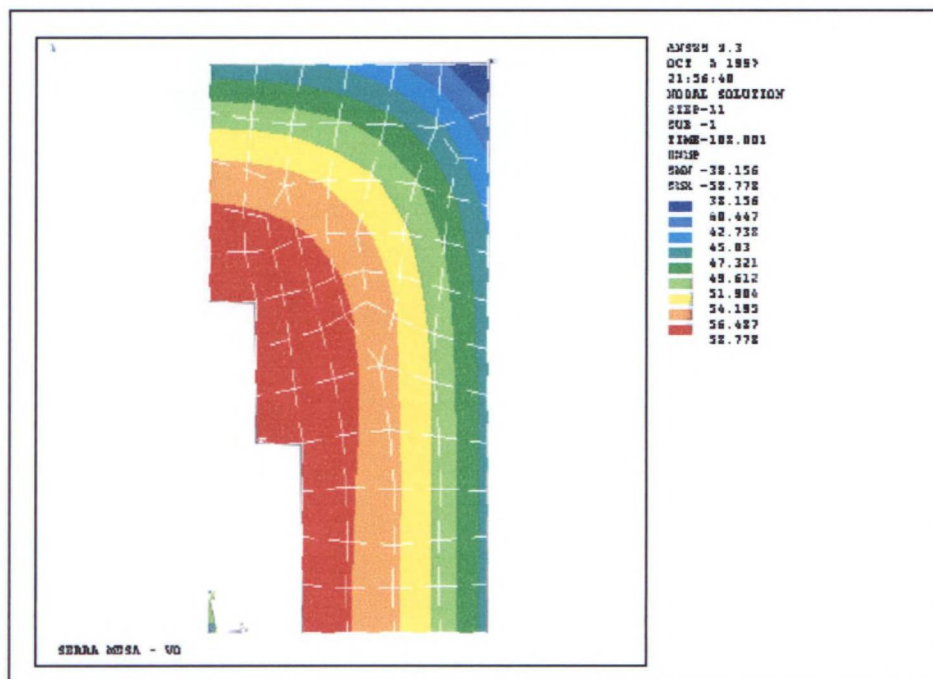


FIGURA 5.59 - V0 - TEMPERATURA - CAMADA ÚNICA - até 108.001 horas

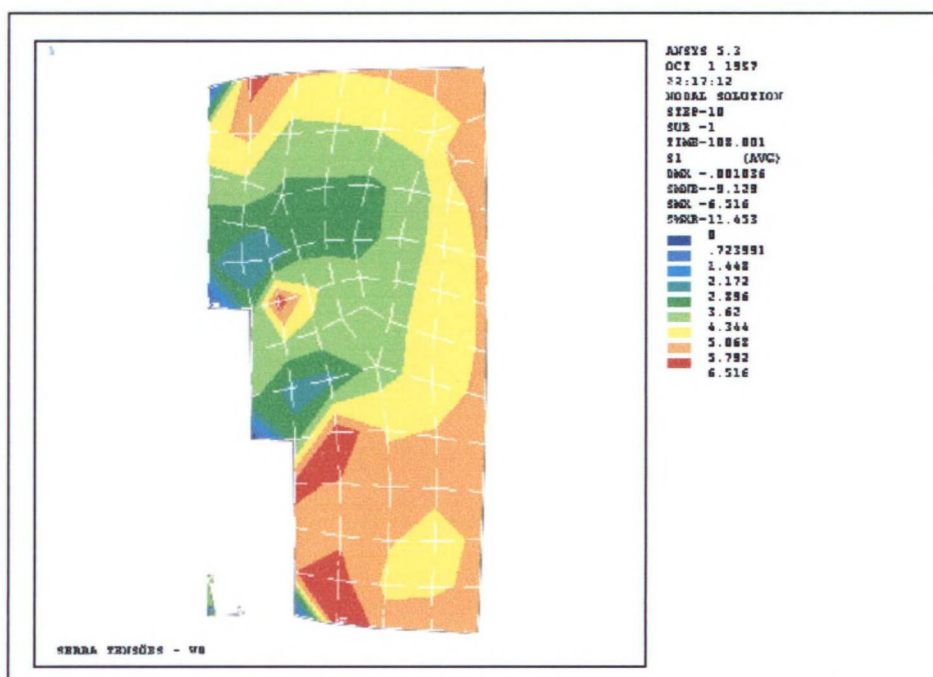


FIGURA 5.60 - V0 - TENSÃO PRINCIPAL - CAMADA ÚNICA - até 108.001 horas

Os gráficos com resultados nodais I e II mostrando a variação da temperatura e da tensão no tempo estão indicados na fig. 5.61 e na fig. 5.62.

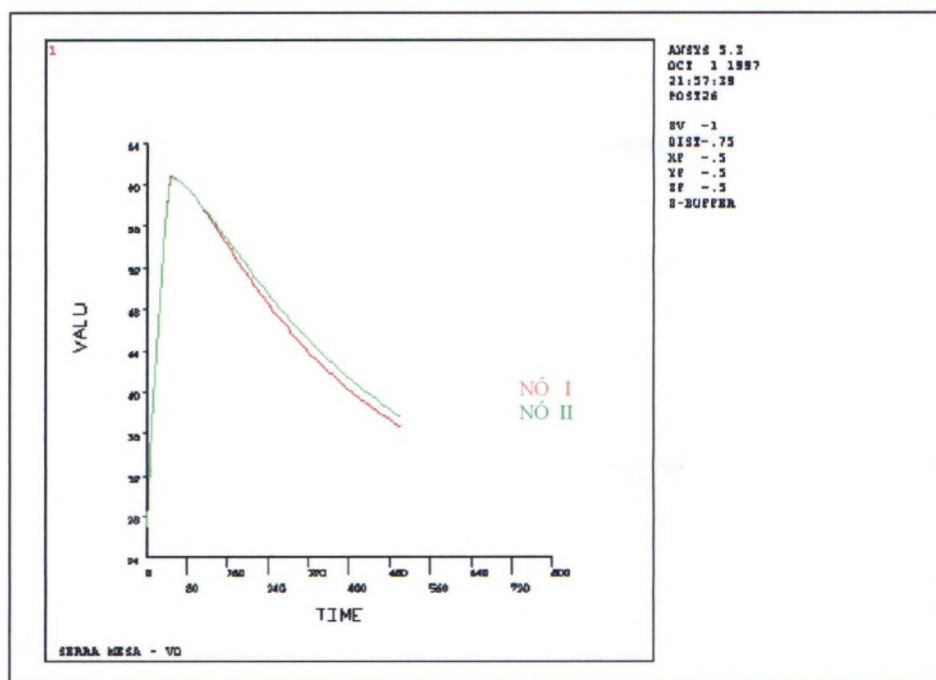


FIGURA 5.61 – V0 -RESULTADO NODAL – TEMPERATURA - até 504.003 horas

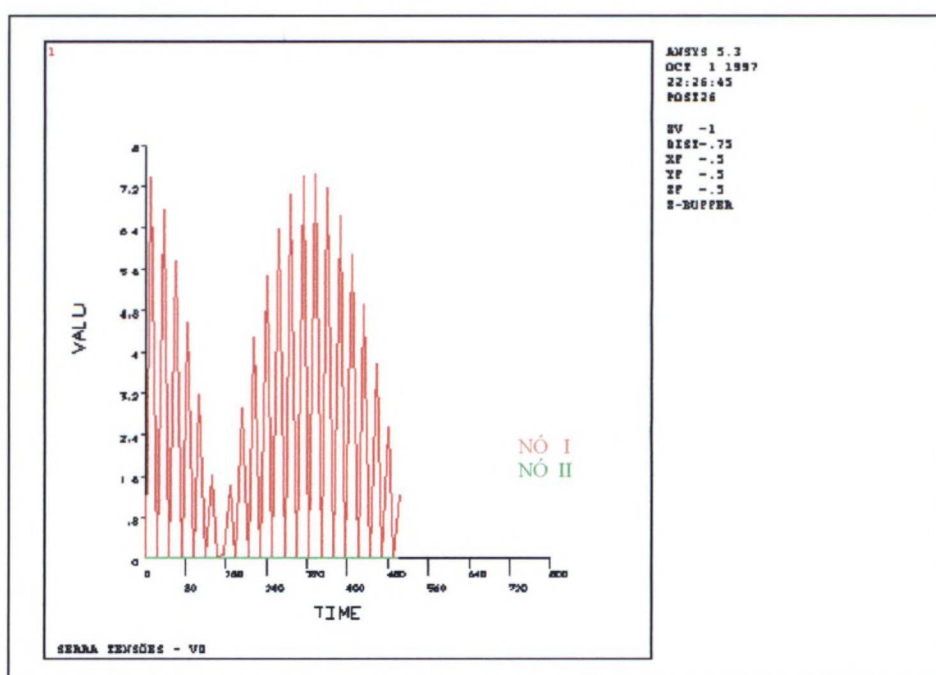


FIGURA 5.62 – V0 - RESULTADO NODAL – TENSÃO - até 504.003 horas

Na análise denominada de V1, correspondente ao caso de 3 camadas, a temperatura pode ser verificada na fig.5.63 atingindo um máximo de  $40,917^{\circ}\text{C}$ . Nas áreas não ativadas na fig.5.63 a temperatura é  $0^{\circ}\text{C}$ . A tensão principal, pode ser verificada na fig. 5.64, atingindo um máximo de  $7,426\text{ MPa}$  no lado engastado e um mínimo  $0\text{ Mpa}$  na superfície inferior da viga.

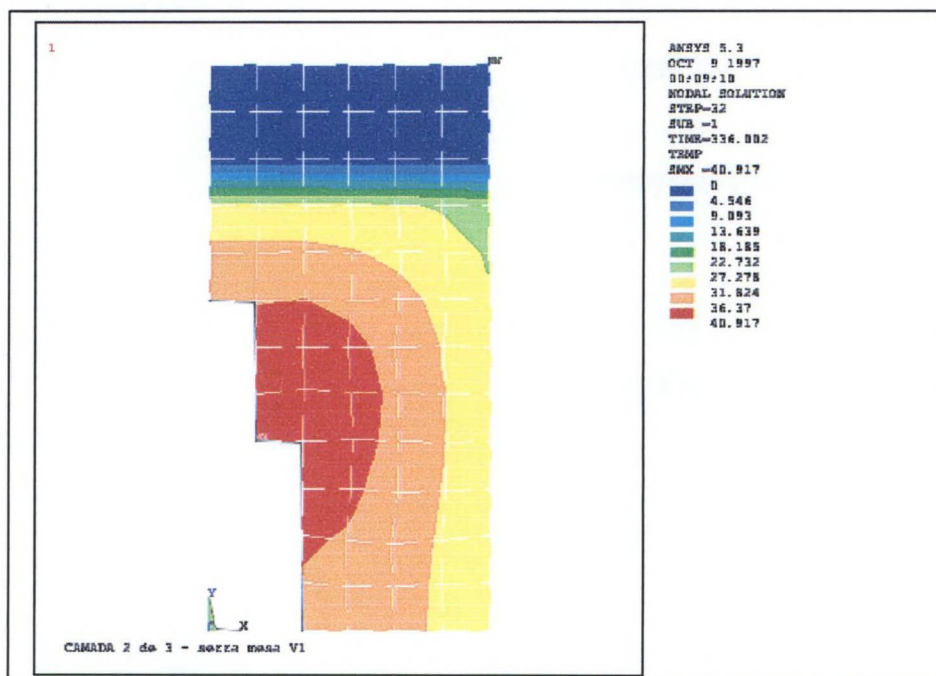


FIGURA 5.63 -V1 - TEMPERATURA - 2ª CAMADA - até 336.002 horas

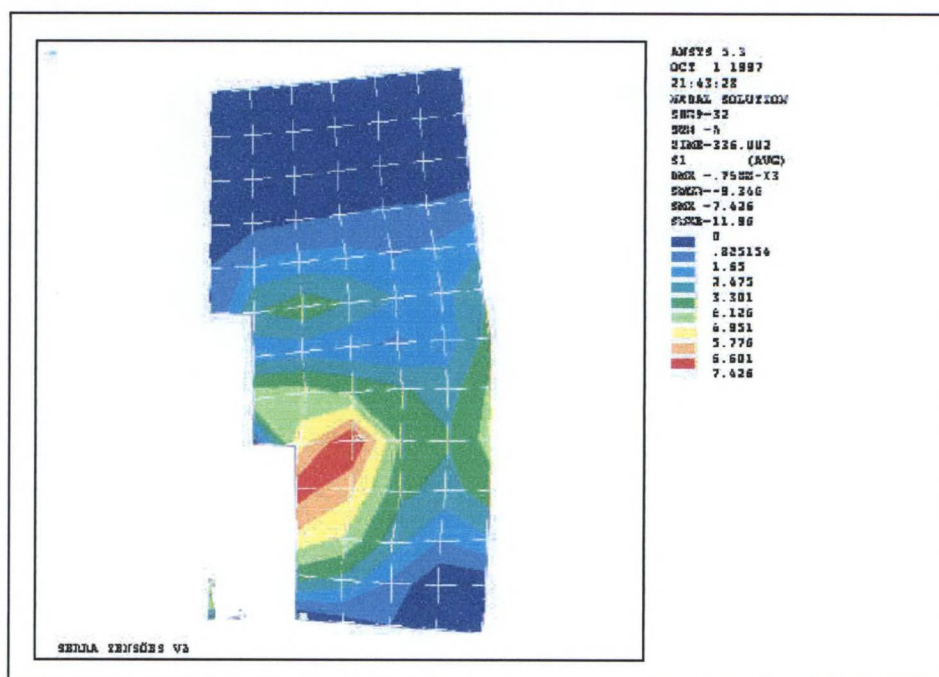


FIGURA 5.64 - V1 - TENSÃO PRINCIPAL - 2ª CAMADA - até 336.002 horas

Os gráficos com resultados nodais I e II, da variação da temperatura e tensão no tempo são mostrados verificado na fig. 5.65 e na fig. 5.66.

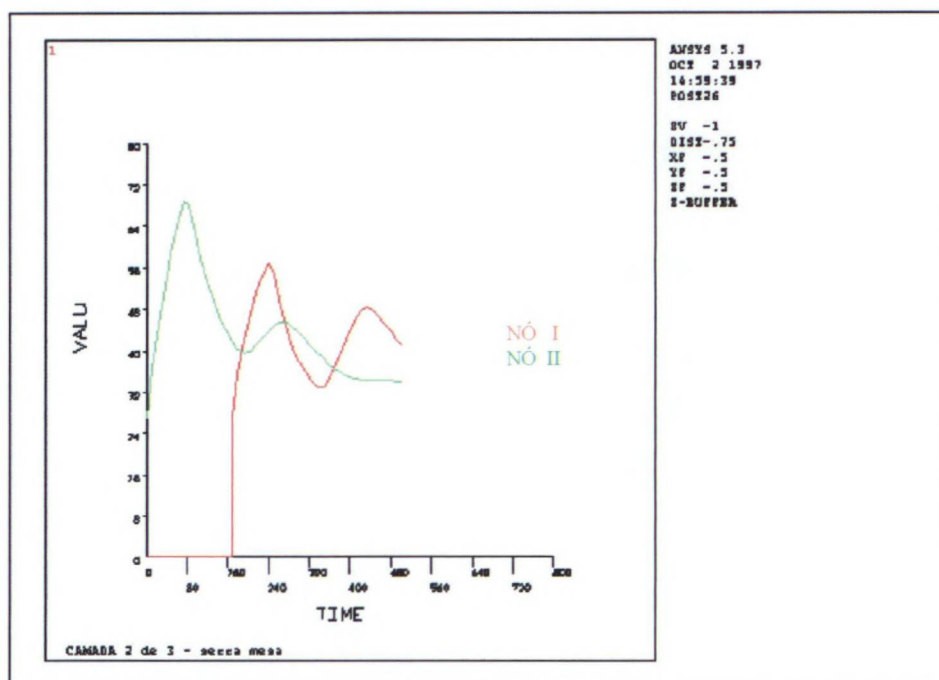


FIGURA 5.65 – V1 -RESULTADO NODAL – TEMPERATURA - até 504.003 horas

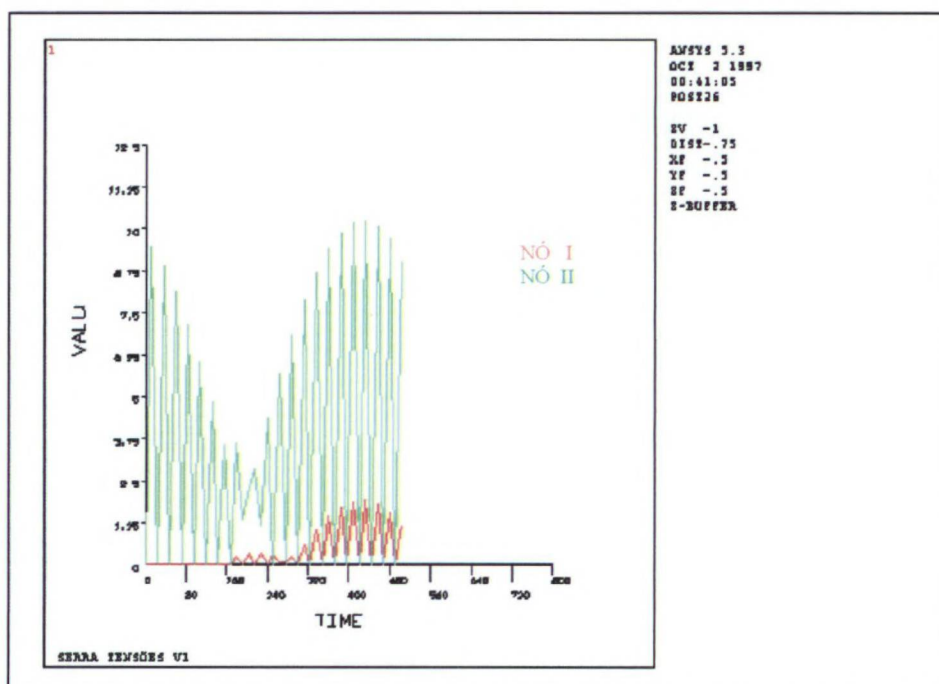


FIGURA 5.66 - V1- RESULTADO NODAL – TENSÃO - até 504.003 horas

Na análise V1B, fig.5.67, atingindo um máximo de 37.253 ° C na região esquerda, lado engastado. O valor mínimo da temperatura está no lado superior da camada. As camadas desativadas são representadas pelo valor de 0° C, parte superior da viga. A tensão principal na fig.5.68 atingindo um máximo de 9,202 MPa no lado esquerdo do engastamento .

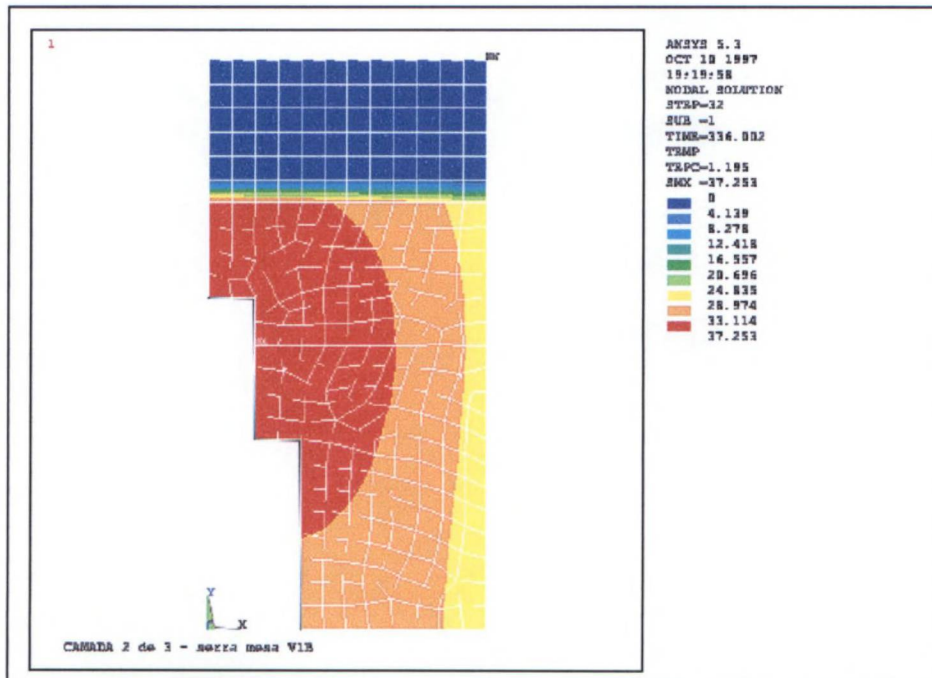


FIGURA 5.67 -V1B -TEMPERATURA - 2ª CAMADA - até 336.002 horas

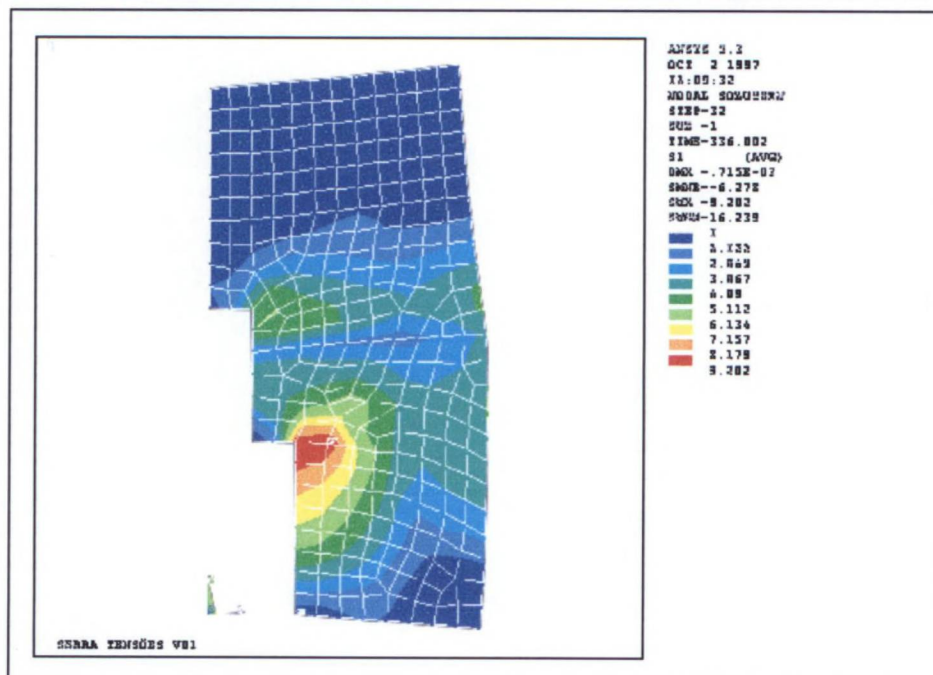


FIGURA 5.68 - V1B - TENSÃO PRINCIPAL - 2ª CAMADA – até 336.002 horas

Ainda para a V1B, os resultados de temperatura e de tensões para o tempo 504 horas são mostrados nas fig. 5.69 e fig. 5.70. Como se pode observar um máximo de  $34.234\text{ }^{\circ}\text{C}$  na região esquerda da viga que está engastada. A temperatura mínima é de  $26.056^{\circ}\text{C}$  que fica no lado direito não engastado. A tensão principal, fig.5.70 atinge um máximo de  $8,406\text{ Mpa}$ , região do engastamento.

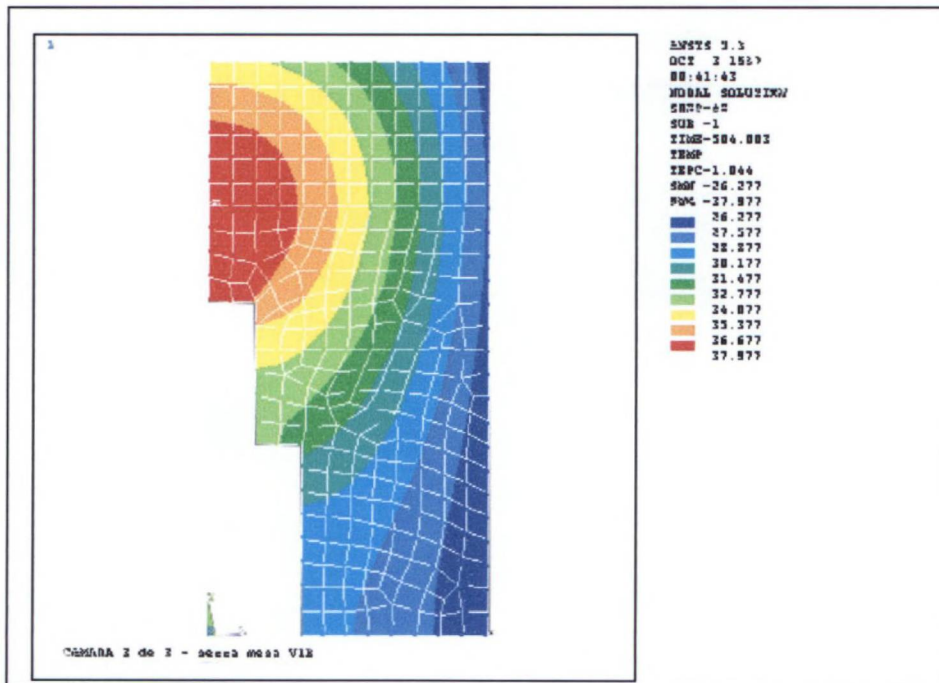


FIGURA 5.69 - V1B - TEMPERATURA - 3ª CAMADA – até 504.003 horas

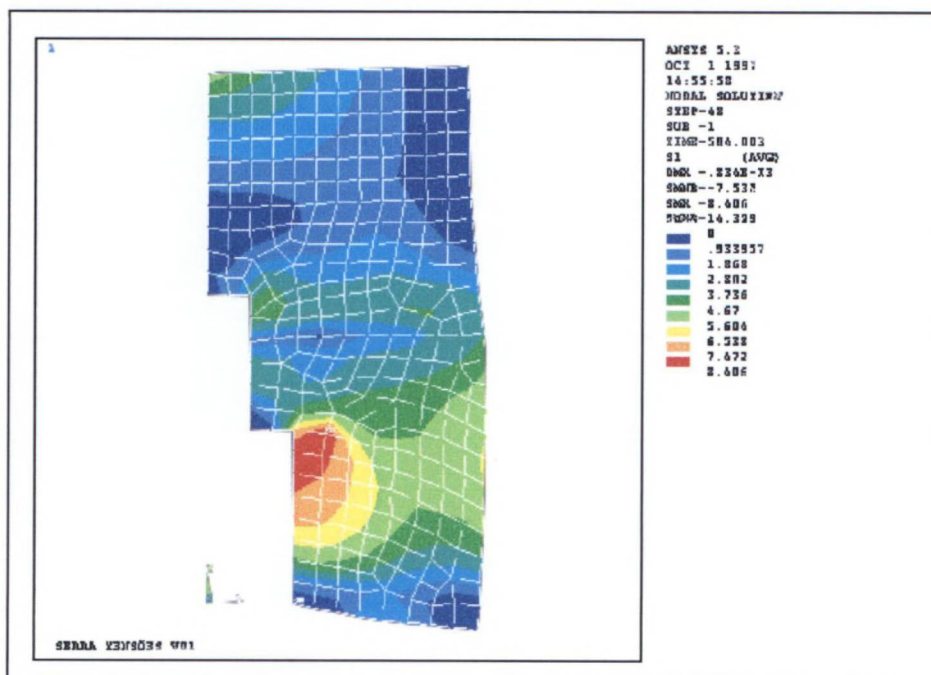


FIGURA 5.70 - V1B - TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA – até 504.003 horas

A fig. 5.71 representa a temperatura dos pontos nodais I e II, variando no tempo e na fig. 5.72 a tensão também variando com o tempo.

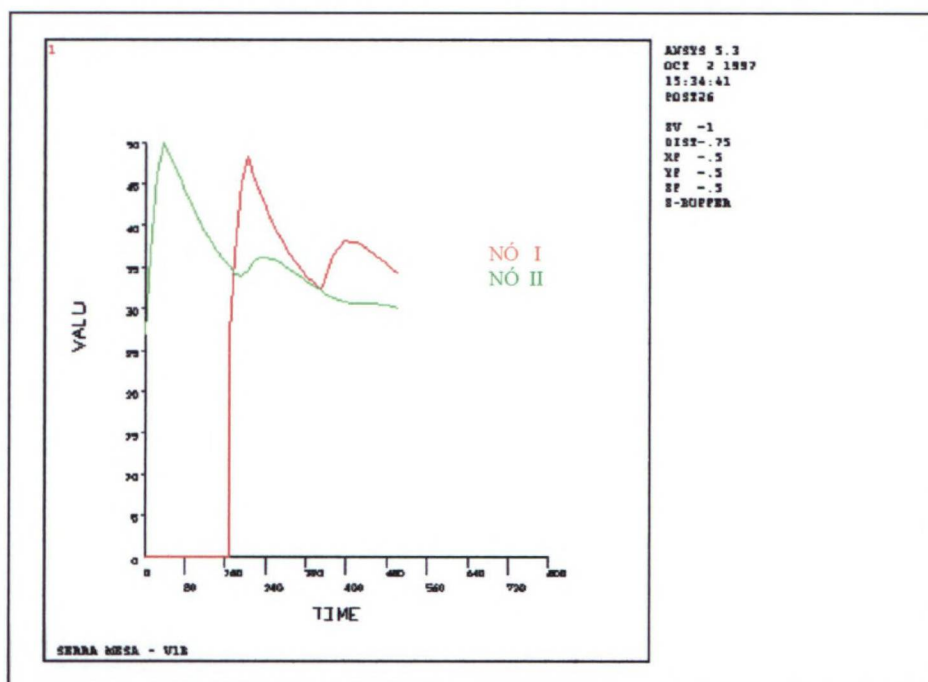


FIGURA 5.71 – VIB - RESULTADO NODAL – TEMPERATURA - até 504.003 horas

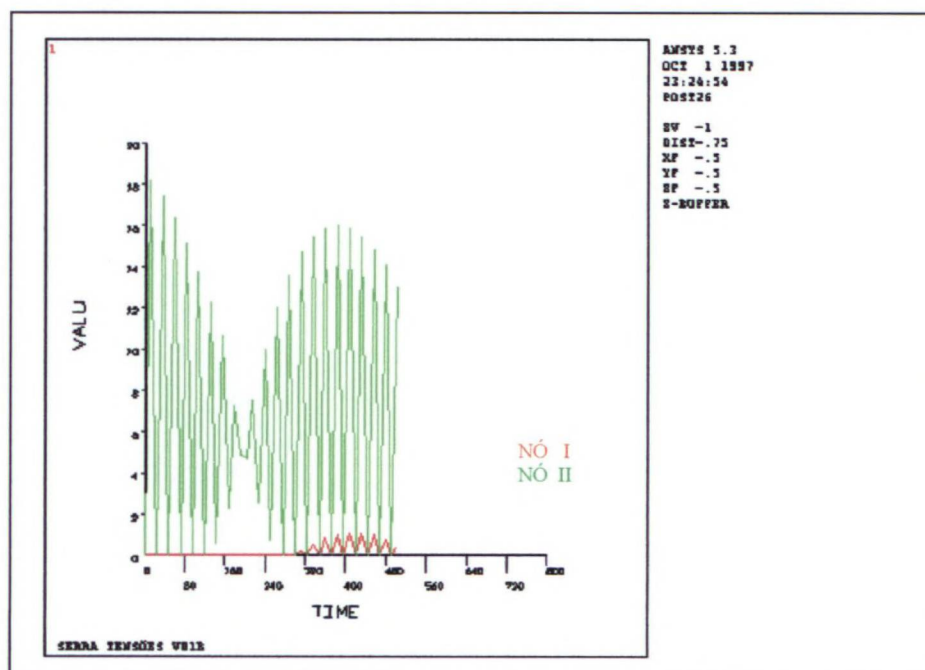


FIGURA 5.72– VIB - RESULTADO NODAL – TENSÃO - até 504.003 horas

Na análise VIC, é semelhante aos dois casos anteriores, porém com a malha mais refinada. Observa-se agora que a temperatura, fig.5.73, atingindo um máximo de 38,477 ° C na região esquerda, lado engastado. O valor mínimo da temperatura está no lado direito da camada. A fig.5.74 representa a tensão principal com valor máximo de 12,805 Mpa.

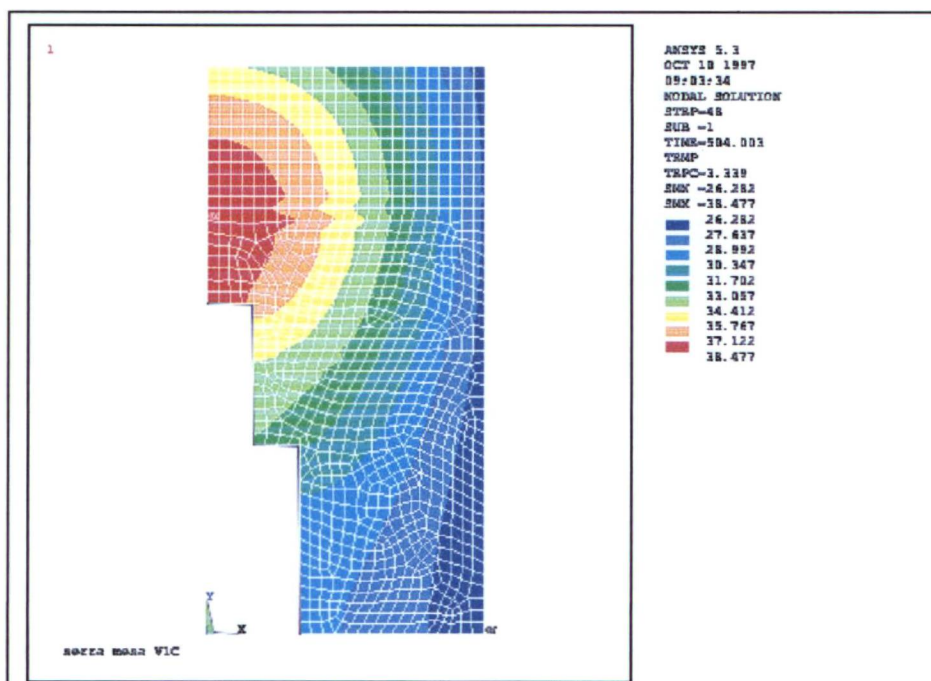


FIGURA 5.73 -VIC- TEMPERATURA - 3ª CAMADA – até 504.003 horas

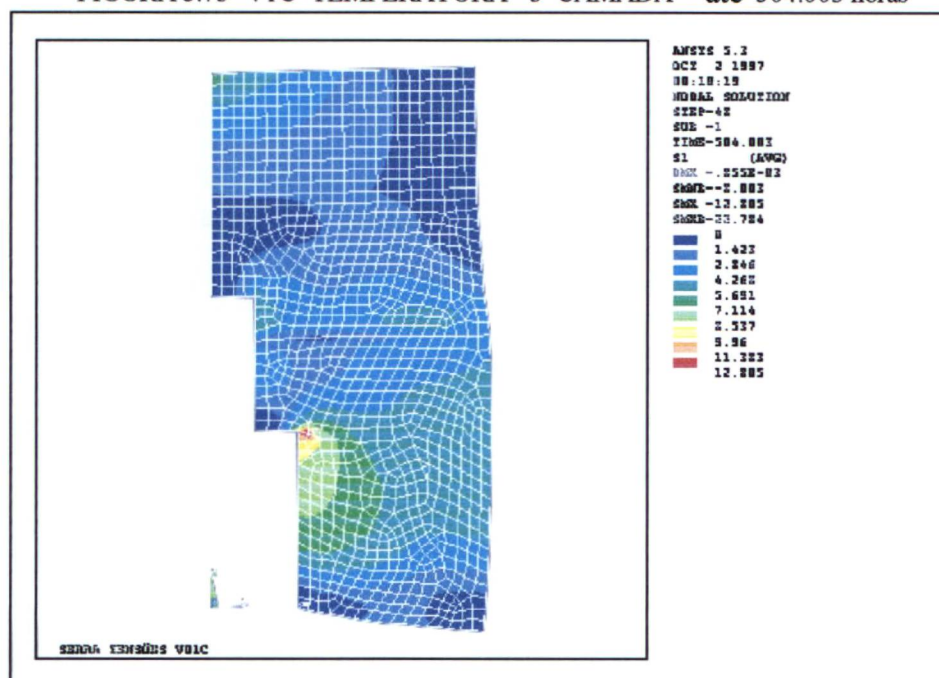


FIGURA 5.74 -VIC - TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA – até 504.003 hora

Os gráficos das fig 5.75 e na fig.5.76 mostram os resultados nodais I e II, da variação da temperatura e tensão com o tempo.

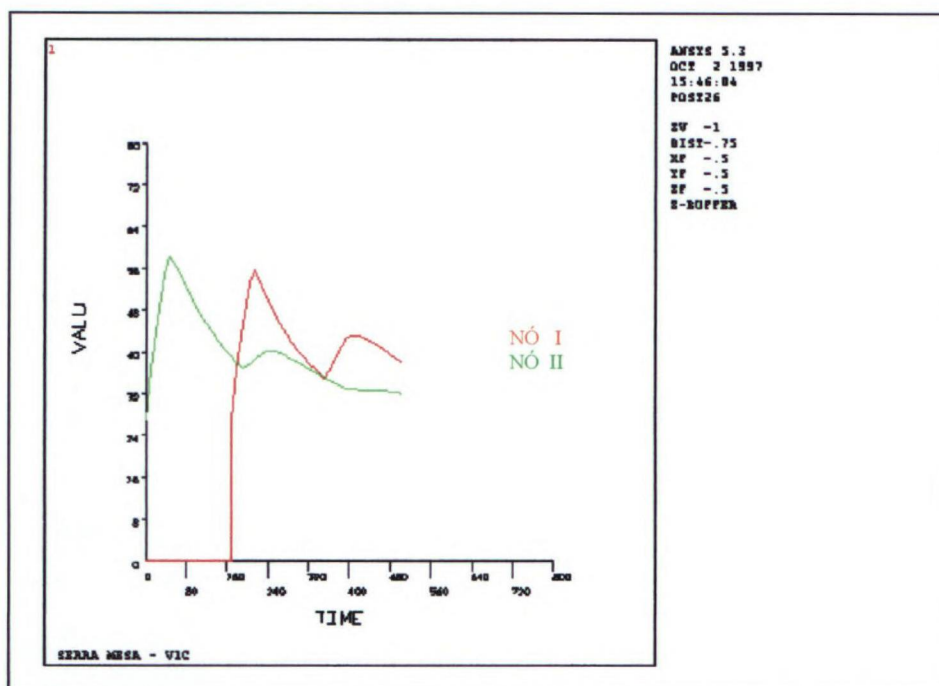


FIGURA 5.75 - VIC -RESULTADO NODAL – TEMPERATURA – até 504.003 horas

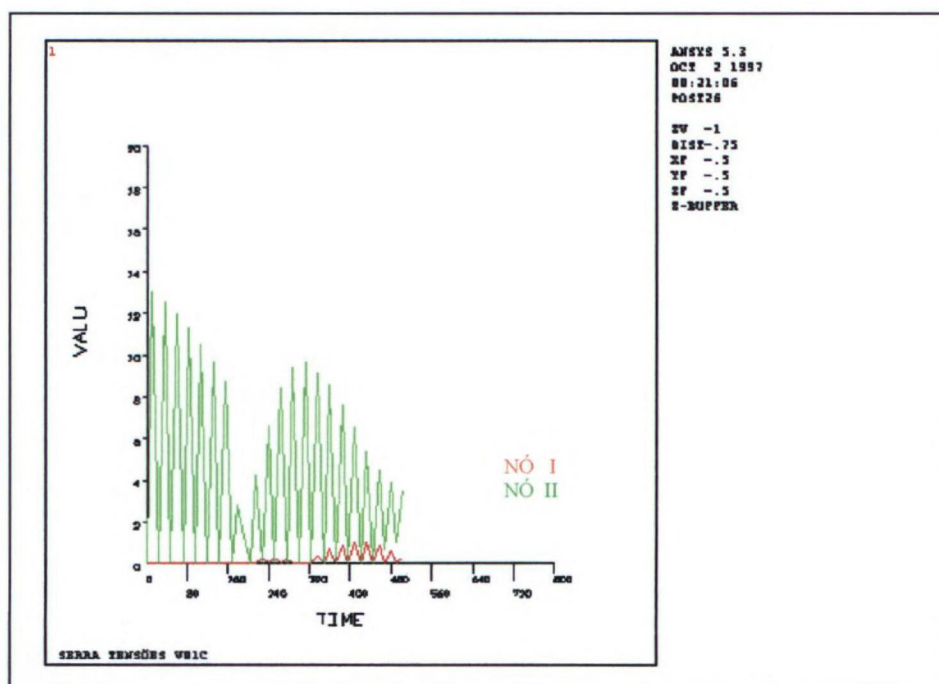


FIGURA 5.76 – VIC - RESULTADO NODAL – TENSÃO – até 504.003 horas

Na análise V2, considera-se novamente o caso de três camadas, mas o intervalo de tempo entre duas camadas sucessivas maior (336 horas). A temperatura fig.5.77, atinge um máximo de 52,922°C na região esquerda da viga. A tensão principal na terceira camada (fig.5.78) máxima foi de 1,969 MPa, nos cantos do lado esquerdo superior.

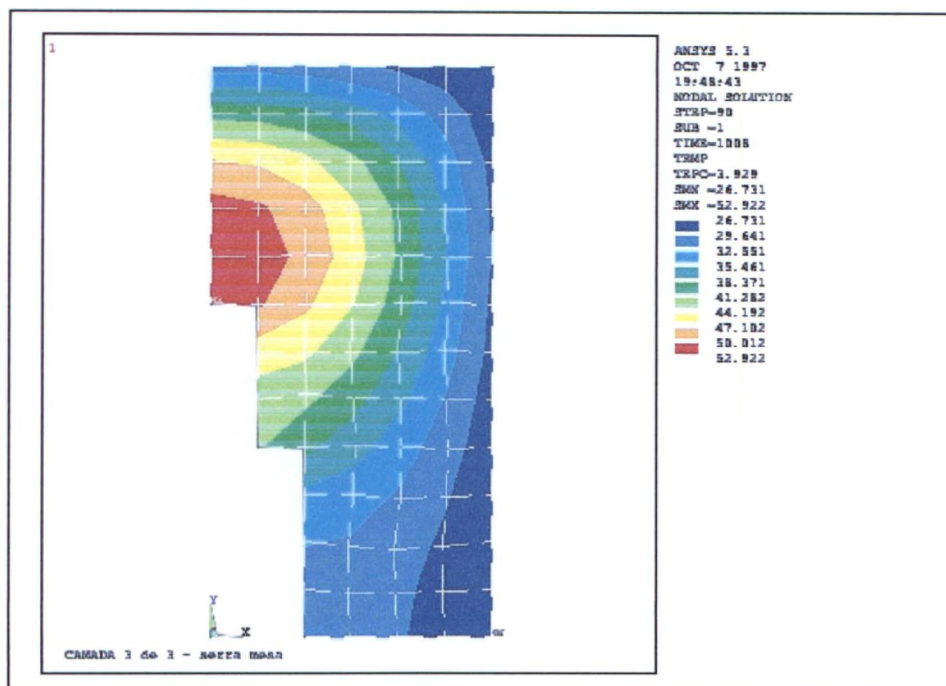


FIGURA 5.77 -V2 - TEMPERATURA - 3ª CAMADA – até 1008 horas

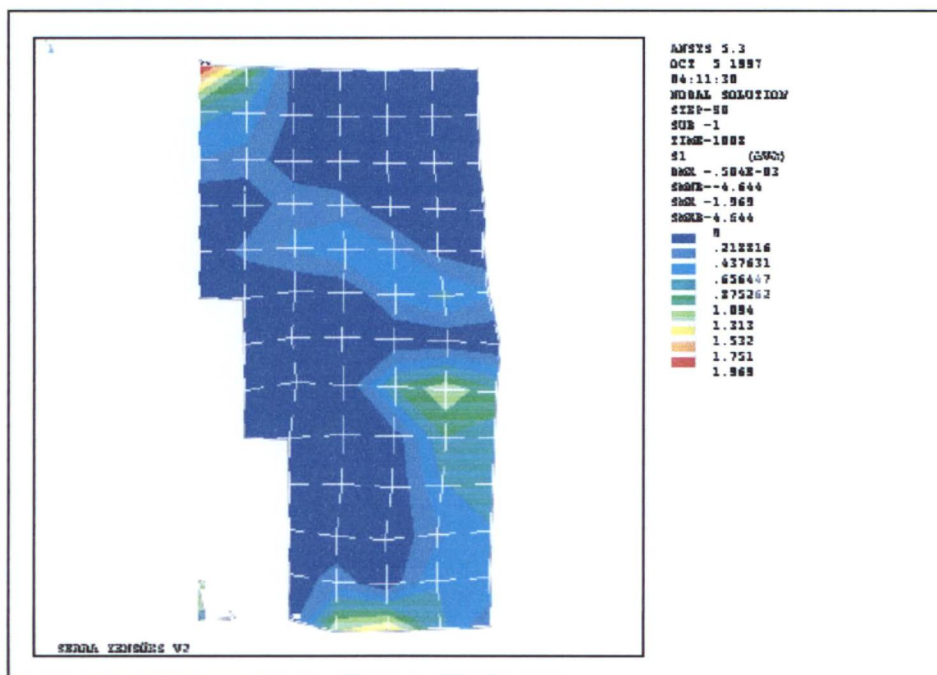


FIGURA 5.78 - V2 – TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA – até 1008 horas

Os gráficos representando os valores nodais em I e II, da temperatura e da tensão variando no tempo estão nas fig.5.79 e fig.5.80.

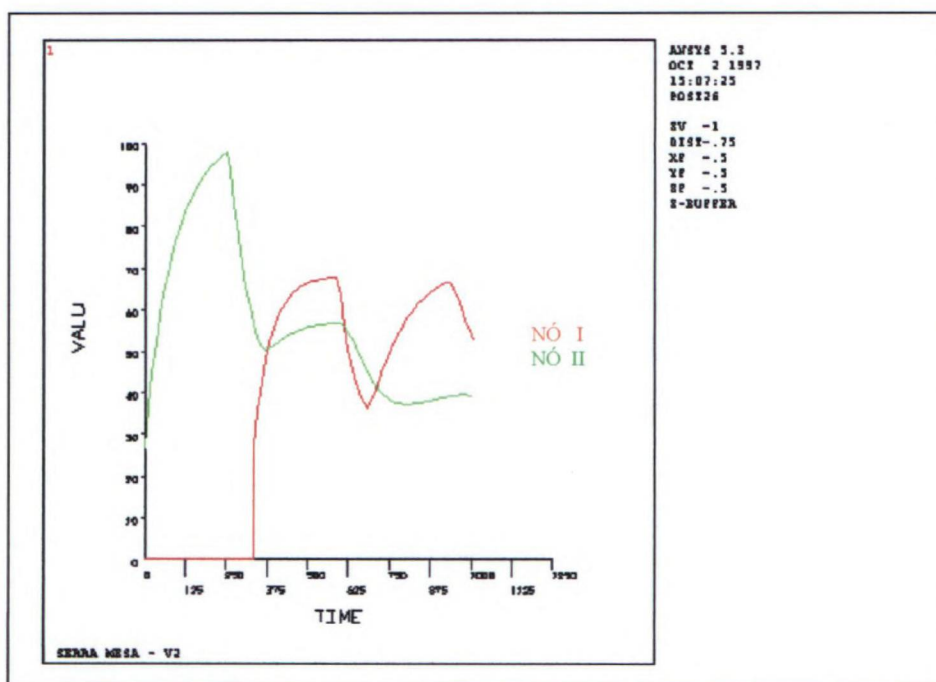


FIGURA 5.79 – V2 - RESULTADO NODAL – TEMPERATURA – até 1008 horas

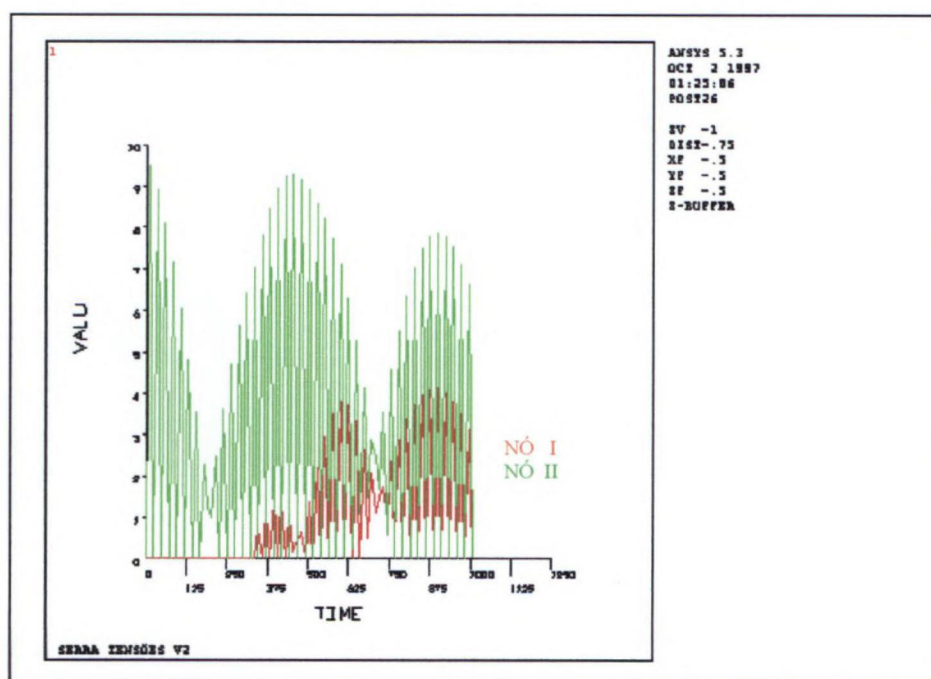


FIGURA 5.80 – V2 - RESULTADO NODAL – TENSÃO – até 1008 horas

Na análise V3 com o intervalo de tempo ainda maior (504 horas), a tensão principal na terceira camada, fig.5.81 máxima foi de 3,914 MPa, nos cantos esquerdo superior. A Tensão de Von Mises, fig.5.82, máxima de 7,16 MPa, nos cantos esquerdo inferior para o tempo de 1512 horas.

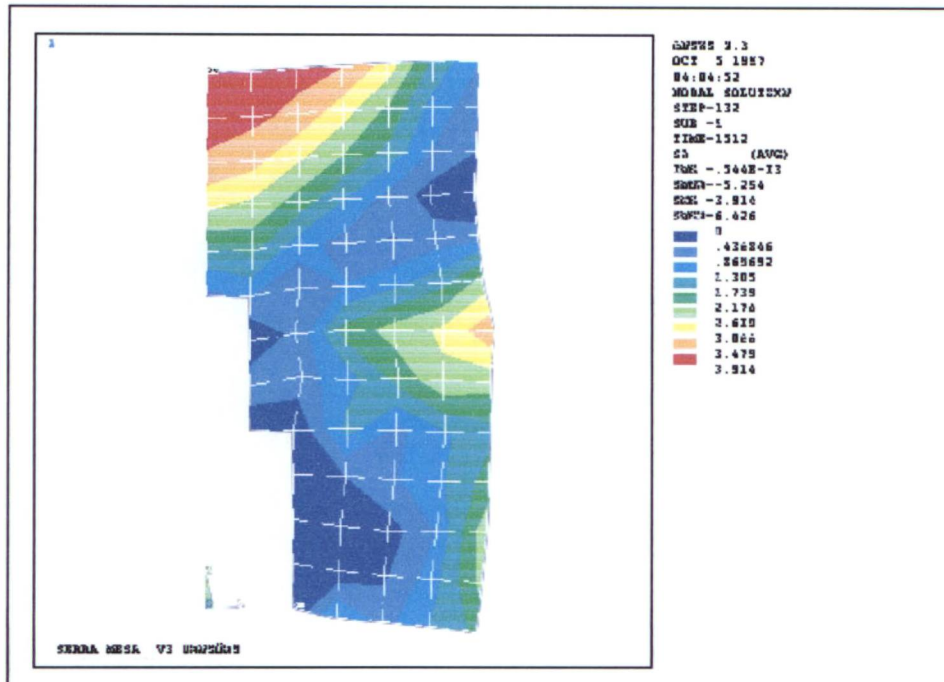


FIGURA 5.81 – V3 -TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA – até 1512 horas

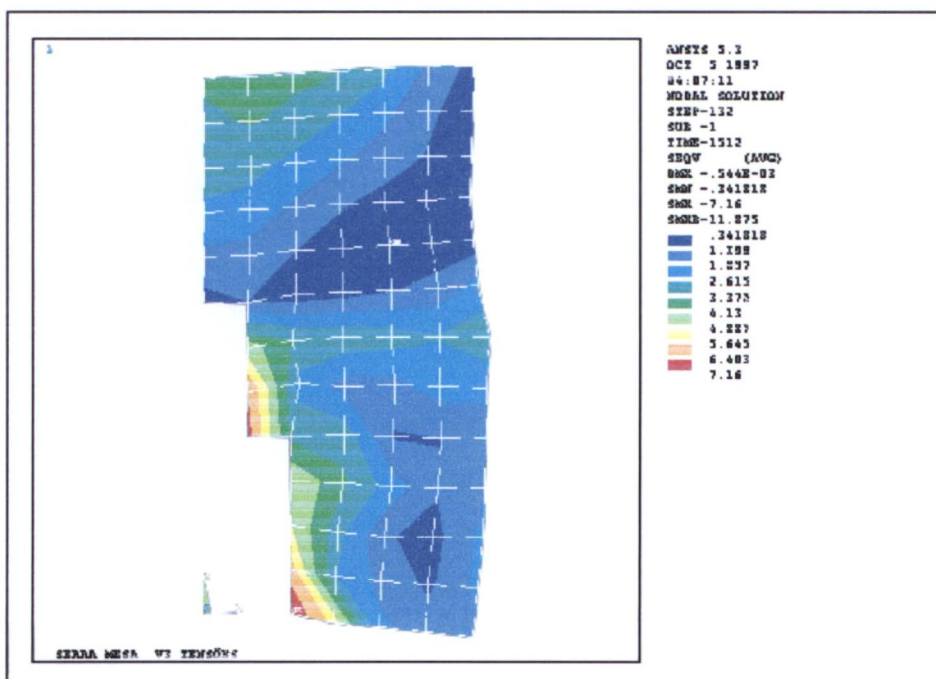


FIGURA 5.82 – V3 -TENSÃO VON MISES - 3ª CAMADA – até 1512 horas

Os resultados nodais em I e II, da temperatura e da tensão, variando no tempo, estão indicadas nas fig. 5.83 e fig.5.84 para o tempo de 1512 horas.

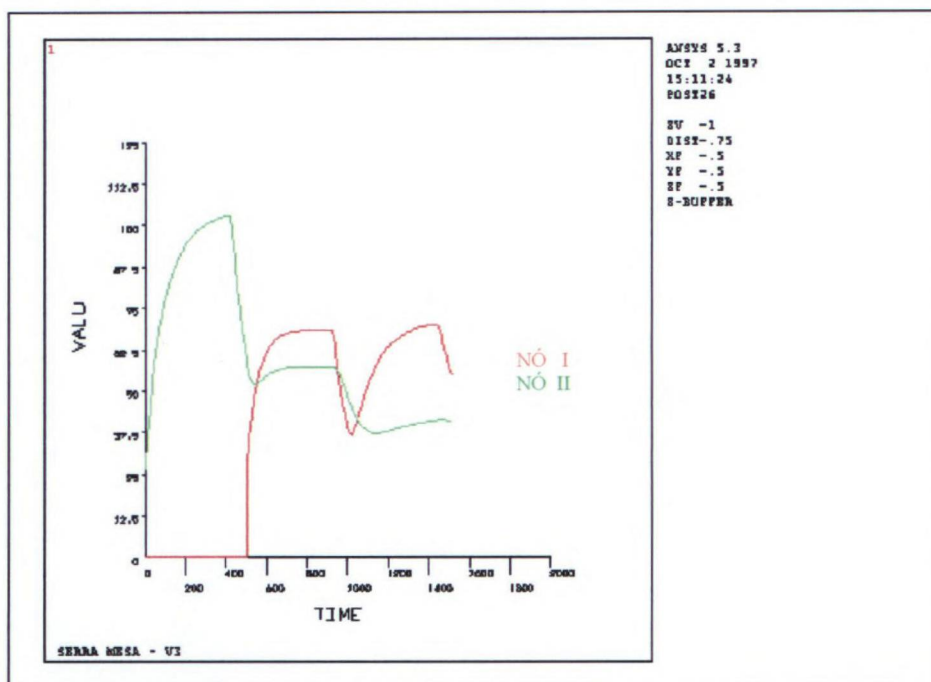


FIGURA 5.83 – V3 - RESULTADO NODAL – TEMPERATURA – até 1512 horas

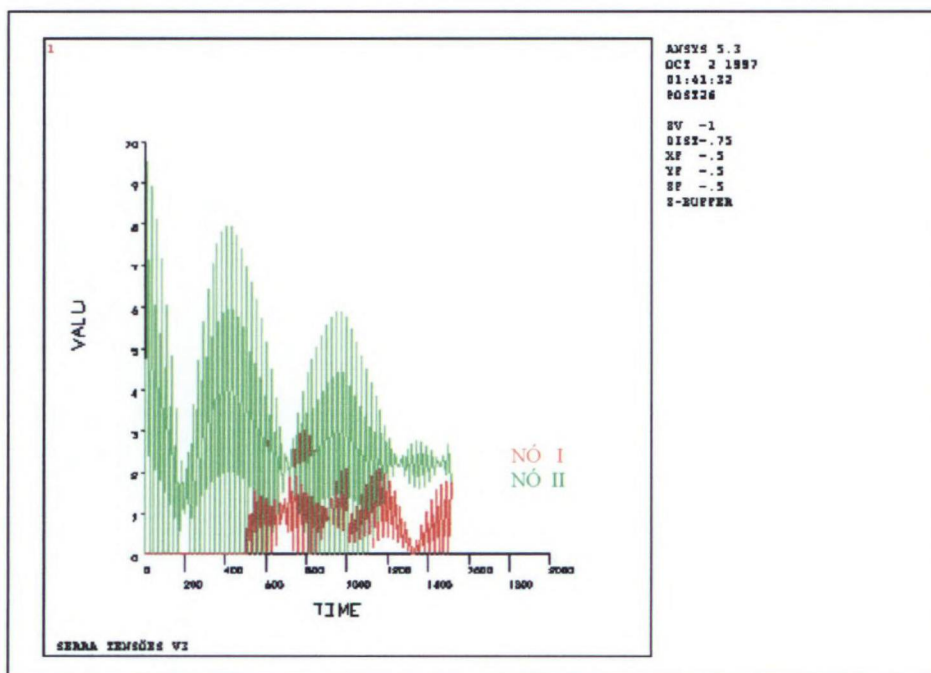


FIGURA 5.84 – V3 - RESULTADO NODAL – TENSÃO – até 1512 horas

No caso da hipótese V4, onde se considera intervalo de lançamento de 168 horas, três camadas e a temperatura de lançamento de 30°C, os resultados nodais I e II, da variação de temperatura e tensão estão nas fig. 5.85 e fig. 5.86.

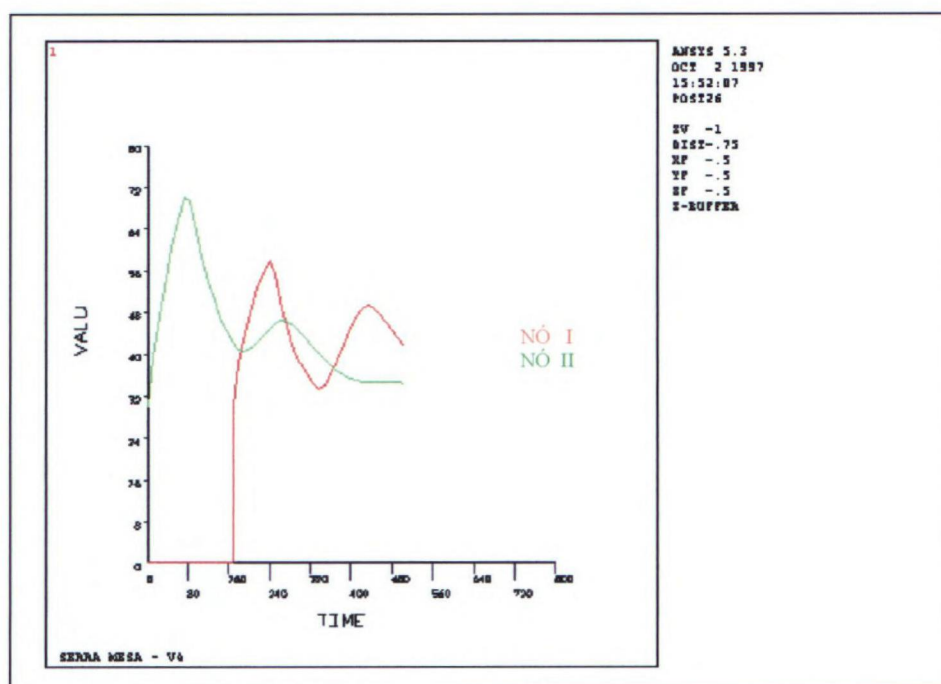


FIGURA 5.85 – V4 - RESULTADO NODAL – TEMPERATURA – até 336.002 horas

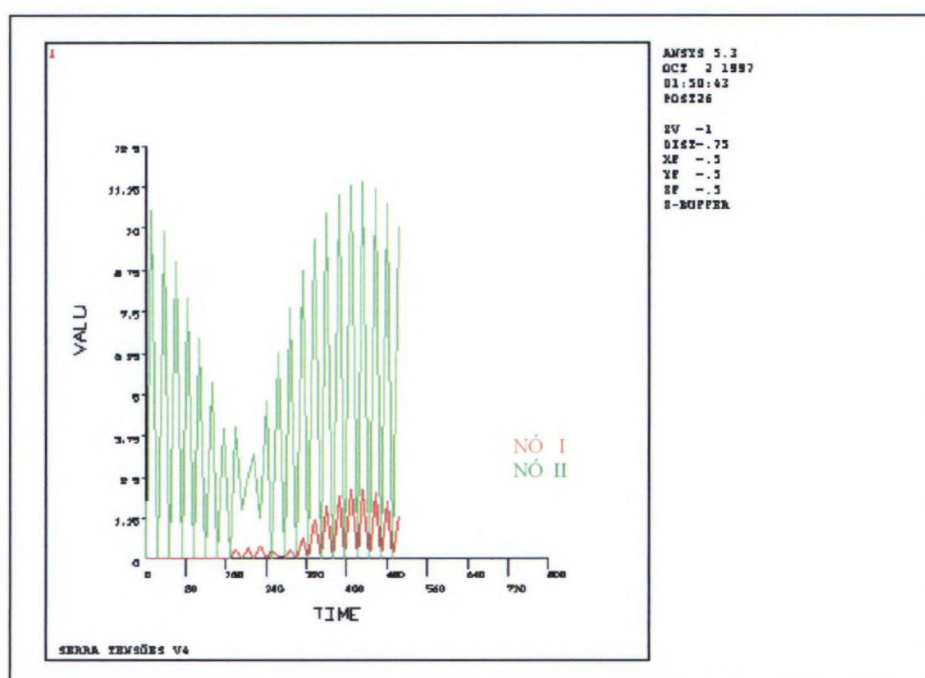


FIGURA 5.86 - V4- RESULTADO NODAL – TENSÃO – até 336.002 horas

Na análise V5 os resultados seguintes referem-se ao caso de execução de duas camadas variando-se apenas o intervalo de lançamento ou a temperatura de lançamento em duas camadas. A tensão principal, na fig.5.87 atinge um máximo de 7,611 Mpa, no canto do lado esquerdo. A tensão de Von Mises, na fig.5.88 atinge um máximo de 9,263 Mpa, no lado esquerdo e lado direito após 336 horas.

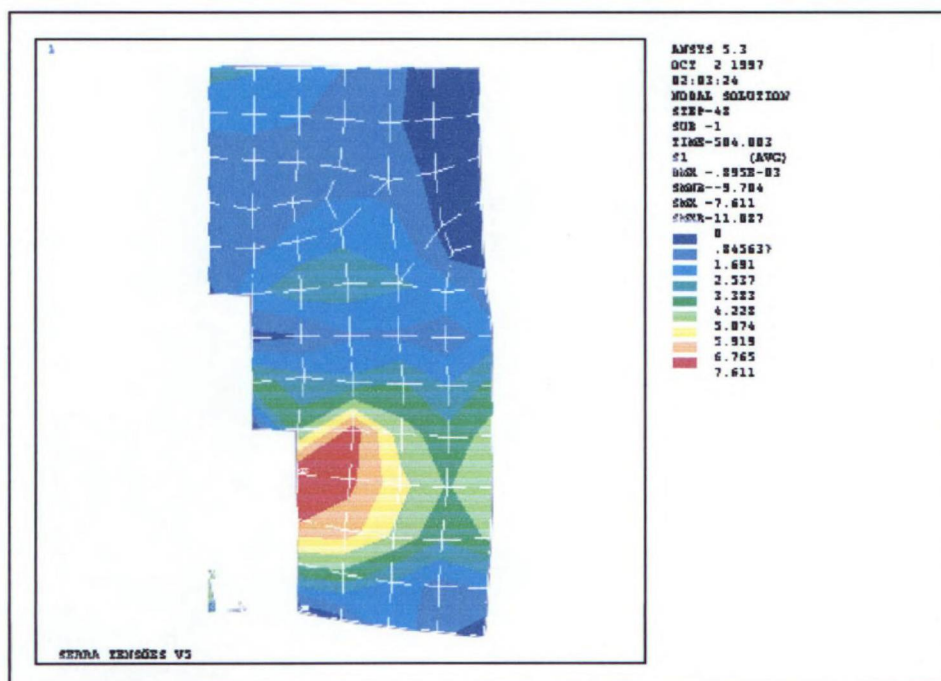


FIGURA 5.87 - V5 - TENSÃO PRINCIPAL – 3ª CAMADA – até 336.002 horas

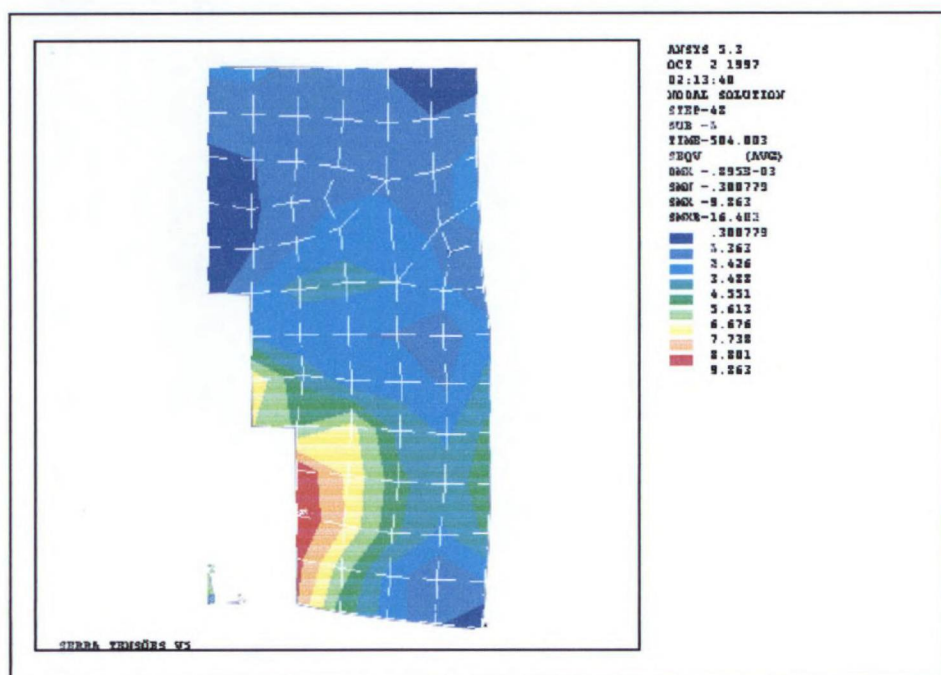


FIGURA 5.88 - V5 - TENSÃO VON MISES - 3ª CAMADA - até 336.002 horas

O resultado dos nós I e II para V5 da variação de temperatura e da tensão estão indicadas nas fig. 5.89 e fig. 5.90 .

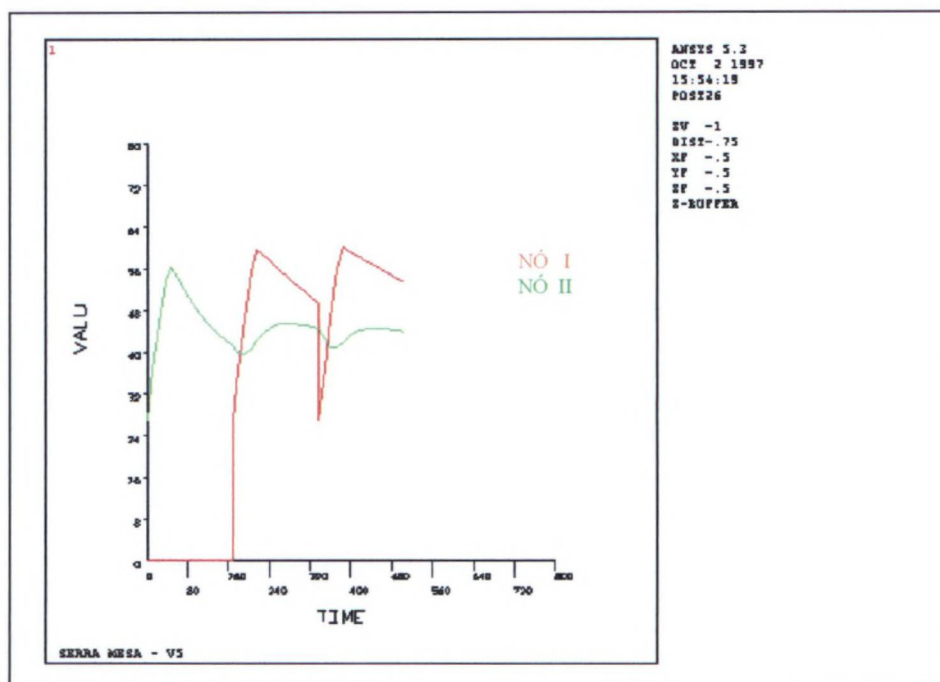


FIGURA 5.89 – V5 - RESULTADO NODAL – TEMPERATURA – até 336.002 horas

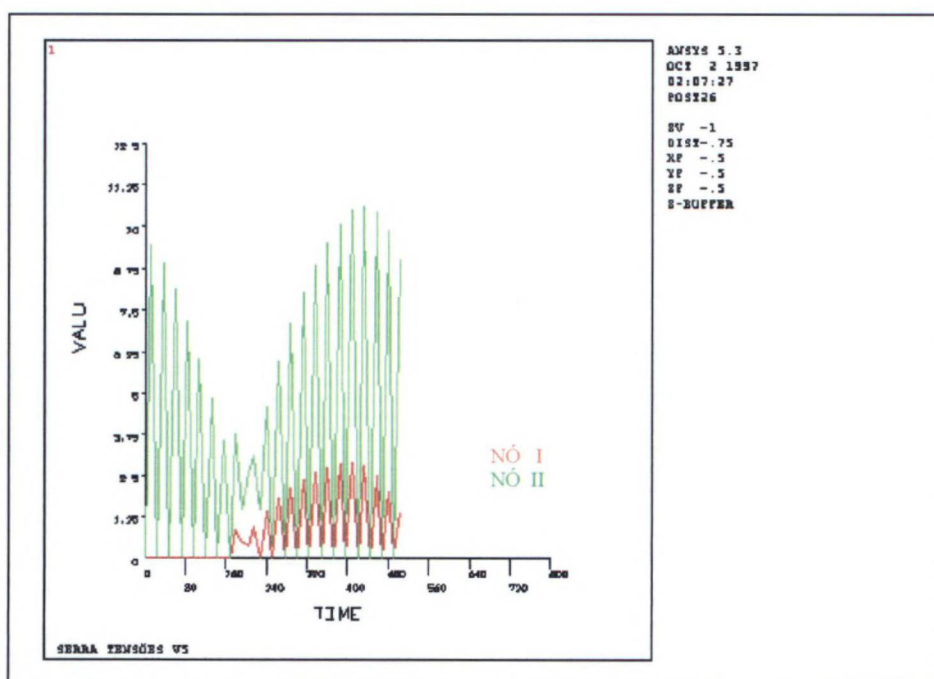


FIGURA 5.90 – V5 - RESULTADO NODAL -TENSÃO – até 336.002 horas

Na análise V6, duas camadas com 376 horas de intervalo, fig. 5.91 a tensão principal máxima de 5,71 MPa no canto superior da viga que está engastada do lado esquerdo. Na fig. 5.92 a máxima tensão de Von Mises atinge 12,4 MPa no canto inferior da viga.

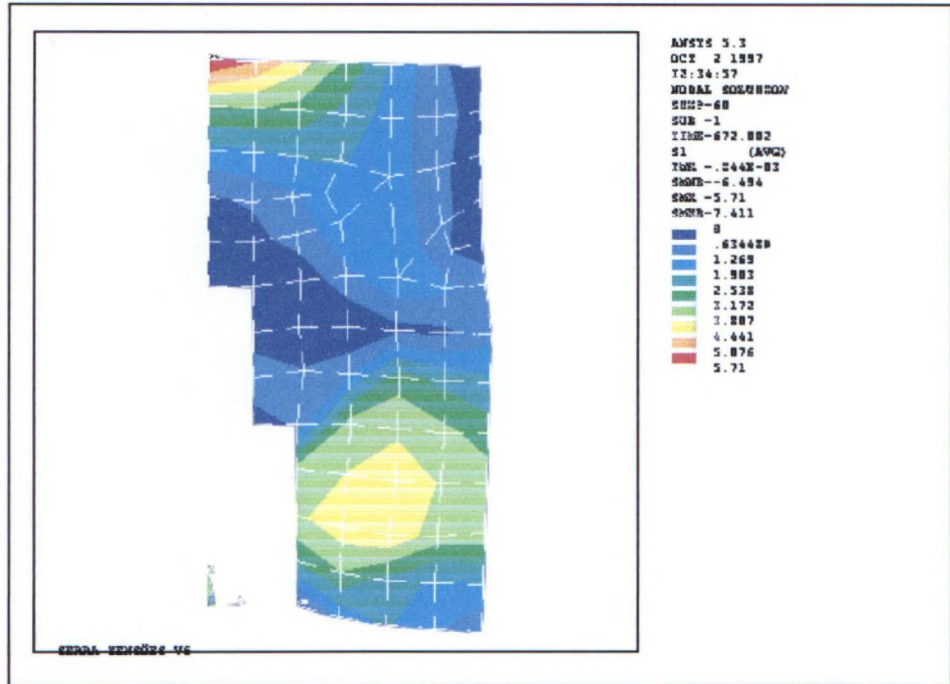
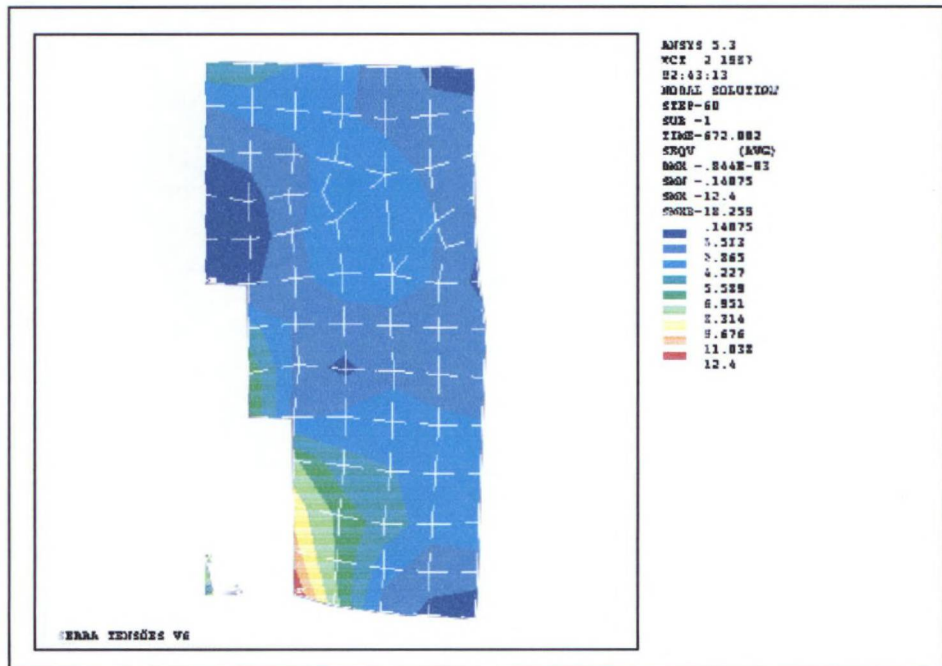


FIGURA 5.91 - V6 – TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA – até 672.002 horas



O resultado das variações nodais I e II, da temperatura e das tensões estão indicadas na fig 5.93 e na fig. 5.94, respectivamente.

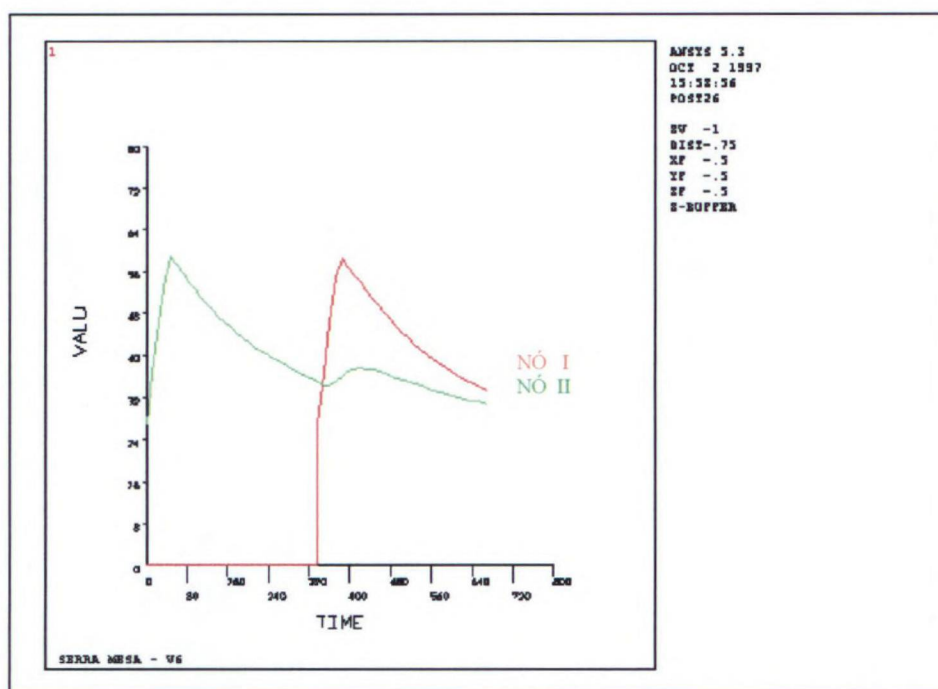


FIGURA 5.93 – V6 - RESULTADO NODAL – TEMPERATURA - até 672.002 horas

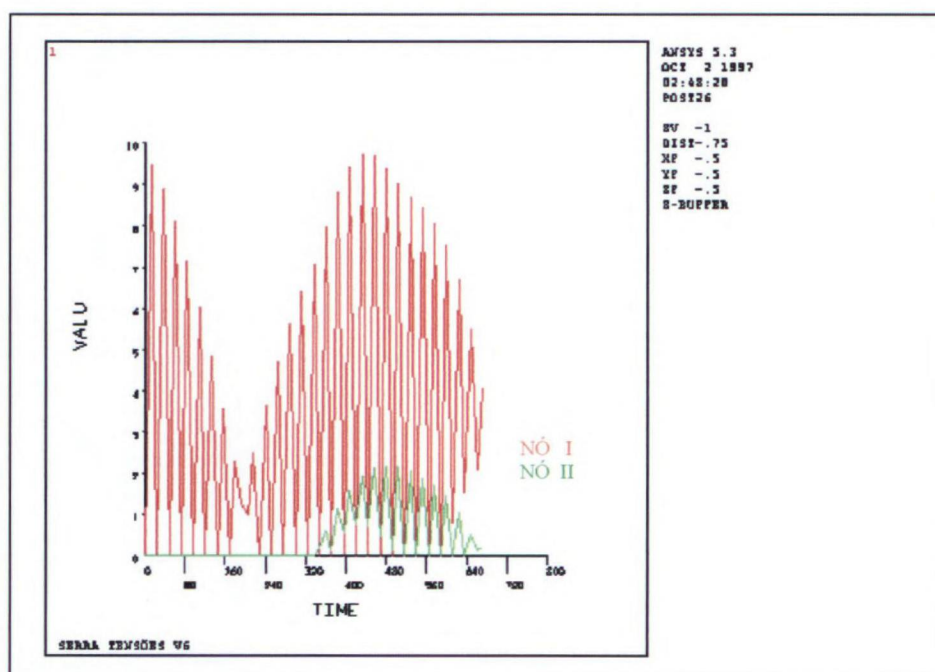


FIGURA 5.94 – V6 - RESULTADO NODAL -TENSÃO – até 672.002 horas

Na análise V7, em duas camadas com 504 horas de intervalo, a tensão principal, na fig.5.95 atinge um máximo de 4,833 MPa, na superfície inferior. A tensão de Von Mises, na fig.5.96 atinge um máximo de 8,105 MPa, no lado esquerdo inferior.

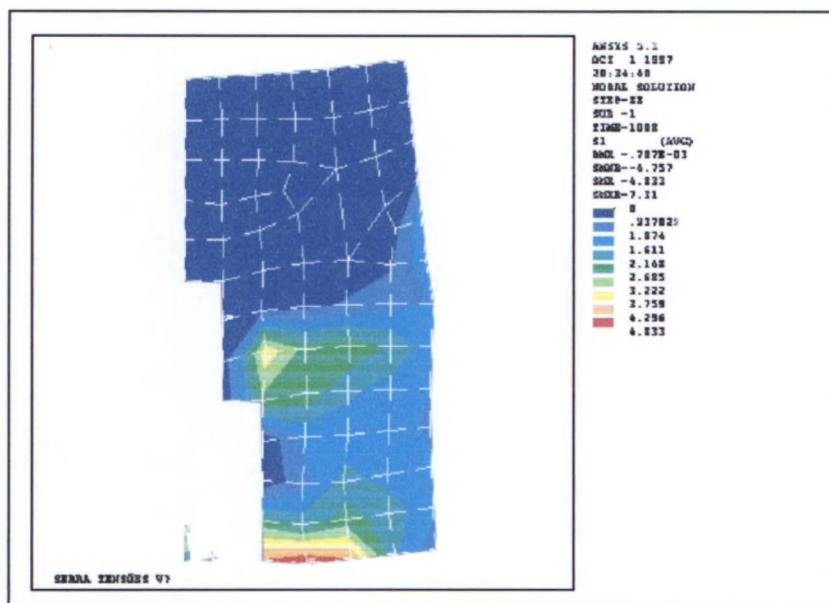


FIGURA 5.95 – V7– TENSÃO PRINCIPAL - 3ª CAMADA – até 1008 horas

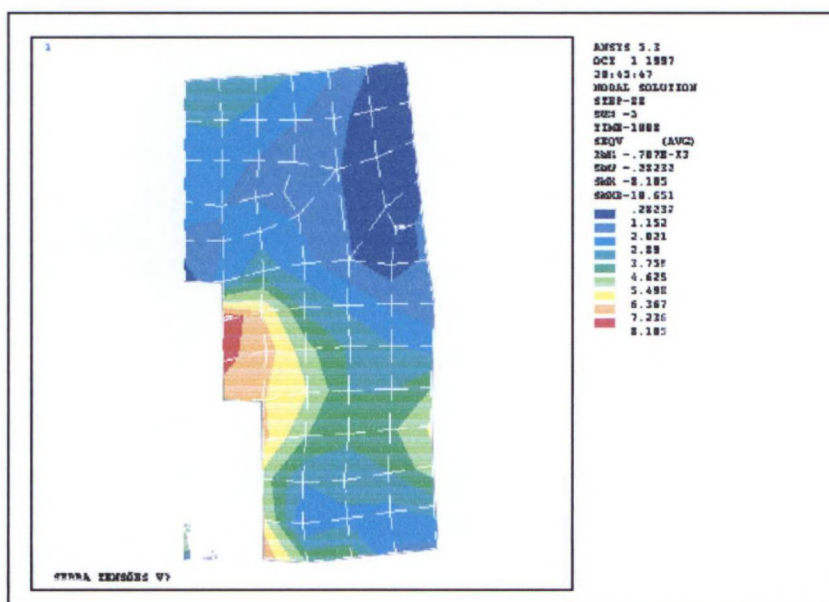


FIGURA 5.96 - V7 – TENSÃO DE VON MISES - 3ª CAMADA – até 1008 horas

Os resultados nodais em I e II, da temperatura e das tensões estão representadas nas fig 5.97 e fig. 5.98. Percebe-se que, quanto maior os intervalos entre as camadas, menores são as influências entre elas.

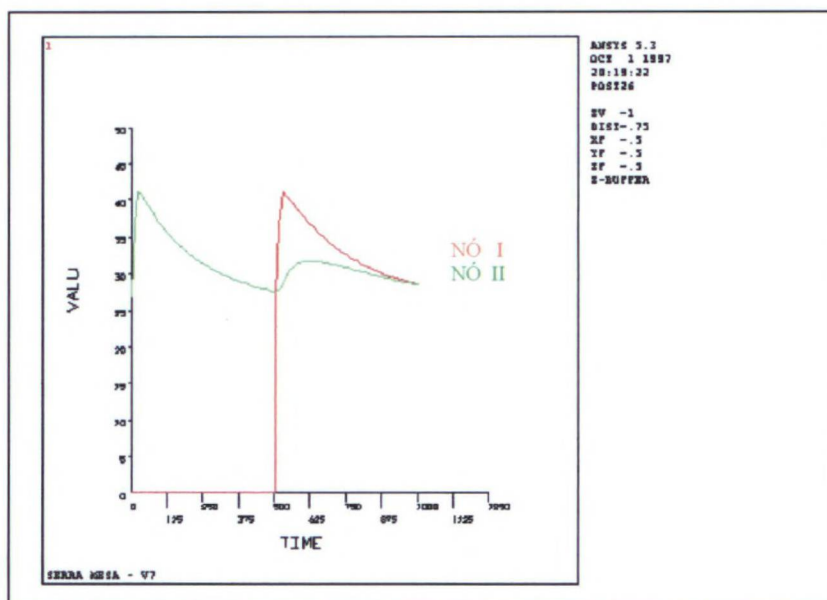


FIGURA 5.97 – V7 -RESULTADO NODAL – TEMPERATURA – até 1008 horas

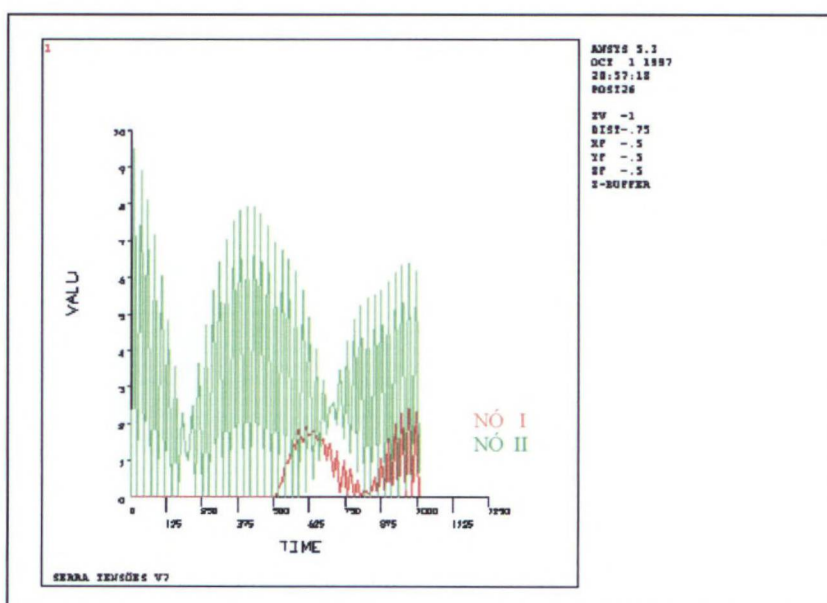


FIGURA 5.98 – V7 -RESULTADO NODAL – TENSÃO – até 1008 horas

O resultado comparativo das análises nos pontos nodais I e II, das variações da temperatura e das tensões estão nas fig 5.99 e fig. 5.100.

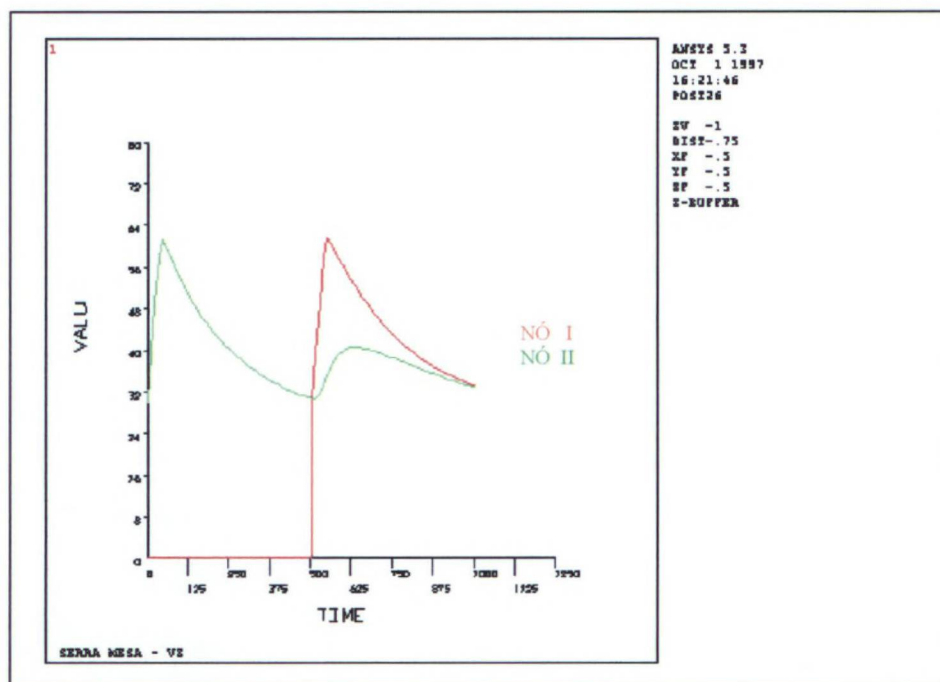


FIGURA 5.99 – V8 - RESULTADO NODAL – TEMPERATURA – até 1008 horas

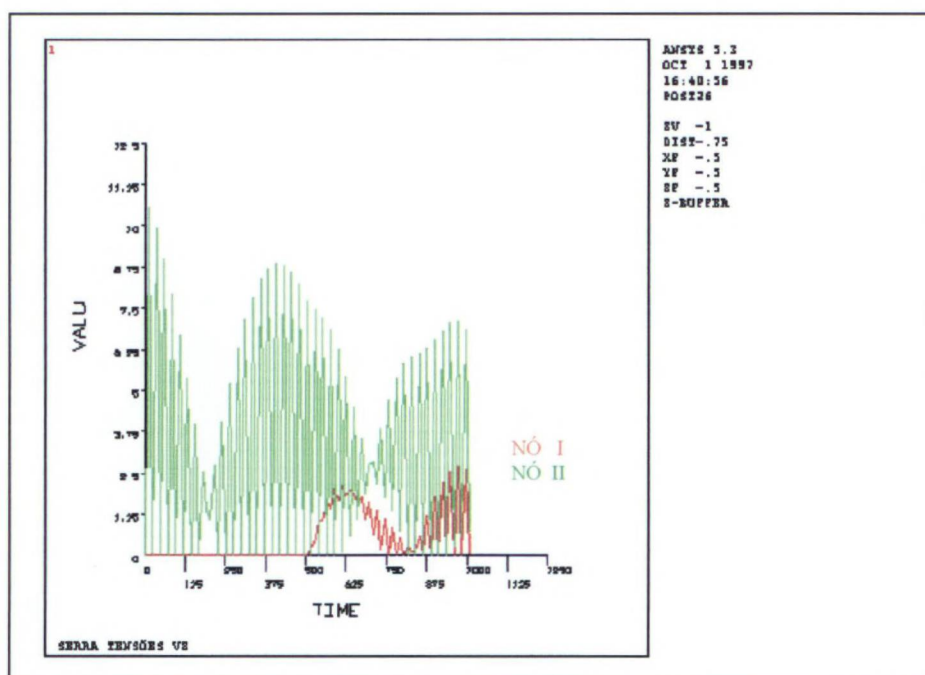


FIGURA 5.100 – V8 - RESULTADO NODAL – TENSÃO – até 1008 horas

A tabela 5.8 faz um comparativo entre as diversas análises de temperatura no tempo 504 horas e a tabela 5.9 o comparativo é entre as tensões também no tempo de 504 horas.

TABELA 5.8 - VALORES DE TEMPERATURA MÁXIMA NO TEMPO DE ANÁLISE DE 504 horas

HIPÓTESE TEMPERATURA (504 horas)	NO I		NO II	
	X (m)	0,00	X (m)	0,50
	Y (m)	2,00	Y (m)	1,00
V0	36,520		37,510	
V1	40,895		33,869	
V1B	34,169		30,112	
V1C	37,990		31,989	
V2	66,576		55,842	
V3	27,000		58,830	
V4	41,518		34,279	
V5	53,290		43,778	
V6	44,146		35,269	
V7	27,000		46,364	
V8	30,000		30,620	

A conclusão ao observar o resultado da tabela 5.8: para o nó I a maior temperatura acontece na hipótese V2 e a menor para V3 e V7. Para o caso do nó II maior temperatura acontece na hipótese V3 e a menor na hipótese V1B.

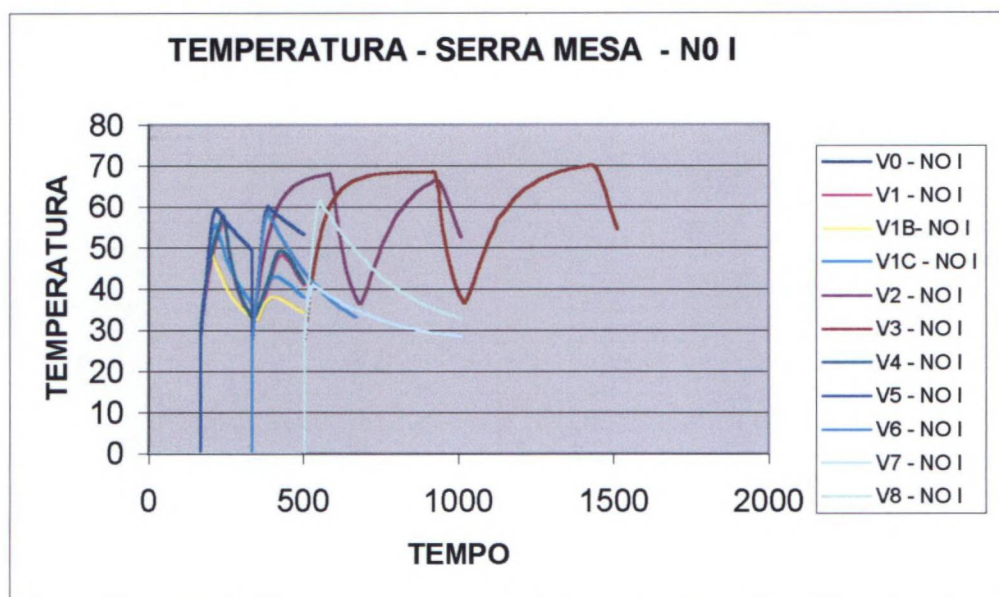
TABELA 5.9. VALORES DE TENSÃO MÁXIMA NO TEMPO DE ANÁLISE DE 504 horas

HIPÓTESE TENSÃO (504 horas)	NO I		NO II	
	X (m)	0,00	X (m)	0,50
	Y (m)	2,00	Y (m)	1,00
V0	1,254		0,000	
V1	1,209		9,044	
V1B	0,450		13,061	
V1C	0,314		3,559	
V2	1,377		8,899	
V3	0,011		6,932	
V4	1,343		10,049	
V5	1,399		9,240	
V6	9,029		2,139	
V7	0,011		6,932	
V8	0,013		7,702	

A conclusão ao observar o resultado da tabela 5.9: para o nó I a maior tensão acontece na hipótese V6 e a menor V3, V7 e V8. Para o caso do nó II maior tensão acontece na hipótese V1B e a menor na hipótese V0.

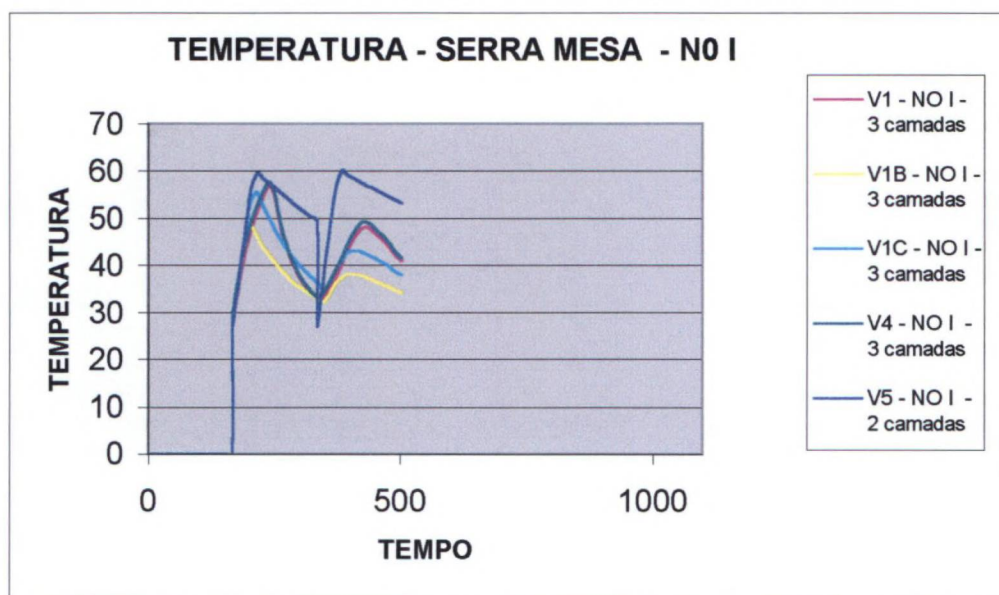
A comparação de todas as simulações da temperatura dos pontos representativos na viga designados por NÓ I pode ser vista na fig. 5.101A.

FIGURA 5.101A - TEMPERATURA GERAL DA VIGA - NO I



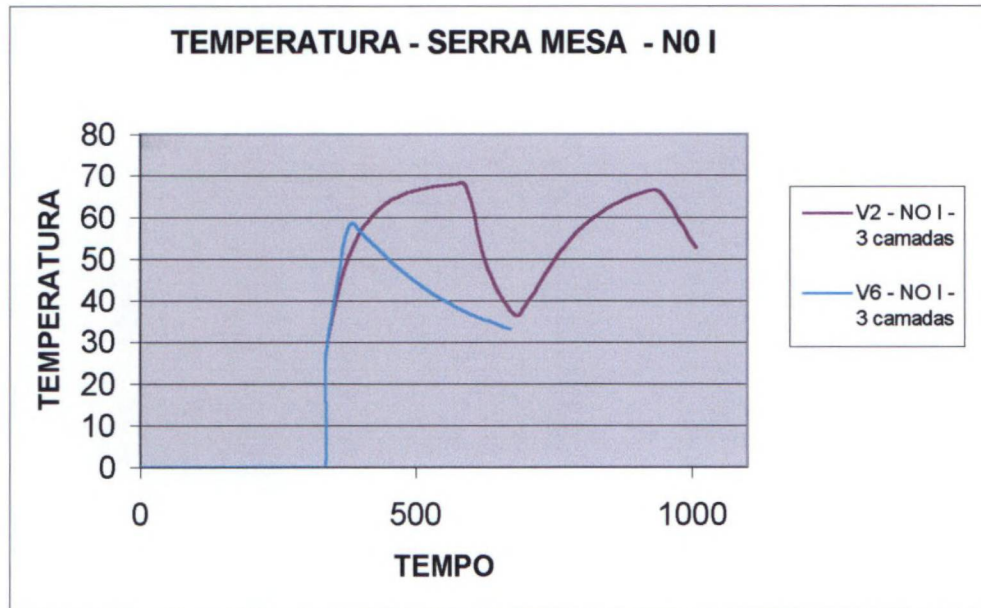
Considerando-se os casos que apresentam o mesmo intervalo de lançamento, isto é, as simulações V1, V1B, V1C, V4 e V5, a temperatura determinada no NÓ I pode ser vista na fig. 5.104B.

FIGURA 5.101B - TEMPERATURA DA VIGA - NO I - 168 horas



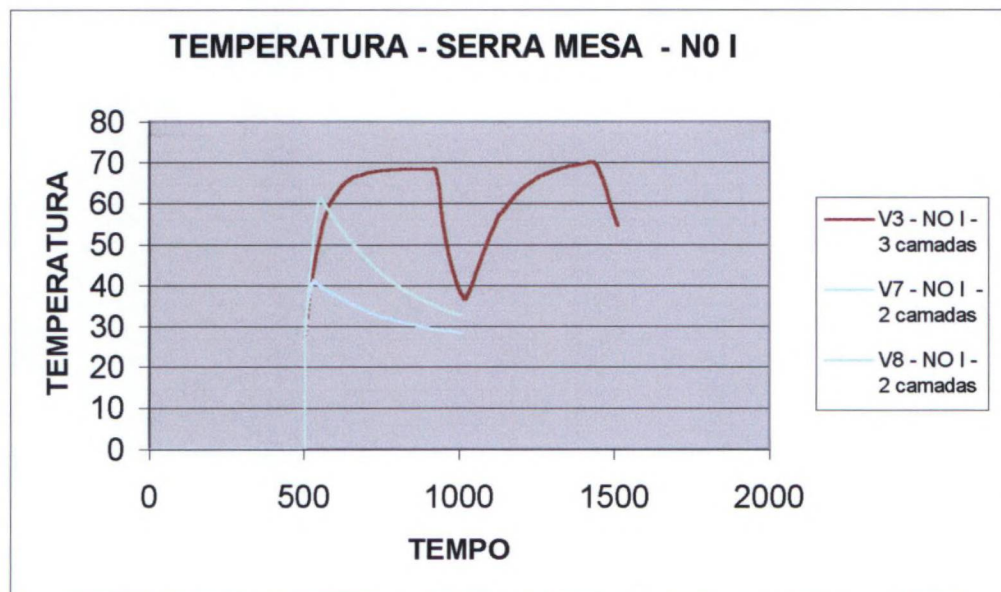
No caso de lançamentos a cada 336 horas (análises V2 e V6) a comparação das temperaturas do NÓ I pode ser vista na fig. 5.101 C.

FIGURA 5.101C - TEMPERATURA DA VIGA - NO I - 336 horas



Considerando o intervalo de lançamento de 504 horas a comparação das simulações V3, V7 e V8 da temperatura do NÓ I pode ser vista na fig. 5.101D.

FIGURA 5.101D - TEMPERATURA DA VIGA - NO I - 504 horas



Como conclusão, verificando o resultado dos gráficos de temperatura nas fig. 5.101A a fig. 5.101D, pode-se dizer que as temperaturas máximas ocorreu para o nó I:

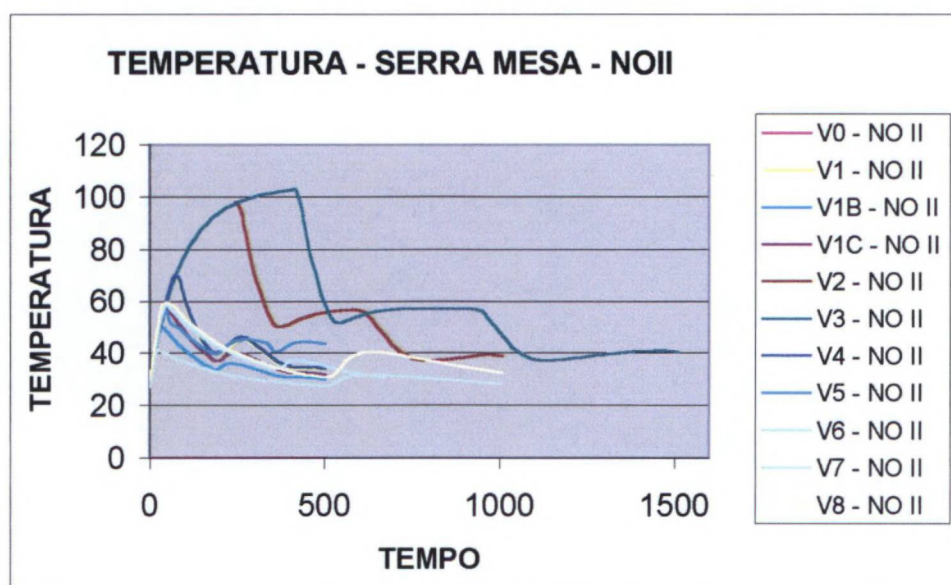
- na fig. 5.101A na hipótese V3
- na fig. 5.101B na hipótese V5
- na fig. 5.101C na hipótese V2
- na fig. 5.101D na hipótese V3

Com os resultados dos gráficos de temperatura nas fig. 5.101A a fig. 5.101D, pode-se dizer que as temperaturas mínimas ocorreu para o nó I:

- na fig. 5.101A na hipótese V7
- na fig. 5.101B na hipótese V1B
- na fig. 5.101C na hipótese V6
- na fig. 5.101D na hipótese V7

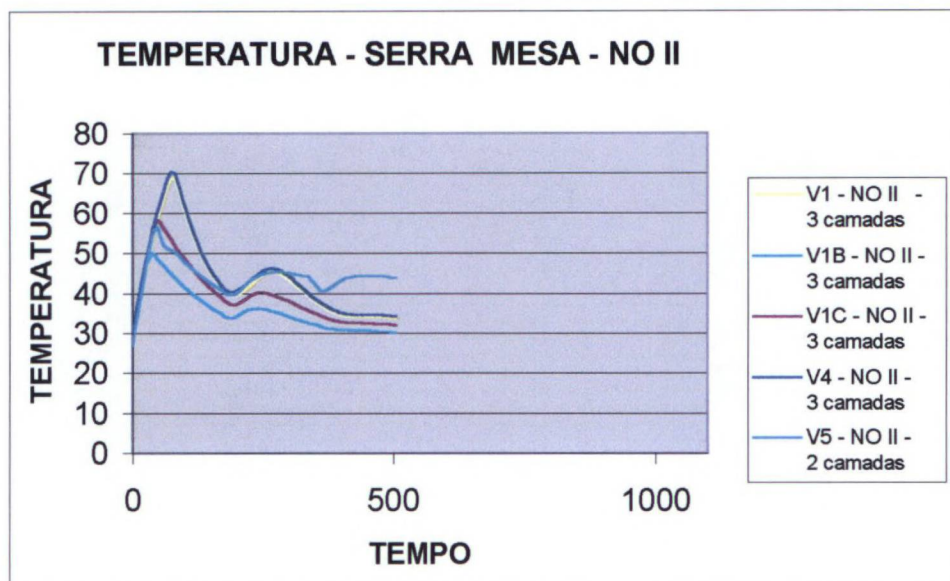
A comparação de todas as simulações da temperatura do NO II pode ser vista na fig. 5.102A.

FIGURA 5.102A - TEMPERATURA GERAL DA VIGA - NO II



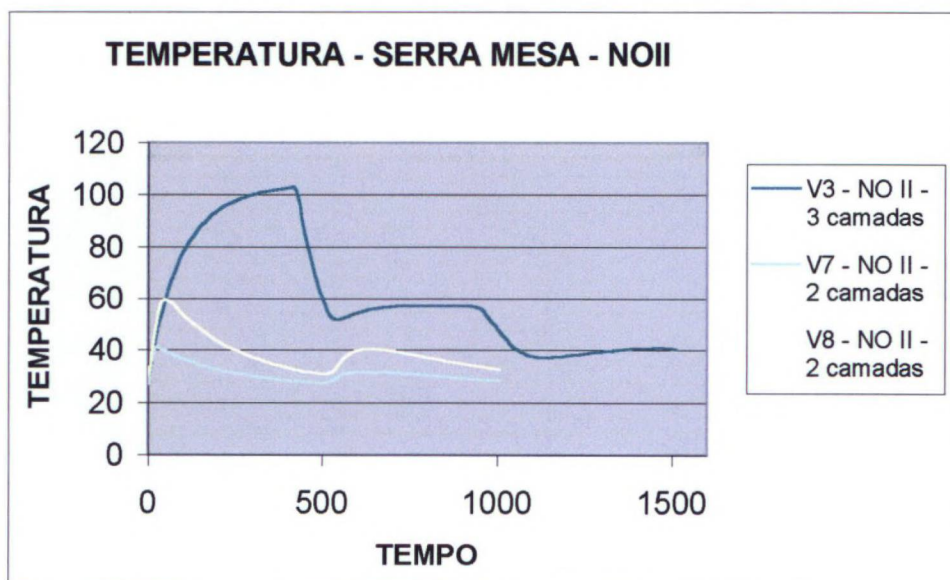
A comparação das simulações V1, V1B, V1C, V4 e V5 da temperatura dos NO II pode ser analisada na fig. 5.102B.

FIGURA 5.102B - TEMPERATURA DA VIGA - NO II – 168 horas



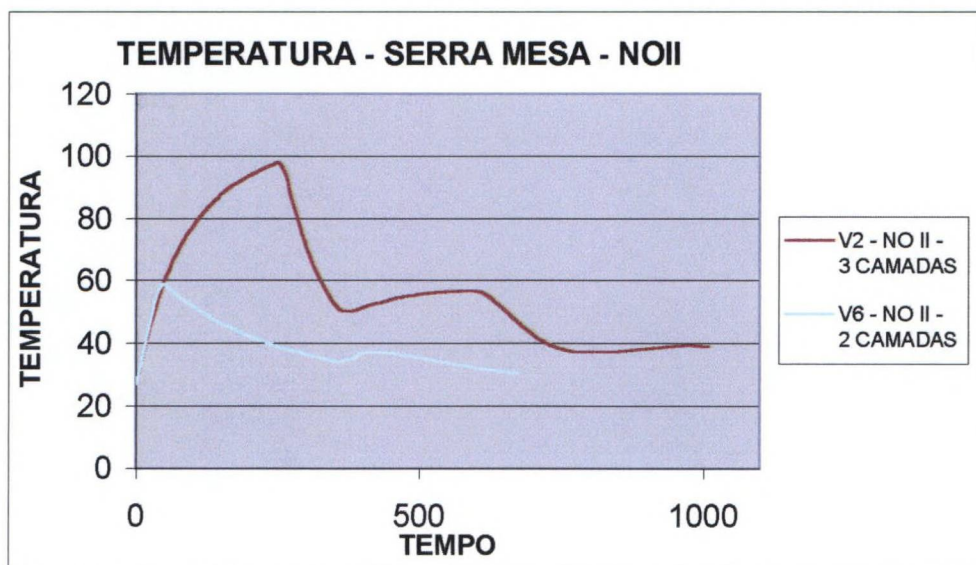
A comparação das simulações V3, V7 e V8 da temperatura do NÓ II pode ser vista na fig. 5.102C.

FIGURA 5.102C - TEMPERATURA DA VIGA - NO II – 504 horas



A comparação das simulações V2 e V6 da temperatura dos NO II pode ser vista na fig. 5.102D.

FIGURA 5.102D - TEMPERATURA DA VIGA - NO II



Da mesma forma para o nó II, verificando o resultado dos gráficos de temperatura nas fig .5.102A a fig.5.102D, pode-se dizer que as temperaturas máximas aconteceram:

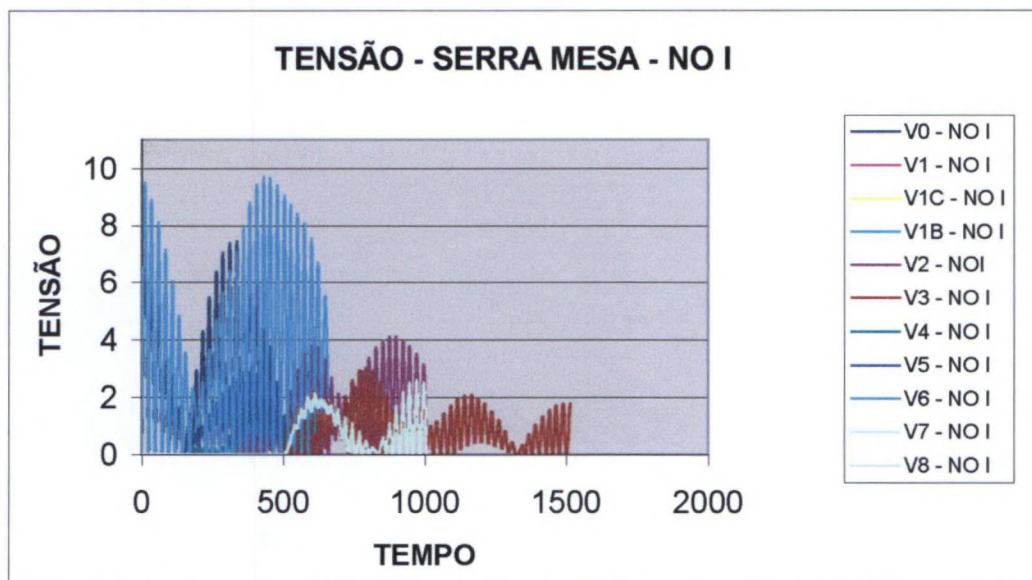
- na fig. 5.102A na hipótese V3
- na fig. 5.102B na hipótese V4
- na fig. 5.102C na hipótese V3
- na fig. 5.102D na hipótese V2

Analisando a temperatura do nó II nas tabelas 5.102A a fig. 5.102D, pode-se dizer que as temperaturas mínimas foram:

- na fig. 5.102A na hipótese V7
- na fig. 5.102B na hipótese V1B
- na fig. 5.102C na hipótese V7
- na fig. 5.102D na hipótese V6

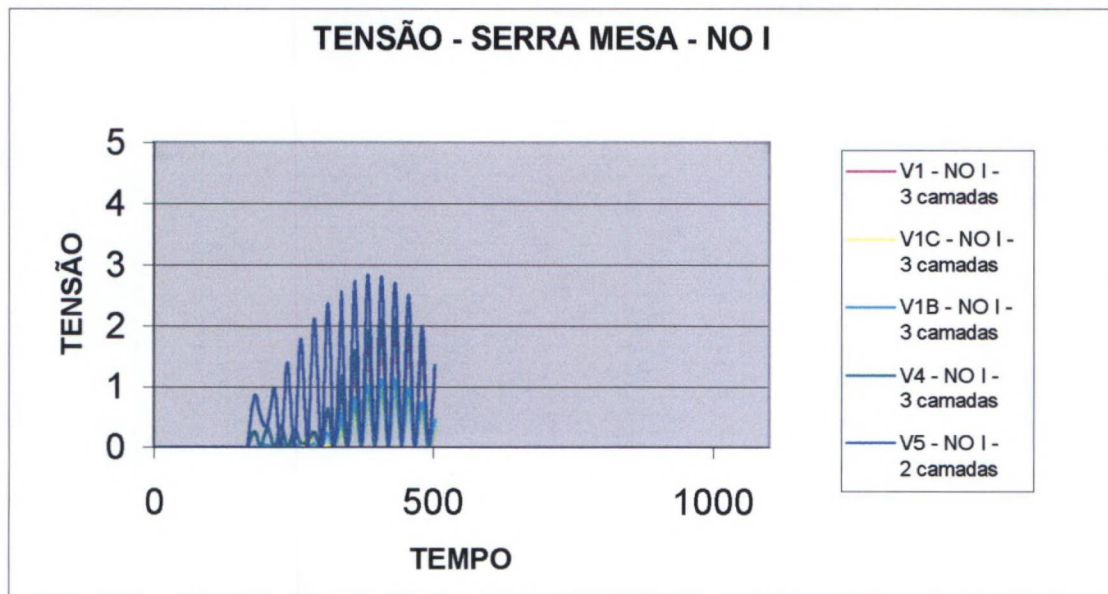
Também a comparação entre as simulações de tensão na viga para o NÓ I aparece na fig. 5.103A.

FIGURA 5.103A –TENSÃO GERAL DA VIGA - NO I



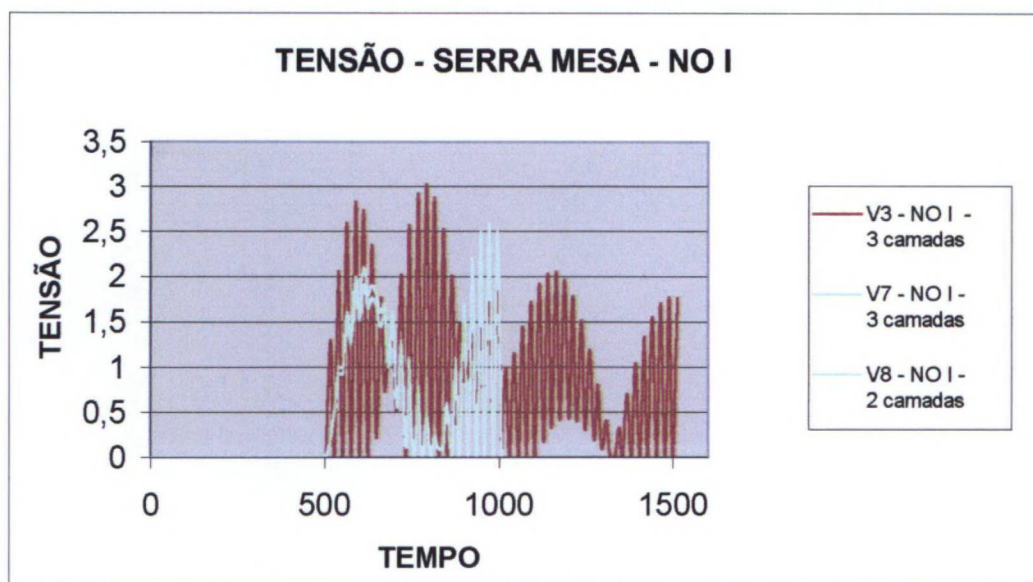
A comparação entre as simulações de tensão na viga V1, V1B, V1C, V4 e V5 para o NÓ I aparece na fig. 5.103B.

FIGURA 5.103B -TENSÃO DA VIGA - NO I – 168 horas



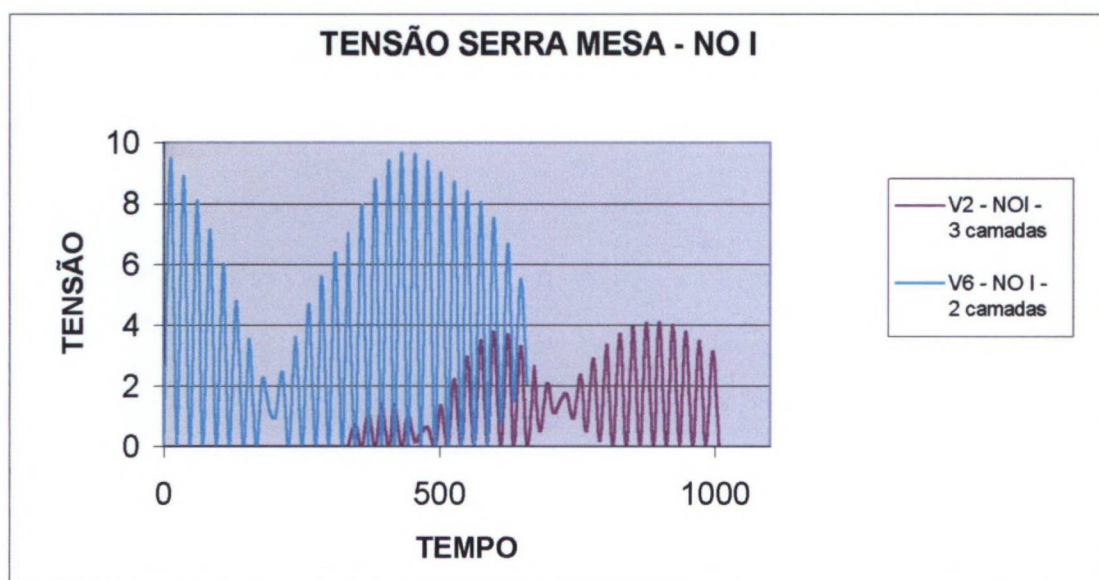
A comparação entre as simulações de tensão na viga V3, V7 e V8 para o NÓ I aparece na fig. 5.103C.

FIGURA 5.103C -TENSÃO DA VIGA - NO I – 504 horas



A comparação entre as simulações de tensão na viga V2 e V6 para o NÓ I aparece na fig. 5.103D.

FIGURA 5.103D -TENSÃO DA VIGA - NO I – 336 horas



Analisando os resultado de tensão através dos gráficos nas fig.5.103A a 5.103D, pode-se dizer que as tensão máximas ocorreu para o nó I:

- na fig. 5.103A na hipótese V6
- na fig. 5.103B na hipótese V5

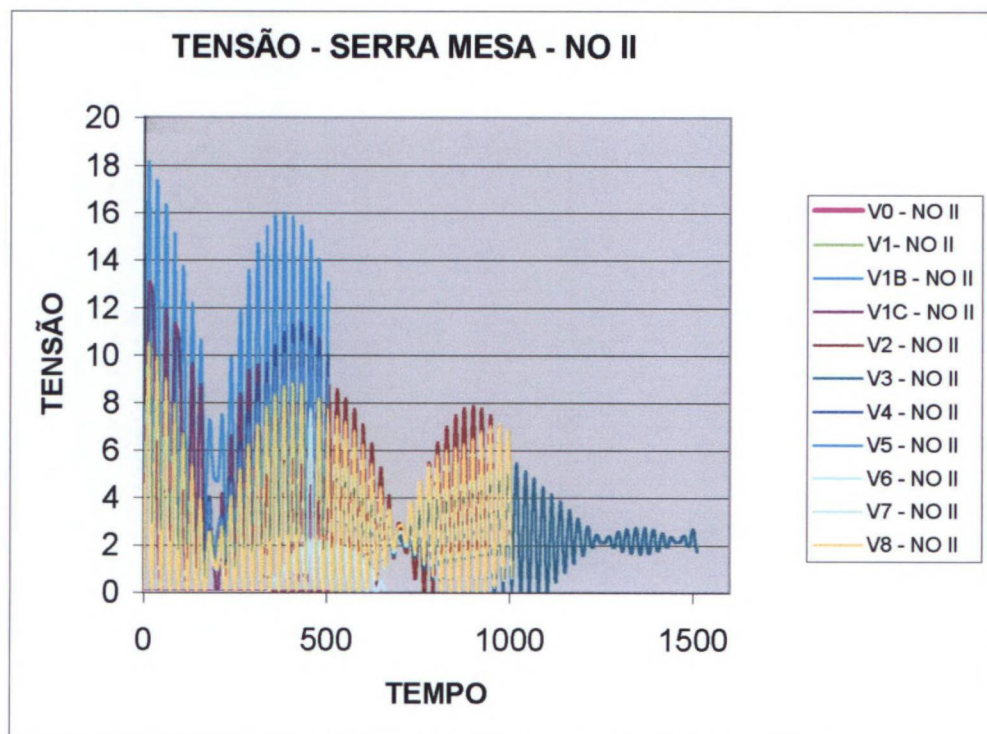
- na fig. 5.103C na hipótese V3
- na fig. 5.103D na hipótese V6

Com os resultados dos gráficos de tensão nas tabelas 5.106A a 5.106D, tem-se que as tensões mínimas ocorreram para o nó I:

- na fig. 5.103A na hipótese V1C
- na fig. 5.103B na hipótese V1C
- na fig. 5.103C na hipótese V7
- na fig. 5.103D na hipótese V2

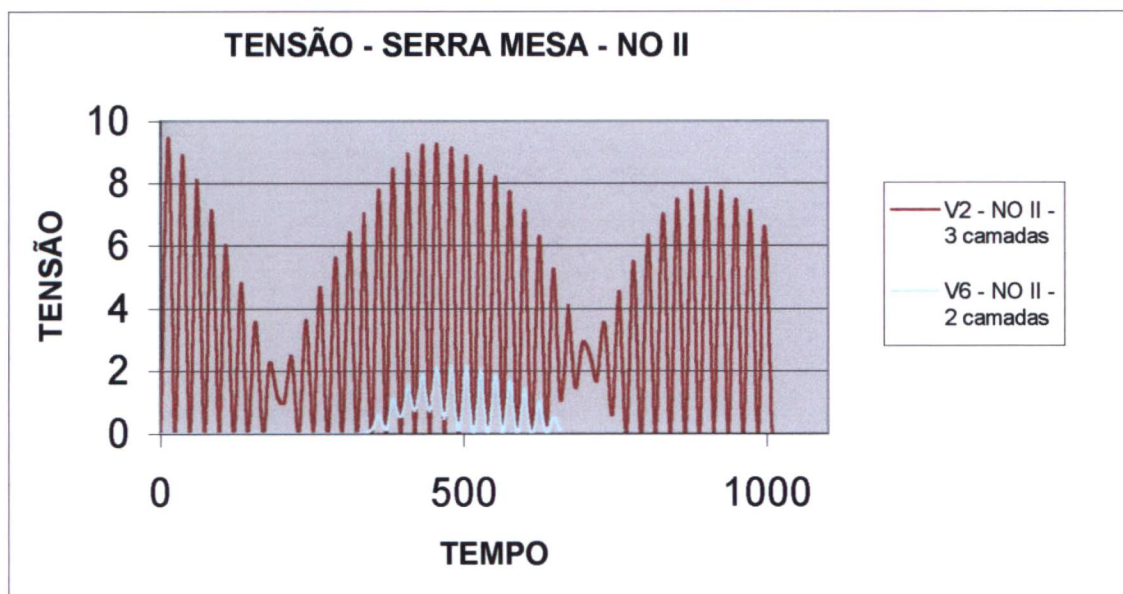
A comparação entre todas as simulações de tensão na viga para o NÓ II aparece na fig. 5.104A.

FIGURA 5.104A -TENSÃO GERAL DA VIGA - NO II



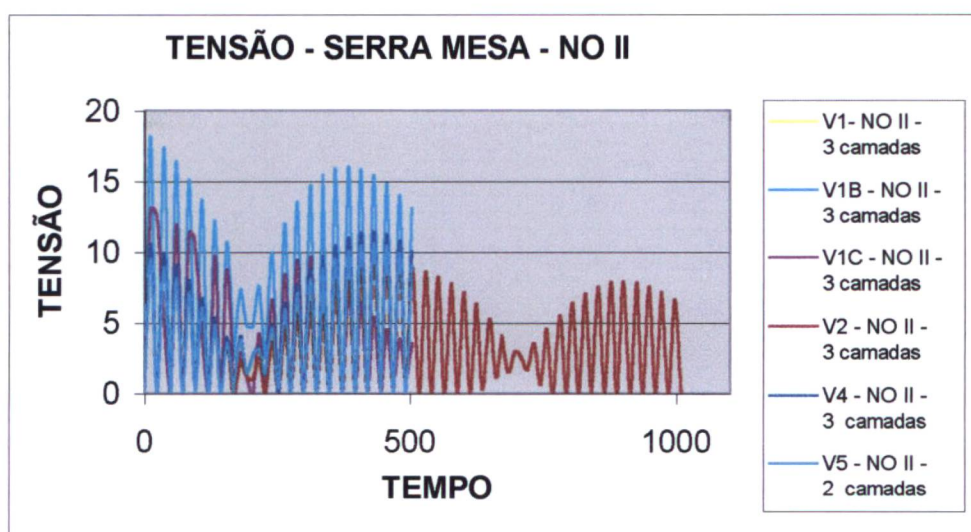
A comparação entre as simulações de tensão na viga V2 e V6 para o NÓ II aparece na fig.5.104B.

FIGURA 5.104B -TENSÃO DA VIGA - NO II – 336 horas



A comparação entre as simulações de tensão na viga V1, V1B, V1C, V4 e V5 para o NÓ II aparece na fig.5.104C.

FIGURA 5.104C –TENSÃO DA VIGA - NO II – 168 horas



O resultado de tensão através dos gráficos nas tabelas 5.104A a 5.104C, pode-se dizer que as tensão máximas ocorreu para o nó II:

- na fig. 5.104A na hipótese V1B
- na fig. 5.104B na hipótese V2
- na fig. 5.104C na hipótese V1B

Com os resultados dos gráficos de tensão nas tabelas 5.104A a 5.104C, tem-se que as tensões mínimas ocorreram para o nó II:

- na fig. 5.104A na hipótese V0
- na fig. 5.104B na hipótese V6
- na fig. 5.104C na hipótese V2

## 6 CONCLUSÕES

A análise tenso-térmica é de grande importância na maioria das estruturas. Os efeitos térmicos podem afetar a capacidade de resistência das estruturas. Muitos fenômenos térmicos comprometem a vida útil de grandes estruturas que, a princípio, foram projetadas para dar conforto e garantir segurança.

Sendo assim, se forem considerados estudos sobre os efeitos térmicos nos produtos industriais pode-se ter peças de melhor qualidade, podendo-se detectar locais prováveis de ruptura. Assim, muitas peças terão sua estrutura otimizada e de melhor qualidade.

Nas construções civis, é de grande importância pesquisar a tensão devido a resultados térmicos. Permite-se uma previsão de locais de grandes concentrações de tensões que comprometem a segurança da estrutura.

Para uma análise térmica, deve-se conhecer os modos de transferência de calor para se otimizar a execução de uma estrutura. A sistemática abordada leva em consideração a variação térmica ao longo do tempo (transiente).

Muitos são os métodos adotados para a resolução dos problemas tenso-térmicos. Neste trabalho o método adotado, por sua grande versatilidade e precisão, foi o Método dos Elementos Finitos. O software comercial utilizado foi o ANSYS®/ Multiphysics, versão 5.3.

A seqüência do processo considera primeiramente uma análise térmica transiente. Nesse processo a técnica utilizada "Birth & Death", ativa os elementos e desativa conforme a necessidade, para simular o processo constitutivo. Esta técnica foi adotada por permitir definir a estrutura como um todo e nas análises de cada etapa permitir também que somente a etapa a ser estudada fique ativada. Quando novas etapas são ativadas não haverá necessidade de se criar novos elementos.

Devido à complexidade de cada estrutura a ser avaliada foi necessária a elaboração de rotina computacional usando a linguagem própria do ANSYS. Esta linguagem conhecida por APDL, Ansys Parametric Design Language, permite que o processo computacional se torne automatizado. Esta linguagem permite também maior número de testes para analisar de forma mais completa e em menor tempo computacional, estruturas de grande responsabilidade dada a complexidade.

Esta metodologia deve ser utilizada em estruturas executadas por camadas. Podem ser utilizadas, por exemplo, nas estruturas de concreto compactadas por rolo (CCR), solução que modernamente vem sendo aplicada em barragens. Assim, é possível a localização de zonas de maior tensão e conseqüentemente de fissuras, fatores esses que são essenciais em barragens.

As dificuldades a serem enfrentadas em uma análise tenso-térmica começam pela escolha e compreensão do método a ser utilizado. A seguir vem o equipamento e linguagem computacional. O material a ser considerado e suas propriedades elásticas e térmicas deve ter uma atenção especial. Os resultados dependem de uma escolha confiável de parâmetros.

Por meio das modelagens realizadas, consegue-se obter resultados confiáveis que permitirão otimizar custos e espessuras das estruturas minimizando o comprometimento de sua integridade física.

Concluindo a análise do trabalho, segundo resultados obtidos nas simulações para validação da metodologia empregada, pode-se dizer:

- Viga bi-engastada: todas as simulações levaram a um resultado próximo da solução analítica, utilizada como parâmetro de comparação. Quanto menor a malha de elementos finitos utilizados, melhores são os resultados esperados.
- Blocos de concreto e Serra Mesa: no resultado de temperatura, todas as simulações se aproximaram; no caso de tensão houve variação entre as simulações devido a malha utilizada, processo construtivo e considerações devido ao tipo de elemento considerado, intervalo de lançamento, temperatura ambiente.

Para a continuidade deste trabalho, aprimorando a metodologia,alguma sugestões são dadas:

- inclusão de materiais variando com o tempo;
- inclusão das cargas devido ao peso próprio;
- inclusão dos efeitos da deformação lenta ;
- análise tenso-térmica de estruturas executadas por camadas em modelos tridimensionais;

## 7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRADE, W. P., (editor). **Concreto: massa, estrutural, projetado e compactado por rolo.** Ensaios e propriedades. Equipe de FURNAS - Laboratório de Concreto. Ed. Pini, 1997.

ANSYS®/ Multiphysics, ANSYS Inc. Company, 1994

ASSAN, A. E. **Método dos Elementos Finitos Primeiros Passos.** Editora da UNICAMP. 1996

ARAÚJO, J. M. de; AWRUCH, A. M. **Probabilistic Finite Element Analysis of Concrete Gravity Dams.** Advances in Engineering Software. Vol. 29 N2 p. 97-104. 1998.

AZMI, M.; PAULTRE, P. **Three-Dimensional Analysis of Concrete Dams Including Contraction Joint Non-Linearity.** Engineering Structures 24 (2002) 757-771

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures.** Prentice-Hall, Inc. 1996.

BEJAN, A. **Convection in Heat Transfer.** John Wiley & Son. 1984.

BEJAN, A. **Transferência de Calor.** Editora Edgard Blücher Ltda. 1996.

BRANCO, C. A. G. de M.. **Mecânica dos Materiais.** Fundação Calouste Gulbenkian . Lisboa. 1985.

BUDHU, M.; CONTRACTOR, D. N.; WU, C. S.. **Modeling Groundwater Changes due to Fluctuating Dam Discharge.** Apply Mathematic Modeling (1994) Vol. 18 (665-671)

CALVO, J. B., SUDÓN, J. F. S., PFEIFFER, M. G. M. **Thermal Analysis of RCC Dams Methodology Application to Cenza Dam,** International Symposium on Roller Compacted Concrete Dams, Santander, Spain.1995.

CHANDRUPATLA, T. R.; BELEGUNDU, A. D. **Introduction to Finite Elements in Engineering.** Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey. 1997.

CRAIG, R. R. **Structural Dynamics an Introduction to Computer Methods .** New York Jo Wiley, 1981.

HECKE, M. B. **Uma introdução à Teoria de Elasticidade.** Universidade Federal do Paraná 1984

HORN, T. J.; RICHARDS, W. L.; GONG, L. A **Technique for Transient Thermal Testing of Thick Structures**. National Aeronautics and Space Administration. Nasa Technical Memorandum. 4803 (1997)

HUEBNER, K. H., THORNTON, E. A.; BYROM, T. G.; R.D. **The Finite Element Method for Engineers**. John Wiley & Sons; Third Edition. 1995

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P. **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**. John Wiley & Sons; Third Edition. 1990.

ISHIKAWA, M.. **Thermal Stress Analysis of a Concrete Dam** Computers e Structures. Vol. 40 n° 2 (347-352) (1991)

KRÜGER, D. A. V. **Análise Térmica Transiente de Estruturas de Concreto Executadas por Camadas**. Dissertação de Mestrado. UFPR. 2001

SENDEIR, I. K.; BAERTLEIN, B. A. **Numerical Simulation de Thermal Signatures of Buried Mines Over a Diurnal Cycle**.

LAI, W. M.. **Introduction to Continuum Mechanics**. Pergamon Press. Third Edition. 1993.

LEWIS, R.W.; RANSING, R. S. **The Optimal Design of Interfacial Heat Transfer Coefficients Via a Thermal Struss Model**. Finite Elements in Analysis and Design. 34 (2000) 193-209.

MALVERN, L. E. **Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium**. Prentice-Hall. 1969.

ÖZSAN, A.; AKIN, M.. **Engineering Geological Assessment of the Proposed Urus Dam** . Engineering Geology. 2066 (2002)

ÖZISIK, M.N. **Transferência de calor**, Ed. Mc Graw-Hill Latino Americana S.A., Bogotá, Colombia, 1979.

PENTLAND, J. S.; GITIRANA JR., G. de F. N.; FREDLUND, D. G. **Use of a General Partial Differential Equation Solver for Solution of Mass and Heat Transfer Problems in Geotechnical Engineering**. 2000

PRATHAP, G.; NAGANARAYANA, B. P.. **Consistent Thermal Stress Evaluation in Finite Elements**. Computers e Structures. Vol 54 n° 3 (415-426) (1995)

RIZZO, P. C. **RCC Dam and Rockill Dan at the Saluda Remendation Project**.

THIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. Mc Graw-Hill Kogakusha, LTD. 1970

TATSUMI, K.; IWAI, H.; INAOKA, K. **Numerical Simulation for Heat and Fluid Characteristics of Square Duct with Discrete Rib Turbulators.** International Journal of Heat and Mass Transfer. 45 (2002) 4353-4359

WANG, C. C.; CHEN, C. K. **Forced Convection in a Wavy-Wall Channel.** International Journal of Heat and Mass Transfer. 45 (2002) 2587-2595

ZHU, X. K.; CHAO, Y. J. **Effects of Temperature - Dependent Material Properties on Welding Simulation.** Computers and Structures. 80 (2002) 967-976.

ZIENKIEWICZ; O. C. **The Finite Element Method in Engineering Science.** McGraw-Hill Book Company. 1971.