

REINALDO LUIZ CAVASSO FILHO

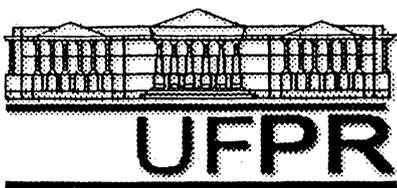
ANÁLISE DE EFEITOS RELATIVÍSTICOS NO MOVIMENTO PLANETÁRIO

Dissertação apresentada como requisito parcial à obtenção do grau de Mestre, Curso de Pós-Graduação em Física, Setor de Ciências Exatas, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Prof. Dr. Jair Lucinda.

CURITIBA

1998



Universidade Federal do Paraná
Pós-Graduação em Física
Caixa Postal 19081
81531-990 Curitiba-PR
Fax: 041 - 267 4236
Telefone: 041 366 2323 ramal 3197
E-mail: iah@fisica.ufpr.br

ATA DA DEFESA DE TESE DE MESTRADO DE REINALDO LUIZ CAVASSO FILHO

TÍTULO DA TESE: "ANÁLISE DE EFEITOS RELATIVÍSTICOS NO MOVIMENTO PLANETÁRIO "

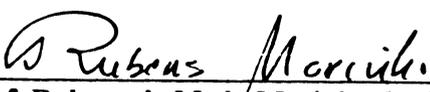
Em sessão pública de Defesa de Tese, iniciada às quatorze horas, nesta data, após um Seminário sobre o assunto da Tese e arquição pela Banca, esta decidiu atribuir Conceito A.

Curitiba, 19 de fevereiro de 1998

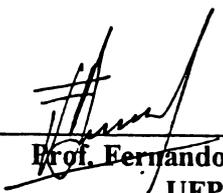
Banca Examinadora:



Prof. Jair Lucinda
Presidente/Orientador



Prof. Rubens de Melo Marinho Junior
ITA



Prof. Fernando Pablo Devecchi
UFPR

*Para minha mãe,
Vera Lúcia Meyer Cavasso.*

Agradecimentos

Agradeço ao meu orientador, Prof. Dr. Jair Lucinda, por auxiliar-me desde o início de minha vida científica e pela compreensão que tem demonstrado mesmo nos momentos em que nossas opiniões são contraditórias.

Às agências de fomento CAPES e CNPq pelo apoio financeiro.

À coordenação do Curso de Pós-Graduação em Física pela excelente infra-estrutura oferecida.

À Biblioteca do Setor de Ciências Exatas pelos recursos disponíveis.

Aos professores que, além de transmitirem seus conhecimentos, estimularam meu interesse pela Física.

Aos amigos e colegas que me apoiaram de alguma forma nessa fase.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
1. Introdução	1
2. A Gravitação segundo a Relatividade Geral	5
2.1 Conceitos básicos sobre a Relatividade Geral	5
2.2 A Solução de Schwarzschild	9
2.3 Dinâmica de uma partícula no campo	10
2.4 Testes experimentais	13
2.4.1 Deslocamento gravitacional das linhas espectrais	14
2.4.2 Deflexão gravitacional da luz	15
3. O movimento planetário no contexto da Relatividade Geral	19
3.1 Introdução	19
3.2 Equações de movimento plano–polares	20
3.3 Equação diferencial da órbita (EDO)	21
3.4 Solução da EDO – a precessão do periélio	22
3.5 Período orbital	24
3.6 Período orbital observado no referencial próprio	29
3.7 Outros efeitos nas órbitas	32
3.7.1 Semi–eixo maior	32
3.7.2 Período radial	34
3.7.3 Defasagem angular	35
3.8 Equações de movimento cartesianas	36
3.8.1 Coordenadas de Schwarzschild	36
3.8.2 Coordenadas próprias	38
3.9 Discussão	40
3.9.1 A precessão do periélio	40

3.9.2 Os outros efeitos relativísticos no movimento planetário	42
3.9.3 Considerações a respeito das observações na Terra	43
3.9.4 Os efeitos não-relativísticos no movimento planetário	45
4. A Gravitação na dinâmica da Relatividade Especial	47
4.1 Introdução	47
4.2 Dinâmica de uma partícula	50
4.3 A energia potencial Newtoniana	51
4.4 A equivalência entre massa gravitacional e massa inercial	53
4.4.1 A lagrangiana de Phipps Jr.	53
4.4.2 A energia de Bagge	55
4.4.3 A lei de força de Bagge	56
4.4.4 Síntese	59
4.5 O modelo de Rood	60
4.5.1 A precessão das órbitas planetárias	60
4.5.2 Outros efeitos no movimento planetário	62
4.5.3 Equações de movimento cartesianas	64
4.5.4 Comportamento da luz	66
5. Conclusões	70
Apêndice A Coordenadas plano-polares	73
Apêndice B O movimento planetário no contexto da Mecânica Newtoniana	75
Apêndice C Solução aproximada para perturbações à EDO Newtoniana	78
Apêndice D Solução numérica das equações de movimento cartesianas	82
Apêndice E Estimativa de efeitos não-relativísticos na órbita de Mercúrio	88
Referências Bibliográficas	94

Resumo

Neste trabalho, analisamos o movimento de uma partícula no campo de Schwarzschild como uma aproximação do movimento planetário no Sistema Solar. Através de uma generalização da solução de Bergmann para a equação diferencial da órbita, obtivemos não somente a precessão do periélio, como também outras correções relativísticas. Dentre estas, destacamos o período orbital, que tem sido considerado como um possível novo teste da Teoria da Relatividade Geral. Uma integração numérica das equações de movimento, usando o método de Runge–Kutta–Nystron de quarta ordem, confirmou nossas previsões para a órbita do planeta Mercúrio, onde os efeitos relativísticos são mais acentuados. Estudamos também o movimento de partículas em certos modelos da gravitação no espaço–tempo plano, tendo em vista que todas as interações não–gravitacionais são tratadas nesse contexto.

Abstract

In this work we analyse the motion of a particle submitted to the Schwarzschild field as an approximation of the planetary motion in the Solar System. With a generalization of Bergmann's solution for the orbital equation, we obtain the perihelion precession and other relativistic corrections. Among these, we emphasize the orbital period, which has been considered as a possible new test of the General Relativity Theory. A numerical integration of the equations of motion, using the fourth order Runge–Kutta–Nystrom method, confirms our predictions for the Mercury orbit, where the relativistic effects are more evident. We also analyse the motion of particles according to some models of gravitation in a flat space–time background, keeping in mind that all non–gravitational interactions are described within this framework.

Capítulo 1

Introdução

It is true that one of the most powerful shifts in attitude in science came about with the methodology of Galileo and Newton; form a mathematical theory from which predictions can be made and test these predictions against observation. Do not ask what it is that constitutes the substance of things, nor why things behave as they do. Just ask how they behave and try to form an elegant mathematical structure that mimics that behavior as closely as possible. (R. Penrose [1])

Por muito tempo, a lei da gravitação de Newton despertou o interesse dos físicos pela sua simplicidade e generalidade. A explicação do movimento da Lua e das órbitas planetárias através de uma lei de força do inverso do quadrado da distância foi um fato extraordinário. Transcorreram quase dois séculos após a publicação do “Principia” para que se observasse algum efeito gravitacional que não pudesse ser explicado pela teoria de Newton. Constatou-se, em 1859, que o ponto de máxima aproximação do planeta Mercúrio, seu periélio, se deslocava a uma taxa superior àquela prevista com a lei da gravitação de Newton.

Logo, a questão do movimento anômalo do periélio de Mercúrio já intrigava os astrônomos desde meados do século XIX. De acordo com as medidas atualmente aceitas [2], a precessão total observada é de $5599.74 \pm 0.41''/\text{sec}$ (segundos de arco por século), sendo que deste total cerca de 5025.65 ± 0.50 pode ser explicada em termos da precessão geral dos equinócios e aproximadamente 531.53 ± 0.79 pode ser considerada como efeito das perturbações planetárias sobre Mercúrio. Restam, portanto, $42.56 \pm 0.94''/\text{sec}$ que não podem ser explicados com os corpos celestes conhecidos.

Em junho de 1846, Le Verrier mostrou que irregularidades semelhantes a essa na órbita de Urano poderiam ser explicadas pela existência de um planeta desconhecido. Em setembro do mesmo ano, o astrônomo Galle descobriu Netuno na posição prevista por Le Verrier¹ [3]. Foi um grande triunfo da teoria da gravitação de Newton. Em 1859, Le Verrier constatou

¹Cálculos da posição de Netuno já haviam sido efetuados por Adams, da Universidade de Cambridge, em setembro de 1845. Mas os astrônomos ingleses não tiveram sucesso na observação do planeta.

que seus cálculos das perturbações planetárias não estavam em acordo com o movimento observado do periélio de Mercúrio. Concluiu imediatamente que deveria haver um corpo desconhecido (ou vários), interior à órbita de Mercúrio, que estivesse provocando uma perturbação gravitacional adicional. Entretanto, apesar dos intensos esforços, o assim chamado planeta Vulcano nunca foi observado. A procura por tal planeta foi interrompida em 1915 com a publicação de Einstein da sua Teoria da Relatividade Geral (RG) [4]. Um dos motivos dessa teoria ter sido amplamente aceita foi a explicação da precessão anômala de Mercúrio sem a adição de mais corpos celestes ao Sistema Solar. Tal efeito foi, a princípio, a única vantagem da teoria de Einstein sobre a de Newton [5].

Em 1960, Schiff [6] mostrou que os outros dois efeitos previstos por Einstein, o “deslocamento para o vermelho”² e a “deflexão gravitacional da luz”³, podem ser explicados usando o princípio da equivalência⁴ dentro do contexto da Teoria da Relatividade Especial (RE). Portanto, esses efeitos não podem ser usados unicamente como testes da Teoria Geral. De acordo com Schiff, *“Como os dois primeiros dos três testes cruciais podem ser derivados do princípio da equivalência e da relatividade especial, sem referência à equação geodésica ou às equações de campo da relatividade geral, advém que somente a precessão da órbita realmente proporciona um teste da relatividade geral.”*⁵ Ainda, de acordo com Will [8], o deslocamento das linhas espectrais para o vermelho é apenas um teste do princípio da equivalência, não podendo distinguir entre a RG e outras teorias métricas da gravitação.

Além dos três efeitos propostos por Einstein como testes de sua teoria, surgiram outros. Um deles é o atraso gravitacional no eco de sinais de radar sugerido por Shapiro em 1964

²Do inglês *red shift*: deslocamento para o vermelho – a frequência de emissão característica de um dado processo físico, na superfície do Sol, quando observada na Terra, é menor do que a frequência emitida pelo mesmo processo na Terra, veja seção 2.4.1.

³Do inglês *gravitational light bending*: deflexão gravitacional da luz – fenômeno de deflexão gravitacional de raios luminosos ao passarem próximos a corpos massivos, veja seção 2.4.2.

⁴O Princípio da Equivalência consiste de duas partes [7]: 1) Princípio da equivalência *forte* - em todos os laboratórios em queda livre os resultados de algum experimento local são os mesmos, independente do campo gravitacional ao qual o laboratório está sujeito. 2) Princípio da equivalência *fraca* - em um campo gravitacional qualquer todas as partículas teste caem com a mesma aceleração.

⁵Tradução livre de *Since the first two of the three “crucial tests” can be derived from the equivalence principle and special relativity without reference to the geodesic equation or the field equations of general relativity, it follows that only the orbit precession really provides a test of general relativity.*

[8]. A partir de 1974, quando Hulse e Taylor descobriram o sistema pulsar binário PSR 1913+16, abriu-se a possibilidade de testar a RG em situações de campo gravitacional mais forte do que aquele acessível no Sistema Solar [9]. O movimento da maioria dos sistemas binários descobertos desde então parecem corroborar as previsões da RG, embora as órbitas dos sistemas binários (não pulsares) DI Herculis e AS Camelopardis apresentem precessões menores do que o previsto [10]. Mas no campo gravitacional do Sistema Solar, a previsão feita por Einstein de uma precessão nas órbitas era o único efeito relativístico no movimento planetário relatado até 1993. Nesse ano, um novo teste da RG foi proposto por Preston e Weber [11]. Os autores concluíram que o período orbital previsto com a RG é diferente do previsto newtonianamente. Entretanto, constatamos que esse cálculo apresenta problemas que invalidam completamente o resultado obtido pelos autores. Nosso principal objetivo foi, então, fazer uma previsão mais aprimorada para esse efeito.

No Capítulo 2, descrevemos o tratamento da gravitação no contexto da Relatividade Geral. No Capítulo 3, analisamos o problema do movimento planetário dentro desse contexto. Obtivemos uma solução aproximada da equação diferencial da órbita (que nos dá a relação entre as coordenadas radial e angular), apresentada no Apêndice C. Através dessa solução, fomos capazes de fazer uma nova previsão para o período da órbita, incluindo correções relativísticas à terceira lei de Kepler[12]. Analisamos ainda outros efeitos relativísticos no movimento planetário, não considerados até então. Tais efeitos também poderão servir como novos testes para teorias de gravitação. De modo a corroborar as nossas previsões analíticas, fizemos uma integração numérica das equações de movimento expressas em coordenadas cartesianas.

A demonstração de Schiff de que a deflexão gravitacional da luz e o desvio para o vermelho podem ser explicados com a Relatividade Especial e o princípio da equivalência [6], bem como o fato de todas as interações não-gravitacionais serem tratadas nesse contexto, motivou várias tentativas de se descrever também o movimento planetário fora do formalismo de espaço-tempos curvos [13–25]. Em particular, os modelos propostos por Bagge [13] em 1981, por Rood em 1984 [14] e por Phipps Jr. em 1986 [15] explicam completamente, segundo os

autores, a precessão anômala da órbita de Mercúrio. Os efeitos relativísticos no movimento planetário discutidos no Capítulo 3 no âmbito da RG são confrontados com aqueles obtidos no contexto desses modelos no Capítulo 4. Finalmente, no Capítulo 5, apresentamos as conclusões deste trabalho.



I was sitting on a chair in my patent office in Bern. Suddenly a thought struck me: If a man falls freely, he would not feel his height. I was taken aback. (A. Einstein[26])

Capítulo 2

A Gravitação segundo a Relatividade Geral

2.1 Conceitos Básicos sobre a Relatividade Geral

A Teoria da Relatividade Geral de Einstein (RG) [27–30] está baseada no que ficou conhecido como “Princípio da Equivalência”¹. Esse princípio repousa na igualdade entre massa inercial e massa gravitacional, ou seja, na constatação de que diferentes corpos, sujeitos às mesmas condições iniciais, seguem a mesma trajetória, independentemente de suas massas. Tal princípio levou Einstein a conjecturar que, em um “elevador em queda livre”, nenhum efeito do campo gravitacional pode ser detectado. Isso implica que todas as leis da Física, incluindo a Relatividade Especial (RE), que são válidas em referenciais inerciais na ausência de gravitação, são também válidas em um elevador em queda livre. Nesse sistema de referência especial, que foi chamado de “referencial inercial local”, as coordenadas de uma partícula serão especificadas por ξ^μ (notação de Weinberg[27]²). Se tal partícula está livre da ação de forças, exceto da força gravitacional (que não é sentida no referencial inercial local), de acordo com a RE

$$\frac{d^2 \xi^\mu}{d\tau^2} = 0, \quad (2.1)$$

¹Nesse Capítulo, fazemos uma exposição introdutória da Relatividade Geral. Um leitor familiarizado com a Teoria de Einstein da Gravitação pode omiti-lo, com exceção da Seção 2.3, onde é descrita uma abordagem Lagrangiana ao movimento de uma partícula no campo (inspirada em uma teoria alternativa da Gravitação [16]).

²Aqui $\mu = 0, 1, 2, 3$; onde ξ^0 denota a coordenada temporal e as demais as coordenadas cartesianas.

onde $d\tau$ é o elemento de tempo próprio dado por ds/c , sendo ds o intervalo espaço-temporal da partícula

$$ds^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta, \quad (2.2)$$

onde $\eta_{\alpha\beta}$ é o tensor métrico de Minkowski, que em coordenadas cartesianas pode ser escrito como

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

A Eq.(2.1) expressa a equação de movimento para uma partícula livre no “referencial inercial local”. As coordenadas dessa partícula, medidas em um referencial de laboratório, em repouso em relação ao campo gravitacional [27], serão especificadas por x^μ . Podemos encontrar as equações de movimento da partícula no referencial do laboratório, se soubermos como conectar as observações efetuadas nesse referencial com aquelas efetuadas no referencial inercial local. Assim, fazendo uma transformação de coordenadas,

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} \right) = 0, \quad (2.4)$$

ou ainda, na forma mais conhecida

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0. \quad (2.5)$$

O termo $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ conhecido como “conexão afim” (também chamado de símbolo de Christoffel) é dado por

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu \equiv \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial^2 \xi^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma}, \quad (2.6)$$

ou, em termos do tensor métrico

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}, \quad (2.7)$$

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu = \frac{1}{2} g^{\lambda\mu} \left\{ \frac{\partial g_{\sigma\lambda}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^\sigma} - \frac{\partial g_{\sigma\rho}}{\partial x^\lambda} \right\}. \quad (2.8)$$

O tensor métrico $g_{\mu\nu}$ nos dá a relação entre as coordenadas medidas no referencial inercial local (ξ^μ) e as coordenadas medidas no referencial do observador (x^μ). Sabendo essa relação,

$\xi^\mu(x^\nu)$, as equações de movimento para uma partícula no campo ficam completamente determinadas pela Eq.(2.5). As componentes do tensor métrico, de certa forma, podem ser interpretadas como sendo os potenciais do campo gravitacional. O problema do movimento então se limita a encontrar o campo gravitacional ($g_{\mu\nu}$) gerado por uma dada fonte. Em outras palavras, é necessário sabermos como uma dada “distribuição de matéria” afeta o espaço-tempo.

Fazendo uma analogia com a Mecânica Newtoniana, o movimento de uma partícula num dado campo gravitacional ϕ é descrito pela equação

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} + \frac{\partial \phi}{\partial x^i} = 0 , \quad (2.9)$$

que é a equivalente newtoniana da Eq.(2.5). O potencial ϕ , gerado por uma dada distribuição de matéria, é então determinado pela equação de campo

$$\nabla^2 \phi(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r}) , \quad (2.10)$$

onde G é a constante de Gravitação Universal e $\rho(\vec{r})$ é a densidade de massa no ponto \vec{r} . No espaço vazio, ou seja, onde não há matéria,

$$\nabla^2 \phi = 0 . \quad (2.11)$$

Para uma fonte estática e esfericamente simétrica, a solução da Eq.(2.10) fora da matéria é

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r} , \quad (2.12)$$

onde M é a massa total da fonte.

Voltando ao problema relativístico, estamos interessados em conhecer os potenciais $g_{\mu\nu}$. Na teoria de Einstein, a conexão entre o campo gravitacional e uma dada distribuição de massa é obtida através da seguinte equação de campo tensorial [27]

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} , \quad (2.13)$$

onde R é a curvatura escalar,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} ; \quad (2.14)$$

$R_{\mu\nu}$ é o tensor de Ricci

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}, \quad (2.15)$$

uma contração do tensor de curvatura de Riemann-Cristoffel

$$R^{\lambda}_{\mu\nu\kappa} = \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial\Gamma^{\lambda}_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\eta}_{\mu\nu}\Gamma^{\lambda}_{\kappa\eta} - \Gamma^{\eta}_{\mu\kappa}\Gamma^{\lambda}_{\nu\eta} \quad (2.16)$$

e $T_{\mu\nu}$ é o tensor energia-momentum que caracteriza a fonte (da mesma forma que $\rho(\vec{r})$ caracteriza a fonte na teoria Newtoniana, Eq.(2.10)). As equações de Einstein, Eq.(2.13), relacionam as componentes do tensor métrico $g_{\mu\nu}$ (que determina o movimento de partículas teste, Eq.(2.5)) com as componentes do tensor energia-momentum da fonte de gravitação.

Para uma fonte puntual localizada no ponto \vec{r} , sem spin e estática, a única componente não nula do seu tensor energia-momentum é $T_{00} = Mc^2\delta^3(\vec{r})$. No caso de uma fonte qualquer, fora da matéria $T_{\mu\nu} = 0$ e todas as componentes do tensor de Ricci são nulas,

$$R_{\mu\nu} = 0, \quad (2.17)$$

visto que a curvatura escalar pode ser escrita como $R = -8\pi GT^{\mu}_{\mu}/c^4$.

Nessa seção expusemos brevemente a teoria de Einstein da Gravitação :

- a Eq.(2.5) descreve o movimento de uma partícula teste em um campo gravitacional $g_{\mu\nu}$ qualquer (em analogia com Eq.(2.9) newtoniana);
- a Eq.(2.13) fornece o campo gravitacional $g_{\mu\nu}$ gerado por uma distribuição de massa qualquer $T_{\mu\nu}$ (análogo na teoria de Newton para $\nabla^2\phi = 4\pi G\rho$);
- fora da fonte gravitacional, o tensor de Ricci é nulo, Eq.(2.17) (na teoria de Newton é equivalente à $\nabla^2\phi = 0$).

A determinação do campo gravitacional gerado por uma dada distribuição de matéria e a determinação do movimento de partículas teste nesse campo são objeto das aplicações da teoria e serão discutidas nas próximas seções.

2.2 A Solução de Schwarzschild

A solução das equações de Einstein, Eq.(2.13), para uma dada distribuição de matéria, nos fornece os potenciais $g_{\mu\nu}$ em todos os pontos do espaço. Assim, o intervalo espaço-tempo fica completamente determinado, já que pode ser escrito, a partir da Eq.(2.2), em termos do tensor $g_{\mu\nu}$,

$$ds^2 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\mu dx^\nu = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (2.18)$$

Um caso importante de distribuição de massa é o de uma fonte gravitacional esfericamente simétrica e estática. Em uma primeira aproximação, podemos considerar o Sol como uma fonte desse tipo e, ainda, considerar os planetas como partículas teste (de massa muito menor do que a massa do Sol) movendo-se no campo central. Tal descrição, sem dúvida, tem suas limitações, por exemplo: o Sol gira ao redor de seu eixo; é achatado, tendo portanto um *momentum* de quadrupolo; as massas de diversos planetas não podem ser desprezadas, resultando em consideráveis influências nas órbitas dos planetas interiores; o baricentro do Sistema Solar não coincidindo com o centro do Sol faz com que o mesmo orbite ao redor desse ponto, também levando a perturbações nas órbitas. Tais efeitos podem ser calculados através da Mecânica Newtoniana com boa precisão, pois tratam-se apenas de perturbações. Um tratamento completamente relativístico do sistema resultaria apenas em correções relativísticas a essas perturbações. Como tais perturbações são pequenas frente ao potencial central $-GM/r$, correções relativísticas a elas podem ser completamente desprezadas³. Portanto, iremos nos ater ao cálculo das correções relativísticas para o campo gravitacional gerado por uma fonte de simetria esférica.

Considerando uma fonte esfericamente simétrica, estática e sem spin, esperamos que o campo gravitacional por ela produzido também tenha essas propriedades. A simetria central do campo significa que o intervalo espaço-tempo ds deve ser o mesmo para pontos espacialmente equidistantes do centro da fonte. Em outras palavras, ds deve ser invariante por

³Por exemplo, os efeitos do campo gravitacional gerado pelos outros planetas na órbita de Mercúrio são da mesma ordem de grandeza da correção relativística ao potencial central do Sol, $\mathcal{O}(c^{-2})$, veja a Seção 3.9.4 e o Apêndice E. Se levarmos em conta correções relativísticas aos potenciais planetários, encontraremos correções da ordem de $\mathcal{O}(c^{-4})$ na órbita de Mercúrio.

rotações. A imposição do campo ser estático implica que $g_{\mu\nu}$ não deve depender explicitamente da coordenada temporal x^0 . A forma mais geral de um intervalo espaço-tempo que tenha as propriedades requeridas é, segundo Weinberg [27],

$$ds^2 = F(r)c^2 dt^2 - 2E(r)dt(\vec{r} \cdot d\vec{r}) - D(r)(\vec{r} \cdot d\vec{r})^2 - C(r)|d\vec{r}|^2, \quad (2.19)$$

visto que $\vec{r} \cdot d\vec{r}$, $|d\vec{r}|^2$ e as funções de $r = |\vec{r}|$ são invariantes por rotação. Pode-se ainda considerar a forma mais simples

$$ds^2 = F(r)c^2 dt^2 - D(r)(\vec{r} \cdot d\vec{r})^2 - |d\vec{r}|^2. \quad (2.20)$$

Ao aplicarmos essa métrica simplificada nas equações de Einstein no vácuo ($R_{\mu\nu} = 0$), obtemos a seguinte solução

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left[\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} - 1\right] \frac{(\vec{r} \cdot d\vec{r})^2}{r^2} - |d\vec{r}|^2. \quad (2.21)$$

Essa solução das equações de Einstein ficou conhecida como a “Solução de Schwarzschild”, após o físico alemão Karl Schwarzschild obtê-la em 1916 [27, 28]. Tal expressão determina completamente o campo de gravitação no vácuo, criado por uma distribuição de massa centralmente simétrica.

2.3 Dinâmica de uma partícula no campo

As equações de movimento para uma partícula teste podem ser obtidas através da Eq.(2.5) como faz Bergmann [29]. Uma maneira mais elegante de obtermos tais equações de movimento é através de um princípio variacional [28, 30].

O Princípio de Hamilton [31] afirma que a evolução temporal de um sistema, de t_1 a t_2 , é tal que a integral de linha

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L} dt \quad (2.22)$$

tem um valor estacionário para a trajetória real do sistema (onde S é a ação e \mathcal{L} é a lagrangiana do sistema). Em outras palavras, a ação S é mínima no percurso correto do sistema, ou seja, as variações de primeira ordem na ação são nulas ($\delta S = 0$).

A ação do movimento para uma partícula livre segundo a Relatividade Especial é

$$S = -m_0 c \int ds, \quad (2.23)$$

onde m_0 é a massa de repouso da partícula. De acordo com o Princípio da Equivalência [27–30], todas as equações da RE devem ser válidas em um referencial inercial local. Portanto, a ação de uma partícula livre em um campo gravitacional (que não é sentido no referencial inercial local) também deve ser escrita na forma da Eq.(2.22). Tal ação constitui um escalar, visto que ds é um invariante sob transformações gerais de coordenadas. Para o caso de um campo gravitacional central simétrico, utilizamos a solução de Schwarzschild para ds . Deste modo, a ação de uma partícula nesse campo é dada por

$$S = -m_0 c^2 \int \sqrt{1 - \frac{2GM}{rc^2} - \left[\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} - 1 \right] \frac{1}{r^2 c^2} \left(\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \right)^2 - \frac{1}{c^2} \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right|^2} dt. \quad (2.24)$$

Portanto, a função lagrangiana de uma partícula se movendo no campo de Schwarzschild é

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \bar{\gamma}^{-1} \xi^{-1}, \quad (2.25)$$

onde

$$\xi \equiv \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.26)$$

e

$$\bar{\gamma} \equiv \left[1 - \frac{2GM}{r^3 c^4} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-2} (\vec{r} \cdot \vec{v})^2 - \frac{v^2}{c^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1}\right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.27)$$

sendo \vec{v} o vetor velocidade, $d\vec{r}/dt$. Na ausência da fonte gravitacional ($M = 0$), esta se reduz à lagrangiana de partícula livre da Relatividade Especial, $-m_0 c^2 \gamma^{-1}$, onde $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ [31]. Levando em conta que os termos $\mathcal{O}(c^{-2})$ são muito menores do que 1 no caso de movimento de planetas, podemos fazer uma expansão de Taylor na Eq.(2.25), obtendo

$$\mathcal{L} \approx -m_0 c^2 + \mathcal{L}_N + m_0 \left[\frac{v^2}{2} \left(\frac{1}{4} \frac{v^2}{c^2} + \frac{GM}{rc^2} \right) + \frac{GM}{r} \left(\frac{1}{2} \frac{GM}{rc^2} + \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})^2}{r^2 c^2} \right) \right] + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (2.28)$$

onde \mathcal{L}_N é a lagrangiana newtoniana para uma partícula no campo gravitacional de uma fonte com simetria esférica,

$$\mathcal{L}_N = m_0 \left(\frac{v^2}{2} + \frac{GM}{r} \right). \quad (2.29)$$

A lagrangiana dada pela Eq.(2.25) pode então ser expressa como perturbações à lagrangiana newtoniana. Em condições de campo fraco⁴, essas perturbações são muito pequenas. Por exemplo, para a órbita do planeta Mercúrio são da ordem de $\langle v^2 \rangle / c^2 = GM / \langle r \rangle c^2 \approx 2.5 \times 10^{-8}$. Portanto, devemos esperar que a lagrangiana relativística, Eq.(2.25), conduza a equações de movimento que em primeira ordem devam se reduzir às newtonianas. Antes de partirmos para a análise das equações de movimento, vamos obter os *momenta* generalizados e a energia total da partícula no campo.

Em coordenadas cartesianas, $\vec{r} = (x^1, x^2, x^3)$, a lagrangiana expressa pela Eq.(2.25) nos leva aos *momenta* generalizados

$$P^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = m_0 \bar{\gamma} \xi \left[\dot{x}^i + \frac{2GM}{r^3 c^2} \xi^2 (\vec{r} \cdot \vec{v}) x^i \right], \quad (2.30)$$

onde o ponto refere-se à derivação em relação ao tempo t (medido por um observador muito distante da fonte de gravitação e estático em relação a esta). É fácil notar que, na ausência de campo ($M = 0$), recaímos na expressão da RE, $P^i = m_0 \gamma \dot{x}^i$ [31].

A energia total da partícula pode ser obtida por uma transformação de Legendre na lagrangiana,

$$E = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i - \mathcal{L} = m_0 c^2 \bar{\gamma} \xi^{-1}. \quad (2.31)$$

Essa grandeza é uma constante de movimento pois não depende explicitamente do tempo. Na ausência de fonte gravitacional, recuperamos a expressão usual da RE para a energia de uma partícula livre, $m_0 c^2 \gamma$. É propício notar que essa energia também pode ser escrita na forma

$$E = m_0 c^2 + E_N + m_0 \left[-\frac{v^2}{2} \left(\frac{3v^2}{4c^2} + \frac{GM}{rc^2} \right) + \frac{GM}{r} \left(\frac{1}{2} \frac{GM}{rc^2} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})^2}{r^2 c^2} \right) \right] + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (2.32)$$

onde E_N é a energia newtoniana correspondente,

$$E_N = m_0 \left(\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} \right). \quad (2.33)$$

⁴Condições em que $GM/r \ll c^2$.

A energia relativística da partícula consiste então da energia de repouso (m_0c^2) acrescida da energia newtoniana e das perturbações correspondentes aos efeitos puramente relativísticos.

Podemos ainda construir uma equação de Hamilton–Jacobi para o movimento [28]

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} + m_0^2 c^2 = 0, \quad (2.34)$$

a função principal de Hamilton e, ainda, a Hamiltoniana da partícula (que consiste na energia E escrita em termos dos P^i e x^i). Entretanto, apesar de tais construções poderem ser usadas no estudo do movimento como o faz Landau [28], a lagrangiana sozinha já nos dá toda a informação sobre as trajetórias. Além disso, a descrição do movimento através da lagrangiana relativística facilita-nos traçar um paralelo com a descrição newtoniana. É interessante salientar que os livros textos consultados [27, 28, 29] não fazem uso explícito dessa lagrangiana, embora Weinberg mostre que o princípio variacional $\delta \int ds = 0$ é consistente com as equações de movimento (2.5) para um campo geral $g_{\mu\nu}$.

2.4 Testes experimentais

O grande sucesso e aceitação da teoria da Relatividade Geral devem-se a confirmações experimentais de efeitos que não podem ser explicados com a teoria da Gravitação de Newton. Em 1916, Einstein concebeu três efeitos para servirem como teste de sua teoria da Gravitação: o deslocamento gravitacional das linhas espectrais, a deflexão da luz pelo Sol e a precessão anômala do periélio das órbitas planetárias.

Iremos analisar aqui esses três testes propostos por Einstein. Devido à maior profundidade que daremos aos efeitos relativísticos no movimento planetário, os mesmos encontram-se no próximo capítulo.

2.4.1 Deslocamento gravitacional das linhas espectrais

Vamos considerar um átomo estático ($d\vec{r}/dt = \vec{0}$) emitindo radiação monocromática a uma distância r_A do centro de uma fonte gravitacional esfericamente simétrica. O comprimento de onda da luz corresponderá a um intervalo espaço-tempo Δs^2 ,

$$\Delta s^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r_A c^2}\right) c^2 \Delta t_A^2, \quad (2.35)$$

onde Δt_A é o período de oscilação medido por um referencial muito distante da fonte. O período observado no referencial onde é emitida a onda é $\Delta\tau = \Delta s/c$, independente da posição onde ocorre a emissão. Portanto, o período observado em um referencial muito distante da fonte depende do campo gravitacional onde a onda é emitida,

$$\Delta t_A = \frac{\Delta\tau}{\left(1 - 2GM/r_A c^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.36)$$

De maneira análoga, para um átomo do mesmo tipo emitindo uma onda em um ponto B do espaço,

$$\Delta t_B = \frac{\Delta\tau}{\left(1 - 2GM/r_B c^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.37)$$

Considerando que a luz emitida em A seja observada em B , a razão entre a frequência observada em B e sua frequência “padrão” ν_B será

$$\nu_A = \sqrt{\frac{1 - 2GM/r_A c^2}{1 - 2GM/r_B c^2}} \nu_B, \quad (2.38)$$

visto que a frequência é o inverso do período de oscilação. No caso da luz emitida por um átomo na superfície do Sol, $r_A = R_\odot$, esta será detectada na Terra com uma frequência ν_\odot , menor do que a da luz emitida pelo mesmo tipo de átomo na Terra, ν_e ,

$$\nu_\odot = \sqrt{\frac{1 - 2GM_\odot/R_\odot c^2}{1 - 2GM_\odot/r_e c^2}} \nu_e \approx \nu_e - \frac{GM_\odot}{c^2} \left(\frac{1}{R_\odot} - \frac{1}{r_e}\right) \nu_e, \quad (2.39)$$

onde r_e é a distância da Terra ao centro do Sol. Nesse caso, as frequências são reduzidas por um fator de 2 partes em 10^6 . Para o espectro emitido na superfície de estrelas massivas e compactas, como anãs brancas, o efeito é bem mais acentuado. Medidas do deslocamento

para o vermelho provocado pelo campo gravitacional terrestre também já foram efetuadas, comprovando a expressão da RG [8].

A derivação apresentada, que relaciona os intervalos de tempo medidos em referenciais distintos A e B , é a abordagem tradicional dos livros texto. Todavia, é interessante salientar que podemos obter a Eq.(2.38) usando a dinâmica de uma partícula imersa no campo gravitacional, descrita na Seção 2.3.

Vamos supor que uma partícula de massa de repouso m_0 , localizada a uma distância r_A do centro da fonte, se desintegre emitindo dois fótons. Por razões de conservação do *momentum*, uma partícula não pode se desintegrar dando origem a um fóton apenas [52]. Ainda, considerando a partícula em repouso, os dois fótons gerados devem ter a mesma frequência ν_A . Portanto, como a energia da partícula deve ser conservada após a desintegração, a frequência de cada fóton será

$$\nu_A = \frac{m_0 c^2}{2h} \left(1 - \frac{2GM}{r_A c^2} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.40)$$

onde h é a constante de Planck. Podemos fazer um raciocínio análogo para uma mesma partícula se desintegrando a uma distância r_B do centro da fonte de gravitação. Como a energia do fóton é uma constante, ele “carrega” a informação do campo gravitacional onde foi emitido. O efeito de deslocamento para o vermelho aparece quando comparamos as frequências de dois fótons, gerados pelo mesmo tipo de partícula, emitidos em potenciais diferentes. A despeito de Einstein considerá-lo como um teste crucial da RG, esse efeito não pode distinguir entre a RG e outra teoria métrica da gravidade, sendo apenas um teste do Princípio da Equivalência [8].

2.4.2 Deflexão gravitacional da luz

Dentro da teoria da Relatividade Especial, a propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo é descrita por um intervalo espaço-tempo nulo, $ds^2 = 0$. De acordo com o princípio da equivalência, todas as leis da física válidas na ausência da gravitação são igualmente válidas em “referenciais inerciais locais”; portanto, a luz também se comporta com $ds^2 = 0$ nesses

referenciais. Ainda, tal comportamento é válido em qualquer sistema de referência, visto que ds^2 é um invariante por transformações gerais de coordenadas. Considerando então um raio luminoso se movendo em um campo de Schwarzschild, temos que

$$ds^2 = \left\{ 1 - \frac{2GM}{rc^2} - \left[\left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} - 1 \right] \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})^2}{r^2 c^2} - \frac{v^2}{c^2} \right\} c^2 dt^2 = 0 \quad (2.41)$$

descreve a sua propagação, onde $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Podemos escrever este intervalo em coordenadas polares no plano (r, φ) , assim,

$$1 - \frac{2GM}{rc^2} - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} \frac{\dot{r}^2}{c^2} - \frac{r^2 \dot{\varphi}^2}{c^2} = 0, \quad (2.42)$$

onde o ponto se refere à derivada em relação a t . O princípio variacional $\delta \int ds = 0$ nos leva a seguinte equação de movimento para a coordenada φ

$$\frac{d}{dt} \left[r^2 \dot{\varphi} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} \right] = 0, \quad \text{ou seja, } h \equiv r^2 \dot{\varphi} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} \quad (2.43)$$

é uma constante de movimento. As Eqs.(2.42 – 2.43) descrevem completamente o movimento de um fóton no campo. A fim de obtermos uma “equação de trajetória” para o fóton, devemos relacionar diretamente as coordenadas r e φ . Usando o fato de que $\dot{r} = \dot{\varphi} dr/d\varphi$, a Eq.(2.42) pode ser escrita na forma

$$1 - \frac{h^2}{r^4 c^2} \left(\frac{dr}{d\varphi} \right)^2 - \frac{h^2}{r^2 c^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) = 0. \quad (2.44)$$

Essa equação diferencial descreve completamente a trajetória de um fóton no campo de Schwarzschild, independente das condições de contorno do problema.

Vamos considerar agora a situação do espalhamento gravitacional de um raio luminoso pelo Sol mostrada a seguir:

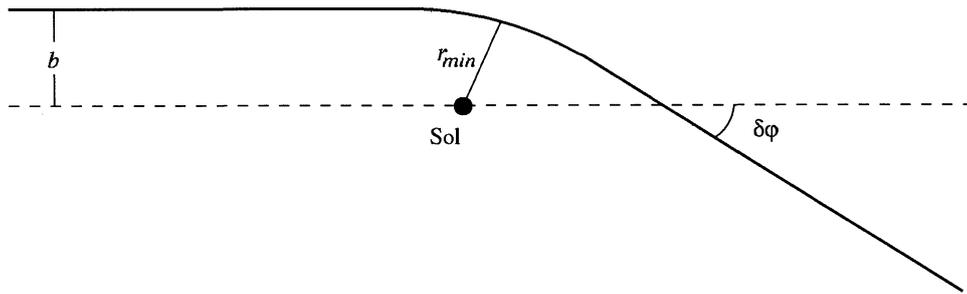


Fig.(1) Ilustração do desvio de um raio luminoso pelo campo gravitacional do Sol.

O raio luminoso é emitido de um ponto muito distante da fonte com um “parâmetro de impacto” b e a orientação do sistema de coordenadas foi escolhida de tal forma que $\varphi_0 = \pi$. O ponto de máxima aproximação do raio luminoso se dará quando $dr/d\varphi = 0$. Desta forma determinamos h ,

$$h = \frac{r_{min}c}{\sqrt{1 - 2GM/r_{min}c^2}}, \quad (2.45)$$

onde r_{min} é a distância de máxima aproximação. Pode-se ainda relacionar essa distância com o parâmetro de impacto b , já que no infinito

$$h = \lim_{r \rightarrow \infty} |\vec{r} \times \vec{v}| \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} = bc. \quad (2.46)$$

Da simetria do problema, temos que a distância de máxima aproximação, r_{min} , se dá quando $\varphi = \pi/2 - \delta\varphi/2$. Assim, podemos escrever a Eq.(2.44) na forma de integral definida

$$\int_{\pi}^{\pi/2 - \delta\varphi/2} d\varphi = \int_{\infty}^{r_{min}} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{r_{min}^2} \left(1 - \frac{2GM}{r_{min}c^2}\right) - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)}}, \quad (2.47)$$

visto que em $\varphi = \pi$, $r = \infty$. O problema da deflexão gravitacional da luz em um campo de Schwarzschild resume-se então ao cálculo dessas integrais. Em condições de campo fraco, como é o caso do campo externo à superfície do Sol, temos que $r \gg 2GM/c^2$. Assim podemos calcular a deflexão $\delta\varphi$ por uma série de Taylor,

$$\begin{aligned}
\delta\varphi &= 2 \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{r_{min}^2} \left(1 - \frac{2GM}{r_{min}c^2}\right) - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)}} - \pi \\
&\approx 2 \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{\frac{1}{r_{min}^2} - \frac{1}{r^2}}} \left[1 + \frac{GM}{rc^2} + \frac{GMr}{r_{min}(r+r_{min})c^2} + \mathcal{O}(c^{-4}) \right] - \pi \\
&= 2 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{GM}{r_{min}c^2} + \frac{GM}{r_{min}c^2} \right] - \pi \\
&= \frac{4GM}{r_{min}c^2}, \tag{2.48}
\end{aligned}$$

ou ainda, em termos do parâmetro de impacto,

$$\delta\varphi = \frac{4GM}{bc^2}, \tag{2.49}$$

visto que $r_{min} = b + \mathcal{O}(c^{-2})$. De acordo com essa expressão, um raio luminoso passando próximo à superfície do Sol é desviado de sua trajetória inicial por um ângulo da ordem de $8,5 \times 10^{-6} \text{ rad}$ ($1,75''$). As primeiras medidas desse efeito foram realizadas em 1919 em um eclipse solar, mas o erro experimental na medida foi maior do que a previsão da RG [8]. Medidas posteriores do efeito confirmaram a RG [27]. Considerando um fóton como uma partícula com velocidade inicial c , dentro do contexto da Mecânica newtoniana, obtemos apenas metade da deflexão prevista com a RG [32].

A lot of physicists consider general relativity to be a sacred cow... But theories should always be tested. (E. Guinan[10])

Capítulo 3

O movimento planetário no contexto da Relatividade Geral

3.1 Introdução

A explicação do avanço do periélio anômalo do planeta Mercúrio foi a primeira confirmação experimental da RG, tornando-se um grande triunfo para a teoria¹. Nesse capítulo analisamos a previsão desse efeito, bem como outros efeitos relativísticos nas órbitas planetárias. Dentre esses, salientamos a previsão da RG para o período orbital, considerado por Preston e Weber [11] como um novo teste da teoria. Discutimos os problemas com o cálculo original do período orbital relativístico e apresentamos uma nova previsão para o efeito, consistente com as condições de contorno do movimento [12].

Em uma primeira aproximação, podemos considerar o Sol como uma fonte esfericamente simétrica e estática e os planetas como partículas teste de massa muito menor do que a massa da fonte, não alterando, portanto, o campo. Como vimos, o campo gravitacional gerado por uma fonte esférica e estática, solução das equações de Einstein no vácuo, pode ser expresso pelo elemento de linha de Schwarzschild,

$$ds^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) c^2 dt^2 - \left[\left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right)^{-1} - 1\right] \frac{(\vec{r} \cdot d\vec{r})^2}{r^2} - |d\vec{r}|^2. \quad (3.1)$$

As equações de movimento de uma partícula em tal campo são obtidas através das equações geodésicas, Eq.(2.5),

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0.$$

¹Nesse Capítulo, são expostos os cálculos que efetuamos para o movimento planetário no contexto da Relatividade Geral, cujos principais resultados se encontram em [12].

Alternativamente, podemos descrever a dinâmica da partícula no campo através da seguinte lagrangiana efetiva, Eq.(2.25),

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \bar{\gamma}^{-1} \xi^{-1} ,$$

como foi mostrado na Seção 2.3. Tal lagrangiana é equivalente às equações geodésicas na descrição do movimento da partícula, pois advém do princípio variacional $\delta \int ds = 0$.

3.2 Equações de movimento plano-polares

Podemos tratar o sistema em um plano, simplificando o problema. Como no tratamento newtoniano [31], é mais conveniente trabalharmos com coordenadas polares no plano (r, θ) . Nesse sistema de coordenadas, a lagrangiana da partícula pode ser expressa na forma

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \left[1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-2} - \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{c^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{\frac{1}{2}} , \quad (3.2)$$

onde o ponto denota derivação em relação à coordenada t , como usual. A equação de Euler-Lagrange para a coordenada cíclica θ nos leva à conservação do *momentum* angular relativístico, P_θ ,

$$P_\theta = m_0 \bar{\gamma} \xi r^2 \dot{\theta} . \quad (3.3)$$

Essa expressão é a análoga relativística da conservação do *momentum* angular newtoniano, $m_0 r^2 \dot{\theta}$ (veja o Apêndice B). Lembrando ainda que a energia da partícula imersa no campo é dada por ²

$$E = m_0 c^2 \bar{\gamma} \xi^{-1} ,$$

Eq.(2.31), podemos escrever a evolução temporal da coordenada angular θ como

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{c^2 P_\theta}{E} \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) . \quad (3.4)$$

A outra equação de movimento pode ser obtida através da equação de Euler-Lagrange para a coordenada radial r ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} .$$

²Salientamos que essa energia é idêntica à obtida por Landau e Lifshitz[28], estando apenas em outro formato.

Alternativamente, podemos escrever a expressão para a conservação de energia, Eq.(2.31), na forma

$$1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-2} - \frac{r^2}{c^2} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} = \left(\frac{m_0 c^2}{E} \right)^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right). \quad (3.5)$$

A Eq.(3.4) e a Eq.(3.5) nos dão toda a informação sobre a evolução temporal das coordenadas r e θ . É importante notar que essas equações diferenciais independem da massa da partícula em questão. Em outras palavras, partículas com as mesmas condições iniciais, livres da ação de outras forças que não a força gravitacional, executam o mesmo movimento, independente de suas massas, em acordo com o Princípio da Equivalência fraca (Princípio de Galileu, segundo Chandrasekhar[54]).

3.3 Equação diferencial da órbita

O movimento orbital é determinado completamente pela solução das equações diferenciais acopladas Eqs.(3.4, 3.5) e pelas condições iniciais do problema, incorporadas nas constantes E e P_θ . Essas equações diferenciais nos dão a dependência temporal das coordenadas r e θ . A fim de determinarmos o “formato da órbita”, devemos conhecer a dependência de r em função de θ , ou seja, necessitamos de uma equação diferencial envolvendo somente essas duas grandezas, sem envolver a coordenada temporal explicitamente. Com o auxílio da Eq.(3.4), podemos mudar a dependência temporal da Eq.(3.5) para dependência angular, usando a propriedade

$$\frac{d}{dt} = \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \frac{d}{d\theta}. \quad (3.6)$$

Fazendo ainda uma mudança de variável

$$u \equiv \frac{1}{r}, \quad (3.7)$$

obtemos a seguinte equação diferencial

$$\left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 + u^2 \left(1 - \frac{2GMu}{c^2} \right) = \frac{2GMu}{h^2} - \frac{c^2}{h^2} \left[1 - \left(\frac{E}{m_0 c^2} \right)^2 \right], \quad (3.8)$$

onde h é o *momentum* angular por unidade de massa,

$$h \equiv \frac{P_\theta}{m_0}. \quad (3.9)$$

Derivando a Eq.(3.8) em relação à θ obtemos

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2, \quad (3.10)$$

idêntica à equação obtida por Bergmann [29] através das equações geodésicas. Essa equação diferencial nos dá uma relação direta entre a coordenada r ($1/u$) e a coordenada θ , determinando o formato da órbita. A esse tipo de equação diferencial de segunda ordem, envolvendo u e θ , denominaremos a partir de agora de equação diferencial da órbita, ou simplesmente EDO. Comparando a EDO relativística, Eq.(3.10), com a análoga newtoniana proveniente da lei de força de inverso do quadrado (veja o Apêndice B),

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{\Omega^2}, \quad (3.11)$$

constatamos que as correções relativísticas se fazem notar na conservação do *momentum* angular relativístico h e no último termo da Eq.(3.10). No limite de $c \rightarrow \infty$, $h \rightarrow \Omega$ e recuperamos a EDO newtoniana.

3.4 Solução da EDO – a precessão do periélio

A solução da EDO newtoniana, Eq.(3.11), é dada por

$$u(\theta) = \frac{GM}{\Omega^2} [1 + e \cos(\theta - \theta_0)], \quad (3.12)$$

onde θ_0 é o ponto de máxima aproximação da trajetória e e é a excentricidade da órbita. Para $0 < e < 1$, essa equação prevê que a órbita é uma elipse fixa no espaço; portanto, em acordo com a primeira lei de Kepler.

A solução da Eq.(3.10) deve ser consistente com a órbita newtoniana, Eq.(3.12), em uma primeira aproximação. Mostramos no Apêndice C que uma solução semelhante à proposta por Bergmann em 1960 [29] e por Rosalles e Castro–Quilantán em 1984 [33],

$$u(\theta) = \frac{GM}{h^2} (1 + a_0 + e_R \cos \rho\theta + a_2 \cos 2\rho\theta), \quad (3.13)$$

com

$$\rho \equiv \frac{2\pi}{2\pi + \delta}, \quad (3.14)$$

é exata até ordem de v^2/c^2 , falhando apenas em termos $\mathcal{O}(c^{-4})$ quando aplicada na EDO relativística, Eq.(3.10). Mostramos ainda que este tipo de dependência é uma solução aceitável (válida até $\mathcal{O}(c^{-2})$) para um tipo de EDO mais geral,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u(1 - k_1) = \frac{GM}{h^2} \left[1 + k_2u^2 + k_3 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right], \quad (3.15)$$

que surge em certos tratamentos alternativos da Gravitação (para maiores detalhes veja o Apêndice C). Aplicando a solução proposta, Eq.(3.13), na Eq.(3.15), as constantes da função $u(\theta)$ ficam determinadas,

$$a_0 = k_1 + \left(\frac{GM}{h^2} \right)^2 \left[k_2 \left(1 + \frac{e^2}{2} \right) + k_3 \frac{e^2}{2} \right], \quad (3.16)$$

$$a_2 = -\frac{e^2}{6} \left(\frac{GM}{h^2} \right)^2 (k_2 - k_3), \quad (3.17)$$

$$\delta = \pi \left[k_1 + 2k_2 \left(\frac{GM}{h^2} \right)^2 \right], \quad (3.18)$$

sendo que a constante e_R , análogo relativístico da excentricidade newtoniana, é determinada através das condições iniciais do problema (veja a discussão no Apêndice C).

No caso da EDO obtida dentro do contexto da RG, Eq.(3.10), $k_1 = k_3 = 0$ e $k_2 = 3h^2/c^2$, sua solução é dada pela Eq.(3.13) com as constantes

$$a_0 = \frac{3GM}{a(1 - e^2)c^2} \left(1 + \frac{e^2}{2} \right), \quad (3.19)$$

$$a_2 = -\frac{e^2}{2} \frac{GM}{a(1 - e^2)c^2}, \quad (3.20)$$

$$\delta = \frac{6\pi GM}{a(1 - e^2)c^2}, \quad (3.21)$$

desprezando termos $\mathcal{O}(c^{-4})$. Claramente, a solução apresentada, Eq.(3.13), deixa explícito que o periélio avança um ângulo δ a cada revolução do planeta, pois se o periélio se encontra inicialmente em $\theta = 0$, a próxima máxima aproximação (máximo da função $u(\theta)$) se dará

em $\theta = 2\pi + \delta$, em $\theta = 4\pi + 2\delta$ e assim por diante. Para o caso do planeta Mercúrio, a posição de periélio avança um ângulo de $5,019 \times 10^{-7}$ radianos a cada revolução. Ou ainda, a cada século, o periélio de Mercúrio avança cerca de $42.98''$. Como já mencionamos, essa previsão foi o grande triunfo da Relatividade Geral, visto que essa era exatamente a parte da precessão que não podia ser explicada pela interação gravitacional de Mercúrio com os outros planetas do Sistema Solar.

Um novo teste da Relatividade Geral no Sistema Solar foi proposto por Preston e Weber [11] em 1993. Trata-se da previsão relativística para o período da órbita, tempo necessário para o raio vetor do planeta descrever um ângulo de 2π ³. Segundo os autores, o período orbital relativístico seria menor do que o newtoniano. No caso da órbita de Mercúrio, o planeta descreveria um ângulo de 2π cerca de 1,67 segundos antes do que o previsto newtonianamente. Não temos conhecimento de medidas precisas do período orbital que possam comprovar a previsão de Preston e Weber. Todavia, considerando a ordem de grandeza do efeito (alguns segundos frente a um período orbital de três meses) e a precisão dos atuais relógios atômicos [34], ele nos parece ser mensurável. Esse possível teste será analisado na próxima Seção.

3.5 Período orbital

Para compararmos as previsões de duas teorias para a evolução temporal de um sistema, devemos considerar as mesmas condições iniciais do movimento em ambas as descrições. Em outras palavras, para fazermos uma comparação correta entre a previsão relativística e a previsão newtoniana, devemos partir das mesmas condições iniciais do movimento, ou seja, em $t = 0$

$$\vec{r}_N = \vec{r}_R = \vec{r}_0 \quad \text{e} \quad \left. \left(\frac{d\vec{r}_N}{dt} \right) \right|_{t=0} = \left. \left(\frac{d\vec{r}_R}{dt} \right) \right|_{t=0} = \vec{v}_0, \quad (3.22)$$

onde o índice N denota a variável newtoniana, o índice R , a variável relativística e O , o valor inicial observado. Com a evolução temporal do sistema, $\vec{r}_R(t) \neq \vec{r}_N(t)$. Os pontos mais

³Adotamos aqui a definição de Preston e Weber[11] para o período orbital. Rigorosamente, período da órbita seria o tempo necessário para o planeta fechar sua trajetória. Como a elipse precessa um ângulo δ a cada revolução, o planeta completaria sua órbita após varrer um ângulo de $4\pi^2/\delta$.

notáveis de uma órbita são os pontos de retorno, afélio e periélio, onde $dr/dt = 0$. Vamos considerar que a nossa condição inicial é o ponto de periélio da trajetória, ou seja,

$$\vec{r} \Big|_{t=0} = r_0 \hat{i} \quad \text{e} \quad \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{t=0} = \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)_{t=0} \hat{j} = v_0 \hat{j}, \quad (3.23)$$

convencionando que o raio vetor do planeta coincide inicialmente com o eixo x . A partir das condições iniciais do movimento, somos capazes, no contexto da Mecânica Newtoniana, de obter os parâmetros que descrevem a órbita, a excentricidade e , o *momentum* angular Ω e o ângulo inicial em relação ao ponto de periélio θ_0 (nulo nesse caso). Dessa forma, as relações newtonianas do movimento planetário, veja o Apêndice B, nos levam a

$$r_0 = \frac{\Omega^2}{GM} \frac{1}{(1+e)}, \quad (3.24)$$

$$v_0 = \left(r \frac{d\theta}{dt} \right)_{t=0} = \frac{\Omega}{r_0}, \quad (3.25)$$

para as condições iniciais expressas na Eq.(3.23). De maneira análoga, os parâmetros relativísticos da órbita, h e e_R , também podem ser expressos em termos das condições iniciais do movimento. De acordo com a solução da EDO relativística, Eq.(3.13), no ponto de periélio

$$r_0 = \frac{h^2}{GM} \frac{1}{(1+a_0+e_R+a_2)}. \quad (3.26)$$

O *momentum* angular relativístico h é dado por

$$h = r^2 \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{\dot{r}^2}{c^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} - \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{c^2} \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{d\theta}{dt}, \quad (3.27)$$

em acordo com a Eq.(3.3). Dessa forma, no ponto de periélio,

$$h = r_0 v_0 \left(1 - \frac{2GM}{r_0 c^2} - \frac{v_0^2}{c^2} \right)^{-1/2}, \quad (3.28)$$

isolando v_0 ,

$$v_0 = \frac{h}{r_0} \sqrt{\frac{1 - 2GM/r_0 c^2}{1 + h^2/r_0^2 c^2}}. \quad (3.29)$$

Fixadas as condições iniciais com as quais iremos trabalhar, o que faremos é comparar a evolução do raio vetor \vec{r} segundo as duas teorias, a Relatividade Geral e a Gravitação

Newtoniana. Para fazermos uma comparação mais direta entre as duas teorias, podemos escrever as constantes relativísticas em termos das newtonianas Ω e e . Assim, comparando a Eq.(3.25) com a Eq.(3.29) obtemos

$$h = \Omega \left[1 - \frac{(GM)^2}{\Omega^3 c^3} (1+e)(3+e) \right]^{-\frac{1}{2}} \approx \Omega \left[1 + \frac{1}{2} \frac{(GM)^2}{\Omega^2 c^2} (1+e)(3+e) \right] + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (3.30)$$

e comparando a Eq.(3.24) com a Eq.(3.28) obtemos

$$e_R = e \left[1 + \frac{(GM)^2}{\Omega^2 c^2} (7 + 3e + e^2) \right]. \quad (3.31)$$

Partiremos agora para o cálculo do período orbital, o tempo para o raio vetor do planeta varrer um ângulo de 2π , partindo da posição de periélio. Da conservação de h , Eq.(3.3), vem que

$$dt = \frac{r^2}{h} \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{\dot{r}^2}{c^2} \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} - \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{c^2} \right]^{-\frac{1}{2}} d\theta. \quad (3.32)$$

Integrando o lado direito dessa equação, nos limites $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$, obtemos o período orbital

$$T = \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{GM}{rc^2} \right) \frac{d\theta}{u^2(\theta)} + \mathcal{O}(c^{-4}). \quad (3.33)$$

Usando o fato de que a RG leva a correções $\mathcal{O}(c^{-2})$ nas relações newtonianas, podemos escrever $v^2/2c^2 - GM/rc^2 = E_N/m_0c^2 = -GM/2ac^2$ (veja o Apêndice B). Assim,

$$T = \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{u^2(\theta)} + \frac{3\pi\sqrt{aGM}}{c^2} + \mathcal{O}(c^{-4}). \quad (3.34)$$

Através da relação entre u e θ , Eq.(3.13), o primeiro termo à direita da expressão acima pode ser escrito como

$$\frac{1}{h} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{u^2(\theta)} = \frac{h^3}{(GM)^2} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1 + a_0 + e_R \cos \rho\theta + a_2 \cos 2\rho\theta)^2}, \quad (3.35)$$

ou ainda,

$$\frac{1}{h} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{u^2(\theta)} = \frac{h^3}{(GM)^2} \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{1}{(1 + e_R \cos \rho\theta)^2} - \frac{2a_0}{(1 + e \cos \theta)^3} - \frac{2a_0 \cos 2\theta}{(1 + e \cos \theta)^3} \right], \quad (3.36)$$

tendo em vista que as constantes a_0 e a_2 são termos $\mathcal{O}(c^{-2})$. Podemos escrever, em acordo com a Eq.(3.30) e a Eq.(3.31),

$$h \equiv \Omega (1 + \Delta_\Omega) , \quad (3.37)$$

$$e_R \equiv e + \Delta_e , \quad (3.38)$$

onde Δ_Ω e Δ_e são constantes adimensionais $\mathcal{O}(c^{-2})$. A aproximação satisfatória para ρ é $\rho = 1 - \delta/2\pi + \mathcal{O}(c^{-4})$. Tendo em vista tais aproximações, podemos calcular as integrais, obtendo

$$\begin{aligned} \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{u^2(\theta)} = \frac{2\pi\Omega^3}{(GM)^2(1-e^2)^{3/2}} \left\{ 1 - \left[\frac{a_0(2+e^2) + 3a_2e^2 - 3e\Delta_e}{(1-e^2)} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\delta}{2\pi} \left[1 - \frac{(1-e^2)^{3/2}}{(1+e)^2} \right] + 3\Delta_\Omega \right\} + \mathcal{O}(c^{-4}) . \end{aligned} \quad (3.39)$$

Aplicando essa expressão na Eq.(3.34) e substituindo as constantes relativísticas determinadas a partir das condições iniciais, o período orbital relativístico fica determinado,

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{(GM)^{1/2}} + \frac{6\pi\sqrt{aGM(1-e^2)}}{c^2} \left[\frac{(1+2e+2e^2+2e^3+e^4)}{(1-e^2)^{5/2}} - \frac{1}{(1+e)^2} \right] , \quad (3.40)$$

onde usamos $\Omega = \sqrt{aGM(1-e^2)}$, sendo a o semi-eixo maior newtoniano da órbita. Reconhecemos o primeiro termo do lado direito da expressão acima como sendo o período orbital previsto com a teoria da Gravitação de Newton, a terceira lei de Kepler. O segundo termo então trata-se da diferença entre a previsão relativística e a previsão newtoniana para o raio vetor do planeta varrer um ângulo de 2π . Para o caso do planeta Mercúrio, onde esse efeito é mais acentuado, de acordo com a Eq.(3.40) ele demoraria cerca de 0,569 segundos a mais para varrer 2π do que o previsto newtonianamente. Para os outros planetas essa diferença é menor; para a Terra, por exemplo, é cerca de 0,06 segundos.

Um caso interessante é o de órbitas circulares. De acordo com a Eq.(3.40), o período orbital para órbitas circulares ($e = 0$) é idêntico ao período newtoniano. Podemos entender isso de uma maneira simples. Para uma órbita circular, $du/d\theta = 0$, a EDO relativística, Eq.(3.10), nos leva a

$$h^2 = \frac{GMr}{(1 - 3GM/rc^2)} \quad (\text{órbita circular}) . \quad (3.41)$$

Para esse tipo de órbita, o *momentum* angular h é

$$h = r^2 \dot{\theta} \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} - \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{c^2} \right]^{-1/2} \quad (\text{órbita circular}), \quad (3.42)$$

em acordo com a Eq.(3.27). Combinando as últimas duas equações, obtemos a relação entre o ângulo varrido $d\theta$ e o intervalo de tempo gasto na trajetória dt ,

$$dt = d\theta \frac{r^{3/2}}{(GM)^{1/2}} \quad (\text{órbita circular}). \quad (3.43)$$

Com $d\theta = 2\pi$, obtemos a mesma expressão newtoniana para o período orbital. Logo, as condições iniciais de posição e velocidade que resultam em uma órbita newtoniana circular de raio r , conduzem à mesma órbita quando o sistema é tratado relativisticamente. Os efeitos relativísticos aparecem apenas em órbitas com excentricidade não nula.

Tais conclusões a respeito do período orbital relativístico são contrárias às apresentadas por Preston e Weber [11]. Isto é facilmente explicado. O período orbital calculado aqui é o período que seria observado em um referencial muito distante da fonte de gravitação e estático em relação a esta, de tal forma que o elemento de tempo próprio do observador, $d\tau_{obs}$, seja o mais próximo possível da coordenada temporal de Schwarzschild, dt . Já o período orbital calculado por Preston e Weber é o que seria observado em um referencial com o mesmo tempo próprio da partícula, ou seja, um referencial acompanhando o movimento do planeta (supondo o campo gravitacional do planeta desprezível frente ao campo do Sol, de tal forma que seu campo gravitacional não influa no relógio). Então já teríamos a previsão da RG quanto ao período orbital observado nos dois referenciais, o observado por um referencial distante da fonte de gravitação (calculado aqui) e o observado no referencial próprio (calculado por Preston e Weber [11]). Todavia, constatamos que existem certos problemas com o cálculo de Preston e Weber. Assim, na próxima seção faremos uma análise do período orbital observado no referencial de tempo próprio.

3.6 Período orbital observado no referencial próprio

A distância da partícula ao centro de massa da fonte de gravitação, quando medida no referencial próprio, está relacionada com a coordenada de Schwarzschild r pela relação ⁴ [35]

$$\tilde{r} = \int_0^r g_{rr} dr \approx r \left[1 + \frac{GM}{3rc^2} \left(1 + 3 \ln \left(\frac{r}{R_\odot} \right) \right) \right] + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (3.44)$$

onde R_\odot é o raio do Sol. Para a coordenada angular

$$\tilde{\theta} = \theta, \quad (3.45)$$

já que $g_{\theta\theta} = r^2$ denota apenas a escolha de um sistema de coordenadas polar, não envolvendo nenhum efeito da gravitação. A coordenada temporal medida nesse referencial é o tempo próprio $d\tau = ds/c$. O avanço do ponto de periélio observado nesse referencial é idêntico ao observado em um referencial muito distante da fonte, pois o ponto de mínimo da função $r(\theta)$ também será um mínimo da função $\tilde{r}(\tilde{\theta})$. Entretanto, as previsões quanto ao período orbital dependem do referencial onde se está fazendo a observação, visto que o campo gravitacional afeta a marcha de relógios.

Como na seção anterior, desejamos confrontar as previsões da Relatividade Geral com as previsões da Mecânica Newtoniana partindo das mesmas condições iniciais do movimento. Escolhemos também aqui, por simplicidade, a condição inicial no ponto de periélio da trajetória. A posição e velocidade no ponto de periélio são dadas por

$$\vec{\tilde{r}} \Big|_{\tau=0} = \tilde{r}_0 \hat{i}, \quad \left(\frac{d\vec{\tilde{r}}}{d\tau} \right)_{\tau=0} = \left(\tilde{r} \frac{d\tilde{\theta}}{d\tau} \right)_{\tau=0} \hat{j} = \tilde{v}_0 \hat{j}, \quad (3.46)$$

onde \tilde{v}_0 é a velocidade a tempo próprio inicial. No referencial próprio, no contexto da Mecânica Newtoniana, $\tilde{r} = r$, $\tilde{\theta} = \theta$, $\tau = t$. Assim, no ponto de periélio

$$\tilde{r}_0 = \frac{\Omega^2}{GM} \frac{1}{(1+e)}, \quad (3.47)$$

$$\tilde{v}_0 = \left(\tilde{r} \frac{d\tilde{\theta}}{d\tau} \right)_{\tau=0} = \frac{\Omega}{\tilde{r}_0}. \quad (3.48)$$

⁴Usaremos $\tilde{}$ para denotar as coordenadas próprias e $d\tau$ para o elemento de tempo próprio.

De acordo com a solução da EDO relativística, Eq.(3.10), considerando a equação de transformação Eq.(3.44), no ponto de periélio

$$\tilde{r}_0 = \frac{h^2}{GM} (1 + a_0 + e_R + a_2)^{-1} \left[1 + \frac{1}{3} \frac{GM}{a(1-e)c^2} \left(1 + 3 \ln \left(\frac{a(1-e)}{R_\odot} \right) \right) \right]. \quad (3.49)$$

O *momentum* angular h pode ser escrito em uma forma mais simples do que a expressa pela Eq.(3.27),

$$h = r^2 \left[1 - \frac{2GM}{rc^2} - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} \frac{\dot{r}^2}{c^2} + \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{c^2} \right]^{-1/2} \frac{d\theta}{dt} = r^2 \frac{d\theta}{d\tau}, \quad (3.50)$$

visto que

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \left[\left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right) dt^2 - \left(1 - \frac{2GM}{rc^2} \right)^{-1} \frac{dr^2}{c^2} + \frac{r^2 d\theta^2}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.51)$$

Dessa forma, podemos expressar a velocidade inicial \tilde{v}_0 em termos de h ,

$$\tilde{v}_0 = \left(\tilde{r} \frac{d\theta}{d\tau} \right)_{\tau=0} = \left(\frac{h}{r^2 \tilde{r}} \right)_{\tau=0} = \frac{h}{\tilde{r}_0} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \frac{GM}{a(1-e)c^2} \left[1 + 3 \ln \left(\frac{a(1-e)}{R_\odot} \right) \right] \right\}. \quad (3.52)$$

Igualando as condições iniciais relativísticas com as newtonianas, é possível obter as constantes relativísticas em termos das newtonianas,

$$h = \Omega \left\{ 1 - \frac{2}{3} \frac{GM}{a(1-e)c^2} \left[1 + 3 \ln \left(\frac{a(1-e)}{R_\odot} \right) \right] \right\}, \quad (3.53)$$

$$e_R = e - \frac{GM}{a(1-e^2)c^2} \left\{ 4 + 2e + 2e^2 + 3(1+e)^2 \ln \left[\frac{a(1-e)}{R_\odot} \right] \right\}, \quad (3.54)$$

desprezando termos da ordem $\mathcal{O}(c^{-4})$.

Podemos determinar agora o período orbital observado nesse referencial usando a conservação de h , Eq.(3.50),

$$\int_0^\tau d\tau = \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{u^2(\theta)}, \quad (3.55)$$

o lado direito sendo exatamente a integral expressa na Eq.(3.39) cujo resultado é dado em termos dos parâmetros h e e_R . Substituindo as constantes h , Eq.(3.53), e e_R , Eq.(3.54), determinadas agora no referencial próprio, obtemos

$$\mathcal{T} = \frac{2\pi a^{3/2}}{(GM)^{1/2}} - \frac{2\pi \sqrt{aGM}}{(1-e^2)^2 c^2} \left\{ 5 + 14e + 13e^2 + 4e^3 + \frac{3(1-e^2)^{5/2}}{(1+e)^2} + \right.$$

$$+3(2 + 5e + 4e^2 + e^3) \ln \left[\frac{a(1 - e)}{R_\odot} \right] \} . \quad (3.56)$$

A Eq.(3.56) mostra que o período orbital relativístico observado em um referencial acompanhando o movimento do planeta é menor do que o previsto com a teoria da Gravitação de Newton, $2\pi a^{3/2}/(GM)^{1/2}$. Para o caso do planeta Mercúrio, o planeta varre um ângulo de 2π cerca de 10,697 segundos antes da previsão newtoniana. Esse efeito é muito maior do que o previsto por Preston e Weber [11] para o mesmo planeta, cerca de 1,673 segundos. Constatamos que essa diferença se deve às aproximações consideradas por Preston e Weber. Uma questão é a comparação feita pelos autores entre o período de uma “órbita relativística” circular de raio \tilde{r}_0 e o período de um “órbita newtoniana” de mesmo raio. O problema nesse caso consiste no fato de que, nesse referencial, as condições iniciais (\vec{r}_0, \vec{v}_0) que conduzem a uma “órbita relativística circular”, conduzem a uma “órbita newtoniana elíptica” e vice-versa. Para $e = 0$ (órbita newtoniana circular), a excentricidade relativística será $e_R = -GM/r_0 c^2 [4 + 3 \ln(r_0/R_\odot)]$, de acordo com a Eq.(3.54). Essa excentricidade é extremamente pequena, mas leva a um efeito significativo no período orbital. Portanto, a comparação que Preston e Weber fazem entre duas órbitas circulares não é consistente. Isso mostra a importância de não fazermos simplesmente $e_R = e$ na solução da EDO e considerarmos uma generalização da solução de Bergmann [29] (veja a discussão no final do Apêndice C).

Na seção anterior, calculamos o período orbital para uma órbita circular relativística e o comparamos com um órbita circular newtoniana, concluindo que para órbitas circulares os períodos são idênticos. Naquele caso, estávamos estudando o movimento planetário quando observado em um referencial muito distante da fonte de Gravitação. As condições iniciais (\vec{r}_0, \vec{v}_0) que resultam em uma órbita circular newtoniana também resultam em uma órbita circular relativística e, portanto, a comparação é coerente.

Considerando o cálculo de Preston e Weber para órbitas elípticas, também constatamos certos problemas. A solução da EDO relativística, Eq.(3.10), proposta pelos autores,

$$u(\theta) = \frac{GM}{h^2} \left[1 + e \cos \left(\theta(1 - 3GM/ac^2) \right) \right] , \quad (3.57)$$

semelhante à solução usada por Gauthier [36], claramente não é satisfatória, falhando em termos da ordem de $e^2 \mathcal{O}(c^{-2})$ quando aplicada na equação diferencial.

3.7 Outros efeitos relativísticos nas órbitas

Em 1993, quando Preston e Weber [11] propuseram que o período orbital poderia ser usado como um novo teste da Relatividade Geral no âmbito do Sistema Solar, o único efeito relativístico conhecido no movimento planetário era a precessão do periélio. Constatamos que, além desses, existem outros efeitos relativísticos notáveis na órbita. Esses efeitos serão o objeto desta seção.

3.7.1 Semi-eixo maior

O semi-eixo maior de uma órbita, a , é a média entre a distância de máxima aproximação ao centro da fonte (ponto de periélio), r_P , e a distância de máximo afastamento (ponto de afélio), r_A ,

$$a \equiv \frac{1}{2} (|\vec{r}_P| + |\vec{r}_A|) . \quad (3.58)$$

No tratamento newtoniano, as órbitas planetárias são elipses fixas no espaço. Assim sendo, o raio vetor no ponto de periélio, \vec{r}_P , está na mesma direção que o raio vetor no ponto de afélio, \vec{r}_A . De acordo com a solução da EDO Newtoniana, Eq.(3.12), o semi-eixo maior da órbita é dado por

$$a_N = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_N(0)} + \frac{1}{u_N(2\pi)} \right) = \frac{\Omega^2}{GM} \frac{1}{(1 - e^2)} , \quad (3.59)$$

onde Ω e e são determinados a partir das condições iniciais do movimento.

Relativisticamente, devido à precessão da órbita, o raio vetor no periélio não se encontra na mesma direção que o raio vetor no afélio. Numa mesma revolução, a diferença angular na direção desses raios vetores é $\delta/2$. Podemos calcular o semi-eixo maior dessa órbita precessante utilizando a definição dada pela Eq.(3.58). Assim, de acordo com a solução da EDO relativística, Eq.(3.13),

$$a_R = \frac{h^2}{GM} \frac{1 + a_0 + a_2}{(1 + a_0 + a_2)^2 - e_R^2} , \quad (3.60)$$

onde a_0 e a_2 são dados nas Eqs.(3.19, 3.20) e h e e_R são determinados a partir das condições iniciais do movimento da mesma forma que Ω e e_R . Considerando como condição inicial do

problema o ponto de periélio, como na Seção 3.5, podemos relacionar a previsão relativística com a previsão newtoniana para o semi-eixo maior,

$$a_R = a_N + 4e \frac{GM}{(1-e^2)^2 c^2} (1 + 2e + e^2) , \quad (3.61)$$

desprezando termos $\mathcal{O}(c^{-4})$. Esse efeito se torna maior quanto maior for a excentricidade da órbita. Portanto, é mais pronunciado na órbita de Mercúrio. Para esse planeta, a diferença entre o semi-eixo maior previsto relativisticamente e o previsto newtonianamente é de aproximadamente 1924.59 metros, em acordo com a Eq.(3.61). Para órbitas circulares, esse efeito é nulo. Isso é facilmente entendido se lembrarmos da análise feita na Seção 3.5, “as condições iniciais que resultam em uma órbita newtoniana circular, resultam em uma órbita relativística também circular, de mesmo período e raio”.

Tais conclusões a respeito de órbitas circulares são válidas apenas para medidas efetuadas por um observador muito distante da fonte de gravitação. Vamos analisar agora a previsão da RG para a medida do semi-eixo maior efetuada por um observador que acompanha o movimento do planeta. No referencial próprio, o semi-eixo maior previsto newtonianamente a partir das condições iniciais é

$$\tilde{a}_N = \frac{\Omega^2}{GM} \frac{1}{(1-e^2)} , \quad (3.62)$$

pois no tratamento newtoniano espaço e tempo são conceitos absolutos, válidos em qualquer referencial, independentes do estado de movimento e do campo gravitacional ao qual o observador está sujeito. Relativisticamente, usamos transformações para determinarmos o que seria medido por um observador no referencial próprio. Assim,

$$\tilde{a}_R = \frac{h^2}{(GM)^2} \frac{1 + a_0 + a_2}{(1 + a_0 + a_2)^2 - e_R^2} + \frac{1}{6} \frac{GM}{c^2} \left[2 + 3 \ln \left(\frac{a(1-e)}{R_\odot} \right) + 3 \ln \left(\frac{a(1+e)}{R_\odot} \right) \right] , \quad (3.63)$$

desprezando termos $\mathcal{O}(c^{-4})$. Considerando como condição inicial do movimento o ponto de periélio, como efetuado na Seção 3.6, obtemos a relação

$$\tilde{a}_R = \tilde{a}_N - \frac{1}{6} \frac{GM}{(1-e)^2 c^2} \left\{ 4(6 + 2e + e^2) + 3(7 + 6e - e^2) \ln \left[\frac{\tilde{a}_N(1-e)}{R_\odot} \right] \right\} -$$

$$-3(1 - e)^2 \ln \left[\frac{\tilde{a}_N(1 + e)}{R_\odot} \right] \} . \quad (3.64)$$

Para o planeta Mercúrio, essa expressão nos informa que a previsão relativística para o semi-eixo maior é cerca de 46833.65 metros menor do que a previsão newtoniana, quando medido por um observador acompanhando o movimento do planeta. Para condições iniciais que resultam em órbitas circulares no tratamento newtoniano, a Eq.(3.64) indica um efeito não nulo, o que significa que relativisticamente a órbita é uma elipse, como discutido na Seção 3.6.

3.7.2 Período radial

Apesar dos pontos de retorno da órbita relativística não serem localizados sempre nas mesmas coordenadas espaciais, as distâncias de máxima aproximação e máximo afastamento são constantes, como fica explícito na Eq.(3.13). Isso nos permitiu definir um semi-eixo maior para essa órbita. Newtonianamente, o período da coordenada radial, tempo entre duas passagens consecutivas do planeta pelo ponto de periélio, é idêntico ao período orbital, tempo para o raio vetor varrer um ângulo de 2π . Relativisticamente, o ponto de periélio precessa um ângulo δ a cada revolução; logo, o período radial T_r será o tempo para o raio vetor varrer um ângulo de $2\pi + \delta$,

$$T_r = T + \Delta T_\delta , \quad (3.65)$$

onde T é o período orbital e ΔT_δ é o tempo para o planeta varrer um ângulo de δ próximo à posição de periélio. Esse tempo pode ser calculado aproximadamente usando a conservação do *momentum* angular, Eq.(B.7),

$$\Delta T_\delta = \frac{r_P^2}{\Omega} \delta = \sqrt{\frac{a^3(1 - e)^3}{GM(1 + e)}} \delta , \quad (3.66)$$

visto que δ é um ângulo muito pequeno. Correções relativísticas ao *momentum* angular usado nesse cálculo levariam a efeitos da ordem $\mathcal{O}(c^{-4})$. No caso do avanço previsto pela RG,

$$\Delta T_\delta = \frac{6\pi}{c^2} \sqrt{\frac{aGM}{(1 - e^2)(1 + e)}} (1 - e) , \quad (3.67)$$

um intervalo de tempo de 0.391476 segundos no caso da órbita de Mercúrio.

Para um observador muito distante da fonte observando o movimento de Mercúrio, o período da coordenada radial medido será cerca de 0.960333 segundos maior do que o previsto newtonianamente, em acordo com o período orbital calculado na Seção 3.5. Para o caso de um observador situado em um referencial que acompanha o movimento do planeta, o período da coordenada radial será $\tau_r = \mathcal{T} + \Delta T_\delta$, cerca de 10.3055 segundos menor do que a previsão newtoniana para o caso da órbita de Mercúrio.

3.7.3 Defasagem angular

Se fizermos uma medida da posição e velocidade de um dado planeta quando este se encontra na posição de periélio, seremos capazes de prever newtoniana ou relativisticamente o tempo necessário para o planeta varrer um ângulo de 2π , ou ainda, o tempo necessário para ele voltar ao periélio. Designamos esses intervalos de tempo respectivamente de período orbital e período radial. Mostramos ainda que a previsão da RG difere da previsão da Gravitação Newtoniana em ambos os casos. Decorrido um intervalo de tempo igual ao período orbital newtoniano, T_N , após a passagem do planeta pelo ponto do periélio, a previsão newtoniana, PN, é de que o planeta tenha varrido um ângulo de 2π , como mostrado na figura a seguir.

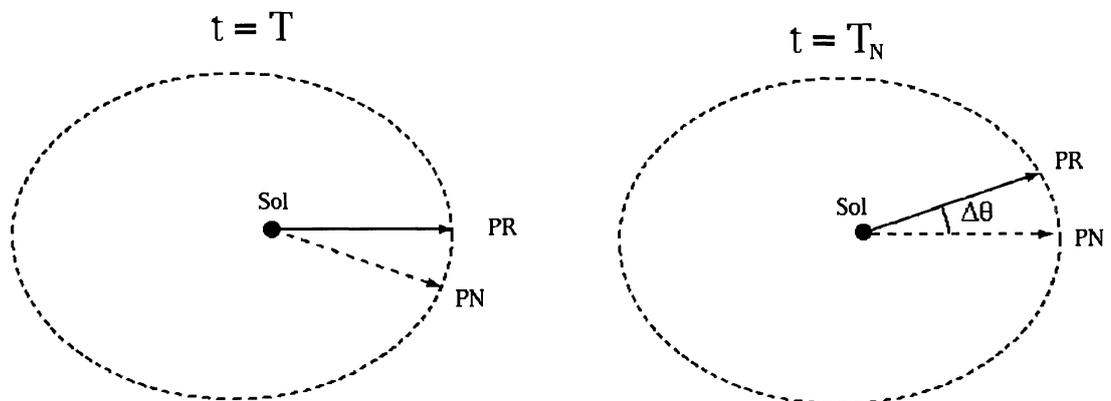


Fig.(2) Ilustração da defasagem angular da posição prevista newtonianamente (PN) em relação à posição observada (supostamente a relativística, PR).

Se a previsão relativística, PR, realmente reproduzir o movimento do planeta, esse descreverá um ângulo de 2π em $t = T$. Quando $t = T_N$, o planeta terá varrido um ângulo igual a $2\pi + \Delta\theta$. Esse ângulo é percorrido no intervalo de tempo $T_N - T$. Como essa diferença é muito pequena, o raio vetor não varia significativamente nesse intervalo de tempo. $\Delta\theta$ é então dado por

$$\Delta\theta = -\sqrt{\frac{GM(1+e)}{a^3(1-e)^3}}\Delta T, \quad (3.68)$$

onde $\Delta T = T - T_N$.

Para o caso de um observador muito distante da fonte de gravitação, medindo a posição de Mercúrio, ocorre uma defasagem do planeta em relação à posição prevista newtonianamente, visto que o período orbital é cerca de 0.569 segundos maior do que T_N . Essa defasagem em relação à PN é de 7.2928×10^{-7} radianos, o que corresponde a um efeito cumulativo de $62.513''/\text{sec}$. No caso de um observador acompanhando o movimento desse planeta, o período orbital é cerca de 10.697 segundos menor do que o previsto newtonianamente, resultando em uma diferença angular de $\Delta\tilde{\theta} = 1.3714 \times 10^{-5}$ radianos, ou ainda, $1174.4''/\text{sec}$.

3.8 Equações de movimento cartesianas

3.8.1 Coordenadas de Schwarzschild

O uso de coordenadas polares no plano nos possibilitou uma grande simplificação nas equações de movimento, de forma que obtivemos uma relação relativamente simples entre as coordenadas r e θ . Todavia, podemos também escrever as equações de movimento em coordenadas cartesianas (x, y, z) ⁵. Dentro do contexto da Mecânica newtoniana, a lei de inverso do quadrado resulta na seguinte equação de movimento para a coordenada x , *e.g.*,

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{r^3}x, \quad (3.69)$$

⁵Escrever as equações de movimento em coordenadas cartesianas e subsequentemente integrá-las numericamente foi uma forma que encontramos de checar os resultados que obtivemos analiticamente nas seções anteriores, quando resolvemos de forma aproximativa o problema em coordenadas polares. Essa checagem dos resultados tornou-se importante, uma vez que obtivemos resultados conflitantes com os de Preston e Weber [11] e estamos fazendo uma crítica ao cálculo desses autores.

onde o ponto se refere à derivação em relação ao tempo t e r é a distância da partícula ao centro da fonte, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. No âmbito da RG, podemos escrever a lagrangiana de uma partícula no campo de Schwarzschild, Eq.(2.25), em coordenadas cartesianas no plano (x, y) , escrevendo \vec{r} e \vec{v} nessas coordenadas. As equações de Euler-Lagrange para as coordenadas x e y nos levam à seguinte equação de movimento para o raio vetor

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \left\{ \left[1 + 2\frac{v^2}{c^2} - \frac{2GM}{rc^2} - 3\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})^2}{r^2c^2} \right] \vec{r} - 2\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c^2} \vec{v} \right\} + \mathcal{O}(c^{-4}). \quad (3.70)$$

Essa equação representa o conjunto de duas equações diferenciais acopladas

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{r^3} x \left[1 + 2\frac{v^2}{c^2} - \frac{2GM}{rc^2} - 2\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c^2} \frac{\dot{x}}{x} - 3\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})^2}{r^2c^2} \right] + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (3.71)$$

$$\ddot{y} = -\frac{GM}{r^3} y \left[1 + 2\frac{v^2}{c^2} - \frac{2GM}{rc^2} - 2\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c^2} \frac{\dot{y}}{y} - 3\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})^2}{r^2c^2} \right] + \mathcal{O}(c^{-4}). \quad (3.72)$$

As Eqs.(3.71, 3.72) descrevem a dependência temporal das coordenadas cartesianas x e y . Ao contrário do que ocorre quando tratamos o problema em coordenadas polares no plano, nesse caso não conseguimos uma equação diferencial que relacione diretamente as coordenadas x e y sem que apareça explicitamente a dependência temporal. Desconhecemos também uma solução analítica para essas equações diferenciais; assim, recorreremos a uma solução numérica. Integramos numericamente tais equações utilizando o método de Runge-Kutta-Nyström de quarta ordem [37]. Um programa numérico para solução das Eqs.(3.71, 3.72) é apresentado no Apêndice D.

As condições iniciais utilizadas nesse cálculo são as mesmas expressas na Eq.(3.23). Resolvendo o sistema, obtemos as coordenadas cartesianas em função do tempo, ou seja, as funções $x(t)$ e $y(t)$. A forma de determinarmos o período orbital e o avanço do periélio, bem como os outros efeitos é descrita no Apêndice D. Listamos abaixo os resultados da integração numérica das Eqs.(3.71, 3.72), considerando a órbita do planeta Mercúrio após uma revolução.

Tab.(1) Integração das equações cartesianas de movimento, Eqs.(3.71, 3.72), considerando uma revolução da órbita de Mercúrio.

Passo (s)	δ ("/sec)	$\Delta\theta$ ("/sec)	Δa (m)	ΔT (s)	ΔT_r (s)
100	42.4609	-57.0328	1652.88	0.519473	0.906220
10	42.9748	-62.3987	1921.81	0.568347	0.959775
1	42.9800	-62.4539	1924.56	0.568850	0.960325
Analiticamente	42.9800	-62.4547	1924.59	0.568857	0.960333

Nessa tabela, Passo refere-se ao passo de integração em t utilizado (em segundos). Na última linha, apresentamos as estimativas analíticas dos efeitos (determinadas anteriormente), as quais estão em boa concordância com o cálculo numérico. Integramos também as equações de movimento cartesianas obtidas com a lei da Gravitação de Newton para termos uma idéia do erro do método de integração utilizado. Abaixo apresentamos os resultados da integração numérica para a órbita de Mercúrio.

Tab.(2) Integração das equações de movimento newtonianas $\dot{x} = -GMx/r^3$, $\dot{y} = -GM y/r^3$, considerando uma revolução da órbita de Mercúrio.

Passo (s)	δ ("/sec)	$\Delta\theta$ ("/sec)	Δa (m)	ΔT (s)	ΔT_r (s)
100	-0.519109	5.40279	-271.06	-0.049210	-0.053939
10	-0.005161	0.05387	-2.71	-0.000491	-0.000538
1	-0.000073	0.00042	-0.03	-0.000004	-0.000004

De acordo com as equações de movimento newtonianas, todos os efeitos considerados são nulos. Logo, os valores indicados na Tab.(2) são erros numéricos. Tais erros são muito menores do que os efeitos relativísticos; portanto, não é necessário utilizarmos um passo de integração menor do que 1 segundo na integração numérica das equações de movimento relativísticas.

3.8.2 Coordenadas Próprias

Na Seção 3.6, calculamos analiticamente o período orbital observado em um referencial acompanhando o movimento do planeta. A distância da partícula ao centro da fonte observada nesse referencial, \tilde{r} , está relacionada com a coordenada radial r pela Eq.(3.44). Já a

coordenada angular $\tilde{\theta}$ é idêntica à coordenada de Schwarzschild θ . Portanto, as coordenadas cartesianas observadas no referencial próprio são dadas por

$$\tilde{x} = \tilde{r} \cos \tilde{\theta} = x \left\{ 1 + \frac{1}{3} \frac{GM}{rc^2} \left[1 + 3 \ln \left(\frac{r}{R_\odot} \right) \right] \right\}, \quad (3.73)$$

similarmente,

$$\tilde{y} = y \left\{ 1 + \frac{1}{3} \frac{GM}{rc^2} \left[1 + 3 \ln \left(\frac{r}{R_\odot} \right) \right] \right\}, \quad (3.74)$$

desprezando termos $\mathcal{O}(c^{-4})$. Tendo em vista que a coordenada medida nesse referencial é o tempo próprio relacionado com dt por

$$d\tau = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} - \frac{GM}{rc^2} \right) dt + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (3.75)$$

em acordo com a Eq.(3.51), podemos então calcular o vetor aceleração própria $d^2\vec{r}/d\tau^2$, fazendo uma transformação de coordenadas na Eq.(3.59),

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{r}}{d\tau^2} = & -\frac{GM}{\tilde{r}^3} \left\{ \left[1 + \frac{1}{3} \frac{v^2}{c^2} \left(7 + 3 \ln \left(\frac{\tilde{r}}{R_\odot} \right) \right) + \frac{1}{3} \frac{GM}{\tilde{r}c^2} \left(5 + 6 \ln \left(\frac{\tilde{r}}{R_\odot} \right) \right) - 3 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})^2}{\tilde{r}^2 c^2} \right] \vec{r} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{3} \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{\tilde{r}^2 c^2} \left(-4 + 6 \ln \left(\frac{\tilde{r}}{R_\odot} \right) \right) \vec{v} + \mathcal{O}(c^{-4}) \right\}. \end{aligned} \quad (3.76)$$

Essa equação vetorial representa um conjunto de duas equações diferenciais acopladas envolvendo \tilde{x} , \tilde{y} e τ . A seguir listamos o resultado da integração numérica do sistema, considerando uma revolução do planeta Mercúrio.

Tab.(3) Integração numérica da Eq.(3.76), considerando uma revolução de Mercúrio. Previsão de efeitos relativísticos na órbita.

Passo (s)	δ ("/sec)	$\Delta\theta$ ("/sec)	Δa (m)	ΔT (s)	ΔT_r (s)
100	42.4608	1179.83	-47105.3	-10.7463	-10.3596
10	42.9748	1174.47	-46836.4	-10.6975	-10.3060
1	42.9799	1174.42	-46833.7	-10.6970	-10.3055
Analiticamente	42.9800	1174.41	-46833.7	-10.6970	-10.3055

Como mencionamos na Seção 3.6, o ponto de mínimo da função $\tilde{r}(\tilde{\theta})$ é o mesmo ponto de mínimo da função $r(\theta)$, ou seja, o avanço do periélio é o mesmo quando observado do referencial próprio. Os resultados numéricos para δ confirmam essa previsão. Quanto ao período orbital observado no referencial próprio, a integração numérica também está em boa concordância com o cálculo analítico, Eq.(3.56), ambas levando a $\Delta\mathcal{T} = \mathcal{T} - \mathcal{T}_N = -10.6970$ segundos. Para os outros efeitos, a concordância numérica entre a previsão analítica e a integração numérica também se mostrou esplendidamente satisfatória.

3.9 Discussão

3.9.1 A precessão do periélio

Como já mencionamos, a previsão do avanço de periélio anômalo de Mercúrio veio a comprovar a validade da Relatividade Geral nos seus primeiros anos. Esse avanço anômalo trata-se da precessão total observada (cerca de $5600''/\text{sec}$), subtraída da parte provocada por efeitos não-relativísticos (cerca de $5025''$ devido à precessão geral dos equinócios e cerca de $532''$ devido às perturbações planetárias sobre Mercúrio). A parte anômala ($43''$) é, portanto, uma diminuta parcela do valor total observado.

O primeiro questionamento acerca da validade da precessão anômala de Mercúrio como um teste observacional da RG surgiu em 1967 [8]. O fato de o Sol não ser uma esfera perfeita e, portanto, ter um *momentum* de quadrupolo $J_{2\odot}$ não nulo, faz com que seu campo gravitacional não seja de simetria perfeitamente esférica. Essa perturbação ao campo de simetria esférica leva a uma precessão nas órbitas planetárias, dada por

$$\delta_{[J_{2\odot}]} = 3\pi \left(\frac{R_{\odot}}{a(1-e^2)} \right)^2 J_{2\odot}, \quad (3.77)$$

de acordo com Will [8]. As primeiras medidas de $J_{2\odot}$ efetuadas por Dicke e Goldenberg em 1966 resultavam em uma precessão de aproximadamente $3''/\text{sec}$ [8]. Logo, a parte do efeito que não poderia ser explicada pela Mecânica Newtoniana seria somente cerca de $39.6''/\text{sec}$. Como a RG prevê um avanço superior a esse, a teoria não mais se adequava aos dados observacionais. Isso motivou novos tratamentos relativísticos à gravitação que reproduzissem o valor anômalo de Dicke e Goldenberg, como o de H. Biederbeck [38] e o de K.K. Nandi [39]. Nandi elaborou uma teoria para a gravitação que prevê um avanço de periélio de aproximadamente $39.4''/\text{sec}$, muito próximo ao valor de Dicke e Goldenberg. Entretanto, medidas subseqüentes têm levado a valores menores para $J_{2\odot}$. Em 1985, Dicke e colaboradores estimaram $J_{2\odot} \approx 8 \times 10^{-6}$ [8], o que resulta em uma precessão de $1''/\text{sec}$. Modelos que levam em conta a estrutura interna do Sol resultam em valores menores ainda para $J_{2\odot}$. Brown e colaboradores [40] obtiveram uma estimativa de $(1.7 \pm 0.17) \times 10^{-7}$ em 1989. A partir

de observações de reflexões de sinais de radar em Mercúrio, levando ainda em conta que a topografia do planeta é uma importante fonte de erros sistemáticos, em 1993, Pitjeva [41] concluiu que, para a previsão da RG ser válida, $J_{2\odot}$ deve estar no intervalo $(-1.3 \pm 4.1) \times 10^{-7}$. Recentemente, em 1996, Lyndon e Sofia [42] obtiveram uma estimativa em concordância com as observações de Brown e colaboradores, por uma técnica distinta. Esse é o valor atualmente aceito para $J_{2\odot}$, que resulta em uma precessão de apenas $0.02''/\text{sec}$, deixando a previsão da RG dentro do limite do erro experimental. Análises preliminares das medidas a serem feitas com o satélite a ser lançado pela ESA em 2004, sugerem que $J_{2\odot}$ poderá ser determinado com uma precisão melhor do que 1% [50].

Outro questionamento surgiu em 1994, quando Jefimenko mostrou que, devido à velocidade finita das perturbações gravitacionais, o campo gerado por uma fonte em movimento depende de sua velocidade [43]. A conclusão do autor é de que “a precessão do periélio de Mercúrio causada pelos outros planetas deve ser diferente do valor aceito atualmente de $532''$ e, portanto, a precessão ‘residual’ (se existe de fato) pode também ser diferente dos atualmente aceitos $43''$.” Essa conclusão é claramente errônea, pois as correções relativísticas às perturbações planetárias são muito menores do que as próprias perturbações, podendo ser desprezadas.

Jefimenko de fato não efetuou nenhum cálculo acerca das perturbações planetárias, ou seja, o autor não foi capaz de provar suas conclusões. Há ainda um outro questionamento recente, segundo Nedvěď [44, 45], a Gravitação Newtoniana pode explicar completamente a precessão do periélio de Mercúrio, incluindo a parte anômala. Portanto, não existiria a necessidade de uma teoria de gravitação relativística como a RG. De acordo com o autor, os cálculos astronômicos do século passado foram feitos em relação ao referencial heliocêntrico, onde o movimento do Sol em relação ao baricentro do Sistema Solar foi desconsiderado. Em um cálculo do efeito na órbita de Mercúrio causado pelo movimento do Sol ao redor do baricentro, considerando o sistema Sol–Júpiter–Saturno, Nedvěď mostrou que esse movimento leva a uma precessão de aproximadamente $43''/\text{sec}$. Huang [46] concluiu, baseado no trabalho

de Nedvěď, que sua teoria da gravitação está em maior concordância com os dados observacionais do que a RG. Nedvěď alega que os cálculos anteriores das perturbações planetárias sobre Mercúrio desconsideraram o movimento do Sol, mas não apresenta nenhuma referência que comprove essa afirmação. Analisando um trabalho recente de Maindl e Dvorak [47], constatamos que os cálculos das perturbações planetárias são feitos em relação ao baricentro do Sistema Solar, como seria o correto. Logo, as conclusões de Nedvěď são infundadas. A precessão anômala do periélio de Mercúrio continua sendo uma confirmação experimental da Relatividade Geral, como o era no início do século.

3.9.2 Os outros efeitos relativísticos no movimento planetário

Não temos conhecimento de nenhuma medida precisa que comprove a previsão da RG para o período orbital, proposto por Preston e Weber [11] como um novo teste da teoria, bem como dos outros efeitos calculados na seção anterior. Uma medida do período orbital, por exemplo, é essencialmente diferente de uma da precessão do periélio. Para medirmos uma precessão dos pontos de retorno de uma órbita, medidas precisas da distância do planeta ao centro do Sol relacionadas a um sistema em repouso em relação às “estrelas fixas” são suficientes para uma boa estimativa do efeito. Em outras palavras, na medida de precessão do periélio não necessitamos de uma medida precisa do tempo, visto que observações da precessão de Mercúrio remontam ao século passado.

Medirmos a diferença entre o período orbital previsto pela RG (supostamente o real) e o período orbital previsto pela Gravitação Newtoniana é um tanto mais complicado. Primeiramente, devemos fazer uma medida da posição e velocidade do planeta em um dado ponto da órbita. Então, computar, a partir dessas medidas, a previsão newtoniana para o período orbital. O efeito que desejamos medir é então a diferença entre o período orbital observado e o período previsto newtonianamente. Para a detecção dos outros efeitos calculados na seção anterior também é indispensável uma observação precisa das condições iniciais de posição e velocidade do planeta. Não seria praticável a medida de tais efeitos no século passado, visto que é preciso a utilização de relógios capazes de distinguir cerca de 0.5 segundos num total

de aproximadamente 88 dias, no caso da órbita de Mercúrio. Para uma medida precisa de posição e velocidade é necessário o uso de reflexão de sinais de radar na superfície do planeta [41, 48], ou ainda, a detecção de sinais emitidos de uma sonda espacial [50, 51].

Em suma, o método para detecção dos efeitos relativísticos no movimento planetário, que não a precessão da órbita, envolvem a determinação precisa da posição e velocidade do planeta em um dado ponto da trajetória. Esperamos que o satélite que orbitará Mercúrio, a ser lançado pela ESA em 2004 [50, 51], nos forneça estimativas dos efeitos relativísticos propostos aqui.

O período orbital previsto com a RG foi escrito na forma dada pela Eq.(3.40), em termos dos parâmetros newtonianos a e e , para facilitar a comparação com o período orbital previsto com a teoria de Newton. Alternativamente, podemos escrever tal expressão em termos de parâmetros puramente relativísticos da órbita,

$$T = \frac{2\pi a_R^{3/2}}{(GM)^{1/2}} + \frac{6\pi\sqrt{a_R GM(1 - e_R^2)}}{c^2} \left[\frac{(1 + e_R + e_R^3 + e_R^4)}{(1 - e_R^2)^{5/2}} - \frac{1}{(1 + e_R)^2} \right], \quad (3.78)$$

que, teoricamente, seriam os parâmetros observados (desprezando as perturbações planetárias e o *momentum* de quadrupolo do Sol). A Eq.(3.78) mostra, portanto, que a terceira lei de Kepler não é válida em geral.

3.9.3 Considerações a respeito das observações na Terra

A precessão do periélio de Mercúrio é medida com respeito a um observador situado em um referencial na superfície da Terra. Mesmo a nível não-relativístico, as observações feitas nesse referencial não são as mesmas que seriam efetuadas em um referencial muito distante do Sol e em repouso em relação ao baricentro do Sistema Solar [60]. O eixo de rotação da Terra não permanece fixo no espaço, mas precessa com um período de aproximadamente 26000 anos (a chamada precessão dos equinócios) e esse efeito é subtraído da precessão total observada do planeta Mercúrio.

A observação dos outros efeitos relativísticos na órbita de Mercúrio também é afetada pelo estado de movimento e campo gravitacional a que está sujeito o observador. Nas

Seções 3.6 e 3.7 calculamos, respectivamente, o período orbital que seria observado em um referencial muito distante da fonte de gravitação e o que seria observado em um referencial acompanhando o movimento do planeta. Todavia, o intervalo temporal entre dois eventos medido por um observador na superfície da Terra é diferente do intervalo temporal entre esses dois mesmos eventos medido por um observador distante da fonte de gravitação [61]. As marchas de dois relógios que se movem com uma dada velocidade relativa e estão submetidos a diferentes potenciais gravitacionais são, em geral, diferentes. A relação entre a marcha de um relógio na superfície da Terra e a marcha de um relógio distante e estático em relação ao baricentro do Sistema Solar é aproximadamente

$$d\tau_e = \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_e^2}{c^2} - \frac{GM_\odot}{r_e c^2} - \frac{GM_e}{R_e c^2} \right) dt, \quad (3.79)$$

onde r_e e v_e são, respectivamente, a distância da Terra ao centro do Sol e a velocidade dessa em relação ao baricentro do Sistema Solar; M_e denota a massa da Terra e R_e o seu raio. Na expressão acima são desprezados os campos dos outros planetas, da Lua, bem como momentos de quadrupolo da Terra e do Sol e, ainda, a rotação da Terra, entre outros efeitos muito menores que o termo do campo central do Sol ($-GM_\odot/r_e c^2$). Uma estimativa precisa da ordem de grandeza desses efeitos é feita por Wolf e Petit [61]. A determinação do período orbital de Mercúrio observado na Terra envolve o cálculo da seguinte integral

$$\tau_e = \int_{t=0}^{t=T} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v_e^2(t)}{c^2} - \frac{GM_\odot}{r_e(t) c^2} - \frac{GM_e}{R_e c^2} \right) dt, \quad (3.80)$$

onde T é o período orbital observado em um referencial distante e estático. Como a excentricidade da órbita da Terra é pequena (cerca de 0.0167), podemos considerar em primeira aproximação $v_e(t) = \bar{v}_e$ e $r_e(t) = \bar{r}_e$. Assim, o período observado na Terra será

$$\tau_e = T - \frac{2\pi a^{3/2}}{(GM)^{1/2}} \left(\frac{1}{2} \frac{\bar{v}_e^2}{c^2} + \frac{GM_\odot}{\bar{r}_e c^2} + \frac{GM_e}{R_e c^2} \right) + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (3.81)$$

ou seja, cerca de 0.118 segundos menor do que o medido por um observador distante da fonte, no caso da órbita de Mercúrio.

3.9.4 Os efeitos não-relativísticos no movimento planetário

A precessão anômala do periélio de Mercúrio trata-se apenas de uma pequena parte do efeito total observado. As perturbações dos outros planetas do Sistema Solar resultam em uma precessão de aproximadamente $532''/\text{sec}$ [2], enquanto que a parte relativística é apenas cerca de $43''/\text{sec}$. É esperado, portanto, que as perturbações planetárias também levem a contribuições no período orbital, no semi-eixo maior, etc. O efeito total observado será então a soma da parcela relativística com a parcela provocada pelas perturbações planetárias acrescido do efeito no relógio do observador na superfície da Terra.

As contribuições do campo gravitacional gerado pelos outros planetas podem ser calculadas usando a aproximação newtoniana, pois tratam-se apenas de perturbações ao campo central do Sol. Para se ter uma idéia da ordem de grandeza, a força máxima entre Vênus e Mercúrio é cerca de trezentas mil vezes menor do que a força entre Mercúrio e o Sol. O cálculo desses efeitos necessita de uma solução do problema de N corpos na Mecânica Newtoniana. Todavia, não existe uma solução exata para esse problema [47]. A precessão da órbita de Mercúrio, devida a esses efeitos, tem sido determinada pela integração numérica das equações de movimento [2, 62, 63]. Para determinarmos a contribuição das perturbações planetárias nos efeitos propostos nesse capítulo, o ideal seria fazermos uma integração das equações de movimento do sistema de N corpos. Entretanto, o cálculo que fizemos utilizando o método de Runge-Kutta-Nyström [37] não se mostrou eficaz. Uma alternativa que surgiu foi calcular as contribuições não-relativísticas usando o modelo de Price e Rush [49]. Price e Rush mostraram que a média temporal do efeito de precessão em Mercúrio, causado por um dado planeta, pode ser calculada substituindo esse planeta por um anel massivo. Listamos abaixo o resultado da integração numérica das perturbações planetárias usando esse modelo (veja o Apêndice E para maiores detalhes), juntamente com a previsão relativística dos efeitos.

Tab.(4) Previsões de efeitos na órbita de Mercúrio, observados em um referencial na superfície terrestre.

Causa	δ ("/sec)	$\Delta\theta$ ("/sec)	ΔT (s)	ΔT_r (s)	Δa (m)
Vênus	274.12	-783.68	7.139	9.636	22738.3
Terra	91.64	-289.52	2.637	3.471	8707.7
Marte	2.35	-7.80	0.071	0.093	239.0
Júpiter	156.82	-539.40	4.913	6.341	16648
Saturno	7.57	-26.02	0.237	0.306	80.5
Urano	0.14	-0.44	0.004	0.006	15.0
Netuno	0.04	-0.11	0.001	0.002	4.6
RG	42.98	-62.47	0.569	0.960	1924.6
Referencial	—	12.96	-0.118	-0.118	—
Total	575.66	-1696.70	15.454	20.697	50357.8

Se a média temporal dos outros efeitos também puder ser calculada com o modelo de Price e Rush [49], a última linha da tabela indica o valor total de cada efeito a ser observado na superfície da Terra. Como no caso do avanço do periélio, os efeitos relativísticos representam uma pequena parcela do valor total dos efeitos. A perturbação gravitacional de Plutão na órbita de Mercúrio é desprezível.

No caso de medidas efetuadas no próprio planeta, os efeitos relativísticos, exceto o avanço do periélio, são comparáveis aos efeitos das perturbações planetárias, como podemos ver na tabela abaixo.

Tab.(5) Previsões de efeitos na órbita de Mercúrio, observados em um referencial no planeta. O efeito das perturbações planetárias foi calculado com o modelo de Price e Rush[49].

Causa	δ ("/sec)	$\Delta\theta$ ("/sec)	ΔT (s)	ΔT_r (s)	Δa (m)
P. Planetárias	532.68	-1647.18	15.003	19.855	48433.2
RG	42.98	1131.49	-10.697	-10.306	-46833.7
Total	575.66	-515.69	4.306	9.549	1599.5

Nesse caso, o efeito do movimento e do campo gravitacional a que o observador está submetido já foram incluídos nos cálculos. Se os erros envolvidos na determinação da posição e velocidade permitirem, essa é a estimativa do que poderá ser medido pelo satélite a ser lançado em 2004 pela ESA [50, 51].

Then, in 1916, Einstein announced the general theory and the success of this theory in dealing with the advance of the perihelion of Mercury and the subsequent qualitative confirmation of its predictions concerning red shift and deflection of light rays all served to divert interest from theories of gravitation based on the principle of special relativity. (A.L. Harvey [17]).

Capítulo 4

A Gravitação na dinâmica da Relatividade Especial

4.1 Introdução

Após o advento da Relatividade Geral, surgiram várias propostas alternativas para a gravitação¹. Na sua maioria, essas alternativas tratam-se de equações de campo para o tensor métrico $g_{\mu\nu}$ diferentes das equações de Einstein, Eq.(2.3). Essas teorias têm como premissa que a gravitação é apenas uma manifestação da curvatura do espaço-tempo, determinada pelo tensor métrico $g_{\mu\nu}$, que é o campo fundamental da teoria, como na Relatividade Geral. A opinião atual da maioria da comunidade científica é de que somente teorias métricas podem ser capazes de explicar o fenômeno gravitacional [8].

A Relatividade Especial (RE), de certa forma, unificou a Mecânica Clássica com o Eletromagnetismo, preservando o Princípio da Inércia de Galileu²[52]. Esse espírito de unificação da física foi ampliado com o desenvolvimento de uma Mecânica Quântica compatível com a RE. Nessa Mecânica Quântica Relativística, o spin do elétron aparece naturalmente e na

¹Nesse Capítulo, os cálculos que realizamos com os modelos de Phipps Jr.[15], Bagge[13] e Rood[14] são apresentados. Essa análise foi exposta também em forma de *Comunicação Oral* no XVIII Encontro Nacional de Física de Partículas e Campos, sob o título *Gravitation in the Special Relativistic Dynamics*.

²Havia um conflito entre a Mecânica Clássica de Newton, cujas leis são invariantes pelas transformações de Galileu, e o Eletromagnetismo de Maxwell, cujas leis não são invariantes por tais transformações. Einstein mostrou que as transformações de Galileu não levam em conta o tempo gasto para um sinal luminoso ir de um ponto a outro do espaço. As transformações que devemos usar para conectar as medidas efetuadas por dois observadores inerciais são as de Lorentz-Einstein. Essas transformações de Lorentz-Einstein mantêm invariantes as leis do Eletromagnetismo de Maxwell, mas não as leis da Mecânica Clássica de Newton. Einstein elaborou então uma Mecânica Clássica consistente com essas transformações, denominada Relatividade Especial, preservando assim o Princípio da Inércia de Galileu que afirma que todas as leis da física devem ser as mesmas em qualquer referencial inercial.

teoria quântica não-relativística, a interação de spin é incorporada *ad hoc*. O comportamento de partículas elementares é descrito por uma teoria de campos dentro do formalismo das transformações de Lorentz-Einstein. Logo, como todas as interações não-gravitacionais estão baseadas na Relatividade Especial, existe uma aspiração de se descrever também as interações gravitacionais dentro desse formalismo.

Este anseio de unicidade da física e o fato do desvio para o vermelho e da deflexão da luz poderem ser explicados dentro do contexto da RE [6] justificam a procura por uma Lei de Gravitação que seja compatível com a dinâmica da RE. Como a precessão de periélio de Mercúrio é considerada o único teste das equações de campo da RG no Sistema Solar, sendo a principal justificativa para a aceitação da teoria [8, 13], para uma outra teoria da gravitação competir com a RG, é imprescindível que ela também preveja esse efeito.

É mencionado em alguns livros textos [29, 31] que a gravitação não pode ser estudada dentro do contexto da Relatividade Especial, pois tal modelo só é capaz de reproduzir cerca de 1/6 do avanço de periélio anômalo de Mercúrio e, portanto, não reproduz corretamente os dados observacionais. O livro bem conhecido de Goldstein [31] propõe o seguinte problema no capítulo sobre Relatividade Especial: “Show that the relativistic motion of a particle in an attractive inverse square law of force is a precessing ellipse. Compute the precession of the perihelion of Mercury resulting from this effect. (The answer, about 7” per century, is much smaller than the actual precession of 40” per century which can be accounted only by general relativity)”³. Bergmann [29] resolveu esse problema, investigado pela primeira vez por Sommerfeld [53] em 1919. Sommerfeld estendeu seus cálculos do movimento relativístico de um elétron ao redor de um próton (que tinham o intuito de explicar o espectro de emissão do hidrogênio) para o problema do movimento planetário, considerando a energia potencial newtoniana

$$V_N = -\frac{GMm_0}{r}. \quad (4.1)$$

³Mostre que o movimento relativístico de uma partícula submetida a uma força de inverso do quadrado é uma elipse precessante. Calcule a precessão do periélio de Mercúrio resultante desse efeito. (A resposta, cerca de 7” por século, é muito menor do que a precessão real de 40” por século que pode ser obtida corretamente somente pela Relatividade Geral).

Mostramos na Seção 4.3 que essa energia potencial realmente conduz a somente 1/6 da previsão da RG para a precessão da órbita. Chegamos a essa conclusão resolvendo analiticamente a equação diferencial que descreve o formato da órbita, como usual, e também através da integração numérica das equações de movimento, método em geral não abordado. Ainda hoje, é aceita por muitos a conclusão de Sommerfeld de que a Relatividade Especial não pode explicar o movimento de Mercúrio.

No contexto da teoria Newtoniana, a massa gravitacional passiva⁴, m_G , que determina a energia potencial a que a partícula está sujeita,

$$V = -\frac{GMm_G}{r}, \quad (4.2)$$

é, por hipótese, igual à massa inercial m_I (relacionada ao *momentum* linear $\vec{P} = m_I\vec{v}$ e à sua variação, a força $d\vec{P}/dt$). Por sua vez, a massa inercial é idêntica à massa de repouso m_0 , na Mecânica Newtoniana. Nesse caso, $V = V_N$. Tsai [55] mostrou, através de uma experiência imaginária⁵ que, se em repouso, a massa gravitacional é idêntica à massa inercial ($m_G = m_I = m_0$), em movimento elas também devem ser iguais; nesse caso, $m_G = m_I = m_0\gamma$. Portanto, o uso de $m_G = m_0$ na Mecânica relativística, como considerado no tratamento de Sommerfeld [29, 31, 53], não é consistente. Mesmo sem o conhecimento do trabalho de Tsai [55], Bagge [13] e Phipps Jr. [15] consideraram a equivalência entre a massa gravitacional passiva e a massa inercial ($m_G = m_I$) na energia potencial tipo newtoniana, Eq.(4.2), dentro do contexto da RE. Ficamos surpresos ao nos defrontar com esses trabalhos, pois os autores obtêm o mesmo valor previsto pela RG para a precessão do periélio de Mercúrio. Outro trabalho interessante é o de Rood [14] que não usa a energia potencial tipo newtoniana,

⁴O conceito de massa foi introduzido no contexto da segunda lei de Newton [54]: é a constante de proporcionalidade que relaciona a força a que um corpo está sujeito com a sua aceleração. Essa “massa” é a massa inercial, medida da resistência do corpo à força. Mas massa possui também outros dois significados na teoria de Newton. A massa gravitacional ativa de um corpo, m^A , determina o campo gravitacional produzido por ele. A reação passiva de um corpo ao campo gravitacional produzido por outros corpos é determinada pela massa gravitacional passiva m^P . Assim, a força exercida por um elemento de massa I em um elemento de massa II a uma distância R , é dada por $Gm_I^A m_{II}^P / R^2$, em módulo. Aqui a massa denotada por m_G é a massa gravitacional passiva da partícula teste.

⁵Experiência não realizável na prática. Semelhante às experiências de ‘caixa de Einstein’ descritas por French [52], os famosos ‘gedanken experiments’.

Eq.(4.2), mas sim uma equação de força semelhante à força eletromagnética de Lorentz entre duas cargas elétricas. Rood afirma que esse modelo prevê corretamente o avanço do periélio e, ainda, tal equação de força é capaz de prever o deslocamento para o vermelho e a deflexão gravitacional da luz sem o uso do princípio da equivalência, como considerado por Schiff [6]. Seria interessante, portanto, comparar a previsão desses modelos com a previsão da RG para os outros efeitos relativísticos no movimento planetário. Esse é o principal propósito desse capítulo. Na próxima seção, apresentamos as relações dinâmicas para uma partícula com uma energia potencial qualquer V , no contexto da RE.

4.2 Dinâmica de uma partícula

Vamos tratar o planeta Mercúrio como sendo uma partícula teste sujeita ao potencial gravitacional do Sol cuja massa é muito maior do que a da partícula, podendo ser considerado em repouso, como foi admitido no contexto da solução de Schwarzschild. Nosso observador inercial se encontra em um sistema de referência em repouso em relação à fonte de gravitação. Podemos considerar que esse observador está muito distante da fonte a fim de que seu caráter inercial continue válido. Explícita ou implicitamente, os modelos analisados [13, 14, 15] consideram esses princípios.

De acordo com a dinâmica da RE [31], o movimento de uma partícula teste cuja energia potencial é V pode ser determinado pela lagrangiana

$$\mathcal{L} = -m_0c^2\gamma^{-1} - V, \quad (4.3)$$

pela energia

$$E = m_0c^2\gamma + V, \quad (4.4)$$

ou, ainda, pela força

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = -\vec{\nabla}V, \quad (4.5)$$

onde \vec{P} é o *momentum* relativístico

$$\vec{P} = m_0\gamma\vec{v}, \quad (4.6)$$

onde $\vec{v} = d\vec{r}/dt$ e γ é o fator usual

$$\gamma \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.7)$$

Se a energia potencial em questão depender apenas da coordenada radial, $V = V(r)$, as três expressões acima são equivalentes, levando às mesmas equações de movimento para a partícula.

4.3 A energia potencial newtoniana

Considerando que o campo gravitacional gerado por uma fonte esfericamente simétrica de massa M possa ser descrito pela energia potencial newtoniana, Eq.(4.1), a lagrangiana que descreve o movimento de uma partícula nesse campo é dada por

$$\mathcal{L} = -m_0 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{GMm_0}{r}. \quad (4.8)$$

Em coordenadas polares no plano, $v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$, as equações de Euler-Lagrange levam à conservação de

$$P_\theta = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = m_0 \gamma r^2 \dot{\theta}, \quad (4.9)$$

com a equação de movimento para a coordenada radial r sendo

$$\frac{d}{dt}(\gamma \dot{r}) = \gamma r \dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r^2}. \quad (4.10)$$

Utilizando o procedimento padrão de mudar a dependência temporal para dependência angular, obtemos uma relação direta entre as coordenadas r e θ ,

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \gamma, \quad (4.11)$$

onde $u = 1/r$ e $h = P_\theta/m_0$ é o *momentum* angular por unidade de massa. Desprezando termos $\mathcal{O}(c^{-4})$, essa EDO pode ser escrita na forma

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \left[1 + \frac{1}{2} \frac{h^2}{c^2} \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) \right], \quad (4.12)$$

cuja solução (veja o Apêndice C) resulta em um avanço de periélio

$$\delta = \frac{\pi GM}{a(1 - e^2)c^2}, \quad (4.13)$$

apenas 1/6 do valor previsto com a RG, o que significa cerca de 7.163"/sec no caso da órbita de Mercúrio. Essa é a solução do problema proposto por Goldstein [31], em concordância com o resultado obtido por Bergmann [29]. É propício salientar que essa lagrangiana, Eq.(4.8), leva à seguinte energia

$$E = m_0 c^2 \gamma - \frac{GMm_0}{r}, \quad (4.14)$$

por uma transformação de Legendre, concordando com a Eq.(4.4). Além disso, as equações de movimento obtidas com a mesma energia potencial através da equação de força, Eq.(4.5), são idênticas às obtidas através da lagrangiana.

Podemos também escrever a lagrangiana de Sommerfeld em coordenadas cartesianas no plano (x, y) , obtendo assim as seguintes equações de movimento

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = - \left(\frac{GM}{r^3} \vec{r} + \dot{\gamma} \vec{v} \right) \gamma^{-1} \approx - \frac{GM}{r^3} \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c^2} \vec{v} \right] + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (4.15)$$

com $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ e $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. A equação acima representa um sistema de duas equações diferenciais acopladas de segunda ordem. E ao resolvermos o sistema numericamente pelo método de Runge–Kutta–Nyström [37], obtemos os resultados mostrados abaixo.

Tab.(6) Integração das equações de movimento do modelo de Sommerfeld, Eq.(4.15), considerando a órbita de Mercúrio.

Passo (s)	δ ("/sec)	$\Delta\theta$ ("/sec)	Δa (m)	ΔT (s)	ΔT_r (s)
100	6.64422	-50.5469	1910.59	0.460398	0.520915
10	7.15818	-55.8994	2179.06	0.509149	0.574348
1	7.16321	-55.9535	2181.77	0.509642	0.574887

A integração numérica concorda, portanto, com o cálculo analítico da precessão em boa aproximação. Os outros efeitos no movimento planetário também são mostrados acima. Não achamos interessante fazer um cálculo analítico desses efeitos visto que o modelo não leva à precessão observada.

4.4 A equivalência entre massa gravitacional e inercial

Como a equivalência $m_G = m_0$ na energia potencial tipo newtoniana não leva a resultados aceitáveis para a órbita de Mercúrio, o passo seguinte seria considerar a equivalência entre massa gravitacional passiva e massa inercial, ou seja,

$$V = -\frac{GMm_0}{r} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.16)$$

O problema nesse caso é que quando aplicamos tal energia potencial nas expressões relativísticas da lagrangiana, Eq.(4.3), da energia, Eq.(4.4), e da força, Eq.(4.5), somos levados a equações de movimento diferentes. Em geral, se $V = V(r, v)$ essas expressões não são mais equivalentes⁶, como ocorre com o modelo de Sommerfeld onde $V = V(r)$. A questão então é escolher qual das três abordagens é mais fundamental. Uma maneira de fazermos tal escolha seria usarmos essa energia potencial nas diferentes expressões, Eqs.(4.3,4.4,4.5), e constatar qual delas consegue reproduzir os dados observacionais do Sistema Solar.

4.4.1 A Lagrangiana de Phipps Jr.

Em 1986, T.E. Phipps Jr. [15] considerou a equivalência $m_G = m_0\gamma$ na lagrangiana de interação, Eq.(4.3),

$$\mathcal{L} = -m_0c^2\gamma^{-1} + \frac{GMm_0}{r}\gamma. \quad (4.17)$$

Por meio de uma transformação de Legendre, encontramos a energia

$$E = m_0c^2\gamma \left[1 - \frac{GM}{rc^2}\gamma^2 \left(1 + 2\frac{v^2}{c^2}\right)\right], \quad (4.18)$$

que é uma constante de movimento.

Em coordenadas polares no plano, as equações de Euler-Lagrange para a coordenada cíclica θ levam à conservação do *momentum* angular

$$P_\theta = m_0r^2\dot{\theta}\gamma \left(1 + \frac{GM}{rc^2}\gamma^2\right), \quad (4.19)$$

⁶Por exemplo, se aplicarmos a Eq.(4.16) na expressão da lagrangiana relativística, Eq.(4.3), e então fizermos uma transformação de Legendre, não encontraremos uma energia na forma da Eq.(4.4). O inverso também é válido.

e a equação de movimento para a coordenada radial é dada por

$$\frac{d}{dt} \left[\gamma \dot{r} \left(1 + \frac{GM}{rc^2} \gamma^2 \right) \right] = \gamma \left[r \dot{\theta}^2 \left(1 + \frac{GM}{rc^2} \gamma^2 \right) - \frac{GM}{r^2} \right]. \quad (4.20)$$

Fazendo a transformação usual, obtemos a EDO

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \left(1 - \frac{(GM)^2}{h^2 c^2} \right) = \frac{GM}{h^2} \left[1 + \frac{h^2}{c^2} \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) \right] + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (4.21)$$

onde $h = P_\theta/m_0$ e $u = 1/r$. A solução dessa EDO (veja Apêndice C) leva a um avanço de

$$\delta = \frac{3\pi(GM)^2}{h^2 c^2} \approx \frac{3\pi GM}{a(1-e^2)c^2}, \quad (4.22)$$

cerca de 1/2 da previsão da Relatividade Geral. De acordo com o autor, a lagrangiana dada pela Eq.(4.17) descreve completamente o efeito. Como uma confirmação do nosso resultado, podemos tratar essa lagrangiana em coordenadas cartesianas no plano, obtendo assim as seguintes equações de movimento

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \left[\left(1 - \frac{GM}{rc^2} \right) \vec{r} - 2 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c^2} \vec{v} \right] + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (4.23)$$

cuja solução numérica é listada abaixo.

Tab.(7) Integração das equações de movimento do modelo de Phipps, Eq.(4.23), considerando a órbita de Mercúrio.

Passo (s)	δ ("/sec)	$\Delta\theta$ ("/sec)	Δa (m)	ΔT (s)	ΔT_r (s)
100	20.9709	-107.831	3993.20	0.98216	1.17317
10	21.4848	-113.190	4261.90	1.03097	1.22666
1	21.4900	-113.245	4264.62	1.03147	1.22721

Essa solução numérica confirma, portanto, nosso cálculo analítico para a precessão da órbita. Logo, a afirmação de Phipps de que a Relatividade Especial é capaz de explicar completamente o avanço do periélio de Mercúrio através da lagrangiana dada pela Eq.(4.17) não é válida.

4.4.2 A Energia de Bagge

E. Bagge [13], considerou a energia potencial $V = -GMm_0\gamma/r$ na expressão para a energia relativística total, Eq.(4.4),

$$E = m_0c^2\gamma - \frac{GM}{r}m_0\gamma = m_0c^2\gamma \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right). \quad (4.24)$$

Essa energia pode ser obtida por uma transformação de Legendre na seguinte lagrangiana

$$\mathcal{L} = -m_0c^2\gamma^{-1} \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right). \quad (4.25)$$

Em coordenadas polares no plano, essa lagrangiana leva a conservação de

$$P_\theta = m_0r^2\dot{\theta}\gamma \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right). \quad (4.26)$$

Como $\gamma(1 - GM/rc^2)$ é uma quantidade conservada, E/m_0c^2 , o *momentum* angular newtoniano, $m_0r^2\dot{\theta}$, também é conservado nesse modelo. A equação de Euler–Lagrange para a coordenada r leva à seguinte equação de movimento

$$\dot{r} = r\dot{\theta}^2 - \frac{GM}{r^2}\gamma^{-2} \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-1}, \quad (4.27)$$

que pode ser transformada numa equação envolvendo somente r e θ ,

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \left[1 + \frac{(GM)^2}{h^2c^2}\right] = \frac{GM}{h^2}. \quad (4.28)$$

A solução dessa EDO resulta, de acordo com os cálculos desenvolvidos no Apêndice C, em uma precessão de

$$\delta = -\frac{\pi(GM)^2}{h^2c^2} \approx -\frac{\pi GM}{a(1 - e^2)c^2}, \quad (4.29)$$

cerca de 1/6 da previsão da RG, em sentido contrário. Ou seja, a lagrangiana considerada, Eq.(4.25), prevê um retrocesso do ponto de periélio a uma taxa de aproximadamente 7.163"/sec no caso da órbita de Mercúrio. Em coordenadas cartesianas, essa lagrangiana leva às seguintes equações de movimento

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right)^{-1} \vec{r}, \quad (4.30)$$

cujos resultados da integração numérica para a órbita de Mercúrio são mostrados abaixo, confirmando a nossa previsão para δ .

Tab.(8) Integração das equações de movimento cartesianas do modelo de Bagge, Eq.(4.30), considerando a órbita de Mercúrio.

Passo (s)	δ ("/sec)	$\Delta\theta$ ("/sec)	Δa (m)	ΔT (s)	ΔT_r (s)
100	-7.68242	6.73744	-172.019	-0.0613668	-0.1313410
10	-7.16853	1.39140	96.2282	-0.0126734	-0.0779666
1	-7.16349	1.33848	98.8931	-0.0121913	-0.0774387

Em um cálculo aproximado, Bagge [13] encontrou cerca de 1/2 da precessão prevista com a RG. Nesse cálculo, o autor considerou a constância de $m_0 r^2 \dot{\theta} \gamma$. Todavia, essa é uma quantidade conservada somente no modelo de Sommerfeld, dentre os analisados aqui. A EDO obtida por esse procedimento (errôneo) é a seguinte

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = C \left(1 - \frac{GMu}{c^2} \right)^{-3}, \quad (4.31)$$

na nossa notação, onde C é uma constante. A solução do autor para essa equação diferencial leva a cerca da metade do valor previsto pela RG para a precessão. Usando o método desenvolvido no Apêndice C, constatamos que tal solução é satisfatória, desprezando termos $\mathcal{O}(c^{-4})$. Entretanto, a EDO obtida pelo autor, Eq.(4.31), é inconsistente com a conservação da energia considerada, Eq.(4.24).

4.4.3 A lei de força de Bagge

Bagge afirma que a solução aproximada da Eq.(4.31) obtida em seu trabalho [13] não é satisfatória (opinião com a qual não concordamos). Portanto, seria necessário recalcularmos a órbita de Mercúrio com uma maior precisão através de um cálculo numérico. Ao invés de integrar numericamente a Eq.(4.31) de modo a checar a validade da integração aproximativa utilizada, Bagge usa a seguinte lei de força

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{GMm_0\gamma}{r^3} \vec{r}, \quad (4.32)$$

onde $\vec{P} = m_0 \gamma \vec{v}$ é o *momentum* linear relativístico. De acordo com o autor, esse procedimento é análogo a considerar a energia $E = m_0 c^2 \gamma (1 - GM/rc^2)$, Eq.(4.24). Isso é errôneo, pois o uso da energia potencial $V = -GMm_0\gamma/r$ na expressão para a força, $\vec{F} = -\vec{\nabla}V$, leva a

equações de movimento diferentes daquelas obtidas com a aplicação dessa energia potencial na expressão da energia total, Eq.(4.24). A lei de força, Eq.(4.32), na realidade trata-se de um novo modelo, detalhe não percebido por Bagge. Em coordenadas cartesianas no plano, essa lei de força leva às seguintes equações de movimento

$$\dot{x} = -\frac{GM}{r^2} \left[x \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2} \right) - y \frac{\dot{x}\dot{y}}{c^2} \right] \quad e \quad (4.33)$$

$$\dot{y} = -\frac{GM}{r^2} \left[y \left(1 - \frac{\dot{y}^2}{c^2} \right) - x \frac{\dot{x}\dot{y}}{c^2} \right], \quad (4.34)$$

idênticas às equações (25) e (26) do trabalho de Bagge. Podemos, ainda, escrever essas equações em uma forma mais compacta,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \left[\vec{r} - \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c^2} \vec{v} \right]. \quad (4.35)$$

As principais conclusões de Bagge se baseiam em uma integração numérica das Eqs.(4.33, 4.34) considerando a órbita de Mercúrio. De acordo com essa integração, o periélio avança a uma taxa de aproximadamente 42.09"/sec, um valor muito próximo da previsão da RG, cerca de 42.98"/sec. Portanto, a medida da precessão anômala da órbita de Mercúrio, cerca de 42.56±0.94"/sec [2], não é capaz de distinguir entre a previsão da RG e a previsão da RE, considerando a lei de força $\vec{F} = -(GMm_0\gamma/r^3)\vec{r}$. De modo a checarmos o resultado de Bagge, efetuamos também uma integração numérica das Eqs.(4.33, 4.34), sendo que o resultado dessa integração é mostrado abaixo.

Tab.(9) Integração das equações de movimento cartesianas provenientes da lei de força de Bagge, Eqs.(4.33, 4.34), considerando a órbita de Mercúrio.

Passo (s)	δ ("/sec)	$\Delta\theta$ ("/sec)	Δa (m)	ΔT (s)	ΔT_r (s)
100	13.8076	-22.3417	690.978	0.203495	0.329259
10	14.3215	-27.6966	959.555	0.252270	0.382714
1	14.3265	-27.7507	962.261	0.252762	0.383253

Nossos resultados da integração numérica das Eqs.(4.33, 4.34) indicam uma precessão da ordem de 14.33"/sec, cerca de 1/3 da precessão prevista pela RG, em notável discordância da integração efetuada por Bagge.

Podemos escrever a equação de movimento para o raio vetor \vec{r} , Eq.(4.35), em coordenadas polares no plano (veja o Apêndice A),

$$\left(\dot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2\dot{\theta}\right) \hat{e}_\theta = -\frac{GM}{r^2} \left[\left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right) \hat{e}_r - \frac{r\dot{\theta}\dot{r}}{c^2} \hat{e}_\theta \right]. \quad (4.36)$$

A equação para a componente angular de $d^2\vec{r}/dt^2$ é então

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2\dot{\theta}\right) = \frac{GM}{r} \frac{\dot{\theta}}{c^2}. \quad (4.37)$$

Tal equação diferencial pode ser integrada facilmente, levando à conservação da seguinte quantidade

$$h = r^2\dot{\theta} \exp\left(\frac{GM}{rc^2}\right). \quad (4.38)$$

A outra equação de movimento é obtida considerando a componente radial da Eq.(4.36),

$$\dot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}^2}{c^2}\right). \quad (4.39)$$

Nessa expressão, mudamos a dependência temporal para dependência angular utilizando a constância de h , Eq.(4.38), obtendo assim a seguinte EDO

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} \exp\left(\frac{2GMu}{c^2}\right), \quad (4.40)$$

que pode ser escrita como

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \left(1 - \frac{2(GM)^2}{h^2c^2}\right) = \frac{GM}{h^2}, \quad (4.41)$$

desprezando termos $\mathcal{O}(c^{-4})$. A solução aproximada dessa EDO (veja o Apêndice C) resulta em uma precessão de periélio de

$$\delta = \frac{2\pi(GM)^2}{h^2c^2} \approx \frac{2\pi GM}{a(1-e^2)c^2}, \quad (4.42)$$

cerca de 1/3 da precessão prevista com a RG. Esse resultado concorda com a precessão determinada através da nossa integração numérica das Eqs.(4.33, 4.34), considerando a órbita de Mercúrio. Portanto, a conclusão de Bagge [13] de que a lei de força $\vec{F} = -(GMm_0\gamma/r^3)\vec{r}$ pode descrever completamente o movimento de periélio de Mercúrio não é válida.

4.4.4 Síntese

Concluindo esta seção, mostramos que a inclusão da energia potencial do tipo newtoniana,

$$V = -\frac{GMm_G}{r},$$

nas relações dinâmicas da Relatividade Especial, com a massa gravitacional passiva m_G igual à massa inercial $m_I = m_0\gamma$, não é capaz de reproduzir o avanço de periélio anômalo de Mercúrio.

O uso dessa energia potencial na lagrangiana

$$\mathcal{L} = -m_0c^2\gamma^{-1} + \frac{GMm_0\gamma}{r},$$

Eq.(4.17), como considerado por Phipps Jr. em 1986 [15], resulta em 1/2 da precessão prevista com a RG. Após fazermos os cálculos do movimento planetário com essa lagrangiana e escrevermos uma crítica à derivação de Phipps Jr. salientando alguns pontos falhos, encontramos o trabalho de 1987 de Peters [56]⁷. Peters mostrou os problemas existentes no artigo de Phipps Jr. e chegou ao mesmo resultado que obtivemos para a precessão da órbita. Em resposta às críticas de Peters, Phipps Jr. [57] argumentou que é possível que a parte da precessão que pode ser explicada newtonianamente seja maior e portanto, a parte anômala pode ser compatível com a previsão dessa lagrangiana. O argumento de Phipps se baseia na análise de Nedvěd do efeito do movimento do Sol ao redor do baricentro do Sistema Solar [58]. Todavia, como argumentamos na Seção 3.9.1, tal análise não é válida.

A inclusão da energia potencial na expressão relativística para a energia total,

$$E = m_0c^2\gamma \left(1 - \frac{GM}{rc^2}\right),$$

como considerado por Bagge em 1981 [13], resulta em uma precessão do periélio de cerca de 1/6 do valor previsto pela RG, e em sentido contrário.

⁷Demoramos para encontrar essa referência porque as revistas científicas, bem como as fontes de pesquisa de 1987 não estão disponíveis nas bibliotecas da UFPR.

A lei de força

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{GMm_0\gamma}{r^3}\vec{r},$$

considerada por Bagge em 1981 no mesmo trabalho [13], é capaz de explicar somente 1/3 da precessão prevista pela RG. Todavia, uma integração numérica das equações de movimento em coordenadas cartesianas, obtidas através dessa força, levou Bagge a concluir que tal modelo explica completamente a precessão anômala de Mercúrio. Existem problemas intrínsecos com os cálculos numéricos de Bagge. O teste feito pelo autor ao integrar numericamente as equações de movimento newtonianas, obtendo precessão nula, não é suficiente para comprovar a eficácia do programa. Por outro lado, o método de integração que utilizamos foi testado com as equações de movimento newtonianas, as equações da RG e, ainda, com as equações de movimento do modelo de Sommerfeld, todos com solução analítica bem conhecida.

4.5 O modelo de Rood

Em 1984, H.J. Rood [14] considerou a seguinte lei de força

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} = -\frac{GMm_G}{r^3} \left[\vec{r} - \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{r})}{c^2} \right], \quad (4.43)$$

para uma partícula sujeita ao campo de uma fonte esfericamente simétrica e estática de massa M , onde \vec{r} é o vetor posição da partícula em relação a fonte e $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Tal lei de força é de certa forma análoga à força de Lorentz entre duas cargas elétricas. A análise feita por Rood para o movimento de planetas é um tanto quanto complicada, pois o problema é tratado em coordenadas próprias. Os cálculos tornam-se mais simples no sistema de referência centrado no baricentro do Sol, como nos outros modelos que analisamos.

4.5.1 A precessão das órbitas planetárias

Em coordenadas polares no plano, podemos escrever a lei de força proposta por Rood, Eq.(4.43), na seguinte forma

$$\vec{F} = -\frac{GM}{r^2}m_G \left[\left(1 + \frac{r^2\dot{\theta}^2}{c^2} \right) \hat{e}_r - \frac{r\dot{\theta}\dot{r}}{c^2} \hat{e}_\theta \right], \quad (4.44)$$

a força sendo a variação temporal do *momentum* linear,

$$\vec{F} \equiv \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}(m_I \vec{v}) = m_0 \gamma \left[\left(\dot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{r}\dot{\gamma}}{\gamma} \right) \hat{e}_r + \frac{1}{r\gamma} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta} \gamma) \hat{e}_\theta \right]. \quad (4.45)$$

Igualando essas duas expressões, constatamos que a componente angular resulta na seguinte equação diferencial

$$\frac{1}{r^2 \dot{\theta} \gamma} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta} \gamma) = \frac{GM}{r^2 c^2} \left(\frac{m_G}{m_I} \right) \frac{dr}{dt}, \quad (4.46)$$

cuja integração indica que a grandeza

$$h = r^2 \dot{\theta} \gamma \exp\left(\frac{GM}{rc^2}\right) \quad (4.47)$$

é uma constante de movimento (no caso de $m_G = m_0 \gamma$ esta é uma constante exata e no caso de considerarmos $m_G = m_0$ tal constância é válida até termos $\mathcal{O}(c^{-2})$, sendo que termos de ordem superior podem ser desprezados). Considerando a componente radial da igualdade entre a Eq.(4.44) e a Eq.(4.45), obtemos a segunda equação diferencial para a dependência temporal das coordenadas r e θ ,

$$\dot{r} - r\dot{\theta}^2 + \frac{\dot{r}\dot{\gamma}}{\gamma} = -\frac{GM}{r^2} \left(\frac{m_G}{m_I} \right) \left(1 + \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{c^2} \right). \quad (4.48)$$

Usando a conservação de h para transformar a dependência temporal em angular nessa equação diferencial, obtemos assim a seguinte EDO

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \left(1 - 2 \frac{(GM)^2}{h^2 c^2} \right) = \frac{GM}{h^2} \left(\frac{m_G}{m_I} \right) \left[1 + 2 \frac{h^2}{c^2} \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) \right], \quad (4.49)$$

desprezando termos $\mathcal{O}(c^{-4})$.

Considerando a equivalência entre massa gravitacional passiva e massa de repouso, a relação entre as coordenadas r e θ é dada por

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u \left(1 - 2 \frac{(GM)^2}{h^2 c^2} \right) = \frac{GM}{h^2} \left[1 + \frac{3}{2} \frac{h^2}{c^2} \left(u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right) \right], \quad (4.50)$$

cuja solução (veja o Apêndice C) indica a seguinte precessão da órbita

$$\delta = \frac{5\pi(GM)^2}{h^2 c^2} \approx \frac{5\pi GM}{a(1-e^2)c^2}, \quad (4.51)$$

cerca de 5/6 do valor previsto pela RG.

Considerando a equivalência entre massa gravitacional e massa inercial, $m_G = m_I = m_0\gamma$, a solução da Eq.(4.49) conduz a uma precessão idêntica à prevista pela RG. Portanto, o modelo de Rood é realmente compatível com os dados observacionais referentes ao movimento de periélio de Mercúrio [2], apesar de não haver menção dessa equivalência no trabalho original de Rood [14]. Vamos agora calcular os outros efeitos relativísticos na órbita utilizando esse modelo.

4.5.2 Outros efeitos no movimento planetário

Como já mencionamos, seria interessante compararmos as previsões da RG com as previsões de outras teorias que também reproduzem a precessão anômala de Mercúrio no que se refere aos outros efeitos relativísticos na órbita, como o período orbital, o semi-eixo maior e os outros efeitos descritos no Capítulo 3. Mostramos na seção anterior que os modelos propostos por Bagge [13] e Phipps Jr. [15], ao contrário da afirmação dos autores, não são capazes de explicar corretamente o efeito de precessão. Já a lei de força proposta por Rood prevê corretamente o efeito quando consideramos a equivalência entre massa gravitacional e massa inercial. Portanto, iremos analisar as previsões desse modelo mais detalhadamente. A EDO obtida com a lei de força de Rood, Eq.(4.49), considerando a equivalência $m_G = m_I$, tem como solução

$$u(\theta) = \frac{GM}{h^2} (1 + a_0 + e_R \cos \rho\theta) , \quad (4.52)$$

onde

$$\rho \equiv \frac{2\pi}{2\pi + \delta} ,$$

com

$$\delta = \frac{6\pi GM}{a(1 - e^2)c^2} , \quad (4.53)$$

$$a_0 = (2 + e^2) \frac{GM}{a(1 - e^2)c^2} , \quad (4.54)$$

desprezando termos $\mathcal{O}(c^{-4})$, veja o Apêndice C para maiores detalhes.

Para fins de cálculo do período orbital, consideramos como condição inicial o ponto de periélio da trajetória, da mesma forma que no contexto da RG. Dessa forma, podemos determinar as constantes h e e_R em termos das análogas newtonianas Ω e e ,

$$h = \Omega \left[1 + \frac{1}{2} \frac{GM}{a(1-e^2)c^2} (3 + 4e + e^2) \right], \quad (4.55)$$

$$e_R = e - \frac{GM}{a(1-e^2)c^2} (1 - 7e - 3e^2 - e^3), \quad (4.56)$$

usando um procedimento semelhante ao apresentado na Seção 3.5. Da conservação do *momentum* angular por unidade de massa h , Eq.(4.47), vem que

$$dt = \frac{1}{h} \frac{d\theta}{u^2} \left(1 - \frac{GM}{2ac^2} + \frac{2GM}{c^2} u \right). \quad (4.57)$$

Logo, o período orbital, tempo necessário para o raio vetor do planeta varrer um ângulo de 2π , pode ser determinado através da integral

$$T = \frac{1}{h} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \frac{d\theta}{u^2(\theta)} \left(1 - \frac{GM}{2ac^2} + \frac{2GM}{c^2} u(\theta) \right), \quad (4.58)$$

onde a função $u(\theta)$ é dada pela Eq.(4.52). Integrando tal expressão obtemos

$$T = T_N - \frac{2\pi\sqrt{aGM}}{(1-e-e^2+e^3)c^2} \left[\frac{3(1-e^2)^{5/2}}{(1+e)^3} - 1 - 2e - 2e^2 - e^3 \right], \quad (4.59)$$

desprezando termos $\mathcal{O}(c^{-4})$, onde T_N é o período orbital previsto com a Gravitação Newtoniana. Para a órbita do planeta Mercúrio, a diferença entre o período orbital previsto com a lei de força de Rood, T , e o período newtoniano é cerca de $\Delta T = T - T_N = -0.008215$ segundos. Ou seja, se o movimento do planeta for descrito corretamente por esse modelo, ele irá completar um ângulo de 2π mais rápido do que o previsto newtonianamente. Portanto, a cada revolução, o planeta estará adiantado em relação à posição prevista newtonianamente cerca de

$$\Delta\theta = -\sqrt{\frac{GM(1+e)}{a^3(1-e)^3}} \Delta T.$$

No caso do planeta Mercúrio, a defasagem da posição prevista newtonianamente em relação à “observada” ocorreria a uma taxa de $\Delta\theta = 0.9019''/\text{sec}$.

O período da coordenada radial, T_r , tempo decorrido entre duas passagens do planeta pela posição do periélio, é dado por

$$T_r = T + \frac{6\pi}{c^2} \sqrt{\frac{aGM}{(1-e^2)(1+e)}} (1-e),$$

ou seja, é o tempo necessário para o raio vetor que vai do centro do Sol ao planeta varrer um ângulo de 2π , T , acrescido do tempo para o planeta varrer um ângulo $\delta = 6\pi GM/a(1-e^2)c^2$. Para o caso da órbita de Mercúrio, a diferença entre o período radial observado (de acordo com a lei de força de Rood), T_r , e o período radial previsto newtonianamente (idêntico ao período orbital T_N) é de cerca de $\Delta T_r = 0.3833$ segundos.

A média entre a distância de máxima aproximação e máximo afastamento define o semi-eixo maior da órbita. Como, relativisticamente, a órbita precessa um ângulo δ a cada revolução, o semi-eixo maior é dado por

$$a_R = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{u(0)} + \frac{1}{u(\pi + \delta/2)} \right]. \quad (4.60)$$

Usando a solução da EDO proveniente da lei de força de Rood, função $u(\theta)$, Eq.(4.52), obtemos

$$a_R = a_N - \frac{GM}{(1-e)^2 c^2} (1 - 4e + e^2) + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (4.61)$$

onde a_N é o semi-eixo maior previsto newtonianamente a partir das mesmas condições de contorno. De acordo com essa expressão, o semi-eixo maior “observado” de Mercúrio é cerca de 514.4 metros menor do que a previsão newtoniana.

4.5.3 Equações de movimento cartesianas

Em coordenadas cartesianas, a lei de força proposta, Eq.(4.43), leva às seguintes equações de movimento

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right) \vec{r} - 2 \frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c^2} \vec{v} \right] + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (4.62)$$

no caso de considerarmos a equivalência entre a massa gravitacional e a massa de repouso, $m_G = m_0$. Abaixo listamos o resultado da integração numérica desse sistema, considerando o movimento de Mercúrio.

Tab.(10) Integração das equações de movimento cartesianas provenientes da lei de força de Rood, considerando a equivalência $m_G = m_0$, Eq.(4.62), para a órbita do planeta Mercúrio.

Passo (s)	δ ("/sec)	$\Delta\theta$ ("/sec)	Δa (m)	ΔT (s)	ΔT_r (s)
100	35.2976	-21.8809	433.406	0.199298	0.520799
10	35.8115	-27.2446	702.317	0.248152	0.574334
1	35.8167	-27.2996	705.056	0.248653	0.574883

O resultado dessa integração confirma o nosso cálculo analítico da precessão δ , Eq.(4.51), cerca de 5/6 da previsão da RG. Para os outros efeitos relativísticos não efetuamos o cálculo analítico, pelo fato desse modelo não ser capaz de descrever, ao menos, o avanço do periélio.

Considerando a equivalência entre massa gravitacional passiva e massa inercial, $m_G = m_I = m_0\gamma$, na lei de força proposta por Rood, Eq.(4.42), chegamos à seguinte equação de movimento para o raio vetor

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \vec{r} - 2\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c^2} \vec{v} \right] + \mathcal{O}(c^{-4}), \quad (4.63)$$

cujo resultado da integração numérica é mostrado a seguir.

Tab.(11) Integração das equações de movimento cartesianas provenientes da lei de força de Rood, considerando a equivalência $m_G = m_I$, Eq.(4.63), para a órbita do planeta Mercúrio.

Passo (s)	δ ("/sec)	$\Delta\theta$ ("/sec)	Δa (m)	ΔT (s)	ΔT_r (s)
100	42.4609	6.32434	-786.203	-0.05760410	0.329143
10	42.9748	0.957892	-517.179	-0.00872479	0.382703
1	42.9798	0.902587	-514.425	-0.00822105	0.383253
Analiticamente	42.9800	0.901929	-514.391	-0.00821506	0.383260

Na última linha dessa tabela, apresentamos os valores obtidos analiticamente a partir do tratamento do problema em coordenadas plano-polares. Essa tabela mostra que a integração numérica das equações de movimento cartesianas confirma as previsões que fizemos para os efeitos relativísticos na órbita de Mercúrio, dentro de uma margem de erro de 0.07%.

4.5.4 Comportamento da luz

O trabalho de Schiff de 1960 [6] deu um novo impulso à idéia de se obter uma teoria de gravitação compatível com a Relatividade Especial. Schiff mostrou que os fenômenos de deslocamento espectral para o vermelho e a deflexão gravitacional da luz podiam ser explicados completamente pela RE utilizando o princípio da equivalência. Portanto, dos testes propostos por Einstein, apenas o avanço de periélio anômalo de Mercúrio serviria como um teste da RG. A explicação desse efeito através da lei de força de Rood colocaria a Relatividade Especial no mesmo patamar de igualdade observacional que a Relatividade Geral. Apesar de existirem certos questionamentos à derivação de Schiff (veja as referências citadas por Engelke e Chandler [19]), o modelo de Rood também pode explicar esses efeitos da gravitação na propagação da luz, como mostraremos a seguir.

Para uma partícula livre da ação de forças, sua energia total é dada por [52]

$$E = m_I c^2, \quad (4.64)$$

onde m_I é sua massa inercial, com o *momentum* linear sendo

$$\vec{P} = m_I \vec{v}, \quad (4.65)$$

onde $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Tais expressões podem ainda ser escritas numa forma manifestamente covariante através do quadrivetor P^μ ,

$$P^\mu = \left(E/c, \vec{P} \right) = \left(m_0 \frac{dx^0}{d\tau}, m_0 \frac{d\vec{r}}{d\tau} \right), \quad (4.66)$$

que se transforma da mesma maneira que $x^\mu = (x^0, \vec{r})$, visto que o elemento de tempo próprio $d\tau = -\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ é um invariante sob transformações de Lorentz.

A energia de um fóton está relacionada com a frequência ν da onda eletromagnética associada por meio da relação [52]

$$E = h\nu, \quad (4.67)$$

onde h é a constante de Planck, sendo que a relação entre energia e *momentum* é

$$P = \frac{E}{c}, \quad \text{ou seja,} \quad \vec{P} = \frac{h\nu}{c^2} \vec{v}, \quad (4.68)$$

onde $\vec{v} = \vec{c}$. Portanto, na descrição do movimento de fótons, podemos considerar a equivalência

$$m_I \rightarrow \frac{h\nu}{c^2}. \quad (4.69)$$

Considerando a equivalência entre massa gravitacional passiva e massa inercial na lei de força de Rood, Eq.(4.43), podemos escrever a seguinte equação de movimento

$$\frac{d}{dt} \left(\nu \frac{d\vec{r}}{dt} \right) = -\frac{GM}{r^3} \nu \left[\vec{r} - \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{r})}{c^2} \right], \quad (4.70)$$

para fótons.

Deslocamento para o vermelho das linhas espectrais

Vamos considerar agora uma onda eletromagnética emitida com uma frequência ν_0 na superfície do Sol, ou seja, a uma distância R_\odot do centro de massa da fonte. A propagação ocorrendo na direção radial ($\vec{v} \times \vec{r} = \vec{0}$), vem que

$$\frac{d\nu}{dt} = -\frac{GM\nu}{r^2 c}, \quad (4.71)$$

ou ainda,

$$\frac{d\nu}{\nu} = -\frac{GM}{r^2 c^2} dr, \quad (4.72)$$

tendo em vista que $dr/dt = c$. Integrando essa expressão, a frequência observada na Terra será dada por

$$\nu_{obs} = \nu_0 \exp \left[-\frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R_\odot} - \frac{1}{r_e} \right) \right] \approx \nu_0 - \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{R_\odot} - \frac{1}{r_e} \right) \nu_0 + \mathcal{O} \left((GM\nu_0/rc^2)^2 \right), \quad (4.73)$$

onde r_e é a distância da Terra ao centro do Sol. Essa expressão é idêntica, até $\mathcal{O}(c^{-2})$, à obtida no contexto da RG, Eq.(2.39). Porém, no contexto do presente modelo, a frequência de emissão característica de um certo processo físico, ν_0 , é a mesma em qualquer ponto do espaço, ou seja, a gravitação não afeta os processos de emissão. O deslocamento da onda eletromagnética através do espaço é que faz com que a sua frequência varie, em acordo com a Eq.(4.72). Tal descrição é essencialmente diferente daquela considerada no contexto da RG. Todavia, a previsão do efeito é a mesma até $\mathcal{O}(c^{-2})$ e efeitos de ordem superior não podem ser detectados através das técnicas atuais [14].

Deflexão gravitacional

Considerando uma onda eletromagnética emitida a uma distância muito grande da fonte de gravitação com uma frequência ν_∞ , a frequência observada a uma distância r do centro da fonte será

$$\nu(r) = \nu_\infty \exp\left(\frac{GM}{rc^2}\right), \quad (4.74)$$

em acordo com a Eq.(4.72). Dessa forma, o comportamento do raio vetor de um fóton é descrito por

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \left[\vec{r} - \frac{\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{r})}{c^2} \right] - \frac{d}{dt} \left(\frac{GM}{rc^2} \right) \vec{v}, \quad (4.75)$$

ou ainda,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) \vec{r} - 2\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c^2} \vec{v} \right]. \quad (4.76)$$

Rood mostrou que, com essa equação de movimento, a velocidade final do fóton na direção perpendicular à direção de emissão é dada por

$$v_y = -\frac{4GM}{bc} \left(1 + \frac{\pi GM}{4bc^2}\right), \quad (4.77)$$

onde b é o parâmetro de impacto. O desvio angular da luz pode ser calculado através da razão

$$\delta\varphi = \arcsin\left(-\frac{v_y}{c}\right), \quad (4.78)$$

o que leva a uma expressão idêntica, até $\mathcal{O}(c^{-2})$, à da RG, Eq.(2.49).

Portanto, os três efeitos propostos por Einstein como um teste de sua teoria podem ser obtidos também com a lei de força de Rood, no contexto da Relatividade Especial. Em particular, o valor previsto com o modelo de Rood para a precessão do periélio de Mercúrio é idêntico à previsão da Relatividade Geral quando consideramos a igualdade entre massa gravitacional passiva e massa inercial. Todavia, os valores dos outros efeitos relativísticos no movimento planetário considerados aqui diferem nos dois tratamentos. Isso se deve ao fato de que, de acordo com a solução de Schwarzschild, a aceleração sofrida por uma partícula no campo é

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \left[\left(1 + \frac{2v^2}{c^2} - \frac{2GM}{rc^2} - 3\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})^2}{r^2c^2}\right) \vec{r} - 2\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c^2} \vec{v} \right] + \mathcal{O}(c^{-4}),$$

Eq.(3.70). Por outro lado, de acordo com a lei de força proposta por Rood tal aceleração é dada por

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \vec{r} - 2\frac{(\vec{r} \cdot \vec{v})}{c^2} \vec{v} \right] + \mathcal{O}(c^{-4}),$$

Eq.(4.63). Embora ambas as expressões resultem na mesma precessão de periélio, visto que $-2GM/rc^2 = -GM/ac^2 - v^2/c^2 + \mathcal{O}(c^{-4})$, elas diferem em termos que não contribuem para a precessão, como $(\vec{r} \cdot \vec{v})^2/r^2c^2$.

Oddly enough, of all the forces that we know about, the one that we've studied longest, gravitation, is the one we understand least (S. Weinberg[64]).

Capítulo 5

Conclusões

A determinação do movimento de uma partícula sujeita ao campo gravitacional produzido por uma distribuição esférica de massa é um dos problemas centrais da Gravitação Newtoniana e da Relatividade Geral. O *momentum* de quadrupolo solar, bem como as massas planetárias geram apenas diminutas correções ao campo de simetria esférica do Sol. Desprezando essas perturbações, Newton mostrou que as leis empíricas do movimento planetário descobertas por Kepler poderiam ser explicadas satisfatoriamente por uma lei de força do inverso do quadrado da distância. Descontando a precessão na órbita de Mercúrio causada pelas perturbações planetárias, esperava-se uma confirmação da Primeira Lei de Kepler. Todavia, a precisão nas observações astronômicas do final do século passado indicou que havia uma precessão adicional na órbita desse planeta que não podia ser explicada com os corpos celestes conhecidos. Essa precessão anômala foi satisfatoriamente reproduzida pela Relatividade Geral através da solução de Schwarzschild. Tornou-se célebre o fato de uma partícula sujeita ao campo gravitacional gerado por uma distribuição esférica de massa experimentar uma precessão dos pontos de retorno de sua trajetória, ou seja, uma correção relativística à Primeira Lei de Kepler. Esse era o único efeito relativístico no movimento planetário relatado até 1993, quando Preston e Weber [11] constataram que o período orbital, tempo para o raio vetor varrer um ângulo de 2π , previsto com a Relatividade Geral, era diferente do previsto newtonianamente. Preston e Weber propuseram então que a diferença entre o período orbital observado e o previsto newtonianamente servisse como um novo teste da Relatividade Geral.

Como foi discutido na Seção 3.6, as aproximações utilizadas por Preston e Weber [11] na solução da EDO relativística, Eq.(3.10), levam a erros significativos no cálculo do período orbital, invalidando completamente o resultado obtido pelos autores. Analisando o movimento de uma partícula no campo de Schwarzschild, através de uma generalização da solução de Bergmann e certas considerações a respeito das condições de contorno, obtemos uma previsão mais coerente para o período orbital. Dessa análise, concluímos que a Terceira Lei de Kepler não é válida em geral. Realmente existe uma diferença entre o período orbital previsto newtoniana e relativisticamente, mas tal diferença entre os períodos é diferente daquela prevista por Preston e Weber. Uma integração numérica das equações de movimento confirmou a expressão analítica que obtivemos para o período orbital, contrária à previsão de Preston e Weber. Constatamos ainda, que efetuar uma medida desse efeito é essencialmente diferente de efetuar uma medida de precessão da órbita, pois envolve não somente detecções precisas da posição, como também da velocidade do planeta. Desse modo, não seria possível a medida de tal efeito com as técnicas de observação disponíveis no século passado. O constante aumento na precisão dos relógios atômicos, bem como nas medidas de distâncias astronômicas através da reflexão de sinais de radar, abrem a possibilidade de detectarmos pequenas discrepâncias entre as observações e as previsões newtonianas do movimento planetário, além da precessão da órbita. Mostramos que, relativisticamente, o período da coordenada radial difere da previsão newtoniana. Constatamos também que o semi-eixo maior da órbita, média das distâncias radiais no periélio e no afélio, difere significativamente do newtoniano. Se as técnicas atuais realmente propiciarem medidas que comprovem a previsão da Relatividade Geral para o período orbital, conforme obtida nesse trabalho, os outros efeitos relativísticos na órbita poderão ser detectados.

O uso da energia potencial newtoniana, $V = -GMm_0/r$, no contexto da Relatividade Especial, conduz a uma precessão de somente 1/6 da previsão da Relatividade Geral [29, 31]. Todavia, é da opinião de alguns pesquisadores [13, 15, 55] que essa energia potencial não leva em conta o incremento de massa com a velocidade e que a energia potencial que deveríamos considerar nesse contexto é $V = -GMm_0\gamma/r$. Concluímos que as tentativas de

se explicar a precessão anômala da órbita de Mercúrio com o uso dessa energia potencial não são satisfatórias e que as previsões de Bagge [13] e Phipps Jr. [15] são inconsistentes. Contudo, a afirmação de que a Relatividade Especial não é capaz de explicar a precessão anômala de Mercúrio é errônea, pois mostramos neste trabalho que a lei de força proposta por Rood [14] reproduz corretamente o efeito quando consideramos a equivalência entre massa gravitacional passiva e massa inercial. Os outros dois efeitos propostos por Einstein como um teste da Relatividade Geral também podem ser explicados com essa lei de força. Para os outros efeitos relativísticos no movimento planetário, as previsões que obtivemos com o modelo de Rood são distintas daquelas obtidas no contexto da Relatividade Geral.

Trabalhos Futuros

O efeito de rotação do Sol também conduz a uma precessão das órbitas planetárias que, de acordo com a RG, é desprezível[27]. Seria interessante analisar o efeito dessa perturbação, bem como o efeito do *momentum* de quadrupolo Solar em outras características da órbita. Tendo em vista os efeitos previstos nesse trabalho, faz-se necessária uma nova análise dos dados observacionais de Mercúrio e também uma integração das perturbações planetárias que determine a contribuição “newtoniana” aos efeitos. No que concerne à lei de força de Rood, seria interessante calcularmos o efeito radar com o modelo e considerar tal lei de força no caso da atração entre duas massas quaisquer, a fim de testar o modelo no movimento de sistemas binários como o PSR 1913+16 e o DI Herculis. Outra questão seria a obtenção de uma equação de campo compatível com a lei de força de Rood que determinasse a interação entre uma partícula e uma distribuição qualquer de matéria.

Apêndice A

Coordenadas plano–polares

Em certas circunstâncias, constatamos que torna-se mais simples trabalharmos com coordenadas polares no plano (r, θ) do que com as cartesianas (x, y) . Tais coordenadas se mostram muito úteis na análise de problemas que abrangem movimento planetário. Por exemplo, ao estudarmos certos modelos que envolvem uma modificação na força newtoniana torna-se necessário o cálculo de grandezas vetoriais como $d\vec{r}/dt$ e $d^2\vec{r}/dt^2$. Nesses casos, para uma melhor visualização das quantidades conservadas, *e.g.*, *momentum* angular, é mais conveniente expressarmos \vec{r} em termos de coordenadas plano–polares.

Em coordenadas cartesianas, o raio vetor \vec{r} é expresso em termos dos versores \hat{i} e \hat{j} perpendiculares no plano

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = r(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}), \quad (\text{A.1})$$

onde r é o comprimento do vetor e θ é o ângulo entre o raio vetor e o eixo x (versor \hat{i}). Os versores \hat{i} e \hat{j} definem um sistema de eixos ortogonais fixos no espaço. Definindo um vetor unitário \hat{e}_r na direção do raio vetor, \vec{r} , podemos escrevê-lo na forma compacta

$$\vec{r} = r\hat{e}_r. \quad (\text{A.2})$$

Como o versor \hat{e}_r deve acompanhar o movimento de \vec{r} , ele não é um versor fixo no espaço como \hat{i} e \hat{j} . A dependência temporal de \vec{r} pode ser escrita por

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_r}{d\theta}, \quad (\text{A.3})$$

onde o ponto representa a derivação em relação a t , como usualmente. A derivada temporal do versor radial

$$\frac{d\hat{e}_r}{d\theta} = \frac{d}{d\theta}(\cos\theta\hat{i} + \sin\theta\hat{j}) = -\sin\theta\hat{i} + \cos\theta\hat{j} \quad (\text{A.4})$$

é um versor que será designado de \hat{e}_θ . Tal versor é perpendicular a \hat{e}_r , tal que $\hat{e}_r \times \hat{e}_\theta = \hat{k}$. Deste modo, esses versores formam um sistema de eixos ortogonais, ou seja, formam uma base. Logo, qualquer vetor, além do próprio \vec{r} , escrito na base (\hat{i}, \hat{j}) pode também ser expresso na base $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$, que é uma base dependente do tempo.

A variação temporal de $\vec{r} = r\hat{e}_r$, ou seja, o vetor velocidade da partícula na base $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta)$ é então dado por

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \quad (A.5)$$

e de maneira análoga, a aceleração pode ser escrita como

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})\hat{e}_\theta. \quad (A.6)$$

Tais expressões de velocidade e aceleração escritas em coordenadas polares no plano são muito úteis no estudo de forças centrais pois, nesses casos, o uso desse sistema de coordenadas simplifica consideravelmente o problema.

Apêndice B

O movimento planetário no contexto da Mecânica Newtoniana

De acordo com a Lei da Gravitação Universal de Newton [31], o movimento de uma partícula de massa m_0 sujeita ao campo gravitacional de uma fonte esfericamente simétrica, de massa total M (tal que $M \gg m_0$) é descrito pela energia potencial

$$V_N = -\frac{GM}{r}m_0 . \quad (B.1)$$

Podemos descrever o sistema através da função Lagrangiana

$$\mathcal{L}_N = m_0 \left(\frac{v^2}{2} + \frac{GM}{r} \right) , \quad (B.2)$$

que, não-relativisticamente, é a diferença entre a energia cinética e a energia potencial. Dessa forma, a energia total da partícula é a soma das energias cinética e potencial, ou seja,

$$E_N = m_0 \left(\frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} \right) . \quad (B.3)$$

Em coordenadas polares no plano, a velocidade da partícula pode ser escrita como

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 , \quad (B.4)$$

onde o ponto se refere à derivação em relação a t , como usual. A equação de Euler-Lagrange para a coordenada cíclica θ leva à conservação do *momentum* angular

$$P_\theta = m_0 r^2 \frac{d\theta}{dt} = m_0 \Omega , \quad (B.5)$$

em acordo com a segunda lei de Kepler, “ o raio vetor de um planeta varre áreas iguais em tempos iguais”. A outra equação de movimento pode ser obtida através da equação de

Euler–Lagrange para a coordenada r . Alternativamente, podemos usar a conservação da energia, $dE_N/dt = 0$, a fim de obtermos

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{r}^2}{2} + \frac{r^2 \dot{\theta}^2}{2} - \frac{GM}{r} \right) = 0. \quad (B.6)$$

A Eq.(B.5) e a Eq.(B.6) determinam completamente o movimento da partícula no campo, ou seja, a solução delas nos dá a dependência temporal das coordenadas r e θ . Todavia, para conhecermos a forma da trajetória da partícula, torna-se mais interessante relacionarmos diretamente r e θ . Assim, substituiremos a derivada temporal pela derivada angular na Eq.(B.6) usando a conservação do *momentum* angular por unidade de massa, Ω ,

$$\frac{d}{dt} = \dot{\theta} \frac{d}{d\theta} = \frac{\Omega}{r^2} \frac{d}{d\theta}. \quad (B.7)$$

Fazendo ainda uma transformação de coordenadas $u \equiv 1/r$, obtemos a seguinte equação diferencial da órbita (EDO)

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{\Omega^2}, \quad (B.8)$$

relacionando diretamente as coordenadas. A solução dessa equação diferencial pode ser expressa na forma

$$u(\theta) = \frac{GM}{\Omega^2} [1 + e \cos(\theta - \theta_0)], \quad (B.9)$$

onde o fator e é um parâmetro da órbita denominado excentricidade. Para $0 < e < 1$, a órbita é uma elipse, em acordo com a primeira lei de Kepler, sendo que o ponto de máxima aproximação sempre se localiza em $\theta = \theta_0 + 2n\pi$ e o ponto de máximo afastamento se localiza em $\theta = \theta_0 + (2n + 1)\pi$, com $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. Dessa forma, o semi-eixo maior da órbita é dado por

$$a = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{u(\theta_0 + 2n\pi)} + \frac{1}{u(\theta_0 + (2n + 1)\pi)} \right] = \frac{\Omega^2}{GM(1 - e^2)}. \quad (B.10)$$

Logo, podemos escrever o *momentum* angular em termos dos parâmetros da órbita e da massa da fonte,

$$\Omega = \sqrt{aGM(1 - e^2)}. \quad (B.11)$$

A velocidade da partícula em termos de $u(\theta)$ fica na forma

$$v^2 = \Omega^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right] = \frac{GM}{a(1-e^2)} [1 + 2e \cos(\theta - \theta_0) + e^2] . \quad (B.12)$$

Assim, a energia também pode ser escrita em termos dos parâmetros da órbita,

$$\frac{E_N}{m_0} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a} , \quad (B.13)$$

como ocorre com o *momentum* angular, Eq.(B.11).

O período orbital, tempo necessário para o raio vetor do planeta varrer um ângulo de 2π , pode ser obtido através da integração da Eq.(B.5),

$$\int_0^T dt = \frac{1}{\Omega} \int_{\theta=\alpha}^{2\pi+\alpha} \frac{d\theta}{u^2(\theta)} . \quad (B.14)$$

Efetuada a integração, constatamos que o período orbital é dado por

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{(GM)^{1/2}} , \quad (B.15)$$

em acordo com a terceira lei de Kepler, “o quadrado do período é proporcional ao cubo do semi-eixo maior”.

Podemos obter de uma forma alternativa as equações de movimento, Eqs.(B.5, B.6), através da lei de força do inverso do quadrado,

$$\vec{F}_N = \frac{d}{dt} (m_0 \vec{v}) = -\vec{\nabla} V_N = -\frac{GM}{r^2} \hat{e}_r , \quad (B.15)$$

como feito originalmente por Newton. Essa força explicou completamente as três leis propostas por Kepler, resultado de suas observações do movimento dos planetas. Esse, na realidade, foi o grande êxito da Mecânica e da teoria da Gravitação de Newton.

Apêndice C

Solução aproximada para perturbações à EDO Newtoniana

Como é mostrado no Apêndice B, dentro do contexto da Mecânica Newtoniana, a lei de força de inverso do quadrado resulta na conservação do *momentum* angular, $\Omega = r^2\dot{\theta}$, e o formato da órbita é determinado pela seguinte equação diferencial

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{\Omega^2}, \quad (C.1)$$

onde u é o recíproco da distância da partícula ao centro da fonte (r). A solução dessa equação diferencial orbital (EDO) pode ser expressa na forma

$$u(\theta) = \frac{GM}{\Omega^2} [1 + e \cos(\theta - \theta_0)], \quad (C.2)$$

onde a constante e depende das condições iniciais do movimento, sendo que para órbitas planetárias, e está no intervalo entre 0 e 1. O ângulo θ_0 refere-se à posição angular onde ocorre o periélio, ponto de máxima aproximação (mínimo da função $r(\theta)$, ou seja, máximo de $u(\theta)$). Podemos escolher o nosso sistema de eixos de modo que o eixo x coincida com o raio vetor no planeta nesse ponto e fazer $\theta_0 = 0$. Tratando-se de perturbações à EDO Newtoniana, a solução da EDO poderá resultar em uma precessão do ponto de periélio. Nesse caso adotaremos a convenção de que o periélio inicialmente se encontra em $\theta = 0$, que será nossa posição angular de referência.

No Capítulo 3 vimos que, de acordo com a Relatividade Geral, o movimento planetário é tal que uma grandeza com dimensões de *momentum* angular por unidade de massa (h) é

conservada, sendo que no limite de $c \rightarrow \infty$ ela recai em Ω . A forma da órbita é determinada pela EDO

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2} + \frac{3GM}{c^2}u^2. \quad (C.3)$$

Dentro do contexto de outras teorias relativísticas da Gravitação, somos levados a equações diferenciais na forma

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u(1 - k_1) = \frac{GM}{h^2} \left[1 + k_2u^2 + k_3 \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right], \quad (C.4)$$

onde h é uma constante que depende da teoria em questão, sendo que no limite de $c \rightarrow \infty$ esta se reduz à Ω , como no caso da RG. Os fatores k_1 , k_2u^2 e $k_3(du/d\theta)^2$ são termos da ordem de v^2/c^2 , $\mathcal{O}(c^{-2})$, muito menores do que 1 para os planetas do Sistema Solar. Assim, as EDOs relativísticas, escritas na forma geral da Eq.(C.4), tratam-se essencialmente de perturbações à EDO Newtoniana, Eq.(C.1). Esperamos, portanto, que a solução da Eq.(C.4) seja dada em termos de pequenas perturbações à equação que descreve as órbitas newtonianas, Eq.(C.2). Bergmann em 1960 [29] e Rosalles e Castro-Quilantán em 1984 [33] propuseram uma solução aproximativa para a EDO proveniente da RG (onde $k_1 = k_3 = 0$ e $k_2 = 3h^2/c^2$) que falha somente em termos $\mathcal{O}(c^{-4})$. Embora essa EDO tenha vindo a comprovar a RG no sentido de que sua solução leva ao avanço de periélio compatível com os dados observacionais, sua solução exata só foi encontrada recentemente por Saca em 1995[59]. O valor da precessão, no caso do planeta Mercúrio, obtido através da solução de Saca é basicamente o mesmo que o obtido através da solução aproximada (cerca de 43"/sec), diferindo em apenas 0,03"/sec da previsão de Einstein. A solução de Saca, ou seja, a função $u(\theta)$ solução da Eq.(C.3), possui uma forma complicada, envolvendo integrais elípticas, tornando difícil a comparação com a solução newtoniana, Eq.(C.2). Tendo em vista essa dificuldade, iremos analisar uma solução tentativa para a Eq.(C.4) semelhante à proposta por Bergmann para o caso especial da EDO proveniente da RG. Propomos

$$u(\theta) = \frac{GM}{h^2} (1 + a_0 + e_R \cos \rho\theta + a_2 \cos 2\rho\theta), \quad (C.5)$$

onde

$$\rho \equiv \frac{2\pi}{2\pi + \delta}, \quad (C.6)$$

sendo que a_0 , a_1 e δ são termos da ordem de v^2/c^2 ; e_R é uma constante de integração que no limite de $c \rightarrow \infty$ tende à excentricidade newtoniana e . Com esta dependência angular, $u(\theta)$, a distância de máxima aproximação do planeta ao Sol ocorre quando $\theta = (0, 2\pi + \delta, 4\pi + 2\delta, \dots)$, ou seja, o periélio se desloca um ângulo δ a cada revolução do planeta.

Aplicaremos agora a solução tentativa, Eq.(C.5), na equação diferencial, Eq.(C.4). Além de $u(\theta)$, os termos significativos da equação diferencial são

$$\begin{aligned} \frac{d^2u}{d\theta^2} &= -\frac{GM}{h^2} \left(1 - \frac{\delta}{2\pi}\right) (e_R \cos \rho\theta + 4a_2 \cos 2\rho\theta) + \mathcal{O}(c^{-4}), \\ k_2 u^2 &= k_2 \left(\frac{GM}{h^2}\right)^2 (1 + 2e_R \cos \rho\theta + e_R^2 \cos^2 \rho\theta) + \mathcal{O}(c^{-4}), \\ k_3 \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 &= k_3 \left(\frac{GM}{h^2}\right)^2 e_R^2 \sin^2 \rho\theta + \mathcal{O}(c^{-4}). \end{aligned}$$

Levando em conta as propriedades $\cos^2 \psi = (1 + \cos 2\psi)/2$ e $\sin^2 \psi = (1 - \cos 2\psi)/2$ e aplicando a solução tentativa na Eq.(C.4), obtemos

$$\begin{aligned} & - \left(1 - \frac{\delta}{\pi}\right) (e_R \cos \rho\theta + 4a_2 \cos 2\rho\theta) + (1 + a_0 + e_R \cos \rho\theta + a_2 \cos 2\rho\theta) (1 - k_1) = \\ & = \left[1 + k_2 \left(\frac{GM}{h^2}\right)^2 \left(1 + 2e_R \cos \rho\theta + \frac{e_R^2}{2} (1 + \cos 2\rho\theta)\right) + k_3 \left(\frac{GM}{h^2}\right)^2 \frac{e_R^2}{2} (1 - \cos 2\rho\theta)\right] + \mathcal{O}(c^{-4}). \end{aligned} \quad (C.7)$$

Para a Eq.(C.7) ser válida para qualquer θ , a igualdade deverá ser válida para qualquer fator $\cos n\rho\theta$, $n = 0, 1, 2$. Assim, para $n = 0$, determinamos a_0 ,

$$a_0 = k_1 + \left(\frac{GM}{h^2}\right)^2 \left[k_2 \left(1 + \frac{e_R^2}{2}\right) + k_3 \frac{e_R^2}{2} \right], \quad (C.8)$$

para $n = 1$, obtemos a precessão δ ,

$$\delta = \pi \left[k_1 + 2k_2 \left(\frac{GM}{h^2}\right)^2 \right], \quad (C.9)$$

para $n = 2$, determinamos a_2 ,

$$a_2 = -\frac{e_R^2}{2} \left(\frac{GM}{h^2} \right)^2 (k_2 - k_3) . \quad (C.10)$$

Dessa forma, determinamos as constantes da solução tentativa, Eq.(C.4), em termos das constantes da EDO perturbada, Eq.(C.3). Nesse cálculo foram desprezados termos da ordem de v^4/c^4 . No caso das órbitas planetárias, efeitos de termos v^2/c^2 levam a correções da ordem de 10^{-8} nas previsões newtonianas; efeitos de ordem superior a v^2/c^2 levariam a correções muito menores e portanto, podem ser desprezados.

Em suma, a Eq.(C.4) é uma solução válida até $\mathcal{O}(c^{-2})$ para a EDO perturbativa, Eq.(C.3). A única constante que não fica determinada pela aplicação da solução tentativa na EDO é e_R , a análoga relativística da excentricidade newtoniana e . Na solução de Bergmann [29] para a EDO proveniente da RG é usado $e_R = e$. Entretanto, essa constante deve ser determinada a partir das condições de contorno do movimento. A RG não pode recorrer a outra teoria na determinação de suas constantes. No trabalho de Rosalles e Castro-Quilantán [33] são feitas certas considerações sobre condições iniciais. Todavia, o *momentum* angular utilizado por esses autores na solução da EDO é o definido newtonianamente, o que invalida o cálculo da excentricidade relativística e_R . Na solução exata de Saca [59] existe o mesmo problema que na solução aproximativa de Bergmann. Entretanto, o efeito no movimento planetário que se desejava calcular no contexto da Relatividade Geral, o avanço do periélio, não é afetado significativamente pela determinação de e_R . De acordo com a solução apresentada aqui, no caso da EDO proveniente da RG, o periélio avança um ângulo

$$\delta = \frac{6\pi(GM)^2}{h^2 c^2} \approx \frac{6\pi GM}{a(1-e^2)c^2} + \mathcal{O}(c^{-4}) \quad (C.11)$$

a cada revolução do planeta. A aproximação de Bergmann [29], $e_R \approx e$, é na realidade excelente para fins do cálculo da precessão do periélio. Todavia, na previsão de outros efeitos relativísticos na órbita, como por exemplo o período orbital, é necessário tomarmos um cuidado maior com as aproximações feitas no cálculo da constante e_R , levando em conta as condições iniciais do problema.

Apêndice D

Solução numérica das equações de movimento cartesianas

Listamos aqui o programa numérico utilizado na solução das equações de movimento cartesianas, obtidas com os tratamentos relativísticos do movimento planetário. A integração é feita no tempo através do método de Runge-Kutta-Nyström de quarta ordem [37] e a linguagem de programação usada foi o C.

Um dos principais efeitos que estamos interessados em calcular é o avanço do periélio. O ponto de periélio é o ponto de mínimo da função $r(t)$, ou seja, no periélio $\dot{r} = 0$. Em termos de coordenadas cartesianas, o ponto de periélio é tal que

$$\dot{r} = \frac{(x\dot{x} + y\dot{y})}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0. \quad (D.1)$$

A integração numérica não nos dá esse ponto diretamente, pois dificilmente a posição de periélio se dará em um tempo igual a um número múltiplo do passo de integração utilizado Δt . Podemos determinar tal ponto, em primeira ordem, considerando uma interpolação linear

$$y_P = \frac{y(t_a)\dot{r}(t_b) - y(t_b)\dot{r}(t_a)}{\dot{r}(t_b) - \dot{r}(t_a)}, \quad (D.2)$$

onde t_a e t_b são, respectivamente, o valor de t imediatamente antes e depois de \dot{r} mudar de sinal, como mostrado na Fig.(3) a seguir. Executando o mesmo procedimento para a determinação de x_P , podemos determinar numericamente a nova posição do periélio, \vec{r}_P . O periélio se encontra inicialmente em $y = 0$ (pela convenção adotada). Logo, se após uma revolução este se encontrar em $y = y_P$, a precessão é dada por

$$\delta = \arcsin\left(\frac{y_P}{r_P}\right) \approx \frac{y_P}{r_P}, \quad (D.3)$$

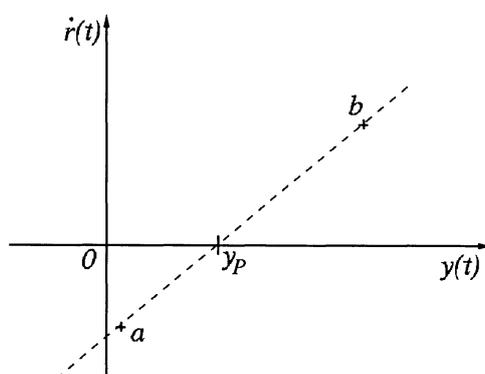


Fig.(3). Interpolação linear na determinação numérica do ponto de periélio.

onde $r_P = \sqrt{x_P^2 + y_P^2}$ é a distância da partícula ao centro da fonte no ponto de periélio, denotado pelo índice P .

Para o cálculo numérico do período orbital, tempo para o planeta varrer um ângulo de 2π partindo da posição de periélio, devemos determinar a coordenada t no ponto onde $y = 0$. Por considerações similares às adotadas no cálculo numérico da precessão do ponto de periélio, temos que o período orbital, T , é tal que $y(T) = 0$, ou seja,

$$T = \frac{t_b y(t_a) - t_a y(t_b)}{y(t_a) - y(t_b)}, \quad (D.4)$$

onde t_a e t_b denotam, respectivamente, o valor de t imediatamente antes e após a coordenada y mudar de sinal. Para os outros efeitos, o cálculo é similar.

LISTAGEM DO PROGRAMA NUMÉRICO

```
#include<stdlib.h>
#include<stdio.h>
#include<math.h>
/* Integracao numerica das equacoes de movimento cartesianas advindas da RG
e de outras teorias relativisticas da gravitacao (problema de 1corpo),
11/11/97 */
FILE *arq;
double k1,k2,k3,k4,K0,dt,K,G,M,c,a,e;
double m1,m2, TN, z, k, ar, av, h2, CO,Cr,Cv,Cvv;
double x, y, xp, yp,dt, xant, xmedio, ymedio, yant, rpant, rp;
double beta, delta, Da, R,r;
long double t, tf;
void main(void)
{
arq=fopen("all.res","a");
/* CONSTANTES (Anderson, 1997) */
G=6.67260e-11;
c=2.99792458e8;
M=1.989e30;
```

```

a=57.91e9;
TN=2*M_PI*sqrt(a*a*a/G/M);
e=0.20561421;
R=6.95980e8; /* raio do Sol */
/* Passo de Integracao*/
dt=1;
tf= TN-1000*dt;
/* Controle Newtoniano */
C0=0; Cr=0; Cv=0; Cvv=0;
/* Tratamento de Sommerfeld */
C0=G*M/2/a/c/c;
Cr=-G*M/c/c;
Cv=-1/c/c;
Cvv=0;
/* Constantes da Equacao Diferencial (RG)*/
C0=-2*G*M/(a*c*c);
Cr=2*G*M/(c*c);
Cv=-2/(c*c);
Cvv=-3/(c*c);
/* Lagrangiana de Phipps Jr. */
C0=0;
Cr=-G*M/c/c;
Cv=-2/c/c;
Cvv=0;
/* Energia de Bagge */
C0=G*M/a/c/c;
Cr=-G*M/c/c;
Cv=0;
Cvv=0;
/* Lei de forca de Bagge */
C0=0;
Cr=0;
Cv=-1/c/c;
Cvv=0;
/* Modelo de Rood mG=mI*/
C0=-G*M/a/c/c;
Cr=2*G*M/c/c;
Cv=-2/c/c;
Cvv=0;
/* Modelo de Rood mG=m0 */
C0=-G*M/2/a/c/c;
Cr=G*M/c/c;
Cv=-2/c/c;
Cvv=0;
/* Condicoes Iniciais do Movimento */
t=0;
x=a*(1-e);
xp=0;
y=0;
yp=sqrt(a*G*M*(1-e*e))/(a*(1-e));
k=G*M;
do
{
  r=sqrt(x*x+y*y); /* RG no referencial proprio */
  C0=-G*M/(3*a*c*c)*(7+3*log(r/R));
  Cr=G*M/(3*c*c)*(19+12*log(r/R));
  Cv=1/(3*c*c)*(-4+6*log(r/R));
  Cvv=-3*log(r/R)/(c*c);
  xant=x;
  ymedio= y+yp*dt/2;
  k1=0.5*dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*x
  +Cv*xp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*x)
  /pow((x*x+ymedio*ymedio), 1.5));
  beta=dt*(xp+k1/2)/2;

```

```

k2=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*(x+beta)
+Cv*xp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*x)
/pow(((x+beta)*(x+beta)+ymedio*ymedio), 1.5))/2;
k3=k2;
delta=dt*(xp+k2);
k4=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*(x+delta)
+Cv*xp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*x)
/pow(((x+delta)*(x+delta)+ymedio*ymedio), 1.5))/2;
K0=(k1+k2+k3)/3;
K=(k1+2*k2+2*k3+k4)/3;
x=xant+dt*(xp+K0);
xp=xp+K;
xmedio=(x+xant)/2;
k1=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*y
+Cv*yp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*y)
/pow((xmedio*xmedio+y*y), 1.5))/2;
beta=dt*(yp+k1/2)/2;
k2=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*(y+beta)
+Cv*yp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*y)
/pow(((xant+x)*(xant+x)/4+(y+beta)*(y+beta)), 1.5))/2;
k3=k2;
delta=dt*(yp+k2);
k4=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*(y+delta)
+Cv*yp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*y)
/pow((xmedio*xmedio+(y+delta)*(y+delta)), 1.5))/2;
K0=(k1+k2+k3)/3;
K=(k1+2*k2+2*k3+k4)/3;
y=y + dt*(yp+K0);
yp=yp+K;
t=t + dt;
}
while(t<tf/2);
rp=(x*xp+y*yp)/sqrt(x*x+y*y);
do
{
r=sqrt(x*x+y*y); /* RG no referencial proprio */
C0=-G*M/(3*a*c*c)*(7+3*log(r/R));Cr=G*M/(3*c*c)*(19+12*log(r/R));
Cv=1/(3*c*c)*(-4+6*log(r/R));Cvv=-3*log(r/R)/(c*c);
rpant=rp;
xant=x;
yant=y;
ymedio= y+yp*dt/2;
k1=0.5*dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*x
+Cv*xp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*x)
/pow((x*x+ymedio*ymedio), 1.5));
beta=dt*(xp+k1/2)/2;
k2=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*(x+beta)
+Cv*xp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*x)
/pow(((x+beta)*(x+beta)+ymedio*ymedio), 1.5))/2;
k3=k2;
delta=dt*(xp+k2);
k4=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*(x+delta)
+Cv*xp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*x)
/pow(((x+delta)*(x+delta)+ymedio*ymedio), 1.5))/2;
K0=(k1+k2+k3)/3;
K=(k1+2*k2+2*k3+k4)/3;
x=xant+dt*(xp+K0);
xp=xp+K;
xmedio=(x+xant)/2;
k1=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*y
+Cv*yp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*y)

```

```

/pow((xmedio*xmedio+y*y), 1.5))/2;
beta=dt*(yp+k1/2)/2;
k2=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*(y+beta)
+Cv*yp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*y)
/pow(((xant+x)*(xant+x)/4+(y+beta)*(y+beta)), 1.5))/2;
k3=k2;
delta=dt*(yp+k2);
k4=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*(y+delta)
+Cv*yp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*y)
/pow((xmedio*xmedio+(y+delta)*(y+delta)), 1.5))/2;
K0=(k1+k2+k3)/3;
K=(k1+2*k2+2*k3+k4)/3;
y=y + dt*(yp+K0);
yp=yp+K;
t=t + dt;
rp=(x*xp+y*yp)/sqrt(x*x+y*y);
}
while(rpant*rp>0);
/* Calculo de Delta a */
Da=((sqrt(xant*xant+yant*yant)*rp -sqrt(x*x+y*y)*rpant)/
(rp-rpant) - a*(1+e))/2;
do
{
r=sqrt(x*x+y*y); /* RG no referencial proprio */
C0=-G*M/(3*a*c*c)*(7+3*log(r/R));Cr=G*M/(3*c*c)*(19+12*log(r/R));
Cv=1/(3*c*c)*(-4+6*log(r/R));Cvv=-3*log(r/R)/(c*c);
xant=x;
ymedio= y+yp*dt/2;
k1=0.5*dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*x
+Cv*xp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*x)
/pow((x*x+ymedio*ymedio), 1.5));
beta=dt*(xp+k1/2)/2;
k2=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*(x+beta)
+Cv*xp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*x)
/pow(((x+beta)*(x+beta)+ymedio*ymedio), 1.5))/2;
k3=k2;
delta=dt*(xp+k2);
k4=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*(x+delta)
+Cv*xp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*x)
/pow(((x+delta)*(x+delta)+ymedio*ymedio), 1.5))/2;
K0=(k1+k2+k3)/3;
K=(k1+2*k2+2*k3+k4)/3;
x=xant+dt*(xp+K0);
xp=xp+K;
xmedio=(x+xant)/2;
k1=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*y
+Cv*yp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*y)
/pow((xmedio*xmedio+y*y), 1.5))/2;
beta=dt*(yp+k1/2)/2;
k2=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*(y+beta)
+Cv*yp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*y)
/pow(((xant+x)*(xant+x)/4+(y+beta)*(y+beta)), 1.5))/2;
k3=k2;
delta=dt*(yp+k2);
k4=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*(y+delta)
+Cv*yp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*y)
/pow((xmedio*xmedio+(y+delta)*(y+delta)), 1.5))/2;
K0=(k1+k2+k3)/3;
K=(k1+2*k2+2*k3+k4)/3;
y=y + dt*(yp+K0);

```

```

yp=yp+K;
t=t + dt;
}
while(t<tf);
rp=(x*xp+y*yp)/sqrt(x*x+y*y);
do
{
r=sqrt(x*x+y*y); /* RG no referencial proprio */
C0=-G*M/(3*a*c*c)*(7+3*log(r/R));Cr=G*M/(3*c*c)*(19+12*log(r/R));
Cv=1/(3*c*c)*(-4+6*log(r/R));Cvv=-3*log(r/R)/(c*c);
rpant=rp;
xant=x;
yant=y;
ymedio= y+yp*dt/2;
k1=0.5*dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*x
+Cv*xp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*x)
/pow((x*x+ymedio*ymedio), 1.5));
beta=dt*(xp+k1/2)/2;
k2=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*(x+beta)
+Cv*xp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*x)
/pow(((x+beta)*(x+beta)+ymedio*ymedio), 1.5))/2;
k3=k2;
delta=dt*(xp+k2);
k4=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*(x+delta)
+Cv*xp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*x)
/pow(((x+delta)*(x+delta)+ymedio*ymedio), 1.5))/2;
K0=(k1+k2+k3)/3;
K=(k1+2*k2+2*k3+k4)/3;
x=xant+dt*(xp+K0);
xp=xp+K;
xmedio=(x+xant)/2;
k1=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*y
+Cv*yp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*y)
/pow((xmedio*xmedio+y*y), 1.5))/2;
beta=dt*(yp+k1/2)/2;
k2=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*(y+beta)
+Cv*yp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*y)
/pow(((xant+x)*(xant+x)/4+(y+beta)*(y+beta)), 1.5))/2;
k3=k2;
delta=dt*(yp+k2);
k4=dt*(-k*((1+C0+Cr/sqrt(x*x+y*y))*(y+delta)
+Cv*yp*(x*xp+y*yp)+Cvv*(x*xp+y*yp)*(x*xp+y*yp)/(x*x+y*y)*y)
/pow((xmedio*xmedio+(y+delta)*(y+delta)), 1.5))/2;
K0=(k1+k2+k3)/3;
K=(k1+2*k2+2*k3+k4)/3;
y=y + dt*(yp+K0);
yp=yp+K;
t=t + dt;
rp=(x*xp+y*yp)/sqrt(x*x+y*y);
}
while(rpant*rp>0);
/* OUTPUT */
fprintf(arq,"\n Passo Perihelio Deltatheta Delta a Delta T Delta Tr" );
fprintf(arq,"\n %4lg %.6lg %.6Lg %.6lg %.6Lg %.6Lg",
dt, ((yant*rp-y*rpant)/(rp-rpant))/sqrt(x*x+y*y)*85638728.32,
-((t*yant-(t-dt)*y)/(yant-y)-TN)*sqrt(G*M*(1+e)/a/a/a/(1-e)/(1-e)/
(1-e))*85638728.32,
Da,
(t*yant-(t-dt)*y)/(yant-y)-TN,
(t*rpant-(t-dt)*rp)/(rpant-rp)-TN);
}

```

Apêndice E

Estimativa de efeitos não-relativísticos na órbita de Mercúrio

Neste apêndice, fazemos uma estimativa do efeito das perturbações planetárias na órbita de Mercúrio no que se refere à precessão do periélio, ao período da órbita, bem como aos outros efeitos discutidos inicialmente na Seção 3.7. Não fomos capazes de fazer uma integração numérica das equações de movimento do problema newtoniano de N corpos. Como alternativa, usamos o modelo de Price e Rush [49] como uma primeira aproximação. A proposta de Price e Rush é de que um anel massivo é uma maneira aproximativa razoável de representarmos a média temporal do efeito da perturbação de um dado planeta. Em outras palavras, calcularemos o efeito de cada planeta i substituindo esse por um anel circular de densidade linear

$$\lambda_i = \frac{M_i}{2\pi R_i}, \quad (E.1)$$

onde M_i é a massa do planeta e R_i é o raio do anel (distância média do planeta ao centro do Sol).

Primeiramente, calcularemos o campo gravitacional de um anel circular exterior à órbita de Mercúrio, centrado no Sol e situado no plano da órbita do planeta, como mostra a figura a seguir. Nessa figura, r é a distância de Mercúrio ao centro do Sol e ℓ é a distância do elemento de massa dM_i ao planeta. Existe uma simetria em relação ao eixo definido por \vec{r} . A força na direção perpendicular a \vec{r} , provocada por um elemento de massa dM_i situado a um ângulo α , é anulada pela força provocada por um elemento situado em $-\alpha$. Portanto, a força total provocada pelo anel atua somente na direção do raio vetor \vec{r} , ou seja, a força é

radial. A força radial provocada por um elemento de massa $dM_i = \lambda_i d\alpha$ é, de acordo com a Gravitação Newtoniana,

$$d\vec{F}_i = \frac{G(dM_i)m_0}{\ell^3} \vec{\ell} \cdot \hat{e}_r = \frac{GM_i m_0}{2\pi \ell^2} \hat{e}_r \cos \beta \, d\alpha, \quad (E.2)$$

onde m_0 é a massa de Mercúrio.

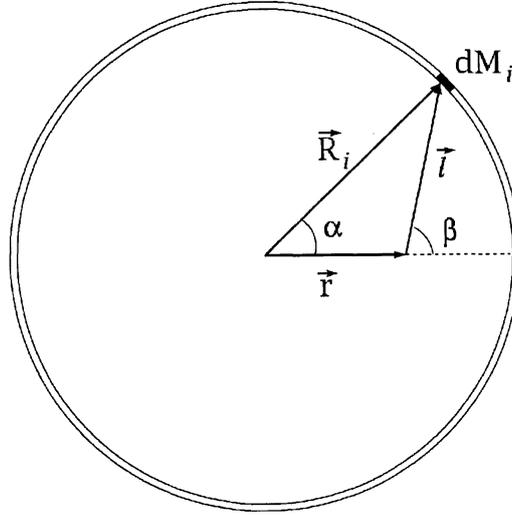


Fig.(4) Visualização dos elementos utilizados no cálculo da força provocada por um anel.

Da figura, é fácil ver que

$$\ell = |\vec{\ell}| = |\vec{R}_i - \vec{r}| = \sqrt{R_i^2 + r^2 - 2rR_i \cos \alpha}, \quad (E.3)$$

e ainda

$$\cos \beta = \frac{R_i \cos \alpha - r}{\ell}. \quad (E.4)$$

Deste modo somos capazes de obter a força total provocada pelo anel i

$$\vec{F}_i = \frac{GM_i m_0}{2\pi} \hat{e}_r \int_0^{2\pi} \frac{R_i \cos \alpha - r}{(R_i^2 + r^2 - 2rR_i \cos \alpha)^{\frac{3}{2}}} d\alpha. \quad (E.5)$$

Não conhecemos uma solução exata para essa integral. Price e Rush consideram a aproximação

$$\vec{F}_i = \frac{GM_i m_0}{2R_i} \frac{\vec{r}}{(R_i^2 - r^2)} \quad [\text{Price\&Rush}]. \quad (E.6)$$

Todavia, uma integração numérica considerando a perturbação de Vênus, usando raio médio \bar{r} da órbita de Mercúrio, mostra que o uso dessa expressão introduz um erro de aproximadamente 3.9%.

A órbita de Mercúrio é interior às órbitas dos outros planetas. Logo, sempre é válida a relação $r < R_i$. Nesse caso, podemos escrever a Eq.(E.5) na forma

$$\frac{\vec{F}_i}{m_0} = \frac{GM_i}{2\pi R_i^2} \hat{e}_r \int_0^{2\pi} \frac{\cos \alpha - r/R_i}{[1 + r^2/R_i^2 - 2(r/R_i) \cos \alpha]^{\frac{3}{2}}} d\alpha, \quad (E.7)$$

considerando então uma expansão de Taylor em (r/R_i) ,

$$\frac{\vec{F}_i}{m_0} = \frac{GM_i}{R_i^2} \hat{e}_r \left[\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{R_i} \right)^n \right], \quad (E.8)$$

onde

$$C_1 = \frac{1}{2}, \quad C_3 = \frac{9}{16}, \quad C_5 = \frac{75}{128}, \quad \dots \quad (E.9)$$

são os coeficientes da expansão. Considerando o anel que representa Vênus, essa expressão leva a um erro de apenas 0.3% quando desprezamos perturbações de ordem superior a C_{11} .

A aceleração total em Mercúrio, \vec{F}/m_0 , será a aceleração provocada pelo Sol, $-GM_{\odot}\vec{r}/r^3$, acrescida das perturbações planetárias, ou seja, da soma de cada anel individual de massa M_i e raio R_i ,

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM_{\odot}}{r^3} \vec{r} \left[1 - \frac{1}{M_{\odot}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} K_n r^{n+2} \right], \quad (E.10a)$$

onde

$$K_n = C_n \sum_{i=2,3}^9 \frac{M_i}{R_i^{n+2}}. \quad (E.10b)$$

Utilizando os dados planetários de Price e Rush, $K_1 = 4.96 \times 10^{-9}$, $K_3 = 2.34 \times 10^{-31}$, $K_5 = 1.86 \times 10^{-53}$, $K_7 = 1.53 \times 10^{-75}$, $K_9 = 1.28 \times 10^{-97}$, $K_{11} = 1.09 \times 10^{-118}$, $K_{13} = 9.27 \times 10^{-142}$, $K_{15} = 7.92 \times 10^{-164}$, $K_{17} = 6.77 \times 10^{-186}$, $K_{19} = -5.79 \times 10^{-208}$, [$kg \times m^{-n+1}$].

Em coordenadas cartesianas, a Eq.(E.10) representa o sistema de duas equações diferenciais acopladas

$$\dot{x} = -\frac{GM_{\odot}}{r^3} x \left[1 - \frac{1}{M_{\odot}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} K_n r^{n+2} \right], \quad (E.11a)$$

$$\dot{y} = -\frac{GM_{\odot}}{r^3}y \left[1 - \frac{1}{M_{\odot}} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} K_n r^{n+2} \right]. \quad (E.11b)$$

Conseguimos resolver numericamente esse sistema pelo método de Runge-Kutta-Nyström [37] e abaixo listamos o resultado da integração numérica para uma revolução de Mercúrio, considerando termos até a ordem $n = 19$ na série perturbativa.

Tab.(12) Movimento de Mercúrio (após uma revolução) através da integração numérica da Eq.(E.11), considerando até K_{19} .

Passo (s)	δ (rad)	ΔT (s)	ΔT_r (s)	Δa (m)
100	6.478900×10^{-6}	15.3982	20.4519	50124.6
10	6.484900×10^{-6}	15.4469	20.5053	50392.0
1	6.484961×10^{-6}	15.4474	20.5058	50394.7

Como um teste da importância de cada termo perturbativo, mostramos abaixo um gráfico do avanço do periélio δ após uma revolução (passo de integração igual a 1 segundo), considerando termos até a n -ésima ordem na Eq.(E.11).

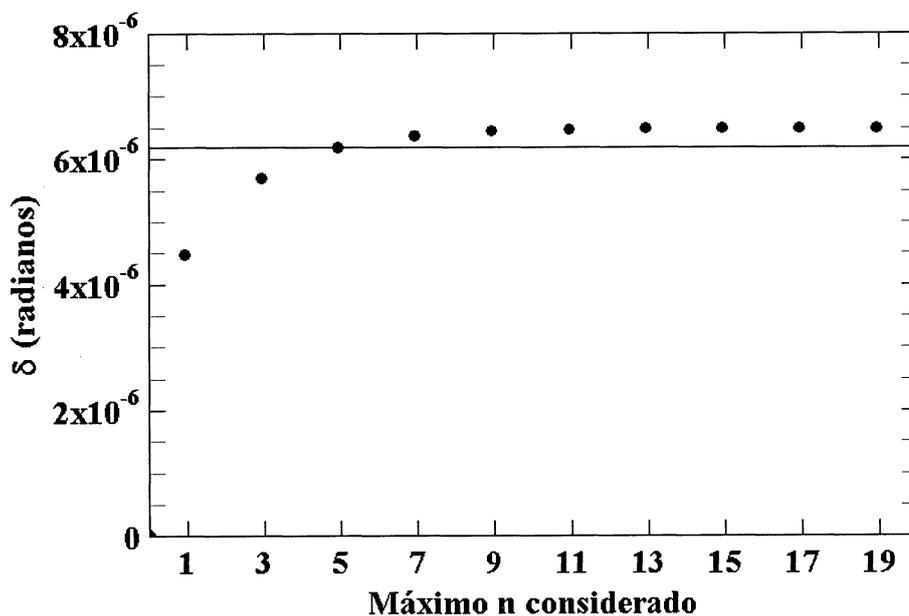


Fig.(5) Gráfico demonstrando a convergência da série perturbativa, Eq.(E.11), no cálculo numérico do avanço do periélio δ . A reta em aproximadamente 6.2×10^{-6} representa o valor atualmente aceito[63].

Com esse modelo obtivemos um avanço de 6.495×10^{-6} radianos por revolução, o que equivale a $557''\text{arc}/\text{sec}$. Esse resultado é cerca de 4.6% maior do que o valor obtido por Price e Rush

[49], e atualmente aceito, cerca de 532''arc/sec. Isso se deve a dois fatores, basicamente. A equação de força utilizada pelos autores, Eq.(E.6), conduz a uma força 3.9% menor no caso da interação entre Vênus e Mercúrio, quando comparada com a integração numérica da Eq.(E.5). No cálculo da precessão, os autores usam uma aproximação de “órbita circular perturbada” semelhante ao método usado por Bowler [60] no âmbito da Relatividade Geral. Todavia, a órbita de Mercúrio é extremamente excêntrica, a distância do planeta ao Sol no afélio é cerca de 40% maior do que a distância no periélio e, portanto, a excentricidade da órbita não pode ser desprezada.

Considerando a aproximação da força de um anel de Price e Rush, Eq.(E.6), o vetor aceleração de Mercúrio é dado por

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\frac{GM_{\odot}}{r^3}\vec{r} \left[1 - \frac{1}{2} \sum_{i=2}^9 \left(\frac{M_i}{M_{\odot}} \right) \frac{1}{R_i(R_i^2 + r^2)} \right]. \quad (E.12)$$

Abaixo listamos os resultados da integração numérica da Eq.(E.12), considerando separadamente a perturbação de cada planeta, comparando com os resultados para a precessão descritos na literatura.

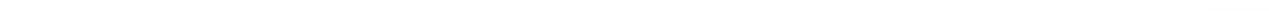
Tab.(13) Efeitos não-relativísticos na órbita de Mercúrio, calculados através de integração numérica da Eq.(E.12). Os valores da precessão δ estão em ''/sec.

Perturbação	δ_B	δ_S	δ_C	δ	ΔT (s)	ΔT_r (s)	Δa (m)
Vênus	275.9	277.8	277.86	274.12	7.13896	9.63574	22738.3
Terra	90.1	90.0	90.04	91.64	2.63671	3.47136	8707.7
Marte	2.5	2.5	2.54	2.35	0.07121	0.09260	239.0
Júpiter	152.9	153.6	153.58	156.82	4.91282	6.34115	16648.1
Saturno	7.2	7.3	7.30	7.57	0.23755	0.30647	80.5
Urano	—	—	0.14	0.14	0.00444	0.00573	15.0
Netuno	—	—	0.01	0.04	0.00136	0.00176	4.6
Soma	528.6	531.2	531.47	532.68	15.00305	19.85481	48433.2
Erro	—	—	—	7×10^{-5}	4×10^{-6}	4×10^{-6}	3×10^{-2}

Nessa tabela, δ_B refere-se ao avanço de periélio calculado por Bretagnon [62], δ_S ao calculado por Soffel [63]; δ_C ao calculado por Clemence [2]; e δ ao calculado a partir da integração numérica da Eq.(E.12). O erro é estimado integrando o sistema sem nenhuma perturbação.

O valor obtido para δ a partir da integração numérica da Eq.(E.12) é muito próximo do valor obtido por Price e Rush [49], 531.9"/sec, diferindo apenas 0.2% do valor atualmente aceito [63]. Podemos considerar, então, que a média temporal da perturbação de um dado planeta pode ser representada em boa aproximação pela Eq.(E.6), apesar dessa não reproduzir exatamente (desvio de 4%) o campo gravitacional produzido por um anel.

É propício ressaltar que apresentamos aqui apenas uma estimativa dos efeitos ΔT , ΔT_r e Δa . Ainda faz-se necessário uma integração direta das equações de movimento do problema de N corpos para uma correta comparação com os dados observacionais.



Referências Bibliográficas

- [1] R. Penrose, **Newton, quantum theory and reality** em *Three hundred years of Gravitation* (ed. by S. Hawking and W. Israel) (Cambridge U.P., N.Y, 1987).
- [2] G.M. Clemence, **The relativity effect in planetary motions**, *Review of Modern Physics* **19** (4), 361 (1947).
- [3] C. Wilson, **The dynamics of the Solar System**, em *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of Mathematical Sciences* (London, 1994), 1044, citado no ‘Internet website’ <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/HistTopics/Orbits.html>.
- [4] A. Einstein, *Sitzber. kgl. preuss. Akad. Wiss.* **831** (1915) como citado por Schiff [6].
- [5] B. Russel, **ABC da Relatividade** 5a ed., (Zahar ed., R.J., 1985).
- [6] L.I. Schiff, **On experimental tests of General Relativity**, *American Journal of Physics*, **28**, 340 (1960).
- [7] H.C. Ohanian, **What is the principle of equivalence?**, *American Journal of Physics* **45** (10), 903 (1977).
- [8] C.M. Will, **Experimental gravitation from Newton to Einstein** em *Three hundred years of Gravitation* (ed. by S. Hawking and W. Israel) (Cambridge U.P., N.Y, 1987).
- [9] A. Wolszczan, **Binary pulsars and relativistic gravitation**, *Classical and Quantum Gravity* **A11**, 227 (1994).

- [10] R. Naye, **Was Einstein wrong? The mystery of DI Herculis**, *Astronomy* (November 1995), 59.
- [11] H.G. Preston e J. Weber, **The period of orbit as a test of General Relativity**, *Physics Essays* **6** (3), 435 (1993).
- [12] R.L. Cavasso Filho e J. Lucinda, **On the meaning of the gravitational relativistic effects**, *Il Nuovo Cimento* **113B** (1), 25 (1998).
- [13] E.R. Bagge, **Relativistic effects in the solar systems. Part I - Relativistic pathway modification of the planets**, *Atomkernenergie-Kerntechnik* Bd.39 Lfg.4, 223 (1981).
- [14] H.J. Rood, **Gravitation in the weak field limit**, *The Astrophysical Journal* **284**, 407 (1984).
- [15] T.E. Phipps Jr., **Mercury's precession according to Special Relativity**, *American Journal of Physics* **54**, 245 (1986).
- [16] J. Lucinda, **Field Boost Transformations and Maxwell's Equations**, *Physics Essays* **10**, 256 (1997).
- [17] A.L. Harvey, **Brief review of Lorentz-covariant scalar theories of gravitation**, *American Journal of Physics* **33** (3), 449 (1965).
- [18] J.W. Zink, **Energy, mass and gravitation**, *Physics Essays* **6** (3), 451 (1993).
- [19] R. Engelke e C. Chandler, **Planetary perihelion precession with velocity-dependent gravitational mass**, *American Journal of Physics* **38** (1), 90 (1970).
- [20] M.W.P. Strandberg, **Special relativity completed, the source of some 2s in the magnitude of physical phenomena**, *American Journal of Physics* **54** (4), 321 (1986).
- [21] E.G. Harris, **Class of Lorentz-invariant theories of gravitation**, *American Journal of Physics* **49** (11), 1051 (1981).

- [22] T. Biswas, **Special relativistic Newtonian gravity**, *Foundations of Physics* **24** (4), 512 (1994).
- [23] Z. Junhao e C. Xiang, **Special relativistic gravitational theory**, *International Journal of Theoretical Physics* **29** (6), 579 (1990).
- [24] T. Yoshida, **Rotating Laplace–Runge–Lenz vector leading to two relativistic Kepler equations**, *Physical Review* **A38** (1), 19 (1988).
- [25] W. Petry, **Post–Newtonian approximation of a nonstationary spherically symmetric star in a flat space–time theory of gravitation**, *Astrophysics and Space Science* **211**, 71 (1994).
- [26] A. Einstein, **How I created the Theory of Relativity**, [traduzido para o inglês por Y.A. Ono] *Physics Today* (Aug. 1992), 45.
- [27] S. Weinberg, **Gravitation and Cosmology – principles and applications of the General Theory of Relativity**, (J. Wiley, N.Y., 1972).
- [28] L. Landau e E. Lifchitz, **The classical theory of fields**, (Pergamon P., N.Y., 1959)
- [29] P.G. Bergmann, **Introduction to the Theory of Relativity**, (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1960).
- [30] R. Adler, M. Bazin e M. Schiffer, **Introduction to the Theory of General Relativity**, (Mc Graw-Hill, S.P., 1965).
- [31] H. Goldstein, **Classical Mechanics**, (Addison-Wesley, Reading, 1980).
- [32] D. S. Koltun, **Gravitational deflection of fast particles and of light**, *American Journal of Physics* **50** (6), 527 (1992).
- [33] M.A. Rosales and J.L. Castro–Quilantán, **The precession of the Mercury’s perihelion via perturbation theory** *Revista Mexicana de Fisica* **20** (2), p.341 (1984).

- [34] W.M. Itano, N. Ramsey, **Accurate measurement of time**, *Scientific American* (July 1993), 46.
- [35] J. Weber, **General Relativity and gravitational waves**, (Wiley, NY, 1961) como citado em [11].
- [36] N. Gauthier, **Periastron precession in General Relativity**, *American Journal of Physics* **35** (1), 85 (1987).
- [37] E. Kreyszig, **Advanced engineering mathematics**, (John Wiley, N.Y., 1962), p.161.
- [38] H. Biederbeck, **Modifizierte Gravitationstheorie mit regulären lösungen**, *Atomkernenergie-Kerntechnik* Bd.34 Lfg.1, 37 (1979).
- [39] K.K. Nandi, **Some aspects of minimally relativistic Newtonian Gravity**, *Zeitschrift für Naturforschung* **46A** (12), 1026 (1989).
- [40] T.M. Brown, J. Christensen-Dalsgaard, W.A. Dziembowski, P. Goode, D.O. Gough e C.A. Morrow, **Inferring the Sun's internal angular velocity from observed p-mod splittings**, *The Astrophysical Journal* **343**, 536 (1989).
- [41] E.V. Pitjeva, **Experimental testing of relativistic effects, variability of the gravitational constant and topography of Mercury surface from radar observations 1964–1989**, *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy* **55** (4), 313 (1993).
- [42] T.J. Lyndon e S. Sofia, **A measurement of the shape of the solar disk – the solar quadrupole moment, the solar octopole moment, and the advance of the perihelion of the planet Mercury**, *Physical Review Letters* **76**, 177 (1996).
- [43] O.D. Jefimenko, **Gravitational field of a point mass moving with uniform linear or circular velocity**, *Galilean Eletrodynamics* (March/April 1994), 25.
- [44] R. Nedvěď, **Mercury's anomaly**, *Physics Essays* **3** (1),4 (1990).

- [45] R. Nedvěd, **Mercury's anomaly and the stability of Newtonian bisystems**, *Physics Essays* **7** (2), 374 (1994).
- [46] Y. Huang, **Relativistic Kinematics III – A relativistic modification for Newton's gravitational force law**, *Physics Essays* **4** (4), 532 (1991).
- [47] T.I. Maindl e R. Dvorak, **On the dynamics of the relativistic restricted three-body problem**, *Astronomy and Astrophysics* **250**, 335 (1994).
- [48] I.I. Shapiro, G.H. Pettengill, M.E. Ash, R.P. Ingalls, D.B. Campbell e R.B. Dyce, **Mercury's perihelion advance: determination by radar**, *Physical Review Letters* **28** (24), 1574 (1972).
- [49] M.P. Price e W.F. Rush, **Nonrelativistic contribution to Mercury's perihelion precession**, *American Journal of Physics* **47** (6), 531 (1979).
- [50] J.D. Anderson, S.G. Turishev, S.W. Asmar, M.K. Bird, A.S. Konopliv, T.P. Krisher, E.L. Lau, G. Schubert e W.L. Sjogren, **Radio science investigation on a Mercury orbiter mission**, *Planetary and Space Science* **45** (1), 21 (1997).
- [51] S.G. Turishev, J.D. Anderson e R.W. Hellings, **Relativistic gravity theory and related tests with a Mercury orbiter mission**, Preprint: gr-qc/9606028 (13 de junho, 1996).
- [52] A.P. French, **Special Relativity**, (Norton, N.Y., 1968).
- [53] A. Sommerfeld, **Atombau und Spektrallinien** (Braunschweig: Vieweg& Sohn, 1919), como citado por Bagge [13].
- [54] S. Chandrasekhar, **On the "derivation" of Einstein's field equations**, *American Journal of Physics* **40** (2), 224 (1972).
- [55] L. Tsai, **The relation between gravitational mass, inertial mass and velocity**, *American Journal of Physics* **54** (4), 340 (1986).

- [56] P.C. Peters, **Comment on “Mercury’s precession according to Special Relativity”**, *American Journal of Physics* **55**, 757 (1987).
- [57] T.E. Phipps Jr., **Response to “Comment on ‘Mercury’s precession according to Special Relativity’ ”**, *American Journal of Physics* **55**, 758 (1987).
- [58] R. Nedvěd, *Toth–Maatian Review* **5**, 2459 (1986), como citado em [57].
- [59] J.M. Saca, **Relativistic precession of the orbital perihelion revisited**, *Il Nuovo Cimento* **110B**, 17 (1995).
- [60] M.G. Bowler, **Gravitation and Relativity**, (Pergamon Press, N.Y., 1976)
- [61] P. Wolf e G. Petit, **Relativistic theory for clock synchronization and the realization of geocentric coordinate times**, *Astronomy and Astrophysics* **304**, 653 (1995).
- [62] P. Bretagnon, *Astronomy and Astrophysics* **114**, 278 (1982), como citado em [47].
- [63] M.H. Soffel, **Relativity in Astrometry, Celestial Mechanics and Geodesics**, Caps.1,4 (Springer-Verlag, 1989), como citado em [47].
- [64] S. Weinberg, **Newtonianism and today’s physics** em *Three hundred years of Gravitation* (ed. by S. Hawking and W. Israel) (Cambridge U.P., N.Y, 1987).
-
-